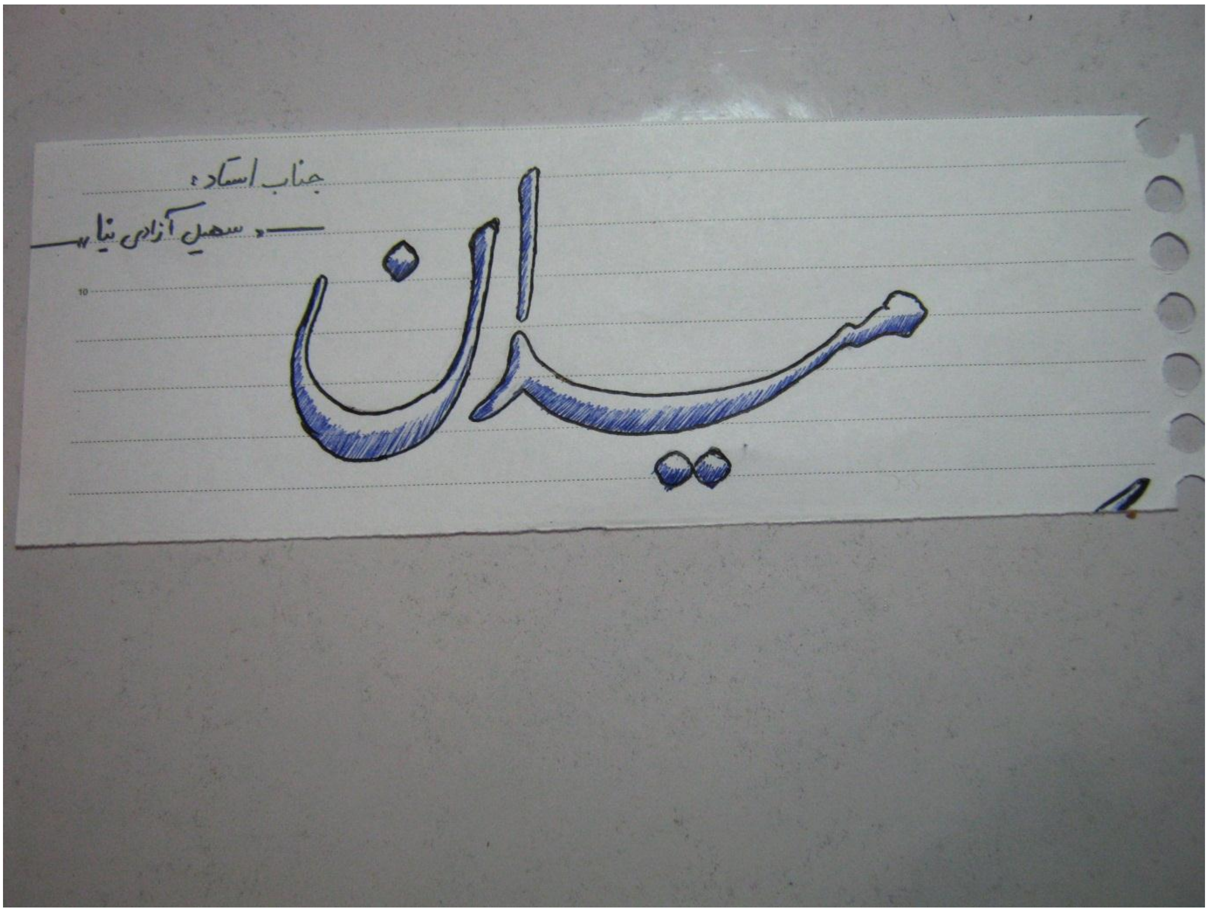


جناب استاد:
«سهیل آزادی نیا»
میان

به نام خدا

Subject: جلسه اول
Year. Month. Date. ( )

عناوین درس: ① میدان های الکترومغناطیس هماهنگ زمانی { شرایط تشریحی: منتشر نمی‌شود / طول موج $\rho_{max} \ll \lambda_{min}$

② معادلات موج و حل آن‌ها ③ انتشار موج و پلاریزاسیون ④ انعکاس و انتقال موج ⑤ تئوری خطوط انتقال مخابراتی ⑥ موجبرها

مراجع درس: الکترومغناطیس میدان و موج تألیف دیوید چنگ ترجمه دکتر جبه دار انتشارات دانشگاه تهران

بارم‌بندی: پایان ترم: ۱۶ نمره میان ترم: ۵ نمره تمرین، کوئیز + حضور غیاب + جزوه خوب 1+ نمره

راه ارتباطی با استاد: soheil_azadinia@yahoo.com

۰۹۱۵۵۲۱۵۴۲۰ تماس در وقت اداری

✓ 1 برگ A4، یک رو مملو از فرمول در امتحان آزاد است.

فصل اول: میدان های الکترومغناطیس هماهنگ زمانی:

معادلات ماکسول: Maxwell equations

این معادلات دارای دو شکل هستند:

1 فرم نقطه‌ای (دیفرانسیلی): میدان ها را به منابع بار و جریان در هر لحظه از زمان و در هر مکان مربوط می‌سازد. ← برای حل مسایل الکترومغناطیس با مقادیر مرزی (کلی تر نسبت به حالت ۲)

2 فرم انتگرالی: ارتباط بین میدان ها و منابع (بارها، جریان ها) را در یک ناحیه توسعه یافته از فضا توصیف می‌کند. (برای حل مسایل الکترومغناطیس با مقادیر مرزی که دارای تقارن هستند.)

اصول الکترومغناطیس ساکن:

1) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$

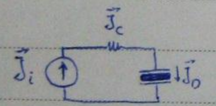
2) $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

3) $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{vc}$

4) $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} = \vec{J}_i + \vec{J}_c$

$\vec{J}_i$: منبع جریان — $\vec{J}_c$: رسانای عبور جریان هدایتی

معادله پیوستگی جریان: $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$



انواع منبع میدان:
- چرخشی H
- شارشی (از منبع دور می‌شود) ρ

هر جا ρ_{vc} داریم، منبع شارشی و $\vec{J}$ منبع چرخشی است.

$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = C$
- >0 منبع داریم
- <0 مصرف کننده

قضایای پرکاربرد:

a) → Stokes ⟶ $\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ ⟶ $\sum V = 0$ قانون KVL

b) → Divergence ⟶ $\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_c$ قانون گاوس

c) → 〃 ⟶ $\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$

d) → stokes ⟶ $\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$ قانون آمپر

PAPCO

اصل پویا الکترومغناطیس (متغیر با زمان):

a) $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ شکلی از قانون فارادی

b) $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_{vc}$ گاوس

c) $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}_i + \vec{J}_c$ آمپر

d) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ → جز اصول ماکسول نیست ولی همراه با آن است

$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}_{ic} \xrightarrow[\text{دیورژانس}]{\text{از طرفین}} 0 = \nabla\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H}) \neq \vec{\nabla}\cdot\vec{J}_{ic} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

∴ ماکسول قانون آمپر را اصلاح کرد:

$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}_c + \vec{J}_i + \vec{J}_D \longrightarrow \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{J}_{ic} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J}_D \longrightarrow 0 = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J}_D \Rightarrow \nabla\cdot\vec{J}_D = \frac{\partial \rho}{\partial t}$

$\rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{J}_D = \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{D} \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{J}_D = \nabla\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}D\right) \Rightarrow \vec{J}_D = \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}$ چگالی جریان

معادلات ماکسول:

منبع جریان مغناطیسی

چگالی جابجایی مغناطیسی

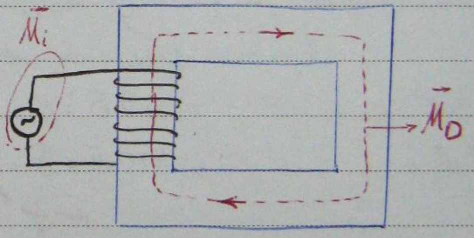
$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{M}_i = -\vec{M}_d - \vec{M}_i$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_{vc}$

$\nabla\cdot\vec{B} = \rho_{vm}$

$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}_i + \vec{J}_c + \vec{J}_D = \vec{J}_i + \vec{J}_c + \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}$

$\nabla\cdot(\vec{J}_i + \vec{J}_c + \vec{J}_D) = 0$



Subject:
Year. Month. Date. ( )

بنام خدا

فرم انتگرالی معادلات ماکسول : از $\nabla\times E$ با استفاده از staks انتگرال سطحی می گیریم.

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} - \vec{M_i} = -M_J - M_i = M_t$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} =$$

$$\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint_s \frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\cdot d\vec{s} - \iint_s \vec{M_i}\cdot d\vec{s} \qquad (kvl)$$

$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = \iint_s \vec{J}_{ic}\cdot d\vec{s} + \iint_s \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}\cdot d\vec{s}$$

$$\oint_s \vec{D}\cdot d\vec{s} = \iiint_v \rho_{ev}\cdot dv = Q_e$$

$$\oint_s \vec{B}\cdot d\vec{s} = \iiint \rho_{mv}\cdot dv = Q_{mv}$$

تقارن

$$\oint_s \vec{J}_{ic}\cdot d\vec{s} = \iiint_v -\frac{\partial}{\partial t}\rho\, dv = -\frac{\partial}{\partial t}Q \qquad (kcl)$$

از این روابط در شرایطی استفاده می کنیم که

میدان { محدود ، تک مقداره اند ، پیوسته } باشند.

روابط اساسی :

$$\begin{array}{rl} \text{رسانایی} & \\ \text{گذردهی} & \\ \text{نفوذپذیری} & \end{array}\begin{bmatrix} \sigma \\ \varepsilon \\ \mu \end{bmatrix} \begin{array}{lll} \vec{J} = \sigma\vec{E} & (\frac{S}{m}) & \\ \vec{D} = \varepsilon\vec{E} & (\frac{F}{m}) & \varepsilon_0 = 8.25\times10^{-12} = \frac{1}{36\pi}\times10^{-9} \\ \vec{B} = \mu\vec{H} & (\frac{H}{m}) & \mu_0 = 4\pi\times10^{-7} \end{array}$$

پارامترهای اساسی (ساختمانی) ماده

از پارامترهای اساسی مواد برای موارد ذیل استفاده می شود:

1 ← توصیف خواص مواد

- دی الکتریک : اگر پدیده polarization یا قطبی شدگی غالب باشد.
- megneties اگر پدیده قطبش مغناطیسی غالب باشد.
- conductive ~ رسانایی غالب باشد رسانا گوئیم.
- semiconductive رسانایی به اندازه رسانا ها غالب نیست.

2 ← توصیف رفتار

- خطی یا غیر خطی : اگر در ماده ای پارامترهای اساسی به میدان ارتباطی نداشت به آن خطی گویند.
- همگن و غیر همگن : موادی که در نقاط مختلف ماده پارامترهای اساسی ثابت باشد (همگن).
- isotropic - anisotropic : پارامترهای اساسی مستقل از جهت میدان اعمالی هستند.
- dispersive - andispersive : " " " " فرکانس میدان اعمالی هستند.

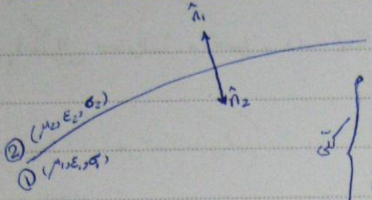
Subject:

Year. Month. Date. ( )

بار الکتریکی ، جریان الکتریکی

مغناطیسی ، مغناطیسی

شرایط مرزی امواج الکترومغناطیس :



کلی

$$\hat{n}_1 \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_{se} \quad (C/m^2)$$ مؤلفه‌های عمود میدان‌ها

$$\hat{n}_1 \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \rho_{sm} \quad (Wb/m^2)$$ 〃 〃 〃

$$\hat{n}_1 \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = -M_s \quad (V/m)$$ 〃 مماس 〃

$$\hat{n}_1 \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = J_s \quad (A/m)$$ 〃 〃 〃

✓ : معمولاً منابع وجود ندارد مگر اینکه به طور مصنوعی آن‌ها را ایجاد کنیم .

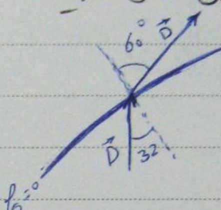
① شرایط مرزی در دی الکتریک‌ها :

$$\hat{n}_1 \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 0 \rightarrow D_{2n} = D_{1n} \rightarrow \varepsilon_2 E_{2n} = \varepsilon_1 E_{1n} \rightarrow \frac{E_{2n}}{E_1} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

$$\hat{n}_1 \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \rightarrow B_{2n} = B_{1n} \rightarrow \mu_2 H_{2n} = \mu_1 H_{1n} \rightarrow \frac{H_{2n}}{H_{1n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

$$\hat{n}_1 \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \rightarrow E_{2t} = E_{1t} \rightarrow \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2} = \frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} \rightarrow \frac{D_{2t}}{D_{1t}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

$$n_1 \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0 \rightarrow H_{2t} = H_{1t} \rightarrow \frac{B_{2t}}{\mu_2} = \frac{B_{1t}}{\mu_1} \rightarrow \frac{B_{2t}}{B_{1t}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$



② شرایط مرزی بین دی الکتریک و رسانای کامل الکتریکی (PEC) : $\sigma \rightarrow \infty$

$$\hat{n}_1 \cdot (\vec{D}_2 - \cancel{\vec{D}_1}) = \rho_{se} \rightarrow \hat{n}_1 \cdot \vec{D}_2 = \rho_{se}$$

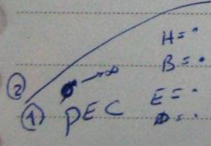
$$\hat{n}_1 \cdot (\vec{B}_2 - \cancel{\vec{B}_1}) = 0 \rightarrow \hat{n}_1 \cdot \vec{B}_2 = 0$$

$$\hat{n}_1 \times (\vec{E}_2 - \cancel{\vec{E}_1}) = 0 \rightarrow \hat{n}_1 \times \vec{E}_2 = 0$$

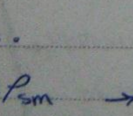
$$\hat{n}_1 \times (\vec{H}_2 - \cancel{\vec{H}_1}) = \vec{J}_s \rightarrow \hat{n}_1 \times \vec{H}_2 = \vec{J}_s$$

PEC : رسانایی ویژه به سمت بی‌نهایت میل می‌کند . میدان الکتریکی داخل این مواد صفر است . میدان‌های الکترومغناطیسی در این مواد صفر هستند . میدان الکتریکی مماسی در مرز این مواد صفر است .

★ مورد استفاده در موج بر



③ شرایط مرزی بین دی الکتریک و رسانای کامل مغناطیسی (PMC)



PMC : شدت میدان مغناطیسی صفر است ، میدان‌های الکترومغناطیسی در PMC صفر است . مؤلفه مماسی $\vec{H}$ در این مواد صفر است .

$$\hat{n}_1 \cdot (\vec{D}_2 - \cancel{\vec{D}_1}) = 0$$

$$\hat{n}_1 \cdot (\vec{B}_2 - \cancel{\vec{B}_1}) = \rho_{sm} \rightarrow$$

$$\hat{n}_1 \times (\vec{E}_2 - \cancel{\vec{E}_1}) = -M_s$$

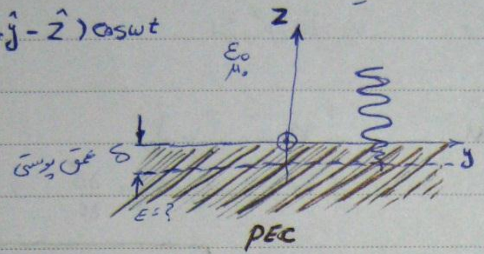
$$\hat{n}_1 \times (\vec{H}_2 - \cancel{\vec{H}_1}) = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \hat{n}_1 \cdot \vec{D}_2 = 0 \\ \hat{n}_1 \cdot \vec{B}_2 = \rho_{sm} \\ \hat{n}_1 \times \vec{E}_2 = -M_s \\ n_1 \times \vec{H}_2 = 0 \end{array}}$$

مثال: ناحیه $Z<0$ از PEC پرشده و $Z>0$ هوا قرار دارد. اگر شدت میدان مغناطیسی یک موج الکترومغناطیسی در نزدیکی مرز دو محیط به صورت ذیل باشد، چگالی جریان سطحی روی PEC را به دست آورید.

$\vec{H} = (2\sqrt{3}\,\hat{x} + \hat{y} - \hat{z})\cos\omega t$

$J_s = ?$



$\hat{n}_1 \times \vec{H}_2 = \vec{J}_s$

$\hat{z} \times (2\sqrt{3}\,\hat{x} + \hat{y} - \hat{z})\cos\omega t$

$\Rightarrow \vec{J}_s = (2\sqrt{3}\,\hat{y} - \hat{x})\cos\omega t$

KVL: فرم انتگرالی $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} - M_i \qquad \vec{M}_i = 0$

$\varphi = Li$

$\sum V =$ ولتاژ $= \oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint_s \frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_s B\cdot ds = -\frac{\partial}{\partial t}\varphi_m = -\frac{\partial}{\partial t}L_s i$

$\rightarrow \sum V = -L_s \frac{\partial}{\partial t} i = 0$

نماینده اندوکتانس پراکنده مدار — نرکانس جریان

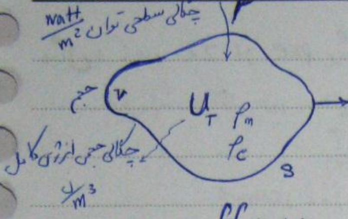
KCL: فرم انتگرالی $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ معادله پیوستگی

$\sum I = \oiint_s \vec{J}\cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\iiint_v \rho_v\, dv \longrightarrow \oiint_s \vec{J}\cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t}Q_s = -\frac{\partial}{\partial t}C_s V = -C_s\frac{\partial V}{\partial t}$

(5)

Subject:

Year. Month. Date. ( )



قضیه پوینتینگ: poynting theorem.

P به داخل و $\hat{n}$ به خارج

$-\oint\!\!\oint \vec{P}\cdot\vec{ds}$ توان ورودی به حجم V

$\iiint_V U_T\, dv$ انرژی کل داخل حجم V

$$\underbrace{-\oint\!\!\oint \vec{P}\cdot\vec{ds} = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V U_T\, du}_{\text{پایستگی انرژی}}$$

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}_{ic} + \vec{J}_D & ; \checkmark \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\vec{M}_D - \vec{M}_i = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & , \checkmark \end{cases}$$

قضیه دیورژانس

$$\Rightarrow -\iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{P}\, dv = \frac{\partial}{\partial v}\iiint_V U_T\, dv \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{P} = \frac{\partial}{\partial t}U_T \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{P} + \frac{\partial}{\partial t}U_T = 0}$$

انرژی ذخیره شده در میدان ها — تبدیل به انرژی مکانیکی می شود

$$U_T = U_{EM} + U_d$$

انرژی $U_d = \vec{f}\cdot\vec{dl}$ $\longrightarrow \frac{\partial U_d}{\partial t} = \vec{f}\cdot\frac{\vec{dl}}{dt} = \vec{f}\cdot\vec{v} = (\rho_m\vec{H} + \rho_c\vec{E})\cdot\vec{v}$

نیروی الکتریکی وارد بر بار الکتریکی — نیروی مغناطیسی وارد بر بار

$$\Rightarrow \frac{\partial U_d}{\partial t} = \underbrace{\rho_m\vec{v}}_{M_i}\cdot\vec{H} + \underbrace{\rho_e\vec{v}}_{J_{ic}}\cdot\vec{E} = \vec{H}\cdot\vec{M}_i + \vec{E}\cdot\vec{J}_{ic}$$

$\rho_{ms} = \vec{M}\cdot\hat{n}$, $\rho_{es} = \vec{P}\cdot\hat{n}$

$$\boxed{\Rightarrow \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{P}}_{\text{انتشار}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}U_{EM}}_{\text{ذخیره}} = \underbrace{-\vec{J}_{ic}\vec{E} - \vec{M}_i\cdot\vec{H}}_{\text{مصرف}}} \quad (1)$$

$\rho_{mv} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{M}$, $\rho_{ev} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$

$$\frac{\partial U_d}{\partial t} = \vec{H}\cdot\vec{M}_i + \vec{E}\cdot\vec{J}_{ic} = \vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H} - \vec{J}_D) + \vec{H}\cdot(-\vec{\nabla}\times\vec{E} - \vec{M}_d)$$

$$= \vec{E}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{H} - \vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} - \vec{H}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{E} - \vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{H}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{E} - \vec{E}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{H} + \vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial U_d}{\partial t}$$

$\checkmark$: $\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})$

$$\Rightarrow -\frac{\partial U_d}{\partial t} = \vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{H}) + \vec{E}\cdot\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\vec{E}) + \vec{H}\cdot\frac{\partial}{\partial t}(\mu\vec{H}) \Rightarrow -\frac{\partial U_d}{\partial t} = \vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{H}) + \frac{1}{2}\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\cdot\vec{E})$$

$$+\frac{1}{2}\mu\frac{\partial}{\partial t}(\vec{H}\cdot\vec{H}) = \boxed{\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{H}) + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\varepsilon\vec{E}\cdot\vec{E} + \frac{1}{2}\mu\vec{H}\cdot\vec{H}\right]} \quad (II)$$

Subject: (یکشنبه ۱۴-۱۱٫۵ بازدید از مخابرات) (6)

Year. Month. Date. ( )

$A\cos(\omega t+\varphi) \rightarrow A e^{j\omega t} e^{j\varphi}$

$A e^{j\varphi}$ فازور

① و ② $\rightarrow$ $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$ بردار poynting

$U_{EM} = \frac{1}{2}\varepsilon \vec{E}\cdot\vec{E} + \frac{1}{2}\mu \vec{H}\cdot\vec{H}$

فرم انتگرالی

① $\Rightarrow$

$$\boxed{-\oint \vec{P}\cdot d\vec{s} = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_v \frac{1}{2}(\mu \vec{H}\cdot\vec{H} + \varepsilon \vec{E}\cdot\vec{E})\,dv + \iiint_v (\vec{J}\cdot\vec{E} + \vec{H}\cdot\vec{M})\,dv}$$

فرم انتگرالی قضیه poynting

میدان های هماهنگ زمانی :

منابع امواج ρ و J هستند. معمولاً J های هماهنگ زمانی است.

$$\vec{E}(x,y,z,t) = Re[\vec{E}(x,y,z)e^{j\omega t}] \quad , \quad \vec{D}(x,y,z,t) = Re[D(x,y,z)e^{j\omega t}]$$

$$\vec{H}(x,y,z,t) = Re[\vec{H}(x,y,z)e^{j\omega t}] \quad , \quad \vec{B}(x,y,z,t) = Re[B(x,y,z)e^{j\omega t}]$$

چند بحث ذیل مبحث میدان های هماهنگ زمانی مطرح است :

poynting vector :

$$\vec{P} = \vec{E}\times\vec{H} = Re\{\vec{E}e^{j\omega t}\} \times Re[\vec{H}e^{j\omega t}] = \left[\frac{\vec{E}e^{j\omega t} + \vec{E}^{*}e^{-j\omega t}}{2}\right] \times \left[\frac{\vec{H}e^{j\omega t} + \vec{H}^{*}e^{-j\omega t}}{2}\right]$$

$$= \frac{\vec{E}\times\vec{H}}{4}e^{2j\omega t} + \underbrace{\frac{\vec{E}\times\vec{H}^{*}}{4}\cancel{e^{2j\omega t}} + \frac{\vec{E}^{*}\times\vec{H}}{4}\cancel{e^{2j\omega t}}} + \frac{\vec{E}^{*}\times\vec{H}^{*}}{4}e^{-2j\omega t}$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{P} = \frac{1}{2}Re\{\vec{E}\times\vec{H}^{*}\} + \frac{1}{2}Re\{\vec{E}\times\vec{H}e^{2j\omega t}\}}$$

چگالی سطحی توان لحظه ای

اندازه+زاویه

$$\boxed{\Rightarrow P_{avg} = \frac{1}{2}Re\{\vec{E}\times\vec{H}^{*}\}}$$

چگالی سطحی توان متوسط

۲ معادلات ماکسول :

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -M_d - M_i = -j\omega B - M_i \quad , \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \rho_{mv}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = J_i + J_c + J_D = J_i + J_c + j\omega\vec{D} \quad , \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_{ev}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = J_i + \sigma\vec{E} + j\omega\varepsilon\vec{E} = J_i + \sigma\vec{E} + j\omega(\varepsilon' - j\varepsilon'')\vec{E} = J_i + \sigma\vec{E} + j\omega\varepsilon'\vec{E} + \omega\varepsilon''\vec{E}$$

رسانایی

الکتریکی

قرارداد : $\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$, $\varepsilon' = (1+\chi_e)\varepsilon_0$

نماینده تلفات

$$= J_i + \vec{E}\underbrace{(\sigma + \omega\varepsilon'')}_{\sigma_e} + j\omega\varepsilon'\vec{E}$$

$$\checkmark: \tan\delta_e \triangleq \frac{\sigma + \omega\varepsilon''}{\omega\varepsilon'} = \underbrace{\frac{\sigma}{\omega\varepsilon'}}_{\tan\delta_s} + \underbrace{\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}}_{\tan\delta_a}$$

تانژانت تلفات

رسانای خوب $\Rightarrow$ مخرج $\ll$ صورت

عایق خوب $\Rightarrow$ صورت $\ll$ مخرج

$\delta_e = 0$? عایق خوب

$\delta_e = 90$? هادی خوب

به نام خدا

جلسه شنبه ۱۳۹۱ ,۷,۲۲

فصل دوم:

عادلات موج و حل آن ها:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\mu\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - M_i \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_{ve}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}_i + \vec{J}_c + \vec{J}_D = \vec{J}_i + \sigma\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \rho_{vm}$$

یادآوری:

$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}f = 0 \longrightarrow \nabla\cdot B = 0 \longrightarrow A$ پتانسیل برداری

$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{f} = 0 \longrightarrow \nabla\times E = 0 \longrightarrow V$ پتانسیل اسکالر قابل محاسبه است

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f = \nabla^2 f \quad (\text{اسکالر}) \longrightarrow \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\right)\right]$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} = \overrightarrow{\nabla(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})} - \nabla^2\vec{A}$$

کارتزین $\longrightarrow = \nabla^2 A_x\hat{x} + \nabla^2 A_y\hat{y} + \nabla^2 A_z\hat{z}$

در حالت کروی و استوانه‌ای داریم:

$$\nabla^2\vec{A} = \overrightarrow{\nabla(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})} - \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A}$$

در معادلات ماکسول معادلات دیفرانسیل مرتبه اول هستند به صورت coupled هستند. در معادله اول برای حذف یکی از میدان های $\vec{E}$ و $\vec{H}$ به صورت زیر عمل می کنیم:

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\mu\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{H}) - \vec{\nabla}\times\vec{M}_i = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{J}_i + \sigma\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) - \vec{\nabla}\times\vec{M}_i$$

$$= -\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{J}_i - \mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}\right) - \vec{\nabla}\times\vec{M}_i$$

$$\longrightarrow \overrightarrow{\nabla(\underbrace{\nabla\cdot\vec{E}}_{\frac{\rho_{ve}}{\varepsilon}})} - \nabla^2\vec{E} = -\mu\frac{\partial}{\partial t}J_i - \mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \vec{\nabla}\times\vec{M}_i$$

$$\boxed{\nabla\cdot\left(\frac{\rho_{vc}}{\varepsilon}\right)+\mu\frac{\partial}{\partial t}J_i+\mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}+\vec{\nabla}\times\vec{M}_i=\nabla^2\vec{E}}$$

معادله برداری موج ($\vec{E}$)

برای بردار $\vec{H}$ نیز همین روال را پیش می بریم :

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{\nabla}\times\vec{J}_i+\sigma\vec{\nabla}\times\vec{E}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{E})=\vec{\nabla}\times\vec{J}_i+\sigma\left(-\mu\frac{\partial H}{\partial t}-M_i\right)+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\mu\frac{\partial H}{\partial t}-M_i\right)$$

$$\Rightarrow\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{\nabla}\times\vec{J}_i-\mu\sigma\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}-\sigma M_i-\varepsilon\mu\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}-\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}M_i$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{\nabla(\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{H}}_{\rho_{mv}/\mu})}-\nabla^2\vec{H}=\dots$$

در این رابطه با جایگزینی به فرمول زیر می رسیم

$$\longrightarrow\boxed{\nabla^2\vec{H}=\overrightarrow{\nabla\left(\frac{\rho_{mv}}{\mu}\right)}+\mu\sigma\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}+\sigma M_i+\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}M_i-\vec{\nabla}\times\vec{J}_i}$$

معادله برداری موج ($\vec{H}$)

حالات خاص: $\rho_{vc}=\rho_{vm}=J_i=M_i=0$

الف) محیط بدون منبع و بدون تلفات:

$\sigma=0$

در این گونه محیط ها برای موج های $\vec{H}$ و $\vec{E}$ خواهیم داشت :

$$\begin{cases}\nabla^2\vec{E}=\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\\[2mm]\nabla^2\vec{H}=\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}\end{cases}$$

حال اگر این معادلات هماهنگ زمانی باشند داریم :

$$\begin{cases}\nabla^2\vec{E}=-\omega^2\mu\varepsilon\vec{E}\\\nabla^2\vec{H}=-\omega^2\mu\varepsilon\vec{H}\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}\nabla^2\vec{E}+\overbrace{\omega^2\mu\varepsilon}^{\beta^2}\vec{E}=0\\\nabla^2\vec{H}+\omega^2\mu\varepsilon\vec{H}=0\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}\nabla^2\vec{E}+\beta^2\vec{E}=0\\\nabla^2\vec{H}+\beta^2\vec{H}=0\end{cases}$$

به β^2 عدد موج می گوییم که گاهی با K هم نمایش داده می شود .

روش حل معادلات موج فوق مشابه است . پس یکی از معادلات را حل می کنیم .

حل در دستگاه کارتزین :

$$\nabla^2\vec{E}+\beta^2\vec{E}=0\Rightarrow(\nabla^2E_x\hat{x}+\nabla^2E_y\hat{y}+\nabla^2E_z\hat{z})+\beta^2(E_x\hat{x}+E_y\hat{y}+E_z\hat{z})=0$$

یادآوری لاپلاسین در کارتزین : $\nabla^2 f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

همچنین فرض کنیم $E_{x,y,z}(x,y,z)=f(x)g(y)h(z)$

در این صورت معادله فوق به ۳ معادله اسکالر زیر تبدیل می شود :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\vec{E}_x}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\vec{E}_x}{\partial y^2}+\dfrac{\partial\vec{E}_z}{\partial z^2}+\beta^2E_x=0 \quad (1)\\[4mm]\dfrac{\partial^2\vec{E}_y}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\vec{E}_y}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\vec{E}_y}{\partial z^2}+\beta^2E_y=0\\[4mm]\dfrac{\partial^2\vec{E}_z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}+\beta^2E_z=0\end{cases}$$

معادله ① را حل می کنیم. ۲ معادله دیگر مثل معادله ① حل خواهند شد. داریم:

$$f''gh+g''fh+h''fg+\beta^2 fgh=0 \xrightarrow{\div fgh} \frac{f''}{f}+\frac{g''}{g}+\frac{h''}{h}=-\beta^2$$

تعریف می کنیم:

$$\beta^2=\beta_x^2+\beta_y^2+\beta_z^2$$

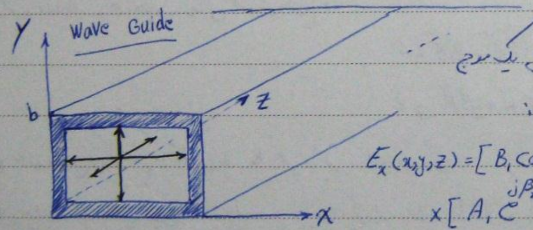
با این تعریف ۳ معادله خواهیم داشت و برای یافتن E_x، E_y و E_z باید این معادلات حل شوند.

$$\begin{cases}\dfrac{f''}{f}=-\beta_x^2\\ \dfrac{g''}{g}=-\beta_y^2\\ \dfrac{h''}{h}=-\beta_z^2\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}f''+\beta_x^2 f=0\\ g''+\beta_y^2 g=0\\ h''+\beta_z^2 h=0\end{cases}$$

$$\rightarrow f(x)=\begin{cases}A_1 e^{j\beta_x x}+A_2 e^{-j\beta_x x} \longrightarrow \text{موج متحرک}\\ \text{یا}\\ B_1\cos(\beta_x x)+B_2\sin(\beta_x x) \longrightarrow \text{موج ساکن}\end{cases}$$

$$\rightarrow g(y)=\begin{cases}A_1 e^{j\beta_y y}+A_2 e^{-j\beta_y y}\\ B_1\cos(\beta_y y)+B_2\sin(\beta_y y)\end{cases} \longrightarrow E_x=f(x)g(y)h(z)$$

$$\rightarrow h(z)=\begin{cases}A_1 e^{j\beta_z z}+A_2 e^{-j\beta_z z}\\ B_1\cos(\beta_z z)+B_2\sin(\beta_z z)\end{cases}$$



مثال: در موجبر زیر داریم: موج در راستای x و y یک موج ایستا ولی در جهت z یک موج متحرک است بنابراین:

$$E_x(x,y,z)=\left[B_1\cos(\beta_x x)+B_2\sin(\beta_x x)\right]\left[C_1\cos\beta_y y+C_2\sin(\beta_y y)\right]\times\left[A_1 e^{j\beta_z z}+A_2 e^{-j\beta_z z}\right]$$

حالت خاص ب) محیط بدون منبع ولی با اتلاف: $\leftarrow \sigma\neq 0$

(همانند حالت الف)

در این حالت خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\nabla^2\vec E=\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec E}{\partial t^2}+\mu\sigma\dfrac{\partial\vec E}{\partial t}\\ \nabla^2\vec H=\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec H}{\partial t^2}+\mu\sigma\dfrac{\partial\vec H}{\partial t}\end{cases} \xrightarrow[\text{زمانی باشند}]{\text{اگر معادلات هامنیک}} \begin{cases}\nabla^2\vec E=-\omega\mu\varepsilon\vec E+j\omega\mu\sigma\vec E\\ \nabla^2\vec H=-\omega\mu\varepsilon\vec E+j\omega\mu\sigma\vec H\end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\Rightarrow\begin{cases}\nabla^2\vec{E}=\vec{E}(j\omega\mu\sigma-\omega^2\mu\varepsilon)\\ \nabla^2\vec{H}=\vec{H}(j\omega\mu\sigma-\omega^2\mu\varepsilon)\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\nabla^2\vec{E}-\overbrace{(j\omega\mu\sigma-\omega^2\mu\varepsilon)}^{\gamma^2}\vec{E}=0\\ \nabla^2\vec{H}-(j\omega\mu\sigma-\omega^2\mu\varepsilon)\vec{H}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\nabla^2\vec{E}-\gamma^2\vec{E}=0\\ \nabla^2\vec{H}-\gamma^2\vec{H}=0\end{cases}$$

به γ (گاما) ثابت انتشار می گوئیم. در این حالت نیز تنها یک معادله را همانند فرضیات قبل حل می کنیم:

$$\nabla^2\vec{E}-\gamma^2\vec{E}=0 \longrightarrow \begin{cases}f''-f\gamma_x^2=0\\ g''-g\gamma_y^2=0\\ h''-h\gamma_z^2=0\end{cases}\qquad \boxed{\text{که}\ \gamma_x^2+\gamma_y^2+\gamma_z^2=\gamma^2}$$

بنابراین معادلات پس از حل آن ها خواهیم داشت:

$$f(x)=\begin{cases}A_1e^{\gamma_x x}+A_2e^{-\gamma_x x}=A_1e^{\alpha x}e^{j\beta x}+A_2e^{-\alpha x}e^{-j\beta x}\\ B_1\cosh(\gamma_x x)+B_2\sinh(\gamma_x x)\end{cases}$$

$$g(y)=\begin{cases}A_1e^{\gamma_y y}+A_2e^{-\gamma_y y}\\ B_1\cosh(\gamma_y y)+B_2\sinh(\gamma_y y)\end{cases}$$

$$h(z)=\begin{cases}A_1e^{\gamma_z z}+A_2e^{-\gamma_z z}\\ B_1\cosh(\gamma_z z)+B_2\sinh(\gamma_z z)\end{cases}$$

✓ نکته: توجه به گاما: (γ)

$$\gamma=\pm\sqrt{j\omega\mu\sigma-\omega^2\mu\varepsilon}=\alpha+j\beta$$

بنابراین γ هم دارای مؤلفه حقیقی و هم دارای مؤلفه موهومی است (برخلاف β که موهومی محض است) به α، **ثابت تضعیف** گفته می شود که واحد آن $\frac{NP}{m}$ (نپر) یا $\frac{db}{m}$ است. به β نیز **ثابت فاز** گفته می شود که واحد آن $\frac{rad}{m}$ ($\frac{\text{رادیان}}{\text{متر}}$) است

✓ نکته:

$$\frac{1NP}{8.69}=1\,db$$

PAPCO

به نام خدا

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۱۱۰

جلسه دوشنبه ۱۳۹۱/۷/۲۴

حل معادله موج در دستگاه استوانه‌ای:

$\nabla^2\vec{E}+\beta^2\vec{E}=0$

$\Rightarrow \nabla^2(E_r\hat{r}+E_\varphi\hat{\varphi}+E_z\hat{z})+\beta^2\vec{E}=0 \rightarrow \nabla^2(E_r\hat{r})+\nabla^2(E_\varphi\hat{\varphi})+\nabla^2(E_z\hat{z})+\beta^2\vec{E}=0$

$\rightarrow \nabla^2(E_r\hat{r})+\nabla^2(E_\varphi\hat{\varphi})+\hat{z}\,\nabla^2(E_z)+\beta^2\vec{E}=0$ *

$$\nabla^2(E_r\hat{r})=\underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial(\hat{r}E_r)}{\partial r}\right)}_{A}+\underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(\hat{r}E_r)}{\partial\varphi}\right)}_{B}+\underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial(\hat{r}E_r)}{\partial z}\right)}_{C}$$

$\frac{\partial\hat{r}}{\partial r}=0 \leftarrow \hat{r}=\cos\varphi\,\hat{x}+\sin\varphi\,\hat{y}$: ✓

$$\Rightarrow A=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\hat{r}\frac{\partial E_r}{\partial r}\right)=\frac{1}{r}\left[\hat{r}\frac{\partial E_r}{\partial r}+r\left(\cancel{\frac{\partial\hat{r}}{\partial r}}^{\,0}\frac{\partial E_r}{\partial r}+\hat{r}\frac{\partial^2E_r}{\partial r^2}\right)\right]$$

نکته: $\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\varphi}=-\cos\varphi\,\hat{x}-\sin\varphi\,\hat{y}=-\hat{r}$ ✓

$$\Rightarrow A=\hat{r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial r}+\frac{\partial^2E_r}{\partial r^2}\right]$$

نکته: $\boxed{\frac{\partial\hat{r}}{\partial\varphi}=-\sin\varphi\,\hat{x}+\cos\varphi\,\hat{y}=\hat{\varphi}}$ ✓

$$B=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial\hat{r}}{\partial\varphi}E_r+\hat{r}\frac{\partial E_r}{\partial\varphi}\right)$$

$$\Rightarrow B=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\hat{\varphi}E_r+\hat{r}\frac{\partial E_r}{\partial\varphi}\right)=\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\varphi}E_r+\hat{\varphi}\frac{\partial E_r}{\partial\varphi}+\frac{\partial\hat{r}}{\partial\varphi}\frac{\partial E_r}{\partial\varphi}+\hat{r}\frac{\partial^2E_r}{\partial\varphi}\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow B=\frac{1}{r^2}\left(-E_r\hat{r}+\hat{\varphi}\frac{\partial E_r}{\partial\varphi}+\hat{\varphi}\frac{\partial E_r}{\partial\varphi}+\hat{r}\frac{\partial^2E_r}{\partial\varphi}\right)}$$

$$C=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial(\hat{r}E_r)}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\hat{r}}{\partial z}E_r+\frac{\partial E_r}{\partial z}\hat{r}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial E_r}{\partial z}\hat{r}\right)=\frac{\partial^2E_r}{\partial z^2}\hat{r}+\frac{\partial\hat{r}}{\partial z}\frac{\partial E_r}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \boxed{C=\frac{\partial^2E_r}{\partial z^2}\hat{r}}$$

$$\Rightarrow \nabla^2(E_r\hat{r})=\hat{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial r}+\frac{\partial^2E_r}{\partial r}-\frac{E_r}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2E_r}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2E_r}{\partial z^2}\right)+\hat{\varphi}\left(\frac{2}{r^2}\frac{\partial E_r}{\partial\varphi}\right)$$

$$\nabla^2(E_\varphi\hat{\varphi})=\underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial(\hat{\varphi}E_\varphi)}{\partial r}\right)}_{D}+\underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(\hat{\varphi}E_\varphi)}{\partial r}\right)}_{E}+\underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial(\hat{\varphi}E_\varphi)}{\partial r}\right)}_{F}$$

$$D=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\left(\cancel{\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial r}}^{\,0}\cdot E_\varphi+\hat{\varphi}\frac{\partial E_\varphi}{\partial r}\right)\right)=\frac{1}{r}\left[\hat{\varphi}\cdot\frac{\partial E_\varphi}{\partial r}+r\hat{\varphi}\frac{\partial^2E_\varphi}{\partial r}+r\cancel{\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial r}}^{\,0}\frac{\partial E_\varphi}{\partial r}\right]$$

$$\Rightarrow D=\frac{1}{r}\left[\hat{\varphi}\cdot\frac{\partial E_\varphi}{\partial r}+r\hat{\varphi}\frac{\partial^2E_\varphi}{\partial r^2}\right] \Rightarrow D=\hat{\varphi}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial E_\varphi}{\partial r}+\frac{\partial^2E_\varphi}{\partial r^2}\right]$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(12)

$$E = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\varphi}\cdot E_\varphi + \frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}\hat{\varphi}\right] = \frac{1}{r^2}\left[\underbrace{-\cancel{\frac{\partial\hat{r}}{\partial\varphi}}}_{-\varphi}\cdot E_\varphi - \hat{r}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial\varphi}\cdot\hat{\varphi} + \overbrace{\cancel{\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\varphi}}}^{-\hat{r}}\cdot\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}\right]$$

$$\boxed{\Rightarrow E = -\frac{E_\varphi}{r^2}\hat{\varphi} - \hat{r}\frac{1}{r^2}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial\varphi^2}\hat{\varphi} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}\hat{r}}$$

$$F = \hat{\varphi}\frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial z^2}$$

$$\Rightarrow \nabla^2(E_\varphi\hat{\varphi}) = \hat{r}\left(-\frac{2}{r^2}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}\right) + \hat{\varphi}\left(\frac{1}{r} + \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} - \frac{E_\varphi}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial z^2}\right)$$

$$\nabla^2(E_z) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial E_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow \nabla^2(E_z) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial E_z}{\partial r} + r\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}}$$

بنابراین معادله برداری * به ۳ معادله اسکالر زیر تبدیل می‌شود:

$$\hat{r}: \left(\frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 E_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_r}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 E_r}{\partial z^2}\right) - \frac{E_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi} + \beta^2 E_r = 0$$

$$\hat{\varphi}: \left(\frac{1}{r}\frac{\partial E_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial z^2}\right) - \frac{E_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial E_r}{\partial\varphi} + \beta^2 E_\varphi = 0$$

$$\hat{z}: \left(\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}\right) + \beta^2 E_z = 0 \quad (**)$$

۳ پرانتز فوق مشابه همدیگر هستند. پس خواهیم داشت:

$$\nabla^2(E_r) - \frac{E_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi} = -\beta^2 E_r$$

$$\nabla^2(E_\varphi) - \frac{E_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial E_r}{\partial\varphi} = -\beta^2 E_\varphi$$

معمولا از این دو معادله صرف نظر می‌شود و حل آن ریاضی محض است و ما به آن کاری نداریم

$$\nabla^2(E_z) = -\beta^2 E_z$$

حل ← فرض کنیم: $E_z(r,\varphi,z) = f(r)g(\varphi)h(z)$

با جایگذاری این فرض در رابطه ** داریم:

$$\frac{1}{r}f'gh + f''gh + \frac{1}{r^2}fg''h + fgh'' + \beta^2 fgh = 0 \xrightarrow{\div fgh} \frac{1}{r}\frac{f'}{f} + \frac{f''}{f} + \frac{1}{r^2}\frac{g''}{g} + \frac{h''}{h} + \beta^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{h''}{h} = -\beta_z^2 \Rightarrow \boxed{h'' + \beta_z^2 h = 0}$$

معادله دیفرانسیل حاکم بر $h(z)$

PAPCO

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{f'}{f}+\frac{f''}{f}+\frac{1}{r^2}\frac{g''}{g}+\underbrace{(\beta^2-\beta_z^2)}_{\beta_r^2}=0 \xrightarrow{\times r^2} r\frac{f'}{f}+r^2\frac{f''}{f}+\frac{g''}{g}+(\beta^2-\beta_z^2)r^2=0$$

$$\rightarrow \frac{g''}{g}=-m^2 \longrightarrow \boxed{g''+m^2g=0}$$ معادله حاکم بر $g(\varphi)$

$$\Rightarrow r\frac{f'}{f}+r^2\frac{f''}{f}+((r\beta_r)^2-m^2)=0 \xrightarrow{\times f} \boxed{r^2f''+rf'+((r\beta_r)^2-m^2)f=0}$$ معادله دیفرانسیل حاکم بر $f(r)$

به نام خدا

جلسه شنبه 7,29 براساس محاسبات جلسه قبل خواهیم داشت:

$g''+m^2g=0$

$h''+\beta_z^2h=0$

$r^2f''+rf'+((\beta_r r)^2-m^2)f=0$

جواب $g(\varphi)$:

$g(\varphi)=A_1e^{jm\varphi}+A_2e^{-jm\varphi}$ موج متحرک

یا $g(\varphi)=B_1\cos(m\varphi)+B_2\sin(m\varphi)$ موج ایستا

جواب $h(z)$:

$h(z)=A_1e^{j\beta_z z}+A_2e^{-j\beta_z z}$

یا $h(z)=B_1\cos(\beta_z z)+B_2\sin(\beta_z z)$

جواب $f(r)$، یادآوری:

$x^2y''+xy'+((\lambda x)^2-p^2)y=0$ معادله بسل

جواب های معادله بسل به صورت زیر است:

$Y_1(x)=A_1J_p(\lambda x)+A_2Y_p(\lambda x)$ تابع بسل نوع اول مرتبه P

$Y_2(x)=B_1H_p^{(1)}(\lambda x)+B_2H_p^{(2)}(\lambda x)$ تابع بسل نوع دوم مرتبه P

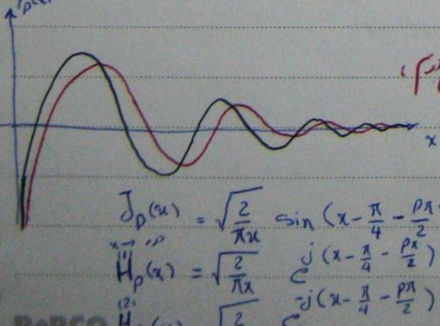
$$J_p(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p}}{m!\,(m+p)!}$$

$$Y_p(x)=\frac{\cos(p\pi)J_p(x)-J_{-p}(x)}{\sin(p\pi)}$$

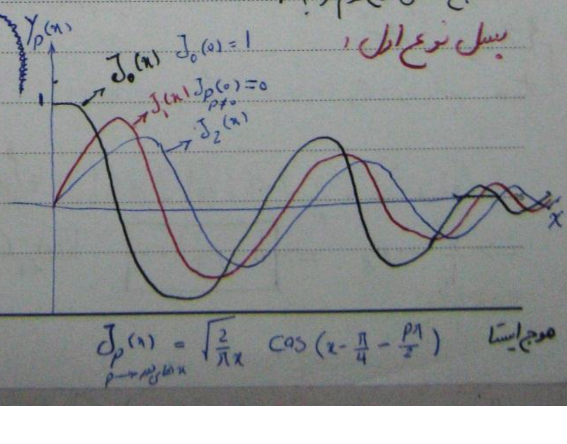
$H_p^{(1)}(x)=J_p(x)+jY_p(x)$ ، تابع هنکل نوع اول مرتبه P

$H_p^{(2)}(x)=J_p(x)-jY_p(x)$ ، تابع هنکل نوع دوم مرتبه P

بسل نوع دوم:



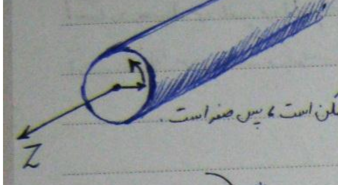
بسل نوع اول:



$J_p(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{p\pi}{2}\right)$

$\left.\begin{array}{l} H_p^{(1)}(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,e^{j\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{p\pi}{2}\right)} \\ H_p^{(2)}(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,e^{-j\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{p\pi}{2}\right)}\end{array}\right\}$ امواج متحرک

$J_p(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{p\pi}{2}\right)$ موج ایستا



□ مثال: معادلات داخل یک موج بر استوانه‌ای به صورت زیر است:

$$E(r,\varphi,z)=[A_1 J_m(\beta_r r)+A_2 Y_m(\beta_r r)]\times[B_1\cos(m\varphi)+B_2\sin(m\varphi)][C_1 e^{j\beta_z z}+C_2 e^{-j\beta_z z}]$$

که انتشار در جهت $-z$ — در جهت $+z$

$\leftarrow 0$ زیرا در $r=0$ میدان داخل موج‌بر باید ∞ که ناممکن است، پس صفر است.

در صورت انتشار امواج در بیرون از موج‌بر داریم:

$$E(r,\varphi,z)=[A_1 H_m^{(1)}(\beta_r r)+A_2 H_m^{(2)}(\beta_r r)][B_1\cos(m\varphi)+B_2\sin(m\varphi)][C_1 e^{j\beta_z z}+C_2 e^{-j\beta_z z}]$$

$\rightarrow 0$ ← زیرا میدان در ∞، برابر ∞ می‌شود که ناممکن است

یادآوری و مرور قضیه پوئینتینگ:

$$\nabla\cdot P+\frac{\partial}{\partial t}U_{EM}=-\vec{J}\vec{E}-\vec{M}\cdot\vec{H} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E}=M_i-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\quad \vec{J}_D=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{P}=\vec{E}\times\vec{H}\xrightarrow{\text{time-harmonic}}P_{avg}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\vec{E}\times\vec{H}^*\}$$

مختلط: $\vec{P}=\vec{E}\times\vec{H}^*$

$$\Rightarrow\nabla\cdot(E\times H^*)=H^*\cdot(\nabla\times E)-E\cdot(\nabla\times H^*)=\vec{H}^*\cdot(-M_i-j\omega\mu\vec{H})-\vec{E}\cdot(\underbrace{\vec{J}_c^*}_{\sigma\vec{E}^*}+\vec{J}_i^*-j\omega\varepsilon\vec{E}^*)$$

$$=-M_i\cdot H^*-j\omega\mu|\vec{H}|^2-\sigma|\vec{E}|^2-\vec{E}\cdot\vec{J}_i^*-j\omega\varepsilon|\vec{E}|^2$$

$$\Rightarrow\underbrace{-\frac{1}{2}\nabla\cdot(E\times H^*)}_{P_e}=\underbrace{\frac{1}{2}M_i\cdot H^*+\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{J}_i^*}_{-P_s}+\underbrace{\frac{\sigma}{2}|\vec{E}|^2}_{P_d}+j\omega\left(\underbrace{\mu\frac{|H|^2}{2}}_{W_m}-\underbrace{\frac{\varepsilon}{2}|\vec{E}|^2}_{W_e}\right)$$

$$\Rightarrow -P_e=-P_s+P_d+j\omega(W_m-W_e)\rightarrow P_s=P_e+P_d+j\omega(W_m-W_c)$$

supply ← تولید — exit — مصرف — ← بخش موهومی توان

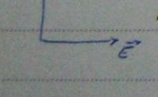
رسانایی

$\sigma=\sigma_s+\sigma_a\rightarrow$ الکترونیتیو

فصل سوم: «انتشار موج و پلاریزاسیون»

mode (مُد): ترکیب میدان‌ها (حالات ترکیب میدان‌ها) را مُد می‌گوئیم. جواب‌های معادلات ماکسول تحت شرایط مرزی را مُد گوئیم.

TEM mode، مُد غالب در فضای آزاد را TEM گوئیم.



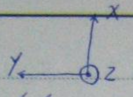
$\vec{H}$ — $\vec{E}$

equiphase plan — صفحه هم فاز

موج تخت: اگر صفحات هم فاز آن هم با هم موازی هستند به آن یک موج تخت (plan) می‌گوئیم.

اگر صفحات هم فاز، هم اندازه باشند به آن موج تخت یکنواخت می‌گویند: Uniform Plan Wave

equiamplitude plan صفحه هم اندازه



انتشار در محیط بی تلف، بی کران، بی منبع: دستگاه فرضی ←

فرض ها: ① موج تخت و یکنواخت است ② مُد TEM ③ میدان الکتریکی موج تنها دارای E_x است

E

$$\vec{E}(x,y,z) = E_x(x,y,z)\,\hat{x} \qquad \frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$$

$$\rightarrow \vec{E} = E_x\hat{x} = \underbrace{f(x)}_{1}\,\underbrace{g(y)}_{1}\,h(z)\,\hat{x} = h(z)\,\hat{x}$$

در این صورت ⟵ $\vec{E}_{\text{فازور}} = \left(E_0^{+} e^{-j\beta z} + E_0^{-} e^{+j\beta z} \right)\hat{x}$

$$\Rightarrow \vec{E}(x,y,z,t) = \mathrm{Re}\{\vec{E}\, e^{j\omega t}\} = \mathrm{Re}\{ E_0^{+} e^{-j\beta z} e^{j\omega t} + E_0^{-} e^{j\beta z} e^{j\omega t}\}\,\hat{x}$$

$$\vec{E}(x,y,z,t) = [E_0^{+}\cos(\omega t - \beta z) + E_0^{-}\cos(\omega t + \beta z)]\,\hat{x}$$

مقداری ثابت (به علت هم فاز بودن TEM)

✓ سرعت فاز: phase velocity

$$\omega t - \beta z = Cte \rightarrow \omega - \beta\frac{\partial z}{\partial t} = 0 \rightarrow \omega = \beta\frac{\partial z}{\partial t} \rightarrow \boxed{\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\omega}{\beta} = V_p} \;,\; \boxed{\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

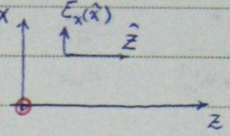
فصل دوم.

انتشار موج ← محیط بی تلف نامحدود بودن منبع ← انتشار در جهت محورهای مختصات / انتشار در جهت دلخواه

انتشار موج ← محیط با تلف نامحدود بودن منبع ← انتشار در جهت محورهای مختصات / انتشار در جهت دلخواه

پلاریزاسیون ،

$$\vec{E} = (E_0^+ e^{-j\beta z} + E_0^- e^{+j\beta z})\,\hat{x}$$



$$E(t) = [E_0^+ \cos(\omega t - \beta z) + E_0^- \cos(\omega t + \beta z)]\,\hat{x}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \quad \text{uniform}$$

سرعت فاز $V_p = \frac{\omega}{\beta}$

معادلات ماکسول $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega\mu \vec{H} \qquad \vec{H} = -\frac{1}{j\omega\mu} \vec{\nabla} \times \vec{E}$

$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{-1}{j\omega\mu} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{H} = -\frac{1}{j\omega\mu}\left(\hat{y}\frac{\partial E_x}{\partial z} - \underbrace{\hat{z}\frac{\partial E_x}{\partial y}}_{\text{uniform}}\right)$$

$$\vec{H} = \frac{-\hat{y}}{j\omega\mu}\left(-j\beta E_0^+ e^{-j\beta z} + j\beta E_0^- e^{+j\beta z}\right) = \frac{\hat{y}\beta}{\omega\mu}\left(E_0^+ e^{-j\beta z} - E_0^- e^{j\beta z}\right) = \frac{\hat{y}\,\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{\omega\mu}\left(E_0^+ e^{-j\beta z} - E_0^- e^{j\beta z}\right)$$

$$\vec{H} = \hat{y}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left(E_0^+ e^{-j\beta z} - E_0^- e^{j\beta z}\right) = \hat{y}\left(\frac{E_0^+}{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}} e^{-j\beta z} - \frac{E_0^-}{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}} e^{j\beta z}\right)$$

$$H(t) = \left[\frac{E_0^+}{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}\cos(\omega t - \beta z) - \frac{E_0^-}{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}\cos(\omega t + \beta z)\right]\hat{y}$$

H_0^+ موج متحرک در جهت z $\rightarrow H_0^-$ موج متحرک در جهت $-z$

امپدانس موج Wave Impedence

$$\eta_w = \frac{\text{شدت میدان الکتریکی موج}}{\text{شدت میدان مغناطیسی موج}} = \frac{E}{H} = \frac{V/m}{A/m} = \frac{V}{A}\,(\Omega)$$

$$\frac{E_0^+}{\sqrt{\mu/\varepsilon}} = H_0^+ \Rightarrow \frac{E_0^+\,\hat{x}}{H_0^+\,\hat{y}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \eta_w^+$$ در جهت مثبت z (*) $\Rightarrow \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ = امپدانس محیط

$$\frac{-E_0^-}{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}} = H_0^- \Rightarrow \frac{-E_0^-\,\hat{x}}{H_0^-\,\hat{y}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \eta_w^-$$ در جهت منفی z (*)

✓ نکته: همیشه (در حالت کلی) امپدانس موج (η_w) با امپدانس محیط (η) باهم برابرند (در امواج TEM)

✓ نکته: امپدانس (ذاتی) محیط برای خلأ $\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\,(\Omega) \cong \boxed{300\,\Omega}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

بردار پوئینتینگ $(\vec{P})$: (چگالی توان $\frac{Watt}{m^2}$)

در حالت کلی E و H $\longrightarrow \vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$

اگر E و H فازوری باشند $\longrightarrow \vec{P} = \frac{1}{2} Re\{\vec{E} \times \vec{H}^*\} + \frac{1}{2} Re\{\vec{E} \times \vec{H} e^{j2\omega t}\}$

$\vec{P}$ متوسط $= \frac{1}{2} Re\{\vec{E} \times \vec{H}^*\}$

سرعت گروه (سرعت انرژی) : (V_g یا V_e)

$$V_g = \frac{P^+}{W^+} = \frac{P^+}{W_e^+ + W_m^+} = \frac{\frac{Watt}{m^2}}{J/m^3} = \frac{\frac{J}{Sm^2}}{J/m^3} = \frac{m}{s}$$

لحظه‌ای

$$W_e^+ = \frac{1}{2} \varepsilon E_0^{+2} \cos^2(\omega t - \beta z) \longleftarrow W_e^+ = \frac{1}{2} \varepsilon E_0^{+2} \qquad H_0^+ = \frac{E_0^+}{\sqrt{\mu/\varepsilon}}$$

$$W_m^+ = \frac{1}{2} \mu H_0^{+2} \cos^2(\omega t - \beta z) \longleftarrow W_m^+ = \frac{1}{2} \mu H_0^{+2}$$

$$\hookrightarrow W_m^+ = \frac{1}{2} \mu \times \frac{\varepsilon E_0^2}{\mu} \cos^2(\omega t - \beta z) = \frac{1}{2} \varepsilon E_0^{+2} \cos(\omega t - \beta z)$$

$$W^+ = W_e^+ + W_m^+ = \varepsilon E_0^{+2} \cos^2(\omega t - \beta z)$$

$$\begin{cases} \vec{P}^+ = \vec{E}^+ \times \vec{H}^+ = E_0^+ \cos(\omega t - \beta z)\hat{x} \times H_0^+ \cos(\omega t - \beta z)\hat{z} = E_0^+ \frac{E_0^+}{\sqrt{\mu/\varepsilon}} \cos^2(\omega t - \beta z)\hat{z} \\ \Rightarrow \vec{P}^+ = \frac{E_0^{+2}}{\sqrt{\mu/\varepsilon}} \cos^2(\omega t - \beta z)\hat{z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_g = \frac{\frac{E_0^{+2}}{\sqrt{\mu/\varepsilon}} \cos^2(\omega t - \beta z)}{\varepsilon E_0^{+2} \cos^2(\omega t - \beta z)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{\mu/\varepsilon}}}{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

نکته :

$$V_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}} , V_g = \frac{\partial \omega}{\partial \beta} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \longrightarrow V_p \cdot V_g = \frac{1}{\mu\varepsilon}$$

حاصلضرب سرعت انتقال انرژی موج و سرعت انتقال فاز موج برابر است با مجذور سرعت نور در آن محیط .

موج ایستا (ساکن) :

$$E = [E_0^+ \cos(\beta z) - jE_0^+ \sin(\beta z)] + E_0^- \cos(\beta z) + jE_0^- \sin(\beta z)]\hat{x}$$

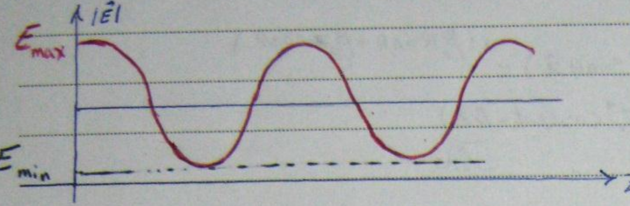
$$= \hat{x}\Big(\underbrace{[(E_0^+ + E_0^-)\cos\beta z]}_{\text{بخش حقیقی}} + j\underbrace{[(-E_0^+ + E_0^-)\sin\beta z]}_{\text{بخش موهومی}}\Big)$$

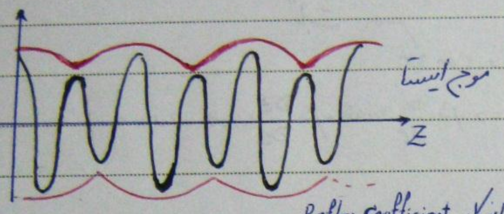
$$\vec{E} = \hat{x}\left[\sqrt{(E_0^+ + E_0^-)^2 \cos^2(\omega t - \beta z) + (E_0^- - E_0^+)^2 \sin^2(\beta z)}\right] e^{-j\, tg^{-1}\left(\frac{E_0^- - E_0^+}{E_0^+ + E_0^-} \times tg(\beta z)\right)}$$

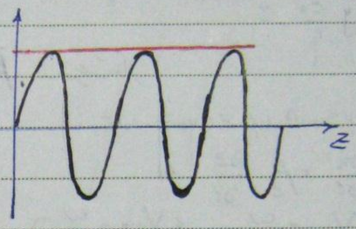
اندازه میدان الکتریکی $|\vec{E}| = \sqrt{(E_0^{+2} + E_0^{-2} + 2E_0^+ E_0^-)\cos^2(\beta z) + (E_0^{-2} + E_0^{+2} - 2E_0^- E_0^+)\sin^2 \beta z}$

ako

$$|\vec{E}| = \sqrt{E_0^{+2} + E_0^{-2} + 2E_0^{+}E_0^{-}\left(\cos^2(\beta z) - \sin^2(\beta z)\right)} = \sqrt{E_0^{+2} + E_0^{-2} + 2E_0^{+}E_0^{-}\cos(2\beta z)}$$







گاما (ضریب انعکاس) Reflex coefficient

$$SWR = \frac{E_{max}}{E_{min}} = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}$$

نسبت موج ساکن: SWR
Standing wave Ratio

$$|\vec{E}_{max}| = \sqrt{E_0^{+2} + E_0^{-2} + 2E_0^{+}E_0^{-}}$$

، $\cos(2\beta z) = 1 \rightarrow 2\beta z = 2k\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} z = k\pi \Rightarrow \boxed{z = \frac{k\lambda}{2}}$

فاصله بین max ها، $\frac{\lambda}{2}$ است.

$$|\vec{E}_{min}| = \sqrt{E_0^{+2} + E_0^{-} - 2E_0^{+}E_0^{-}}$$

، $\cos(2\beta z) = -1 \rightarrow 2\beta z = (2k+1)\pi \rightarrow \beta z = k\pi + \frac{\lambda}{2} \Rightarrow$

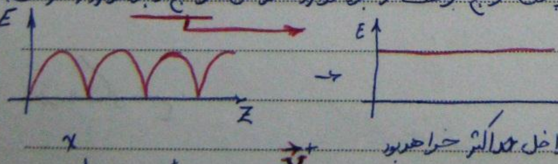
$\Rightarrow z = k\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$ فاصله بین min ها $\frac{\lambda}{2}$ است

فاصله بین یک max و min است.

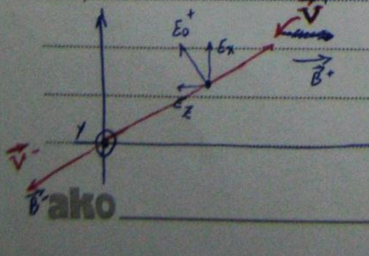
$$\vec{E}_x(z) = E_0^{+} e^{-j\beta z} + E_0^{-} e^{j\beta z}$$

، $SWR = \frac{E_0^{+} + E_0^{-}}{E_0^{+} - E_0^{-}} = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}$ ، $0 < \Gamma < 1$ چون دامنه برگشت همیشه از دامنه رفت کمتر است.

$|\Gamma| = 0$ یعنی انعکاس وجود ندارد، پس $SWR = 1$ ، چون موج برگشت وجود ندارد، تداخل امواج وجود ندارد (صفر است)



اگر $|\Gamma| = 1$ یعنی انعکاس حداکثر $\Leftarrow$ $SWR = \infty$ و تداخل حداکثر خواهد بود



محیط بی‌تلف و نامحدود بودن منبع: { انتشار در جهت محورها / انتشار در جهت دلخواه

بردارها ثابت انتشار $\leftarrow$

بردار یکان $e^{-j\vec{\beta}\cdot\vec{z}}$ ، $\vec{z}$

$$E = \vec{E}^{+} + \vec{E}^{-} = \left(E_0^{+}\cos\theta\,\hat{x} - E_0^{-}\sin\theta\,\hat{z}\right)e^{-j\vec{\beta}\cdot\vec{z}} + \left(E_0^{-}\cos\theta\,\hat{x} - E_0^{-}\sin\theta\,\hat{z}\right)e^{+j\vec{\beta}\cdot\vec{z}}$$

$$\vec{\beta} = \beta_x \hat{x} + \beta_z \hat{z} = \beta \sin\theta \, \hat{x} + \beta \cos\theta \, \hat{z} \quad , \quad \vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{\beta}\cdot\vec{r} = \beta_x x \sin\theta + \beta_z z \cos\theta$$

مورب : $\vec{E}^{+} = (E_0^{+}\cos\theta \, \hat{x} - E_0^{+}\sin\theta \, \hat{z}) \, e^{-j(\beta_x x \sin\theta + \beta_z z \cos\theta)}$

در راستای Z : $\vec{E}^{+} = \hat{x} E_0^{+} e^{-j\beta z} \longrightarrow E_0^{+}\cos(\omega t - \beta z)$

فاز ثابت

$$\vec{H} = \hat{y} \frac{E_0^{+}}{\eta} e^{-j(\beta_x x \sin\theta + \beta_z z \cos\theta)}$$

ثابت

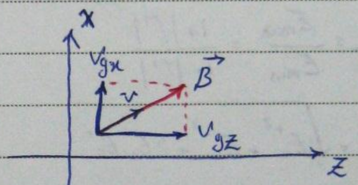
سرعت فاز $\vec{\beta}\cdot\vec{r} - \omega t = const$

$\Rightarrow \beta x \sin\theta + \beta z \cos\theta - \omega t =$ ثابت $\Rightarrow \beta \frac{\partial x}{\partial t}\sin\theta + \beta \frac{\partial z}{\partial t}\cos\theta - \omega = 0$

$$\Rightarrow \beta_x \overbrace{\frac{\partial x}{\partial t}}^{V_x} + \beta_z \overbrace{\frac{\partial z}{\partial t}}^{V_z} = \omega$$

$$\Rightarrow V_{px} = \frac{\omega}{\beta_x} \quad , \quad V_{pz} = \frac{\omega}{\beta_z} \rightarrow \frac{\omega}{\beta\cos\theta} = \frac{V_p}{\cos\theta}$$

$$\hookrightarrow \frac{\omega}{\beta\sin\theta} = \frac{v_p}{\beta\sin\theta} > V_p$$



(دست راست) $Z \times y = -x$

$$\eta_x = -\frac{E_z}{H_y} \quad , \quad \eta_{-x} = \frac{E_z}{H_y}$$

امپدانس موج (η_w) ← نسبت میدان الکتریکی به مغناطیسی

$$\eta_z = \frac{E_x}{H_y} \quad , \quad \eta_{-z} = -\frac{E_x}{H_y} \qquad \eta_y = 0 \rightarrow \frac{E_y}{H_y} = 0 \Rightarrow E_y = 0$$

توان متوسط :

$$P_{avg} = \frac{1}{2} Re\{\vec{E} \times \vec{H}^{*}\} \Rightarrow P_{avg} = \frac{1}{2} Re\{(E_0^{+}\cos\theta \, \hat{x} - E_0^{+}\sin\theta \, \hat{z}) e^{-j(\beta x \sin\theta + \beta z \cos\theta)}$$

$$\times \hat{y} \frac{E_0^{+}}{\eta} e^{j(\beta x \sin\theta + \beta z \cos\theta)}\} \quad \boxed{= \frac{1}{2} Re\left\{\hat{z} \frac{|E_0^{+}|^2}{\eta}\cos\theta + \hat{x} \frac{|E_0^{+}|^2}{\eta}\sin\theta\right\}}$$

$$P_{avg} = \overbrace{\frac{|E_0^{+}|^2}{2\eta}\cos\theta \, \hat{z}}^{P_z} + \overbrace{\frac{|E_0^{+}|^2}{2\eta}\sin\theta \, \hat{x}}^{P_x}$$

در حالت کلی داریم :

$$\vec{E} = (E_x\hat{x} + E_y\hat{y} + E_z\hat{z}) e^{-j\vec{\beta}\cdot\vec{r}} + \vec{E}_0^{-} e^{j\vec{\beta}\cdot\vec{r}}$$

جهت حرکت موج

$$\vec{\beta} = \beta_x\hat{x} + \beta_y\hat{y} + \beta_z\hat{z} \quad , \quad H = \frac{1}{\eta}\left[\hat{\beta}^{+} \times \vec{E}^{+} + \hat{\beta}^{-} \times \vec{E}^{-}\right]$$

$$\hat{\beta}^{+} = \frac{\beta_x\hat{x} + \beta_y\hat{y} + \beta_z\hat{z}}{\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2}}$$

$\hat{\beta}$ بردار یکه در جهت

$$P_{avg} = \frac{1}{2} Re\{\vec{E} \times \vec{H}^*\} \qquad V_{px} = \frac{V_p}{\vec{\beta} \cdot \hat{x}} \;,\; V_{py} = \frac{V_p}{\vec{\beta} \cdot \hat{y}} \;,\; V_{pz} = \frac{V_p}{\vec{\beta} \cdot \hat{z}} \Rightarrow V_p = V_{px}\,\hat{x} + V_{py}\,\hat{y} + V_{pz}\,\hat{z}$$

$$V_{gx} = V_g\, \vec{\beta} \cdot \hat{x} \;,\; V_{gy} = V_g\, \vec{\beta} \cdot \hat{y} \;,\; V_{gz} = V_g\, \vec{\beta} \cdot \hat{z} \Rightarrow \vec{V_g} = V_{gx}\,\hat{x} + V_{gy}\,\hat{y} + V_{gz}\,\hat{z}$$

$$\eta_x = -\frac{E_z}{H_y} \;,\; \eta_y = \frac{E_z}{H_x} \;,\; \eta_z = \frac{E_x}{H_y}$$

$$E_x(Z) = \sqrt{E_0^{+2} + E_0^{-2} + 2E_0^+ E_0^- \cos 2(\beta Z)} \qquad 0 < \Gamma < 1 \rightarrow E_0^+ = |\Gamma|\, E_0^-$$

$$E_x(Z) = \sqrt{E_0^{+2} + |\Gamma|^2 E_0^{+2} + 2E_0^{+2} |\Gamma| \cos(2\beta Z)} = E_0^+ e^{-j\beta Z} + |\Gamma|\, E_0^+ e^{j\beta Z}$$

؟: تمرین در Matlab :

حل معادلات ، $\left.\begin{array}{l}\text{TEM}\\ \text{plane}\\ \text{uniform}\end{array}\right\}$

$\lambda ، V_p ، V_g ، \vec{H} ، \vec{E} ، \vec{\beta} - Z_w$

$\nabla^2 \vec{E} + \beta^2 \vec{E} = 0$

بی تلف loss less:
- موج در راستای محورهای مختصات انتشار یابد (Z)
- موج در محیط بی تلف نامحدود، بودن منبع
- امواج مورب

با تلف:
- در راستای محورها → General ، رسانای خوب ، عایق خوب
- $\nabla^2 \vec{E} + \gamma^2 \vec{E} = 0$
- مورب

معادله حاکم بر میدان الکتریکی موج TEM - plane - uniform

$\nabla^2 \vec{E} - \gamma^2 \vec{E} = 0$ $\qquad \gamma = \alpha + j\beta$ ← ثابت انتشار

فرض میدان الکتریکی تنها مولفه x دارد . میدان الکتریکی در راستای x و y تغییرات ندارد

$\vec{E} = E_x \hat{x}$ — $\frac{\partial E_x}{\partial y} , \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$

منبع در راستای z بیشتر منتشر می شود — محیط دارای تلف است

$\vec{\beta} = \beta_z \hat{z}$ $\quad$ جهت $-Z$ $\quad \sigma \neq 0 \quad$ جهت $+Z$

فازور میدان الکتریکی موج

$$E_x = E_{x_0}^{+} e^{-\gamma z} + E_0^{-} e^{\gamma z} \Rightarrow E_x = E_{x_0}^{+} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + E_{x_0}^{-} e^{+\alpha z} e^{j\beta z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega\mu \vec{H} \Rightarrow H = -\frac{1}{j\omega\mu} \vec{\nabla} \times \vec{E}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \hat{x}.(0) - \hat{y}\left(0 - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right) + \hat{z}\left(-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$$

فازور میدان $\vec{H}$

$$\vec{H} = \frac{-\hat{y}}{j\omega\mu} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{-\hat{y}}{j\omega\mu}\left(-\gamma E_{x_0}^{+} e^{-\gamma z} + \gamma E_{x_0}^{-} e^{\gamma z}\right) = \hat{y}\left(\frac{\gamma}{j\omega\mu} E_{x_0}^{+} e^{-\gamma z} - \frac{\gamma}{j\omega\mu} E_{x_0}^{-} e^{\gamma z}\right)$$

$$H_y = \frac{\gamma}{j\omega\mu} E_{x_0}^{+} e^{-\gamma z} + \left(-\frac{\gamma}{j\omega\mu} E_{x_0}^{-}\right) e^{\gamma z} = H_{y_0}^{+} e^{-\gamma z} + H_{y_0}^{-} e^{\gamma z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \vec{E} = \left(E_{x_0}^{+} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + E_{x_0}^{-} e^{\alpha z} e^{j\beta z}\right)\hat{x} \\ \vec{H} = \left(H_{y_0}^{+} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + H_{y_0}^{-} e^{\alpha z} e^{j\beta z}\right)\hat{y} \end{array}}$$

$$H = \frac{1}{\eta}\left(\hat{\beta} \times \vec{E}\right)$$

$$\eta_w = \frac{E_{x_0}^{+}}{H_{y_0}^{+}} = \frac{j\omega\mu}{\gamma}$$

$$\eta_w = \frac{j\omega\mu}{\sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}$$

$$\vec{E}(z,t)=\left[E_{x_0}^{+}e^{-\alpha z}\cos(\omega t-\beta z)+E_{x_0}^{-}e^{\alpha z}\cos(\omega t+\beta z)\right]\hat{x}$$

$$\vec{H}(z,t)=\left[H_{y_0}^{+}e^{-\alpha z}\cos(\omega t-\beta z)+H_{y_0}^{-}e^{\alpha z}\cos(\omega t+\beta z)\right]\hat{y}$$

سرعت فاز: چون می‌خواهیم کل مقدار نسبت به زمان ثابت باشد و $\cos(\omega t-\beta z)$ ثابت باشد ولذا $\omega t-\beta z$ وچون نمی‌توان جلوی زمان را گرفت، معادلهٔ دیفرانسیل z را حل می‌کنیم.

$$\frac{\partial z}{\partial t}=V_p=\frac{\omega}{\beta}$$

بردار پوینتینگ:

$$P_{avg}^{+}=\frac{1}{2}Re\left\{\vec{E}^{+}\times\vec{H}^{+*}\right\}=\frac{1}{2}Re\left\{\left(E_{x_0}^{+}e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}\hat{x}\right)\times\left(\frac{E_{x_0}^{+*}}{\eta_\omega^{*}}e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}\right)\right\}$$

$$\Rightarrow P_{avg}^{+}=\frac{1}{2}Re\left\{\frac{|E_{x_0}^{+}|^2e^{-2\alpha z}}{\eta_\omega^{*}}\right\}\hat{z}\quad\Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{با تلف } P_{avg}=\frac{1}{2}|E_{x_0}^{+}|^2e^{-2\alpha z}\,Re\left\{\frac{1}{\eta_\omega^{*}}\right\}\hat{z}\\ \text{بی‌تلف } P_{avg}=\frac{1}{2}\frac{|E_{x_0}^{+}|^2}{\eta}\hat{z}\end{array}}$$

موج ساکن:

$$|E_x(z)|=\sqrt{E_{x_0}^{+^2}e^{-2\alpha z}+E_{x_0}^{-^2}e^{2\alpha z}+2E_{x_0}^{+}E_{x_0}^{-}\cos(2\beta z)}\quad(\text{با تلف})$$

اثبات رابطه فوق به عهدهٔ دانشجو.

تمرین: موج ساکن را روی یک λ به ازای Γ های مختلف رسم کنید. توجه شود که،

γ رفتار انتشار را نشان می‌دهد

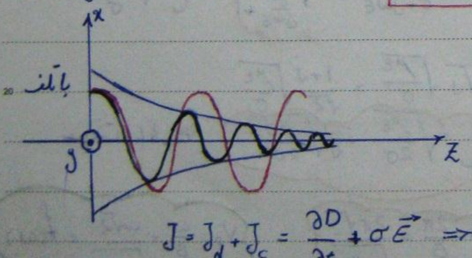
$$\gamma=\alpha+j\beta=\sqrt{j\omega\mu(\sigma+j\omega\varepsilon)}\quad\xrightarrow{}\ \alpha,\beta=?$$

$$\gamma^2=(\alpha+j\beta)^2=j\omega\mu(\sigma+j\omega\varepsilon)\Rightarrow\alpha^2-\beta^2+2j\alpha\beta=-\omega^2\mu\varepsilon+j\omega\mu\sigma$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha^2-\beta^2=-\omega^2\mu\varepsilon\\ 2\alpha\beta=\omega\mu\sigma\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}-\frac{1}{2}}\\ \beta=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}+\frac{1}{2}}\end{cases}\longrightarrow\ \text{برگه فرمول}$$

α ثابت تضعیف است و واحد آن $\frac{N_p}{m}$ (نپر) می‌باشد.

$$db=20\log(e^{-\alpha z})=20(-\alpha z)\log(e)\Rightarrow\boxed{dB=8.69\frac{N_p}{m}}$$



محیط دی الکتریک خوب:

$$J=J_d+J_c=\frac{\partial D}{\partial t}+\sigma\vec{E}\Rightarrow\vec{J}=j\omega\varepsilon\vec{E}+\sigma\vec{E}=(j\omega\varepsilon+\sigma)\vec{E}$$

$$\vec{J}=j\omega\varepsilon\vec{E}+\sigma\vec{E}=(\sigma+j\omega\varepsilon)\vec{E}$$

بنابراین دیگر دی الکتریک خوب $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\ll 1$

$$(1+\alpha)^n\overset{n\ll 1}{=}1+n\alpha$$

$$\alpha=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right)-\frac{1}{2}}=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}=\frac{\omega}{2}\sqrt{\mu\varepsilon}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)\Rightarrow\boxed{\alpha=\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}$$

$$\alpha=\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

طرز نوشتن جزوه :

Subject :
Year . Month . Date . ( )

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right)+\frac{1}{2}} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} \Rightarrow \boxed{\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

عمق نفوذ :

$$E = E_0 e^{-\alpha z} \rightarrow \frac{E_0}{\alpha} = E_0 e^{-\alpha z)\frac{1}{\alpha}(} = E_0 e^{-1} = \frac{E_0}{\alpha}$$

$$\delta_s = \frac{1}{\alpha} \underset{\text{خوب}}{\overset{\text{دی‌الکتریک}}{\approx}} \frac{2}{\sigma}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$$

در دی الکتریک خوب $\sigma \to 0$ ولذا $\delta \to \infty$

امپدانس موج :

$$Z_w = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\frac{j\omega\mu}{j\omega\varepsilon}}{\frac{\sigma}{j\omega\varepsilon}+1}} \simeq \sqrt{\mu/\varepsilon}$$

طول موج :

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{f\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

سرعت فاز :

$$V_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

تمرین ؟

	General	good conductor	good dielectric
α			
β			
δ			
η_w			
λ			
V_p			
V_g			

در امتحان پایان ترم بیاورید

هادی خوب : $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \gg 1$

$$\alpha = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\cancel{1}+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right) - \cancel{\frac{1}{2}}}$$

صرف نظر

صرف نظر

$$\Rightarrow \alpha = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)} = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

درهادی خوب زاویه ثابت انتشار $45°$ است و $\alpha = \beta$ و

عمق نفوذ برابراست با

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$$

امپدانس موج :

$$\eta_w = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\frac{j\omega\mu}{j\omega\varepsilon}}{\frac{\sigma}{j\omega\varepsilon} + \cancel{1}}} \Rightarrow \eta_w = \sqrt{\frac{j\mu\omega}{\sigma}}$$

صرف نظر

$$= \sqrt{j}\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{\sigma}} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{\sigma}}$$

$$\eta_w = \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2\sigma}} + j\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2\sigma}}$$

عدد مختلط با فاز 45

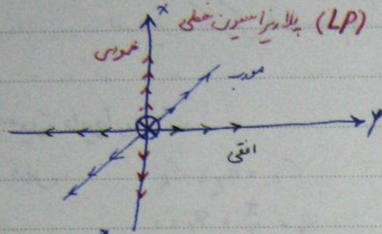
$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{\omega\mu\sigma}} \quad , \quad V_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega\sqrt{2}}{\sqrt{\omega\mu\sigma}} = f(\omega)$$

PAPCO

پلاریزاسیون ، Polarization

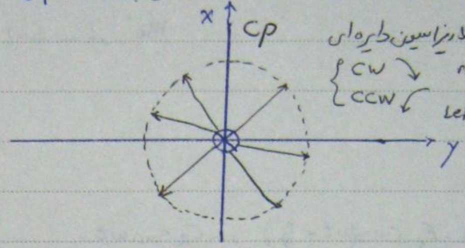
خاصیتی از موج الکترومغناطیس است که توصیف می‌کند جهت متغیر با زمان میدان الکتریکی در طول انتشار به چه صورت است. (مکان هندسی نقاطی که انتهای بردار E رسم می‌کند)

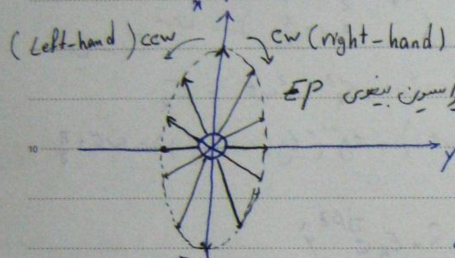
پلاریزاسیون خطی (LP)



پلاریزاسیون دایره‌ای CP

$\begin{cases} CW \to \text{right-hand} \\ CCW \to \text{Left-hand} \end{cases}$





پلاریزاسیون بیضوی EP

$$\vec{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y}$$

$$\vec{E} = \underbrace{E_x e^{j\omega t}}_{\text{فازور}} e^{-j\beta z} \hat{x} + \underbrace{E_y e^{j\omega t}}_{} e^{-j\beta z} \hat{y}$$

$$E(z,t) = E_{x_0} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_x)\hat{x} + E_{y_0} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_y)\hat{y}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{E}_x(t) = E_{x_0} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_x) \\ E_y(t) = E_{y_0} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_y) \end{cases} \Longrightarrow$$

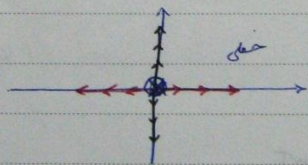
(برای راحتی در محاسبه $Z = 0$ می‌گیریم.)

۱) پلاریزاسیون خطی، (LP)

الف) فرض $E_{y_0} = 0$ if (→)

$E_x(t) = E_{x_0} \cos(\omega t + \varphi_x)$

$E_y(t) = 0$



ب) اگر فرض کنیم $E_{x_0} = 0$ (→)

$E_y(t) = E_{y_0} \cos(\omega t + \varphi_y)$, $E_x(t) = 0$

ج) if, $\varphi_x = \varphi_y = \varphi$

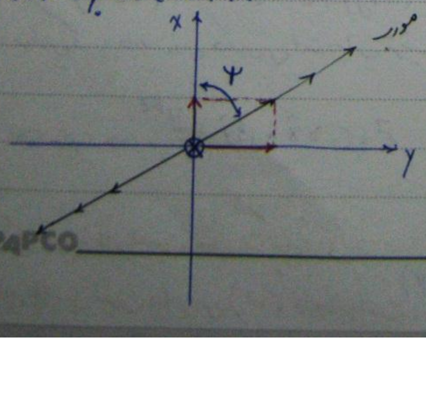
$E_x(t) = E_{x_0} \cos(\omega t + \varphi)$

$E_y(t) = E_{y_0} \cos(\omega t + \varphi)$

$$\rightarrow \vec{E} = E_x(t)\hat{x} + E_y(t)\hat{y}$$

$$|\vec{E}| = \sqrt{E_{x_0}^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + E_{y_0}^2 \cos^2(\omega t + \varphi)}$$

$$= \sqrt{E_{x_0}^2 + E_{y_0}^2} \cos(\omega t + \varphi)$$



$$\Psi = \tan^{-1}\left(\frac{E_{y_0}}{E_{x_0}}\right)$$

د) $\varphi_x = \varphi_y + 180^\circ$

نتیجه تحت شرایط ذیل پلاریزاسیون خطی است :

۱) موج دارای یک مؤلفه میدان الکتریکی باشد

۲) موج دارای دو مؤلفه میدان الکتریکی عمود بر هم باشند و هم فاز

۳) 〃 〃 〃 〃 〃 〃 و با اختلاف فاز 180°

پلاریزاسیون دایره‌ای :

الف) فرض : $E_{x_0} = E_{y_0} = E_R$

$\varphi_x = \frac{\pi}{2}$ ؛ $\varphi_y = 0$

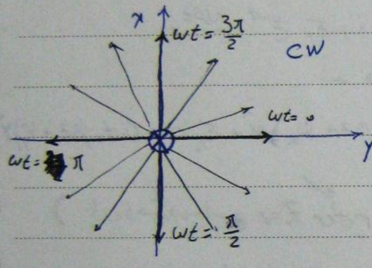
در این صورت ، تمرین $\rightarrow$ (0 و $-\frac{\pi}{2}$)

$E_x(t) = E_R\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = -E_R\sin\omega t$

$E_y(t) = E_R\cos\omega t$

$$\rightarrow |\vec{E}| = \sqrt{E_R^2\cos^2\omega t + E_R^2\sin^2\omega t} = E_R$$

$$\Psi = tg^{-1}(-\cot(\omega t)) = tg^{-1}(tg(\omega t + \frac{\pi}{2})) = \omega t + \frac{\pi}{2}$$



$$\vec{E} = E_R e^{-j\beta z} e^{j\frac{\pi}{2}} \hat{x} + E_R e^{-j\beta z} \hat{y}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = E_R(j\hat{x} + \hat{y}) e^{-j\beta z} \quad (\text{CW})$$

ب) فرض : $E_{x_0} = E_{y_0} = E_L$

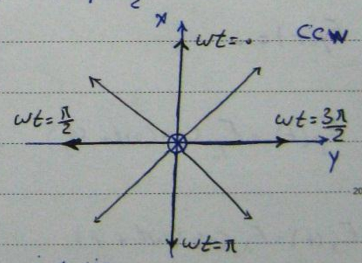
$\varphi_x = 0$ ؛ $\varphi_y = \frac{\pi}{2}$

$E_x(t) = E_L\cos\omega t$

$E_y(t) = E_L\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = -E_L\sin\omega t$

$\rightarrow |\vec{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = E_L$

$\Psi = tg^{-1}(\frac{E_y}{E_x}) = tg^{-1}(-\tan(\omega t)) = -\omega t$ (کم کننده فاز)



$$\vec{E} = E_L e^{j\omega t} e^{-j\beta z} \hat{x} + E_L e^{j\omega t} e^{-j\beta z} e^{j\frac{\pi}{2}} \hat{y} = E_L(\hat{x} + j\hat{y}) e^{j\omega t} e^{-j\beta z} \quad (\text{CCW})$$

۷) برداری که j دارد روی حیکی می افتد و با این ترتیب ccw یا cw بودن آن مشخص می‌شود.

$E = (2\hat{x} + 2j\hat{y}) e^{-j\beta z} \longrightarrow \text{CP-CCW}$

$\vec{E} = (-3\hat{x} + j3\hat{y}) e^{-j\beta z} \rightarrow \text{CP-CW}$

$E = (j3\hat{x} + 3\hat{y}) e^{-j\beta z} \longrightarrow \text{CP-CW}$

۸) یک موج با پلاریزاسیون خطی ، ترکیبی از دو موج پلاریزاسیون دایروی (cw و ccw) است.

$$\therefore E = x = \frac{\hat{x} + \hat{x} + j\hat{y} - j\hat{y}}{2} = \frac{1}{2}(\hat{x} + j\hat{y}) + \frac{1}{2}(\hat{x} - j\hat{y})$$

پلاریزاسیون بیضوی :

✓ : (از قبل) تحت این شرایط موج دارای پلاریزاسیون دایره‌ای است :

۱) میدان الکتریکی موج دارای دو مؤلفه عمود برهم با اندازه برابر و اختلاف فاز $\frac{\pi}{2}$ باشد

✓ : برای تشخیص جهت پلاریزاسیون CP ، مؤلفه‌ای که جلوتر است (فاز دارد) به سمت مؤلفه عقب‌تری چرخد .

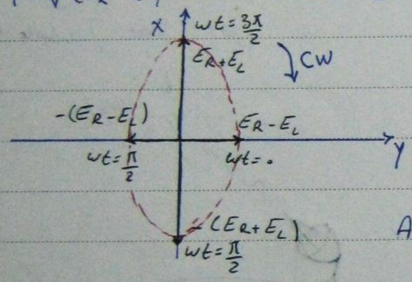
پلاریزاسیون بیضوی :

الف) $\varphi_x = \frac{\pi}{2}$ ، $\varphi_y = 0$ ، $E_{x_0} = E_R + E_L$ ، $E_{y_0} = E_R - E_R$

$$E_x(t) = (E_R + E_L)\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = -(E_R + E_L)\sin\omega t$$

$$E_y(t) = (E_R - E_L)\cos(\omega t)$$

$$|\vec{E}| = \sqrt{(E_R+E_L)^2\sin^2\omega t + (E_R-E_L)^2\cos^2} = \sqrt{E_R^2 + E_L^2 + 2E_RE_L(\sin^2\omega t - \cos^2\omega t)}$$



معادله بیضی
$$\left(\frac{E_x}{E_R + E_L}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_R - E_L}\right)^2 = 1$$

$$\Psi = tg^{-1}\left(-\frac{E_R - E_L}{E_R + E_2}\cos\omega t\right)$$

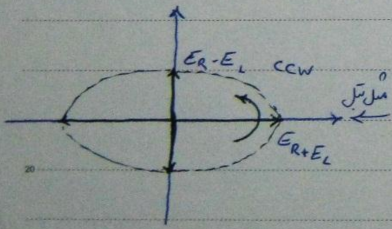
$$AR = -\frac{\text{قطر بزرگ}}{\text{قطر کوچک}} = -\frac{E_R + E_L}{E_R - E_L} \rightarrow \boxed{1 \leq |AR| < \infty}$$

دایروی

خطی

if $AR > 0$ دست چپی

if $AR < 0$ دست راستی



مثلث

ب) $\varphi_x = 0$ ، $\varphi_y = \frac{\pi}{2}$ ، $E_{x_0} = E_R - E_L$ ، $E_{y_0} = E_R + E_L$

نتیجه : اگر میدان الکتریکی موج دارای دو مؤلفه عمود با شرایط زیر باشد :

الف) اختلاف فاز $\frac{\pi}{2}$ داشته باشد

ب) باهم یکسان نباشد

در این صورت پلاریزاسیون موج بیضوی است .

✓ :

if $(\varphi_x > \varphi_y)$ & $(E_R > E_L) \rightarrow CW$

if $(\varphi_x > \varphi_y)$ & $(E_R < E_L) \rightarrow CCW$

if $(\varphi_y > \varphi_x)$ & $(E_R > E_L) \rightarrow CCW$

if $(\varphi_y > \varphi_x)$ & $(E_R < E_L) \rightarrow CW$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۱. تمرین: تحت چه شرایطی بیضی مورب داریم؟ $E_{x_0}, E_{y_0}, \varphi_x, \varphi_y = ?$

۲. پس از آن زاویه انحراف بیضی را برحسب پارامترهای ۴ گانه بالا بدست آورید.

۳. نسبت AR را برحسب پارامترهای فوق حساب کنید.

✓۱. رادیو AM، امواج را به صورت عمودی منتشر می‌کند $500^k - 1500^k$

✓۱. در تلویزیون TV: UHF: 800MH

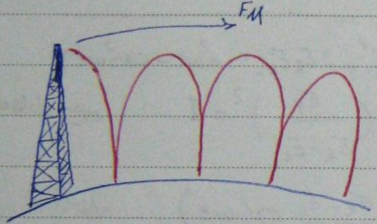
VHF: 300MH

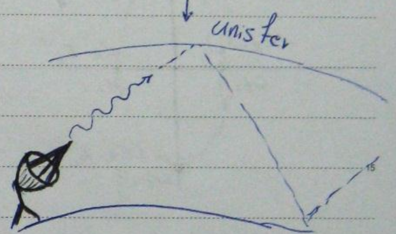
چون ارتفاع آنتن تلویزیون بالاست و موج عملا زمین را نمی‌بیند و تضعیف نمی‌کند به صورت افقی ارسال می‌کنند.

✓۱. رادیو FM: CP می‌فرستد. زیرا در هر مکان بتوان دریافت کرد

✓۱. موبایل: CP

✓۱. ماهواره: Sat افقی





PAPCO

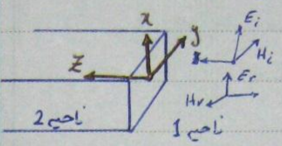
فرم نوشتن جزوه:

فصل چهارم - انتقال و انعکاس:

- برخورد عمود
  - lossless
  - lossy
- برخورد مایل
  - lossless
  - lossy

فرض ها: در ناحیه 1 میدان الکتریکی موج به سمت $\hat{x}$ می باشد در جهت $\hat{z}$ حرکت می کند.

$$\vec{E} = E_0 e^{-j\beta_1 z}\,\hat{x}$$



موج به صورت عمود به مرز بین دو محیط برخورد می کند. بخشی به محیط دوم انتقال می یابد و بخشی به محیط اول منعکس می شود:

(برخوردی) $\vec{E}_i = E_0 e^{-j\beta_1 z}\,\hat{x}$

(انعکاسی) $\vec{E}_r = \Gamma^b E_0 e^{j\beta_1 z}\,\hat{x}$ — ضریب انعکاس در مرز

(انتقالی) $E_t = T^b E_0 e^{-j\beta_2 z}\,\hat{x}$ — ضریب انتقال در مرز

$\left(\vec{\nabla}\times\vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}\right.$ ، $\vec{H} = \frac{1}{\eta}\hat{n}\times\vec{E}$ جهت انتشار)

ضرایب انتقال و انعکاس براساس شرایط مرزی تعیین می شوند

میدان های مغناطیسی موج به صورت ذیل قابل نوشتن هستند.

$$\begin{cases}\vec{H}_i = \frac{1}{\eta_1}\hat{z}E_0 e^{-j\beta_1 z}\,\hat{x} = \hat{y}\,\frac{E_0}{\eta_1}e^{-j\beta_1 z}\\ \vec{H}_r = \frac{1}{\eta_1}(-\hat{z})\times\Gamma^b E_0 e^{j\beta_1 z}\,\hat{x} = -\hat{y}\,\frac{\Gamma^b E_0}{\eta_1}e^{j\beta_1 z}\\ \vec{H}_t = \frac{1}{\eta_2}(\hat{z})\times T^b E_0 e^{-j\beta_2 z}\,\hat{x} = \hat{y}\,\frac{T_b E_0}{\eta_2}e^{-j\beta_2 z}\end{cases}$$

در مرز ($z=0$) داریم:

$$\vec{H}_i = \hat{y}\,\frac{E_0}{\eta_1} \quad , \quad \vec{H}_r = -\hat{y}\,\frac{\Gamma^b E_0}{\eta_1} \quad , \quad \vec{H}_t = \hat{y}\,\frac{T^b E_0}{\eta_2}$$

در مرز: $\vec{H}_i + \vec{H}_r = \vec{H}_t \Rightarrow \hat{y}\,\frac{E_0}{\eta_1}(1-\Gamma^b) = \hat{y}\,\frac{T^b E_0}{\eta_2}$

$$\Rightarrow \boxed{1-\Gamma^b = \frac{\eta_1}{\eta_2}T^b} \quad (*)$$

در مرز ($z=0$) میدان الکتریکی به صورت ذیل نوشته می شود.

$\vec{E}_i = E_0\hat{x}$ ، $\vec{E}_r = \Gamma^b E_0\,\hat{x}$ ، $\vec{E}_t = T^b E_0\,\hat{x}$

شرایط مرزی $\Rightarrow \vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{E}_t \Rightarrow \boxed{1+\Gamma^b = T^b}$ $(*)$

$*$ حل:
$$\begin{bmatrix}1 & -1\\ \frac{\eta_1}{\eta_2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T^b\\ \Gamma^b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{T^b = \frac{2}{1+\eta_1/\eta_2} = \frac{2\eta_2}{\eta_1+\eta_2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma^b = T^b - 1 = \frac{2\eta_2}{\eta_1+\eta_2} - 1 = \frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_1+\eta_2}}$$

یا: $\frac{E}{H} = \eta$

به تغییر جهت موج بعد انعکاس

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma^b = \frac{E_r}{E_i} = \frac{\eta_1 H_r}{\eta_1 H_i} = -\frac{H_r}{H_i}}$$

$$\Rightarrow \boxed{T^b = \frac{E_t}{E_i} = \frac{\eta_2 H_t}{\eta_1 H_i}}$$

میدان الکتریکی در ناحیه اول:

(کل) $\vec{E}_1 = \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_0 e^{-j\beta_1 z}\,\hat{x} + \Gamma^b E_0 e^{j\beta_1 z}\,\hat{x}$

$$\Rightarrow \vec{E}_1 = \hat{x}E_0 e^{-j\beta_1 z}\left(1+\Gamma^b e^{j2\beta_1 z}\right)$$

$\vec{E}_1$ زمانی ماکزیمم می شود که $1+\Gamma^b$ ماکزیمم باشد یعنی $\Gamma^b > 0$

یا: $\left|e^{-j\beta_1 z}\right| = 1$ ، $\left|e^{j2\beta_1 z}\right| = 1$

$$\cos(2\beta_1 z) + j\sin(2\beta_1 z) \Rightarrow 2n\pi = 2\beta_1 z$$

$$\Rightarrow z = \frac{n\pi\lambda}{2\pi} = \frac{n\lambda}{2}$$

میدان مغناطیسی در ناحیه اول:

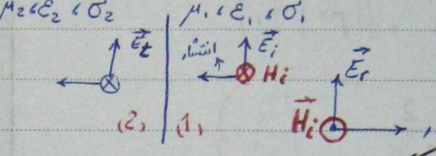
$$\vec{H}_1 = \vec{H}_i + \vec{H}_r = \hat{y}\,\frac{E_0}{\eta_1}e^{-j\beta_1 z} - \hat{y}\,\frac{\Gamma^b E_0}{\eta_1}e^{j\beta_1 z}$$

$$\Rightarrow \vec{H}_1 = \hat{y}\,\frac{E_0}{\eta_1}e^{-j\beta_1 z}\left(1+\Gamma^b e^{j2\beta z}\right)$$

در ناحیه اول به دلیل حضور میدان های E_i ، E_r ، H_i و H_r موج ساکن تشکیل می شود . دامنه میدان الکتریکی موج ساکن در نواحی ذیل max است . $\min(-n\pi)$ ها

$$2\beta_1 Z = -2n\pi \Rightarrow Z = \frac{-n\pi}{\beta_1} = -\frac{n\lambda_1}{2}$$

چون $Z<0$ شده است پس $(-)$ گذاشتیم .



بردار پوئینتینگ :

$$\vec{P}_i = \frac{1}{2}Re\{\vec{E}_i \times \vec{H}_i^*\} = \frac{1}{2}Re\{E_0 e^{-j\beta_1 Z}\hat{x} \times \frac{E_0^*}{\eta_1} e^{j\beta_1 Z}\hat{y}\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{P}_i = \frac{1}{2}Re\{\frac{|E_0|^2}{\eta_1}\}\hat{z} = \frac{|E_0|^2}{2\eta_1}\hat{z}}$$

بردار پوئینتینگ وقتی میدان به مرز نزدیک می شود

$$\vec{P}_r = \frac{1}{2}Re\{E_r \times H_r^*\} = \frac{1}{2}Re\{\Gamma^b E_0 e^{j\beta_1 Z}\hat{x} \times \frac{\Gamma^b E_0^*}{\eta_1} e^{-j\beta_1 Z}(-\hat{y})\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{P}_r = \frac{|\Gamma^b|^2|E_0|^2}{2\eta_1}(-\hat{z})}$$

$$\vec{P}_t = \frac{1}{2}Re\{E_t \times H_t^*\}$$

$$\Rightarrow \vec{P}_t = \frac{1}{2}Re\{T^b E_0 e^{-j\beta_2 Z}\hat{x} \times \frac{T^b E_0^*}{\eta_2} e^{j\beta_2 Z}\hat{y}\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{P}_t = \frac{|T^b|^2|E_0|^2}{2\eta_2}\hat{z}} \quad (*)$$

$$\Rightarrow \vec{P}_r = |\Gamma^b|^2 P_i \quad , \quad P_t = \frac{\eta_1}{\eta_2}|T^b|^2 P_i$$

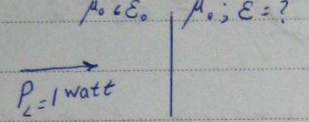
از طرفی :

$$P_t = P_i - P_r \Rightarrow P_t = (1-|\Gamma^b|^2)P_i \quad (**)$$

$$\Rightarrow (*) , (**) \Rightarrow 1-|\Gamma^b|^2 = \frac{\eta_1}{\eta_2}|T^b|^2$$

مهم و البته جالب !!!

□ مثال : توان $P_i = 1^{watt}$ به مرز دو محیط دی الکتریک تابیده می شود مشخصات محیط در شکل نشان داده شده اند. اگر توان برگشتی 0.25^W باشد ، ضرایب انتقال و انعکاس را بدست آورید ، هم چنین ضریب دی الکتریک محیط دوم را نیز بیابید.



حل :

$$P_r = 0.25^{watt} = |\Gamma^b|^2 P_i \Rightarrow |\Gamma^b|^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow |\Gamma^b| = \frac{1}{2}$$

$$P_t = 0.75^{watt} = \frac{\eta_1}{\eta_2}|T^b|^2 \; ; \; \eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \simeq 337$$

چون Γ^b مثبت است ،

$$|\Gamma^b| = \frac{1}{2} \Rightarrow \Gamma^b = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow T^b = 1 + \Gamma^b = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{9}{4}\times 120\pi}{\eta_2} = \frac{3}{4} \rightarrow \eta_2 = 3\times 120\pi \; \boxed{= 360\pi}$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} = 3 \rightarrow \boxed{\varepsilon_r = \frac{1}{9}}$$

مثال: میدان الکتریکی موجی با $1\,\frac{mV}{m}$ در راستای $\hat{x}$ به مرز دو محیط ذیل می‌تابد:

$\mu_0 ; \varepsilon_0$ ① | $\mu_0 ; 4\varepsilon_0$ ②

$z=0$

مطلوبست

الف) ضرایب انتقال و انعکاس؟

ب) رابطهٔ P_i ، P_r و P_t.

ج) روابط میدان‌ها.

حل:
$$\Gamma^b = \frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_1+\eta_2} \quad ; \quad \begin{cases} \eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \\ \eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{4\varepsilon_0}} = 60\pi \end{cases}$$

$$\Gamma^b = \frac{60\pi-120\pi}{60\pi+120\pi} = \frac{-60\pi}{180\pi} = -\frac{1}{3}$$

$$T^b = \frac{2\eta_2}{\eta_1+\eta_2} = \frac{120\pi}{180\pi} = \frac{2}{3}$$

ب) $P_i = \frac{|E_0|^2}{2\eta_1} = \frac{10^{-6}}{2\times 120\pi} \Rightarrow P_i = 0.0013\ \mu watt$

$$P_r = \frac{1}{9}P_i \ ; \ P_t = \frac{\eta_1}{\eta_2}|T^b|^2 P_i = (1-\frac{1}{9})P_i$$

ج)
$$\vec{E}_i = 10^{-3} e^{-j\beta_1 z}\,\hat{x}$$
$\vec{E}_r$
$$\vec{E}_r = -\frac{1}{3}\times 10^{-3} e^{-j\beta_1 z}\,\hat{x}$$
$$\vec{E}_t = \frac{2}{3}\times 10^{-3} e^{-j\beta_1 z}\,\hat{x}$$

نکته: اگر محیط دوم PEC باشد: $\mu_0, \varepsilon_0, \eta_1 = \eta_0$

PEC
$\sigma \to \infty$

$$\Rightarrow \eta_2 = \lim_{\sigma\to\infty} \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} = 0$$

$$\Rightarrow \Gamma^b = \frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_1+\eta_2} = \boxed{-1}$$

$$T^b = \frac{2\eta_2}{\eta_1+\eta_2} = 0$$

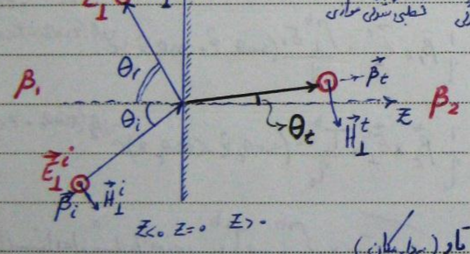
$$\Rightarrow \vec{E}_1 = E_0 e^{-j\beta_1 z}(1+\Gamma^b e^{j2\beta_1 z})\hat{x} = E_0 e^{-j\beta_1 z}(1-e^{j2\beta_1 z})$$

در $z=-\frac{n\lambda}{2}$ اندازه میدان الکتریکی صفر است و در $z=-\frac{n\lambda}{4}$ اندازه میدان الکتریکی ماکزیمم و برابر $2E_0$ است

تابش مورب موج به مرز دو دی الکتریک:

(پلاریزاسیون عمودی)

قطبی شدن موازی
قطبی شدن عمودی



τ: تاو (بردار مکان)

صفحهٔ برخورد: صفحه‌ای شامل بردار $\vec{\beta}_i$ و بردار عمود بر مرز است.

اگر بردار $\vec{E}_\perp^i$ به صورت ذیل باشد: (فرض)

$$\vec{E}_\perp^i = \hat{y} E_0 e^{-j\vec{\beta}_i\cdot\vec{\tau}}$$

بردار $\vec{\beta}_i$ به صورت ذیل قابل نوشتن است:

$$\vec{\beta}_i = \beta_1 \sin\theta_i\,\hat{x} + \beta_1\cos\theta\,\hat{z}$$
$$\vec{\tau} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$
$$\Rightarrow \vec{\beta}_i\cdot\vec{\tau} = \beta_1 x\sin\theta_i + \beta_1 z\cos\theta_i$$
$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_\perp^i = \hat{y} E_0 e^{-j\beta_1(x\sin\theta_1 + z\cos\theta_1)}}$$

فازور میدان الکتریکی موج تابش به مرز

حال $E_\perp^r$ را بدست می آوریم:

$$\vec{E}_\perp^r = \hat{y}\, E_0 \Gamma_\perp^b\, e^{-j\vec{\beta}_r \cdot \vec{r}}$$

$$\vec{\beta}_r = \beta_1 \sin\theta_r\, \hat{x} - \beta_1 \cos\theta_r\, \hat{z} \quad ، \quad \vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

در $\vec{\beta}_r \cdot \vec{r} = \beta_1 x \sin\theta_r - \beta_1 z \cos\theta_r$

$$\Rightarrow \vec{E}_\perp^r = \hat{y}\, \Gamma_\perp^b E_0\, e^{-j\beta_1 (x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)}$$

فازور میدان الکتریکی انتقالی به محیط دوم بصورت ذیل قابل نوشتن است:

$$\vec{\beta}_t = \beta_2 \sin\theta_t\, \hat{x} + \beta_2 \cos\theta_t\, \hat{z} \quad ، \quad \vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_\perp^t = \hat{y}\, T_\perp^b E_0\, e^{-j\beta_2 (x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)}$$

حال میدان مغناطیسی امواج را محاسبه می کنیم:

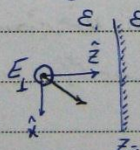
$$\vec{H}_\perp^i = \frac{1}{\eta_1} \hat{\beta}_i \times \vec{E}_i = \frac{E_0}{\eta_1} (\sin\theta_i\, \hat{z} - \cos\theta_i\, \hat{x}) \times e^{-j\beta_1 (x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)}$$

$$\vec{H}_\perp^r = \frac{1}{\eta_1} \hat{\beta}_r \times \vec{E}_\perp^r = \frac{\Gamma_\perp E_0}{\eta_1} (\sin\theta_r\, \hat{z} + \cos\theta_r\, \hat{x})\, e^{-j\beta_1 (x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)}$$

$$\vec{H}_\perp^t = \frac{1}{\eta_2} \hat{\beta}_t \times \vec{E}_\perp^t = \frac{T_\perp^b E_0}{\eta_2} (\sin\theta_t\, \hat{z} - \cos\theta_t\, \hat{x})\, e^{-j\beta_2 (x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)}$$

با استفاده از شرایط مرزی $T_\perp^b$ و $\Gamma_\perp^b$ بدست می آیند.

در مرز $z=0$ است و فقط مؤلفه های x را داریم. به z ها کاری نداریم.



$$\text{محیط } 1: \begin{cases} \vec{E}_\perp^i = \hat{y}\, E_0\, e^{-j\beta_1 x \sin\theta_i} \\ \vec{E}_\perp^r = \hat{y}\, \Gamma_\perp^b E_0\, e^{-j\beta_1 x \sin\theta_r} \end{cases}$$

$$\text{محیط } 2: \vec{E}_\perp^t = \hat{y}\, T_\perp^b E_0\, e^{-j\beta_2 x \sin\theta_t}$$

شرایط مرزی: $E_0\, e^{-j\beta_1 x \sin\theta_i} + \Gamma_\perp^b E_0\, e^{-j\beta_1 x \sin\theta_r} = T_\perp^b E_0\, e^{-j\beta_2 x \sin\theta_t}$

$$e^{j\alpha}(1 + \Gamma_\perp^b) = T_\perp^b e^{j\gamma} \Rightarrow e^{j\alpha} + \Gamma_\perp^b e^{j\beta} = T_\perp e^{j\gamma}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha + \Gamma_\perp^b \cos\beta = T_\perp^b \cos\gamma \\ \sin\alpha + \Gamma_\perp^b \sin\beta = T_\perp^b \sin\gamma \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \theta_i = \theta_r & \text{بازتاب} \\ \beta_1 \sin\theta_i = \beta_2 \sin\theta_t & \text{شکست} \end{cases}}$$

قوانین اسنل
Snell laws

با توجه به قوانین Snell (اسنل) شرایط مرزی بصورت ذیل می شوند:

$$1 + \Gamma_\perp^b = T_\perp^b \qquad \mathrm{I}$$

میدان های مغناطیسی مماس در مرز: ($z=0$ ، $\hat{x}$)

$$\begin{cases} \vec{H}_\perp^i = -\hat{x}\, \frac{E_0}{\eta_1} \cos\theta_i\, e^{-j\beta_1 x \sin\theta_i} \\ \vec{H}_\perp^r = \hat{x}\, \frac{\Gamma_\perp E_0}{\eta_1} \cos\theta_r\, e^{-j\beta_1 x \sin\theta_r} \\ \vec{H}_\perp^t = -\hat{x}\, \frac{T_\perp^b E_0}{\eta_2} \cos\theta_t\, e^{-j\beta_2 x \sin\theta_t} \end{cases}$$

با توجه به قوانین اسنل شرایط مرزی روی $\vec{H}$ های مماس بصورت ذیل است:

$$-\frac{\cos\theta_i}{\eta_1} + \frac{\Gamma_\perp}{\eta_1} \cos\theta_i = -\frac{\cos\theta_t}{\eta_2} T_\perp^b$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{\cos\theta_i}{\eta_1} (-1 + \Gamma_\perp^b) = -\frac{\cos\theta_t}{\eta_2} T_\perp^b} \qquad \mathrm{II}$$

$$\Rightarrow \mathrm{I}, \mathrm{II} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \frac{\cos\theta_i}{\eta_1} & \frac{\cos\theta_t}{\eta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_\perp^b \\ T_\perp^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{\cos\theta_i}{\eta_1} \end{bmatrix}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تقریباً صادق است

$$\Rightarrow \Gamma_\perp^b = \frac{-\dfrac{\cos\theta_t}{\eta_2}+\dfrac{\cos\theta_i}{\eta_1}}{\dfrac{\cos\theta_t}{\eta_2}+\dfrac{\cos\theta_i}{\eta_1}} = \frac{\eta_2\cos\theta_i-\eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i-\eta_1\cos\theta_t} = \frac{\sqrt{\dfrac{\mu_2}{\varepsilon_2}}\cos\theta_i-\sqrt{\dfrac{\mu_1}{\varepsilon_1}}\cos\theta_t}{\sqrt{\dfrac{\mu_2}{\varepsilon_2}}\cos\theta_i-\sqrt{\dfrac{\mu_1}{\varepsilon_1}}\cos\theta_t}$$

$\checkmark$ فرض: $(\mu_1=\mu_2)$

$$= \frac{\cos\theta_i-\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\cos\theta_t}{\cos\theta_i+\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\cos\theta_t}$$

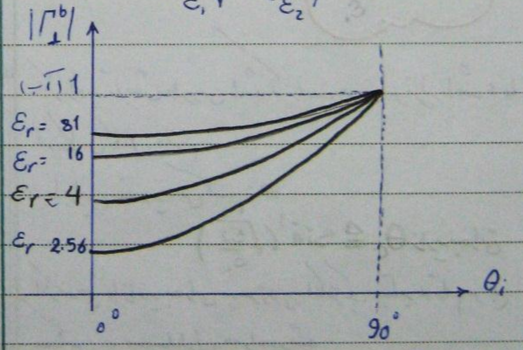
از طرفی طبق اسنل

داریم: $\beta_1\sin\theta_i=\beta_2\sin\theta_t$

$$\Rightarrow \sin\theta_t=\frac{\beta_1}{\beta_2}\sin\theta_i=\frac{\omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}}{\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}} \Rightarrow (\mu_1=\mu_2)$$

$$\Rightarrow \sin\theta_t=\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\sin\theta_i \Rightarrow \cos\theta_t=\sqrt{1-\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)\sin^2\theta_i}$$

$$\Rightarrow \Gamma_\perp^b=\frac{\cos\theta_i-\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\sqrt{1-\left(\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)\sin^2\theta_i}}{\cos\theta_i+\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\sqrt{1-\left(\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)\sin^2\theta_i}}$$



① if: $\varepsilon_2=\varepsilon_1 \Rightarrow \Gamma_\perp^b=1$

② با افزایش ε_r ناهماهنگی دو ماده هم مرز بیشتر شده و ضریب $\Gamma_\perp^b$ افزایش می‌یابد.

③ $\Gamma_\perp^b$ هیچگاه صفر نمی‌شود

④ هرچه θ_i به سمت 90° پیش برود $\Gamma_\perp^b$ نیز افزایش می‌یابد.

؟ تمرین: نشان دهید $\Gamma_\perp^b$ در هیچ θ_iای صفر نمی‌شود. $\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\neq 1\right)$

$$T_\perp^b=\frac{\dfrac{\cos\theta_i}{\eta_1}+\dfrac{\cos\theta_i}{\eta_1}}{\dfrac{\cos\theta_t}{\eta_2}+\dfrac{\cos\theta_i}{\eta_1}}=\frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_i+\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\cos\theta_t}$$

$$\Rightarrow T_\perp^b=\frac{2\cos\theta_i}{\cos\theta_i+\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\sqrt{1-\left(\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)\sin^2\theta_i}}$$

؟ تمرین: شرط انعکاس کلی (که $|\Gamma_\perp^b|=1$) (محیط (1) و (2) چه باشند)

$\sin\theta_c=\frac{\eta_2}{\eta_1}$ → محیط دوم از اول کم چگال‌تر

؟ تمرین: $\Gamma_\perp^b$ و $T_\perp^b$ را بر حسب θ_iهای صفر تا 90° را نسبت به ε رسم کنید.

$$\Gamma_{\perp}^{b} = \frac{\eta_2 \cos\theta_i - \eta_1 \cos\theta_t}{\eta_2 \cos\theta_i + \eta_1 \cos\theta_t}$$ ضریب انعکاس در مرز

$$T_{\perp}^{b} = \frac{2\eta_2 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_i + \eta_1 \cos\theta_t}$$ ضریب انتقال در مرز

انتقال کامل: در شرایط انتقال کامل، موج تماماً وارد محیط دوم می شود ($\Gamma_{\perp}^{b} = 0$)

$$\Rightarrow \Gamma_{\perp}^{b} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos\theta_i - \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cos\theta_t}{\eta_2 \cos\theta_i + \eta_1 \cos\theta_t} = 0$$

$$\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos\theta_i - \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_1}} \cos\theta_t = 0$$

$$\Rightarrow \cos\theta_i = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_1}{\varepsilon_1 \mu_2}} \cos\theta_t$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-\sin^2\theta_i} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_1}{\mu_2 \varepsilon_1}} \left(\sqrt{(1-\sin^2\theta_t)}\right)$$

$$\xRightarrow{\mu_1 = \mu_2} 1-\sin^2\theta_i = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\theta_i\right)$$

یادآوری
$$\Rightarrow \beta_1 \sin\theta_i = \beta_2 \sin\theta_t$$ (طبق اسنل شکست)

$$\beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = \frac{2\pi f_2}{v_2} = 2\pi f_2 \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}$$

$$\beta_1 = 2\pi f_1 \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}$$

$$① : \sin\theta_t = \frac{\beta_1}{\beta_2}\sin\theta_i = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}}\sin\theta_i$$

$$\boxed{1-\sin^2\theta_i = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\theta_i \longrightarrow \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 1}$$

بنابراین $\Gamma_{\perp}^{b} = 0$ زمانی رخ می دهد که به ازای دو ε متفاوت در پلاریزاسیون عمودی اتفاق نمی افتد یعنی در محیط دوم موج به صورت کامل وارد نمی شد (۱۰۰٪) و بخشی از آن به محیط 1 برمی گردد.

انعکاس کامل: در شرایط انعکاس کامل، موج وارد محیط دوم نمی شود، تمام توان موج به محیط اول بازمی گردد.

$$|\Gamma_{\perp}^{b}| = 1$$

$$|\Gamma_{\perp}^{b}| = \frac{\left|\cos\theta_i - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\sqrt{1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\theta_i}\right|}{\left|\cos\theta_i + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\sqrt{1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\theta_i}\right|} = 1$$

نکته: $\frac{|a-b|}{|a+b|} = 1 \longrightarrow |a-b| = |a+b| \rightarrow$ b موهومی است

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\sqrt{1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\theta_i} =$$ باید موهومی باشد

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\theta_i \geq 1 \Rightarrow \sin^2\theta_i \geq \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

$$\Rightarrow \sin\theta_i \geq \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

اگر زاویه تابش طوری باشد که رابطه فوق برقرار باشد، ما انعکاس کامل داریم.

بنابراین تعریف می کنیم:

زاویه بحرانی $\theta_c \triangleq \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\right)$

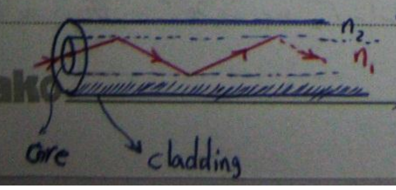
اگر موج با زاویه بحرانی به مرز دی الکتریک بتابد، تمام موج منعکس به محیط اول خواهد شد.

افزایش θ_i از زاویه بحرانی نیز انعکاس کامل به همراه دارد.

برای آنکه θ_c، عددی حقیقی باشد باید $\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$ عددی کمتر از یک باشد

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} < 1 \longrightarrow \varepsilon_2 < \varepsilon_1$$ شرط انعکاس کامل

که این حالت در فیبر نوری بکار می رود



در مرز به دلیل عدم وجود منابع مؤلفه‌های مماسی $\vec{E}$ و $\vec{H}$ با هم برابر هستند. با اعمال شرایط مرزی داریم:

$$\begin{cases} \theta_i = \theta_r & \text{Snell Reflection} \\ \beta_1 \sin\theta_i = \beta_2 \sin\theta_t & \text{Snell Refraction} \end{cases}$$

با حل معادلات شرایط مرزی و اعمال قوانین اسنل (مشابه پلاریزاسیون عمودی) ضرایب انتقال و انعکاس به صورت ذیل به دست می‌آیند: (اثبات به عهده دانشجو)

$$\Gamma_{\parallel}^{b} = \frac{\eta_2 \cos\theta_t - \eta_1 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_t + \eta_1 \cos\theta_i}$$

$$T_{\parallel}^{b} = \frac{2\eta_2 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_t + \eta_1 \cos\theta_i}$$

انتقال کامل:

$$\Gamma_{\parallel}^{b} = 0 \Rightarrow \eta_2 \cos\theta_t - \eta_1 \cos\theta_i = 0$$

$$\Rightarrow \cos\theta_i = \frac{\eta_2}{\eta_1} \cos\theta_t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-\sin^2\theta_i} = \frac{\eta_2}{\eta_1} \sqrt{1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \sin^2\theta_t}$$

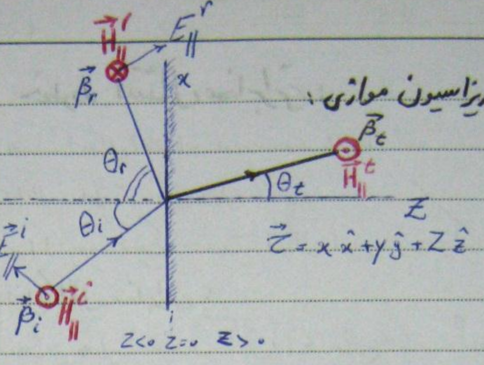
$$\Rightarrow 1-\sin^2\theta_i = \frac{\mu_2/\varepsilon_2}{\mu_1/\varepsilon_1} \left(1 - \frac{\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}}{\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}} \sin^2\theta_i\right)$$

$$\Rightarrow 1-\sin^2\theta_i = \frac{\mu_2\varepsilon_1}{\mu_1\varepsilon_2} - \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^2} \sin^2\theta_i$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta_i \left(\frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^2} - 1\right) = \frac{\mu_2\varepsilon_1}{\mu_1\varepsilon_2} - 1$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta_i = \frac{\frac{\mu_2\varepsilon_1}{\mu_1\varepsilon_2} - 1}{\frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^2} - 1} = \frac{\mu_2/\mu_1 - \varepsilon_2/\varepsilon_1}{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

پلاریزاسیون موازی:



$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

$$\vec{\beta}_i = \beta_1 (\cos\theta_i \hat{z} + \sin\theta_i \hat{x})$$

$$\vec{\beta}_r = \beta_1 (\sin\theta_r \hat{x} - \cos\theta_r \hat{z})$$

$$\vec{\beta}_t = \beta_2 (\sin\theta_t \hat{x} + \cos\theta_t \hat{z})$$

میدان مغناطیسی به صورت ذیل هستند:

$$\vec{H}_{\parallel}^{i} = \frac{E_0}{\eta_1} \hat{y}\, e^{-j(\vec{\beta}\cdot\vec{r})} = \frac{E_0}{\eta_1} \hat{y}\, e^{-j(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)}$$

$$\boxed{\vec{H}_{\parallel}^{r} = -\hat{y} \frac{\Gamma_{\parallel}^{b} E_0}{\eta_1} e^{-j\beta_1 (x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)}}$$

$$\boxed{\vec{H}_{\parallel}^{t} = \hat{y} \frac{T_{\parallel}^{b} E_0}{\eta_2} e^{-j\beta_2 (x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)}}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\eta \hat{\beta} \times \vec{H}} \quad \boxed{\vec{H} = \frac{1}{\eta} \hat{\beta} \times \vec{E}}$$

$\Longrightarrow$

$$\vec{E}_{\parallel}^{i} = -\eta_1 \hat{\beta}_i \times \vec{H}_{\parallel}^{i} = (\cos\theta_i \hat{x} - \sin\theta \hat{z})\, e^{-j\beta_1 (x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)}$$

$$\vec{E}_{\parallel}^{r} = -\eta_1 \hat{\beta}_r \times \vec{H}_{\parallel}^{r} = (\sin\theta_i \hat{z} + \cos\theta_r \hat{x}) E_0 \Gamma_{\parallel}^{b} \times$$
$$\times\, e^{-j\beta_1 (x\sin\theta_r)}$$

$$\vec{E}_{\parallel}^{t} = -\eta_2 \hat{\beta}_t \times \vec{H}_{\parallel}^{t} =$$

$$= (\cos\theta_t \hat{x} - \sin\theta_t \hat{z}) E_0 T_{\parallel}^{b} e^{-j\beta_2 (x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)}$$

$\Rightarrow \sin\theta_i = \sqrt{\dfrac{\frac{\mu_2}{\mu_1}-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}$ $\quad \mu_1=\mu_2 \Longrightarrow$

$\Rightarrow \sin\theta_i = \sqrt{\dfrac{\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}{\frac{\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1\varepsilon_2}}} = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}}$

$\boxed{\Rightarrow \sin\theta_i=\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}}}$ ← اگر دو دی الکتریک خاصیت مغناطیسی نداشته باشند

$\sin^2\theta_i = \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \rightarrow \dfrac{1}{\sin^2\theta_i} = 1+\cot^2\theta_i = \dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{\varepsilon_2}$

$\Rightarrow \cot^2\theta_i = \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \longrightarrow tg\,\theta_B = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$

بنابراین مشاهده می شود که در برخورد مایل امواج الکترومغناطیسی تحت پلاریزاسیون موازی به مرز دو دی الکتریک تحت زاویه‌ای خاص، تمام موج به محیط دوم منتقل می شود، به این زاویه مهم، زاویه **بروستر** گوئیم.

Brewster angle

تمرین: محاسبه $\Gamma_\perp(z)$ و $\Gamma_{\parallel}(z)$ در فاصله $z=-L$ از مرز

راهنمایی: $\Gamma_\perp(z)=\Gamma_\perp e^{-j2\beta_1 z\cos\theta_i}$

$=\Gamma_\perp e^{j2\beta_1 L\cos\theta_i}$

ب) if: $\theta_i=\theta_c \rightarrow \theta_t=\frac{\pi}{2}$, $\Gamma_\perp^b=1$, $T^b=2$

$\boxed{\Rightarrow E^t \text{ , } H^t = ?}$

خطوط انتقال مخابراتی

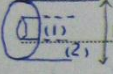
در سیستم های مخابراتی که هدف انتقال اطلاعات از فرستنده تا گیرنده است، رسانه یا کانال مخابرات نقش اصلی را دارد.

رسانا: بستر فیزیکی جهت انتقال از فرستنده به گیرنده.

انواع کانال مخابراتی:

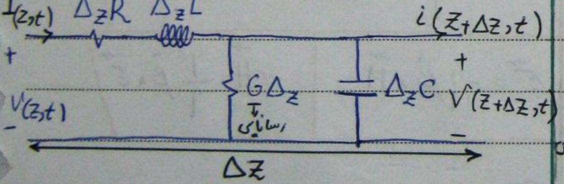
امواج هدایت نشده (آنتن)، امواج هدایت شده (خطوط انتقال)

انواع خطوط انتقال: $n_1>n_2$



1. خطوط انتقال بدون هادی (فیبر نوری)
2. " " با یک هادی (موجبر)
3. خطوط انتقال با دو هادی ← زوج سیم موازی / کابل کواکسیال / خطوط مایکرواستریپ
4. خطوط انتقال با ۳ هادی (استریپ لاین)

مدل خطوط انتقال با دو رسانا:



R، G، C و L پارامترهای اولیه خطوط انتقال هستند (در واحد متر بیان می شوند).

KVL: $V(z,t) - R\Delta_z i(z,t) - L\Delta z \dfrac{\partial i(z,t)}{\partial t} - V(z+\Delta z,t) = 0$

KCL: $i(z,t) - G\Delta z\, V(z+\Delta z,t) - C\Delta z \dfrac{\partial V(z+\Delta z,t)}{\partial t} - i(z+\Delta z,t) = 0$

معادلات KVL و KCL را بر Δz تقسیم می‌کنیم،

$$\frac{V(z,t)}{\Delta z} - \frac{V(z+\Delta z,t)}{\Delta z} = R\,i(z,t) + L\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}$$

$$\frac{i(z,t)}{\Delta z} - \frac{i(z+\Delta z,t)}{\Delta z} = GV(z+\Delta z,t) + C\frac{\partial (z+\Delta z,t)}{\partial t}$$

حل معادلات به ازای $\Delta z \to 0$ بدست می‌آوریم،

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{V(z+\Delta z,t)-V(z,t)}{\Delta z} = -R\,i(z,t) - L\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}$$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{i(z+\Delta z,t)-i(z,t)}{\Delta z} = -GV(z,t) - C\frac{\partial V(z,t)}{\partial t}$$

معادلات خطوط انتقال دو رسانایی،

$$\frac{\partial V(z,t)}{\partial z} = -R\,i(z,t) - L\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = -GV(z,t) - C\frac{\partial V(z,t)}{\partial t}$$

معادلات فوق حاکم بر ولتاژ و جریان یک خط انتقال دو رسانا است که بر اساس پارامترهای اولیه خط نوشته می‌شود. معادلات فوق در حالتی که کمیت‌های ولتاژ و جریان به صورت هماهنگ زمانی هستند به صورت زیر نوشته می‌شود،

$$V(z,t) = \mathrm{Re}\{V(z)\,e^{j\omega t}\}$$

$$i(z,t) = \mathrm{Re}\{I(z)\,e^{j\omega t}\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial V(z)}{\partial z} = -RI(z) - j\omega L I(z) \quad (**) \\[2ex] \dfrac{\partial I(z)}{\partial z} = -GV(z) - j\omega C V(z) \end{cases}$$

V: در معادلات فوق $e^{j\omega t}$ از طرفین حذف شده است.

هدف یافتن فازورهای ولتاژ و جریان خط انتقال است:

$$\frac{\partial^2 V(z)}{\partial z^2} = -(R+j\omega L)\frac{\partial I(z)}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 I(z)}{\partial z^2} = -(G+j\omega C)\frac{\partial V(z)}{\partial z}$$

γ^2 ← ثابت انتشار خط انتقال

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V(z)}{\partial z^2} = \overbrace{(R+jL\omega)(G+jC\omega)}^{\gamma^2} V(z) \quad (*) \\[2ex] \dfrac{\partial^2 I(z)}{\partial z^2} = (G+jC\omega)(R+jL\omega)\, I(z) \end{cases}$$

معادله دیفرانسیل (*) را حل می‌کنیم.

$$\frac{\partial^2 V(z)}{\partial z^2} = \gamma^2 V(z) \xrightarrow[\text{حل معادله مشخصه}]{} s^2 - \gamma^2 = 0$$

$$V(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{\gamma z}$$

$$I(z) = I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{\gamma z} \quad (****)$$

$$(**) \Rightarrow I(z) = \frac{-1}{R+jL\omega}\frac{\partial V(z)}{\partial z}$$

$$= \frac{-1}{R+jL\omega}\left(-\gamma V_0^+ e^{-\gamma z} + \gamma V_0^- e^{\gamma z}\right)$$

$$I(z) = \frac{\gamma V_0^+}{R+jL\omega} e^{-\gamma z} - \frac{\gamma V_0^-}{R+jL\omega} e^{\gamma z} \quad (***)$$

$$\frac{V_0^+}{I_0^+} = Z_0 = \sqrt{\frac{R+jL\omega}{G+jc\omega}}$$

$$V_p = \frac{\omega}{\beta}\ (m/s) \qquad , \beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$(\omega t - \beta z) - (\omega t - \beta(z+\lambda)) = 2\pi$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

اگر خط انتقال از یک سمت به منبع وصل شده باشد و از سوی دیگر دارای طول بی‌نهایت باشد، جمله دوم در معادلات حذف می‌شود. (چون قسمت موج Z را تشکیل می‌دهد)

$$\Rightarrow \begin{cases} V(z,t) = V_0^+ e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z) \\ V(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} \end{cases}$$

معادله حاکم بر ولتاژ خط انتقال ها

$$\begin{cases} I(z,t) = I_0^+ e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z) \\ I(z) = I_0^+ e^{-\gamma z} \end{cases}$$

معادله حاکم بر جریان خط انتقال ها

از مقایسه‌ی (***) و (****) نتیجه می‌شود:

$$\frac{\gamma V_0^+}{R+jL\omega} = I_0^+ \Rightarrow \frac{V_0^+}{I_0^+} = \frac{R+jL\omega}{\gamma}$$

$$\frac{-\gamma V_0^-}{R+jL\omega} = I_0^- \Rightarrow \frac{-V_0^-}{I_0^-} = \frac{R+jL\omega}{\gamma}$$

$$\Rightarrow \frac{V_0^+}{I_0^+} = -\frac{V_0^-}{I_0^-} = \frac{R+jL\omega}{\gamma} = Z_0$$

امپدانس مشخصه خط (Z_0)

نتیجه: نسبت دامنه ولتاژ به جریان در خط انتقال متناسب با پارامترهای اولیه خط و فرکانس است.

γ و Z_0 پارامترهای ثانویه خط انتقال محسوب می‌شوند.

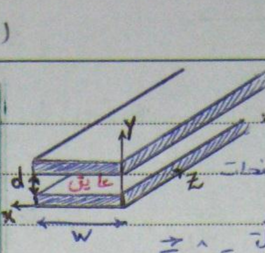
$$Z_0 = \frac{R+j\omega L}{\sqrt{(R+jL\omega)(G+jc\omega)}} = \sqrt{\frac{R+jL\omega}{G+jc\omega}}$$

$$V(z,t) = Re\{V(z)e^{j\omega t}\} = V_0^+ e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z) - V_0^- e^{\alpha z}\cos(\omega t + \beta z)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V(z,t) = V_0^+ e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z) + V_0^- e^{\alpha z}\cos(\omega t + \beta z) \\ I(z,t) = I_0^+ e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z) + I_0^- e^{\alpha z}\cos(\omega t + \beta z) \end{cases}$$

(خیلی خیلی مهم)

خط انتقال دوصفحه موازی:



فرض کنیم میدان الکتریکی بین صفحات به صورت زیر باشد:

$$\vec{E} = \hat{y} E_0 e^{-j\beta z} \Rightarrow \vec{H} = -\hat{x} \frac{E_0}{\eta} e^{-j\beta z}$$

[اگر تلفات نداشته باشیم.]

بردار پوئینتینگ $\vec{P} = \frac{1}{2} R_e \{ \vec{E} \times \vec{H}^* \} = \hat{z} \frac{|E_0|^2}{2\eta}$ در جهت z.

شرایط مرزی:

$$\begin{cases} \hat{n}_1 \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_{sf} \\ \hat{n}_1 \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_s \end{cases}$$

الف) در رسانای پائینی: $y = 0$

$\hat{n}_1 = \hat{y} \Rightarrow \hat{y} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_{sf}$ ✓: محیط (1) رسانا

$\vec{D}_1 = 0$ به علت داخل رسانا بودن

$$\Rightarrow \vec{D}_2 = \varepsilon \vec{E}_2 \Rightarrow +\varepsilon E_0 \hat{y} e^{-j\beta z} = \vec{D}_2$$

$$\Rightarrow +\varepsilon E_0 e^{-j\beta z} = \rho_{sf}$$ تابعی متناوب از z

ب) رسانای بالایی: $y = d$

$$-\hat{y} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_{sf} \quad \vec{D}_2 = \varepsilon \vec{E}_2 \quad (\vec{D}_1 = 0)$$

$$\Rightarrow \vec{D}_2 = -\varepsilon E_0 \hat{y} e^{-j\beta z}$$

$$\Rightarrow -\varepsilon E_0 e^{-j\beta z} = \rho_{sf}$$

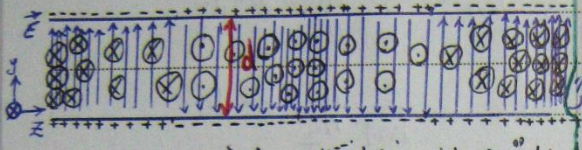
الف) در رسانای پائینی، $y = 0$

$$\hat{y} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = J_s \Rightarrow \hat{y} \times (-\hat{x}) \frac{E_0}{\eta} e^{-j\beta z} = J_s \quad (\vec{H}_1 = 0)$$

$$\Rightarrow \vec{J}_s = \hat{z} \frac{E_0}{\eta} e^{-j\beta z}$$ تابعی متناوب از z

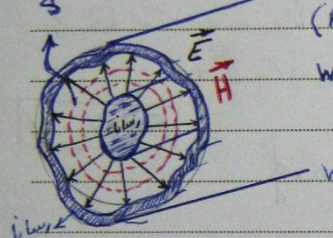
ب) در رسانای بالا $y = d$

$$\vec{J}_s = -\hat{z} \frac{E_0}{\eta} e^{-j\beta z}$$ تابعی متناوب از z



پارامترهای اولیه خط انتقال دوصفحه موازی:

(R, L, G, C)



$$W_m = \frac{\mu}{4} \int_v \vec{H} \cdot \vec{H}^* \, dv$$

$$W_m = \frac{1}{4} L \left(|I_0| \right)^2$$

$$\Rightarrow L = \frac{\mu}{|I_0|^2} \int_v \vec{H} \cdot \vec{H}^* \, dv$$

$$\Rightarrow L_{\text{در واحد طول}} = \frac{\mu}{|I_0|^2} \iint_S \vec{H} \cdot \vec{H}^* \, ds$$

سطح بین دو رسانا جا

برای خط انتقال دوصفحه رسانا:

$$L_{\text{در واحد طول}} = \frac{\mu}{|I_0|^2} \iint_S \vec{H} \cdot \vec{H}^* \, ds$$

$$= \frac{\mu}{|I_0|^2} \iint (-\hat{x}) \frac{E_0}{\eta} e^{-j\beta z} \cdot (-\hat{x}) \frac{E_0^*}{\eta^*} e^{j\beta z} \, ds$$

✓: ds تابعی از $dx dy$ است، در فرمول بالا x و y نداریم، این یعنی مساحت مستطیل خط انتقال مهم است. $|J_s|^2$

$$L = \frac{\mu}{|I_0|^2} \frac{|E_0|^2}{|\eta|^2} w d \times \frac{w}{w} \Rightarrow L = \frac{\mu d}{w} \left(\frac{H}{m} \right)$$

✓: $|J_s|^2 \times w^2 = I_0^2$

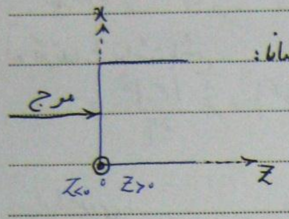
یادآوری:
$$\begin{cases} I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \\ II = \int_l \vec{J}_s \cdot d\vec{l} \end{cases}$$

یادآوری: در رسانا ها: $\gamma = \alpha + j\beta \xrightarrow[\alpha=\beta]{\text{ایده‌آل}} \gamma = (1+j)\,\alpha$

$\alpha = \dfrac{1}{\delta_s}$

$\hookrightarrow \gamma = (1+j)\dfrac{1}{\underbrace{\delta_s}} \longrightarrow$ عمق نفوذ

محاسبه توان تلف شده در رسانا:



$\hat{x}\,E_0\,e^{-\gamma z}$

روش اول:

$$P_t = \frac{1}{2}\iiint_v \vec{J}\cdot\vec{E}^*\,dv = \frac{\sigma}{2}\iiint_v \vec{E}\cdot\vec{E}^*\,dv$$

$$= \frac{\sigma}{2}\iiint \hat{x}E_0 T e^{-\gamma z}\cdot\hat{x}\left(E_0 T e^{-\gamma z}\right)^* dv$$

$$= \frac{\sigma}{2}\iiint_v |E_0|^2 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}\, e^{-\alpha z} e^{j\beta z}\,dv$$

$$= \frac{\sigma}{2}\iiint |E_0|^2 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{-\alpha z} e^{j\beta z}\,dv$$

$$= \frac{\sigma}{2}\iiint_{zyx} |E_0|^2 e^{-2\alpha z}\,dx\,dy\,dz$$ (در سطح یک متر مربع از رسانا)

$$\Rightarrow P_t = \frac{\sigma}{2}\int_{z=0}^{\infty} |E_0|^2 e^{-2\alpha z}\,|T|^2\,dz$$

$$= \frac{|T|^2\sigma|E_0|^2}{2}\int_0^{\infty} e^{-2\alpha z}\,dz$$

$$\Rightarrow P_{t\,\text{داخل رسانا}} = \frac{|E_0|^2|T|^2\sigma}{4\alpha} = \frac{|E_0|^2\left|\frac{2\eta}{\eta+\eta_0}\right|^2\sigma\,\delta_s}{4}$$

$$= \frac{|E_0|^2|\eta|^2\sigma\,\delta_s}{|\eta+\eta_0|^2}$$

$$W_e = \frac{3}{4}\iiint_v \vec{E}\cdot\vec{E}^*\,dv$$

$$\longrightarrow C = \frac{\varepsilon}{|V_0|^2}\iiint_v \vec{E}\cdot\vec{E}^*\,dv$$

$$W_e = \frac{1}{4}C|V_0|^2$$

C در واحد طول $= \dfrac{\varepsilon}{|V_0|^2}\iiint_v \vec{E}\cdot\vec{E}^*\,dv$

$$\hookrightarrow C = \frac{\varepsilon}{|V_0|^2}\iint_S \vec{E}\cdot\vec{E}^*\,ds$$

$\hookrightarrow$ سطح بین دو رسانا

برای خط انتقال دو صفحه رسانا:

$$C = \frac{\varepsilon}{|V_0|^2}\int_y\int_x E_0 e^{-j\beta z}\,\hat{y}\cdot\hat{y}\,E_0 e^{j\beta z}\,ds$$

$\boxed{E_0 \cdot d = V_0 \;: \checkmark}$

$$\Rightarrow C = \frac{\varepsilon}{\cancel{|V_0|^2}}\cancel{|E_0|^2}\,w\cancel{d}\times\frac{\cancel{d}}{d}$$

$$\Rightarrow C = \varepsilon\frac{W}{d}\;\left(\frac{F}{m}\right)$$

در خطوط انتقال معمولاً اثر مقاومت رسانای خط ناچیز است

$$\gamma = \sqrt{(R+jL\omega)(G+j\omega C)} \simeq \sqrt{(Lj\omega)(j\omega C)\left(\frac{G}{jC\omega}+1\right)}$$

ناچیز

$$= \gamma = j\omega\sqrt{LC}\sqrt{1+\frac{G}{jC\omega}} \quad (*)$$

موج تحت TEM $= \gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma+j\omega\varepsilon)} = \sqrt{(j\omega\mu)(j\omega\varepsilon)\left(\dfrac{\sigma}{j\omega\varepsilon}+1\right)}$

$$\Rightarrow \gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1+\frac{\sigma}{j\omega\varepsilon}} \quad (**)$$

از مقایسه * و ** داریم:

$$CL = \mu\varepsilon \rightarrow \boxed{LC = \mu\varepsilon}$$

برای خط انتقال با دو صفحه موازی داریم:

$$\frac{G}{C} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \rightarrow G = \frac{\sigma}{\varepsilon}C = \frac{\sigma}{\varepsilon}\times\varepsilon\frac{W}{d} = \frac{\sigma W}{d}$$

رسانایی عایق

$$\Rightarrow G = \frac{\omega\varepsilon'' W}{d}$$

یادآوری: $\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$

یادآوری،

$$\eta = \frac{j\omega\mu}{\gamma}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\varepsilon\left(1 + \frac{\sigma}{j\omega\varepsilon}\right)}}$$

$$\Rightarrow \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}\,\frac{j\omega\varepsilon}{\sigma}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = \sqrt{j}\sqrt{\frac{\omega\mu}{\varepsilon}} = 1 + j\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$

$$= \underbrace{\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}} + j\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$

مقاومت سطحی رسانا R_s

$$\Rightarrow R_s = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma}\underbrace{\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}}_{\alpha}$$

$$\Rightarrow R_s = \frac{1}{\sigma\delta_s}$$

$$\Rightarrow P_t = \frac{|E_0|^2 \frac{2}{\sigma^2\delta_s^2}\sigma\delta_s}{\eta_0^2} = \frac{2|E_0|^2 R_s}{\eta_0^2}$$

روش دوم:

$$|H_i| = \frac{2E_0}{\eta} \Rightarrow |J_s|^2 = \frac{4|E_0|^2}{\eta^2} = |H_t|^2$$

$$\Rightarrow P_t = \frac{R_s}{2}\int_0^1\!\!\int_0^1 |J_s|^2 ds = \frac{R_s}{2}\int_0^1\!\!\int_0^1 |H_t|^2 ds$$

سطح مقطع رسانا $\xrightarrow{\ \ }$ S

برای خط انتقال دو صفحه موازی:

$$\begin{cases} P_t = \dfrac{R_s}{2}\iint_S \vec{H}\cdot\vec{H}^* ds \\ P_t = \dfrac{1}{2}R|I_0|^2 \end{cases}$$

$$R = \frac{R_s}{|I_0|^2}\iint \vec{H}\cdot\vec{H}^* ds =$$

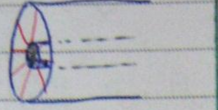
$$= \frac{R_s}{|I_0|^2}\int_y\!\!\int_x \frac{E_0}{\eta_0} e^{-j\beta z}(-\hat{x})\cdot(-\hat{x})\frac{E_0}{\eta_0} e^{j\beta z} dz$$

$$= \frac{R_s}{|I_0|^2}\int_y\!\!\int_x \frac{|E_0|^2}{\eta_0^2} dx\,dy = \frac{R_s}{|I_0|^2}\,\frac{|E_0|^2}{\eta_0^2} w\,d \times \frac{w}{w}$$

$|I_0|^2$

$$\Rightarrow R = \frac{R_s d}{W}$$

L, C, G, C	$\rightarrow$	γ, Z_0
پارامترهای اولیه		پارامترهای ثانویه



الف) خط انتقال بی تلف:

$$\underset{\text{Z}}{R} = G = 0$$

مدل برای رسانا کامل بودن رسانای خط

مدل برای ما کامل بودن عایق خط

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + Cj\omega)} = \sqrt{(Lj\omega)(jC\omega)}$$

$$= \sqrt{LC(j\omega)^2} = j\omega\sqrt{LC}$$

خطوط بی تلف دارای γ موهومی می باشند، $\alpha = 0$

$$\beta = \omega\sqrt{LC}$$

در این خطوط سرعت فاز موج ولتاژ و جریان به صورت ذیل است:

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

سرعت فاز موج ولتاژ و جریان از فرکانس مستقل است.

در خطوط انتقال بی تلف چون سرعت فاز برای تمام فرکانس ها یکسان است، اعوجاج در خط ایجاد نمی شود

در خطوط بی تلف امپدانس مشخصه خط به صورت ذیل است:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega l}{G + Cj\omega}} = \sqrt{\frac{j\omega l}{j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

① امپدانس مشخصه خط بی‌تلف مستقل از فرکانس است

② " " " مداری حقیقی است.

③ " " " به ظرفیت سلفی و خازنی خط وابسته است.

$$Z_0 = R_0 + jX_0 \Rightarrow \begin{cases} R_0 = \sqrt{\frac{l}{C}} \\ X_0 = 0 \end{cases}$$

ب) خط کم تلف:

برای فرکانس بالا

$$G \ll jC\omega \quad , \quad R \ll j\omega l$$

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega l)(G + jC\omega)}$$

$$= \sqrt{(j\omega l)(jC\omega)\left(1 + \frac{R}{j\omega l}\right)\left(1 + \frac{G}{j\omega C}\right)}$$

$$\Rightarrow \gamma = j\omega\sqrt{LC}\left(1 + \frac{R}{j\omega l}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{G}{j\omega C}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$(1+x)^n = 1 + nx$

$$\Rightarrow \gamma = j\omega\sqrt{LC}\left(1 + \frac{R}{2j\omega l}\right)\left(1 + \frac{G}{2jC\omega}\right)$$

ناچیز

$$\Rightarrow \gamma = j\omega\sqrt{LC}\left(1 + \frac{R}{2j\omega l} + \frac{G}{2j\omega C} - \frac{RG}{4lC\omega^2}\right)$$

$$\Rightarrow \gamma = j\omega\sqrt{LC}\left(1 + \frac{1}{j\omega}\left(\frac{R}{2l} + \frac{G}{2C}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \gamma = j\omega\sqrt{LC} + \sqrt{LC}\left(\frac{R}{2l} + \frac{G}{2C}\right)$$

$$\gamma = \left(\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{G}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}\right) + j\omega\sqrt{LC}$$

$$= \frac{1}{2}\left(R\sqrt{\frac{C}{L}} + G\sqrt{\frac{L}{C}}\right) + j\omega\sqrt{LC}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}\left(R\sqrt{\frac{C}{L}} + G\sqrt{\frac{L}{C}}\right) \\ \beta = \omega\sqrt{LC} \end{cases} \quad \text{(مهم)}$$

در این خطوط نیز چون β با ω رابطهٔ خطی دارد، سرعت فاز خط در تمام فرکانس‌ها ثابت است.

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + jC\omega}} = \sqrt{\frac{jL\omega\left(\frac{R}{jL\omega} + 1\right)}{jC\omega\left(\frac{G}{jC\omega} + 1\right)}}$$

$$= \sqrt{\frac{L}{C}}\left(1 + \frac{R}{j\omega L}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{G}{j\omega C}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{L}{C}}\left(1 + \frac{R}{2j\omega L} - \frac{G}{2j\omega C} - \frac{RG}{LC\omega^2}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{L}{C}}\left(1 + \frac{1}{2j\omega}\left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C}\right)\right)$$

$$R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad , \quad X_0 = -\frac{1}{2\omega}\left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C}\right)\sqrt{\frac{L}{C}}$$

ج) خطوط انتقال بدون اعوجاج:

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C}$$

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + jC\omega)} = \sqrt{(R + j\omega L)\left(\frac{RC}{L} + jC\omega\right)}$$

$$= \sqrt{(R + j\omega L)\left(\frac{C}{L}\right)(R + j\omega L)} = (R + j\omega L)\sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = R\sqrt{\frac{C}{L}} \\ \beta = \omega\sqrt{\frac{L}{C}} \end{cases}$$

در این خط نیز سرعت فاز مستقل از فرکانس است زیرا β تابعی خطی از ω است.

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + jC\omega}} = (R + j\omega L)^{\frac{1}{2}}(G + jC\omega)^{-\frac{1}{2}}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثالی در آخرین صفحهٔ جزوه از این مبحث موجود است.
(42)

$$\Rightarrow Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}\left(1+\frac{1}{2j\omega}\left(\cancel{\frac{R}{L}-\frac{G}{C}}\right)\right) = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \\ X_0 = 0 \end{cases}$$

خط	α	β	R_0	X_0
بدون تلف	$\alpha = 0$	$\beta = \omega\sqrt{LC}$	$R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$	$X_0 = 0$
کم تلف	$\alpha = \frac{1}{2}\left(R\sqrt{\frac{C}{L}} + G\sqrt{\frac{L}{C}}\right)$	$\beta = \omega\sqrt{LC}$	$R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$	$-\frac{1}{2\omega}\sqrt{\frac{L}{C}}\left(\frac{R}{L}-\frac{G}{C}\right)$
بدون اعوجاج	$\alpha = R\sqrt{\frac{C}{L}}$	$\beta = \omega\sqrt{LC}$	$R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$	$X_0 = 0$

نکته: توان مصرفی در خط انتقال

$$P(z) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{V(z)\, I^*(z)\}$$

$$P(z) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{V_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}\,\frac{V_0^* e^{-\alpha z} e^{j\beta z}}{Z_0^*}\right\}$$

$$\Rightarrow P(z) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{|V_0|^2 e^{-2\alpha z}}{Z_0^*}\right\} = \frac{|V_0|^2 e^{-2\alpha z}}{2}\,\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{Z_0^*}\right\}$$

$$P(z) = \frac{|V_0|^2}{2} e^{-2\alpha z}\,\mathrm{Re}\left\{\frac{R_0 + jX_0}{|Z_0|^2}\right\} = \frac{|V_0|^2 e^{-2\alpha z} R_0}{2|Z_0|^2}$$

$$= \frac{|V_0|^2 R_0}{2|Z_0|^2} e^{-2\alpha z}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P(z)}{\partial z} = \frac{|V_0|^2 R_0}{2|Z_0|^2}\left(-2\alpha e^{-2\alpha z}\right)$$

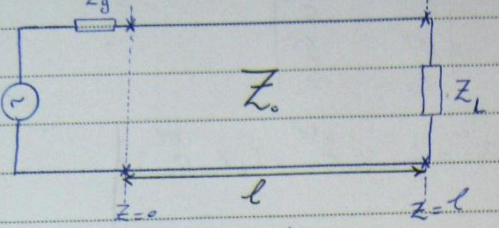
توان تلفاتی

$$\Rightarrow P_L = -\frac{\partial P(z)}{\partial z} = \underbrace{\frac{|V_0|^2 R_0}{|Z_0|^2}\, e^{-2\alpha z}}_{2P(z)}\,\alpha$$

به علت تلف شدن توان

$$\Rightarrow P_L = 2\alpha P(z) \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{P_L}{2P(z)}}$$

خطوط انتقال ختم شده:



$$\begin{cases} V(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{\gamma z} \\ I(z) = I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{\gamma z} \end{cases} ,\quad Z_0 = \frac{V_0^+}{I_0^+} = -\frac{V_0^-}{I_0^-}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{\gamma z} \\ I(z) = \frac{V_0^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{V_0^-}{Z_0} e^{\gamma z} \end{cases}$$

در محل بار معادلات به صورت زیرند: $(z = l)$

$$\begin{cases} V_L = V_0^+ e^{-\gamma l} + V_0^- e^{\gamma l} \\ I_L = \frac{V_0^+}{Z_0} e^{-\gamma l} - \frac{V_0^-}{Z_0} e^{\gamma l} \end{cases}$$

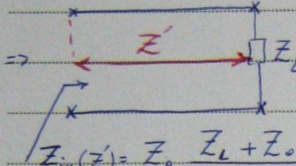
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} e^{-\gamma l} & e^{\gamma l} \\ \frac{e^{-\gamma l}}{Z_0} & -\frac{e^{\gamma l}}{Z_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0^+ \\ V_0^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_L \\ I_L \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow V_0^+ = \frac{\begin{vmatrix} V_L & e^{\gamma l} \\ I_L & -\frac{e^{\gamma l}}{Z_0} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-\gamma l} & e^{\gamma l} \\ \frac{e^{-\gamma l}}{Z_0} & \frac{e^{\gamma l}}{Z_0} \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{-\frac{V_L e^{\gamma l}}{Z_0} - I_L e^{\gamma l}}{-\frac{1}{Z_0} - \frac{1}{Z_0}}$$

$$\frac{V(z')}{I(z')} = \frac{Z_L + Z_0\, tgh(\gamma z')}{Z_0 + Z_L\, tgh(\gamma z')} \times Z_0$$

$$\frac{V(z')}{I(z')} = Z_{in}(z') \checkmark$$



$$Z_{in}(z') = Z_0 \frac{Z_L + Z_0\, tgh(\gamma z')}{Z_0 + Z_L\, tgh(\gamma z')}$$

✓ یادآوری : $\cosh(j\theta) = \cos\theta$ ، $\sin(j\theta) = j\sin\theta$

$tgh(j\theta) = j\tan\theta$

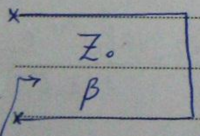
خط انتقال بی‌تلف :

$\alpha = 0 \Rightarrow \gamma = j\beta$

$$\Rightarrow Z_{in}(z) = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta z')}{Z_0 + jZ_L\, tg(\beta z')}$$

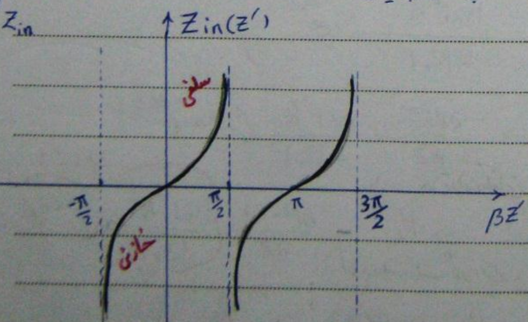
حالات خاص:

الف) اگر خط انتقال کوتاه ختم شود یعنی $Z_L = 0$



$$\Rightarrow Z_{in}(z') = jZ_0\, tg(\beta z')$$

امپدانس پریودیک است.



$$V_0^- = \frac{\begin{vmatrix} e^{-\gamma l} & V_L \\ \frac{e^{-\gamma l}}{Z_0} & I_L \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-\gamma l} & e^{\gamma l} \\ \frac{e^{-\gamma l}}{Z_0} & -\frac{e^{\gamma l}}{Z_0} \end{vmatrix}} = \frac{I_L e^{-\gamma l} - V_L \frac{e^{-\gamma l}}{Z_0}}{-\frac{2}{Z_0}}$$

$$\Rightarrow V_0^+ = \frac{1}{2}\left(V_L e^{+\gamma l} + I_L Z_0 e^{\gamma l}\right)$$

$$V_0^- = \frac{1}{2}\left(V_L e^{-\gamma l} - I_L Z_0 e^{-\gamma l}\right)$$

بنابراین معادلات فازوری ولتاژ و جریان خط با مقادیر محاسبه شده به صورت زیر است:

$$V(z) = \frac{1}{2}(V_L - I_L Z_0)\, e^{\gamma(l-z)} + \frac{1}{2}(V_L - I_L Z_0)\, e^{-\gamma(l-z)}$$

$$I(z) = \frac{1}{2Z_0}(V_L + I_L Z_0)\, e^{\gamma(l-z)} - \frac{1}{2Z_0}(V_L - I_L Z_0)\, e^{-\gamma(l-z)}$$

اگر $l - z$ را برابر z' بگیریم که همان فاصله از بار است داریم:

$$\begin{cases} V(z') = V_L \cosh(\gamma z') + I_L Z_0 \sinh(\gamma z') \\ I(z') = \frac{V_L}{Z_0} \sinh(\gamma z') + I_L \cosh(\gamma z') \end{cases}$$

$$\frac{V(z')}{I(z')} = \frac{V_L \cosh(\gamma z') + I_L Z_0 \sinh(\gamma z')}{\frac{V_L}{Z_0} \sinh(\gamma z') + I_L \cosh(\gamma z')}$$

$$= \frac{V_L + I_L Z_0\, tgh(\gamma z')}{\frac{V_L}{Z_0} tgh(\gamma z') + I_L} = \frac{V_L + \frac{V_L}{Z_L} Z_0\, tgh(\gamma z')}{\frac{V_L}{Z_0} tgh(\gamma z') + \frac{V_L}{Z_L}}$$

$$\frac{\div V_L}{\div V_L} = \frac{1 + \frac{Z_0}{Z_L} tgh(\gamma z')}{\frac{1}{Z_0} tgh(\gamma z') + \frac{1}{Z_L}} \; \frac{\times Z_L}{\times Z_L} \; \frac{Z_L + Z_0\, tgh(\gamma z')}{\frac{Z_L}{Z_0} tgh(\gamma z') + 1}$$

نتایج:

(۱): خط انتقال ختم شده به اتصال کوتاه در $\beta z' = \frac{\pi}{2}$ معادل یک اتصال باز محسوب می‌شود.

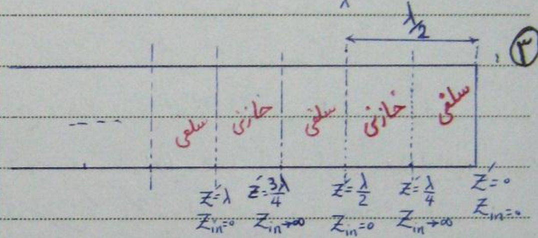
$$\beta z' = \frac{k\pi}{2} \Rightarrow z' = \frac{k\pi}{2\beta} = \frac{k\pi}{2\times\frac{2\pi}{\lambda}} = k\frac{\lambda}{4} \quad (\text{k فرد})$$

یا به عبارت دقیق‌تر در فواصل مضارب فرد $\frac{\lambda}{4}$ از بار، اتصال کوتاه، اتصال باز می‌بینیم.

(۲)- در فواصل ذیل از بار اتصال کوتاه مشاهده می‌شود:

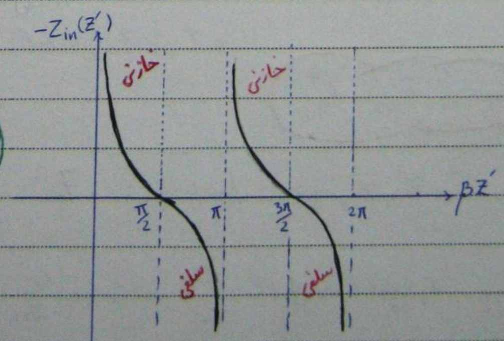
$$\beta z' = k\pi \Rightarrow z' = \frac{k\pi}{\beta} = \frac{k\pi}{2\times\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{k\lambda}{2} \quad k\in Z$$

(۳):



ب) اگر خط به اتصال باز ختم شود یعنی $Z_L \to \infty$

$$Z_{in}(z') = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0\, tg(\beta z')}{Z_0 + jZ_L\, tg(\beta z')} = -jZ_0 \cot(\beta z')$$



نتایج:

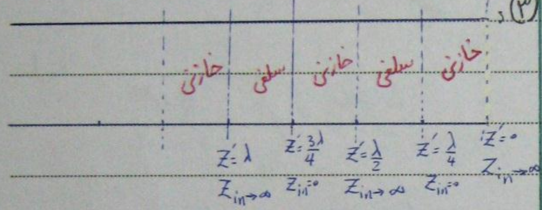
(۱): خط انتقال ختم شده به اتصال باز در $\beta z' = \frac{\pi}{2}$ معادل یک اتصال کوتاه است.

$$\beta z' = \frac{\pi}{2} \Rightarrow z' = \frac{\lambda}{4} \quad (\text{ضرایب فرد})$$

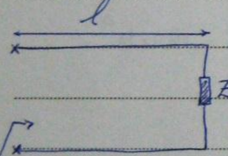
(۲): در مکان‌های ذیل خط انتقال به اتصال باز معادل اتصال باز است.

$$\beta z' = k\pi \rightarrow z' = \frac{k\lambda}{2}$$

(۳):



ج) $l = \frac{\lambda}{2}$

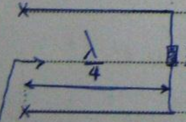


$$\beta l = \frac{2\pi}{\lambda}\times\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \beta l = \pi \Rightarrow \tan(\beta l) = 0$$

$$Z_{in}(l) = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0\, tg(\beta l)}{Z_0 + jZ_L\, tg(\beta l)} = \boxed{Z_L}$$

نتیجه: امپدانس ورودی خط انتقال ختم شده متناوب با دوره تناوب $\frac{\lambda}{2}$ است.

د) $l = \frac{\lambda}{4}$



$$\beta l = \frac{\lambda}{4}\times\frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \beta l = \frac{\pi}{2} \quad \to tg(\beta l) = \infty$$

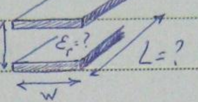
$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0\, tg(\beta l)}{Z_0 + jZ_L\, tg(\beta l)}$$

$$\boxed{\Rightarrow Z_{in} = \frac{Z_0^2}{Z_L} \quad \text{مبدل امپدانس}}$$

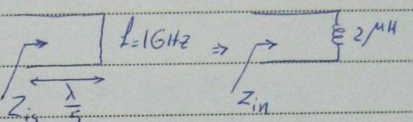
نتیجه: خط انتقال ختم شده با طول $\frac{\lambda}{4}$ یا مضارب فردی از $\frac{\lambda}{4}$ معادل یک مبدل امپدانس است.

مثال: یک خط انتقال دو رسانای موازی (صفحه) با عرض W و فاصله d در نظر بگیرید. در آن طول آن ‎20%‎ طول موج منتشر شده در آن است و به اتصال کوتاه ختم شده است. از چه عایقی ساخته شود تا در فرکانس $1GHz$ رفتاری معادل $2\mu H$ از خود نشان دهد؟

(با خط انتقال دو صفحه رسانای موازی در فرکانس $1GHz$ یک سلف $2\mu H$ طراحی کنید.)



حل:



$$Z_{is} = jZ_0\, tg(\beta\ell)$$

$$Z_{in} = jL\omega = j2\pi \times 2\times 10^{-6} \times 10^{9} = j4\pi \times 10^{3}$$

$$Z_{in} = Z_{is}$$

$$\Rightarrow jZ_0\, tg\,\beta\ell = j4\pi\times 10^{3}$$

$$\Rightarrow Z_0\, tg\,\frac{2\pi}{\lambda}\times\frac{\lambda}{5} = 4\pi\times 10^{3} \Rightarrow \boxed{Z_0 = \frac{4\pi\times 10^{3}}{tg(\frac{2\pi}{5})} \simeq 4.1 k\Omega}$$

از طرفی

$$\Rightarrow Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \Rightarrow \frac{L}{C} = Z_0^2 = 16.81\times 10^{6}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\mu d}{w}}{\frac{\varepsilon w}{d}} = 16.81\times 10^{6} \Rightarrow \frac{\mu_0}{\varepsilon}\frac{d^2}{w^2} = 16.81\times 10^{6}$$

یک خط انتقال (دو صفحه) رسانای موازی با:

$$\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 w^2}{d^2} = \frac{4\pi\times 10^{-7}}{16.8\times 10^{6}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon_r \frac{w^2}{d^2} = \frac{4\pi\times 10^{-7}}{\frac{1}{36\pi}\times 10^{-9}\times 16.8\times 10^{6}} = \frac{36\times 4\times \pi^2}{16.8\times 10^{4}} = \boxed{0.008}$$

$\varepsilon_r = 2.56$ انتخاب می کنیم: $\Rightarrow \frac{W}{d} = \sqrt{\frac{0.008}{2.56}} = \boxed{0.056}$

$\boxed{d = 10\,mm}$ انتخاب می کنیم: $\Rightarrow \boxed{W = 0.56\,mm}$

در این مثال می توان به جای دو صفحهٔ موازی، کابل کواکسیال یا دو سیم موازی داد.

نکته دار

مثال: یک خط انتقال به طول $5cm$ اگر به اتصال کوتاه ختم شود معادل یک امپدانس $j44\Omega$ است و اگر به اتصال باز ختم شود معادل $-j100\Omega$ است.

الف) امپدانس مشخصه خط را محاسبه کنید.

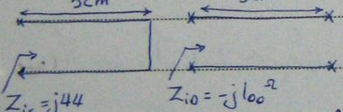
ب) ضریب انتشار خط را محاسبه کنید.

ج) طول موج انتشار یافته در خط را محاسبه کنید.

د) سرعت فاز موج، ولتاژ و جریان در خط را بیابید.

در صورتی که فرکانس استفاده از خط $0.1GHz$ باشد.

حل: الف)



$$Z_{in} = \frac{Z_L + Z_0\, tgh(\gamma\ell)}{Z_0 + Z_L\, tgh(\gamma\ell)} \Rightarrow \begin{cases} \text{if } Z_L \to \infty \Rightarrow Z_{io} = Z_0 \coth\gamma\ell \\ \text{if } Z_L = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Z_{is} = Z_0\, tgh(\gamma\ell)$$

$$\Rightarrow Z_{is}\, Z_{os} = Z_0^2$$

$$\Rightarrow Z_0^2 = Z_{is} Z_{io} \Rightarrow Z_0 = \sqrt{j44\,(-j100)} = 70\Omega$$

ب)

$$Z_{is} = Z_0\, tgh\gamma\ell \Rightarrow tgh\gamma\ell = \frac{Z_{is}}{Z_{os}} \Rightarrow \gamma\ell = tgh^{-1}\left(\frac{Z_{is}}{Z_{os}}\right)$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{1}{\ell}\, tgh^{-1}\left(\sqrt{\frac{j44}{-j100}}\right) = 20\, tgh\sqrt{j^2 0.44} = 20\, tgh^{-1}(j\sqrt{0.44})$$

$$\gamma = j2\,tg^{-1}(\sqrt{0.44}) \Rightarrow \gamma = j17.34 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 17.34 \end{cases}$$

ج)

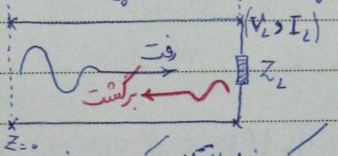
$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{17.34} = 0.36\ m = 36\ cm$$

د)

$$V_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \times 10^8}{17.34} = 3.6 \times 10^7\ m/s$$

خطوط انتقال ختم شده:

$$\begin{cases} V(z') = \frac{1}{2}(V_L + I_L Z_0)e^{\gamma z'} + \frac{1}{2}(V_L - I_L Z_0)e^{-\gamma z'} \\ I(z') = \frac{1}{2Z_0}(V_L + I_L Z_0)e^{\gamma z'} - \frac{1}{2Z_0}(V_L - I_L Z_0)e^{-\gamma z'} \end{cases}$$



طبق شکل فوق چون در یک خط انتقال یک موج رفت داریم و یک موج برگشت، معادلات به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} V(z') = \frac{1}{2}(V_L + I_L Z_0)e^{\gamma z'}\left(1 + \frac{V_L + Z_L Z_0}{V_L + Z_0 I_L}e^{-2\gamma z'}\right) \\ I(z') = \frac{1}{2Z_0}(V_L + I_L Z_0)e^{\gamma z'}\left(1 - \frac{V_L - I_L Z_0}{V_L + I_L Z_0}e^{-2\gamma z'}\right) \end{cases}$$

ضریب بازگشتی (Γ)

$$\boxed{\Gamma = \frac{Z_L I_L - I_L Z_0}{Z_L I_L + I_L Z_0} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}}$$

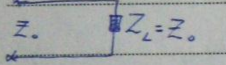
چون هر موج با یک ضریب از موج رفت باز می‌گردد و به فرستنده می‌رسد، فرستنده این موج را همانند یک فیدبک مثبت تقویت می‌کند و با ادامه یافتن این کار فرستنده می‌سوزد.

در خط انتقال ختم شده به بار، بخشی از موج ولتاژ و جریان که به سمت بار در حرکت است به سمت منبع باز می‌گردد. میزان موج با ضریب بازگشتی که در حالت کلی عددی مختلط است و به صورت ذیل بدست می‌آید، قابل محاسبه است:

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = |\Gamma| e^{j\theta_r}$$

موج برگشتی در خط انتقال در دو صورت صفر است:

الف) در صورتی که خط انتقال به باری برابر با امپدانس مشخصه‌اش ختم شود



ب) در صورتی که خط انتقال به طول بی نهایت باشد.

✓ نکته:

$$P_r = P_i |\Gamma|^2$$

$$P_L = P_i (1 - |\Gamma|^2)$$

✓ نکته:

اگر خط انتقال بی تلف باشد به یک بار مقاومتی ختم شده باشد، داریم:

$$V(z') = \frac{1}{2}(V_L + I_L R_0)e^{j\beta z'}\left(1 + |\Gamma| e^{j\theta_r} e^{-j(2\beta z')}\right)$$

$$I(z') = \frac{1}{2Z_0}(V_L + I_L R_0)e^{j\beta z'}\left(1 - |\Gamma| e^{j\theta_r} e^{-j2\beta z'}\right)$$

در عمل چون موج رفت و برگشت داریم، پس یک موج ایستا در خط انتقال داریم که در یک نقطه ماکزیمم و در یک نقطه مینیمم داریم.

با توجه به معادلات فوق، ولتاژ در مکان‌های ذیل ماکزیمم است:

$$\theta_{r_{max}} - 2\beta z'_{Max} = \pm 2k\pi$$

همچنین ولتاژ در مکان های ذیل کمینه می شود:

$$\theta_\Gamma - 2\beta Z'_m = \pm(2k+1)\pi$$

از طرفی با توجه به معادلات مشخص می شود که مکان های وقوع ولتاژ ماکزیمم دارای جریان های مینیمم است و محل وقوع ولتاژهای مینیمم دارای جریان های ماکزیمم است.

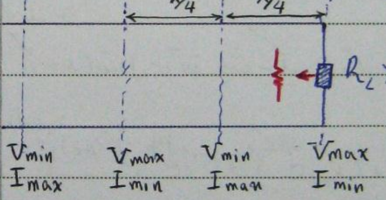
حال اگر بار مقاومتی باشد، ضریب بازگشتی به صورت زیر است:

$$\Gamma = \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0} = \begin{cases} >0 \,;\, R_L > R_0 \Rightarrow \theta_\Gamma = 0 \\ <0 \,;\, R_L < R_0 \Rightarrow \theta_\Gamma = \pm\pi \end{cases}$$

نتیجه: اگر خط به باری معادل $R_L > R_0$ ختم شده باشد داریم:

$$\theta_\Gamma - 2\beta Z'_M = -2k\pi \Rightarrow Z'_M = \frac{k\pi}{\beta} = \frac{k\pi}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \boxed{k\frac{\lambda}{2}} \quad k=0,1,\dots$$

$$\theta_\Gamma - 2\beta Z'_m = -(2k+1)\pi \Rightarrow Z'_m = \frac{2k+1}{2\beta}\pi = \boxed{(2k+1)\frac{\lambda}{4}} \quad k=0,1,\dots$$



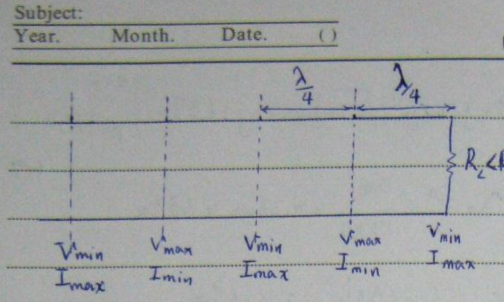
نتیجه: اگر $R_L < R_0$ داریم:

$$\theta_\Gamma - 2\beta Z'_M = -2k\pi \Rightarrow Z'_M = \frac{(2k+1)\pi}{2\beta}$$

$$\Rightarrow Z'_M = \frac{(2k+1)\pi}{2\frac{2\pi}{\lambda}} = \boxed{(2k+1)\frac{\lambda}{2}} \quad k=0,1,2,\dots$$

$$\theta_\Gamma - 2\beta Z'_m = -(2k+1)\pi \Rightarrow Z'_m = \frac{k\pi}{\beta} = \boxed{\frac{k\lambda}{2}}$$

$k=0,1,2,\dots$



if: $R_L = 0 \longrightarrow R_L < R_0$

حالات اتصال کوتاه و اتصال باز دو حالت خاص از موارد فوق هستند.

در خط انتقال به نسبت ماکزیمم ولتاژ به کمینه ولتاژ، ضریب موج ساکن گفته می شود:

$$S = VSWR = \frac{|V_{max}|}{|V_{min}|}$$

Voltag Standing Wave Ratio

$$= \frac{|1+|\Gamma||}{|1-|\Gamma||} = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}$$

✓: در حالت کلی داشتیم (در یک محیط بی تلف):

$$\begin{cases} V(z') = V_L\cos(\beta z') + jI_L Z_0 \sin(\beta z') \\ I(z') = j\dfrac{V_L}{Z_0}\sin(\beta z') + I_L\cos(\beta z') \end{cases}$$

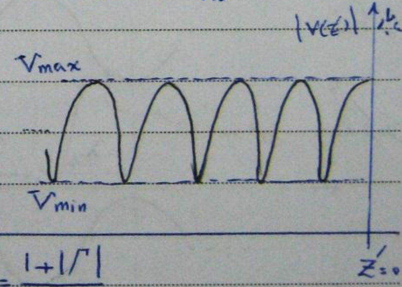
از طرفی چون بار ما اهمی است معادلات زیر را داریم،

$$\begin{cases} V(z') = V_L\cos(\beta z') + jI_L R_0 \sin(\beta z') \\ I(z') = j\dfrac{V_L}{R_0}\sin(\beta z' + I_L\cos(\beta z') \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V(z') = V_L\cos(\beta z') + jV_L\dfrac{R_0}{R_L}\sin(\beta z') \\ I(z') = I_L\cos(\beta z') + jI_L\dfrac{R_L}{R_0}\sin(\beta z') \end{cases}$$

با توجه به روابط فوق اندازه دفازور ولتاژ و جریان در خط انتقال بی تلف به صورت ذیل محاسبه می شود.

$$\begin{cases} |V(z')| = V_L\sqrt{\cos^2(\beta z') + \left(\dfrac{R_0}{R_L}\right)^2\sin^2(\beta z')} \\ |I(z')| = I_L\sqrt{\cos^2(\beta z') + \left(\dfrac{R_L}{R_0}\right)^2\sin^2(\beta z')} \end{cases}$$

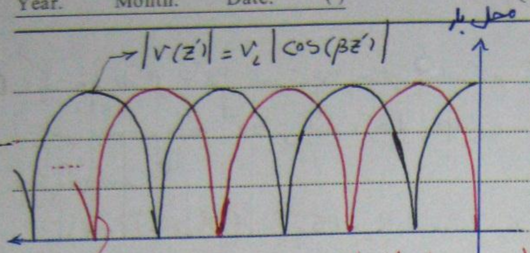


$$\frac{V_{max}}{V_{min}} = S = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}$$

در حالت خاص که $R_L \to \infty$ یعنی خط به اتصال باز ختم شده است داریم،

$$\begin{cases} |V(z')| = V_L\,|\cos(\beta z')| \\ |I(z')| = V_L\,|\sin(\beta z')| \end{cases}$$

$|V(z')| = V_L\,|\cos(\beta z')|$



$|I(z')| = I_L\,|\sin(\beta z')| = \dfrac{V_L}{R_0}\,|\sin(\beta z')|$

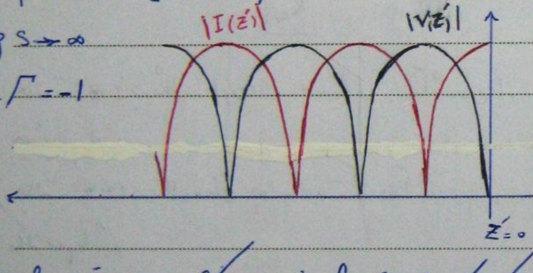
$$\begin{cases} S \longrightarrow \infty \\ \Gamma \longrightarrow +1 \end{cases}$$

در حالت خاص که $R_L = 0$ باشد، داریم،

$$|V(z')| = \frac{V_L R_0}{R_L}\,|\sin(\beta z')|$$

$$|I(z')| = I_L\,|\cos(\beta z')|$$

$$\begin{cases} S \to \infty \\ \Gamma = -1 \end{cases}$$



✓ نکته: اگر $R_L > R_0$ باشد، ضریب بازگشتی عددی حقیقی و مثبت است و $\theta_\Gamma = 0$، در این حالت ماکزیمم های ولتاژ در محل بار و فواصل $\frac{\lambda}{2}$ از آن رخ می دهند و کمینه ها در فاصله $\frac{\lambda}{4}$ و ضرایب فرد آن.

$R_L > R_0 \qquad \beta z' = 0 \Rightarrow V_{max} = V_L$

$R_L > R_0 \;\text{و}\; \beta z' = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow V_{min} = \dfrac{V_L R_0}{R_L}$

از طرفی می دانیم که نسبت موج ساکن برابر است با $\dfrac{V_{max}}{V_{min}}$ بنابراین

$$\boxed{S = \frac{V_{max}}{V_{min}} = \frac{V_L}{\frac{V_L R_0}{R_L}} = \frac{R_L}{R_0}}$$

□: در یک خط انتقال بی‌تلف نسبت موج ساکن 3 است و امپدانس مشخصه خط $50\,\Omega$ می‌باشد، خط به چه باری ختم شده است؟

$R_L = SR_0 \Rightarrow R_L = 150\,\Omega$ $(\because R_L > R_0)$ $(**)$

$R_L = \frac{50}{3}\,\Omega$ $(R_L < R_0)$ $(*)$

اگر $R_L < R_0$ باشد:

$R_L < R_0$ و $\beta z' = 0 \longrightarrow V_{min} = V_L$

$R_L < R_0$ و $\beta z' = \frac{\pi}{2} \longrightarrow V_{max} = V_L \frac{R_0}{R_L}$

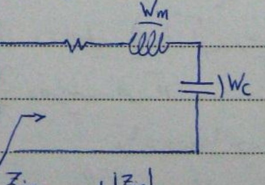
$\Rightarrow S = \frac{V_L R_0}{R_L V_L} = \boxed{\frac{R_0}{R_L}}$

حالت $(*)$ در مثال زمانی جواب است که ولتاژ روی بار مینیمم باشد.

حالت $(**)$ در مثال زمانی جواب است که ولتاژ روی بار ماکزیمم باشد.

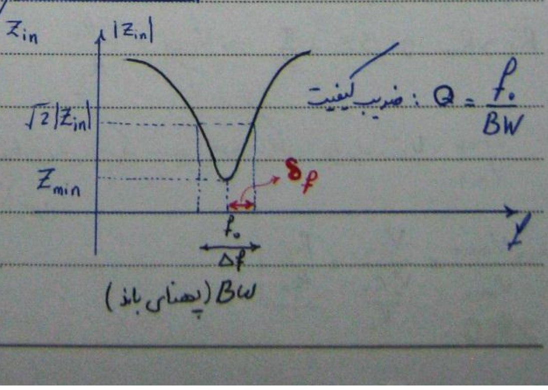
مدار تشدید:

مدار تشدید سری



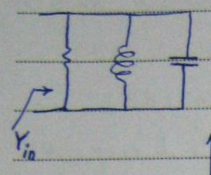
$\omega = 2\pi f$

$Z_{in} = R + j\underbrace{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}_{0}$

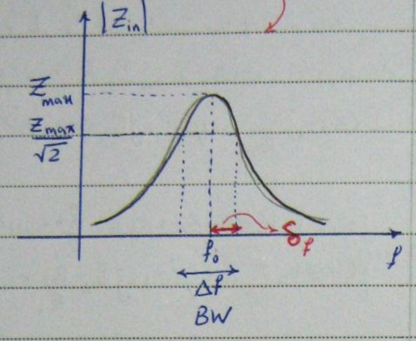


ضریب کیفیت: $Q = \frac{f_0}{BW}$

مدار تشدید موازی



$Y_{in} = \frac{1}{R} + j\underbrace{\left(C\omega - \frac{1}{\omega L}\right)}_{0}$

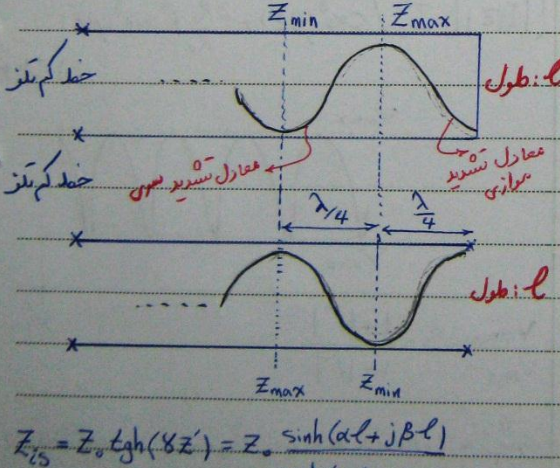


$Q = \frac{f_0}{BW}$

✓: هرچه Q بیشتر باشد BW (پهنای باند) کمتر است.

✓: با مدارهای الکترونیکی می‌توان $10 < Q < 20$ ساخت اما در خطوط انتقال می‌توان Q بالایی ساخت.

خط انتقال کم‌تلف به عنوان تشدیدکننده:



$Z_{is} = Z_0 \tanh(\gamma z') = Z_0 \frac{\sinh(\alpha l + j\beta l)}{\cosh(\alpha l + j\beta l)}$

$\beta l = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{\pi}{2l}}$ $(*)$

$$\Rightarrow Z_{is} = Z_0 \frac{j\sinh\alpha l \cos\beta l + j\sin\beta l \cosh\alpha l}{\cosh\alpha l \cos\beta l + j\sin\beta l \sinh\alpha l}$$

بنابراین:

1. خط انتقال کم تلف ختم شده به اتصال کوتاه به طول $\frac{n\lambda}{4}$ معادل یک مدار تشدید موازی است. (n فرد)
2. خط انتقال کم تلف ختم شده به اتصال کوتاه به طول $\frac{n\lambda}{2}$ معادل یک مدار تشدید سری است. (n زوج)
3. خط انتقال کم تلف ختم شده به اتصال باز به طول $\frac{n\lambda}{4}$ معادل یک مدار تشدید سری است. (n فرد)
4. خط انتقال کم تلف ختم شده به اتصال باز به طول $\frac{n\lambda}{2}$ معادل یک مدار تشدید موازی است. (n زوج)

در یک خط انتقال کم تلف به طول $\frac{\lambda}{4}$ به اتصال کوتاه ختم شده است:

$$\beta l = \frac{2\pi}{\lambda} l = \frac{2\pi f}{v} l = \frac{2\pi}{v}(f_0 + \delta f) l$$

$$\beta l = \frac{2\pi f_0}{v} l + \frac{2\pi\, \delta f}{v} l = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\frac{\delta f}{f_0}$$

$\frac{\lambda}{4}$ ، λ

$$\boxed{\cos\beta l = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\frac{\delta f}{f_0}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{\delta f}{f_0}\right) \simeq -\frac{\pi\, \delta f}{2 f_0}}$$

$$\boxed{\sin\beta l = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\frac{\delta f}{f_0}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{\delta f}{f_0}\right) \simeq 1}$$

0

از طرفی می دانیم چون خط کم تلف است عدد αl نیز عددی بسیار کوچک است، بنابراین $\sin\alpha l = \alpha l$

ضرب دو عدد ناچیز صرف نظر

$$Z_{is} = Z_0 \frac{\cancel{(\alpha l)\left(-\frac{\pi}{2}\frac{\delta f}{f_0}\right)} + j\cosh(\alpha l)}{\left(-\frac{\pi}{2}\frac{\delta f}{f_0}\right)\cosh(\alpha l) + j\sinh(\alpha l)}$$

$$\Rightarrow Z_{is} = Z_0 \frac{j\cosh(\alpha l)}{-\frac{\pi}{2}\frac{\delta f}{f_0}\cosh(\alpha l) + j\sin(\alpha l)}$$

$$\frac{\div j\cosh(\alpha l)}{\div j\cosh(\alpha l)} \quad \frac{Z_0}{j\frac{\pi}{2}\frac{\delta f}{f_0} + \underbrace{tgh(\alpha l)}} \Rightarrow$$

تقریبا αl است

$$\Rightarrow Z_{is} = \frac{Z_0}{j\frac{\pi}{2}\frac{\delta f}{f_0} + \alpha l}$$

$$\Rightarrow |Z_{is}|^2 = \frac{Z_0^2}{\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{\delta f}{f_0}\right)^2 + (\alpha l)^2}$$

$$\Rightarrow |Z_{is}|_{max}^2 = \frac{Z_0^2}{(\alpha l)^2}$$

∞ نیست اما عددی بزرگ است

زمانی ماکزیمم داریم که مخرج مینیمم شود یعنی $\delta f = 0$

$$\text{امپدانس نرمالیزه ورودی} = \frac{|Z_{is}|^2}{\frac{|Z_0|^2}{\alpha^2 l^2}} = \frac{1}{\frac{\pi^2}{4\alpha^2 l^2}\left(\frac{\delta f}{f_0}\right)^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{\pi^2}{4\alpha^2 l^2}\left(\frac{\delta f}{f_0}\right)^2 + 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi^2}{4\alpha^2 l^2}\left(\frac{\Delta f}{2f_0}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\Delta f}{f_0}\right)^2 = \frac{16\alpha^2 l^2}{\pi^2} \Rightarrow \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{\pi}{4\alpha l} = Q$$

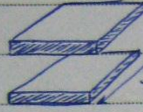
(*)

$$\Rightarrow Q = \frac{\overset{\beta}{\pi}}{2l \cdot 2\alpha} = \boxed{\frac{\beta}{2\alpha}}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال : با یک خط انتقال دو صفحه‌ی موازی در فرکانس 10GHz مدار تشدید موازی با ضریب کیفیت 1000 طراحی کنید.

حل :



$l = \frac{\lambda}{4}$

فرض کنیم با اتصال کوتاه ختم شود . $\frac{\lambda}{4}$ از طول آن را به عنوان مدار تشدید برمی‌گزینیم.

$$f = 10\,GHz \longrightarrow \lambda = 3\,cm \quad \Rightarrow \frac{\lambda}{4} = 7.5^{mm}$$

① ، چون 7.5^{mm} خیلی کم است ، طول آن را برابر $l = 37.5^{mm}$ ($\frac{5\lambda}{4}$) می‌گیریم .

② ، عایق درون خط را از ماده‌ای با $\varepsilon_r' = 2.08$ ، $tg\delta = 0.0004$ انتخاب می‌کنیم (Teflon)

③ ،

$$Q = 1000 = \frac{\beta}{2\alpha} = \frac{\omega\sqrt{LC}}{R\sqrt{\frac{C}{L}} + G\sqrt{\frac{L}{C}}} \quad \frac{\div\sqrt{LC}}{\div\sqrt{LC}} \quad \frac{\omega}{\frac{R}{C} + \frac{G}{C}} =$$

$$\omega\varepsilon'' = \omega\varepsilon' tg\delta \longleftrightarrow \quad \text{عایق} \quad tg\delta = \frac{\sigma + \omega\varepsilon''}{\omega\varepsilon'} = \frac{\omega\varepsilon''}{\omega\varepsilon'} = \frac{}{\varepsilon'} = 0.0004$$

$$G = \frac{\sigma w}{d}$$

$$L = \mu\frac{d}{w}$$

$\mu \to \mu_0$

$$C = \varepsilon\frac{w}{d}$$

$\varepsilon \to \varepsilon_0\varepsilon_r'$

$$R = \frac{R_s w}{2} = \frac{w}{2\sigma\delta_s}$$

$\delta_s \to \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}}$

$\sigma \to$ رسانا (مس $4\times10^{+7}$)

$$\Rightarrow Q = \frac{2\pi\times10^{10}}{\frac{w^2}{\mu_0 2\sigma\delta_s d} + \frac{\omega\varepsilon' tg\delta}{\varepsilon'}} = 1000 \longrightarrow d, W \quad \text{قابل تعیین}$$

$L \longrightarrow$ تعیین شده

ako

مثال: (خطوط انتقال) در یک خط انتقال که در فرکانس $1GHz$ استفاده می‌شود و بدون اعوجاج است دارای تلفات $\alpha = 10\frac{dB}{Km}$ می‌باشد اگر امپدانس مشخصه خط مذکور $100\,\Omega$ باشد و ظرفیت سلفی خط $1\frac{\mu H}{m}$ بدست آمده باشد

الف) پارامترهای اولیه خط را حساب کنید. ب) پارامترهای ثانویه خط را حساب کنید.

ج) کمترین مسافت در خط انتقال که ولتاژ اختلاف فاز $180°$ دارد را محاسبه کنید.

د) در چه طولی از خط انتقال فاز ولتاژ $\frac{\pi}{4}$ تغییر می‌کند؟

و) سرعت فاز موج ولتاژ و جریان خط را محاسبه کنید.

هـ) طول موج را بدست آورید.

حل: الف)

$$f = 1GHz \rightarrow \omega = 2\pi f = 2\pi \times 10^9 \frac{rad}{s}$$

$$\alpha = 10\frac{dB}{Km} = 0.01\frac{dB}{m} \longrightarrow \alpha = \frac{0.01}{8.69}\frac{NP}{m} = 0.0012\frac{NP}{m}$$

$$\alpha = R\sqrt{\frac{C}{L}} \ ,\ \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{100} \Rightarrow 0.0012 = \frac{R}{100} \Rightarrow R = 0.12\frac{\Omega}{m}$$

$$R_0 = 100 \ ,\ \sqrt{\frac{L}{C}} \Rightarrow \frac{L}{C} = 10^4 \rightarrow C = L\times 10^{-4} = 10^{-6}\times 10^{-4}\left(\frac{F}{m}\right) = 10^{-10}\frac{F}{m} = 100\frac{pF}{m}$$

خطوط بدون اعوجاج: $\frac{R}{L} = \frac{G}{C} \Rightarrow \frac{0.12}{10^{-6}} = \frac{G}{10^{-10}} \Rightarrow G = 0.12\times 10^{6}\times 10^{-10} = 12\frac{\mu S}{m}$

ب)

$$\alpha = R\sqrt{\frac{C}{L}} = 0.12\sqrt{\frac{10^{-10}}{10^{-6}}} = 0.0012 \quad , \quad \beta = \omega\sqrt{LC} = 2\pi\times 10^{+9}\sqrt{10^{-6}\times 10^{-10}} = 20\pi\frac{rad}{m}$$

یعنی β برای هر یک متر 20π رادیان تغییر می‌کند.

ج) $180 \rightarrow \pi \qquad \frac{20\pi}{1} = \frac{\pi}{\ell} \rightarrow 5cm = \frac{1}{20}m = \ell \rightarrow \ell = 5cm$

د) $\frac{20\pi}{1} = \frac{\pi}{4\ell} \Rightarrow \ell = 1.25\ cm$

هـ) $\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{20\pi} = 0.1\ m = 10cm$

و) $V_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{10^{-8}} = 10^{8}\frac{m}{s}$

نمونه سوالات درس میدان و امواج (سری اول)

۱- یک حلقه جریان با شعاع a که در صفحه xy و به مرکز محور z قرار گرفته است در نقاط خیلی دور از خود میدان الکتریکی تشعشعی متغیر بازمان به صورت ذیل تولید نموده است.

$$\vec{E} = \hat{\varphi} E_0 sin\theta \frac{\cos(\omega t - \beta_0 R)}{R} \qquad ; \beta_0 = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$$

الف) مطلوب است میدان مغناطیسی تشعشعی را محاسبه نمایید.

ب) بردار پوئینتیگ متوسط زمانی را پیدا کنید.

ج) این موج در چه جهتی منتشر می شود؟

د) توانی که از یک دایره به شعاع 2α به مرکزیت محور z ها و در ارتفاع 10α می گذرد را محاسبه نمایید.

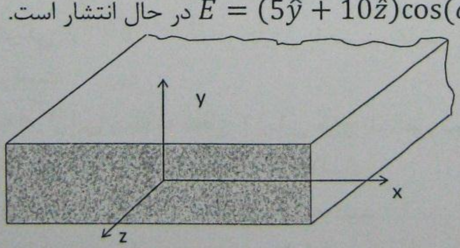
۲- بین صفحات یک خازن، پلی استیرن با ضریب عایقی $\varepsilon = 2.56\varepsilon_0$ و رسانایی ویژه $\sigma = 3.7 \times 10^{-4}$ قرار گرفته است. اگر صفحات خازن به منبع ولتاژی با ولتاژ $v(t) = 10\cos(2\pi f t)$ وصل شده باشد و از اثر میدان الکتریکی در لبه های صفحات خازن چشم پوشی شود، مطلوب است:

الف) اگر $f = 1MHz$ نسبت جریان هدایتی J_c و جریان جابجایی J_d د رعایق خازن را محاسبه نمایید.

ب) بند الف را به ازای فرکانس ۱۰۰ مگاهرتز مجددا حل کنید.

ج) تحلیل خود را از نتایج بندهای الف و ب ارائه دهید.

۳- یک باریکه از عایق پلی استیرن را با پارامترهای ساختمانی $\mu = \mu_0, \varepsilon = 2.65\varepsilon_0, \sigma = 3.7 \times 10^{-4}$ به ضخامت ۲ سانتی متر موجود است . در این عایق که در شکل ذیل قابل مشاهده است، یک موج الکترومغناطیسی با میدان الکتریکی $\vec{E} = (5\hat{y} + 10\hat{z})\cos(\omega t - \beta x)$ در حال انتشار است.



الف) میدان مغناطیسی موج را در دی الکتریک با استفاده از امپدانس ذاتی محیط محاسبه نمایید.

ب) میدان مغناطیسی موج را در دی الکتریک با استفاده از معادلات ماکسول محاسبه نمایید.

ج) میدان الکتریکی و مغناطیسی را در ناحیه خارج از دی الکتریک و دقیقا بالا و پایین آن بدست آورید.

د) بردار پوئینتینگ را در ناحیه بیرون از دی الکتریک بیابید.

۴- یک جریان سطحی نامحدود با چگالی $\vec{J_s} = 2\hat{x}$ آمپر بر متر از صفحه $z = 0$ می گذرد. این جریان سبب ایجاد موج الکترومغناطیسی می شود در صورتی که در zهای مثبت عایقی با ضریب عایقی ۲ و در zهای منفی عایقی با ضریب عایقی ۴ اطراف این جریان را احاطه کرده باشند، مطلوب است:

الف) میدان الکتریکی در کل فضا؟

ب) میدان مغناطیسی در کل فضا؟

ج) چگالی شار الکتریکی در کل فضا؟

د) بردار پوئینتینگ در هر دو ناحیه؟

ه) توانی که از دایره ای به شعاع ۲ می گذرد را محاسبه کنید، در صورتی که مرکز دایره در $a(2,2,2)$ باشد.

۵- موج تختی در جهت x در یک دی الکتریک با ضریب عایقی ۳ منتشر می شود. میدان الکتریکی این موج به صورت $\vec{E} = 3\cos(\omega t - kx)\hat{y}$ است. اگر فرکانس این موج در باند آزاد $2.4GHz$ باشد (فرکانس کار لینک های رادیویی باند آزاد) مطلوب است:

الف) فازور میدان مغناطیسی؟

ب) میدان مغناطیسی موج را محاسبه نمایید.

ج) سرعت فاز موج را بیابید.

د) طول موج را محاسبه کنید.

ه) تغییر فاز بین دو نقطه با مختصات $x=1$ و $x=2$ را بدست آورید.

۶- موجی با میدان الکتریکی $\vec{E} = 5e^{j\beta x}\hat{z}$ در عایقی با ضریب عایقی ۴ منتشر شده و در $x=-5$ به یک رسانا برخورد می کند. مطلوب است:

الف) توانی که در استوانه ای از این رسانا به شعاع ۲ از این موج تلف می شود؟

ب) ضرایب انعکاس و انتقال را در مرز دو محیط محاسبه نمایید.

ج) بردار پوئینتینگ موج رفت و برگشت را در عایق محاسبه کنید.

د) فازور میدان الکتریکی را در عایق برای موج رفت و برگشت بدست آورید.

ه) فازور میدان الکتریکی موج برگشت را بدست آورید.

و) ضریب انعکاس را در صفحه $x=0$ بیابید.

ز) اختلاف فاز میدانهای الکتریکی موج در دو نقطه $x=-4$ و $x=0$ را بدست آورید.

۷- در ناحیه $z>0$ ماده ای با ضریب رسانایی $\sigma = 1 + y$ و ضریب عایقی $\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \frac{1}{y})$ قرار دارد. چگالی حجمی جریان در این ناحیه به صورت $\overrightarrow{J_v} = 2e^{-x}\hat{y}$ آمپر بر متر مربع می باشد. مطلوب است چگالی بار آزاد را در این ناحیه بدست آورید.

۸- از روی شرایط مرزی حاکم بر میدان های ساکن $\vec{E}$ و $\vec{H}$ در مرز دو ماده با ضرایب رسانایی و ضرایب عایقی مختلف، شرایط مرزی را برای $\vec{J}$ در مرز بدست آورید. سپس نشان دهید که جریان دائمی عمود بر رسانا از رسانا خارج می شود و نیز جریان دائمی به رسانا وارد نمی شود و اگر به مرز بتابد به صورت مماس بر مرز رسانا خواهد شد.

۹- یک سطح رسانا به عرض w منطبق بر صفحه xy قرار گرفته است و حامل جریان $\vec{J} = 2x\hat{x}$ آمپر بر متر می باشد. جریانی که از این رسانا در سمت $\hat{z}$ می گذرد چقدر است؟

۱۰- موجی با فرکانس ۱۰۰ گیگاهرتز به صورت عمود بر ماده ای با ضریب رسانایی ۴ و ضریب عایقی ۸۱ برخورد می کند. توانی که در این ماده و در ۲ متر مربع از سطح مقطع آن تلف می شود را محاسبه نمایید.

۱۱- شدت میدان الکتریکی یک موج تخت یکنواخت قطبی شده خطی که در جهت $\hat{z}$ در آب دریا انتشار می یابد. در $z = 0$ به صورت $\vec{E} = 100\cos(10^7\pi t)\,\hat{x}$ است. ضریب عایقی آب دریا ۸۱ و رسانایی آن ۴$\frac{s}{m}$ است.

الف) عمق پوستی آب را محاسبه نمایید.

ب) رابطه زمانی شدت میدان مغناطیسی موج را بدست آورید.

۱۲- یک موج یکنواخت تخت به صورت $\vec{E} = (5\hat{x} + j10\hat{y})e^{-2jz}\,v/m$ در یک محیط عایق بدون اتلاف با فرکانس ۵۰ مگاهرتز در حال پیشروی است.

الف) سرعت موج را در این عایق محاسبه نمایید.

ب) طول موج در این عایق چند متر است؟

ج) امپدانس ذاتی محیط را محاسبه نمایید.

د) فازور شدت میدان مغناطیسی را برای موج مذکور بدست آورید.

ه) رابطه زمانی شدت میدان مغناطیسی و الکتریکی را تعیین کنید.

و) پلاریزاسیون موج مذکور را تعیین کنید.

ز) شدت میدان الکتریکی و مغناطیسی را در مبدا به ازای $\omega t = \frac{\pi}{4}$ تعیین کنید.

۱۳- یک شدت میدان سینوسی با دامنه ۲۵۰ ولت بر متر و فرکانس ۳ گیگاهرتز در یک محیط عایق وجود دارد. قسمت حقیقی ضریب عایقی ماده برابر ۳ و تانژانت تلفات آن ۰/۰۰۱ است.

الف) توان متوسط تلف شده در یک کره از این ماده به شعاع ۲ چند وات است؟

ب) بخش موهومی ضریب عایقی را محاسبه نمایید.