بسم الله الرحمن الرحیم

ایستایی ساختمان

رشتهٔ ساختمان

زمینهٔ صنعت

شاخهٔ آموزش فنی و حرفه‌ای

شمارهٔ درس ۲۶۹۲

۶۹۰/۲۱ الف ۱۸۸ خ/ ۱۳۹۴

خلیل‌ارجمندی، محمداسماعیل

ایستایی ساختمان / مؤلفان: محمداسماعیل خلیل‌ارجمندی، مجید شجاعی‌اردکانی. – تهران: شرکت چاپ ونشر کتاب‌های درسی ایران، ۱۳۹۴.

۱۷۰ ص. مصور.– (آموزش فنی و حرفه‌ای؛ شمارهٔ درس ۲۶۹۲)

متون درسی رشتهٔ ساختمان، زمینهٔ صنعت.

برنامه‌ریزی و نظارت، بررسی و تصویب محتوا: کمیسیون برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی رشتهٔ ساختمان دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای وکاردانش وزارت آموزش و پرورش.

۱. سازه – پایداری. الف. ایران. وزارت آموزش و پرورش. کمیسیون برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی رشتهٔ ساختمان. ب. عنوان. ج. فروست.

۱۳۹۴

همکاران محترم و هنرجویان عزیز:

پیشنهادات و نظرات خود را دربارهٔ محتوای این کتاب به نشانی تهران ـ صندوق پستی شمارهٔ ۴۸۷۴/۱۵ دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای و کاردانش، ارسال فرمایند.

پیام نگار(ایمیل) info@.tvoccd.sch.ir

وب‌گاه (وب‌سایت) www.tvoccd.sch.ir

وزارت آموزش و پرورش

سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی

برنامه‌ریزی محتوا و نظارت بر تألیف: **دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی و حرفه ای و کاردانش**

نام کتاب: **ایستایی ساختمان ـ ۴۹۴/۷**

مؤلفان: **محمداسماعیل خلیل‌ارجمندی، مجید شجاعی‌اردکانی**

اعضای کمیسیون تخصصی: **ابوالقاسم رافع، محمدعلی فرزانه، محمدصالح رحیم‌لباف‌زاده** و **مالک مختاری**

آماده سازی‌ونظارت برچاپ و توزیع: **ادارهٔ کل نظارت بر نشر وتوزیع مواد آموزشی**

تهران: خیابان‌ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ۴ آموزش و پرورش(شهیدموسوی)

تلفن : ۹ـ۸۸۸۳۱۱۶۱ ، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶ ، کدپستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹،

وب سایت: www.chap.sch.ir

رسامی، صفحه‌آرایی و طراحی جلد: **امیرحسین متینی**

ناشر: **شرکت چاپ ونشر کتاب‌های درسی ایران: تهران- کیلومتر ۱۷جادّهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (داروپخش)**

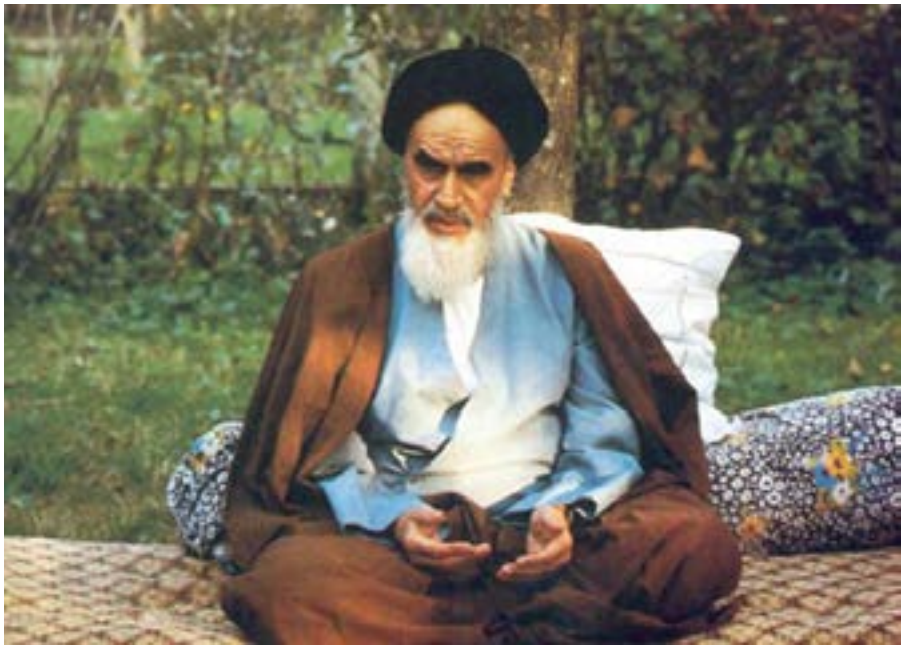
تلفن: ۵ـ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار:۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق‌پستی: ۱۳۹-۳۷۵۱۵

چاپخانه: **شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»**

سال انتشار و نوبت چاپ: **چاپ سوم ۱۳۹۴**

حقّ چاپ محفوظ است.

شابک ۱-۲۲۴۳-۰۵-۹۶۴-۹۷۸ ISBN 978-964-05-2243-1



مهم‌ترین چیزی که برای کشور ما لازم است، تعهد اسلامی و تهذیب اسلامی است.

امام خمینی (قدس سره الشریف)

مقدمه:

کتاب حاضر مشتمل بر دو بخش استاتیک (فصل‌های ۱ تا ۶) و مقاومت مصالح مقدماتی (فصل‌های ۷ تا ۹) است که تحت عنوان ایستایی به رشته تحریر درآمده است.

با توجه به این‌که هنرجویان رشتهٔ ساختمان دروس استاتیک و مقاومت مصالح را در سه مقطع متوسطه، کاردانی و کارشناسی ناپیوسته می‌گذرانند، لذا در این مقطع سعی شده است مبانی مقدماتی دروس فوق‌الذکر با تأکید بیشتر بر روی استاتیک مد نظر قرار گیرد و در بخش مقاومت مصالح مقدماتی صرفاً به آشنایی با مبانی مقاومت مصالح اکتفا شده است.

با توجه به این‌که اغلب آیین‌نامه‌های ساختمانی از دستگاه آحاد اندازه‌گیری بین‌المللی (SI) استفاده می‌کنند، در این کتاب نیز از این دستگاه به عنوان دستگاه آحاد اندازه‌گیری استفاده شده است.

در فصل اول کتاب به مفاهیم عمومی و تعاریف پایه در مکانیک نیوتنی اشاره شده است. و در فصل دوم، هنرجویان با بردارها و جمع و تفریق بردارها به صورت ترسیمی آشنا می‌شوند.

در فصل سوم به محاسبهٔ برآیند نیروها و گشتاور نیروها حول یک نقطه در حالت دوبعدی پرداخته می‌شود.

در فصل چهارم تعادل نقطهٔ مادی و تعادل اجسام صلب مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در فصل پنجم تحلیل سازه‌های ساختمانی شامل خرپا و تیر بیان می‌گردد.

فصل ششم خواص هندسی سطوح را مطرح می‌نماید.

در فصل هفتم و هشتم تنش‌های محوری و برشی مورد بررسی واقع شده‌اند.

در فصل نهم برای ایجاد انگیزه در هنرجویان تعیین شماره مقطع تیر به‌صورت ساده و صرفاً به‌منظور آشنایی با نحوهٔ طراحی مطرح گردیده است.

از آن‌جایی که آموزش بصری (استفاده از تصاویر و فیلم) در یادگیری تأثیر بیشتری دارد، به همراه کتاب، لوح فشرده‌ای شامل فایل pdf کتاب به همراه فیلم‌های آموزشی ارائه می‌گردد که با کلیک‌کردن روی آیکون فیلم، فیلم آموزشی آن بخش نمایش داده می‌شود.

توصیه به همکاران گرامی:

۱- استفاده و آموزش ماشین‌حساب غیربرنامه‌پذیر آزاد است و بهتر است در هر کلاس از یک نوع تهیه گردد.

۲- استفاده از راه‌حل‌های مختلف توسط هنرجویان آزاد می‌باشد.

۳- توصیه می‌شود به‌منظور تفهیم بهتر مسائل استاتیکی متناسب با موضوع هر بخش، دست‌سازه‌های لازم توسط هنرجویان تهیه و مورد استفاده قرار گیرد. به‌عنوان مثال: انواع تکیه‌گاه‌ها - خرپاها و . . . می‌توانند به‌عنوان موضوع دست‌سازه‌ها قرار گیرند.

۴- دقت محاسبات تا دو رقم اعشار کفایت می‌نماید و تنها در مورد نسبت‌های مثلثاتی تا سه رقم اعشار در نظر گرفته شود.

۵- در حل مسائل آخر هر فصل نحوهٔ تحلیل مسائل دارای اشکال پیچیده، با ترسیمات ساده برای هنرجویان تشریح گردد.

۶- در ارائهٔ مسائل کتاب سعی شده است اجزای ساختمانی به‌صورت واقعی نمایش داده شود تا از این طریق هنرجویان تجسم بهتری از سازه‌های ساختمانی پیدا کنند، بنابراین لازم است همکاران محترم در زمان مناسب، نحوهٔ مدل‌کردن این اشکال را به‌منظور حل مسأله برای هنرجویان تشریح نمایند.

توصیه به هنرجویان عزیز:

برای درک و فهم بهتر مسائل ایستایی توصیه می‌شود ابتدا مطالب تئوری را به‌دقت مطالعه نمائید و سپس مثال‌های حل‌شده را بدون توجه به راه‌حل آن‌ها تحلیل نموده و در نهایت جواب‌های خود را با جواب‌های کتاب مقایسه نمائید و موارد و علت اختلاف احتمالی جواب‌ها را بررسی نمائید. تنها به این شیوه می‌توانید از این کتاب که سعی شده است بسیار ساده و روان در اختیار شما قرار گیرد بهره‌مند شوید.

به‌منظور حل مسائل آخر هر فصل توصیه می‌گردد:

۱- مسئله را به‌دقت مطالعه کرده و معلومات و مجهولات آن را یادداشت نمائید.

۲- در صورت نیاز تبدیل واحدهای لازم را انجام دهید.

۳- شکل مسئله را به‌صورت ساده ترسیم نموده و اطلاعات لازم را روی آن نشان دهید.

۴- روابط مورد نیاز را بنویسید. داده‌های مسئله را در آن‌ها قرار داده و مجهولات را به‌دست آورید.

۵- سعی کنید جواب مسئله را از دید فنی بررسی و از منطقی بودن آن‌ها اطمینان حاصل کنید.

و در انتها:

از کلیه بزرگواران و صاحب‌نظران درخواست می‌شود، نظرات و پیشنهادات خود را به این دفتر ارسال کرده تا در چاپ‌های بعدی مورد استفاده قرار گیرد.

با تشکر - مؤلفین

هدف کلی

آشنایی با مبانی علوم استاتیک و مقاومت مصالح

فهرست:

بخش اول – استاتیک

فصل اول – مقدمه و مفاهیم عمومی

۱-۱ تعریف علم مکانیک ۲
۱-۲ مفاهیم اصلی در علم مکانیک ۳
۱-۲-۱- فضا (Space) ۳
۱-۲-۲- زمان (Time) ۳
۱-۲-۳- جرم (Mass) ۳
۱-۲-۴- نیرو (Force) ۳
۱-۳ فرضیات ۳
۱) جسم صلب (Rigid Body) ۳
۲) نقطه مادی (Particle) ۳
۱-۴ قوانین نیوتن ۳
۱-۴-۱- قانون اول نیوتن ۳
۱-۴-۲- قانون دوم نیوتن ۴
۱-۴-۳- قانون سوم نیوتن ۴

فصل دوم – بُردارها

۲-۱ کمیت‌های فیزیکی ۸
۲-۱-۱- کمیت‌های عددی یا اسکالر ۸
۲-۱-۲- کمیت‌های برداری ۸
۲-۲ بردارها (Vector) ۸
۲-۳ انواع بردارها ۹
۲-۳-۱- بردار لغزان ۹
۲-۳-۲- بردار ثابت ۹
۲-۳-۳- بردارهای هم‌سنگ ۹
۲-۳-۴- بردارهای زوج ۹
۲-۳-۵- بردارهای مخالف ۱۰
۲-۳-۶- بردار یکه (واحد) ۱۰
۲-۳-۷- بردار نیرو ۱۰

۲-۴ جمع و تفریق بردارها ۱۱
۲-۴-۱- روش‌های جمع و تفریق بردارها ۱۱
۲-۴-۱-۱- روش ترسیمی ۱۱
الف) روش مثلث ۱۱
ب) روش متوازی‌الاضلاع ۱۲
ج) روش چندضلعی ۱۳
۲-۵ تجزیهٔ یک بردار به مؤلفه‌های آن به روش ترسیمی ۱۸
۲-۶ تجزیهٔ یک بردار به مؤلفه‌های متعامد آن در دستگاه مختصات دکارتی ۱۹
۲-۶-۱- نمایش برداری یک بردار در دستگاه مختصات دکارتی ۲۱
۲-۷ تعیین اندازهٔ یک بردار با استفاده از مؤلفه‌های متعامد آن ۲۱

فصل سوم - نیرو و سامانه‌های نیرویی

۳-۱ انواع نیرو ۲۸
۳-۱-۱- نیروهای خارجی ۲۸
۳-۱-۲- نیروهای داخلی ۲۹
۳-۲ برآیند سامانه‌های نیرویی وارد بر نقطه مادی به روش محاسباتی ۳۰
۳-۲-۱- برآیند نیروهای هم‌راستا و موازی ۳۰
۳-۲-۲- برآیند دو نیروی متعامد ۳۱
۳-۲-۳- محاسبهٔ برآیند سامانهٔ چندنیرویی وارد به نقطهٔ مادی ۳۲
۳-۳ گشتاور، لنگر (مُمان) ۳۹
۳-۴ گشتاور چند نیرو ۴۱
۳-۵ قضیه وارینون ۴۲
۳-۶ زوج‌نیرو ۴۵
۳-۶-۱- خصوصیات زوج نیرو ۴۵

فصل چهارم - تعادل

۴-۱ تعادل ۵۰
۴-۱-۱- تعادل نقطهٔ مادی ۵۱
۴-۱-۱-۲- پیکر آزاد جسم ۵۲
۴-۱-۲- تعادل جسم صلب ۵۶
۴-۲ انواع تکیه‌گاه‌ها و عکس‌العمل‌های آن‌ها ۵۷

۴-۲-۱- انواع تکیه‌گاه‌ها ۵۷
۴-۳ محاسبه عکس العمل های تکیه‌گاهی اجسام صلب ۵۹

فصل پنجم - تحلیل سازه‌های ساختمانی

۵-۱ خرپا (Truss) ۶۹
۵-۱-۱- انواع خرپا ۶۹
۵-۱-۲- شکل خرپاها ۷۰
۵-۱-۳- فرضیات تحلیل خرپاها ۷۱
۵-۱-۴- روش تحیل خرپا ۷۲
۵-۱-۵- روش مفاصل (گره‌ها) در تحلیل خرپاها ۷۲
۵-۱-۶- اعضای صفر نیرویی ۷۶
۵-۲ تحلیل تیرها ۷۹
۵-۲-۱- تعریف تیر (Beam) ۷۹
۵-۲-۲- انواع تیرها از نظر شرایط تکیه‌گاهی ۷۹
۵-۲-۳- انواع بارهای وارد به تیر ۸۰
۵-۲-۴- تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی تیرها با بار گسترده یکنواخت ۸۱
۵-۲-۵- رفتار تیر تحت تأثیر بارهای خارجی ۸۳
۵-۲-۶- نیروهای داخلی در تیرها با بار متمرکز ۸۳
۵-۲-۶-۱- علائم قرار دادی نیروهای داخلی تیرها ۸۴
۵-۲-۶-۲- محاسبهٔ نیروهای داخلی تیرها با بار متمرکز ۸۵
۵-۲-۷- مقادیر حداکثر نیروهای برشی و لنگر خمشی در تیرها با بار متمرکز ۸۸
۵-۲-۸- ترسیم نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی تیرها با بار متمرکز ۸۸

فصل ششم - خواص هندسی سطوح

۶-۱ گشتاور اول سطح (ممان استاتیک) ۹۸
۶-۲ گشتاور اول (ممان استاتیک) سطوح مرکب ۱۰۱
۶-۳ مرکز سطح سطوح مرکب ۱۰۳
۶-۴ استفاده از تقارن در تعیین مرکز سطح سطوح متقارن ۱۰۶
۶-۴-۱- سطوح با یک محور تقارن ۱۰۶
۶-۴-۲- سطوح با دو محور تقارن ۱۰۶
۶ - ۵ گشتاور دوم سطح (ممان اینرسی) (Moment of Inertia) ۱۱۰

۶-۶ قضیه محورهای موازی ۱۱۲
۶- ۷ محاسبه ممان اینرسی سطوح مرکب ۱۱۴
۶- ۸ مدول مقطع (اساس مقطع) (Section Modulus) ۱۱۵
۶- ۹ مشخصات هندسی مقاطع نوردشده ۱۱۹

بخش دوم - مقاومت مصالح

فصل هفتم - نیرو و تنشِ محوری

۷-۱ نیروهای محوری (Axial Load) ۱۲۹
۷-۲ تنش محوری (Axial Stress) ۱۳۰
۷-۳ تغییر طول اجسام تحت تاثیر بارهای محوری ۱۳۶

فصل هشتم - نیرو و تنشِ برشی

۸-۱ نیروی برشی (مماسی) ۱۴۲
۸-۲ تنش‌های برشی (مماسی) (Shear Stress) ۱۴۳
۸-۳ بررسی رفتار اتصالات برشی ساده با پیچ یا پرچ ۱۴۴
۸-۳-۱- تنش کششی حداکثر ایجاد شده در ورق‌ها ۱۴۴
۸-۳-۲- تنش لهیدگی ۱۴۵
۸-۳-۳- تنش برشی در پیچ‌ها یا پرچ‌ها ۱۴۵
۸-۳-۴- گسیختگی برشی ورق ۱۴۶

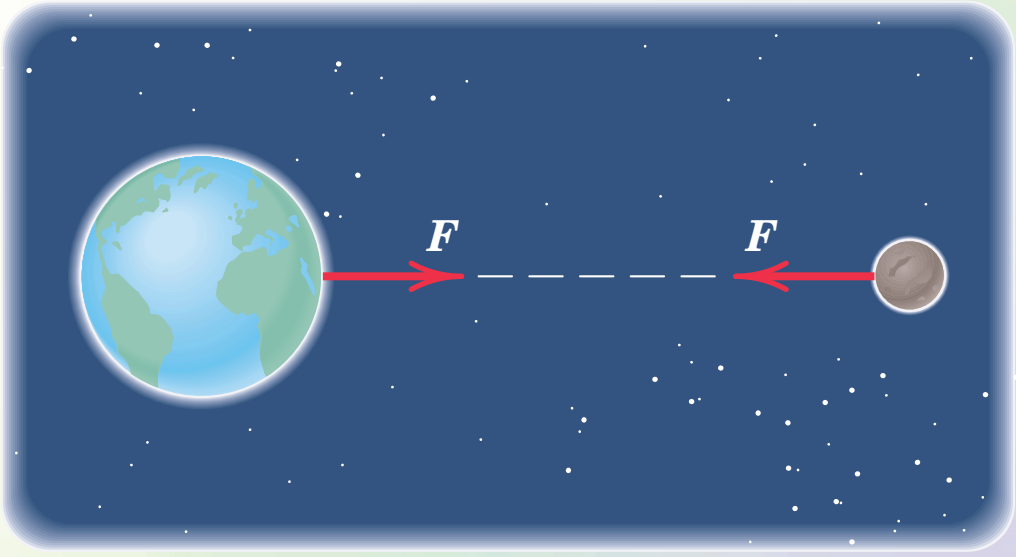
فصل نهم - تنش در تیرها

۹-۱ تنش خمشی در تیرها با مقطع متقارن ۱۵۲
۹-۱-۱- تنش‌های خمشی حداکثر در تیر ۱۵۳
۹-۲ تنش برشی متوسط تیرهای با مقطع I شکل (مطالعه آزاد) ۱۵۶
۹-۳ تعیین شمارهٔ مقطع تیر فولادی با استفاده از تنش خمشی ماکزیمم تحت بار متمرکز ... ۱۵۸

ضمیمه - جداول مشخصات نیم‌رخ‌های فولادی ۱۶۳
منابع و مآخذ ۱۷۰

فصل اول

مقدمه و مفاهیم عمومی



هدف‌های رفتاری

پس از آموزش این فصل از فراگیر انتظار می‌رود بتواند:

۱- علم مکانیک را تعریف نماید.

۲- حوزه‌های علم مکانیک را بشناسد.

۳- مفاهیم اصلی در علم مکانیک را بشناسد و تعریف نماید.

۴- فرضیات علم مکانیک را توضیح دهد.

۵- قوانین نیوتن را تعریف کند.

۶- کاربرد پیشوندهای واحدهای اندازه‌گیری را بداند.

مقدمه:

۱-۱ تعریف علم مکانیک:

علم مکانیک علمی است که شرایط سکون و حرکت اجسام تحت تاثیر نیرو را بررسی می‌کند.

حوزه‌های علم مکانیک:

۱- مکانیک اجسام صلب
- **استاتیک**: اجسام صلب ساکن را مورد بررسی قرار می‌دهد.
- **دینامیک**: اجسام صلب متحرک را مورد بررسی قرار می‌دهد.

۲- مکانیک اجسام تغییرشکل‌پذیر (مقاومت مصالح)

۳- مکانیک سیالات (مایعات و گازها)

در این کتاب از حوزه‌های فوق، در بخش اول با مکانیک اجسام صلب ساکن (استاتیک) و در بخش دوم تا حدودی با مکانیک اجسام تغییرشکل‌پذیر (مقاومت مصالح)آشنا می‌شویم.

تاریخ مهندسی (مطالعه آزاد)

محمد کرجی از نوابغ مهندسی ایران در بیش از هزار سال پیش بوده است.
کرجی در کتاب «استخراج آب‌های زیرزمینی» به‌وضوح از کرویّت زمین و قوهٔ جاذبه و قوانین تعادل و حرکت، که برخی از آن‌ها چندین قرن بعد توسط دانشمندان اروپایی مطرح شد سخن می‌گوید.

۱-۲ مفاهیم اصلی در علم مکانیک:

مفاهیم اصلی و مورد استفاده در علم مکانیک و معرفی یکاهای اندازه‌گیری آن‌ها در سامانهٔ بین‌المللی یکاها (SI) به شرح زیر می‌باشد.

۱-۲-۱- فضا (Space):

ناحیه هندسی است که رویدادهای فیزیکی در آن رخ می‌دهد. موقعیت هر نقطه در فضا را مکان می‌نامیم که نسبت به یک نقطهٔ مرجع تعیین می‌شود و واحد اندازه‌گیری آن در سامانهٔ SI ، متر (m) می‌باشد.

۱-۲-۲- زمان (Time):

فاصلهٔ بین وقوع دو رویداد فیزیکی زمان نام دارد و واحد اندازه‌گیری آن ثانیه (s) می‌باشد.

۱-۲-۳- جرم (Mass):

هر چیزی که فضا را اشغال نماید ماده نام دارد و جسم ماده‌ای است که به‌وسیلهٔ یک سطح بسته محدود شده است. مقدار مادهٔ تشکیل دهندهٔ هر جسم را جرم آن جسم می‌نامیم و واحد اندازه‌گیری آن کیلوگرم (kg) است.

۱-۲-۴- نیرو (Force):

تأثیر یک جسم بر جسم دیگر را نیرو می‌نامیم و واحد اندازه‌گیری آن نیوتن (N) است.

۱-۳ فرضیات:

در علم مکانیک به منظور ساده‌تر شدن حل مسائل، فرضیاتی به شرح زیر در نظر گرفته می‌شود.

۱) جسم صلب (Rigid Body):

جسمی است که در اثر اِعمال نیرو تغییر شکل ندهد.

۲) نقطه مادی (Particle):

جسمی است که از ابعاد آن صرف‌نظر می‌شود؛ به عنوان مثال می‌توان کره زمین را در فضا به صورت یک نقطه مادی در نظر گرفت.

۱-۴ قوانین نیوتن:

مکانیک اجسام صلب بر اساس قوانین نیوتن به‌شرح زیر استوار است:

۱-۴-۱- قانون اول نیوتن:

هرگاه مجموع نیروهای وارد بر یک جسم صفر باشد:

- اگر جسم ساکن باشد تا ابد ساکن باقی می‌ماند.
- اگر در حال حرکت باشد به حرکت یکنواخت و مستقیم‌الخط خود ادامه می‌دهد.

۱-۴-۲- قانون دوم نیوتن:

هرگاه مجموع نیروهای وارد بر یک جسم صفر نباشد، آن جسم شتابی متناسب با مجموع نیروها و در راستای آن می‌گیرد. قانون دوم نیوتن با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$F = m.a \qquad (۱-۱)$$

در این رابطه:

F مجموع نیروهای وارد بر جسم بر حسب **N**

m جرم جسم بر حسب **kg**

a شتاب ایجاد شده در جسم بر حسب $\frac{m}{s^2}$ می‌باشد.

یک مورد خاص و بسیار مهم این قانون وزن اجسام است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف وزن (Weight):

وزن نیرویی است که از طرف زمین به اجسام وارد می‌شود و با رابطه (۱-۲) بیان می‌گردد که شباهت زیادی با رابطه **F=m.a** دارد.

$$w = m.g \qquad (۱-۲)$$

w : وزن جسم بر حسب نیوتن

m : جرم جسم بر حسب **kg**

g : شتاب جاذبه زمین معادل ($g = ۹/۸۱ \simeq ۱۰ \frac{m}{s^2}$) می‌باشد.

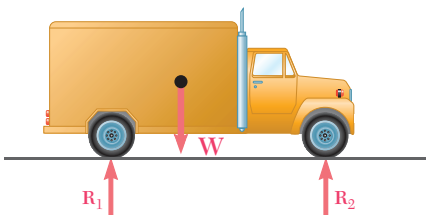
تذکر:

واحد دیگر وزن، کیلوگرم‌نیرو (**kgf**) می‌باشد که معادل ۱۰ نیوتن است یعنی:

$$۱kgf \simeq ۱۰\ N$$

۱-۴-۳- قانون سوم نیوتن:

هر عملی را عکس‌العملی است مساوی با آن و در جهت خلاف آن.



شکل ۱-۱

یادآوری:

در این کتاب از سامانه بین‌المللی واحدهای اندازه‌گیری (SI) استفاده می‌کنیم که در اکثر کشورها نیز پذیرفته شده است.

واحدهای اندازه‌گیری کمیت‌ها در کتاب محاسبات فنی ساختمان بیان گردیده و در این جا به منظور تکمیل آن پیشوندهای واحدهای اندازه‌گیری را یادآوری می‌نمائیم و مزیت استفاده از این پیشوندها این‌است‌که از نوشتن اعداد خیلی بزرگ و خیلی کوچک اجتناب می‌شود. به عنوان مثال می‌توان N ۲۴۷۵۰۰ را به صورت kN ۲۴۷/۵ و یا m ۰/۰۰۵۴۶ را به شکل mm ۵/۴۶ نوشت.

تذکر:

بین پیشوند و واحد اندازه‌گیری مورد نظر از هیچ علامتی استفاده نمی‌شود اما بین دو واحد اندازه‌گیری مختلف هر علامتی نظیر × و / می‌تواند وجود داشته باشد به طور مثال:

N.m یعنی نیوتن‌متر و nm یعنی نانومتر که معادل (10^{-9} m) می‌باشد.

مثال: MN 10^{-5} × ۷/۵ چند نیوتن است؟

$۷/۵\times۱۰^{-۵}\times۱۰^{۶}=۷۵$ N

جدول (۱-۱) پیشوندهای آحاد اندازه‌گیری

شکل توانی	مقدار عددی	علامت اختصاری	نام پیشوند
10^{-12}	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱	p	پیکو
10^{-9}	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۱	n	نانو
10^{-6}	۰/۰۰۰۰۰۱	μ	میکرو
10^{-3}	۰/۰۰۱	m	میلی
10^{3}	۱,۰۰۰	K	کیلو
10^{6}	۱,۰۰۰,۰۰۰	M	مگا
10^{9}	۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰	G	گیگا
10^{12}	۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰	T	ترا

خودآزمایی

۱- اصطلاحات زیر را تعریف کنید:

علم مکانیک - استاتیک - دینامیک - جسم صلب - نقطهٔ مادی

۲- علم مکانیک به چند حوزه تقسیم می‌شود؛ نام ببرید.

۳- مفاهیم اصلی در علم مکانیک را نام برده و هر یک را توضیح دهید.

۴- قوانین نیوتن را نام برده و هر یک را توضیح دهید.

۵- جرم جسمی **kg** ۶۰ است. وزن آن را بر حسب **N** و **kgf** محاسبه کنید.

۶- به واحدهای خواسته شده تبدیل کنید:

الف) $۱/۵\ \text{kN} = ?\ \text{N}$

ب) $\text{kN.cm} = ?\ \text{N.m}$

ج) $۱۲\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^۲} = ?\ \text{M}\frac{\text{N}}{\text{m}^۲}$

د) $۲۵\ \text{MN.m} = ?\ \text{N.cm}$

ه) $۲\ \mu\text{N.Mm} = ?\ \text{N.m}$

و) $۱\ \frac{\text{kN}}{\text{mm}^۲} = ?\ \frac{\text{N}}{\text{m}^۲}$

ز) $۱۸\ \frac{\text{kN}}{\text{mm}^۲} = ?\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^۲}$

تاریخ مهندسی (مطالعه آزاد)

اخوان‌الصفا گروهی از متفکران و فیلسوفان بودند که در سال ۳۷۳ هجری در بصره به‌صورت انجمنی مخفی گرد آمدند. نام افراد این انجمن تماماً مشخص نیست ولی بعضی از افراد این گروه، ایرانی بوده‌اند: ابوسلیمان محمدبن مشیر بستی مقدسی و ابوالحسن علی‌بن هارون زنجانی و محمدبن احمد نهرجوری از جمله ایرانیان اخوان‌الصفا بوده‌اند.

گزیده‌ای از نظرات اخوان‌الصفا دربارهٔ پدیدارهای طبیعی که در بخشی از رسایل آن‌ها موسوم به «حدود و رسوم» آمده است تعاریف بنیادی استاتیک و مقاومت مصالح است که در زیر نقل گردیده‌اند.

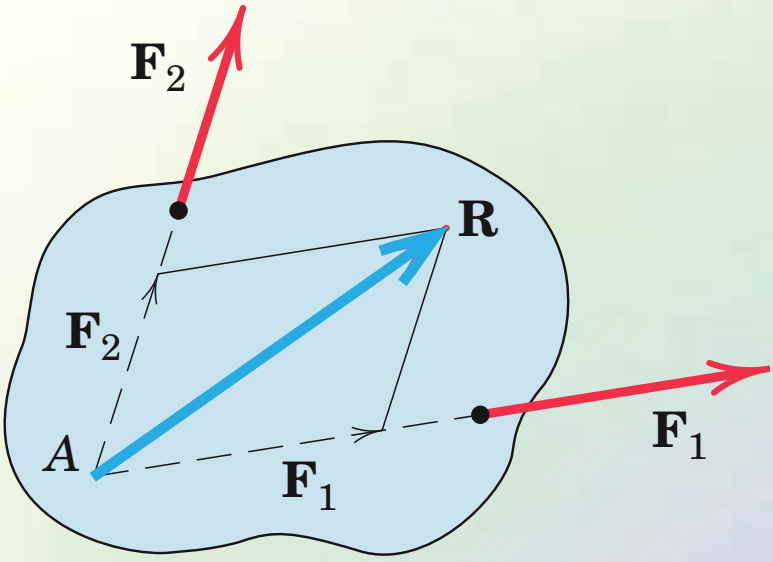
مکان: هر موضوعی که شیء متمکن را در بر گیرد، و آن نهایات جسم است.

زمان: شمارهٔ حرکت‌های سپهر، و تکرار شب و روز است.

جسم: هر چیزی که طول و عرض و عمق داشته باشد.

فصل دوم

بُردارها



هدف‌های رفتاری

پس از آموزش این فصل از فراگیر انتظار می‌رود بتواند:

۱- کمیت‌های فیزیکی را بشناسد.

۲- انواع بردارها را تعریف نماید.

۳- جمع و تفریق بردارها را به روش ترسیمی انجام دهد.

۴- یک بردار را به مؤلفه‌های آن تجزیه نماید.

۵- نمایش برداری بردارها را بداند.

۶- مقدار بردار را با استفاده از مؤلفه‌های متعامد آن محاسبه نماید.

۲-۱ کمیت‌های فیزیکی

۲-۱-۱- کمیت‌های عددی یا اسکالر

کمیت‌هایی هستند که فقط دارای اندازه یا مقدار می‌باشند؛ مانند جرم، زمان، طول و کار و انرژی.

۲-۱-۲- کمیت‌های برداری

کمیت‌هایی هستند که علاوه بر مقدار دارای جهت و راستا نیز می‌باشند. مانند: بردارهای نیرو، گشتاور، سرعت، شتاب و جابجایی.

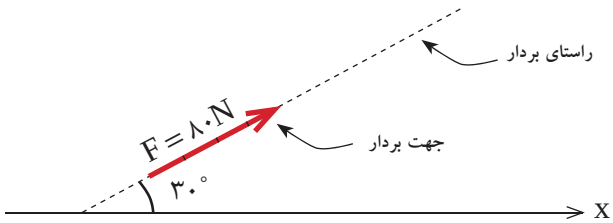
۲-۲ بردارها (Vector)

هر بردار به صورت یک پیکان با طولی متناسب با مقدار آن ترسیم می‌شود

به عنوان مثال در شکل (۲-۱)، بردار نیروی ($\vec{F}$) با مقدار N ۸۰ و با زاویه 30° نسبت به محور x و در جهت و راستای نشان داده شده ترسیم شده است.

نکته:

زاویه امتداد هر بردار، با یک امتداد مبنا که معمولاً امتدادهای x یا y است، مشخص می‌شود.

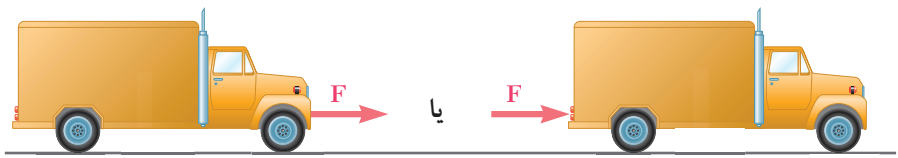


شکل ۲-۱

۲-۳ انواع بردارها

۲-۳-۱- بردار لغزان

برداری است که اگر در راستای خود جابه‌جا شود، اثر آن بر جسم تغییر ننماید. همانند نیروی **F** در شکل (۲-۲)



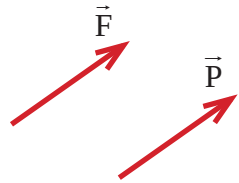
شکل ۲-۲

۲-۳-۲- بردار ثابت

برداری است که مکان معینی را در فضا اشغال می‌کند و نمی‌توان آن‌را جابجا نمود. یعنی با جابه‌جا کردن آن، اثر آن بر جسم تغییر می‌نماید. مثلاً ضربه‌ای که به سر انسان وارد می‌شود با ضربه‌ای که با همان مقدار و همان جهت به پای او وارد می‌آید متفاوت است.

۲-۳-۳- بردارهای هم‌سنگ

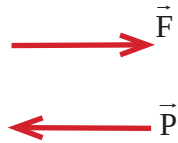
دو بردار مساوی، موازی و هم‌جهت را بردارهای هم‌سنگ می‌نامیم. در شکل (۲-۳) بردارهای $\vec{F}$ و $\vec{P}$ هم‌سنگ‌اند.



شکل ۲-۳

۲-۳-۴- بردارهای زوج

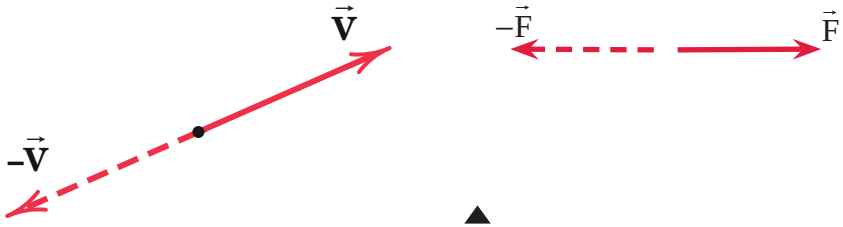
دو بردار مساوی، موازی و مختلف‌الجهت را بردارهای زوج می‌نامیم. در شکل (۲-۴) بردارهای $\vec{F}$ و $\vec{P}$ زوج‌اند.



شکل ۲-۴

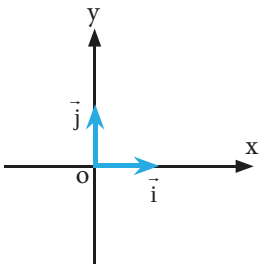
۲-۳-۵- بردارهای مخالف

دو بردار مساوی، هم‌راستا و مختلف‌الجهت را بردارهای مخالف گویند. شکل (۲-۵)



شکل ۲-۵

۲-۳-۶- بردار یکه (واحد)



شکل ۲-۶

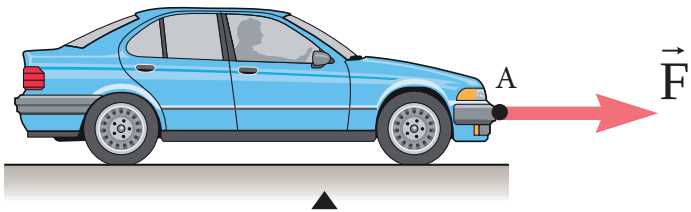
برداری که مقدار (اندازه) آن برابر واحد است را بردار یکه یا واحد می‌نامیم.

بردار واحد روی محور **x** ها را با $\vec{i}$ و روی محور **y** ها را با $\vec{j}$ نمایش می‌دهند. شکل (۲-۶)

۲-۳-۷- بردار نیرو

برداری است که علاوه بر مقدار، جهت و راستا دارای نقطه اثر نیز می‌باشد. در شکل (۲-۷) نقطه **A** ، نقطه‌اثر بردار نیروی $\vec{F}$ می‌باشد.

و واحد اندازه‌گیری نیرو، نیوتن (**N**) است و مطابق قانون دوم نیوتن به صورت زیر تعریف می‌شود:



شکل ۲-۷

تعریف نیوتن با استفاده از قانون دوم نیوتن

یک نیوتن مقدار نیرویی است که اگر به جرم یک کیلوگرم وارد شود، در آن شتابی معادل یک متر بر مجذور ثانیه و در جهت اِعمال نیرو ایجاد نماید.

$$F = m.a$$

$$1N = 1kg \times 1\frac{m}{s^2}$$

۲-۴ جمع و تفریق بردارها

عملیات جمع و تفریق کمیت‌های برداری با جمع و تفریق کمیت‌های عددی (اسکالر) متفاوت است. یعنی نمی‌توان مقادیر عددی دو یا چند بردار، به‌غیر از بردارهای هم‌راستا، و موازی را با یکدیگر جمع و یا تفریق نمود. در این کتاب برای نشان دادن یک بردار مانند $\vec{V}$ از علامت (⟶) در بالای آن استفاده می‌شود و برای نشان دادن مقدار (اندازه) آن بردار علامت (⟶) بالای آن برداشته می‌شود.

$\vec{V}$: بردار V

V : اندازه یا مقدار بردار V

۲-۴-۱- روش‌های جمع و تفریق بردارها

جمع و تفریق بردارها به دو روش ۱- ترسیمی ۲- محاسباتی انجام می‌شود که در این فصل با روش ترسیمی و در فصل بعد با روش‌های محاسباتی آشنا خواهید شد.

۲-۴-۱-۱- روش ترسیمی

در این روش با استفاده از وسایل ترسیم و مقیاس مناسب جمع و تفریق بردارها انجام می‌شود. روش‌های ترسیمی جمع و تفریق بردارها شامل سه روش زیر می‌باشد:

الف) روش مثلث

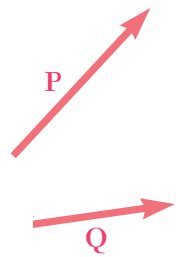
ب) روش متوازی‌الاضلاع

ج) روش چندضلعی

لازم به ذکر است که روش‌های مثلث و متوازی‌الاضلاع برای مجموع یا تفاضل دو بردار و روش چندضلعی برای مجموع یا تفاضل بیش از دو بردار مناسب می‌باشند.

الف) روش مثلث

دو بردار $\vec{P}$ و $\vec{Q}$ مطابق شکل (۲-۸) مفروض است. برای به‌دست آوردن مجموع آن‌ها یعنی $\vec{P}+\vec{Q}$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:



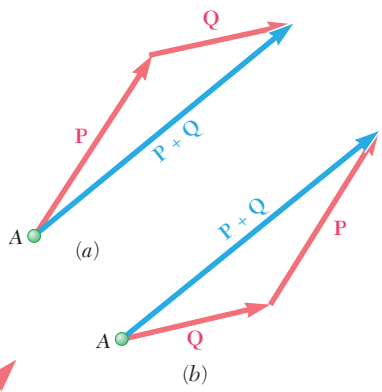
شکل ۲-۸

۱) از نقطه دلخواه مانند **A** هم‌سنگ یکی از بردارها ترسیم می‌شود

۲) از انتهای بردار اول هم‌سنگ بردار دوم ترسیم می‌شود

۳) برداری که از ابتدای بردار اول به انتهای بردار دوم وصل می‌شود مجموع دو بردار خواهد بود که مقدار آن به‌وسیلهٔ خط‌کش مقیاس اندازه‌گیری می‌شود: شکل (۲-۹)

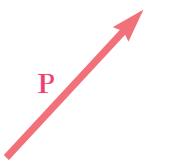
$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} \qquad (۱-۲)$$



شکل ۲-۹

ب) روش متوازی‌الاضلاع

دو بردار $\vec{P}$ و $\vec{Q}$ مطابق شکل (۲-۱۰) مفروض است و مجموع آن‌ها یعنی $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$ مدنظر می‌باشد. طبق قانون متوازی‌الاضلاع به شرح زیر عمل می‌نمائیم: شکل (۲-۱۱)

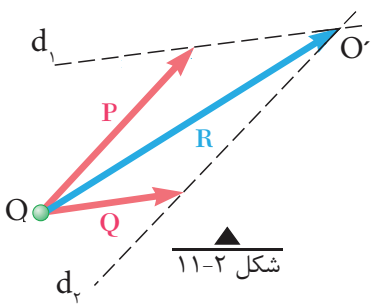


شکل ۲-۱۰

۱) از نقطه دلخواه مانند **O** هم‌سنگ بردارهای $\vec{P}$ و $\vec{Q}$ را ترسیم می‌نمائیم

۲) از انتهای بردار $\vec{P}$ به موازات بردار $\vec{Q}$ خطی ترسیم می‌شود (خط d_1)

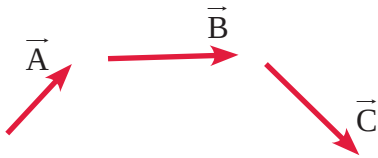
۳) از انتهای بردار $\vec{Q}$ به موازات بردار $\vec{P}$ خطی ترسیم می‌شود (خط d_2) تا خط d_1 را در نقطه **O'** قطع نماید.



شکل ۲-۱۱

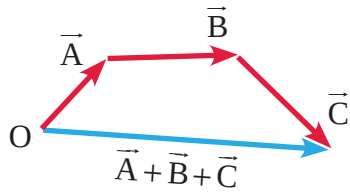
۴) برداری که از **O** به **O'** ترسیم می‌شود همان مجموع دو بردار $\vec{P}$ و $\vec{Q}$ یعنی $\vec{R}$ خواهد بود که مقدار آن به وسیله خط‌کش مقیاس برداشت می‌شود.

ج) روش چندضلعی



شکل ۲-۱۲

در این روش به منظور ترسیم مجموع چند بردار مانند شکل (۲-۱۲) از یک نقطه دلخواه مانند **O** هم‌سنگ بردار اول را رسم می‌کنیم و از انتهای بردار رسم شده هم‌سنگ بردار دوم ترسیم می‌شود. این روند تا ترسیم تمامی بردارها ادامه می‌یابد؛ برداری که از ابتدای بردار اول به انتهای بردار آخر رسم می‌شود، مجموع بردارها خواهد بود. شکل (۲-۱۳)



شکل ۲-۱۳

نکته ۱)

هر گاه انتهای آخرین بردار بر ابتدای بردار اول منطبق گردد (یک چندضلعی بسته تشکیل شود)، مجموع بردارها صفر خواهد بود.

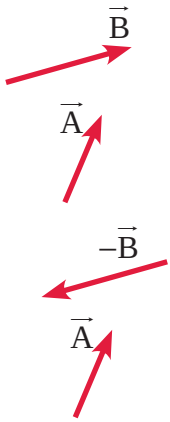
نکته ۲)

در حالتی که بردارها موازی یا هم‌راستا باشند، برای جمع و تفریق آن‌ها کافی‌است با در نظر گرفتن جهت بردارها، آن‌ها را روی یک محور ترسیم نمود.

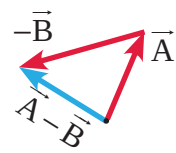
تذکر:

عملیات تفریق دو یا چند بردار به روش‌های فوق با استفاده از تعریف بردار مخالف مطابق شکل (۲-۱۴) امکان‌پذیر است. یعنی:

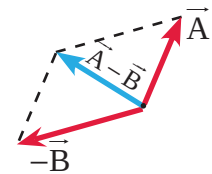
$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B}) \qquad (۲-۲)$$



شکل ۲-۱۴



تفاضل بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$
به روش مثلث

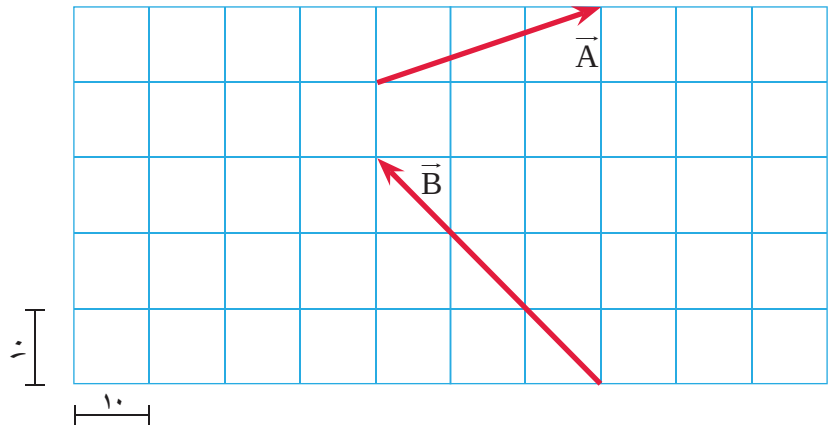


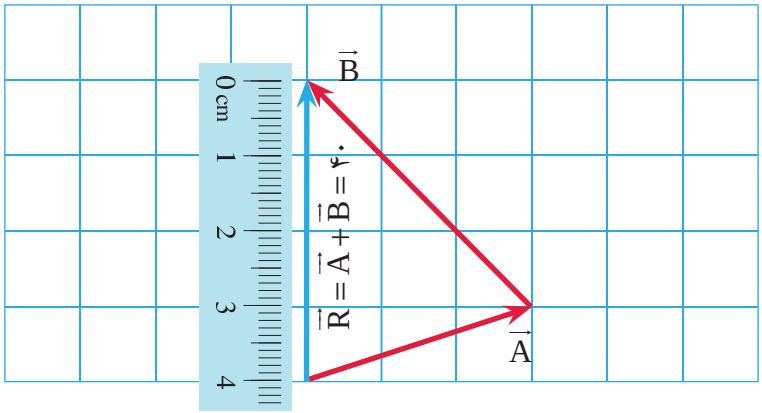
تفاضل بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$
به روش متوازی‌الاضلاع

مثال ۱

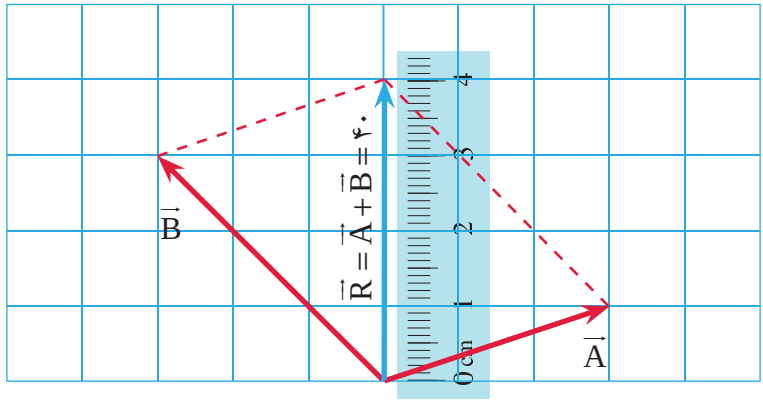
در شکل زیر بردارهای $\vec{A}+\vec{B}$ و $\vec{A}-\vec{B}$ را به روش‌های ترسیمی مثلث و متوازی‌الاضلاع نشان داده و اندازهٔ تقریبی آن‌ها را با خط‌کش مقیاس برداشت نمایید.

(ابعاد شبکه برابر ۱۰ واحد است)

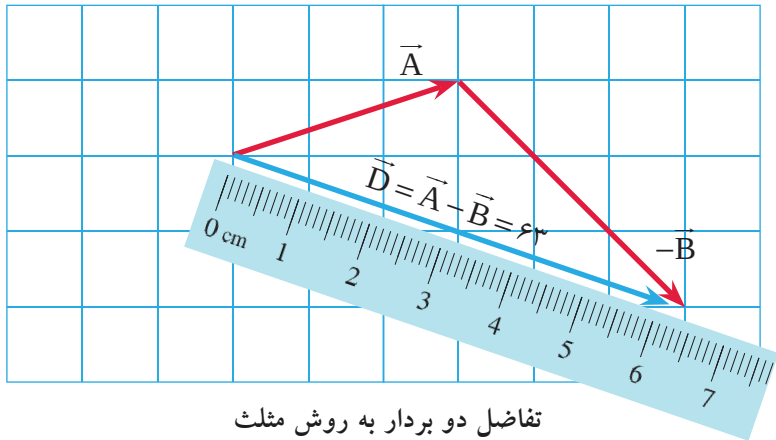




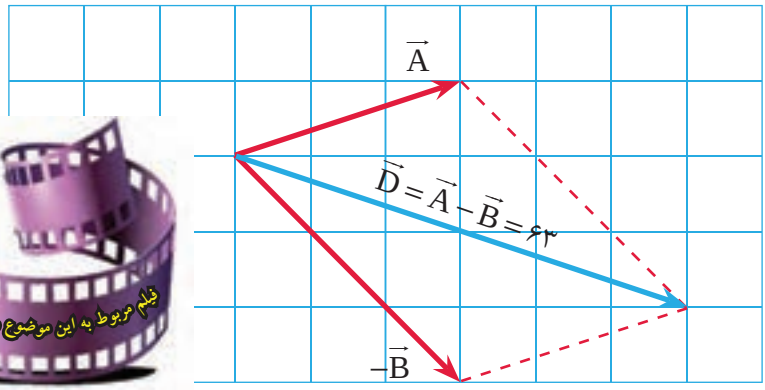
مجموع دو بردار به روش مثلث



مجموع دو بردار به روش متوازی‌الاضلاع



تفاضل دو بردار به روش مثلث



تفاضل دو بردار به روش متوازی‌الاضلاع

خودآزمایی

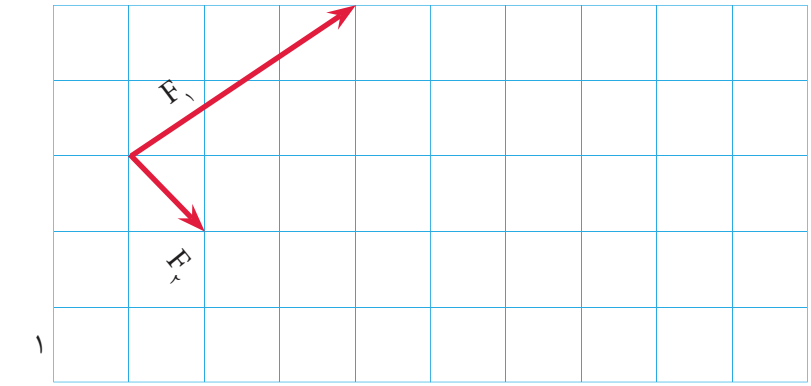
۱- کمیت‌های فیزیکی را نام برده و هر یک را تعریف کنید و مثال بزنید.

۲- از کمیت‌های زیر کدام‌یک اسکالر و کدام‌یک برداری می‌باشند؟

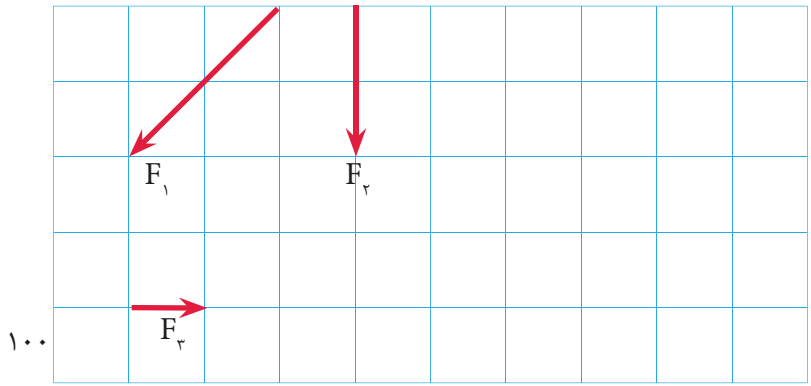
شتاب - وزن - سطح - حجم - جابه‌جایی

۳- انواع بردارها را نام برده و هر کدام را تعریف کنید.

۴- در هر شکل جمع بردارهای داده شده را به روش ترسیمی نشان دهید و اندازه و زاویهٔ بردار برآیند (مجموع آن‌ها) با امتداد افق را با استفاده از خط‌کش و نقاله اندازه‌گیری نمائید.

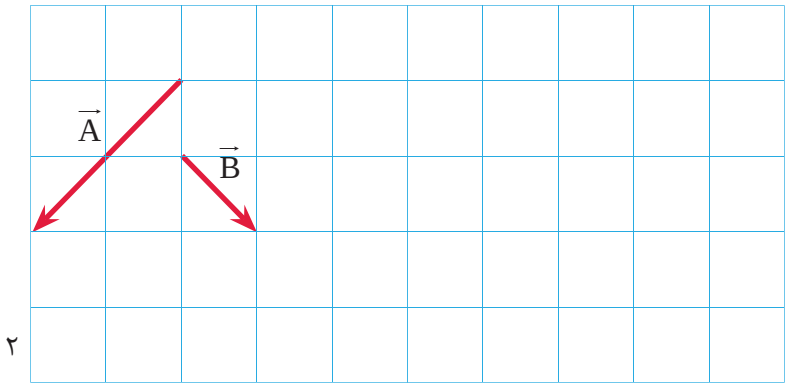


(الف)

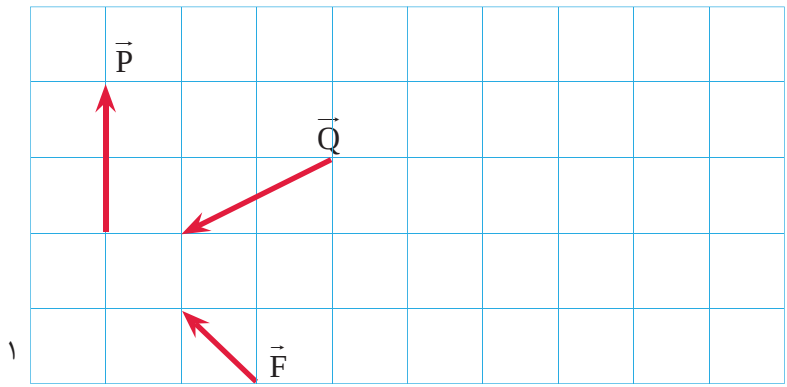


(ب)

۵- در شکل‌های زیر حاصل عبارات $\vec{A}-\vec{B}$ و $\vec{F}-\vec{P}+\vec{Q}$ را به روش ترسیمی تعیین کنید.



(الف)



(ب)

۲-۵ تجزیهٔ یک بردار به مؤلفه‌های آن به روش ترسیمی

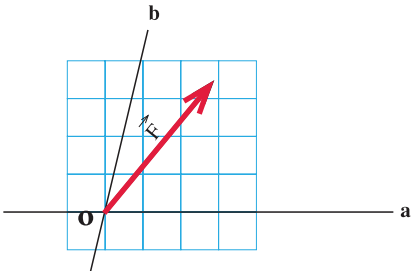
همان‌گونه که در قسمت قبل دیدیم دو بردار با امتداد و مقادیر مشخص را می‌توان با استفاده از روش‌های مثلث یا متوازی‌الاضلاع با یکدیگر جمع نمود و مجموع آن‌ها را به‌دست آورد؛ که این بردارِ مجموع را برآیند دو بردار اولیه نیز می‌نامند. حال چنان‌چه دو امتداد دلخواه در صفحه داشته باشیم و برداری به نام $\vec{F}$ نیز داده شده باشد می‌توان آن را بر روی دو امتداد مورد نظر به شرح ذیل تجزیه نمود که عکس عمل جمع دو بردار می‌باشد. شکل‌های (۲-۱۵) و (۲-۱۶)

۱) از انتهای بردار $\vec{F}$ دو خط به موازات محورهای **a** و **b** ترسیم نموده (خطوط **a'** و **b'**) تا آن‌ها را در نقاط O_1 و O_2 قطع نماید.

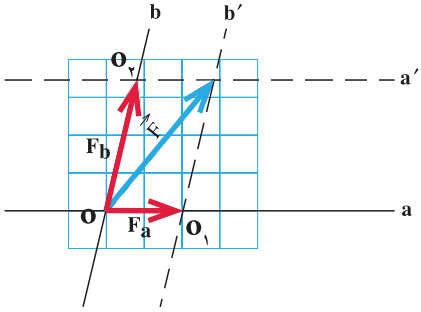
۲) بردار $\overrightarrow{OO_1}$ مؤلفهٔ $\vec{F}$ روی امتداد **a** خواهد بود که با $\overrightarrow{F_a}$ نشان داده می‌شود.

۳) بردار $\overrightarrow{OO_2}$ مؤلفهٔ $\vec{F}$ روی امتداد **b** خواهد بود که با نماد $\overrightarrow{F_b}$ نشان داده می‌شود.

روش فوق، روش کلی برای تجزیهٔ یک بردار است. حالت خاصی از آن تجزیهٔ یک بردار روی دو محور متعامد (عمود بر هم) است که کاربرد زیادی در حل مسائل ایستایی دارد.



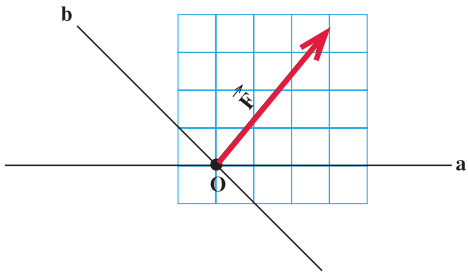
شکل ۲-۱۵



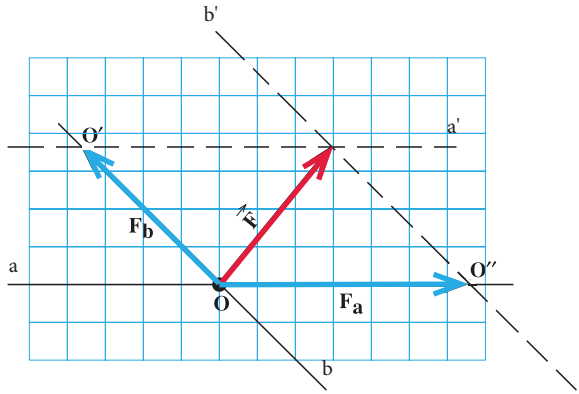
شکل ۲-۱۶

مثال ۲

در شکل روبه‌رو بردار **F** را روی امتدادهای **a** و **b** تجزیه کنید.

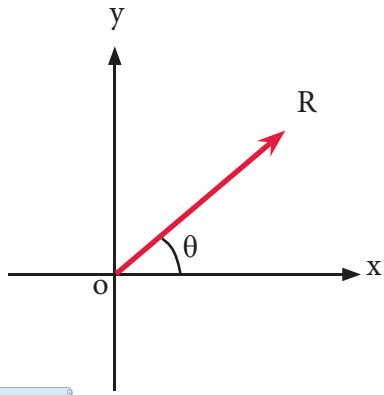


حل:



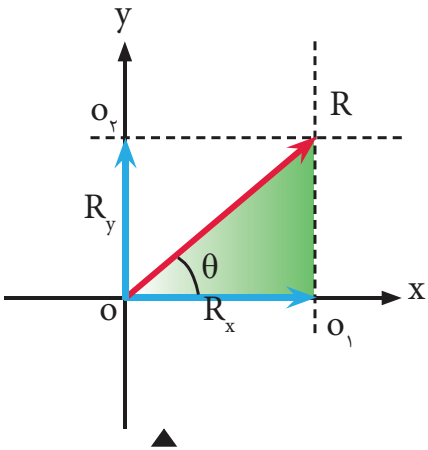
۶-۲ تجزیهٔ یک بردار به مؤلفه‌های متعامد آن در دستگاه مختصات دکارتی

مطابق شکل (۲-۱۷) بردار $\vec{R}$ با زاویه θ نسبت به محور **x** مفروض است. می‌خواهیم آن را روی محورهای متعامد **x** و **y** تجزیه نمائیم. چنان‌چه مطابق مراحل سه‌گانه در بخش (۲-۵) عمل کنیم، به شکل (۲-۱۸) خواهیم رسید.



شکل ۲-۱۶

اندازه یا مقدار مؤلفه‌های R_x و R_y با استفاده از روابط مثلثاتی در مثلث رنگ شدهٔ شکل (۲-۱۸) به شکل زیر محاسبه می‌شوند:



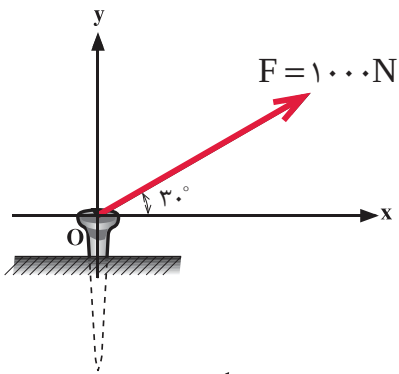
شکل ۲-۱۸

$$\cos\theta = \frac{R_x}{R} \Rightarrow R_x = R.\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{R_y}{R} \Rightarrow R_y = R.\sin\theta \qquad (۳-۲)$$

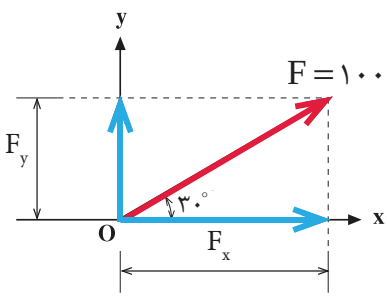
مثال ۳

نیروی **F** مطابق شکل بر میخی وارد می‌شود. مطلوب‌است تجزیه این نیرو روی محورهای **x** و **y** و محاسبه مقادیر مؤلفه‌ها.



حل:

نیروی **F** را به مؤلفه‌های متعامد تجزیه می‌کنیم.



$$F_x = F\cos\theta = ۱۰۰۰ \times \cos ۳۰^\circ \Rightarrow \boxed{F_x = ۸۶۶/۰۲\ N}$$

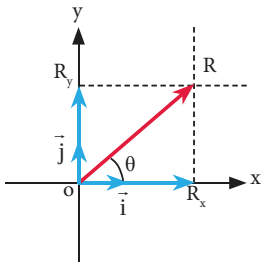
$$F_y = F\sin\theta = ۱۰۰۰ \times \sin ۳۰^\circ \Rightarrow \boxed{F_y = ۵۰۰\ N}$$

۲-۶-۱- نمایش برداری یک بردار در دستگاه مختصات دکارتی

در دستگاه مختصات دکارتی محورهای **ox** و **oy** بر یکدیگر عمود بوده و بردارهای واحد (یکه) روی آن‌ها به ترتیب با $\vec{i}$ و $\vec{j}$ نمایش داده می‌شوند و برداری مانند بردار $\vec{R}$ مطابق شکل (۲-۱۹) در این دستگاه با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j} \qquad (۴-۲)$$

که در رابطهٔ فوق R_x مؤلفهٔ $\vec{R}$ روی محور **x** و R_y مؤلفهٔ $\vec{R}$ روی محور **y** می‌باشد.



شکل ۲-۱۹

مثال ۴

فرم برداری بردار **F** در شکل (مثال ۳) را بنویسید.

حل:

فرم برداری بردار $\vec{F}$ به صورت $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j}$ می‌باشد.

با توجه به نتایج مثال ۳ داریم:

$$F_x = ۸۶۶/۰۲N$$

$$F_y = ۵۰۰N$$

بنابراین:

$$\vec{F} = ۸۶۶/۰۲\vec{i} + ۵۰۰\vec{j}$$

۲-۷ تعیین اندازهٔ یک بردار با استفاده از مؤلفه‌های متعامد آن

همان‌طور که یک بردار را می‌توان به دو مؤلفه روی امتدادهای مختلف تجزیه کرد می‌توان به کمک مؤلفه‌های یک بردار، اندازهٔ بردار و زاویهٔ آن‌را به کمک رابطهٔ فیثاغورث و نسبت‌های مثلثاتی تعیین کرد.

هر گاه برداری مانند $\vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j}$ داشته باشیم، می‌توان اندازه **R** و زاویه آن‌را با امتداد **x** به صورت زیر تعیین نمود:

مقدار (اندازه) بردار **R**

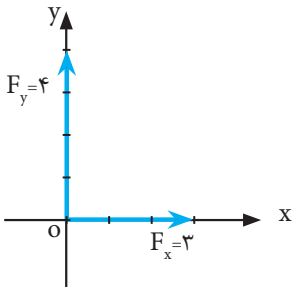
$$R = \sqrt{R_x^{۲} + R_y^{۲}} \qquad (۵-۲)$$

زاویه بردار **R** نسبت به محور **x** ها

$$\theta = \tan^{-۱}\left|\frac{R_y}{R_x}\right| \qquad (۶-۲)$$

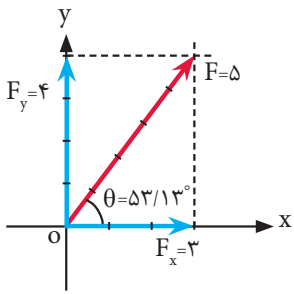
مثال ۵

بردار $\vec{F} = (۳\ \vec{i} + ۴\ \vec{j})$ را ترسیم نموده، مقدار و زاویهٔ آن‌را با محور **x** ها به‌دست آورید.



$$F = \sqrt{F_x^{۲} + F_y^{۲}} \Rightarrow F = \sqrt{۳^{۲} + ۴^{۲}} \Rightarrow \boxed{F = ۵}$$

$$\theta = \tan^{-۱}\left|\frac{F_y}{F_x}\right| \Rightarrow \theta = \tan^{-۱}\left|\frac{۴}{۳}\right| \Rightarrow \boxed{\theta = ۵۳/۱۳^\circ}$$



خلاصه فصل

- کمیت‌های فیزیکی به دو دستهٔ کلی تقسیم می‌شوند:
الف- کمیت‌های اسکالر (عددی) ب- کمیت‌های برداری
- بردارهای یکه (واحد) روی محورهای **x** و **y** در دستگاه مختصات دکارتی به ترتیب با $\vec{i}$ و $\vec{j}$ نمایش داده می‌شوند.
- جمع و تفریق کمیت‌های برداری با جمع و تفریق کمیت‌های عددی متفاوت می‌باشد.
- جمع و تفریق دو یا چند بردار به صورت ترسیمی با روش‌های مثلث و متوازی‌الاضلاع و چندضلعی، انجام می‌شود.
- هر بردار را می‌توان روی دو محور دلخواه به مؤلفه‌های آن تجزیه نمود.
- مؤلفه‌های متعامد یک بردار در صفحه مختصات دکارتی با روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$R_x = R.\cos\theta$$
$$R_y = R.\sin\theta$$

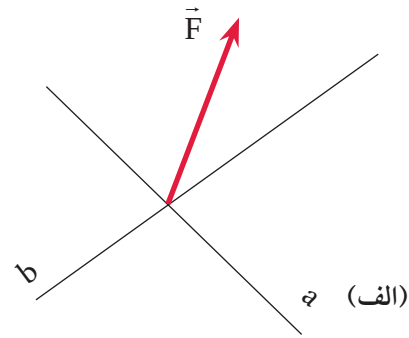
- فرم برداری یک بردار با استفاده از مؤلفه‌های متعامد آن در صفحهٔ مختصات دکارتی عبارت‌است از: $\vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j}$
- برای جمع و تفریق بردارهای هم‌راستا و یا موازی کافی است اندازهٔ آن‌ها را با یکدیگر به صورت جبری جمع و یا تفریق نمود.
- اندازه برداری مانند $\vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j}$ و زاویهٔ آن با محور **x** ها از روابط زیر تعیین می‌شوند:

اندازه بردار **R**
$$R = \sqrt{R_x^{۲} + R_y^{۲}}$$

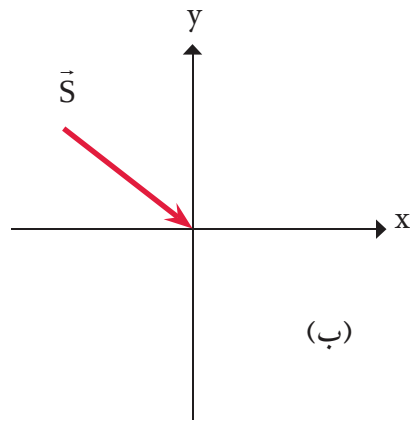
زاویه بردار **R** با محور **x**
$$\theta = \tan^{-۱}\left|\left(\frac{R_y}{R_x}\right)\right|$$

خودآزمایی

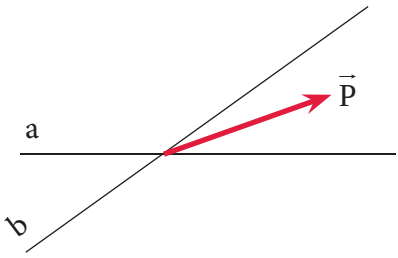
۱- بردارهای زیر را به روش ترسیمی روی محورهای داده شده تجزیه کنید.



(الف)

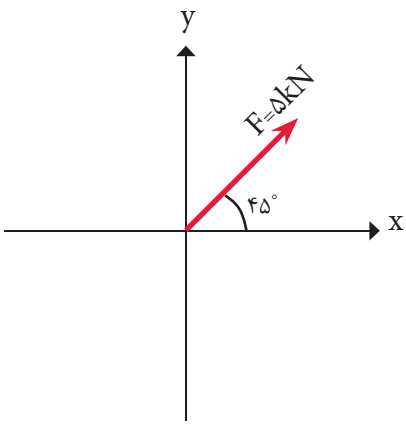


(ب)

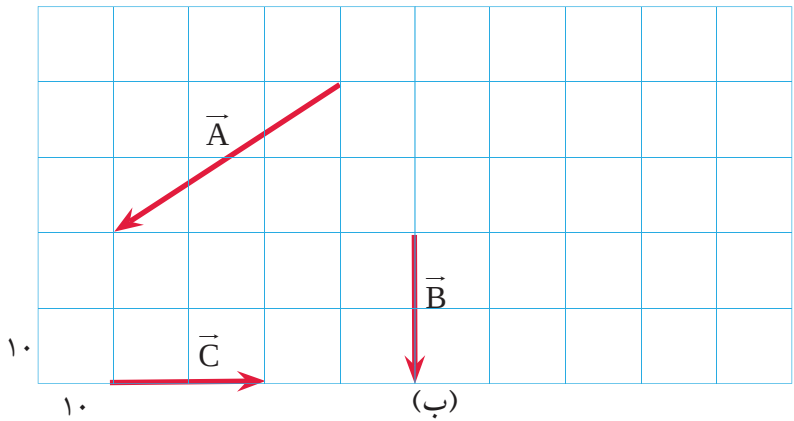


(ج)

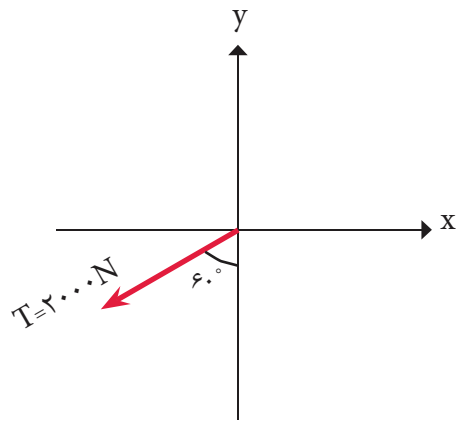
۲- بردارهای زیر را به مؤلفه‌های متعامد آن تجزیه نمائید و فرم برداری آن‌ها را بنویسید.



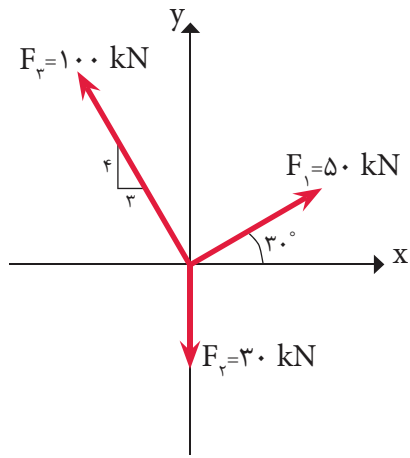
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

۳- بردارهای زیر را ترسیم نموده و اندازه و زاویه هر یک را نسبت به محور x و y تعیین کنید.

الف) $\vec{F} = -۴\vec{i} + ۳\vec{j}$ ب) $\vec{P} = -۵\vec{i}$

ج) $\vec{T} = ۳/۵\vec{j}$ د) $\vec{Q} = -۳\vec{i} - ۳\vec{j}$

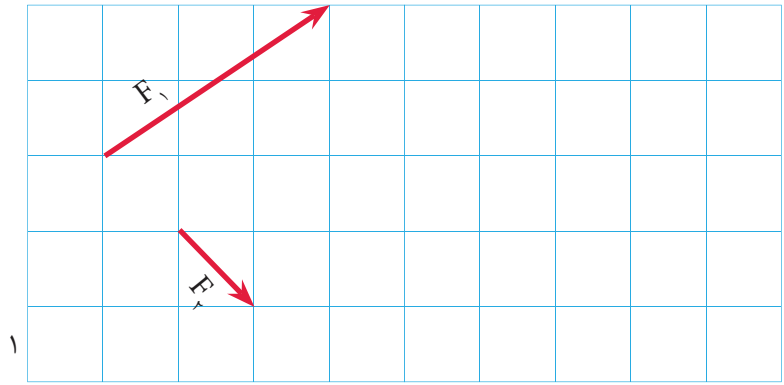
۴- در شکل‌های زیر مطلوب است:

الف) فرم برداری هر بردار.

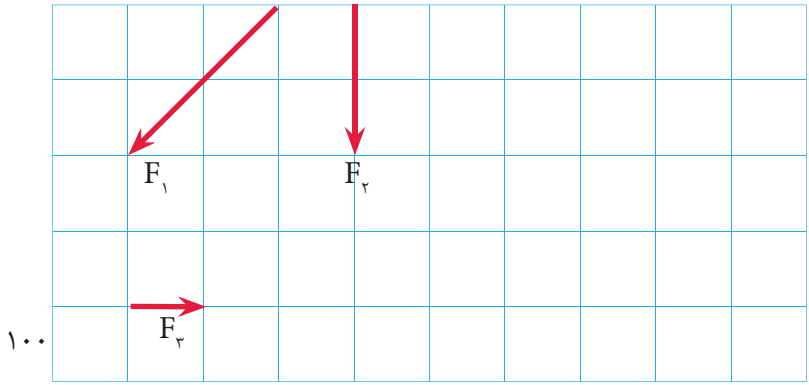
ب) اندازه هر یک را به صورت ترسیمی (با خط‌کش) به‌دست آورید.

ج) اندازه هر یک را به صورت محاسباتی به‌دست آورید.

د) اندازه‌های محاسباتی و ترسیمی هر بردار را با هم مقایسه کنید.



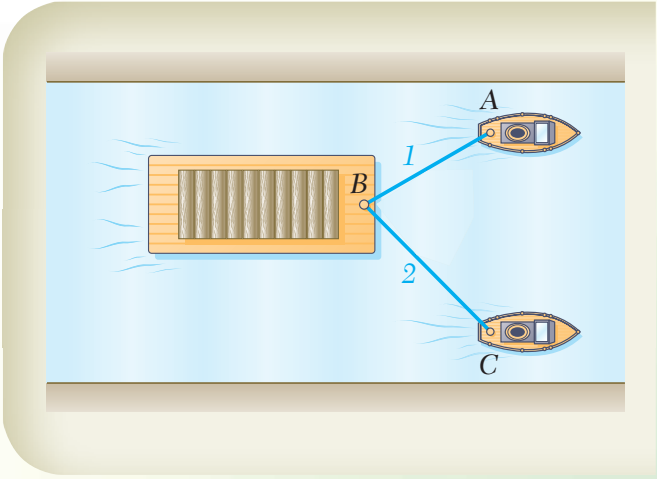
(الف)

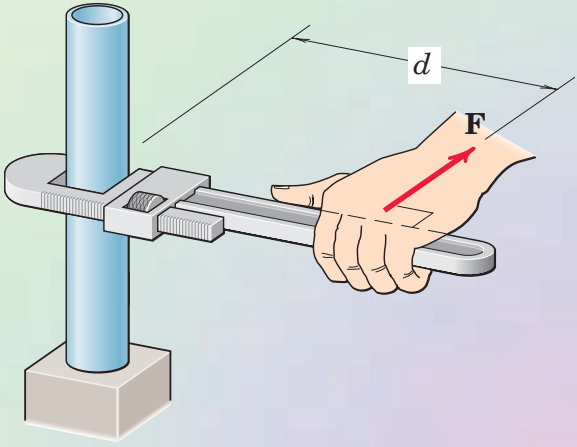


(ب)

فصل
سوم

نیرو و سامانه‌های نیرویی





بخش اول – استاتیک

هدف‌های رفتاری

پس از آموزش این فصل از فراگیر انتظار می‌رود بتواند:

۱- انواع نیروها را بشناسد.

۲- مقدار و امتداد برآیند نیروهای وارد بر یک نقطهٔ مادی را محاسبه کند.

۳- گشتاور یا لنگر را تعریف نماید و مقدار آن‌را نسبت به یک نقطه محاسبه نموده و جهت آن‌را تشخیص دهد.

۴- قضیه وارینون را تعریف کند و برای محاسبهٔ گشتاور آن‌را به‌کار گیرد.

۵- زوج نیرو را تعریف نماید و خصوصیات آن‌را بشناسد.

۶- گشتاور زوج نیرو را محاسبه کند.

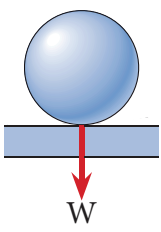
نیرو

نیرو کمیتی است برداری که می‌تواند باعث ایجاد حرکت، تغییرِ شکل یا چرخش در اجسام گردد.

۳-۱ انواع نیرو

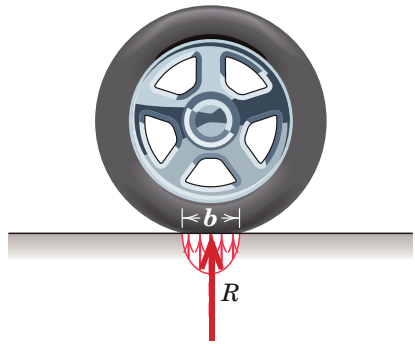
۳-۱-۱- نیروهای خارجی

نیروهایی هستند که از محیط اطراف و در خارج از وجود جسم به آن وارد می‌شوند. مکانیک اجسام صُلب (استاتیک) فقط به نیروهای خارجی توجه دارد؛ مانند: وزن گوی در شکل (۳-۱) که به کف وارد می‌شود.



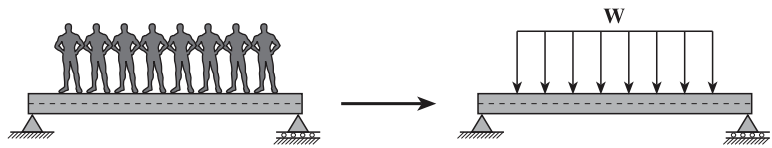
شکل ۳-۱

الف) نیروهای متمرکز: اگر نیرو به طول کوچکی از جسم وارد گردد آن‌را نیروی متمرکز می‌نامند. شکل (۳-۲)



شکل ۳-۲

ب) نیروهای گسترده: اگر نیرو در طول قابل‌توجهی از جسم پخش گردد آن‌را نیروی گسترده گویند. شکل (۳-۳)



شکل ۳-۳

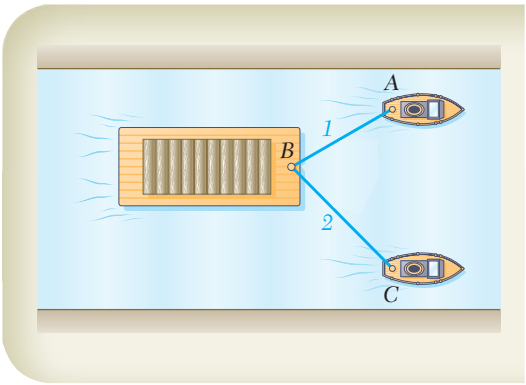
۳-۱-۲- نیروهای داخلی

نیروهایی هستند که در داخل جسم و بین ذرات تشکیل‌دهندهٔ آن ایجاد می‌شوند؛ مانند نیرویی که شخص هنگام اجرای بارفیکس در دستان خود احساس می‌کند؛ در مکانیک اجسام تغییرشکل‌پذیر (مقاومت مصالح) به نیروهای داخلی توجه می‌شود.

۳-۲ برآیند سامانه‌های نیرویی وارد بر نقطه مادی به روش محاسباتی

منظور از برآیند دو یا چند نیرو عبارت‌است از جمع برداری آن نیروها، بنابراین بردار برآیند به‌تنهایی اثر همهٔ نیروهای وارد به جسم را دارد.

به عنوان مثال در شکل (۳-۴) شناور **B** در مسیری به حرکت در می‌آید که در واقع امتداد بردار برآیند دو نیروی وارده از طرف قایق‌های **A** و **C** خواهد بود. این بدان معناست که می‌توان به جای دو نیروی مذکور نیروی برآیند آن‌ها را در امتداد مسیر حرکت شناور قرار داده و آن‌را به حرکت درآورد.



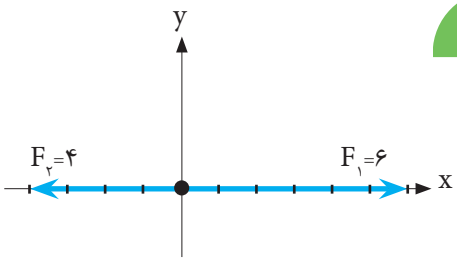
شکل ۳-۴

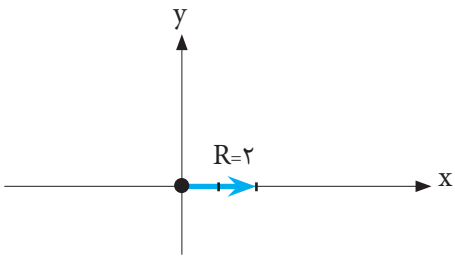
۳-۲-۱- برآیند نیروهای هم‌راستا و موازی

برای محاسبه برآیند نیروهای هم‌راستا کافی است مقادیر آن‌ها را با یکدیگر جمع جبری نماییم.

مثال ۱

دو نیروی $\vec{F_1} = 6\vec{i}$ و $\vec{F_2} = -4\vec{i}$ را روی محور مختصات ترسیم نموده و برآیند آن‌ها را محاسبه و ترسیم نمایید.



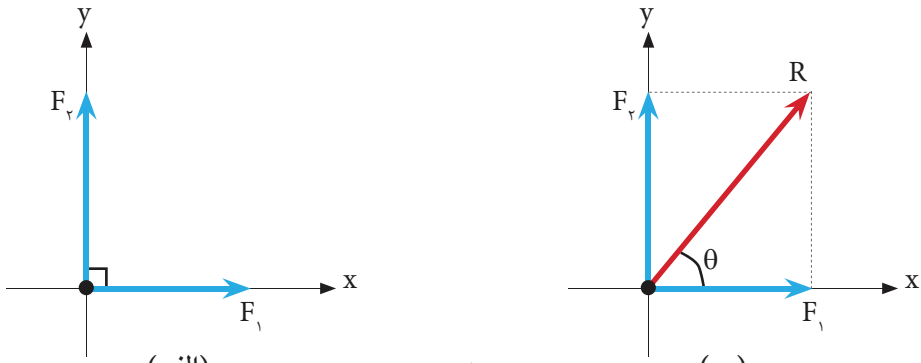


$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$$

$$\vec{R} = 6\vec{i} - 4\vec{i} \Rightarrow \vec{R} = 2\vec{i}$$

۳-۲-۲- برآیند دو نیروی متعامد

برای محاسبه مقدار برآیند دو نیروی متعامد مطابق شکل (۳-۵-الف) با استفاده از رابطه فیثاغورث و شکل (۳-۵-ب) داریم:



شکل ۳-۵

$$R^۲ = F_۱^۲ + F_۲^۲ \Rightarrow \boxed{R = \sqrt{F_۱^۲ + F_۲^۲}}$$

و برای محاسبه زاویه برآیند با $F_۱$ می‌توان از رابطه تانژانت استفاده نمود:

$$\tan\theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} \Rightarrow \boxed{\theta = \tan^{-۱}\left(\frac{F_۲}{F_۱}\right)}$$

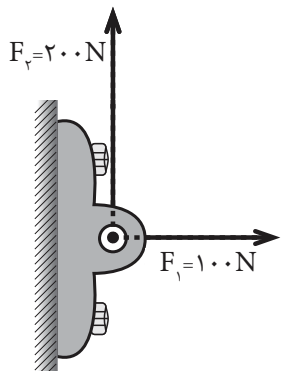
مثال ۲

در شکل زیر مطلوب است:

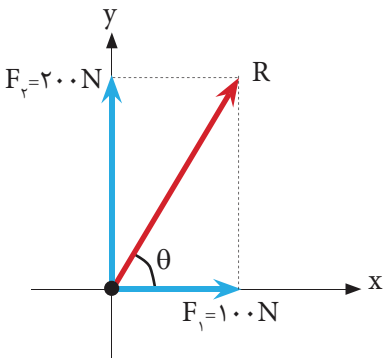
الف) ترسیم برآیند (**R**)

ب) تعیین مقدار برآیند

ج) تعیین زاویه برآیند با افق یا امتداد $F_۱$



الف)

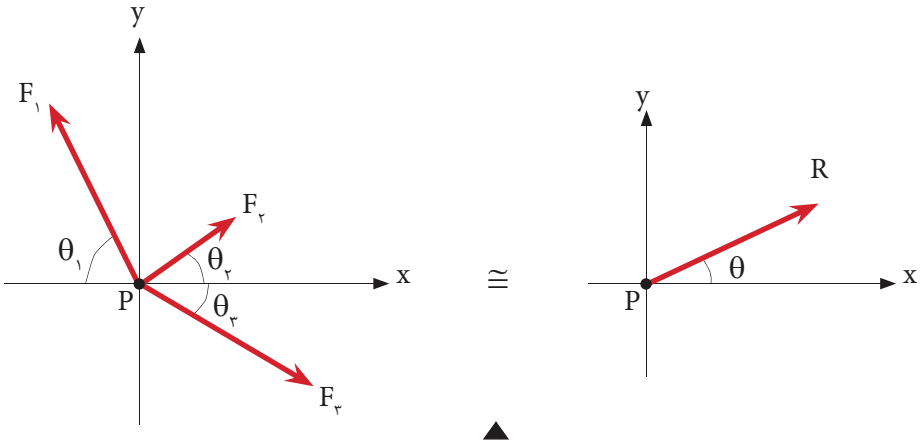


ب) $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{100^2 + 200^2} = \sqrt{50000} \Rightarrow R = 223/61 \quad N$

ج) $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{F_2}{F_1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{200}{100}\right) \Rightarrow \theta = 63/43^\circ$

۳-۲-۳- محاسبهٔ برآیند سامانهٔ چندنیرویی وارد به نقطهٔ مادی

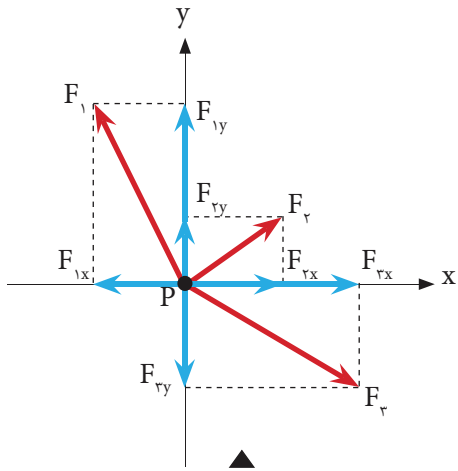
هر گاه بر یک نقطهٔ مادی مانند **P** مطابق شکل (۳-۶- الف) نیروهای F_1 و F_2 و F_3 وارد شود، به‌کمک تجزیه به‌شرح زیر می‌توان اندازهٔ برآیند این نیروها (**R**) و راستای برآیند با محور **x** یعنی (θ) را تعیین نمود. شکل (۳-۶- ب)



(الف) (ب)

شکل ۳-۶

گام اول: تجزیه هر یک از نیروها روی محورهای **x** و **y**؛ شکل (۳-۷)



شکل ۳-۷

گام دوم: نمایش برداری تمامی نیروها بر حسب بردارهای یکهٔ $\vec{i}$ و $\vec{j}$؛

گام سوم: محاسبهٔ جمع جبری نیروهای هم‌راستا روی محورهای **x** و **y**

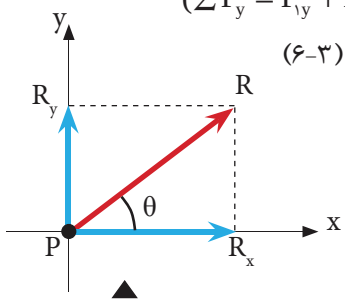
$$R_x = \Sigma F_x \quad , \quad R_y = \Sigma F_y \qquad (۵-۳)$$

ΣF_x: مجموع مؤلفه‌های هم‌راستا با محور **x** $(\Sigma F_x = F_{۱x} + F_{۲x} + F_{۳x})$

ΣF_y: مجموع مؤلفه‌های هم‌راستا با محور **y** $(\Sigma F_y = F_{۱y} + F_{۲y} + F_{۳y})$

گام چهارم: نمایش برداری بردار برآیند (**R**) مطابق رابطهٔ (۳-۶)

$$\vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j} \qquad (۶-۳)$$



شکل ۳-۸

گام پنجم: نمایش ترسیمی بردار برآیند مطابق شکل (۳-۸)

گام ششم: محاسبهٔ اندازه (مقدار) برآیند با استفاده از رابطهٔ فیثاغورث

$$R = \sqrt{R_x^۲ + R_y^۲} \qquad (۷-۳)$$

گام هفتم: محاسبهٔ زاویه برآیند با امتداد محور **x** ها (θ) با استفاده از رابطهٔ تانژانت و با توجه به شکل ترسیم شده در گام پنجم

$$\theta = \tan^{-۱}\left|\frac{R_y}{R_x}\right| \qquad (۸-۳)$$

مثال ۳

دو نیرو مطابق شکل توسط دو کابل بر یک سنگ معدنی وارد می‌شود. مطلوب‌است:

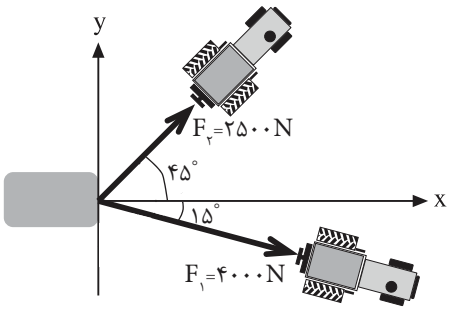
الف) نمایش برداری برآیند

ب) نمایش ترسیمی بردار برآیند

ج) محاسبهٔ اندازهٔ بردار برآیند

د) محاسبهٔ زاویهٔ برآیند با افق

ه) ترسیم مسیر جابه‌جایی سنگ

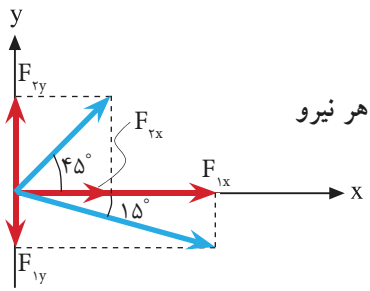


حل:

الف)

گام اول:

– تجزیهٔ نیروها با توجه به اندازه و زاویهٔ هر نیرو



مؤلفه‌های $F_۱$

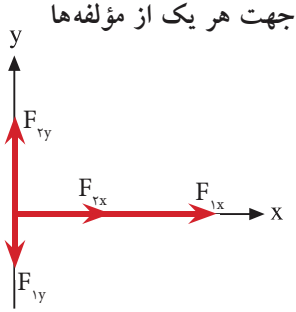
$$\begin{cases} F_{۱x} = F_۱ \cos\theta_۱ = ۴۰۰۰ \times \cos ۱۵^\circ \Rightarrow F_{۱x} = ۳۸۶۳/۷۰ \ N \\ F_{۱y} = F_۱ \sin\theta_۱ = ۴۰۰۰ \times \sin ۱۵^\circ \Rightarrow F_{۱y} = ۱۰۳۵/۲۸ \ N \end{cases}$$

مؤلفه‌های $F_۲$

$$\begin{cases} F_{۲x} = F_۲ \cos\theta_۲ = ۲۵۰۰ \times \cos ۴۵^\circ \Rightarrow F_{۲x} = ۱۷۶۷/۷۷ \ N \\ F_{۲y} = F_۲ \sin\theta_۲ = ۲۵۰۰ \times \sin ۴۵^\circ \Rightarrow F_{۲y} = ۱۷۶۷/۷۷ \ N \end{cases}$$

گام دوم:

– فرم برداری هر بردار با توجه به شکل مقابل و جهت هر یک از مؤلفه‌ها



$$\vec{F}_۱ = ۳۸۶۳/۷۰ \ \vec{i} - ۱۰۳۵/۲۸ \ \vec{j}$$

$$\vec{F}_۲ = ۱۷۶۷/۷۷ \ \vec{i} + ۱۷۶۷/۷۷ \ \vec{j}$$

گام سوم:

– تعیین مجموع نیروهای هم‌راستا با محورهای **x** و **y** (ΣF_x و ΣF_y)

$$R_x = \Sigma F_x = ۱۷۶۷/۷۷ + ۳۸۶۳/۷۰ \Rightarrow R_x = ۵۶۳۱/۴۷ \ N$$
$$R_y = \Sigma F_y = ۱۷۶۷/۷۷ - ۱۰۳۵/۲۸ \Rightarrow R_y = ۷۳۲/۴۹ \ N$$

گام چهارم:

– نمایش برداری بردار برآیند

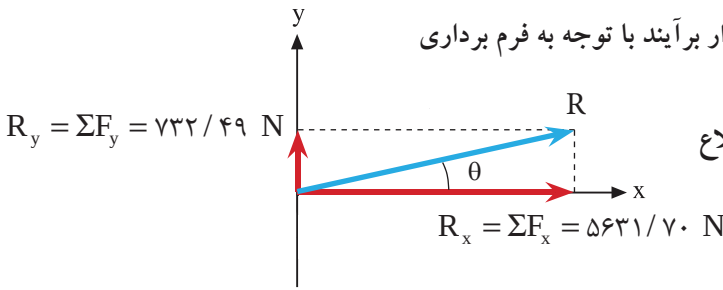
$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j}$$

$$\boxed{\vec{R} = ۵۶۳۱/۴۷ \ \vec{i} + ۷۳۲/۴۹ \ \vec{j}}$$

ب)

گام پنجم:

– نمایش ترسیمی بردار برآیند با توجه به فرم برداری بردار برآیند و روش متوازی‌الاضلاع



ج)

گام ششم:

– محاسبهٔ اندازهٔ برآیند به کمک رابطهٔ (۳-۷)

$$R = \sqrt{R_x^{۲} + R_y^{۲}} \Rightarrow R = \sqrt{۵۶۳۱/۴۷^{۲} + ۷۳۲/۴۹^{۲}}$$
$$\Rightarrow \boxed{R = ۵۶۷۸/۹۱ \ N}$$

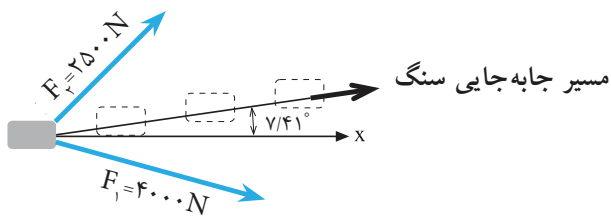
د)

گام هفتم:

– محاسبهٔ زاویهٔ برآیند با محور **x** ها به کمک رابطهٔ (۳-۸)

$$\theta = \tan^{-۱} \left| \frac{R_y}{R_x} \right| \Rightarrow \theta = \tan^{-۱} \left| \frac{۷۳۲/۴۹}{۵۶۳۱/۷۰} \right| \Rightarrow \boxed{\theta = ۷/۴۱^\circ}$$

ه) مسیر جابه‌جایی سنگ در راستای بردار برآیند مطابق شکل زیر خواهد بود.



مثال ۴

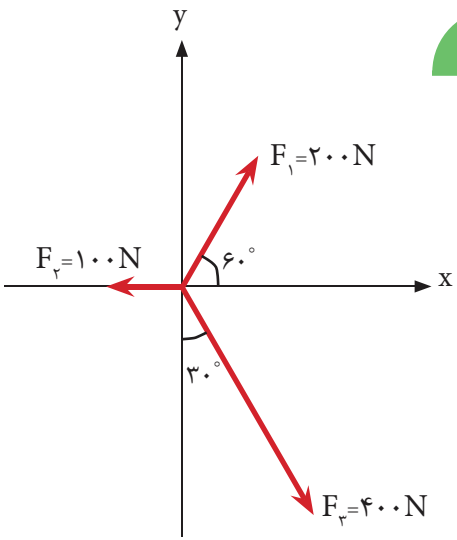
در شکل روبه‌رو مطلوب‌است:

الف – محاسبهٔ مقدار برآیند نیروها

ب – محاسبهٔ زاویهٔ برآیند با افق

ج – ترسیم بردار برآیند

د – نمایش برداری بردار برآیند



حل:

الف) تجزیهٔ هر یک از نیروها با توجه به روابط $F_x=F\cos\theta$, $F_y=F\sin\theta$ و زاویهٔ هر نیرو با محور **x** ها:

$$\vec{F}_1 = 200\cos 60^\circ \vec{i} + 200\sin 60^\circ \vec{j} = 100\,\vec{i} + 173/2\,\vec{j}$$

$$\vec{F}_2 = -100\,\vec{i}$$

$$\vec{F}_3 = 400\cos 60^\circ \vec{i} - 400\sin 60^\circ \vec{j} = 200\,\vec{i} - 346/4\,\vec{j}$$

$$R_x = \Sigma F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$$

$$R_x = \Sigma F_x = 100 - 100 + 200 \Rightarrow R_x = 200\ N$$

$$R_y = \Sigma F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}$$

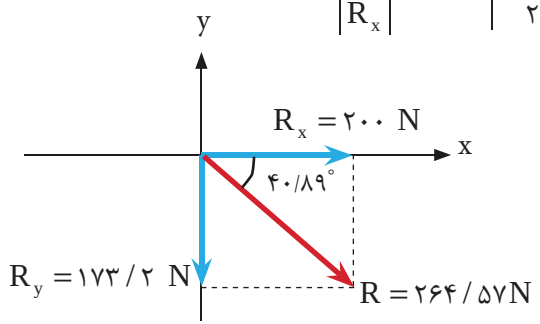
$$R_y = \Sigma F_y = 173/2 + 0 - 346/4 \Rightarrow R_y = -173/2\ N$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{200^2 + (-173/2)^2} \Rightarrow \boxed{R = 264/57\ N}$$

ب)

$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{R_y}{R_x}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{-173/2}{200}\right| \Rightarrow \boxed{\theta = 40/89^\circ}$$

ج)



د) $\vec{R} = 200\,\vec{i} - 173/2\,\vec{j}$

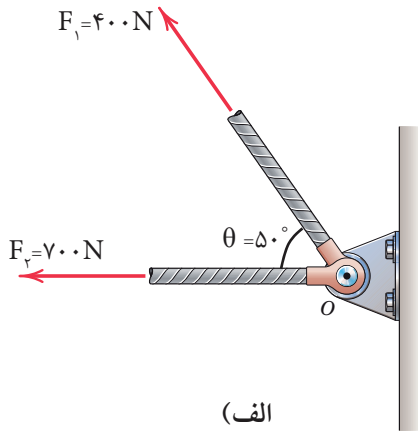
خودآزمایی

۱- در شکل‌های زیر مطلوب‌است:

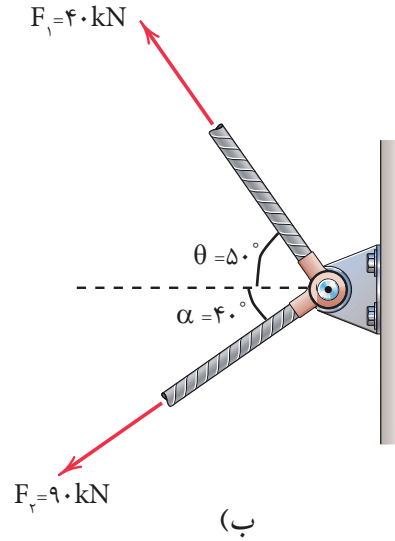
الف) محاسبهٔ مقدار برآیند دو نیرو

ب) محاسبهٔ زاویهٔ برآیند با F_1

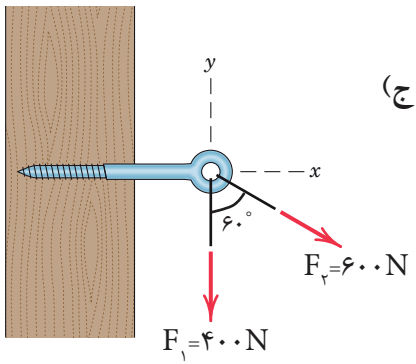
ج) محاسبهٔ زاویهٔ برآیند با امتداد افق



الف)

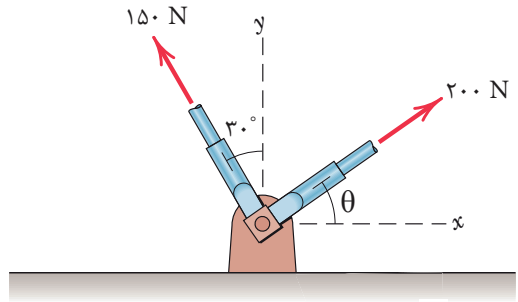


ب)



ج)

۲- در شکل زیر مقدار زاویه θ را چنان تعیین نمایید که برآیند دو نیرو بر محور y ها منطبق گردد. سپس در این حالت مقدار برآیند را محاسبه کنید.



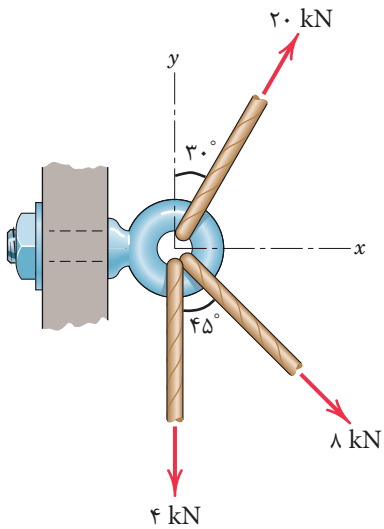
۳- در شکل روبه‌رو مطلوب‌است:

الف) محاسبهٔ مقدار برآیند نیروها

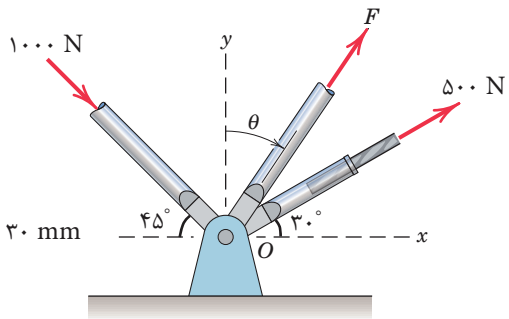
ب) محاسبهٔ زاویهٔ برآیند با افق

ج) ترسیم بردار برآیند

د) نمایش برداری بردار برآیند



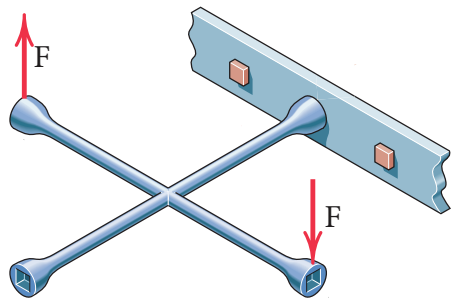
۴- در شکل زیر نیروی **F** و زاویه θ را طوری تعیین نمایید که برآیند نیروها روی محور افق و مقدار آن برابر **N** ۱۵۰۰ در جهت مثبت باشد.



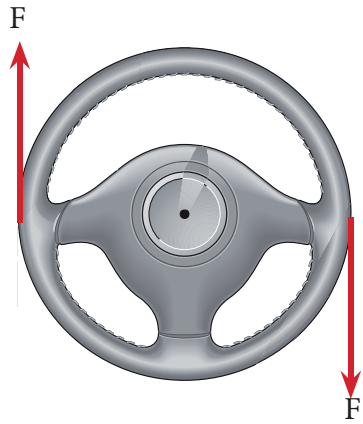
۳-۳ گشتاور، لنگر (مُمان)

یکی از اثرات نیرو بر اجسام تمایل به ایجاد چرخش در آن‌ها می‌باشد که به این پدیده گشتاور گفته می‌شود.

مطابق شکل‌های (۳-۹) و (۳-۱۰) نیرو باعث چرخش در اجسام می‌گردد.



شکل ۳-۹



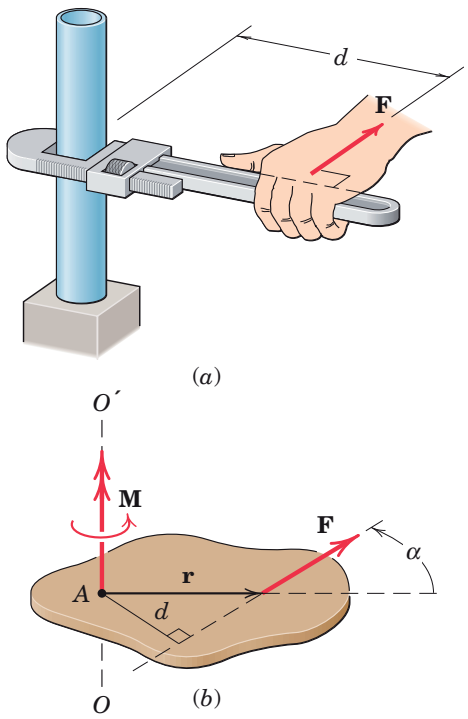
شکل ۳-۱۰

مقدار گشتاور حول یک محور عبارت‌است‌از حاصل‌ضرب نیرو (**F**) در کوتاه‌ترین فاصله نیرو یا امتداد آن تا محور مورد نظر (**d**). گشتاور را با **M** نمایش می‌دهند و رابطهٔ آن به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$M = F.d \qquad (۳-۹)$$

با توجه به شکل (۳-۱۲) نیروی **F** حول محور **OO'** ایجاد گشتاور می‌نماید.در این شکل **d** کوتاه‌ترین فاصله امتداد نیروی **F** تا محور **OO'** می‌باشد که بازوی لنگر نیز خوانده می‌شود بنابراین خواهیم داشت:

$$M_{OO'} = F.d \qquad (۱۰-۳)$$



شکل ۳-۱۱

گشتاور نیز کمیتی برداری است که آن را با نماد ↑ نمایش می‌دهند و جهت آن مطابق ضرب بردارها خواهد بود که در مقاطع بالاتر با آن آشنا خواهید شد.

در این کتاب به دلیل بررسی نیروها در صفحه، گشتاور حول نقطه در نظر گرفته می‌شود لذا جهت چرخش آن در جهت عقربه ساعت ↷ و یا خلاف عقربه ساعت ↶ خواهد بود. بنابراین با توجه به شکل (۳-۱۱-b) گشتاور نیروی **F** حول نقطهٔ **A** واقع بر محور **OO´** به صورت رابطهٔ (۳-۱۱) خواهد بود.

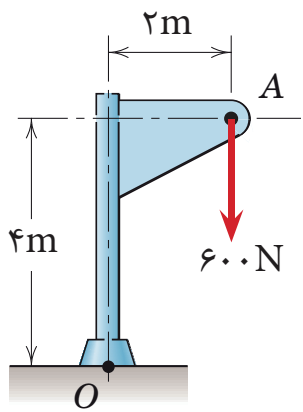
$$M_A = F.d \qquad (۱۱-۳)$$

قرارداد:

در این کتاب جهت چرخش عقربه‌های ساعت مثبت فرض می‌شود.

مثال ۵

گشتاور نیروی **F** حول نقطهٔ **O** را محاسبه و جهت چرخش آن‌را بنویسید.



حل:

$F = ۶۰۰N$

$d = ۲m$

$M_o = F.d \Rightarrow M_o = ۶۰۰ \times ۲ \Rightarrow M_o = ۱۲۰۰\ N.m$ ساعت‌گرد

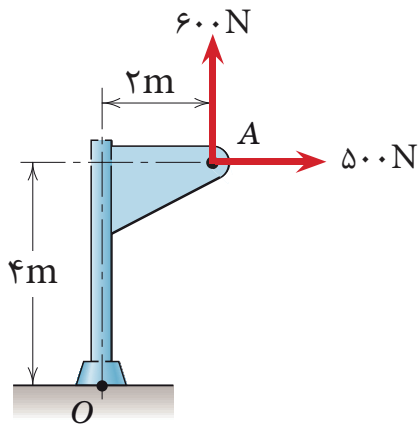
۳-۴ گشتاور چند نیرو

اگر به یک جسم چند نیرو اِعمال شود گشتاور آن‌ها نسبت به یک نقطه برابر است با مجموع جبری گشتاور هر نیرو نسبت به آن نقطه یعنی:

$$M_O = \sum_{i=۱}^{n} F_i d_i = F_۱ d_۱ + F_۲ d_۲ + ... + F_n d_n \qquad (۱۲-۳)$$

مثال ۶

در شکل زیر گشتاور نیروهای نشان داده شده را حول نقطهٔ **O** محاسبه کنید و جهت آن‌را بنویسید.



حل:

$$F_1 = 500\,N$$
$$d_1 = 4\,m$$
$$F_2 = 600\,N$$
$$d_2 = 2\,m$$
$$M_o = F_1 d_1 + F_2 d_2$$
$$M_o = 500\times 4 - 600\times 2$$
$$\boxed{M_o = +800\ N.m}$$

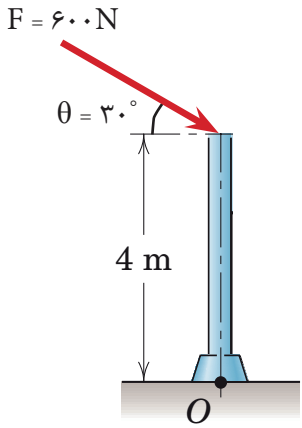
ساعت‌گرد

۵-۳ قضیه وارینون

گشتاور برآیند چند نیرو حول یک نقطهٔ معین برابر است با مجموع گشتاورهای آن‌ها حول همان نقطه و یا گشتاور یک نیرو حول هر نقطه برابر است با مجموع گشتاورهای مؤلفه‌های آن نیرو حول همان نقطه.

کاربرد این قضیه در مثال ۷ نشان داده شده است.

مثال ۷



گشتاور نیروی **F** را در شکل زیر به دو روش حساب کنید:

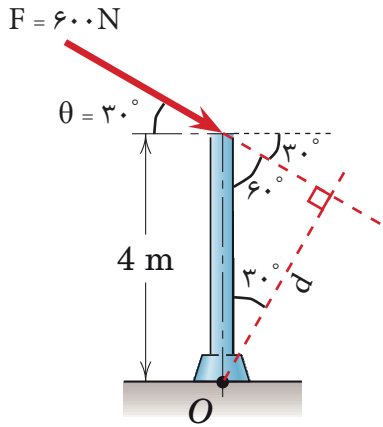
الف) با استفاده از تعریف گشتاور

ب) به کمک قضیه وارینون

حل:

الف) با استفاده از تعریف:

ابتدا با استفاده از روابط مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه بازوی لنگر یعنی (**d**) را محاسبه می‌نمائیم؛ داریم:



$$\cos\alpha = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$$

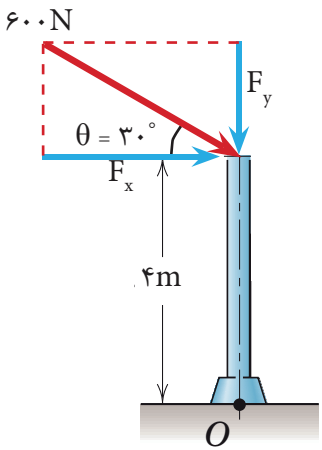
$$\cos ۳۰^\circ = \frac{d}{۴} \Rightarrow d = ۴ \times \cos ۳۰^\circ \Rightarrow d = ۳/۴۶ \ m$$

$$M_o = F.d \Rightarrow M_o = ۶۰۰ \times ۳/۴۶۴ \Rightarrow \boxed{M_o = ۲۰۷۸/۴ \ N.m}$$

ب) با استفاده از قضیهٔ وارینون

در این روش ابتدا نیروی F را به دو مؤلفهٔ متعامد تجزیه نموده و گشتاور آن‌ها را نسبت به نقطهٔ O محاسبه و با یکدیگر جمع می‌نمائیم.

$$F_x = F.\cos\theta \Rightarrow F_x = ۶۰۰\times\cos ۳۰^\circ \Rightarrow F_x = ۵۱۹/۶۱\ N$$
$$F_y = F.\sin\theta \Rightarrow F_y = ۶۰۰\times\sin ۳۰^\circ \Rightarrow F_y = ۳۰۰\ N$$



با توجه به شکل بازوی لنگر F_x برابر ۴ متر و چون امتداد مؤلفهٔ F_y از نقطهٔ O می‌گذرد، بازوی لنگر آن صفر است.

خواهیم داشت:

$$M_o = \sum_{i=۱}^{n} F_i d_i \Rightarrow M_o = F_۱ d_۱ + F_۲ d_۲$$
$$M_o = F_x \times ۴ + F_y \times ۰ = ۵۱۹/۶۱ \times ۴$$
$$\boxed{M_o = ۲۰۷۸/۴۴\ N.m}$$

نکته:

هرگاه امتداد یک نیرو از نقطه‌ای عبور نماید گشتاور آن نیرو نسبت به همان نقطه برابر صفر است.

۳-۶ زوج‌نیرو:

به دو نیروی مساوی - موازی و مختلف‌الجهت زوج‌نیرو گفته می‌شود.

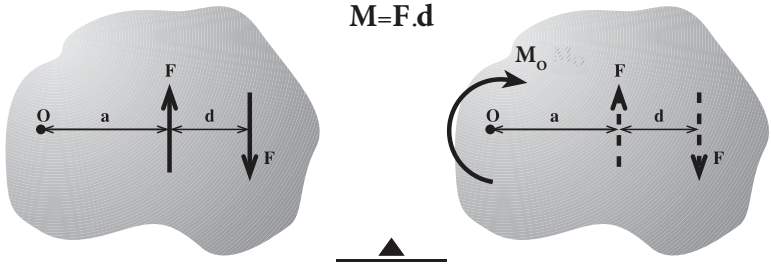
۳-۶-۱- خصوصیات زوج نیرو:

۱- برآیند زوج‌نیرو صفر است؛

۲- در اجسام ایجاد گشتاور (چرخش) می‌نماید؛

۳- گشتاور زوج‌نیرو نسبت به هر نقطه دلخواه مقداری است ثابت و برابر است با حاصل‌ضرب اندازهٔ یک نیرو در فاصلهٔ بین آن‌ها. شکل (۳-۱۲)

$$M=F.d$$



شکل ۳-۱۲

تحقیق کنید:

چگونه می‌توان به‌کمک گشتاورگیری نسبت به یک نقطهٔ دلخواه مانند **O** در شکل (۳-۱۲) خصوصیت سوم زوج‌نیرو را اثبات کرد.

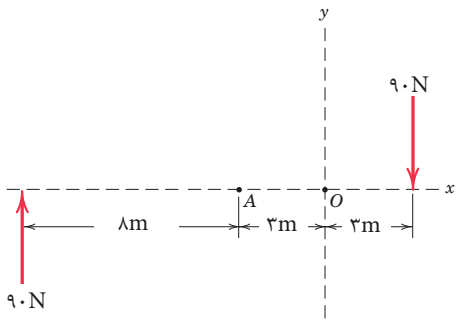
مثال ۸

در شکل روبه‌رو مطلوب‌است محاسبهٔ گشتاور دو نیروی ۹۰ نیوتنی:

الف) حول نقطهٔ **A**

ب) حول نقطهٔ **O**

ج) با استفاده از خاصیت زوج‌نیرو



حل:

الف) $M_A = ۹۰\times۸ + ۹۰\times۶ = ۱۲۶۰\ N.m$

ب) $M_O = ۹۰\times۱۱ + ۹۰\times۳ = ۱۲۶۰\ N.m$

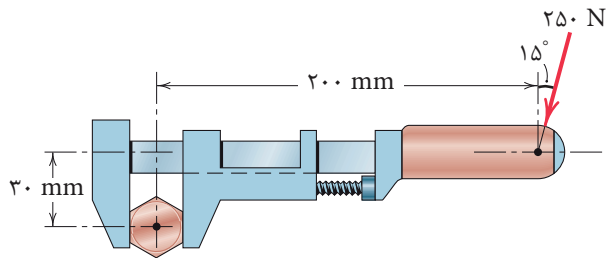
ج) $M = F.d = ۹۰\times۱۴ = ۱۲۶۰\ N.m$

خلاصه فصل

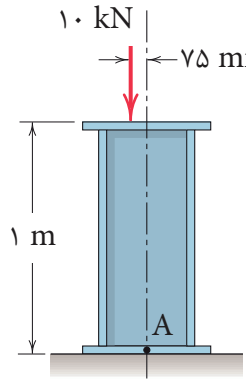
- نیرو کمیتی است برداری که باعث حرکت، تغییر شکل و یا چرخش اجسام می‌گردد.
- انواع نیرو عبارتند از: نیروهای خارجی، نیروهای داخلی.
- منظور از برآیند دو یا چند نیرو عبارت‌است از نیرویی که به تنهایی اثر همهٔ نیروها را در خود داشته باشد.
- برای تعیین برآیند چند نیرو از روش تجزیه به مؤلفه‌های متعامد استفاده می‌شود و مقدار برآیند از رابطهٔ $R = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2}$ و زاویهٔ برآیند با محور **x** ها از رابطهٔ $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{R_y}{R_x}\right|$ به‌دست می‌آید.
- گشتاور یک نیرو نسبت به یک محور عبارت‌است از حاصل‌ضرب نیرو (**F**) در کوتاه‌ترین فاصلهٔ نیرو تا آن محور (**d**). و از رابطهٔ $M = F.d$ به‌دست می‌آید.
- قضیه وارینون: گشتاور برآیند چند نیرو حول یک نقطهٔ معین برابر است با مجموع گشتاورهای آن‌ها حول همان نقطه.
- به دو نیروی مساوی، موازی و مختلف‌الجهت زوج‌نیرو گفته می‌شود.
- گشتاور زوج نیرو برابر است با حاصل‌ضرب یکی از نیروها در فاصلهٔ بین آن‌ها.

خودآزمایی

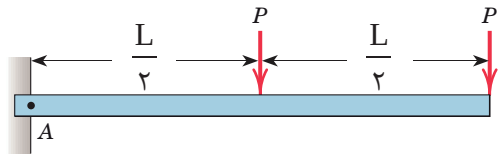
۱- در شکل زیر گشتاور نیروی ۲۵۰ نیوتنی را حول مرکز پیچ محاسبه نموده و جهت گشتاور را تعیین نمائید.



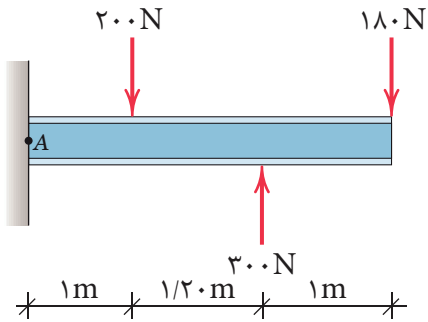
۲- در شکل‌های زیر گشتاور نیرو را حول نقطه A محاسبه نمائید.



(الف)

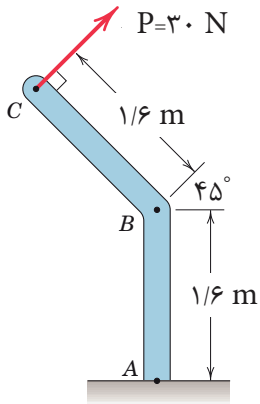


(ب)

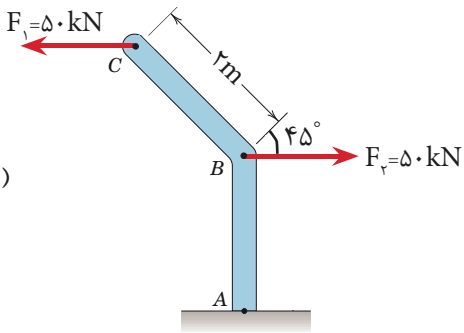


(ج)

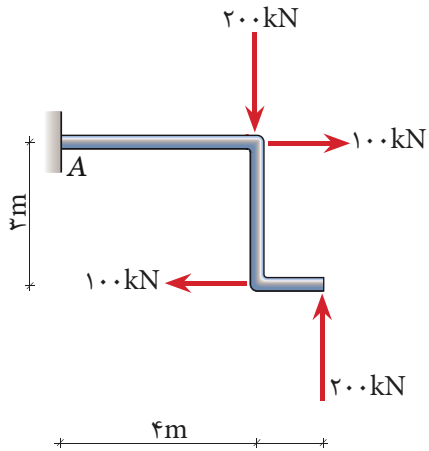
۳- گشتاور نیروی **P** حول نقطهٔ **A** و **B** را به‌دست آورید.



۴- در شکل‌های زیر مطلوب‌است محاسبهٔ $\mathbf{M_A}$.



(الف)



(ب)

فصل چهارم

تعادل

هدف‌های رفتاری

پس از آموزش این فصل از فراگیر انتظار می‌رود بتواند:

۱- مفهوم تعادل را توضیح دهد.

۲- شرط تعادل نقطهٔ مادی را بیان کند.

۳- پیکر آزاد ذرهٔ مادی را ترسیم کند.

۴- شرط تعادل نقطهٔ مادی را در مسائل به‌کار گیرد.

۵- شروط لازم برای تعادل جسم صلب را توضیح دهد.

۶- انواع تکیه‌گاه‌ها را بشناسد.

۷- پیکر آزاد اجسام تحت تأثیر نیروهای مختلف را ترسیم کند.

۸- عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را در اجسام محاسبه کند.

۱-۴ تعادل

مفهوم تعادل آن‌است که ذره یا جسم مادی هیچ‌گونه حرکت و یا چرخشی نداشته باشد.

به منظور بررسی تعادل اجسام، آن‌ها را به دو حالت در نظر می‌گیریم.

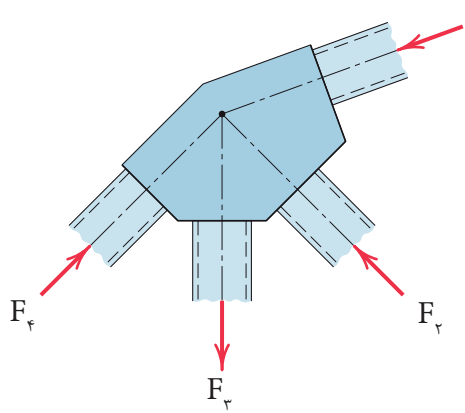
۱- نقطه مادی

۲- جسم صلب .

۴-۱-۱- تعادل نقطهٔ مادی

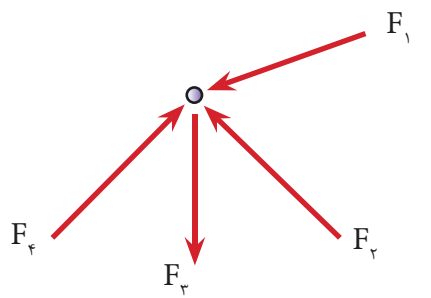
با توجه به تعریف نقطهٔ مادی در فصل اول، نیروهای وارد به جسم در یک نقطه متقارب خواهند بود و شرط تعادل در این حالت آن‌است که برآیند نیروهای وارده صفر باشد یعنی:

$$\sum \vec{F} = 0 \qquad (۱-۴)$$



(الف)

در شکل (۴-۱- الف) چنان‌چه از ابعاد قطعات اتصال صرف‌نظر شود، وضعیت نیروها به صورت شکل (۴-۱- ب) خواهند بود.



(ب)

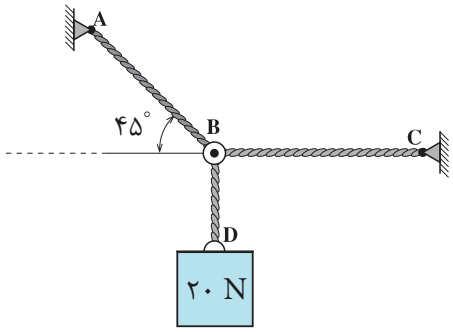
شکل ۴-۱

در صفحه مختصات دکارتی رابطهٔ (۴-۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_x = 0 \\ \sum \vec{F}_y = 0 \end{cases} \qquad (۲-۴)$$

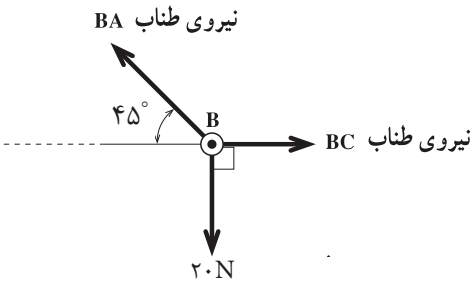
۴-۱-۱-۲- پیکر آزاد جسم

به منظور بررسی تعادل اجسام، لازم است ابتدا جسم را از محیط اطراف خود جدا نموده و نیروهای وارد بر آن را در راستاهای موجود نمایش دهیم که به این عمل، ترسیم پیکرآزادجسم[۱] گفته می‌شود.



شکل ۴-۲

در شکل (۴-۲) وزنهٔ ۲۰N توسط سه رشته کابل AB و BC و BD نگهداری شده است. چون کابل‌ها فقط نیروی کششی را تحمل می‌نمایند بنابراین نیروهای وارد به نقطه B به صورت کششی بوده و پیکر آزاد آن مطابق شکل (۴-۳) خواهد بود.



شکل ۴-۳

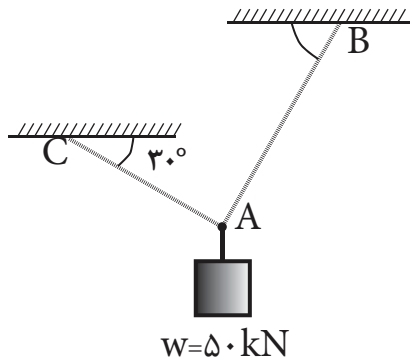
نکته:

در حل مسائل تعادل نقطهٔ مادی، ابتدا پیکر آزاد آن‌را ترسیم نموده و سپس به کمک معادلات تعادل (۴-۲) مجهولات مسئله را محاسبه می‌نمائیم.

۱- FBD (Free Body Diagram)

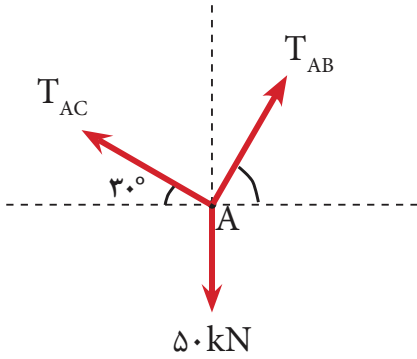
مثال ۱

کشش کابل‌های **AB** و **AC** را در سامانهٔ در حال تعادل زیر به‌دست آورید.

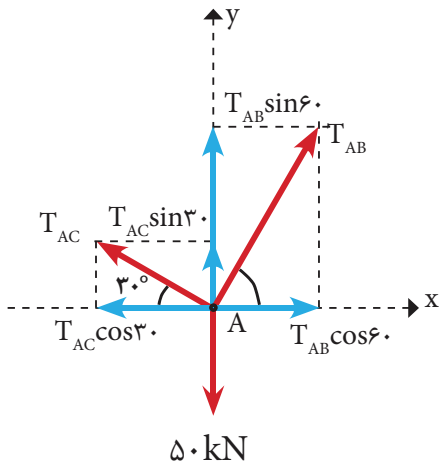


حل:

گام اول) با توجه به این موضوع که تمامی نیروها به نقطه **A** وارد می‌شوند بنابراین پیکر آزاد نقطه مادی **A** ترسیم می‌گردد. می‌دانیم که کابل‌ها همیشه رفتار کششی دارند بنابراین نیروی کابل‌های **AB** و **AC** را به ترتیب با T_{AB} و T_{AC} به صورت کششی و زوایای هر کدام را نمایش می‌دهیم.



گام دوم) تعیین محورهای مختصات **x** و **y** روی نقطه **A** و تجزیه نیروها در این دستگاه مختصات



گام سوم) تشکیل معادلات تعادل (۴-۲) و حل آن‌ها تا رسیدن به خواسته‌های مسئله

رابطه I $\sum \overset{+}{\overrightarrow{F_x}} = 0 \Rightarrow T_{AB}\cos 60^\circ - T_{AC}\cos 30^\circ = 0$

رابطه II $+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow T_{AB}\sin 60^\circ + T_{AC}\sin 30^\circ - 50 = 0$

چون حل هر یک از معادلات فوق با وجود دو مجهول امکان‌پذیر نیست بنابراین آن‌ها را در یک دستگاه دو معادله دو مجهولی قرار داده که با استفاده از روش‌های مختلف قابل حل است.

در این‌جا از معادله اول یکی از مجهولات را بر حسب دیگری محاسبه و در معادله دوم قرار می‌دهیم تا یکی از مجهولات حذف شود:

رابطه III $\Rightarrow T_{AB} = \dfrac{T_{AC}\cos 30}{\cos 60} \Rightarrow T_{AB} = 1/73 T_{AC}$ از رابطه I نتیجه می‌شود

مقدار T_{AB} را در رابطه II قرار داده خواهیم داشت:

$$1/73 T_{AC} \times \sin 60^\circ + T_{AC}\sin 30^\circ - 50 = 0 \Rightarrow 2\ T_{AC} - 50 = 0$$

$$T_{AC} = \frac{50}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{AC} = 25\ \text{kN}}$$

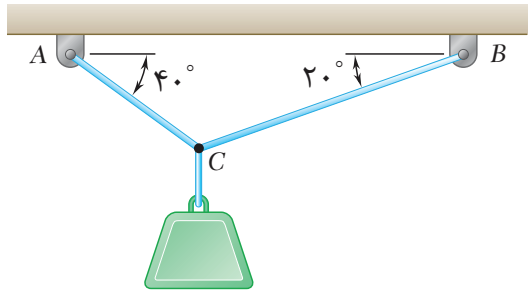
حال مقدار T_{AC} را در رابطهٔ III قرار می‌دهیم:

$\Rightarrow T_{AB} = 1/73 \times 25$ از رابطهٔ III

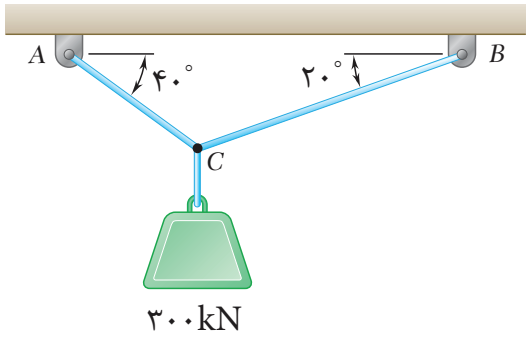
$$\Rightarrow \boxed{T_{AB} = 43/25\ \text{kN}}$$

خودآزمایی

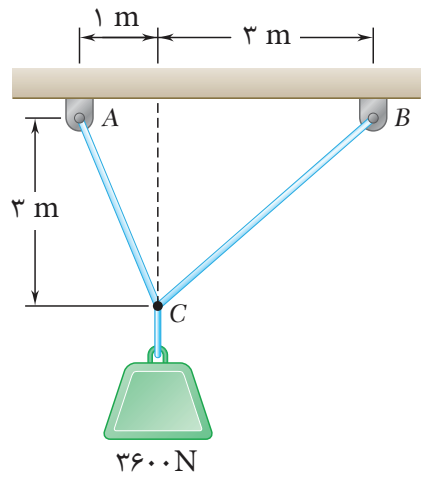
۱- پیکر آزاد شکل زیر را رسم نمائید.



۲- کشش کابل‌ها را در شکل‌های زیر به‌دست آورید.

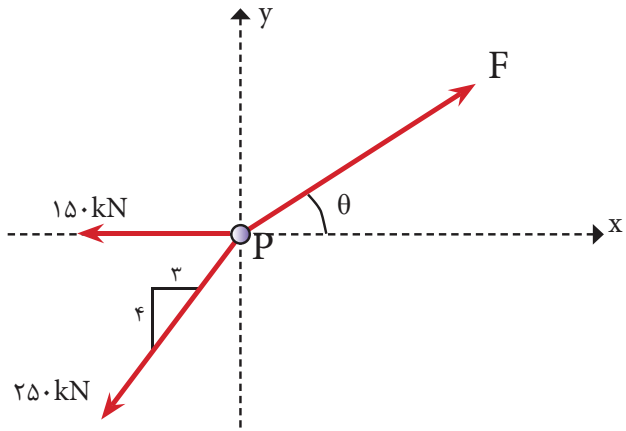


(الف)

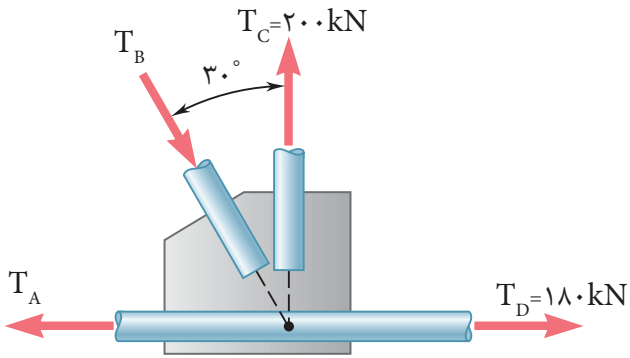


(ب)

۳- مقدار نیروی **F** و زاویهٔ θ را طوری تعیین کنید که ذرهٔ مادی **P** در حال تعادل باشد.



۴- مقدار T_A و T_B را طوری تعیین کنید که تعادل در اتصال شکل زیر برقرار باشد.



۴-۱-۲- تعادل جسم صلب

در قسمت قبل بنا به فرض، اجسام را به عنوان یک نقطه مادی در نظر گرفتیم. در حالی که چنین فرضی همیشه امکان‌پذیر نخواهد بود و نمی‌توان از ابعاد جسم صرف‌نظر نمود بنابراین در این حالت نیروها در یک نقطه متقارب نخواهند بود و علاوه بر حرکت، امکان دَوَران (گشتاور) جسم تحت تأثیر نیروهای وارده نیز وجود دارد. لذا شرط تعادل در مورد اجسام صلب به صورت زیر خواهد بود:

۱- برای این‌که جسم در راستای محور **x** جابه‌جایی نداشته باشد باید: $\Sigma F_X = ۰ \leftarrow$

۲- برای این‌که جسم در راستای محور **y** جابه‌جایی نداشته باشد باید: $\Sigma F_Y = ۰ \leftarrow$

۳- برای این‌که جسم چرخش نداشته باشد باید: $\Sigma M = ۰ \leftarrow$

(۳-۴)

۴-۲ انواع تکیه‌گاه‌ها و عکس‌العمل‌های آن‌ها

برای بررسی تعادل اجسام صلب، همانند نقاط مادی باید ابتدا پیکر آزاد آن‌ها را ترسیم نمود. برای این منظور، باید جسم را از محیط اطراف آن جدا نمائیم و چون اجسام بر روی تکیه‌گاه‌هایی قرار دارند که با توجه به نوع آن‌ها مانع از حرکت (جابه‌جایی) و یا چرخش جسم می‌گردند، لازم است ابتدا تکیه‌گاه‌ها و عکس‌العمل‌های آن‌ها را معرفی نمائیم.

تعریف عکس‌العمل تکیه‌گاهی

منظور از عکس‌العمل تکیه‌گاهی اجسام، واکنشی است که تکیه‌گاه در جهت حفظ تعادل آن‌ها از خود نشان می‌دهد و مانع از حرکت و یا دوران جسم مورد نظر می‌شود.

۴-۲-۱- انواع تکیه‌گاه‌ها

الف) تکیه‌گاه غلطکی (یک‌مجهولی)

عبارت‌است از تکیه‌گاهی که تنها یک عکس‌العمل آن‌هم عمود بر سطح اتکای خود دارد؛ همانند چرخ اتومبیل روی سطح بدون اصطکاک. (ردیف ۱ جدول ۴-۱)

ب) تکیه‌گاه مفصلی (دومجهولی)

به تکیه‌گاهی گفته می‌شود که دارای دو عکس‌العمل می‌باشد؛ یکی مماس بر سطح اتکا و دیگری عمود بر آن خواهد بود. (ردیف ۲ جدول ۴-۱)

ج) تکیه‌گاه گیردار (سه‌مجهولی)

تکیه‌گاهی است که دارای سه عکس‌العمل به شرح زیر می‌باشد: (ردیف ۳ جدول ۴-۱)

۱- مماس بر سطح تکیه‌گاه

۲- عمود بر سطح تکیه‌گاه

۳- عکس‌العمل دورانی

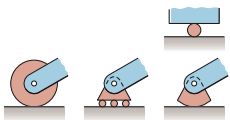
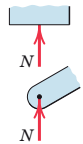
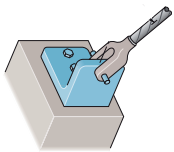
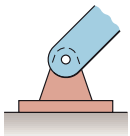
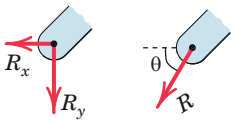
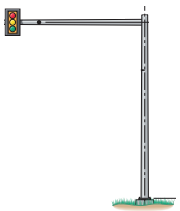
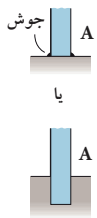
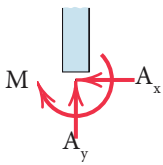
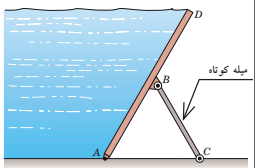
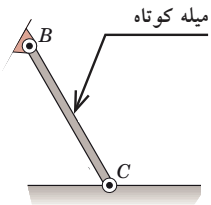
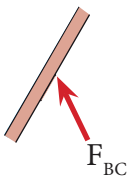
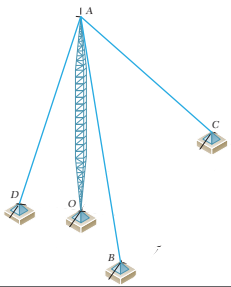
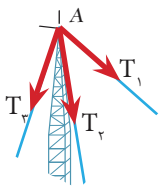
د) تکیه‌گاه میله‌ای

منظور از میله عضوی کوتاه است که در دو انتهای خود به صورت لولا یا مفصل متصل شده باشد. عکس‌العمل تکیه‌گاه میله‌ای در راستای میله و به صورت کششی یا فشاری خواهد بود. (ردیف ۴ جدول ۴-۱)

ه) تکیه‌گاه کابلی:

هر گاه جسم توسط کابل به تکیه‌گاه متصل شود، عکس‌العمل کابل به صورت کششی و در راستای آن خواهد بود. (ردیف ۵ جدول ۴-۱)

جدول (۴-۱) انواع تکیه‌گاه

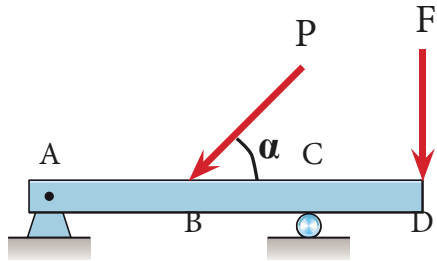
ردیف	نوع تکیه‌گاه	شکل واقعی	شکل شماتیک	عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی
۱	غلطکی			
۲	مفصلی			
۳	گیردار			
۴	میله‌ای			
۵	کابلی		———	

۳-۴ محاسبه عکس العمل های تکیه‌گاهی اجسام صلب

همان‌طور که گفته شد شرط تعادل اجسام صلب بر آورده شدن معادلات (۳-۴) می‌باشد و برای نیل به این هدف به صورت زیر عمل می‌نمائیم.

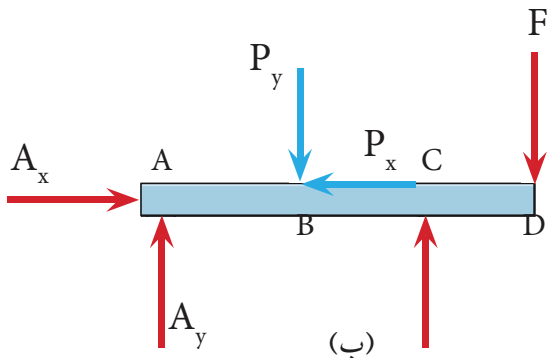
گام اول – ترسیم پیکر آزاد جسم

ابتدا جسم را از تکیه‌گاه‌ها جدا نموده و با توجه به نوع تکیه‌گاه، عکس العمل‌های مربوطه را در محل تکیه‌گاه و در جهت دلخواه قرار می‌دهیم. به عنوان مثال پیکر آزاد تیر شکل (۴-۴-الف) به صورت شکل (۴-۴-ب) خواهد بود.



(الف)

شکل ۴-۴



(ب)

گام دوم – تجزیهٔ نیروها

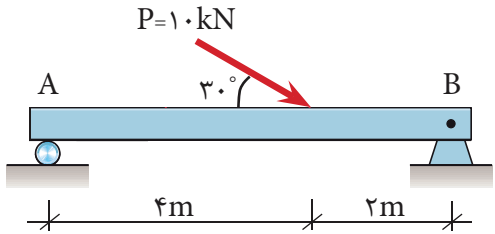
همهٔ نیروهای مورب را روی پیکر آزاد در صورت وجود به مؤلفه‌های آن تجزیه می‌نمائیم. به عنوان مثال در شکل (۴-۴-ب) نیروی **P** به دو مؤلفهٔ متعامد تجزیه شده است.

گام سوم – تشکیل معادلات و حل آن‌ها

با تشکیل معادلات تعادل و حل آن‌ها مجهولات مسئله (عکس‌العمل‌ها) تعیین می‌شوند.

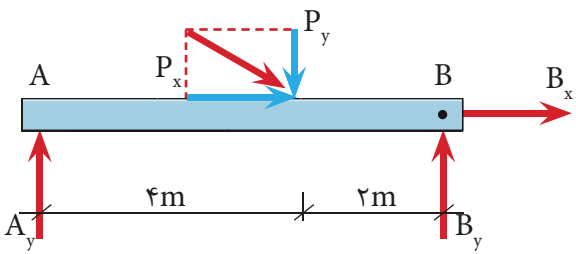
مثال ۲

عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی تیر زیر را به‌دست آورید



گام اول:

ترسیم پیکر آزاد جسم



گام دوم:

تجزیه نیروی **P**

$$P_x = P.\cos\theta = ۱۰ \times \cos ۳۰^\circ = ۸/۶۶ kN$$

$$P_y = P.\sin\theta = ۱۰ \times \sin ۳۰^\circ = ۵ kN$$

گام سوم : تشکیل معادلات تعادل وحل آنها

$$\overset{+}{\Sigma F_x} = ۰ \Rightarrow B_x + P_x = ۰ \Rightarrow B_x + ۸/۶۶ = ۰ \Rightarrow \boxed{B_x = -۸/۶۶ \ kN}$$

لازم به توضیح است که علامت منفی در جواب فوق به این معنی است که جهت صحیح عکس العمل B_x در پیکر آزاد تیر به سمت چپ می‌باشد

رابطه I $\quad {}^{+}\uparrow \Sigma F_y = ۰ \Rightarrow A_y + B_y - P_y = ۰ \Rightarrow A_y + B_y = P_y \Rightarrow A_y + B_y = ۵ kN$

معادله فوق دارای دو مجهول بوده و قابل حل نمی باشد لذا از شرط سوم یعنی $\Sigma M = ۰$ استفاده می‌کنیم و در این معادله بهتر است گشتاور نسبت به نقطه‌ای محاسبه شود که بیشترین مجهولات تکیه‌گاهی در آن نقطه متمرکز است (یعنی نقطه **B**)

$$^{+}\circlearrowleft \Sigma M_B = ۰ \Rightarrow A_y \times ۶ - P_y \times ۲ = ۰ \Rightarrow A_y \times ۶ - ۵ \times ۲ = ۰ \Rightarrow ۶A_y = ۱۰$$

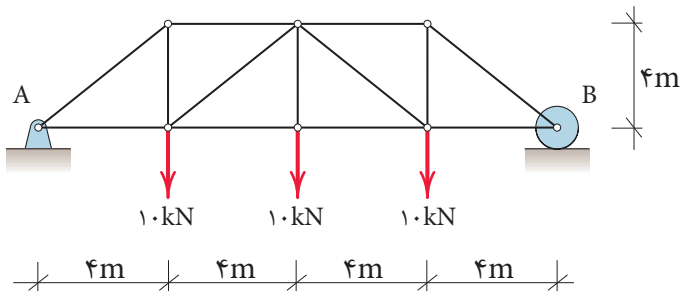
$$A_y = \frac{۱۰}{۶} \Rightarrow \boxed{A_y = ۱/۶۷ \ kN}$$

حال با قرار دادن مقدار A_y در رابطه **I** خواهیم داشت:

$$Ay + By = ۵ \Rightarrow ۱/۶۷ + By = ۵ \Rightarrow By = ۵ - ۱/۶۷ \Rightarrow \boxed{By = ۳/۳۳ \ kN}$$

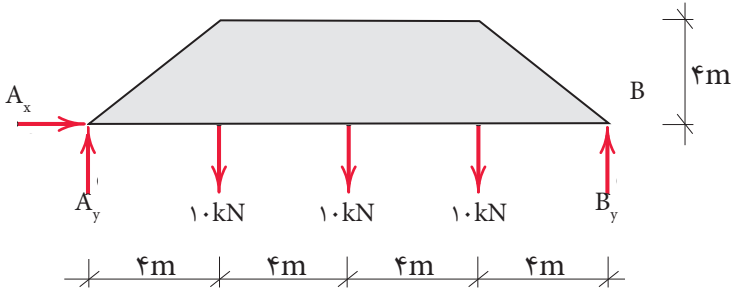
مثال ۳

عکس العمل های تکیه گاهی را در خرپای شکل زیر به‌دست آورید.



گام ۱)

ترسیم پیکر آزاد



گام۲)

تشکیل معادلات تعادل:

با توجه به اینکه نیروی افقی به سیستم وارد نمی‌شود لذا عکس‌العمل افقی تکیه‌گاه A یعنی (A_x) برابر صفر است.

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$^{+}\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 10 - 10 - 10 = 0$$

$$A_y + B_y = 30 \text{ kN} \qquad \text{رابطهٔ I}$$

$$\overset{+}{\circlearrowleft}\Sigma M_A = 0 \Rightarrow 10\times 4 + 10\times 8 + 10\times 12 - B_y \times 16 = 0$$

$$16B_y = 240 \Rightarrow B_y = \frac{240}{16} \Rightarrow \boxed{B_y = 15 \text{ kN} \uparrow}$$

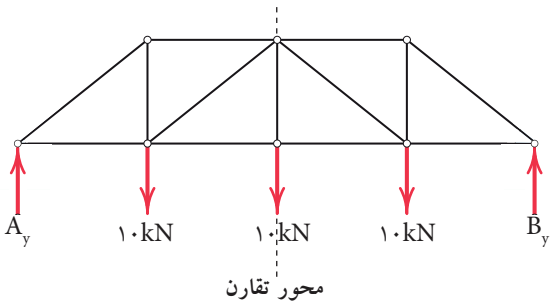
مقدار B_y را در رابطهٔ I قرار می‌دهیم داریم:

$$A_y + ۱۵ = ۳۰ \text{ kN} \Rightarrow \boxed{A_y = ۱۵ \text{ kN} \uparrow}$$

نکته:

هرگاه بارگذاری و هندسه سازه‌ای متقارن باشند کل بارهای وارده به صورت مساوی بین دو تکیه‌گاه تقسیم می‌شود.

بنابراین با توجه به تقارن در سازهٔ فوق داریم :

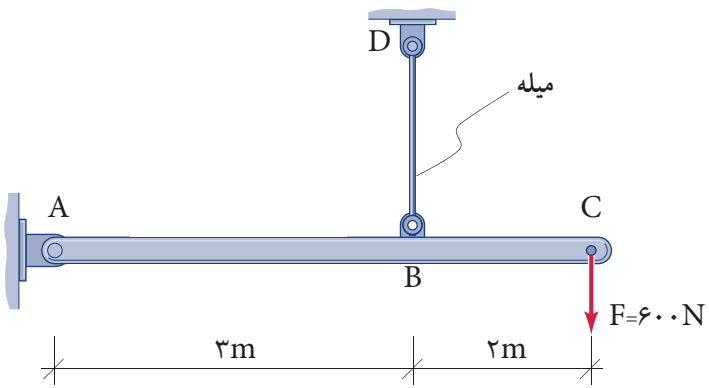


کل بار = ۱۰+۱۰+۱۰=۳۰kN

$$\boxed{A_y = B_y = \frac{۳۰}{۲} = ۱۵ \text{ kN}}$$

مثال ۴

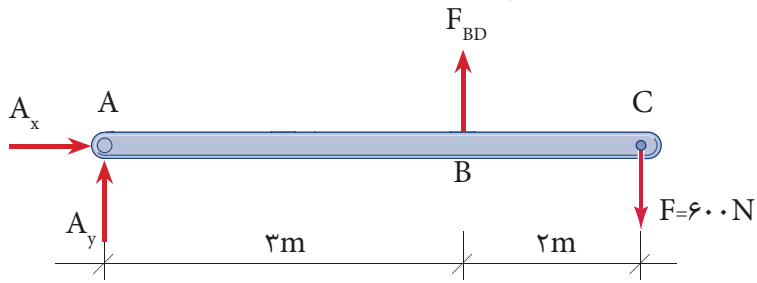
عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی تیر **ABC** را به‌دست آورید.



گام اول:

ترسیم پیکر آزاد تیر ABC

چون عضو BD میله است و با توجه به این‌که در تکیه‌گاه میله‌ای عکس‌العمل تکیه‌گاهی، در راستای میله می‌باشد، خواهیم داشت:



پیکر آزاد تیر ABC

گام دوم:

تشکیل معادلات تعادل

$$\overset{+}{\Sigma F_x} = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

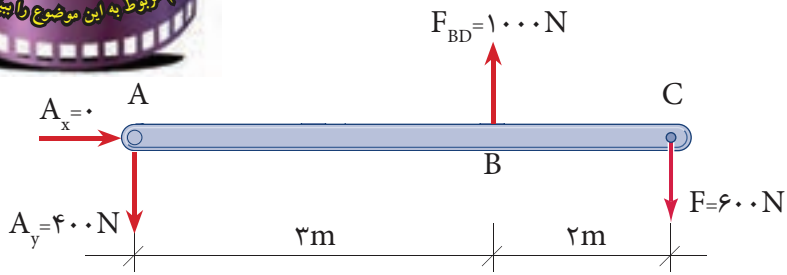
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y + F_{BD} - 600 = 0 \Rightarrow A_y + F_{BD} = 600\ N$$ رابطه I

$$\overset{+}{\circlearrowleft} \Sigma M_A = 0 \Rightarrow 600 \times 5 - F_{BD} \times 3 = 0 \Rightarrow \boxed{F_{BD} = 1000\ N}$$

از رابطه I داریم:

$$A_y + F_{BD} = 600 \Rightarrow A_y + 1000 = 600 = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = -400\ N \downarrow}$$

با توجه به علامت منفی در مقدار A_y، جهت عکس‌العمل تکیه‌گاهی A_y به‌طرف پایین(↓)خواهد بود؛ یعنی:



خلاصهٔ فصل

- مفهوم تعادل آن است که ذره یا جسم مادی هیچ‌گونه حرکت و یا چرخشی نداشته باشد.
- شرط تعادل نقطه مادی آن است که برآیند نیروهای وارد بر آن صفر باشد یعنی:

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_x = 0 \\ \sum \vec{F}_y = 0 \end{cases}$$

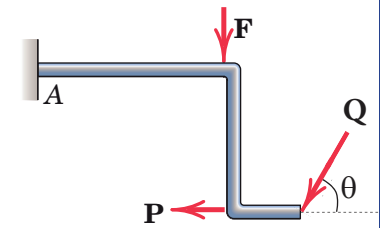
- هرگاه جسم یا نقطه مادی را از محیط اطراف خود جدا و نیروهای وارد بر آن‌ها را در راستاهای موجود نمایش دهیم، پیکر آزاد جسم و یا نقطه مادی را ترسیم نموده‌ایم.
- شرایط تعادل جسم صلب عبارت‌است از:

$$\begin{cases} \Sigma F_X = 0 \\ \Sigma F_Y = 0 \\ \Sigma M = 0 \end{cases}$$

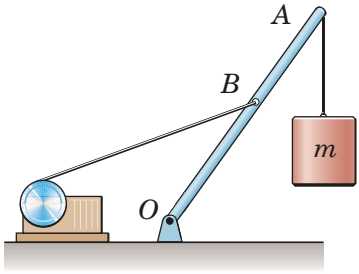
- برای تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی از معادلات تعادل جسم صلب و یا نقطهٔ مادی استفاده می‌شود.

خودآزمایی

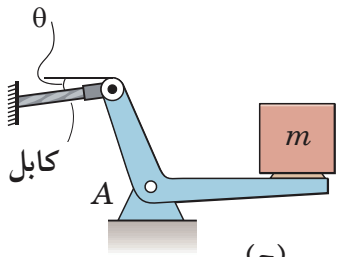
۱- پیکر آزاد هر کدام از شکل‌های زیر را رسم نمائید.



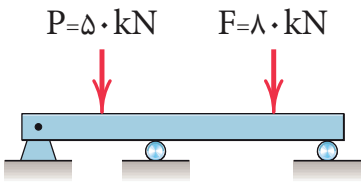
(الف)



(ب)



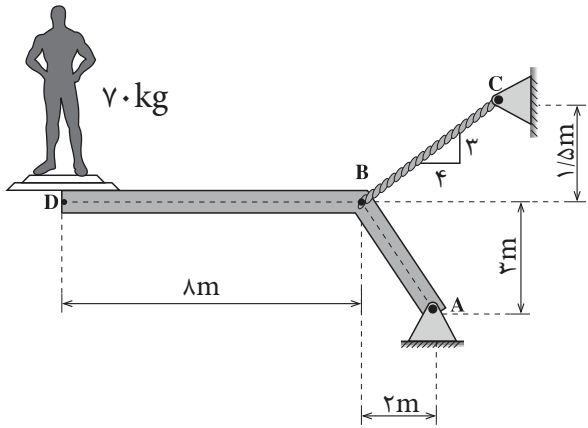
(ج)



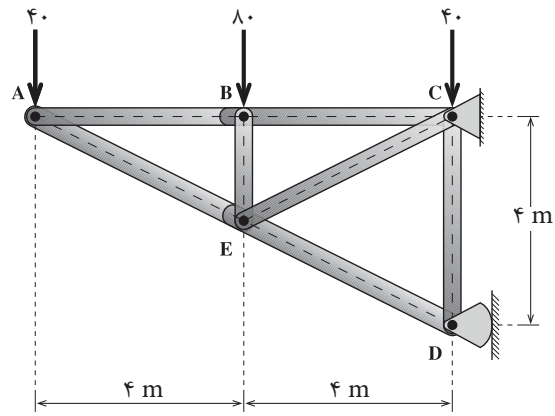
(د)

۲- عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را در شکل‌های زیر به‌دست آورید.

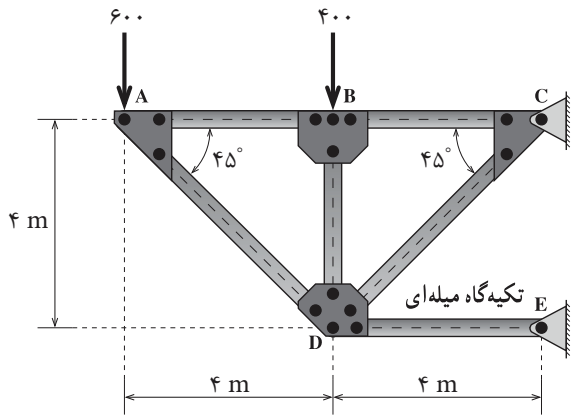
$(g = ۱۰\frac{m}{s^۲})$



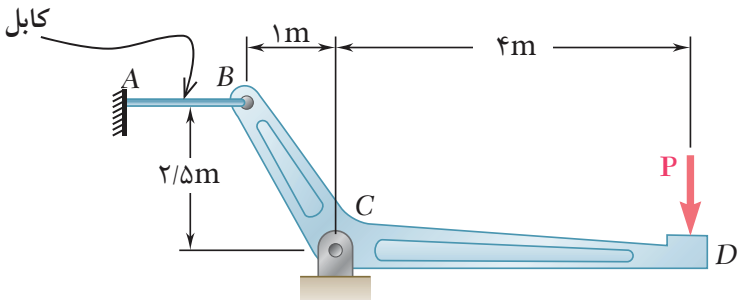
(الف)



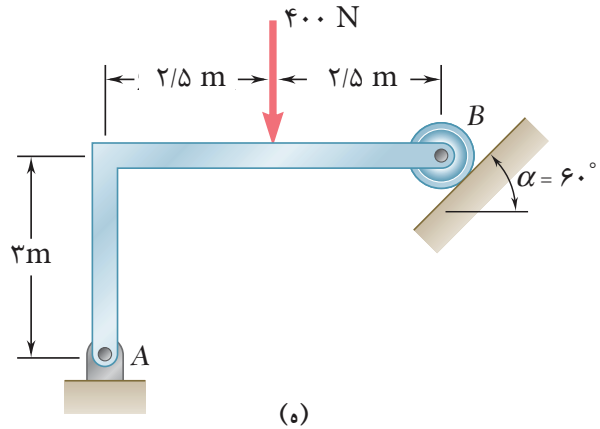
(ب)



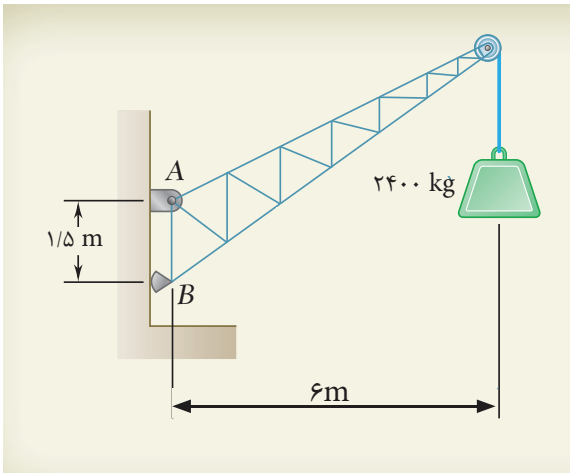
(ج)



(د)



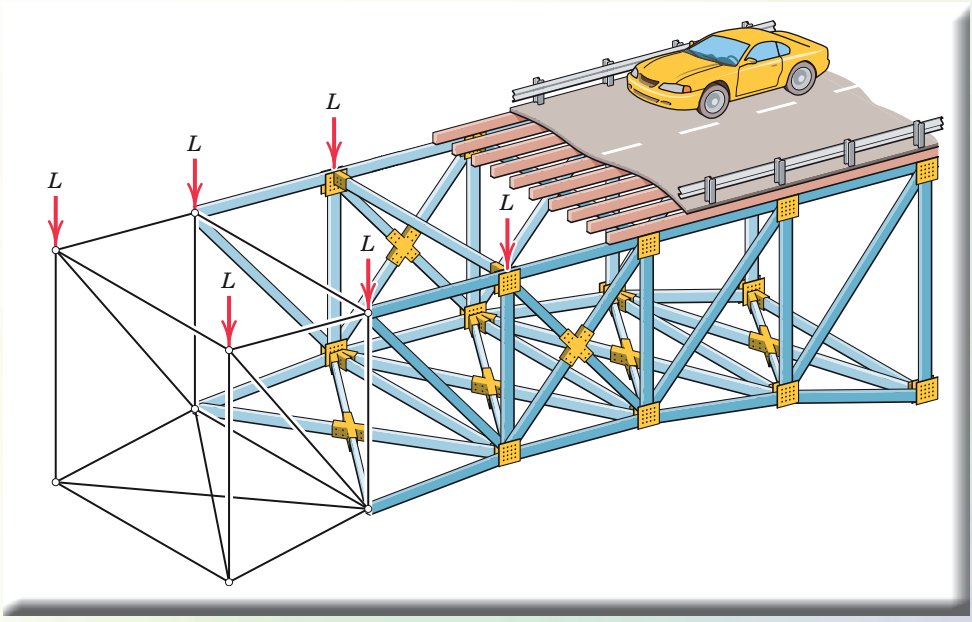
(ه)



(و)

فصل پنجم

تحلیل سازه‌های ساختمانی



هدف‌های رفتاری

پس از آموزش این فصل از فراگیر انتظار می‌رود بتواند:

۱- تحلیل سازه را تعریف نماید.

۲- خرپا را بشناسد و انواع آن‌را نام ببرد.

۳- فرضیات تحلیل خرپا را بداند.

۴- روش مفاصل (گره‌ها) را در تحلیل خرپا به‌کار گیرد.

۵- اعضای صفر نیرویی را در خرپاها تعیین نماید.

۶- تیر را تعریف کرده و بارهای وارد بر آن‌را بشناسد.

۷- رفتار تیر تحت تأثیر بارهای خارجی را بشناسد.

۸- عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی تیرها با بار گسترده یکنواخت را به‌دست آورد.

۹- نیروهای داخلی تیرها با بار متمرکز را محاسبه نماید.

۱۰- نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی در تیرهای با بار متمرکز را ترسیم نماید.

۱۱- مقادیر حداکثر نیروی برشی و لنگر خمشی تیرها با بار متمرکز را به‌دست آورد.

مقدمه:

سازه‌های ساختمانی شامل انواع سازه‌های قابی، سازه‌های پوسته‌ای، سازه‌های کابلی وسازه‌های خرپایی می‌باشد.

به هر عضو یا مجموعه‌ای از اعضا که نیروی وارد شده را تحمل نموده و منتقل نماید، سازه گفته می‌شود.

بنابراین تیرها ، ستون‌ها، بادبندها و ... نیز نوعی سازه می‌باشند.

منظور از تحلیل سازه، بررسی پایداری سازه، تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی، نیروهای داخلی و تغییر شکل سازه تحت تاثیر نیروهای خارجی وارد به آن می‌باشد که در فصل چهارم راجع به تعیین عکس‌العمل‌ها بحث شد و در این فصل تنها به تعیین نیروهای داخلی در اجزای خرپاهای صفحه‌ای و تیرها بسنده می‌شود.

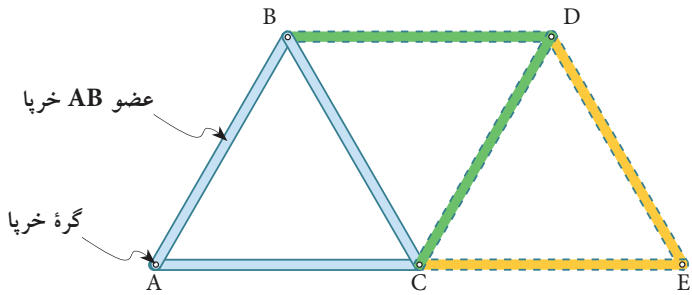
۵-۱ خرپا (Truss)

خرپاها سازه‌هایی هستند متشکل از اعضا (میله‌هایی) که در دو انتهای خود به صورت مفصل (پین) به یکدیگر متصل شده و عموماً تشکیل شبکه‌های مثلثی می‌دهند.

۵-۱-۱- انواع خرپا

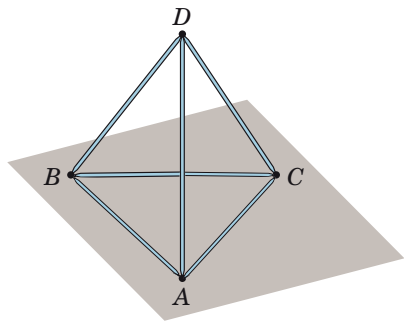
خرپاها به طور کلی به دو گروه تقسیم می‌شوند.

۱- خرپاهای صفحه‌ای: خرپاهایی هستند که فرم پایه آن‌ها تشکیل شده از سه عضو (میله) و سه گره (پین یا مفصل) که در یک صفحه واقع شده و با افزودن دو عضو و یک گره جدید گسترش می‌یابد.



شکل ۵-۱

۲- خرپاهای فضایی: به خرپاهایی گفته می‌شود که فرم پایه آن‌ها تشکیل شده از شش عضو و چهار گره که یک شبکه فضایی ساخته و با افزودن سه عضو و یک گره جدید گسترش می‌یابد.

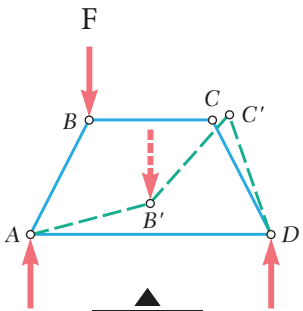


شکل ۵-۲

۵-۱-۲- شکل خرپاها

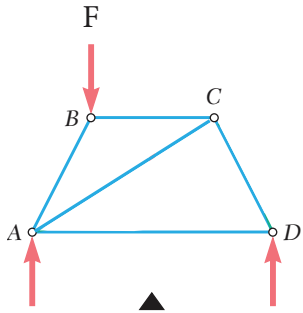
همان‌طور که گفته شد خرپاهای ساده از تعدادی شبکه مثلثی تشکیل می‌یابند و دلیل استفاده از هندسهٔ مثلثی در خرپاها، پایداری هندسی مثلث نسبت به سایر اشکال هندسی می‌باشد. چرا که در مثلث تغییر زاویه مشروط به تغییر طول اضلاع آن می‌باشد و این تغییر در هندسهٔ مثلثی خرپاها به سادگی اتفاق نمی‌افتد درحالی‌که در یک هندسهٔ چهارضلعی بدون تغییر طول اضلاع آن‌ها تغییر شکل به راحتی صورت می‌پذیرد.

با توجه به شکل (۵-۳) دیده می‌شود که در چهارضلعی **ABCD** که اضلاع آن به صورت مفصل یا پین به هم متصل شده‌اند با وارد آوردن نیروی نه‌چندان بزرگ **F** به‌راحتی دچار تغییرشکل شده و نقطه **B** به **B´** و **C** به **C´** منتقل می‌شود بنابراین سازه ناپایدار بوده و این مسئله نامطلوب است.



شکل ۵-۳

برای تأمین پایداری سازه فوق کافی است عضو قطری **BC** را به آن بیافزاییم و چهار ضلعی را به دو مثلث تبدیل نماییم. (شکل ۵-۴)



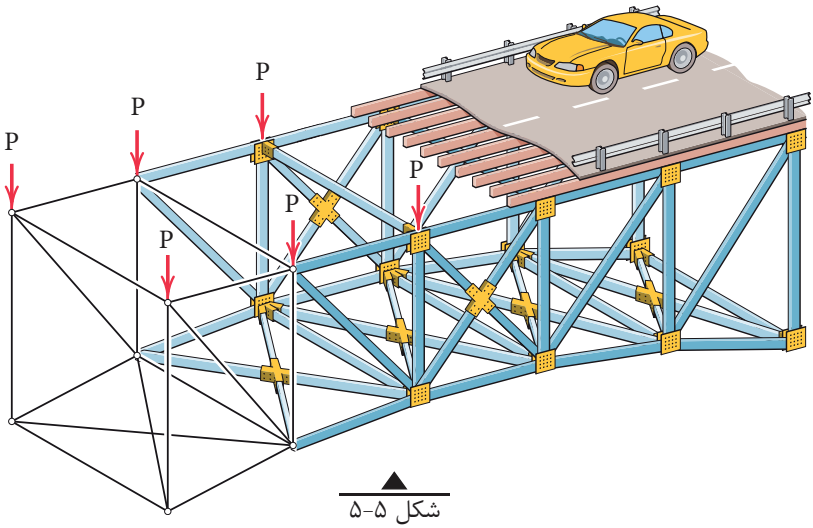
شکل ۵-۴

کارعملی: شکل‌های (۵-۳) و (۵-۴) را با قطعات چوبی و اتصال مفصلی بسازید و با اعمال نیروی متناسب، عملکرد آن‌ها را با یکدیگر مقایسه نمایید.

۵-۱-۳- فرضیات تحلیل خرپاها:

منظور از تحلیل خرپا، تعیین نیروی داخلی هر عضو خرپا و محاسبهٔ عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی آن می‌باشد و مبتنی بر فرضیاتی به شرح ذیل است:

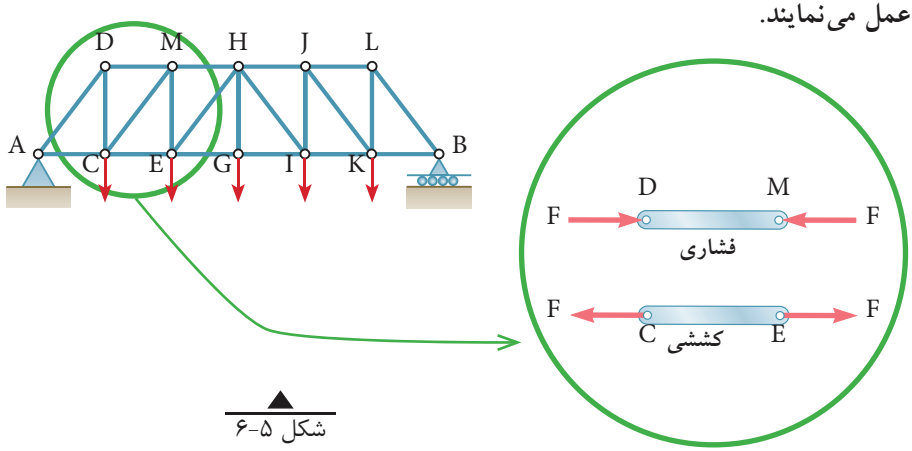
۱- نیروهای خارجی وارد بر خرپا در صفحه خرپا و در محل گره‌ها به آن اعمال می‌شود. شکل (۵-۵)



شکل ۵-۵

۲- اعضای خرپا (میله‌ها) به صورت مفصلی به یکدیگر متصل می‌شوند.

با توجه به فرضیات فوق، نیروهای داخلی و خارجی در محل گره به صورت متقارب خواهند بود. بنابراین نیروهای داخلی اعضا در راستای آن‌ها و به صورت کششی یا فشاری عمل می‌نمایند.



شکل ۵-۶

۵-۱-۴- روش تحلیل خرپا

برای تحلیل خرپاها روش‌های مختلفی وجود دارد که در این قسمت به روش تحلیل مفاصل (گره‌ها) اشاره می‌شود و در مقاطع بالاتر با سایر روش‌های تحلیل خرپا آشنا خواهید شد.

۵-۱-۵- روش مفاصل (گره‌ها) در تحلیل خرپاها:

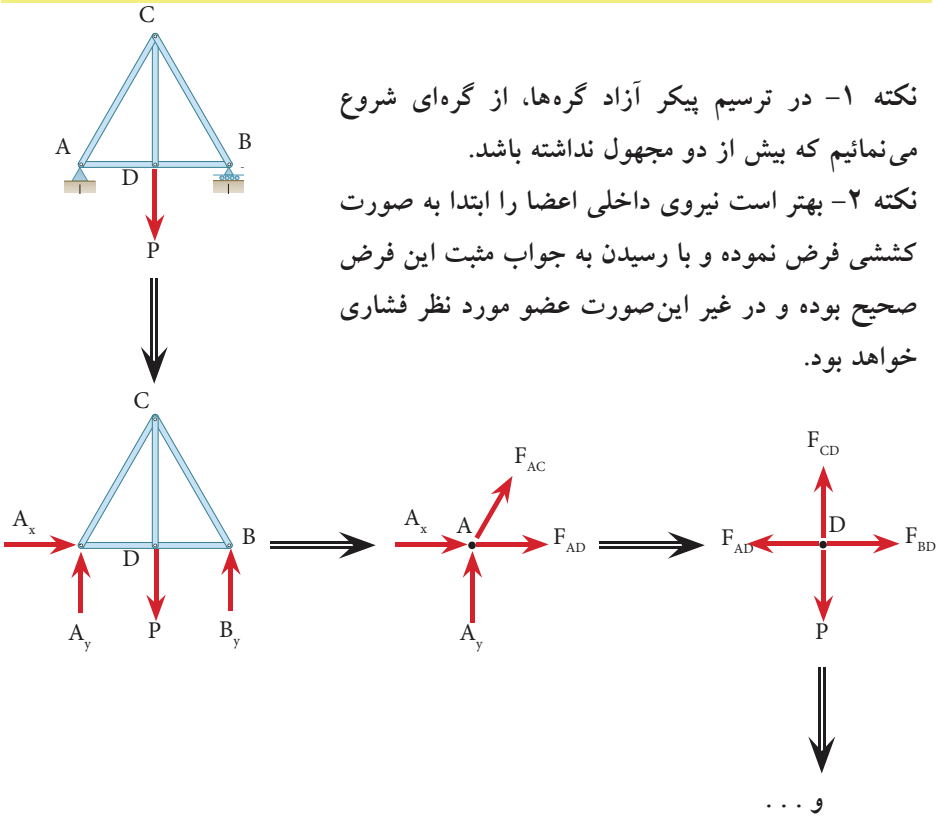
فلسفه این روش بر این اصل استوار است که چون کل خرپا در حال تعادل است پس هر گرهٔ آن نیز باید در حال تعادل باشد، بنابراین عموماً مراحل تحلیل خرپا در این روش عبارت‌است از:

۱) محاسبه عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی ⟵ ۲) ترسیم پیکر آزاد هر گره ⟵

۳) اعمال شرایط تعادل هر گره (نقطهٔ مادی) یعنی: $\begin{cases}\Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0\end{cases}$ ⟵ ۴) حل معادلات تشکیل‌شده و محاسبهٔ مجهولات مورد نظر

نکته ۱- در ترسیم پیکر آزاد گره‌ها، از گره‌ای شروع می‌نمائیم که بیش از دو مجهول نداشته باشد.

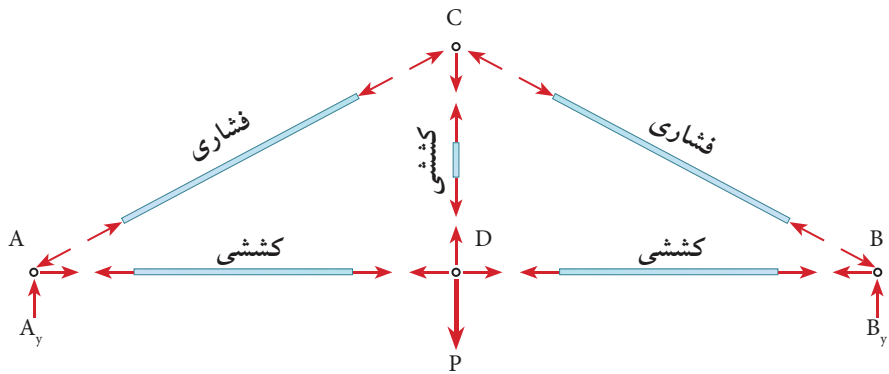
نکته ۲- بهتر است نیروی داخلی اعضا را ابتدا به صورت کششی فرض نموده و با رسیدن به جواب مثبت این فرض صحیح بوده و در غیر این‌صورت عضو مورد نظر فشاری خواهد بود.



شکل ۵-۷

نکته ۳- در ترسیم پیکر آزاد هرگره جهت نیروهای کششی از گره دور شده و جهت نیروهای فشاری به گره نزدیک می‌شود.

نتیجه نهایی تحلیل خرپای شکل (۵-۷) در شکل (۵-۸) نشان داده شده است.



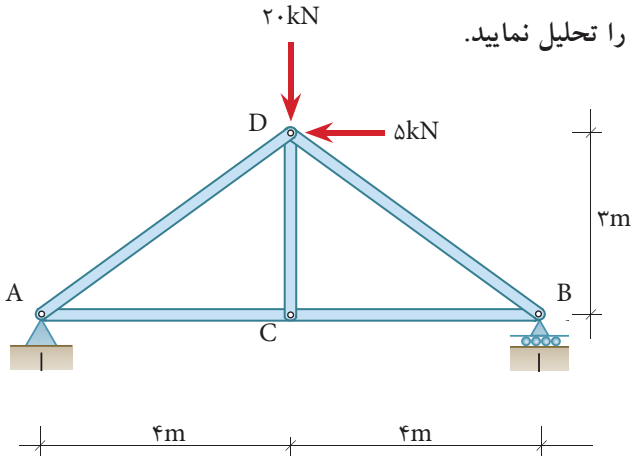
شکل ۵-۸

تاریخ مهندسی (مطالعه آزاد)

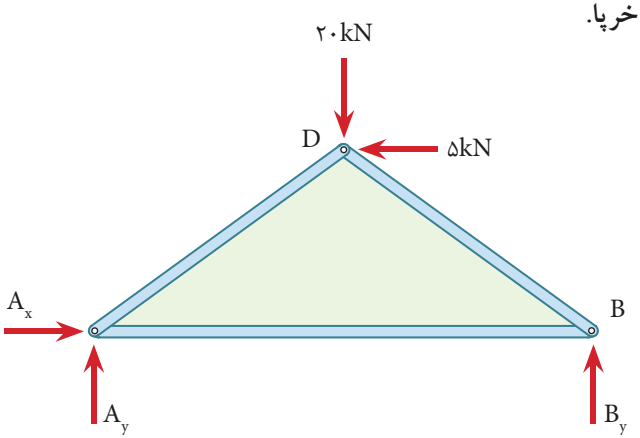
در کتاب‌های تاریخ فنی غرب، چنین آمده است که اولین نوع ساختمان‌های خرپایی، در قرون شانزدهم میلادی ساخته شده است. همچنین گفته شده که اولین نوع خرپای واقعی ثبت‌شده در تاریخ در قرن شانزدهم میلادی توسط یک مهندس رومی به‌نام پالادیو (**Paladio**) (۱۵۸۰ - ۱۵۱۸ م) ابداع و ساخته شده است. اما سندهای تاریخی نشان‌دهندهٔ آن است که ساختمان خرپایی در ایران باستان از هزارهٔ سوم قبل از میلاد ساخته می‌شده است. مورد استناد در این بررسی لوحه‌ای است که در حفاری‌های باستان‌شناسی شوش به‌دست آمده و تاریخ آن به هزارهٔ سوم قبل از میلاد (پنج هزار سال پیش) می‌رسد.

مثال ۱

خرپای شکل روبه‌رو را تحلیل نمایید.



۱ – ترسیم پیکر آزاد کل خرپا.



۲ – محاسبه عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی.

$$\overset{+}{\rightarrow}\ \Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 5\ kN \rightarrow}$$

$$^{+}\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 20 = 0$$

$$A_y + B_y = 20\ kN \qquad \text{معادله I}$$

$$\overset{+}{\circlearrowleft} \Sigma M_A = 0 \Rightarrow 20\times 4 - 5\times 3 - B_y \times 8 = 0$$

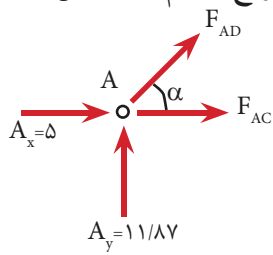
$$B_y = \frac{65}{8} \Rightarrow \boxed{B_y = 8/13\ kN}$$

در معادله I $\quad A_y + 8/13 = 20 \Rightarrow \boxed{A_y = 11/87\ kN}$

۳ – تحلیل گره‌ها:

برای تحلیل گره‌ها با توجه وجود دو عضو (دو مجهول) در هر یک از گره‌های A و B می‌توانیم از هریک از آن‌ها شروع نماییم که در این مثال گرهٔ A انتخاب می‌گردد.

پیکر آزاد گرهٔ A :



$$\alpha = \tan^{-1}(\frac{۳}{۴}) = ۳۶/۸۶^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = ۰/۶ \\ \cos\alpha = ۰/۸ \end{cases}$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = ۰ \Rightarrow ۵ + F_{AD}\cos\alpha + F_{AC} = ۰ \Rightarrow ۵ + ۰/۸F_{AD} + F_{AC} = ۰ \quad \textbf{II معادله}$$

$$^{+}\uparrow \Sigma F_y = ۰ \Rightarrow ۱۱/۸۷ + F_{AD}\sin\alpha = ۰ \Rightarrow ۰/۶F_{AD} = -۱۱/۸۷$$

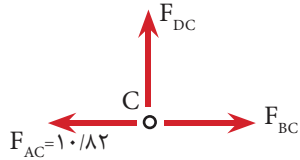
$$\Rightarrow \boxed{F_{AD} = -۱۹/۷۸\text{kN} \quad \text{فشاری}}$$

$$\textbf{II از معادله} \Rightarrow ۵ + ۰/۸(-۱۹/۷۸) + F_{AC} = ۰$$

$$\Rightarrow \boxed{F_{AC} = ۱۰/۸۲\text{kN} \quad \text{کششی}}$$

باتوجه به مشخص شدن نیروی داخلی عضو AC می‌بینیم که گره C نیز دارای دو مجهول BC و CD می‌باشد و اکنون می‌توان تحلیل این گره را آغاز کرد.

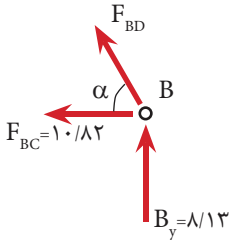
پیکر آزاد گرهٔ C :



$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = ۰ \Rightarrow F_{BC} - ۱۰/۸۲ = ۰ \Rightarrow \boxed{F_{BC} = ۱۰/۸۲\ \text{kN} \quad \text{کششی}}$$

$$^{+}\uparrow \Sigma F_y = ۰ \Rightarrow \boxed{F_{CD} = ۰}$$

پیکر آزاد گرهٔ B :



$$^{+}\uparrow \Sigma F_y = ۰ \Rightarrow F_{BD}\sin\alpha + ۸/۱۳ = ۰$$

$$\Rightarrow F_{BD} = \frac{-۸/۱۳}{۰/۶} \Rightarrow \boxed{F_{BD} = -۱۳/۵۵\ \text{kN} \quad \text{فشاری}}$$

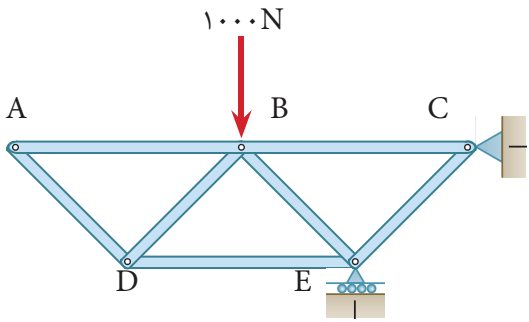
۵-۱-۶- اعضای صفر نیرویی

درمثال فوق ملاحظه گردید که نیروی داخلی عضو **CD** برابر صفر است که اصطلاحاً به آن عضو صفر نیرویی گفته می‌شود.

در موارد زیر اعضای صفر نیرویی بدون تحلیل قابل تشخیص هستند.

الف) هرگاه در گره‌ای دو عضو غیر هم‌راستا وجود داشته باشد و به آن گره نیروی خارجی و یا عکس‌العمل تکیه‌گاهی اعمال نشود، هر دو عضو صفر نیرویی خواهند بود. برای نمونه در شکل (۵-۹)، اعضای **AB** و **AD** دارای چنین شرایطی هستند بنابراین عضو صفر نیرویی خواهند بود. یعنی:

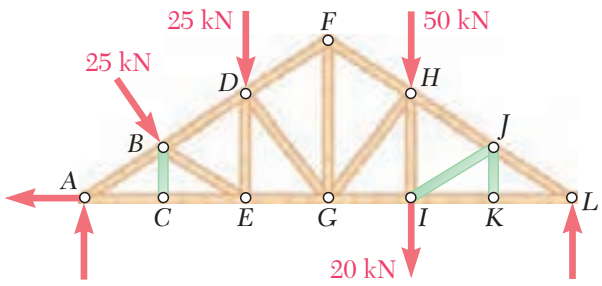
$$F_{AB} = F_{AD} = ۰$$



شکل ۵-۹

آیا این خرپا دارای عضو صفر نیرویی دیگری می‌باشد؟ چرا؟ نام ببرید.

ب) هرگاه در گره‌ای سه عضو وجود داشته باشد که دو عضو آن هم‌راستا باشند، در صورتی که نیروی خارجی روی گرهٔ مذکور نباشد، عضو سوم صفر نیرویی خواهد بود. در خرپای شکل (۵-۱۰) اعضای **BC** و **KJ** و **IJ** صفر نیرویی می‌باشند.



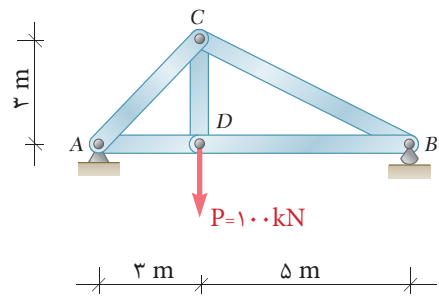
شکل ۵-۱۰

خودآزمایی

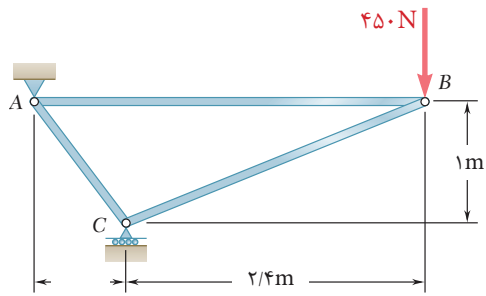
۱- در خرپای شکل زیر مطلوب‌است:

الف) محاسبه عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی

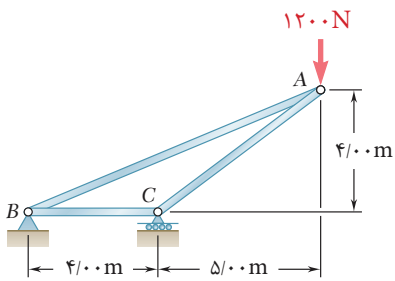
ب) محاسبه نیروهای داخلی اعضا و تعیین کششی یا فشاری بودن آن‌ها



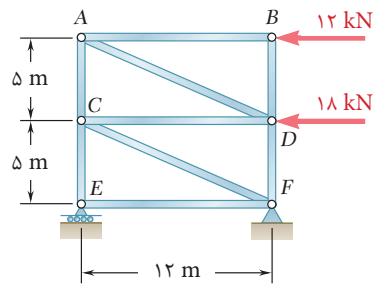
۲- در خرپاهای زیر نیروهای داخلی اعضا را محاسبه نمایید.



(الف)



(ب)

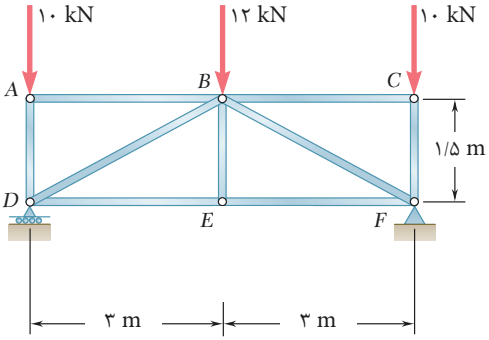


(ج)

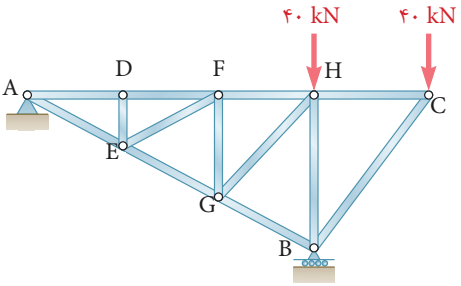
۳- در خرپای شکل زیر

اولاً: اعضای صفر نیرویی را تعیین کنید.

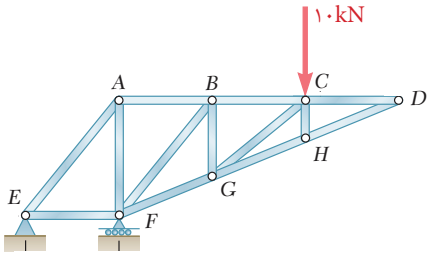
ثانیاً: نیروی داخلی سایر اعضا را محاسبه کنید.



۴- در خرپاهای زیر اعضای صفر نیرویی را مشخص نمایید.



(الف)



(ب)

۵-۲ تحلیل تیرها

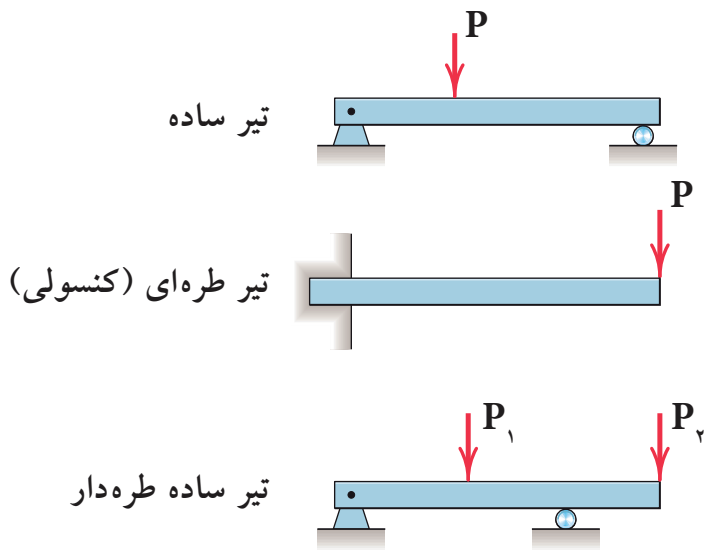
هدف از تحلیل تیر در این فصل تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی و نیروهای داخلی در هر مقطع از تیر می‌باشد.

۵-۲-۱- تعریف تیر (Beam)

تیر عضوی است که بارهای عمود بر محور خود را تحمل و منتقل می‌نماید و در اکثر سازه‌های ساختمانی به‌کار می‌رود.

۵-۲-۲- انواع تیرها از نظر شرایط تکیه‌گاهی

با توجه به انواع تکیه‌گاه‌ها که قبلاً معرفی شده‌اند تیرها می‌توانند به صورت‌های مختلف روی تکیه‌گاه‌ها قرار گیرند که در این قسمت به معرفی چند نوع از آن‌ها اکتفا می‌شود. شکل (۵-۱۱)

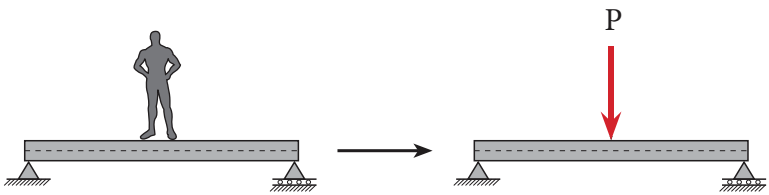


شکل ۵-۱۱

۵-۲-۳- انواع بارهای وارد به تیر

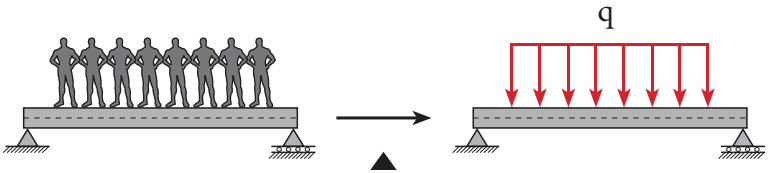
بارها به صورت‌های گوناگون به تیرها وارد می‌گردند که تعدادی از آن‌ها عبارت‌اند از:

الف) بار متمرکز



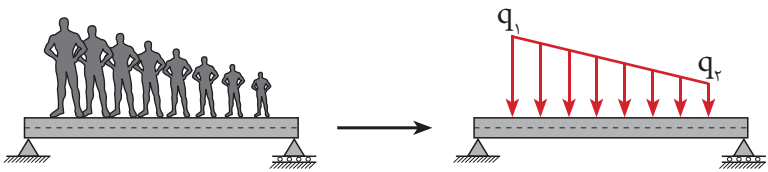
شکل ۵-۱۲

ب) بار گسترده یکنواخت



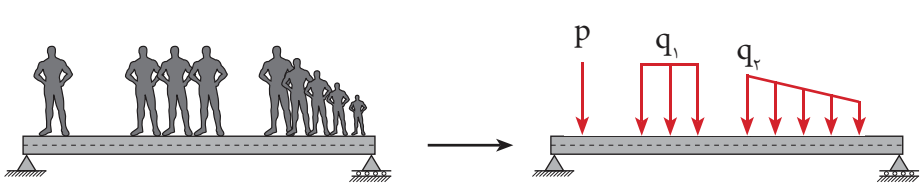
شکل ۵-۱۳

ج) بار گسترده غیر یکنواخت



شکل ۵-۱۴

د) ترکیبی از انواع فوق



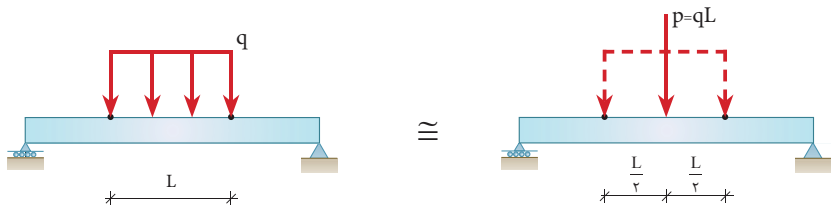
شکل ۵-۱۵

۵-۲-۴- تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی تیرها با بار گسترده یکنواخت

برای محاسبه عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی تیرها تحت بار گستردهٔ یکنواخت ابتدا باید مقدار و محل اثر برآیند بارهای گسترده یکنواخت وارد به تیر را تعیین نمود. مطابق شکل (۵-۱۶)

مقدار برآیند بار گسترده برابر مساحت مستطیل بار وارده و محل اثر آن نقطهٔ تلاقی دو قطر مستطیل (نصف طول آن) خواهد بود.

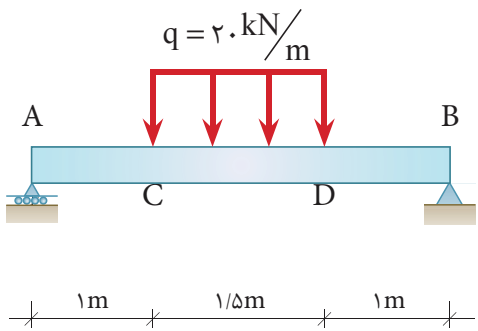
با توجه به موارد فوق‌الذکر پیکر آزاد تیر را ترسیم نموده و عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را محاسبه می‌نماییم.



شکل ۵-۱۶

مثال ۲

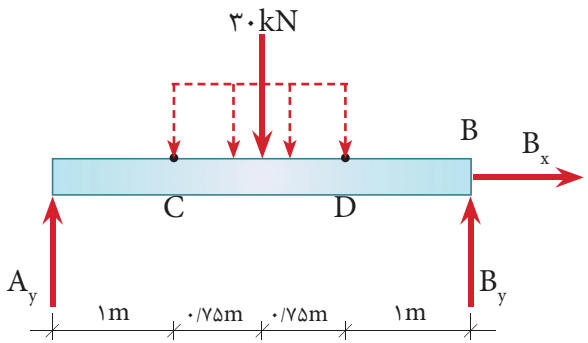
عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی تیر شکل زیر رامحاسبه نمایید.

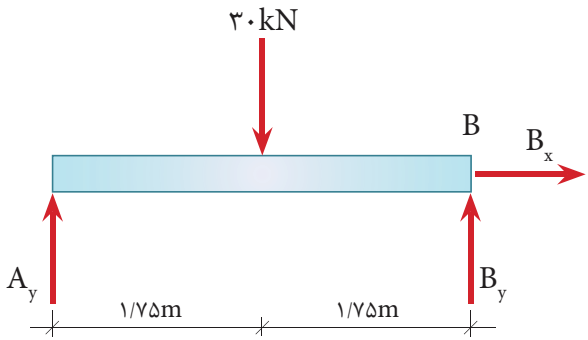


الف) ابتدا مقدار برآیند بار گسترده (مساحت مستطیل) را به‌دست می‌آوریم

$$P = q.L \Rightarrow P = ۲۰ \times ۱/۵ = ۳۰ kN$$

ب) محل اثر برآیند بار گسترده در نصف طول مستطیل می‌باشد که در پیکر آزاد تیر دیده می‌شود.





ج) با تشکیل معادلات تعادل و حل آن‌ها خواهیم داشت:

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \boxed{B_x = 0}$$

$$^{+}\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 30 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{A_y + B_y = 30\ kN} \quad \mathbf{I}$$

$$\overset{+}{\circlearrowleft}\Sigma M_A = 0 \Rightarrow 30 \times 1/75 - B_y \times 3/5 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{B_y = 15\ kN}$$

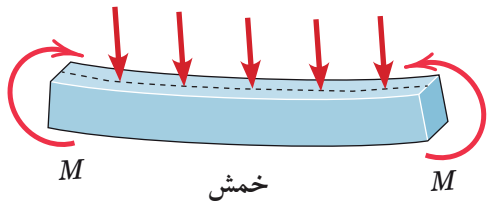
مقدار B_y را در معادله **I** قرار می‌دهیم تا A_y به‌دست آید.

$$\text{از معادلهٔ } \mathbf{I} \Rightarrow A_y + B_y = 30 \Rightarrow A_y + 15 = 30 \Rightarrow \boxed{A_y = 15\ kN}$$

۵-۲-۵- رفتار تیر تحت تأثیر بارهای خارجی

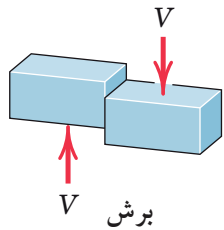
هنگامی که تیری تحت تأثیر نیروهای خارجی مطابق شکل (۵-۱۷) واقع می‌شود، در آن پدیده‌های خمش و برش ایجاد می‌گردد.

پدیده خمش باعث ایجاد کشش و فشار در لایه‌ها یا تارهای تحتانی و فوقانی تیر می‌گردد. شکل (۵-۱۷)



شکل ۵-۱۷

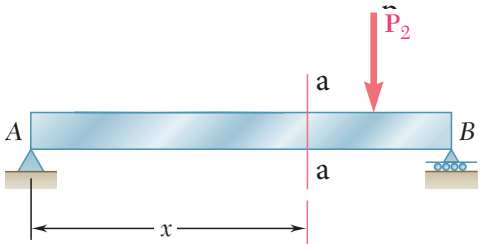
پدیده برش، رفتاری از تیر است که تمایل دارد تیر را در مقاطع مختلف آن قطع نماید. این رفتار، شبیه رفتار یک قیچی می‌باشد. شکل (۵-۱۸)

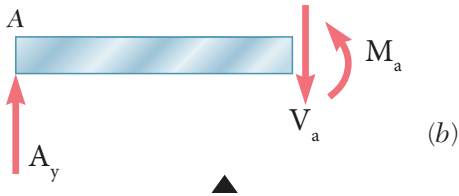


شکل ۵-۱۸

۵-۲-۶- نیروهای داخلی در تیرها با بار متمرکز

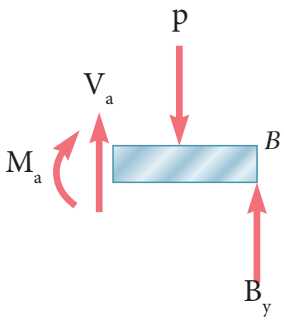
هنگامی که تیر تحت تأثیر بار قرار می‌گیرد در هر نقطه از طول تیر نیروهایی به‌وجود می‌آیند که به آن‌ها نیروهای داخلی تیر می‌گویند. برای این‌که نیروهای داخلی در هر نقطه از تیر تعیین شود باید یک برش (مقطع) عمود بر محور تیر در آن نقطه در نظر گرفت و پیکر آزاد یکی از قطعات سمت چپ یا راست مقطع مورد نظر را ترسیم نموده و با توجه به بحث تعادل اثر قطعه دیگر را بر روی آن اعمال کرد. به عنوان مثال در شکل (۵-۱۹) در مقطع a-a خواهیم داشت:





شکل ۵-۱۹

و مطابق قانون سوم نیوتن همین اثر روی قطعه سمت راست و در جهت مخالف وجود دارد. شکل (۵-۲۰)



شکل ۵-۲۰

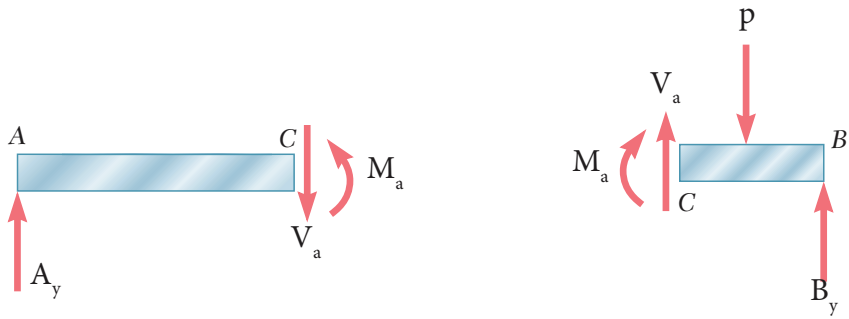
بنابراین نیروهای داخلی در هر مقطع از تیرها عبارتند از:

۱- نیروی برشی (V)

۲- لنگر خمشی (M)

۵-۲-۶-۱- علائم قرار دادی نیروهای داخلی تیرها

برای ایجاد یکنواختی در محاسبات نیروهای داخلی در مقاطع تیرها بهتر است جهت‌های مثبت نیروی برشی و لنگر خمشی را به صورت شکل (۵-۲۱) در نظر بگیریم.



قطعه سمت راست　　قطعه سمت چپ

شکل ۵-۲۱

۵-۲-۶-۲- محاسبهٔ نیروهای داخلی تیرها با بار متمرکز

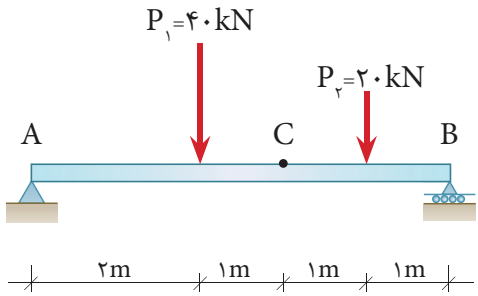
برای محاسبهٔ نیروهای داخلی در هر مقطع، پس از ترسیم پیکر آزاد یکی از قطعات سمت چپ یا راست آن مقطع و قرار دادن نیروی برشی **V** و لنگر خمشی **M** مطابق قرارداد فوق کافی‌است معادلات تعادل را برای قطعه مورد نظر تشکیل داده و اقدام به حل آن‌ها نماییم.

مثال ۲

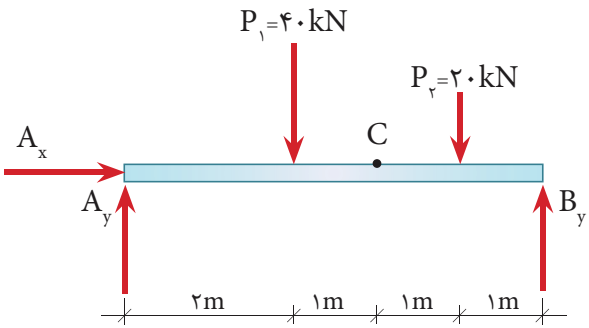
در تیر شکل مقابل مطلوب است:

الف) محاسبه عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی

ب) محاسبه نیروی برشی و لنگر خمشی در نقطه **C**



گام۱) ترسیم پیکر آزاد تیر:



گام۲) محاسبه عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی:

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$^{+}\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 40 - 20 = 0$$

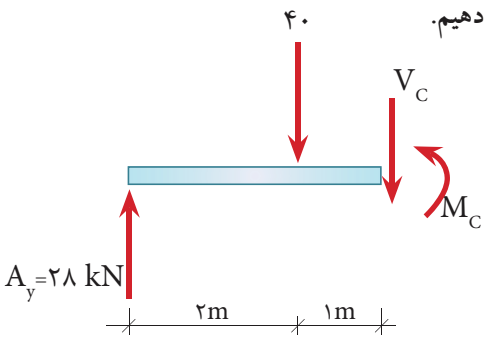
$$A_y + B_y = 60 \text{ kN} \quad \text{رابطهٔ I}$$

$$\overset{+}{\circlearrowleft}\Sigma M_A = 0 \Rightarrow 40\times 2 + 20\times 4 - 5B_y = 0$$

$$\boxed{B_y = 32 \text{ kN}}$$

$$\text{از رابطهٔ I} \Rightarrow A_y + 32 = 60 \Rightarrow \boxed{A_y = 28 \text{ kN}}$$

گام۳) برای تعیین نیروهای داخلی در مقطع C، تیر را در این نقطه به دو قسمت تقسیم نموده و قطعهٔ سمت چپ را مورد بررسی قرار می‌دهیم.



گام۴) تشکیل معادلات تعادل و حل آن‌ها برای این قطعه

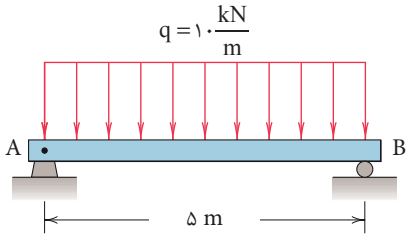
$$^{+}\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow 28 - 40 - V_c = 0 \Rightarrow \boxed{V_c = -12 \text{ kN}}$$

$$\overset{+}{\circlearrowleft}\Sigma M_c = 0 \Rightarrow 28\times 3 - 40\times 1 - M_c = 0$$

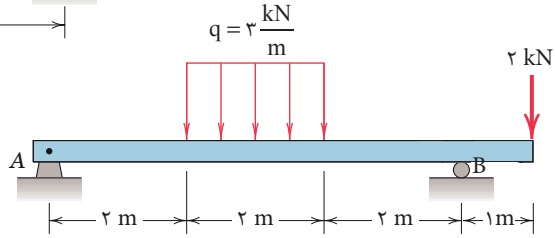
$$\boxed{M_c = 44 \text{ kN.m} \circlearrowleft}$$

خودآزمایی

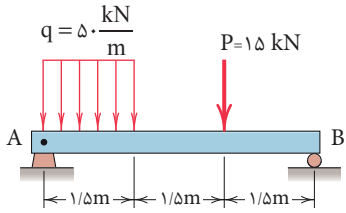
۱- عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی تیرهای زیر را به‌دست آورید.



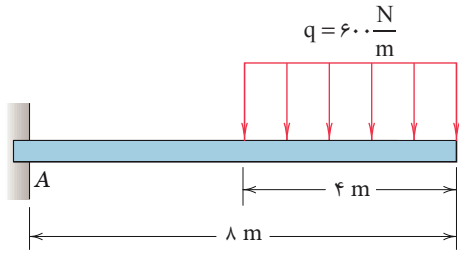
(الف)



(ب)

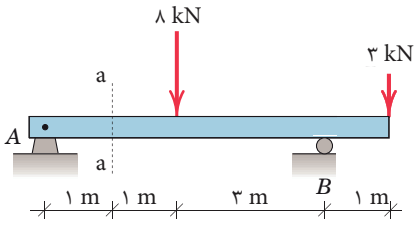


(ج)

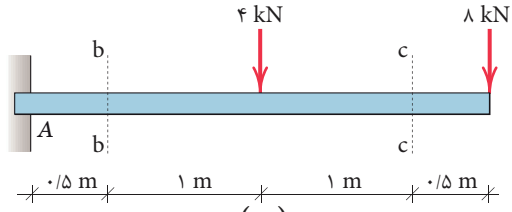


(د)

۲- در تیرهای زیر نیروی برشی و لنگر خمشی را در مقاطع نشان‌داده شده به‌دست آورید.



(الف)



(ب)

۵-۲-۷- مقادیر حداکثر نیروهای برشی و لنگر خمشی در تیرها با بار متمرکز

در مثال قبل چگونگی محاسبه نیروی برشی و لنگر خمشی در نقطه دلخواه C را مشاهده نمودیم. برای مهندسین معمولاً مقدار ماکزیمم نیروهای داخلی و محل آن‌ها مهم است.

حال این سوال مطرح می‌شود که مقادیر نیروی برشی و لنگر خمشی حداکثر در کدام نقطه از طول تیر به وجود می‌آید؟

برای پاسخ به این سوال باید مقادیر نیروی برشی و لنگر خمشی را در تمام نقاط طول تیر همانند مثال قبل محاسبه نموده تا مقادیر حداکثر مورد نظر و محل آن‌ها مشخص شود که این روش، کاری است طاقت‌فرسا. لذا بهتر است که مقادیر نیروی برشی و لنگر خمشی در طول تیر را به صورت نمودار نشان داده و از روی نمودار مقادیر حداکثر نیروی برشی و لنگر خمشی و محل آن‌ها را تعیین نمود.

۵-۲-۸- ترسیم نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی تیرها با بار متمرکز

نمودار نیروی برشی و یا لنگر خمشی عبارت‌است از نموداری که مقادیر نیروی برشی و لنگر خمشی را در هر نقطه از تیر مشخص نماید. هدف از ترسیم چنین نمودارهایی تعیین نقاطی است که حداکثر نیروی برشی و لنگر خمشی در آن‌ها به‌وجود می‌آید .برای رسیدن به این هدف تیر را در محل‌هایی که بارگذاری آن تغییر می‌نماید به چند ناحیه تقسیم نموده و در هر ناحیه معادلات نیروی برشی و لنگر خمشی را بر حسب طول تیر تعیین و سپس نمودار معادلات مذکور ترسیم می‌گردد.

مراحل ترسیم نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی در تیر با بار متمرکز به شرح ذیل خواهد بود:

۱- محاسبه عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی تیر

۲- ما بین هر دو بار متمرکز یک مقطع به فاصله X از تکیه‌گاه در نظر گرفته و محدوده X را تعیین می‌نماییم. عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی نیز، بار متمرکز محسوب می‌شوند.

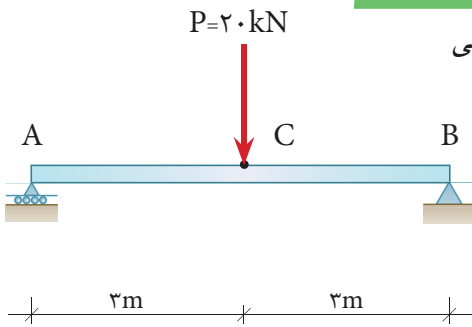
۳- پیکر آزاد یکی از قطعات سمت چپ و یا راست مقطع مورد نظر را ترسیم می‌کنیم.

۴- با تشکیل معادلات تعادل برای قطعهٔ مورد نظر، به معادلات نیروی برشی و لنگر خمشی بر حسب X خواهیم رسید.

۵- با ترسیم نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی در محدوده‌های مختلف تیر به نمودارهای موردنظر دست می‌یابیم.

مثال ۳

نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی تیر مقابل را ترسیم نمائید.



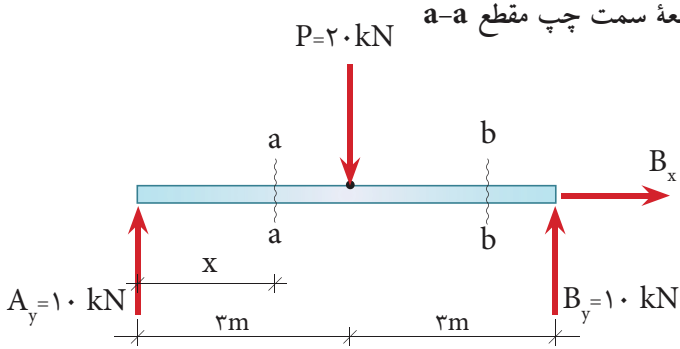
۱- محاسبه عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی: با توجه به تقارن تیر داریم:

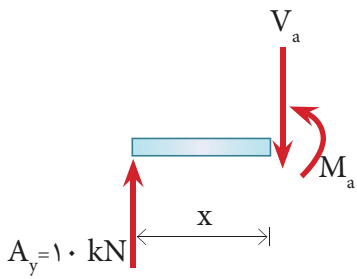
$$\overset{+}{\Sigma \vec{F}_x} = 0 \Rightarrow \boxed{B_x = 0}$$

$$\boxed{A_y = B_y = \frac{20}{2} = 10\ kN}$$

۲- مقطع a–a به فاصله x از تکیه‌گاه A را در نظر گرفته و محدودهٔ x را مشخص می‌نمائیم.

۳- ترسیم پیکر آزاد قطعهٔ سمت چپ مقطع a–a





$0 \le x \le 3m$

۴- با تشکیل معادلات تعادل برای قطعه فوق خواهیم داشت:

$$+\uparrow \Sigma F_y = ۰ \Rightarrow ۱۰ - V_a = ۰$$

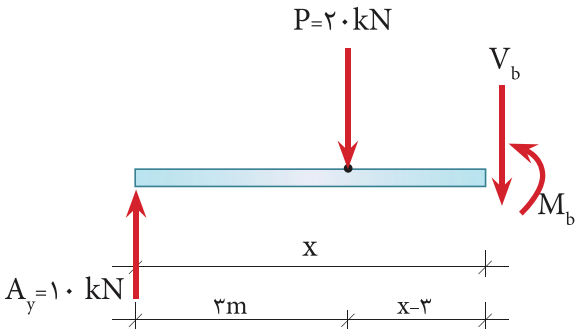
$$\boxed{V_a = ۱۰ \text{ kN}} \quad \textbf{(I)}$$ معادله نیروی برشی در محدودهٔ $۰ \le x \le ۳\text{m}$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_a = ۰ \Rightarrow ۱۰ \times x - M_a = ۰$$

$$\boxed{M_a = ۱۰ x} \quad \textbf{(II)}$$ معادله لنگر خمشی در محدودهٔ $۰ \le x \le ۳\text{m}$

این معادلات مقادیر نیروی برشی و لنگر خمشی را در محدودهٔ $۰ \le x \le ۳\text{m}$ مشخص می‌نمایند.

عملیات فوق را برای مقطع **b–b** در محدودهٔ $۳\text{m} \le x \le ۶\text{m}$ تکرار می‌نمائیم. خواهیم داشت:



مقطع **b–b**

$$+\uparrow \Sigma F_y = ۰ \Rightarrow ۱۰ - ۲۰ - V_b = ۰$$

$$\boxed{V_b = -۱۰ \text{ kN}} \quad \textbf{(III)}$$ معادله نیروی برشی در محدودهٔ $۳\text{m} \le x \le ۶\text{m}$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_b = ۰ \Rightarrow ۱۰ \times x - ۲۰ (x - ۳) - M_b = ۰$$

$$M_b = ۱۰ x - ۲۰ (x - ۳)$$

$$\boxed{M_b = ۶۰ - ۱۰ x} \quad \textbf{(IV)}$$ معادله لنگر خمشی در محدودهٔ $۳\text{m} \le x \le ۶\text{m}$

۵- اکنون نمودار نیروی برشی را با استفاده از معادلات **I** و **III** ترسیم می‌نمائیم.

(I) $V_a = ۱۰ \ kN \qquad ۰ \le x \le ۳m$

(III) $V_b = -۱۰ \ kN \qquad ۳m \le x \le ۶m$

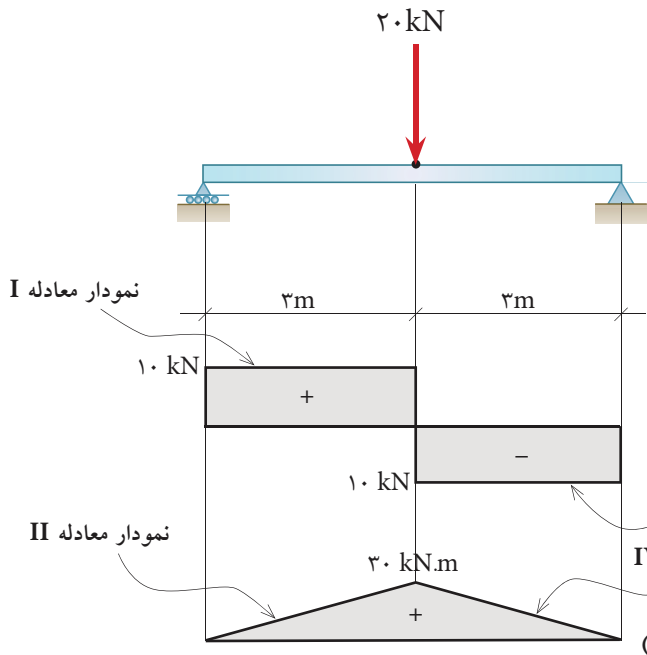
۶- نمودار لنگر خمشی را با استفاده از معادلات **II** و **IV** و به‌روش نقطه‌یابی در نقاط ابتدا و انتهای هر ناحیه ترسیم می‌کنیم.

(II) $M_a = ۱۰x \qquad ۰ \le x \le ۳m$

x (m)	M(kN.m)
۰	۰
۳	۳۰

(IV) $M_b = ۶۰ - ۱۰x \qquad ۳m \le x \le ۶m$

x (m)	M(kN.m)
۳	۳۰
۶	۰



نمودار نیروی برشی (V)

نمودار لنگر خمشی (M)

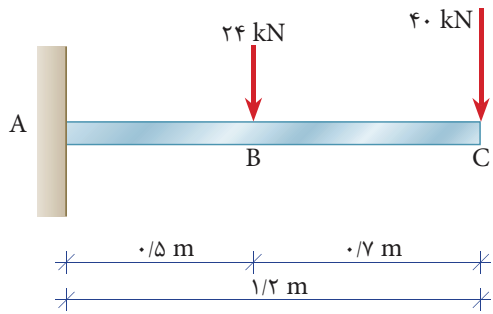
مثال ۴

در تیر شکل مقابل مطلوب‌است:

الف- ترسیم دیاگرام نیروی برشی تیر

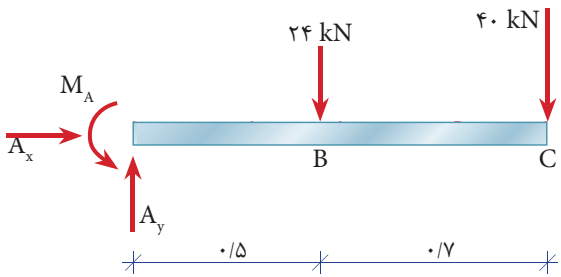
ب- ترسیم دیاگرام لنگر خمشی تیر

ج- تعیین نیروی برشی و لنگر خمشی حداکثر تیر.



حل:

الف) محاسبه عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی

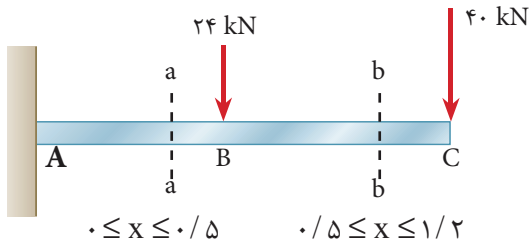


$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

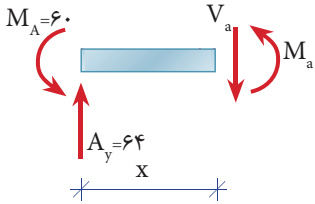
$$^{+}\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y - 24 - 40 = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = 64\ kN}$$

$$\overset{+}{\circlearrowleft}\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -M_A + 24\times 0/5 + 40\times 1/20 = 0 \Rightarrow \boxed{M_A = 60\ kN.m}$$

معادلات نیروی برشی و لنگر خمشی در ناحیه AB ($0 \le x \le 0/5$):



$0 \le x \le 0/5$ $\qquad$ $0/5 \le x \le 1/2$

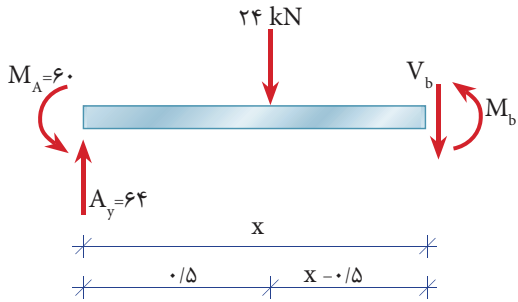


مقطع a–a

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow 64 - V_a = 0 \Rightarrow \boxed{V_a = 64 \text{ kN}} \qquad 0 \le x \le 0/5$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_a = 0 \Rightarrow -M_a + 64x - M_A = 0 \Rightarrow \boxed{M_a = 64x - 60}$$

معادلات نیروی برشی و لنگر خمشی در ناحیه BC ($0/5 \le x \le 1/2$):



مقطع b–b

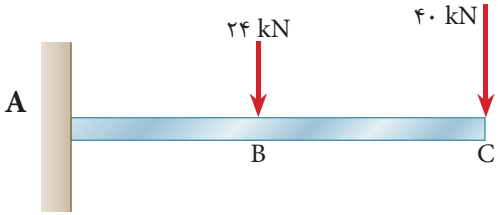
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow 64 - 24 - V_b = 0 \Rightarrow \boxed{V_b = 40 \text{ kN}} \qquad 0/5 \le x \le 1/2$$

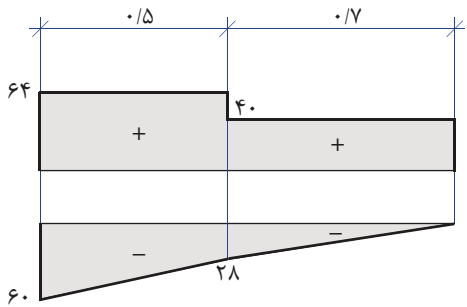
$$+\circlearrowleft \Sigma M_b = 0 \Rightarrow -M_b - M_A + 64 \times x - 24(x - 0/5) = 0$$

$$\Rightarrow M_b = 64x - 24(x - 0/5) - 60$$

$$\boxed{M_b = 40\ x - 48} \qquad 0/5 \le x \le 1/2$$

ترسیم معادلات برش و خمش:





نمودار نیروی برشی

نمودار لنگر خمشی

ج) با توجه به نمودار، حداکثر نیروی برشی و لنگر خمشی در تکیه‌گاه قرار دارد و مقدار آن برابر است با:

$$V_{max} = ۶۴ \ kN$$
$$M_{max} = ۶۰ \ kN.m$$

نتیجه: در تیرهای کنسولی حداکثر نیروی برشی و لنگر خمشی در تکیه‌گاه به‌وجود می‌آید.

خلاصهٔ فصل

- خرپاها به دو گروه کلی صفحه‌ای و فضایی تقسیم می‌شوند.
- خرپاها تشکیل شبکهٔ مثلثی می‌دهند.
- نیروهای خارجی وارد بر خرپاها در صفحه خرپا و در محل گره‌ها به آن‌ها اعمال می‌شود.
- اعضای خرپاها به صورت مفصلی به یکدیگر متصل می‌شوند.
- منظور از تحلیل خرپا، تعیین نیروی داخلی هر عضو خرپا و محاسبهٔ عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی آن می‌باشد.
- برای تحلیل خرپاها از روش مفصل (گره) استفاده می‌شود.
- در گره‌های دارای دو عضو غیر هم‌راستا در صورتی که نیروی خارجی وجود نداشته باشد هر دو عضو صفر نیرویی خواهند بود.
- در گره‌های دارای سه عضو که دو عضو آن‌ها هم‌راستا باشند، در صورت عدم وجود نیروی خارجی در آن گره، عضو سوم، صفر نیرویی خواهد بود.
- هدف از تحلیل تیر، تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی و نیروهای داخلی در هر مقطع از تیر می‌باشد.
- تیرها در اثر اعمال بارهای خارجی دارای رفتارهای خمشی و برشی می‌باشند.
- نیروهای داخلی در هر مقطع از تیر عبارتند از : نیروی برشی و لنگر خمشی.
- مقدار برآیند بارهای گسترده یکنواخت برابر است با مساحت بار گسترده.
- محل اثر برآیند بارهای گسترده یکنواخت در محل تلاقی دو قطر مستطیل بار وارده می‌باشد.

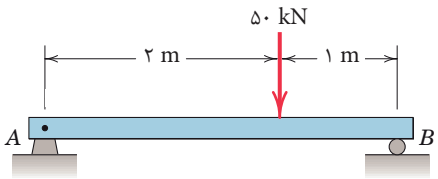
خودآزمایی

۱- در تیرهای زیر مطلوب‌است:

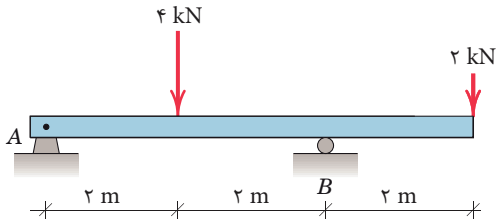
الف) ترسیم نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی

ب) تعیین محل لنگر خمشیِ حداکثر

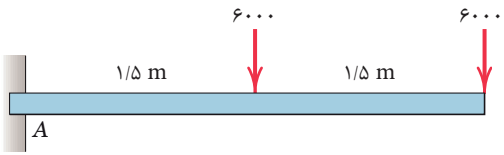
ج) تعیین مقادیر حداکثر نیروی برشی و لنگر خمشی تیر



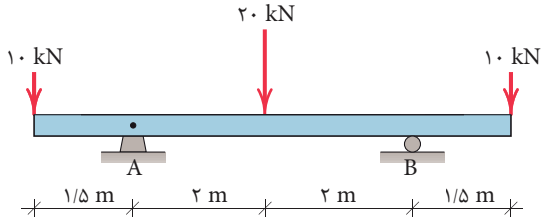
(الف)



(ب)



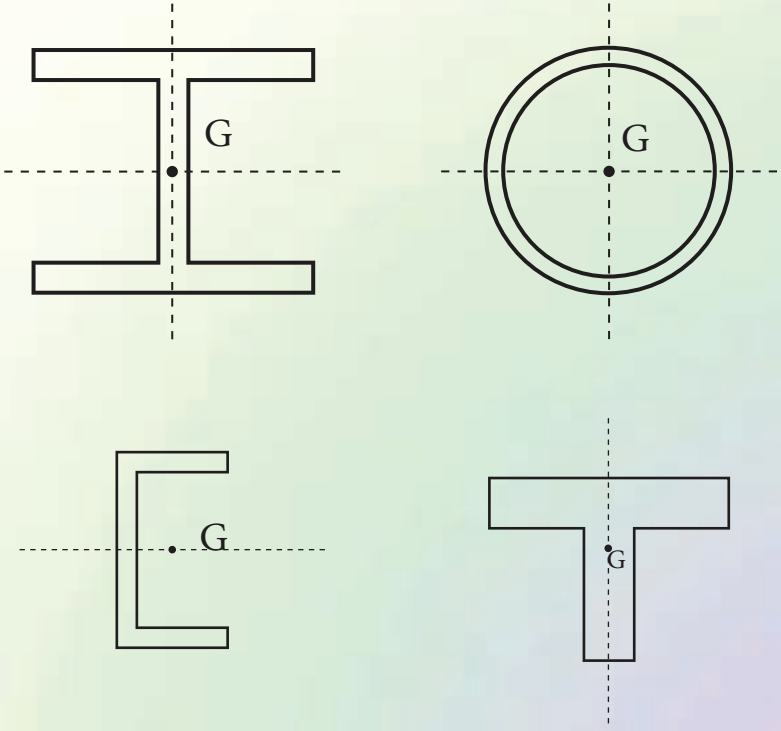
(ج)



(د)

فصل ششم

خواص هندسی سطوح



هدف‌های رفتاری

پس از آموزش این فصل از فراگیر انتظار می‌رود بتواند:

۱- خواص هندسی سطوح را بشناسد و نام ببرد.

۲- گشتاور اول سطح را تعریف نماید.

۳- مرکز سطح سطوح مختلف هندسی را به‌دست آورد.

۴- مختصات مرکز سطح سطوح متقارن را تعیین نماید.

۵- روابط مربوط به گشتاور دوم سطح را بشناسد و به‌کار گیرد.

۶- ممان اینرسی سطوح مرکب را محاسبه نماید.

۷- اساس مقطع سطوح مختلف را به‌دست آورد.

۸- مشخصات هندسی مقاطع نورد شده را از جدول استاندارد آن‌ها استخراج نماید.

مقدمه:

طول، سطح و حجم سه خصوصیت اصلی هندسی اجسام به‌شمار می‌روند. اجسام یک‌بعدی مانند طناب با طولشان، اجسام دو بعدی مانند یک قطعه زمین با مساحتشان و اجسام سه‌بعدی مثل یک ساختمان با حجمی که دارند مشخص می‌شوند.

این خصوصیات تمام ویژگی‌های اجسام را بیان نمی‌کنند؛ مثلاً دو قطعه زمین هم‌مساحت ممکن است دارای شکل‌های هندسی متفاوت باشند. بنابراین اجسام دارای خصوصیات دیگری نیز می‌باشند که در این فصل به بررسی بعضی از خصوصیات سطوح شامل گشتاور اول سطح، مرکز سطح، گشتاور دوم سطح و مدول مقطع یا اساس مقطع آن‌ها می‌پردازیم.

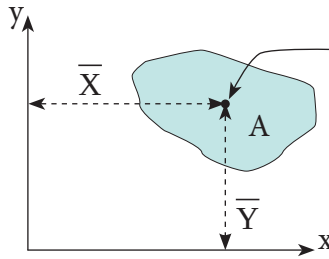
۶- ۱ گشتاور اول سطح (ممان استاتیک)

در فصل دوم با گشتاور نیرو آشنا شدیم که عبارت بود از حاصل‌ضرب نیرو در فاصلهٔ آن نیرو تا یک محور. گشتاور اول سطح نیز تعریفی مشابه گشتاور نیرو داشته و عبارت‌است از:

حاصل‌ضرب مساحت در فاصلهٔ مرکز آن تا محور مورد نظر.

گشتاور اول سطح با نماد Q نمایش داده می‌شود و واحد آن طول به توان ۳ می‌باشد یعنی m^3 و یا cm^3 و . . .

در شکل زیر با توجه به تعریف داریم:



شکل ۶-۱

گشتاور اول سطح **A** نسبت به محور **x**

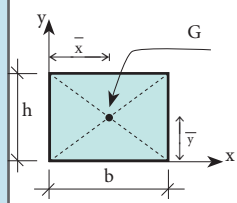
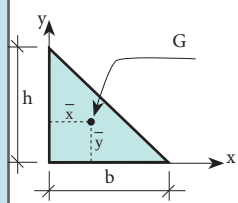
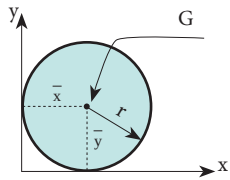
گشتاور اول سطح **A** نسبت به محور **y**

$$Q_x = A.\overline{Y} \qquad Q_y = A.\overline{X} \qquad (۱-۶)$$

در روابط فوق $\overline{X}$ و $\overline{Y}$ مختصات مرکز سطح **A** می‌باشند.

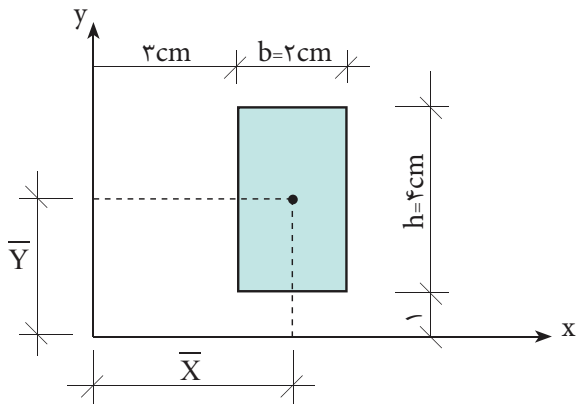
در جدول (۶-۱) مختصات مرکز سطح بعضی از سطوح هندسی نسبت به محورهای **x** و **y** آمده است.

جدول (۶-۱)

نام سطح	شکل هندسی	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	توضیحات
مستطیل (مربع)		$\frac{b}{۲}$	$\frac{h}{۲}$	مرکز سطح مستطیل محل تلاقی دو قطر آن می‌باشد
مثلث قائم‌الزاویه		$\frac{b}{۳}$	$\frac{h}{۳}$	مرکز سطح مثلث قائم‌الزاویه در فاصلهٔ $\frac{۱}{۳}$ از قاعدهٔ آن می‌باشد
دایره		**r**	**r**	مرکز سطح دایره مرکز دایره می‌باشد

مثال ۱

گشتاور اول سطح (ممان استاتیک) مستطیل را نسبت به محورهای x و y محاسبه کنید.



با توجه به شکل فاصله مرکز سطح از محورهای x و y عبارتند از:

$$\overline{X}=\frac{b}{۲}+۳\Rightarrow \overline{X}=\frac{۲}{۲}+۳=۴cm$$

$$\overline{Y}=\frac{h}{۲}+۱\Rightarrow \overline{Y}=\frac{۴}{۲}+۱=۳cm$$

$A=b.h=۲\times۴=۸cm^{۲}$ مساحت مستطیل برابر است با

$Q_x=A.\overline{Y}\Rightarrow Q_x=۸\times۳=۲۴cm^{۳}$ ممان استاتیک نسبت به محور x

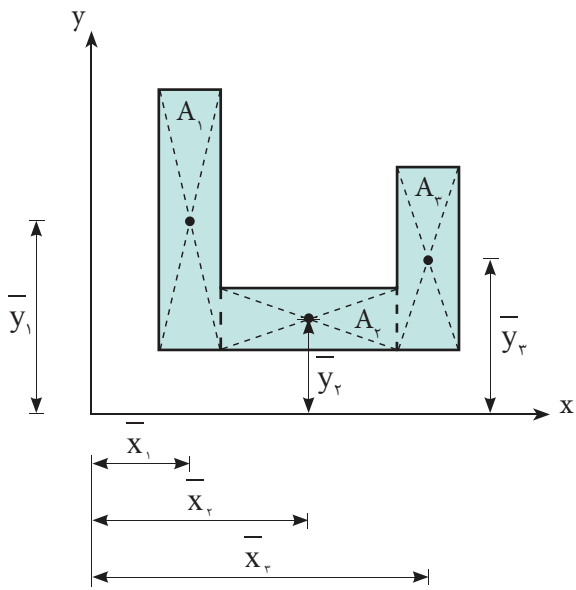
$Q_y=A.\overline{X}\Rightarrow Q_y=۸\times۴=۳۲cm^{۳}$ ممان استاتیک نسبت به محور y

۲-۶ گشتاور اول (ممان استاتیک) سطوح مرکب

به منظور محاسبه گشتاور اول سطوح مرکب، آن‌ها را به سطوح هندسی ساده تجزیه نموده و ممان استاتیک هر یک از آن‌ها را نسبت به محورهای مورد نظر محاسبه و با یکدیگر جمع جبری می‌نمائیم. یعنی:

$$Q_x = \sum_{i=1}^{n} A_i \bar{y}_i$$
$$Q_y = \sum_{i=1}^{n} A_i \bar{x}_i \qquad (۲-۶)$$

به عنوان نمونه در شکل (۶-۲) خواهیم داشت:

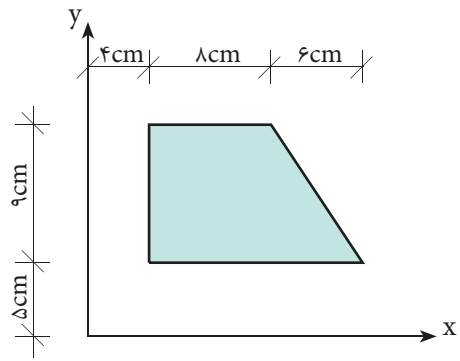


شکل ۶-۲

$$Q_x = \sum_{i=1}^{n} A_i \bar{y}_i \Rightarrow Q_x = A_1 \bar{y}_1 + A_2 \bar{y}_2 + A_3 \bar{y}_3$$
$$Q_y = \sum_{i=1}^{n} A_i \bar{x}_i \Rightarrow Q_y = A_1 \bar{x}_1 + A_2 \bar{x}_2 + A_3 \bar{x}_3$$

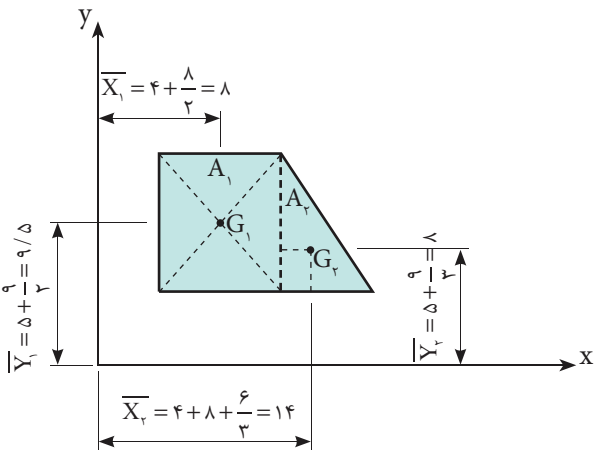
مثال ۲

گشتاور اول سطح داده‌شده را نسبت به محورهای x و y محاسبه کنید.



حل:

سطح مرکب داده شده را مطابق شکل زیر به دو سطح ساده مستطیلی و مثلثی تجزیه می‌کنیم.



به کمک جدول (۶-۲) حل مسئله را ادامه می‌دهیم

جدول (۶-۲)					
سطوح	مساحت (A_i) cm^2	$\bar{x}$ cm	$\bar{y}$ cm	$Q_x = A\bar{y}_i$ cm^3	$Q_y = A\bar{x}_i$ cm^3
A_1	$8\times9=72$	۸	۹/۵	$72\times9/5=684$	$72\times8=576$
A_2	$\frac{6\times9}{2}=27$	۱۴	۸	$27\times8=716$	$27\times14=376$
Σ				۱۴۰۰	۹۵۴

بنابراین:

$$Q_x = ۱۴۰۰ \ cm^3$$
$$Q_y = ۹۵۴ \ cm^3$$

۳-۶ مرکز سطح سطوح مرکب

برای محاسبه مرکز سطح سطوح مرکب با توجه به این‌که گشتاور اول کل سطح با مجموع گشتاورهای اول اجزای سطح مرکب با هم برابرند می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{aligned} Q_y &= A\bar{X} \\ Q_y &= \sum_{i=1}^{n} A_i \bar{x}_i \end{aligned}\right\} \Rightarrow A\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} A_i \bar{x}_i \Rightarrow \bar{X} = \frac{\sum A_i \bar{x}_i}{\sum A_i}$$

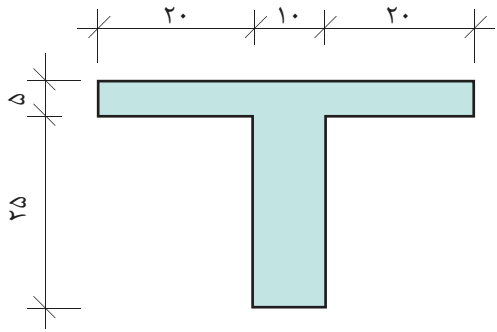
$$\left.\begin{aligned} Q_x &= A\bar{Y} \\ Q_x &= \sum_{i=1}^{n} A_i \bar{y}_i \end{aligned}\right\} \Rightarrow A\bar{Y} = \sum_{i=1}^{n} A_i \bar{y}_i \Rightarrow \bar{Y} = \frac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i} \qquad (۳-۶)$$

در روابط فوق $\bar{X}$ و $\bar{Y}$ مختصات مرکز سطح مرکب مورد نظر می‌باشند که نسبت به محورهای مختصات دلخواه تعیین می‌شوند.

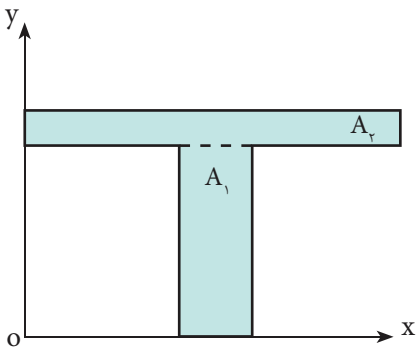
مثال ۳

مختصات مرکز سطح شکل زیر را محاسبه نمائید.

(ابعاد شکل بر حسب cm است)



به‌منظور سادگی حل مسئله محورهای مختصات x و y را طوری در نظر می‌گیریم که شکل در ربع اول دستگاه مختصات قرار گرفته و تمام طول‌ها مثبت باشند.



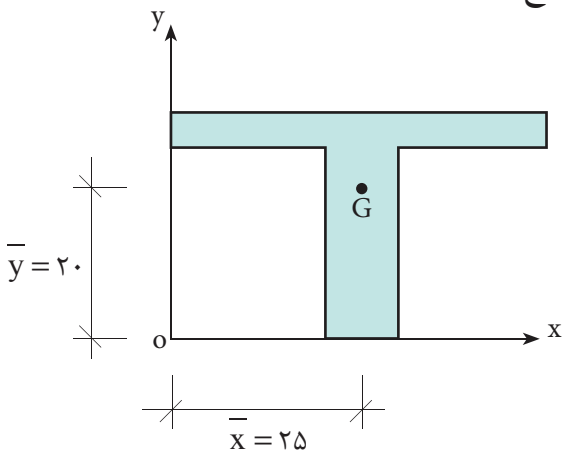
پس از تجزیه شکل مرکب به سطوح ساده جدول مشخصات آن‌ها را تشکیل داده و با استفاده از روابط (۶-۳) مختصات مرکز سطح را محاسبه می‌نمائیم. (جدول ۶-۳)

جدول (۶-۳)					
سطوح	مساحت (A_i) cm^2	$\bar{x}_i$ cm	$\bar{y}_i$ cm	$Q_x = A\bar{y}_i$ cm^3	$Q_y = A_i\bar{x}_i$ cm^3
A_1	$10\times25=250$	$20+\frac{10}{2}=25$	$\frac{25}{2}=12/5$	۳۱۲۵	۶۲۵۰
A_2	$5\times50=250$	$\frac{50}{2}=25$	$25+\frac{5}{2}=27/5$	۶۸۷۵	۶۲۵۰
$\sum$	۵۰۰			۱۰۰۰۰	۱۲۵۰۰

$$\bar{X}=\frac{\sum A_i\bar{x}_i}{\sum A_i}=\frac{12500}{500}=25cm$$

$$\bar{Y}=\frac{\sum A_i\bar{y}_i}{\sum A_i}=\frac{10000}{500}=20cm$$

در شکل زیر مختصات مرکز سطح نشان داده شده است:



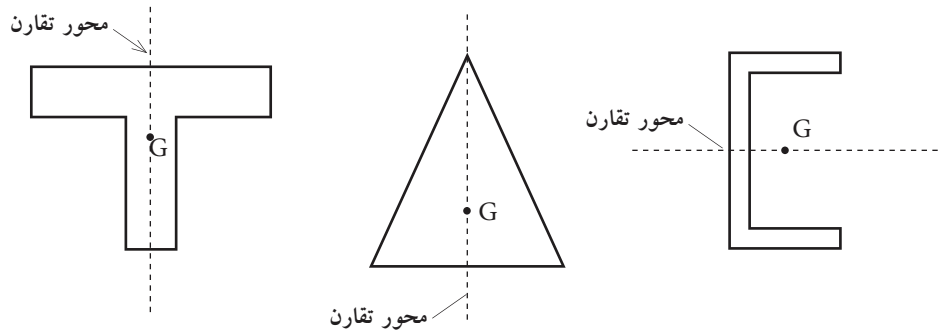
G | ۲۵ cm
۲۰ cm

۶-۴ استفاده از تقارن در تعیین مرکز سطح سطوح متقارن

محور تقارن: خطی است که سطح را به دو قسمت مساوی و قرینه تقسیم می‌کند.

۶-۴-۱- سطوح با یک محور تقارن

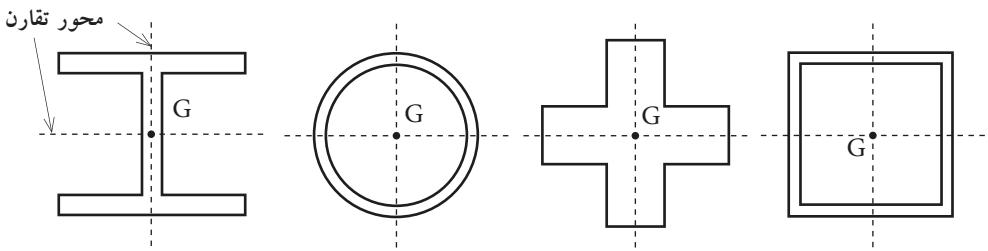
اگر سطح دارای یک محور تقارن باشد، مرکز سطح روی آن محور خواهد بود.
شکل (۶-۳)



شکل ۶-۳

۶-۴-۲- سطوح با دو محور تقارن:

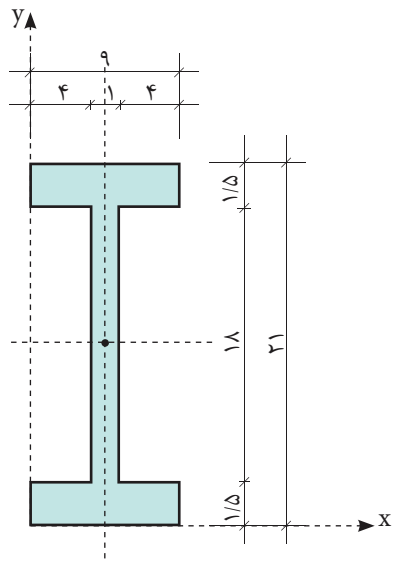
هرگاه سطح دارای دو محور تقارن باشد مرکز سطح در محل تلاقی آن دو محور خواهد بود. شکل (۶-۴)



شکل ۶-۴

مثال ۴

در شکل زیر با استفاده از تقارن مختصات مرکز سطح را به‌دست آورید.
(ابعاد بر حسب سانتی‌متر می‌باشد)



باتوجه به این که شکل دارای دومحور تقارن می‌باشد لذا مرکز سطح محل تلاقی آن‌ها خواهد بود. بنابراین داریم:

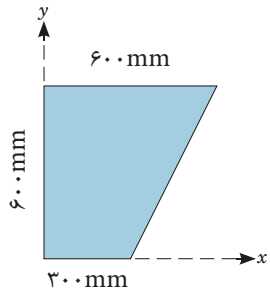
$$\bar{x} = \frac{۹}{۲} = ۴/۵ \quad cm$$

$$\bar{y} = \frac{۲۱}{۲} = ۱۰/۵ \quad cm$$

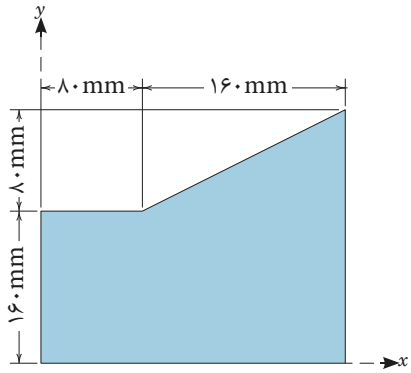
خودآزمایی

۱- در شکل‌های زیر مختصات مرکز سطح را محاسبه کنید.

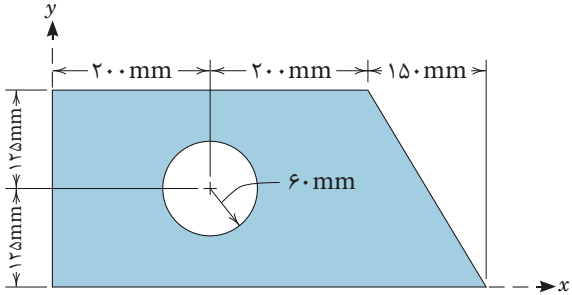
(الف)

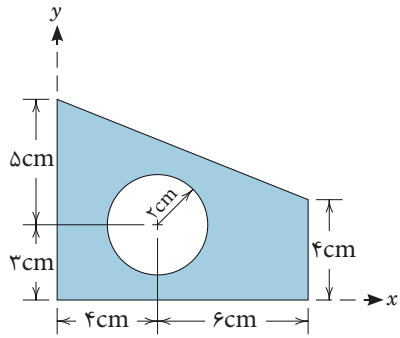


(ب)

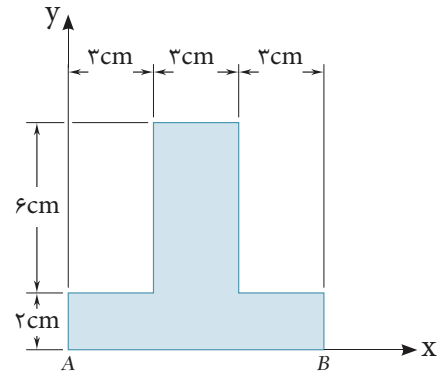


(ج)

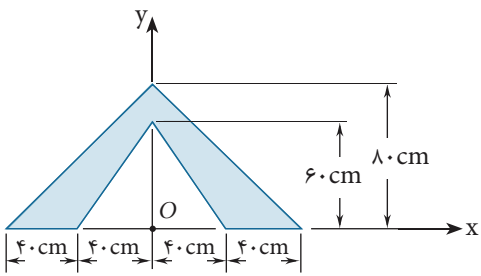




(د)

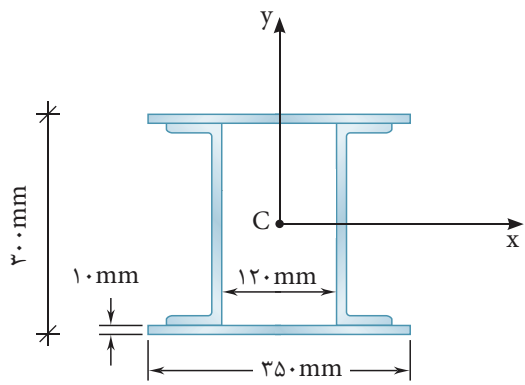


(ه)



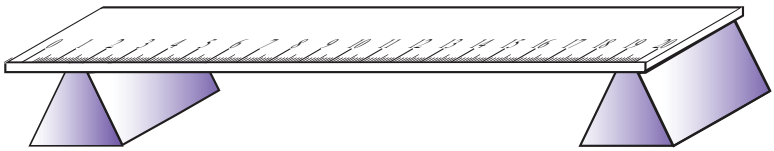
(و)

۲- با استفاده از تقارن، مختصات مرکز سطح را به‌دست آورید.

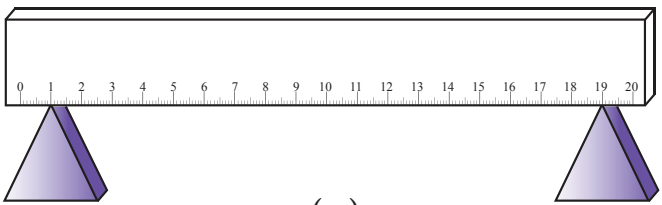


۶ – ۵ گشتاور دوم سطح (ممان اینرسی) (Moment of Inertia)

خط کشی را مطابق شکل (۶-۵) در نظر می گیریم اگر بخواهیم آن‌را در دو حالت نشان‌داده‌شده خم کنیم به نظر شما درکدام حالت راحت‌تر خم می‌شود؟ چرا؟



(الف)



(ب)

شکل ۶-۵

باتوجه به مثال فوق درمی‌یابیم علی‌رغم آن‌که سطح مقطع خط‌کش در هر دو حالت یکسان است در حالت (الف) خط‌کش راحت‌تر خم می‌شود. یعنی مقاومت آن در مقابل خم شدن (خمش) کمتر از حالت (ب) می‌باشد. علت آن ممان اینرسی سطح مقطع خط‌کش است که درحالت (الف) کمتر از حالت (ب) می‌باشد.

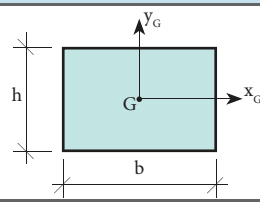
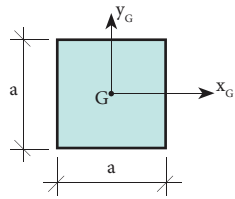
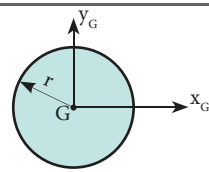
به عنوان یک تعریف ساده از ممان اینرسی، می‌توان گفت:

گشتاور دوم سطح یا ممان اینرسی عامل مقاوم در مقابل خمش می‌باشد و به توزیع ذرات تشکیل‌دهندهٔ جسم حول محور خمش بستگی دارد.

ممان اینرسی را با نماد I نشان داده و نسبت به محورهای مختلف با اندیس آن محور نام‌گذاری می‌شود. به عنوان مثال، I_x یعنی ممان اینرسی نسبت به محور x.

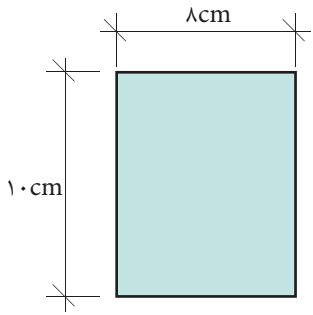
واحد ممان اینرسی، طول به توان ۴ یعنی cm^4 یا mm^4 و ... می‌باشد.

درجدول (۶-۴) روابط ممان اینرسی بعضی از سطوح هندسی ساده نسبت به محورهای مرکزی آن‌ها آمده است.

جدول (۶-۴)			
نام سطح	شکل هندسی	Ix_G	Iy_G
مستطیل		$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$
مربع		$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{12}$
دایره		$\frac{\pi r^4}{4}$	$\frac{\pi r^4}{4}$

مثال ۵

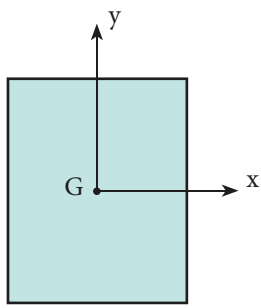
ممان اینرسی سطح مقطع مقابل را نسبت به محورهای مرکزی آن محاسبه نمایید.



حل:

مرکز سطح مستطیل محل تلاقی دو قطر آن می‌باشد بنابراین:

ابتدا موقعیت محورهای مرکزی سطح مقطع را مشخص نموده سپس با استفاده از روابط جدول (۶-۴) I_{xG} و I_{yG} را تعیین می‌نمائیم.



$$I_{xG} = \frac{bh^3}{12} = \frac{8 \times 10^3}{12} = 666/67 \ \ cm^4$$

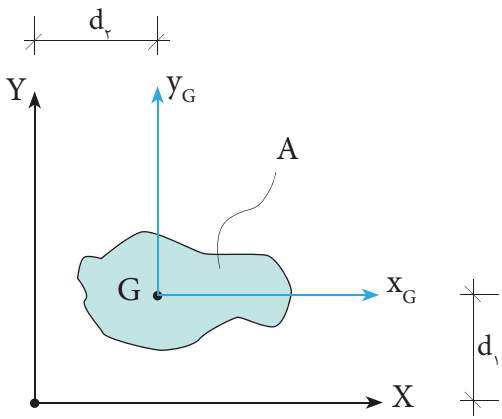
$$I_{yG} = \frac{hb^3}{12} = \frac{10 \times 8^3}{12} = 426/67 \ \ cm^4$$

۶-۶ قضیه محورهای موازی

درقسمت قبل روش تعیین ممان اینرسی یک سطح نسبت به محور هایی که از مرکز آن سطح می گذرد ، را دیدیم.

حال می‌خواهیم ممان اینرسی یک سطح را نسبت به محورهایی که موازی محورهای مرکزی آن می‌باشند، به‌دست آوریم.

به عنوان مثال در شکل (۶-۶) با فرض اینکه ممان اینرسی آن نسبت به محورهای مرکزی (x_G و y_G) معلوم باشد، می‌خواهیم ممان اینرسی مقطع را نسبت به محورهای X و Y که با فاصله d_1 و d_2 از محورهای مرکزی قرار دارند، محاسبه کنیم.



شکل ۶-۶

این موضوع با قضیه محورهای موازی که به صورت زیر بیان می‌شود قابل محاسبه خواهد بود.

ممان اینرسی یک سطح نسبت به محورهایی که موازی با محورهای مرکزی آن سطح می‌باشند، برابر است با ممان اینرسی آن سطح نسبت به محورهای مرکزی به اضافه حاصل ضرب مساحت در مجذور فاصله محور مورد نظر تا مرکز سطح.

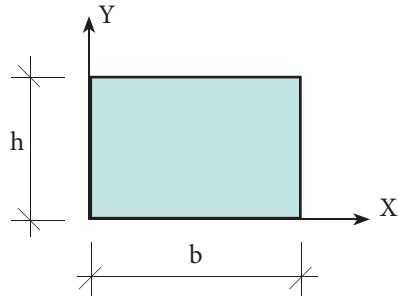
یعنی:

$$I_X = I_{x_G} + Ad_1^2$$
$$I_Y = I_{y_G} + Ad_2^2 \qquad (۴-۶)$$

مثال ۶

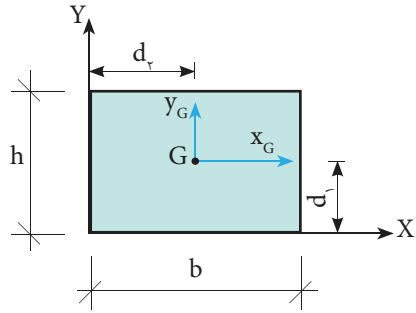
در شکل روبه‌رو مطلوب‌است:

محاسبه **Ix** و **Iy**



حل:

الف) ابتدا ممان اینرسی را نسبت به محورهای مرکزی آن یعنی x_G و y_G تعیین می‌کنیم.



$$I_{xG} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{yG} = \frac{hb^3}{12}$$

ب) با توجه به این که محور **X** بر طول مستطیل مماس می‌باشد، فاصله آن از محور x_G یعنی d_1 برابر است با:

$$d_1 = \frac{h}{2}$$

$$A = b.h$$

$$I_X = I_{xG} + Ad_1^2 \Rightarrow I_X = \frac{bh^3}{12} + (b.h)(\frac{h}{2})^2$$

$$\Rightarrow I_X = \frac{bh^3}{12} + \frac{bh^3}{4} \Rightarrow I_X = \frac{bh^3 + 3bh^3}{12}$$

$$I_X = \frac{4bh^3}{12} \Rightarrow I_X = \frac{bh^3}{3}$$

ج) برای محور Y نیز خواهیم داشت:

$$d_۲ = \frac{b}{۲}$$

$$A = b.h$$

$$I_Y = I_{yG} + Ad_۲^۲ \Rightarrow I_Y = \frac{hb^۳}{۱۲} + (b.h)(\frac{b}{۲})^۲$$

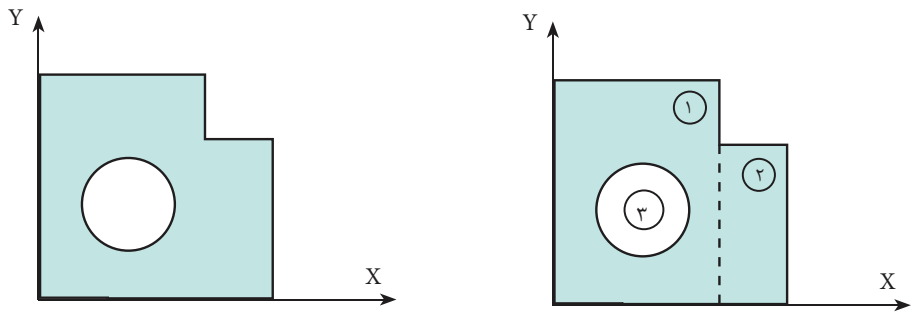
$$\Rightarrow I_Y = \frac{hb^۳}{۱۲} + \frac{hb^۳}{۴} \Rightarrow I_Y = \frac{hb^۳ + ۳hb^۳}{۱۲}$$

$$I_Y = \frac{۴hb^۳}{۱۲} \Rightarrow I_Y = \frac{hb^۳}{۳}$$

۶- ۷ محاسبه ممان اینرسی سطوح مرکب

برای محاسبه ممان اینرسی سطوح مرکب، آن‌ها را به اشکال هندسی ساده تجزیه نموده و ممان اینرسی هر یک را نسبت به محور مورد نظر محاسبه و با یکدیگر جمع جبری می‌نماییم.

شکل (۶-۷)



$$I_X = I_{X۱} + I_{X۲} - I_{X۳}$$

$$I_Y = I_{Y۱} + I_{Y۲} - I_{Y۳}$$

شکل ۶-۷

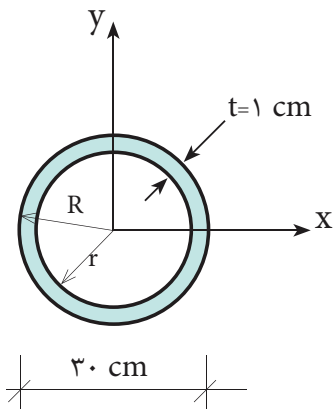
و به‌طور کلی خواهیم داشت:

$$I_X = \sum_{i=۱}^{n} I_{Xi} = \sum_{i=۱}^{n} (I_{X_{Gi}} + A_i d_i^۲)$$

$$I_Y = \sum_{i=۱}^{n} I_{Yi} = \sum_{i=۱}^{n} (I_{Y_{Gi}} + A_i d_i^۲) \qquad (۵-۶)$$

مثال ۷

در شکل زیر مطلوب‌است محاسبهٔ ممان اینرسی نسبت به محورهای x و y.



$$R = \frac{۳۰}{۲} = ۱۵$$

$$r = R - t \Rightarrow r = ۱۵ - ۱ \Rightarrow r = ۱۴ \quad cm$$

$$I_x = I_y = I_{\text{خارجی}} - I_{\text{داخلی}}$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi R^۴}{۴} - \frac{\pi r^۴}{۴}$$

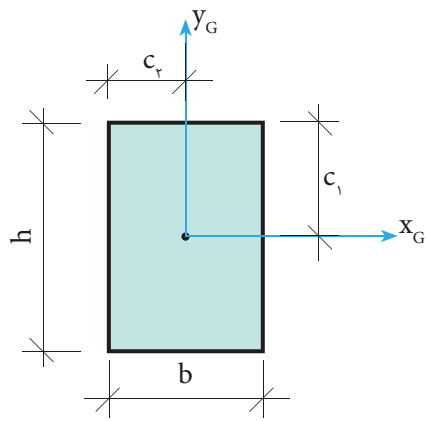
$$I_x = I_y = \frac{\pi}{۴}(R^۴ - r^۴) = \frac{\pi}{۴}(۱۵^۴ - ۱۴^۴)$$

$$I_x = I_y = ۹۵۸۸/۹۳ \quad cm^۴$$

۶-۸ مدول مقطع (اساس مقطع) (Section Modulus)

اساس مقطع یا مدول مقطع نیز خاصیتی از سطح است که همانند ممان اینرسی عامل مقاوم در مقابل خمش می‌باشد که در فصل نهم با کاربرد آن آشنا خواهید شد.

مدول مقطع یک سطح مطابق شکل (۶-۸) با رابطه زیر تعریف می‌شود.



شکل ۶-۸

$$S_{x_G} = \frac{I_{x_G}}{c_۱} \qquad (۶-۶)$$

در این رابطه داریم:

S_{x_G} : مدول مقطع یا اساس مقطع نسبت به محور x_G

I_{x_G} : ممان اینرسی سطح نسبت به محور x_G

C_1 : فاصلهٔ دورترین تار تحتانی یا فوقانی سطح نسبت به محور مرکزی (x_G) می‌باشد که در مقاطع متقارن برابر نصف کل ارتفاع مقطع می‌باشد. یعنی:

$$c_1 = \frac{h}{2}$$

و برای محور y نیز رابطه‌ای مشابه رابطهٔ (۶-۶) خواهیم داشت بنابراین:

$$S_{y_G} = \frac{I_{y_G}}{c_2} \qquad (۷-۶)$$

S_{y_G} : مدول مقطع یا اساس مقطع نسبت به محور y_G

I_{y_G} : ممان اینرسی سطح نسبت به محور y_G

C_2 : فاصله دورترین تار سمت چپ یا راست مقطع نسبت به محور مرکزی (y_G) می‌باشد که در مقاطع متقارن برابر نصف پهنای مقطع است. یعنی:

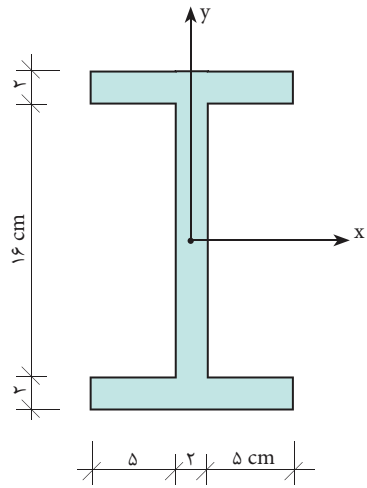
$$c_2 = \frac{b}{2}$$

مثال ۸

درشکل روبه‌رو مطلوب‌است:

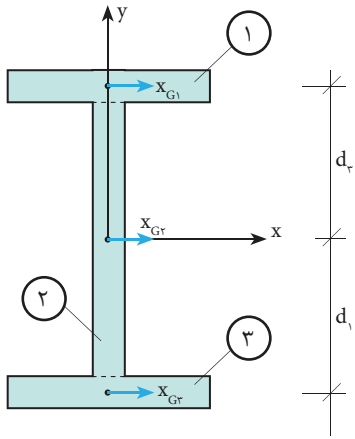
الف) محاسبه I_x

ب) محاسبه S_x



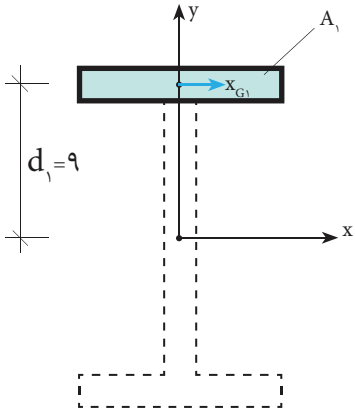
الف)

– ابتدا سطح مقطع را به سه سطح ۱، ۲ و ۳ تجزیه می کنیم.



– به کمک قضیه محورهای موازی ممان اینرسی هریک از سطوح را نسبت به محور x محاسبه می کنیم.

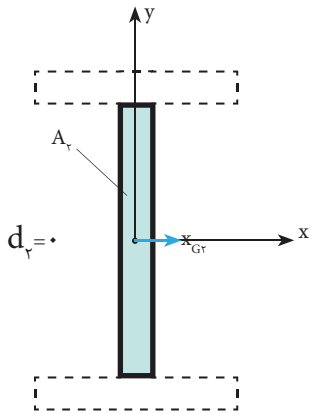
محاسبه I_{x_1}:



$$I_{x_1} = I_{xG_1} + A_1 d_1^2$$

$$I_{x_1} = \frac{۱۲\times۲^3}{۱۲} + (۲\times۱۲)(۹)^2 = ۱۹۵۲ \ \ cm^4$$

محاسبه I_{x_2}:

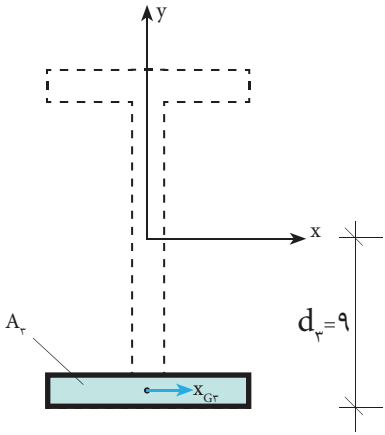


$$I_{x_2} = I_{xG_2} + A_2 d_2^2$$

$$I_{x_2} = \frac{2\times16^3}{12} + (2\times16)(0)^2$$

$$I_{x_2} = 682/67 \quad cm^4$$

محاسبه I_{x_3}:



به دلیل تقارن A_1 و A_3 نسبت به محور **x** داریم:

$$I_{x_3} = I_{x_1} = 1952 \quad cm^4$$

ممان اینرسی کل مقطع برابر است با:

$$I_x = \sum_{i=1}^{3} I_{x_i} = I_{x_1} + I_{x_2} + I_{x_3}$$

$$I_x = 1952 + 682/67 + 1952$$

$$\boxed{I_x = 4586/67 \quad cm^4}$$

ب) از رابطه (۶-۶) مدول مقطع نسبت به محور **x** را به‌دست می‌آوریم.

به دلیل تقارن، مقطع C_1 برابر است با نصف کل ارتفاع مقطع یعنی:

$$c_1 = \frac{h}{2} \Rightarrow c_1 = \frac{20}{2} = 10 \quad cm$$

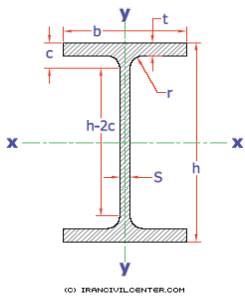
$$S_x = \frac{I_x}{c_1} \Rightarrow S_x = \frac{4586/67}{10}$$

$$\boxed{S_x = 458/67 \quad cm^3}$$

۶- ۹ مشخصات هندسی مقاطع نوردشده

با توجه به این که مقاطع نوردشده با استانداردهای کارخانهٔ سازنده تولید می‌شوند، لذا برای هریک از مقاطع تولیدی شامل تیر آهن‌ها، ناودانی‌ها، نبشی‌ها و ... جداول مشخصات هندسی هر مقطع نیز ارائه می‌شود که با استفاده از این جداول مشخصات هندسی مقاطع نظیر ابعاد، سطح مقطع، ممان اینرسی و ... استخراج می‌شوند، به عنوان مثال شکل (۶-۷) قسمتی از جدول مشخصات مقاطع نیم پهن (IPE) را نشان می‌دهد که برای نمونه مشخصات هندسی IPE ۲۰۰ را از آن استخراج نموده‌ایم.

نیمرخ نیم پهن IPE



A= سطح مقطع

G= وزن واحد طول

I= ممان اینرسی

S= اساس مقطع

i= شعاع ژیراسیون

IPE	h	b	s	t	r	c	h-2c	A	G	I_x	S_x	i_x	I_y	S_y	i_y	a_1	r_T
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	cm^2	kg/m	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm	mm	mm
80	80	46	3.8	5.2	5	10.2	59	7.64	6	80.1	20	3.24	8.49	3.69	1.05	63	12.2
100	100	55	4.1	5.7	7	12.7	74	10.3	8.1	171	34.2	4.07	15.9	5.79	1.24	79	14.6
120	120	64	4.4	6.3	7	13.3	93	13.2	10.4	318	53	4.9	27.7	8.65	1.45	96	16.9
140	140	73	4.7	6.9	7	13.9	112	16.4	12.9	541	77.3	5.74	44.9	12.3	1.65	112	19.3
160	160	82	5	7.4	9	16.4	127	20.1	15.8	869	109	6.58	68.3	16.7	1.84	129	21.7
180	180	91	5.3	8	9	17	146	23.9	18.8	1320	146	7.42	101	22.2	2.06	145	24
200	200	100	5.6	8.5	12	20.5	159	28.5	22.4	1940	194	8.26	142	28.5	2.24	162	26.4
220	220	110	5.9	9.2	12	21.2	177	33.4	26.2	2770	252	9.11	205	37.3	2.48	179	29.1
240	240	120	6.2	9.8	15	24.8	190	39.1	30.7	3890	324	9.97	284	47.3	2.6	196	31.8
270	270	135	6.6	10.2	15	25.2	219	45.9	36.1	5790	429	11.2	420	62.2	3.02	220	35.6
300	300	150	7.1	10.7	15	25.7	248	53.8	42.2	8360	557	12.5	604	80.5	3.35	245	39.5
330	330	160	7.5	11.5	18	29.5	271	62.6	49.1	11770	713	13.7	788	98.5	3.55	270	42.1

مشخصات IPE۲۰۰:

مساحت مقطع	$A=۲۸/۵\ cm^۲$	ارتفاع مقطع	$h=۲۰۰\ mm=۲۰\ cm$
ممان اینرسی حول محور x	$I_x=۱۹۴۰\ cm^۴$	عرض بال	$b=۱۰۰\ mm=۱۰\ cm$
اساس مقطع حول محور x	$S_x=۱۹۴\ cm^۳$	ضخامت جان	$S=۵/۶\ mm=۰/۵۶\ cm$
ممان اینرسی حول محور y	$I_y=۱۴۲\ cm^۴$	ضخامت بال	$t=۸/۵\ mm=۰/۸۵\ cm$
اساس مقطع حول محور y	$S_y=۲۸/۵\ cm^۳$		

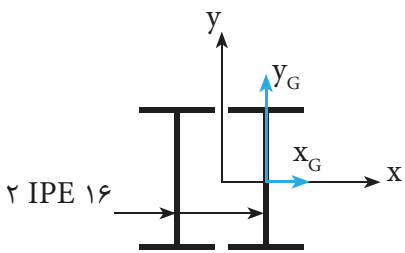
درصورتی‌که مقطع مورد نظر ترکیبی از دو یا چند مقطع نوردشده باشد می‌توان ابتدا مشخصات هندسی مقطع نوردشدهٔ ساده (تکی) را از جدول استخراج نموده و سپس با استفاده از قضیه محورهای موازی مشخصات هندسی مقطع مرکب را به‌دست آورد.

مثال ۹

در شکل زیر دوتیرآهن IPE ۱۶ به صورت به‌هم چسبیده به عنوان یک مقطع مرکب ساخته شده است مطلوب‌است محاسبهٔ:

الف) ممان اینرسی مقطع مرکب حول **x** و **y**.

ب) مدول مقطع حول دو محور **x** و **y**.



ابتدا مشخصات هندسی مورد نیاز تیر آهن IPE ۱۶ را از جدول استخراج می‌نماییم.

IPE ۱۶ : (h=۱۶۰mm=۱۶cm , b=۸۲ mm=۸/۲ cm , A=۲۰/۱ cm^2 , I_x=۸۶۹ cm^4 , I_y=۶۸/۳ cm^4)

الف) محاسبه I_x و I_y مقطع مرکب:

باتوجه به اینکه مقطع مرکب ساخته شده نسبت به محور های **x** و **y** متقارن می‌باشد کافی‌است که ممان اینرسی یک پروفیل نسبت به محورهای مورد نظر را محاسبه نموده و دو برابر نماییم. بنابراین با استفاده از قضیه محورهای موازی خواهیم داشت:

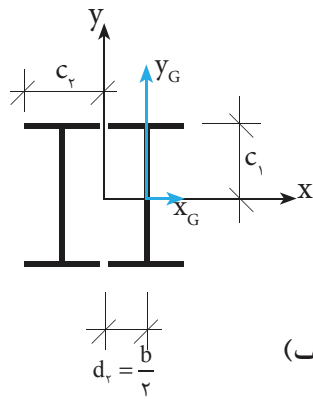
$$I_x = ۲(I_{x_G} + Ad_۱^۲)$$

$$I_y = ۲(I_{y_G} + Ad_۲^۲)$$

باتوجه به شکل (الف) مقدار $d_۱$ نسبت به محور **x** به دلیل انطباق محورهای x_G در پروفیل تک و **x** در پروفیل مرکب برابر صفر است لذا:

$$I_x = ۲I_{x_G} \Rightarrow I_x = ۲\times ۸۶۹ \Rightarrow \boxed{I_x = ۱۷۳۸ \ \ cm^4}$$

و مقدار $d_۲$ نسبت به محور y برابر نصف عرض بال IPE ۱۶ می‌باشد یعنی:



(شکل الف)

$$d_۲ = \frac{b}{۲} = \frac{۸/۲}{۲} = ۴/۱ \ \ cm$$

$$I_y = ۲(I_y + Ad_۲^۲) = ۲(۶۸/۳ + ۲۰/۱ \times ۴/۱^۲) \Rightarrow$$

$$\boxed{I_y = ۸۱۲/۳۶ \ \ cm^۴}$$

$$c_۱ = \frac{h}{۲} = \frac{۱۶}{۲} = ۸ \ \ cm$$

$$c_۲ = b = ۸/۲ \ \ cm$$

$$S_x = \frac{I_x}{c_۱} \Rightarrow S_x = \frac{۱۷۳۸}{۸} = ۲۱۷/۲۵ \ \ cm^۳$$

$$S_y = \frac{I_y}{c_۲} \Rightarrow S_y = \frac{۸۱۲/۳۶}{۸/۲} = ۹۹/۰۷ \ \ cm^۳$$

نکته:

با توجه به نتایج مثال ۹ و مقایسهٔ آن با مشخصات هندسی IPE ۱۶ مشاهده می‌شود که:

ممان اینرسی مقطع مرکب حول محور x دو برابر ممان اینرسی مقطع ساده (تکی) می‌باشد، به همین ترتیب اگر تعداد مقاطع n برابر شود و مرکز سطح آن‌ها بر محور x منطبق باشد، ممان اینرسی مقطع مرکب حول محور x نیز n برابر خواهد شد.

خلاصهٔ فصل

• گشتاور اول سطح نسبت به یک محور عبارت‌است از: حاصل‌ضرب مساحت، در فاصله مرکز آن تا آن محور مورد نظر و نسبت به محور های **x** و **y** به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q_x = A.\overline{Y}$$
$$Q_y = A.\overline{X}$$

• گشتاور اول سطوح مرکب با تجزیه آن‌ها به سطوح ساده هندسی و محاسبه گشتاور اول سطح هرکدام نسبت به محورهای مورد نظر و جمع جبری آن‌ها محاسبه می‌شود. یعنی:

$$Q_x = \sum_{i=1}^{n} A_i.\overline{y}_i$$
$$Q_y = \sum_{i=1}^{n} A_i.\overline{x}_i$$

• مختصات مرکز سطح یک سطح هندسی با استفاده از گشتاور اول سطح و رابطهٔ زیر تعیین می‌شود:

$$\overline{X} = \frac{\sum A_i \overline{x}_i}{\sum A_i}$$
$$\overline{Y} = \frac{\sum A_i \overline{y}_i}{\sum A_i}$$

• اگر سطحی دارای یک محور تقارن باشد، مرکز سطح روی آن محور خواهد بود.

• اگر سطحی دارای دو محور تقارن باشد، مرکز سطح، محل تلاقی آن دو محور خواهد بود.

• ممان اینرسی عامل مقاوم در مقابل خمش است.

• اگر تعداد مقاطع روی یک محور **n** برابر شود درصورتی که مرکز سطح آن‌ها روی آن محور قرار گیرد در این حالت ممان اینرسی کل نیز **n** برابر خواهد شد.

• ممان اینرسی یک سطح نسبت به محورهای موازی محور مرکزی آن با رابطهٔ زیر تعیین می‌شود:

$I_x = I_{x_G} + Ad_1^2$: d_1 فاصله دو محور x_G و X می‌باشد.

$I_y = I_{y_G} + Ad_2^2$: d_2 فاصله دو محور y_G و Y می‌باشد.

• اساس مقطع نیز همانند ممان اینرسی عامل مقاوم در مقابل خمش است و از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

C_1: فاصله دورترین تار مقطع تا محور **x** $\quad S_x = \frac{I_x}{c_1}$

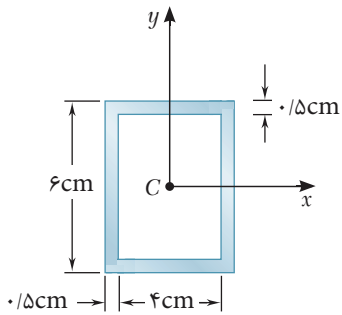
C_2: فاصله دورترین تار مقطع تا محور **y** $\quad S_y = \frac{I_y}{c_2}$

• مشخصات هندسی مقاطع نوردشده از جداول استاندارد آن‌ها استخراج می‌شود.

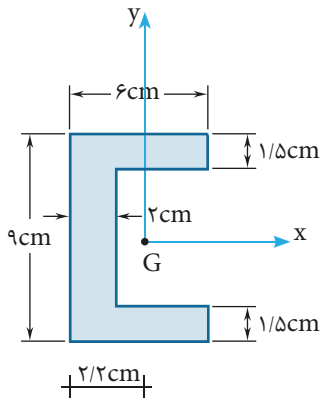
• ممان اینرسی مقاطع مرکب با استفاده از قضیهٔ محورهای موازی محاسبه می‌شود.

خودآزمایی

۱- در هر مقطع مطلوب‌است محاسبهٔ I_x و I_y و S_x و S_y.



(الف)



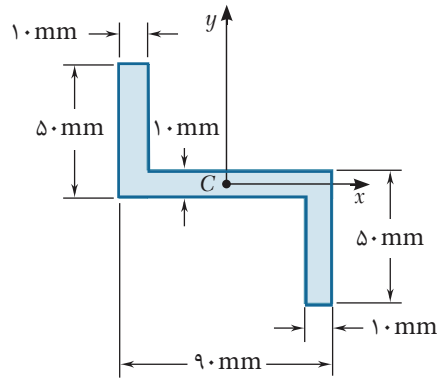
(ب)

۲- در هر کدام از مقاطع زیر مطلوب‌است محاسبهٔ:

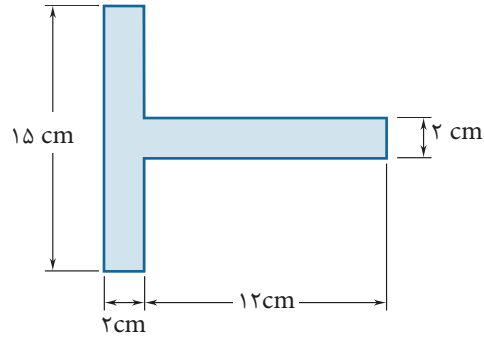
الف) مختصات مرکز سطح

ب) ممان اینرسی حول محورهای گذرنده از مرکز سطح

ج) اساس مقطع نسبت به محورهای گذرنده از مرکز سطح.

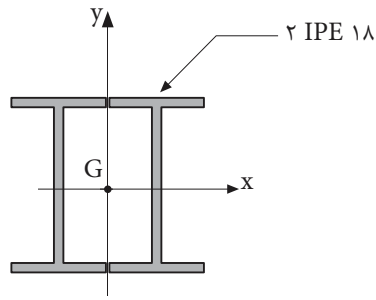


(الف)

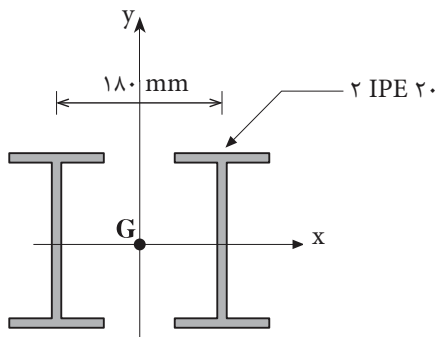


(ب)

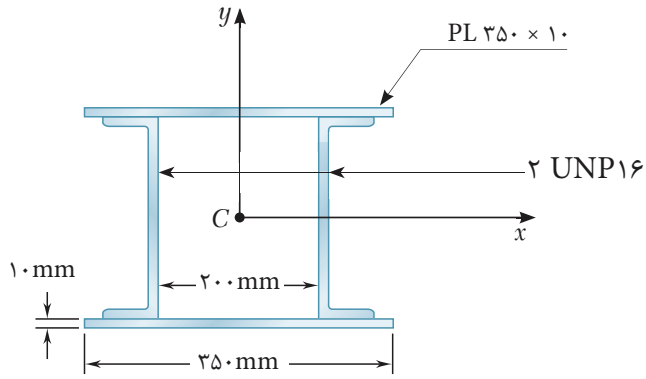
۳- مطلوب‌است محاسبهٔ I_x و I_y و S_x و S_y در مقاطع مرکب زیر.



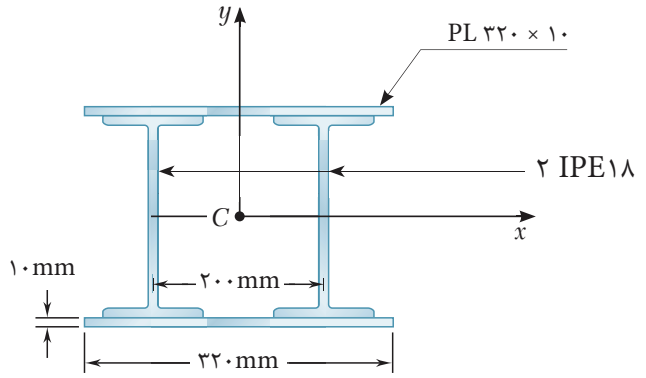
(الف)


y
۱۸۰ mm
۲ IPE ۲۰
G
x

(ب)


y
PL ۳۵۰ × ۱۰
۲ UNP۱۶
C
x
۱۰mm
۲۰۰mm
۳۵۰mm

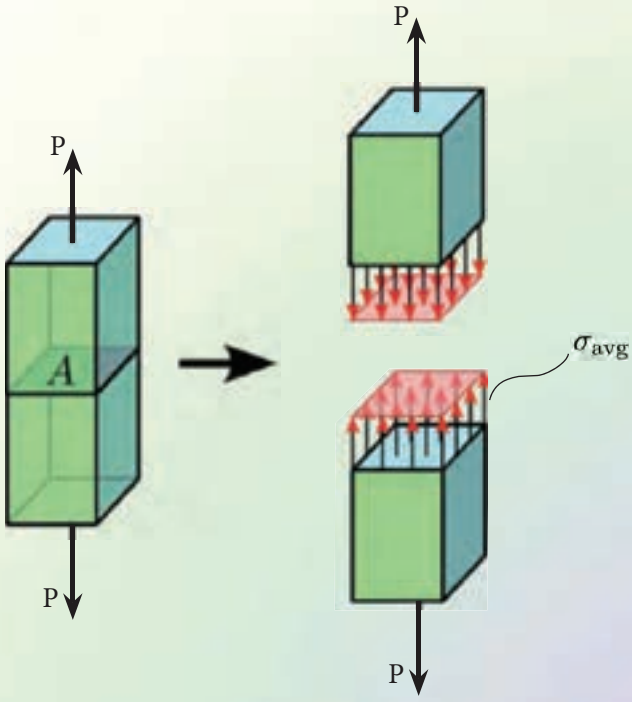
(ج)


y
PL ۳۲۰ × ۱۰
۲ IPE۱۸
C
x
۱۰mm
۲۰۰mm
۳۲۰mm

(د)

فصل هفتم

نیرو و تنشِ محوری



هدف‌های رفتاری

پس از آموزش این فصل از فراگیر انتظار می‌رود بتواند:

۱-انواع رفتار اجسام را تحت تأثیر بارهای مختلف نام ببرد.

۲-نیروهای محوری را شرح دهد.

۳-اثر نیروهای محوری را بر اجسام توضیح دهد.

۴-تنش را تعریف نماید.

۵-تنش محوری را تعریف نماید.

۶-رابطهٔ تنش محوری را به کار گیرد.

۷-تغییر طول اجسام تحت تأثیر بارهای محوری را محاسبه نماید.

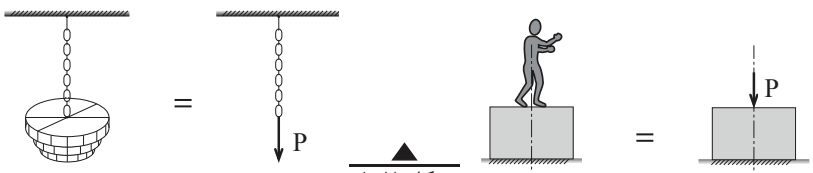
مقدمه:

در بخش اول کتاب به بررسی نیروهای وارد بر اجسام پرداختیم و اجسام را صلب در نظر گرفتیم بدین مفهوم که جسم در اثر اعمال نیرو تغییر شکل نمی‌دهد که موضوع بحث استاتیک بود.

دراین بخش می‌خواهیم اثر نیروها را بر اجسام، بیشتر مورد بررسی قرار داده و رفتار آن‌ها را تحت تاثیر نیروهای مختلف تجزیه و تحلیل نماییم، که با این فرض که جسم صلب نباشد، یعنی تغییر شکل اجسام نیز مد نظر می‌باشد، که موضوع بحث مقاومت مصالح است. بنابراین مقاومت مصالح شاخه ای از علم مکانیک است که رفتار اجسام جامد را تحت بارگذاری‌های مختلف بررسی می‌نماید.

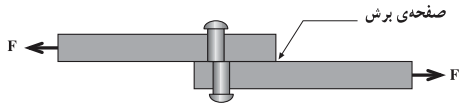
رفتار اجسام تحت بار های مختلف عبارتند از :

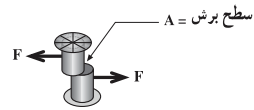
۱- رفتار کششی و فشاری



شکل ۷-۱

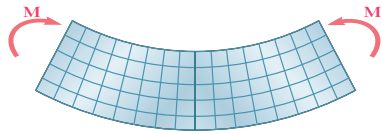
۲- رفتار برشی





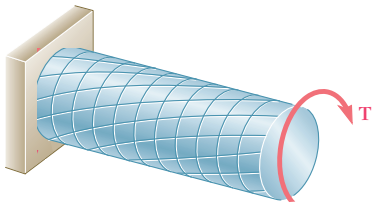
شکل ۷-۲

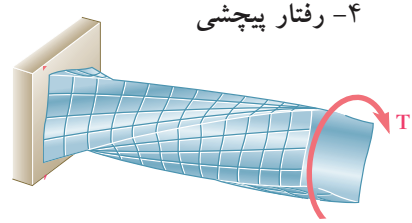
۳- رفتار خمشی



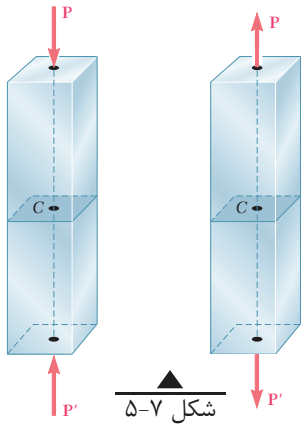
شکل ۷-۳

۴- رفتار پیچشی

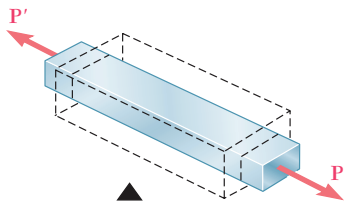




شکل ۷-۴



شکل ۷-۵



شکل ۷-۶

۷-۱ نیروهای محوری (Axial Load)

نیروهای محوری، نیروهایی هستند که در امتداد محور طولی اجسام و عمود بر سطح مقطع آنها وارد می‌شوند. شکل (۷-۵)

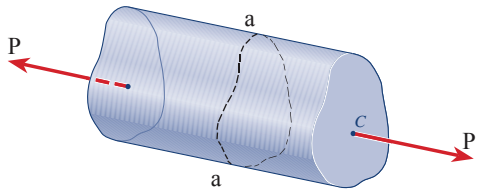
نیروهای محوری می‌توانند به صورت کششی یا فشاری به اجسام وارد شوند و در آن‌ها افزایش یا کاهش طول ایجاد نمایند.

همان‌طور که در شکل (۷-۶) دیده می‌شود، بارهای محوری ضمن افزایش یا کاهش طول، سبب کاهش یا افزایش ابعاد دیگر جسم نیز می‌شوند که در این فصل تنها به بررسی رفتار طولی آنها می پردازیم.

۲-۷ تنش محوری (Axial Stress)

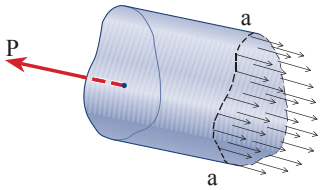
میله منشوری مطابق شکل (۷ –۷) را در نظر بگیرید که تحت تاثیر نیروی کششی **P** واقع شده است.

به نظر شما اثر نیروی **P** در یک مقطع دلخواه مانند **(a–a)** به چه صورت خواهد بود؟



شکل ۷-۷

در پاسخ به این سوال باید این‌طور تصور نمود که هر ذرهٔ جسم در مقطع **(a–a)** مقداری از نیروی **P** را تحمل می‌نماید و اثر این نیرو در مقطع **(a–a)**، مطابق شکل (۷-۸)، به صورت نیروهای گسترده دیده می‌شود.



شکل ۷-۸

به این نیروهای گسترده موجود در سطح مقطع **(a–a)** تنش گفته می‌شود. بنابراین می‌توان گفت:

«نیروی وارد به واحد سطح، تنش نامیده می‌شود»

چنان‌چه نیروی وارده نیروی محوری باشد، تنش ایجاد شده را تنش محوری نامیده و با رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$\sigma = \frac{\pm P}{A} \qquad (۱-۷)$$

σ : تنش محوری (فشاری یا کششی)

P : نیروی محوری (کششی با علامت + و فشاری با علامت –)

A : سطح مقطع

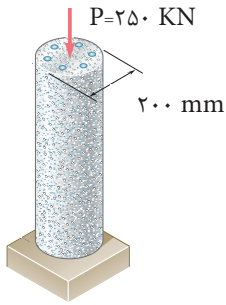
واحد تنش در سیستم **SI** با توجه به رابطهٔ آن، $\frac{N}{m^2}$ (پاسکال **Pa**) می‌باشد و بهتر است به‌منظور هماهنگی با آئین‌نامه‌ها در محاسبات از واحد $\frac{N}{mm^2}$ (مگاپاسکال **MPa**) استفاده شود.

نکته:

اگر نیروی محوری (**P**) کششی باشد تنش ایجادشده تنش کششی خواهد بود و σ مثبت می‌باشد.

اگر نیروی محوری (**P**) فشاری باشد تنش ایجادشده تنش فشاری خواهد بود و σ منفی می‌باشد.

مثال ۱



ستونی کوتاه مطابق شکل روبه‌رو تحت تاثیر نیروی محوری $P=۲۵۰KN$ قرار دارد.

مطلوب‌است محاسبه تنش در پای ستون (از وزن ستون صرف نظر شود).

حل:

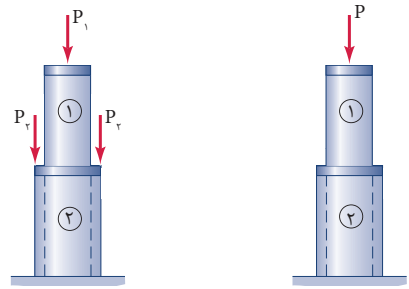
نیروی **P** فشاری است: $P=-۲۵۰KN=-۲۵۰\times۱۰۰۰=-۲۵۰۰۰۰\ N$

$$A=\frac{\pi d^2}{۴}=\frac{\pi\times۲۰۰^2}{۴}=۳۱۴۰۰\ mm^2$$

$$\sigma=\frac{P}{A}=\frac{-۲۵۰۰۰۰}{۳۱۴۰۰}\Rightarrow \boxed{\sigma=-۷/۹۶\ \frac{N}{mm^2}\ \text{یا}\ MPa}$$

علامت منفی نشانگر آن‌است که تنش محوری ایجاد شده فشاری می‌باشد.

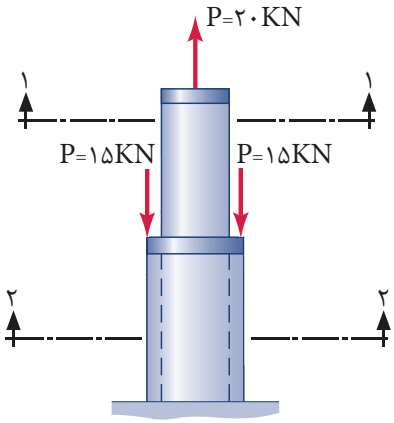
در صورتی‌که جسم دارای مقطع متفاوت باشد (شکل ۷-۹- الف) و یا بارگذاری در نقاط مختلف آن انجام شود (شکل ۷-۹- ب) تنش در هر قسمت از جسم متفاوت بوده و باید نیرو و مساحت هر قسمت را جداگانه تعیین و از رابطهٔ (۷-۱) تنش را در هر قسمت محاسبه نمود.



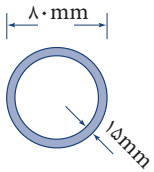
شکل ۷-۹

مثال ۲

جسمی مطابق شکل تحت تأثیر نیروهای نشان‌داده شده قرار دارد. مطلوب‌است محاسبهٔ تنش در هر قسمت از جسم.



مقطع ۱-۱



مقطع ۲-۲

حل:

الف) تنش در مقطع ۱-۱

$$\begin{cases} P = ۲۰\ KN = ۲۰۰۰۰\ N \\ A = \dfrac{\pi\, D^{۲}}{۴} = \dfrac{۳/۱۴ \times ۵۰^{۲}}{۴} = ۱۹۶۲/۵\ mm^{۲} \end{cases}$$

$$\sigma_{۱} = \frac{P}{A} = \frac{۲۰۰۰۰}{۱۹۶۲/۵} \Rightarrow \boxed{\sigma_{۱} = ۱۰/۱۹\ MPa \quad \text{کششی}}$$

ب) تنش در مقطع ۲-۲

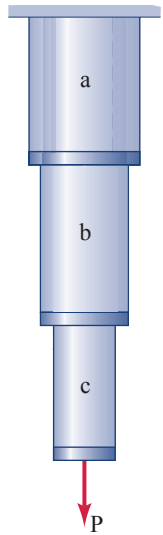
با توجه به شکل برآیند نیروهای وارد به مقطع (۲-۲) برابر است با:

$$\begin{cases} P = -۱۵ - ۱۵ + ۲۰ = -۱۰ KN = -۱۰۰۰۰\ N \\ A = \dfrac{\pi\, D^{۲}}{۴} - \dfrac{\pi\, d^{۲}}{۴} = \dfrac{۳/۱۴ \times ۸۰^{۲}}{۴} - \dfrac{۳/۱۴ \times ۵۰^{۲}}{۴} = ۳۰۶۱/۵\ mm^{۲} \end{cases}$$

$$\sigma_{۲} = \frac{P}{A} = \frac{-۱۰۰۰۰}{۳۰۶۱/۵} \Rightarrow \boxed{\sigma_{۲} = -۳/۲۷\ MPa \quad \text{فشاری}}$$

مثال ۳

قطعه پیوسته ای مطابق شکل تحت تاثیر نیروی کششی **P** قرار گرفته است، هرگاه نیروی **P** را به آرامی افزایش دهیم، احتمال گسیختگی در کدام یک از نواحی **a** و**b** و**c** بیشتر است؟ چرا؟



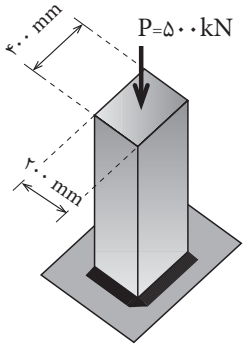
جواب:

با توجه به این که مقدار **P** در هر سه ناحیه ثابت است، با افزایش تدریجی نیروی **P** مطابق رابطه $\sigma = \frac{\pm P}{A}$ مقدار تنش در ناحیه **c** به‌دلیل سطح مقطع کوچک‌تر آن نسبت به نواحی **a** و **b** زودتر به تنشی می‌رسد که جسم دیگر قادر به تحمل آن نمی‌باشد.

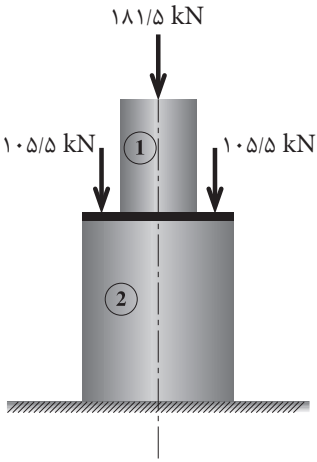
خودآزمایی

۱- لوستری به وزن **kN** ۵۰ از کابلی به قطر ۳۰ میلی‌متر آویزان است. مطلوب‌است محاسبهٔ تنش محوری کابل.

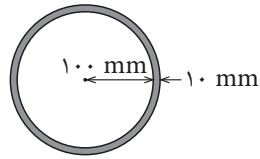
۲- ستونی مطابق شکل زیر تحت تأثیر بار محوری ۵۰۰ کیلونیوتن قرار دارد. مطلوب‌است محاسبهٔ تنش در پای ستون (از وزن ستون صرف‌نظر شود).



۳- ستونی از جنس بتن با مقطع دایره مطابق شکل تحت تأثیر سه نیرو قرار دارد. مطلوب‌است محاسبهٔ قطر هر یک از دو عضو فوقانی و تحتانی، در صورتی که خواسته باشیم تنش در هر عضو از **MPa** ۸ تجاوز نکند (از وزن اعضا صرف‌نظر شود).



۴- باری محوری برابر **kN** ۶۰۰ بر ستونی فلزی از لوله با ضخامت جداره ۱۰ میلی‌متر و قطر داخلی **mm** ۲۰۰ اثر می‌کند. مطلوب‌است محاسبهٔ تنش فشاری در ستون.



۵- نیرویی برابر **kN** ۱۰۰۰ بر یک صفحهٔ کف‌ستون (**Base Plate**) وارد می‌شود. اگر تنش زیر صفحه **MPa** ۵ باشد، مطلوب‌است محاسبهٔ ابعاد کف‌ستون در صورتی‌که، صفحهٔ کف‌ستون:

الف) مربع باشد

ب) نسبت طول به عرض آن ۱/۵ باشد

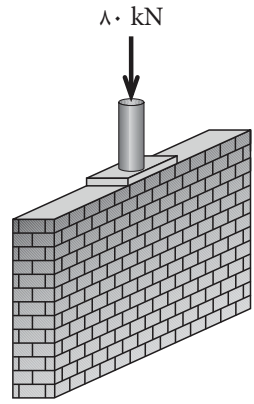
ج) دایره باشد.

۶- یک ستونک فلزی به قطر **mm** ۱۰۰ نیرویی برابر **kN** ۸۰ را مطابق شکل به‌وسیلهٔ صفحه کف‌ستون بر روی دیواری به ضخامت ۲۰۰ میلی‌متر وارد می‌کند. در صورتی‌که در نظر باشد تنش در زیر صفحه، حداکثر به **MPa** ۱ محدود شود، مطلوب‌است محاسبهٔ:

الف) ابعاد صفحه کف‌ستون؛

ب) تنش در مقطع ستونک؛

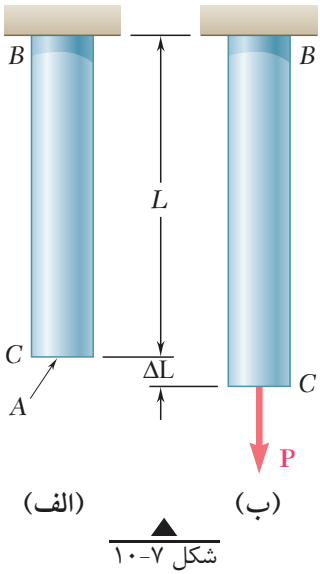
ج) تنش در زیر دیوار در صورتی‌که طول دیوار **m** ۱ باشد (از وزن دیوار صرف‌نظر شود).



۳-۷ تغییر طول اجسام تحت تاثیر بارهای محوری

میلهٔ **BC** به طول **L** و سطح مقطع **A** مطابق شکل (۷-۱۰- الف) مفروض است. اگر نیروی کششی **P** به آن وارد شود، سبب افزایش طول میله به اندازهٔ (ΔL) خواهد شد که مقدار آن از رابطهٔ زیر تعیین می‌شود. شکل (۷-۱۰- ب)

$$\Delta L = \frac{P\ L}{A\ E} \qquad (۲-۷)$$



شکل ۷-۱۰

در این رابطه **E** ضریب ارتجاعی (مدول الاستیسیته) جسم می‌باشد که به جنس آن بستگی دارد و در آزمایشگاه مقاومت مصالح مقدار آن تعیین می‌شود و واحد آن نیز همان واحد تنش یعنی $\frac{N}{mm^2}$ و یا (**MPa**) است.

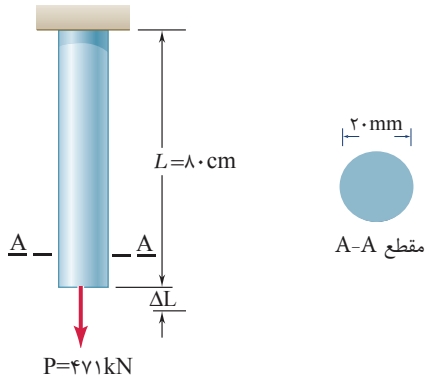
درجدول (۷-۱) ضریب ارتجاعی بعضی از مصالح آورده شده است.

جدول (۷-۱) ضریب ارتجاعی مصالح

مصالح	ضریب ارتجاعی $\frac{N}{mm^2}$ یا **MPa**
فولاد	۲×۱۰^۵
چدن	$۱/۲ \times ۱۰^۵$
آلومینیوم	$۰/۷ \times ۱۰^۵$
مس	۱×۱۰^۵

مثال ۴

مطلوب‌است تغییر طول میله فولادی مطابق شکل زیر؛ اگر ضریب ارتجاعی میله $E = ۲\times۱۰^{۵}\ \frac{N}{mm^{۲}}$ باشد (از وزن میله صرف‌نظر می‌شود).



$$P = ۴۷۱\ KN = ۴۷۱۰۰۰\ N$$

$$L = ۸۰\ cm = ۸۰۰\ mm$$

$$A = \frac{\pi\ D^{۲}}{۴} = \frac{۳/۱۴\times۲۰^{۲}}{۴} = ۳۱۴\ mm^{۲}$$

$$E = ۲\times۱۰^{۵}\ \frac{N}{mm^{۲}}$$

$$\Delta L = \frac{P.\ L}{A.\ E} = \frac{۴۷۱۰۰۰\times۸۰۰}{۳۱۴\times۲\times۱۰^{۵}} \Rightarrow \boxed{\Delta L = ۶\ mm}$$

نکته:

اگر در شکل (۷-۲) نیروی **P** فشاری باشد، این نیرو سبب کاهش طول میله می‌گردد که مقدار آن از همان رابطهٔ (۷-۲) محاسبه می‌شود.

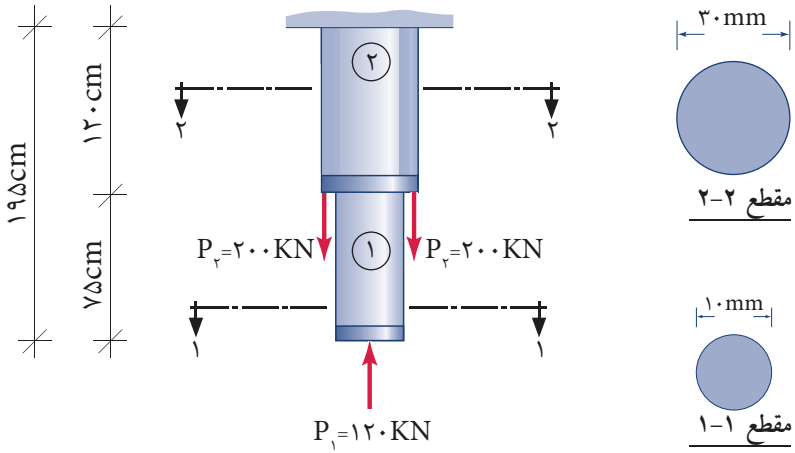
چنانچه جسم دارای مقطع و یا جنس یکنواخت نباشد و یا بارگذاری در نقاط مختلف انجام شود در این صورت آن‌را به بخش‌های مختلف تقسیم نموده و تغییر طول هر بخش را مطابق رابطهٔ (۷-۲) محاسبه می‌کنیم و برای محاسبه تغییر طول نهایی جسم آن‌ها را با یکدیگر جمع جبری می‌نماییم یعنی:

$$\Delta L = \sum_{i=۱}^{n} \frac{P_i\ L_i}{A_i\ E_i} \qquad (۷-۳)$$

مثال ۵

تغییر طول کلی جسم فولادی مطابق شکل زیر را محاسبه کنید.

$$(E = ۲\times ۱۰^{۵}\ \frac{N}{mm^{۲}})$$



حل:

تغییر طول کلی جسم برابر است با جمع جبری تغییر طول هر یک از قطعات ۱ و ۲ یعنی:

$$\Delta L_t = \Delta L_۱ + \Delta L_۲$$

الف) تغییر طول قطعه شماره ۱:

$P_۱ = -۱۲۰\ KN = -۱۲۰۰۰۰\ N$ **نیروی P فشاری می‌باشد.**

$L_۱ = ۷۵\ cm = ۷۵۰\ mm$

$$A_۱ = \frac{\pi D_۱^{۲}}{۴} = \frac{۳/۱۴\times ۱۰^{۲}}{۴} = ۷۸/۵\ mm^{۲}$$

$$E = ۲\times ۱۰^{۵}\ \frac{N}{mm^{۲}}$$

$$\Delta L_۱ = \frac{P_۱ . L_۱}{A_۱ . E_۱} = \frac{-۱۲۰۰۰۰\times ۷۵۰}{۷۸/۵\times ۲\times ۱۰^{۵}}$$

$\boxed{\Delta L_۱ = -۵/۷۳\ mm}$ **با توجه به علامت منفی، طول قطعهٔ ۱ کاهش می‌یابد.**

ب) تغییر طول قطعه شماره ۲:

$$P_۲ = ۲۰۰ + ۲۰۰ - ۱۲۰ = ۲۸۰ \text{ KN} = ۲۸۰۰۰۰ \text{ N}$$

$$L_۲ = ۱۲۰ \text{ cm} = ۱۲۰۰ \text{ mm}$$

$$A_۲ = \frac{\pi D_۲^۲}{۴} = \frac{۳/۱۴ \times ۳۰^۲}{۴} = ۷۰۶/۵ \text{ mm}^۲$$

$$E = ۲ \times ۱۰^۵ \frac{\text{N}}{\text{mm}^۲}$$

$$\Delta L_۲ = \frac{P_۲ L_۲}{A_۲ E_۲} = \frac{۲۸۰۰۰۰ \times ۱۲۰۰}{۷۰۶/۵ \times ۲ \times ۱۰^۵}$$

$$\boxed{\Delta L_۲ = ۲/۳۸ \text{ mm}}$$

افزایش طول قطعهٔ (۲)

تغییر طول کلی جسم برابر است با:

$$\Delta L_t = \Delta L_۱ + \Delta L_۲ = -۵/۷۳ + ۲/۳۸ \Rightarrow \boxed{\Delta L_t = -۳/۳۵ \text{ mm}}$$

با توجه به علامت منفی، طول کل جسم کاهش می‌یابد.

خلاصهٔ فصل

- اجسام تحت تأثیر نیروهای مختلف، رفتارهای متفاوتی مانند رفتار کششی، فشاری، برشی و ... از خود نشان می‌دهند.
- نیروی محوری نیرویی است که در امتداد محور طولی اجسام و عمود بر سطح مقطع آن‌ها وارد می‌شود.
- نیروی وارد به واحد سطح را تنش می‌نامند.
- تنش محوری با رابطهٔ $\sigma = \frac{\pm P}{A}$ تعریف می‌شود و بر سطح مقطع جسم عمود است.
- واحد تنش در سیستم **SI** عبارت است از $\frac{\text{N}}{\text{m}^۲}$
- نیروهای محوری در اجسام، کاهش یا افزایش طول ایجاد می‌نمایند که از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\Delta L = \frac{P L}{A E}$$

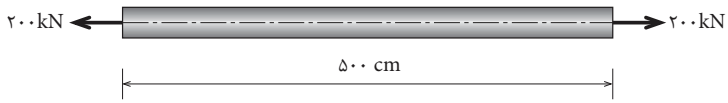
- تغییر طول کلی اجسام از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\Delta L = \sum_{i=۱}^{n} \frac{P_i L_i}{A_i E_i}$$

- ضریب ارتجاعی یا مدول الاستیسیته اجسام به جنس آن‌ها بستگی داشته و با نماد **E** نمایش داده می‌شود و واحد آن، واحد تنش یعنی $\frac{\text{N}}{\text{mm}^۲}$ یا **MPa** می‌باشد.

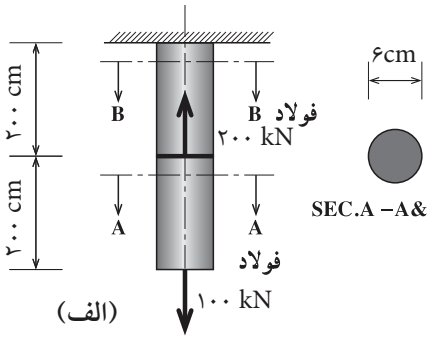
خودآزمایی

۱- در شکل زیر اگر مقطع میله دایره‌ای به قطر **d** و جنس آن از فولاد باشد و خواسته‌باشیم $\Delta L = ۱/۵۹۲$ cm باشد، مطلوب‌است محاسبهٔ قطر میله (**d**). ($E = ۲\times۱۰^{۵}$ MPa)

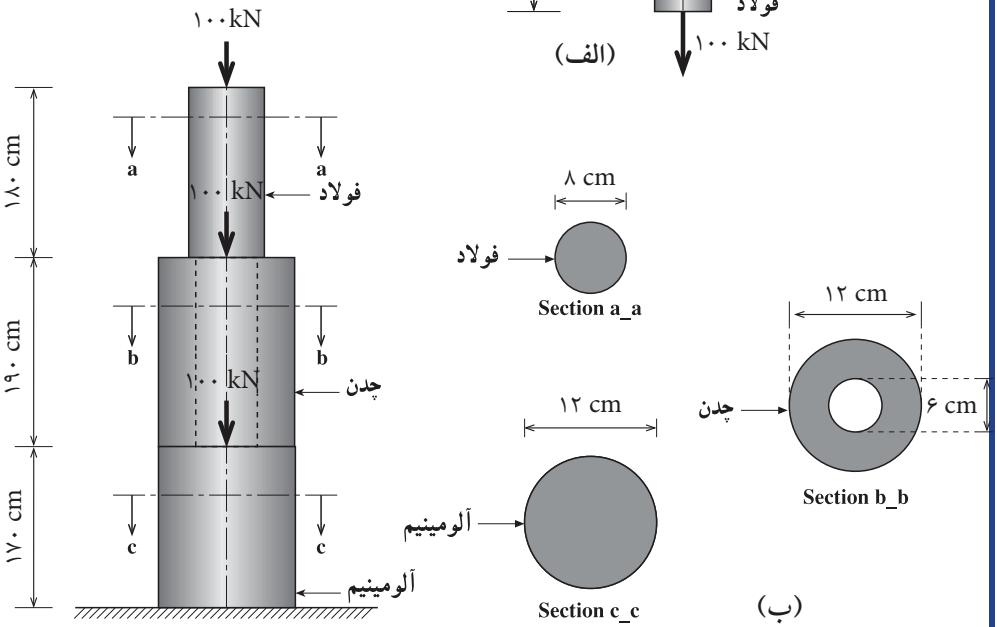


۲- در شکل‌های زیر تغییر طول نهایی هر کدام را محاسبه کنید.

(مقادیر مدول الاستیسیته را از جدول (۱-۷) استخراج نمائید)

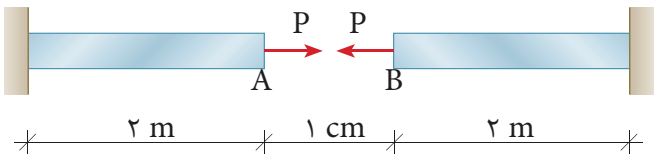


(الف)



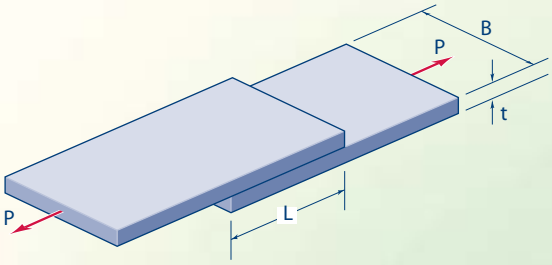
(ب)

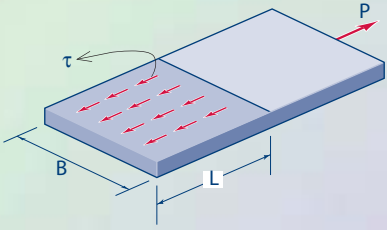
۳- در شکل زیر چه مقدار نیروی **P** به انتهای میله‌ها وارد شود تا نقاط **A** و **B** به‌هم برسند؟ قطر میله‌ها ۲۰ میلی‌متر و مدول الاستیسیته آن‌ها **MPa** ۲×۱۰^{۵} می‌باشد.



فصل هشتم

نیرو و تنشِ برشی





هدف‌های رفتاری

پس از آموزش این فصل از فراگیر انتظار می‌رود بتواند:

۱- نیروی برشی (مماسی) را تعریف کند.

۲- تنش برشی را تعریف نماید و رابطهٔ آن‌را به‌کار گیرد.

۳- رفتار اتصالات برشی ساده با پیچ یا پرچ را بررسی نماید .

۴- تنش کششی ماکزیمم در اتصالات برشی ساده را محاسبه نماید.

۵- تنش لهیدگی را در اتصالات برشی ساده محاسبه کند.

۶- تنش برشی در پیچ‌ها و یا پرچ‌ها را به‌دست آورد.

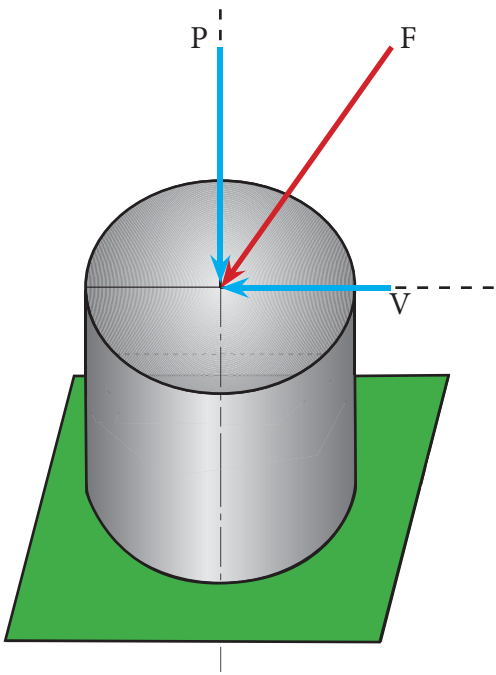
۷- گسیختگی برشی ورق‌ها را کنترل نماید.

۱-۸ نیروی برشی (مماسی)

نیروی مماس بر سطح مقطع اجسام را نیروی برشی (مماسی) می‌نامیم.

در شکل (۸-۱) نیروی **F** به سطح مقطع **A** وارد می‌شود.

اگر نیروی **F** را به دو مؤلفهٔ متعامد تجزیه نمائیم، مؤلفهٔ افقی آن (**V**) بر سطح مقطع مماس می‌باشد. بنابراین نیروی برشی محسوب می‌شود و مؤلفهٔ قائم (**P**) بر سطح مقطع عمود بوده و لذا نیروی محوری محسوب می‌گردد.



شکل ۸-۱

۲-۸ تنش‌های برشی (مماسی) (Shear Stress)

نیروی برشی سبب ایجاد تنش برشی در سطح مقطع اجسام می‌گردد. شکل (۸-۲-الف) دو صفحه را نشان می‌دهد که به‌وسیلهٔ چسب به یکدیگر متصل شده‌اند و نیروی **P** تنش برشی در محل اتصال دو صفحه مطابق شکل (۸-۲-ب) ایجاد می‌نماید.

تنش برشی (مماسی)

نیروی برشی (مماسی) وارد به واحدِ سطح را تنشِ برشی گویند

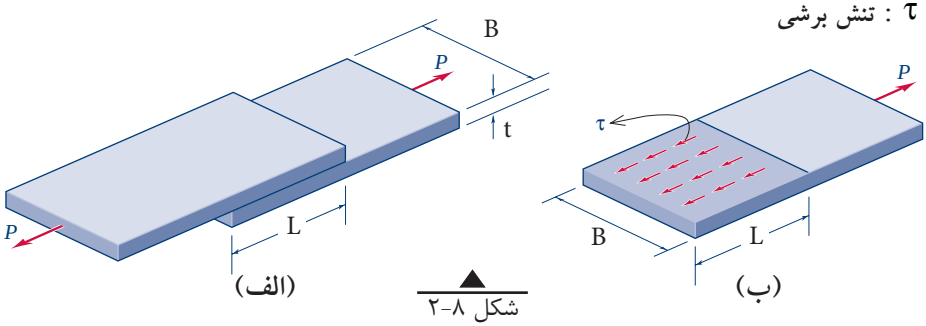
و با نماد (τ) نمایش داده می‌شود و رابطهٔ آن به صورت زیر است:

$$\tau = \frac{V}{A} \qquad (۸-۱)$$

V : نیروی برشی که در شکل (۸-۲) همان نیروی **P** می‌باشد.

A : سطح مقطع جسم (که در این‌جا سطح تماس بین دو صفحه می‌باشد A=L.B)

τ : تنش برشی

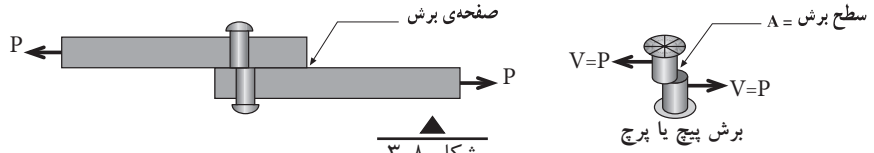


شکل ۸-۲

نیروی برشی در اکثر سازه‌های ساختمانی به صورت‌های مختلف وجود دارد و به دلیل گستردگی و پیچیدگی موضوع در اینجا تنها جهت آشنایی با رفتار برشی اعضای ساختمانی به بررسی اتصالات برشی ساده با پیچ یا پرچ می‌پردازیم.

در شکل (۸-۳) دو ورق با مشخصات نشان‌داده‌شده توسط یک پیچ به قطر **d** به یکدیگر متصل شده‌اند و تحت تاثیر نیروی کششی **P** قرار دارند.

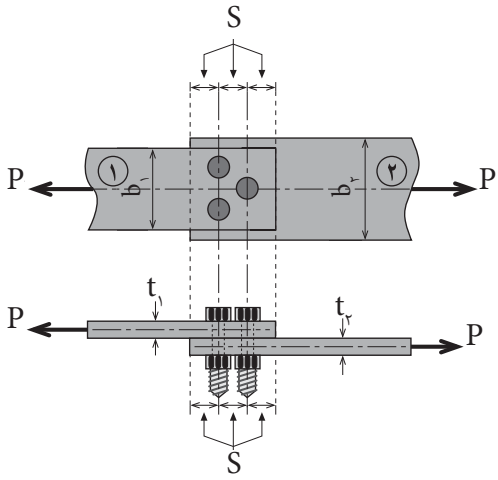
باتوجه به شکل (۸-۳) ملاحظه می‌شود که نیروی **P** در ورق‌ها ایجاد کشش نموده و در پیچ‌ها ایجاد برش می نماید. لذا نیروی **P** برای پیچ، نیروی برشی محسوب می‌گردد.



شکل ۸-۳

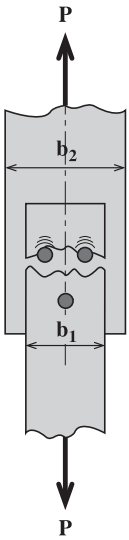
۸-۳ بررسی رفتار اتصالات برشی ساده با پیچ یا پرچ

با توجه به شکل (۸-۴) به بررسی رفتارهای مختلف این نوع اتصالات می‌پردازیم:



شکل ۸-۴

۸-۳-۱- تنش کششی حداکثر ایجاد شده در ورق‌ها



شکل ۸-۵

با توجه به رابطهٔ ($\sigma = \frac{P}{A}$) تنش محوری یا قائم ورق‌ها وقتی به حداکثر می‌رسد که سطح مقطع کاهش یابد لذا در محل پیچ یا پرچ به دلیل وجود سوراخ‌ها، سطح مقطع ورق ضعیف شده و تنش حداکثر در آن مقطع ایجاد می‌شود و امکان گسیختگی در این مقطع وجود دارد[۱] و مطابق شکل خواهیم داشت: شکل (۸-۵)

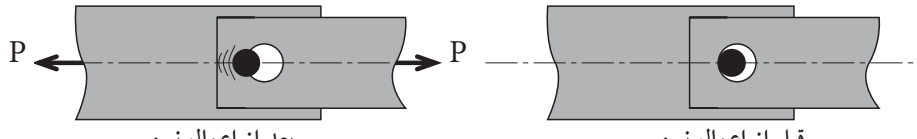
$$A = (b - nd)t \qquad (۸-۲)$$

بنابراین برای تعیین کمترین سطح مقطع ورق‌ها (A_{min}) لازم است مقاطع مختلفی در طول اتصال در نظر گرفته و سطح مقطع هرکدام را محاسبه نموده و کمترین آن‌ها را در رابطهٔ $\sigma = \frac{P}{A}$ قرار دهیم تا مقدار حداکثر تنش کششی تعیین شود. دررابطه (۸-۲) **n** تعداد پیچ‌ها در مقطع مورد نظر و **d** قطر پیچ‌ها یا پرچ‌ها، **b** عرض و **t** ضخامت صفحه‌ها می‌باشد.

۱- باید توجه داشت که در این‌گونه اتصالات ممکن‌است مقاطع دیگری وجود داشته باشند که تنش کششی حداکثر در آن‌ها ایجاد می‌شود که در مقاطع بالاتر با آن‌ها آشنا خواهید شد.

۸-۳-۲- تنش لهیدگی

نیروی کششی اعمال شده در اتصال شکل (۸-۶) در محل سوراخ‌ها به جدارهٔ ورق‌ها توسط پیچ فشار وارد می‌آورد که باعث لهیدگی سطح تماس آن‌ها می‌شود و تنش حاصل، تنش لهیدگی نامیده می‌شود و از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.



شکل ۸-۶

$$\sigma_b = \frac{P}{Ndt} \qquad (۸-۳)$$

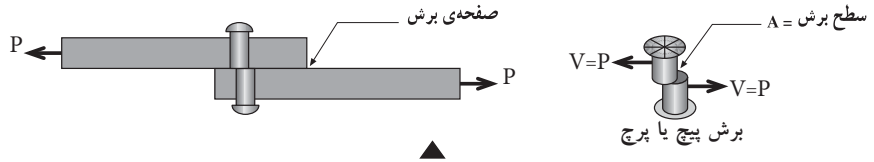
بدیهی است که تنش لهیدگی حداکثر ($\sigma = b_{max}$)در صفحه‌ای ایجاد می‌شود که کمترین ضخامت (t_{min})را داشته باشد. یعنی:

$$\sigma_{bmax} = \frac{P}{Ndt_{min}} \qquad (۸-۴)$$

در روابط (۸-۳) و (۸-۴)، **N** تعداد کل پیچ‌ها یا پرچ‌های اتصال می‌باشد.

۸-۳-۳- تنش برشی در پیچ‌ها یا پرچ‌ها

باتوجه به تعریف نیروی برشی (مماسی)، نیروی کششی **P** در اتصال شکل (۸-۷) بر سطح مقطع پیچ‌ها یا پرچ‌ها مماس بوده بنابراین نیروی برشی برای پیچ‌ها یا پرچ‌ها محسوب می‌شود:



شکل ۸-۷

لذا باتوجه به رابطهٔ تنش برشی داریم:

$$\tau = \frac{P}{NA} \qquad (۸-۵)$$

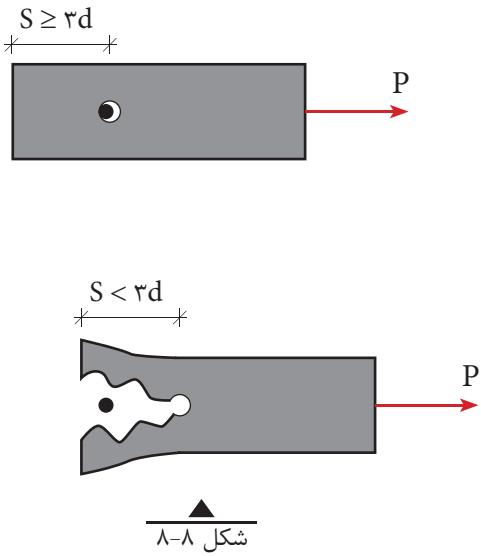
در این رابطه **N** تعداد کل پیچ‌ها یا پرچ‌ها و **A** سطح مقطع یکی از آن‌ها می‌باشد.

۸-۳-۴- گسیختگی برشی ورق

هرگاه فاصله مراکز سوراخ‌ها از یکدیگر و یا از لبه‌های ورق، از حد معینی کمتر باشد، امکان پارگی ورق مطابق شکل (۸-۸) وجود دارد.

لذا بر اساس آیین‌نامه باید فاصلهٔ مرکز تا مرکز سوراخ‌ها و همچنین مرکز سوراخ‌ها تا لبه‌های ورق از سه برابر قطر پیچ کمتر نباشد. یعنی:

$$S \geq 3d \qquad (۶-۸)$$



شکل ۸-۸

مثال ۱

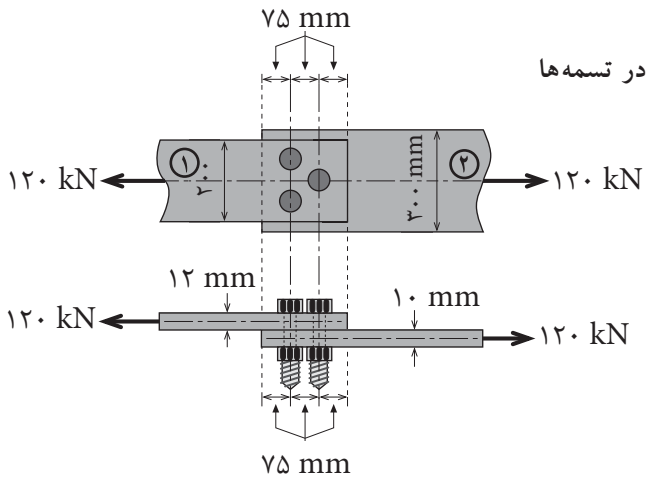
دو تسمه توسط سه پیچ هر یک به قطر ۲۰ میلی‌متر مطابق شکل به‌هم متصل شده‌اند. مطلوب‌است محاسبهٔ:

الف) تنش کششی حداکثر در هر تسمه

ب) تنش برشی پیچ‌ها

ج) تنش لهیدگی ماکزیمم در تسمه‌ها

د) کنترل پارگی برشی



الف) سطح مقطع هر تسمه را در مقطعی که بیشترین پیچ‌ها در آن وجود دارند محاسبه سپس تنش را در هر تسمه به‌دست می‌آوریم:

تسمهٔ ۱

$$A_{min} = (b_1 - nd)t_1 \Rightarrow A_{min} = (۲۰۰ - ۲\times ۲۰)۱۲$$

$$A_{min} = ۱۹۲۰ \ \ mm^۲$$

تنش

$$\sigma_1 = \frac{P}{A_{min}} \Rightarrow \sigma_1 = \frac{۱۲۰\times ۱۰^۳}{۱۹۲۰}$$

تنش حداکثر در تسمه شماره (۱)

$$\boxed{\sigma_1 = ۶۲/۵ \ \ MPa}$$

تسمهٔ ۲

$$A_{min} = (b - nd)t \Rightarrow A_{min} = (۳۰۰ - ۲\times ۲۰)۱۰$$

$$A_{min} = ۲۶۰۰ \ \ mm^۲$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{A_{min}} \Rightarrow \sigma_2 = \frac{۱۲۰\times ۱۰^۳}{۲۶۰۰}$$

تنش حداکثر در تسمه شماره (۲)

$$\boxed{\sigma_2 = ۴۶/۱۵ \ \ MPa}$$

ب) تنش برشی در پیچ‌ها:

$$\tau = \frac{P}{NA} \Rightarrow \tau = \frac{۱۲۰\times۱۰^{۳}}{۳\times(\frac{\pi}{۴}\times۲۰^{۲})} \Rightarrow \boxed{\tau = ۱۲۷/۳۹ \quad MPa}$$

ج) تنش لهیدگی ماکزیمم در تسمه ۲ به‌وجود می‌آید. چون دارای ضخامت کمتری نسبت به تسمه شماره ۱ می‌باشد.

$$\sigma_{b\,max} = \frac{P}{Ndt_{min}} \Rightarrow \sigma_b = \frac{۱۲۰\times۱۰^{۳}}{۳\times(۲۰\times۱۰)} \Rightarrow \boxed{\sigma_b = ۲۰۰ \quad MPa}$$

د) کنترل پارگی برشی:

برای جلوگیری از پارگی تسمه باید:

$S \geq ۳d \Rightarrow ۷۵ \geq ۳\times۲۰ \Rightarrow ۷۵ > ۶۰$ قابل قبول

خلاصهٔ فصل

- نیروی برشی یا مماسی به نیرویی گفته می‌شود که بر سطح مقطع جسم مماس باشد.
- تنش برشی از رابطهٔ $\tau = \frac{V}{A}$ محاسبه می‌شود.
- اتصالات برشی ساده با پیچ یا پرچ، در حالات زیر مورد بررسی قرار می‌گیرند:

۱) تنش کششی ایجاد شده در تسمه‌ها در مقطع ضعیف‌شده برابر است با:

$$\sigma = \frac{P}{(b-nd)t}$$

۲) تنش لهیدگی حداکثر در محل سوراخ‌ها و در تسمه نازک‌تر ایجاد می‌شود. یعنی:

$$\sigma_{b\,max} = \frac{P}{Ndt_{min}}$$

۳) تنش برشی در پیچ‌ها یا پرچ‌ها از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\tau = \frac{P}{NA} \qquad A = \frac{\pi d^{۲}}{۴}$$

۴) به منظور جلوگیری از گسیختگی برشی تسمه‌ها باید فاصلهٔ سوراخ‌ها از یکدیگر و از لبهٔ ورق‌ها از سه برابر قطر پیچ یا پرچ کمتر نباشد. یعنی:

$$S \geq ۳d$$

خودآزمایی

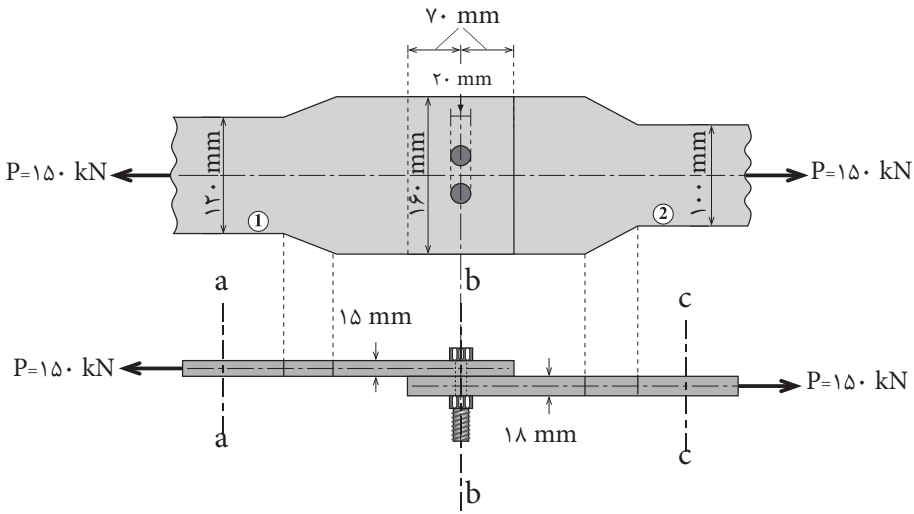
۱- در شکل زیر مطلوب‌است محاسبهٔ

الف) تنش کششی در مقاطع a–a و b–b و c–c

ب) تنش برشی پیچ‌ها

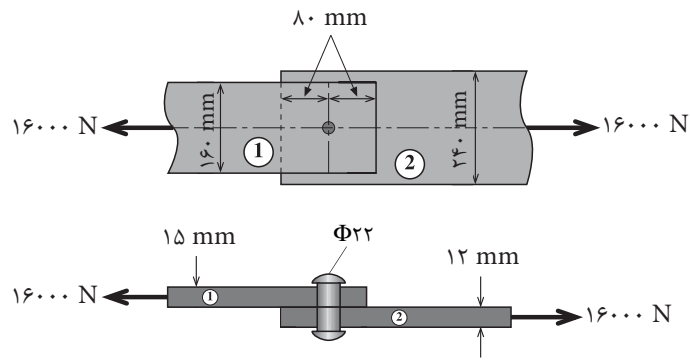
ج) تنش لهیدگی ماکزیمم

د) کنترل پارگی برشی

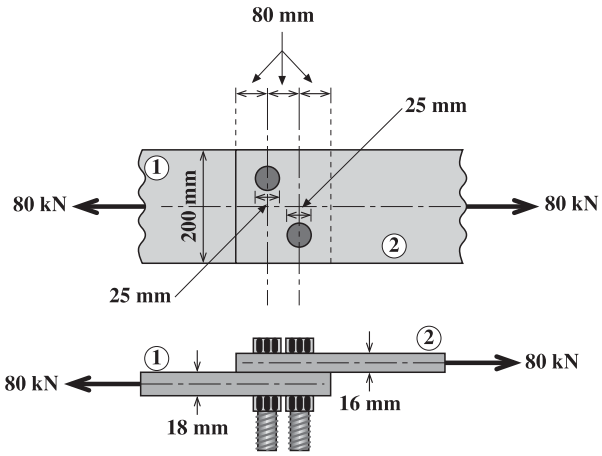


۲- در مسائل ۲ و ۳ مطلوب‌است محاسبهٔ:

تنش ماکزیمم صفحه‌ها - تنش برشی پیچ‌ها - تنش لهیدگی ماکزیمم و کنترل پارگی برشی

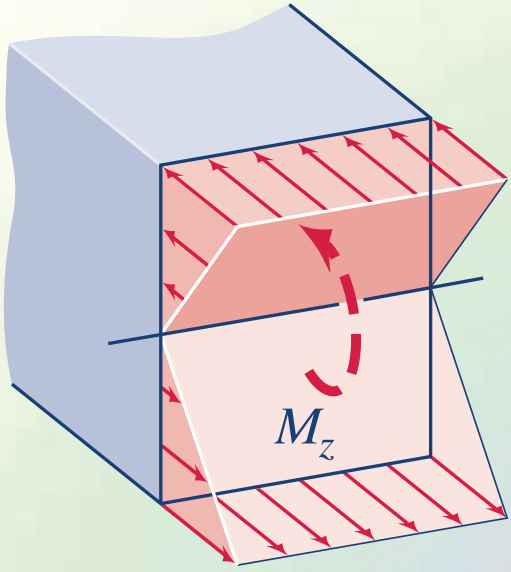


-۳



فصل
نهم

تنش
در تیرها



هدف‌های رفتاری

پس از آموزش این فصل از فراگیر انتظار می‌رود بتواند:

۱- تنش خمشی را در تیرها بشناسد.

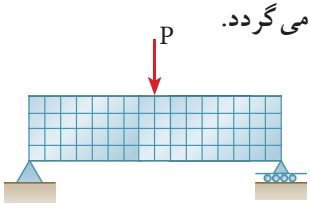
۲- تنش خمشی حداکثر در هر مقطع از تیر با مقاطع متقارن را با بار متمرکز محاسبه کند.

۳- حداکثر تنش خمشی تیرها با مقاطع متقارن را با بار متمرکز به‌دست آورد.

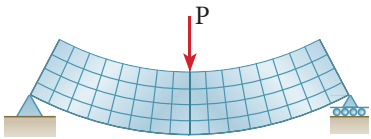
۴- شماره مقطع مورد نیاز تیرها تحت بار متمرکز را به کمک رابطهٔ خمش، با استفاده از پروفیل‌های استاندارد تک یا دوبل به‌دست آورد.

۹-۱ تنش خمشی در تیرها با مقطع متقارن

در شکل (۹-۱) تیر با بارگذاری نشان داده شده، به صورت شکل (۹-۲) خم می‌گردد.



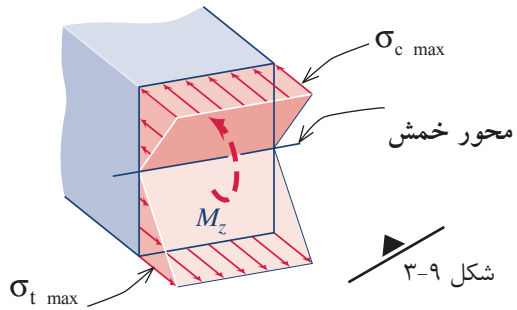
شکل ۹-۱



شکل ۹-۲

ملاحظه می‌شود که تارهای تحتانی تیر کشیده شده و تارهای فوقانی آن فشرده می‌شود بنابراین در هر مقطع این تیر، ناحیه تحتانی دارای تنش کششی و ناحیه فوقانی دارای تنش فشاری می‌باشد که به تنش‌های مذکور تنش‌های خمشی گفته می‌شود.

حداکثر تنش‌های کششی (σ_t) و فشاری (σ_c) ایجادشده در مقطع تیر مطابق شکل (۹-۳) به‌ترتیب در تارهای تحتانی و فوقانی خواهد بود.



شکل ۹-۳

مقدار این تنش‌ها از رابطهٔ (۹-۱) محاسبه می‌گردد که به رابطهٔ خمش معروف است:

$$\sigma = \frac{MC}{I} \qquad (۹-۱)$$

در این رابطه:

M : لنگر خمشی در مقطع مورد نظر

C : فاصلهٔ دورترین تارهای کششی یا فشاری مقطع از محور خمش

I : ممان اینرسی حول محور خمش تیر می‌باشد.

σ : تنش کششی (σ_t) و یا فشاری (σ_c) حداکثر، در مقطع مورد نظر می‌باشد که در مقاطع متقارن با هم برابرند.

۹-۱-۱- تنش‌های خمشی حداکثر در تیر

رابطهٔ (۹-۱) مقادیر حداکثر تنش کششی یا فشاری (σ_{max})در هر مقطع دلخواه از تیر را تعیین می‌کند.

برای محاسبه حداکثر تنش کششی یا فشاری در طول تیر لازم است در رابطه (۹-۱) لنگر خمشی حداکثر تیر (M_{max}) را از نمودار لنگر خمشی تیر جایگزین نمائیم. یعنی:

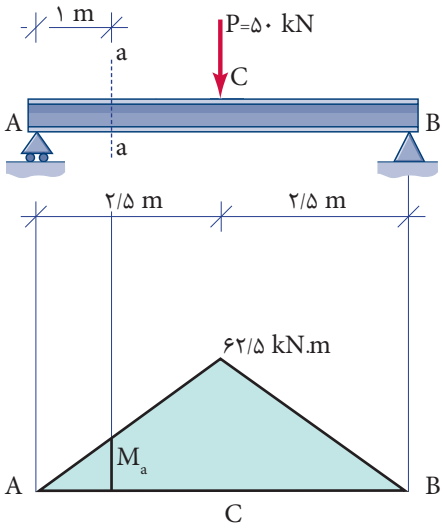
$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}C}{I} \qquad (۹-۲)$$

مثال ۱

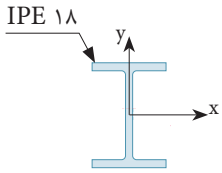
در تیر شکل زیر که متشکل از یک IPE ۱۸۰ می‌باشد، با توجه به نمودار لنگر خمشی تیر مطلوب‌است محاسبهٔ:

الف) تنش خمشی حداکثر در مقطع a–a به فاصلهٔ ۱ متر از تکیه گاه سمت چپ

ب) تنش خمشی حداکثر تیر



نمودار لنگر خمشی تیر (M)



مقطع تیر

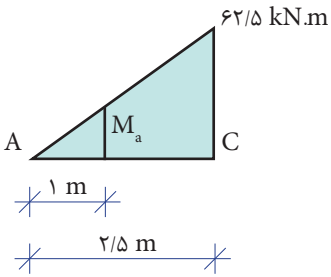
حل:

الف) مقدار لنگر خمشی در مقطع a–a به فاصلهٔ ۱ متر از تکیه‌گاه سمت چپ با توجه به نمودار لنگر خمشی و استفاده از تناسب به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\frac{M_a}{۶۲/۵}=\frac{۱}{۲/۵}\Rightarrow M_a=\frac{۶۲/۵}{۲/۵}$$

$$M_a=۲۵\ \text{kN.m}$$

$$\boxed{M_a=۲۵\times۱۰^{۶}\ \text{N.mm}}$$



تنش خمشی ماکزیمم در مقطع a–a از رابطهٔ خمش به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\sigma=\frac{M_a C}{I_x}$$

با استخراج مشخصات IPE ۱۸ از جداول پیوست خواهیم داشت:

$$\text{IPE } ۱۸ \begin{cases} I_x = ۱۳۲۰ \text{ cm}^۴ = ۱۳۲\times۱۰^۵ \text{ mm}^۴ \\ C = \dfrac{h}{۲} = \dfrac{۱۸۰}{۲} = ۹۰ \text{ mm} \end{cases}$$

$$\sigma = \frac{۲۵\times۱۰^۶\times۹۰}{۱۳۲\times۱۰^۵} \Rightarrow \boxed{\sigma = ۱۷۰/۴۵ \text{ MPa}}$$

ب) تنش خمشی حداکثر تیر با توجه به مقدار لنگر ماکزیمم تیر از روی نمودار لنگر خمشی به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$M_{max} = ۶۲/۵ \text{ kN.m} = ۶۲/۵\times۱۰^۶ \text{ N.mm}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}C}{I_x} \Rightarrow \sigma_{max} = \frac{۶۲/۵\times۱۰^۶\times۹۰}{۱۳۲\times۱۰^۵} \Rightarrow \boxed{\sigma_{max} = ۴۲۶/۱۴ \text{ MPa}}$$

۹-۲ تنش برشی متوسط تیرهای با مقطع I شکل (مطالعه آزاد)

در فصل پنجم با نمودارهای نیروی برشی (V) و لنگر خمشی (M) تیرها آشنا شدیم. بر اساس این نمودارها، هر نقطه از تیر دارای مقدار معینی نیروی برشی و لنگر خمشی می‌باشد.

تیرها باید مقادیر حداکثر نیروی برشی (V_{max})و لنگر خمشی (M_{max}) ایجادشده را تحمل نمایند.

در تیرهای I شکل، جانِ تیر سهم بیشتری در تحمل نیروهای برشی دارد بنابراین برای محاسبهٔ تنش برشی در تیرها، در رابطهٔ ($\tau = \frac{V}{A}$) که در فصل هشتم آمده است، سطح جان تیر را قرار می‌دهیم.

لذا تنش برشی متوسط (τ_{ave}) در تیرها از رابطهٔ (۹-۳) به‌دست می‌آید.

$$\tau_{ave} = \frac{V}{A_w} \qquad (۹-۳)$$

که A_w مطابق شکل (۹-۴) برابر است با:

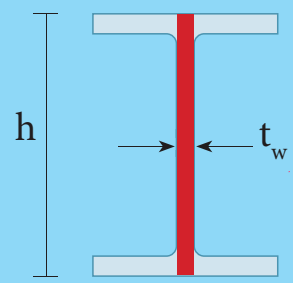
$$A_w = h.t_w \qquad (۹-۴)$$

در این رابطه:

(h) ارتفاع مقطع تیرآهن و (t_w) ضخامت جانِ تیر می‌باشد که از جداول مربوطه استخراج می‌گردد.

برای محاسبهٔ تنش برشی حداکثر (τ_{max}) در تیر باید به جای V در رابطهٔ (۹-۳) از V_{max} استفاده شود.

$$\tau_{max} = \frac{V_{max}}{h.t_w} \qquad (۹-۵)$$



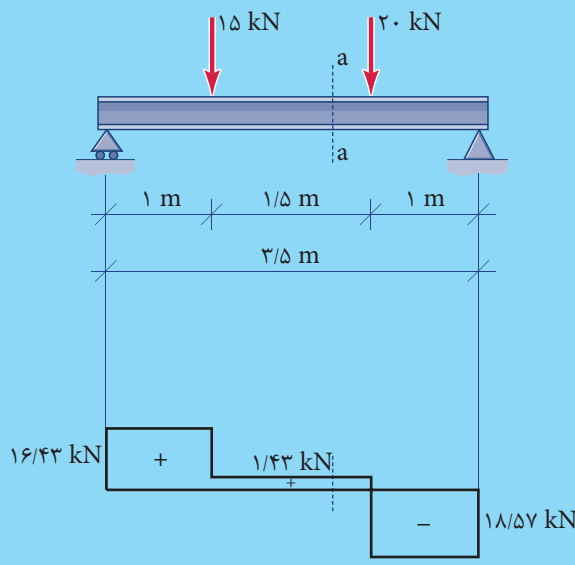
شکل ۹-۴

مثال ۲ (مطالعه آزاد)

در تیر شکل مقابل که از یک تیرآهن IPE ۱۶ تشکیل شده است، با توجه به نمودار نیروی برشی تیر مطلوب‌است محاسبهٔ:

الف) تنش برشی تیر در مقطع a–a به فاصلهٔ ۱/۵ متر از تکیه‌گاه سمت راست؛

ب) تنش برشی حداکثر تیر.



نمودار نیروی برشی (V)

حل:

الف) با توجه به نمودار نیروی برشی، در مقطع a–a به فاصلهٔ ۱/۵ متر از تکیه‌گاه سمت راست، مقدار نیروی برشی برابر است با $V_a = ۱/۴۳\ kN$ بنابراین خواهیم داشت:

$$\tau_a = \frac{V}{A_w}$$

با استخراج سطح مقطع جان تیرآهن IPE ۱۶ از جداول پیوست، داریم:

$$\text{IPE } ۱۶ \begin{cases} h = ۱۶\ cm = ۱۶۰\ mm \\ t_w = s = ۵\ mm \end{cases} \Rightarrow A_w = h.t_w \Rightarrow A_w = ۱۶۰ \times ۵ = ۸۰۰\ mm^۲$$

$$\tau_a = \frac{۱/۴۳ \times ۱۰^۳}{۸۰۰} \Rightarrow \boxed{\tau_a = ۱/۷۹\ MPa}$$

تنش برشی در مقطع a–a

ب) تنش برشی حداکثر تیر:

با توجه به نمودار نیروی برشی داریم:

$$V_{max} = ۱۸/۵۷\ kN = ۱۸۵۷۰\ N$$

$$\tau_{max} = \frac{V_{max}}{h.t_w} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{۱۸۵۷۰}{۸۰۰}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau_{max} = ۲۳/۲۱\ MPa}$$

تنش برشی حداکثر تیر

۳-۹ تعیین شمارهٔ مقطع تیر فولادی با استفاده از تنش خمشی ماکزیمم تحت بار متمرکز

به‌طور کلی طراحی تیر یعنی تعیین مشخصات مقطع مورد نیاز با توجه به بارهای وارده و کنترل‌های لازم مانند کنترل تنش برشی حداکثر، کنترل تغییر شکل و . . . که با استفاده از آئین‌نامه‌های مربوطه انجام می‌گیرد.

در این قسمت با روش تعیین شماره مقطع مورد نیاز تیر فولادی با استفاده از رابطهٔ (۹-۲) آشنا می‌شوید و کنترل‌های لازم را در مقاطع بالاتر فرا خواهید گرفت.

تنش خمشی حداکثر تیر که عموماً تعیین‌کننده شماره مقطع مورد نیاز آن می‌باشد از رابطهٔ (۹-۲) به‌دست می‌آید.

به‌طور کلی تنش ایجاد شده در هر مصالحی نباید از مقدار معینی تجاوز نماید که این مقدار تنش معین را تنش مجاز مصالح مورد نظر می‌نامند.

مقدار تنش مجاز توسط آئین‌نامه‌های مربوطه مشخص شده و با نماد σ_{all} نشان داده می‌شود. در این کتاب مقدار تنش مجاز مصالح فولادی در خمش معادل **MPa** ۱۴۴ در نظر گرفته شده است.[۱]

بنابراین تنش خمشی حداکثر در تیرهای فولادی نباید از **MPa** ۱۴۴ تجاوز نماید در نتیجه رابطهٔ (۹-۲) به صورت زیر در خواهد آمد.

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}.C}{I_x} \leq ۱۴۴ \ MPa$$

نسبت $\frac{I_x}{C}$ ، مدول مقطع یا اساس مقطع تیر یعنی (S_x) می‌باشد.

بنابراین در رابطهٔ (۹-۳) خواهیم داشت:

$$S_x = \frac{I_x}{C}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{\frac{I_x}{C}} \leq ۱۴۴ \Rightarrow \sigma_{max} = \frac{M_{max}}{S_x} \leq ۱۴۴$$

$$\Rightarrow \boxed{S_x \geq \frac{M_{max}}{۱۴۴}} \qquad (۴-۹)$$

۱- مقدار تنش مجاز به عوامل مختلفی بستگی دارد که به منظور سادگی و پرهیز از طولانی شدن بحث به طور خلاصه آن‌را معادل **MPa** ۱۴۴ در نظر می‌گیریم.

«به مقدار S_x حاصل از رابطهٔ (۹-۴) اساس مقطع لازم گویند.» بنابراین برای تعیین شمارهٔ مقطع تیر با استفاده از رابطهٔ (۹-۴) اساس مقطع لازم تیر، محاسبه شده و از جداول پروفیل‌های ساختمانی می‌توان شمارهٔ مقطع مورد نیاز را که دارای اساس مقطعی معادل یا بزرگ‌تر از مقدار محاسبه شده از رابطهٔ فوق می‌باشد، استخراج می‌شود.

مثال ۳

کنترل نمائید در مثال (۱) آیا با توجه به تنش مجاز خمشی تیر که معادل **MPa** ۱۴۴ می‌باشد تیرآهن **IPE** ۱۸ جوابگوی بار وارده می‌باشد یا خیر و در صورت لزوم مقطع مورد نیاز را تعیین نمائید.

حل:

تنش خمشی ماکزیمم در مثال (۱) برابر $\sigma_{max} = ۴۲۶/۱۴\ MPa$ محاسبه شده که بزرگ‌تر از تنش مجاز خمشی یعنی $\sigma_{all} = ۱۴۴\ MPa$ می‌باشد بنابراین **IPE** ۱۸ جوابگوی بار وارده نمی‌باشد.

بنابراین باید اساس مقطع مورد نیاز را محاسبه نمائیم. با توجه به رابطهٔ (۹-۴) خواهیم داشت:

$$S_{x\,لازم} \geq \frac{M_{max}}{۱۴۴}$$

$$\Rightarrow S_{x\,لازم} = \frac{۶۲/۵\times۱۰^{۶}}{۱۴۴} = ۴۳۴۰۲۷\ mm^{۳} = ۴۳۴۰۲۷\times۱۰^{-۳}\ cm^{۳}$$

$$\Rightarrow S_{x\,لازم} = ۴۳۴/۰۳\ cm^{۳} \Rightarrow \text{از جدول IPE} \Rightarrow \boxed{\text{IPE ۳۰}}$$

$$S_{x\,موجود} = ۵۵۷\ cm^{۳} > ۴۳۴/۰۳$$

بنابراین برای این‌که تنش خمشی ماکزیمم تیر از حد مجاز تجاوز نکند باید مقطع آن حداقل **IPE** ۳۰ باشد. چنان‌چه بخواهیم از تیرآهن دوبل به‌عنوان تیر فوق استفاده نمائیم، کافی‌است اساس مقطع لازم را نصف نموده و بر اساس آن شمارهٔ مقطع مورد نیاز را از جدول استخراج و به صورت دوبل مورد استفاده قرار دهیم. خواهیم داشت:

$$S_{x\,لازم} \geq \frac{۴۳۴/۰۳}{۲} = ۲۱۷/۰۲\ cm^{۳}$$

$$\Rightarrow \text{از جدول IPE} \Rightarrow \boxed{۲\ \text{IPE ۲۲}} \quad \text{با} \quad S_{x\,موجود} = ۲۵۲\times۲ = ۵۰۴\ cm^{۳} > ۴۳۴/۰۳\ cm^{۳}$$

خلاصهٔ فصل

- در اثر خمش در تیر، تنش‌های کششی و فشاری ایجاد می‌شود.
- مقادیر تنش خمشی حداکثر در هر مقطع از تیر در تارهای فوقانی و تحتانی از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود.

$$\sigma = \frac{MC}{I}$$

- تنش خمشی حداکثر تیر از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max} C}{I}$$

- تنش مجاز خمشی تیرهای فولادی برابر **MPa** ۱۴۴ در نظر گرفته می‌شود.

$$\sigma_{all} = ۱۴۴ \ MPa$$

- برای تعیین اساس مقطع تیرآهن لازم از رابطهٔ زیر استفاده می‌شود.

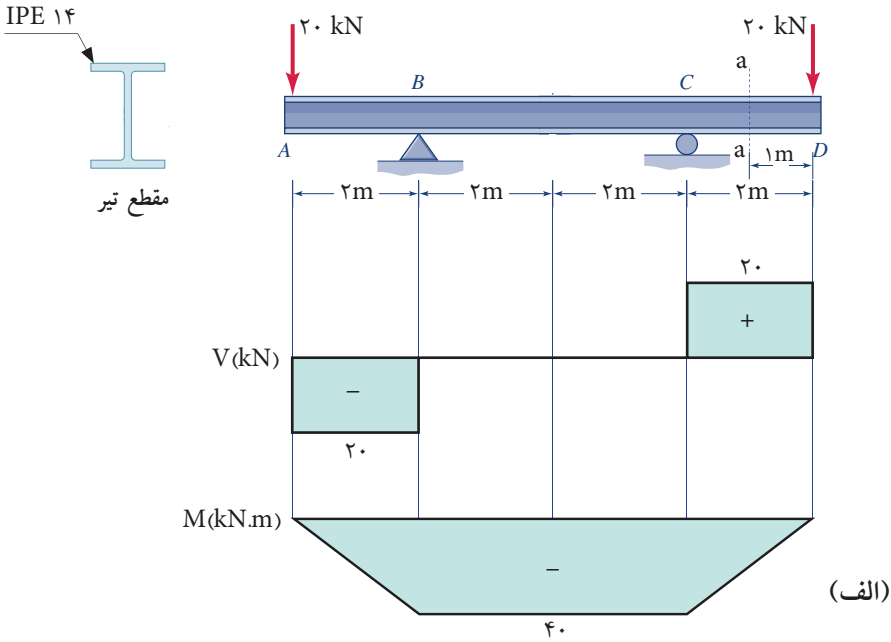
$$S_x \geq \frac{M_{max}}{۱۴۴}$$

خودآزمایی

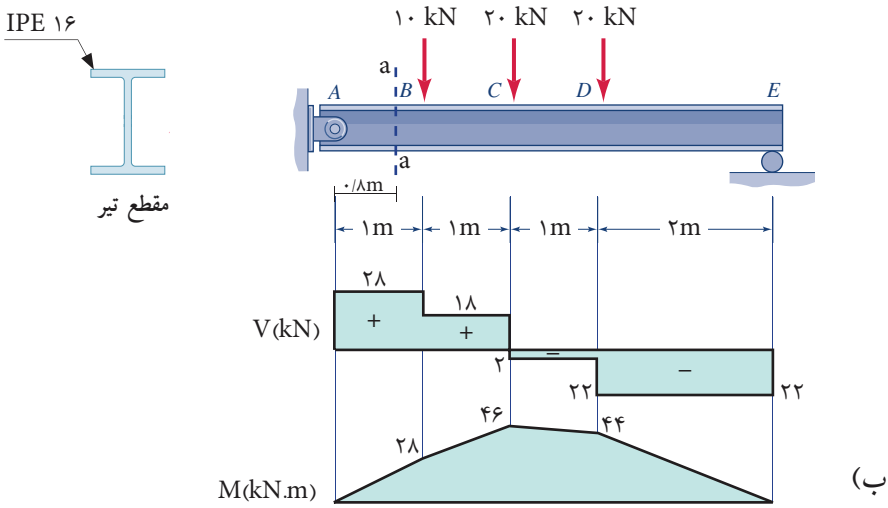
۱- در تیرهای داده‌شده مطلوب‌است:

الف) محاسبهٔ تنش خمشی در مقطع a-a

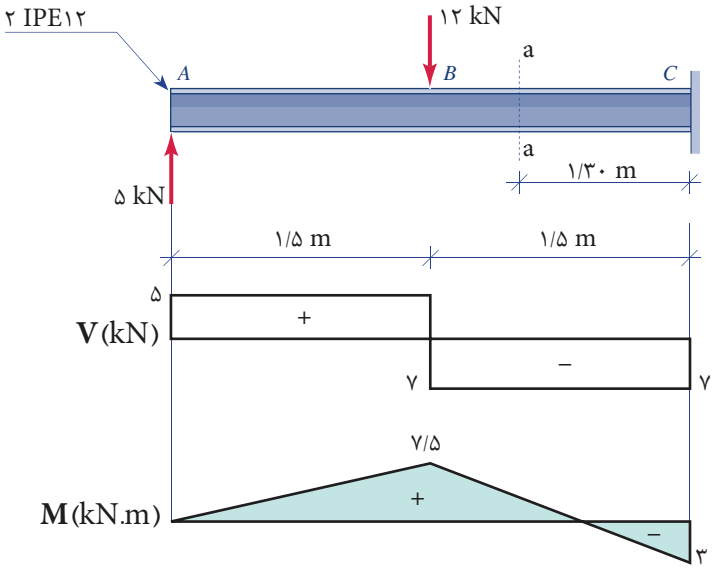
ب) محاسبهٔ تنش خمشی ماکزیمم تیر



(الف)

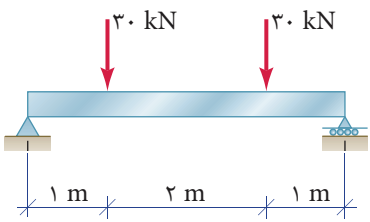


(ب)

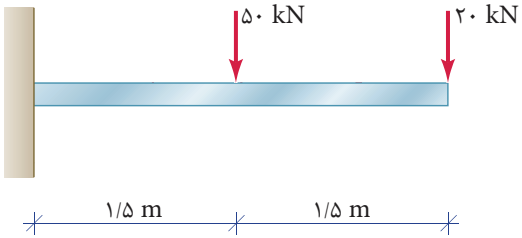


(ج)

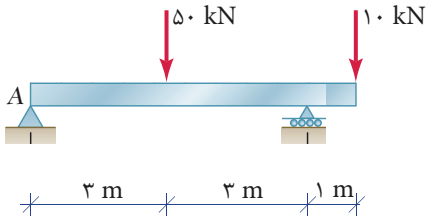
۲- شمارهٔ مقطع هر یک از تیرهای زیر را با استفاده از پروفیل **IPE** تک و دوبل تعیین کنید. (تنش مجاز خمشی فولاد را ۱۴۴ مگاپاسکال در نظر بگیرید.)



(الف)



(ب)

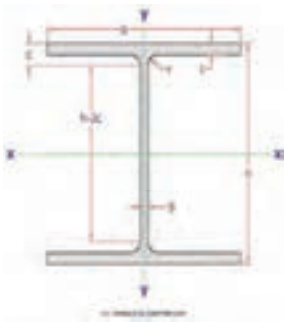


(ج)

ضمیمه:

جداول مشخصات نیم‌رخ‌های فولادی

نیمرخ بال پهن IPB



A= سطح مقطع

G= وزن واحد طول

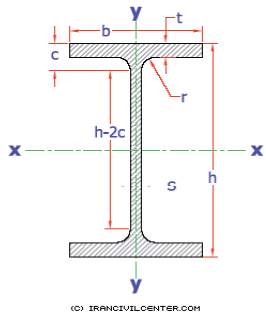
I= ممان اینرسی

S= اساس مقطع

i= شعاع ژیراسیون

IPB	h	b	s	t	r	c	h-2c	A	G	I_x	S_x	i_x	I_y	S_y	i_y	r_T
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	cm^2	kg/m	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm	mm
100	100	100	6	10	12	22	56	26	20.4	450	89.9	4.16	167	33.5	2.53	27.8
120	120	120	6.5	11	12	23	74	34	26.7	864	144	5.04	318	52.9	3.06	33.4
140	140	140	7	12	12	24	92	43	33.7	1510	216	5.93	550	78.5	3.58	38.9
160	160	160	8	13	15	28	104	54.3	42.6	2490	311	6.78	889	111	4.05	44.4
180	180	180	8.5	14	15	29	122	65.3	51.2	3830	426	7.66	1360	151	4.57	49.9
200	200	200	9	15	18	33	134	78.1	61.3	5700	570	8.54	2000	200	5.07	55.5
220	220	220	9.5	16	18	34	152	91	71.5	8090	736	9.43	2840	258	5.59	61
240	240	240	10	17	21	38	164	106	83.2	11260	938	10.3	3920	327	6.08	66.6
260	260	260	10	17.5	24	41.5	177	118	93	14920	1150	11.2	5130	395	6.58	72.2
280	280	280	10.5	18	24	42	196	131	103	19270	1380	12.1	6590	471	7.09	77.6
300	300	300	11	19	27	46	208	149	117	25170	1680	13	8560	571	7.58	83.2
320	320	300	11.5	20.5	27	47.5	225	161	127	30820	1930	13.8	9240	616	7.57	83.1
340	340	300	12	21.5	27	48.5	243	171	134	36660	2160	14.6	9690	646	7.53	82.9
360	360	300	12.5	22.5	27	49.5	261	181	142	43190	2400	15.5	10140	676	7.49	82.7
400	400	300	13.5	24	27	51	298	198	155	57680	2880	17.1	10820	721	7.4	82.3
450	450	300	14	26	27	53	344	218	171	79890	3550	19.1	11720	781	7.33	81.9
500	500	300	14.5	28	27	55	390	239	187	107200	4290	21.2	12620	842	7.27	81.6
550	550	300	15	29	27	56	438	254	199	136700	4970	23.2	13080	872	7.17	81.1
600	600	300	15.5	30	27	57	486	270	212	171000	5700	25.2	13530	902	7.08	80.7
650	650	300	16	31	27	58	534	286	225	210600	6480	27.1	13980	932	6.99	80.2
700	700	300	17	32	27	59	582	306	241	256900	7340	29	14440	963	6.87	79.6
800	800	300	17.5	33	30	63	674	334	262	359100	8980	32.8	14900	994	6.68	78.7
900	900	300	18.5	35	30	65	770	371	291	494100	10980	36.5	15820	1050	6.53	77.9
1000	1000	300	19	36	30	66	868	400	314	644700	12890	40.1	16280	1090	6.38	77

نیمرخ نیم پهن IPE



A= سطح مقطع

G= وزن واحد طول

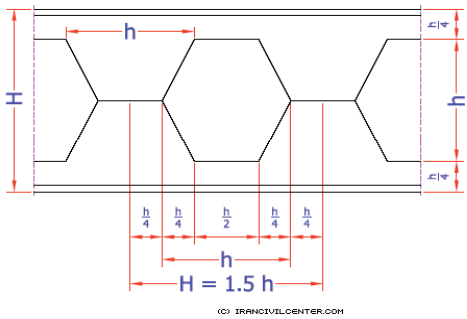
I= ممان اینرسی

S= اساس مقطع

i= شعاع ژیراسیون

IPE	h	b	s	t	r	c	h-2c	A	G	I_x	S_x	i_x	I_y	S_y	i_y	a_1	r_T
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	cm^2	kg/m	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm	mm	mm
80	80	46	3.8	5.2	5	10.2	59	7.64	6	80.1	20	3.24	8.49	3.69	1.05	63	12.2
100	100	55	4.1	5.7	7	12.7	74	10.3	8.1	171	34.2	4.07	15.9	5.79	1.24	79	14.6
120	120	64	4.4	6.3	7	13.3	93	13.2	10.4	318	53	4.9	27.7	8.65	1.45	96	16.9
140	140	73	4.7	6.9	7	13.9	112	16.4	12.9	541	77.3	5.74	44.9	12.3	1.65	112	19.3
160	160	82	5	7.4	9	16.4	127	20.1	15.8	869	109	6.58	68.3	16.7	1.84	129	21.7
180	180	91	5.3	8	9	17	146	23.9	18.8	1320	146	7.42	101	22.2	2.06	145	24
200	200	100	5.6	8.5	12	20.5	159	28.5	22.4	1940	194	8.26	142	28.5	2.24	162	26.4
220	220	110	5.9	9.2	12	21.2	177	33.4	26.2	2770	252	9.11	205	37.3	2.48	179	29.1
240	240	120	6.2	9.8	15	24.8	190	39.1	30.7	3890	324	9.97	284	47.3	2.6	196	31.8
270	270	135	6.6	10.2	15	25.2	219	45.9	36.1	5790	429	11.2	420	62.2	3.02	220	35.6
300	300	150	7.1	10.7	15	25.7	248	53.8	42.2	8360	557	12.5	604	80.5	3.35	245	39.5
330	330	160	7.5	11.5	18	29.5	271	62.6	49.1	11770	713	13.7	788	98.5	3.55	270	42.1
360	360	170	8	12.7	18	30.7	298	72.7	57.1	16270	904	15	1040	123	3.79	294	44.7
400	400	180	8.6	13.5	21	34.5	331	84.5	66.3	23130	1160	16.5	1320	146	3.95	326	47.1
450	450	190	9.4	14.6	21	35.6	378	98.8	77.6	33740	1500	18.5	1680	176	4.12	365	49.4
500	500	200	10.2	16	21	37	426	116	90.7	48200	1930	20.4	2140	214	4.31	404	51.8
550	550	210	11.1	17.2	24	41.2	467	134	106	67120	2440	22.3	2670	254	4.45	442	54
600	600	220	12	19	24	43	514	156	122	92080	3070	24.3	3390	308	4.66	481	56.5

نیمرخ نیم پهن لانه زنبوری شده Cast IPE



A= سطح مقطع

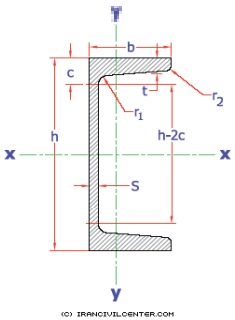
G= وزن واحد طول

I= ممان اینرسی

S= اساس مقطع

Cast IPE	h	H	s	t	A	G	I_{xa}	S_{xa}	F_b	I_{xb}	S_{xb}
	mm	mm	mm	mm	cm^2	kg/m (per 1.5h)	cm^4	cm^3	cm^2	cm^4	cm^3
120	80	120	3.8	5.2	9.16	0.718	206	34.3	6.12	189	31.6
150	100	150	4.1	5.7	12.4	1.21	437	58.2	8.25	403	53.7
180	120	180	4.4	6.3	15.8	1.86	809	89.9	10.6	746	82.8
210	140	210	4.7	6.9	19.7	2.7	1370	131	13.1	1270	121
240	160	240	5	7.4	24.1	3.78	2200	184	16.1	2030	169
270	180	270	5.3	8	28.7	5.06	3330	247	19.1	3070	228
300	200	300	5.6	8.5	34.1	6.7	4910	327	22.9	4540	302
330	220	330	5.9	9.2	39.9	8.63	6990	423	26.9	6460	392
360	240	360	6.2	9.8	46.5	11	9790	544	31.7	9070	504
405	270	405	6.6	10.2	54.8	14.6	14550	719	37	13470	665
450	300	450	7.1	10.7	64.5	19	21010	934	43.2	19410	863
495	330	495	7.5	11.5	75	24.3	29580	1200	50.2	27330	1100
540	360	540	8	12.7	87.1	30.8	40890	1510	58.3	37780	1400
600	400	600	8.6	13.5	102	39.7	58290	1940	67.3	53700	1790
675	450	675	9.4	14.6	120	52.2	85430	2530	77.7	78290	2320
750	500	750	10.2	16	142	68.2	122400	3260	90.5	111800	2980
825	550	825	11.1	17.2	165	86.6	171100	4150	103	155700	3770
900	600	900	12	19	192	110	235300	5230	120	213700	4750

نیمرخ ناودانی UNP



A= سطح مقطع

G= وزن واحد طول

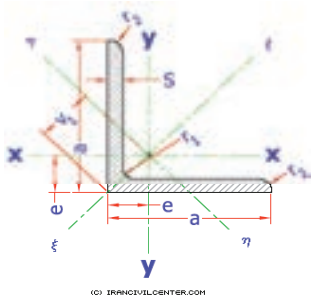
I= ممان اینرسی

S= اساس مقطع

i= شعاع ژیراسیون

UNP	h	b	s	$t=r_1$	r_2	c	h-2c	A	G	I_x	S_x	i_x	I_y	S_y	i_y	e_y	x_M	a_1
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	cm^2	kg/m	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm	cm	cm	mm
30x15	30	15	4	4.5	2	9	12	2.21	1.74	2.53	1.69	1.07	0.38	0.39	0.42	0.52	0.74	--
30	30	33	5	7	3.5	14.5	1	5.44	4.27	6.39	4.26	1.08	5.33	2.68	0.99	1.31	2.22	--
40x20	40	20	5	5.5	2.5	11	18	3.66	2.87	7.58	3.79	1.44	1.14	0.86	0.56	0.67	1.01	--
40	40	35	5	7	3.5	14.5	11	6.21	4.87	14.1	7.05	1.5	6.68	3.08	1.04	1.33	2.32	--
50x25	50	25	5	6	3	12.5	25	4.92	3.86	16.8	6.73	1.85	2.49	1.48	0.71	0.81	1.34	--
50	50	38	5	7	3.5	15	20	7.12	5.59	26.4	10.6	1.92	9.12	3.75	1.13	1.37	2.47	4
60	60	30	6	6	3	12.5	35	6.46	5.07	31.6	10.5	2.21	4.51	2.16	0.84	0.91	1.5	--
65	65	42	5.5	7.5	4	16	33	9.03	7.09	57.5	17.7	2.52	14.1	5.07	1.25	1.42	2.6	16
80	80	45	6	8	4	17	47	11	8.64	106	26.5	3.1	19.4	6.36	1.33	1.45	2.67	28
100	100	50	6	8.5	4.5	18	64	13.5	10.6	206	41.2	3.91	29.3	8.49	1.47	1.55	2.93	42
120	120	55	7	9	4.5	19	82	17	13.4	364	60.7	4.62	43.2	11.1	1.59	1.6	3.03	56
140	140	60	7	10	5	21	97	20.4	16	605	86.4	5.45	62.7	14.8	1.75	1.75	3.37	70
160	160	65	7.5	10.5	5.5	22.5	116	24	18.8	925	116	6.21	85.3	18.3	1.89	1.84	3.56	82
180	180	70	8	11	5.5	23.5	133	28	22	1350	150	6.95	114	22.4	2.02	1.92	3.75	96
200	200	75	8.5	11.5	6	24.5	151	32.2	25.3	1910	191	7.7	148	27	2.14	2.01	3.94	108
220	220	80	9	12.5	6.5	26.5	166	37.4	29.4	26900	245	8.48	197	33.6	2.3	2.14	4.2	122
240	240	85	9.5	13	6.5	28	185	42.3	33.2	3600	300	9.22	248	39.6	2.42	2.23	4.39	134
260	260	90	10	14	7	30	201	48.3	37.9	4820	371	9.99	317	47.7	2.56	2.36	4.66	146
280	280	95	10	15	7.5	32	216	53.3	41.8	6280	448	10.9	399	57.2	2.74	2.53	5.02	160
300	300	100	10	16	8	34	232	58.8	46.2	8030	535	11.7	495	67.8	2.9	2.7	5.41	174
320	320	100	14	17.5	8.75	37	247	75.8	59.5	10870	679	12.1	597	80.6	2.81	2.6	4.82	182
350	350	100	14	16	8	34	283	77.3	60.6	12840	734	12.9	570	75	2.72	2.4	4.45	204
380	380	102	13.5	16	8	33.5	313	80.4	63.1	15760	829	14	615	78.7	2.77	2.38	4.58	227
400	400	110	14	18	9	38	325	91.5	71.8	20350	1020	14.9	846	102	3.04	2.65	5.11	240

نیمرخ نبشی با بال مساوی Angle Equal Leg



A= سطح مقطع

G= وزن واحد طول

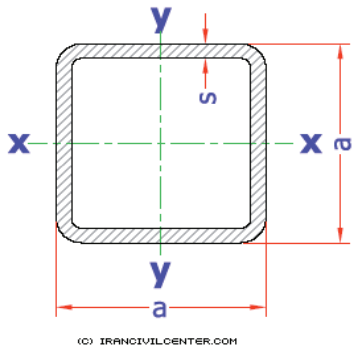
I= ممان اینرسی

S= اساس مقطع

i= شعاع ژیراسیون

a X s	r_1	r_2	A	G	e	w	v_1	$I_x=I_y$	$S_x=S_y$	$i_x=i_y$	J_ξ	i_ξ	J_η	W_η	i_η
mm	mm	mm	cm^2	kg/m	cm	cm	cm	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm	cm	cm^3	cm
20 X 3	3.5	2	1.12	0.88	0.6	1.41	0.85	0.39	0.28	0.59	0.62	0.74	0.15	0.18	0.37
20 X 4	3.5	2	1.45	1.14	0.64	1.41	0.9	0.48	0.35	0.58	0.77	0.73	0.19	0.21	0.36
25 X 3	3.5	2	1.42	1.12	0.73	1.77	1.03	0.79	0.45	0.75	1.27	0.95	0.31	0.3	0.47
25 X 4	3.5	2	1.85	1.45	0.76	1.77	1.08	1.01	0.58	0.74	1.61	0.93	0.4	0.37	0.47
25 X 5	3.5	2	2.26	1.77	0.8	1.77	1.13	1.18	0.69	0.72	1.87	0.91	0.5	0.44	0.47
30 X 3	5	2.5	1.74	1.36	0.84	2.12	1.18	1.41	0.65	0.9	2.24	1.14	0.57	0.48	0.57
30 X 4	5	2.5	2.27	1.78	0.89	2.12	1.24	1.81	0.86	0.89	2.85	1.12	0.76	0.61	0.58
30 X 5	5	2.5	2.78	2.18	0.92	2.12	1.3	2.16	1.04	0.88	3.41	1.11	0.91	0.7	0.57
35 X 3	5	2.5	2.04	1.6	0.96	2.47	1.36	2.29	0.9	1.06	3.63	1.34	0.95	0.7	0.68
35 X 4	5	2.5	2.67	2.1	1	2.47	1.41	2.96	1.18	1.05	4.68	1.33	1.24	0.88	0.68
35 X 5	5	2.5	3.28	2.57	1.04	2.47	1.47	3.56	1.45	1.04	5.63	1.31	1.49	1.01	0.67
35 X 6	5	2.5	3.87	3.04	1.08	2.47	1.53	4.14	1.71	1.04	6.5	1.3	1.77	1.16	0.68
40 X 3	6	3	2.35	1.84	1.07	2.83	1.52	3.45	1.18	1.21	5.45	1.52	1.44	0.95	0.78
40 X 4	6	3	3.08	2.42	1.12	2.83	1.58	4.48	1.56	1.21	7.09	1.52	1.86	1.18	0.78
40 X 5	6	3	3.79	2.97	1.16	2.83	1.64	5.43	1.91	1.2	8.64	1.51	2.22	1.35	0.77
40 X 6	6	3	4.48	3.52	1.2	2.83	1.7	6.33	2.26	1.19	9.98	1.49	2.67	1.57	0.77
45 X 4	7	3.5	3.49	2.74	1.23	3.18	1.75	6.43	1.97	1.36	10.2	1.71	2.68	1.53	0.88
45 X 5	7	3.5	4.3	3.38	1.28	3.18	1.81	7.83	2.43	1.35	12.4	1.7	3.25	1.8	0.87
45 X 6	7	3.5	5.09	4	1.32	3.18	1.87	9.16	2.88	1.34	14.5	1.69	3.83	2.05	0.87
45 X 7	7	3.5	5.86	4.6	1.36	3.18	1.92	10.4	3.31	1.33	16.4	1.67	4.39	2.29	0.87
50 X 4	7	3.5	3.89	3.06	1.36	3.54	1.92	8.97	2.46	1.52	14.2	1.91	3.73	1.94	0.98
50 X 5	7	3.5	4.8	3.77	1.4	3.54	1.98	11	3.05	1.51	17.4	1.9	4.59	2.32	0.98
50 X 6	7	3.5	5.69	4.47	1.45	3.54	2.04	12.8	3.61	1.5	20.4	1.89	5.24	2.57	0.96
50 X 7	7	3.5	6.56	5.15	1.49	3.54	2.11	14.6	4.15	1.49	23.1	1.88	6.02	2.85	0.96
50 X 8	7	3.5	7.41	5.82	1.52	3.54	2.16	16.3	4.68	1.48	25.7	1.86	6.87	3.19	0.96
50 X 9	7	3.5	8.24	6.47	1.56	3.54	2.21	17.9	5.2	1.47	28.1	1.85	7.67	3.47	0.97
55 X 5	8	4	5.32	4.18	1.52	3.89	2.15	14.7	3.7	1.66	23.3	2.09	6.11	2.84	1.07
55 X 6	8	4	6.31	4.95	1.56	3.89	2.21	17.3	4.4	1.66	27.4	2.08	7.24	3.28	1.07
55 X 8	8	4	8.23	6.46	1.64	3.89	2.32	22.1	5.72	1.64	34.8	2.06	9.35	4.03	1.07
55 X 10	8	4	10.1	7.9	1.72	3.89	2.43	26.3	6.97	1.62	41.4	2.02	11.3	4.65	1.06
60 X 5	8	4	5.82	4.57	1.64	4.24	2.32	19.4	4.45	1.82	30.7	2.3	8.03	3.46	1.17
60 X 6	8	4	6.91	5.42	1.69	4.24	2.39	22.8	5.29	1.82	36.1	2.29	9.43	3.95	1.17
60 X 8	8	4	9.03	7.09	1.77	4.24	2.5	29.1	6.88	1.8	46.1	2.26	12.1	4.84	1.16

نیمرخ قوطی مربع Square Tube



A= سطح مقطع

G= وزن واحد طول

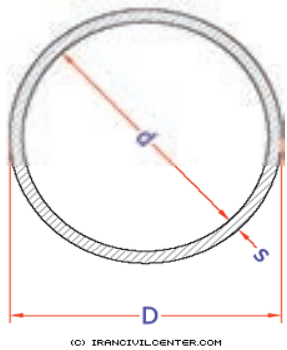
I= ممان اینرسی

S= اساس مقطع

i= شعاع ژیراسیون

a X s	A	G	I	S	i
mm	cm^2	kg/m	cm^4	cm^3	cm
40 X 2.9	4.23	3.32	9.66	4.83	1.51
40 X 4	5.62	4.41	12.1	6.05	1.47
50 X 2.9	5.39	4.23	19.8	7.94	1.92
50 X 4	7.22	5.67	25.4	10.1	1.87
60 X 2.9	6.55	5.14	35.5	11.8	2.33
60 X 4	8.82	6.93	45.9	15.3	2.28
60 X 5	10.8	8.47	54.1	18	2.24
70 X 3.2	8.46	6.64	62.7	17.9	2.72
70 X 4	10.4	8.18	75.3	21.5	2.69
70 X 5	12.8	10	89.6	25.6	2.65
80 X 3.6	10.9	8.55	106	26.4	3.11
80 X 4.5	13.4	10.5	127	31.7	3.08
80 X 5.6	16.4	12.9	151	37.6	3.03
90 X 3.6	12.3	9.68	153	34	3.52
90 X 4.5	15.2	11.9	185	41	3.48
90 X 5.6	18.6	14.6	220	49	3.44
100 X 4	15.2	12	233	46.6	3.91
100 X 5	18.8	14.7	281	56.3	3.87
100 X 6.3	23.3	18.3	339	67.8	3.82
120 X 4.5	20.5	16.1	452	75.3	4.7
120 X 5.6	25.1	19.7	544	90.6	4.65
120 X 6.3	28	22	598	99.7	4.62
140 X 5.6	29.6	23.3	885	126	5.47
140 X 7.1	37	29	1080	154	5.4
140 X 8.8	45	35.3	1280	182	5.33
160 X 6.3	37.7	29.6	1460	183	6.23
160 X 8	47	36.9	1780	222	6.15
160 X 10	57.4	45.1	2100	263	6.05
180 X 6.3	42.8	33.6	2120	236	7.05
180 X 8	53.4	41.9	2590	288	6.97
180 X 10	65.4	51.4	3090	343	6.87
200 X 6.3	47.8	37.5	2960	296	7.86

نیمرخ لوله Round Tube



A= سطح مقطع

G= وزن واحد طول

I= ممان اینرسی

S= اساس مقطع

i= شعاع ژیراسیون

D X s	A	G	I	S	i_x
mm	cm^2	kg/m	cm^4	cm^3	cm
21.3 X 2	1.21	0.962	0.571	0.536	0.686
21.3 X 2.6	1.53	1.21	0.681	0.639	0.668
21.3 X 3.2	1.82	1.44	0.768	0.722	0.65
26.9 X 2	1.56	1.24	1.22	0.907	0.883
26.9 X 2.6	1.98	1.57	1.48	1.1	0.864
26.9 X 3.2	2.38	1.89	1.7	1.27	0.846
33.7 X 2.6	2.54	2.01	3.09	1.84	1.1
33.7 X 3.2	3.07	2.42	3.6	2.14	1.08
33.7 X 4	3.73	2.95	4.19	2.49	1.06
42.4 X 2.6	3.25	2.57	6.46	3.05	1.41
42.4 X 3.2	3.94	3.11	7.62	3.59	1.39
42.4 X 4	4.83	3.81	8.99	4.24	1.36
48.3 X 2.6	3.73	2.95	9.78	4.05	1.62
48.3 X 3.2	4.53	3.59	11.6	4.8	1.6
48.3 X 4	5.57	4.41	13.8	5.7	1.57
60.3 X 2.9	5.23	4.14	21.6	7.16	2.03
60.3 X 3.6	6.41	5.07	25.9	8.58	2.01
60.3 X 4	7.07	5.59	28.2	9.34	2
60.3 X 5	8.69	6.82	33.5	11.1	1.96
76.1 X 2.9	6.67	5.82	44.7	11.8	2.59
76.1 X 3.6	8.2	6.49	54	14.2	2.57
76.1 X 4	9.06	7.17	59.1	15.5	2.55
76.1 X 5	11.2	8.77	70.9	18.6	2.52
88.9 X 3.2	8.62	6.81	79.2	17.8	3.03
88.9 X 3.6	9.65	7.57	87.9	19.8	3.02
88.9 X 4	10.7	8.43	96.3	21.7	3
88.9 X 5	13.2	10.3	116	26.2	2.97
88.9 X 6.3	16.3	12.9	140	31.5	2.93
101.6 X 3.6	11.1	8.76	133	26.2	3.47
101.6 X 4.5	13.7	10.7	162	31.9	3.44
101.6 X 5.6	16.9	13.2	195	38.4	3.4

منابع و مآخذ:

۱- خاکی، علی، ایستایی ساختمان، شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران

۲- فرشاد، مهدی، مکانیک مهندسی - جلد اول: استاتیک، انتشارات پژوهش

۳- مریام، ج - ال، استاتیک، ترجمهٔ حمید لعل‌خو

۴- ENGINEERING MECHANICS STATICS,
J.L.MERIAM&L.G.KRAIGE, SEVENTH EDITION

۵- STATICS AND MECHANICS OF MATERIALS,
Ferdinand P.Beer&E.Russell Johnston, Jr.&John T.DeWolf&David F.Mazurek

۶- MECHANICS OF MATERIALS, Third Edition
ROY R. CRAIG, JR.

۷- فرشاد، مهدی، تاریخ مهندسی در ایران، انتشارات میرماه

۸- و سایت‌های مختلف اینترنتی مرتبط با موضوع