شبیه سازی کامپیوتر

منابع: شبیه سازی سیستم های گسسته پیشامد   نوشته: بنکس - کارسن
ترجمه: مطلوبی   انتشارات دانشگاه شریف

۲- شبیه سازی عملیات با Arena   نوشته: انتظامی

فصل اول

مقدمه ای بر شبیه سازی

تعریف شبیه سازی: چه با صورت دستی و چه به صورت کامپیوتری تقلیدی از عملکرد سیستم واقعی است که برای تجزیه و تحلیل و بهینه سازی مورد استفاده قرار می گیرد.

سیستم: مجموعه ای از اشیا می باشد که توسط یک سری از قوانین با یکدیگر در تعامل اند.

محیط سیستم: عوامل خارج از سیستم که تحت کنترل نیستند اما می توانند بر عملکرد سیستم تاثیر بگذارند را مرز سیستم می گویند و می توان سیستم را به صورتی گسترش داد تا آن عوامل را در بر گیرد یا عوامل خارجی را نادیده بگیریم یا می توان عوامل خارجی را به منزله ورودی های سیستم در نظر بگیریم.

اجزای سیستم:

۱) شیء یا موجودیت Entity: عنصر مورد توجه در سیستم را شیء گوییم که بر ۲ نوع است:
الف) اشیای دائم: اگر شیء ای در شروع و در پایان شبیه سازی در سیستم وجود داشته باشد به آن شیء دائم می گویند مثلا در بانک باجه های بانک (کارمندان)

Subject:
Year: Month: Day:

ب) اشیای موقت (گذرا): اشیای موقت در یک زمان خاص وارد سیستم شبیه‌سازی شده و در انتهای شبیه‌سازی ممکن است در سیستم موجود نباشند مانند مشتری

۲- صفت یا مشخصه Attribute: ویژگی اشیا است که آن‌ها را توصیف می‌کنند مثلاً در بانک نوع کار مشتری (مثلاً مانده حساب جاری) یک صفت برای مشتری است.

۳- فعالیت Activity: هر فعالیت بیانگر یک دوره زمانی با طول مشخص است مثلاً در بانک سپرده‌گذاری مشتری به عنوان یک فعالیت است که یک دوره زمانی طول می‌کشد.

۴- واقعه یا پیشامد Event: رویداد یا واقعه‌ای لحظه‌ایست که می‌تواند وضعیت سیستم را تغییر دهد مثلاً در بانک ورود مشتری، زمان ورود به صف، زمان خروج از صف، زمان شروع سرویس، زمان پایان سرویس.

۵- متغیرهای حالت (State variable): برای توصیف سیستم در هر لحظه از زمان با توجه به هدف [illegible] سیستم می‌باشد به عنوان مثال در سیستم بانک متغیرها فاصله ورود مشتریان - تعداد مشتریان منتظر، زمان انتظار مشتری، زمان سرویس - تعداد سرویس دهنده‌های مشغول

تمرین: جدول زیر را پر کنید.

سیستم	شی	صفات	فعالیت‌ها	پیشامدها	متغیرهای حالت
بانک	مشتریان	مانده حساب جاری	سپرده‌گذاری	ورود، خروج	تعداد سرورهای مشغول، تعداد مشتریان منتظر
قطار سریع السیر	مسافران	مبدأ، مقصد	سفر	ورود به ایستگاه، رسیدن به مقصد	تعداد مسافران منتظر در هر ایستگاه، تعداد مسافران در سفر
تولید	ماشین آلات	سرعت، ظرفیت، آهنگ از کار افتادگی	جوشکاری، برش	از کار افتادگی	وضعیت ماشین‌ها (مشغول، بیکار، از کار افتاده)
ارتباطات	پیام	طول، مقصد	مخابره	ورود به مقصد	تعداد پیام‌های در انتظار مخابره
موجودی	انبار	ظرفیت	خارج‌سازی از انبار	تقاضا	

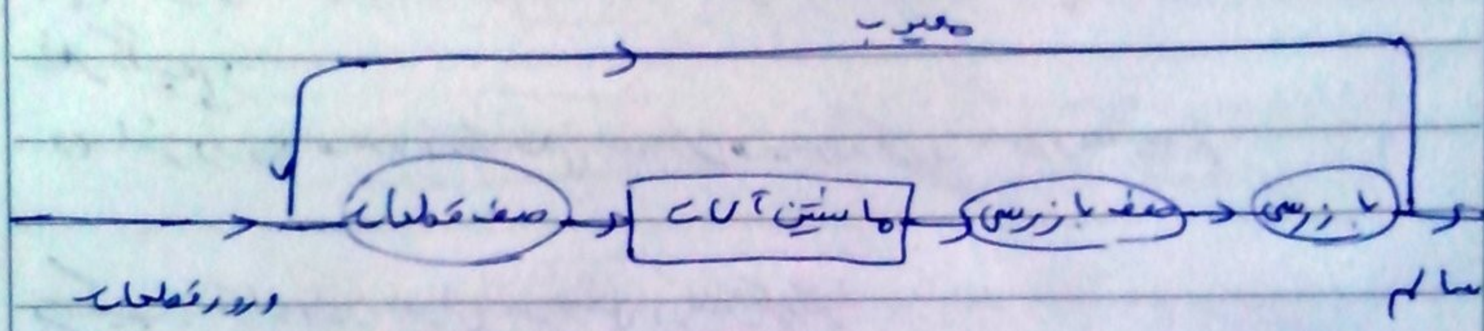
SHAFAGH

morshed486@yahoo.com

مدل سازی

مدل یک اقدام مهم در جهت ایجاد یک نمونه از یک سیستم کامل است که با هدف پیش بینی معیارهای قابل اندازه گیری عملکرد سیستم است و مدل برای آگاهی از رفتار سیستم طراحی می شود. به عبارت ساده تر یک شکل ساده شده از سیستم را مدل گویند.

مثال: مدل خط تولید



توجه: مدل دقیقاً همانند سیستم واقعی نیست بلکه شکل ساده ای از جنبه های اساسی و کلیدی سیستم است که در سیستم تاثیرگذار است.

روش صحیح مدل سازی: ۱- شروع با مدلی بسیار ساده

۲- تکمیل تدریجی مدل برحسب نیاز ما

Subject: Year: ۹۲ Month: ۱۲ Day: ۶

- به منظور ایجاد یک مدل معتبر از یک فرآیند ۲ مرحله استفاده می شود:

۱- تجزیه ۲- ترکیب.

تجزیه: ساده کردن سیستم از طریق حذف جزئیات و یا از طریق پذیرش برخی از فرض ها که به صورت زیر است:
الف) تبدیل متغیرها به مقادیر ثابت ب) حذف یا ادغام متغیرها در یکدیگر
ج) فرض خطی بودن روابط بدین معنی که اتفاقات غیر منتظره خاص را در نظر نگیریم.
د) افزودن محدودیت های بیشتر و محدود کردن حدود سیستم

ترکیب: قرار دادن اجزای مرحله قبل در کنار یکدیگر

نکته: اگر نیاز به سیستمی با جزئیات بیشتر داشته باشیم در مراحل بعد آن را تکمیل می کنیم اما هدف اصلی ما ساده سازی است.

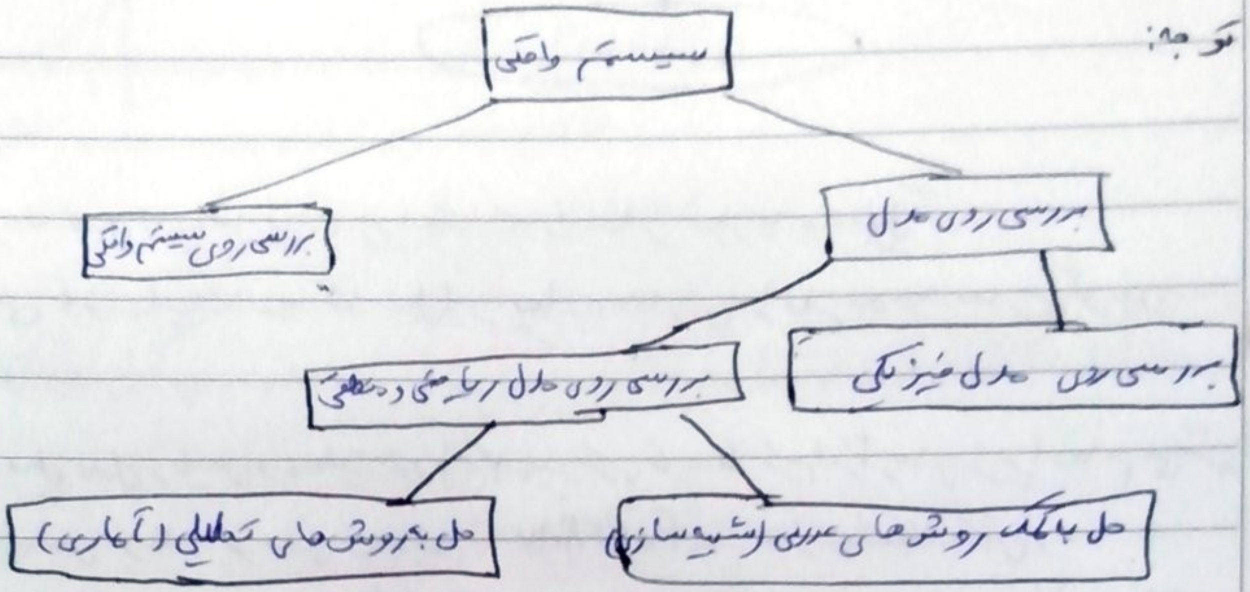
انواع مدل سازی: ۱- مدل فیزیکی ۲- ریاضی و منطقی ۳- کامپیوتری

مدل فیزیکی: یک شکل ساده شده از سیستم واقعی با مقیاس کوچک شده می باشد که به صورت فیزیکی طراحی شده است مثل مدل هواپیما در تونل باد

ریاضی و منطقی: مجموعه ای از معادلات و فرمول ها است که به متغیرهای سیستم نسبت داده می شود و توصیف کننده جریان کاری آن ها در سیستم می باشد به عنوان مثال در خط تولید این مدل شامل تابع (جدول) توزیع فاصله ورود قطعات، تکرار قطعات در صف و زمان انتظار قطعات در صف، تابع توزیع زمان سرویس ماشین آلات، تعداد و زمان انتظار در صف بازرسی، تابع توزیع زمان بازرسی و درصد قطعات سالم و معیوب می باشد

۳- مدل کامپیوتری: شرح برنامه ای از یک سیستم است در حقیقت شبیه سازی کامپیوتری فرآیند طراحی مدل ریاضی و منطقی از سیستم واقعی و آزمایش مدل با کامپیوتر است.

توجه:

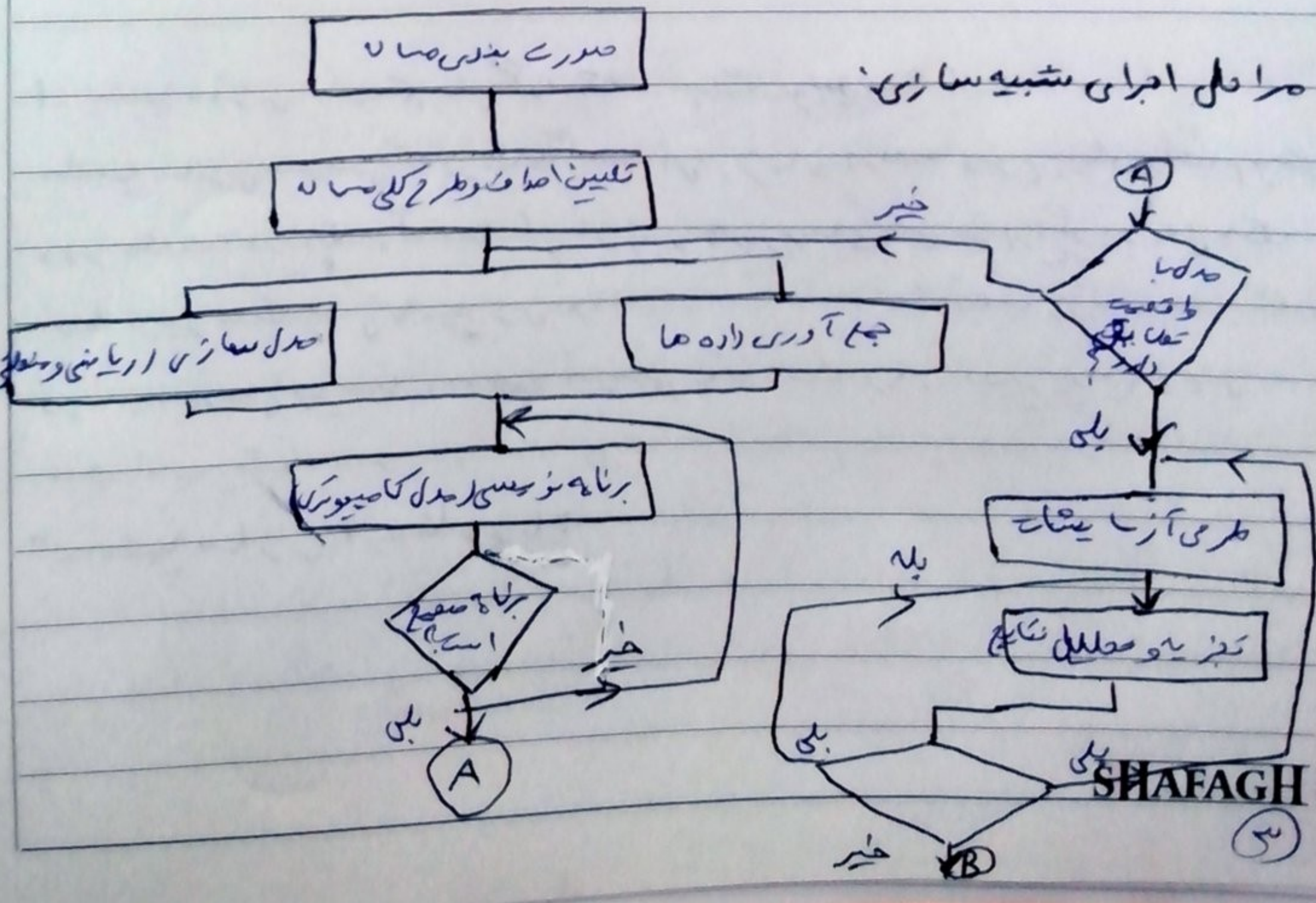


به دو دلیل بررسی روی سیستم های واقعی انجام نمی شود:

۱- بررسی روی سیستم واقعی خطرناک، پرهزینه و غیرممکن است.

۲- در بسیاری از موارد سیستم واقعی موجود نیست بلکه به عنوان سیستم پیشنهادی است بلکه بهتر است با عنوان مدل انجام شود.

مراحل اجرای شبیه سازی:



Subject:
Year: Month: Day:

B

↓

مستندسازی و گزارش نتایج

↓

پیاده سازی

نکته) تا مرحله قبل از طراحی آزمایشات را فاز تجزیه و تحلیل گویند
و از طراحی آزمایشات تا قبل از پیاده سازی را فاز بهینه سازی گویند.

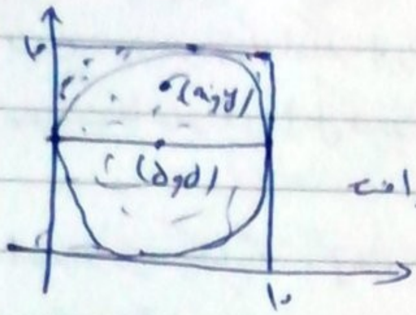
توجه: تبدیل مدل ریاضی و منطقی به مدل کامپیوتری توسط نرم افزارهای زیر انجام می شود
۱_ زبان های برنامه نویسی مانند FORTRAN ، C و مشتقات آن و ...
۲. GPSS ۳_ GASP ۴_ SLAM ۵ Showflow
۶_ Awesim ۷. simul8 ۸. MATLAB
۹ ED ۱۰ SIMAN ۱۱ Arena

انواع شبیه سازی از دیدگاه های مختلف:

۱_ شبیه سازی سیستم های گسسته _ پیشامد پیوسته :
شبیه سازی سیستمی که در نقاط گسسته ای از زمان در لحظه وقوع پیشامد انجام می شود
و در حقیقت در لحظات گسسته ای از زمان به روز رسانی می شود را گویند مثل بانک
خط تولید شبکه های کامپیوتری و ... شبیه سازی گسسته _ پیشامد
در سیستم های پیوسته وضعیت سیستم با گذشت زمان تغییر پیدا می کند مثل
تبخیر آب یا پشه سر.
۲_ شبیه سازی ایستا و پویا:

SHAFAGH

مونت کارلو



مساحت مربع = $10\times10=100$

$n=100$ تا نقطه (x,y) تصادفی یکنواخت

که $0\le x\le 10$

$0\le y\le 10$

مساحت دایره $=3.14\times 25=?$

حال تعداد نقاطی که در داخل دایره قرار دارند را می شماریم و فرض می کنیم این تعداد m باشد. $\frac{m}{n}$

$$\text{if}\left(\sqrt{(x-5)^2+(y-5)^2}\ \le 5\right)\ ++m;$$

مساحت دایره $=100\times\frac{m}{n}$

هرچه n بیشتر باشد مساحت محاسبه به جواب اصلی نزدیکتر است.

شبیه سازی ایستا و پویا: در شبیه سازی پویا زمان نقش اساسی دارد ولی در شبیه سازی ایستا زمان نقشی ندارد

۲- شبیه سازی قطعی و غیرقطعی (احتمالی): اگر داده های ورودی تصادفی نباشند مدل قطعی است و در غیر این صورت مدل غیر قطعی می باشد

نکته: اکثر سیستم های موجود خاصیت تصادفی بودن دارند لذا همواره عملکرد یکسانی ندارند و با استفاده از تکنیک های آماری بایستی به شبیه سازی سیستم ها پرداخت. در شبیه سازی از اعداد تصادفی با توزیع های مختلف استفاده می شود

روش مونت کارلو: روشی است که در آن به منظور حل مسائل غیرتصادفی یا برخی از مسائل تصادفی که گذشت زمان هیچ نقش اساسی در آن ندارد از اعداد تصادفی استفاده می شود.

Subject:
Year: Month: Day:

تمرین: در صورتی که انتگرال زیر با روش تحلیلی قابل حل نباشد با استفاده از روش مونت کارلو آن را حل کنید.

$$I = \int_a^b g(x)\,dx$$

ابتدا فرض می‌کنیم که $X \sim U[a,b]$ (X یک متغیر تصادفی باشد که دارای توزیع یکنواخت در فاصله $[a,b]$ است). آنگاه تابع چگالی آن به صورت زیر می‌باشد. $f(x) = \frac{1}{b-a}$

حال متغیر تصادفی Y را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. $Y = (b-a)\,g(X)$

حال $E(Y)$ را حساب می‌کنیم.

$$E(Y) = E\big((b-a)\,g(X)\big) = (b-a)\,E(g(X)) = (b-a)\int_a^b g(x)\,f(x)\,dx$$

$$= (b-a)\int_a^b g(x) \times \frac{1}{b-a} = \int_a^b g(x)\,dx = I$$

یعنی به طور خلاصه $I = E(Y)$

E (امید ریاضی) در حالت گسسته همان میانگین است.

به طور تقریبی $I = E(Y) \approx \bar{Y}$ داریم:

$$\boxed{\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} = \frac{\sum (b-a)\,g(x_i)}{n} = \frac{(b-a)}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i) \approx I}$$

میانگین

که در آن $x_1, x_2, \ldots, x_n$ اعداد تصادفی یکنواخت در فاصله $[a,b]$ است که با افزایش n (مقدار اعداد تصادفی) دقت محاسبه I افزایش می‌یابد.

مزایای شبیه سازی: ۱- آزمایش در مدت زمان کم (فشرده سازی زمان)

۲- توقف زمان یا کند کردن و بررسی در هر لحظه (گسترده سازی زمان)

۳- کاهش نیاز به داده های مسئله و شرح ساده ای از سیستم با استفاده از مدل

معایب شبیه سازی:

۱- غیر دقیق بودن و ندانستن درجه دقت آن

۲- همه مسائل را حل می کند همچنین مسائل پیچیده شبیه سازی را می سازند

۳- نتایج شبیه سازی معمولاً عددی است و این باعث اعتبار دادن بیش از حد به اعداد است

کاربرد شبیه سازی:

۱- مطالعه و بررسی و آزمایش هر سیستم یا زیرسیستم

۲- اعمال تغییرات و مشاهده تاثیرات این تغییرات در رفتار سیستم

۳- استفاده از شناخت به دست آمده در شبیه سازی برای پیشنهاد انجام اصلاحات روی سیستم تحت بررسی

۴- شناسایی متغیرهای مهم و روابط بین آنها با ایجاد تغییر ورودی های شبیه سازی و بررسی خروجی

۵- به عنوان یک ابزار آموزشی به منظور تقویت روش های تحلیلی

۶- کسب آمادگی لازم برای روبرو شدن با پیشامدهای احتمالی

۷- تحقیق در مورد پاسخ های تحلیلی

Subject:

Year: Month: Date:

«شبیه سازی سیستم ها»

فصل دوم

شبیه سازی سیستم های صف:

مسأله یک صف تک سرویس دهنده:

فرض کنید فاصله ورود مشتریان به صف از یک تا ۸ دقیقه با احتمال های یکسان می باشد همچنین زمان سرویس، سرویس دهنده بین ۱ تا ۶ دقیقه مطابق جدول توزیع زمان سرویس سرویس دهنده که در زیر آمده است باشد. اعداد تصادفی یکنواخت این مسأله نیز در زیر مشخص شده است. مطلوبست شبیه سازی این سیستم برای ۱۰ مشتری به منظور بدست آوردن نتایج زیر:

۱) متوسط فاصله ورود مشتریان

۲) متوسط زمان سرویس

۳) درصد بیکاری سرویس دهنده و درصد مشغولیت آن

۴) درصد احتمال منتظر و متوسط زمان انتظار

۵) متوسط زمان ماندن مشتری در سیستم

اعداد تصادفی یکنواخت ۳ رقمی: ۹۱۳ ، ۷۲۷ ، ۰۱۵ ، ۹۴۸ ، ۳۰۹ ، ۹۲۲ ، ۷۵۳ ، ۲۳۵ ، ۳۰۲

اعداد تصادفی یکنواخت ۲ رقمی: ۸۴ ، ۱۰ ، ۷۴ ، ۵۳ ، ۱۷ ، ۷۹ ، ۹۱ ، ۶۷ ، ۸۹ ، ۳۸

زمان سرویس (min)	احتمال
۱	۱۰٪
۲	۲۰٪
۳	۳۰٪
۴	۲۵٪
۵	۱۰٪
۶	۵٪

(جدول توزیع زمان سرویس)

Subject :
Year : Month : Date :

حل: گام اول : تکمیل جداول توزیع)

جدول توزیع فاصله ورود مشتریان

فاصله ورود (min)	احتمال	احتمال تجمعی	تخصیص اعداد تصادفی
۱	۰٫۱۲۵	۰٫۱۲۵	۰۰۱-۱۲۵
۲	۰٫۱۲۵	۰٫۲۵۰	۱۲۶-۲۵۰
۳	۰٫۱۲۵	۰٫۳۷۵	۲۵۱-۳۷۵
۴	۰٫۱۲۵	۰٫۵۰۰	۳۷۶-۵۰۰
۵	۰٫۱۲۵	۰٫۶۲۵	۵۰۱-۶۲۵
۶	۰٫۱۲۵	۰٫۷۵۰	۶۲۶-۷۵۰
۷	۰٫۱۲۵	۰٫۸۷۵	۷۵۱-۸۷۵
۸	۰٫۱۲۵	۱٫۰۰۰	۸۷۶-۰۰۰

یعنی ۸۷۶-۹۹۹ و عدد ۰۰۰

زمان سرویس (min)	احتمال	احتمال تجمعی	تخصیص اعداد تصادفی
۱	۰٫۱۰	۰٫۱۰	۰۱-۱۰
۲	۰٫۲۰	۰٫۳۰	۱۱-۳۰
۳	۰٫۳۰	۰٫۶۰	۳۱-۶۰
۴	۰٫۲۵	۰٫۸۵	۶۱-۸۵
۵	۰٫۱۰	۰٫۹۵	۸۶-۹۵
۶	۰٫۰۵	۱٫۰۰	۹۶-۰۰

۹۶-۹۹ و عدد ۰۰

Subject:

Year: Month: Date:

(۷۱۰٫k up)

(فاز دوم: تشکیل جدول شبیه سازی)

جدول شبیه سازی

زمان سپری شده مشتری در سیستم	زمان بیکاری سرویس دهنده	زمان پایان سرویس	زمان سرویس	اعداد تصادفی یکنواخت زمان سرویس	زمان شروع سرویس	زمان انتظار در صف	زمان ورود	فاصله ورود	اعداد تصادفی یکنواخت فاصله ورود	مشتری
۴	۰	۴	۴	۸۴	۰	۰	۰	—	—	۱
۱	۴	۹	۱	۱۰	۸	۰	۸	۸	۹۱۳	۲
۴	۵	۱۸	۴	۷۴	۱۴	۰	۱۴	۶	۷۲۷	۳
۶	۰	۲۱	۳	۵۳	۱۸	۳	۱۵	۱	۰۱۵	۴
۲	۲	۲۵	۲	۱۷	۲۳	۰	۲۳	۸	۹۴۸	۵
۴	۱	۳۰	۴	۷۹	۲۶	۰	۲۶	۳	۳۰۹	۶
۵	۴	۳۹	۵	۹۱	۳۴	۰	۳۴	۸	۹۲۲	۷
۴	۲	۴۵	۴	۶۷	۴۱	۰	۴۱	۷	۷۵۳	۸
۷	۰	۵۰	۵	۸۹	۴۵	۲	۴۳	۲	۲۳۵	۹
۷	۰	۵۳	۳	۳۸	۵۰	۴	۴۶	۳	۳۰۲	۱۰
۴٫۴	۱۸		۳۵			۹		۴۶		جمع

زمان پایان شبیه سازی

(فاز سوم: بررسی آورده نتایج)

متوسط فاصله ورود مشتریان $= \frac{۴۶}{۹} = ۵٫۱۱$ min

روش دیگر: با استفاده از روش تحلیلی (آماری) متوسط ورود مشتریان $= \frac{۱+۸}{۲} = ۴٫۵$

توجه: با افزایش تعداد مراحل شبیه سازی به عدد ۴٫۵ نزدیکتر می شویم و جواب نزدیکتر را ۴٫۲۱
(۴٫۵۲ در کتاب برای ۲۰ مشتری ۴٫۳ دقیقه بدست آمده است.

متوسط زمان سرویس $= \frac{35}{10} = 3.5$

روش دیگر: با استفاده از روش تحلیل آماری)

امید ریاضی (متوسط) زمان سرویس $= \sum_{x=1}^{6} x\,p(x) = 1\times 0.10 + 2\times 0.20 + 3\times 0.30 + 4\times 0.25 + 5\times 0.10 + 6\times 0.05 = 3.2$

توجه: با افزایش مقدار مراحل شبیه سازی به عدد ۳٫۲ نزدیک تر می شویم و جواب دقیق تر است (مثلاً در کتاب برای ۲۰ مشتری ۳٫۴ دقیقه است).

درصد بیکاری سرویس دهنده $= \frac{18}{53} \times 100 = \%34$

درصد مشغولیت سرویس دهنده $= 100 - 34 = \%66$

توجه: در کتاب برای <u>۲۰</u> مشتری درصد بیکاری سرویس دهنده ۲۱٪ و درصد مشغولیت ۷۹٪.

درصد افراد منتظر $= \frac{3}{10} \times 100 = \%30$

توجه: در کتاب برای <u>۲۰</u> مشتری درصد افراد منتظر ۶۵٪

متوسط زمان انتظار در صف $= \frac{9}{10} = 0.9$ min (در کتاب برای ۲۰ مشتری ۲٫۸ دقیقه)

متوسط زمان انتظار برای کسانی که در صف منتظر بوده اند $= \frac{9}{3} = 3$ min (برای <u>۲۰</u> مشتری ۴٫۳ دقیقه)

متوسط زمان ماندن مشتری در سیستم $= \frac{۴۴}{۱۰} = ۴٫۴$ min

روش دیگر:

متوسط زمان ماندن مشتری در سیستم = متوسط زمان انتظار در صف + متوسط زمان سرویس

$= ۰٫۹ + ۳٫۵ = ۴٫۴$ min

نتیجه گیری: سرویس دهنده در بیشتر مواقع مشغول بوده است ولی با این حال بیشتر مشتریان در صف منتظر نمانده اند اما چون متوسط زمان انتظار بیش از اندازه نیست می توان گفت که سیستم خوب کار می کند لذا بهتر از آن نیاز است که یک سرویس دهنده اضافه شود.

مسئله یک صف دو سرویس دهنده:

تمرین: یک رستوران با دو تحویل دهنده غذا به مشتریان را در نظر بگیرید هنگام ورود سفارش جدید به رستوران هر سرویس دهنده که بیکار است کار را انجام می دهد و در زمانی که هر دو بیکارند هابیل (سرویس دهنده ۱) به دلیل تجربه بیشتر سرویس دهی به مشتری را انجام می دهد جدول توزیع فاصله ورود مشتریان و هم چنین جداول توزیع زمان سرویس هر دو سرویس دهنده (هابیل و خباز) مطابق زیر داده شده است و اعداد تصادفی یکنواخت مورد نیاز نیز در زیر آمده است.

مطلوب است شبیه سازی این سیستم برای ۱۵ مشتری به منظور بدست آوردن

۱- درصد افراد منتظر و ۲- متوسط زمان انتظار مشتریان

۳- درصد مشغولیت سرویس دهنده ها.

Subject :

Year : Month : Date :

جدول توزیع فاصله ورود مشتریان

فاصله ورود (دقیقه)	احتمال	احتمال تجمعی	تخصیص اعداد تصادفی
۱	۰٫۲۵	۰٫۲۵	۰۱-۲۵
۲	۰٫۴۰	۰٫۶۵	۲۶-۶۵
۳	۰٫۲۰	۰٫۸۵	۶۶-۸۵
۴	۰٫۱۵	۱٫۰۰	۸۶-۰۰

جدول توزیع زمان سرویس دهنده ۱ (هابیل)

زمان سرویس (min)	احتمال	احتمال تجمعی	تخصیص اعداد تصادفی
۲	۰٫۳۰	۰٫۳۰	۰۱-۳۰
۳	۰٫۲۸	۰٫۵۸	۳۱-۵۸
۴	۰٫۲۵	۰٫۸۳	۵۹-۸۳
۵	۰٫۱۷	۱٫۰۰	۸۴-۰۰

جدول توزیع زمان سرویس ۲ سرویس دهنده ۲ (خباز)

زمان سرویس (min)	احتمال	احتمال تجمعی	تخصیص اعداد تصادفی
۳	۰٫۳۵	۰٫۳۵	۰۱-۳۵
۴	۰٫۲۵	۰٫۶۰	۳۶-۶۰
۵	۰٫۲۰	۰٫۸۰	۶۱-۸۰
۶	۰٫۲۰	۱٫۰۰	۸۱-۰۰

اعداد تصادفی یکنواخت فاصله ورود مشتریان : ۲۶، ۹۸، ۹۰، ۲۶، ۴۲، ۳۴، ۸۰، ۶۸، ۲۲

زمان سرویس : ۹۵، ۲۱، ۵۱، ۹۲، ۸۹، ۳۸، ۱۳، ۶۱، ۵۰، ۴۹

مشتری	اعداد تصادفی یکنواخت فاصله ورود	فاصله ورود	زمان ورود	زمان انتظار در صف	اعداد تصادفی یکنواخت زمان سرویس	سرویس دهنده (۱) علی: زمان شروع سرویس	زمان سرویس	زمان خاتمه سرویس	سرویس دهنده ۲ (خباز): زمان شروع سرویس	زمان سرویس	زمان پایان سرویس
۱	—	—	۰	۰	۹۶	۰	۵	۵	—	—	—
۲	۲۶	۲	۲	۰	۲۱	—	—	—	۲	۳	۵
۳	۹۸	۴	۶	۰	۵۱	۶	۳	۹	—	—	—
۴	۹۰	۴	۱۰	۰	۹۳	۱۰	۵	۱۵	—	—	—
۵	۲۶	۲	۱۲	۰	۸۹	—	—	—	۱۲	۴	۱۸
۶	۴۲	۲	۱۴	۱	۳۸	۱۵	۳	۱۸	—	—	—
۷	۷۴	۳	۱۷	۱	۱۳	۱۸	۲	۲۰	—	—	—
۸	۸۵	۳	۲۰	۰	۶۱	۲۰	۴	۲۴	—	—	—
۹	۶۸	۳	۲۳	۰	۵۰	—	—	—	۲۳	۴	۲۷
۱۰	۲۲	۱	۲۴	۰	۰۹	۲۴	۳	۲۷	—	—	—

زمان پایان شبیه سازی

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(در کتاب برای ۲۶ نفر ٪۳۵)

درصد افراد منتظر $= \frac{2}{10} \times 100 = 20\%$

متوسط زمان انتظار $= \frac{2}{10} = 0.2$ دقیقه

(در کتاب برای ۲۶ نفر ۰٫۲۲ دقیقه)

متوسط زمان انتظار برای کسانی که منتظر می‌مانند $= \frac{2}{2} = 1\ min$

(در کتاب برای ۲۶ نفر ٪۹۰)

درصد مشغولیت سرویس دهنده (ابل) $= \frac{25}{27} \times 100 = \%\ 92.62$

(در کتاب برای ۲۶ نفر ٪۶۹)

درصد مشغولیت سرویس دهنده ۲ (خباز) $= \frac{13}{27} \times 100 = \%48$

نتیجه:

با توجه به آنکه درصد افراد منتظر و متوسط زمان انتظار پایین است لذا سیستم به خوبی کار می‌کند

شبیه سازی سیستم های موجودی: در این نوع شبیه سازی مسائل مربوط به سود و موجودی در انبار مورد بحث قرار می‌گیرد

مساله روزنامه فروش:

تمرین: روزنامه فروشی، روزنامه ها را در بسته های ۱۰ تایی می‌تواند بخرد، هر نسخه روزنامه را ۱۳ واحد پول می‌خرد و ۲۰ واحد پول می‌فروشد. روزنامه فروش روزنامه های فروخته نشده را در انتهای روز به عنوان روزنامه باطله ۲ واحد پول به ازای هر روزنامه می‌فروشد. از لحاظ چگونگی اخبار سه نوع روز خوب، متوسط و بد با احتمال ۰٫۳۵، ۰٫۴۵ و ۰٫۲۰ وجود دارد. جدول توزیع تقاضای روزانه با توجه به نوع روز در زیر ارائه شده است هم چنین سود از فرمول زیر محاسبه می‌شود

سود = درآمد ناشی از فروش   هزینه خرید روزنامه   درآمد ناشی از فروش روزنامه باطله

— سود از دست رفته به خاطر فزونی تقاضا

اعداد تصادفی یکنواخت مورد نیاز نیز در زیر داده شده است.

مطلوبست شبیه‌سازی این سیستم برای ۱۰ روز به منظور بدست آوردن سود کل در صورتی که روزنامه فروش ۷۰ روزنامه را در هر روز بپذیرد.

جدول تقاضای روزانه بر حسب نوع روز

تقاضای روزانه	احتمال بر حسب نوع روز			احتمال تجمعی			تخصیص اعداد تصادفی یکنواخت		
	خوب	متوسط	بد	خوب	متوسط	بد	خوب	متوسط	بد
۴۰	۰/۰۳	۰/۱۰	۰/۴۴	۰/۰۳	۰/۱۰	۰/۴۴	۰۱-۰۳	۰۱-۱۰	۰۱-۴۴
۵۰	۰/۰۵	۰/۱۸	۰/۲۲	۰/۰۸	۰/۲۸	۰/۶۶	۰۴-۰۸	۱۱-۲۸	۴۵-۶۶
۶۰	۰/۱۵	۰/۴۰	۰/۱۶	۰/۲۳	۰/۶۸	۰/۸۲	۰۹-۲۳	۲۹-۶۸	۶۷-۸۲
۷۰	۰/۲۰	۰/۲۰	۰/۱۲	۰/۴۳	۰/۸۸	۰/۹۴	۲۴-۴۳	۶۹-۸۸	۸۳-۹۴
۸۰	۰/۳۵	۰/۰۸	۰/۰۶	۰/۷۸	۰/۹۶	۱/۰۰	۴۴-۷۸	۸۹-۹۶	۹۵-۰۰
۹۰	۰/۱۵	۰/۰۴	۰/۰۰	۰/۹۳	۱/۰۰	-	۷۹-۹۳	۹۷-۰۰	-
۱۰۰	۰/۰۷	۰/۰۰	۰/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	-	۹۴-۰۰	-	-

اعداد تصادفی یکنواخت تعیین نوع روز: ۲۴، ۱۶، ۰۰، ۴۹، ۳۲، ۴۳، ۴۵، ۴۹، ۷۷، ۹۴

تقاضای روزانه: ۶۰، ۲۴، ۷۳، ۸۶، ۶۵، ۹۸، ۸۸، ۱۵، ۲۰، ۸۰ ...

حل:

جدول توزیع نوع روز.

نوع روز	احتمال	احتمال تجمعی	تخصیص اعداد تصادفی یکنواخت
خوب	۰/۳۵	۰/۳۵	۰۱ - ۳۵
متوسط	۰/۴۵	۰/۸۰	۳۶ - ۸۰
بد	۰/۲۰	۱/۰۰	۸۱ - ۰۰

جدول شبیه سازی

	سود روزانه	سود از دست رفته بخاطر فزونی تقاضا	روزنامه باطله	درآمد حاصل از فروش	تقاضا روزانه	اعداد تصادفی تقاضای روزانه	نوع روز	اعداد تصادفی نوع روز	روز
۱۲۰۰ - ۹۱۰ = ۲۹۰	۲۹۰	—	۲۰	۶۰×۲۰=۱۲۰۰	~~۶۰~~	۸۰	بد	۹۴	۱
۱۰۴۰ - ۹۱۰ = ۱۳۰	۱۳۰	—	۲۰×۲=۴۰	۵۰×۲۰=۱۰۰۰	۵۰	۲۰	متوسط	۷۸	۲
	۱۳۰	—	۲۰×۲=۴۰	۱۰۰۰	۵۰	۱۵	متوسط	۴۹	۳
	۴۹۰	—	—	۱۴۰۰	۷۰	۸۸	متوسط	۴۵	۴
۱۴۰۰ - ۹۱۰ - ۱۴۰ = ۳۵۰	۳۵۰	۲۰×۷=۱۴۰	—	۷۰×۲۰=۱۴۰۰	۹۰	۹۸	متوسط	۴۳	۵
۱۴۰۰ - ۹۸۰ = ۴۲۰	۴۲۰	۱۰×۷=۷۰	—	۷۰×۲۰=۱۴۰۰	۸۰	۶۵	خوب	۳۲	۶
	۴۹۰	—	—	۷۰×۲۰=۱۴۰۰	۷۰	۸۶	متوسط	۴۹	۷
۱۲۲۰ - ۹۱۰ = ۳۱۰	۳۱۰	—	۱۰×۲=۲۰	۶۰×۲۰=۱۲۰۰	۶۰	۷۳	بد	۰۰	۸
	۴۹۰	—	—	۷۰×۲۰=۱۴۰۰	۷۰	۲۴	خوب	۱۶	۹
	۴۲۰	۱۰×۷=۷۰	—	۷۰×۲۰=۱۴۰۰	۸۰	۶۰	خوب	۲۴	۱۰
	۳۵۲۰	۱۴۰							جمع

جدول شبیه سازی برای خرید ۷۰ روزنامه در هر روز

ب) این مثال را برای خرید ۶۰ و ۸۰ روزنامه در هر روز نیز حل کنید (با Excel نیز کار کنید)

Subject:
Year: ۹۳ Month: ۲ Date: ۲

مسأله انبار

فرض کنید در یک سیستم کنترل موجودی هر ۵ روز یکبار موجودی انبار بررسی می شود و در صورتی که مقدار موجودی کمتر از ۱۱ واحد باشد سفارش صادر می گردد که موجودی را به ۱۱ واحد برساند سطح موجودی در ابتدای دوره ۳ واحد باشد و در روز یک سفارش ۸ واحدی در دو روز بعد دیده می شود سفارش ها در پایان روز صادر می شود و تحویل آن در ابتدای روز انجام می گیرد جدول توزیع تقاضای روزانه و مهلت تحویل در زیر داده شده است. مطلوبست شبیه سازی این سیستم برای سه دوره ی ۵ روزه به منظور محاسبه ی متوسط موجودی در انتهای روز و درصد روزهای کمبود.

جدول توزیع تقاضای روزانه

تقاضا	احتمال	احتمال تجمعی	تخصیص اعداد تصادفی
۰	۰٫۱۰	۰٫۱	۰۱-۱۰
۱	۰٫۲۵	۰٫۳۵	۱۱-۳۵
۲	۰٫۳۵	۰٫۷۰	۳۶-۷۰
۳	۰٫۲۱	۰٫۹۱	۷۱-۹۱
۴	۰٫۰۹	۱٫۰۰	۹۲-۰۰

جدول توزیع مهلت تحویل

مهلت تحویل (روز)	احتمال	احتمال تجمعی	اعداد تصادفی تخصیص
۱	۰٫۶	۰٫۶	۰۱-۶۰
۲	۰٫۳	۰٫۹	۶۱-۹۰
۳	۰٫۱	۱٫۰۰	۹۱-۰۰

اعداد تصادفی یکنواخت مورد نیاز:

اعداد تصادفی یکنواخت تقاضای روزانه:

۲۴، ۳۵، ۶۵، ۸۱، ۵۴، ۰۳، ۸۷، ۲۷، ۷۳، ۷۰، ۴۷، ۴۹، ۴۸، ۱۷، ۰۹

اعداد تصادفی یکنواخت مهلت تحویل: ۵، ۰، ۳

RandBeetween   vlookup

Subject:
Year: Month: Date: ( )

مهلت تحویل	اعداد تصادفی یکنواخت مهلت تحویل	مقدار سفارش	مقدار کمبود تجمعی	موجودی در انتهای روز	تقاضا	اعداد تصادفی یکنواخت تقاضا	موجودی در ابتدای روز	روز	دوره
۱	۱	۱	۰	۲	۱	۲۴	۳	۱	۱
۱	۱	۱	۰	۱	۱	۳۵	۲	۲	
۱	۱	۱	۰	۷	۲	۶۵	۹	۳	
۱	۱	۱	۰	۴	۳	۸۱	۷	۴	
۱	۵	۹	۰	۲	۲	۹۴	۴	۵	
۱	۱	۱	۰	۳	۰	۰۳	۳	۱	۲
۱	۱	۱	۰	۸	۳	۲۷	۱۱	۲	
۱	۱	۱	۰	۷	۱	۲۷	۸	۳	
۱	۱	۱	۰	۴	۳	۷۳	۷	۴	
۲	۵	۹	۰	۲	۲	۷۰	۴	۵	
۱	~~۱~~	۱	۰	۰	۲	۴۲	۲	۱	۳
۱	~~۱~~	۱	۲	۰	۲	۵۴	۰	۲	
۱	~~۱~~	۱	۴	۰	۲	۴۸	۰	۳	
۱	~~۱~~	۱	۰	۴	۱	۱۷	۹	۴	
۱	~~۴~~	~~۷~~	۰	۴	۰	۵۹	۴	۵	
				۴۷					جمع

$$\text{متوسط موجودی در انتهای روز} = \frac{۴۷}{۱۵} = ۳٫۱۳$$

$$\text{درصد روزهای کمبود} = \frac{۲}{۱۵} \times ۱۰۰ = 13.3\%$$

Subject:
Year. ۹۳ Month. ۳ Date. ۱۴( )

Ch 3

تولید اعداد تصادفی (شبه تصادفی)

روش‌های تولید اعداد تصادفی به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱- تولید اعداد تصادفی با مولدهای پایه: که اعداد تصادفی با توزیع یکنواخت در فاصله [۱و۰] تولید می‌شوند

۲- تولید اعداد تصادفی با توزیع‌های دیگر: با در دست داشتن اعداد تصادفی دارای توزیع یکنواخت روی فاصله [۱و۰] قادر به تولید اعداد تصادفی با هر نوع توزیع دیگری باشیم.

توجه: می‌توان برای تولید اعداد تصادفی از جدول اعداد تصادفی استفاده کرد. امتیاز جدول اعداد تصادفی در این است که درصد اطمینان به استقلال و یکنواختی آن‌ها بالاست و عیب حجم بالا و امکان تهی شدن جدول به دلیل انتخاب کلیه اعداد تصادفی می‌باشد.

خواص روش‌های تولید اعداد تصادفی:

۱- روش یا الگوریتم تولید اعداد تصادفی باید سریع باشد

۲- نیازی به مقدار زیادی حافظه کامپیوتر نداشته باشد

۳- طول دنباله اعداد تولید شده به اندازه کافی بلند باشد یعنی تکرار اعداد تصادفی بدون تکرار زیاد باشد زیرا تکرار اعداد تصادفی هیچ به طور مکرر باعث از هم پاشیدگی الگوریتم می‌شود

۴- اعداد تصادفی تولید شده توسط یک الگوریتم باید در صورت نیاز تکرار پذیر باشند که برای مقایسه چند سیاست (روزنامه فروش) از آن استفاده شود.

۵- استقلال و یکنواختی اعداد تصادفی تولید شده که مهمترین ویژگی است.

نکته: استقلال بدین معنی است که همبستگی بین اعداد تصادفی وجود نداشته باشد و یکنواختی برای مثال است که اگر فاصله [۱و۰] را به n قسمت تقسیم کنیم و N عدد تصادفی تولید کرده باشیم در هر قسمت $\frac{N}{n}$ عدد تصادفی قرار گیرد.

روش‌های تولید اعداد تصادفی با استفاده از مولدهای پایه:

۱- روش میانه مربع: در این روش ابتدا یک عدد اولیه n رقمی به نام هسته (seed)

Subject:

Year. Month. Date. ( )

در نظر گرفته می شود و آن را به توان ۲ می رسانیم n رقم وسط آن را جدا کرده و مجدداً آن را

به توان ۲ می رسانیم این عمل را ادامه می دهیم و n رقم های جدا شده را بعد از اعشار قرار می دهیم.

مثال: با روش میانه مربعی با فرض اینکه هسته $X_0 = ۵۴۹۷$ باشد ۳ عدد تصادفی در فاصله [۰و۱] تولید کنید.

$X_0^2 = ۳۰۲۱۷۰۰۹ \Rightarrow X_1 = ۲۱۷۰ \Rightarrow R_1 = ۰/۲۱۷۰$

$X_1^2 = ۰۴۷۰۸۹۰۰ \Rightarrow X_2 = ۷۰۸۹ \Rightarrow R_2 = ۰/۷۰۸۹$

$X_2^2 = ۵۰۲۵۳۹۲۱ \Rightarrow X_3 = ۲۵۳۹ \Rightarrow R_3 = ۰/۲۵۳۹$

نکته: در این روش نمی توان قاعده ای ساده ای برای تعیین مقدار هسته ارائه کرد که عملکرد مطلوب الگوریتم را تضمین کند به علاوه این الگوریتم به علت تولید اعداد تکراری یا مقدار صفر برای ارقام میانی از هم پاشیده می شوند.

مثال: اگر هسته $X_0 = ۶۵۰۰$ باشد ۳ عدد تصادفی با روش میانه مربعی تولید کنید.

$X_0^2 = ۴۲۲۵۰۰۰۰ \Rightarrow X_1 = ۲۵۰۰ \Rightarrow R_1 = ۰/۲۵۰۰$

$X_1^2 = ۰۶۲۵۰۰۰۰ \Rightarrow X_2 = ۲۵۰۰ \Rightarrow R_2 = ۰/۲۵۰۰$

$X_2^2 = ۶۲۵۰۰۰۰ \Rightarrow X_3 = ۲۵۰۰ \Rightarrow R_3 = ۰/۲۵۰۰$

الگوریتم از هم پاشیده شده است

۳- روش میانه ضربی: در این روش ها مانند روش کار ها مانند روش قبل می باشد از دو هسته n رقمی X_0 و X'_0 استفاده می شود اینجا حاصل ضرب $X_0 X'_0$ ها حساب شده

و ۴ رقم وسط آن را جدا می‌کنیم و آن را X_1 می‌نامیم حال حاصل‌ضرب $X_0 X_1$ را می‌یابیم و ۴ رقم وسط آن را جدا کرده و X_2 می‌نامیم حال حاصل‌ضرب $X_1 X_2$ را می‌یابیم و این عمل را ادامه می‌دهیم و عدد حاصل را ابتدا ز اعشار قرار می‌دهیم.

مثال: با استفاده از روش میانه ضربی با فرض اینکه دو هسته به صورت $X_0 = 7229$ و $X_1' = 2938$ باشد ۳ عدد تصادفی بیابید.

$$X_1' X_0 = 21\underline{2388}02 \Rightarrow X_1 = 2388 \Rightarrow R_1 = 0.2388$$

$$X_0 X_1 = 17262852 \Rightarrow X_2 = 2628 \Rightarrow R_2 = 0.2628$$

$$X_1 X_2 = 06275664 \Rightarrow X_3 = 2756 \Rightarrow R_3 = 0.2756$$

نکته: در این روش طول دنباله بلندتر نسبت به قبل است و یکنواختی اعداد تولید شده بیشتر است اما عیب آن از هم پاشیدگی می‌باشد.

۳- روش ضرب ثابت: مانند روش قبل است که یکی از دو عدد را ثابت در برابر k در نظر می‌گیریم. عملکرد مناسب این روش تا حد زیادی به انتخاب مقدار ثابت k بستگی دارد.

مثال: با استفاده از روش ضرب ثابت با فرض آنکه $X_0 = 7223$ و $k = 3987$ دو عدد تصادفی تولید کنید.

$$kX_0 = 28\underline{7981}01 \Rightarrow X_1 = 7981 \Rightarrow R_1 = 0.7981$$

$$kX_1 = 31820247 \Rightarrow X_2 = 8202 \Rightarrow R_2 = 0.8202$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۴- روش های مولد های همنهشتی خطی:

ابتدا X_0 را به عنوان هسته در نظر می گیریم و دنباله اعداد X_1 و X_2 و ... و X_n و ... را تولید می کنند که از فرمول زیر بدست می آید:

$$X_i \overset{m}{\equiv} aX_{i-1}+b \qquad i=1,2,\ldots,n,\ldots$$

که در آن a و b و m اعداد صحیح مثبت می باشند که با انتخاب مناسب آنها می توان اعداد تصادفی تولید کرد که ویژگی های بیان شده را دارا است.

اگر $b\neq 0$ باشد به این روش، روش مولد همنهشتی آمیخته (مرکب) می گویند و اگر $b=0$ باشد به آن روش مولد همنهشتی ضربی گفته می شود. در این صورت اعداد تصادفی به شکل زیر هستند:

$$R_i = \frac{X_i}{m} \qquad i=1,2,\ldots,n,\ldots$$

نکاتی در رابطه با طول دنباله در مولد همنهشتی خطی:

در حالتی که $b\neq 0$ یعنی مولد همنهشتی آمیخته داشته باشیم در صورتی دارای شرایط زیر طول دنباله حداکثر است:

۱- b و m نسبت به هم اول باشند

۲- $a-1$ مضربی از تمام عوامل اول m باشد

۳- اگر m مضربی از ۴ باشد $a-1$ نیز مضربی ۴ باشد.

نتیجه: الف) اگر $m=2^n$ باشد که $n\geq 2$ آنگاه برای آنکه طول دنباله اعداد تصادفی تولیدی حداکثر باشد (تکرار) شامل m باشد.

۱- b فرد باشد (m و b نسبت به هم اول باشند).

۲- $a=4k+1$ که $k\in\mathbb{N}$.

ب) اگر $m=10^n$ باشد که $n\geq 2$ آنگاه برای آنکه طول دنباله تولیدی حداکثر (برابر m) باشد بایستی

۱- b و m نسبت به هم اول باشند.

۲- $a=20k+1$ که $k\in\mathbb{N}$

در حالتی که c=0 باشد (ضربی) از مولد همنهشتی ضربی استفاده کنیم نتایج زیر بدست می آید:

الف) اگر $m=2^n$ باشد که $n\geq 3$ آنگاه برای آنکه طول دنباله اعداد تصادفی تولیدی حداکثر باشد (مقدارشان m باشد)

۱- X_0 و m نسبت به هم اول باشند

۲- $a=8k\pm 3$ که $k\in \mathbb{N}$

ب) اگر $m=10^n$ باشد که $n\geq 3$ آنگاه برای آنکه طول دنباله تولیدی حداکثر برابر m باشد باید

۱) X_0 و m نسبت به هم اول باشند

۲) $a=200k\pm 3$ که $k\in \mathbb{N}$

مثال: با فرض آنکه $X_0=7$ و $m=16$ باشد با در نظر گرفتن داده مناسب یک دنباله حداکثری از اعداد تصادفی با روش مولد همنهشتی ؟ میخواهیم تولید کنید.

حل: با فرض $c=11$ داریم و $(4k+1)\ a=9$

$X_0=7$

$X_i \overset{16}{\equiv} 9X_{i-1}+11 \qquad i=1,2,3,\dots,16$

$X_1 \overset{16}{\equiv} 9\times 7+11 \overset{16}{\equiv} 74 \overset{16}{\equiv} 10 \Rightarrow R_1=\frac{X_1}{m}=\frac{10}{16}=0/625$

$X_2 \overset{16}{\equiv} 9\times 10+11 \overset{16}{\equiv} 101 \overset{16}{\equiv} 5 \Rightarrow R_2=\frac{X_2}{m}=\frac{5}{16}=0/3125$

به همین ترتیب X_1 و X_2 و ... X_{16} بصورت زیر بدست می آید:

۷ و ۱۲ و ۹ و ۱۴ و ۱۱ و ۰ و ۱۳ و ۲ و ۱۵ و ۴ و ۱ و ۶ و ۳ و ۸ و ۵ و ۱۰

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تست های یکنواختی اعداد تصادفی تولید شده:

۱- تست یکنواختی KS : (کالموگروف - اسمیرنف):

اگر تعداد اعداد تصادفی کم باشد از این روش استفاده می شود برای این منظور از آزمون فرض به شکل زیر استفاده می کنیم:

$H_0 : X \sim U[0,1]$

اعداد تصادفی دارای توزیع یکنواخت در فاصله [۰,۱] می باشد.

$H_1 : X \nsim U[0,1]$

[۰,۱] نمی باشد.

حال بایستی بررسی شود که فرض H_0 با اطمینان $(1-\alpha)\%$ پذیرفته می شود یا خیر که معمولا $\alpha = 0/01$ یا $0/05$ می باشد.

برای مراحل تست یکنواختی KS به مثال زیر توجه کنید.

مثال: اگر اعداد تصادفی زیر داده شده باشند با استفاده از تست یکنواختی KS مشخص کنید آیا می توان گفت با اطمینان ۹۵٪ اعداد از یکنواخت هستند.

۰/۸۱ ، ۰/۱۴ ، ۰/۰۵ ، ۰/۹۳ ، ۰/۴۴

حل: ابتدا داده ها را به طور مرتب در جدول زیر قرار می دهیم و جدول را کامل می کنیم.

	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	
R_i	۰/۰۵	۰/۱۴	۰/۴۴	۰/۸۱	۰/۹۳	$N=5$ تعداد کل اعداد تصادفی
i/N	۰/۲۰	۰/۴۰	۰/۶۰	۰/۸۰	۱	
$i/N - R_i$	۰/۱۵	۰/۲۶	۰/۱۶	منفی	۰/۰۷	$\xrightarrow{max} D^+ = 0/26$
$R_i - \frac{(i-1)}{N}$	۰/۰۵	عدد منفی	۰/۰۴	۰/۲۱	۰/۱۳	$\xrightarrow{max} D^- = 0/21$

$\{D^+, D^-\} \xrightarrow{max} \boxed{D = 0/26}$

اگر $D < D_{\alpha, N}$ (مقدار بحرانی KS که از روی جدول تعیین می شود)

در این حالت باشد فرض H_0 با اطمینان $(1-\alpha)\%$ پذیرفته می شود.

یعنی با اطمینان $(1-\alpha)$٪ اعداد داده شده یکنواختند.

جدول مقادیر بحرانی

درجه آزادی N	$D_{0.1}$	$D_{0.05}$	$D_{0.01}$
1			
2			
3			
4			
5		۰٫۵۶۵	

$\alpha = 0.05$, $N = 5$, $D_{0.05 , 5} = 0.565$

لذا $D_{0.05,5} = 0.565 > D = 0.26$ برای مثال

H_0 با اطمینان ۹۵٪ پذیرفته می‌شود.

یعنی با اطمینان ۹۵٪ اعداد داده شده یکنواخت‌اند.

۲- تست یکنواختی χ^2 (می‌خوانیم خی ۲ یا مربع کای)

برای تست یکنواختی داده‌های زیاد از این روش استفاده می‌شود برای این منظور (بازه) $[0,1]$ را به n قسمت مساوی $\left[\frac{i-1}{n} , \frac{i}{n}\right]$ ، $i = 1,2,\dots,n$ تقسیم می‌کنیم. فرض می‌کنیم اگر تعداد کل اعداد تصادفی داده شده N باشد و در قسمت iام O_i عدد تصادفی قرار گیرد برای اینکه اعداد دارای توزیع یکنواخت باشند انتظار داریم در هر قسمت $E_i = \frac{N}{n}$ عدد قرار گیرد.

$C = \sum_{i=1}^{n} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$ را در نظر می‌گیریم اگر N به اندازه کافی بزرگ باشد (هر E_i کمتر از ۵ نباشد) و $C < \chi^2_{\alpha, n-1}$ (درجه آزادی $n-1$) باشد در این صورت با اطمینان $(1-\alpha)$٪ اعداد تصادفی داده شده یکنواخت‌اند (فرض H_0 پذیرفته می‌شود).

توجه: $\chi^2_{\alpha, n-1}$ (درجه آزادی) را از جدول کای به دست می‌آوریم.

مثال: اگر تعداد ۱۰۰ عدد تصادفی در فاصله [۰و۱] داده شده باشد و این فاصله را به ۱۰ قسمت

[۰و۰٫۱] و [۰٫۱و۰٫۲] ... [۰٫۹و۱] تقسیم کرده باشیم و در هر قسمت تعداد

اعداد تصادفی O_i مطابق جدول زیر باشد مشخص کنید آیا می‌توان گفت با اطمینان

۰٫۹۵ این ۱۰۰ عدد تصادفی یکنواخت اند.

$N = 100$ و $n = 10$

تعداد مورد انتظار در هر قسمت $E_i = \frac{100}{10} = 10$

فاصله iام	O_i	E_i	$O_i - E_i$	$(O_i - E_i)^2$	$\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$
۱	۷	۱۰	۳-	۹	۰٫۹
۲	۹	۱۰	۱-	۱	۰٫۱
۳	۸	۱۰	۲-	۴	۰٫۴
۴	۹	۱۰	۱-	۱	۰٫۱
۵	۱۴	۱۰	۴	۱۶	۱٫۶
۶	۷	۱۰	۳-	۹	۰٫۹
۷	۱۰	۱۰	۰	۰	۰
۸	۱۵	۱۰	۵	۲۵	۲٫۵
۹	۹	۱۰	۱-	۱	۰٫۱
۱۰	۱۲	۱۰	۲	۴	۰٫۴

$V = C = 7.0$

$\alpha = 0.05 \quad n = 10$

جدول مربع کای (خی ۲)

درجه آزادی v	$\chi^2_{0.95}$
۱	
۲	
۳	
۴	
۵	
⋮	⋮
۹	۱۶٫۹

$\chi^2_{\underset{\text{درجه آزادی}}{n-1}} = \chi^2_{9,\,0.95} = 16.9$

چون $V = C < \chi^2_{10,\,0.95} = 16.9$ لذا با اطمینان

۰٫۹۵ اعداد تصادفی داده شده یکنواخت اند.

آزمون همبستگی: برای بررسی همبستگی موجود میان اعداد iام به بعد از یک دنباله n تایی از اعداد تصادفی که هر دو تای آنها فاصله ای معادل k از یکدیگر داشته باشند بایستی همبستگی دنباله

$$R_i, R_{i+k}, R_{i+2k}, \dots, R_{i+(K'+1)k}$$

یعنی ρ_{ik} را مورد توجه قرار می دهیم.

که در آن K' بزرگترین عدد طبیعی است که $i+(K'+1)k \le n$

آزمون فرض در این رابطه به شکل زیر است

$$\begin{cases} H_0: \rho_{ik} = 0 & \text{همبستگی صفر است} \\ H_1: \rho_{ik} \neq 0 & \text{همبستگی صفر نیست} \end{cases}$$

حال مقدار زیر را تشکیل می دهیم:

$$Z_0 = \frac{\frac{1}{K'+1}\left(\sum_{m=0}^{K'} R_{i+mk} \times R_{i+(m+1)k}\right) - 0.25}{\frac{\sqrt{13K'+7}}{12(K'+1)}}$$

اگر $-Z_{1-\alpha/2} \le Z_0 \le Z_{1-\alpha/2}$ باشد.

(که $Z_{1-\alpha/2}$ از روی جدول توزیع نرمال استاندارد تعیین می شود.) آنگاه فرض H_0 با اطمینان $(1-\alpha)\%$ پذیرفته می شود. یعنی با اطمینان $(1-\alpha)\%$ همبستگی ندارند و مستقل اند.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

سوال: اگر در یک دنباله از اعداد تولید شده توسط یک مولد خاص تعداد کل اعداد ۳۰ می باشد. با استفاده از تست همبستگی می توان گفت که اعداد سوم، هشتم، سیزدهم، هجدهم و بیست و سوم و بیست و هشتم با اطمینان ۹۵٪ همبستگی ندارند و دارای استقلال می باشند.

R_3	R_8	R_{13}	R_{18}	R_{23}	R_{28}
۰٫۲۳	۰٫۲۸	۰٫۳۳	۰٫۲۷	۰٫۰۵	۰٫۳۶

حل: $i=3$ و $n=30$ و $k=5$ و M که بیشترین عدد طبیعی است که:

$$i+(M+1)k \le n \Rightarrow 3+(M+1)5 \le 30$$

لذا بایستی $M=4$

داریم:

$$Z_0 = \frac{\frac{1}{5}(0.23\times0.28+0.28\times0.33+0.33\times0.27+0.27\times0.05+0.05\times0.36)-0.25}{\frac{\sqrt{13\times4+7}}{12(4+1)}}$$

$$= \frac{-0.1945}{0.1280} = -1.516$$

از جدول نرمال استاندارد:

$$\alpha=0.05 \Rightarrow \alpha/2=0.025 \Rightarrow 1-\alpha/2=0.975 \Rightarrow z_{0.975}=1.96$$

داریم

$$-1.96=-z_{0.975} < Z_0=-1.516 < z_{0.975}=1.96$$

z_α	۰٫۵	۰٫۶	۰٫۷

روش های تولید اعداد تصادفی با توزیع های مختلف:

۱- روش تبدیل معکوس: این روش برای توزیع هایی بکار برده می شود که تابع توزیع تجمعی آن ها مشخص بوده و محاسبه عکس آن ها امکان پذیر باشد. می دانیم تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی x با تابع چگالی احتمال f (چگالی احتمال) به صورت زیر تعریف می شود.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$

یادآوری: $p(X = x) = f(x)$ $\quad p(X \leq x) = F(x)$

می دانیم اعداد $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ و $f(x) \geq 0$ لذا اگر $F(x) \geq 0$ و دارای توزیع یکنواخت در فاصله $[0,1]$ است. فرض می کنیم R یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت در فاصله $[0,1]$ باشد قرار می دهیم $F(x) = R$ و معکوس $F(x)$ را در صورت وجود محاسبه می کنیم لذا داریم:

$$\boxed{x = F^{-1}(R)}$$

که R دارای توزیع یکنواخت در فاصله $[0,1]$ است و x دارای توزیع مورد نظر تابع چگالی داده شده است.

مثال: تولید اعداد تصادفی با توزیع یکنواخت در فاصله $[a,b]$

حل: می دانیم تابع چگالی توزیع یکنواخت در فاصله $[a,b]$ به صورت زیر است.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & o.w \end{cases}$$

Year . Month . Date . ( )

حالا: $a \le x \le b$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \cancel{\int_{-\infty}^{a} f(x)dx} + \int_{a}^{x} f(x)dx$$

$$= \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}dx = \frac{x}{b-a}\Big]_{a}^{x} = \frac{x-a}{b-a}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

$F(x)$ ch

که R دارای توزیع یکنواخت در فاصله [0,1] است.

$$\frac{x-a}{b-a} = R \Rightarrow \boxed{x = a+(b-a)R}$$

R دارای توزیع یکنواخت در فاصله [0,1] است و اعداد تصادفی x که دارای توزیع یکنواخت [a,b] تولید می‌شوند.

تمرین: فرمولی بنویسید که اعداد تصادفی با توزیع نمایی از روی اعداد تصادفی یکنواخت در فاصله [0,1] تولید کند.

حل: تابع چگالی احتمال توزیع نمایی به صورت زیر است.

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \ge 0 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \cancel{\int_{-\infty}^{0} f(x)dx} + \int_{0}^{x} f(x)dx = \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$= -e^{-\lambda x}\Big]_{0}^{x} = -e^{-\lambda x} + 1$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$F(x)=R \Rightarrow 1-e^{-\lambda x}=R \Rightarrow e^{-\lambda x}=1-R \Rightarrow -\lambda x=\ln(1-R)$$

$$\Rightarrow \boxed{x=-\frac{1}{\lambda}\ln(1-R)}$$

$$\xrightarrow[1-R \sim U[0,1]]{R \sim U[0,1]} \boxed{x=-\frac{1}{\lambda}\ln R}$$

$R = 1-R$ برای سادگی به جای می نویسیم.

که در آن $R \sim U[0,1]$ و x دارای توزیع نمایی است

تمرین: فرمولی بنویسید که اعداد تصادفی با توزیع ویبول از روی اعداد تصادفی یکنواخت در فاصله $[0,1]$ تولید کند.

حل: تابع چگالی این توزیع به صورت زیر است:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\beta}{\alpha^\beta}x^{\beta-1}e^{-(x/\alpha)^\beta} & x\geq 0\\ 0 & o.w\end{cases}$$

حل:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{x}f(x)dx$$

$$=-\int_{0}^{x}\frac{-\beta}{\alpha^\beta}x^{\beta-1}\cdot e^{-(x/\alpha)^\beta}dx=-e^{-(x/\alpha)^\beta}\Big]_0^x \qquad x\geq 0 \text{ حال}$$

$$F(x)=1-e^{-(x/\alpha)^\beta} \Rightarrow F(x)=R \Rightarrow 1-e^{-(x/\alpha)^\beta}=R$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\Rightarrow e^{-(x/\alpha)^{\beta}} = 1-R \Rightarrow -\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta} = \ln(1-R) \Rightarrow$$

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \left(-\ln(1-R)\right)^{1/\beta}$$

$$\Rightarrow x = \alpha\left(-\ln(1-R)\right)^{1/\beta} \xrightarrow[1-R\sim U[0,1)]{R\sim U[0,1)}$$

برای سادگی به جای R گذاریم

$$\boxed{x = \alpha\left(-\ln R\right)^{1/\beta}}$$

تمرین ۴:

با $R\sim U[0,1)$ ، x و اعداد توزیع ویبول تولید کنید.

نکته: برای تمام توابع چگالی نمی‌توان از روش تبدیل معکوس اعداد تصادفی تولید کرد زیرا معکوس توابع توزیع آن را نمی‌توان از روش تحلیلی محاسبه کرد.

باکس و مولر: با استفاده از فرمول های زیر می‌توانستند اعداد تصادفی با توزیع نرمال استاندارد تولید کنند که از روش تبدیل معکوس نمی‌توان این محاسبه را انجام داد.

$$x_1 = (-2\ln R_1)^{1/2}\cos(2\pi R_2)$$

$$x_2 = (-2\ln R_1)^{1/2}\sin(2\pi R_2)$$

که در آن $R_1, R_2 \sim U[0,1)$ و x_1 و x_2 اعداد تصادفی نرمال استاندارد مستقل است.

تمرین: یک مولد اعداد تصادفی تولید کنید که تابع چگالی آن به صورت زیر باشد

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x} & x \le 0 \\ e^{-2x} & x > 0 \end{cases}$$

حل: حالت ۱ $x \le 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x} e^{2x}\,dx = \frac{1}{2} e^{2x} \Big]_{-\infty}^{x} = \frac{1}{2} e^{2x}$$

حالت ۲ $x > 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx + \int_{0}^{x} e^{-2x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} \Big]_{-\infty}^{0} + \left(-\frac{1}{2} e^{-2x}\right)\Big]_{0}^{x} = \boxed{1 - \frac{1}{2} e^{-2x}}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{2x} & x \le 0 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-2x} & x > 0 \end{cases}$$

$$F(x) = R \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} e^{2x} = R \Rightarrow x = \frac{1}{2} \ln(2R)\,, \quad R \le \frac{1}{2} & x \le 0 \text{ حالت} \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-2x} = R \Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{2} \ln 2(1-R)} \quad R > \frac{1}{2} & x > 0 \text{ حالت} \end{cases}$$

$$x = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln(2R) & R \le \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \ln(2(1-R)) & R > \frac{1}{2} \end{cases}$$

که در آن $R \sim U[0,1]$ می باشد

Subject:

Year: Month: Date: ( )

تمرین از اول و مقدمه کار با انتگرال

تمرین از فصل ۳

تمرین: یک مولد اعداد تصادفی تولید کنید که تابع چگالی آن به صورت تابع مثلثی باشد.

$$
f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-2) & 2 \le x \le 3 \quad (a,\ b) \\ \frac{1}{2}\left(2 - \frac{x}{3}\right) & 3 < x \le 6 \quad (b,\ c) \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}
$$

حل: بعد از انتگرال در هر بازه داریم:

$$
F(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ \frac{(x-2)^2}{4} & 2 \le x \le 3 \\ 1 - \frac{(6-x)^2}{12} & 3 < x \le 6 \\ 1 & x > 6 \end{cases}
$$

$R \le 1/4$

$R > 1/4$

سپس $= R$ قرار می‌دهیم و مقدار R را تعیین می‌کنیم.