صبح شنبه

۸۵/۱۲/۱۲

اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.
امام‌خمینی(ره)

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فنّاوری
سازمان سنجش آموزش کشور

آزمون ورودی
دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل
سال ۱۳۸۶

آزمون تخصصی مجموعه ریاضی
۱ـ ریاضی محض
۲ـ ریاضی کاربردی
۳ـ آموزش ریاضی
(کد ۱۲۰۸)

نام و نام خانوادگی داوطلب: | شماره‌داوطلبی:

تعداد سؤال : ۱۲۰ | مدت پاسخگویی: ۲۴۰ دقیقه

مواد امتحانی رشته مجموعه ریاضی ۱ـ ریاضی محض ۲ـ ریاضی کاربردی ۳ـ آموزش ریاضی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	توابع مختلط	۲۰	۱	۲۰
۲	جبر (۱)	۲۰	۲۱	۴۰
۳	آنالیز ریاضی (۱)	۲۰	۴۱	۶۰
۴	آنالیز ریاضی (۲)	۲۰	۶۱	۸۰
۵	آنالیز عددی (۱)	۲۰	۸۱	۱۰۰
۶	جبر خطی	۲۰	۱۰۱	۱۲۰

اسفند ماه سال ۱۳۸۵

استفاده از ماشین حساب مجاز نمی‌باشد.

۱ ـ مکان هندسی نقاطی از صفحه مختلط که در رابطه $\left|\frac{z-1+i}{2z-3i}\right| = \frac{1}{2}$ صدق می‌کنند، کدام است؟

۱) یک خط مستقیم است.
۲) دایره است.
۳) بیضی است.
۴) هذلولی است.

---

۲ ـ نگاشت $w = Log\frac{z+i}{z-i}$ ناحیه $\{z|Rez > 0\}$ را بر روی چه ناحیه‌ای از صفحه w می‌نگارد؟

۱) $\{w| -\pi < Imw < \pi\}$
۲) $\{w| -\pi < Rew < \pi\}$
۳) $\{w|0 < Imw < \pi\}$
۴) $\{w|0 < Rew < \pi\}$

---

۳ ـ اگر α، β، γ اعداد مختلط با قدر مطلق واحد باشند بقسمی که $|\alpha\beta\gamma| = |\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma|$، مقدار $|\alpha + \beta + \gamma|$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$
۲) $\frac{2}{3}$
۳) ۱
۴) ۲

---

۴ ـ حد تابع $f(z) = z - e^z$ وقتی z به بینهایت میل کند کدام است؟

۱) $-\infty$
۲) ۰
۳) وجود ندارد
۴) ∞

---

۵ ـ اگر شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ برابر با R، $0 < R < \infty$ باشد شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{nk}$ کدام است؟ $(k \in N)$

۱) k^R
۲) $R^{\frac{1}{k}}$
۳) R
۴) R^k

---

۶ ـ اگر $f(z)$ یک قطب مرتبه m در z_0 داشته باشد و $P(z)$ چند جمله‌ای درجه $n \geq 1$ باشد کدام گزاره صحیح است؟

۱) $P[f(z)]$ در z_0 قطب مرتبه m دارد.
۲) $P[f(z)]$ در z_0 قطب مرتبه mn دارد.
۳) $P[f(z)]$ در z_0 قطب ندارد اگر $n > m$ باشد.
۴) $P[f(z)]$ در z_0 قطب مرتبه m دارد اگر $m > n$ باشد.

---

۷ ـ مانده تابع $f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}$ در نقطه تکین $z_0 = -1$ کدام است؟

۱) $\frac{-17}{54}$
۲) $\frac{-17}{54e}$
۳) $\frac{17}{54}$
۴) $\frac{17}{54e}$

---

۸ ـ بسط لوران تابع $f(z)=\frac{۴-۳z}{z(۱-z)(۲-z)}$ به ازای $۲<|z|<+\infty$ کدام است؟

۱) $f(z)=-\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲^n+۱}{z^{n+۱}}$

۲) $f(z)=-\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲^n-۱}{z^n}$

۳) $f(z)=-\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲^n+۱}{z^n}$

۴) $f(z)=-\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۲^{n+۱}-۱}{z^{n+۱}}$

---

۹ ـ مقدار $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^۲+۱)(x^۲+۴)}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۶}$

۲) $\frac{\pi}{۴}$

۳) $\frac{\pi}{۳}$

۴) $\frac{\pi}{۲}$

---

۱۰ ـ حاصل انتگرال $\frac{۱}{۲ni}\oint_C\frac{cotg\pi z}{z^{۲k+۱}}dz$ که C عبارتست از بیضی $x^۲+۴y^۲=۱$ کدام است؟ (k عدد طبیعی)

۱) -۱

۲) ۰

۳) ۱

۴) π

---

۱۱ ـ مقدار انتگرال $\int_C\frac{\sin(z+۱)\pi+\cos\pi z}{(z-۱)(z-۲)}dz$ که در آن C دایره $|z|=۴$ با جهت مثبت است، کدام است؟

۱) $-۲\pi i$

۲) ۰

۳) $۲\pi i$

۴) $۴\pi i$

---

۱۲ ـ اگر تابع f در ناحیه Ω تحلیلی و γ یک منحنی بسته در Ω باشد، انتگرال $\int_\gamma\overline{f(z)}f'(z)dz$ کدام است؟

۱) صفر

۲) حقیقی است.

۳) در حالت کلی مختلط است.

۴) موهومی محض است.

---

۱۳ ـ فرض کنید h تابعی تحلیلی بر مجموعه $\{z:|z|\le ۱\}$ باشد و به ازاء هر z در این مجموعه $|h(z)|<۱$. در صورتی که $D=\{z:|z|<۱\}$ کدام گزینه صحیح است؟

۱) h در D دو نقطه ثابت دارد.

۲) h در D نقطه ثابت ندارد.

۳) در مورد تعداد نقاط ثابت h در D در حالت کلی نمی‌توان نتیجه‌گیری کرد.

۴) h در D فقط یک نقطه ثابت دارد.

---

۱۴ ـ فرض کنید f یک تابع تام باشد بقسمی که به ازاء هر $z\in\mathbb{C}$ ، $f(z+۲i)=f(z)$ و $f(z+۱)=f(z)$. کدام گزینه درست است؟

۱) f تابعی ثابت است.

۲) f روی اعداد حقیقی با مقدار حقیقی است.

۳) f روی اعداد موهومی با مقدار موهومی است.

۴) f تابعی با مقدار حقیقی است.

---

۱۵ ـ چند ریشه از ریشه‌های معادله $z^5 - 3z^3 + z + 8$ در مجموعه $1 < |z| < 2$ قرار دارد؟

۱) ۱ ریشه
۲) ۳ ریشه
۳) ۴ ریشه
۴) ۵ ریشه

---

۱۶ ـ فرض کنید $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ یک چند جمله‌ای از درجه $n \geq 2$ باشد. کدام گزینه در مورد P درست است؟

۱) P در بینهایت دارای قطب مرتبه n است.
۲) P در بینهایت دارای نقطهٔ تکین اساسی است.
۳) برد P می‌تواند برابر با C نباشد.
۴) P می‌تواند یک نگاشت یک به یک باشد.

---

۱۷ ـ فرض کنید f تابعی تام باشد که مقدار آن بر روی محور اعداد موهومی، موهومی است در مورد f کدام گزینه صحیح است؟

۱) $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$
۲) $\overline{f(z)} = -f(-\overline{z})$
۳) $f(\overline{z}) = -\overline{f(z)}$
۴) $f(\overline{z}) = i\overline{f(z)}$

---

۱۸ ـ فرض کنید f بر مجموعه باز همبند Ω تحلیلی باشد و $a \in \Omega$ کدام گزینه صحیح نیست؟

۱) $|f|$ می‌تواند در a ماکزیمم موضعی داشته باشد اما نمی‌تواند دارای ماکزیمم مطلق باشد.
۲) اگر f غیر ثابت باشد $|f|$ نمی‌تواند در a ماکزیمم موضعی داشته باشد.
۳) اگر f غیر ثابت و در هیچ نقطه‌ای از Ω صفر نشود آنگاه $|f|$ در a نمی‌تواند مینیمم موضعی داشته باشد.
۴) اگر f در a صفر داشته باشد و غیر ثابت باشد مرتبه صفر آن متناهی است.

---

۱۹ ـ فرض کنید Ω یک مجموعه باز و همبند باشد و $\{z_n\}$ دنباله‌ای از اعضای متمایز Ω باشد که به $z_0 \in \Omega$ همگراست. اگر f و g دو تابع تحلیلی بر Ω باشند که در هیچ نقطه از Ω برابر با صفر نیستند و $\frac{f'}{f}(z_n) = \frac{g'}{g}(z_n)$ ، کدام گزینه صحیح است؟

۱) f و g با هم برابرند.
۲) $g - f$ ثابت است.
۳) fg ثابت است.
۴) f مضربی از g

---

۲۰ ـ فرض کنید f یک تابع حقیقی مقدار باشد که بر گوی $\overline{B(a,R)}$ پیوسته است و به ازاء هر $r < R$ در رابطه $f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})d\theta$ صدق می‌کند، اگر f در a صفر باشد کدام گزینه صحیح است؟

۱) f یک تابع تحلیلی است
۲) وجود دارد $0 < r < R$ که f بر دایره $|z - a| = r$ صفری ندارد.
۳) صفر تابع f در نقطه a یک صفر تنها نیست.
۴) تعداد صفرهای f در $B(a,R)$ شمارا است.

---

۲۱ ـ گروه $G = \mathbb{Z}_{۸} \times \mathbb{Z}_{۱۲}$ و زیر گروه $H = < ۲ > \times < ۸ >$ از آن را در نظر بگیرید. در این صورت $(G : H)$ برابر با کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

۲۲ ـ فرض کنید G یک گروه است و $H \leq G$ و $a, b \in G$. کدام گزینه صحیح است؟

۱) $aH = Hb \Rightarrow aH = Ha$ ۲) $Ha = Hb \Rightarrow aH = bH$

۳) $Ha = Hb \Rightarrow Ha^{-۱} = Hb^{-۱}$ ۴) $aH = Ha \Rightarrow bH = Hb$

۲۳ ـ حلقه $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ و ایده‌آل $I = \{(x, ۰) | x \in \mathbb{Z}\}$ از آن را در نظر بگیرید. در این صورت ایده‌آل I:

۱) اول نیست. ۲) اول است ولی ماکسیمال نیست.

۳) هم اول است و هم ماکسیمال ۴) تنها ایده‌آل اول حلقه $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ است.

۲۴ ـ فرض کنید R حلقه یکدار غیر بدیهی است به طوری که هر زیر حلقه آن، یک ایده‌آل است. در این صورت:

۱) $R \cong \mathbb{Q}$ ۲) $R \cong \mathbb{Z}_n$ ۳) $R \cong \mathbb{Z}_n$ یا $R \cong \mathbb{Z}$ ۴) $R \cong \mathbb{Q}$ یا $R \cong \mathbb{Z}$

۲۵ ـ فرض کنید R حلقه‌ای باشد که در آن اتحاد $a^{۲} - b^{۲} = (a - b)(a + b)$ $\forall a, b$ برقرار باشد، در این صورت در R کدام یک از اتحادهای زیر نیز برقرار است؟

۱) $\forall a, b \quad , \quad bab = b$ ۲) $\forall a, b \quad , \quad (a - b)^{۲} = a^{۲} - b^{۲}$

۳) $\forall a, b, \ (a + b)^{۲} = a + b$ ۴) $\forall a, b \quad , \quad (a + b)^{۲} = a^{۲} + ۲ab + b^{۲}$

۲۶ ـ گروه $S_۵$ چند زیر گروه از مرتبهٔ ۲ دارد؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

۲۷ ـ همه موارد زیر صحیح‌اند به جز:

۱) گروه $\mathbb{Z}_۶$ دارای ۳ مولد است. ۲) گروه $\mathbb{Z}$ دارای ۲ مولد است.

۳) گروه $\mathbb{Z}_p$ دارای $p - ۱$ مولد است. (p عددی اول است.) ۴) هر گروه دوری نامتناهی با $\mathbb{Z}$ یکریخت است.

۲۸ ـ اگر G گروهی دلخواه باشد، x عضوی از G و $H = \{g \in G | xg = gx\}$ آنگاه:

۱) H زیر گروه است ولی لزوماً نرمال نیست. ۲) همرده‌های چپ و راست H با هم برابرند.

۳) H زیر گروه نرمال است. ۴) H زیر گروه نیست.

۲۹ ـ اگر R حلقه‌ای با بیش از یک عضو باشد به طوری که به ازای هر $a \in R$، عضو یکتای a' در R موجود باشد که $aa'a = a$ آنگاه:

۱) R حداقل یک مقسوم علیه صفر دارد. ۲) تمام عضوهای R مقسوم علیه صفرند.

۳) $a'aa' \neq a'$ ۴) $a'aa' = a'$

۳۰ ـ اگر هر زیر گروه دوری از گروه G در G نرمال باشد، در این صورت:

۱) G گروهی دوری است.
۲) G گروهی آبلی است.
۳) هر زیر گروه G در G نرمال است.
۴) هر زیر گروه نرمال G، دوری است.

۳۱ ـ فرض کنید G گروهی متناهی باشد به طوری که در آن عکس قضیه لاگرانژ به ازای هر $d \mid\mid G|$ برقرار است. در این صورت عکس قضیه لاگرانژ برای هر زیر گروه H از G:

۱) برقرار نیست.
۲) برقرار است.
۳) اگر $|G|$ تنها دو عامل اول داشته باشد برقرار است.
۴) برقرار است به شرط آنکه تنها اعداد اول عامل مرتبه G ، اعداد ۲ و ۳ باشند.

۳۲ ـ فرض کنید H زیر گروهی نرمال از گروه G باشد که برای هر $x, y \in G - H$ داشته باشیم $xy \in H$. در این صورت:

۱) H آبلی است. ۲) $\frac{G}{H}$ دوری است. ۳) $\frac{G}{H}$ آبلی است. ۴) $\frac{G}{H}$ متناهی است.

۳۳ ـ فرض کنید G گروهی از مرتبهٔ ۱۴۳ است. کدام یک از موارد زیر صحیح است؟

۱) هر زیر گروه سرهٔ G دوری است.
۲) G دو زیر گروه از مرتبهٔ ۱۳ دارد.
۳) زیر گروه‌های سره و غیر بدیهی H و K از G وجود دارند به طوری که $H \subseteq K$.
۴) G تنها دو زیر گروه دارد.

۳۴ ـ اگر R حلقهٔ چهار گان‌های حقیقی $(R = \mathbb{Q}_R)$ باشد، کدام یک از موارد زیر صحیح است؟

۱) معادلهٔ $x^۲ = -۱$ دارای تعدادی متناهی جواب است.
۲) R یک حلقهٔ بخشی است.
۳) اگر $\mathbb{F}_p$ یک میدان متناهی از مرتبه p باشد، $Q_{\mathbb{F}_p}$ نیز یک میدان است.
۴) $Q_{\mathbb{F}_p}$ یک حلقه بولی است.

۳۵ ـ کدام یک از موارد زیر در گروه‌ها صحیح است؟

۱) $(\mathbb{Q}, +) \simeq (\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}, +)$ ۲) $(\mathbb{R}^*, .) \simeq (\mathbb{C}^*, .)$ ۳) $(\mathbb{Q}^*, +) \simeq (\mathbb{Q}^*, .)$ ۴) $(\mathbb{Z}, +) \simeq (۲\mathbb{Z}, +)$

۳۶ ـ فرض کنید G گروهی غیر آبلی و متناهی و $Z(G)$ مرکز آن باشد. در این صورت مرتبه $\frac{G}{Z(G)}$:

۱) برابر با ۱ است. ۲) برابر با ۲ است. ۳) برابر با ۳ است. ۴) بزرگتر یا مساوی با ۴ است.

۳۷ ـ تعداد همریختی‌های پوشا از یک گروه ۱۴ عضوی به یک گروه ۸ عضوی برابر است با:

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) هشت

۳۸ ـ فرض کنید $P(X)$ مجموعهٔ توانی X است. گروه $G = (P(X), \Delta)$ را در نظر بگیرید و توابع $f, g : G \longrightarrow G$ را به صورت:

$$f(B) = A \cap B$$
$$g(B) = A \Delta B$$

که در آن $A \subseteq X$ ثابت در نظر گرفته شده و $B \subseteq X$ دلخواه است، تعریف می‌کنیم. کدام گزینه در مورد f و g صحیح است؟

۱) f همریختی است و g همریختی است.
۲) f همریختی است و g همریختی نیست.
۳) f همریختی نیست و g همریختی است.
۴) f همریختی نیست و g همریختی نیست.

---

۳۹ ـ اگر G یک گروه و $f : G \longrightarrow G$ یک همریختی گروهی باشد، آنگاه کدام یک از موارد زیر نادرست است؟($Z(G)$ مرکز G و G' زیر گروه تعویضگر G است.)

۱) اگر $N \trianglelefteq G$ ، آنگاه $f(N) \trianglelefteq f(G)$
۲) اگر $N \trianglelefteq G$ ، آنگاه $f^{-1}(N) \trianglelefteq G$
۳) $f(G') \subseteq G'$
۴) $f(Z(G)) \subseteq Z(G)$

---

۴۰ ـ همه موارد زیر صحیح‌اند به جز:

۱) تنها دو همریختی از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ وجود دارد.
۲) $2\mathbb{Z} \simeq 3\mathbb{Z}$ (به عنوان حلقه)
۳) اگر R حلقه‌ای باشد که در آن $(R, +)$ یک گروه دوری باشد، آنگاه R آبلی است.
۴) هر همریختی حلقه‌ای $\mathbb{Z}$ ، همریختی صفر یا همریختی همانی است.

۴۱ ـ فرض کنید تابع f بر بازه باز $(-۱, ۱) \cup (۰, ۱)$ پیوسته و بر $(-۱, ۰)$ مشتق پذیر باشد. کدام گزینه درست است؟

۱) ممکن است $\lim_{x \to ۰} f'(x)$ موجود باشد ولی $f'(۰)$ موجود نباشد.
۲) اگر $\lim_{x \to ۰} f'(x) = A$ آنگاه $f'(۰) = A$.
۳) اگر $f'(۰) = A$ آنگاه $\lim_{x \to ۰} f'(x) = A$.
۴) $\lim_{x \to ۰} f'(x)$ وجود ندارد.

---

۴۲ ـ کدام گزاره نادرست است؟

۱) اگر تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دارای خاصیت مقدار میانی باشد آنگاه f پیوسته است.
۲) تابعی وجود دارد که فقط در یک نقطه پیوسته است و در آن نقطه مشتق پذیر هم هست.
۳) تابعی ناصفر مانند f وجود دارد که $f(۰) = ۰$ و همه مشتقات f در صفر برابر صفر است.
۴) تابعی وجود دارد که فقط در دو نقطه پیوسته است و در همان دو نقطه مشتق پذیر هم هست.

---

۴۳ ـ فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ پیوسته و A زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ باشد به طوری که $f(A)$ در $\mathbb{R}$ چگال باشد. در این صورت:

۱) f یک به یک است.
۲) f پوشا است.
۳) $f(A)$ شامل همه نقاط حدی $f(\mathbb{R})$ است.
۴) تابعی که در مفروضات سؤال صدق کند وجود ندارد.

---

۴۴ ـ فرض کنید $\mathbb{Q}$ مجموعه اعداد گویا باشد و $F = \{r \in \mathbb{Q} : ۲ < r^۲ < ۳\}$. اگر d نمایش متریک اقلیدسی بر $\mathbb{Q}$ باشد آنگاه F در فضای متریک $(\mathbb{Q}, \mathrm{d})$:

۱) فشرده است.
۲) باز است ولی بسته نیست.
۳) هم باز است و هم بسته.
۴) نه باز است و نه بسته.

---

۴۵ ـ فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد که $\lim_{n \to \infty} (a_{n+۱} - a_n) = \alpha$ موجود است. در این صورت:

۱) $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n} = ۰$
۲) $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ همگراست.
۳) $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ واگراست.
۴) $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n} = \alpha$

---

۴۶ ـ فرض کنید A و B دو زیر مجموعه از فضای متریک (X, d) باشند، و A° درون A و $\bar{A}$ نمایش بستار A باشد. در این صورت:

۱) $(X - A)^\circ = X - \bar{A}$
۲) $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$
۳) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
۴) $A^\circ = \bar{A} - A$

---

۴۷ ـ فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد و $A \subseteq X$. در این صورت مجموعه همه نقاطی از X را که نه نقطه درونی A و نه نقطه درونی $X - A$ باشند مرز A می‌نامیم. کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

۱) A بسته است اگر مرز A بسته باشد.
۲) اگر $B \subseteq X$ و $\bar{A} \cap B = \emptyset$ آنگاه مرزهای A و B اشتراک دارند.
۳) A و مرز A با هم برابراند اگر و تنها اگر A در X چگال باشد.
۴) A بسته است اگر و تنها اگر مرز A زیر مجموعه‌ای از A باشد.

---

۴۸ ـ تابع f با ضابطه زیر تعریف می‌گردد:

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & x\in Q\\ x^{۲} & x\notin Q\end{cases}$$

در این صورت:

۱) تابع f همه جا حد چپ و راست دارد.
۲) تابع f در همه نقاط گویا پیوسته است.
۳) تابع f در مبدأ مشتق‌پذیر است.
۴) نقاط ناپیوستگی f ناشمارا است.

---

۴۹ ـ فرض کنید $a_{۱}>a_{۲}>\ldots>a_{k}>۰$ ، در این صورت اگر $b_n=\sqrt[n]{a_{۱}^n+\ldots+a_k^n}$ آنگاه:

۱) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\frac{a_{۱}+\ldots+a_k}{k}$
۲) $\lim\limits_{n\to\infty} sup\ b_n=a_{۱}$ و $\lim\limits_{n\to\infty} inf\ b_n=a_k$
۳) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=a_{۱}$
۴) $\lim\limits_{n\to\infty} sup\ b_n=\infty$

---

۵۰ ـ فرض کنید $\mathbb{R}$ و $\mathbb{Z}$ به ترتیب نمایانگر اعداد حقیقی و اعداد صحیح باشند. در این صورت مجموعه $E=\{n+\frac{۱}{۲^n}:n\in\mathbb{Z}\}\subseteq\mathbb{R}$:

۱) بسته است.
۲) در $\mathbb{R}$ چگال است.
۳) $E'=\mathbb{R}$ (E' نمایانگر نقاط انباشتگی E می‌باشد.)
۴) $E'=Q$

---

۵۱ ـ همهٔ توابع زیر در صفر مشتق‌پذیرند به جز:

۱) $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{۱}{x^{۲}}} & x\neq ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases}$
۲) $f(x)=\begin{cases}x^{۲} & x\in Q\\ ۰ & x\notin Q\end{cases}$
۳) $f(x)=\begin{cases}x^{۲}\sin\frac{۱}{x} & x\neq ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases}$
۴) $f(x)=\sum\limits_{m=۱}^{\infty}(\frac{۱}{۲})^m\cos(۱۴^m\pi x)$

---

۵۲ ـ فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته باشد و برای $x_{۰}\in\mathbb{R}$ ، $f'(x_{۰})\neq ۰$. به ازای هر $t\in\mathbb{R}$ تابع φ را بر $\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $\varphi(x)=x+\frac{۱}{f'(x_{۰})}(t-f(x))$ در نظر می‌گیریم. در این صورت:

۱) φ یک تابع یکنواخت پیوسته است.
۲) φ یک تابع انقباضی است.
۳) یک همسایگی از $x_{۰}$ موجود است که φ روی آن انقباضی است.
۴) هیچیک از سه مورد فوق درست نیست.

---

۵۳ ـ فرض کنیم K و C دو زیر مجموعه ناتهی از فضای متری (X,d) باشند به طوری که $K\bigcap C=\phi$. فاصله بین این دو مجموعه را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d(K,C)=inf\{d(x,y):x\in C,y\in K\}$$

کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

۱) تنها بسته بودن یکی از مجموعه‌های K یا C برای مثبت بودن $d(K,C)$ کافی است.
۲) اگر C بسته و K فشرده باشد آنگاه $d(K,C)>۰$.
۳) شرط لازم برای مثبت بودن $d(K,C)$ آن است که K و C فشرده باشند.
۴) شرط لازم برای مثبت بودن $d(K,C)$ آن است که K و C بسته باشند.

۵۴ـ فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای کران‌دار از اعداد حقیقی باشد و $\alpha = \lim_{n\to\infty} sup\ a_n$. در این صورت:

۱) برای هر $\epsilon > 0$ ، می‌توان $m \in \mathbb{N}$ یافت به طوری که، برای تعداد نامتناهی از n هائی که $n \geq m$ و $a_n < \alpha - \epsilon$ $\forall n \geq m, a_n < \alpha$

۲) برای هر $\epsilon > 0$ ، می‌توان $m \in \mathbb{N}$ یافت به طوری که، برای تعداد نامتناهی از nهائی که $n \geq m$ و $a_n > \alpha - \epsilon$ $\forall n \geq m, a_n < \alpha + \epsilon$

۳) برای هر $\epsilon > 0$ داده شده $m \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که تنها برای تعداد متناهی از nها $a_n > \alpha - \epsilon$ و $a_n < \alpha + \epsilon$ $\exists n \geq m; a_n < \alpha + \epsilon$

۴) $\epsilon > 0$ هست به طوری که برای هر $m \in \mathbb{N}$ و $\exists n \geq m; a_n < \alpha + \epsilon$ و $a_n > \alpha - \epsilon$ برای تعداد متناهی از n ها

۵۵ـ کدام گزینه یک شرط کافی برای پیوستگی یکنواخت تابع مشتق‌پذیر f بر بازه (a, ∞) است؟

۱) b ای هست که $a < b$ و f' در $[b, \infty)$ نزولی و مثبت است $f(a+)$ موجود است.

۲) f' در (a, ∞) نزولی و مثبت است.

۳) حد $f(x)$ وقتی که $x \to \infty$، موجود است.

۴) $f(a+)$ موجود و f' بر (a, ∞) یکنوا است.

۵۶ـ فرض کنید A و B مجموعه‌های ناتهی و $f : A \to B$ یک تابع باشد:

۱) اگر f یک به یک باشد تابعی مانند $g : B \to A$ یافت می‌شود به طوری که به ازای هر $y \in B$ ، $(fog)(y) = y$.

۲) اگر f یک به یک باشد هیچ تابعی مانند $g : B \to A$ یافت نمی‌شود که به ازای هر $x \in A$ ، $(gof)(x) = x$.

۳) اگر f پوشا باشد تابعی مانند $g : B \to A$ یافت می‌شود به طوری که به ازای هر $y \in B$ ، $(fog)(y) = y$.

۴) اگر f پوشا باشد تابعی مانند $g : B \to A$ یافت می‌شود به طوری که به ازای هر $x \in A$ ، $(gof)(x) = x$.

۵۷ـ فرض کنید $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ و A نمودار f در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^2$ باشد کدام گزینه درست است؟

۱) A همبند و بسته است.

۲) A همبند است ولی بسته نیست.

۳) A همبند نیست ولی بسته است.

۴) A همبند نیست و بسته نیست.

۵۸ـ فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک نامتناهی و G زیر مجموعه‌ای باز و متناهی از آن باشد. در این صورت:

۱) ϕ و G تنها زیرمجموعه‌های باز G هستند.

۲) لازم است که متریک d گسسته باشد.

۳) X مجموعه‌ای شماراست.

۴) هر زیر مجموعه G نسبت به X باز است.

۵۹ـ کدام تابع در صفر مشتق‌پذیر و در تمام نقاط مخالف صفر ناپیوسته است؟

۱) $f(x) = \begin{cases} x & x \text{ گویا باشد} \\ x^2 + x & x \text{ اصم باشد} \end{cases}$

۲) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ گویا باشد} \\ 0 & x \text{ اصم باشد} \end{cases}$

۳) $f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

۴) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ اصم باشد} \\ \frac{1}{n} & x = \frac{m}{n} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

۶۰ ـ فرض کنید f یک تابع پیوسته و یک به یک روی یک بازه باشد، در این صورت:

۱) f نه صعودی است و نه نزولی است.

۲) f مشتق‌پذیر است.

۳) f یا اکیداً صعودی است یا اکیداً نزولی است.

۴) f محدب است.

۶۱ ـ فرض کنید $I_a = \int_a^\infty \frac{\sin x}{x+\cos x}dx$. در این صورت:

۱) $I_\circ$ همگرا است.

۲) $I_\circ$ واگرا است.

۳) $I_\circ$ همگرای مطلق است.

۴) برای یک $a > \circ$ انتگرال $\int_\circ^a \frac{\sin x}{x+\cos x}dx$ موجود است ولی I_a موجود نیست.

---

۶۲ ـ فرض کنید f تابعی انتگرال‌پذیر ریمان روی $[-\pi,\pi]$ و $f(\pi)=f(-\pi)$ و $\sum_{n=1}^\infty C_n$ سری فوریه مثلثاتی f باشد. در این صورت:

۱) $\sum C_n$ همگرا است.

۲) $\sum |C_n|$ همگرا است.

۳) $\sum |C_n|^۲$ همگرا است.

۴) $\sum C_n$ شرط لازم همگرایی را ندارد.

---

۶۳ ـ اگر مشتق f بر بازهٔ $[۱,\infty]$ انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه به ازای هر $x \geq ۱$ انتگرال $\int_۱^x [t]f'(t)dt$ برابر است با:

۱) $[x]f(x)$

۲) $[x]f(x) - \sum_{n\leq x} f(n)$

۳) $[x]f(x) - \sum_{n>x} f(n)$

۴) $[x]f(x) + \sum_{n\leq x} f(n)$

---

۶۴ ـ با استفاده از سری فوریهٔ تابع $f(x) = x^۲ + \pi^۲ - ۲\pi|x|$ بر بازهٔ $[-\pi,\pi]$ مقدار سری $\sum_{n=۱}^\infty \frac{(-۱)^n}{(n+۱)^۲}$ برابر است با:

۱) $\frac{\pi^۲}{۱۲} - ۱$

۲) $\frac{\pi^۲}{۱۲}$

۳) $\frac{\pi^۲}{۶}$

۴) $\frac{\pi^۴}{۹۰}$

---

۶۵ ـ فرض کنید $I \subseteq \mathbb{R}$ بازه‌ای کراندار و $f: I \to \mathbb{R}$ تابعی بینهایت بار مشتق‌پذیر باشد و $\sup\{|f^{(n)}(x)| : n \in \mathbb{N}, x \in I\} < \infty$. فرض کنید $(x_\circ \in I)$ $S_n(x) = \sum_{k=\circ}^n \frac{f^{(k)}(x_\circ)}{k!}(x-x_\circ)^k$، در این صورت:

۱) دنباله $\{S_n\}_{n=۱}^\infty$ به طور یکنواخت به f همگرا است.

۲) دنباله $\{S_n\}_{n=۱}^\infty$ نقطه‌وار به f همگرا است و همگرایی آن یکنواخت نیست.

۳) دنباله $\{S_n\}_{n=۱}^\infty$ نقطه‌وار به f همگرا است ولی همگرایی یکنواخت آن بستگی به تابع f و بازهٔ I دارد.

۴) دنباله $\{S_n\}_{n=۱}^\infty$ حتی نقطه‌وار هم به f همگرا نیست.

---

۶۶ ـ فرض کنید f و g توابع پیوسته‌ای بر $[\circ,۱]$ باشند به طوری که $\int_\circ^۱ f = \int_\circ^۱ g$. در این صورت:

۱) برای هر $x \in [\circ,۱]$ ، $f(x) = g(x)$.

۲) اگر $\circ \leq c \leq ۱$ موجود باشد به طوری که $f(c) = g(c)$ آنگاه $f \equiv g$.

۳) مجموعه نقاطی که در آنها f و g مساویند در $[\circ,۱]$ چگال است.

۴) $\circ \leq c \leq ۱$ موجود است به طوری که $f(c) = g(c)$.

---

۶۷ ـ کدام یک از شرط‌های زیر برای وجود انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ کافی است؟

۱) f بر زیر بازه‌ای از $[a,b]$ یکنوا باشد.

۲) f بر $[a,b]$ با تغییر کران‌دار باشد.

۳) f را بتوان به صورت تفاضل دو تابع نامنفی بر $[a,b]$ نمایش داد.

۴) f در هر نقطه از زیر مجموعه شمارائی از $[a,b]$ پیوسته باشد.

---

۶۸ ـ مقدار حد $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}sin(\frac{k\pi}{2n})^2$ برابر است با:

۱) $\frac{4}{\pi^2}$ ۲) $\cos\frac{\pi^2}{4}-\frac{2}{\pi^2}$ ۳) $\frac{2}{\pi^2}(1-\cos\frac{\pi^2}{4})$ ۴) ∞

---

۶۹ ـ اگر $f(x)=\begin{cases}x^2\sin(\frac{1}{x}) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ ، آنگاه تابع f بر بازه $[0,1]$:

۱) با تغییر کراندار است. ۲) با تغییر کراندار نیست.

۳) پیوسته ا ست ولی با تغییر کراندار نیست. ۴) نه پیوسته است و نه با تغییر کراندار.

---

۷۰ ـ فرض کنید α تابعی صعودی روی $[a,b]$ باشد. برای توابع انتگرال‌پذیر f و g نسبت به α ، تعریف کنید: $d(f,g)=\int_a^b|f-g|d\alpha$. در این صورت:

۱) d در نامساوی مثلث صدق نمی‌کند. ۲) d یک متر است.

۳) d یک شبه متر است. ۴) متر بودن d وابسته به α است.

---

۷۱ ـ فرض کنید f تابعی پیوسته بر $[0,\infty)$ باشد و به ازای هر دو عدد طبیعی m و n ،

$f(\frac{m}{2^n})=(\frac{m}{2^n})^2$.

در این صورت مقدار انتگرال $\int_0^{2/5}f(x)d[x]$ برابر است با:

۱) ۰ ۲) $\frac{5}{6}$ ۳) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$ ۴) ۵

---

۷۲ ـ تابع f بر $[0,1]\times[0,1]$ به صورت $f(x,y)=\begin{cases}x & \text{اگر } x \text{ گویا باشد}\\ y & \text{اگر } x \text{ گنگ باشد}\end{cases}$ تعریف شده است، در این صورت مقدار

$\overline{\int_0^1}f(x,y)dx+\underline{\int_0^1}f(x,y)dx$ برابر است با:

۱) ۰ ۲) $1-y^2$ ۳) $2y$ ۴) $y+\frac{1}{2}$

---

۷۳ ـ فرض کنید $f:[0,1]\to\mathbb{C}$ و برای $x\in[0,1]$ ، $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}C_ke^{2\pi ikx}$، که در آن C_kها ضرایب فوریه f هستند. در این صورت:

۱) $\forall x\in[0,1],\lim_{n\to\infty}S_n(x)=f(x)$ ۲) $\lim_{n\to\infty}\int_0^1|S_n(x)-f(x)|^2dx=0$

۳) $\lim_{n\to\infty}\sup\{|S_n(x)-f(x)|:x\in[0,1]\}=0$ ۴) $\lim_{n\to\infty}\int_0^1|S_n(x)-f(x)|^2dx=0$

---

۷۴ ـ فرض کنید $f(x)=\sum_{1}^{\infty}\frac{nx-[nx]}{n^2}$ و $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=A$. در این صورت $f(\frac{1}{7}-)-f(\frac{1}{7}+)$ برابر است با:

۱) $-\frac{1}{49}A$ ۲) $-\frac{1}{49}A^2$ ۳) A ۴) $\frac{1}{7}A^2$

---

۷۵ ـ فرض کنید تابع $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ و دنبالهٔ توابع $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ بر $[a,b]$ مشتق‌پذیر باشند، کدام گزینه درست است؟

۱) اگر همگرایی $\int_a^x f_n(t)dt \to \int_a^x f(t)dt$ بر $[a,b]$ یکنواخت باشد آنگاه همگرایی $f_n \to f$ بر $[a,b]$ یکنواخت است.

۲) اگر همگرایی $f_n \to f$ بر $[a,b]$ یکنواخت باشد آنگاه همگرایی $f'_n \to f'$ بر $[a,b]$ یکنواخت است.

۳) اگر همگرایی $f'_n \to f'$ بر $[a,b]$ یکنواخت باشد آنگاه همگرایی $f_n - f_n(a) + f(a) \to f$ بر $[a,b]$ یکنواخت است.

۴) اگر همگرایی $f'_n \to f'$ بر $[a,b]$ یکنواخت باشد آنگاه همگرایی $f_n \to f$ بر $[a,b]$ یکنواخت است.

---

۷۶ ـ سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin nx}{\sqrt{n}}$ را در نظر بگیرید، در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱) سری فقط در هر بازه به صورت $(a, 1)$ که $0 < a < 1$، به طور یکنواخت همگراست.

۲) سری در $[0, 1]$ به طور یکنواخت همگراست.

۳) سری تنها به صورت نقطه‌وار روی $[0, 1]$ همگراست.

۴) سری حتی به صورت نقطه‌وار نیز همگرا نیست.

---

۷۷ ـ اگر $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ تعریف شده باشد، آنگاه:

۱) f پیوسته یکنواخت است.

۲) f ناپیوسته است.

۳) f فقط در اعداد گویا پیوسته است.

۴) f پیوسته است ولی پیوسته یکنواخت نیست.

---

۷۸ ـ دنباله $\{f_n\}$ بر $[0, 1]$ چنین تعریف شده است $f_n(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \le x < \frac{1}{n} \\ x \cos \frac{\pi}{2x} & , \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$ در این صورت

۱) f_n فقط بر هر بازه مانند (a,b) از $[0, 1]$ به طور یکنواخت همگراست.

۲) f_n بر $[0, 1]$ نقطه به نقطه همگراست ولی همگرای یکنواخت نیست.

۳) f_n بر $[0, 1]$ به طور یکنواخت همگراست.

۴) f_n بر هیچ زیر بازه‌ای از $[0, 1]$ به طور یکنواخت همگرا نیست.

---

۷۹ ـ فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری عددی همگرا باشد. در این صورت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$:

۱) تنها در صورتی همگرای یکنواخت است که $a_n \ge 0$ برای هر n.

۲) ممکن است حتی نقطه به نقطه همگرا نباشد.

۳) بر $[0, 1]$ به طور نقطه به نقطه همگراست ولی این همگرایی یکنواخت نیست.

۴) بر $[0, 1]$ به طور یکنواخت همگراست.

۸۰ـ فرض کنید $0 \le x \le 1$ و $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{اگر } x = \frac{m}{n} \text{ که } (m,n) = 1 \\ 1 & \text{در غیر آن} \end{cases}$ و $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ در این صورت:

۱) انتگرال $\int_0^1 f(x)dx$ موجود نمی‌باشد.

۲) انتگرال $\int_0^1 f(x)dx$ موجود می‌باشد ولی حد $\int_0^1 f_n(x)dx$ موجود نمی‌باشد.

۳) انتگرال‌های $\int_0^1 f(x)dx$ و $\int_0^1 f_n(x)dx$ موجودند ولی $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 f(x)dx$

۴) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$

۸۱- عدد ۱۲/۶ در مبنای ۷ کدام است؟

۱) $(۱۵/\overline{۴۱۲})_۷$
۲) $(۱۵/\overline{۴۱۲۵})_۷$
۳) $(۱۵/\overline{۴۱۵۲})_۷$
۴) $(۱۵/\overline{۴۲۱۵})_۷$

۸۲- اگر رابطه بین خطا در تکرار $(n+۱)$ م و n ام به صورت زیر باشد:

$$e_{n+۱} = \lambda e_n \quad , \quad ۰ < \lambda < ۱$$

حداقل n برای اینکه $|e_n| \leq ۱۰^{-m} |e_۰|$ کدام است؟

۱) $\left[\frac{-m}{\log \lambda_{۱۰}}\right]+۱$
۲) $\left[\frac{m}{\log \lambda_{۱۰}}\right]+۱$
۳) $\left[\frac{-m}{\log \lambda_{۱۰}}\right]$
۴) $\left[\frac{m}{\log \lambda_{۱۰}}\right]$

۸۳- حداقل و حداکثر تعداد ریشه‌های حقیقی معادله $x^{۲۰۱} - \alpha x + \beta = ۰$، که در آن $\alpha^۲ + \beta^۲ \neq ۰$، کدام است؟

۱) ۰ و ۲۰۱
۲) ۱ و ۲۰۱
۳) ۱ و ۵
۴) ۱ و ۳

۸۴- برای تعیین تقریبی از ریشه مضاعف معادله $f(x) = ۰$ کدام دنباله، با $x_۰$ مناسب، بهتر است؟ (از نظر پایداری عددی و سرعت همگرایی) (فرض کنید f'' وجود دارد.)

۱) $x_{n+۱} = x_n + ۲\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
۲) $x_{n+۱} = x_n - ۲\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
۳) $x_{n+۱} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
۴) $x_{n+۱} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$

۸۵- تابع f بر $[۰,۱]$ با ضابطه‌ی $f(x) = x\cos \pi x + \frac{۱}{۲}$ تعریف شده است و در این بازه فقط یک ریشه دارد. تکرار دوم روش دو بخشی (تنصیف) کدام است؟

۱) ۰/۲۵
۲) ۰/۵
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) ۰/۷۵

۸۶- برای تابع $f(x) = x^۴ - ۵x^۳ + ۶x^۲ + ۴x - ۸$ داریم: $f(۲) = ۰$، اگر $\{x_n\}$ دنباله حاصل از روش نیوتن بوده و به عدد ۲ همگرا باشد آنگاه:

۱) $\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{x_{n+۱} - ۲}{x_n - ۲}\right| = \frac{۱}{۳}$
۲) $\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{x_{n+۱} - ۲}{(x_n - ۲)^۳}\right| = \frac{۱}{۳}$
۳) $\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{x_{n+۱} - ۲}{x_n - ۲}\right| = \frac{۲}{۳}$
۴) $\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{x_{n+۱} - ۲}{(x_n - ۲)^۲}\right| = \frac{۲}{۳}$

۸۷- برای تعیین تقریبی از ریشه معادله $f(x)=0$ از روش تکراری زیر استفاده شده که $\lim_{n\to\infty} x_n=\alpha$ و $f(\alpha)=0$:

$$x_{n+1}=\frac{t x_n+x_n^{-2}+1}{t+1} \quad , \quad t\in R.$$

به ازای کدام مقدار t مرتبه همگرایی دنباله $\{x_n\}$ بیشترین است؟

۱) ۰
۲) ۱
۳) $\frac{2}{\alpha^2}$
۴) $\frac{2}{\alpha^3}$

۸۸- تابع $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x+\sin x)$ را با چه اندازه گام h بایستی جدول‌بندی نمود تا خطای حاصل از درون‌یابی قطعه‌ای خطی حداکثر برابر $\frac{1}{2}\times 10^{-4}$ گردد؟

۱) ۰/۰۱
۲) ۰/۰۱۵
۳) ۰/۰۲
۴) ۰/۰۳

۸۹- چند جمله‌ای $p_1(x)=1-2x$ تابع f را در نقاط $x_0=0$ و $x_1=1$ درونیابی می‌کند و چند جمله‌ای $p_2(x)=x-2$ تابع f را در نقاط $x_1=1$ و $x_2=2$ درونیابی می‌کند. کدام چند جمله‌ای تابع f را در نقاط ۰، ۱ و ۲ درونیابی می‌کند؟

۱) $1/5x^2-3/5x+1$
۲) $3/5x-1/5x^2+1$
۳) $\frac{3x^2+7x+2}{2}$
۴) $\frac{x^2-4x+2}{2}$

۹۰- تفاضلات تقسیم شده‌ی نیوتن برای تابع f مطابق جدول زیر است، جملات مجهول کدامند؟

x_i	f_i	$f[0,0]$	$f[0,0,0]$
۰	f_0		
		$f[x_0,x_1]$	
۰/۲	f_1		۱۰
		۷	
۰/۵	۳		

۱) $f[x_0,x_1]=-3$, $f_1=-4$, $f_0=-6$
۲) $f[x_0,x_1]=2$, $f_1=0/9$, $f_0=0/5$
۳) $f[x_0,x_1]=4$, $f_1=-0/5$, $f_0=-1/3$
۴) $f[x_0,x_1]=2$, $f_1=-4$, $f_0=-6$

۹۱- اگر $L_i(x)$, $i=0,1,...,4$ چند جمله‌ای‌های لاگرانژ تابع جدولی

x_i	۰	۱	۲	۳	۴
f_i	۰	۱	۴	۹	۱۴

باشند کدام گزینه درست است؟

۱) $L_3(x)+L_4(x)=L_0(x)+L_1(x)+L_2(x)$ برای $x\in[0,4]$.
۲) درجه چند جمله‌ای $L_0(x)+L_1(x)+L_2(x)+L_3(x)$ دقیقاً برابر ۴ است.
۳) درجه چند جمله‌ای $\sum_{i=0}^{4} L_i(x)$ حداقل ۲ است.
۴) درجه چند جمله‌ای $\prod_{i=0}^{4} L_i(x)$ برابر ۲۴ است.

۹۲- بهترین خط با معادله $y = a_0 + a_1 x$ که مناسب داده‌های (۰,۱)، (۱,۳)، (۳,۲) ، (۶,۵) و (۸ , ۴) باشد کدام است؟ (خط کمترین مربعات که ضرایب آن تا سه رقم اعشار منظور شوند.)

۱) $y = ۱/۵۳۱ + ۰/۳۶۱x$
۲) $y = ۱/۶۱۱ + ۰/۳۵۹x$
۳) $y = ۱/۶۴۶ + ۰/۳۷۶x$
۴) $y = ۱/۷۰۲ + ۰/۳۴۸x$

۹۳- تابع جدولی

x	x_0	x_1	x_2	x_3
f	f_0	f_1	f_2	f_3

داده شده است. کدام عبارت تقریبی برای $f'(x_1)$ با دقت بیشتر ارایه می‌کند؟ (نقاط جدول متساوی الفاصله با فاصله h هستند.)

۱) $\frac{f_2 - f_0}{h}$
۲) $\frac{4f_2 - f_3 - 3f_1}{2h}$
۳) $\frac{4f_2 - 2f_3 - 3f_1}{2h}$
۴) $\frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h}$

۹۴- پس از اجرای قاعده دو نقطه‌ای گاوس روی بازه‌های $[-2,0]$ و $[0,2]$ به دست آورده‌ایم:

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx \simeq \sum_{i=1}^{4} w_i f(x_i)$$

کدام گزینه درست است؟

۱) $\sum_{i=1}^{4} x_i = 0 \quad , \quad \sum_{i=1}^{4} w_i = 4$
۲) $\sum_{i=1}^{4} x_i = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \quad , \quad \sum_{i=1}^{4} w_i = 4$
۳) $\sum_{i=1}^{4} x_i = 2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \quad , \quad \sum_{i=1}^{4} w_i = 4$
۴) $\sum_{i=1}^{4} x_i = 0 \quad , \quad \sum_{i=1}^{4} w_i = 6$

۹۵- کدام گزینه تقریب بهتری برای $\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{1+x^2} dx$ است؟

۱) $\cosh(1)$
۲) $\frac{\cosh(1)}{2} + 1$
۳) $\frac{3}{2}\cosh\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
۴) $\frac{3}{4}\cosh\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

۹۶- فرمول انتگرال‌گیری زیر برای چند جمله‌ای‌های تا درجه چند دقیق است؟

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{12}\left(f(a) + 4f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 4f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + f(b)\right)$$

۱) درجه یک
۲) درجه دو
۳) درجه سه
۴) درجه چهار

۹۷- روش نقطه میانی برای تخمین انتگرال $I=\int_a^b f(x)dx$ به صورت $Q_1=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ نوشته می‌شود. روش نقطه میانی مرکب روی دو زیر بازه برابر از بازه $[a,b]$ به صورت $Q_2=\ldots$ است.

۱) $\frac{b-a}{2}\left(f\left(\frac{a+3b}{4}\right)+f\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right)$

۲) $\frac{b-a}{2}\left(f\left(\frac{a+3b}{4}\right)+f\left(\frac{3(a+b)}{4}\right)\right)$

۳) $(b-a)\left(f\left(\frac{a+3b}{4}\right)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right)$

۴) $(b-a)\left(f\left(\frac{a+b}{4}\right)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{3(a+b)}{4}\right)\right)$

۹۸- فرض کنید $f(h)$ تقریبی از مرتبهٔ n برای L باشد یعنی $m>n$ $L=f(h)+ch^n+o(h^m)$ همچنین فرض کنیم $h_L>h$ و $r=\frac{h_L}{h}$ ، اگر از برونیابی ریچاردسون جهت استخراج $f_1(h)$ به عنوان تقریب بهتری از L استفاده کنیم آنگاه $f_1(h)$ عبارت است از:

۱) $f_1(h)=\frac{r^nf(h)-f(rh)}{r^n-1}$

۲) $f_1(h)=\frac{f(h)-r^nf(rh)}{r^n-1}$

۳) $f_1(h)=\frac{rf(h)-f(rh)}{r^n-1}$

۴) $f_1(h)=\frac{f(h)-rf(rh)}{r^n-1}$

۹۹- در معادله‌ی تفاضلی $y_n=\frac{y_{n-1}^3}{y_{n-2}^2}$ با استفاده از تغییر متغیر $y_n=e^{Z_n}$ و شرایط $y_1=e$ و $y_0=1$ ، y_n عبارتست از:

۱) $y_n=2^n-1$

۲) $y_n=1-2^n$

۳) $y_n=\exp(1-2^n)$

۴) $y_n=\exp(2^n-1)$

۱۰۰- با استفاده از روش تیلور مرتبه دوّم مقدار تقریبی $y_1\approx y(h)$ برای معادله دیفرانسیل $\begin{cases}y'=2+2x^2-y\\y(0)=1\end{cases}$ عبارتست از:

۱) $1-h-\frac{h^2}{2}$

۲) $1+h-\frac{h^2}{2}$

۳) $1+2h-\frac{h^2}{4}$

۴) $1-h-\frac{h^2}{4}$

۱۰۱ ـ اگر V یک فضای برداری با بعد $n \geq ۴$ روی یک میدان باشد و $W_۱$ و $W_۲$ زیر فضاهای V به ترتیب با بعد $n-۱$ و $n-۲$ به طوری که $W_۲ \not\subseteq W_۱$، آنگاه $\dim(W_۱ \cap W_۲)$ برابر است با:

۱) $n-۴$ ۲) $n-۳$ ۳) $n-۲$ ۴) $n-۱$

---

۱۰۲ ـ فرض کنیم V فضای برداری ماتریس‌های $n \times m$ با درایه‌های مختلط باشد. در این صورت بعد V روی میدان اعداد حقیقی کدام است؟

۱) nm ۲) $۲nm$ ۳) $(nm)^۲$ ۴) نامتناهی

---

۱۰۳ ـ فرض کنید A یک ماتریس مربعی حقیقی خود توان باشد. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

۱) A وارون‌پذیر است.
۲) A دارای چند جمله‌ای‌های مینیمال و مشخصه یکسان است.
۳) A قطری شدنی است.
۴) A دارای چند جمله‌ای‌های مینیمال و مشخصه متفاوت است.

---

۱۰۴ ـ کدام یک از چند جمله‌ای‌های زیر، می‌تواند چند جمله‌ای مینیمال یک عملگر قطری شدنی حقیقی باشد؟

۱) $x^۳ - x$ ۲) $x^۳ + x$ ۳) $x^۲ + ۲x + ۱$ ۴) $x^۳ + ۲x^۲ + x$

---

۱۰۵ ـ تعداد ماتریس‌های مقدماتی سطری ۲×۲ روی میدان $\mathbb{Z}_۷$ عبارت است از:

۱) ۲۴ ۲) ۲۵ ۳) ۲۶ ۴) ۲۸

---

۱۰۶ ـ فرض کنید A یک ماتریس حقیقی ۴×۶ و B یک ماتریس حقیقی ۶×۴ است. در این صورت ماتریس AB دارای کدام خاصیت است؟

۱) وارونپذیر نیست.
۲) وارونپذیر است.
۳) سطرهای مستقل خطی دارد.
۴) هیچگاه نمی‌تواند مساوی BA باشد.

---

۱۰۷ ـ فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ حقیقی پوچتوان باشد. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

۱) چند جمله‌ای مینیمال $۲I + A$، چند جمله‌ای مینیمال A را می‌شمارد.
۲) ماتریس $۲I + A$، لزوماً خود توان است.
۳) ماتریس $۲I + A$، لزوماً وارونپذیر نیست..
۴) چند جمله‌ای مشخصه $۲I + A$، $(x-۲)^n$ می‌باشد.

---

۱۰۸ ـ فرض کنید $A = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix}$. در این صورت زیر فضاهای $\mathbb{R}^۲$ روی میدان $\mathbb{R}$ که تحت A پایا هستند کدام هستند؟

۱) $\mathbb{R}^۲, (۰)$
۲) (۰) و محور xها
۳) $\mathbb{R}^۲$ و محور yها
۴) $\mathbb{R}^۲, (۰)$ و محورهای مختصات

---

۱۰۹ ـ فرض کنید چند جمله‌ای مشخصه ماتریس A ، $f(x) = x^۶ - ۴x^۴ - x^۳ + ۲x^۲ - ۲x + ۲$ باشد. در این صورت دترمینان ماتریس A برابر است با:

۱) -۴ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۴

---

۱۱۰ ـ فرض کنید $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & \cdots & ۱ \\ ۲ & ۲ & \cdots & ۲ \\ \vdots & & & \\ n & n & \cdots & n \end{bmatrix}$ در این صورت $tr(AA^t)$ برابر است با:

۱) $\frac{n(n+۱)}{۲}$ ۲) $\frac{n^۲(n+۱)}{۲}$ ۳) $\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$ ۴) $\frac{n^۲(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$

---

۱۱۱ ـ فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی روی میدان F باشد. فرض کنیم T یک عملگر خطی روی V باشد. کدام یک از احکام زیر همواره درست است؟

۱) صفر مقدار ویژهٔ T است اگر و فقط اگر T معکوس‌پذیر باشد.

۲) اگر $\alpha \in V$ یک بردار ویژهٔ T باشد، در این صورت حداقل یک عدد طبیعی n موجود است به طوری که α یک بردار ویژهٔ T^n نخواهد بود.

۳) اگر T معکوس‌پذیر باشد، در این صورت $\lambda \in F$ یک مقدار ویژهٔ T است اگر و فقط اگر λ یک مقدار ویژهٔ $T^{-۱}$ باشد.

۴) اگر هر بردار غیر صفر V یک بردار ویژهٔ T باشد، آنگاه T عملگر اسکالر است.

---

۱۱۲ ـ فرض کنید V فضای برداری متناهی البعد روی میدان F و $W_۱$ و $W_۲$ زیر فضاهای V باشند. کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

(جائی که برای یک زیر مجموعه X از V، $X^\circ = \{f \in V^\circ = Hom(V,F) | f(X) = \{۰\}\}$)

۱) اگر $W_۱^\circ = W_۲^\circ$ آنگاه $W_۱ = W_۲$ ۲) $(W_۱ \cap W_۲)^\circ = W_۱^\circ + W_۲^\circ$

۳) $(W_۱ \cup W_۲)^\circ = W_۱^\circ + W_۲^\circ$ ۴) $(W_۱ + W_۲)^\circ = W_۱^\circ \cap W_۲^\circ$

---

۱۱۳ ـ فرض کنید T عملگر خطی روی $\mathbb{R}^n$ به قسمی باشد که $Im(T) \subseteq Ker(T)$. در این صورت $tr(I-T)$ برابر است با:

۱) $-n$ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) n

---

۱۱۴ ـ فرض کنید T تبدیل خطی از ماتریس‌های $n \times n$ حقیقی به میدان اعداد حقیقی، با ضابطه $T(A) = trA$ در این صورت:

۱) پوچی $T = ۱$ ، رتبه $T = n^۲ - ۱$ ۲) پوچی $T = ۰$ ، رتبه $T = n^۲$

۳) پوچی $T = ۱$ ، رتبه $T = n - ۱$ ۴) پوچی $T = n^۲$ ، رتبه $T = ۰$

---

۱۱۵ ـ فرض کنید T ماتریسی پوچتوان $n \times n$ با درایه‌های حقیقی باشد به طوری که با ماتریس $n \times n$ حقیقی S که n مقدار ویژه متمایز دارد، جابه‌جا می‌شود. در این صورت:

۱) T تنها ماتریس صفر می‌تواند باشد.

۲) بردار ویژه‌ای از S وجود دارد که بردار ویژه T نمی‌باشد.

۳) به غیر از ماتریس صفر، ماتریس‌های پوچتوان دیگری هم با S جابه‌جا می‌شوند.

۴) تنها دو ماتریس وجود دارند که پوچ توان هستند و با S جابه‌جا می‌شوند.

---

۱۱۶ ـ فرض کنیم W زیر فضای سره ناصفر V و T عملگر خطی روی V به قسمی باشد که $T(\alpha) = ۰$ به ازای همه $\alpha \in V$ و $\alpha \notin W$. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

۱) T پوچ توان نیست. ۲) $T = ۰$

۳) T خود توان است ولی لزوماً عملگر صفر نیست. ۴) $I + T$ خود توان غیر همانی است.

---

۱۱۷ ـ کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

۱) ماتریس الحاقی هر ماتریس قطری لزوماً یک ماتریس قطری نیست.

۲) اگر A ماتریسی وارونپذیر حقیقی و متقارن باشد، ماتریس الحاقی A لزوماً متقارن نیست.

۳) اگر A ماتریسی وارونپذیر حقیقی و پادمتقارن باشد، ماتریس الحاقی A نیز پاد متقارن است.

۴) اگر A ماتریسی 3×3 با دترمینان ناصفر باشد، آنگاه $|adj(adj(A))| = |A|^3$، $adj(A)$ ماتریس الحاقی A و $|A|$ ، دترمینان A است.

---

۱۱۸ ـ کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

۱) در هر پایه برای فضای برداری ماتریس‌های 2×2 حقیقی، لزوماً یک ماتریس غیر وارونپذیر وجود دارد.

۲) پایه‌ای برای فضای برداری ماتریس‌های 2×2 حقیقی وجود دارد که عناصر آن دو به دو با هم جا به جا می‌شوند.

۳) پایه‌ای برای فضای برداری ماتریس‌های 2×2 حقیقی وجود دارد که عناصر آن همگی پوچتوانند.

۴) پایه‌ای برای فضای برداری ماتریس‌های 2×2 حقیقی وجود دارد که عناصر آن همگی خود توانند.

---

۱۱۹ ـ همه گزاره‌های زیر صحیح‌اند به جز:

۱) مجموعه همه ماتریس‌های قطری حقیقی $n \times n$ یک فضای برداری است.

۲) مجموعه همه ماتریس‌های وارون ناپذیر حقیقی $n \times n$ یک فضای برداری است.

۳) مجموعه همه ماتریس‌های پاد متقارن حقیقی $n \times n$ یک فضای برداری است.

۴) مجموعه همه ماتریس‌های اسکالر حقیقی $n \times n$ یک فضای برداری است.

---

۱۲۰ ـ فرض کنید n عددی صحیح و مثبت و V فضای تمام چند جمله‌ای‌های حقیقی از درجه حداکثر n باشد. اگر D عملگر مشتق روی V باشد، چند جمله‌ای مینیمال D چیست؟

۱) $x^n - 1$ ۲) $x^n - x^{n-1}$ ۳) x^n ۴) x^{n+1}