



دانشکده مهندسی مکانیک
گروه طراحی جامدات

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته مهندسی مکانیک (طراحی کاربردی)

عنوان

آنالیز المان محدود الاستیک - پلاستیک برای تغییر شکلهای
بزرگ با استفاده از رفتار هایپر الاستیک - پلاستیک و
هایپو الاستیک - پلاستیک مواد و مقایسه با نتایج تجربی

استاد راهنما

دکتر تاج بخش نوید چاخرلو

استاد مشاور

دکتر محمدرضا خوشروان

پژوهشگر

حسین ذاکری اصل

شهریور ۱۳۸۹

تقدیم بہ پدر و مادر عزیزم

کہ ہرچہ دارم

از برکت وجود آنهاست

با تقدیر و تشکر فراوان از جناب آقای دکتر تاج بخش نوید چاخ‌لو که با راهنمایی‌های

خردمندانه و دلسوزانه‌ی خود در پیشبرد این پایان‌نامه سهم به سزایی داشته‌اند.

نام خانوادگی دانشجو: ذاکری اصل	نام: حسین
عنوان پایان نامه: آنالیز المان محدود الاستیک-پلاستیک برای تغییر شکل‌های بزرگ با استفاده از رفتار هایپو الاستیک-پلاستیک و هایپر الاستیک-پلاستیک مواد و مقایسه با نتایج تجربی	
استاد راهنما: دکتر تاج بخش نوید چاخارلو استاد مشاور: دکتر محمدرضا خوشروان	
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: مکانیک گرایش: طراحی کاربردی دانشگاه: تبریز دانشکده: فنی و مهندسی مکانیک تاریخ فارغ التحصیلی: شهریور ۱۳۸۹ تعداد صفحه:	
کلید واژه‌ها: اجزا محدود، تغییر شکل‌های بزرگ، هایپو الاستیک-پلاستیک، هایپر الاستیک-پلاستیک	
چکیده: در این پایان نامه برای شبیه سازی رفتار مواد تحت تغییر شکل‌های بزرگ همراه با ورود ماده به محیط پلاستیک مدل جدیدی که در سال‌های اخیر معرفی شده تحت عنوان مدل هایپر-الاستیک-پلاستیک همراه با مدل قدیمی تری با عنوان مدل هایپو الاستیک-پلاستیک مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته و با استفاده از روش المان محدود، در زبان فرترن به صورت برنامه در آمده است. یکی از حالت‌های متداول در صنعت شکل دهی فلزات، ایجاد تغییر شکل‌های بزرگ همراه با ورود ماده به محیط پلاستیک است. در کد هایی که برای شبیه سازی رفتار مواد برای حالت تغییر شکل ها و کرنش‌های بزرگ در نرم افزار های المان محدود نوشته شده، رفتار ماده هایپو الاستیک-پلاستیک در نظر گرفته شده که این رفتار حتی در ناحیه الاستیک هم کرنش باقی مانده به جا می گذارد. جهت رفع این مشکل، از مدل هایپر الاستیک-پلاستیک استفاده شده که این مدل هنوز در نرم افزارهای المان محدود مانند Ansys ارائه نشده است. اساس تشکیل معادلات در قسمت الاستیک بر پایه‌ی استفاده از تنش دوم پیولا-کریشهف و کرنش گرین است. این تنش و کرنش مزدوج هم بوده و کرنش	

گرین چرخش را در خود حذف می‌کند. سپس با تولید تابع انرژی کرنشی مرتبط با مدل خاصی از مدل‌های ارائه شده برای مواد هایپرالاستیک به نام مدل Ogden، تنش و کرنش با مشتق‌گیری از این تابع به دست می‌آید. در قسمت پلاستیک، اساس تشکیل معادلات بر مبنای جدیدی استوار است که در آن با معرفی حالت تغییر شکل مجازی میانی، گرادیان تغییر شکل به صورت حاصل ضرب دو قسمت الاستیک و پلاستیک تفکیک شده و معادلات اساسی پلاستیسیته، بر اساس قسمت پلاستیک آن بازنویسی می‌شود. برای مواد نزدیک به تراکم نا پذیر نیز گرادیان تغییر شکل به صورت جدیدی بازنویسی شده که روش $F\text{-bar}$ نام دارد. استفاده از این مبنای خاص به شدت حجم محاسبات را پایین می‌آورد، چرا که بر روی المان‌هایی از درجه‌ی پایین اعمال می‌شود و برای دستیابی به یک دقت خاص در آنالیز المان محدود تحت شرایط نزدیک به تراکم ناپذیری و تغییر شکل‌های بزرگ، نیاز به استفاده از المان از درجه‌ی بالا را از بین می‌برد. در انتها یک نمونه مطالعاتی به صورت تیر یک سر گیر دار از جنس مس انتخاب شده و تحت بارگذاری خمشی قرار می‌گیرد. مقایسه نتایج عددی با نتایج تجربی نشان می‌دهد که حالت تغییر شکل نهایی و مقدار کرنش‌های به دست آمده از مدل هایپرالاستیک-پلاستیک با واقعیت تطابق بسیار خوبی دارد. این واقعیت بیانگر قابلیت و دقت بالای این مدل برای شبیه‌سازی رفتار فلزات تحت شرایط تغییر شکل و کرنش‌های بزرگ می‌باشد.

حل مسایل پلاستیسیته در علم مکانیک یکی از چالش‌های مهم در مکانیک جامدات پیش از سال ۱۹۴۰ بوده است. این علم در مواردی همچون تولید قطعات فلزی از طریق شکل دادن آن‌ها مثل کشش عمیق، اکستروژن، آهنگری، خمش قطعات و ... کاربرد زیادی دارد. از این علم برای محاسبه میزان تنش و کرنش در قطعات مکانیکی و سازه‌هایی که *over load* شده اند (مثل زلزله) استفاده می‌گردد. حل مسایلی که در آن قطعه و یا سازه در اثر بارگذاری از ناحیه الاستیک عبور کرده و به حالت خمیری درمی‌آید، بخاطر ماهیت غیر خطی قدری پیچیده است، بالاخص اگر پلاستیک شدن همراه تغییر شکل بزرگ صورت گیرد. اگرچه راه حل‌های تحلیلی برای یک سری از مسایل ساده با تغییر شکلهای کوچک را می‌توان در ادبیات فن پیدا کرد، ولی مسایل پلاستیسیته با تغییر شکلهای بزرگ با حل تحلیلی بسیار مشکل است. لذا برای حل چنین مسایلی از المان محدود استفاده می‌گردد. در این گونه مسایلی که با المان محدود حل شده اند، برای رفتار مواد در حیطه‌ی الاستیک-پلاستیک از مدلهای زیادی استفاده شده که هر یک قادر به شبیه سازی رفتار ماده در شرایط خاصی از بارگذاری، تغییر شکل و شرایط محیطی می‌باشند. بسیاری از این مدل‌ها نیز به صورت کدهای نوشته شده در نرم‌افزارهای المان محدود در اختیار محققین قرار داده شده است. همانطور که گفته شد، یکی از حالت‌های متداول در صنعت شکل دهی فلزات، ایجاد تغییر شکل‌های بزرگ همراه با ورود ماده به محیط پلاستیک است. در کدهایی که برای شبیه‌سازی رفتار مواد برای حالت تغییر شکل‌ها و کرنش‌های بزرگ در نرم‌افزارهای المان محدود نوشته شده، رفتار ماده *hypo-elastic-plastic* در نظر گرفته شده که این رفتار حتی در ناحیه الاستیک هم کرنش باقی مانده به جا می‌گذارد. جهت رفع این مشکل، در سال‌های اخیر مدل جدیدی تحت عنوان مدل *hyper-elastic-plastic* معرفی شده که در این پایان نامه این مدل همراه با مدل *hypo-elastic-plastic* مورد

بررسی و مطالعه قرار گرفته و با استفاده از روش المان محدود، در زبان فرترن به صورت برنامه در آمده اند. از آنجایی که مدل hyper-elastic-plastic مدل جدیدی است، هنوز در نرم افزار های المان محدود مانند Ansys ارائه نشده است. لذا با طراحی و اجرای آزمایشی بر روی یک نمونه مطالعاتی که به صورت تیر یک سر گیر دار از جنس مس ساخته شده، نتایج عددی حاصل از شبیه سازی رفتار این نمونه آزمایشی با نتایج تجربی مقایسه شده که بیانگر میزان تطابق این مدل با واقعیت بوده و قابلیت و دقت این مدل را برای شبیه سازی رفتار فلزات تحت شرایط تغییر شکل و کرنش های بزرگ نشان می دهد.

فصل اوّل

بررسی منابع

و پیشینه پژوهش

مقدمه

هدف از انجام این پایان نامه نوشتن کد با استفاده از روش المان محدود برای حل مسایل پلاستیسیته همراه تغییر شکل بزرگ و با استفاده از دو مدل هایپر الاستیک-پلاستیک و هایپوالاستیک-پلاستیک برای حل مسایل دو بعدی می باشد. در این راستا ابتدا نیاز به بررسی پیشینه پژوهش و مطالعاتی هست که قبلاً در این زمینه صورت گرفته است که در این فصل به بررسی آنها پرداخته خواهد شد.

۱-۱- مدل هایپر الاستیک^۱ و هایپر الاستیک-پلاستیک

مدل هایپر الاستیک در واقع یک مدل ساختاری برای گروهی از مواد ایده آل الاستیک می باشد که در آنها رابطه تنش- کرنش از یک تابع انرژی کرنشی استخراج می شود. برای بسیاری از مواد، مدل الاستیک خطی، رفتار مشاهده شده از مواد را با دقت توضیح نمی دهد. واضح ترین نمونه برای این مواد، مواد لاستیک سان می باشند که در آنها رابطه تنش- کرنش را می توان به صورت رابطه ی الاستیک غیر خطی، ایزوترپیک، تراکم ناپذیر و به طور کلی مستقل از نرخ کرنش بیان کرد [۱].

بسیاری از تلاش ها در این زمینه برای توسعه روابط تنش- کرنش تئوریکي بوده است که منطبق با نتایج به دست آمده از آزمایش های انجام شده بر روی مواد هایپر الاستیک باشند. کارهای انجام شده در این زمینه به دو گروه کلی تقسیم می شوند، اول کارهایی که به بسط روابط از دید مکانیک محیط پیوسته پرداخته اند و دوم کارهایی که از دید استاتیکی و دینامیکی بر روی چند مدل ایده آل انجام شده است.

تئوری های مربوط به مواد هایپر الاستیک از واسط قرن اخیر توسط بسیاری از دانشمندان بررسی و تدوین شده است. از مهمترین کارهایی که اخیراً صورت گرفته است، می توان به کار دانشمندانی

^۱ Hyperelastic

همچون Rivlin و Mooney [۲] و نیز Vanalis و Landel [۳] که از نتایج کارشان تفکیک تابع انرژی کرنشی به فرم جدایی پذیر مرتبط با جهات اصلی اشاره کرد. این نتایج منجر به مدلی شد که Ogden [۴] ارائه کرد که امروزه کاربرد بیشتری دارد و تاکید بر مشکلات مدل سازی ناشی از incompressibility دارد.

با در نظر گرفتن فرم کلی تابع انرژی کرنشی زیر [۵]:

$$\psi = 2\mu\bar{I}_2 + \frac{\bar{\lambda}}{2}I_1^2 \quad (۱-۱)$$

$$I_1 = tr(\varepsilon) = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \quad (۲-۱)$$

$$\bar{I}_2 = \frac{1}{2}tr(\varepsilon^2) = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} \quad (۳-۱)$$

ابتدائاً متذکر می شویم که مقادیر اصلی کرنش (ε_p) باید رابطه‌ی مقادیر ویژه را ارضا کنند:

$$\varepsilon \mathbf{Z} = \varepsilon_p \mathbf{Z} \quad (۴-۱)$$

که در این رابطه، $\mathbf{Z}$ جهات اصلی کرنش و ε_p مقادیر اصلی کرنش را نشان می دهند. می توان نشان داد

$$\det(\varepsilon - \varepsilon_p I) = 0 \quad \text{که روابط فوق وقتی برقرار است}$$

که در این صورت خواهیم داشت:

$$\varepsilon_p^3 - I_1\varepsilon_p^2 + I_2\varepsilon_p - I_3 = 0 \quad (۵-۱)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(tr(\varepsilon)^2 - tr(\varepsilon^2)) = \frac{1}{2}I_1^2 - \bar{I}_2 \quad (۶-۱)$$

$$I_3 = \det(\varepsilon) \quad (۷-۱)$$

هنگام مدل سازی موادی که کرنش بالایی دارند، باید در انتخاب نوع تنش و کرنش دقت لازم را

به عمل آورد تا چرخش با کرنش اشتباه نشود.

کاملاً واضح است که $(\lambda_1 - \lambda_3)$ که کشیدگی‌های اصلی هستند، نسبت به دستگاه مختصات انتخابی و نوع کرنش انتخابی مستقل هستند. پس بهتر است که تابع انرژی کرنشی را با فرض همسان‌گرد بودن ماده و با استفاده از کشیدگی‌های اصلی تولید کنیم. ابتدائاً باید مطمئن شویم که [۵]:

۱. ψ برای حالت ground state برابر صفر است، یعنی $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$

۲. تابع انرژی کرنشی نسبت به $(\lambda_1 - \lambda_3)$ متقارن است.

۳. تابع انرژی کرنشی همواره مثبت است.

برای محاسبات بهتر است که از C (تانسور کوشی-گرین راست)^۱ یا B (تانسور کوشی-گرین چپ)^۲ استفاده شود که دارای مقادیر ویژه‌ی $\lambda_1^2 - \lambda_3^2$ هستند. همچنین کار در حوضه مواد هایپرلاستیک، عموماً درگیر با نامتغیرهای اصلی تانسورهای B و C می‌باشد.

همچنین می‌توان رابطه‌ی (۵-۱) را به صورت زیر نیز بیان کرد:

$$\det[C - \lambda_p^2 I] = \det[b - \lambda_p^2 I] = 0 \quad (۸-۱)$$

$$\lambda_p^6 - I_1 \lambda_p^4 + \lambda_p^2 I_2 - I_3 = 0 \quad (۹-۱)$$

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \text{tr}(C) \quad (۱۰-۱)$$

$$I_2 = \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_1^2 = \frac{1}{2}(I_1^2 - \text{tr}(C^2)) \quad (۱۱-۱)$$

$$I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = J^2 = \det(C) = \det(B) \quad (۱۲-۱)$$

$$J = \det(\mathbf{F}) = I_3^{1/2} \quad (۱۳-۱)$$

^۱ Left Cauchy-Green Tensor

^۲ Right Cauchy-Green Tensor

از این به بعد، $I_1 - I_3$ با این روابط مشخص می‌شوند که می‌توان بدون محاسبه‌ی مستقیم $\lambda_1 - \lambda_3$ آنها را بدست آورد.

زمانی که ماده تحت بار گذاری نباشد، $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ و از آنجا $I_1 = I_2 = 3$ و $I_3 = 1$ خواهد بود. با این توضیحات، تابع انرژی کرنشی که بتواند پیش فرضهای ما را ارضاء کند به صورت زیر خواهد بود:

$$\psi = \sum_{p,q,r=0}^{\infty} C_{pqr} (I_1 - 3)^p (I_2 - 3)^q (I_3 - 1)^r \quad \text{with} \quad C_{000} = 0 \quad (14-1)$$

برای مواد تراکم ناپذیر، $J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ و تابع فوق به صورت زیر درخواهد آمد:

$$\psi = \sum_{p,q=0}^{\infty} C_{pq} (I_1 - 3)^p (I_2 - 3)^q \quad \text{with} \quad C_{000} = 0 \quad (15-1)$$

حالات کران بالای محدود شده‌ی خاصی از معادله‌ی فوق برای آنالیز لاستیک به کار می‌رود که به تابع Mooney-Rivlin معروف است و برای کرنش‌های تا ۱۰۰٪ به کار می‌رود:

$$\psi = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) \quad (16-1)$$

تابع ساده تری به نام Neo-Hookean هم قابل تولید است که کرنش‌های تا ۳۰٪ را به خوبی پوشش می‌دهد:

$$\psi = C_{10}(I_1 - 3) = C_1(I_1 - 3) \quad (17-1)$$

مدل Ogden نیز که ساختار زیر را دارد، در موارد بسیاری تطابق بسیار خوبی با نتایج آزمایش‌های عملی دارند که بازه کرنش آنها تا ۷۰۰٪ می‌باشد [6].

$$\bar{\rho} \hat{\psi}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} (\lambda_1^{\alpha_p} + \lambda_2^{\alpha_p} + \lambda_3^{\alpha_p} - 3) \quad (18-1)$$

که در این رابطه N ، تعداد کلی ترم های موجود در سری، μ_p و α_p ($p = 1, \dots, N$)، ثوابت مادی می باشند. همچنین با فرض تراکم ناپذیری مطلق خواهیم داشت، $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$. بنابراین رابطه فوق به شکل زیر قابل نمایش خواهد بود:

$$\bar{\rho} \tilde{\psi}(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} \left(\lambda_1^{\alpha_p} + \lambda_2^{\alpha_p} + \frac{1}{\lambda_1^{\alpha_p} \lambda_2^{\alpha_p}} - 3 \right) \quad (19-1)$$

مدل Mooney-Rivlin نیز در واقع حالت خاصی از مدل Ogden می باشد که با جایگذاری های زیر، $N = 2$ ، $\mu_1 = 2C_1$ ، $\mu_2 = -2C_2$ و $\alpha_1 = 2$ ، $\alpha_2 = -2$ به دست می آید. حالت استاندارد مدل Neo-Hookean نیز با جایگذاری های زیر قابل استحصال خواهد بود، $N = 1$ ، $\mu_1 = 2C_1$ و $\alpha_1 = 2$.

از کارهای دیگری که در زمینه بسط و توسعه مدل های پیرالاستیک صورت گرفته می توان به کارهای زیر اشاره کرد:

در سال ۲۰۰۲، G.Lyn و N.J.Mills به بررسی رفتار فوم های به کار رفته در کلاه های ضربه گیر و نحوه ی تخریب آن با استفاده از مدل خاصی که این دسته از مواد هایپر الاستیک ارائه شده تحت عنوان مدل هایپر فوم^۱ پرداختند [۷].

در سال ۲۰۰۴، Yi Lin و دستیارانش از دانشگاه هاروارد سعی در بررسی و شبیه سازی رفتار مکانیکی بافتهای نرم اندام انسان با استفاده از مدل هایپرالاستیک و روش المان محدود غیر خطی کردند [۸].

^۱ Hyper Foam

در سال ۲۰۰۵، Pedro Martins و گروه همکارانش از دانشگاه بارسلونا به تشریح آزمایشهای مختلفی جهت به دست آوردن ثوابت مختلف مادی در مدل‌های گوناگونی که برای تشریح رفتار مواد هایپر الاستیک ارائه شده، پرداختند [۹].

در سال ۲۰۰۶، L.E.Crocker و دستیارانش از دانشگاه مایل استون به مدلسازی رفتار گروه خاصی از چسب های صنعتی انعطاف پذیر با استفاده از مدل خاصی از مواد هایپر الاستیک، به نام مدل Mooney-Rivlin پرداختند [۱۰].

در سال ۲۰۰۷، Ahmet Erdemir و دستیارانش از دانشگاه پنسیلوانیا سعی در مدل کردن بستر زیر ساختی سد های بزرگ با استفاده از مدلی از مواد هایپر الاستیک، به نام مدل Ogden کردند [۱۱].

و بالاخره در سال ۲۰۰۹، Paweł Dłużewski از دانشگاه ورشو لهستان به بررسی رفتار دسته‌ای از مواد هایپر الاستیک غیر همسان‌گرد با استفاده از مدل هایپر الاستیک و روش المان محدود غیر خطی پرداخت [۱۲].

در دو دهه اخیر برای تدوین مدل‌هایی که توانایی پیش‌بینی رفتار ماده را در تغییر شکل‌های بزرگ، مانند فرآیند شکل‌دهی فلزات و مقاومت بدنه اتومبیل‌ها در تصادفات داشته باشد، کارهای زیادی انجام شده است. برخی پیشگامان این زمینه Hill [۱۳] و Green و Naghdi [۱۴] می‌باشند. اولین افرادی که بر روی مدل هایپر الاستیک-پلاستیک برای پیش‌بینی رفتار مواد در محدوده تغییر شکل‌های کوچک کار کردند، Argyris و Kleiber [۱۵]، Argyris و همکارانش [۱۶]، Hibitt و همکارانش [۱۷]، McMeeking و Rice [۱۸]، Nagtegaal و Dejong [۱۹] بودند.

افرادی که بر روی تفکیک حاصل‌ضربی گرادینان تغییر شکل در مدل هایپر الاستیک-پلاستیک کار کردند، Lee و Liu [۲۰] بودند که در دهه اخیر این مدل هایپر الاستیک مقبولیت بیشتری پیدا کرده

است. این مدل نه تنها برای پلاستیسیته فلزات کاربرد دارد، بلکه در مواردی همچون پلاستیسیته خاک [۲۱]، مکانیک شکست [۲۲]، و پلاستیسیته تک کریستالی غیر همسان گرد [۶]، مدل سازی رفتار سازه های فولادی [۲۴] و رفتارپوسته ها [۲۴] نیز کاربرد دارد.

۱-۲- مدل هایپوالاستیک^۱ و هایپوالاستیک-پلاستیک

رفتار غیر الاستیک جامدات توسط مدلی که به مدل ساختاری هایپوالاستیک معروف است نیز قابل توصیف است. در واقع مدل هایپوالاستیک، مانند مدل هایپرالاستیک بر اساس فرض وجود تابع انرژی پتانسیل آزادی برای تشریح رفتار برگشت پذیر اجسام در حالت الاستیک، بنا نشده است. اساس این مدل فرمول بندی روابط ساختاری تنش در ترم های نرخ عینی^۲ می باشد. بسیاری از کارهایی که اخیرا برای فرمول بندی کرنش های پلاستیک محدود ارایه شده، منحصر بر اساس مدل هایپوالاستیک می باشند تا از روابط و محاسبات اضافی برای گسترش کرنش های محدود به مدل بی-نهایت کوچک^۳ حاضر جلوگیری کنند. اما علی رغم سادگی و کوتاهی روابط مدل هایپوالاستیک-پلاستیک، این مدل معمولا برای مسایلی که در آنها رفتار کاملا برگشت پذیر در حالت الاستیک حاکم است، به کار نمی رود. به عبارت دیگر، در این مدل ممکن است حتی در محدوده الاستیک نیز اتلاف انرژی صورت گیرد که همین امر مانع بازگشت پذیری مدل می باشد. این پدیده، قطعا از منظر تئوریک نامطلوب خواهند بود. بعلاوه فرمول بندی نمو^۴ معادلات ساختاری این مدل، که بیانگر تغییر ناپذیری ساختار نرخ تنش می باشد. در برخی موارد ساده نخواهد بود و فرآیند های پر زحمت محاسبات عددی را به دنبال خواهد داشت. علی رغم تمام این معایب، این مدل به شکل گسترده ای توسط محققین به کار برده می شود و در بسیاری از نرم افزارهای تجاری المان محدود موجود است.

^۱ Hypoelastic

^۲ Objective rate

^۳ Infinitesimal

^۴ Incremental

۱-۲-۱- نرخ مادی تنش

مهمترین مطلب در مورد فرمول بندی مدل هایپوالاستیک-پلاستیک، تعریف نرخ مادی تنش می باشد به عنوان مثال، تنش کوشی، σ ، توسط قانون زیر از یک دستگاه به دستگاه مختصات دیگر منتقل می گردد:

$$\sigma(t) \longrightarrow Q(t) \sigma(t) Q^T(t) \quad (۱۹-۱)$$

برای تنش کوشی، نرخ تنش که به صورت $\dot{\sigma}$ نشان داده می شود، نرخ عینی (Objective rate) نامیده می شود. اگر با تغییر دستگاه مختصات ناظر، این نرخ نیز با همان قانون منتقل شود یعنی:

$$\dot{\sigma} \longrightarrow Q \dot{\sigma} Q^T \quad (۲۰-۱)$$

به عنوان نمونه، مشتق مادی تنش کوشی، $\dot{\sigma}$ یک نرخ عینی تنش نمی باشد. چرا که در این مورد انتقال دستگاه مختصات ناظر به شکل زیر صورت می گیرد:

$$\dot{\sigma} \longrightarrow Q \dot{\sigma} Q^T + \dot{Q} \sigma Q^T + Q \sigma \dot{Q}^T \quad (۲۱-۱)$$

و تنها در صورتی معادله (۲۰-۱) را ارضا می کند که تغییرات در چرخش دستگاه مختصات ناظر، مستقل از زمان باشد ($\dot{Q} = 0$).

اطمینان از عینی بودن ماهیت فرمول بندی در قوانین ساختاری کرنش محدود، مستلزم آن است که معادلات ساختاری برای تشکیل تانسور تنش، در ترم های نرخ عینی تنش نمایش داده شود. نرخ های عینی تنش معمولاً توسط تغییرات مناسبی در مشتق مادی تانسور تنش تعریف می شوند تا بتوانند معادله (۲۰-۱) را ارضا کنند. تعاریف متفاوت زیادی برای نرخ های عینی تنش ارائه شده و در بستر تئوری های ساختاری هایپوالاستیک فرمول بندی گشته اند که برخی از این تعاریف در اینجا ذکر می گردند.

۱-۱-۲-۱ نرخ Jaumann تنش کوشی

نرخ Jaumann تنش کوشی که با $\overset{\nabla}{\sigma}$ نمایش داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\overset{\nabla}{\sigma} \equiv \dot{\sigma} - W \sigma + \sigma W \quad (22-1)$$

که در آن W تانسور اسپین بوده و از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$W \equiv \text{skew}[L], \quad L \equiv \nabla_x \dot{v} = \dot{F} F^{-1} \quad (23-1)$$

برای نشان دادن عینی بودن این نرخ تنش به شکل زیر عمل می‌کنیم، می‌دانیم که با تغییر در دستگاه مختصات ناظر، گرادیان تغییر شکل به فرم زیر منتقل می‌شود:

$$F \longrightarrow Q F \quad (24-1)$$

با توجه به تعاریف L و W ، رابطه انتقال تانسور اسپین را به شکل زیر می‌توانیم بنویسیم:

$$W \longrightarrow \dot{Q} Q^T + Q W Q^T \quad (25-1)$$

با جایگزینی انتقال فوق برای W همراه با معادلات (۲۲-۱) و (۲۰-۱) در تعریف نرخ Jaumann و انجام عملیات جبری مختصری می‌توان رابطه زیر را نوشت:

$$\overset{\nabla}{\sigma} \longrightarrow Q \dot{\sigma} Q^T - Q W \sigma Q^T + Q \sigma W Q^T = Q \overset{\nabla}{\sigma} Q^T \quad (26-1)$$

که نشان می‌دهد نرخ Jaumann به صورت عینی منتقل شده است.

در حالت کلی اگر T یک تانسور فضایی باشد که بر اساس تغییر در مختصات ناظر، مطابق رابطه

(۲۰-۱) منتقل می‌شود، نرخ Jaumann برای تانسور T ، به حالت زیر تعریف می‌شود:

$$\overset{\nabla}{T} \equiv \dot{T} - W T + T W \quad (27-1)$$

در حالت خاص، نرخ Jaumann برای تنش کیرشهف به شکل زیر خواهد بود:

$$\overset{\nabla}{\tau} \equiv \dot{\tau} - W \tau + \tau W \quad (28-1)$$

که اغلب در فرمول بندی مدل های کرنش پلاستیسیته محدود هایپوالاستیک، به کار می رود.

1-2-2-1 Truesdell نرخ

نرخ Truesdell برای تانسور T به شکل زیر تعریف می شود:

$$\overset{\circ}{T} \equiv \dot{T} - L T - T L^T + (\text{tr} L) T \quad (29-1)$$

1-2-3-1 Oldroyd نرخ

نرخ Oldroyd، مرتبط با مفهوم مشتق Lie می باشد که در مدل هایپیرالاستوپلاستیک تعریف

شده، به شکل زیر تعریف می گردد:

$$\overset{\diamond}{T} \equiv \dot{T} - L T - T L^T \quad (30-1)$$

یا به صورت معادل دیگر:

$$\overset{\diamond}{T} \equiv F \left[\frac{d}{dt} (F^{-1} T F^{-T}) \right] F^T \quad (31-1)$$

با توجه به تعریف اخیر، می توان دریافت که ابتدا تانسور T به وضعیت مبدأ نگاشته می شود، سپس از

مقدار ماتریس T در وضعیت مبدأ مشتق مادی گرفته می شود و نهایتاً نتیجه این مشتق گیری مادی،

به وضعیت حاضر نگاشته می شود.