

## آزمایش شماره ۹

## اندازه‌گیری لختی دورانی

حرکت صفحه چرخان آب میوه‌گیری، تیغه چرخ گوشت، چرخ طیار اتومبیل، حرکت وضعی و انتقالی زمین نمونه‌هایی از حرکت دورانی هستند. برای توصیف یک حرکت دورانی، جابجایی زاویه‌ای، سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای را باید بدانیم. همانطور که یک نیروی خالص غیر صفر تعادل انتقالی جسمی را بر هم می‌زند، یک گشتاور نیروی غیر صفر نیز تعادل دورانی آنرا دست‌خوش تغییر می‌کند. بعلاوه کمیت بسیار مهمی که در حرکت دورانی مانند جرم ظاهر می‌شود، لختی دورانی است. در ادامه لختی دورانی اجسامی مانند کره، پوسته کروی، میله و دیسک با استفاده از دینامیک دورانی اندازه‌گیری می‌شود. این روش برای بدست آوردن لختی اجسامی که شکل هندسی دقیقی ندارند نیز بسیار مناسب است.

**هدف آزمایش:** اندازه‌گیری لختی دورانی

## نظریه

هرگاه جسم صلبی حول محوری ثابت دوران کند، میزان جابه‌جایی خطی هر یک از نقاط واقع بر آن متفاوت خواهد بود. اما تمام این نقاط زوایای برابری را حول مرکز دوران در یک زمان معین طی می‌کنند (می‌چرخند). به عبارت دیگر جابه‌جایی زاویه‌ای همه نقاط یک جسم صلب حول هر محور دوران ثابت، باهم برابرند. مقدار جابه‌جایی زاویه‌ای را با حرف  $\theta$  نمایش می‌دهند و واحد آن رادیان (بدون بعد) می‌باشد.

در حرکت دورانی سرعت خطی نقاط مختلف جسم بسته به دوری یا نزدیکی آنها از محور دوران متفاوت است. لذا این پرسش مطرح می‌شود که چه مشخصه‌ای می‌تواند معرف سرعت چرخش جسم باشد. پاسخ به این پرسش با استفاده از تعریف جابجایی زاویه‌ای و اینکه این جابه‌جایی به فاصله نقاط از محور دوران جسم بستگی ندارد، بسیار ساده است. برای این کار سرعت زاویه‌ای متوسط ( $\bar{\omega}$ ) و سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای ( $\omega$ ) را مشابه با سرعت‌های خطی به صورت زیر تعریف

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad , \quad \omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad \text{می‌کنیم:}$$

سرعت زاویه‌ای را با واحد رادیان بر ثانیه بیان می‌کنند. بدین ترتیب هر چه سرعت زاویه‌ای جسم بیشتر باشد، جسم تندتر می‌چرخد.

اگر  $\omega$  در طول زمان ثابت باشد، معادله حرکت به صورت  $\theta = \omega t + \theta_0$  خواهد بود. شتاب زاویه‌ای متوسط ( $\bar{\alpha}$ ) و شتاب زاویه‌ای لحظه‌ای ( $\alpha$ ) را نیز می‌توان مانند شتاب خطی متوسط و لحظه‌ای به صورت زیر تعریف کرد:

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad , \quad \alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

واحد شتاب زاویه‌ای رادیان بر مجذور ثانیه است. می‌توان نشان داد که بین جابه‌جایی زاویه‌ای ( $\theta$ ) و سرعت زاویه‌ای، شتاب زاویه‌ای و مقادیر خطی نظیر آنها (به ترتیب  $s$  و  $v$  و  $a$ ) مربوط به یک نقطه از جسم در حال دوران، روابط زیر برقرار است:

$$s = r\theta \quad , \quad v = r\omega \quad , \quad a = r\alpha$$

$r$  فاصله آن نقطه از محور دوران می‌باشد.

اگر شتاب زاویه‌ای ثابت باشد، معادلات حرکت عبارتند از:

$$\omega = \alpha t + \omega_0$$

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \quad (1)$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

اگر یک گشتاور نیرو ( $\tau$ )، به جسمی که می‌تواند حول محوری آزادانه بچرخد اعمال شود، جسم متحمل یک شتاب زاویه‌ای ( $\alpha$ ) می‌شود که از رابطه  $\tau = I\alpha$  (معادل  $F = ma$  در حرکت انتقالی) بدست می‌آید. در این رابطه  $I$  لختی دورانی جسم حول محور دوران می‌باشد، (معادل جرم  $m$ ، لختی انتقال جسم).

لختی دورانی یک جرم نقطه‌ای  $M$  که در فاصله  $d$  از محور دوران قرار دارد برابر است با

$$I = Md^2 \quad (2)$$

از این رابطه می‌توان با تقسیم هر توزیع جرم پیوسته (گسسته) به عناصر جزئی  $dm$  ( $m_i$ )، لختی دورانی آنرا حول هر محوری با انتگرال‌گیری (مجموع‌یابی) بدست آورد.

$$I = \sum m_i r_i^2 = \int r^2 dm \quad (3)$$

در این رابطه  $r$  ( $r_i$ ) فاصله عنصر جزئی  $dm$  (جرم نقطه‌ای  $m_i$ ) از محور دوران می‌باشد.

لختی دوران اجسام با شکل هندسی ساده حول محورهای تقارنی آنها به راحتی محاسبه می‌شوند. مثلاً لختی دوران یک استوانه توپر و یا قرص دایره‌ای به جرم  $M$  و شعاع  $R$  نسبت به محور تقارن عمود بر قاعده آن برابر است با

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

اگر لختی دورانی جسمی به جرم  $M$  حول محور دوران  $d$  که از مرکز جرم می‌گذرد، برابر  $I$  باشد، لختی دورانی آن حول محور دوران دیگر  $d'$  که موازی با محور  $d$  و به فاصله  $h$  از آن قرار دارد برابر است با،

$$I' = I + Mh^2 \quad (4)$$

این رابطه به قضیه محورهای موازی مشهور است.

### حل یک مسأله

می‌خواهیم معادله حرکت دورانی جسمی به لختی  $I$  که روی بلبرینگی با جرم ناچیز قرار گرفته تحت تاثیر گشتاور نیروی کشش وزنه‌ای به جرم  $m$  که روی چرخ متصل به بلبرینگ به شعاع  $r$  پیچیده شده را بدست آوریم. مطابق شکل ۱ فرض کنید نخ که وزنه‌ای به جرم  $m$  به یک سر آن

وصل شده است، دور چرخ پیچیده شده و سبب چرخش آن حول محور تقارنش می‌شود. اگر لختی دورانی این چرخ در مقایسه با جسم روی آن قابل چشم‌پوشی باشد معادلات حرکت آن و وزن  $m$  به صورت زیر خواهد بود (با چشم‌پوشی از گشتاور اصطکاک):

$$\sum \tau = I\alpha \rightarrow rT = I\alpha \quad (5)$$

$$\sum F = ma \rightarrow mg - T = ma \quad (6)$$



شکل ۱

در این معادلات،  $\alpha$  شتاب زاویه‌ای چرخ و جسم متصل به آن،  $a$  شتاب خطی وزنه و  $T$  کشش نخ است. با استفاده از رابطه  $a = r\alpha$  و حذف  $T$  خواهیم داشت:

$$I = \frac{mr^2(g-a)}{a} = \frac{mr^2(9.78-a)}{a} \quad (SI) \quad (7)$$

در این رابطه با داشتن مقدار عددی  $m$ ،  $a$  و  $r$  می‌توان لختی دورانی را محاسبه کرد.

## مراحل انجام آزمایش

### ابزار مورد نیاز

۱- چرخ متصل به بلبرینگ و پایه ۲- اجسام با لختی دورانی مختلف شامل میله، دیسک، کره و پوسته کروی و استوانه‌ای تو پر و پوسته‌ای ۳- دستگاه ثبت کننده زمان (شمارنده) ۴- کفه ۵- وزنه ۶- متر (۷ متر) ۸- مقدراری نخ محکم ۹- حسگر نوری  
برای آشنایی اولیه با روش انجام آزمایش به سایت آزمایشگاه مراجعه نموده و مراحل انجام آزمایش را در گزارش تصویری مشاهده نمایید. <http://physics.sharif.edu/~genphyslabs1/002.htm>

**الف) اندازه‌گیری لختی دورانی**

قرقره متصل به اهرم را روی پایه بلبرینگ و چرخ کوچک متصل به آن نصب کنید. شعاع چرخ متصل به بلبرینگ تقریباً  $2/5\text{cm}$  سانتیمتر بوده و لختی آن نیز قابل چشم‌پوشی است. نخ محکمی را از سوراخ کوچکی که روی چرخ ایجاد شده گذرانده و گره بزنید. در این حالت با چرخیدن بلبرینگ نخ متصل به چرخ به دور آن می‌پیچد. نخ را از روی قرقره عبور داده و سر دیگر آن را به کفه وصل کنید. طول نخ را طوری تنظیم کنید که وقتی که بطور کامل باز شود کفه به زمین برسد. دو حسگر نوری یکی در حدود ۲۵ سانتیمتر بعد از قرقره و دیگری را حدود ۱۵ سانتیمتری زمین قرار دهید و فاصله بین دو حسگر را به دقت اندازه‌گیری نمایید. حسگرها باید طوری تنظیم شوند که کفه در هنگام باز شدن نخ از آنها بگذرد. حسگر اول را به درگاه *Start* و حسگر دوم را به درگاه *Stop* در پشت دستگاه شمارنده وصل کنید. ابتدا کره پلاستیکی را روی بلبرینگ نصب کرده و با قرار دادن جرم مناسب روی کفه حرکت شتابدار ایجاد نمایید. برای انجام آزمایش کفه را درست قبل از حسگر اول بدون سرعت اولیه رها کنید. در این حالت با توجه به معلوم بودن فاصله دو حسگر و اندازه‌گیری زمان عبور کفه و جرم متصل به نخ داریم:

$$a = \frac{2l}{t^2}$$

اگر جرم کفه و وزنه‌های متصل به آن  $m$  باشد داریم:

$$I = mr^2 \left( \frac{9.78t^2}{2l} - 1 \right)$$

آزمایش را با ۳ وزنه مختلف تکرار کنید و نتایج را در جدول ۱ وارد نمایید. جرم و شعاع (قطر) کره را اندازه بگیرید و یادداشت کنید.

آزمایش را با میله، استوانه و پوسته کروی و استوانه‌ای تکرار کنید. جرم، طول، شعاع و قطر داخلی و خارجی را بسته به نوع جسم مورد نظر اندازه گرفته و در جدول‌های ۲ تا ۵ یادداشت کنید. (کمیت‌ها و ابعادی که باید اندازه‌گیری شوند در جدول‌های مربوطه ذکر شده‌اند). لازم به ذکر است که برای قرار دادن استوانه روی چرخ بلبرینگ باید وسیله بشقابی ساخته شده برای این منظور را قرار داده و سپس استوانه‌ها را روی آن قرار دهید.

**ب) بررسی قضیه محورهای موازی**

در این قسمت تنها از دیسک پلکسی برای انجام آزمایش استفاده می‌شود. به منظور دوران دیسک حول نقطه‌ای خارج از مرکز تقارن، سوراخ‌هایی به فاصله‌های ۳، ۶ و ۹ سانتی‌متری از مرکز دیسک روی آن ایجاد شده است. برای انجام این قسمت از آزمایش ابتدا دیسک پلکسی را به طور متقارن روی بلبرینگ نصب کنید. دقت کنید در تمام مراحل آزمایش دیسک پلکسی باید به بلبرینگ محکم پیچ شده باشد. حال با قرار دادن ۴ وزنه مختلف و ایجاد شتاب مناسب آزمایش بخش (الف) را تکرار کرده و نتایج را در جدول ۶ یادداشت کنید.

حال دیسک پلکسی را به ترتیب از فاصله‌های ۳، ۶ و ۹ سانتی‌متری از مرکز دیسک روی بلبرینگ نصب کرده و آزمایش قبل را تکرار کنید. نتایج را برای فاصله‌های ۳، ۶ و ۹ سانتی‌متری به ترتیب در جدول‌های ۷ تا ۹ وارد نمایید.

### خواسته‌ها

۱. برای هر یک از داده‌های جدول‌های ۱ تا ۵ لختی دورانی را محاسبه کرده و نتیجه را با مقداری که از تعریف لختی دورانی  $I = \sum m_i r_i^2 = \int r^2 dm$  بدست می‌آورید مقایسه کنید (درصد خطای نسبی). علت‌های خطا را در هر یک از موارد جداگانه شرح دهید.
۲. لختی دورانی دیسک پلکسی را در حالت‌های مختلف دورانی با استفاده از داده‌های جدول‌های ۶ تا ۹ بدست آورده و نتایج را با مقدار بدست آمده از تعریف لختی و قضیه محورهای موازی مقایسه کنید (درصد خطای نسبی). آیا مقدار خطای نسبی به فاصله محور دوران تا مرکز تقارن دیسک بستگی دارد؟ توضیح دهید.
۳. در هر یک از موارد فوق گشتاور اصطکاک را محاسبه کنید. (برای این منظور در رابطه ۵ فرض کنید گشتاور اصطکاک وجود داشته و روابط را بازنویسی کنید).
۴. در چه حالت‌هایی گشتاور اصطکاک بیشتر است؟ بحث کنید.
۵. چه روش دیگری برای بدست آوردن گشتاور اصطکاک با استفاده از وسایلی که در این آزمایش در اختیار دارید، پیشنهاد می‌کنید؟

## جدول‌های آزمایش شماره ۹ اندازه‌گیری لختی دورانی

جدول ۱- اندازه‌گیری لختی دورانی میله فلزی

جرم کفه و وزنه‌های روی آن	زمان عبور کفه و وزنه‌ها بین دو حسگر	فاصله دو حسگر	ردیف
			۱
			۲
			۳

جرم میله فلزی: قطر میله فلزی: طول میله فلزی:

جدول ۲- اندازه‌گیری لختی دورانی پوسته کرومی

جرم کفه و وزنه‌های روی آن	زمان عبور کفه و وزنه‌ها بین دو حسگر	فاصله دو حسگر	ردیف
			۱
			۲
			۳

جرم پوسته کرومی: شعاع پوسته کرومی:

جدول ۳- اندازه‌گیری لختی دورانی کره

جرم کفه و وزنه‌های روی آن	زمان عبور کفه و وزنه‌ها بین دو حسگر	فاصله دو حسگر	ردیف
			۱
			۲
			۳

جرم کره: شعاع کره:

جدول ۴- اندازه‌گیری لختی دورانی پوسته استوانه‌ای

جرم کفه و وزنه‌های روی آن	زمان عبور کفه و وزنه‌ها بین دو حسگر	فاصله دو حسگر	ردیف
			۱
			۲
			۳

جرم پوسته استوانه‌ای: قطر متوسط: طول پوسته استوانه‌ای:

جدول ۵- اندازه‌گیری لختی دورانی استوانه

جرم کفه و وزنه‌های روی آن	زمان عبور کفه و وزنه‌ها بین دو حسگر	فاصله دو حسگر	ردیف
			۱
			۲
			۳

جرم استوانه: شعاع: طول استوانه:

جدول ۶- قضیه محورهای موازی با دیسک پلکسی

ردیف	فاصله دو حسگر	زمان عبور کفه و وزنه‌ها بین دو حسگر	جرم کفه و وزنه‌های روی آن
۱			
۲			
۳			

فاصله مرکز دوران تا مرکز دیسک=۰ سانتیمتر

جدول ۷- قضیه محورهای موازی با دیسک پلکسی

ردیف	فاصله دو حسگر	زمان عبور کفه و وزنه‌ها بین دو حسگر	جرم کفه و وزنه‌های روی آن
۱			
۲			
۳			

فاصله مرکز دوران تا مرکز دیسک=۳ سانتیمتر

جدول ۸- قضیه محورهای موازی

ردیف	فاصله دو حسگر	زمان عبور کفه و وزنه‌ها بین دو حسگر	جرم کفه و وزنه‌های روی آن
۱			
۲			
۳			

فاصله مرکز دوران تا مرکز دیسک=۶ سانتیمتر

جدول ۹- قضیه محورهای موازی

ردیف	فاصله دو حسگر	زمان عبور کفه و وزنه‌ها بین دو حسگر	جرم کفه و وزنه‌های روی آن
۱			
۲			
۳			

فاصله مرکز دوران تا مرکز دیسک=۹ سانتیمتر