736E

736

E

نام :

نام خانوادگی:

محل امضاء :

اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.

امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فنّاوری
سازمان سنجش آموزش کشور

آزمون دانش‌پذیری دوره‌های فراگیر «کارشناسی ارشد» دانشگاه پیام نور

رشته‌ی ریاضی محض گرایش‌های
آنالیز (کد ۱۶۲)، جبر (کد ۱۶۳) و هندسه (کد ۱۶۴)

تعداد سؤال: ۶۰ — مدت پاسخگویی: ۱۲۰ دقیقه

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	آنالیز حقیقی (۱)	۳۰	۱	۳۰
۲	جبر پیشرفته	۳۰	۳۱	۶۰

آذر ماه سال ۱۳۹۱

استفاده از ماشین حساب مجاز نمی‌باشد.

۱- کدام گزینه نادرست است؟

۱) $e^{\frac{\pi i}{۲}} = i$

۲) exp ، تابع متناوب با دوره تناوب $۲\pi i$ است.

۳) تحدید exp به محور حقیقی یک تابع مثبت و صعودی است.

۴) نگاشت e^{it}، محور حقیقی را به خارج دایره یکه می‌نگارد.

۲- $f: U \to W$ ، اندازه‌پذیر است اگر به ازای هر مجموعه باز V در .... مجموعه اندازه‌پذیر باشد.(U فضای اندازه‌پذیر و W توپولوژیک است.)

۱) $f^{-۱}(V), W$ در U ۲) $f^{-۱}(V^c), W$ در U ۳) $f(V)$ ،U در W ۴) $f(V^c), U$ در W

۳- اگر $f: X \to Y$ اندازه‌پذیر و $g: Y \to Z$ پیوسته باشد. X اندازه‌پذیر، Z و Y فضاهای توپولوژیک باشد. کدام یک از احکام زیر برای gof درست است؟

۱) پیوسته ۲) اندازه‌پذیر

۳) پیوسته است و ممکن است اندازه‌پذیر نباشد. ۴) ممکن است پیوسته و اندازه‌پذیر نباشد.

۴- $f: X \to [۰,\infty]$ و $g: X \to [۲,\infty]$، اندازه‌پذیر باشد و $\varphi(E) = \int_E f d\mu$ بر σــ جبر شامل E تعریف شده باشد.

$\int_X g d\varphi$ ، همواره با کدام یک از موارد زیر برابر است؟

۱) $\int_E f d\mu$ ۲) $\int_X f d\mu$ ۳) $\int_X gf d\mu$ ۴) $\int_E gf d\mu$

۵- اگر $f: X \to [۰,\infty]$ اندازه‌پذیر و μ یک اندازه مثبت بر X و $\int_X f d\mu = a \quad (۰ < a < \infty)$ باشد، حاصل

$\lim_{n\to\infty} \int n \log[۱ + (\sqrt{\frac{f}{n}})^۲] d\mu$ کدام است؟

۱) صفر ۲) a ۳) $\frac{۱}{۲}a$ ۴) ۲a

۶- برای کدام مقدار r ، مجموعه‌ی $\{x : f(x) \geq r\}$ اندازه‌پذیر باشد تا همواره بتوان نتیجه گرفت بر فضای اندازه‌پذیر X ، تابع حقیقی f، اندازه‌پذیر است؟

۱) $r \neq ۰$ ۲) $r > ۰$ ۳) $r \geq ۰$ ۴) به ازای جمیع مقادیر گویای r

۷- $f_n : X \to [۰,\infty]$ و برای هر $x \in X$ ، وقتی $n \to \infty$ ، $f_n(x) \to f(x)$ و $f_n \geq f_{n+۱} \geq ۰$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر تودرتو باشد، $f_۱$ با کدام شرط، تساوی $\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$ را ایجاب می‌کند؟

۱) محدب ۲) ناپیوسته ۳) $f_۱ \in L^۱(\mu)$ ۴) $f_۱ \in C(X)$

۸- کدام یک از احکام زیر نادرست است؟

۱) اگر g اندازه‌پذیر باشد، نگاشت $f \to \int fg d\mu$ یک تابع خطی بر $L^۱(\mu)$ است.

۲) مجموعه تمام توابع پیوسته بر بازه بسته $[۰,۱]$، یک فضای برداری است.

۳) نگاشت $f \to \int f d\mu$ ، یک تابع خطی بر $L^۱(\mu)$ است.

۴) $L^۱(\mu)$، به ازای هر اندازه مثبت یک فضای برداری است.

۹- X یک فضای هاسدورف σ ـ فشرده به طور موضعی فشرده و E متعلق به σ ـ جبر شامل تمام مجموعه‌های بورل در X و برای هر $\varepsilon > 0$، یک مجموعه بسته F و یک مجموعه باز G موجود باشد به طوری که $F \subset E \subset G$ و $\mu(G - F) < \varepsilon$ باشد، کدام در مورد μ درست است؟

۱) اندازه بورل منتظم
۲) اندازه بورل منتظم داخلی نیست.
۳) اندازه بورل منتظم خارجی نیست.
۴) اندازه بورل نیست.

۱۰- X فضای هاسدورف به طور موضعی فشرده که هر مجموعه باز در آن σ ـ فشرده و برای هر مجموعه فشرده K، $\mu(K) < \infty$ است، در مورد اندازه مثبت μ کدام گزینه درست است؟

۱) منتظم
۲) اندازه بورل
۳) فقط منتظم داخلی
۴) فقط منتظم خارجی

۱۱- اندازه‌ی بورل، اندازه‌ی تعریف شده بر σ ـ جبر تمام .... در .... است.

۱) تمام توابع پیوسته ـ فضای هاسدورف فشرده X
۲) تمام توابع پیوسته ـ فضای هاسدورف به طور موضعی فشرده X
۳) تمام مجموعه‌های بورل ـ فضای هاسدورف به طور موضعی فشرده X
۴) تمام مجموعه‌های بورل ـ فضای به طور موضعی فشرده X

۱۲- کدام یک از احکام زیر درست است؟

۱) هر زیر مجموعه از R^k ، اندازه‌پذیر لبگ است.
۲) هر مجموعه اندازه‌پذیر لبگ، یک مجموعه بورل است.
۳) هر مجموعه اندازه مثبت، زیر مجموعه‌ای شمارش ناپذیر دارد.
۴) $A \subset R$ و هر زیر مجموعه A اندازه‌پذیر لبگ باشد اندازه لبگ A، مخالف صفر است.

۱۳- μ اندازه بورل منتظم بر فضای هاسدورف فشرده X و $\mu(X) = 1$ و بر مجموعه فشرده $K \subset X$ ، $\mu(K) = 1$ است. اگر H زیر مجموعه‌ی فشرده و حقیقی از K باشد. $\mu(H)$ کدام است؟

۱) $\mu(H) = 1$
۲) $\mu(H) > 1$
۳) $\mu(H) < \infty$
۴) $\mu(H) < 1$

۱۴- اگر $1 < p < \infty$, $f \in L^p((0,\infty))$ نسبت به اندازه لبگ و $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$ باشد، کدام نامساوی، درست است؟

۱) $\|F\|_3 \le \frac{3}{7}\|f\|_3$
۲) $\|F\|_3 \le \frac{3}{2}\|f\|_3$
۳) $\|F\|_5 \le \frac{7}{11}\|f\|_5$
۴) $\|F\|_5 \le \frac{5}{9}\|f\|_5$

۱۵- اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر و در X، نقطه به نقطه همگرا و $\mu(X) < \infty$ باشد. کدام زیر مجموعه از X همواره وجود دارد که $\{f_n\}$ به طور یکنواخت بر آن همگرا است؟

۱) شمارش پذیر
۲) ناشمارا
۳) نامتناهی
۴) مجموعه توانی X

۱۶- کدام گزینه در مورد $L^p(\mu)$ ، همواره درست است؟

۱) به ازای $P < 1$ و هر اندازه مثبت μ ، تام است.
۲) به ازای $P < 1$ و هر اندازه بورل، تام است.
۳) به ازای $1 \le p < \infty$ و هر اندازه بورل ، تام است.
۴) به ازای $1 \le p \le \infty$ و هر اندازه مثبت μ، تام است.

۱۷- μ یک اندازه مثبت و $f,g \in L^p(\mu)$ باشد. نامساوی $\int \left| |f|^p - |g|^p \right| d\mu \le \int |f-g|^p d\mu$ ، برای کدام مقدار p برقرار است؟

۱) ۱
۲) $\frac{1}{2}$
۳) ۲
۴) $\frac{3}{2}$

۱۸- اگر $\{f_n\}$ ، دنباله‌ی کشی با حد $f(x)$ در $L^p(\mu)$ باشد. همواره ....

۱) زیر دنباله‌ای دارد که به طور یکنواخت به $f(x)$ همگراست.
۲) زیر دنباله‌های آن به طور یکنواخت به $f(x)$ همگراست.
۳) زیر دنباله‌ای دارد که تقریباً همه جا نقطه به نقطه به $f(x)$ همگراست.
۴) زیر دنباله‌های آن تقریباً همه جا نقطه به نقطه به $f(x)$ همگراست.

۱۹- فضای متری H، فضای هیلبرت است اگر ....

۱) هر دنباله در H، کشی باشد.
۲) هر دنباله یکنوا در H، کشی باشد.
۳) هر دنباله کشی در H ، در آن همگرا باشد.
۴) هر دنباله کشی در H ، زیر دنباله‌ای کراندار داشته باشد.

۲۰- کدام یک از موارد زیر، در مورد فضای برداری تمام توابع مختلط پیوسته بر $[0,1]$ با $(f,g)=\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$ ، درست است؟

۱) فضای ضرب داخلی و فضای هیلبرت است.
۲) فضای ضرب داخلی است ولی فضای هیلبرت نیست.
۳) فضای ضرب داخلی و فضای هیلبرت نیست.
۴) فضای ضرب داخلی نیست ولی فضای هیلبرت است.

۲۱- از نگاشت‌های $x \to (x,y)$ ، $x \to (y,x)$ و $x \to \|x\|$ ، به ازای هر $y \in H$، چند نگاشت بر فضای هیلبرت H، توابع پیوسته می‌باشند؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۲۲- اگر $n=m$ باشد. حاصل $I=\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t}dt$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) $\sqrt{\pi}$
۴) 2π

۲۳- کدام جدایی‌پذیر است؟

۱) $L^\infty(T)$
۲) $L^1(T)$
۳) هیلبرت
۴) مکعب هیلبرت

۲۴- اگر L تابع خطی پیوسته بر فضای هیلبرت H و $M=\{x: Lx=0\}$ باشد، کدام در مورد $M^\perp$ ، درست است؟

۱) یک فضای برداری با بعد یک و $M \neq H$ است.
۲) یک فضای برداری با بعد یک و $M=H$ است.
۳) یک فضای برداری با بعد نامتناهی و $M \neq H$ است.
۴) یک فضای برداری با بعد صفر و $M \neq H$ است.

۲۵- X و Y دو فضای خطی نرمدار و تبدیل خطی $\Lambda: X \to Y$ با نرم $|\Lambda|=\sup\{\|\Lambda\|: \|x\|<1, x\in X\}$ باشد. کدام یک از موارد زیر، دیگر موارد را ایجاب نمی‌کند؟

۱) Λ یکنواست.
۲) Λ کراندار است.
۳) Λ پیوسته است.
۴) Λ در یک نقطه از X پیوسته است.

۲۶- اگر f تابعی بر زیر فضایی از فضای خطی نرمدار X و f را به یک تابع خطی کراندار مانند F بر X چنان توسیع داده‌ایم که $\|f\|=\|F\|$ باشد، تابع f کدام است؟

۱) پیوسته
۲) کراندار
۳) خطی کراندار
۴) پیوسته یکنواخت

۲۷- اگر V یک فضای خطی نرمدار مختلط و $f(x)=u(x)-iu(ix)$ و u قسمت حقیقی تابع خطی ـ مختلط f بر V باشد، کدام یک از موارد زیر درست است؟

۱) $\|f\|=\|u\|+\|x\|$
۲) $\|f\|=\|u\|$
۳) $\|f\|=\|u\|+i\|x\|$
۴) $\|f\|=\|u\|-i\|x\|$

۲۸- تابع خطی کراندار f بر زیر فضای M از فضای هیلبرت H و تابع خطی کراندار F ، توسیع نرم نگهدار f بر H است. کدام یک در مورد F بر $M^\perp$ درست است؟

۱) H
۲) M^*
۳) مخالف صفر
۴) صفر

۲۹- اگر $f,g \in L^{2}(\mu)$ ، $\|f\|_2=\|g\|_2=1$ ، f و g متمایز و $h=\frac{f+g}{2}$ باشد. کدام در مورد $L^{2}(\mu)$ و $\|h\|_2$ درست است؟

۱) اکیداً محدب و $\|h\|_2<1$

۲) اکیداً محدب و $\|h\|_2>1$

۳) محدب، $\|h\|_2>1$

۴) محدب نیست ، $\|h\|_2<1$

۳۰- M مجموعه‌ی تمام $f \in L^{1}([0,1])$ نسبت به اندازه لبگ و $\int_0^1 f(t)dt=1$ است، کدام در مورد M درست است؟

۱) باز و محدب

۲) بسته و محدب

۳) باز ولی محدب نیست.

۴) بسته ولی محدب نیست.

۳۱- فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی و I ایده‌آلی از R باشد. در این صورت به ازای هر $a+I \in Z(\frac{R}{I})$،

۱) عدد صحیح m وجود دارد به طوری که $a^m \in I$.
۲) به ازای هر عدد صحیح m، $a^m \in I$.
۳) عدد صحیح m وجود دارد به طوری که $a^m = 0$.
۴) به ازای هر عدد صحیح m، $a^m = 0$.

۳۲- فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی و Q یک ایده‌آل P- ابتدایی (اولیه) از R و $a \in R$ باشد. در این صورت:

۱) اگر $a \notin P$ آنگاه $(Q:a) = P$.
۲) اگر $a \notin P$ آنگاه $\sqrt{(Q:a)} = P$.
۳) اگر $a \notin P$ آنگاه $(P:a) = Q$.
۴) اگر $a \notin Q$ آنگاه $(Q:a) = P$.

۳۳- فرض کنید R یک حلقه جابجایی نوتری با تنها ایده‌آل ماکسیمال m و M یک R- مدول باشد. در این صورت:

۱) اگر $M \neq 0$ آنگاه $Ass(M) = \{m\}$.
۲) اگر M آرتینی باشد آنگاه $Ass(M) = \{m\}$
۳) اگر $M \neq 0$ آرتینی باشد آنگاه $Ass(M) = \{m\}$
۴) اگر M آریتنی و به طور متناهی تولید شده باشد آنگاه $Ass(M) = \{m\}$

۳۴- فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی و Q یک ایده‌آل R باشد به طوری که $P = \sqrt{Q}$ یک ایده‌آل اول R باشد. در این صورت کدام یک از موارد زیر درست است؟

۱) Q دارای بی‌شمار ایده‌آل اول می‌نیمال است.
۲) Q ایده‌آل P- ابتدایی (اولیه) است.
۳) P ایده‌آل Q - ابتدایی (اولیه) است.
۴) P تنها ایده‌آل اول می‌نیمال Q است.

۳۵- فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی و $M' \to M \to M''$ رشته دقیقی (دنباله کاملی) از R- مدول‌ها و R- همریختی‌ها باشد. در این صورت:

۱) $Supp(M) \subseteq Supp(M') \bigcup Supp(M'')$
۲) $Supp(M) = Supp(M') \bigcup Supp(M'')$
۳) $Supp(M) = Supp(M') \bigcap Supp(M'')$
۴) $Supp(M') \subseteq Supp(M)$

۳۶- فرض کنید R یک حلقه جابجایی و S یک زیرمجموعه بسته ضربی از R باشد. کدام گزینه در رابطه با همریختی طبیعی $f: R \to S^{-1}R$ درست است؟

۱) f همواره یک به یک است.
۲) f همواره پوشا است.
۳) اگر $S \subseteq R \setminus Z(R)$ آنگاه f پوشا است.
۴) اگر $S \subseteq R \setminus Z(R)$ آنگاه f یک به یک است.

۳۷- فرض کنید R یک حلقه جابجایی نوتری و M یک R- مدول باشد. در این صورت:

۱) اگر $P \in Ass(M)$ آنگاه $P \subseteq Ann_R(M)$.
۲) اگر $P \in Ass(M)$ آنگاه عنصر $m \in M$ وجود دارد به طوری که $Ass(Rm) = \{P\}$.
۳) اگر $P \in Supp(M)$ آنگاه عنصر $m \in M$ وجود دارد به طوری که $P = (0 \underset{R}{:} m)$.
۴) اگر $P \in Ass(M)$ آنگاه به ازای هر $m \in M$ داریم $P = (0 \underset{R}{:} m)$.

۳۸- فرض کنید G یک مدول روی حلقه جابجایی R باشد. در این صورت:

۱) اگر $p \in Supp(G)$ آنگاه $G_P = 0$.
۲) اگر $p \in Supp(G)$ آنگاه $Ann_R(G) \supseteq p$.
۳) اگر G به طور متناهی تولید شده و $Ann_R(G) \subseteq p$ آنگاه $p \in Supp(G)$.
۴) اگر $Ann_R(G) \subseteq p$ آنگاه $p \in Supp(G)$.

۳۹- **فرض کنید R یک حلقه جابجایی ، M یک R– مدول و N زیر مدولی از M باشد. در این صورت:**

۱) اگر M آزاد باشد آنگاه N نیز آزاد است.

۲) اگر M آزاد باشد آنگاه $\frac{M}{N}$ نیز آزاد است.

۳) اگر M به طور متناهی تولید شده باشد آنگاه N نیز به طور متناهی تولید شده است.

۴) اگر R حوزه ایده‌آل اصلی و M به طور متناهی تولید شده باشد آنگاه N نیز به طور متناهی تولید شده است.

۴۰- **فرض کنید R یک حلقه جابجایی و P ایده‌آل اولی از R باشد. در این صورت هر ایده‌آل اول R_P به فرم QR_P است که در آن:**

۱) Q ایده‌آل اولی از R است که $Q \subseteq P$.

۲) Q ایده‌آل اولی از R است که $P \subseteq Q$.

۳) Q ایده‌آل سره‌ای از R است که $Q \subseteq P$.

۴) Q ایده‌آل سره‌ای از R است که $P \subseteq Q$.

۴۱- **فرض کنید R یک حلقه یکدار باشد. کدام گزینه در مورد یک مدول آزاد درست است؟**

۱) هر مجموعه مولد برای یک مدول آزاد شامل یک پایه برای آن مدول است.

۲) اگر R جابجایی باشد، آنگاه هر دو پایه متناهی برای یک مدول آزاد روی R ، دارای عدد اصلی یکسان هستند.

۳) هر فضای برداری روی میدان R ، به عنوان یک R– مدول آزاد، دارای بعد متناهی است.

۴) هر R– مدول مانند M، تصویر یک مدول آزاد به طور متناهی تولید شده مانند F است.

۴۲- **فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی و S یک زیرمجموعه بسته ضربی از R باشد. e و c را برای همریختی طبیعی $f : R \to S^{-1}R$ به کار گیرید. در این صورت:**

۱) اگر $p \in Spec(R)$ آنگاه $p^{ec} = p$.

۲) اگر $p \in Spec(R)$ آنگاه $p^e \in Spec(R)$.

۳) اگر $Q \in Spec(S^{-1}R)$ آنگاه $Q^c \in Spec(R)$ و $Q^{ce} = Q$.

۴) اگر $p \in Spec(R)$ و $P \cap S \neq \phi$ آنگاه $p^e = S^{-1}R$.

۴۳- **فرض کنید m و n اعداد صحیح مثبت باشند و d بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک (m,n) و c کوچکترین مضرب مشترک (m,n) باشد. در این صورت:**

۱) $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}$

۲) $\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_c$

۳) $\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{mn}$

۴) $\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_d$

۴۴- **فرض کنید R یک حلقه یکدار و I و J دو ایده‌آل حلقهٔ R باشند. در این صورت $\frac{R}{I} \otimes_R \frac{R}{J}$ با کدام یک از R– مدول‌های زیر یکریخت است؟**

۱) $\frac{R}{I+J}$

۲) $\frac{R}{IJ}$

۳) $\frac{R}{I \cap J}$

۴) $\frac{IJ}{I \cap J}$

۴۵- **فرض کنید R یک حلقه و P یک R– مدول باشد. در این صورت P تصویری است اگر و فقط اگر به ازای هر همریختی پوشای $g \in Hom_R(A,B)$، همریختی القایی ....**

۱) $\bar{g} : Hom_R(P,A) \to Hom_R(P,B)$ یک به یک باشد.

۲) $\bar{g} : Hom_R(P,A) \to Hom_R(P,B)$ پوشا باشد.

۳) $\bar{g} : Hom_R(B,P) \to Hom_R(A,P)$ یک به یک باشد.

۴) $\bar{g} : Hom_R(B,P) \to Hom_R(A,P)$ پوشا باشد.

۴۶- فرض کنید R یک حلقه و J یک R مدول باشد. J یک مدول انژکتیو روی R است اگر و فقط اگر به ازای هر رشته دقیق (دنباله کامل) کوتاه $\circ \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to \circ$ رشته القایی ....

۱) $\circ \to Hom_R(J,A) \xrightarrow{\bar{f}} Hom_R(J,B) \xrightarrow{\bar{g}} Hom_R(J,C) \to \circ$ دقیق باشد.

۲) $\circ \to Hom_R(A,J) \xrightarrow{\bar{f}} Hom_R(B,J) \xrightarrow{\bar{g}} Hom_R(C,J) \to \circ$ دقیق باشد.

۳) $\circ \to Hom_R(C,J) \xrightarrow{\bar{g}} Hom_R(B,J) \xrightarrow{\bar{f}} Hom_R(A,J) \to \circ$ دقیق باشد.

۴) $\circ \to Hom_R(J,C) \xrightarrow{\bar{g}} Hom_R(J,B) \xrightarrow{\bar{f}} Hom_R(J,A) \to \circ$ دقیق باشد.

۴۷- فرض کنید R یک حلقه باشد. در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱) هر $\mathbb{Z}$ − مدول را می‌توان در یک $\mathbb{Z}$ − مدول بخشپذیر نشانید.

۲) هر R- مدول را می‌توان در یک R - مدول نشانید.

۳) هر گروه را می‌توان در یک گروه آبلی بخشپذیر نشانید.

۴) هر گروه را می‌توان در یک گروه آبلی انژکتیو نشانید.

۴۸- فرض کنید R یک حلقه جابجایی، M و N دو R−مدول و I و J ایده‌آل‌هایی از R، باشند. در این صورت:

۱) اگر $\frac{R}{I} \otimes_R M = \circ$ آنگاه $M = \circ$.

۲) اگر $M \otimes_R N = \circ$ آنگاه $M = \circ$ و $N = \circ$.

۳) اگر $M \otimes_R N = \circ$ آنگاه $M = \circ$ یا $N = \circ$.

۴) اگر $\frac{R}{J} \otimes_R \frac{R}{I} = \circ$ آنگاه $I = R$ یا $J = R$.

۴۹- کدام گزینه در مورد $\mathbb{Q}$، اعداد گویا، درست است؟

۱) $\mathbb{Q}$ یک $\mathbb{Z}$ − مدول تصویری است.

۲) $\mathbb{Q}$ یک $\mathbb{Z}$ − مدول بخش‌پذیر است.

۳) $\mathbb{Q}$ یک $\mathbb{Z}$ − مدول آزاد است.

۴) $\mathbb{Q}$ یک $\mathbb{Z}$ − مدول به طور متناهی تولید شده است.

۵۰- فرض کنید m و n اعداد صحیح مثبت و d بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک (m,n) و c کوچکترین مضرب مشترک (m,n) باشند. در این صورت:

۱) $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_m$

۲) $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_c$

۳) $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_d$

۴) $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_{mn}$

۵۱- فرض کنید n عددی صحیح مثبت باشد. کدام گزینه با $\mathbb{Z}$ − مدول $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ یکریخت است؟

۱) $\mathbb{Z}$ − مدول صفر

۲) $\mathbb{Z}$ −مدول $\mathbb{Z}_n$

۳) $\mathbb{Z}$ −مدول $\mathbb{Z}$

۴) $\mathbb{Z}$ − مدول $\mathbb{Q}$

۵۲- کدام گزینه در مورد مدول‌های تصویری درست است؟

۱) هر مدول تصویری دارای یک جمعوند آزاد است.

۲) هر مدول آزاد F روی حلقه یکدار R تصویری است.

۳) هر مدول تصویری P روی حلقه یکدار R آزاد است.

۴) اگر هر رشته دقیق (دنباله کامل) کوتاه $\circ \to P \to B \to C \to \circ$ دقیق تجزیه باشد آنگاه P تصویری است.

۵۳- فرض کنید R یک حلقه یکدار باشد. کدام گزینه بر R− مدول‌های یکانی درست است؟ (در زیر J یک R− مدول یکانی است.)

۱) اگر J جمعوند زیر مدولی از خود باشد، آنگاه J انژکتیو است.

۲) اگر J انژکتیو باشد آنگاه زیر مدولی مانند B از J وجود دارد به طوری که J جمعوند مستقیم B است.

۳) اگر J انژکتیو باشد آنگاه به ازای هر زیر مدول B از J ، J جمعوند مستقیم B است.

۴) به ازای هر R− مدول B که $J \subseteq B$، اگر J جمعوند مستقیم B باشد آنگاه J انژکیتو است.

۵۴- فرض کنید A، B، $\{A_i\}_{i\in I}$ و $\{B_j\}_{j\in J}$ مدول‌هایی روی حلقه R باشند. در این صورت به عنوان $\mathbb{Z}$ – مدول:

۱) $Hom_R(A,\sum_{j\in J} B_j)\cong \prod_{j\in J} Hom_R(A,B_j)$.

۲) $Hom_R(\prod_{i\in I} A_i,B)\cong \sum_{i\in I} Hom_R(A_i,B)$.

۳) $Hom_R(\sum_{i\in I} A_i,B)\cong \sum_{i\in I} Hom_R(A_i,B)$.

۴) $Hom_R(\sum_{i\in I} A_i,B)\cong \prod_{i\in I} Hom_R(A_i,B)$.

۵۵- فرض کنید R یک حلقه یکدار و A یک مدول چپ روی R باشد. فرض کنید A^* دوگان A و $\theta: A\to A^{**}$ همریختی طبیعی باشد. در این صورت:

۱) θ همواره یک یکریختی است.

۲) اگر A آزاد باشد آنگاه θ بروریختی است.

۳) اگر A آزاد باشد آنگاه θ یکریختی است.

۴) اگر A آزاد و دارای پایه‌ای متناهی باشد آنگاه θ یکریختی است.

۵۶- فرض کنید R و S دو حلقه و A_R، $_RB_S$ و C_S (دو) مدول باشند. در این صورت کدام یک از $\mathbb{Z}$ – یکریختی‌های زیر درست است؟

۱) $Hom_S(A\otimes_R B,C)\cong Hom_R(A,Hom_S(B,C))$.

۲) $Hom_R(A,B\otimes_S C)\cong Hom_S(Hom_R(A,B),C)$.

۳) $Hom_S(A\otimes_R B,C)\cong Hom_R(A,B\otimes_R C)$.

۴) $Hom_R(A,B\otimes_R C)\cong Hom_R(A,B)\otimes_S C$.

۵۷- فرض کنید R یک حلقه و $A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\to 0$، یک رشته دقیق (دنباله کامل) از R– مدول‌ها و R– همریختی‌ها باشد. در این صورت به ازای هر R– مدول D، کدام گزینه درست است؟

۱) $Hom_R(C,D)\xrightarrow{\bar{g}}Hom_R(B,D)\xrightarrow{\bar{f}}Hom_R(A,D)\to 0$ یک رشته دقیق از $\mathbb{Z}$ – مدول‌ها است.

۲) $0\to Hom_R(C,D)\xrightarrow{\bar{g}}Hom_R(B,D)\xrightarrow{\bar{f}}Hom_R(A,D)$ یک رشته دقیق از $\mathbb{Z}$ – مدول‌ها است.

۳) $Hom_R(D,A)\xrightarrow{\bar{f}}Hom_R(D,B)\xrightarrow{\bar{g}}Hom_R(D,C)\to 0$ یک رشته دقیق از $\mathbb{Z}$ – مدول‌ها است.

۴) $0\to Hom_R(D,A)\xrightarrow{\bar{f}}Hom_R(D,B)\xrightarrow{\bar{g}}Hom_R(D,C)$ یک رشته دقیق از $\mathbb{Z}$ – مدول‌ها است.

۵۸- فرض کنید $f: R\to S$ یک همریختی از حلقه‌های جابجایی و I ایده‌آلی از R باشد. e و c را برای f به کار گیرید. در این صورت:

۱) اگر f پوشا و I ایده‌آلی ابتدایی (اولیه) باشد آنگاه I^e ایده‌آلی ابتدایی (اولیه) از S است.

۲) اگر I^e ایده‌آلی ابتدایی (اولیه) از S باشد آنگاه I ایده‌آلی ابتدایی (اولیه) از R است.

۳) اگر f یک به یک و I ایده‌آلی ابتدایی (اولیه) باشد آنگاه I^e ایده‌آلی ابتدایی (اولیه) از S است.

۴) اگر I ایده‌آلی ابتدایی (اولیه) باشد آنگاه I^e نیز ایده‌آلی ابتدایی (اولیه) از S است.

۵۹- فرض کنید R یک حلقه جابجایی و S یک زیرمجموعه بسته ضربی از R و $p\in Spec(R)$ باشد. در این صورت:

۱) $(S^{-1}R)_{PS^{-1}R}\cong R_P$

۲) اگر $P\bigcap S\neq\phi$ آنگاه $(S^{-1}R)_{PS^{-1}R}\cong R_P$

۳) اگر $P\bigcap S=\phi$ آنگاه $(S^{-1}R)_{PS^{-1}R}\cong R_P$

۴) اگر $P\bigcap S=\phi$ آنگاه $(S^{-1}R)_{PS^{-1}R}\cong S^{-1}R$

۶۰- فرض کنید R و S دو حلقه جابجایی و T یک تابعگون (فانکتور) هموردا از R– مدول‌ها به S– مدول‌ها باشد. تحت کدام یک از شرایط زیر، برای هر خانواده $\{G_i\}_{i=1}^{n}$ از R– مدول‌ها، یکریختی $T(\bigoplus_{i=1}^{n} G_i) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} T(G_i)$ برقرار است؟

۱) T جمعی باشد. ۲) T همانی باشد. ۳) T صفر باشد. ۴) T دقیق باشد.