مبانی دیجیتال

مطالبی که در اختیار شما قرار گرفته است برگرفته از سری جزواتی است که در دانشکده فیزیک طی سالهای گذشته در مبحث دیجیتال تدریس شده است.امید است با خواندن آن و حل مسایل انتهای فصل تسلط خوبی بر مفاهیم پیدا کنید.

موفق باشید

نظری

۹۳/۱۰/۰۱

"مقدمه‌ای بر اصول مدارهای منطقی"

ـ مقدمه :

اساس کار کامپیوتر دیجیتال را انجام عملیات منطقی تشکیل می‌دهد . کامپیوتر می‌تواند دستورات متغیری که با علامات باینری " 0 " و " 1 " مشخص‌شده دنبال کند . ماشینهای حسابگر دستی که همگی دیده‌اید ، اعمال محاسباتی ساده مانند جمع و تفریق را انجام می‌دهند . بدین ترتیب که وقتی دوعدد به ماشین داده می‌شود ، اپراتور (کسی که با دستگاه کارمی‌کند) عمل کنترل راکه باید روی آن دوعدد انجام گیرد به ماشین می‌دهد . به عبارت دیگر اپراتور برای ماشین یك استدلال منطقی رافراهم می‌آورد (مانند جمع یاتفریق دو عدد) . درکامپیوتر اعمال کنترل درداخل خودش ساخته شده ، روابط اعداد واعمالی که باید انجام شود ، بوسیله برنامه برای کامپیوتر تجویز می‌شود . همچنین کامپیوتر می‌تواند بوسیله وضعیت و حالات گوناگون ، بیانات منطقی که به آن حکم شده است ، تصمیم بگیرد . به عبارت دیگر کامپیوتر بطور اتوماتیك می‌تواند پاسخهای صحیح به وضعیتهای متغیر بدهد . همه اینها باکاربرد منطق کامل شده است .

ـ منطق " Logic "

منطق غالبا" علم استدلال تعریف شده است ولی تعریف مناسب ترآن رامی‌توان چنین بیان کرد که منطق علم استنتاج منحصر بفرد از مفروضات داده شده است یاعلم نتیجه گیری ضروری است . زیرا آن (منطق) توصیف کننده عبارتی است که نتیجه‌ای از بیانات دیگراست . قوانین اصولی Logic آن وقایعی راکه درآنها استنتاج صحیح یا استدلال ممکن است انجام گیرد ، مرتب و فهرست می‌کند . مثالهای زیر این تعاریف رابهتر تفهیم خواهندکرد .

مثال : اگر این درست باشد که " همه پسران فوتبال دوست دارند " و اگر این درست باشد که " علی یك پسراست " آنگاه منطق حکم می‌کند که علی بایستی فوتبال دوست داشته باشد بعبارت دیگر بیان " علی فوتبال دوست دارد " استنتاجی است از عبارات فرض‌شده :

۱- همه پسران فوتبال دوست دارند - و ۲- علی یك پسراست .

منطق تضمینی نمی‌دهدکه همه پسران فوتبال دوست دارند ویاعلی یك پسر است ، بلکه منطق فرض می‌کند که چنین عباراتی صحیح است و نتیجه حاصله رابرمبنای این فرضیات (یعنی علی فوتبال دوست دارد) رادقیقا" تضمین می‌کند .

مثال : اگر این درست باشد که " همه علفها سبز هستند " و همچنین اگر این درست باشد که " باغچه علی علف دارد " آنگاه منطق تضمین می‌کندکه باغچه علی سبز است . عبارت ترسیم شده از استنتاج صحیح " بطور حقیقی مستدل " نامیده می‌شود به شرطی که :

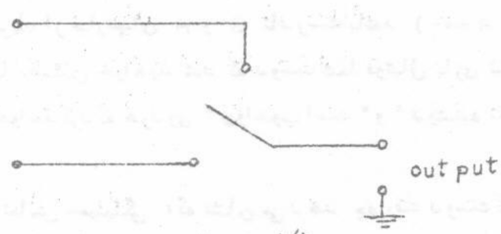
۱- یك استنتاج صحیح ، ترسیم شده باشد .

۲- استنتاج ، از عبارات صحیح ترسیم شده باشد .

— چگونه منطق در اساس رفتار کامپیوتر نقش پیدا می کند ؟

افرادی پس از مطالعه روی منطق دریافتند که از آن می توان در ماشین های محاسبه کننده استفاده کرد . بدین منظور لازم بود عبارات منطقی بصورت سمبلها و معادلات نوشته شود بعضی وسایل باید تدارك دیده شود که عبارات شفاهی را بصورت عبارات سمبولیك برگرداند . مقدماتی ترین این سمبلها ، سمبلهائی برای درست یا نادرست بودن است . در منطق همه عبارات یا درست هستند یا نادرست . جائی برای " ممکن است " یا " شاید " وجود ندارد . بنابراین برای بیان وضعیت های درست یا نادرست فقط به دو سمبل احتیاج است که می توانند سمبلهای باینری " ۰ " و " ۱ " باشد . اگر عبارتی صحیح باشد آن را برابر " ۱ " و اگر نادرست باشد برابر " ۰ " درنظر می گیریم بنابراین هرعبارتی که درمنطق بکار برده می شود یا معادل " ۱ " است و یا معادل " ۰ " . در مرحله بعدی ، برای هر عبارت یك سمبل ارائه می شود . برای مثال " خورشید می درخشد " را می توان با حرف S نشان داد بدین معنی که هرکجا S ظاهر شد ، فهمیده میشود که بجای " خورشید می درخشد " می نشیند اکنون اگر " خورشید می درخشد " صحیح باشد با $S = 1$ بیان می شود و اگر " خورشید می درخشد " صحیح نباشد یعنی خورشید نمی درخشد با $S = 0$ بیان می شود .

دو ارزش درستی " ۱ " و " ۰ " را به زبان الکترونیك برگردانده و آنها را بصورت دو سطح ولتاژ کاملاً متمایز از هم نشان می دهیم . یکی از سطوح ولتاژ درستی یا تاکید عبارت و سطح دیگر نفی عبارت را نشان می دهد . در شکل (۱) یك کلید دو وضعیتی باعث می شود که در خروجی مدار یکی از دو سطح ولتاژ V_1 یا V_2 را داشته باشیم .



شکل (۱)

V_1 و V_2 دو سطح ولتاژ مجزا از هم هستند که به دلخواه به سمبلهای باینری (۰) و (۱) تخصیص داده می شوند . و مقادیر V_1 و V_2 با توجه به طرح مدار انتخاب می شود . مثلاً

مثلا" می توان سطح صفرولت رابرای سمبل ($\emptyset$) (نفی عبارت) وسطح ۵+ ولت رابرای سمبل (۱) (تاکید عبارت) درنظر گرفت .

– جبر بول چیست ؟

بامطالعه آنچه که از نظر گذشت ، درسال ۱۸۵٤ یك ریاضی دان انگلیسی بنـــام جورج بول به این نتیجه رسید که می توان روابط منطقی رابصورت یك سری فرمولهای ریاضی درآورد و بدین ترتیب تجزیه و تحلیل روی عبارات توسط روابط ریاضی رادنبال کرد همانگونه که دربـــالا مطالعه شد وی ازسیستم باینری جهت انتخاب سمبلهای تاکید ونفی استفاده کرد وبراساس آن - روابطی رابدست آورد که توسط آن می شد درقلمرو منطق تمام پدیده ها رانتیجه گیری کرد . تمام این مطالب درمبحثی بنام جبربول قرار می گیرد که با جبر معمولی تشابهی ندارد .

درحالتهای قبل فقط روی درستی یا نادرستی یك عبارت مطالعه شد ولی وقتی چنــد عبارت درکنار هم قرار گیرند استنتاج بدست آمده به شکل دیگری بیان می شود . اکنون چنــد عمل منطقی و چگونگی بیان آن بوسیله جبر بول را مطالعه می کنیم .

– عمل منطقی AND

برای مثال دوستی ممکن است بشما بگوید که اگر و فقط اگر هوا خوب باشد " و "او - تعطیل باشد دوشنبه فوتبال بازی خواهد کرد . خوب اکنون استنتاج شما چیست ؟ شمـــا درمی یابید دوستتان در صورتی فوتبال بازی خواهد کرد که :

۱- هوا خوب باشد . ۲- دوشنبه تعطیل باشد

حالا بیائید بجای " هواخوب است " A و بجای "او دوشنبه تعطیلی دارد " B رابگذاریم . نتیجه راهم که او" بازی خواهد کرد " با X نشان می دهیم . اگر A صحیح باشد ($A=1$) "و" اگر B درست باشد ($B = 1$) شما درخواهید یافت که دوست شما بازی خواهد کرد یعنی $X = 1$.

چنانکه هریك ازعبارتهای A و B نادرست باشد ($A=0$ یا $B=0$) ویاهردو نادرست باشد شما مطمئین خواهید شد که دوست شما فوتبال بازی نخواهد کرد ($X=0$) . او فقط وقتی بازی خواهد کرد که هردوی "هواخوب است " و " دوشنبه تعطیلی دارد " درســت باشد .

بنابراین نمایش سمبلیلکی ، که نشان می دهد چه وقت دوست شما بازی خواهد کرد و درچه صورت بازی نخواهد کرد بصورت زیر است .

A	B	X
۰	۰	۰
۰	۱	۰
۱	۰	۰
۱	۱	۱

شکل (۲)

جدول ، نمایش این واقعیت است که فقط در صورتی او فوتبال بازی می کند ($X = 1$) که فقط و فقط A و B هردو صحیح باشند . در جبر بول رابطه منطقی بین عبارات A و B و استنتاج X رابصورت $A \cdot B = X$ نشان می دهند . توجه اینکه ، برای A و B فقط چهار ترکیب وجود دارد که در جدول فوق مشاهده گردید . این جدول را جدول صحت می گویند .

— عمل منطقی OR

اکنون فرض کنید دوست شما از نوع اشخاص بی پرواست و دوشنبه اگر " هوا خوب باشد " یا " او آنروز تعطیلی داشته باشد " فوتبال بازی خواهد کرد . به بیان دیگر هریك از دو عبارت و یا هردو عبارت که برقرار باشند دوست شما فوتبال بازی خواهد کرد . درچنین حالتی درستی A یا درستی B ویا هردو مشخص می کند که او بازی خواهد کرد . بنابراین جدول صحت برای این حالت به صورت زیر است

A	B	X
۰	۰	۰
۰	۱	۱
۱	۰	۱
۱	۱	۱

شکل (۳)

دراین حالت رابطه منطقی بین A و B واستنتاج X بصورت زیر میباشد .

$$(I) \qquad A + B = X$$

علامت $+$ یك تفکیك منطقی را تعریف می کند . این سمبل منطقی کاملا " باعلامت باضافه در حساب فرق داشته و صرفا " عمل منطقی OR را شامل میشود . رابطه منطقی (I) را "یا" منطقی گویند .

— عمل منطقی نفی « NOT »

طبق تعریف $\bar{A}$ مخالف A یا معکوس A است . اگر A درست باشد آنگاه $\bar{A}$ باید نادرست باشد و بالعکس . رابطه منطقی بین A و $\bar{A}$ درجدول زیر نشان داده شده است .

A	$\bar{A}$
۰	۱
۱	۰

$\bar{A}$ همیشه عکس A بوده ونفی A یا A نات (NOT A) خوانده میشود .

در جبر بول سه رابطه منطقی AND (و) ، OR (یا) و NOT (نفی) روابط اساسی می‌باشند وبه کمک سه رابطه اساسی می‌توان روابط پیچیده تری رابیان داشت .

مثال : جدولی ترتیب دهید تا رابطه منطقی ، رابطه $f(A,B,C) = A \cdot B + \bar{C}$ رانشان دهد . جدول مانند شکل (۵) رسم کرده ، تمام ترکیبات ممکن برای A و B و C رادرآن قرار میدهیم (تعداد حالات ممکنه A ، B و C نسبت به هم برابر $۸ = ۲^{۳}$ می‌باشد) . وسپس قدم به قدم تابع f رامی‌سازیم :

A	B	C	AB	$\bar{C}$	f
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1

شکل (۵)

— قوانین جبر بولی

در جبر بول برای محاسبات قوانینی وجود دارد که درزیر ذکر می‌گردد . اگر چه این قوانین ساده هستند ولی در تعیین روابط بطریق جبر بول موارد استعمال زیادی دارند . در جبر بول فرض اصلی براین است که متغیر باینری است . بطوریکه اگر X یك متغیر باینری باشد چنانچه $X \neq ۰$ باشد حتما" $X = ۱$ راخواهیم داشت و اگر $X \neq ۱$ باشد حتما" $X = ۰$ خواهد بود وحالتی دیگر برای آن متصور نیست . این دو مقدار (۰ و ۱) به "مقادیر صحت" (Truth Value) موسوم هستند . اکنون قوانین جبر بول رابیان می‌کنیم :

۱- اولین قانونی که کاملا" با جبر معمولی تفاوت دارد به شکل معادلات زیر نمایش داده می‌شود :

$$X + X = X$$
$$X \cdot X = X$$

این معادلات نشان دهنده عمل OR و AND برروی یك متغیر است . این معادلات را می توان به طریق استدلال منطقی اثبات نمود . روش دیگری که برای اثبات روابط جبر بول وجود دارد . دادن مقادیر ($\emptyset$) و (۱) به متغیرها وبرای تمام ترکیبات ممکنه است . برای X مطابق آنچه گفته شد دو مقدار ($\emptyset$) و (۱) را می توان قائل شد .

اگر $X = \emptyset$ باشد دو رابطه بصورت

$$\begin{cases} \emptyset + \emptyset = \emptyset \\ \emptyset \cdot \emptyset = \emptyset \end{cases}$$

ودرحالت دیگر $X = 1$ دو رابطه بصورت

$$\begin{cases} 1 + 1 = 1 \\ 1 \cdot 1 = 1 \end{cases}$$

درخواهد آمد . بنابراین مشاهده می کنید که برای هردومقدار X دومعادله فوق صدق می کند .

۲ - قانون جابجائی : این قانون بیان می کند که درعمل OR و AND دومتغیر می توانند بجای یکدیگر بنشینند . به این معنی که اگر X و Y دومتغیر ماباشند می توانیم معادلات زیر رابنویسیم .

$$X + Y = Y + X$$

$$X \cdot Y = Y \cdot X$$

۳- قانون اتحاد : برای سه متغیر A و B و C این قانون بشکل زیر بیان می گردد :

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

٤- قانون توزیع :

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$$

این قانون نشان می دهد که بین علائم AND و OR در روابط بالا حالت توزیعی برقرار است .

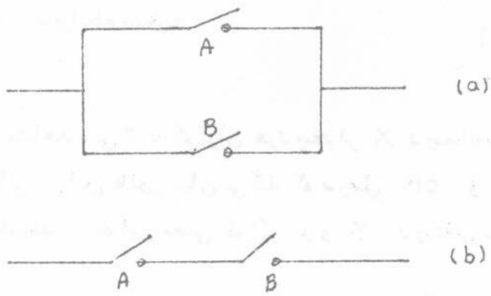
٥- قانون متمم :

$$A + \overline{A} = 1$$

$$A \cdot \overline{A} = 0$$

اثبات این روابط به کمك جدول صحت ونیز از طریق نمایش آنها بوسیله کلید های الکتریکی امکان دارد . ما در اینجا روش دوم را برمی گزینیم .

در اشکال مختلف ، کلید هامتناسب با وضعیتی که داشته باشند می توانند بیان کننده عمل منطقی OR یا AND باشند . در اینجا $A = 1$ به معنی وصل کلید و $A = 0$ به معنی قطع کلید است . در شکل (a - ٦) زمانی جریان برقرار خواهد شد ($X = 1$) که یکی از کلید ها یا هردو بسته باشند .

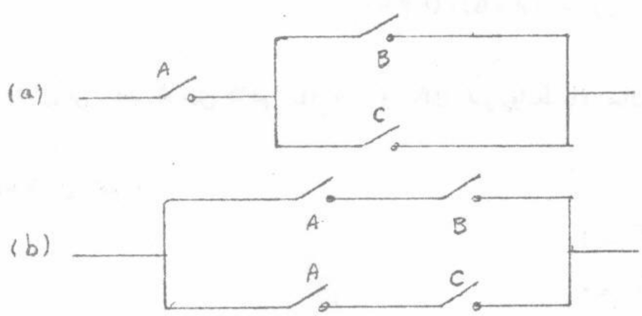


« شکل (٦) »

در شکل (b - ٦) زمانی جریان برقرار خواهد شد ، ($X = 1$) که هردو کلید بطور همزمان بسته باشند ($A = 1$ و $B = 1$) ، بنابراین چنین نتیجه می گیریم که شکل (٦) مبین عمل منطقی OR ونیز عمل منطقی AND است . اکنون می توان به کمك این روش ، معادلات جبربول رابراحتی اثبات نمود .

مثال ۱ : ثابت کنید : $A \cdot (B + C) = A \cdot B + AC$

به کمك روش سوئیچ های الکتریکی طرف چپ رابطه را ترسیم می کنیم :



« شکل (٧) »

تاوقتی A بسته نباشد هرچند B و C هم بسته باشند جریان برقرار نخواهد شد . (a - ۷)

اگر مدار را به صورت شکل (b - ۷) تغییر دهیم حال رابطه منطقی متناسب با این شکل را می نویسیم : مدار از دو شاخه موازی تشکیل شده یک شاخه نشان دهنده $A.B$ و شاخه دیگر بیان کننده $A.C$ می باشد و در کل چون بطور موازی با هم قرار گرفته‌اند رابطه نشان دهنده عمل کل مدار بصورت : $(AB) + (AC)$ خواهد بود .

مثال ۲ : ثابت کنید : $\overline{A}.A = 0$

اگر A را بصورت یک کلید بسته نشان دهیم $\overline{A}$ بصورت یک کلید باز خواهد بود چون عمل AND انجام شده پس دو کلید باید سری قرار گیرند . مشاهده می کنید که هیچگاه جریانی برقــــرار نخواهد شد .

بنابراین $A.\overline{A} = 0$

شکل (۸)

۶- قانون دمورگان : این قانون در مورد نفی کردن روابط بیان می شود مثل :

$\overline{X} = \overline{A+B+C}$

برطبق این قانون برای بدست آوردن نفی هرتابعی باید :

الف) هریک از متغیرها را نفی (NOT) کرد .

ب) عمل OR را به AND و عمل AND را به OR تبدیل کرد .

مثال ۱ : نفی تابع $X = A+B$ را بدست آورید

حل : برای بدست آوردن $\overline{(A+B)}$ باید متغیرهای A و B را نفی کنیم و علامت OR را به AND تبدیل نمائیم بنابراین داریم

$$\overline{X} = \overline{(A+B)} = \overline{A}\cdot\overline{B}$$

مثال ۲ : نفی تابع $X = A.B$ را بدست آورید

حل :

$$\overline{X} = \overline{A\cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

قانون دمورگان را می توان از طریق مقدار دادن به متغیرها وتشکیل جدول صحت برای توابع، اثبات نمود .

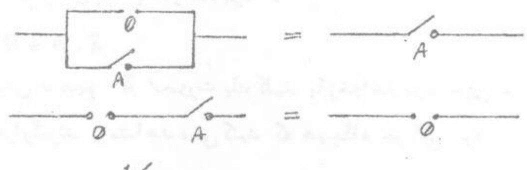
۷- قانون عینیّت : هرگاه روی دو متغیر یکسان عمل OR و AND انجام گیرد ، نتیجه برابر همان متغیر خواهد بود :

$$A + A = A$$

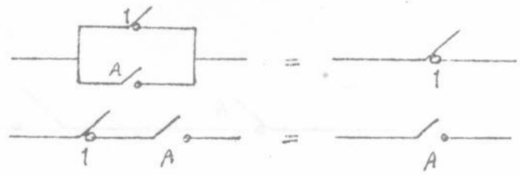
$$A \cdot A = A$$

۸- روابط زیر همواره صادق هستند :

$$\begin{cases} 0 + A = A \\ 0 \cdot A = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 1 + A = 1 \\ 1 \cdot A = A \end{cases}$$



نتیجه ۱ : باتوجه به آنچه در ردیف ۸ بیان شد ($1 \cdot A = A$) وبااستفاده ازقانون توزیع روابط زیر حاصل می‌شوند .

1) $A + AB = A \cdot 1 + A \cdot B = A(B+1)$

چون $B + 1 = 1$ بنابراین : « $A + AB = A \cdot 1 = A$ »

2) $A \cdot (A+B) = (AA) + (AB) = A + AB = A$

« $A \cdot (A+B) = A$ »

ـ ساده کردن عبارات منطقی به کمك قوانین جبر بول :

در جبر معمولی ، عبارات بزرگ و پیچیده رابه کمك اتحادها و روابط اثبات شده ، ساده می‌کردیم . درجبر بول هم به کمك قوانینی که دربالا ذکر شد روابط منطقی پیچیـــــــده رامی توان به ساده ترین شکل آن ، بیان کرد .

مثال ۱ : عبارت $A(\bar{A} + B)$ راساده کنید .

طبق قانون توزیع: $A \cdot (\bar{A} + B) = A\bar{A} + AB$

طبق قانون متمم و قانون هشتم $= 0 + AB = AB$

مثال ۲ : نفی تابع Y رابدست آورده آنراساده کنید .

$$Y = (AB + C)(BC)$$

طبق قانون دمورگان می توان نوشت :

$$\overline{Y} = \overline{[(AB+C)(BC)]}$$

$$= (\overline{AB+C}) + (\overline{BC})$$

$$= [(\overline{AB}) \cdot \overline{C}] + (\overline{B} + \overline{C})$$

$$= [(\overline{A} + \overline{B}) \cdot \overline{C}] + \overline{B} + \overline{C}$$

طبق قانون توزیع :

$$= (\overline{A}\overline{C} + \overline{C}) + (\overline{B}\,\overline{C} + \overline{B}) = \overline{C} + \overline{B}$$

مثال ۳ : عبارت $A\overline{B} + AB + \overline{A}B$ راساده کنید .

$$A\overline{B} + AB + \overline{A}B = [A \cdot 1] + \overline{A}B = A + \overline{A}B$$

$$= (A + \overline{A})(A + B) = A + B$$

ـــ فرم قانونی یا استاندارد عبارت بول :

دراین قسمت روش کلی تجزیه وتحلیل در توابع بول و هدف از ساده کردن آنها رابررسی می‌کنیم . قبلاً به اصطلاحات زیر که مورد نیاز است توجه کنید :

۱- به هریك از متغیرها یانفی آنها حرف می‌گوئیم مانند A ، $\overline{A}$ ، B ، $\overline{B}$ و ... .

۲- عبارت حاصلضرب : ترکیب حروف که باعمل کننده AND بهم مربوط شده‌اند مانند : (ABC ، $A\overline{B}D$ و ...) راعبارات حاصلضرب می‌گوئیم .

دراینجا شمارابه این نکته توجه می‌دهیم که وقتی بین چند حرف رابطه منطقی AND برقــرار است . از گذاشتن سمبل عملیاتی AND خودداری می‌شود (چنان که تاکنون نیز دربعضی موارد این سمبل راحذف کرده‌ایم) .

۳- عبارت مجموع : وقتی یك سری حروف بوسیله عمل کننده OR بهم مربوط شده باشند تشکیل عبارت حاصل جمع یا عبارت مجموع رامی‌دهند مانند : $A+\overline{B}$ و $A + C + \overline{D}$ و ... .

٤- عبارت نرمال : همان عبارت حاصلضرب یا عبارت مجموع است که درآن هیچ متغیری

بیش از یك بار ظاهر نمی‌شود . به بیان دیگر فرم نرمال بهترین شکل ممکن از نظر نداشتن متغیرهای زائد است چون تکرار هر متغیر دریك عبارت یکی از چهار حالت زیر را دارد که قابل ساده‌شدن است .

$$A.A = A \quad ; \quad A+A = A \quad ; \quad A+\bar{A} = 1 \quad ; \quad A.\bar{A} = 0$$

لذا ظهور مکرر یك متغیر درعبارت مجوع یا حاصلضرب همیشه زائد است یامنتج به یك تابع مشکل می‌گردد . در جبر بول توابع رابرای اینکه به فرم استاندارد درآوریم از دو روش استفاده می‌شود . در روش اول ، توابع راطوری ساده می‌کنیم که درآخر بصورت عبارات مجموع درآیند . ودر روش - دوم توابع به گونه‌ای ساده می‌گردند که درآخربه صورت عبارات حاصلضرب درآیند .

الف) مجموع حاصلضرب ها :با مثالهائی که درزیر می‌آید . مطلب راروشن می‌کنیم :

مثال ۱ :

$$f(A,B,C,D) = (AC+B)(CD+\bar{D})$$

این یك تابع است که بصورت غیر استاندارد بیان شده است اگر $AC=x$ و $CD=y$ فرض‌شود تابع بصورت $f(A,B,C,D) = (x+B)(y+\bar{D})$ درمی‌آید . حال به کمك قوانین توزیع آنرا ساده می‌کنیم .

$$f(A,B,C,D) = (x+B)y + (x+B)\bar{D} = [xy+By]+[x\bar{D}+B\bar{D}]$$

بجای x و y مقدارش رامی‌گذاریم :

$$= ACCD + BCD + AC\bar{D} + B\bar{D}$$

$$= ACD + BCD + AC\bar{D} + B\bar{D}$$

مثال ۲ :فرم مجموع حاصلضربهای تابع زیر رابدست آورید .

$$f(A,B,C,D,E) = (\overline{AC}+\bar{D})(\overline{B+CE})$$

$$= [(\bar{A}+\bar{C})+\bar{D}][\bar{B}.(\bar{C}+\bar{E})]$$

$$= [[(\bar{A}+\bar{C})+\bar{D}].\bar{B}].(\bar{C}+\bar{E})$$

$$= (\bar{A}\bar{B}+\bar{B}\bar{C}+\bar{D}\bar{B})(\bar{C}+\bar{E})$$

$$= \bar{A}\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{B}\bar{E}+\bar{B}\bar{C}+\bar{B}\bar{C}\bar{E}+\bar{B}\bar{C}\bar{D}+\bar{B}\bar{D}\bar{E}$$

با حل این دو مثال به روش کلی تبدیل توابع بول به فرم حاصلضربها می توان پی بـــرد .
در دو مثال بالا مشاهده میشود که درهریك از حاصلضربها ، متغیرها تماماً شرکت ندارند .
مثلاً یکی بصورت $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ و دردیگری بشکل $\bar{B}C\bar{D}$ میباشد . چنانچه تابعی به فرم کلی
$f(A , B , C , D)$ داشته باشیم وتابع رابشکل مجموع حاصلضربها درآوریم بـــــه
گونه‌ای که درهرعبارت حاصلضرب چهار متغیر یا نفی آنها حتماً وجود داشته باشند . اینگونـــه
حاصلضربهارا عبارات کوچك (Min Terms) می گوئیم .
وقتی تابع f بصورت مجموع "مین ترم" بیان می شود آنرا فرم قانونی مجموع حاصلضربهامی گویند .
مثال ۳ : حاصل مثال ۱ رابه فرم قانونی مجموع مین ترمها بسط دهید .

$$f(A,B,C,D) = ACD + BCD + AC\bar{D} + B\bar{D}$$

طبق قانون هشتم می توان درپك عبارت حاصلضرب "۱" اضافه نمود . $ACD = ACD \cdot 1$
و نیز می دانیم برای هر متغیر رابطه $A + \bar{A} = 1$ برقرار است وبرای هرمتغیر می توان نوشت :
$A + A = A$

باتوجه به این روابط می توانیم تابع f راچنین بنویسیم :

$$f(A,B,C,D) = ACD(B+\bar{B}) + BCD(A+\bar{A}) + AC\bar{D}(B+\bar{B}) + B\bar{D}(A+\bar{A})(C+\bar{C})$$

$$= ABCD + A\bar{B}CD + \bar{A}BCD + ABC\bar{D} + A\bar{B}C\bar{D} + [AB\bar{D} + \bar{A}B\bar{D}](C+\bar{C})$$

$$f(A,B,C,D) = ABCD + A\bar{B}CD + \bar{A}BCD + ABC\bar{D} + A\bar{B}CD + AB\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}BC\bar{D}$$

ب) حاصلضرب مجموعها : به هرجمله مجموع در حاصلضرب مجموعها عبارت بـــزرگ
(Max Term) گویند درصورتیکه به شکل قانونی نوشته شود .
مثال : عبارت زیر رابصورت حاصلضرب مجموع بنویسید :

$$f(A,B,C,D) = A + C + B\bar{D}$$

$$= A + (C + \bar{B}\bar{D}) = A + [(C+\bar{B})(C+\bar{D})]$$

$$= (A+C+\bar{B})(A+C+\bar{D})$$

جواب مساله در اینجا حاصل شده ولی فرم قانونی خود را ندارد . حال برای حصول فرم قانونی چنین می نویسیم :

$$f(A,B,C,D) = [(A+C+\overline{B}) + D\overline{D}][(A+C+\overline{D}) + B\overline{B}]$$

$$= (A+C+\overline{B}+D)(A+C+\overline{B}+\overline{D})(A+C+\overline{D}+B)$$

$$\cdot(A+C+\overline{D}+\overline{B})$$

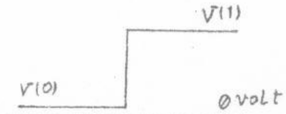
$$f(A,B,C,D) = (A+\overline{B}+C+D)(A+\overline{B}+C+\overline{D})(A+B+C+\overline{D})$$

"گیت ها با استفاده از ترانزیستور ، دیود ومقاومت"

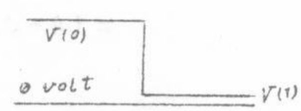
در وسائل فیزیکی نظیر رله وکلید خاصیتی وجود دارد که از آن برای بیان روابط منطقی و ساخت مداراتی که بتوان اعمال OR ، AND و NOT را انجام دهد .استفاده میشود . این خاصیت را خاصیت کلید زنی (Switching) می نامند . درساختمان سیستم های دیجیتالی عمل کلید زنی اغلب به وسیله مدارات الکترونیکی انجام می گیرد . یک سیستم دیجیتالی از مدارهای مختلفی تشکیل شده که می توان آنها را به قسمتهای کوچکترکه هرکدام یك عمل منطقی راانجام می دهد تقسیم کرد . به این اجزای تشکیل دهنده سیستم های دیجیتالی گیت (Gate دروازه) می گویند . و ما دراین بخش به چگونگی ساخت مدارات الکترونیکی گیت هامی پردازیم که هرکدام بیان کننده یك رابطه منطقی است .

ـ سیستم های منطقی :

متغیرها در روابط منطقی دارای دومقدار (0 و 1) می باشند . درمثالهای قبل دیدیم که از خاصیت کلید زنی که دارای دوحالت متمایز است ،برای بیان دومقدار (0) و(1) استفاده کردیم . برای ساختن یك مدار الکترونیکی که یك عمل منطقی راانجام می دهد برای نمایش مقادیر صفر ویك از دو طراز ولتاژ استفاده می شود . بدین معنی که مثلا" ولتاژ صفر ولت نمایش دهنده مقدار "0 "وولتاژ 5+ ولت نشاندهنده مقدار (1) فرض میشود . بطور کلی دریك مدار منطقی طرازی (Level — Logic)هرکدام از مقادیر "0 "و"1" بوسیله یکی از دو طراز ولتاژمختلف مشخص میشود . چنانچه مطابق شکل (۹) ولتاژمثبت تر را طراز (1) ودیگری راطراز (0) درنظر می گیریم سیستم راسیستم منطقی مثبت (positive — Logic) گویند . ازطرف دیگر دریك سیستم منطقی منفی



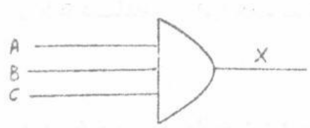
شکل (۹) و(۱۰)



ولتاژ منفی تر را حالت (۱) وولتاژ مثبت تر را حالت (۰) د رنظر می گیرند مطابق شکل (۱۰) .
باید تاکید کرد که مقادیر د وطراز ولتاژ ، حتماً نباید یك مقدار ثابت و د قیق باشد .
مثلاً د رحالت (۰) لازم نیست ولتاژ د قیقاً صفر باشد می توان ولتاژ طراز (۰) رام قداری حد ود ولتاژ صفر د رنظر گرفت ، چون د ر م د ارات الکترونیکی که بوسیله د یود یا ترانزیستور برای انجام روابط منطقی ساخته می شوند ، اجزاء تشکیل د هنده مدار (برای مثال د یود با $V_\gamma = 0.6^V$) اید ه آل نیستند وپارامترهای فیزیکی آنها ازیك نمونه به نمونه د یگر تفاوت داشته و تابع د رجه حرارت می باشند . بعداً خواهید د ید که برای ساخت چنین مد ارهائی از د یود و ترانزیستور استفاده خواهد شد وهمانطورکه می د انید V_γ و ولتاژ اشباع ، V_{CE} د ر ترانزیستورها ، د قیقاً باهم برابر نیستند . بعلاوه سیگنالهای ناخواسته (نویز) ممکن است وارد مدار شود . به این د لایل طرازهای د یجیتال د قیقاً مشخص نمی شود بلکه هرحالت صفر یا یك بوسیله یك باند ولتاژ (رد یف ولتاژ) د رحد ود طراز مورد نظر ، مشخص می شود .
مثلاً طراز ولتاژ را د قیقاً ۰ یا صفر ولت مشخص نمی کند . بلکه طراز ولتاژ مثبت رابا (۱ ولت ± ۴ ولت) وطراز ولتاژ پائین رابا (0.2 ولت ± 0.2 ولت) مشخص می کنند .

- گیت OR (یا) :

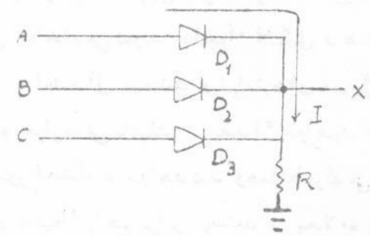
یك گیت OR د ارای د ویا چند ورود ی ویك خروجی است و طبق تعریف زیر عمل می نماید .
خروجی این گیت وقتی د رحالت (۰) است که تمام ورود یهای آن د رحالت (۰) باشند و خروجی وقتی د ر حالت (۱) است که یکی یا چند ورود ی A و B و . . . د رحالت (۱) باشند . بد یهی است که هریك از ورود یها می توانند د ومقدار ممکن (۰) یا (۱) را داشته باشند . سمبل استاندارد گیت OR ، جدول صحت وعبارت بول آن برای یك گیت OR با سه ورود ی ملاحظه می شود .



$X = A + B + C$

A	B	C	X
٠	٠	٠	٠
٠	٠	۱	۱
٠	۱	٠	۱
٠	۱	۱	۱
۱	٠	٠	۱
۱	٠	۱	۱
۱	۱	٠	۱
۱	۱	۱	۱

حال می پردازیم به مطالعه یك مدار الکترونیکی که چگونه بوسیله دیود ومقاومت یـــك مدار منطقی OR تشکیل می شود ، به این مدار ، سیستم منطقی با دیود می گویند . درزیریك نمونه ازاین نوع مدار نشان داده شده است که درسیستم منطقی مثبت عمل می کند .



« شکل (۱۱)

همانطور که قبلاً اشاره شد چون درسیستم منطقی مثبت کار می کنیم ولتاژ مثبت ترمربوط به حالت (۱) است بنابراین اگر مدار را ایده آل فرض کنیم .

$$V(0) = 0^V \quad ; \quad V(1) = 5^V$$

درحالتی که ورودیهای A و B و C درحالت (0) هستند یعنی به صفر ولت وصل هستند بین کاتد وآند هریك از دیودها ، اختلاف ولتاژ صفر ودیودها هیچیك هدایت نمی کننــــد . بنابراین جریانی درمقاومت R وجود نداشته ولتاژ نقطه X (خروجی) برابر صفر است . یعنی خروجی درحالت (0) است حالا چنانچه هریك از ورودیها راازصفر ولت به ۵+ ولت ببریم ، مثلاً ورودی A ، ۵+ ولت باشد دیود D_1 دربایاس موافق قرار گرفته شروع بـــه هدایت می کند . (شکل (۱۱) مسیر جریان از داخل D_1 به R و سپس به زمین می رود و مدار خود رامی بندد . رابطه ولتاژ رامی توان چنین نوشت :

ولتاژ دوسر دیود دربایاس موافق = V_γ ; $V_A = V_\gamma + RI$

درحالت ایده آل $V_\gamma = 0$ درنتیجه : $V_A = RI = 5^V$ یعنی افت ولتاژ R برابـر ۵ ولت میباشد . بامراجعه به شکل (۱۱) می توان دریافت که ولتاژ نقطه X برابر است با RI :

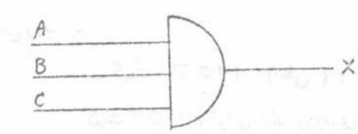
$$V_X = RI = +5^V$$

یعنی خروجی به حالت (۱) می رود . همین استدلال رامی توان بطور مشابه برای هریك از- ورودیهای دیگر انجام داد حال چنانچه دویاهرسه ورودی به ولتاژ ۵+ ولت وصل شونــــد ، متعاقباً دیودهای مربطه به بایاس موافق رفته و هدایت می کنند وباز هم چون افت ولتاژ دوسر دیود دربایاس موافق $V_\gamma = 0$ است ، ولتاژ نقطه X برابر ۵+ ولت شده یعنـــی خروجی درحالت (۱) قراردارد . همانطور که ملاحظه می کنید عمل مدار فوق باعمل منطقـــی

OR مطابقت دارد .

ـ گیت AND (و) :

گیت AND دارای دو یا بیش از دو ورودی است وطبق تعریف زیر عمل می نماید :
خروجی گیت AND ، (۱) است وقتی که فقط و فقط تمام ورودیهای آن درحالت (۱) باشد ودرغیر اینصورت خروجی آن صفراست . سمبل استاندارد ، جدول صحت و عبارت بول یك گیت AND ، باسه ورودی درزیر ملاحظه می شود .



$$X = A \cdot B \cdot C$$

A	B	C	X
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

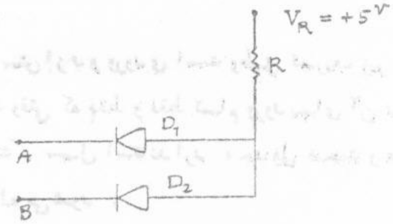
مدار منطقی گیت AND که بادیود ساخته شده درزیر آمده است . اکنون به شرح چگونگی کار آن می پردازیم :

این یك مدار منطقی AND درسیستم[1] مثبت است با دوورودی . می دانیم که در سیستم منطقی مثبت $V(0) = 0^V$ و $V(1) = +5^V$ هرگاه A و B درحالت صفرقرار گیرند یعنی : $V_A = V_B = V(0) = 0$

دیودهای D_1 و D_2 هردو دربایاس موافق قرار گرفته وهدایت می کنند درنتیجه ولتاژ خروجی برابر V_γ دیود خواهدبود : $V_X = V_\gamma$ وچون V_γ صفر فرض می شود (مدار ایده آل فرض شده) پس $V_X = 0$ یا $V_X = V(0)$ یعنی خروجی درحالت (0) است . چنانچه فقط یکی از ورودیها به حالت (۱) برود ، یعنی $V_A = V(1)$ یا $V_B = V(1)$ درهریك از دوحالت ، یکی از دیودها هدایت کرده و دیگری دربایاس مخالف قرار خواهدگرفت درچنین حالتی ولتاژخروجی بازهم برابر V_γ خواهدشد $V_X = 0$ یا $V_X = V(0)$ پس خروجی هنوز درحالت (0) است . حالا چنانچه هردو ورودی درحالت (۱) قرار گیرند یعنی $V_A = V_B = V(1) = +5^V$ دراین حالت هردو دیود D_1 و D_2 درحالت قطع خواهندبود . درنتیجه از مقاومت R جریانی عبور نکرده افت ولتاژ روی آن صفر خواهدبود .

1ـ منطقی

$$V_X = V_R - RI \quad ; \quad RI = 0 \longrightarrow V_X = V_R = +5^V$$

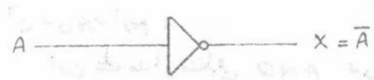


« شکل (۱۲) »

نتیجه می شود که $V_X = V$ (۱) یعنی فقط در این حالت است که خروجی به حالت (۱) می رود .

ـ گیت NOT (نفی) :

گیت NOT دارای یک ورودی ویک خروجی است و عمل منطقی نفی کردن راطبق تعریف زیرانجام میدهد :خروجی یک مدار نفی وقتی حالت (۱) رادارا خواهدبود که ورودی آن در حالت (۰) باشد و چنانچه ورودی درحالت (۱) باشد خروجی حالت (۰) رادارا خواهد شد . سمبل استاندارد گیت منطقی NOT ،عبارت بول و جدول صحت مربوطه درزیر مشخص می شود :

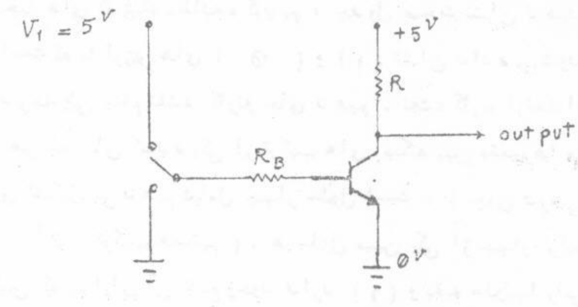


A	$X = \overline{A}$
0	1
1	0

باتوجه به شکل (۱۳) عمل منطقی NOT رامی توان به شکل استاندارد یک دایره کوچک که در نقطه‌ای که خط سیگنال ، سمبل گیت منطقی راقطع می کند ، نشان داد .

« شکل (۱۳) »

مدار ترانزیستوری شکل (۱۴) عمل NOT رادرسیستم منطقی مثبت انجام می دهد .



« شکل (۱۴) »

چنانچه ورودی A به صفر ولت وصل شود (درحالت « 0 » قرارگیرد) ولتاژ بین بیس ـ امیتر صفر بوده ، ترانزیستور درحالت قطع می باشد در نتیجه ولتاژ روی کلکتور ترانزیستور به علت عدم جریان در R برابر ۵+ ولت است یعنی خروجی در حالت (۱) واقع شده است . حالا چنانچه ورودی رابه ۵+ ولت ، (۱) V وصل کنیم ، ولتاژ مثبت از طریق R_B به بیس وارد شده که چنانچه R_B رامناسب انتخاب کنیم ، ترانزیستور به اشباع خواهد رفت . دراین حالت ولتاژ نقطه X (کلکتور) برابر با $V_{sat.} \simeq 0.1^V$ می شود که تقریباً « صفر است یعنی خروجی به حالت (0) رفته است . بنابراین می بینید که هرگاه $V(A) = V(0)$ باشد $V_X = V(1)$ و هرگاه $V_A = V(1)$ ، $V_X = V(0)$ می شود . پس مدار فوق می تواند عمل منطقی NOT رادر سیستم منطقی مثبت انجام دهد .

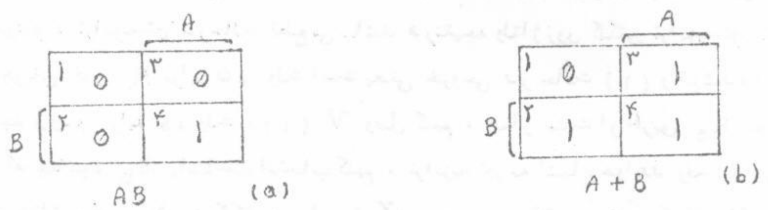
« نقشه کارنو »

روشهای جبری و قوانینی نظیر $AB + A\overline{B} = A$ جهت ساده کردن عبارات منطقی که تعداد متغیرهای آن زیاد است کاری طولانی می باشد . دراین قسمت روش نمایش توابع بول به کمك نقشه کارنو رابررسی می کنیم . نقشه کارنور درواقع شکل تغییر یافته جدول صحت است وبخصوص برای ساده کردن عبارات و طرح مدارات منطقی به ما کمك خواهد کرد . ابتدا جدول صحت برای دو متغیر رادرنظر بگیرید . برای مثال جدول صحت مربوط به روابط منطقی OR ، و AND در مورد دو متغیر بصورت زیر است :

A	B	AB
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

همانگونه که در بحث های گذشته مطالعه کردیم ، جدول صحت نشان دهنده یك رابطه منطقی بین دو متغیر است که با ارزش های (0) و (۱) نشان داده می شود . اکنون می خواهیم این ارزش ها را در جدولی بنام نقشه کارنو جای دهیم . نقشه کارنو از تعدادی سلول یاخانـــه تشکیل شده که هر یك بیان کننده یکی از ترکیب های ممکنه بین متغیرها می باشد . جدولـــی که برای مثال فوق تشکیل می دهیم شامل چهار سلول است . (چون در هر یك از جدولهـــا ، فقط دارای $2^2 = 4$ ترکیب هستیم) . هرسلول مبین یکی از چهار ترکیب ممکن است . در هر سلول برای ترکیبی که به ازای آن تابع وجود دارد (۱) و بقیه سلولها رامی توان خالی گذاشت ویابا (0) پرکرد . شکل تغییر یافته جدول صحت کهبصورت نقشه کارنو نشان داده شده است در زیر ملاحظه می گردد . شکل (۱۵)

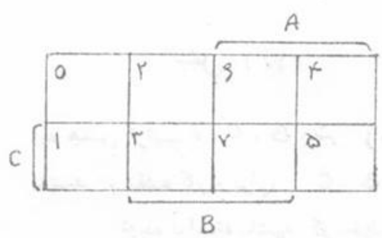


شکل (۱۵)

در جدولهای فوق هرسلول دارای یك معنی است . مثلاً سلول یك ، در این سلول A و B هیچیك وجود ندارند . ($B = 0$ و $A = 0$) وسلول ۲ ، B وجود دارد ولی A وجود ندارد ($A = 0$ و $B = 1$) سلول ۳ ، A وجود دارد ولی B وجود ندارد ($A = 1$ و $B = 0$) وبالاخره سلول ٤ نشان دهنده وجود هردو متغیر است ($A = B = 1$) . اکنون باتوجه بهارزش هریك از سلولها ، جدولهای ($A \cdot B$) و ($A + B$) رامیتوان درك کرد . همانگونه که ملاحظه می کنید AB زمانی وجود دارد ($A \cdot B = 1$) که هم A وجود داشته باشد وهم B .

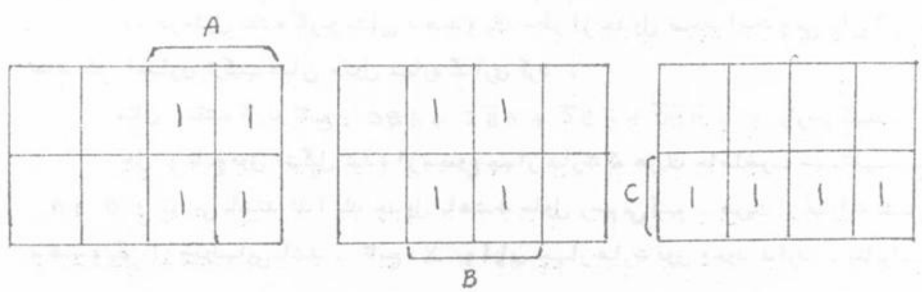
در نتیجه همانطور که درقسمت (a) نشان داده شده ، باید درسلول چهارم (۱) قـــرار گیرد وبقیه راباصفر پر کنیم . باهمین شیوه استدلال ، جدول قسمت (b) چنین بدســت می آید که در سلولهای ۲ و ۳ و ٤ ارزش (۱) را قرار میدهیم و سلول اول راباصفر پر می کنیم . مثال فوق درمورد دو متغیر بود . می توانیم تعداد متغیرها را افزایش دهیم بدیهی است بـــا افزایش متغیرها ، تعداد حالات ترکیبی ممکنه بیشتر شده ودرنتیجه نقشه کارنوی بزرگتر وبـــا سلولهای بیشتر خواهیم داشت . بطوریکهتعداد سلولهای لازم جهت نمایش یك جمله که تابع n متغیر است ، تعداد حالات ترکیبی ممکنه 2^n خواهد بود . زیرا هرترکیب به یك سلول احتیاج

دارد . مثال زیر طرز نمایش نقشه کارنو برای روابط AND و OR با سه متغیر A ، B و C را نشان می‌دهد . جدول صحت هریك را جهت یادآوری ذکر می‌کنیم تا از روی آن نقشه کارنو بهتر درك شود . چون سه متغیر داریم باید نقشه کارنو ، دارای هشت سلول باشد . در زیر یك نقشه کارنو که از هشت سلول تشکیل گردیده به نمایش گذاشته شده است . برای درك بهتر این مطلب که هر سلول نشان دهنده کدامیك از حالات ممکنه ترکیبی است .
آنها را برحسب ارزش اعتباری معادل هریك از اعداد باینری ABC موجود در جدول صحت شماره گذاری کرده‌ایم یعنی اعداد ۰ تا ۷ هریك نشان دهنده یکی از سلولها شده‌اند . بطور مثال سلولی که با عدد ۵ مشخص شده معادل عدد باینری 101 است و با مقایسه با شکل کلی $A \cdot B \cdot C$ در می‌یابیم که این سلول حالتی را نشان میدهد که در آن A و C وجود دارند و B وجود ندارد ($C = 1$ و $B = 0$ و $A = 1$)



A	B	C	A+B+C	A·B·C
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

برای اینکه از این به بعد در تشکیل نقشه کارنو دچار ابهام نشویم ، ذکر این مطلب لازم است که علامت گذاری که در اطراف نقشه کارنو می‌شود ، هریك نشان دهنده حوزه وجود یك متغیر را اعلان می‌کند . به عبارت دیگر نقشه کارنو فوق را برای هریك از متغیرهای A و B و C تفکیك کنیم ، چنین خواهیم داشت :



ملاحظه می‌کنید که سلولهایی که بوسیله آکولاد برای هریک از متغیرها مشخص می‌شوند حوزه - وجود (۱) آن متغیر را نشان میدهد . اکنون اگر بخواهیم نقشه کارنو را برای $A + B + C$ تشکیل دهیم ، می توانیم چنین استدلال کنیم که $A + B + C$ زمانی وجود دارد که حداقل یکی از متغیرها وجود داشته باشند . با این استدلال نقشه کارنو برای $A + B + C$ بدین صورت خواهد شد . شکل (۱۶)

			A	A
	0	1	1	1
C	1	1	1	1
		B	B	

$A + B + C$

شکل (۱۶)

			A	A
	0	0	0	0
C	0	0	1	0
		B	B	

$A \cdot B \cdot C$

شکل (۱۷)

وبه همین ترتیب ، $A \cdot B \cdot C$ زمانی وجود دارد که A ، B و C باهم وجود داشته باشند . نقشه کارنو برای $A \cdot B \cdot C$ در شکل (۱۷) آمده است .

توجه داشته باشید که سلولی که ارزش (۱) را دارا شده ، درحوزه وجود A و B و C می باشد . یابعبارت دیگر تنها سلولی است که در سه حوزه وجودی A و B و C مشترک است . با مراجعه به نقشه کارنوئی که درشکل آمد و سلولهای آنرا شماره گذاری کردیم ، چنانچه مقایسه‌ای صورت بگیرد ، درمی یابیم که سلول ۷ ارزش یك را داراشده واین خود مصداق این مطلب است که عدد باینری $A \cdot B \cdot C = 111$ میباشد .

نتیجه کلی : از مطالب فوق می توان چنین نتیجه گرفت :

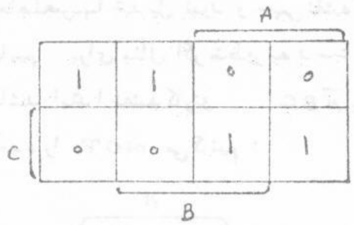
۱- نقشه کارنو شکل تغییر یافته جدول صحت است .

۲- هرسلول نقشه کارنو نشان دهنده یك سطر از جدول صحت است و می توان آنرا با عدد کد اعشاری ترکیب همان سلول شماره گذاری کرد .

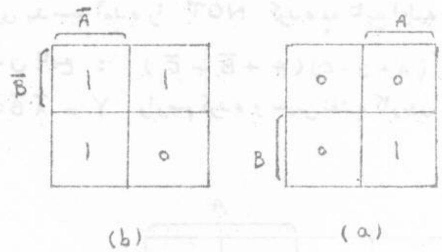
مثال : نقشه کارنو تابع : $X = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}C + ABC$ را رسم کنید .

حل : تابع فوق تشکیل شده از مجموع چهار عبارت که هریك حاصلضرب سه متغیر A و B و C می باشند لذا یك جدول با هشت سلول رسم می کنیم . هریك از عبارات نشان دهنده یکی از سلولهامی باشد . تابع X به ازای چهار عبارت فوق وجود دارد . بنابراین

سلول مربوط به هریک از عبارات را پیدا کرده ودرآن ارزش (۱) قرار می دهیم وبقیه سلولها ارزش (0) را دارا می شوند . شکل (۱۸)



شکل (۱۸)



شکل (۱۹)

مثال : نقشه کارنو $A\cdot B$ و $\overline{AB}$ راترسیم کنید .

حل : نقشه کارنو AB همانطور که درابتدای مبحث کارنو ذکر شد به صورت شکل (۱۹ – a) میباشد امادرمورد $\overline{A\cdot B}$ می توان برطبق قانون دمورگان چنین نوشت :
$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$ ، بنابراین درنقشه کارنو زمانی $\overline{A\cdot B}$ وجود دارد که $\overline{A}$ یا $\overline{B}$ وجود داشته باشند وبااین استدلال نقشه کارنو بصورت شکل (b) بدست می آیــد .
ازمقایسه شکل (۱۹) (a) و (b) چنین نتیجه می گیریم : اگر نقشه کارنوی یک تابع دردست باشد ، چنانچه سلولهائی که دارای ارزش (0) هستند جایشان رابه ارزش (۱) و برعکس سلولهائی که دارای ارزش (۱) هستند به (0) تبدیل شوند ، نقشه کارنوی بدست آمده مبین نفی تابع سابق است .

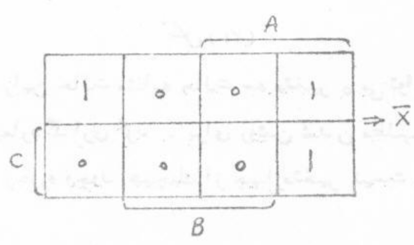
مثال : نقشه کارنوی $X = (A+B+C)(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C})$ رابدست آورید .

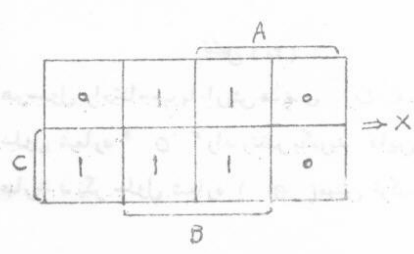
حل : طبق قانون دمورگان می توان نوشت :

$$\overline{X} = \overline{(A+B+C)(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C})}$$

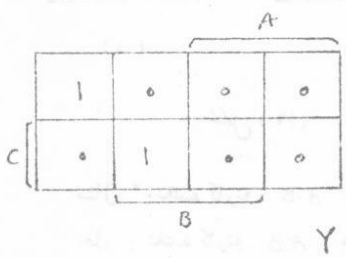
$$= \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C$$

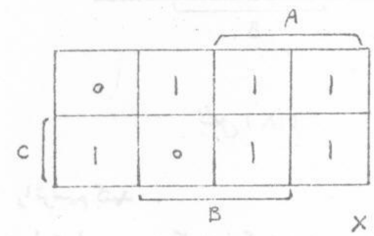
اکنون نقشه کارنو برای $\overline{X}$ و X راتشکیل میدهیم :





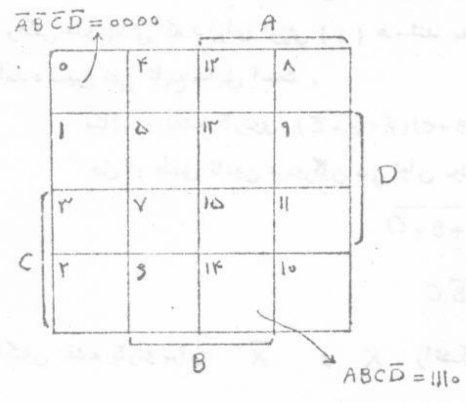
مثال فوق نشاندهنده این مطلب است که چنانچه تابعی بصورت حاصلضرب مجموع داده شود ، می توان برای بدست آوردن نقشه کارنو مربوط به آن ، بااستفاده از قضیه دمورگان آنرا به مجموع حاصلضربها تبدیل نمود و سپس نقشه کارنوی بدست آمده را NOT کرده به تابع اولیه دست یابیم . برای مثال اگر منظور به دست آوردن تابع : $X = (A+B+C)(A+\overline{B}+\overline{C})$ باشد ابتدا نقشه کارنو $Y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}BC$ رارسم کرده و سپس نقشه کارنوی بدست آمده را NOT می کنیم :



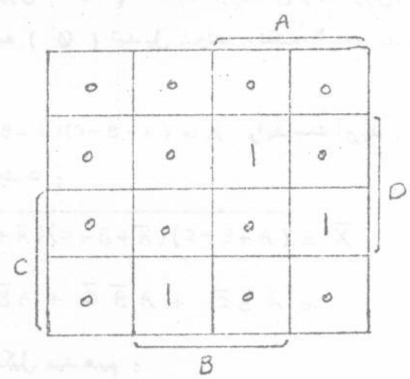


مثال : نقشه کارنو $X = AB\overline{C}D + A\overline{B}CD + \overline{A}BC\overline{D}$ رابدست آورید .

حل : دراین حالت تابع از چهار متغیر تشکیل شده است . نقشه کارنو برای چهار متغیر طبق رابطه 2^n باید دارای $2^4 = 16$ سلول باشد . ترتیب قرارگرفتن سلولها باتوجه به چهار متغیر A ، B ، C و D به صورت شکل (۲۰) درمی آید :



شکل (۲۰)



شکل (۲۱)

دراین حالت مشابه حالت سه متغیره می توان هرسلول رامتناسب با ارزش عددی ABCD شماره گذاری کرد . برای روشن شدن مطلب ، سلول شماره " 0 " رادرنظر بگیرید ، این سلول درحوزه وجود هیچیک از چهارمتغیر نیست به عبارت دیگر سلول شماره (0) مبین ترکیب

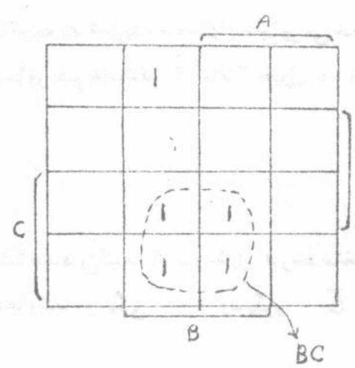
$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ که معادل عدد باینری (۰ ۰ ۰ ۰) است، میباشد، یاسلول شماره (۹) که بیان کننده ترکیب $A\bar{B}\bar{C}D = 1001$ می باشد. اکنون برای بدست آوردن تابع X، بایـــد درسلولهای $AB\bar{C}D = 1101 = 13_{(10)}$ و $A\bar{B}CD = 1011 = 11_{(10)}$ و $\bar{A}BC\bar{D} = 0110 = 6_{(10)}$ ارزش (۱) ودربقیه سلولها ارزش (0) قراردارد. مطابق شکل (۲۱)

مثال: نقشه کارنو تابع $X = \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}CD + ACD$ رارسم کنید.

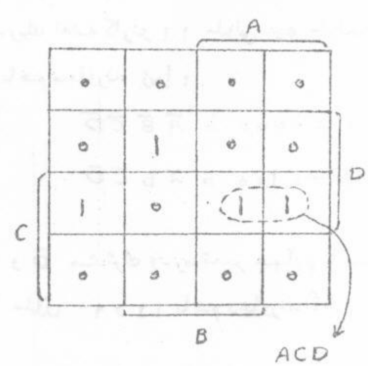
حل: نقشه کارنو با ۱۶ سلول را رسم می‌کنیم. در سلولهای مربط به $\bar{A}B\bar{C}D$ و $\bar{A}\bar{B}CD$، (۱) قرارمی‌دهیم. درمورد ACD می توان چنین گفت که این ترکیب مستقل از متغیر B می‌باشد، یعنی چه B باشد وچه نباشد ACD وجود دارد یـــا بعبارت دیگر ACD ساده شده عبارت $ABCD + A\bar{B}CD$ میباشد پس ترکیب ACD دوسلول رابه خود اختصاص می‌دهد. نقشه کارنو تابع X بصورت شکل (۲۲) خواهد بود.

مثال: نقشه کارنو $X = \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + BC$ رارسم کنید.

حل: $\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$، مشخص‌کننده یك سلول است ولی BC تمام سلولهائـــی راکه درآنها B و C وجود داشته باشند شامل می‌شود. همانگونه که درشکل (۲۳) - میبینید ترکیب BC از چهار سلول تشکیل شده که درتمام این سلولها B و C وجود دارند.



شکل (۲۳)



شکل (۲۲)

درد ومثال فوق بادقت در نقشه کارنو در می یابیم که دریك نقشه کارنو با ۱۶ سلول که با چهار متغیر رسم می‌شود. سلولهای مجاور باهم دارای متغیرهای مشترك هستند. مثلاً دوســلول مجاور هم فقط دریك متغیر باهم تفاوت دارند و درسه متغیر دیگر مشترك اند و یاچهـــــار سلول مجاور درد و متغیر مشترك هستند. یعنی همانگونه که در دو مثال فوق مشاهده‌کردیم جمله BC بیان کننده چهار سلول مجاور و جمله ACD بیان کننده دوسلول مجـــاور می‌باشند. نتیجه‌ای که دراینجا قابل ذکر است عبارتست از:

۱- در یک نقشه کارنو چهار متغیره حوزه وجود هر متغیر ، یک مجموعه با هشت سلول می باشد . مثلاً A نشان دهنده یک مجموعه هشت سلولی است .

۲- حوزه وجود جمله دو متغیره مانند AB عبارتست از یک مجموعه از سلولها که هم در حوزه A وهم در حوزه B وجود دارند که این تعداد برای نقشه کارنو ۱۶ سلولی ، چهار عدد می باشد .

۳- حوزه وجود یک جمله سه متغیره مانند ABC در کارنو ۱۶ سلولی ، از دو سلول مجاور هم تشکیل می شود .

۴- حوزه وجود یک جمله چهار متغیره مانند $ABCD$ فقط یک سلول است . یعنی بین چهار مجموعه A ، B ، C و D فقط یک سلول مشترک وجود دارد .

ـ سلولهای مجاور : دو سلول مجاور فقط در یک متغیر با هم اختلاف دارند . مانند سلولهای $\bar{A}B\bar{C}D$ و $\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$ که تفاوت آنها در دو متغیر B و $\bar{B}$ میباشد و در سه متغیر دیگر مشترک هستند . بعبارت دیگر اگر از یک سلول به سلول دیگر برویم وفقط یک متغیر عوض شود ، دو سلول را مجاور گوئیم . اکنون به نقشه کارنو که در شکل (۲۴) آمده توجه کنید :

با توجه به تعریف دو سلول مجاور می خواهیم ببینیم در یک نقشه کارنو ۱۶ سلولی چه سلولهائی مجاور هم هستند ؟ مثلاً سلول (۰) و (۴) با هم مجاورند زیرا :

$$۰ = 0000 = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$$

$$۴ = 0100 = \bar{A}B\bar{C}\bar{D}$$

مشاهده میکنید که دو سلول در سه متغیر $\bar{A}$ ، $\bar{C}$ و $\bar{D}$ مشترک ودر متغیر چهارم با هم متفاوتند (یکی B ودیگری $\bar{B}$ است) آیا سلول ۹ و ۱۱ با هم مجاورند ؟

			A	A	
	۰	۴	۱۲	۸	
	۱	۵	۱۳	۹	D
C	۳	۷	۱۵	۱۱	D
C	۲	۶	۱۴	۱۰	
		B	B		

شکل (۲۴)

بله زیرا : ۹ = ۱۰۰۱ = $A\bar{B}\bar{C}D$

۱۱ = ۱۰۱۱ = $A\bar{B}CD$

دوسلول در C و $\bar{C}$ اختلاف دارند . آیا سلول ۱۳ و ۷ مجاورند ؟ خیر ، زیرا :

۱۳ = ۱۱۰۱ = $AB\bar{C}D$ ؛ ۷ = ۰۱۱۱ = $\bar{A}BCD$

سلول ۷ و ۱۳ در دو متغیر متفاوتند . (C و $\bar{C}$ و همچنین A و $\bar{A}$) بنابراین مجاور نمی توانند باشند .

همچنین سلولهای ۰ و ۸ باهم مجاورند زیرا :

۸ = ۱۰۰۰ = $A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ ؛ ۰ = ۰۰۰۰ = $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$

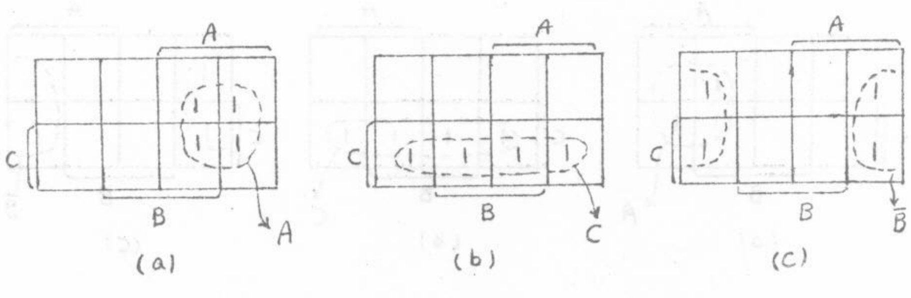
بنابراین باتوجه به مثالهای بالا حتماً لازم نیست که دوسلول بهم چسبیده باشند تا مجاور شوند . بلکه سلولهایی مانند (۰ و ۸) یا (۰ و ۲) یا (۸ و ۱۰) یا (۲ و ۱۰) نیز مجاورند زیرا تعریف دوسلول مجاور درآنها صدق می کند .

ــ ساده کردن توابع بول به کمک نقشه کارنو :

مهمترین خاصیت ترسیم نقشه کارنو برای یک تابع بول علاوه بر نمایش ترسیمی خود تابع، خلاصه کردن آن نیز میباشد . برای خلاصه کردن توابع به کمک نقشه کارنو ابتدا تمام جملات مربوط به یک تابع را درنقشه کارنو درج کرده و ، سپس باتوجه به نکات زیر آنها را در گروههای بزرگتر خلاصه می نمائیم .

الف : درصورتیکه نقشه کارنو برای سه متغیر باشد ، دراین حالت ما دارای هشت سلول هستیم .

۱- یک گروه از سلولهای چهار تائی مجاور یکدیگر را می توان به عنوان یک متغیر ساده کرد . شکل (۲۵)



شکل (۲۵)

بله زیرا :

$$9 = 1001 = A\bar{B}\bar{C}D$$

$$11 = 1011 = A\bar{B}CD$$

دوسلول در C و $\bar{C}$ اختلاف دارند . آیا سلول ۱۳ و ۷ مجاورند ؟ خیر ، زیرا :

$$7 = 0111 = \bar{A}BCD \qquad \text{و} \qquad 13 = 1101 = AB\bar{C}D$$

سلول ۷ و ۱۳ در دو متغیر متفاوتند . (C و $\bar{C}$ و همچنین A و $\bar{A}$) بنابراین مجاور نمی توانند باشند .

همچنین سلولهای ۵ و ۸ باهم مجاورند زیرا :

$$0 = 0000 = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} \qquad \text{و} \qquad 8 = 1000 = A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$$

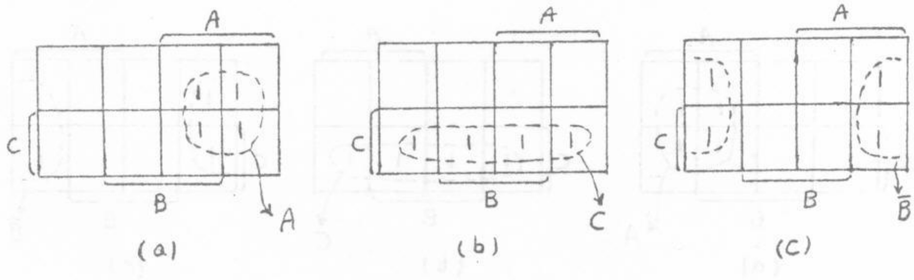
بنابراین باتوجه به مثالهای بالا حتماً لازم نیست که دوسلول بهم چسبیده باشند تامجاورشوند . بلکه سلولهایی مانند (۵ و۸) یا (۵ و ۲) یا (۸و ۱۰) یا (۲و۱۰) نیز مجاورند زیرا تعریف دوسلول مجاور درآنها صدق می کند .

ـ ساده کردن توابع بول به کمك نقشه کارنو :

مهمترین خاصیت ترسیم نقشه کارنو برای یك تابع بول علاوه بر نمایش ترسیمی خود تابع، خلاصه کردن آن نیزمیباشد . برای خلاصه کردن توابع به کمك نقشه‌کارنو ابتدا تمام جملات مربوط به یك تابع را درنقشه‌کارنو درج کرده و ، سپس باتوجه به نکات زیر آنها رادر گروههای بزرگتر خلاصه می نمائیم .

الف : درصورتیکه نقشه کارنو برای سه متغیر باشد ، دراین حالت ماداراى هشت سلول هستیم .

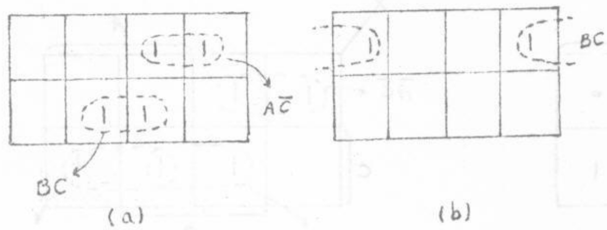
۱ـ یك گروه از سلولهای چهار تائی مجاور یکدیگر رامی توان به عنوان یك متغیر ساده کرد . شکل (۲۵)



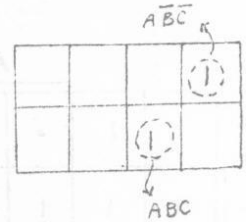
شکل (۲۵)

۲- دوسلول مجاور رامی توان به صورت حاصلضرب دومتغیر درنظر گرفت . شکل (۲۶)

۳- یک سلول منفرد نماینده یک جمله سه متغیره است . شکل (۲۷)



شکل (۲۶)



شکل (۲۷)

درقسمتهای مختلف شکل (۲۵) هرچهار سلول مشخص‌شده مجاور هم بوده ومی توان آنرا بایک متغیر نشان داد درقسمت a[1] چهار سلولی که ارزش "۱" رادارند مجاور هستند که بـا متغیر A بیان می‌شود آنهارانمی توان با B یا C نشان داد چون درچهار سلول مشخص شده B و C تغییر می کند وفقط A همواره وجود دارد یعنی می توان چنین نتیجه گرفت که :

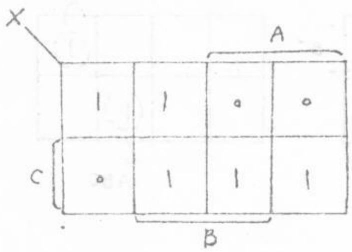
$$ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}C + A\overline{B}\overline{C} = A$$

درقسمت (b) هم به همین ترتیب چهارسلول مجاور هم در متغیر C مشترک ودر دومتغیر دیگر اختلاف دارند بنابراین این چهار سلول رامی توان با C نشان داد . درقسمت (C) چهارسلول گرچه درکنار هم قرار نگرفته‌اند ولی هرچهار سلول درخارج از حوزه وجودی B هستند بنابراین می توان آنرابا $\overline{B}$ نشان داد . درشکل (۲۶) درقسمت (a) چهـار سلول دارای ارزش "۱" بوده ولی آنها رانمی توان بایک متغیر نشان داد ولی هردو بدوی آنها خاصیت سلولهای مجاور رادارا بوده بنابراین همانگونه که مشخص‌شده دوسلول آنرابا BC ودوسلول دیگر با $A\overline{C}$ مشخص‌می‌شود ، مثلاً "دوسلول که با $A\overline{C}$ مشخص‌شده‌اند هردو در حوزه وجودی A و خارج از حوزه وجودی C قرار دارند . درحقیقت این دوسلول بیـن مجموعه A و مجموعه $\overline{C}$ مشترک هستند هرکدام ازاین مجموعه ها دارای چهار سلول هستند که در دوسلول مشترکند . این دوسلول رامی توان تقاطع دو مجموعه A و $\overline{C}$ درنظر گرفت کـه همان رابطه منطقی AND بین آنها برقرار است . ودرآخر هر سلول تنها (سلول منفـرد) که درمجاورت سلول دیگر نیست ناچاراً باید برای مشخص کردن آن از حداکثر متغیرها کـه دراینجا تعداد آنها سه است استفاده کرد . مثلاً "سلول ABC یا $A\overline{B}\overline{C}$ که هرکدام

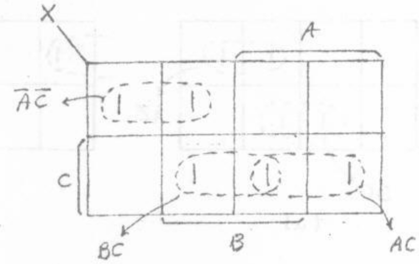
۱- (a)

مشخص‌کننده یك سلول است .

مثال : نقشه کارنو شکل (۲۸) را با ساده‌ترین عبارت بول ممکن بیان کنید .



شکل (۲۸)



شکل (۲۹)

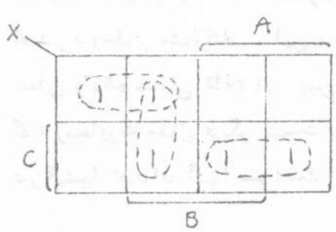
حل : برای نوشتن عبارت بول مربوط به نقشه فوق می توان جملات مختص به هرسلول راکنارهم قرار داد و رابطه منطقی OR رابین آنها برقرار کرد . مثلاً اگر منظور ساده ترین شکل رابطه بول نباشد می توان به ازای ۵ سلول که ارزش (۱) رادارا می باشند ، ۵ جمله مربوطه راکنارهم قرار داد لذا چنین می‌نویسیم :

$$X = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + ABC + A\bar{B}C$$

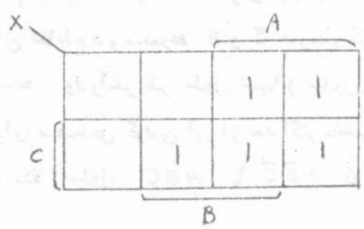
اما چون ساده ترین شکل رابطه بول مورد نظر است ، به کمك استفاده ازگروه بندی درسلولهای مجاور ، سعی می کنیم که تعداد جملات نوشته شده کمتر و کوتاه‌تر شود . حالا توجه کنید به چند طریق می توان سلولهای مجاور هم راگروه بندی کنیم . به شکل (۲۹) نگاه کنید : هردو سلول مجاور مشخص‌شده است ، پس می توان نوشت : $X = AC + BC + \bar{A}\bar{C}$

گروه بندی سلولهای مجاور رامی‌توان به شکل دیگری اختیار کرد . درشکل (۳۰) نحوه انتخاب سلولهای مجاور مشخص‌شده ونتیجه تابع X بصورت دیگری بدست می آید .

$X = \bar{A}\bar{C} + \bar{A}B + AC$



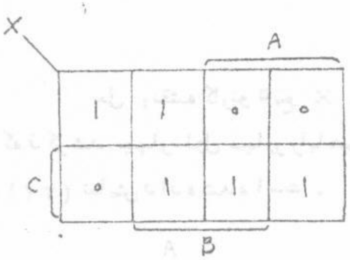
شکل (۳۰)



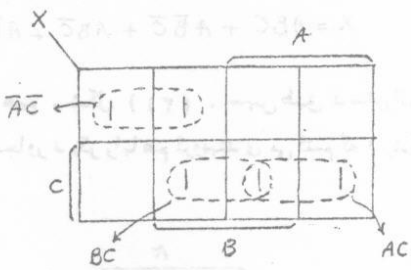
شکل (۳۱)

مشخص‌کننده یک سلول است .

مثال : نقشه کارنو شکل (۲۸) را با ساده‌ترین عبارت بول ممکن بیان کنید .



شکل (۲۸)



شکل (۲۹)

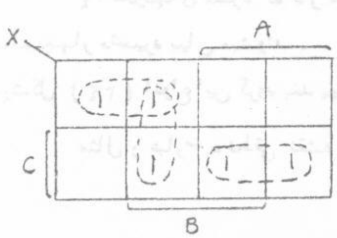
حل : برای نوشتن عبارت بول مربوط به نقشه فوق می توان جملات مختص به هرسلول راکنارهم قرار داد و رابطه منطقی OR رابین آنها برقرار کرد . مثلاً اگر منظور ساده ترین شکل رابطه بول نباشد می توان به ازای ۵ سلول که ارزش (۱) رادارا میباشند ، ۵ جمله مربوطه راکنارهم قرار داد لذا چنین مینویسیم :

$$X = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + ABC + A\bar{B}C$$

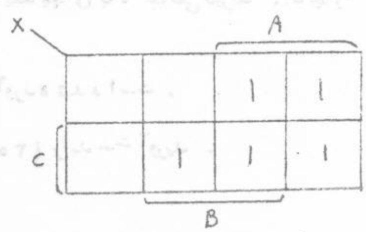
اما چون ساده ترین شکل رابطه بول مورد نظر است ، به کمک استفاده از گروه بندی در سلولهای مجاور ، سعی می کنیم که تعداد جملات نوشته شده کمتر و کوتاه تر شود . حالا توجه کنید به چند طریق می توان سلولهای مجاور هم راگروه بندی کنیم . به شکل (۲۹) نگاه کنید : هر دو ـ سلول مجاور مشخص‌شده است ، پس می توان نوشت : $X = AC + BC + \bar{A}\bar{C}$

گروه بندی سلولهای مجاور رامی‌توان به شکل دیگری اختیار کرد . درشکل (۳۰) نحوه انتخاب سلولهای مجاور مشخص‌شده ونتیجه تابع X بصورت دیگری بدست می‌آید .

$X = \bar{A}\bar{C} + \bar{A}B + AC$



شکل (۳۰)



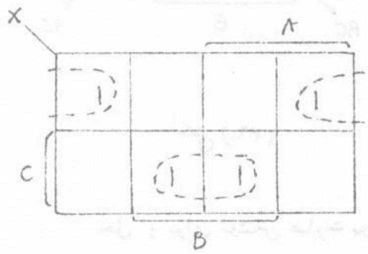
شکل (۳۱)

ملاحظه می‌کنید تابع X به سه شکل بیان گردید که دو رابطه آخر خلاصه‌تر از رابطه اولی هستند.

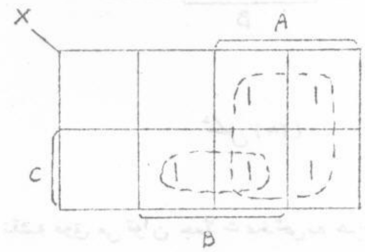
مثال: به کمک نقشه کارنو عبارت زیر را خلاصه کنید:

$$X = ABC + A\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC$$

حل: نقشه کارنو تابع X را تشکیل می‌دهیم. شکل (۳۱). سپس طبق دستورالعملی که ذکر شد چهار سلول مجاور را باهم و دو سلول مجاور دیگر را باهم گروه‌بندی می‌کنیم که در شکل (۳۲) نمایش داده شده است.



شکل (۳۳)



شکل (۳۲)

چهار سلول مجاور که در یک گروه جای گرفته با A و دو سلول مجاور که در شکل نیز مشخص است با BC بیان می‌شود بنابراین می‌توان نوشت: $X = A + BC$

مثال: به کمک نقشه کارنو تابع $X = A\bar{B}\bar{C} + ABC + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ را ساده کنید.

حل: ابتدا نقشه کارنوی مربوطه را رسم کرده سپس سلولهای مجاور را گروه بندی کرده از روی آن رابطه خلاصه شده بدست می‌آید: $X = BC + \bar{B}\bar{C}$ شکل (۳۳)

ب: ساده کردن بوسیله نقشه کارنو وقتی چهار متغیر داریم:

۱- یک گروه شامل هشت سلول مجاور یکدیگر را می‌توانیم به عنوان یک متغیر درنظر بگیریم.

۲- یک گروه شامل چهار سلول مجاور یکدیگر مشخص‌کننده یک جمله دو متغیره است.

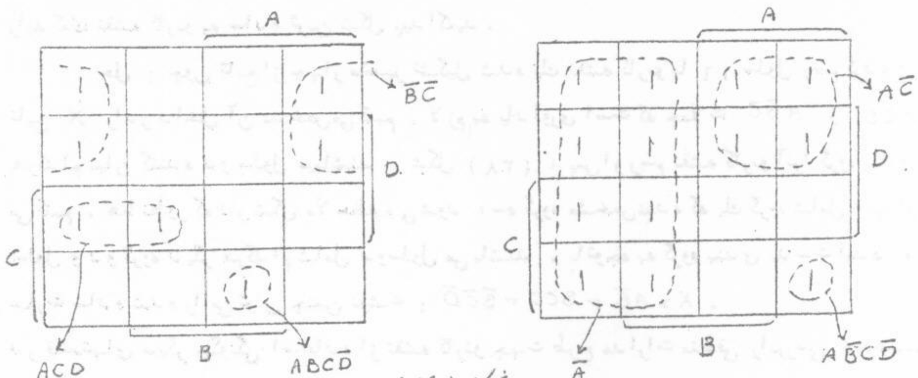
۳- یک گروه شامل دو سلول مجاور هم، مبین یک جمله سه متغیره است.

۴- سلولهای منفرد که در هیچیک از گروه بندیهای بالا جا نمی‌گیرند. ناچاراً با یک جمله چهار متغیره بیان میشوند.

در شکل (۳۴) انواع این گروه بندیها برای مثال آورده شده است.

مثال: عبارت منطقی نقشه کارنو شکل (۳۵) را بدست آورید.

۱۳۴



شکل (۳۴)

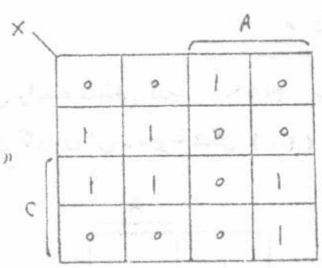
حل : در شکل (۳۵) میتوان یکگروه شامل چهار سلول مجاور ویک گروه دیگر شامل دوسلول مجاور را مشخص کرد ویک سلول منفرد باقی می ماند . این گروه بندی در شکل (۳۶) مشخص شده است . ازروی گروه بندیها ، عبارت خواسته شده بدست می آید .

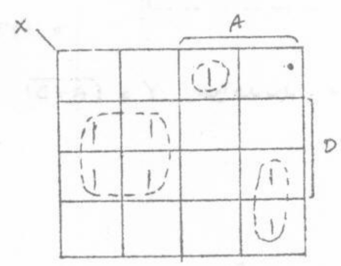
$X = A\bar{D} + A\bar{B}C + AB\bar{C}\bar{D}$

مثال : عبارت منطقی $Y = ABCD + A\bar{B}CD + A\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}BCD + \bar{A}BC\bar{D}$ رابه کمك نقشه کارنو به ساده ترین شکل بدست آورید .

حل : نقشه کارنوی مربوطه را رسم می کنیم . شکل (۳۷) ، سپس در روی نقشه می توان سه گروه دوتایی مشخص نمود . پس از آن رابطه ساده شده رامی توان از روی این گروه بندیها نوشت : $Y = A\bar{B}D + BCD + \bar{A}BC$.

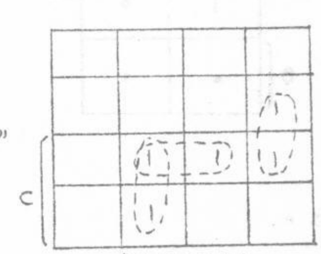
«شکل (۳۵)»

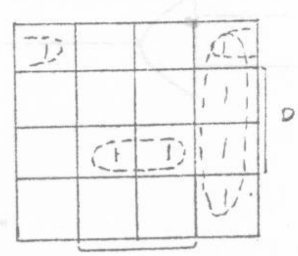




«شکل (۳۶)»

«شکل (۳۷)»





«شکل (۳۸)»

۱۳۵

مثال : عبارت منطقی $X_1 = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}BCD + A\bar{B}\bar{C} + ACD$ رابه کمك نقشه کارنو به ساده ترین شکل پیدا کنید .

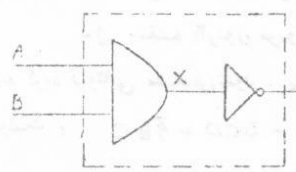
حل : چون تابع از چهار متغیر تشکیل شده یك نقشه کارنو با ۱۶ سلول رسم کرده و تابع X رادر داخل آن مشخص می‌کنیم . لازم به یادآوری است که جملات $A\bar{B}\bar{C}$ و ACD هرکدام بیان کننده دو سلول میباشند . شکل (۳۸) . پس از رسم نقشه کارنو آنرا گروه بندی می کنیم . همانطور که در شکل ملاحظه می شود ، سه گروه مشخص شده که یك گروه شامل چهار سلول و دو گروه دیگر هرکدام شامل دو سلول می باشند . باتوجه به گروه بندی بدست آمده ، عبارت ساده شده را می توان چنین نوشت : $X = A\bar{B} + BCD + \bar{B}\bar{C}\bar{D}$.

در قسمتهای دیگر چگونگی استفاده از نقشه کارنو جهت طرح مدارات منطقی رابررسی خواهیم کرد .

"ایجاد گیت های جدید بااستفاده ازگیت های اساسی"

۱-گیت NOR :

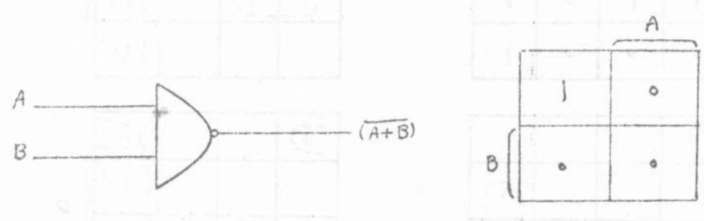
این گیت تشکیل شده از یك OR که در خروجی آن یك گیت NOT قرارگرفته شکل (۳۹) ترکیب ایندوگیت را که گیت جدیدی رابدست داده نشان می دهد . روابط منطقی زیر رامی توان درمورد آن نوشت .



$Y = \bar{X} \quad , \quad X = A + B$

" شکل (۳۹) "

بنابراین رابطه منطقی گیت NOR بصورت $Y = \overline{(A+B)}$ خواهدبود . سمبل منطقی و جدول کارنوی آن بصورت شکل (۴۰) است .

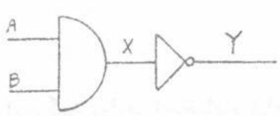


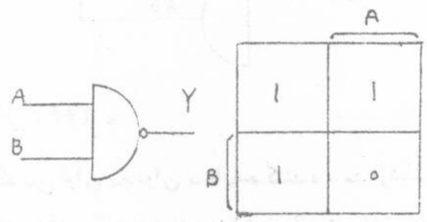
" شکل (۴۰) "

۳۶

۲- گیت NAND :

اگر خروجی یک گیت AND را ، NOT کنیم مجموعه بدست آمده را گیت NOT – AND یا NAND گویند . مطابق شکل (۴۱) . چون $X = AB$ و $Y = \bar{X}$ بنابراین رابطه منطقی گیت NAND بصورت $\overline{Y} = \overline{AB}$ خواهد بود . سمبل منطقی و جدول کارنوی آن بصورت شکل (۴۲) نوشته می شود .

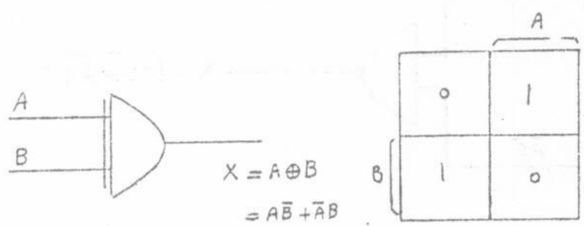




« شکل (۴۱) » « شکل (۴۲) »

۳- گیت Exclusive — OR (یا - انحصاری) :

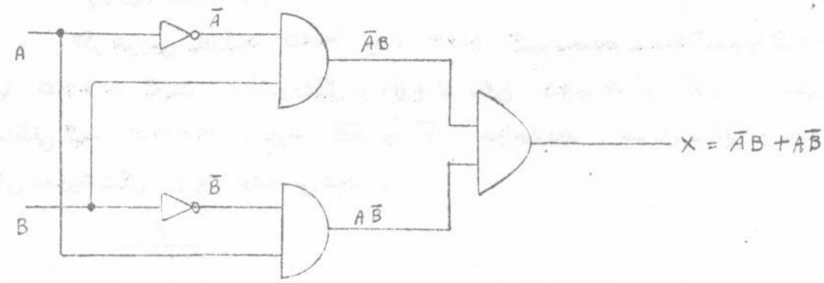
این گیت دارای دو ورودی ویک خروجی است و با عبارت زیر عمل منطقی آن بیان میشود خروجی یک مدار Exclusive — OR درحالت (۱) خواهد بود اگر یکی و فقط یکی از دو - ورودی درحالت (۱) باشد . سمبل منطقی ، جدول صحت ، جدول کارنو و نمایش عبارت بول آن در شکل (۴۳) می آید .



A	B	X
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

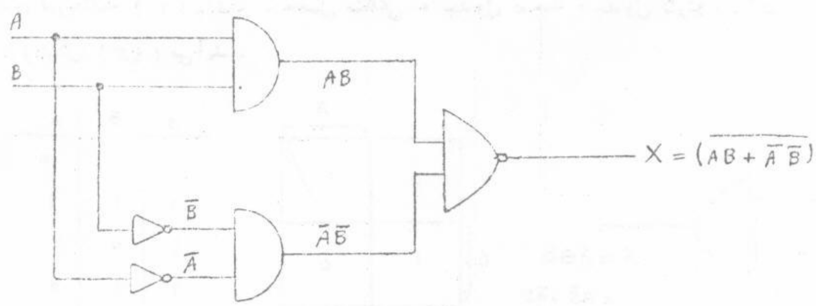
« شکل (۴۳) »

علامت $\oplus$ بیان کننده عمل منطقی "یا - انحصاری" است . این تابع رامی توان بصورت شکل (۴۴) به کمک گیتهای منطقی AND و OR و NOT ساخت .



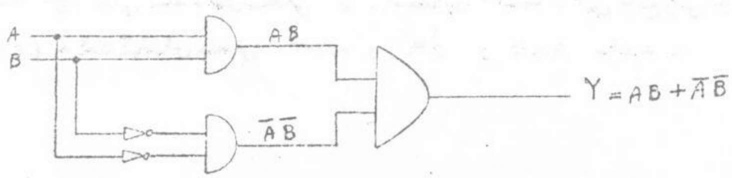
«شکل (۴۴)»

این گیت موارد استفاده زیادی دارد که می توان بعنوان مقایسه کننده ـ مدار تطبیق یـــــا آشکار ساز نام برد . طبق تعریف ، خروجی زمانی که دو ورودی باهم برابرند چه $A = B = 0$ ویا $A = B = 1$ باشد ، برابر صفر است . ازاین خاصیت برای مقایسه کردن می توان استفاده کرد و رابطه منطقی زیر با تعریف اخیر بدست می‌آید : $X = \overline{(AB + \bar{A}\bar{B})}$
ومطابق با این رابطه مداری دیگر می توان طرح نمود . شکل (٤٥)



«شکل (۴۵)»

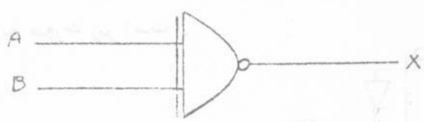
چنانچه NOT تابع X رابدست آوریم مدار آشکار ساز برابر حاصل می‌شود که خروجی آن ـ بازای برابری ورودیها برابر (١) خواهد بود . شکل (٤٦)



«شکل (۴۶)»

همانطور که در قسمتهای قبل ملاحظه شد ، برای ساختن یك مدار منطقی اغلب راههای مختلفی وجود دارد . درعمل یکی از اینها ممکن است . بر دیگران امتیاز داشته باشد . از جبر بول گاهی برای محاسبه روابط منطقی جهت تبدیل یك شکل به شکل دیگر ، که از نقطه نظر ساخت ارجحیت دارد استفاده می‌شود .

٤- گیت Exclusive — NOR : این گیت ترکیبی است از گیت های دیگر و طبق رابطه منطقی $X = \overline{A \oplus B}$ عمل می‌کند . سمبل این گیت شبیه Exclusive — OR است که خروجی آن NOT شده درشکل (٤٧) آمده است $X = \overline{A \oplus B} = \bar{A}\bar{B} + AB$.



A	B	X
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

« شکل (۴۷) »

« طرح مدارهای ترکیبی »

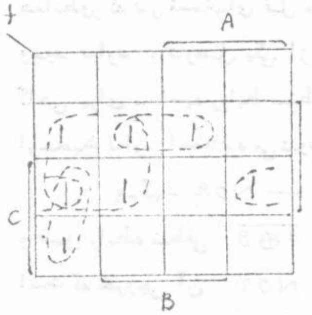
دراین قسمت بابیان مثال روش طرح مدارهای ترکیبی نسبتاً ساده رافرامی‌گیریم . کلاً برای طرح یك مدار باید :

١- رابطه منطقی آن درست باشد .

٢- رابطه منطقی رابااستفاده از جدول صحت یا کارنو بدست می‌آوریم و تا آنجائی که می‌شود آنرا ساده می‌کنیم .

مثال ١ : مداری طرح کنید که اعداد اول راتا چهاررقم در سیستم باینری تشخیص دهد . (صفر راعدد اول به حساب نیاورید) .

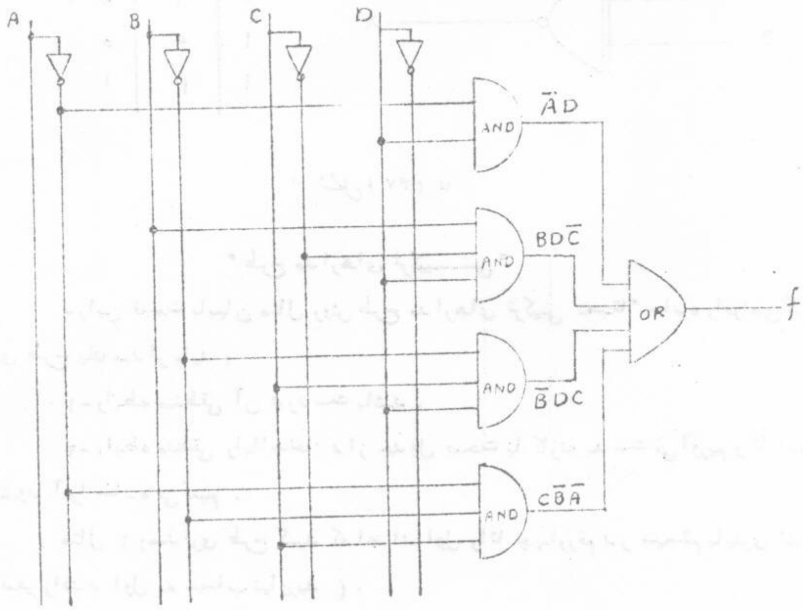
حل : برای این منظور باکمك جدول کارنو برای چهار متغیر (چهارورودی) طراحی را آغاز می‌کنیم . شکل (٤٨) چون هرخانه جدول فوق معادل یك عدد اعشاری است شکل (٢٤) پس برای آنکه خروجی ما (تابع f) درحالتیکه ترکیب چهار ورودی یك عدد اول رانمایش می‌دهد ، (١) باشد در هرخانه‌ای که معادل عدد اول اعشاری است (١) قرارمیدهیم .



$$f = \bar{A}D + BD\bar{C} + \bar{B}DC + C\bar{B}\bar{A}$$

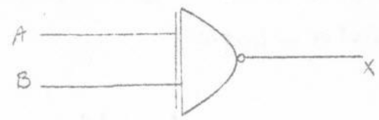
شکل (۴۸)

در اینصورت تابع خروجی باساده سازی به کمک جدول کارنو ، بشکل f خواهد بود و مــدار منطقی آن به صورت زیر است .



مثال ۲ : اگر منظور مقایسه دو عدد یک رقمی A و B باشد چه باید کرد ؟ چگونه می توان پی برد که درصورت عدم تساوی ، A بزرگتر است یا B ؟ مداری طرح کنید که دو عدد یک رقمی A و B رامقایسه کرده و دارای سه خروجی باشد که هرکدام به ترتیب مشخص‌کننده $A = B$ ، $A < B$ ، $A > B$ باشد .

حل : اگر $A = B$ باشد خواه در ارزش "0" یا ارزش "1" با توجه به خاصیت گیت منطقی Exclusive — NOR می توان تساوی آنها را مشخص کرد یعنی هرگاه $A = B$ باشد خروجی آن "1" خواهد بود شکل (۴۹) .



$$\begin{cases} x = 1 & \text{اگر } A = B \text{ باشد} \\ x = 0 & \text{اگر } A \neq B \text{ باشد} \end{cases}$$

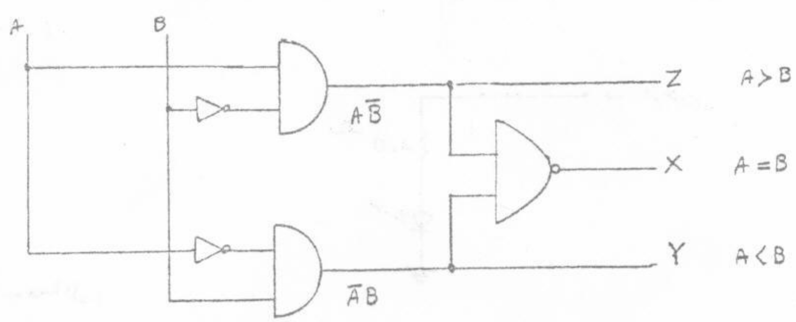
« شکل (۴۹) »

در صورت $A \neq B$ اگر $A > B$ باشد رابطه $A\overline{B} = 1$ برقرار است زیرا در این صورت $A = 1$ و $B = 0$ خواهد بود ، چنانکه $A < B$ باشد رابطه $\overline{A}B = 1$ صدق خواهد کرد .

جدول صحت زیر مطالب فوق را روشن می کند .

A	B	$Y = \overline{A}B$	$Z = A\overline{B}$	$X = \overline{(A\overline{B} + \overline{A}B)}$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	1

برطبق روابط بدست آمده مدار منطقی شکل زیر خواسته ما را انجام میدهد .

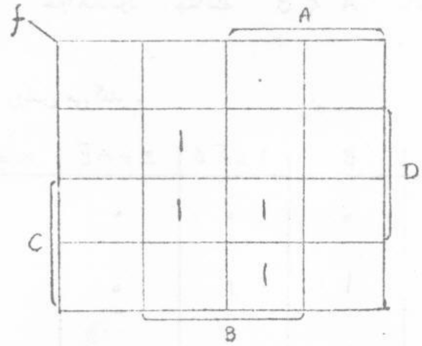


درخاتمه متذکر می شود که گیت های اساسی و نیز گیت های دیگر بصورت آی - سی های مختلفی یافت می شوند که مشهورترین آنها آی - سی سری ۷۴ است که درآنها گیت های مختلف از ترانزیستورساخته می شوند ولذا به آی سی های TTL معروفند

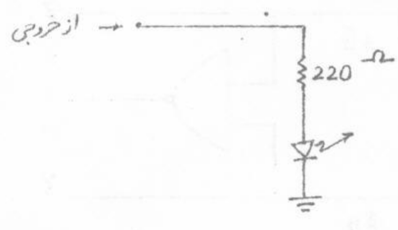
(Transistor — Transistor — Logic)

— «آزمایش»:

۱) تابع f توسط جدول کارنوی زیر تعریف شده است. شکل ساده شده f را بدست آورده با استفاده از گیتهای اساسی، مدار منطقی مربوط به آنرا بسازید.



۲) یک مدارمنطقی دارای چهار ورودی S_1، S_0 ; t_1 و t_0 میباشد. بطوریکه زوج بیتهای S_1S_0 و t_1t_0 اعداد باینری دورقمی رانمایش میدهند. مداررا چنان طرح کنید که هرگاه : $S_1S_0 \geqslant t_1t_0$، خروجی آن (۱) شود. درهرد و آزمایش خروجی رابه یك مقاومت و LED طبق شکل زیر متصل نمائید. وولتاژ خروجی رااندازه‌گیری نمائید (توجه کنید که در آی - سی های سری 74، تراز ولتاژ (۱)، ۵ ولت است).



— مسائل :

۱- عبارت $X = AB + \bar{B}C + A\bar{B}$ رابه کمك جدول کارنو ساده کنید.

۲- بااستفاده از چهار گیت NAND یك گیت NOR طرح کنید .

۳- مداری طرح کنید که خروجی آن ، $\underline{\underline{AB + A\bar{B} + \bar{A}B}}$ باشد .

٤- مداری طرح کنید که اعداد فرد باینری چهار رقمی رامشخص کند .