



دانشگاه پیام نور



دانشگاه پیام نور



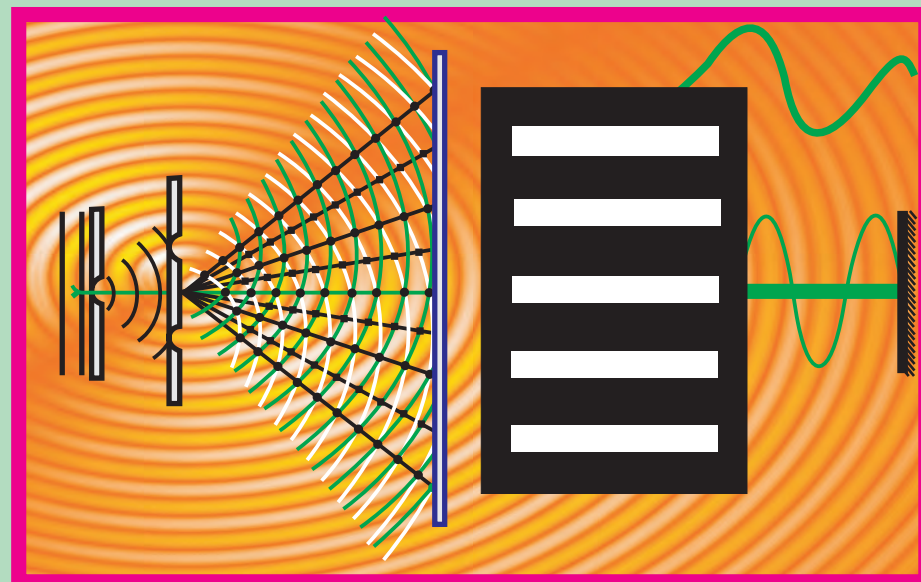
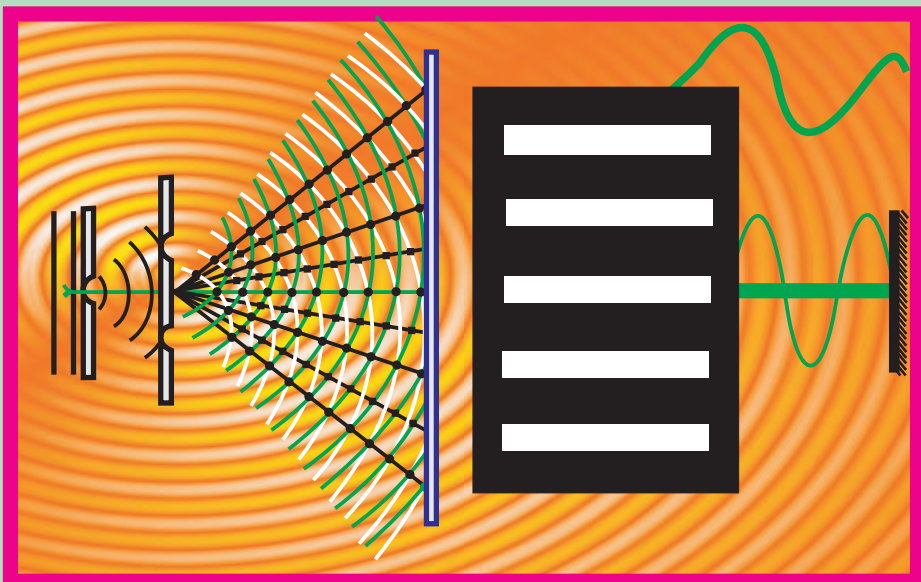
دانشگاه پیام نور

فیزیک پایه ۳

سیداحمد بابانژاد دکتر علی بهاری

فیزیک پایه ۳

سیداحمد بابانژاد دکتر علی بهاری



۱۵۰۳

(۱/۳۳)

دانشگاه پیام نور ۱۵۰۳
گروه فیزیک (۱/۳۳)



فیزیک پایه ۳

(رشته فیزیک)

سیداحمد بابانژاد دکتر علی بهاری

سرشناسه	بابانژاد، احمد، ۱۳۳۰ -
عنوان و نام پدیدآور	فیزیک پایه ۳ (رشته فیزیک)/ احمد بابانژاددهکی، علی بهاری پنبه چوله.
مشخصات نشر	تهران: دانشگاه پیام نور، ۱۳۸۷.
مشخصات ظاهری	ده، ۲۸۸ ص: مصور، نمودار.
فروست	دانشگاه پیام نور؛ ۱۵۰۳. گروه فیزیک؛ ۱/۳۳.آ.
شابک	978-964-387-535-0:
وضعیت فهرست نویسی	فیبا
یادداشت	کتابنامه .
موضوع	فیزیک -- آموزش برنامه‌ای
موضوع	فیزیک -- راهنمای آموزشی (عالی)
موضوع	فیزیک -- مسائل، تمرین‌ها و غیره (عالی)
شناسه افزوده	بهاری، علی، ۱۳۴۵ -
شناسه افزوده	دانشگاه پیام نور
رده بندی کنگره	۱۳۸۷: ۹ف۱۶ب/۲/۲۱QC
رده بندی دیویی	۵۳۰/۰۷۶:
شماره کتابشناسی ملی	۱۶۲۸۶۱۰:



فیزیک پایه ۳

سید احمد بابانژاددهکی دکتر علی بهاری

ویراستار علمی: دکتر امیرعباس صبوری

حروفچینی و نمونه خوانی: مدیریت تولید مواد و تجهیزات آموزشی

طراح جلد: اشرف شوریایی

لیتوگرافی، چاپ و صحافی: انتشارات دانشگاه پیام نور

تعداد: * * *

چاپ: ۱۳۸۷،.....

قیمت: * * *

کلیه حقوق برای دانشگاه پیام نور محفوظ است.

بسم الله الرحمن الرحيم

پیشگفتار ناشر

کتاب‌های دانشگاه پیام نور حسب مورد و با توجه به شرایط مختلف یک درس در یک یا چند رشته دانشگاهی، به صورت کتاب درسی، متن آزمایشگاهی، فرادرسی، و کمک‌درسی چاپ می‌شوند.

کتاب درسی ثمره کوشش‌های علمی صاحب اثر است که براساس نیازهای درسی دانشجویان و سرفصل‌های مصوب تهیه و پس از داوری علمی، طراحی آموزشی، و ویرایش علمی در گروه‌های علمی و آموزشی، به چاپ می‌رسد. پس از چاپ ویرایش اول اثر، با نظرخواهی‌ها و داوری علمی مجدد و با دریافت نظرهای اصلاحی و متناسب با پیشرفت علوم و فناوری، صاحب اثر در کتاب تجدیدنظر می‌کند و ویرایش جدید کتاب با اعمال ویرایش زبانی و صوری جدید چاپ می‌شود.

متن آزمایشگاهی (م) راهنمایی است که دانشجویان با استفاده از آن و کمک استاد، کارهای عملی و آزمایشگاهی را انجام می‌دهند.

کتاب‌های فرادرسی (ف) و **کمک‌درسی** (ک) به منظور غنی‌تر کردن منابع درسی دانشگاهی تهیه و بر روی لوح فشرده تکثیر می‌شوند و یا در وبگاه دانشگاه قرار می‌گیرند.

مدیریت تولید مواد و تجهیزات آموزشی

فهرست

نه	پیشگفتار
۱	فصل ۱. موج در محیط کشسان
۱	۱-۱ مقدمه
۱	۲-۱ امواج مکانیکی
۳	۳-۱ گره‌ها موج ساده- معادله حرکت
۶	۴-۱ اصل برهم نهی
۸	۵-۱ بررسی سرعت موج
۸	۶-۱ تعیین معادله سرعت موج‌های عرضی
۱۰	۷-۱ سرعت انتشار موج طولی
۱۳	۸-۱ انرژی در حرکت موجی
۱۶	۹-۱ شدت موج
۱۶	۱۰-۱ رابطه بین شدت موج و فاصله
۱۷	۱۱-۱ ترکیب یا تداخل امواج
۲۰	۱۲-۱ زنش یا ضربان (تداخل زمانی امواج)
۲۲	۱۳-۱ بازتابش موج
۲۴	۱۴-۱ امواج ساکن یا ایستاده
۲۹	۱۵-۱ تشدید
۳۱	۱۶-۱ مثال‌های حل شده
۳۳	۱۷-۱ مسائل
۳۵	فصل دوم. دما
۳۵	۱-۲ مقدمه
۳۶	۲-۲ دما، تعادل گرمایی و قانون صفرم ترمودینامیک

۳۸	۳-۲ دماسنجی یا اندازه‌گیری دما
۴۳	۴-۲ مقیاس‌های دمایی
۴۵	۵-۲ اثر تغییر دما
۴۵	۶-۲ انبساط طولی، سطحی و حجمی
۴۸	۷-۲ مثال‌های حل شده
۴۹	۸-۲ مسائل
۵۱	فصل ۳. نظریه جنبشی گازها
۵۱	۱-۳ مقدمه
۵۱	۲-۳ قانون عمومی گازها
۵۵	۳-۳ توزیع ماکسولی
۵۹	۴-۳ مسافت آزاد میانگین
۶۲	۵-۳ تعیین پارامتر تابع توزیع ماکسول-بولتزمن
۶۵	۶-۳ انبساط گازها
۶۶	۱-۶-۲ قانون بویل-ماریوت
۷۰	۷-۳ معادله گازهای حقیقی
۷۱	۸-۳ مثال حل شده
۷۱	۹-۳ مسائل
۷۵	فصل ۴. گرما
۷۵	۱-۴ مقدمه
۷۶	۲-۴ واحدهای گرما
۷۶	۱-۲-۴ کالری
۷۶	۲-۲-۴ بی تی یو (BTU)
۷۶	۳-۲-۴ ژول
۷۶	۳-۴ ظرفیت گرمایی
۷۷	۱-۳-۴ ضریب اتمیسیته گازها
۷۹	۴-۴ رابطه گرما و اصول تعادل گرمایی
۸۳	۵-۴ تغییر حالت مواد جامد
۸۴	۶-۴ فرآیند ایستاوار بی‌دررو
۸۸	۷-۴ انتقال گرما
۸۹	۱-۷-۴ رسانش گرما
۹۲	۲-۷-۴ همرفت
۹۴	۳-۷-۴ تابش
۹۵	۸-۴ مثال‌های حل شده
۹۸	۹-۴ مسائل
۱۰۱	فصل پنجم. قانون اول ترمودینامیک
۱۰۱	۱-۵ مقدمه

۱۰۱	۲-۵ اصل اول ترمودینامیک
۱۰۱	۳-۵ کار در فرآیندهای ایستاوار
۱۱۰	۴-۵ نمودار فشار-حجم
۱۱۱	۵-۵ فرآیندهای هم‌حجم
۱۱۳	۶-۵ کار ترمودینامیکی به شکل مسیر بستگی دارد
۱۲۲	۷-۵ مثال‌های حل شده
۱۳۰	۸-۵ مسائل

فصل ششم. ماشین‌های گرمایی

۱۳۳	۱-۶ قانون دوم ترمودینامیک و ماشین کارنو
۱۳۹	۲-۶ ماشین بخار
۱۴۴	۳-۶ ماشین‌های سرمایی
۱۵۲	۴-۶ مثال‌های حل شده
۱۵۸	۵-۶ مسائل

فصل هفتم. آنتروپی

۱۶۱	۱-۷ مقدمه
۱۶۲	۲-۷ به سوی آنتروپی
۱۶۴	۳-۷ تغییر آنتروپی کل در مخلوط دو سیستم
۱۷۲	۴-۷ نمودارهای آنتروپی-دما
۱۸۱	۵-۷ قانون سوم ترمودینامیک
۱۸۲	۶-۷ مثال‌های حل شده
۱۸۵	۷-۷ مسائل

فصل هشتم. نورشناسی (هندسی)

۱۸۷	۱-۸ مقدمه
۱۸۷	۲-۸ اندازه‌گیری سرعت نور
۱۸۸	۳-۸ سرعت نور از نگاه ناظرهای متفاوت
۱۹۰	۴-۸ رفتار نور در عبور از محیط‌های متفاوت
۱۹۷	۱-۴-۸ محیط پاشنده و غیرپاشنده
۱۹۹	۲-۴-۸ اصل هویگنس
۲۰۱	۵-۸ آینه‌های کروی
۲۰۳	۶-۸ عدسی‌های نازک (محیط‌های کروی شفاف)
۲۰۸	۷-۸ مثال‌های حل شده
۲۱۰	۸-۸ مسائل

فصل نهم. نورشناسی موجی (تداخل)

۲۱۹	۱-۹ مقدمه
-----	-----------

۲۱۹	۲-۹ برهم نهی امواج
۲۲۲	۳-۹ آزمایش یانگ
۲۳۱	۴-۹ تداخل سنج‌ها
۲۳۱	۱-۴-۹ تداخل سنج فرنل
۲۳۴	۲-۴-۹ منشور دوتایی فرنل
۲۳۵	۳-۴-۹ آینه لویده
۲۳۶	۴-۴-۹ تداخل سنج مایکلسون
۲۴۶	۵-۹ مثال‌های حل شده
۲۴۹	۶-۹ مسائل
۲۵۳	فصل دهم. نورشناسی موجی (پراش)
۲۵۳	۱-۱۰ مقدمه
۲۵۴	۲-۱۰ پراش پرتوهای نوری
۲۵۵	۳-۱۰ پراش از یک شکاف
۲۵۸	۴-۱۰ پراش فرنل و پراش فرانیهوفر
۲۶۸	۵-۱۰ ترکیب تداخل و پراش
۲۷۰	۶-۱۰ توان تفکیک‌سازی دستگاه‌های روبشی
۲۷۴	۷-۱۰ مثال‌های حل شده
۲۸۲	۸-۱۰ مسائل
۲۸۵	واژگان انگلیسی به فارسی
۲۸۶	واژگان فارسی به انگلیسی

پیشگفتار

کتابی که هم اکنون پیش روی شماست کتاب فیزیک پایه ۳ است که برای دانشجویان رشته فیزیک دانشگاه پیام نور نگاشته شده است. از آنجا که برای پوشش دادن به سرفصل‌های مصوب شورای انقلاب فرهنگی در درس فیزیک پایه ۳ دانشجویان بناچار می‌بایست از دو جلد کتاب استفاده می‌کردند و برای روان‌تر شدن مطالب به جهت سیستم خاص دانشگاه پیام‌نور که مبتنی بر کتاب‌محوری است تصمیم به نگارش این کتاب گرفتیم.

این کتاب که در ۱۰ فصل ارائه شده است تمام سرفصل‌های مورد نظر را در بر می‌گیرد. در تألیف این کتاب سعی کردیم در داخل هر فصل تعدادی مثال حل شده برای یادگیری راحت‌تر مطالب آورده شود. علاوه بر آن در پایان هر فصل تعدادی مسائل هم به عنوان تمرین آخر فصل آورده شده است.

اگرچه برای نگارش این کتاب تلاش شد تا در حد امکان اشکالات به حداقل برسد اما مطمئن هستیم بدون اشکال نخواهد بود. لذا ضمن پوزش از وجود چنین اشکالاتی از خوانندگان گرامی درخواست می‌کنیم تا اشکالات احتمالی را به ما گوشزد نمایند تا در اسرع وقت و در چاپ‌های بعدی مرتفع شود.

درخاتمه بر خود لازم می‌دانیم تا از همکار محترم و فرزانه جناب آقای دکتر صبوری دودران که زحمت ویراستاری کتاب را به عهده گرفتند و با رهنمودهای مفید خود موجبات رفع بسیاری از نارسایی‌های کتاب شدند خالصانه تشکر و سپاسگزاری نماییم. همچنین از سرکار خانم مرادی کارشناس محترم گروه فیزیک که با زحمت زیاد

صفحه‌آرایی و تایپ کتاب را به انجام رساندند صمیمانه سپاسگزاریم. از کلیه همکاران دایره تدوین و انتشارات دانشگاه به ویژه همکاران محترم جناب آقای اکبری و جناب آقای حمزه‌ای تشکر و قدردانی می‌نماییم. برای همه این عزیزان آرزوی سلامتی و توفیق داریم.

سید احمد بابانژاد و علی بهاری

آذر ماه ۸۷

Payame Noor University

فصل اول

موج در محیط کشسان

۱-۱ مقدمه

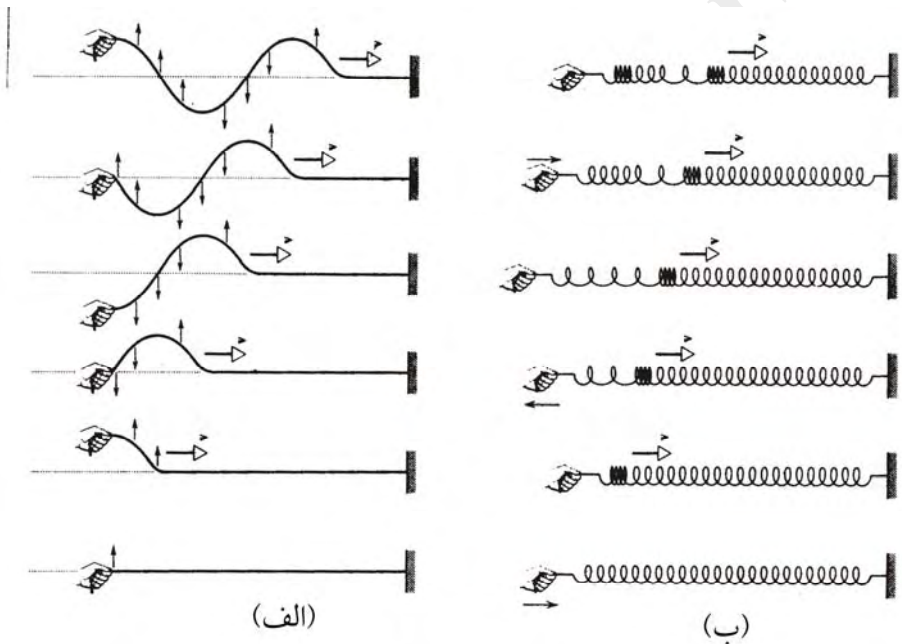
بخش مهمی از فیزیک مربوط به بررسی راه‌های انتقال انرژی از یک سیستم به دیگر سیستم‌ها است. یکی از راه‌های انتقال انرژی پدیدهٔ برخورد است که در آن سیستم‌ها در اثر برخورد رو در رو با یکدیگر با هم انرژی مبادله می‌کنند و بدین طریق انرژی انتقال می‌یابد. ولی این روش تنها روش انتقال انرژی نیست بلکه روش عام‌تر انتقال انرژی حرکت موجی است. در این پدیده بدون این که ماده انرژی را با خود حمل کند با جابجایی تغییر شکل یا اغتشاش ایجاد شده در محیط انرژی از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر انتقال می‌یابد. در واقع این تغییر شکل است که وظیفهٔ انتقال انرژی را به جای ماده انجام می‌دهد.

هدف از موج یا حرکت موجی هرگونه تغییر شکل یا اغتشاشی است که در محیط به صورت تناوبی تکرار شود. عامل ایجاد این تغییر شکل می‌تواند حرکت تناوبی ماده در یک محیط کشسان باشد نظیر صوت که در اثر ارتعاشات سریع ماده ایجاد می‌گردد (موج مکانیکی) و یا تغییرات زمانی کمیتی برداری به نام میدان که موج الکترومغناطیسی را ایجاد می‌کند و برای انتشار آن نیازی به محیط مادی نیست. نور، امواج رادیویی و ... نمونه‌هایی از این امواج هستند.

۲-۱ امواج مکانیکی

همانطور که اشاره شد امواجی نظیر صوت یا اغتشاش ایجاد شده در سطح آب برای ایجاد و انتشار نیاز به محیطی مادی دارند در حالی که امواج رادیویی و یا نور برای

انتشار نیازمند محیط مادی نیستند. این نوع تقسیم‌بندی امواج از نقطه نظر ماهیت حرکت موجی یا خواص فیزیکی آن است. هدف ما در این بخش بررسی امواج مکانیکی می‌باشد. البته تقسیم‌بندی دیگری نیز برای حرکت‌های موجی می‌توان در نظر گرفت. به عنوان مثال از نظر مقایسهٔ راستای انتشار موج و ارتعاش محیط کَشسان نیز می‌توان امواج را دسته‌بندی کرد. چنانچه این دو راستا بر هم عمود باشند موج عرضی شکل ۱-۱ (الف) و هرگاه راستای انتشار موج بر راستای ارتعاش محیط منطبق باشد موج طولی شکل ۱-۱ (ب) نامیده می‌شود.



شکل ۱-۱. الف) در یک موج عرضی ارتعاشات ذرات محیط (ریسمان کشیده شده) بر راستای انتشار موج عمودند. ب) در یک موج طولی ذرات محیط (فنر کشیده شده) در همان راستای انتشار موج ارتعاش می‌کنند.

همچنان که در شکل‌های (۱-۱ الف) و (۱-۱ ب) مشاهده می‌شود جابجایی هر نقطه از محیط کَشسان به ترتیب به سایر نقاط محیط انتقال یافته و در مجموع تغییر

شکلی که از این فرآیند ایجاد می‌شود در طول محیط انتشار می‌یابد بدون این که ذرات محیط با تغییر شکل انتقال یابند.

۳-۱ گره‌ها موج ساده- معادله حرکت

هرگاه در شکل ۱-۱ یکی از حلقه‌های فنر (شکل ۱-۱ الف) و یا یکی از نقاط ریسمان (شکل ۱-۱ ب) را در نظر بگیریم و حرکت آن را دنبال کنیم، تغییر شکل ایجاد شده در اثر جابجایی این نقاط موسوم به تپ و یا یک موج ساده است. نوع حرکت هر نقطه از این محیط‌های کشسان با دیگر نقاط یکسان است و می‌توان تغییرات زمانی جابجایی هر نقطه از این محیط‌ها را که به عنوان معادله حرکت موج ساده از آن یاد می‌شود به صورت زیر نوشت:

$$y(x, t) = y_m \sin(2\pi vt) \quad (1-1)$$

که $y(x, t)$ بیانگر مکان ذرات محیط کشسان، y_m دامنه و V بسامد موج می‌باشد. نقطه دیگری از این محیط که به فاصله $x = Vt$ از مبدا و در جهت حرکت موج قرار دارد همین نوع حرکت را در $t = \frac{x}{V}$ ثانیه دیرتر از مبدا خواهد داشت (شکل ۲-۱). پس معادله حرکت این نقطه به صورت زیر خواهد بود:

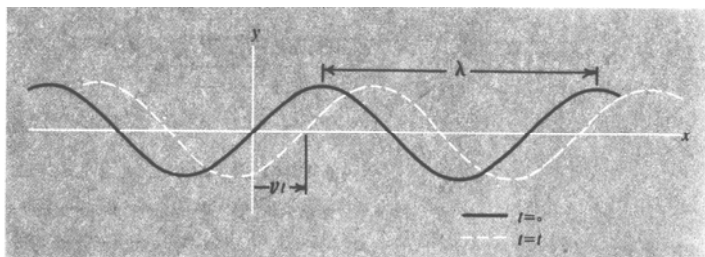
$$y(x, t) = y_m \sin 2\pi v(t - t_0) = y_m \sin 2\pi v(t - \frac{x}{V}) \quad (2-1)$$

$$y(x, t) = y_m \sin 2\pi (\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) \quad (3-1)$$

که در آن از رابطه $\lambda = VT = \frac{V}{v}$ استفاده شده است. به $y(x, t)$ در معادله (۳-۱) تابع موج گفته می‌شود.

در این معادله عبارت $(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda})$ فاز حرکت و عبارت $(\frac{2\pi x}{\lambda})$ فاز اولیه نامیده می‌شوند. اگر فاز حرکت را در نقطه $x = x_1$ و در لحظه t برابر ϕ بنامیم، خواهیم داشت:

$$\varphi_1 = \frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x_1}{\lambda} \quad (4-1)$$



شکل ۲-۱. در لحظه $t=0$ ریسمان دارای شکل $y = y_m \sin(2\pi x/\lambda)$ است (خط پر). در لحظه دیگر (t) موج سینوسی به اندازه $x = vt$ به طرف راست حرکت کرده است و شکل ریسمان از معادله $y = y_m \sin 2\pi(x - vt)/\lambda$ به دست می‌آید.

و در همان مکان و یک ثانیه بعد فاز حرکت برابر خواهد شد با:

$$\varphi_2 = \frac{2\pi(t+1)}{T} - \frac{2\pi x_1}{T} \quad (5-1)$$

که در آن صورت تغییر فاز برابر است با:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{T} \quad (6-1)$$

به $\omega = 2\pi/T$ که در واقع تغییر فاز در یک نقطه پس از یک ثانیه است، بسامد زاویه‌ای گفته می‌شود و یکای آن rad s^{-1} است.

حال اگر در همان مکان x و در لحظه $t = t_1$ فاز حرکت را φ'_1 فرض کنیم خواهیم داشت:

$$\varphi'_1 = \frac{2\pi t_1}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda} \quad (7-1)$$

و در همان لحظه و در فاصله یک متری از مکان قبلی، فاز حرکت برابر خواهد شد با:

$$\phi'_r = \frac{2\pi t_1}{T} - \frac{2\pi(x+1)}{\lambda} \quad (8-1)$$

که در این صورت اختلاف فاز برابر خواهد شد با:

$$\Delta\phi' = \phi'_r - \phi'_l = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (9-1)$$

به $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ که اختلاف فاز دو نقطه از محیط کشسان و به فاصله یک متر از هم و در یک لحظه است عدد موج گفته می‌شود و یکای آن m^{-1} است. حال با استفاده از دو کمیت ω و k معادله (۳-۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$y(x, t) = y_m \sin(\omega t - k x) \quad (10-1)$$

و هرگاه نقطه مورد نظر در خلاف جهت حرکت موج در نظر گرفته شود معادله (۱۰-۱) به صورت زیر در می‌آید:

$$y(x, t) = y_m \sin(\omega t + k x) \quad (11-1)$$

خودآزمایی ۱: رابطه $V = \frac{\omega}{k}$ را به دست آورید.

خودآزمایی ۲: رابطه (۱۱-۱) را ثابت کنید.

مثال ۱: اگر معادله موجی به صورت $y(x, t) = 2 \sin(100\pi t - \frac{4\pi x}{25})$ باشد y و x برحسب سانتی‌متر و t برحسب ثانیه است) آنگاه دامنه، طول موج، بسامد، سرعت و بسامد زاویه‌ای را تعیین کنید.

حل: معادله موج در حالت کلی را نوشته و از مقایسه معادله داده شده با این معادله کمیت‌های مورد نظر را تعیین می‌کنیم.

$$y(x, t) = y_m \sin(\omega t - k x) = y_m \sin(2\pi \nu t - \frac{2\pi x}{\lambda})$$

$$y(x, t) = 2 \sin\left(100\pi t - \frac{4\pi x}{25}\right)$$

$$y_m = 2 \text{ cm}$$

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{4\pi x}{25} \Rightarrow \lambda = 12.5 \text{ cm}$$

$$2\pi vt = 100\pi t \Rightarrow v = 50 \text{ Hz}$$

$$V = v\lambda = 12.5 \text{ cm} \times \frac{50}{s} = 625 \frac{\text{cm}}{s}$$

$$\omega t = 100\pi t \Rightarrow \omega = 100\pi \text{ rad/s}$$

اگر نقطه‌ای از محیط که مبداء انتشار موج است ($y = 0$) در لحظه $t = 0$ دارای بیشینه جابجایی نباشد، لازم است تا ثابت فاز (ϕ) را طوری در نظر بگیریم که به ازای آن، معادله موج مکان واقعی این نقطه را از وضع تعادل معین نماید. پس در این حالت معادله حرکت موج ساده به صورت زیر در می‌آید:

$$y(x, t) = y_m \sin(\omega t \pm kx + \phi) \quad (12-1)$$

۴-۱ اصل برهم‌نهی

در یک محیط کشسان در یک زمان معین می‌توان تعداد زیادی موج را ردیابی کرد. مثلاً هرگاه در چهار گوشه یک اتاق چهار گیرنده رادیویی قرار دهیم و این چهار گیرنده را بر روی چهار ایستگاه فرستنده تنظیم کنیم، می‌بینیم هر یک از این چهار رادیو امواج یک فرستنده معین را آشکار کرده و برنامه آنها را پخش می‌کنند. بدین ترتیب در این اتاق موج‌های آنتن بدون این که مزاحمتی برای هم ایجاد نمایند، در حال انتشار و پخش هستند. در این شرایط هر ذره از محیط در هر لحظه تحت تأثیر چندین موج به طور جداگانه خواهد بود و حرکت کلی ذره جمع برداری تمام حرکت‌هایی است که هر یک از این موج‌ها در ذره ایجاد می‌کنند یعنی تغییر مکان هر ذره در هر نقطه جمع برداری تغییر مکان‌هایی خواهد بود که هر یک از این موج‌ها در ذره ایجاد می‌کنند. این پدیده به

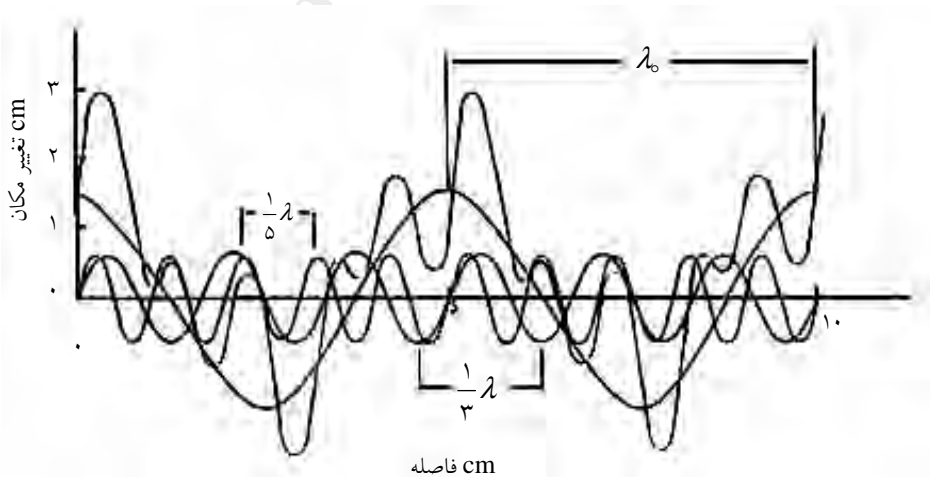
۷ موج در محیط کشسان

اصل برهم نهی موسوم است. بنابراین در چنین شرایطی می توان گفت حرکت موجی هر نقطه از محیط کشسان، مجموع چندین حرکت موجی و به عبارت دیگر نتیجه حرکت موجی هر نقطه، یک موج مرکب است. در این صورت می توان موج مرکب حاصل را به موج های ساده سینوسی تجزیه کرد (شکل ۱-۳). این عمل عکس اصل برهم نهی و موسوم به قضیه فوریه است که در حقیقت بیان دیگری از اصل برهم نهی می باشد.

$$Y(t) = y_0 + y_1 \sin \omega t + y_2 \sin 2\omega t + \dots \quad (13-1)$$

$$+ y'_1 \cos \omega t + y'_2 \cos 2\omega t + \dots$$

باید متذکر شد که اصل برهم نهی فقط در محیط های کشسان صادق است. منظور از محیط کشسان، محیطی است که بین عامل تغییر شکل دهنده محیط و تغییر شکل رابطه ای خطی وجود داشته باشد یعنی محیط تابع قانون هوک باشد. همچنین وقتی که تغییر شکل خیلی بزرگ باشد، این اصل صادق نیست و هرگاه کشسانی محیط تابع قانون هوک نباشد سرعت انتشار موج می تواند تابع بسامد موج و شکل موج باشد. به چنین محیطی، محیط پاشنده موج می گویند نظیر منشور برای عبور امواج نوری که در فصل اپتیک به آن اشاره خواهد شد.



شکل ۱-۳. یک موج مرکب و سه مؤلفه آن.

۵-۱ بررسی سرعت موج

همانطور که در فصل مربوط به حرکت نوسانی اشاره شد، چنانچه ذره‌ای از یک محیط کشسان تحت تأثیر عامل تناوبی شروع به جابجایی نوسانی کند، تغییر شکل ایجاد شده در محیط با سرعت ثابت در محیط به حرکت در می‌آید در حالی که ذره مورد بحث دارای سرعتی متغیر و به صورت تابعی سینوسی از زمان خواهد بود. به سرعت انتشار تغییر شکل (موج) سرعت فاز موج گفته می‌شود که وابسته به ویژگی‌های فیزیکی محیط کشسان است. این ویژگی‌ها عبارتند از خاصیت کشسانی و خاصیت لختی محیط که در مورد موج‌های مختلف و محیط‌های متفاوت این خاصیت‌ها به صورت نمادهای متفاوت نمایش داده می‌شوند. مثلاً در مورد یک موج طولی نظیر صوت، سرعت انتشار صوت در گازها تابع مدول حجمی β و چگالی گاز ρ (معادله ۱۴-۱) و در جامدی به شکل میله طویل، سرعت صوت وابسته به خاصیت کشسانی و چگالی میله (معادله ۱۵-۱) و یا سرعت انتشار موج عرضی در یک تار کشیده تابعی از نیروی کشسانی F و چگالی طولی تار μ می‌باشد (معادله ۱۶-۱).

$$v = \sqrt{\frac{\beta}{\rho}} \quad (14-1)$$

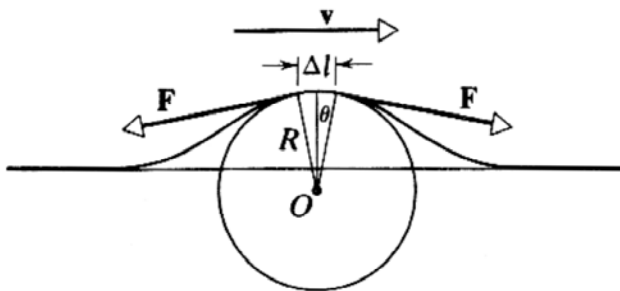
$$v = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho}} \quad (15-1)$$

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (16-1)$$

۶-۱ تعیین معادله سرعت موج‌های عرضی

می‌خواهیم معادله (۱۶-۱) را که سرعت عبور امواج عرضی در جامداتی نظیر تار مرتعش است به دست آوریم. برای این کار جزئی به طول ΔL از یک تار را که در حال ارتعاش است مطابق شکل ۴-۱ در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که این جزء از تار قسمتی از یک تپ یا تک موج باشد.

هر جزئی از تار توسط اجزاء قبل و بعد از خود کشیده می‌شود بطوری که می‌توان این کشش‌ها را با دو نیروی F و F' که امتدادشان مماس بر خمیدگی است نشان داد. در این صورت این جزء تحت تأثیر برآیند مؤلفه‌های این دو نیرو در راستای قائم (y) به بالا و پایین حرکت می‌کند (مؤلفه‌های افقی یکدیگر را خنثی می‌کنند). این همان چیزی است که انتظار آن می‌رفت یعنی با بالا و پایین رفتن این جزء تار، تغییر شکل ایجاد شده به صورت حرکت موجی با سرعت ثابت در تار انتشار می‌یابد در حالی که سرعت ذرات محیط کشسان (تار مرتعش) به صورت سینوسی یا کسینوسی خواهد بود.



شکل ۱-۴. تعیین سرعت موج عرضی.

حال اگر جزء کوچک ΔL را قسمتی از یک کمان به شعاع R در نظر بگیریم و جرم واحد طول تار هم μ فرض شود در این صورت جرم جزء کوچک ΔL برابر $\mu \Delta L$ خواهد بود. اگر مؤلفه قائم نیروی F را مطابق شکل (۱-۴) با $F \sin \theta$ نشان دهیم جزء کوچک ΔL تحت تأثیر نیروی $2F \sin \theta$ قرار می‌گیرد که جمع دو مؤلفه قائم نیروهای F و F' است. با فرض کوچک بودن θ ، نیروی فوق $2F \theta$ خواهد شد. در این صورت برای جزء ΔL طبق قانون دوم نیوتن خواهیم داشت:

$$\sum F = m a \quad (17-1)$$

$$\sum F_x = 0 \quad (18-1)$$

$$\sum F_y = m a_y \quad (19-1)$$

$$2F \sin \theta \approx 2F \theta = \mu \Delta L a_y \quad (20-1)$$

و چون $a_y = a_R = \frac{V^2}{R}$ و $\theta \approx \sin \theta = \frac{\Delta L}{2\pi R}$ است بنابراین:

$$2F \frac{\Delta L}{2\pi} = \mu \Delta L \frac{V^2}{R} \quad (21-1)$$

$$V = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (22-1)$$

که این همان معادله مورد نظر است. در این معادله همانطور که ملاحظه می‌شود سرعت موج مستقل از شکل موج است. ولی اگر تغییر شکل خیلی بزرگ باشد نمی‌توان از این رابطه استفاده کرد. زیرا در این صورت تقریب $\sin \theta \approx \theta$ برقرار نخواهد بود و نیروی کشش تار (F) دیگر در طول تار کشیده شده برای نقاط متفاوت یکسان نیست.

مثال ۲: ریسمانی به طول ۵ متر و جرم ۱ کیلوگرم با نیروی ۲۰ نیوتن کشیده شده است. سرعت یک تپ ایجاد شده در این ریسمان چند متر بر ثانیه خواهد بود؟
حل: جرم واحد طول تار (μ) برابر است با:

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{1}{5} = 0.2 \text{ Kg m}^{-1}$$

$$V = \sqrt{\frac{20 \text{ N}}{0.2 \text{ Kg m}^{-1}}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

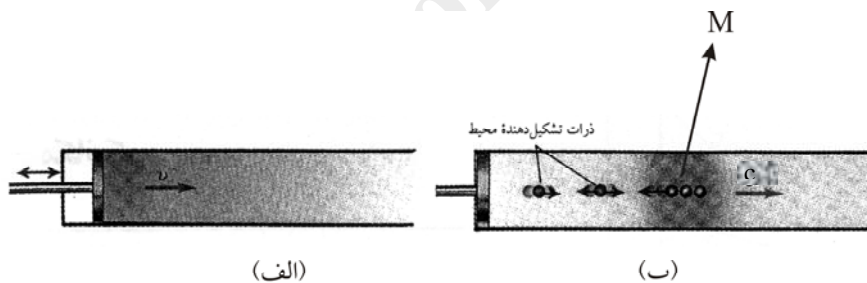
۷-۱ سرعت انتشار موج طولی

سرعت انتشار امواج طولی نظیر موج صوتی نیز شبیه امواج عرضی، وابسته به خواص مکانیکی محیط است. فرض کنید شماره‌ای (مایع یا گاز) که درون لوله‌ای به سطح مقطع A قرار دارد به وسیله پیستونی محدود شده است. چگالی شماره را ρ و فشار داخل لوله را P می‌نامیم (شکل ۱-۵ الف)، در لحظه $t = 0$ که شماره در حالت سکون قرار

دارد پیستون با سرعت c به سمت راست حرکت می‌کند و پس از گذشت زمان t به وضعیت شکل (۱-۵ ب) در می‌آید. در این وضعیت نقطه‌ای مانند M را درون شماره در نظر می‌گیریم. در حالی که ذرات سمت راست این نقطه ساکن هستند ذرات سمت چپ این نقطه با سرعت c در حرکتند (c در حکم همان سرعت جابجایی محیط کشسان است). اما مرز بین بخش ساکن (سمت راست نقطه M) و بخش متحرک (سمت چپ نقطه M) با سرعت ثابت c (همان سرعت موج طولی) به طرف راست انتشار می‌یابد. در بازه زمانی t پیستون فاصله ct و مرز بین دو بخش فاصله ct را می‌پیماید. حال با استفاده از رابطه بین ضربه و تغییر اندازه حرکت می‌توان رابطه سرعت امواج طولی را به دست آورد.

جرم شماره که در بازه t جابجا شده است برابر است با جرمی که در استوانه‌ای به طول ct و سطح مقطع A محصور شده باشد. بنابراین خواهیم داشت:

$$m = V \cdot A \quad (۲۳-۱)$$



شکل ۱-۵. انتشار آشفتگی طولی درون شماره‌ای که داخل لوله‌ای قرار دارد.

که V حجم شماره جابجا شده و برابر ρct است پس:

$$m = \rho ct \cdot A \quad (۲۴-۱)$$

و اندازه حرکت آن برابر با $\rho ctAV$ خواهد شد. اما ضربه خالص وارد بر پیستون برابر است با $F \cdot t$ که $F = \Delta P \cdot A$ است (ΔP تغییر فشار است). ΔP را

می‌توان با استفاده از تعریف مدول حجمی (نسبت تغییر فشار به تغییر حجم نسبی) تعیین کرد:

$$\beta = \frac{\Delta P}{\frac{\Delta V}{V_1}} \quad (25-1)$$

چون حجم اولیه‌ی شاره یعنی Act به اندازه AVt کاهش یافته است (شاره متراکم می‌شود). پس تغییر حجم نسبی برابر خواهد شد با:

$$\frac{\Delta V}{V_1} = \frac{AVt}{Act} = \frac{V}{c} \quad (26-1)$$

بنابراین

$$\beta = \frac{\Delta P}{\frac{V}{c}} \quad (27-1)$$

و تغییر فشار برابر خواهد شد با:

$$\Delta P = \beta \frac{V}{c} \quad (28-1)$$

بنابراین ضربه‌ی وارد بر پیستون برابر است با:

$$F.t = \Delta P . A . t = \beta \frac{V}{c} . A . t \quad (29-1)$$

و چون اندازه حرکت اولیه صفر بود، پس تغییر اندازه حرکت برابر با $\rho ct AV$ خواهد شد. بنابراین با توجه به تساوی ضربه‌ی وارد بر پیستون با تغییر اندازه حرکت خواهیم داشت:

$$\beta \frac{V}{c} . A . t = \rho ct AV \quad (30-1)$$

$$c^2 = \frac{\beta}{\rho} \quad (31-1)$$

$$c = \sqrt{\frac{\beta}{\rho}} \quad (32-1)$$

بنابراین همانطور که پیش‌بینی می‌شد، سرعت انتشار امواج طولی به خواص کشسانی (β) و لختی (ρ) شاره وابسته است. ولی اگر محیط کشسان یک میله بود آنگاه به جای خاصیت کشسانی شاره (β) باید خاصیت کشسانی میله (Y) که به مدول یانگ موسوم است قرار گیرد که در آن صورت معادله سرعت انتشار امواج طولی در جامدات برابر خواهد شد با:

$$c = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \quad (33-1)$$

مثال ۳: هرگاه مدول حجمی آب $\beta = 1.49 \times 10^{11} \text{ Pa}$ و چگالی آب $\rho = 1 \times 10^3 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$ باشد. سرعت انتشار امواج طولی (صوت) را در آب به دست آورید.

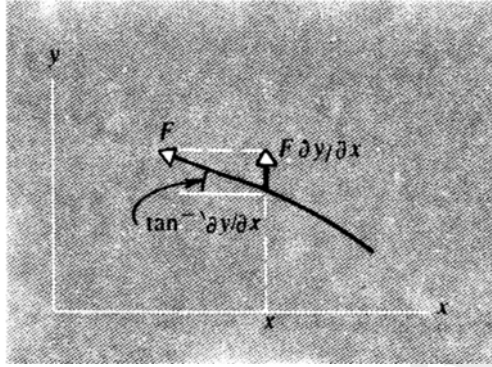
حل:

$$c = \sqrt{\frac{\beta}{\rho}} = \sqrt{\frac{1.49 \times 10^{11}}{1.0 \times 10^3}} = 1474 \text{ m.s}^{-1}$$

۸-۱ انرژی در حرکت موجی

همانطور که در ابتدا گفته شد، موج یا حرکت موجی یکی از راه‌های انتقال انرژی است. بنابراین موج حامل انرژی بوده و با خود انرژی حمل می‌کند. در واقع انرژی موج یا حرکت موجی در حالت ایده‌آل همان کاری است که برای ایجاد حرکت موجی انجام گرفته و یا انرژی است که صرف تولید حرکت موجی شده است. این کار که موجب جابجایی ذرات محیط کشسان می‌شود با نیرویی انجام شود که باعث حرکت نوسانی ذرات محیط می‌گردد. در خصوص ریسمان یا تار کشیده‌ای که در بخش ۱-۵ از آن صحبت شد این نیروی انجام دهنده کار مؤلفه قائم همان نیرویی است که ذرات ریسمان یا تار را در راستای قائم بالا و پایین می‌برد شکل ۱-۶ و به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$F_y = -F \sin \theta = -F \frac{\partial y}{\partial x} \quad (۳۴-۱)$$



شکل ۱-۶. مؤلفه عرضی نیروی کشش ریسمان در هر نقطه x برابر است با $F(\partial y / \partial x)$.

رابطه فوق به این دلیل به این شکل نوشته می‌شود که اولاً علامت (-) معرف نیروی بازگرداننده است تا ذرات محیط کشسان را پس از خارج شدن از حالت تعادل به حالت تعادل برگرداند. ثانیاً اگر ذره‌ای از تار کشیده شده مطابق شکل ۱-۶ را در نظر بگیریم، این ذره توسط ذرات اطراف خود مثلاً ذره سمت چپ با نیروی F کشیده می‌شود که مؤلفه قائم این نیرو (F_y) در شکل نشان داده شده است. حال اگر آهنگ مصرف انرژی برای تولید موج یا آهنگ انتقال انرژی توسط موج را با (p) نشان دهیم، بر اساس مکانیک خواهیم داشت:

$$p = F_y \cdot u \quad (۳۵-۱)$$

که در این رابطه u معرف سرعت هر ذره از محیط کشسان در هر لحظه و برابر با $\frac{\partial y}{\partial t}$ است. پس:

$$p = \left(-F \frac{\partial y}{\partial x}\right) \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) \quad (۳۶-۱)$$

و اگر فرض کنیم که موج روی تار کشیده شده، موجی سینوسی و ساده است
 آنگاه می توان نوشت:

$$y(x, t) = y_m \sin(\omega t - k x) \quad (37-1)$$

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = y_m k \cos(\omega t - k x) \quad (38-1)$$

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = y_m \omega \cos(\omega t - k x) \quad (39-1)$$

پس

$$p = y_m^2 k \omega F \cos^2(\omega t - k x) \quad (40-1)$$

معادله (۴۰-۱) نشان می دهد که آهنگ انتقال انرژی حرکت موجی در مکان های متفاوت ثابت نیست بلکه به صورت ترکیبی از انرژی جنبشی ذرات محیط و انرژی پتانسیل ذخیره شده در محیط متفاوت بوده و هر یک از این انرژی ها نیز با زمان و مکان تغییر کرده، متناوباً به هم تبدیل می شوند. البته مقداری انرژی نیز در اثر اصطکاک درونی محیط (ریسمان یا تار) به صورت گرما در می آید.

مثال ۴: توان متوسط یک حرکت موجی را در یک دوره تناوب تعیین کنید؟

حل: از رابطه (۴۰-۱)، متوسط تغییرات آهنگ انرژی در یک دوره تناوب با

توجه به این که مقدار $\cos^2 \theta$ در یک دوره تناوب برابر $\frac{1}{2}$ است عبارتست از:

$$P_m = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} P dt \quad (41-1)$$

$$P_m = \frac{1}{2} y_m^2 \omega k F \quad (42-1)$$

با توجه به این که $\omega = 2\pi v$ و $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ و $F = \mu v^2$ و $v = v \lambda$ خواهیم داشت:

$$P_m = 2\pi^2 y_m^2 \nu^2 \mu \nu \quad (43-1)$$

در معادله (۴۳-۱) دیده می‌شود که آهنگ انتقال انرژی با مجذور دامنه و مجذور بسامد متناسب است و این نتیجه‌ای کلی است که در مورد تمام امواج صادق است.

خودآزمایی ۳: در مثال ۴ هرگاه این موج با موج دیگری با معادله $y = 10 \cos(50\pi t - \frac{x}{4})$ در همان تار انتشار یابد، نسبت توان‌های دو حرکت موجی را تعیین کنید.

۹-۱ شدت موج

شدت موج انرژی در واحد زمان و در واحد سطح است و یا به عبارتی آهنگ انتقال انرژی در واحد سطح را شدت موج می‌نامند. از آنجا که آهنگ انتقال انرژی یا توان حرکت موجی کمیتی دوره‌ای است که نسبت به زمان و مکان متغیر است، شدت موج نیز کمیتی است که با زمان و مکان تغییر کرده و متوسط یا میانگین آن همان توان متوسط در واحد سطح است. پس با این تعریف خواهیم داشت:

$$I = \frac{P}{A} \quad (44-1)$$

۱۰-۱ رابطه بین شدت موج و فاصله

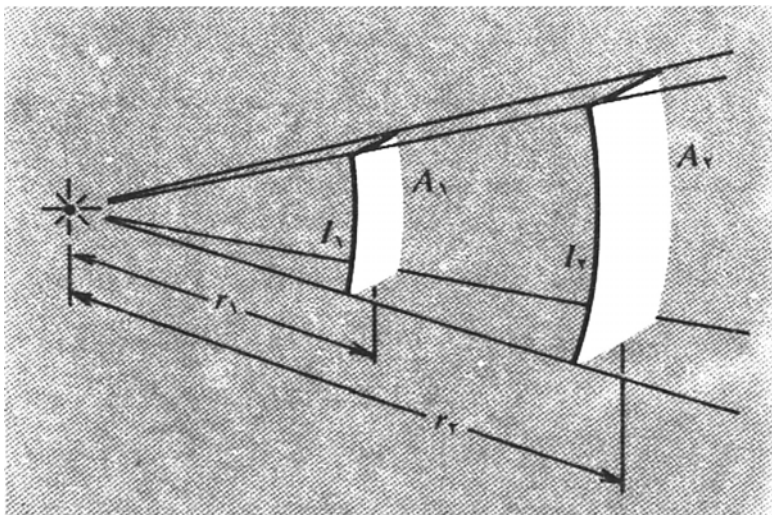
هرگاه چشمه موج در محیط همگن قرار داشته و موجی را با بسامد ثابت در تمام جهات ارسال نماید پوش این امواج در هر لحظه سطحی کروی به مرکز محل چشمه است (شکل ۷-۱). حال اگر در دو زمان متفاوت دو سطح از این سطوح کروی به شعاع‌های r_1 و r_2 را در نظر بگیریم، نسبت شدت‌های موج در فواصل مختلف برابر است با:

$$I_1 = \frac{P}{4\pi r_1^2} \quad (45-1)$$

$$I_2 = \frac{P}{4\pi r_2^2} \quad (46-1)$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \quad (47-1)$$

یعنی شدت موج با مجذور فاصله از منبع نسبت عکس دارد.



شکل ۷-۱. رابطه بین شدت موج و فاصله.

۱۱-۱ ترکیب یا تداخل امواج

در بخش ۴-۱ در مورد اصل برهم‌نهی گفته شد که در یک محیط تعداد زیادی موج می‌توانند آزادانه وجود داشته باشند. بعضی از این امواج ممکن است دارای بسامدها و دامنه‌های مساوی و یا بسامدهای مساوی و دامنه‌های مختلف و یا بسامدهای مختلف باشند. همچنین ممکن است اختلاف بسامد موج‌ها زیاد و یا کم باشد یا این که موج‌ها در یک جهت و یا در جهت‌های مختلف حرکت کنند. همچنین ممکن است موج‌ها هم‌فاز بوده و یا اختلاف فاز داشته باشند. در هر یک از حالت‌های فوق از برهم‌نهی موج‌ها نتیجه‌ای که حاصل می‌شود متفاوت است. در این بخش می‌خواهیم ترکیب موج‌های متفاوت را در حالت‌های مختلف بررسی کنیم.

مثال ۵: ترکیب دو موج را در نظر می‌گیریم که موج‌ها هم‌بسامد، و هم‌دامنه بوده و در یک جهت منتشر می‌شوند ولی دارای اختلاف فاز می‌باشند. معادله ترکیب حرکت موجی این امواج را به دست آورید.

حل: معادله حرکت موجی این دو موج را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$y_1 = y_m \sin(\omega t - kx) \quad (48-1)$$

$$y_2 = y_m \sin(\omega t - kx - \varphi) \quad (49-1)$$

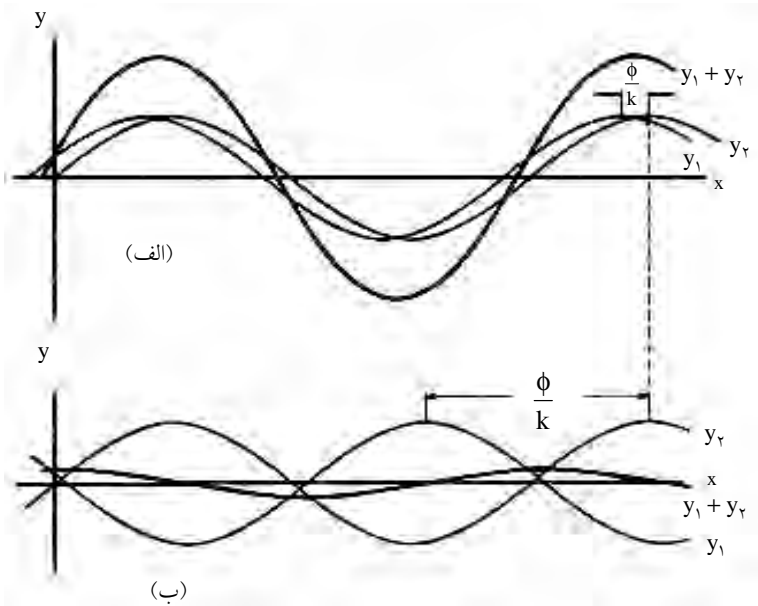
ترکیب این دو موج به صورت موجی سینوسی است و خواهیم داشت:

$$y = y_1 + y_2 = y_m [\sin(\omega t - kx) + \sin(\omega t - kx - \varphi)] \quad (50-1)$$

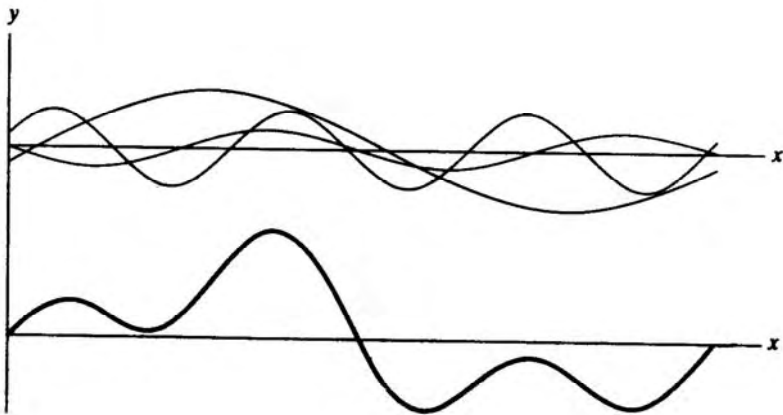
$$y = 2y_m \cos \frac{\varphi}{2} \sin(\omega t - kx - \frac{\varphi}{2}) = y'_m \sin(\omega t - kx - \frac{\varphi}{2}) \quad (51-1)$$

بنابراین موج حاصل موجی سینوسی با دامنه $y'_m = 2y_m \cos \frac{\varphi}{2}$ و با بسامد و سرعت امواج اولیه است. در این حالت اگر دو موج اختلاف فاز نداشته باشند ($\varphi = 0$) و دامنه‌ها برابر باشند، دامنه موج حاصل از ترکیب یا تداخل دو موج دو برابر دامنه هر یک از موج‌ها است و اگر دامنه‌ها متفاوت بوده باشند ($y_{1m} \neq y_{2m}$) دامنه موج برآیند، جمع دامنه‌ها ($y'_m = y_{1m} + y_{2m}$) می‌شود. در این حالت گفته می‌شود موج‌ها تداخل سازنده داشته و یکدیگر را تقویت کرده‌اند ولی اگر $\varphi = \pi$ باشد: $y'_m = |y_{1m} - y_{2m}|$ و موج‌ها یکدیگر را تضعیف می‌کنند. در این صورت گفته می‌شود تداخل ویرانگر است (شکل ۸-۱).

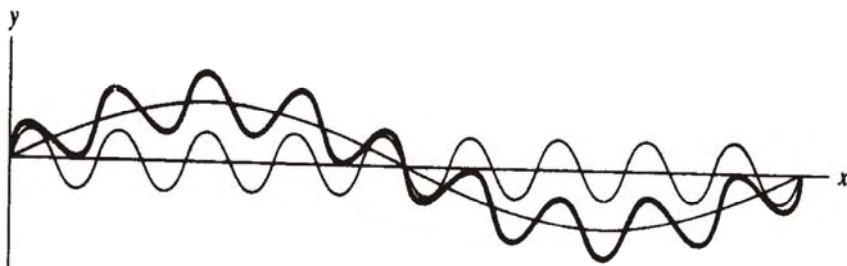
تداخل دو موج غیر هم‌بسامد دو حالت دارد: چنانچه اختلاف بسامد زیاد باشد موج حاصل از ترکیب موج‌های اولیه شکلی پیچیده داشته و مشابه هیچ‌یک از موج‌های اولیه نخواهد بود. در این حالت به موج حاصل از تداخل، موج مختلط گفته می‌شود.



شکل ۸-۱. الف) دو موج هم‌فاز با دامنه‌های متفاوت، بزرگی دامنه موج برآیند، جمع اندازه دامنه موج‌های اولیه است (تداخل سازنده). ب) ترکیب دو موج هم‌بسامد با فاز مخالف، بزرگی دامنه موج برآیند، تفاضل اندازه دامنه موج‌های اولیه است: $y'_m = y_{1m} - y_{2m}$ (تداخل ویرانگر).



شکل ۹-۱. از جمع سه موج با بسامدهای متفاوت (بالا)، یک شکل موج مختلط (پایین) به دست می‌آید.



شکل ۱-۱۰. جمع دو موج (منحنی کلفت) با بسامدهای کاملاً متفاوت (منحنی‌های نازک).

ولی اگر اختلاف بسامد موج‌های تداخل کننده کم باشد، پدیده‌ای به نام زنش یا ضربان اتفاق می‌افتد که در ادامه مورد بحث قرار می‌گیرد.

مثال ۶: دو موج عرضی با دامنه و بسامد یکسان و اختلاف فاز $\frac{\pi}{2}$ با هم تداخل می‌کنند. هرگاه دامنه و بسامد امواج تداخل کننده به ترتیب ۱۰ سانتی‌متر و ۵۰ هرتز باشد، دامنه و بسامد موج مرکب حاصل را محاسبه کنید. تداخل از چه نوعی است؟
حل: دامنه موج مرکب حاصل برابر است با:

$$y'_m = 2y_m \cos \frac{\phi}{2} = 2 \times 10 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 14 \text{ cm}$$

بسامد موج حاصل از تداخل دو موج اولیه همان بسامد موج‌های اولیه یعنی ۵۰ هرتز خواهد بود (به مثال ۵ رجوع شود). نوع تداخل به دلیل افزایش دامنه موج حاصل سازنده است.

۱-۱۲ زنش یا ضربان (تداخل زمانی امواج)

همچنان که گفته شد، هرگاه اختلاف بسامد موج‌های تداخل کننده کم باشد پدیده‌ای رخ می‌دهد که ضربان نامیده می‌شود و موسوم به تداخل زمانی امواج است. فرض می‌کنیم دو موج با بسامدهای تقریباً مساوی و نزدیک به هم که در یک جهت و با

سرعت یکسان حرکت می‌کنند با هم ترکیب شوند. برای راحتی کار، دامنهٔ امواج تداخل‌کننده را یکسان در نظر می‌گیریم. در این صورت خواهیم داشت:

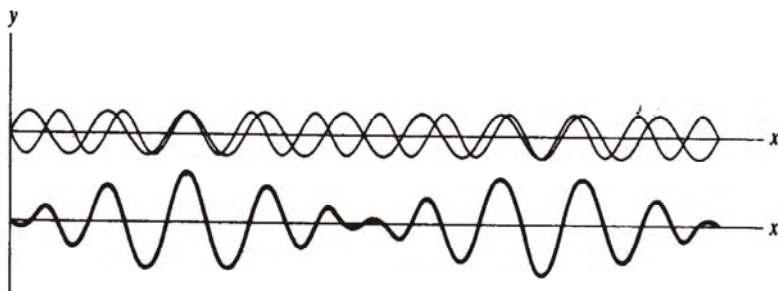
$$y_1 = y_m \sin(\omega_1 t - kx) \quad (52-1)$$

$$y_2 = y_m \sin(\omega_2 t - kx) \quad (53-1)$$

و ترکیب این دو موج برابر است با:

$$y = y_1 + y_2 = 2y_m \cos(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t) \cdot \sin(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - kx) \quad (54-1)$$

رابطهٔ (۵۴-۱) معادلهٔ موج برآیند حاصل از تداخل دو موج اولیه با اختلاف بسامد کم است. همچنان که مشاهده می‌شود، دامنهٔ موج برآیند $y'_m = 2y_m \cos(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t)$ با زمان تغییر می‌کند. به همین دلیل به این نوع ترکیب امواج، تداخل زمانی گفته می‌شود.



شکل ۱-۱۱. جمع دو موج (پایین) با بسامدهای نزدیک به هم (بالا)، پدیدهٔ زنش را نمایش می‌دهد.

مثال ۷: دو موج سینوسی با بسامدهای ۲۱۲ و ۲۱۴ هرتز با هم تداخل می‌کنند. نوع موج حاصل از تداخل و بسامد دامنهٔ آن را تعیین کنید.

حل: موج حاصل از تداخل طبق رابطهٔ (۵۴-۱) موجی سینوسی است. بسامد

دامنه برابر است با:

$$y'_m = 2y_m \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) = 2y_m \cos 2\pi\left(\frac{V_1 - V_2}{2}t\right)$$

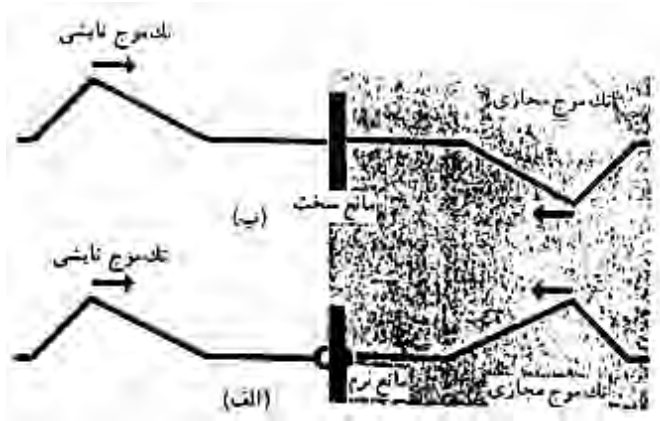
$$= 2y_m \cos 2\pi V' t \Rightarrow V' = \frac{(V_1 - V_2)}{2} = 1 \text{ Hz}$$

۱۳-۱ بازتابش موج

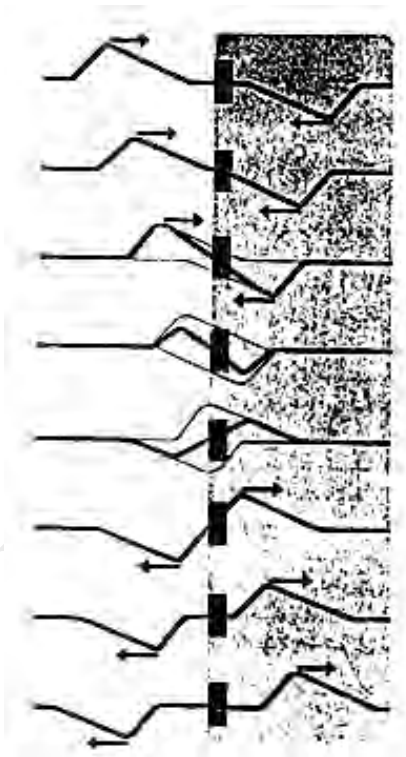
در اثر برخورد موج به مانع سر راه خود، پدیده بازتابش امواج رخ می‌دهد که در مورد امواج الکترومغناطیسی کاملاً مشهود است (بازتابش در آینه‌ها یا سطوح صیقلی که سبب رؤیت اجسام می‌گردد). در مورد امواج مکانیکی دو حالت اتفاق می‌افتد: یکی زمانی که موج به یک مانع سخت برخورد می‌کند و دیگری وقتی که مانعی نرم سر راه موج قرار می‌گیرد.

برای توجیه آنچه که پس از برخورد یک تک موج به موانع سخت و نرم رخ می‌دهد فرض می‌کنیم که یک تک موج در پشت مانع به صورت مجازی منتشر می‌شود. در آن صورت فرض می‌شود که محیط انتشار دهنده موج (تار یا ریسمان) در پشت مانع نیز امتداد دارد (شکل ۱-۹). در واقع انگار موج واقعی به انتشار در بخش مجازی تار یا ریسمان ادامه می‌دهد، گویی مانعی وجود ندارد. در همین حال تک موج مجازی که در بخش مجازی تار و در جهت مخالف منتشر می‌شود به بخش حقیقی تار وارد شده و موج بازتابش واقعی را به وجود می‌آورد. طبیعت موج بازتابش وابسته به این است که مانع سخت (انتهای ثابت) و یا نرم (انتهای آزاد) باشد.

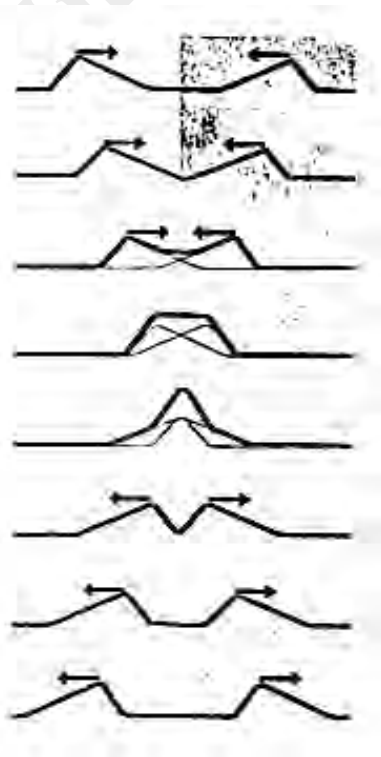
در مورد مانع سخت، بازتابش موجب تغییر در جهت و جابجایی یا ارتعاش هر دو می‌شود (شکل ۱-۱۲ (ب)). اما در برخورد موج به مانع نرم فقط جهت انتشار تغییر می‌کند در حالی که جهت جابجایی یا ارتعاش ثابت می‌ماند (شکل ۱-۱۲ (الف)). جابجایی محل برخورد موج به مانع سخت یا نرم، جمع جابجایی دو تک موج حقیقی یا مجازی می‌باشد. در مورد مانع سخت، جمع این جابجایی‌ها صفر است چون تداخل دو موج تابیده و بازتابیده ویرانگر است و موج تابیده و بازتابیده در فاز مخالفند. در مورد مانع نرم جابجایی یک نقطه بر روی مانع صفر نیست بلکه بیشینه است چون موج تابیده و بازتابیده هم‌فازند.



شکل ۱-۱۲. انعکاس موج، (الف) روی مانع سخت. (ب) روی مانع نرم به صورت تک موج مجازی.



شکل ۱-۱۴. انعکاس تک موج روی مانع سخت (انتهای ثابت شده).

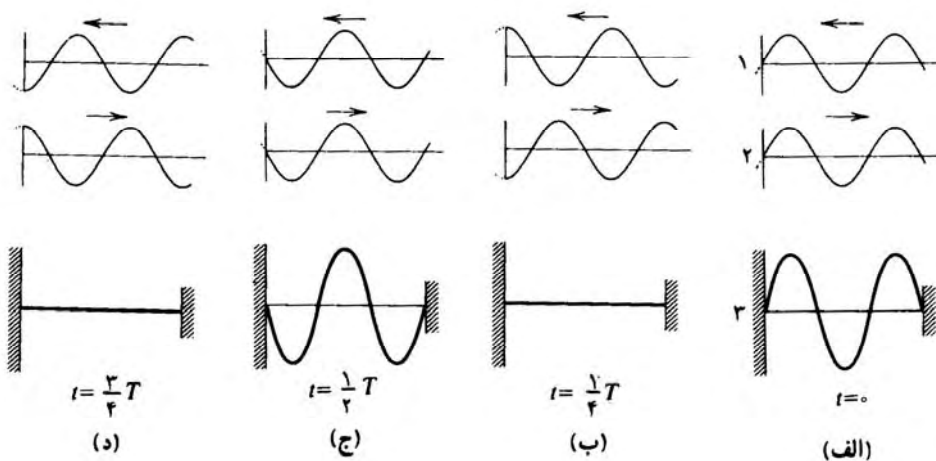


شکل ۱-۱۳. انعکاس تک موج روی مانع نرم (انتهای آزاد).

۱-۱۴ امواج ساکن یا ایستاده

در بخش ۱-۱۱ دیدیم که امواج تابیده یا رونده در طول یک ریسمان در برخورد با موانع سر راه خود بازتابیده می‌شوند و امواج بازتابیده در جهت مخالف موج رونده در طول تار یا ریسمان منتشر می‌گردند (شکل ۱-۱۳ و ۱-۱۴). حال تار کشیده‌ای را در نظر می‌گیریم که در دو انتهای ثابت مقید شده است (شکل ۱-۱۵).

چنانچه این تار را به ارتعاش واداریم، امواج رونده در طول تار در برخورد به دو انتهای ثابت بازتابیده می‌شوند. در این شرایط در طول تار، دو موج رونده و بازتابیده داریم که در دو جهت مخالف منتشر می‌شوند و نتیجه تداخل این دو موج پدیده‌ای است که به آن امواج ایستاده یا ساکن می‌گویند (شکل ۱-۱۲).



شکل ۱-۱۵. امواج ایستاده حاصل از برهم نهی امواجی که به طرف راست و به طرف چپ می‌روند، شکل‌های ۱ و ۲ مؤلفه‌ها هستند و شکل ۳ برآیند آنها است.

هرگاه معادله موج رونده را به صورت زیر بنویسیم:

$$y_1 = y_m \sin(\omega t - kx) \quad (۱-۵۵)$$

معادله موج بازتابیده که در خلاف جهت موج رونده منتشر می‌شود برابر خواهد شد با:

$$y_1 = y_m \sin(\omega t + k x) \quad (۵۶-۱)$$

تداخل یا ترکیب این دو موج یا برآیند آنها برابر است با:

$$y = y_1 + y_2 = y_m \sin(\omega t - k x) + y_m \sin(\omega t + k x) \quad (۵۷-۱)$$

با استفاده از رابطه $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$ خواهیم داشت:

$$y = 2y_m \cos k x \sin \omega t \quad (۵۸-۱)$$

معادله (۵۸-۱) معادله موج ساکن یا ایستاده است و همانطور که مشاهده می‌شود، دامنه موج ایستاده یعنی $2y_m \cos k x$ وابسته به مکان (x) است و با مکان تغییر می‌کند. تمام نقاط محیط کشسان یا تار کشیده شده دارای بسامد یکسانی هستند ولی دامنه نوسان آنها با هم متفاوت و تابع مکان این نقاط است. بنابراین وقتی دو موج با دامنه‌ها و بسامدهای برابر ولی در جهت مخالف در محیطی حرکت می‌کنند از تداخل یا ترکیب آنها موجی خاص که به آن موج ساکن می‌گویند به وجود می‌آید. با توجه به معادله موج ساکن دیده می‌شود که دامنه این موج در نقاطی صفر ($\cos k x = 0$) و در نقاطی دیگر بیشینه ($\cos k x = 1$) است شکل‌های (۱۶-۱ و ۱۷-۱). سایر نقاط محیط بین این دو نقطه دارای دامنه‌های بین صفر و بیشینه می‌باشند. نقاطی که دامنه آنها صفر است، گره و نقاطی که دارای بیشینه دامنه می‌باشند، شکم نام دارند.

دلیل انتخاب نام امواج ساکن برای این پدیده این است که برخلاف امواج رونده که انرژی را با خود حمل می‌کنند، این امواج با خود انرژی حمل نمی‌کنند. چون در گره‌ها به دلیل صفر بودن دامنه موج، انرژی موج صفر است. در واقع انرژی موج نمی‌تواند از محل گره‌ها عبور نماید. اما اطلاق موج بر این پدیده به این علت است که می‌توان این پدیده را حاصل برهم‌نهی دو موج که در دو جهت مخالف حرکت می‌کنند در نظر گرفت. در حقیقت در این پدیده ذرات محیط در حال ارتعاش یعنی ذرات تار کشیده شده در هر لحظه دارای انرژی جنبشی و پتانسیل هستند که دائماً در حال تبدیل شدن به یکدیگر می‌باشند، شبیه یک نوسانگر ساده فنر و جرم متصل به آن با این تفاوت که نوسانگر فنر و جرم متصل به آن فقط دارای یک بسامد طبیعی است (سیستم

با اجزای کلوخه‌ای) در حالی که تار کشیده شده دارای تعداد زیادی بسامد طبیعی می‌باشد (سیستم با اجزای توزیع شده) که می‌توان آنها را تعیین کرد. برای این کار ابتدا محل شکم‌ها و گره‌ها را تعیین می‌کنیم. محل گره‌ها و شکم‌ها به روش زیر مشخص می‌شوند:

$$\cos kx = 0 = \cos(k' + 1)\frac{\pi}{2} \quad (\text{در محل گره‌ها}) \quad (59-1)$$

که k' عددی صحیح از صفر تا بی‌نهایت است. در این صورت مکان گره‌ها عبارت است از:

$$kx = \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{2}, 7\frac{\pi}{2}, \dots \quad (60-1)$$

و با توجه به این که $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ است پس:

$$x = \frac{\lambda}{4}, 3\frac{\lambda}{4}, 5\frac{\lambda}{4}, 7\frac{\lambda}{4}, \dots, (2n+1)\frac{\lambda}{4} \quad (\text{در محل گره‌ها}) \quad (61-1)$$

و در شکم‌ها خواهیم داشت:

$$\cos kx = 1 = \cos k''\pi \quad (\text{در محل شکم‌ها}) \quad (62-1)$$

که k'' عددی صحیح بین صفر تا بی‌نهایت است پس:

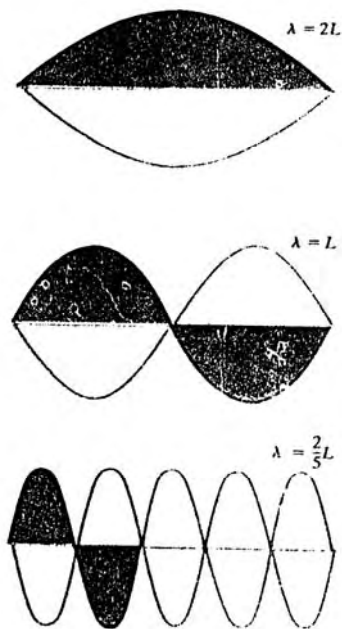
$$kx = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots \quad (63-1)$$

و با استفاده از $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ خواهیم داشت:

$$x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, 3\frac{\lambda}{2}, \dots, n\frac{\lambda}{2} \quad (\text{در محل شکم‌ها}) \quad (64-1)$$

حال تار کشیده شده را در نظر می‌گیریم. در این تار که از دو سر مقید شده است، امواج ساکن ایجاد شده به نحوی خواهد بود که در دو انتهای ثابت آن دو گره تشکیل

می‌شود (اگر انتهای تار آزاد می‌بود در انتهای آزاد شکم و در انتهای ثابت گره تشکیل می‌شد). در ساده‌ترین حالت یک شکم در طول تار خواهیم داشت (شکل ۱-۱۶).



شکل ۱-۱۶. ارتعاش اصلی هارمونیک‌هایی از یک قطعه طناب به طول L .

طول تار (L) در ساده‌ترین حالت برابر است با:

$$L = \frac{\lambda}{2} \quad (۶۵-۱)$$

و در حالت کلی خواهیم داشت:

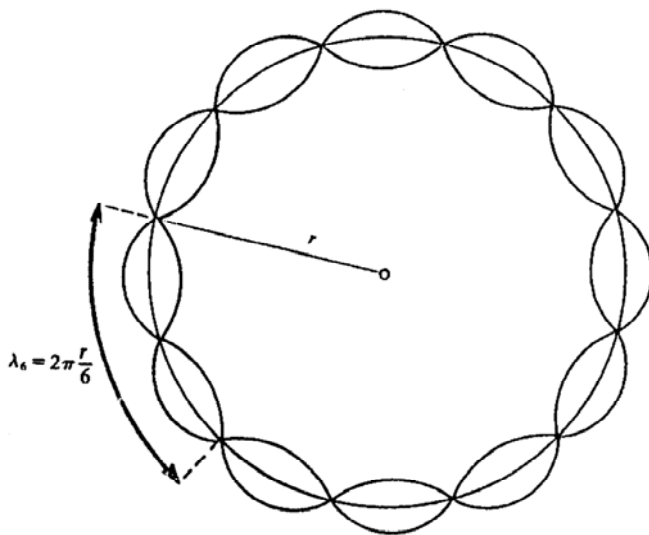
$$L = n \frac{\lambda}{2} \quad (۶۶-۱)$$

که n بیانگر تعداد شکم‌ها در طول تار است. با توجه به رابطه سرعت موج (v) در طول تار و بسامد (ν) و طول موج (λ) خواهیم داشت:

$$v = \lambda V \quad (۶۷-۱)$$

$$v_n = n \frac{V}{2L} \quad (۶۸-۱)$$

معادله (۶۸-۱) بیانگر کلیه بسامدهایی است که تار قادر به تولید آنها است. البته وجود امواج ساکن در تارهای کشیده به شکل حلقه‌هایی بسته نیز امکان‌پذیر است. با این شرایط که طول تار باید به اندازه‌ای باشد که در آن به تعداد صحیح گره و شکم تشکیل شود (شکل ۱-۱۷). در این مورد همچنان که از روی شکل پیداست می‌توان شعاع حلقه تار کشیده را برحسب این که موج ساکن دارای چه بسامدی باشد محاسبه کرد.



شکل ۱-۱۷. موج ساکن بر روی یک تار دایره‌ای شکل.

خودآزمایی ۴: در مورد توزیع خاصیت لختی و کشسانی در سیستم‌های فنر و جرم متصل به آن و تار کشیده توضیح دهید؟

مثال ۸: در صورتی که سرعت موجی عرضی در یک سیم کشیده به طول ۱۰ متر برابر با ۲۰۰ متر بر ثانیه باشد، طول موج بسامد پنج ارتعاش اول سیم را محاسبه کنید.

حل: طول سیم (L) با طول موج (λ_n) رابطه‌ای به صورت زیر دارد:

$$L = n \frac{\lambda_n}{2}$$

سپس طول موج ارتعاشات برابر است با:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

و به ازاء مقادیر n از ۱ تا ۵ می‌توان طول موج‌های پنج ارتعاش اول سیم را به دست آورد:

$$\lambda_1 = 20 \text{ m}, \lambda_2 = 10 \text{ m}, \lambda_3 = \frac{20}{3} \text{ m}, \lambda_4 = 5 \text{ m}, \lambda_5 = 4 \text{ m}$$

و با استفاده از رابطه سرعت، طول و بسامد با یکدیگر که به صورت زیر است، می‌توان بسامد پنج ارتعاش اول سیم را نیز نظیر طول موج به دست آورد:

$$\lambda_n = \frac{V}{v_n}$$

$$v_n = \frac{V}{\lambda_n}$$

$$v_1 = 10 \text{ Hz}, v_2 = 20 \text{ Hz}, v_3 = 30 \text{ Hz}, v_4 = 40 \text{ Hz}, v_5 = 50 \text{ Hz}$$

خودآزمایی ۵: رابطه بین شعاع و طول موج و بسامد امواج ساکن را بر روی یک تار دایره‌ای در حالت کلی پیدا کنید.

خودآزمایی ۶: مقدار متوسط انرژی را که در یک نیم-طول موج یک موج ساکن در یک تار کشیده موجود است محاسبه کنید.

۱۵-۱ تشدید

همانگونه که در فصل حرکت نوسانی گفته شد، حرکت نوسانی ذرات محیط کشسان موجب ایجاد امواج مکانیکی می‌شود. به دلیل وجود نیروهای اصطکاکی در محیط، دامنه نوسان حرکت نوسانی به تدریج کاهش یافته و انرژی موج حاصل از این حرکت

نوسانی نیز کاهش می‌یابد که نتیجه آن میرا شدن حرکت نوسانی و موج حاصل از آن خواهد بود. جهت حفظ حرکت نوسانی و جلوگیری از میرایی آن از پدیده تشدید کمک گرفته می‌شود. به این نحو که ضرباتی متناوب که در دوره تناوب آن همان دوره تناوب حرکت نوسانی است به نوسانگر وارد می‌شود. این کار موجب جبران کاهش دامنه نوسان شده و ادامه آن افزایش دامنه نوسان را به دنبال خواهد داشت. نظیر تابی که هرگاه بر آن پس از یک رفت و برگشت کامل ضربه زده شود. نه تنها تاب از حرکت باز نمی‌ایستد بلکه دامنه نوسان آن نیز زیاد می‌شود و اگر این کار ادامه یابد ممکن است منجر به پاره شدن طناب تاب و یا شکستن محل بسته شدن تاب شود.

پدیده تشدید در طبیعت و در زندگی روزمره از پدیده‌های مهم به شمار می‌آید. ایجاد اکثر لرزش‌ها و اصوات اعم از خواسته یا ناخواسته مزاحم در اطراف ما حاصل پدیده تشدید است. مثلاً وقتی که در اثر زلزله بناها به لرزش و ارتعاش در می‌آیند در واقع به این علت است که چون بسامد طبیعی این بناها با بسامد امواج زلزله یکسان و یا نزدیک به آنها است، ضربه‌های امواج زلزله آنها را به ارتعاش و می‌دارد و هر چه مدت زمان ضربه‌ها و یا بروز زلزله بیشتر باشد، دامنه این لرزش‌ها نیز بیشتر است. حتی اگر شدت ضربه‌ها یا شدت زلزله کم باشد ولی زمان آن طولانی باشد می‌تواند منجر به بروز خسارت‌های جدی شود. در واقع در این پدیده تشدید دو دستگاه با هم مبادله انرژی می‌کنند. یک دستگاه که ضربه‌ها را وارد می‌کند (دستگاه تغذیه کننده انرژی) و دستگاه دوم که ضربه‌ها را دریافت می‌کند (دستگاه گیرنده انرژی). دستگاه گیرنده انرژی همان نوسانگری است که به تدریج به دلیل اصطکاک درونی و بیرونی از دامنه آن کاسته می‌شود و اگر به همان نسبتی که انرژی از دست می‌دهد از تغذیه کننده انرژی دریافت نماید دامنه نوسانات آن ثابت می‌ماند. ولی اگر تغذیه انرژی بیش از اتلاف انرژی نوسانگر دریافت کننده انرژی باشد آنگاه دامنه نوسانات افزایش یافته و ممکن است منجر به تخریب دستگاه نوسانگر شود.

خودآزمایی ۷: در سال ۱۸۳۱ میلادی هنگامی که سربازان همگام و هماهنگ از روی پلی در نزدیکی منچستر انگلستان می‌گذشتند با پل فرو ریختند. از آن هنگام به بعد، سربازان موقع عبور از روی پل‌ها ناهماهنگ قدم بر می‌دارند. چرا؟

۱-۱۶ مثال‌های حل شده

۱. معادله حرکت موجی به صورت $y = 2 \sin \pi(100t + \frac{2x}{5})$ است که در آن y برحسب سانتی متر و t برحسب ثانیه است. دامنه حرکت نوسانی، بسامد، طول موج، سرعت فاز موج، شتاب و مکان یک نقطه از محیط را پس از ۱ ثانیه و در فاصله ۲۵ سانتی متری از مبدا به دست آورید.

حل:

$$y_m = 2 \text{ cm}$$

$$2\pi vt = \omega t = 100\pi t \Rightarrow v = 50 \text{ Hz}$$

$$V = v \lambda$$

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{2\pi x}{5} \Rightarrow \lambda = 5 \text{ cm}$$

$$V = 5 \text{ cm} \times 50 / \text{s} = 250 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

$$a = \frac{d^2 y}{dt^2} = -2\pi^2 \times 10^4 \sin \pi(100t + \frac{2x}{5}) = 2\pi^2 \times 10^4 \sin \pi(100 \times 1 + \frac{2 \times 25}{5})$$

$$\Rightarrow a = 0$$

$$y = 2 \sin \pi(100 \times 1 + \frac{2 \times 25}{5})$$

۲. مدول یانگ در فولاد $Y = 2.0 \times 10^{11} \text{ Pa}$ و چگالی فولاد $\rho = 7.8 \times 10^3 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$ است.

سرعت انتشار امواج طولی در فولاد را به دست آورید.

حل:

$$c = \sqrt{\frac{2.0 \times 10^{11} \text{ Pa}}{7.8 \times 10^3 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}}} = 5064 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

۳. توان متوسط یک حرکت موجی که معادله آن به صورت $y = 5 \cos(20\pi t - x)$ است

و در طنابی به طول ۲ متر و جرم ۱ کیلوگرم انتشار می‌یابد چند وات است؟ (y برحسب

متر و t برحسب ثانیه است).

حل:

$$p_m = 2\pi^2 y_m v^2 \mu V, \quad y_m = 5 \text{ cm}$$

$$20\pi = \omega = 2\pi v$$

$$v = 10 \text{ s}^{-1}$$

$$\mu = \frac{1}{4} \text{ Kg/m}$$

$$k x = x \Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} = 1 \Rightarrow \lambda = 2$$

$$v = \frac{\lambda}{T} = 0.5 \text{ m/s}, \quad p_m = 1570 \text{ W}$$

۴. در یک زلزله شدت موج اولیه در فاصله ۱۰۰ کیلومتری از مرکز زلزله برابر با 10×10^6 وات بر متر مربع است. شدت موج را در فاصله ۴۰۰ کیلومتری مرکز زلزله محاسبه کنید.

حل:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

$$I_1 = 10 \times 10^6 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}, \quad r_1 = 100 \text{ Km}, \quad r_2 = 400 \text{ Km}$$

$$I_2 = \frac{I_1 r_1^2}{r_2^2} = \frac{10 \times 10^6 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \times 10^4 \text{ Km}^2}{16 \times 10^4 \text{ Km}^2} = \frac{1}{16} \times 10^6 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

۵. چنانچه دو موج طولی با بسامد یکسان و دامنه‌های متفاوت که به ترتیب برابر ۸ و ۱۲ سانتی‌متر می‌باشند تداخل نمایند، به ازاء اختلاف فاز $\phi = 0$ و $\phi = \pi$ دامنه موج حاصل چقدر خواهد شد؟ نوع تداخل در هر حالت چیست؟

حل: دامنه موج مرکب حاصل به ازاء $\phi = 0$ برابر است با:

$$y'_m = (y_1 + y_2) = 20 \text{ cm} \quad (\text{تداخل سازنده})$$

و به ازاء $\varphi = \pi$ تداخل ویرانگر و دامنه موج حاصل از تداخل برابر است با:

$$y''_m = (12 - 8) = 4 \text{ cm}$$

۱۷-۱ مسائل

۱. اصل برهم نهی در مورد چه نوع موجی صادق است؟

- الف) تمام امواج
ب) فقط مکانیکی
ج) فقط طولی
د) فقط عرضی

۲. مدول کشسانی میله‌ای از فولاد برابر 2×10^{11} نیوتن بر مترمربع و چگالی آن 8×10^3 کیلوگرم بر مترمکعب است. سرعت امواج طولی در این میله چند متر بر ثانیه خواهد بود؟

- الف) 4×10^3
ب) 5×10^3
ج) 3.1×10^2
د) 2.5×10^2

۳. معادله یک موج عرضی در یک محیط کشسان به صورت $y = 2 \sin(12x - 5t)$ می‌باشد که x برحسب سانتی‌متر و t را برحسب ثانیه است. سرعت ارتعاشات یک نقطه از این محیط در لحظه $t = 0$ که در فاصله 5π متری از مبدا قرار دارد چند سانتی‌متر بر ثانیه است؟

۴. در تداخل امواج وقتی که دو موج سینوسی با اختلاف بسامد زیاد ترکیب شوند موج حاصل موجی خواهد بود:

- الف) سینوسی با دامنه متغیر زمانی
ب) کسینوسی با دامنه متغیر مکانی
ج) غیر سینوسی
د) زنبشی با دامنه متغیر مکانی

۵. پدیده زنبش زمانی رخ می‌دهد که دو موج در شرایطی تداخل کنند که اختلاف:

- الف) بسامدشان کم باشد.
ب) دامنه‌شان زیاد باشد.
ج) دامنه‌شان کم باشد.
د) بسامدشان زیاد باشد.

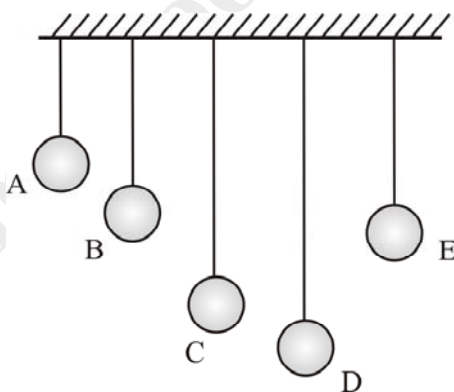
۶. در یک زلزله هرگاه فاصله از مرکز زلزله دو برابر شود شدت زلزله چند برابر خواهد شد؟ (محیط کشسان فرض شود).

۷. دو نقطه در یک محیط قابل ارتعاش در فواصل r_1 و r_2 از یک منبع موج قرار دارند. هرگاه $r_2 = 3r_1$ باشد نسبت شدت موج در r_2 به شدت موج در r_1 چقدر است؟

۸. دو موج صوتی با بسامدهای 1000 و 1005 هرتز با هم تداخل کرده و زنش ایجاد می‌کنند. دامنه این زنش چقدر است؟

۹. تحقیق کنید که اگر موجی را در نظر بگیریم که در جهت منفی محور x انتشار می‌یافت معادله $(1-45)$ با علامت منفی به دست می‌آید یعنی موج انرژی را در جهت انتشار خود حمل می‌کند.

۱۰. در شکل زیر هرگاه به آونگ E ضربه کوچکی زده و آن را به نوسان درآوریم، کدامیک از آونگ‌ها شروع به نوسان خواهد کرد؟ توضیح دهید چرا؟



شکل ۱-۱۸. مربوط به مسئله ۱۰.

فصل دوم

دما

۱-۲ مقدمه

در طبیعت سردی و گرمی اجسام پدیده‌ای است که همگان هر روزه آن را تجربه می‌کنند. قبل از این که این پدیده را مطالعه کنیم به مفاهیمی نظیر سیستم و محیط می‌پردازیم. در بررسی یک پدیده فیزیکی همیشه قسمت محدودی از ماده و یا فضا را مورد توجه قرار می‌دهیم. قسمت برگزیده مورد نظر را سیستم و هر آنچه را که در خارج آن قرار می‌گیرد و در نحوه رفتار سیستم نقش دارد محیط می‌نامند. وقتی که سیستم مشخص شد، قدم بعدی توصیف حالت آن با کمیت‌هایی است که به رفتار سیستم و برهم‌کنش‌های آن با محیط مربوط هستند. کمیت‌هایی که برای توصیف حالت و رفتار سیستم مورد استفاده قرار می‌گیرند دو دسته هستند. یک دسته کمیت‌هایی هستند که با ابزار اندازه‌گیری و عملیات آزمایشگاهی قابل اندازه‌گیری هستند نظیر دما، طول، فشار، حجم و... که به خواص کل سیستم و به ادراک حسی ما مربوطند. ولی کمیت‌هایی نظیر میدان، انرژی و... را نمی‌توان مستقیماً با قوه ادراک احساس کرد. به کمیت‌های دسته اول کمیت‌ها یا مختصات ماکروسکوپی و به کمیت‌های دسته دوم کمیت‌های میکروسکوپی گفته می‌شود.

کمیت‌های ماکروسکوپی و میکروسکوپی هر سیستمی با هم رابطه دارند. علمی که رابطه این دو نوع کمیت را با هم مشخص می‌کند مکانیک آماری نام دارد. فشار هوا کمیتی ماکروسکوپی به شمار می‌آید که با حواسمان قابل درک است و با

فشارسنج اندازه‌گیری می‌شود. فشار خیلی پیش از آن که فیزیکدان‌ها نظریه ملکولی را مطرح و آن را مورد تجزیه و تحلیل قرار دهند مورد تجربه و اندازه‌گیری قرار گرفته بود و ما آثار فشار هوا را حس می‌کنیم. اما در بعد میکروسکوپی فشار را می‌توان به آهنگ متوسط انتقال اندازه حرکت ملکول‌های هوا دانست. در اینجا تمایزی بین دو دیدگاه ماکروسکوپی و میکروسکوپی وجود دارد. کمیت‌های ماکروسکوپی معدودی که قابل اندازه‌گیری هستند در واقع میانگین‌های زمانی تعداد زیادی از کمیت‌های میکروسکوپی در یک مدت زمان بوده و به اندازه حواس آدمی قابل اطمینان هستند. این کمیت‌ها تا زمانی که حواس ما تغییر نکنند بدون تغییر باقی می‌مانند. اما از دیدگاه میکروسکوپی، کمیت‌های میکروسکوپی از دایره حواس ما خیلی فراتر می‌روند و دائماً در حال تغییر هستند چون مبتنی بر نظریه و اصولی هستند که به موجه بودن آنها مطمئن نیستیم مگر این که قبلاً برخی از نتایجی را که مبتنی بر آنها هستند با نتایجی مشابه مبتنی بر دیدگاه ماکروسکوپی مقایسه کرده باشیم. کمیت‌های ماکروسکوپی که با حالت داخلی یک سیستم سروکار دارند به مختصات ترمودینامیکی معروف هستند و هدف ترمودینامیک یافتن روابطی کلی بین این مختصات ترمودینامیکی است که با قوانین بنیادی ترمودینامیک سازگار باشند. در این فصل از پدیده‌های گرمایی صحبت خواهیم کرد که با در هم آمیختن توصیف‌های ماکروسکوپی و میکروسکوپی یعنی مکانیک آماری و ترمودینامیک سعی خواهیم کرد درک عمیق‌تری از آنها به دست آوریم. برای شروع این کار از دما آغاز می‌کنیم.

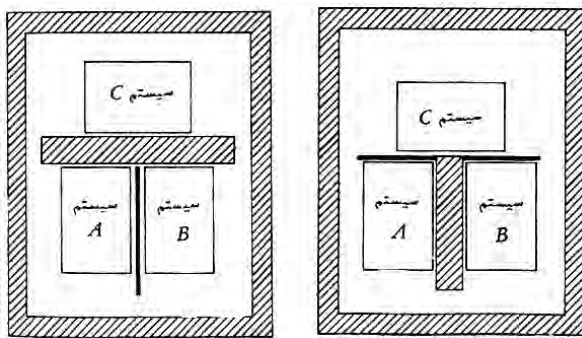
۲-۲ دما، تعادل گرمایی و قانون صفرم ترمودینامیک

همانطور که در ابتدا اشاره شد دما کمیتی ماکروسکوپی است که ابتدایی‌ترین وسیله برای تشخیص و اندازه‌گیری آن حس لامسه است. اما این حس در تشخیص میزان صحیح دما محدودیت کیفی و کمی دارد. حس لامسه برای تعیین گرمی و سردی یک جسم در شرایط متفاوت یکسان عمل نمی‌کند. شاید بارها تجربه کرده باشید که اگر در هوای سرد زمستان وقتی که از هوای سرد بیرون وارد اتاقی با دمای نه چندان زیاد می‌شویم در نوک انگشتانمان احساس سوزشی نظیر سوزش سوختگی با آب جوش می‌کنیم در حالی که دمای اتاق با دمای آب جوش فاصله زیادی دارد. نظیر این احساس

سوزش در زمانی که انگشتان دستمان به بدنه درونی فریزر یخچال تماس پیدا می‌کند نیز به ما دست می‌دهد. از سوی دیگر حس لامسه توانایی اندازه‌گیری دماهای خیلی بالا و خیلی پایین را ندارد. بنابراین برای تعیین درجه گرمی و سردی و به عبارت دیگر دمای اجسام نیاز به وسیله‌ای است که به آن دماسنج می‌گوییم. اما قبل از این که به توصیف دماسنج بپردازیم به توصیف خود دما نیازمندیم. دما یا درجه گرمی و سردی یک سیستم خاصیتی از یک سیستم است که وقتی آن سیستم با سیستم‌های دیگر در حال تعادل گرمایی است برای همه آنها یکسان است. این توصیف از اصلی ناشی می‌شود که به قانون و یا اصل صفرم ترمودینامیک معروف است و به آ.اچ. فالر (R.H.Fowler) نسبت داده می‌شود.

وقتی که دو جسم با درجه گرمی متفاوت به هم تماس داده می‌شوند پس از مدت زمان نسبتاً طولانی درجه گرمی یکسانی پیدا می‌کنند که در آن حالت می‌گویند آن دو جسم در حال تعادل گرمایی هستند. حال اگر به جای دو جسم چند جسم با درجات گرمی مختلف به هم تماس داده شوند همین تعادل گرمایی برای آنها هم اتفاق می‌افتد. در این حالت تعادل گرمایی، به درجه گرمی که برای تمام آن سیستم‌ها یکسان است دما گفته می‌شود و این همان توصیف مورد نظر برای تعریف کمیتی بنام دما است که نتیجه بیان اصل صفرم ترمودینامیک است. بیان اصل صفرم ترمودینامیک این است که: هر گاه دو سیستم با سیستم سومی در حال تعادل گرمایی باشند خودشان با یکدیگر در حال تعادل گرمایی هستند (شکل ۱-۲). اگر چه این توصیف دما با تجارب روزمره ما مطابقت دارد نظیر زمانی که دمای جسمی مانند یک ظرف آب را با یک دماسنج مایعی مثل دماسنج جیوه‌ای اندازه می‌گیریم دیواره شیشه‌ای دماسنج از یک طرف با آب داخل ظرف در تماس است و از سوی دیگر با مایع داخل دماسنج یعنی جیوه در تماس می‌باشد. بنابراین در حال تعادل گرمایی دو سیستم، یعنی آب داخل ظرف و جیوه که هر کدام با دیواره شیشه‌ای دماسنج در تعادل گرمایی هستند خودشان هم با هم در حال تعادل گرمایی خواهند بود. اما اصل صفرم در تمام پدیده‌های فیزیکی معتبر نیست. مثلاً دو عدد کلید که هر دو جذب یک آهنربا می‌شوند شاید خودشان نتوانند یکدیگر را جذب کنند. به همین علت نتیجه بنیادی‌تر اصل صفرم را می‌توان به این شکل بیان کرد که: دما کمیتی نرده‌ای و مقایسه‌ای مربوط به تمام سیستم‌های ترمودینامیکی است که با

هم در حال تعادل گرمایی هستند و شرط لازم و کافی برقراری تعادل گرمایی یکسان بودن دما برای همه آن سیستم‌ها است.



خود A و B نیز با یکدیگر در تعادل گرمایی خواهند بود،
(ب)

اگر A و B هر یک با C در تعادل گرمایی باشند،
(الف)

شکل ۲-۱. قانون صفرم ترمودینامیک.

۲-۳ دماسنجی یا اندازه‌گیری دما

برای اندازه‌گیری دما از وسیله‌ای بنام دماسنج استفاده می‌شود. در دماسنج‌ها از ماده‌ای که یکی از خواص آن در اثر تغییر دما تغییر می‌کند استفاده می‌شود. بنابراین در ساخت دماسنج‌ها دو موضوع مورد توجه قرار می‌گیرد. یکی ماده دماسنجی و دیگری کمیت و یا خاصیت دماسنجی. بطور مثال در یک دماسنج جیوه‌ای ماده دماسنجی همان جیوه است و کمیت یا خاصیت دماسنجی حجم جیوه و یا ارتفاع ستون جیوه است که در اثر تغییر دما تغییر خواهد کرد و یا در یک دماسنج گازی، ماده دماسنجی گازی است که در آن دماسنج به کار می‌رود و کمیت دماسنجی می‌تواند حجم گاز و یا فشار گاز باشد چون هر دوی این کمیت‌ها در اثر تغییر دما تغییر می‌کنند.

اما آنچه که در انتخاب انواع دماسنج‌ها اهمیت ویژه‌ای دارد این است که مناسب‌ترین نوع دماسنج و دقیق‌ترین نوع آن کدام است. در دماسنج‌ها پس از انتخاب ماده دماسنجی خاصیت و یا کمیتی برای دماسنجی مناسب‌تر است که تغییر آن با دما به

صورت تابعی خطی باشد. بطوری که اگر X کمیتی باشد که در اثر تغییر دما تغییر می‌کند و دمای متناظر با آن را $T(X)$ در نظر بگیریم معادله (۲-۱) را داشته باشیم.

$$T(X) = \alpha X \quad (1-2)$$

α ثابتی است که باید تعیین شود. بنابراین رابطه نسبت دو دمای اندازه‌گیری شده با دماسنج با دو کمیت X متناظر با آنها به صورت معادله (۲-۲) خواهد بود.

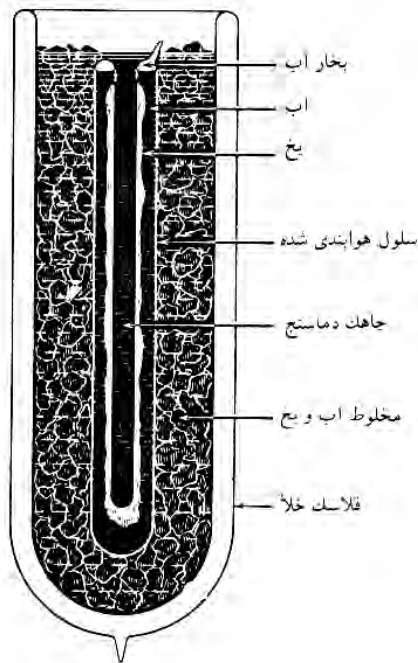
$$\frac{T(X_1)}{T(X_2)} = \frac{X_1}{X_2} \quad (2-2)$$

از آنجا که دما کمیتی مقایسه‌ای است برای تعیین ثابت α و مدرج کردن دماسنج نیاز به نقطه ثابت استاندارد است که در مقایسه با آن تمام دماسنج‌ها برای اندازه‌گیری دمای یک جسم مشخص مقدار یکسانی را نشان بدهند. امروز این نقطه را نقطه سه‌گانه (Triple Point) آب انتخاب می‌کنند که در آن یخ، آب و بخار آب با هم در حال تعادل وجود دارند. هر ماده دارای یک نقطه سه‌گانه منحصر به خود آن ماده است که در فشار یگانه‌ای حاصل می‌شود (شکل ۲-۲). بطور مثال فشار نقطه سه‌گانه آب $4/58$ میلی‌متر جیوه است. دمای نقطه سه‌گانه آب به دلخواه $273/16$ درجه کلوین (به افتخار لرد کلوین دانشمند انگلیسی) انتخاب شده است که به صورت $273/16K$ نشان داده می‌شود. بنابراین معادله (۲-۲) به صورت معادله (۳-۲) نوشته خواهد شد.

$$\frac{T(X)}{T(X_{tr})} = \frac{X}{X_{tr}} \quad (3-2)$$

اندیس (tr) نمایانگر نقطه سه‌گانه آب است. برای تعیین نقطه سه‌گانه هر ماده‌ای از وسیله‌ای بنام سلول سه‌گانه استفاده می‌شود که در شکل ۲-۲ نشان داده شده است. بنابراین معادله (۳-۲) را به شکل معادله (۴-۲) می‌نویسیم.

$$T(X) = 273/16K \frac{X}{X_{tr}} \quad (4-2)$$

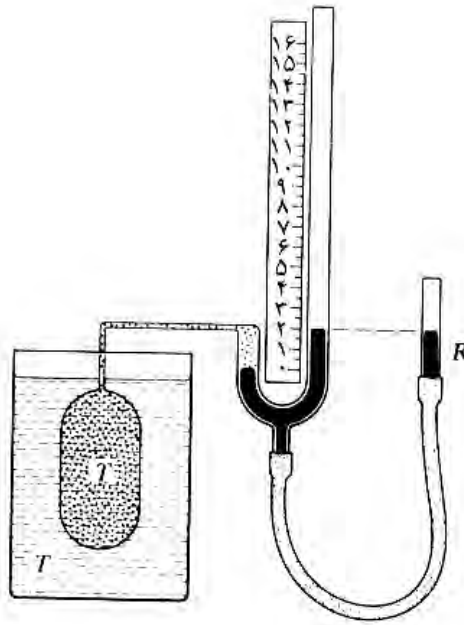


شکل ۲-۲. سلول نقطه سه گانه بین المللی. این سلول محتوی آب خالص است که بعد از خارج کردن تمام هوای داخل آن درش را پوشانده اند و آن را درون ظروف محتوی آب و یخ قرار داده اند. وقتی که یخ، آب و بخار در سلول در حال تعادل وجود دارند، سیستم در نقطه سه گانه است. دماسنجی را که می خواهند درجه بندی کنند در قسمت استوانه ای وسط سلول قرار می دهند.

حال اگر مقدار کمیت دماسنجی در دمای $T(X)$ برابر با X باشد با قرار دادن مقادیر X و T_{ir} در معادله (۲-۴) در مقیاس دمایی که انتخاب کرده ایم مورد نظر $T(X)$ بر حسب آن مقیاس دمایی به دست خواهد آمد.

اما مشکل آنجاست که در اندازه گیری دمای یک جسم مشخص در شرایط یکسان دماسنج های مختلف اعداد یکسانی را نشان نمی دهند. همچنین دیده می شود که یک دماسنج خاص دمای چند ماده را در حال تعادل دمایی یکسان اندازه گیری نمی کند. به همین علت این پرسش مطرح می شود که در عمل، دقیق ترین دماسنج چه دماسنجی است؟ تجربه نشان می دهد که دماسنج های گازی در حجم ثابت در اندازه گیری دما نتایج دقیق تری نشان می دهند. در شکل ۲-۳ یک دماسنج گازی در حجم ثابت را

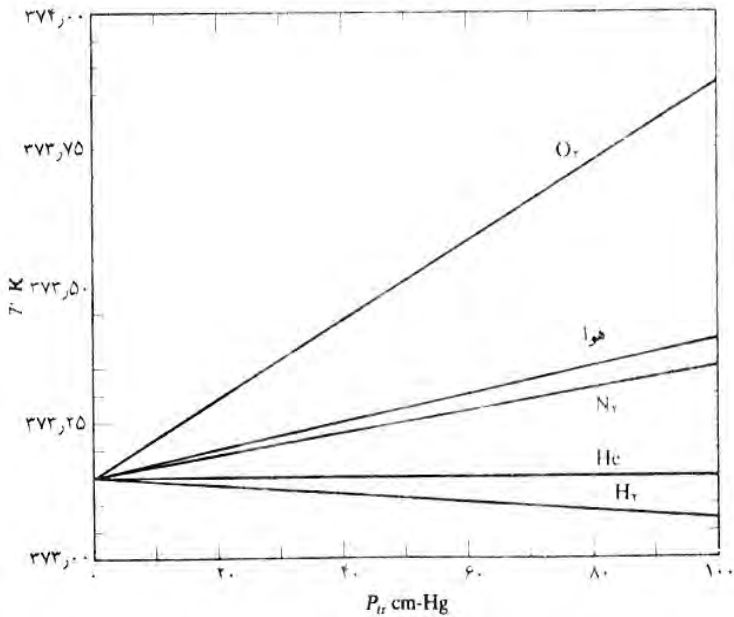
مشاهده می‌کنید. در این دماسنج‌ها ماده دماسنجی، گاز داخل مخزن و کمیت یا خاصیت دماسنجی فشار گاز است که با تغییر دما تغییر می‌کند.



شکل ۲-۳. یک دماسنج گازی در حجم ثابت. تا وقتی که سطح جیوه لوله سمت چپ فشارسنج در روی درجه معینی نظیر صفر باقی بماند حجم گاز محبوس ثابت باقی خواهد ماند. با بالا و یا پایین آوردن مخزن R می‌توان سطح جیوه را همواره در مقابل صفر ثابت نگه داشت.

ولی نتیجه اندازه‌گیری دما با دماسنج‌های گازی با گازهای مختلف در حجم ثابت فقط در شرایطی که فشار گاز داخل مخزن به اندازه کافی پایین باشد نتایج یکسان و مستقل از جنس گاز ارائه می‌دهند. شکل ۲-۴ بیانگر این موضوع است. لذا معادله (۲-۴) در مورد دماسنج‌های گازی به شکل معادله (۲-۵) نوشته می‌شود.

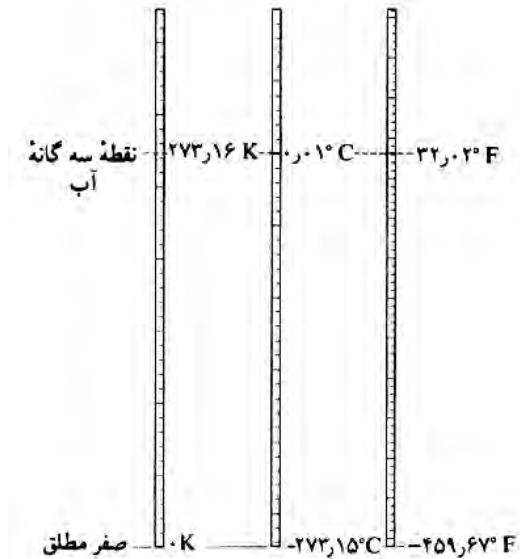
$$T(P) = 273.16K \frac{P}{P_{tr}} \quad (V \text{ ثابت}) \quad (2-5)$$



شکل ۲-۴. خواننده‌های دماسنج گازی در حجم ثابت با گازهای مختلف دمای T بخار آب چگالیده به صورت تابعی از P_{tr} . زمانی که مقدار گاز در دماسنج کاهش می‌یابد فشار آن P_{tr} در نقطه سه‌گانه نیز کاهش می‌یابد. به ازاء یک مقدار P_{tr} مقادیر T حاصل از اندازه‌گیری با دماسنج‌های گازی با گازهای مختلف با هم تفاوت دارند. اگر چه این تفاوت ناچیز است اما قابل اندازه‌گیری است. برای موارد حدی نشان داده شده در شکل (O_2 و H_2 در فشار ۱۰۰ سانتی‌متر جیوه) این اختلاف در حدود ۰٫۲ درصد است (توجه داشته باشید که تمام محور قائم فقط ۱٫۰۰ درجه کلوین را دربر می‌گیرد). هلیوم در تمام فشارها تقریباً مقدار یکسانی را نشان می‌دهد (نمودار تقریباً افقی است). بطوری که می‌توان گفت که رفتار گاز هلیوم در تمام گستره نشان داده شده بسیار شبیه رفتار یک گاز کامل است.

اما از آنجا که گفتیم نتیجه دماسنجی با دماسنج‌های گازی فقط در فشار پایین دقیق و مستقل از جنس گاز است بنابراین معادله (۲-۵) را به صورت معادله (۲-۶) می‌نویسیم.

$$T(P) = 273.16 K \lim_{P_{tr} \rightarrow 0} \left(\frac{P}{P_{tr}} \right) \quad (\text{ثابت } V) \quad (2-6)$$



شکل ۲-۵. مقیاس‌های دمایی کلوین، سلسیوس و فارنهایت.

۲-۴ مقیاس‌های دمایی

در این کتاب از سه مقیاس یا اشل دمایی با نام‌های مقیاس دمایی کلوین یا مطلق که در فصل‌های بعد از آن به تفصیل صحبت خواهیم کرد، مقیاس دمایی سلسیوس (سانتی‌گراد یا صد قسمتی که به افتخار دانشمند سوئدی سلسیوس به این نام خوانده شده است) و مقیاس دمایی فارنهایت استفاده می‌کنیم. دو مقیاس اخیر بر اساس مقیاس بنیادی دما در علوم تعریف می‌شوند. مقیاس دمای سلسیوس به صورت T_c و با علامت $(^{\circ}C)$ نشان داده می‌شود و یکای آن با یکای دمای کلوین یکسان است. در این مقیاس دمایی نقطه سه‌گانه آب $0.01^{\circ}C$ است که معادل $273.16 K$ می‌باشد. در مقیاس دمایی سلسیوس نقطه ذوب و یا انجماد آب در فشار یک اتمسفر $0.01^{\circ}C$ و دمای جوش آب در همین فشار $100.00^{\circ}C$ است.

در مقیاس دمایی فارنهایت که در کشورهای انگلیسی زبان استفاده می‌شود از نماد T_F برای نمایش دما با علامت $^{\circ}F$ استفاده می‌شود. در مقایسه با مقیاس دمای سلسیوس دمای ذوب یخ $(0.01^{\circ}C)$ در مقیاس دمایی فارنهایت معادل $32^{\circ}F$ و دمای

جوش آب ($100/00^{\circ}C$) برابر با $212^{\circ}F$ است. در واقع یکای مقیاس دمایی فارنهایت $\frac{5}{9}$ برابر مقیاس دمایی سلسیوس است. رابطه بین این سه مقیاس دمایی با توجه به شکل ۲-۵ به صورت معادله (۷-۲) نوشته می شود

$$\frac{T - 273/15}{100} = \frac{T_C}{100} = \frac{T_F - 32}{180} \quad (7-2)$$

البته در محاسبات $273/15$ را برابر با $273/00$ می گیرند. بطور خلاصه در مقیاس عملی بین الملی دماسنج استاندارد، دماسنج گازی در حجم ثابت و در فشار پایین و نقطه استاندارد دماسنجی نقطه سه گانه آب است که به دلخواه k $273/16$ انتخاب می شود. در جدول (۱-۲) چند نقطه ثابت در مقیاس عملی بین الملی نشان داده شده است.

مثال ۱: الف) ۵۲ درجه سلسیوس چند درجه فارنهایت و چند درجه کلوین است؟
 ب) در چه دمایی مقیاس های دمایی سلسیوس و فارنهایت یک عدد را نشان می دهند؟
 پ) در چه دمایی مقیاس های دمایی کلوین و فارنهایت یک عدد را نشان می دهند؟
 ت) آیا دمایی وجود دارد که مقیاس های دمایی کلوین و سلسیوس هر دو آن دما را نشان بدهند؟

حل: الف) با استفاده از معادله (۷-۲) اگر دمایی را که دو مقیاس دمایی سلسیوس و فارنهایت یکسان نشان می دهند T_c در نظر بگیریم خواهیم داشت

$$\frac{T_c}{100} = \frac{T_c - 32}{180}$$

و در نتیجه با حل معادله فوق برحسب T_c دمای مورد نظر $32^{\circ}C$ - و یا $89.6^{\circ}F$ - خواهد شد.

ب) با استدلال قسمت الف اگر دمای مورد نظر T باشد خواهیم داشت

$$\frac{T}{180} = \frac{T - 273}{100}$$

با حل این معادله برحسب T دمای مورد نظر $574,25 K$ و یا $574,25 ^\circ F$ به دست می آید.
 پ) در هیچ دمایی دو مقیاس دمایی سلسیوس و کلوین یک عدد را نشان نخواهند.
 چون همیشه بین این دو مقیاس دمایی به اندازه $273,15$ اختلاف وجود دارد.

جدول ۱-۲. چند نقطه ثابت در مقیاس عملی بین الملی.

ماده	حالت	دما (کلوین K)	دما (سلسیوس $^\circ C$)
هیدروژن	نقطه سه گانه	۱۳,۸۱	-۲۵۹,۳۴
هیدروژن	نقطه جوش	۲۰,۲۸	-۲۵۲,۸۷
نئون	نقطه جوش	۲۷,۱۰۲	-۲۴۶,۰۴۸
اکسیژن	نقطه سه گانه	۵۴,۳۶۱	-۲۱۸,۷۸۹
اکسیژن	نقطه جوش	۹۰,۱۸۸	-۱۸۲,۹۶۲
آب*	نقطه سه گانه	۲۷۳,۱۶	۰,۰۱
آب*	نقطه جوش	۳۷۳,۱۵	۱۰۰
روی	نقطه انجماد	۶۹۲,۷۳	۴۱۹,۵۸
نقره	نقطه انجماد	۱۲۳۵,۰۷	۹۶۱,۹۳
طلا	نقطه انجماد	۱۳۳۷,۵۸	۱۰۶۴,۴۳

*آب مورد استفاده باید دارای ترکیب ایزوتوپی آب دریا باشد.

۲-۵ اثر تغییر دما

بطور کلی اثر تغییر دما در اجسام تغییر ابعاد آنها است. به غیر از چند جسم نظیر کربن، بیسموت و آب (آب فقط در بازه دمایی بین صفر و چهار درجه سلسیوس حالت غیرعادی دارد) بقیه اجسام ابعادشان در اثر افزایش دما افزایش می یابد. تغییر ابعاد به سه صورت طولی، سطحی و حجمی صورت می گیرد که در صورت همگن بودن جسم تغییر بعد در همه ابعاد به ازاء یک تغییر دمای معین یکسان خواهد بود. با تغییر دما فاصله متوسط بین اتمها تغییر می کند و این امر موجب تغییر ابعاد جسم خواهد شد.

۲-۶ انبساط طولی، سطحی و حجمی

اگر طول اولیه جسمی l و تغییر طول آن در اثر تغییر دمای ΔT برابر با Δl باشد آنگاه این تغییر طول متناسب با طول اولیه و تغییر دمای جسم خواهد بود.

$$\Delta l \propto l_0 \Delta T \quad (۸-۲)$$

که ضریب تناسب معادله (۸-۲) را ضریب انبساط طولی نامیده و به α نشان می‌دهند. در نتیجه معادله (۸-۲) به صورت معادله (۹-۲) نوشته می‌شود

$$\Delta l = \alpha l_0 \Delta T \quad (۹-۲)$$

بنابراین ضریب انبساط طولی α که برابر با $\alpha = \frac{1}{l_0} \frac{\Delta l}{\Delta T}$ است به عنوان تغییر طول نسبی به ازاء یک درجه تغییر دما خواهد بود. به همین ترتیب می‌توان تغییرات سطح و حجم اجسام را به صورت معادلات (۱۰-۲) و (۱۱-۲) نشان داد

$$\Delta s = \beta s_0 \Delta T \quad (۱۰-۲)$$

$$\Delta v = \gamma v_0 \Delta T \quad (۱۱-۲)$$

که در این معادلات β و γ به ترتیب ضرایب انبساط سطحی و حجمی هستند و اگر جسم همگن باشد می‌توان معادلات (۱۰-۲) و (۱۱-۲) را به صورت معادلات (۱۲-۲) و (۱۳-۲) نوشت

$$\Delta s = 2\alpha s_0 \Delta T \quad (۱۲-۲)$$

$$\Delta v = 3\alpha v_0 \Delta T \quad (۱۳-۲)$$

بنابراین β و γ نظیر α به ترتیب تغییرات سطح نسبی و حجم نسبی به ازاء تغییر یک درجه دما هستند. در جدول (۲-۲) ضریب انبساط طولی چند جسم آورده شده است.

مثال ۲: ظرفی شیشه‌ای به حجم ۲۰۰ سانتی‌متر مکعب از جیوه پر شده است. اگر آن را تا ۱۰۰ درجه سلسیوس گرم کنیم چند سانتی‌متر مکعب جیوه بیرون می‌ریزد؟ ضرایب انبساط حجمی شیشه و جیوه به ترتیب $1,2 \times 10^{-5}$ و 18×10^{-5} بر درجه سلسیوس است.

جدول ۲-۲. ضریب انبساط طولی چندجسم (بین صفر و 100°C در مورد یخ بین صفر و 10°C).

ماده	α ($^{\circ}\text{C}^{-1}$)	ماده	α ($^{\circ}\text{C}^{-1}$)
آلومینیوم	23×10^{-6}	لاستیک سخت	23×10^{-6}
برنج	19×10^{-6}	یخ	23×10^{-6}
مس	17×10^{-6}	اینوار(آلیاژی از آهن و نیکل)	23×10^{-6}
شیشه(معمولی)	9×10^{-6}	سرب	23×10^{-6}
شیشه (پیرکس)	$3/2 \times 10^{-6}$	فولاد	23×10^{-6}

حل: با توجه به معادله (۲-۱۱) افزایش حجم شیشه و جیوه به ترتیب برابر است

با

افزایش حجم شیشه

$$\Delta v = 1/2 \times 10^{-5} \times 200 \times (100 - 20) = 0,192 \text{ cm}^3$$

و افزایش حجم جیوه

$$\Delta v = 18 \times 10^{-5} \times 200 \times (100 - 20) = 2,88 \text{ cm}^3$$

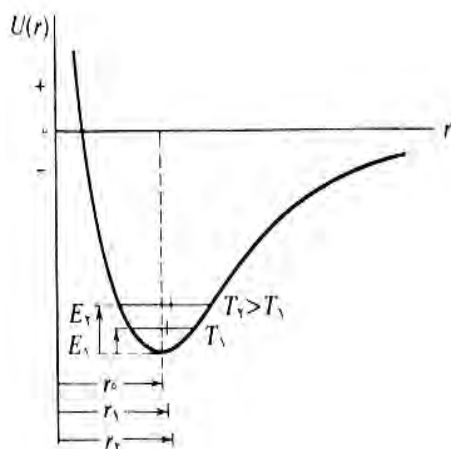
بنابراین حجم جیوه‌ای که از ظرف شیشه‌ای بیرون می‌ریزد برابر است با

$$2,88 - 0,192 = 2,688 \text{ cm}^3$$

یادآوری این نکته ضروری است که دلیل میکروسکوپی تغییر ابعاد اجسام در اثر تغییر دما نامتقارن بودن نمودار انرژی پتانسیل اتم‌ها برحسب فاصله بین هسته‌های آنهاست. انرژی پتانسیل بین دو اتم در یک جامد بلورین تابعی از فاصله میان هسته‌های آنهاست و نمودار تغییر انرژی پتانسیل برحسب فاصله میان هسته‌ای همانند شکل ۲-۶ نموداری نامتقارن است.

زمانی که اتم‌ها به هم نزدیک‌تر از فاصله r_0 می‌شوند نیروهای رانشی قوی غلبه کرده و نمودار انرژی پتانسیل خیلی سریع بالا می‌رود اما وقتی که اتم‌ها از هم دور می‌شوند نیروهای رانشی ضعیف شده و نمودار انرژی پتانسیل کندتر بالا می‌رود. به ازاء یک مقدار معین از انرژی ارتعاشی فاصله اتم‌ها به تناوب از یک مقدار کمینه به یک

مقدار بیشینه تغییر خواهد کرد و به دلیل طبیعت نامتقارن نمودار انرژی پتانسیل فاصله متوسط اتم‌ها از فاصله تعادل بیشتر می‌شود. این افزایش فاصله به این دلیل است که اتم در جایی که سرعت ارتعاشی کمتری دارد زمان بیشتری صرف می‌کند و چون انرژی ارتعاشی با افزایش دما افزایش می‌یابد در نتیجه فاصله بین اتم‌ها افزایش یافته و کل جسم منبسط می‌شود.



شکل ۲-۶. نمودار انرژی پتانسیل برای دو اتم مجاور هم در یک جامد بلورین به صورت تابعی از فاصله میان هسته‌ای آنها. فاصله تعادل r_0 است. چون نمودار نامتقارن است فاصله متوسط $(r_1$ و $r_2)$ با افزایش دما $(T_1$ و $T_2)$ و در نتیجه با افزایش انرژی ارتعاشی $(E_1$ و $E_2)$ افزایش می‌یابد.

۷-۲ مثال‌های حل شده

- اگر نمودار انرژی پتانسیل برحسب فاصله بین هسته‌ای متقارن بود آنگاه چه وضعیتی برای اجسام در هنگام افزایش دما رخ می‌داد؟
- حل: اگر نمودار انرژی پتانسیل برحسب فاصله بین هسته‌ای اتم‌ها متقارن بود دیگر تفاوتی نداشت که بزرگی دامنه حرکات ارتعاشی چقدر باشد و فاصله متوسط بر فاصله تعادل منطبق می‌شد و ابعاد جسم تغییر نمی‌کرد.

۲. در مورد اجسامی که در یک بازه دمایی خاص در اثر افزایش دما دچار کاهش ابعاد می‌شوند بطور ساده توضیح دهید چه دلیلی می‌توان ارائه داد؟

حل: در تحلیل فوق ما فقط برای اتم‌های جسم حرکت ارتعاشی طولی را مد نظر داشتیم. در حالی که این تحلیل برای اجسامی که در بازه دمایی خاصی در اثر افزایش دما دچار کاهش ابعاد می‌شوند صحیح نیست. اتم‌های جامدات می‌توانند علاوه بر ارتعاشات طولی، ارتعاشات عرضی هم داشته باشند و در بازه دمایی خاصی که ارتعاشات عرضی بر ارتعاشات طولی برتری داشته باشند با افزایش دما فاصله اتم‌ها کاهش یافته و جسم منقبض می‌شود. البته این تحلیل ساده است ولی می‌تواند پاسخگوی حالت‌های ساده‌ای از وضعیت پیچیده حرکت اتم‌ها در داخل اجسام باشد. با تحلیل کوانتومی و ترمودینامیکی می‌توان حالت‌های پیچیده را هم توضیح داد.

۲-۸ مسائل

۱. حد نسبت فشار گازی در نقطه ذوب و نقطه سه‌گانه آب وقتی که حجم گاز ثابت نگاه داشته شود برابر $2/19816$ است. دمای ذوب سرب چند درجه کلوین است؟

۲. دماسنج مقاومتی دماسنجی است که کمیت و یا خاصیت دماسنجی آن (مقاومت الکتریکی) است. می‌توان دماهای اندازه‌گیری شده برحسب کلوین را با چنین دماسنجی مستقیماً متناسب با مقاومت R (برحسب اهم) تعریف کرد. اگر مقاومت یک دماسنج مقاومتی در زمانی که حباب آن در دمای نقطه سه‌گانه آب ($273/16$ درجه کلوین) درون آب قرار می‌گیرد برابر با $90/35$ اهم باشد و حباب در محیطی قرار بگیرد که مقاومت در آن $96/28$ اهم است، دماسنج چه دمایی را نشان می‌دهد؟

۳. برای اطمینان میخ پرچ‌های آلومینیومی که برای اتصال بال هواپیما به کار می‌رود تا 78°C به کمک یخ خشک (CO_2 جامد) سرد می‌شود تا بتوان قطر میخ پرچ را ضخیم‌تر از سوراخ انتخاب کرد. اگر قطر سوراخ $0/62$ سانتی‌متر باشد قطر میخ پرچ را به دست آورید.

۴. پاندول ساعتی هر دو ثانیه یک نوسان کامل انجام می‌دهد. در دمای 25°C ساعت درست کار می‌کند. الف) اگر دمای محیط به 15°C کاهش یابد کاهش نسبی طول پاندول را به دست آورید (پاندول را آهنی و ساده در نظر بگیرید).
ب) ساعت در دمای 15°C در شبانه روز چقدر تندتر یا کندتر کار می‌کند؟

۵. نشان دهید که اگر متغیر بودن α و بستگی آن به T را در نظر بگیریم خواهیم داشت

$$L = L_0 \left[1 + \int_{r_0}^r \alpha(T) dT \right]$$

۶. طول یک سیم آهنی در دمای 20°C برابر با 10 سانتی‌متر است. اگر دمای آن را به 520°C برسانیم $1/8$ سانتی‌متر به طولش اضافه می‌شود. ضریب متوسط انبساط طولی آن را به دست آورید.

۷. چگالی، جرم واحد حجم است. اگر حجم به دما بستگی داشته باشد چگالی نیز به دما وابسته خواهد بود. نشان دهید که تغییر چگالی $\Delta\rho$ ناشی از تغییر دمای ΔT از رابطه $\Delta\rho = -\beta\rho\Delta T$ به دست می‌آید که β ضریب انبساط حجمی است. در مورد علامت منفی توضیح دهید.

۸. نشان دهید که اگر دمای مایع درون یک فشارسنج به اندازه ΔT تغییر کند و فشار ثابت بماند، ارتفاع ستون مایع به اندازه $\Delta h = \beta h \Delta T$ تغییر خواهد کرد که β ضریب انبساط حجمی است.

فصل سوم

نظریه جنبشی گازها

۳-۱ مقدمه

با نوشتن معادله حاکم بر حرکت ذره، اتم، مولکول و یا هر جسم دیگری می‌توان به مطالعه رفتار آن پرداخت. طبیعی است چنانچه تعداد ذرات زیاد باشد، آنگاه نوشتن معادله حرکت هر ذره یا مولکول و بررسی رفتار ذرات ممکن نیست. به عبارت دیگر نمی‌توان توصیف میکروسکوپی یک گاز را با نوشتن معادلات مولکول‌های منفرد آن انجام داد.

دو روش متفاوت در توصیف ساختار میکروسکوپی هر دستگاه نظیر گاز وجود دارد: یکی نگاه ترمودینامیکی است که در آن متغیرهای مستقل مانند P فشار، V حجم و T دما را به عنوان مختصه‌های معادله حالت دستگاه در نظر می‌گیرند متوسط‌گیری از پارامترهای میکروسکوپی به پارامترهای ماکروسکوپی رسید. نگاه دیگر استفاده از مکانیک آماری است که بر چینه‌های احتمالات قرار دارد. در این نگاه، تعداد جایگاه‌هایی که قابل اشغال هستند مد نظر قرار می‌گیرند و از آنجا رابطه‌ای که نقش پلی بین دنیای میکروسکوپی با آماری با دنیای ماکروسکوپی ترمودینامیک را بازی می‌کند به دست می‌آید. بدین ترتیب می‌توان کمیت‌های مستقل ماکروسکوپی مانند فشار را بر اساس متوسط آهنگ برخورد ذرات به یک سطح به دست آورد.

۳-۲ قانون عمومی گازها

حال که نمی‌توان معادله حرکت تک تک مولکول‌های یک گاز را نوشت و به مطالعه رفتار مولکول‌های گاز پرداخت، می‌توان مسیری را در پیش گرفت که بین فشار (P)،

حجم (V) و دما (T) برای n مول از گاز رابطه‌ای را به دست آورد. گازها کامل یا ایده‌آل در نظر گرفته می‌شوند و از برهم‌کنش بین مولکول‌های آن چشم‌پوشی می‌شود و مولکول‌های آن که سخت و کروی هستند با شبکه برخورد کشسان دارند و به صورت ذراتی بدون حجم در نظر گرفته می‌شوند. فضای اشغال شده به وسیله این گازها در قیاس با حجم کل گاز بسیار ناچیز می‌باشد.

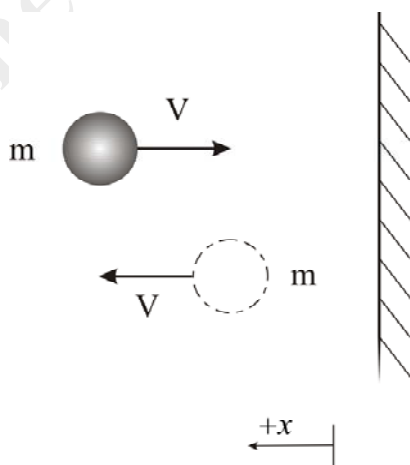
همانطور که بیان شد، یکی از پارامترهای مهم فشار است و می‌دانید که فشار نیروی قائم وارد بر سطح است. از آنجایی که نیرو آهنگ تغییر تکانه خطی نسبت به زمان است:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (1-3)$$

تلاش می‌کنیم تا تکانه خطی، نیرو و سرانجام فشار را به دست آوریم.

مثال ۱: توپی به جرم m با سرعت V با دیواری قائم برخورد کشسان انجام می‌دهد. تغییر تکانه خطی آن را بیابید.

حل: با توجه به شکل (۱-۳) می‌توان تکانه خطی اولیه (P_i) و نهایی (P_f) را به دست آورد. بزرگی تکانه‌های خطی برابرند با:



شکل ۱-۳. اندازه تغییر تکانه خطی توپ.

$$P_i = -mV_i$$

$$P_f = mV_f$$

اما چون برخورد کشسان است، $V_i = V_f = V$ می‌باشد. اکنون:

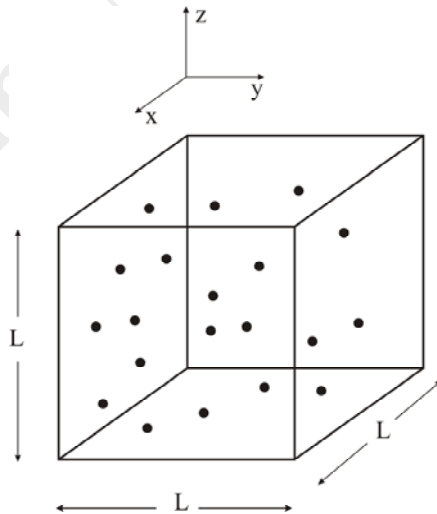
$$\Delta P = P_f - P_i = 2mV \quad (2-3)$$

خودآزمایی ۱: اگر توپ به طور مایل به دیوار برخورد کند، روابط فشار و نیرو چه تغییری می‌کنند؟

مثال ۲: n مولکول گازی که هیچگونه برهم‌کنشی با یکدیگر ندارند در جعبه‌ای مکعبی در نظر بگیرید و فشار وارد بر یک رخ مکعب را به دست آورید.

حل: مکعبی به طول L در شکل (۲-۳) شامل n مولکول است که آزادند تا در

هر جهتی حرکت کنند. اما چون جهت متمتازی وجود ندارد $\frac{n}{6}$ مولکول‌ها به سمت هر رخ پیش می‌روند.



شکل ۲-۳. یک ششم مولکول‌ها به سمت هر رخ پیش می‌روند.

$$\Delta P_x = \frac{2}{3} nmv = \frac{1}{3} nmv \quad (3-3)$$

در اینجا فرض می‌شود که اندرکنشی بین مولکول‌های گاز وجود ندارد و حرکت آنها حرکت یکنواخت و مستقیم می‌باشد. بنابراین هر مولکول مسافت ℓ را با سرعت v در زمان t طی می‌کند.

$$\ell = Vt \Rightarrow t = \frac{\ell}{V} \quad (4-3)$$

از تعریف نیرو در رابطه (۱-۳) و استفاده از روابط (۳-۳) و (۴-۳) می‌توان نیرو را به دست آورد.

ولی باید توجه داشت که در مدت زمان t آن تعداد از مولکول‌ها که در حجمی استوانه‌ای شکل به طول ℓ و سطح مقطع A به دیوار برخورد می‌کنند، برابرند با:

$$\Delta P_x = \left(\frac{1}{3} nmV \right) (A \ell) \quad (5-3)$$

$$F_x = \frac{\Delta P_x}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{3} nmV A \ell}{\frac{\ell}{V}}$$

که در آن ΔP_x تکانه خطی مؤثر وارد بر رخ سمت راست و F_x نیروی مؤثر وارد بر رخ سمت راست است.

چون انرژی جنبشی برابر $E_K = \frac{1}{2} mV^2$ است و فشار (P) همان نیروی قائم وارد بر رخ می‌باشد، می‌توان فشار وارد بر رخی مانند رخ سمت راست را به دست آورد:

$$P = \frac{F}{A} \quad (6-3)$$

و با استفاده از رابطه (۵-۳) فشار را به دست آورد:

$$P = \frac{1}{3} nmV^2 = \frac{2}{3} E_K \quad (7-3)$$

البته در قسمت‌های بعدی رابطه بین انرژی جنبشی و انرژی kT (که T دما K ثابت بولتزمن است) به دست خواهد آمد و سپس رابطه عمومی گازهای کامل را می‌توان به صورت زیر از آن استخراج نمود:

$$PV = nRT \quad (۸-۳)$$

که R ثابت جهانی گاز با مقدار زیر است:

$$R = ۸,۳۱۴ \frac{\text{J}}{\text{K}} \quad (۹-۳)$$

و یکای فشار و دما به ترتیب پاسکال بر کلوین می‌باشد.

قانون گاز کامل یا ایده‌آل تقریباً برای همه گازها در دماها و فشارهای مورد پذیرش به خوبی عمل می‌کند. در اینجا می‌توان یکای دیگر دما، فشار و حجم را به کار گرفت ولی باید توجه داشت که مقدار ثابت جهانی گاز باید بر اساس دستگاه اندازه‌گیری واحدها تغییر کند تا به اعتبار رابطه (۸-۳) لطمه‌ای وارد نشود.

نکته‌ای که حائز اهمیت می‌باشد، برقراری شرایطی است که رابطه (۸-۳) معتبر می‌ماند. یعنی چنانچه نتوان از برهم‌کنش مولکول‌های گاز به دلیل فشرده شدن و به عبارتی از متراکم شدن چشم پوشید آنگاه قانون در رابطه (۸-۳) معتبر نخواهد بود. بنابراین این رابطه فقط برای گازهای بسیار رقیق سازگار است.

هر چند به لحاظ تاریخی باوری وجود دارد که وجود مولکول تنها در تغییر جهت مولکول دیگر خود نمایی می‌کند ولی یک مولکول برای همیشه قادر به حرکت آزادانه نیست و تنها برخورد را نباید برخورد آن با سطوح ظرف نگهدارنده آنها در نظر گرفت.

۳-۳ توزیع ماکسولی

دمای هر گاز معیاری از انرژی جنبشی انتقالی مولکول‌های گاز به شمار می‌آید. از طرف دیگر انرژی جنبشی $\left(E_K = \frac{1}{2}mV^2\right)$ از یک سو با مجذور سرعت متناسب و از سوی دیگر متناسب با kT است در نتیجه دمای (T) با مجذور سرعت (یعنی V^2) متناسب است به عبارت دیگر

$$T \propto V^2 \quad (۱۰-۳)$$

اکنون این پرسش مطرح است که آیا تمام مولکول‌ها دارای رابطه‌ای مانند (۱۰-۳) هستند؟ پاسخ منفی است. به عبارت دیگر تنها می‌توان از متوسط تندی یا اندازه سرعت مولکول‌ها صحبت کرد که برابر مقدار مورد انتظار می‌باشد و با $\langle V \rangle$ نمایش می‌دهیم. بنابراین مولکول‌های گاز دارای بیشینه سرعتی برابر با $\langle V \rangle$ می‌باشند یعنی

$$\langle V \rangle = V_{max} \quad (۱۱-۳)$$

اما ممکن است برخی از مولکول‌ها سرعتی بیشتر یا کمتر از مقدار میانگین سرعت یا همان مقدار چشم‌داشتی سرعت $\langle V \rangle$ را داشته باشند، پس باید سرعت مولکول‌هایی را که از سرعت $\langle V \rangle$ به عنوان یک معیار انحراف نشان می‌دهند نیز لحاظ کرد. به همین دلیل

$$\Delta V = V - \langle V \rangle \quad (۱۲-۳)$$

و یا مربع آن

$$(\Delta V)^2 = (V - \langle V \rangle)^2 \quad (۱۳-۳)$$

اهمیت پیدا می‌کند ولی در آن سرعت متوسط مولکول‌های گاز ایده‌آل را به دست آورد:

$$V_{rms} = \langle \Delta V \rangle = \sqrt{\langle (V - \langle V \rangle)^2 \rangle}$$

و یا

$$V_{rms} = \sqrt{\langle V^2 \rangle - \langle V \rangle^2} \quad (۱۴-۳)$$

رابطه مهم (۱۴-۳) به نحوی انحراف از معیار و واریانس سرعت مولکول‌ها را از مقدار چشم‌داشتی به دست می‌دهد. بدین ترتیب سرعت میانگین مربعی یا تندی rms به دست آمد. اما مولکول‌های گاز کامل برهم‌کنشی با یکدیگر ندارند و هیچ تمایزی در سرعت و حرکت مولکول‌ها وجود ندارد. برخوردها باعث تغییر جهت سرعت می‌شوند و در نتیجه می‌توان $\langle v \rangle$ را برابر صفر در نظر گرفت در نتیجه v_{rms} را به صورت زیر به دست آورد:

$$V_{rms} = \sqrt{\langle V^2 \rangle} \quad (15-3)$$

که با توجه به (۱۵-۳) می توان نوشت:

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \quad (16-3)$$

این سرعتی است که با آن یک گاز به درون خلاء کشیده می شود و به عبارتی گاز در یک انبساط آزاد به یک خلاء منبسط می شود. فراموش نشود که مدت زمانی طول می کشد تا برخوردهای متوالی صورت گیرد و زمان میانگین بین این برخوردهای پیاپی را زمان برخورد می گویند که از مرتبه زمان واهلش که جلوتر به آن خواهیم پرداخت است. در یک جمله می توان زمان مذکور را نسبت طول پویس آزاد ℓ_m یا مسافتی که مولکولی طی می کند تا با مولکول دیگر برخورد کند به سرعت مولکول است. آنگاه زمان مطابق رابطه زیر به دست می آید:

$$t = \frac{\ell_m}{V} \quad (17-3)$$

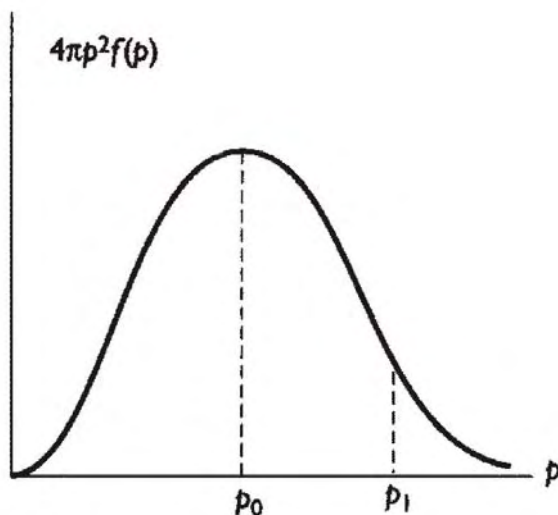
اکنون به توزیع تندی مولکولهای گاز کامل بر می گردیم. اگر N مولکول گاز کامل در حجمی برابر با V دارای تکانه ای بین P و $P+dP$ و یا انرژی جنبشی انتقالی بین E و $E+dE$ باشند، آنگاه چگالی مولکولهای $n = \frac{N}{V}$ می تواند برابر مساحت زیر منحنی شکل ۳-۳ باشد. فرض کنیم در کره ای به شعاع P (اندازه تکانه خطی)، نواری به ضخامت dP را برگزیده باشیم:

$$dV = 4\pi P^2 dP \quad (18-3)$$

و با توجه به این که تابع توزیع تندی برای گازهای ایده آل به صورت تابع توزیع ماکسولی است $f(P)$ داریم:

$$f(P) = ce^{-\lambda(P-P)^2} \quad (19-3)$$

که به درستی نشان می‌دهد که منحنی توزیع در دو سوی $P = P_0$ به طور نمایی فرو می‌افتد (شکل ۳-۳) و این همان تابع توزیع تندی ماکسولی می‌باشد.

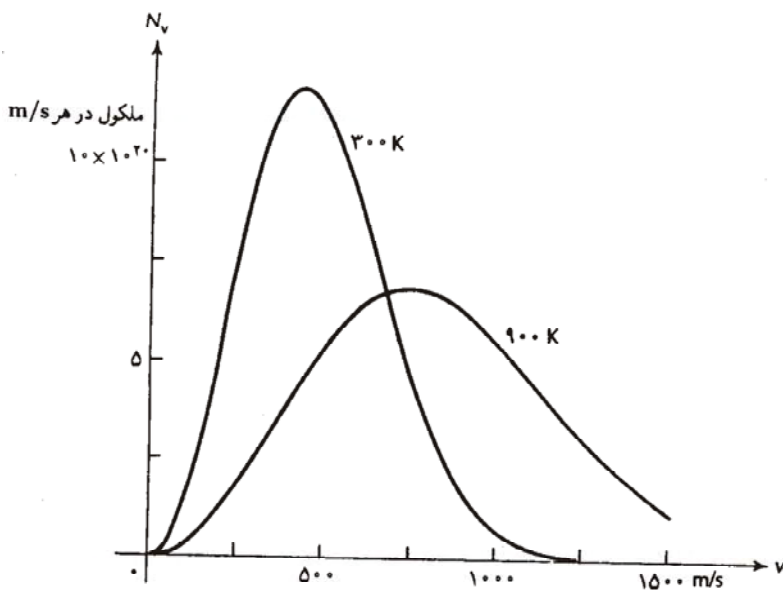


شکل ۳-۳. توزیع ماکسولی سرعت مولکول‌های گاز کامل.

با توجه به $E_K = \frac{P^2}{2m} = \frac{3}{2}kT$ می‌توان به نتیجه مهمی رسید؛ قلّه بیشینه تعداد مولکول‌هایی که با تندی مقدار چشم‌داشتی حرکت می‌کنند با افزایش دما به سمت سرعت‌های بالاتر جابجا می‌شود. به عنوان مثال در شکل ۳-۴ توزیع ماکسولی تندی‌های یک مول گاز نیتروژن را نشان داده‌ایم که با سه برابر شدن دما شاهد دو برابر شدن تندی مولکول‌ها هستیم.

تابع توزیع ماکسولی برای یک گاز آزاد در غیاب پتانسیل خارجی، مستقل از موقعیت مکانی مولکول‌ها است. اما این توزیع با مجذور سرعت مولکول‌ها تغییر می‌کند. به همین دلیل به جای آن که در فضای مکان r عنصر حجمی را معرفی کنیم سعی کردیم در فضای تکانه خطی P حجمی معادل $4\pi P^2 dP$ که در بر گیرنده مولکول‌های گاز است در نظر بگیریم. بنابراین در فضای کانونیک یا بندادی کلاسیک که تار و پود آن از موقعیت مکانی r و تکانه خطی P شکل گرفته است می‌توان با

تعیین مختصه هر مولکول موقعیت فضایی و تکانه خطی آن را به دست آورد. به عبارت دیگر هم از حال مولکول (موقعیت مکانی r و تکانه خطی P) و هم از آینده آن با خبر بود و آن را با دقت کامل به دست آورد. این موضوع از دیدگاه کلاسیک قابل توجیه است و در دروس دیگر به توابع توزیعی که ایده مطلقانگاری فضا و زمان را فرو می‌پاشد خواهید آموخت. اما در اینجا در فضای کوانتیک کلاسیک هستیم و نگاهی کلاسیک به قضایا داریم.



شکل ۳-۴. توزیع ماکسولی تندی‌های مولکول‌های گاز نیتروژن که مقدار چشم‌داشتی تندی با افزایش دما بیشتر شده است.

خودآزمایی ۲: چرا افزایش دما باعث کاهش تعداد مولکول‌ها می‌شود؟

۳-۴ مسافت آزاد میانگین

در مولکول‌های گاز کامل تنها پدیده برخورد، برخورد مولکول‌ها با دیواره‌های ظرف نگهدارنده مولکول‌ها است و هیچ برخورد دیگری لحاظ نمی‌شود. هر چند نادیده

گرفتن برخورد بین مولکول‌ها تأثیر چندانی در فشار وارد از طرف مولکول‌های گاز بر دیواره‌های ظرف بر جای نمی‌گذارد ولی در انتقال گرما، تکانه خطی در لایه‌های گاز با سرعت‌های جریان غیریکنواخت و نیز انتقال گاز از میان گاز دیگر به وسیله عمل پخش می‌تواند تأثیر بزرگی را بر جای گذارد.

از طرف دیگر مسافت آزاد میانگین مولکول‌های گاز که با ℓ_m نمایش داده می‌شود می‌تواند نمایانگر بروز هر برخوردی باشد. زیرا مسافت میانگین را می‌دهد که برابر مسافتی است تا یک مولکول پیش از هر برخوردی پیماید. به طور قطع ℓ_m رابطه عکس با تعداد الکترون‌ها در واحد حجم یا چگالی مولکول‌ها (n) دارد:

$$\ell_m \propto \frac{1}{n} \quad (20-3)$$

در اینجا اساس، ذره‌ای بودن مولکول‌ها است، در صورتی که نمی‌توان صحبت از برخوردی با موجودی بدون بعد نمود. در واقع سطح مقطع پراکندگی را جهت بروز برخورد باید در نظر گرفت و بدون آن که به جزئیات مسأله پردازیم انتظار می‌رود که مسافت آزاد میانگین ℓ_m جدای از چگالی به پارامتر مهم دیگری به نام سطح مقطع مربوط به پراکندگی (σ) هم ارتباط می‌یابد و چنانچه در شرایط استاندارد که حجم برابر است، یک مول از گاز رقیق را در نظر بگیریم آنگاه دما و فشار نیز برابر خواهد شد با:

$$V_0 = 22.4 \times 10^{-3} \text{ cm}^3 \quad (21-3)$$

$$T_0 = 273.15 \text{ K}$$

$$P_0 = 1 \text{ atm}$$

که $P_0 = 1 \text{ atm} = 1.0^5 \text{ Pa}$ می‌باشد.

با این اوصاف یک گاز به دلیل برخوردهای اتمی می‌تواند به تعادل گرمایی برسد و با توجه به سطح مقطع مرتبط با پراکنده نمودن مولکول‌ها:

$$\sigma = \pi r_0^2 \quad (22-3)$$

$$r_0 \approx 10^{-8} \text{ cm} = 1 \text{ \AA} \quad (23-3)$$

است. می‌توان رابطه واقعی مسافت آزاد میانگین مولکول‌های گاز را به صورت زیر یک پارچه نمود:

$$\ell_m = \frac{1}{n\sigma} \quad (24-3)$$

مثال ۳: حجم استوانه‌ای به طول ℓ و سطح مقطع A از مولکول‌های گاز کاملی را در نظر بگیرید و رابطه (۲۸-۳) را به دست آورید.

حل: در شروع برخورد مولکول‌ها $\ell = \ell_m$ است به عبارت دیگر طول استوانه برابر مسافت آزاد میانگین است. در این نقطه مساحت A تقریباً با سطح مقطع مولکول‌ها برابر می‌شود. در نتیجه می‌توان چگالی مولکول‌های گاز کامل در حجم V را به صورت زیر نوشت:

$$n = \frac{N}{V} = \frac{N}{A \ell_m} \quad (25-3)$$

اگر هر مولکول، سطح مقطعی برابر σ داشته باشد آنگاه در مولکول مساحتی برابر $S = N \sigma$ را اشغال می‌کند که $S = A$ است. به عبارتی با توجه به شکل (۳-۶) و زیاد شدن برخوردها می‌توان داشت:

$$S = N \sigma \Rightarrow N = \frac{A}{\sigma} \quad (26-3)$$

با جایگذاری رابطه (۲۶-۳) در (۲۵-۳) خواهیم داشت:

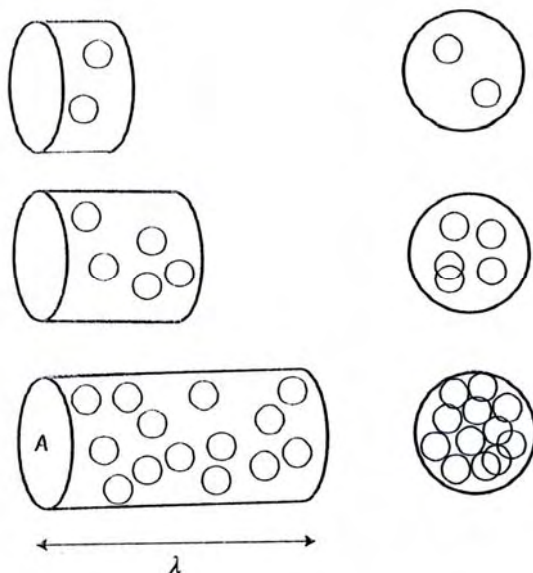
$$n = \frac{A}{A \sigma \ell_m} = \frac{1}{\sigma \ell_m}$$

و یا

$$\ell_m = \frac{1}{n\sigma}$$

که همان رابطه (۲۴-۳) است.

خودآزمایی ۳: برای n ثابت، ℓ_m برای مولکول‌های گاز هلیوم بیشتر است یا گاز هیدروژن؟ چرا؟



شکل ۳-۵. همانگونه که می‌بینید وقتی طول استوانه به اندازه مسافت آزاد میانگین ℓ_m می‌شود، برخورد‌ها کل دایره را می‌پوشاند که همان برابری $S = A$ در رابطه (۳-۲۶) است.

۳-۵ تعیین پارامتر تابع توزیع ماکسول-بولتزمن

با تابع توزیع ماکسول-بولتزمن در رابطه (۳-۱۸) آشنا شدیم که رابطه بسیار خامی بوده است. البته اشاره شد که انرژی جنبشی $\frac{P^2}{2m}$ با دما (kT) متناسب است و از آنجایی که نما بعد یا یکا ندارد لذا رابطه (۳-۱۹) را به صورت رابطه زیر اصلاح می‌کنیم:

$$f(P) = ce^{-\frac{P^2}{2mkT}} \quad (3-27)$$

اکنون باید کمیت c را که نقش ضریب تناسب را ایفا می‌کند پیدا نمود. برای این منظور به دو شرط اساسی را که حاکم بر تابع توزیع مولکول‌ها است معرفی می‌کنیم. تعداد کل مولکول‌ها (N) به صورتی است که می‌توان انتگرال تابع توزیع $f(P)$ در $4\pi P^2 dP$ را برابر چگالی مولکول‌ها (n) گرفت:

$$n = \int_0^{+\infty} 4\pi P^2 f(P) dP \quad (28-3)$$

با جایگذاری (۲۷-۳) در رابطه (۲۸-۳) می توان ثابت c را به صورت زیر به دست آورد:

$$n = c (\sqrt{\pi m k T})^{\frac{3}{2}}$$

و یا

$$c = \frac{n}{(\sqrt{\pi m k T})^{\frac{3}{2}}} \quad (29-3)$$

بنابراین تابع توزیع ماکسول-بولتزمن برای گازهای کامل به صورت زیر در می آید:

$$f(\epsilon) = \frac{n}{(\sqrt{\pi m k T})^{\frac{3}{2}}} e^{-(\epsilon - \epsilon_0)/kT} \quad (30-3)$$

و گاهی بهتر است کمیتی مانند β را به صورت

$$\beta = \frac{1}{kT} \quad (31-3)$$

معرفی کنیم و تابع توزیع ماکسول را چنین بنویسیم:

$$f(\epsilon) = n \left(\frac{\beta}{\sqrt{\pi m}} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta(\epsilon - \epsilon_0)} \quad (36-3)$$

که تابع $f(\epsilon_r) = c e^{-\beta \epsilon_r}$ به تابع کلاسیک بولتزمن نیز معروف است.

مثال ۴: با توجه به نمونه انتگرال های زیر، نشان دهید که برای گاز کامل با N مولکول

$$\text{رابطه } \beta = \frac{3}{2} \frac{E}{N} \text{ برقرار است.}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha^2} \quad (33-3)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{4\alpha^2}$$

حل: انرژی درونی گاز کامل برابر جمع انرژی مولکول‌های گاز است که چون برهم‌کنشی ندارند، انرژی آنها یکسان است. انرژی درونی (U) سیستم برابر با حاصل ضرب تعداد مولکول‌ها (N) در انرژی جنبشی هر مولکول است. از آنجایی که انرژی جنبشی مولکول‌های گاز کامل به صورت پیوسته تغییر می‌کند می‌توان به صورت زیر پله به پله پیش رفت و β را به دست آورد.

$$\frac{\mathcal{E}}{n} = \frac{1}{n} \int \frac{P^2}{2m} f(P) dV_P \quad (34-3)$$

که dV_P می‌تواند حاصل ضرب $dP_x dP_y dP_z$ باشد و چون

$$P^2 = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 \quad (35-3)$$

و نیز

$$f(P) = ce^{-\alpha(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2)} \quad (36-3)$$

می‌باشد، آنگاه با استفاده از روابط فوق می‌توان $\frac{E}{N}$ را به صورت دو انتگرال از نوع

$$\int e^{-\alpha P_i^2} dP_i \quad \text{و} \quad \int P_i^2 e^{-\alpha P_i^2} dP_i$$

نوشت:

$$\frac{E}{N} = \frac{3}{2m} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\pi}{\alpha} \right) = \frac{3}{2m\alpha} \quad (37-3)$$

$$= \frac{3}{2\beta}$$

و در نتیجه

$$\frac{E}{N} = \frac{3}{2\beta} \quad (38-3)$$

است که $\beta = \frac{1}{kT}$ و بنابراین

$$E = \frac{3}{2} N k T \quad (43-3)$$

که در واقع برابر $\left(\frac{1}{2} N k T \right)$ است و چون برای هر مولکول $E = 3 \left(\frac{1}{2} k T \right)$ را داریم، می‌توان سهم هر مؤلفه انرژی جنبشی $P_x^2/2m$ ، $P_y^2/2m$ و $P_z^2/2m$ را برابر $\frac{kT}{2}$ گرفت. این موضوع به اصل همپاری انرژی معروف می‌باشد.

۳-۶ انبساط گازها

در بخش قبل دیدیم که رابطه عمومی $PV = nRT$ برای گاز کامل برقرار است. در اینجا معادله حالت را می‌توان تابعی از فشار (P)، حجم (V) و دما (T) دانست و به صورت زیر نوشت:

$$f(P, V, T) = 0 \quad (40-3)$$

پس برای گازها تغییر فشار هم می‌تواند همانند تغییر دما باعث تغییر حجم شود. به عبارتی می‌توان از سه متغیر ماکروسکوپی در معادله حالت، یک متغیر را ثابت فرض کرد و تغییرات دو کمیت متغیر دیگر را با هم سنجید که هر مورد به قانونی در ارتباط با گازهای کامل منجر می‌شود.

۳-۶-۱ قانون بویل - ماریوت:

تغییر حجم در دمای ثابت برای جرم معینی از گاز رابطه معکوس با تغییر فشار آن دارد:

$$P_0V_0 = P_1V_1 = P_2V_2 = \text{const} \quad (۳-۴۱)$$

بنابراین می‌توان رابطه فشار و حجم را به ازاء n و T ثابت به صورت:

$$P = \frac{\text{const}}{V} \quad (۳-۴۲)$$

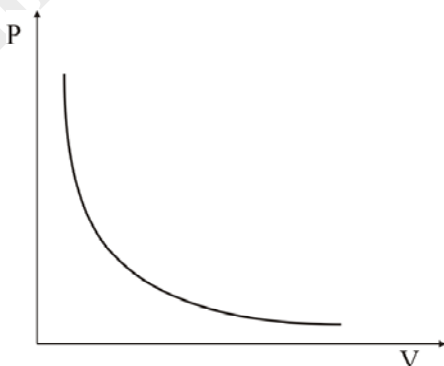
نیز نوشت که در نمودار فشار-حجم به صورت هموگرافیکی می‌باشد، همانطور که در شکل ۳-۶ مشاهده می‌شود.

حال اگر به جای آن که دمای T را ثابت بگیریم، فشار را ثابت فرض کنیم یعنی جسم فقط تحت تأثیر دما تغییر حجم یابد آنگاه به رابطه معروف دیگری به نام قانون شارل-گیلوساک می‌رسیم:

$$\frac{V}{V_0} = \frac{T}{T_0} = \text{const} \quad (۳-۴۷)$$

و یا

$$V = \text{const} \times T \quad (۳-۴۴)$$



شکل ۳-۶. برای جرم معینی از گاز در دمای ثابت، نمودار تغییرات فشار به حجم هموگرافیکی است.

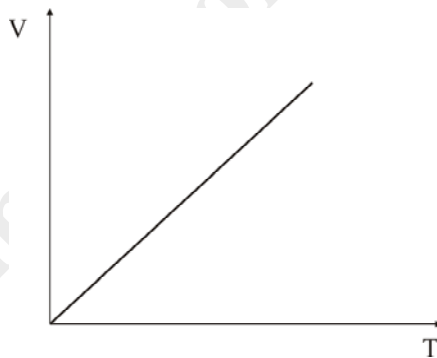
که نمودار تغییرات حجم و فشار مطابق با شکل ۷-۳ یک خط مستقیم است (فشار ثابت است).

علاوه بر قوانین بالا، قانون دیگری نیز به نام قانون دالتون وجود دارد که برای گازهای متفاوت با جرم حجمی‌های متفاوت که در درون ظرفی مخلوط شده‌اند مطرح است که بیان می‌دارد: "فشار مخلوط چند گاز کامل در دمای ثابت برابر مجموع فشارهای جزئی گازهای تشکیل دهنده مخلوط است":

$$P = \sum_i P_i = P_1 + P_2 + \dots \quad (۴۵-۳)$$

این قانون برای گازهایی با دمای برابر که با هم میل ترکیبی ندارند صادق است.

پرسش: اگر گازها میل ترکیبی داشته باشند، آنگاه چرا نمی‌توان از قانون دالتون استفاده کرد؟



شکل ۷-۳. برای جرم معینی از گاز در فشار ثابت، حجم به طور خطی با دما تغییر می‌کند.

مثال ۵: با استفاده از قوانین بویل-ماریوت و شارل-گیلوساگ، قانون عمومی گازها را به دست آورید.

حل: فرض می‌کنیم فشار و حجم مقدار معینی از گاز در دمای صفر درجه سانتی‌گراد به ترتیب P_0 و V_0 باشد. اگر فشار گاز بدون تغییر بماند و گرما باعث

افزایش دمای گاز شود آنگاه حجم گاز به اندازه $V = V_0(1 + \beta\theta)$ افزایش می‌یابد و چنانچه در دمای ثابت θ از قانون بویل-ماریوت استفاده کنیم آنگاه:

$$PV = P_0V_0(1 + \beta\theta) \quad (۴۶-۳)$$

البته از منابع بسیاری که در انتهای کتاب آمده است می‌توان دید:

$$\beta = \frac{1}{273}$$

تعداد مولکول‌های گاز (n)، نسبت جرم گاز (m گرم) به جرم مولکولی (M) آن است:

$$n = \frac{m}{M} \quad (۴۷-۳)$$

و یا می‌توان n را نسبت حجم کل (V_0) به حجم اشغال شده توسط هر مولکول u_0 دانست:

$$n = \frac{V_0}{u_0} \quad (۴۸-۳)$$

از این رو

$$\begin{aligned} PV &= P_0V_0(1 + \beta\theta) \\ &= P_0(nu_0)(1 + \beta\theta) \\ &\approx n(P_0u_0\beta)\theta \end{aligned}$$

در نتیجه رابطه PV با دمای $T = \theta$ به صورت خطی است که اگر $P_0u_0\beta$ را با R در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$PV = nRT$$

از ترکیب رابطه‌های فوق می‌توان رابطه بین مختصه‌های ترمودینامیکی گاز کامل را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{P_0V_0}{T_0} = \frac{PV}{T} = nR \quad (۴۹-۳)$$

و اگر از لحاظ مولی تفاوت بین تعداد مولکول گرم‌های دو گاز قائل شویم آنگاه رابطه کلی‌تری به دست می‌آید که عبارت است از

$$\frac{P_1 V_1}{P_2 V_2} = \frac{n_1}{n_2} \times \frac{T_1}{T_2} \quad (50-3)$$

رابطه کلی (۵۰-۳) با یکسان گرفتن n ها به رابطه (۴۹-۳) تبدیل می‌شود.

مثال ۶: جرم حجمی هوا در دمای صفر درجه سانتی‌گراد برابر با $1/3$ گرم بر لیتر است. یک ظرف استوانه‌ای به شعاع ۱۰ متر و ارتفاع ۲ متر حاوی هوای ۱۰ درجه سانتی‌گراد است.

(الف) جرم هوای محبوس شده در استوانه را بیابید.

(ب) دمای هوا را بدون تغییر فشار به ۶۰ درجه سانتی‌گراد می‌رسانیم، چه مقدار هوای درون استوانه خارج می‌شود؟

حل: ابتدا رابطه جرم حجمی با فشار و دما را به دست می‌آوریم.

$$\rho_0 = \frac{m}{V_0}$$

$$\frac{T}{T_0} = \frac{PV}{P_0 V_0} \Rightarrow V_0 = \frac{PVT_0}{P_0 T}$$

$$\rho_0 = \frac{m P_0 T}{P V T_0}$$

چون $\rho = \frac{m}{V}$ ، بنابراین رابطه بین جرم‌های حجمی در دماهای متفاوت به صورت زیر خواهد بود:

$$\rho = \rho_0 \frac{P}{P_0} \times \frac{T_0}{T} \quad (55-3)$$

که اگر فشار ثابت باشد:

$$\rho = \rho_0 \frac{T_0}{T} \quad (56-3)$$

از طرفی

$$T_0 = 273 \text{ K}, T = 273 + 10 = 283 \text{ K}$$

$$\rho_0 = 1,3 \frac{\text{g}}{\text{lit}}, V = \pi r^2 h = 3 \times 100 \times 2 = 600 \text{ m}^3$$

از (۵۶-۳) داریم:

$$\rho = \frac{m}{V}, \rho = \rho_0 \frac{T_0}{T} \Rightarrow m = \rho_0 \frac{T_0}{T} V \quad (53-3)$$

الف) با استفاده از (۵۳-۳) داریم:

$$m_1 = 1,3 \times \frac{273}{283} \times 600 = 752,44 \text{ Kg}$$

$$T = 273 + 60 = 333 \text{ K}$$

$$m_2 = 1,3 \times \frac{273}{333} \times 600 = 639,46 \text{ Kg} \quad \text{ب)}$$

از تفاضل دو جرم در دماهای ۱۰ درجه سانتی‌گراد و ۶۰ درجه سانتی‌گراد می‌توان جرم هوای خارج شده از استوانه را به دست آورد که برابر است با:

$$\begin{aligned} \Delta m &= m_2 - m_1 \\ &= 639,46 - 752,44 = -112,98 \text{ Kg} \end{aligned}$$

پس ۱۱۲,۹۸ کیلو گرم هوا از ظرف خارج شده است.

۷-۳ معادله گازهای حقیقی

رفتار گازهایی را بررسی کردیم که متشکل از ذراتی بدون حجم و بعد در نظر گرفته شده بودند و این فرض سبب شد تا گاز را گاز کامل یا ایده‌آل بنامیم. اما واقعیت این است که مولکول‌های گازها حجمی هرچند کوچک را اشغال می‌کنند و همین حجم باعث می‌شود تا معادله عمومی گازهای کامل تصحیح شود. از جمله پژوهشگرانی که توانست تصحیحات لازم را در معادله عمومی گازهای کامل تا حدودی انجام دهد

واندروالس بوده است که برای n مولکول گرم گاز که هر کدام حجمی برابر b را اشغال می‌کنند رابطه زیر را ارائه کرد:

$$\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT \quad (58-3)$$

a و b کمیت‌های ثابتی هستند البته برای گازهای مختلف، این مقادیر ثابت متفاوتند.

۳-۸ مثال حل شده

۱. محفظه‌ای حامل گاز هیدروژن در دمای ثابت ۲۷ درجه سلسیوس قرار دارد. با استفاده از $c = 3 \times 10^4 \text{ cm/s}$ ، سرعت مولکول‌های هیدروژن را بیابید.

حل: در $T = 273 + 27 = 300 \text{ K}$ مقدار kT برابر $\frac{1}{4} \text{ eV}$ خواهد بود. از طرفی با

توجه به

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{3}{2} kT \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{3kT}{mc^2} = \frac{3\left(\frac{1}{4} \text{ eV}\right)}{50.0 \text{ eV}}$$

و از $c = 3 \times 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ ، سرعت مولکول‌های هیدروژن برابر $v \cong 1.5 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ به دست می‌آید که برابر با سرعتی است که با آن گاز هیدروژن در انبساط آزاد به درون خلاء منبسط می‌شود. در اینجا $\ell_m \approx 10^{-5} \text{ cm}$ فرض شده است. برای جزئیات بیشتر به بخش (۳-۴) رجوع شود.

۳-۹ مسائل

۱. لختی دورانی جسم جامدی به صورت $I = Mr^2$ است. اگر دما از θ_0 به θ افزایش یابد آنگاه تغییرات لختی دورانی را برحسب تغییر دما، ℓ_m و I به دست آورید. (ضریب انبساط گرمایی را ℓ_m فرض کنید.)

۲. آونگ فیزیکی دارای دوره تناوب $2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$ است که با تغییر دما تغییر می‌کند. با توجه به مسئله بالا نشان دهید که تغییر دوره تناوب آونگ ($\Delta\tau$) برابر است با:

$$\Delta\tau = \pi\ell_m \sqrt{\frac{I}{mgd}} \Delta\theta$$

۳. ماده گرماسنجی (جیوه)، درون گرماسنجی شیشه‌ای دمای ۵ درجه سانتی‌گراد را نشان می‌دهد و دمای اتاق با بخاری افزایش می‌یابد. اگر گرماسنج دمای ۳۵ درجه سانتی‌گراد را نشان دهد. افزایش حجم جیوه را نسبت به افزایش حجم شیشه به دست آورید.

۴. یک تیر آهنی به طول ۶۰۰ متر در گرم‌ترین و سردترین روز سال، تغییر طول بیشینه‌ای برابر ۰/۳۶ متر داشته است. اختلاف دمای این دو روز چقدر بوده است؟

۵. سوراخی به قطر ۱۰ سانتیمتر در وسط صفحه فلزی دایره شکلی با ضریب انبساط گرمایی طولی $10^{-5} / ^\circ C$ و قطر ۳۰ سانتی‌متر وجود دارد دمای صفحه ۲۰ درجه سانتی‌گراد است. اگر دمای مجموعه ۲۰ درجه گرم‌تر شود طول بعدی هر کدام چقدر خواهد بود؟

۶. جرم حجمی جسمی در اثر تغییر دما تغییر می‌کند. جسمی به جرم M و حجم V را در نظر بگیرید و نشان دهید با افزایش دما جرم حجمی جسم کاهش می‌یابد.

۷. سرعت V_{rms} مولکول‌های هیدروژن (H_2) با مولکول‌های اکسیژن (O_2) برابر است. اگر دمای مربوط به مولکول‌های هیدروژن ۳۰ درجه سانتی‌گراد باشد دمایی که مولکول‌های اکسیژن سرعت میانگین در بالا را کسب می‌کنند چقدر است؟

۸. V_{rms} مولکول‌های نیتروژن در هوا در یک دما برابر ۵۰۰ متر بر ثانیه است. V_{rms} مولکول‌های هیدروژن در هوا در همان دما چقدر است؟

۹. یک ظرف آلومینیومی ۲ لیتری پر از جیوه در دمای ۱۰ درجه سانتی‌گراد است. تعیین کنید اگر دما به ۶۰ درجه سانتی‌گراد برسد، جیوه چقدر از ظرف سر ریز می‌شود؟

۱۰. تغییر حجم کره آلومینیومی به شعاع ۲۰ سانتی‌متر وقتی دما از صفر درجه سانتی‌گراد تا ۱۰۰ درجه سانتی‌گراد تغییر می‌کند چقدر است؟

۱۱. وقتی سکه‌ای مسی در آب جوش (۱۰۰ درجه سانتی‌گراد) قرار می‌گیرد، ۰٫۲ درصد به قطر آن افزوده می‌شود. اکنون درصد افزایش در:

الف) مساحت یک روی سکه

ب) ضخامت

ج) حجم

د) جرم سکه را به دست آورید.

ه) ضریب انبساط گرمایی خطی آن چقدر است؟

۱۲. یک مکعب آلومینیومی به ضلع a و جرم حجمی ρ_{Al} در جیوه شناور است. اگر

دما به اندازه $\Delta\theta = T$ افزایش یابد، مکعب چه مقدار دیگر در جیوه پایین خواهد رفت؟

فصل چهارم

گرما

۴-۱ مقدمه

با گرم کردن هر جسمی شاهد افزایش نوسانات اتم‌ها و مولکول‌های جسم هستیم و حرکت‌های میکروسکوپی جسم تغییرات رفتاری زیادی را دارد. این سبب تغییر انرژی جنبشی جسم می‌شود، همانطور که در فصل سوم دیدید $E_K = \frac{3}{2}kT$ است. به عبارتی با افزایش دما انرژی جنبشی مولکول‌ها و یا اتم‌های جسم افزایش می‌یابد. هر چند بنا نداریم تا به گذشته‌ها برگردیم و سیر تحولات در تعریف و به کارگیری انرژی گرمایی بپردازیم ولی تا اواسط قرن نوزدهم گرما مایعی نامرئی و غیر قابل اندازه‌گیری به نام کالریک بود که در جسم وجود داشت. بعدها کنت رامفورد نشان داد که انرژی‌ای که از به هم مالیدن کف دست‌ها بر هم به دلیل اصطکاک بین آنها تلف می‌شود باعث گرم شدن دست‌ها می‌شود. با این ایده ماشین‌های بخار ساخته شد و گرمای تولید شده قادر به حرکت چرخ‌ها و انجام دادن کار شد و به عبارتی انرژی گرمایی به انرژی مکانیکی (ماکروسکوپی) تبدیل می‌شد. از آنجا اصل پایستگی انرژی مطرح شد و در نتیجه گرما نیز صورتی از انرژی به حساب آمد. پس ماشین‌های گرمایی خالق انرژی نیستند بلکه مبدل‌های انرژی گرمایی به انرژی مکانیکی هستند. فرق عمده دما و گرما را می‌توان به راحتی فهمید. دما یک مقیاس است در حالی که گرما شکلی از انرژی می‌باشد.

۲-۴ واحدهای گرما

گویا یک سنت شده است که آب را به عنوان مشخص کننده واحد گرما به کار می‌برند. واحدهایی که تا به حال به کار رفته است عبارتند از:

۱-۲-۴ کالری

که مقدار گرمای لازم در افزایش دمای یک گرم آب به اندازه یک درجه سانتی‌گراد است و برای آب بهتر است بگوییم افزایش دمای یک گرم آب از 14.5 درجه سانتی‌گراد به 15.5 درجه سانتی‌گراد. اگر به جای یک گرم، یک کیلوگرم آب خالص را در نظر بگیریم آنگاه کیلوکالری به جای واحد کالری به کار می‌آید. همینطور چنانچه مقداری برابر یک تن آب اختیار شود تا دمای آن یک درجه سانتی‌گراد تغییر کند واحد ترمی را به کار می‌بریم.

۲-۲-۴ بی تی یو^۱ (BTU)

این واحد بیشتر در دستگاه اندازه‌گیری واحدهای بریتانیایی به کار می‌رود و برابر مقدار گرمایی است که لازم است تا دمای یک پوند (453 گرم) آب را از 63 درجه فارنهایت به 64 درجه فارنهایت بالا ببرد.

۳-۲-۴ ژول

واحد گرما در دستگاه SI است که همانند کالری از واحدهای گرمایی است که بیشترین کاربرد را دارد و هر کالری برابر $4,18605$ ژول است.

۳-۴ ظرفیت گرمایی

مقدار گرمای Q که لازم است تا دمای m گرم ماده به اندازه یک درجه سانتی‌گراد بالا رود را ظرفیت گرمایی یا ارزش آبی (A) آن ماده می‌گویند. این مقدار گرما تنها سبب افزایش یک درجه سانتی‌گرادی ماده می‌شود و هیچ تغییر شیمیایی و یا فیزیکی را باعث نمی‌گردد. حال اگر این مقدار گرما به واحد جرم جسمی داده شود به آن ظرفیت

گرمایی ویژه گویند و آن را C نشان می‌دهند و واحد آن $\text{cal/g}^\circ\text{C}$ و یا ژول بر کیلوگرم درجه سانتی‌گراد ($\text{J/Kg}^\circ\text{C}$) است. ظرفیت گرمایی ویژه بعضی از عناصر در جدول ۴-۱ آمده است.

جدول ۴-۱. گرمای ویژه.

ماده	$C(\text{cal/gr}^\circ\text{C})$
آب	۱
آلومینیوم	۰٫۲۱۴
انوار (آلیاژ آهن + نیکل + زغال)	۰٫۱۲
آهن (فولاد)	۰٫۱۱
برنج (مس)	۰٫۰۹۲
سرب	۰٫۰۳۱
قلع	۰٫۰۵۴
نقره	۰٫۰۵۶
جیوه	۰٫۰۳۳
یخ (10°C -)	۰٫۵۳
الکل اتیلیک	۰٫۵۸
گلیکول	۰٫۵۷
روغن معدنی	۰٫۵
شیشه دماسنج	۰٫۲
مرمر	۰٫۲۱
گرانیت	۰٫۱۹
آب دریا	۰٫۹۳

۴-۳-۱ ضریب اتمیسیته گازها

در رابطه با گرمای ویژه توضیحاتی داده شد ولی گازها دارای دو نوع گرمای ویژه هستند که یکی گرمای ویژه در فشار ثابت (C_p) و دیگری گرمای ویژه در حجم ثابت (C_v) می‌باشد. با این که اندازه‌گیری گرمای ویژه C_p در آزمایشگاه راحت‌تر از C_v است ولی به دلیل آن که بیشتر تغییر حالت‌های فیزیکی نظیر ذوب و انجماد در فشار ثابت صورت می‌گیرند کاربرد C_p بیشتر نمود دارد. در هر حال نسبت گرمای ویژه در فشار ثابت به گرمای ویژه در حجم ثابت را ضریب اتمیسیته γ می‌گویند.

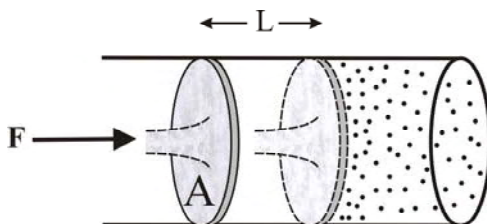
$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} \quad (۱-۴)$$

اندازه ضریب اتمیسیته برای گازهای تک اتمی، دو اتمی و چند اتمی یکسان نیست. ضریب اتمیسیته برای گازهای تک اتمی مانند آرگون و نئون برابر ۱٫۶۷ و برای گازهای دو اتمی مانند هیدروژن، نیتروژن و اکسیژن برابر ۱٫۴۰ و برای گازهای سه اتمی و بالاتر مثل دی اکسید کربن برابر ۱٫۳۳ است.

لازم به ذکر است که اتم‌های گاز تک اتمی تنها می‌توانند حرکت انتقالی داشته باشند و در نتیجه انرژی درونی آن برابر انرژی جنبشی حرکت انتقالی آنهاست. ولی برای گازهای دو اتمی می‌توان دو اتم را همانند دمبل‌هایی که بر دو سر میله‌ای سوارند در نظر گرفت و انرژی درونی (که در اصل اول ترمودینامیک خواهد خواند) را مجموع از انرژی انتقالی، ارتعاشی و دورانی اتم‌ها در نظر گرفت. در فصل‌های بعد ثابت خواهیم کرد:

$$C_P - C_V = R \quad (۲-۴)$$

مثال ۱: مطابق با شکل ۴-۱ هوا قادر است نیروی F را بر پیستون سبک و بی‌اصطکاک‌ی که جلوی مولکول‌های گاز درون استوانه را سد کرده است وارد کند و آن را به اندازه L جابجا کند. اگر فرض کنیم یک مولکول گرم گاز در ظرف باشد وقتی گاز یک درجه سانتی‌گراد گرم می‌شود معین کنید این گاز چه مقدار کار انجام می‌دهد؟ (سعی می‌شود با اعمال نیروی F تغییر حجم در فشار ثابت صورت پذیرد).



شکل ۴-۱. مربوط به مثال ۱.

حل: کار برابر است با برآیند نیرو ضربدر جابجایی است و از طرفی با توجه به رابطه فشار $P = F/A$ که P فشار هوای بیرون است و جهت حفظ تعادل باید برابر فشار گاز درون استوانه باشد و A نیز مساحت سطح پیستون است (سعی شده است با اعمال F تغییرات حجم در فشار ثابت صورت پذیرد). خواهیم داشت:

$$W = FL = PAL \\ = P\Delta V$$

و یا

$$W = PV_2 - PV_1$$

از طرفی دیدید که

$$PV_1 = RT_1$$

$$PV_2 = R(T_1 + 1)$$

که $n = 1$ زیرا یک مولکول گرم گاز در اختیار داریم در نتیجه

$$W = R(T_1 + 1) - RT_1 = R$$

۴-۴ رابطه گرما و اصول تعادل گرمایی

مقدار گرمای Q جدای از آن که به جرم m و تغییر دما $\Delta\theta$ بستگی دارد به نوع ماده هم بستگی دارد که این آخری در همان گرمای ویژه C ماده منعکس می‌شود و بنابراین می‌توان رابطه گرما را به صورت زیر نوشت:

$$Q = mc\Delta\theta \quad (۳-۴)$$

حال اگر دو یا چند ماده با دماهای متفاوت در تماس حرارتی با یکدیگر باشند طوری که گرما بتواند از ماده‌ای به ماده دیگر انتقال یابد به عبارتی دیواره جدا کننده مواد، رسانای گرما باشند آنگاه پس از مدتی مواد در دماهای متفاوت به دمای تعادل می‌رسند.

بنابراین گرما چیزی است که از دستگاهی مثل دستگاه (الف) به دستگاه مجاور (ب) جریان می‌یابد یعنی رونده است. بنابراین صحبت از گرمای ذخیره شده در یک جسم

معنی و مفهوم فیزیکی نخواهد داشت. همچنین باید توجه داشت که گرما همواره از دستگاهی که در دمای بالاتر است به دستگاهی با دمای پایین تر منتقل می‌شود. از طرف دیگر این مقدار گرما که دستگاه گرم تر می‌دهد همان مقدار گرما را دستگاه سردتر دریافت می‌کند.

اصل دیگری که در انتقال گرما تا حصول تعادل گرمایی مطرح است رسیدن دمای مواد متفاوت در کنار هم به یک دمای تعادل θ_c می‌باشد که از رابطه زیر به دست می‌آید که در این رابطه فرض شده است هیچگونه تغییر حالتی در بین مواد صورت نپذیرفته باشد.

$$\theta_c = \frac{\sum_i m_i c_i \theta_i}{\sum_i m_i c_i} \quad (4-4)$$

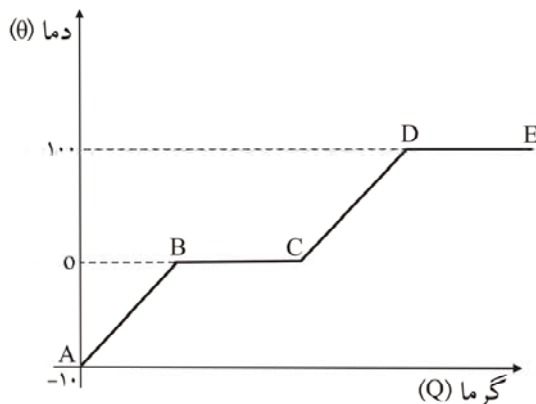
اکنون این پرسش مطرح می‌شود که آیا همواره گرما دادن به جسمی به تغییر دمای آن منجر می‌شود؟

در پاسخ به پرسش بالا قطعه یخی به جرم $m = 5g$ و دمای مثلاً $-10^\circ C$ را در نظر می‌گیریم و نمودار تغییرات گرمای Q آن را برحسب دمای θ رسم می‌کنیم. در ابتدا مقدار Q_{AB} گرما لازم است تا دمای -10 درجه سانتی‌گراد یخ به صفر درجه سانتی‌گراد برسد:

$$Q_{AB} = mc_i (\Delta\theta)_i$$

$$Q_{AB} = (5g) \left(0.5 \frac{\text{cal}}{g^\circ C} \right) (0 - (-10))$$

اکنون که دمای یخ به صفر درجه سانتی‌گراد رسیده است گرمای داده شده صرف ذوب کردن یخ می‌شود و هیچ تغییر دمایی مشاهده نمی‌شود و به اصطلاح گرما در جسم نهان است و به گرمای نهان ذوب (Q_F) معروف است که با جرم جسم رابطه خطی دارد و از آنجایی که مواد مختلف برای تغییر حالت از جامد به مایع به مقادیر متفاوتی گرما نیاز دارند بنابراین ضریب تناسب گرمای نهان ذوب با جرم جسم را ضریب گرمای نهان ذوب (L_F) می‌نامیم:



شکل ۴-۲. نمایش گرمای نهان ذوب یخ.

$$Q_F = mL_F \quad (۵-۴)$$

که برای ذوب یخ $L_F = ۸۰ \text{ cal/g}$ است.

گرمای نهان به صورت خط مستقیم BC (موازی محور گرما) در شکل ۴-۲ نمایش داده شده است. چون تغییر دما وجود ندارد پس از آن که تمام یخ ذوب و به آب صفر درجه سانتی‌گراد تبدیل شد آنگاه گرمای داده شده باعث افزایش دمای آب می‌شود که در شرایط استاندارد تا ۱۰۰ درجه سانتی‌گراد می‌رسد و این را در شکل به صورت خط مایل مستقیم CD مشاهده می‌کنید:

$$Q_{CD} = mc(\Delta\theta)_{CD} = (۵g) \left(۱ \frac{\text{cal}}{g \text{ } ^\circ\text{C}} \right) (۱۰۰ - ۰) \Rightarrow Q_{CD} = ۵۰۰ \text{ cal}$$

پس از آن که دمای آب به ۱۰۰ درجه سانتی‌گراد یعنی به دمای نقطه جوش رسید آنگاه دوباره می‌بینیم که با وجود گرما تغییر دمایی را شاهد نخواهیم بود و بطور مشابه با گرمای نهان ذوب، گرما در قسمت DE را گرمای نهان تبخیر (Q_V) گویند.

$$Q_V = mL_V \quad (۶-۴)$$

و L_V را ضریب گرمای نهان تبخیر می‌گویند. برای آب $L_V = ۵۴۰ \frac{\text{cal}}{g}$ می‌باشد.

مثال ۲: چه مقدار بخار آب داغ 120°C می‌تواند دمای یک کیلوگرم آب را 80°C گرم‌تر کند (یعنی از 10°C به 90°C برساند).

حل: در تعادل گرمایی مقدار گرمایی که بخار آب داغ (Q_1) از دست می‌دهد برابر مقدار گرمایی است که آب به دست می‌آورد (Q_2):

$$Q_1 = Q_2$$

$$(mc \Delta\theta)_{\text{vapor}} + m L_V + (m'c \Delta\theta)_{\text{water}} = (mc \Delta\theta)_{\text{water}}$$

$$m \left(0.46 \frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ\text{C}} \right) (80^\circ\text{C}) + m \left(549 \frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ\text{C}} \right) + m \left(1 \frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ\text{C}} \right) (10^\circ\text{C})$$

$$= (1000 \text{ g}) \left(1 \frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ\text{C}} \right) (80^\circ\text{C})$$

$$m(36/8 + 549 + 10) = 80000 \Rightarrow m = 143/3 \text{ g}$$

مثال ۳: ظرفی از فلز x دارای جرم ۴ کیلوگرم حاوی ۱۴ کیلوگرم آب است. برای تعیین گرمای ویژه این فلز، قطعه‌ای به جرم ۲ کیلوگرم از آن را که در دمای 188°C است را به درون آب 16°C ظرف مذکور می‌اندازیم و به دمای تعادل 18°C می‌رسد. گرمای ویژه این فلز را به دست آورید؟

حل: ظرف و آب درون آن گرما را از قطعه فلز می‌گیرند و اگر گرمای فلز را Q_1 و گرمای آب درون آن را Q_2 بگیریم آنگاه مجموع این دو گرما، برابر گرمای گرفته شده از فلز (Q_3) است.

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

$$m_x c_x (\theta_c - \theta_o) + m_w c_w (\theta_c - \theta_o) = m'_x c_x (\theta - \theta_o)$$

$$4c_x (18 - 16) + 14 \times 1480 (18 - 16) = 2c_x (188 - 18)$$

$$8c_x + 41440 = 340c_x \Rightarrow c_x = 124/82 \frac{\text{J}}{\text{Kg}^\circ\text{C}} = c_x = 0.3 \frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ\text{C}}$$

در اینجا لازم است به ظرفیت گرمایی مولی جامدات هم اشاره نمود. اگر یک مول از ماده‌ای در نظر گرفته شود آنگاه به اندازه عدد آووگادرو (6.022×10^{23}) مولکول دارد و هر مولکول از این ماده در مقایسه با جرم $\frac{1}{12}$ ایزوتوپ ^{12}C می‌تواند سنگین‌تر باشد. به عبارت دیگر هر گرم از این ماده شامل 6.022×10^{23} واحد جرم اتمی (amu) خواهد بود که بنا بر تعریف واحد جرم اتمی (amu) برابر $\frac{1}{12}$ جرم اتم کربن (ایزوتوپ ^{12}C) می‌باشد.

۴-۵ تغییر حالت مواد جامد

وجود نواقص در ساختار شبکه بلور را نمی‌توان نادیده گرفت اما در بحث فعلی شبکه بلور خاصی را در نظر می‌گیریم. در واقع اتم‌ها بطور منظم در یک بلور چیده شده‌اند و آرایشی به نام شبکه را به وجود آورده‌اند. وقتی به شبکه گرما داده می‌شود اتم‌های آن حول وضع تعادلشان در شبکه ارتعاش می‌کنند. همینطور گرمای داده شده به بلور افزایش می‌یابد. نوسان‌های اتم‌ها بیشتر و بیشتر می‌شود تا جایی که در یک دما نوسانات به حدی می‌رسد که در برخی جهات پیوندها پاره می‌شوند و زنجیره وار می‌خواهند روی هم بلغزند و ماده جامد به حالت مایع در می‌آید. همین فرآیند با سرد شدن می‌تواند باعث انجماد مایع گردد بنابراین دمای نقطه‌ای که حالت جامد به مایع تبدیل می‌شود را نقطه ذوب گویند و عکس این تغییر حالت (مایع به جامد) را نقطه انجماد گویند.

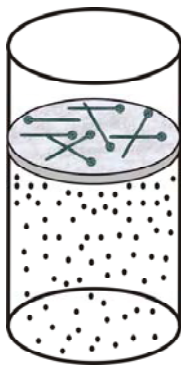
بیشتر گرما می‌تواند باعث تغییر حالت ماده از مایع به بخار (تبخیر) و یا بخار به مایع (میعان) شود البته موادی نظیر نفتالین، ید، یخ خشک و کافور وجود دارند که قادرند مستقیماً از حالت جامد به حالت گازی و یا بالعکس درآیند که به ترتیب به تصعید (فرازش) و چگالش معروف هستند. بیشتر اجسام بلوری در اثر ذوب شدن افزایش حجم می‌یابند و به اصطلاح منبسط می‌شوند. از جمله موادی که رفتار بالا را ندارد یخ است. به عبارت دیگر آب به هنگام انجماد منبسط می‌شود و یخ در هنگام ذوب منقبض می‌گردد و البته این از رازهای خلقت است.

در مورد تغییر حالات مطالب زیادی را آموخته‌اید و در تبخیر دیدید که عواملی چون سطح بیشتر، پایین بودن فشار اطراف مایع، وجود وزش باد، پایین بودن رطوبت محیط مایع باعث افزایش عمل تبخیر می‌شود و مایع راحت‌تر بخار می‌شود.

۴-۶ فرآیند ایستوار بی‌دررو

فرآیند ایستوار در یک دستگاه را می‌توان گذر دستگاه از حالت‌های تعادلی پشت سر هم دانست. برای درک بیشتر بهتر است پیستونی سبک که گازی را مطابق شکل ۴-۳ محبوس کرده است را در نظر بگیریم و هر بار سوزن ته گردی را بر روی آن قرار دهیم. با افزودن سوزن‌ها پیستون به سمت پایین جابجا می‌شود و بدون آن که به تعادل پیستون خللی جدی وارد آید از حالت‌های تعادلی پشت سر هم می‌گذرد. این فرآیند را فرآیند ایستوار گویند. اکنون اگر سوزن‌ها را تک تک برداریم پیستون به سمت بالا جابجا می‌شود و یا با افزایش میخ‌ها دستگاه را دوباره به حالت اولیه برسانیم یعنی می‌توان بیان داشت که این فرآیند برگشت پذیر است. وقتی گازی دستخوش فرآیندی بی‌دررو می‌شود یعنی گرمای Q از دستگاه خارج و یا به آن وارد نمی‌شود و به عبارتی تغییرات dQ برابر صفر است بنابراین در فرآیند بی‌دررو:

$$dQ = 0 \quad (4-7)$$



شکل ۴-۳. پیستونی گازی را محبوس کرده است و هر لحظه با افزودن سوزن ته گردی بر روی آن ضمن حفظ تعادل به سمت پایین حرکت می‌کند.

آنگاه افزایش دما در دستگاه ظاهر می‌شود و انرژی جنبشی مولکول‌های آزاد گاز را افزایش می‌دهد و باعث افزایش انرژی درونی دستگاه می‌شود چون انرژی درونی U دستگاه مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل مولکول‌های درون دستگاه می‌باشد. این افزایش انرژی درونی باعث می‌شود چنانچه پیستونی در شکل ۳-۴ جابجا شود و به اصطلاح تغییر حجم dV را داشته باشیم بنابراین تغییر انرژی درونی دستگاه در فرآیند بی‌دررو برابر کار انجام یافته به وسیله مولکول‌های دستگاه بر دیواره پیستون است و چون کار در تراکم گاز را مثبت فرض می‌کنیم پس در انبساط کار منفی خواهد بود. به عبارت دیگر برای گرمای ویژه مولی با تغییر دمای $d\theta$ می‌توان رابطه زیر را نوشت:

$$P dV = -c_V d\theta \quad (۸-۴)$$

از طرف دیگر ممکن است حجم تغییر نکند و این افزایش دمای مولکول‌های گاز به صورت تغییر فشار ظاهر شود و همانند آنچه که در بالا توصیف شد رابطه مشابهی را برای این حالت نیز نوشت:

$$V dP = c_p d\theta \quad (۹-۴)$$

از تقسیم دو رابطه (۸-۴) و (۹-۴) می‌توان نوشت:

$$\frac{dP}{P} \times \frac{V}{dV} = -\frac{C_p}{C_V} = -\gamma$$

و یا

$$\frac{dP}{P} = -\gamma \frac{dV}{V}$$

که با انتگرال‌گیری از طرفین داریم:

$$\ln P = -\gamma \ln V + C$$

$$\ln P + \gamma \ln V = C$$

$$\ln P + \ln V^\gamma = C$$

و بدین ترتیب رابطه حاکم بر فرآیند بی‌درروی گازها استخراج می‌شود:

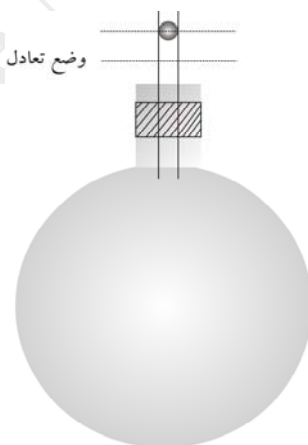
$$PV^\gamma = C \quad (10-4)$$

و به همین شکل و با استفاده از رابطه $PV = nRT$ می‌توان رابطه بین دما و حجم را نیز به دست آورد:

$$TV^{\gamma-1} = C \quad (11-4)$$

هر چند این معادله زمانی ارزش فراوانی دارد که از رفتار γ اطلاعاتی داشته باشیم. هر چند γ برای گازهای تک اتمی ثابت است ولی ممکن است برای گازهای دو یا چند اتمی با دما تغییر کند اما فرآیندهای بی‌دررویی که مورد نیاز ما هستند عموماً دارای γ ثابت می‌باشند.

مثال ۴: یکی از روش‌های اندازه‌گیری ضریب اتمیسیته استفاده از دستگاه روخ-هارت در شکل ۴-۴ می‌باشد. در این روش گاز محبوس در باتری بزرگی به حجم V قادر است گلوله‌ای فلزی به جرم m که قطری در حد قطر شیشه گلوبی دارد را بالا و پایین برد. مشخص کنید که چگونه می‌توان ضریب اتمیسیته γ را پیدا کرد؟



شکل ۴-۴. دستگاه اندازه‌گیری ضریب اتمیسیته که به وسیله روخ-هارت به کار رفته است. گلوله می‌تواند با انبساط و تراکم گاز درون باتری در امتداد Y (قائم) بالا و پایین رود و یک حرکت نوسانی را به نمایش گذارد.

حل: در غیاب هرگونه نیروی خارجی و اصطکاک تنها در نظر گرفتن فشار اتمسفر P_0 فشار P مولکول‌های گاز را به صورت زیر نوشت:

$$P = P_0 + \frac{mg}{A} \quad (۱۲-۴)$$

که mg وزن گلوله فلزی و A سطح مقطع لوله شیشه‌ای است. از آنجایی که قطر گلوله و قطر شیشه هم اندازه‌اند و به دلیل ناچیز بودن اصطکاک، شیشه در تماس با گلوله، گلوله قادر به جابجا شدن است بنابراین گلوله بسته به انبساط گاز به سمت بالا و یا تراکم گاز به سمت پایین جابجا می‌شود و این رفتار تناوبی و منظم حرکت هماهنگ نوسانی گلوله را باعث می‌شود که با دوره تناوب τ نوسان کند. اگر جابجایی از وضعیت تعادل گلوله را مطابق شکل بالا y نشان دهیم آنگاه

$$dV = Ay$$

و چون نیروی برآیند F بر سطح مقطع A باعث تغییر فشار در گاز می‌شود لذا

$$dP = \frac{F}{A}$$

از طرفی به دلیل نوسانات بسیار سریع گلوله فرآیند را می‌توان یک فرآیند بی‌دررو در نظر گرفت و از رابطه (۴-۱۰) استفاده نمود:

$$PV^\gamma = C$$

با دیفرانسیل‌گیری از رابطه بالا داریم:

$$dP = -\frac{\gamma PV^{\gamma-1}}{V^\gamma} dV \Rightarrow dP = -\frac{\gamma P}{V} A y$$

که

$$V^\gamma dP + \gamma PV^{\gamma-1} dV = 0$$

و یا

$$dP = -\frac{\gamma P}{V} A y$$

از طرفی

$$dP = \frac{F}{A} \Rightarrow F = A dP$$

بدین ترتیب

$$F = A dP = -\frac{\gamma P}{V} A^2 y$$

چون

$$F = m \ddot{y}$$

در نتیجه

$$m \ddot{y} = -\frac{\gamma P A^2}{V} y$$

است که بسامد زاویه‌ای نوسان‌های گلوله به صورت زیر خواهد بود:

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma P A^2}{mV}}$$

و یا

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{mV}{\gamma P A^2}}$$

بنابراین با معلوم بودن و اندازه‌گیری کلیه کمیت‌های بالا ضریب اتمیسیته γ را رابطه زیر قابل محاسبه خواهد بود:

$$\gamma = \frac{4\pi^2 mV}{A^2 P \tau^2} \quad (۴-۱۳)$$

۴-۷ انتقال گرما^۱

شخصی را در نظر بگیرید که خود را با بخاری روشنی گرم می‌کند. او می‌تواند دستانش را در تماس با بخاری قرار دهد و گرم شود (البته مواظب باشد که نسوزد!) دستانش را بالای بخاری بگیرد و در مجاورت بخاری نگه داشته و خود را گرم نماید. در اینجا سه روش وجود دارد که گرما به شخص انتقال می‌یابد که به ترتیب به انتقال گرما از طریق رسانش، همرفت و تابش صورت می‌گیرد.

۴-۷-۱ رسانش گرما

میله‌ای فلزی به طول l و سطح مقطع A را در نظر بگیرید که از یک انتها در مجاورت منبع گرمایی و یا اجاقی قرار داد و انتهای دیگر آن در هوای سردتر است. مولکول‌ها در مجاورت منبع گرما گرم می‌شوند و با گرفتن انرژی گرمایی شروع به نوسان بیشتر می‌کنند و انرژی را به مولکول‌های مجاور خود می‌دهند و این روند ادامه پیدا می‌کند تا این که گرما از انتهای گرم به انتهای دیگر که سرد است منتقل می‌شود. طبیعی است که آهنگ زمانی انتقال گرما که توان رسانندگی گرمایی نیز خوانده می‌شود با طول میله نسبت عکس و با سطح مقطع و اختلاف دمای دو انتهای میله نسبت مستقیم داشته باشد چون به عنوان مثال چنانچه به جای آن که یک انگشت دست و یا کف دست خود را در تماس با بخاری قرار دهید گرمای بیشتری را دریافت می‌کنید. با این اوصاف می‌توان رابطه رسانش گرمایی را به صورت زیر نوشت:

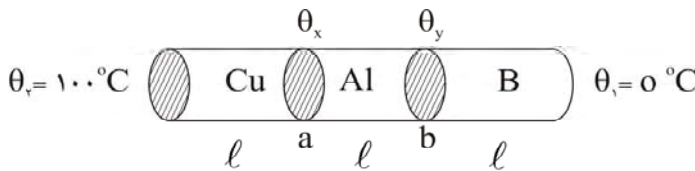
$$H = \frac{dQ}{dt} \quad (۴-۱۴)$$

و نیز

$$H = k A \frac{\Delta\theta}{l} \quad (۴-۱۵)$$

که k ضریب رسانایی گرمایی ماده نامیده می‌شود و مقدار آن برای برخی از مواد در جدول (۴-۲) آمده است.

مثال ۵: سه میله فلزی مسی، آلومینیومی و برنجی مطابق شکل زیر در تماس با یکدیگر قرار دارند و سطح مقطع و انتهای آزاد مس در دمای $100^\circ C$ و انتهای آزاد برنجی در دمای صفر درجه سانتی‌گراد است. دمای محل تماس‌ها را به دست آورید.



شکل ۴-۵. مربوط به مثال ۵.

$$k_{Cu} = 390 \frac{W}{m \cdot ^\circ C}, k_{Al} = 210 \frac{W}{m \cdot ^\circ C}, k_B = 109 \frac{W}{m \cdot ^\circ C} \quad \text{حل:}$$

$$A_{Cu} = A_{Al} = A_B, \ell_{Cu} = \ell_{Al} = \ell_B = \ell$$

جدول ۴-۲. مقدار ضریب رسانندگی گرمایی k .

ماده	$k (J/ms \cdot ^\circ C)$
آلومینیوم	۲۱۰
برنج	۱۰۹
مس	۳۹۰
نقره	۴۲۰
پنبه نسوز	۰٫۶۰
آجر	۰٫۷۰
بتون	۱٫۷۰
شیشه	≈ 0.80
یخ	۲٫۲۰
آب	۰٫۶۰
چوب	۰٫۱
هوا	۰٫۰۲۲
چوب پنبه	۰٫۰۴۲
پشم شیشه	۰٫۰۴۰
الیاف پشمی	۰٫۰۳۵
خلأ	۰

دو فلز مس و آلومینیوم در محل تماس a در تعادل گرمایی قرار می‌گیرند که دمای تعادل در نقطه a را با θ_x نشان می‌دهیم. همین را برای نقطه تماس b که دو فلز آلومینیوم و برنج در دمای تعادل θ_y است به کار می‌بریم و به این ترتیب داریم:

$$H_{Cu} = H_{Al}$$

و یا

$$k_{Cu} A_{Cu} \frac{\theta_r - \theta_x}{\ell_{Cu}} = k_{Al} A_{Al} \frac{\theta_x - \theta_y}{\ell_{Al}}$$

که با برابر بودن طول و سطح مقطع دو فلز داریم:

$$k_{Cu} (\theta_r - \theta_x) = k_{Al} (\theta_x - \theta_y) \quad (16-4)$$

در نقطه تماس b داریم:

$$H_{Al} = H_B$$

$$k_{Al} A_{Al} \frac{\theta_x - \theta_y}{\ell_{Al}} = k_B A_B \frac{\theta_y - \theta_1}{\ell_B}$$

که دوباره می توان رابطه گرمایی بین دو فلز آلومینیوم و برنج را نوشت:

$$k_{Al} (\theta_x - \theta_y) = k_B (\theta_y - \theta_1) \quad (۱۷-۴)$$

مقادیر معلوم را در رابطه های (۱۵-۴) و (۱۶-۴) جایگذاری می کنیم:

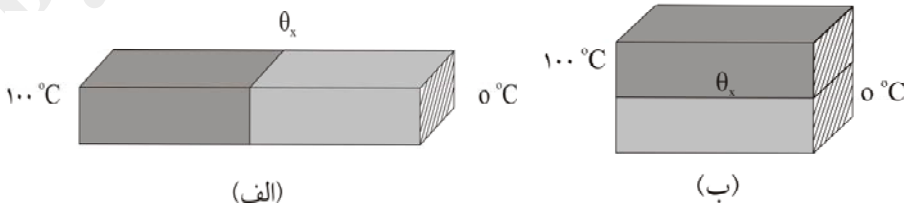
$$۳۹۰ (۱۰۰ - \theta_x) = ۲۱۰ (\theta_x - \theta_y)$$

$$۲۱۰ (\theta_x - \theta_y) = ۱۰۹ (\theta_y - ۰)$$

که از آنجا دماهای محل اتصال به دست می آیند:

$$\theta_x = ۴۵/۹^\circ C, \theta_y = ۳۰/۲^\circ C$$

مثال ۶: دو جعبه مکعبی فلزی را یک بار به دنبال هم مطابق شکل ۴-۶ (الف) جوش می دهیم و بار دیگر یکی را بر بالای دیگری مطابق شکل قرار می دهیم. اگر در حالت (الف) آهنگ انتقال گرما برابر $۰/۳۵ J/s$ باشد آنگاه چه مدت طول می کشد تا همین مقدار گرما در وضعیت شکل ۴-۶ (ب) انتقال یابد؟



شکل ۴-۶. مربوط به مثال ۶.

حل: در شکل (الف):

$$H_1 = kA \frac{\theta_2 - \theta_1}{\ell} \Rightarrow \frac{kA}{\ell} = \frac{H_1}{\theta_2 - \theta_1}$$

$$\frac{kA}{\ell} = \frac{0.35}{100-0} = 3.5 \times 10^{-3} \frac{J}{s \text{ } ^\circ C}$$

در شکل ۴-۶ (ب) سطح دو برابر و طول نصف می شود لذا داریم:

$$H_2 = k(2A) \frac{\theta_2 - \theta_1}{\ell/2} = 4 \frac{kA}{\ell} (\theta_2 - \theta_1)$$

$$H_2 = 4 \times 3.5 \times 10^{-3} \times (100-0) = 1.4 \frac{J}{s}$$

در قسمت (الف) در مدت یک ثانیه مقدار 3.5×10^{-3} ژول گرما منتقل می شود.

در قسمت (ب) باید همین مقدار گرما در مدت زمان t منتقل شود. بدین ترتیب می توان نوشت:

$$H_2 = \frac{Q_2}{t}$$

که $H_2 = 1.4 J/s$ و $Q_2 = 3.5 \times 10^{-3} J$ است پس:

$$1.4 = \frac{3.5 \times 10^{-3}}{t} \Rightarrow t = 3.4 \times 10^{-6} s = 3.4 \mu s$$

بنابراین در مدت 3.4 میکروثانیه می توان در وضعیت شکل ۴-۶ (ب) همان

مقدار گرما که در قسمت (الف) به مدت ۱ ثانیه منتقل شده است را انتقال داد.

۴-۷-۲ همرفت^۱

اگر انتقال گرما با انتقال ماده همراه باشد فرآیند را همرفت گویند و به این معنی که وقتی مایع و گاز در مجاورت منبع گرما گرم می شوند و به محل دیگری می روند تا گرما را با بخش سردتر شارش دهند و این همان جریان گرمایی همرفت است. جریان گرمایی همرفت هم می تواند به دلیل اختلاف چگالی حاصل از اختلاف دما و هم با

عامل خارجی صورت گیرد که به ترتیب این پدیده‌ها را همرفت طبیعی و همرفت واداشته گویند.

اکنون یک سر تخت خمیده گرمی را که در برابر شارهای مانند هوا قرار دارد در نظر بگیرید که باعث انباشتگی شار گرم‌تر به صورت فیلم نازکی در مجاور سد می‌شود و تنها با در نظر گرفتن انتقال گرما به طریق همرفت می‌توان آن را به صورت رابطه زیر نوشت:

$$H = \frac{dQ}{dt} = h A \Delta\theta \quad (۱۸-۴)$$

که در آن A مساحت دیواره سد، $\Delta\theta$ اختلاف دمای محل گرم و محل سرد شار است. مسأله اساسی همرفت، تعیین ضریب همرفت h می‌باشد که علاوه بر نوع شار، چگالی، چسبندگی، گرمای ویژه، سرعت، تبخیر و تقطیر به شکل و چگونگی قرار داشتن سطح نیز وابسته می‌باشد.

مثال ۷: دیواره اتاقی که در دمای ثابت θ_1 است با پوششی عایق به ضخامت d و ضریب رسانش گرمایی k پوشیده شده است. طرف دیگر ماده با هوا در دمای θ_2 در تماس می‌باشد. اگر گرما تنها از طریق رسانندگی از پوشش و همرفت طبیعی در هوا انتقال یابد، توان انتقال گرما را به دست آورید.

حل: در تعادل گرمایی که دمای تعادل پوشش برابر θ_x است و

$$H_1 = H_2$$

روابط زیر را می‌توان نوشت:

$$hA(\theta_2 - \theta_x) = kA \frac{\theta_x - \theta_1}{d} \Rightarrow \frac{hd}{k}(\theta_2 - \theta_x) = \theta_x - \theta_1$$

$$\left(1 + \frac{hd}{k}\right)\theta_x = \frac{hd}{k}\theta_2 + \theta_1$$

حال دمای تعادل θ_x را می‌توان به دست آورد:

$$\theta_x = \frac{\frac{hd}{k}\theta_r + \theta_l}{1 + \frac{hd}{k}}$$

با جایگذاری θ_x در یکی از این روابط توان انتقال گرمای H ، به راحتی می توان H را بر حسب کمیت های داده شده به دست آورد.

$$\begin{aligned} H &= hA(\theta_r - \theta_x) = hA \left[\theta_r - \frac{\frac{hd}{k}\theta_r + \theta_l}{1 + \frac{hd}{k}} \right] \\ &= hA \frac{\left(1 + \frac{hd}{k} - \frac{hd}{k}\right)\theta_r - \theta_l}{1 + \frac{hd}{k}} = hA \frac{\theta_r - \theta_l}{1 + \frac{hd}{k}} \end{aligned}$$

با مرتب کردن رابطه و استفاده از $\frac{d}{k} + \frac{1}{h} = \frac{1}{u}$ داریم:

$$H = Au(\theta_r - \theta_l)$$

۴-۷-۳ تابش^۱

دو روش انتقال گرمایی که در بخش های پیش بحث شد وجود یک محیط مادی ضروری بود یعنی در خلاء انتقال گرما به طریق رسانش و همرفت ممکن نیست چون در هر دوی آنها انرژی از مولکولی به مولکول دیگر منتقل می گردد. اما یک روش دیگر انتقال گرما وجود دارد که حتی قادر است گرما را از خلاء نیز عبور دهد که از جنس امواج الکترومغناطیسی است و این روش انتقال به تابش معروف می باشد.

در توان گرمایی تابشی جدای از تفاوت دمایی بین دو نقطه، جنس سطح گسیلنده آن به همراه مساحت سطح گسیلنده هم حائز اهمیت هستند. میزان تأثیر جنس سطح گسیلنده که به ضریب گسیلندگی e معروف است برای جسم سیاه دارای مقدار

واحد است که به ثابت جهانی گسیلندگی معروف است. ضریب تناسب توان گرمایی H (و یا $\frac{dQ}{dt}$) با توان چهارم دما، ضریب گسیلندگی و سطح را ثابت بولتزمن می‌نامند و با سیگما (σ) نشان می‌دهیم و مقدار آن برابر است با

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4} \quad (19-4)$$

که W معرف وات و K علامت کلوین می‌باشد. از آنجا می‌توان رابطه توان گرمایی را به صورت زیر نوشت:

$$H = A e \sigma (T^4 - T_0^4) \quad (20-4)$$

که T_0 دمای اولیه می‌باشد.

۴-۸ مثال‌های حل شده

۱. اختلاف دمای دو نقطه میله آهنی که به فاصله ۲۰ سانتی‌متری از هم هستند برابر $100^\circ C$ می‌باشد. اگر سطح مقطع آن مربعی به ضلع ۱۲ سانتی‌متر باشد آنگاه تعیین کنید که در مدت یک ساعت چه مقدار گرمایی از این دو نقطه منتقل می‌شود (ضریب رسانش گرمایی آهن $84 \frac{W}{m \cdot ^\circ C}$ است).

حل:

$$H = k A \frac{\Delta \theta}{\ell} = 84 \times (0.12 \times 0.12) \frac{100}{0.12} = 60.418 W$$

$$\Rightarrow H = \frac{Q}{t} = 60.418 W$$

$$t = 3600 s \Rightarrow Q = 60.418 \times 3600 = 217528.0 J$$

۲. میله فلزی مسی با طول ۱ متر گرما را از بخار آب جوش $100^\circ C$ می‌گیرد و از آن سر به قطعه یخ صفر درجه سانتی‌گراد که با آن در تماس می‌دهد. تعیین کنید که پس از ۵ دقیقه چه مقدار یخ ذوب می‌شود؟ مقطع میله را دایره‌ای به شعاع ۶ سانتی‌متر فرض کنید.

حل: از جدول (۴-۲) می‌توان ضریب رسانندگی گرمایی مس را برابر $390 \text{ J/ms}^\circ\text{C}$ به دست آورد. از طرفی گرمای نهان ذوب یخ برابر 336 KJ/Kg می‌باشد. مساحت سطح مقطع میله برابر است با

$$A = \pi r^2 = 3.14 \times (0.06)^2 = 0.11 \text{ m}^2$$

گرما به طریق رسانندگی از بخار آب جوش به یخ منتقل می‌شود پس:

$$H = kA \frac{\Delta\theta}{l} = 390 \times 0.11 \times \frac{100-0}{1} = 390 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

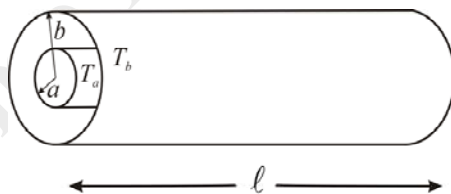
$$t = 5 \text{ min} = 300 \text{ s}$$

$$Q = Ht = 390 \times 300 = 117 \times 10^5 \text{ J}$$

از طرفی

$$Q_f = ml_f \Rightarrow 117 \times 10^5 = m (336) \Rightarrow m \approx 348 \text{ Kg}$$

۳. ضریب رسانندگی گرمایی K بطور خطی با شعاع r دو استوانه هم محور شکل زیر به شعاع a و b تغییر می‌کند. اگر دمای درونی استوانه کوچک T_a و بیرون استوانه بزرگ T_b باشد. آهنگ شعاعی جریان گرما در بین دو استوانه هم محور به طول l را بیابید؟



شکل ۴-۷. مربوط به مثال حل شده ۳.

حل: ضریب رسانندگی گرمایی K بطور خطی با شعاع r تغییر می‌کند پس:

$$k = \alpha r$$

و از رابطه رسانش گرمایی داریم:

$$H = -kA \frac{d\theta}{dr} = -\alpha r (\pi r \ell) \frac{dT}{dr}$$

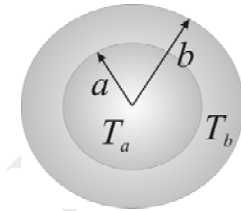
$$\int_{T_a}^{T_b} dT = -\frac{H}{\pi \alpha \ell} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{H}{\pi \alpha \ell} \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_a^b$$

$$T_b - T_a = \frac{H}{\pi \alpha \ell} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) = \frac{H}{\pi \alpha \ell} \frac{a-b}{ab}$$

که آهنگ شعاعی جریان گرمایی برابر است با:

$$H = \pi \alpha \ell \frac{ab}{a-b} (T_b - T_a)$$

۴. فرض کنید که ضریب رسانندگی گرمایی در انتقال گرما بین دو کره هم مرکز ثابت بماند. آهنگ شعاعی را با توجه به شکل زیر به دست آورید.



شکل ۴-۸. مربوط به مثال حل شده ۴.

حل: مساحت کره‌ای به شعاع r برابر است با

$$A = 4\pi r^2$$

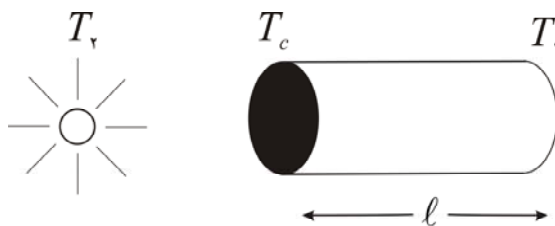
توان رسانش گرمایی برابر است با

$$H = -k (4\pi r^2) \frac{d\theta}{dr}$$

$$\int_{T_a}^{T_b} d\theta = -\pi k \int_a^b \frac{dr}{r^2} \Rightarrow T_b - T_a = \pi k \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$$

$$\Rightarrow H = \frac{(T_a - T_b) \times 4\pi k ab}{b-a}$$

۵. میله‌ای به طول ℓ از یک طرف کاملاً سیاه شده و در معرض چشمه‌ای به دمای T_2 قرار دارد. سمت دیگر میله در دمای $T_1 < T_2$ قرار دارد. اگر ضریب رسانندگی گرمایی در طول میله برابر مقدار ثابت k باشد، دمای مقطع سیاه را در تعادل گرمایی به دست آورید؟



شکل ۴-۹. مربوط به مثال حل شده ۵.

حل: در تعادل گرمایی، توان گرمای چشمه (H_2) با توان گرمایی در میله (H_1)

برابر است یعنی

$$H_2 = H_1$$

$$Ae \times \sigma (T_2^4 - T_c^4) = k A \frac{T_c - T_1}{\ell}$$

T_c از رابطه بالا به دست می‌آید.

۹-۴ مسائل

۱. نشان دهید که اگر یک قطعه رسانای گرما را به دو قسمت تقسیم کنیم گرادیان دما در هر قسمت متناسب با عکس ضریب رسانایی گرمایی است.

۲. یک گلوله فلزی مسی به جرم 0.5 کیلوگرم و دمای $100^\circ C$ را بر قطعه یخ بزرگ $0^\circ C$ قرار می‌دهیم. تعیین کنید پس از برقراری تعادل، جرم یخ ذوب شده چقدر است؟ اگر گرمایی جدای از گلوله فلزی، از هوای گرم با دمای $60^\circ C$ به همراه گلوله فلزی بر واحد سطح یخ برسد و ضریب همرفت هوا را $2 J/m^2 \cdot s \cdot ^\circ C$ بگیریید و معین کنید چه مقدار بیشتر از حالت اول یخ ذوب می‌شود؟

۳. دمای رشته لامپ ۲۰۰ واتی برابر 3000 K می‌باشد اگر ضریب گسیلندگی برابر 0.4 باشد، مساحت سطح رشته را پیدا کنید.

۴. یک مخزن آب مدتی در هوای سرد θ_A بوده و لایه‌ای از یخ به ضخامت l روی سطح آن تشکیل شده است. آهنگ تشکیل یخ را در سطح زیرین لایه یخ حساب کنید. ضریب رسانایی گرمایی، چگالی و گرمای ذوب یخ را به ترتیب ρ ، k و Q_f بگیرید و فرض کنید که هیچ گرمایی از دیواره‌های مخزن به آن وارد یا خارج نمی‌شود.

۵. دو کره مسی و آلومینیومی سیاه کوچکی با نخی ابریشمی در داخل حفره بزرگی در یک قطعه یخ در حال ذوب آویزان شده‌اند. دمای کره‌ها پس از به ترتیب 10 و 15 دقیقه از 3°C به 1°C می‌رسد. نسبت گرمای ویژه آلومینیوم به گرمای ویژه مس را پیدا کنید؟

$$\left(\rho_{Al} = 2.7 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, \quad \rho_{Cu} = 8.9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \right)$$

۶. شعاع خورشید برابر $7 \times 10^8 \text{ m}$ و فاصله زمین تا خورشید برابر $1.5 \times 10^{11} \text{ m}$ می‌باشد. اگر ضریب گسیلندگی خورشید را برابر ۱ بگیریم آنگاه دمای سطح خورشید وقتی که خورشید با آهنگ 1500 وات بر واحد سطح زمین می‌تابد چقدر است؟

۷. زیمانسکی، سرعت موج طولی را مطابق شکل زیر به دست آورد. بیستونی هوای درون سیلندر با سرعت W متراکم می‌کند و جبهه موج متراکم شده با سرعت ثابت W به جلو می‌رود. نشان دهید سرعت موج طولی W از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$W = \sqrt{\frac{1}{\rho \kappa_s}}$$

فصل پنجم

قانون اول ترمودینامیک

۵-۱ مقدمه

در فصل پیش معادله حالت یک سیستم را برحسب مختصه‌های ترمودینامیکی نوشتیم و دیدیم که حالت و رفتار سیستم را می‌توان با کمیت‌های ماکروسکوپی فشار، حجم و دما و یا تعداد مول مطالعه و بررسی کرد. تلاش شد تا رابطه بین کمیت‌های ماکروسکوپی بالا را پیدا نماییم و دیدیم که رابطه فشار با دما در V و n ثابت یک رابطه خطی است، اما با عکس حجم در T و n ثابت رابطه مستقیم دارد. تا حدی به وسیله معادله واندروالس تصحیحاتی بر معادله عمومی گازهای کامل صورت دادیم. اما نباید سهل گرفت و باور داشت که این کمیت‌های ماکروسکوپی قادر به توصیف سیستم‌های ماکروسکوپی ترمودینامیکی هستند. هر چند در عمل در بسیاری از کاربردهای مهندسی، همانند رفتار گازهای حاصل از احتراق در سیلندر موتور اتومبیل صورت می‌گیرد نیازی مبرم به دانستن جزئیات و به عبارتی دنیای میکروسکوپی درون سیستم نیست و می‌توان با مختصه‌های ماکروسکوپی فشار، حجم و دما آن را مطالعه نمود. ولی اطلاعات دقیق‌تر و جامع‌تر را تنها می‌توان با مطالعه رفتار میکروسکوپی درون سیستم استخراج نمود.

۵-۲ اصل اول ترمودینامیک

در گام نخست به سراغ جنبش مولکول‌های درون یک سیستم می‌رویم که به طریقی دستخوش تغییر می‌شوند و این تغییرات در انرژی درونی سیستم نمود پیدا می‌کند. از آنجایی که انرژی درونی (U) سیستم مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل مولکول‌های

سیستم است افزایش و یا کاهش دما می‌تواند آن را شدیداً تحت تأثیر قرار دهد و انرژی درونی را به صورت تابعی از یک مختصه مهم ترمودینامیکی یعنی دما نماید.

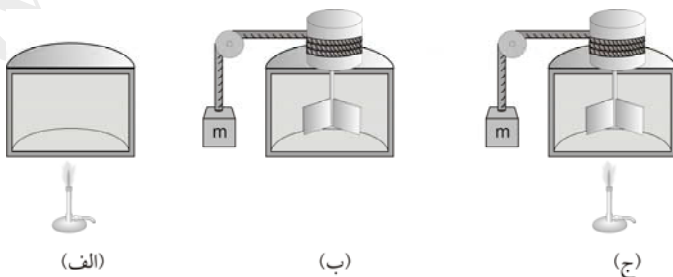
$$U \equiv U(T) \quad (1-5)$$

اما به شکل‌های دیگر هم می‌توان انرژی درونی سیستم را دستخوش تغییر نمود. مثلاً به خوبی تجربه کردید که به شیوه‌های مختلف می‌توانید در هوای سرد خودتان را گرم کنید یا دستانتان را در مجاورت بخاری بگیرید و به راحتی گرم شوید و یا کف دستتان را به هم بمالید و در اثر اصطکاک بین کف دست‌هایتان گرم شوید به عبارتی انرژی درونی بدن‌تان را افزایش می‌دهید. مثال بارز دیگر را در شکل ۵-۱ مشاهده می‌کنید که انرژی درونی سیستم تغییر می‌کند. بنابراین چنانچه انرژی درونی اولیه U باشد آنگاه به شیوه‌هایی که در شکل ۵-۱ (الف)، (ب) و (ج) آمده است می‌توان انرژی درونی را به U رساند که تغییر انرژی درونی سیستم (ΔU) می‌تواند همانند شکل ۵-۱ (الف) تنها به وسیله گرما صورت گیرد. در این حالت:

$$\Delta U = Q \quad (2-5)$$

و یا فقط با کار بی‌دررو بدون مبادله هیچ گرمایی تغییر انرژی درونی را موجب شد که در این صورت:

$$\Delta U = W \quad (3-5)$$



شکل ۵-۱. تغییر انرژی درونی سیستم و نیز تمایز بین کار و گرما را در شکل‌های (الف) و (ب) می‌بینید. (الف) جریان گرما بدون انجام کار. (ب) کار بی‌دررو. (ج) کار و گرما هر دو با هم انرژی درونی سیستم را افزایش می‌دهند.

انتظار سیستم بی‌دررو و منزوی یک خیال خام است و در حقیقت تغییر انرژی درونی سیستم باید مجموع تغییرات کار انجام یافته و گرمای وارده بر سیستم باشد که در شکل (۵-۱) مثالی از آن را نمایش داده‌ایم پس:

$$\Delta U = Q + W \quad (۴-۵)$$

تغییرات دیفرانسیلی فوق را می‌توان با استفاده از دیفرانسیل گرمایی dQ و دیفرانسیل کار dW به صورت زیر نوشت:

$$dU = dQ + dW \quad (۵-۵)$$

رابطه (۵-۵) بیانی از اصل اول ترمودینامیک است. وجود خط بر علامت دیفرانسیل d را می‌توان به کامل نبودن دیفرانسیل تغییرات گرما و یا کار نسبت داد. در بالا قانون اول ترمودینامیک را که در واقع دومین قانون ترمودینامیکی است نوشتیم. کلمه دوم را به این دلیل به کار نبردیم که قانون دوم ترمودینامیک قانون دیگری است و پیشتر از آن قانون دیگری به نام قانون صفرم ترمودینامیک مطرح شده است. علت نام صفرم به قانون مزبور را به تصور بدیهی بودن این قانون در ابتدای کار نسبت می‌دهند. ولی بعدها همانطور که در قانون قیاس، بحث‌های علمی‌تری صورت گرفت این قانون را هم دقیق بررسی کردند تا جایی که باور بر این شد که آن را تحت نام یک قانون مهم ترمودینامیکی مطرح کنند و به دلیل این که می‌بایست پیشتر از قوانین دیگر ترمودینامیک مطرح شود و قانون اول ترمودینامیک هم به اول بودن شهرت یافته بود، مجبور شدند نام قانون صفرم را بر آن بگذارند. قانون صفرم ترمودینامیک بیان می‌دارد:

"اگر سیستم A با سیستم B در تعادل گرمایی باشد و سیستم B با سیستم C در تعادل گرمایی قرار گیرد آنگاه سیستم A با سیستم C نیز در تعادل گرمایی خواهد بود."

دماسنج‌ها براساس قانون صفرم ترمودینامیک عمل می‌کنند. فرض کنید می‌خواهید دمای محیطی را اندازه بگیرید و برای این کار از یک دماسنج جیوه‌ای استفاده می‌کنید. ابتدا محیط (سیستم A) با بدنه دماسنج که به عنوان سیستم B عمل می‌کند به تعادل گرمایی می‌رسند. سپس بدنه دماسنج یا سیستم B با جیوه درون بدنه که به عنوان سیستم

C در نظر گرفته می‌شود به تعادل گرمایی می‌رسد. آنگاه سیستم C با توجه به اصل صفرم ترمودینامیک با سیستم A در تعادل گرمایی قرار می‌گیرد و دمای محیط را به ما می‌دهد.

اجازه دهید دوباره به اصل اول ترمودینامیک برگردیم و با استفاده از آن گرمای Q را تعریف کنیم. یک سیستم با انجام و یا دریافت کار بی‌دررو و یا انجام و دریافت کار بادررو تغییر حالت پیدا می‌کند. طبیعی است که در دو حالت که انجام کار بر روی سیستم بی‌دررو و یا با دررو بود تغییر انرژی داریم که بنا به تعریف گرما، معادل گرما می‌باشد. تعریف گرما را از لحاظ ترمودینامیکی می‌توان بدین صورت بیان کرد:

"سیستمی که در محیط با دمای بالاتر قرار دارد و محیط بر سیستم کار انجام می‌دهد و انرژی درونی سیستم را تغییر می‌دهد، انرژی‌ای که به صورت غیرمکانیکی به سیستم منتقل شده است برابر تفاضل انرژی درونی و کار انجام شده بر سیستم می‌باشد که این همان گرما است."

یعنی:

$$dQ = dU - dW \quad (6-5)$$

و یا

$$Q = \Delta U - W \quad (7-5)$$

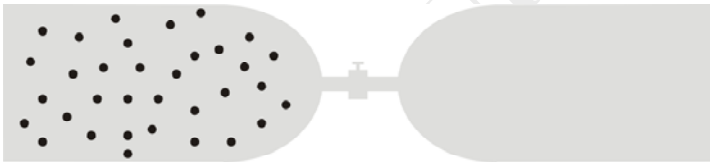
در این نگاه جدای از وجود تابع انرژی درونی سیستم که لازم می‌باشد، اصل پایستگی انرژی و انرژی انتقالی (همان گرما) بین سیستم و محیط وجود دارد که اصل اول ترمودینامیک، بر گرفته از وجود این اصل است.

البته لازم نیست که حتماً بر روی سیستم کار انجام شود بلکه سیستم هم می‌تواند بر روی سیستم دیگر و یا محیط کار انجام دهد. تنها تفاوتی که انجام می‌شود علامت + و - در روابط بالا می‌باشد یعنی در سیستم منزوی چنانچه بر سیستم کار انجام شود یعنی $W > 0$ باشد آنگاه سیستم گرما پس می‌دهد و $Q < 0$ است. اما اگر سیستم بر محیط کار انجام دهد مفهوم آن این است که سیستم گرما دریافت کرده است ($Q > 0$) و کار انجام داده لذا $W < 0$ است.

بدیهی است چنانچه تحولات در سیستم طی فرآیند ایستاوار انجام گیرد انرژی داخلی آن بدون تغییر می‌ماند. این دو دیدگاه موجب اختراع ماشین‌های گرمایی و سرمایایی شده است.

مثال ۱: یک آزمایش انبساط آزاد را طراحی کنید و اصل اول ترمودینامیک را در تفسیر آن به کار ببرید.

حل: مطابق شکل ۲-۵ دو مخزن را کاملاً با پشم شیشه می‌پوشانیم تا بی‌درروی گرمایی باشد و دو مخزن را با یک شیر به هم مربوط می‌سازیم. در سمت چپ گاز ایده‌آل با دمای T مخزن را پر کرده است در حالی که مخزن سمت راست خالی است و به اصطلاح در آن خلأ می‌باشد.



شکل ۲-۵. گاز درون مخزن سمت چپ به درون مخزن سمت راست انبساط آزاد می‌یابد.

اگر ناگهان شیر را باز کنیم گاز مخزن سمت چپ به سرعت به درون فضای خلأ مخزن سمت راست هجوم می‌برد تا فشار در دو مخزن چپ و راست شکل ۲-۵ برابر شوند. از نگاه تجربی این فرآیند انبساط آزاد تغییر دمایی را باعث نمی‌شود و دما ثابت باقی می‌ماند به عبارتی پس از برقراری تعادل و توقف شارش گاز می‌بینید که دمای درون هر دو مخزن برابر دمای اولیه T می‌باشد.

آزمایش انبساط آزاد را شرح دادیم اما به مفاهیم فیزیکی‌ای که در این فرآیند نهفته است نپرداختیم. در ابتدا بیان شد که مخزن‌ها از نظر گرمایی عایق‌بندی شده‌اند و گرما از مخزن‌ها بیرون نمی‌رود و یا وارد آن نمی‌شود، یعنی $\Delta Q = 0$ است. اگر باز کردن شیر را کار به حساب نیاوریم ملاحظه می‌کنید که کاری هم بر روی مخزن‌ها صورت نگرفته، پس $\Delta W = 0$ است. از اصل اول ترمودینامیک (۵-۵) نتیجه می‌شود که:

$$\Delta U = 0 \Rightarrow U_i = U_f$$

یعنی انرژی درونی گاز هم تغییر نکرده است. توجه می‌کنید با این که حجم اشغال شده با گازها در ابتدا نسبت به حالت نهایی کمتر بوده است یعنی حجم افزایش یافته است ولی این تغییر حجم تأثیری بر انرژی درونی سیستم نداشته است. بنابراین می‌توان به یک نتیجه بسیار مهم دست یافت "انرژی درونی گاز ایده‌آل مستقل از حجم است". همچنین می‌توان نتیجه گرفت که انرژی درونی گاز کامل یا ایده‌آل مستقل از فشار نیز است. چون بنا به معادله حالت که به صورت:

$$f(P, V, T) = 0$$

است چنانچه بخواهیم همین معادله حالت را برای انرژی درونی بنویسیم آنگاه:

$$U(P, V, T) = 0 \quad (۸-۵)$$

هر مختصه ترمودینامیکی در معادله حالت را می‌توان با استفاده از مختصه‌های ترمودینامیکی دیگر به دست آورد. در معادله حالت انرژی درونی در رابطه (۸-۵) می‌توان فشار را برحسب کمیت‌های ماکروسکوپی V و T به دست آورد. اما دیدید که انرژی درونی یک گاز کامل مستقل از حجم V است پس فشار برحسب تابعی از T به دست می‌آید به عبارتی فشار P هم به طور مستقل عمل نمی‌کند بلکه تابعی از مختصه ترمودینامیکی T است. در نتیجه می‌توان به آنچه در ابتدای بحث داشتیم یعنی به رابطه (۸-۵) برای انرژی درونی گاز ایده‌آل رسید که انرژی درونی گاز کامل تابع دمای گاز است.

هر چند رفتار فوق را جدای از نگاه ترمودینامیکی می‌توان با استفاده از نظریه جنبشی در فصل پیش هم مطالعه نمود ولی تفاوت بارزی در این دو نگاه وجود دارد. به یاد دارید که فرضیات بسیاری را در نظر گرفتیم تا روابط بسیاری را از دل نظریه جنبشی بیرون بکشیم اما در اینجا فرض خاص مهمی مطرح شده است. به عبارتی نگاه ترمودینامیکی در قیاس با نگاه نظریه جنبشی یک نگاه عام‌تر و بهتر است و این موجب اعتبار بیشتر نتایج ترمودینامیکی می‌شود و حتی گاهی برخی از موارد مطرح شده در حوزه ترمودینامیک را نمی‌توان با نظریه جنبشی مورد بحث و بررسی قرار داد.

منظور از بیان بالا این است که نظریه ترمودینامیکی را یک نظریه کاملاً پخته و جامع بدانیم، چرا که در آزمایش مثال بالا صحبت از دو حالت تعادل اولیه و نهایی شده است. حالت نهایی حالتی بوده است که به اندازه کافی وقت صرف شد تا منتظر بمانیم که هیچ شارشی بین مخزن‌ها جریان نیابد و فشار در مخزن‌ها برابر باشد. این درست است که در این وضعیت به یک حالت تعادل نهایی می‌رسیم اما پرسش بحث برانگیزی مطرح است که به واکنش‌های عدم تعادل در بین دو حالت اولیه و حالت نهایی گاز درون مخزن‌ها بر می‌گردد. به راستی در زمانی که طول می‌کشد تا مخزن‌ها به حالت تعادل ترمودینامیکی برسند چه اتفاقی می‌افتد؟

راحت‌ترین پاسخ به پرسش مزبور این است که نگاه ترمودینامیکی با مختصه‌های ماکروسکوپی عاجز از پاسخ به این پرسش است و همواره فرض می‌کند که سیستم مورد مطالعه در یک حالت تعادل به سر می‌برد.

شاید در آینده خوش بین باشیم که مکانیک آماری به کمک ما می‌آید و در پاسخ به این پرسش یاریمان می‌دهد. اما فراموش نکنید که تنها مکانیک آماری تعادلی چه بسا توانایی پاسخ‌گویی را نداشته باشد. بحث بیشتر از حوصله کتاب حاضر خارج است.

۳-۵ کار در فرآیندهای ایستوار

در شکل ۳-۵ مشاهده کردید که با انجام کار هم می‌توان انرژی درونی سیستم را دستخوش تغییر کرد. البته می‌توان سیستمی را طراحی کرد که گرما باعث انبساط گازهای محبوس شده به عنوان مثال در سیلندر شود و این گرما باعث جابجایی پیستون در سیلندر شده و بدین ترتیب کار انجام شود و یا به عکس به طریقی گاز تراکم شود (مثلاً با سرد کردن) و پیستون به درون سیلندر کشیده شود. آنچه از این به بعد باید توجه داشت این است که تغییر حجم مثبت که به منزله انبساط است باعث کار منفی و در عوض در تراکم کار مثبت را داریم. با این یادآوری بهتر است در این جا به کار در فرآیند ایستوار پردازیم.

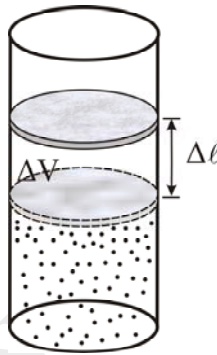
برای این منظور سیستم هیدروستاتیکی که گاز محبوس شده در سیلندر با پیستون را در بر دارد را مطابق شکل ۳-۵ در نظر می‌گیریم.

گاز درون سیلندر (و یا استوانه) بر پیستون نیرو وارد می‌کند و باعث می‌شود که

پیستون به سمت بیرون سیلندر جابجا شود و تغییر حجم ΔV را که برابر است با:

$$\Delta V = A \Delta \ell \quad (9-5)$$

به وجود آورد و بدین ترتیب کار بر پیستون در حین انبساط گاز صورت می‌گیرد. اگر این جابجایی پیستون باعث هیچ عدم تعادلی در مختصه‌های ترمودینامیکی سیستم نشود آنگاه فرآیند را می‌توان در جهت برگشت با متراکم نمودن گاز به طریقی که تعادل سیستم حفظ شود انجام داد. به هر حال فرآیند مزبور فرآیندی ایستاوار است. در این فرآیند مولکول‌ها فشار P را بر روی پیستون وارد نموده و تغییر حجم بسیار کوچک dV را در هر لحظه باعث شده‌اند. کار انجام شده برابر است با:



شکل ۳-۵. گاز درون سیلندر بر پیستون نیرو وارد کرده و آن را جابجا می‌کند و بدین ترتیب بر پیستون کار انجام می‌دهد.

$$W = - \int_{V_i}^{V_f} P dV \quad (10-5)$$

فشار P با فشار خارجی که محیط بر پیستون وارد می‌کند برابر است چون تغییر حجم به صورت ایستاوار انجام گرفته است. این فرآیند نه تنها در وضعیت انبساط صورت می‌گیرد:

$$W_e = - \int_{V_i}^{V_f} P dV \quad (11-5)$$

بلکه در جهت عکس آن (یعنی) تراکم صورت می‌گیرد:

$$W_c = - \int_{V_f}^{V_i} P dV$$

و یا

$$W_c = \int_{V_i}^{V_f} P dV \quad (۱۲-۵)$$

هم برقرار است. در یک مسیر ایستاوار می‌بینیم:

$$W_c = -W_e \quad (۱۳-۵)$$

این که در وضعیت انبساط علامت منفی در پشت انتگرال رابطه (۵-۱۱) ظاهر می‌شود به این واقعیت بر می‌گردد که انرژی درونی سیستم در حال انبساط بر خلاف حالت تراکم سیستم کاهش می‌یابد و کاهش انرژی درونی سیستم در همین علامت منفی نهفته است.

مثال ۲: ثابت کنید کار انجام یافته به وسیله یک مول گاز کامل که به طور بی‌دررو از دمای T_1 به دمای T_2 ($T_2 > T_1$) رسیده و منبسط شده است برابر $C_V (T_1 - T_2)$ است و C_V ظرفیت گرمایی مولی می‌باشد.

حل: چون در فرآیند بی‌دررو $Q = 0$ است بنا به اصل اول ترمودینامیک می‌توان رابطه بین تغییر انرژی درونی ΔU که برای گاز کامل فقط تابعی از دما می‌باشد را با کار انجام یافته توسط سیستم به صورت زیر نوشت:

$$U \equiv U(T)$$

$$\Delta U = n C_V \Delta T$$

علامت منفی کار را باید در انبساط به کار برد پس:

$$\Delta U = Q - W$$

$$n C_V \Delta T = 0 - W$$

$$W = -n C_V \Delta T$$

$$= -n C_V (T_2 - T_1) = n C_V (T_1 - T_2)$$

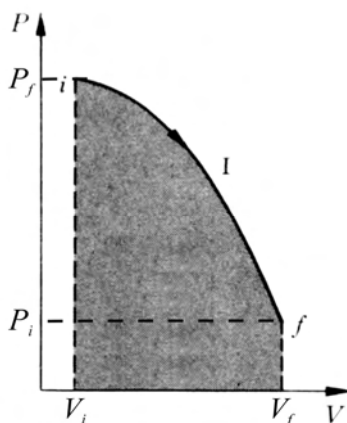
برای یک مول گاز $n = 1$ می‌باشد در نتیجه خواهیم داشت:

$$W = C_V (T_1 - T_2)$$

۴-۵ نمودار فشار-حجم

قبلاً نمودار هموگرافیکی فشار-حجم را مطرح نمودیم اما در اینجا به دلیل تفاوت در منحنی‌های فشار-حجم در وضعیت انبساط و تراکم لازم دیدیم که دوباره به نمودار $P-V$ بپردازیم.

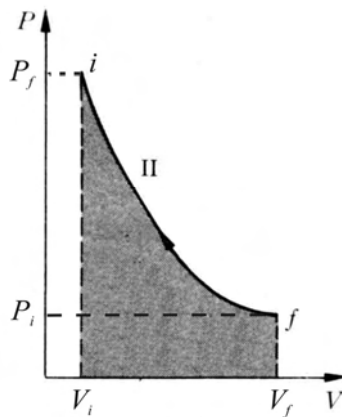
اگر تغییر مکان پیستون که با مولکول‌های گاز صورت می‌گیرد را مد نظر قرار دهیم می‌بینیم که به دلیل ثابت ماندن سطح مقطع پیستون در حین جابجایی‌ها تغییر حجم متناسب با همین تغییر مکان و به عبارتی جابجایی پیستون درون سیلندر است. بنابراین حجم V را به عنوان محور افقی نمودار در نظر می‌گیریم و در دمای ثابت که فرآیند را فرآیند همدمای می‌گویند مطابق با نمودار شکل‌های ۴-۵ و ۵-۵ تغییر را برای فشار P انتظار داریم. در حالت انبساط فشار کاهش می‌یابد و چون انرژی درونی منفی انتگرال حجمی فشار است مساحت زیر نمودار کار در حین انبساط را مطابق شکل ۴-۵ می‌دهد.



شکل ۴-۵. نمودار تغییرات فشار-حجم گاز در حال انبساط، مطابق رابطه (۴-۵) (۱۰-۵) مساحت زیر نمودار کار را می‌دهد.

در حالی که در حین تراکم فشار با کاهش حجم افزایش می‌یابد و هر چه مولکول‌های گاز به یکدیگر نزدیک شوند افزایش فشار بسیار زیادی را خواهیم داشت، در اینجا نیز مطابق شکل ۵-۵ کار انجام یافته برابر سطح زیر نمودار است.

حال اگر دو منحنی شکل‌های ۴-۵ و ۵-۵ را با هم رسم کنیم به شکلی که با توجه به جهت پیکان در نمودارها یک رشته فرآیند و یا یک چرخه شکل یابد آنگاه سیستم از حالت اولیه i به حالت نهایی f رفته و دوباره به حالت اولیه برگشته است که حاصل حرکت یک منحنی بسته مطابق شکل ۶-۵ خواهد بود که به چرخه مربوط است و مساحت هاشور خورده در بین دو منحنی شکل ۴-۵ و ۵-۵ که در شکل ۶-۵ آمده است کار انجام یافته در طی چرخه است.



شکل ۵-۵. نمودار تغییرات فشار-حجم گاز در حال تراکم. مساحت زیر نمودار، کار را مطابق رابطه (۱۲-۵) می‌دهد.

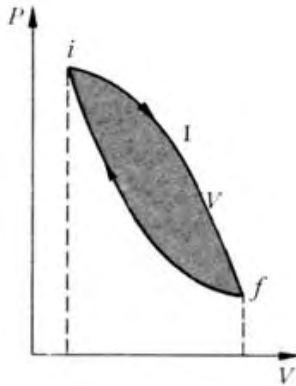
خودآزمایی ۱: واحد مدول یانگ را بیابید.

۵-۵ فرآیندهای هم‌حجم

وقتی کار را بررسی می‌کردیم دیدیم که با تغییر حجم همراه است حال اگر فرآیند به گونه‌ای باشد که حجم آن تغییر نکند آنگاه هیچگونه کاری بر روی سیستم انجام

نمی‌شود و یا سیستم کاری انجام نمی‌دهد. بنابراین $W = 0$ است و با استفاده از رابطه (۷-۵) تنها رابطه بین گرما و کار وجود دارد:

$$\Delta U = \Delta Q \quad (۳۱-۵)$$



شکل ۵-۶. نمودار تغییرات فشار-حجم گاز در یک چرخه. مساحت هاشور خورده، کار انجام یافته در چرخه را نشان می‌دهد.

به عبارتی بر طبق اصل اول ترمودینامیک، تغییرات انرژی درونی سیستم با انرژی گرمایی افزوده شده یا کاسته شده برابر است.

مثال بارز آن را در ذوب اجسام بلورین می‌بینید که در هنگام ذوب شدن بدون تغییر دما، گرما صرف تغییر انرژی درونی سیستم می‌شود و باعث می‌شود تا مولکول‌های اجسام بلورین با ارتعاشات بیشتری که کسب می‌کنند قادر به لغزیدن بر روی هم شوند و به اصطلاح ماده ذوب گردد.

مثال ۳: دمای ۵۰ گرم آب را از $60^{\circ}C$ به $20^{\circ}C$ می‌رسانیم. تعیین کنید که انرژی درونی آن چقدر تغییر کرده است؟

حل: چون کاری در حین سرد شدن آب صورت نمی‌گیرد لذا $\Delta W = 0$ بوده و با استفاده از رابطه (۳۱-۵)، $\Delta U = \Delta Q$ است:

$$\Delta Q = m c \Delta \theta$$

با جایگذاری مقادیر داده شده، مقدار ΔQ به دست می‌آید:

$$\Delta Q = 50 \times 1 \times (20 - 60) = -2000 \text{ cal}$$

که

$$\Delta U = -2000 \text{ cal}$$

یعنی گرمایی که در سرد کردن آب به خارج فرستاده شده از تغییر انرژی درونی آن تأمین شده است.

۵-۶ کار ترمودینامیکی به شکل مسیر بستگی دارد.

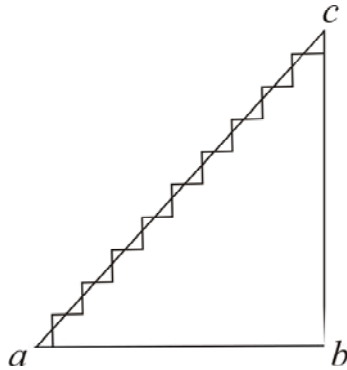
مطابق شکل ۵-۷ چنانچه جسم از نقطه a به نقطه c برده شود کار مکانیکی انجام شده توسط نیروی گرانش در مسیر بی‌اصطکاک چه مسیر مستقیم ac و چه مسیر abc را اختیار کنیم، به یک اندازه است یعنی کار مکانیکی به شکل مسیر بستگی ندارد. اما در ترمودینامیک ممکن است قضیه بدین صورت نباشد. برای این منظور یک چرخه ترمودینامیکی را مطابق شکل ۵-۸ اختیار می‌کنیم و از مسیرهای متفاوت سیستم را از حالت ابتدایی (i) به حالت نهایی (f) می‌بریم و کار انجام یافته در مسیرهای برگزیده شده متفاوت را با هم مقایسه می‌کنیم اگر کارهای انجام یافته در مسیرهای متفاوت به یک اندازه باشند آنگاه کار ترمودینامیکی هم به شکل مسیر بستگی ندارد و در غیر این صورت به دلیل آن که کار در مسیری نسبت به مسیر دیگر کمتر خواهد بود کار به شکل مسیر بستگی خواهد داشت.

حالت اول: مسیر $f \rightarrow a \rightarrow i$ را برمی‌گزینیم که در طی مسیر $i \rightarrow a$ فرآیند هم‌فشار و در مسیر $a \rightarrow f$ فرآیند هم-حجم را داریم. کار انجام شده برابر مساحت زیر خط ia می‌باشد که برابر است با:

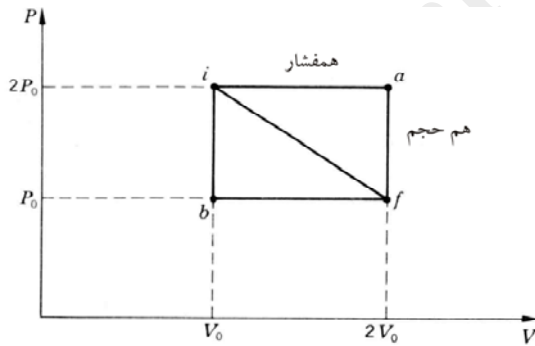
$$W_{iaf} = -P_0 V_0$$

حالت دوم: مسیر $f \rightarrow b \rightarrow i$ را انتخاب می‌کنیم، کار انجام یافته، مساحت زیر خط bf می‌باشد و برابر است با:

$$W_{ibf} = -P_0 V_0$$



شکل ۵-۷. چون نیروی گرانش بر جابجایی در مسیر ab و در عرض پله‌ها عمود است کاری انجام نمی‌دهد لذا کار در مسیر مستقیم ab و abc یکسان می‌باشد.



شکل ۵-۸. کار انجام یافته در مسیرهای مختلف برای بردن سیستم از حالت اولیه (i) به حالت نهایی (f) .

حالت سوم: مسیر مستقیم $i \rightarrow f$ را که در نظر بگیریم مقدار کار انجام یافته برابر می‌شود با:

$$W_{if} = -\frac{3}{2}P_0V_0$$

ملاحظه می‌کنید که مقدار کار انجام یافته در مسیرهای مختلف یکسان نیست یعنی:

$$W_{iaf} \neq W_{ibf} \neq W_{if}$$

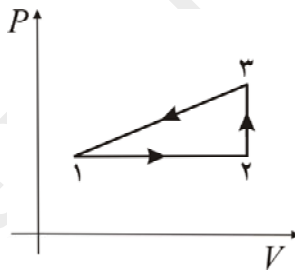
پس کار ترمودینامیکی به شکل مسیر بستگی دارد. همچنین دیدید که برای به دست آوردن کار انجام یافته سیستم می توان مساحت زیر نمودار $P-V$ را به دست آورد.

مثال ۴: یک چرخه ترمودینامیکی در نمودار $P-V$ ترسیم شده است. اگر سیستم با جهت های نشان داده شده (پادساعتگرد) بچرخد:

الف) مثبت یا منفی بودن گرمای Q ، کار W و تغییر انرژی درونی را برای مسیرهای $۱ \rightarrow ۲$ ، $۲ \rightarrow ۳$ و $۳ \rightarrow ۱$ مشخص کنید.

ب) اگر مختصات ۱ و ۲ و ۳ به ترتیب برابر $(۲۰ Pa, ۱ m^3)$ ، $(۲۰ Pa, ۳ m^3)$ و $(۴۰ Pa, ۳ m^3)$ باشد چه مقدار کار در چرخه کامل انجام شده است؟

حل: فرآیند $۱ \rightarrow ۲$ یک فرآیند هم فشار است. فرآیند $۲ \rightarrow ۳$ یک فرآیند هم حجم می شود. اما در مسیر $۳ \rightarrow ۱$ هم حجم و هم فشار کاهش می یابد. حال به تشریح فرآیند در هر مسیر می پردازیم:



شکل ۵-۹. مربوط به مثال ۴.

مسیر $۱ \rightarrow ۲$ که یک فرآیند هم فشار است و از رابطه (۵-۱۰) می توان کار را به صورت زیر به دست آورد:

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} P dV = -P (V_2 - V_1)$$

با این توجه کار منفی است و از طرف دیگر کار انجام شده به وسیله سیستم برخلاف کاری است که مطابق رابطه فوق بر سیستم انجام می شود بنابراین:

$$W_{1 \rightarrow 2} > 0$$

چرا که $W_{1 \rightarrow 2}$ مساحت زیر نمودار $1 \rightarrow 2$ می‌باشد و مثبت است. اما چون کار انجام یافته به وسیله سیستم را در نظر می‌گیریم، اصل اول ترمودینامیک به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\Delta U = Q - W$$

و با توجه به علامت‌های ΔU و W در مسیر $1 \rightarrow 2$ ، علامت گرمای Q هم باید مثبت باشد یعنی گرمای Q وارد سیستم می‌شود. دقت کنید که سیستم باید گرما دریافت کند تا قادر به انجام کار باشد در غیر اینصورت تأمین انرژی برای انجام کار معلوم نیست.

مسیر $2 \rightarrow 3$ که یک فرآیند هم‌حجم است به دلیل آنکه تغییر حجمی وجود ندارد کاری هم صورت نمی‌گیرد. به عبارت دیگر مساحتی زیر نمودار $2-3$ وجود ندارد. از طرفی سیستم گرما دریافت کرده بود لذا $Q > 0$ است و با توجه به اصل اول ترمودینامیک داریم:

$$\begin{aligned} \Delta U &= Q - W = Q - 0 \\ &= Q > 0 \end{aligned}$$

که

$$\Delta U > 0$$

در مسیر $3 \rightarrow 1$ شاهد کاهش فشار و حجم هستیم. لذا سیستم گرما را در مسیر $3 \rightarrow 1$ به محیط پس می‌دهد یعنی $Q > 0$ است. از آنجایی که شیب مسیر به سمت ۱ منفی است پس مساحت روند کاهشی دارد که به معنی منفی بودن کار است. به عبارتی $W < 0$ است و با استفاده از اصل اول ترمودینامیک می‌توان نتیجه گرفت:

$$\Delta U = Q + W < 0$$

و یا

$$\Delta U < 0$$

ب) کار کل انجام یافته در چرخه برابر مجموع کارهای انجام یافته در مسیر $1 \rightarrow 2$ ، $2 \rightarrow 3$ و $3 \rightarrow 1$ است:

$$W = W_{1 \rightarrow 2} + W_{2 \rightarrow 3} + W_{3 \rightarrow 1}$$

که

$$W_{1 \rightarrow 2} = (20)(3-1) = 40 \text{ J}$$

$$W_{2 \rightarrow 3} = 0$$

$$W_{3 \rightarrow 1} = -\frac{1}{2}(40-20)(3-1) - 20(3-1) = -60 \text{ J}$$

توجه دارید که در مسیر $3 \rightarrow 1$ می‌توان کار را به دو طریق محاسبه نمود. یکی مساحت مثلث است. و در روش دیگر معادلهٔ مسیر را بنویسیم و انتگرال حجمی کار را به دست می‌آوریم (به عهدهٔ دانشجو).

بنابراین

$$W = 40 - 60 = -20 \text{ J}$$

پس کل کار انجام یافته به وسیلهٔ سیستم برابر -20 J است.

مثال ۵: با مسیرهای مختلف می‌توان سیستم را از حالت اولیهٔ (۱) به حالت نهایی (۳) برد. اگر گرما و کار در مسیری مثل $3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ معلوم باشد و به ترتیب برابر 50 کالری و 20 کالری باشند آنگاه چنانچه گرما در مسیر $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ برابر 36 کالری باشد:

الف) چه مقدار کار در مسیر $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ باید انجام شود؟

ب) اگر 30 کالری کار لازم باشد تا سیستم را از حالت (۳) به حالت اولیهٔ (۱) برگرداند چه مقدار گرما در مسیر $3 \rightarrow 1$ لازم می‌باشد؟

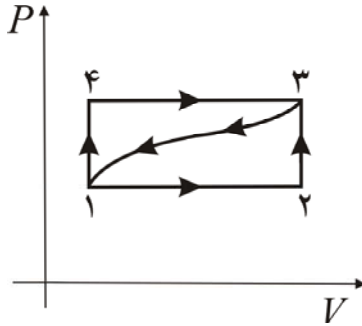
ج) اگر انرژی درونی اولیهٔ سیستم در نقطهٔ ۱ برابر 10 کالری باشد انرژی درونی نهایی سیستم در نقطهٔ (۳) چقدر است؟

د) اگر انرژی درونی در نقطهٔ ۲ برابر 22 کالری باشد مقدار گرما برای فرآیندهای $2 \rightarrow 1$ و $3 \rightarrow 2$ چقدر است؟

حل: باید به این نکته توجه داشت هر مسیر $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ ، $3 \rightarrow 1$ و $3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ را که اختیار کنیم انرژی درونی سیستم در مسیرها به یک اندازه است.

بنابراین

$$\Delta U = U_3 - U_1$$



شکل ۵-۱۰. مربوط به مثال ۵.

که برابر $Q - W$ است و در مسیرهایی مانند $۱ \rightarrow ۲ \rightarrow ۳$ و $۱ \rightarrow ۴ \rightarrow ۳$ به یک اندازه می‌باشد.

$$(Q - W)_{1,4,3} = (Q - W)_{1,2,3}$$

و یا

$$(۵۰ - ۲۰)_{1,4,3} = (۳۶ - W)_{1,2,3}$$

که داریم:

$$W = ۶ \text{ cal}$$

ب) از طرفی چون $(\Delta U)_{1,2,3} = -۳۰ \text{ cal}$ است با استفاده از قانون اول ترمودینامیک در مسیر $۳ \rightarrow ۱$ داریم:

$$\Delta U = Q - W$$

$$-۳۰ = Q - (-۱۳) \Rightarrow Q = -۴۳ \text{ cal}$$

منفی بودن گرما بیانگر آن است که در این فرآیند سیستم گرما از دست داده است.

ج) تغییر انرژی درونی برای مسیر $۱ \rightarrow ۴ \rightarrow ۳$ برابر است با:

$$\Delta U = U_3 - U_1 = (Q - W)_{1,4,3}$$

$$U_3 - ۱۰ = (۵۰ - ۲۰) = ۳۰ \Rightarrow U_3 = ۴۰ \text{ cal}$$

د) در فرآیند ۳ → ۲ فرآیند هم حجم است. بنابراین کاری انجام نمی‌شود و تنها کار در مسیر ۲ → ۱ است که کار انجام یافته ۳ → ۲ → ۱ را می‌دهد.
بدین ترتیب داریم:

$$U_2 - U_1 = (Q - W)_{12}$$

$$22 - 10 = (Q - 6) \Rightarrow Q_{12} = 18 \text{ cal}$$

چون

$$Q_{123} = Q_{12} + Q_{23}$$

$$36 = 18 + Q_{23} \Rightarrow Q_{23} = 18 \text{ cal}$$

مثال ۶: چرخه ترمودینامیکی یک مول گاز ایده‌آل تک اتمی در شکل ۵-۱۱ نشان داده شده است.

الف) کار، گرما و تغییر انرژی درونی را برای هر مسیر به صورت جداگانه به دست آورید.
ب) کار، گرما و تغییر انرژی درونی را برای چرخه به صورت جداگانه به دست آورید.
ج) اگر فشار اولیه در نقطه a چرخه برابر یک اتمسفر باشد، فشار و حجم در دو نقطه ابتدا و انتهای مسیر بی‌دررو را به دست آورید.

حل: فرآیند $a \rightarrow b$ در حجم ثابت و فرآیند $a \rightarrow c$ در فشار ثابت انجام شده است. با استفاده از قانون اول ترمودینامیک می‌دانیم که حجم ثابت به معنی کار صفر است و فشار ثابت هم موجب می‌شود تا بتوان آن را از انتگرال بیرون آورد و فقط از عنصر حجم انتگرال گرفت. با این اوصاف می‌توان روابط مربوطه را با توجه به قانون اول ترمودینامیک و فرآیندها در شکل، چنین نوشت:

$$a \rightarrow b: V_a = V_b \Rightarrow \Delta W_{ab} = 0$$

پس

$$\Delta U = Q = \nu c_V (T_b - T_a) = n \left(\frac{3}{2}R\right) (3T_a - T_a)$$

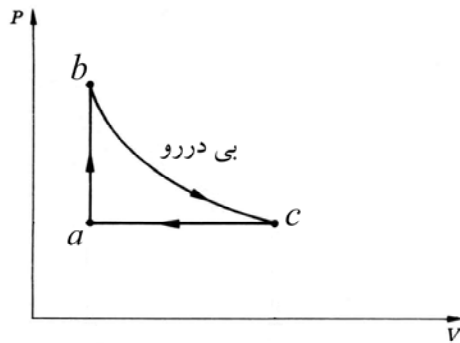
$$\Delta U = Q = 3 n R T_a = 3 \times 1 \times 8.31 \times 300$$

آنگاه در مسیر $a \rightarrow b$ داریم:

$$\Delta U = Q = 7449 \text{ J}$$

در فرآیند $b \rightarrow c$ به دلیل بی‌دررو بودن فرآیند $Q = 0$ است و با توجه به قانون اول ترمودینامیک کار انجام یافته با منفی تغییر انرژی درونی برابر می‌گردد یعنی:

$$\begin{aligned} W &= -\Delta U \\ &= -n c_V (T_c - T_b) \\ &= -(1) \left(\frac{3}{2} \times 8,31\right) (600 - 900) \\ &= 3714,5 \text{ J} \end{aligned}$$



شکل ۵-۹. چرخه ترمودینامیکی متشکل از فرآیند هم‌حجم، بی‌دررو و هم‌فشار.

بنابراین

$$W_{b \rightarrow c} = -\Delta U = 3714,5 \text{ J}$$

در فرآیند هم‌فشار $c \rightarrow a$ می‌توان از C_p به جای C_V استفاده کرد که با توجه به ضریب اتمیسته ۱,۶۶ برای گاز تک اتمی می‌توان C_p را به راحتی به دست آورد:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} \Rightarrow 1,66 = \frac{C_p}{\frac{3}{2}R}$$

پس

$$\begin{aligned} Q &= n c_p \Delta T = n \left(\frac{5}{2} R \right) (300 - 600) \\ &= -1 \times \frac{5}{2} \times 8.31 \times 300 \\ &= -6207.57 \text{ J} \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \Delta U &= n c_v (T_a - T_c) = \frac{3}{2} n R (300 - 600) \\ &= -\frac{3}{2} \times 1 \times 8.31 \times 300 = -3714.5 \text{ J} \end{aligned}$$

آنگاه با استفاده از قانون اول ترمودینامیک می‌توان کار انجام یافته در فرآیند $c \rightarrow a$ را به دست آورد:

$$-W = \Delta U - Q$$

$$-W = -3714.5 + 6207.57 \Rightarrow W = -2493.07 \text{ J}$$

بنابراین کار انجام یافته در مسیر $c \rightarrow a$ برابر است با:

$$W_{c \rightarrow a} = -2493.07 \text{ J}$$

از مجموع کل گرما، انرژی درونی و کار انجام یافته می‌توان مقادیرشان را برای کل چرخه به دست آورد:

$$Q = 7429 + 0 - 6207.57 = 1221.43 \text{ J}$$

و

$$\Delta U = 7429 - 3714.5 - 3714.5 = 0$$

و نیز کل کار انجام یافته در چرخه برابر است با:

$$W = 0 + 3714.5 - 2493.07 = 1221.43 \text{ J}$$

$$V_a = \frac{nRT_a}{P_a} = \frac{1 \times 8.31 \times 300 \text{ K}}{1.013 \times 10^5 \text{ Pa}} = 2.46 \times 10^{-2} \text{ m}^3 \quad (\text{ب})$$

توجه دارید که $1 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ و $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ است. همچنین می‌توان فشار P_b را به دست آورد. چون فرآیند در $a \rightarrow b$ یک فرآیند هم-حجم است لذا حجم در b سیستم با a یکسان می‌باشد یعنی $V_b = V_a$ و با استفاده از رابطه بین فشار، حجم و دما داریم:

$$\frac{P_a V_a}{T_a} = \frac{P_b V_b}{T_b}$$

که

$$P_b = P_a \frac{T_b}{T_a} \times \frac{V_a}{V_b} = P_a \frac{T_b}{T_a}$$

پس داریم:

$$P_b = 1.013 \times 10^5 \times \frac{900}{300} = 3.039 \times 10^5 \text{ Pa}$$

به همین شکل به فرآیند هم‌فشار مسیر $a \rightarrow c$ بر می‌گردیم:

$$P_c = P_a = 1 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$$

لذا داریم:

$$\frac{V_a}{V_c} = \frac{T_a}{T_c} \Rightarrow V_c = V_a \frac{T_c}{T_a} = 2.46 \times 10^{-2} \times \frac{600}{300} = 4.92 \times 10^{-2} \text{ m}^3$$

۵-۷ مثال‌های حل شده

۱. مقدار گرمای لازم برای تبدیل یک کیلوگرم آب 100 درجه سانتی‌گراد به بخار آب برابر 539 کیلوکالری بر کیلوگرم در فشار یک جو است. گرمای نهان تبخیر آب را در 20 درجه سانتی‌گراد به دست آورید.

حل: 581 Kcal/Kg

۲. مقدار 5 کیلوگرم آب 100 درجه را در فشار ثابت یک اتمسفر به بخار آب صد درجه سانتی‌گراد تبدیل می‌کنیم. افزایش انرژی درونی آن را به دست آورید.

حل: گرمای نهان تبخیر برای 5 کیلوگرم آب جوش را می‌توان با توجه به

$l_v = 2260 \text{ KJ/Kg}$ به دست آورد:

$$Q_V = ml_V = 5 \times 2260 = 11300 \text{ KJ}$$

مقدار کاری که در اثر انبساط حجم آب به دلیل تبخیر انجام می‌شود برابر است با:

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_i}^{V_v} P dV = P (V_v - V_i) \\ &= P \left(\frac{m}{\rho_1} - \frac{m}{\rho_2} \right) = mP \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \end{aligned}$$

که ρ_1 جرم حجمی آب و ρ_2 جرم حجمی بخار آب است که به ترتیب برابر 10^3 Kg/m^3 و 0.8 Kg/m^3 می‌باشد.

$$\begin{aligned} P = 1 \text{ atm} = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa} \Rightarrow W &= 5 \times 1.01 \times 10^5 \left(\frac{1}{10^3} - \frac{1}{0.8} \right) \\ &= 6.31 \times 10^5 \text{ J} = 631 \text{ KJ} \end{aligned}$$

مقدار گرمای Q و کار انجام یافته W را به دست آورديم. بنا به اصل اول ترمودینامیک برای وضعیت انبساط داریم:

$$\Delta U = Q - W = 11300 - 631 = 10669 \text{ KJ}$$

۳. معادله حالت ماده کشسان ایده‌آلی به صورت $\theta (\alpha \ell - \beta \ell^2)$ می‌باشد. تعیین کنید چقدر کار باید انجام شود تا ماده را به اندازه نصف طول اولیه‌اش متراکم کند. فرآیند را ایستاوار و هم‌دما در نظر بگیرید.

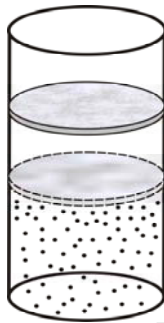
حل:

$$F = (\alpha \ell - \beta \ell^2) \theta$$

$$W = \int F \cdot d\ell = \int_{\ell_0}^{\frac{\ell_0}{2}} (\alpha \ell - \beta \ell^2) \theta d\ell$$

$$= \theta \left(\frac{\alpha}{2} \ell^2 - \frac{\beta}{3} \ell^3 \right) \Big|_{\ell_0}^{\frac{\ell_0}{2}} = \left(-\frac{3\alpha}{8} \ell_0^2 + \frac{5}{24} \beta \ell_0^3 \right) \theta$$

۴. گاز درون سیلندری به وسیله پیستونی مطابق شکل زیر با سرعت ثابت V_0 و آهنگ زمانی جرمی ρAV متراکم می‌شود که ρ چگالی گاز، A سطح مقطع پیستون و V سرعت تراکمی هر لحظه گاز می‌باشد. نشان دهید که اگر ضریب تراکم بی‌درروی گاز K_S باشد سرعت $V = \frac{1}{\sqrt{\rho K_S}}$ می‌باشد.



شکل ۵-۱۲. مربوط به مثال حل شده ۴.

پیستون با سرعت V_0 و گازی با سرعت V جابجا می‌شوند که $\ell = Vt$ مقدار جابجایی تراکم گاز است.

$$\frac{dm}{dt} = \rho AV$$

آهنگ زمانی تکانه خطی برابر است با:

$$\frac{dP}{dt} = \left(\frac{d(mV_0)}{dt} \right) = V_0 \frac{dm}{dt}$$

آنگاه داریم:

$$F = \frac{dP}{dt} = \rho AV_0 V \quad (1)$$

بنا به تعریف فشار که برابر نیروی F تقسیم بر سطح A است می‌توان نوشت:

$$\Delta P = \frac{F}{A} \Rightarrow F = A \Delta P \quad (2)$$

از روابط (۱) و (۲) و حذف A می‌توان تغییر فشار ΔP را به دست آورد:

$$\Delta P = \rho V_0 V \quad (۳)$$

اکنون حجم ستون گازی را در نظر می‌گیریم (V) که با فشار ناشی از حرکت پیستون فشرده می‌شود یعنی

$$k = -\frac{\Delta V}{V}$$

که ΔV حجم ناشی از حرکت پیستون در مدت زمان t می‌باشد:

$$\Delta V = A V_0 t$$

و حجم متراکم شده گاز در همین زمان برابر است با:

$$v = A V t$$

بنابراین

$$k = -\frac{A V_0 t}{A V t} = -\frac{V_0}{V} \quad (۴)$$

البته نیوتن در ابتدا $\frac{\Delta V}{V \Delta P}$ را به عنوان ضریب تراکم هم‌دما در نظر گرفت ولی بعدها لاپلاس نشان داد که این عبارت در واقع ضریب تراکم بی‌دررو است. با استفاده از دو رابطه (۳) و (۴) داریم:

$$\begin{aligned} \Delta P &= \rho V_0 V = \rho (-k V) V \\ &= -k \rho V^2 \end{aligned}$$

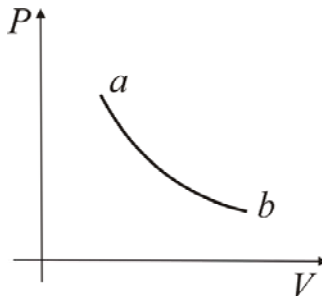
$$k = \frac{\Delta V}{V \Delta P}$$

در نتیجه

$$\Delta P = -\rho V^2 \left(\frac{\Delta V}{V \Delta P} \right)$$

$$V = \sqrt{-\frac{V \Delta P}{\rho \Delta V}} = \sqrt{\frac{1}{\rho \kappa_S}}$$

۵. کار لازم برای بردن سیستم از نقطه a به نقطه b در طی یک انبساط بی‌درروی ایستاوار یک گاز کامل را به دست آورید.



شکل ۵-۱۳. مربوط به مثال حل شده ۵.

حل: برای بردن سیستم گاز از حالت اولیه a جایی که فشار P_a و حجم V_a است به حالت نهایی b جایی که فشار P_b و حجم V_b است کار برابر W است:

$$W = -\int P dV$$

از طرفی فرآیند بی‌دررو است:

$$PV^\gamma = \text{const} \equiv C \Rightarrow P = CV^{-\gamma}$$

که از آنجا

$$\begin{aligned} W &= -C \int_{V_a}^{V_b} V^{-\gamma} dV = -\frac{C}{-\gamma+1} V^{-\gamma+1} \Big|_{V_a}^{V_b} \\ &= \frac{1}{\gamma-1} (C V_b^{-\gamma} V_b - C V_a^{-\gamma} V_a) \end{aligned}$$

از طرفی

$$P_a = C V_a^{-\gamma}, \quad P_b = C V_b^{-\gamma}$$

است پس:

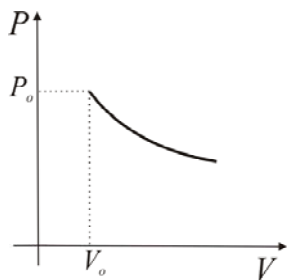
$$W = \frac{1}{\gamma-1} (P_b V_b - P_a V_a)$$

۶. در نمودار فشار-حجم، نمودار فرآیندهای زیر را برای مقدار معینی گاز رسم کنید. فرض کنید حالت اولیه برای همه فرآیندها یکی است و گاز منبسط می‌گردد.

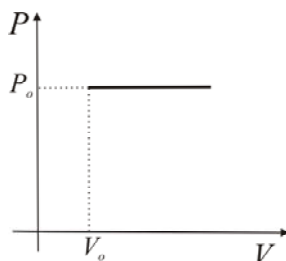
الف) در فشار ثابت

ب) در دمای ثابت

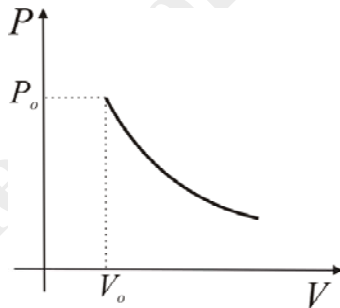
ج) در فرآیند بی‌دررو، همچنین علامت گرما، کار و انرژی درونی هر یک را مشخص نمایید.



(ب)



(الف)



(ج)

شکل ۵-۱۴. مربوط به مثال حل شده ۶.

حل: الف) سیستم در فشار و دمای ثابت فقط به طور موازی با محور حجم

منبسط می‌گردد و نمودار آن به صورت شکل زیر می‌باشد.

حال با توجه به رابطه $PV = nR\theta$ می‌توان نتیجه گرفت که در فشار ثابت:

$$V \propto \theta$$

است پس منبسط شدن یا افزایش V با افزایش دما است بنابراین دما افزایش می‌یابد و انرژی درونی نیز افزایش می‌یابد.

ب) با توجه به رابطه $PV = nR\theta$ چنانچه دما ثابت باشد آنگاه:

$$PV = P_0 V_0$$

و یا

$$P = \frac{P_0 V_0}{V}$$

که رابطه معکوس فشار P با حجم V دلالت بر نمودار هموگرافیکی دارد که در شکل نشان داده شده است. چون دما ثابت است و انرژی درونی هم تابع دما می‌باشد لذا تغییر انرژی درونی صفر است یعنی

$$\Delta U = 0$$

ج) در فرآیند بی‌دررو، رابطه $PV^\gamma = \text{const}$ حاکم است:

$$P_0 V_0^\gamma = P V^\gamma \Rightarrow P = P_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^\gamma$$

چون $\gamma > 1$ و سیستم در حال انبساط از V_0 به V رسیده است پس $\frac{V_0}{V} < 1$ و لذا $P < P_0$ خواهد بود و همانطور که در شکل ملاحظه می‌کنید نمودار فشار-حجم برای این فرآیند شبیه تندتر از فرآیند هم‌دما دارد یعنی روند کاهش فشار در تحول بی‌دررو حاضر از فرآیند هم‌دما بیشتر است.

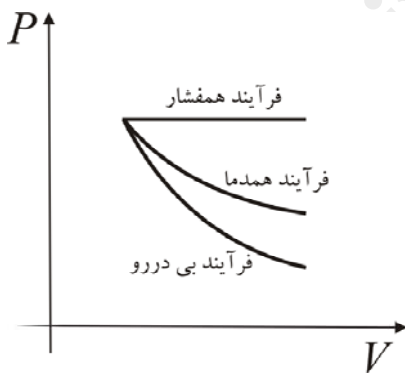
در فرآیند بی‌دررو گرمایی وارد سیستم نمی‌شود و یا از سیستم خارج نمی‌گردد بنابراین $Q = 0$ و از آنجایی که مساحت زیر نمودار به دلیل انحنای منحنی مقدار کار مثبت را می‌دهد یعنی $W > 0$ است پس بنا به اصل اول ترمودینامیک برای حالت انبساط که $\Delta U = Q - W$ است با $Q = 0$ و $W > 0$ می‌بایست تغییر انرژی درونی منفی باشد یعنی

$$\Delta U < 0$$

۷. سه نمودار مثال ۶ را یک جا رسم کنید و تعیین کنید هر کدام از کمیت‌های گرمای Q ، کار W و انرژی درونی ΔU در کدام فرآیند هم‌فشار، هم‌دما و یا بی‌دررو بیشینه و یا کمینه مقدار را دارند.

حل: سه نمودار فشار-حجم در مسأله فوق را در شکل زیر رسم کرده‌ایم. مساحت زیر هر نمودار $P-V$ مقدار کار انجام یافته را می‌دهد. با توجه به شکل می‌بینید که مساحت زیر نمودار فرآیند هم‌فشار از همه بیشتر و در فرآیند بی‌دررو از همه کمتر است بنابراین برای کار انجام یافته W می‌توان نوشت:

$$W_{\text{بی‌دررو}} < W_{\text{هم‌دما}} < W_{\text{هم‌فشار}}$$



شکل ۵-۱۵. مربوط به مثال حل شده ۷.

مقدار گرمای Q برای فرآیند بی‌دررو صفر است و برای فرآیند هم‌فشار بیشتر از فرآیند هم‌دما می‌باشد به عبارتی

$$W_{\text{بی‌دررو}} < W_{\text{هم‌دما}} < W_{\text{هم‌فشار}}$$

در مثال حل شده ۶ بیان شد که در فرآیند هم‌دما

$$\Delta U < 0$$

است. از طرفی در فرآیند بی‌درروی انبساطی $\Delta U < 0$ است و در فرآیند هم‌فشار $\Delta U > 0$ می‌باشد بنابراین

$$\text{بی دررو } (\Delta U) > \text{هم دما } (\Delta U) > \text{هم فشار } (\Delta U)$$

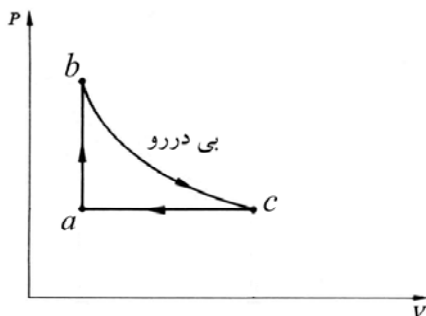
۸. اگر دما را ثابت فرض کنید آنگاه تغییرات فشار در جو زمین را برحسب وزن مولکولی گاز، ارتفاع از سطح زمین و دما به دست آورید.

$$\text{حل: } (P = P_0 e^{-\frac{mgh}{RT}})$$

۵-۸ مسائل

۱. یک مول گاز اتمی ایده‌آل را در نظر بگیرید که به وسیله یک ماشین گرمایی برگشت پذیر چرخه شکل زیر را طی می‌کند. اگر فشار و حجم وضعیت ابتدایی سیستم (نقطه a) معلوم و به ترتیب برابر 2 atm و 10 lit و دمای هر نقطه به صورت زیر معلوم باشد:

$$T_a = 200 \text{ K}, T_b = 500 \text{ K}, T_c = 800 \text{ K}$$



شکل ۵-۱۶. مربوط به مسئله ۱.

آنگاه:

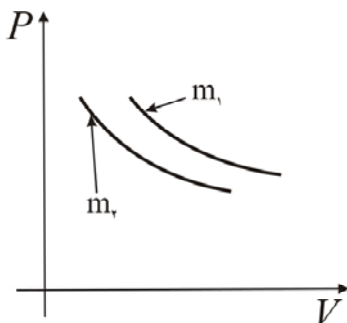
الف) نوع فرآیند در مسیر $a \rightarrow b$ و $b \rightarrow c$ را بیابید.

ب) کمیت‌های گرما (Q)، کار (W) و انرژی درونی (ΔU) را برای مسیرهای $a \rightarrow b$ ، $b \rightarrow c$ و $c \rightarrow a$ پیدا کنید.

ج) کمیت‌های Q ، W و ΔU را برای کل چرخه به دست آورید.

د) فشار و حجم سیستم در حالت‌های بین نقطه b و نقطه c چقدر می‌باشد؟

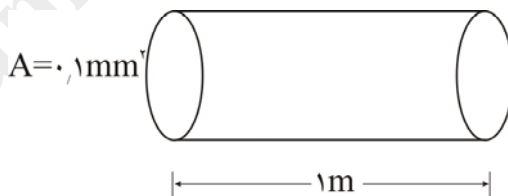
۲. نمودار $P-V$ دو جرم متفاوت از گازی در شکل زیر آمده است. چگونه این منحنی‌ها به جرم گاز بستگی دارند؟



شکل ۵-۱۷. مربوط به مسئله ۲.

۳. چه مقدار کار لازم است تا فشار اعمالی بر ۱۰۰ گرم فلز بطور ایستاوار و هم‌دما از صفر به ۱۰۰۰ اتمسفر افزایش یابد؟ فرض کنید که چگالی و ضریب تراکم هم‌دما به ترتیب برابر $\frac{10^4}{m^3} \text{ Kg}$ و $6.75 \times 10^{12} / \text{Pa}$ ثابت‌های ماندگار در طی تغییر فشار باشند.

۴. سیمی مسی دارای مدول هم‌دمای یانگ $2.5 \times 10^{11} \text{ Pa}$ در دمای صفر درجه سانتی‌گراد است و مشخصات آن در شکل ۵-۱۸ آمده است.



شکل ۵-۱۸. مربوط به مسئله ۴.

مساحت سطح مقطع 0.1 میلی‌متر مربع و طول آن برابر یک متر است. اگر نیروی کششی به طور ایستاوار و هم‌دما در صفر درجه سانتی‌گراد افزایش یابد آنگاه چند ژول کار به وسیله آن انجام می‌شود؟

فصل ششم

ماشین‌های گرمایی

۱-۶ قانون دوم ترمودینامیک و ماشین کارنو

دیدید که سیستم می‌تواند بر محیط کار انجام دهد و یا کار بر روی سیستم انجام شود. رابطه بین کار، گرما و انرژی درونی در اصل اول ترمودینامیک مطرح شد و اما در تلاش دیگر برآنیم تا هم ارزی کار و گرما را مشخص کنیم و این همان اصل دوم یا قانون ترمودینامیک است که چگونگی تبدیل گرما به کار را توضیح می‌دهد.

بنا به اصل دوم ترمودینامیک نمی‌توان ماشینی ساخت که گرمای گرفته شده از یک منبع گرمایی را به طور صددرصد به کار تبدیل کند و یا به عبارت دیگر "هر فرآیندی مقداری از گرما را که از منبع گرما گرفته است به منبع سرد پس می‌دهد و مابقی را به کار تبدیل می‌کند."

با توجه به اصل دوم ترمودینامیک نمی‌توان انتظار اتومبیلی بدون رادیاتور را داشت یعنی حتماً مقداری گرما باید به منبع سرد پس داده شود.

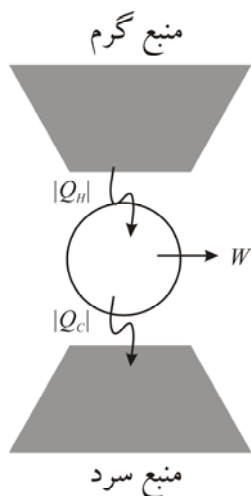
یکی از ماشین‌هایی را که بین دو منبع گرم و سرد عمل می‌کند، ماشین کارنو گویند.

طرحی از این ماشین را در شکل ۱-۶ مشاهده می‌کنید.

از شکل ۱-۶ می‌توان به خوبی دریافت که ماشین کارنو مقداری گرما از منبعی که در دمای بالاتر است کسب می‌کند که برابر Q_H است. این مقدار گرما صرف انجام کار می‌شود اما تمام گرما به کار W تبدیل نمی‌شود به عبارتی بنا به اصل دوم ترمودینامیک:

$$W \neq Q_H$$

(۱-۶)



شکل ۶-۱. نمایش طرح‌واره‌ای از ماشین گرمایی کارنو که بین دو منبع گرم و سرد عمل می‌کند. در این جا Q_H مقدار گرمای گرفته شده از منبع گرم است و Q_C مقدار گرمایی است که به منبع سرد داده می‌شود.

است. تفاوت گرمای جذب شده و کار انجام یافته که برابر $Q_H - W$ است باید به منبعی که در دمای پایین‌تر است و منبع سرد نامیده شده است داده شود بدین ترتیب می‌توان نوشت:

$$Q_H = W + Q_C \quad (۲-۶)$$

از اینجا می‌توان به راحتی بازده گرمایی را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\text{بازده گرمایی} = \frac{\text{کار انجام یافته}}{\text{گرمای جذب شده از منبع گرما}}$$

که اگر بازده گرمایی را با η نشان دهیم آنگاه

$$\eta = \frac{|W|}{|Q_H|} \quad (۳-۶)$$

و با استفاده از معادله (۲-۶) می‌توان بازده گرمایی را فقط برحسب گرمای ورودی و خروجی هم بازنویسی کرد به عبارتی

$$\eta = \frac{|Q_H| - |Q_C|}{|Q_H|} = \frac{|Q_H|}{|Q_H|} - \frac{|Q_C|}{|Q_H|}$$

و یا

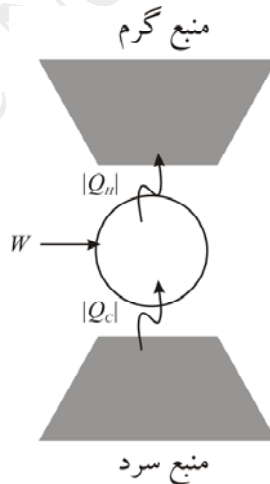
$$\eta = 1 - \frac{|Q_C|}{|Q_H|} \quad (۴-۶)$$

بیان دیگر قانون دوم ترمودینامیک را می‌توان با استفاده از بازده گرمایی در رابطه (۴-۶) ارائه کرد که بیان می‌دارد:

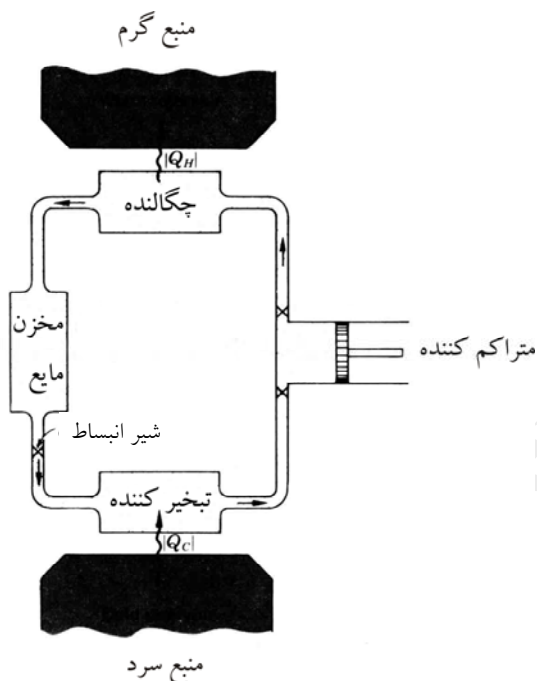
$$\eta < 1 \quad (۵-۶)$$

به عبارتی نمی‌توان فرآیندی را سراغ داشت که در آن بازده گرمایی مساوی یا بزرگتر از یک باشد.

عکس این فرآیند هم می‌تواند اتفاق بیفتد که در آن صورت باید بر روی سیستم کار انجام شود که به اینگونه ماشین‌ها یخچال می‌گویند و طرحی از آن را در شکل ۵-۱۳ و نقشه ابتدایی ماشین سردکننده را در شکل ۶-۳ مشاهده می‌کنید.



شکل ۶-۲. نمایش طرح‌واره‌ای از یخچال، در اینجا بر سیستم کار انجام می‌شود تا گرمای Q_H به منبع گرم داده شود.



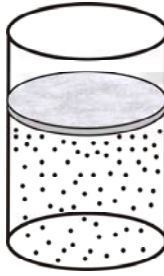
شکل ۳-۶. نقشه ابتدایی ماشین سرد کننده.

اما بر خلاف ماشین سرد کننده یا یخچال، ماشین‌های از نوع اول که وظیفه تبدیل گرما به کار را دارند به ماشین‌های گرمایی معروف هستند. در عمل دوگونه ماشین گرمایی مثل ماشین استرلینگ و ماشین بخار به عنوان برون سوز و ماشین‌های گرمایی درون سوز نظیر ماشین‌های بنزینی و وجود دارند.

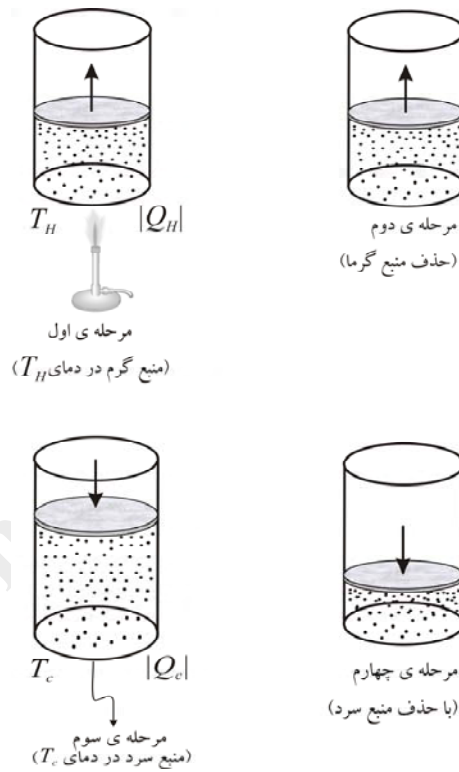
مثال ۱: پیستونی توانسته است مقداری از گاز کامل را در درون سیلندری محبوس کند. حال با استفاده از یک منبع گرم آزمایشی را طراحی کنید تا چهار مرحله چرخه کارنو را نشان دهد.

حل: استوانه‌ای که حجم آن با گازی کامل پر شده و گاز با پیستونی در سیلندر محبوس شده است را در نظر می‌گیریم (شکل ۴-۶).

در شکل ۴-۶ مشاهده می‌کنید که در مرحله اول سیلندر و گاز را در بالای اجاقی به دمای T_H قرار می‌دهیم و گاز در دمای ثابت T_H منبسط می‌شود.



شکل ۴-۶. مربوط به مثال ۱.



شکل ۵-۶. مربوط به مرحله اول سیلندر و گاز.

در مرحله دوم تماس گرمایی را قطع می‌کنیم یعنی منبع گرم‌تر را بر می‌داریم که باعث می‌شود گاز به طور بی‌دررو منبسط شود.

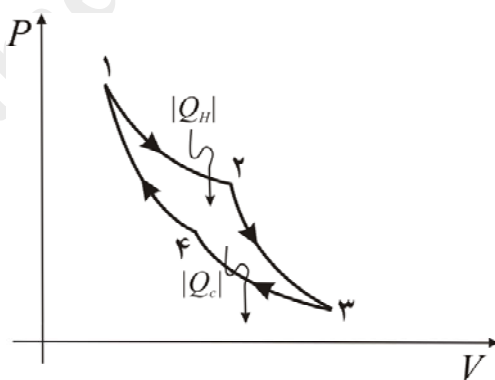
مرحله سوم، پیستون را در بالاترین قسمت سیلندر می‌بینید که اکنون سیلندر در تماس با منبع سردی به دمای T_C است و گاز درون سیلندر متراکم می‌شود در حالی که دمای تراکم ثابت بوده و برابر T_C است.

در مرحله چهارم نیز منبع را حذف می‌کنیم و این بار منبع سردی که در دمای ثابت T_C بوده است حذف می‌شود و مطابق شکل تراکم گاز به طور بی‌دررو ادامه می‌یابد تا به جایی می‌رسد که حجم و فشار گاز درون سیلندر برابر حجم و فشار مرحله آغازین (مرحله اول) شده و چرخه دوباره تکرار می‌شود.

اکنون چهار مرحله عملکرد ماشین کارنو را می‌توان در نمودار فشار و حجم بیان کرد تا نمودار چرخه کارنو فرآیند مطرح شده بهتر درک گردد.

در مرحله $2 \rightarrow 1$ ، گرمای $|Q_H|$ توسط گاز در دمای $T = T_H = \text{const}$ دریافت شده است و نمودار $P-V$ یک نمودار هموگرافیکی است چون برای گاز کامل با دمای ثابت $P = \frac{\text{const}}{V}$ می‌باشد.

در مرحله $3 \rightarrow 2$ فرآیند بی‌دررو است که برای گاز کامل دیدید $PV^\gamma = \text{const}$ و در نتیجه در مرحله دوم، شاهد افزایش حجم و کاهش بیشتر فشار گاز هستیم چرا که $\gamma > 1$ ، $P = \frac{\text{const}}{V^\gamma}$ و $V > 0$ می‌باشد.



۶-۶. نمودار چرخه کارنو.

مرحله ۳ → ۴، همانند فرآیند ۱ → ۲، گاز در دمای $T = T_C = const$ متراکم می‌شود و نمودار $P-V$ در جهت برگشت طوری مسیر را طی می‌کند که با کاهش حجم، شاهد افزایش فشار هستیم و مرحله سوم در عکس جهت مرحله ۱ → ۲ فرآیند را طی می‌کند و گرمای $|Q_C|$ را به منبع سرد پس می‌دهد.

مرحله چهارم: در این مرحله گاز به طور بی‌دررو (با حذف منبع سرد) متراکم می‌شود (نظیر مرحله دوم) با این تفاوت که تراکم گاز و یا کاهش حجم آن همراه با افزایش فشار است. نمودار $P = \frac{const}{V^\gamma}$ را ترسیم نمودیم.

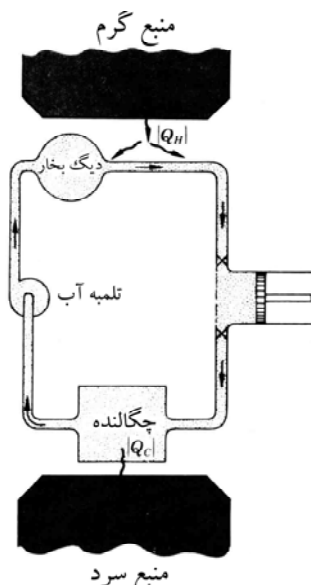
مطابق آنچه که در شکل نشان داده شده است، چهار مرحله چرخه کارنو حرکت پیستون را در جهت انبساط و تراکم گاز کامل نمایش می‌دهند.

۶-۲ ماشین بخار

اگر به نیروگاه حرارتی تولید برق رفته باشید مشاهده می‌کنید که چگونه آب در دیگ‌هایی بخار می‌شوند و این بخار داغ آب قادر است توربین‌های بزرگی را به منظور تولید الکتریسیته بچرخاند.

همین عمل در ابتدا توسط ماشین بخاری که وات آن را طراحی کرده بود و یک نوع ماشین برون سوز است نیز صورت می‌گرفت و مطابق شکل ۶-۶ می‌توانید طرز کار این گونه ماشین‌ها را مشاهده کنید.

در اینجا آب در چگالنده که در مجاور منبع سرد است با تلمبه به دیگ بخار فرستاده می‌شود تا به جوش می‌آید و سپس با گرفتن گرمای بیشتر، آب جوش به بخار بسیار داغی تبدیل می‌گردد و این در حالی است که فرایندها بدون تغییر فشار صورت می‌گیرد و گرمای $|Q_H|$ را از منبع گرم دریافت می‌نمایند. حال بخار بسیار داغ می‌تواند پره‌های توربین و یا پیستونی را به طور تقریباً بی‌دررو به حرکت در آورد و با جابجا شدن پیستون و یا حرکت پره‌های توربین که با انبساط حجم بخار و در هر حال پایین آمدن دمای بخار آب همراه است، مقداری گرما به منبع سرد داده می‌شود. بدین ترتیب بخار داغ که حال کمی سرد شده است به چگالنده می‌رود و سرد می‌شود. در این حالت گرمای $|Q_C|$ به منبع سرد داده شده و بار دیگر چرخه تکرار می‌شود.



شکل ۶-۷. طرز کار ماشین‌های بخار اولیه.

مثال ۲: یک ماشین بخار می‌تواند ۸۰ درصد از مقدار $4 \times 10^6 J$ گرمایی که در هر دقیقه از یک دیگ بخار دریافت می‌کند را در هر دقیقه به کار تبدیل کند.

الف) بازده این ماشین بخار چقدر است؟

ب) چه مقدار گرما در هر دقیقه به منبع سرد داده می‌شود و یا به عبارتی تلف می‌شود؟
 حل: از آنجایی که ۸۰ درصد گرمای $4 \times 10^6 J$ به کار W تبدیل می‌شود

می‌توان کار W را به دست آورد:

$$W = \frac{80}{100} \times 4 \times 10^6 J$$

و در نتیجه با استفاده از (۵-۳۴) داریم:

$$\eta = \frac{|W|}{|Q_H|} = 80\%$$

$$|Q_C| = |Q_H| - |W| = 0.2 |Q_H| \quad \text{ب)}$$

آنگاه

$$|Q_C| = 0.2 \times 4 \times 10^6 = 8 \times 10^5 J$$

مثال ۳: با توجه به نمودار فشار-حجم چرخه کارنو برای گاز کاملی که به وسیله پیستونی در یک سیلندر محبوس شده بود نشان دهید که بازده ماشین گرمایی (η) برابر است با

$$\eta = 1 - \frac{T_C}{T_H} \quad (6-6)$$

حل: بار دیگر نمودار را با معلوم بودن حجم و فشار و دما بررسی می‌کنیم. همانطور که ملاحظه می‌کنید در مسیر ۱→۲ دما ثابت است و چون انرژی درونی گاز کامل فقط تابعی از دما است اگر دما ثابت باشد انرژی درونی هم ثابت می‌ماند:

$$(\Delta U)_{1,2} = 0$$

از طرفی بنا به قانون اول ترمودینامیک مقدار گرما با کار انجام یافته برابر است. پس ابتدا کار انجام یافته بر روی پیستون را به دست می‌آوریم که برابر است با مقدار گرمایی که به وسیله سیستم از منبع گرما (Q_H) دریافت شده است. اما کار انجام یافته برابر است با:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P dV$$

و دیدیم که

$$PV = nRT$$

چون دما ثابت است:

$$P = \frac{nRT_H}{V}$$

پس

$$W = nRT_H \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT_H \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

و آنگاه

$$Q_H = W = nRT_H \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \quad (1)$$

در مسیر $2 \rightarrow 3$ که با یک فرآیند بی‌دررو روبه‌رو هستیم.

$$PV^\gamma = \text{const}$$

$$(PV) V^{\gamma-1} = \text{const} \Rightarrow (nRT) V^{\gamma-1} = \text{const}$$

و آنگاه

$$TV^{\gamma-1} = \text{const} \quad (2)$$

بدین ترتیب برای مسیر $2 \rightarrow 3$ می‌توانیم رابطه بالا را برای دو نقطه ابتدایی (۲) و انتهایی (۳) بنویسیم.

$$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1}$$

از طرفی دمای نقطه‌های ۱ و ۲ برابرند و همچنین دمای نقطه ۳ و ۴ هم یکسان است.

$$T_1 = T_2 = T_H$$

و

$$T_3 = T_4 = T_C$$

بنابراین

$$T_H V_2^{\gamma-1} = T_C V_3^{\gamma-1} \quad (3)$$

در مسیر $3 \rightarrow 4$ دما ثابت است و همانند مسیر $1 \rightarrow 2$ می‌توان مقدار گرمای پس داده شده به منبع سرد را به دست آورد که با توجه به کار W داریم:

$$W = \int_{V_3}^{V_4} P dV = nRT_C \int_{V_3}^{V_4} \frac{dV}{V} = nRT_C \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right)$$

چون در مسیر $3 \rightarrow 4$ ، دما ثابت است، همانطور که پیشتر بیان شد می‌توان به صفر بودن تغییر انرژی درونی رسید یعنی

$$(\Delta U)_{34} = 0$$

و بنا به اصل اول ترمودینک گرمای پس داده شده $|Q_C|$ باید برابر کار W باشد:

$$Q_C = nRT_C \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right) \quad (4)$$

مسیر ۱ → ۴ همانند مسیر ۳ → ۲ است که یک فرآیند بی‌دررو اتفاق می‌افتد و رابطه (۲) برقرار است پس

$$T_4 V_4^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1}$$

اما چون

$$T_1 = T_H, \quad T_4 = T_C$$

است می‌توان نوشت

$$T_C V_4^{\gamma-1} = T_H V_1^{\gamma-1} \quad (5)$$

در رابطه (۱) و (۴) به نسبت حجم‌های $\left(\frac{V_4}{V_1}\right)$ و $\left(\frac{V_2}{V_3}\right)$ نیاز است که می‌توان آنها را از روابط (۳) و (۵) استخراج نمود. با تقسیم رابطه‌های (۳) و (۵) داریم:

$$\left(\frac{V_4}{V_3}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$$

و یا

$$\frac{V_4}{V_3} = \frac{V_1}{V_2} \quad (6)$$

حال به رابطه بازده ترمودینامیکی (۴-۶) بر می‌گردیم:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_C|}{|Q_H|}$$

که

$$\frac{|Q_C|}{|Q_H|} = \frac{T_C \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right)}{T_H \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}$$

که با استفاده از رابطه (۶) داریم

$$\frac{|Q_C|}{|Q_H|} = \frac{T_C}{T_H}$$

در نتیجه

$$\eta = 1 - \frac{T_C}{T_H} \quad (7-6)$$

که بازده ترمودینامیکی را برای ماشین گرمایی کارنو به دست می‌دهد و به جای گرماهای دریافت شده پس داده شده، از دماهای دو منبع سرد و گرم استفاده می‌شود. بنا به رابطه (۶-۶) بازده ترمودینامیکی هنگامی صددرصد خواهد بود که T_C برابر صفر کلون و به عبارتی منبع سرد در دمای صفر مطلق باشد. چنین منبعی تا این اندازه سرد تا به حال دسترس پذیر نبود و امکان دسترس پذیر بودن آن با قانون سوم ترمودینامیک سازگار نخواهد بود.

مثال ۴: یک ماشین کارنو گرمای دریافتی از منبعی به دمای 427°C را به کار و نیز گرمای اتلافی تبدیل می‌کند. اگر منبع سرد در دمای 27°C باشد، بازده بیشینه ماشین گرمایی کارنو را به دست آورید.

حل: از معادله (۶-۶) داریم:

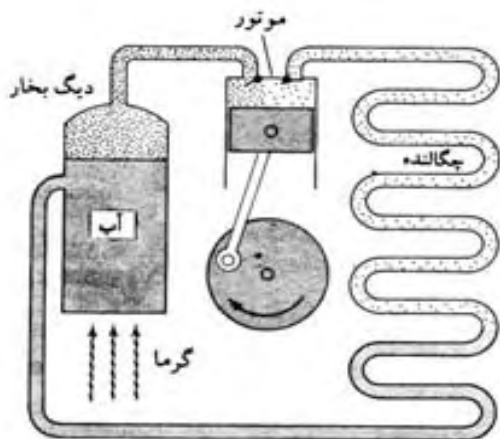
$$\eta = 1 - \frac{T_C}{T_H} = 1 - \frac{27 + 273}{627 + 273} = 1 - \frac{300}{900} = \frac{2}{3} \approx 0,67$$

۳-۶ ماشین‌های سرمایی

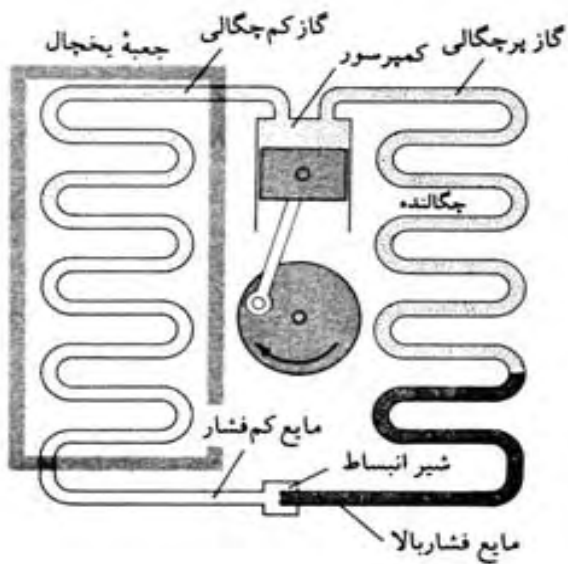
یک ماشین گرمایی ماشینی است که مقدار گرمای $|Q_H|$ را از منبع گرم که در دمای T_H بوده است دریافت می‌کند بخشی از گرمای دریافت شده را به کار (W) تبدیل کرد. و مابقی را به مقدار $|Q_C| = |Q_H| - W$ به منبع سردی که در دمای T_C است پس می‌دهد. این ماشین یک ماشین کارنو است.

اما چنانچه جهت چرخه را عوض کنیم، بدین شکل که اکنون گرما به جای آن که از یک منبع گرما جذب شود، از منبع سرد گرفته شود. برای این منظور باید بر خلاف ماشین‌های گرمایی، کار بر روی سیستم انجام شود و انرژی به منبع گرم داده شود. برای مقایسه دو ماشین گرمایی و سرمایی که یخچال‌ها مثال بارزی از آن هستند،

لازم است طرحی از آنها را در شکل ۶-۸ بیاوریم. سپس چرخه‌های آن را تنها با عوض کردن جهت عمل چرخه رسم می‌نماییم.



(الف)

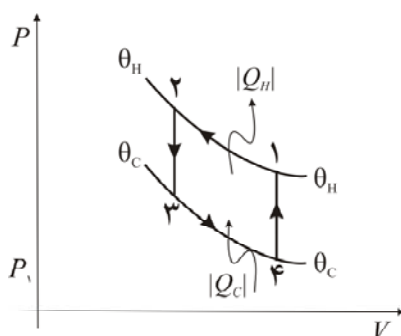


(ب)

شکل ۶-۸ طرح‌واره‌ها. (الف) ماشین گرمایی (ماشین بخار). (ب) ماشین سرمایی (یخچال).

چرخه‌های ماشین گرمایی و سرمایی ظاهر به یک صورت هستند چرخه یخچال (ماشین سرمایی) را در شکل ۶-۹ مشاهده می‌کنید.

البته چرخه را نباید به طور کامل یک چرخه کارنویبی انگاشت. به دلیل آن که در یخچال از گاز فرئون و یا همان دی‌کلرو دی‌فلورو متان و مایع به عنوان شاره استفاده می‌شود. این گاز فرئون که به عنوان ماده سردکنندگی در یخچال استفاده می‌شود در فشار بالا دمای نقطه جوش برابر تقریباً دمای اتاق دارند و برعکس در فشارهای پایین مشاهده شد که دمای نقطه جوش پایین‌تر از صفر درجه سانتی‌گراد دارند.



شکل ۶-۹. چرخه یک یخچال.

فرئون مایع در همین فشار پایین وارد ماریپچ‌های سرد کننده یخچال می‌شود تا این که در اثر جذب گرما به بخار تبدیل می‌شود به صورت بخار و یا گاز فرئون مطابق شکل ۶-۸ (ب) عمل می‌کند.

اکنون گاز به سوی کمپرسور شارش می‌یابد و با افزایش فشار و چگالی شده و گرم می‌شود. گاز گرم مزبور به دلیل عبور با فشار بالا از سیم‌های ماریپچی رادیاتور واقع در بیرون یخچال سرد و سردتر می‌شود. به عبارتی گاز فرئون گرما از دست می‌دهد و با افزایش چگالی به مایع تبدیل می‌شود. پس از آن مایع فرئون که در فشار بالا است از درون یک شیر انبساط که یک روزنه کوچک است می‌گذرد و فشار آن پایین می‌آید و آنقدر ادامه می‌یابد تا فشار آن به فشار پایین در ماریپچ‌های سرد کننده رسیده و بار دیگر مایع به ماریپچ‌های سرد کننده وارد شده و روزنه گفته شده را مجدداً طی می‌کند و به عبارتی یک چرخه کامل یخچال را مطابق شکل ۶-۹ تشکیل می‌دهد.

از طرح‌واره شکل ۶-۸ به راحتی فهمیده می‌شود که تهویه مطبوع دارای چرخه سرد کننده مشابهی است تلمبه گرما را کم می‌توان تهویه مطبوعی دانست که چرخه را در جهت مخالف می‌پیماید.

آنچه بیان شد این دیدگاه را قوت می‌بخشد که عموماً گرفتن بیشینه گرما از منبع سرد و به زبان عامیانه‌تر سرد کردن بیشتر غذاهای درون یخچال با انجام کار کمتر است و این نسبت به ضریب کارکرد یخچال معروف است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e = \frac{Q_i}{W} \quad (۸-۶)$$

که e ضریب کارکرد یخچال و Q_i گرمایی است که از منبع سرد گرفته شده است و این دریافت گرما با انجام کاری برابر W بر روی سرد کن همراه بوده است.

همینطور می‌توان ضریب کارکرد یخچال را بر اساس گرمای جذب شده $|Q_C|$ و گرمای پس داده شده به منبع گرم $|Q_H|$ هم نوشت. چون با توجه به شکل‌های ۶-۲ و ۶-۳ می‌توان نوشت:

$$|Q_H| = |W| + |Q_C|$$

$$|W| = |Q_H| - |Q_C|$$

و با $|Q_C| = |Q_1|$ داریم:

$$e = \frac{|Q_H|}{|Q_C| - |Q_H|} \quad (۹-۶)$$

مثال ۵: رابطه عملکرد یخچال را برحسب دماهای منبع سرد (T_C) و منبع گرم (T_H) به دست آورید.

حل: از آنجایی که گرمای $|Q_C|$ از منبع سرد به دمای T_C گرفته می‌شود و با دریافت کار از خارج گرمای $|Q_H|$ به منبع گرم به دمای T_H داده می‌شود.

$$\frac{|Q_C|}{|Q_H|} = \frac{T_C}{T_H} \quad (۱۰-۶)$$

با جایگذاری (۶-۱۰) در رابطه (۶-۹) داریم:

$$e = \frac{|Q_C|}{|Q_H| - |Q_C|} = \frac{1}{\frac{|Q_H|}{|Q_C|} - 1} = \frac{1}{\frac{|Q_H|}{|Q_C|} - 1}$$

و یا

$$e = \frac{T_C}{T_H - T_C} \quad (۶-۱۱)$$

مثال ۶: فرض کنید یخچال با استفاده از چرخه کارنو عمل می‌کند و مقدار دو ژول گرما از منبع سردی به دمای 10°C گرفته می‌شود و به 154°C

منبع گرمی که در دمای 30°C است داده می‌شود. چه مقدار برای انجام چنین انتقال گرمایی از منبع سرد به منبع گرم لازم است؟
حل: با استفاده از رابطه (۶-۱۱) و (۶-۸) داریم:

$$e = \frac{|Q_C|}{|W|} = \frac{T_C}{T_H - T_C}$$

و بدین ترتیب می‌توان کار انجام یافته بر سیستم را چنین نوشت:

$$|W| = |Q_C| \frac{T_C}{T_H - T_C} \quad (۶-۱۲)$$

در رابطه (۶-۱۲) از مسأله می‌بینیم که

$$|Q_H| = 2\text{J}, \quad T_C = 10^\circ\text{C}, \quad T_H = 30^\circ\text{C}$$

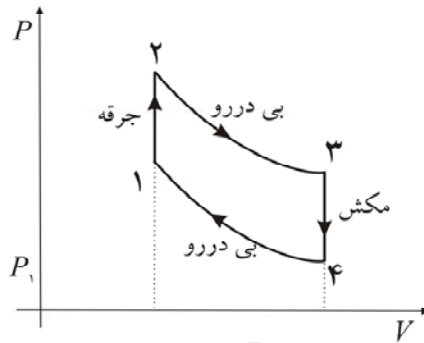
است و در نتیجه

$$|W| = 2 \times \frac{10}{30 - 10} = 1\text{J}$$

مثال ۷: چرخه مستطیل شکل ۶-۱۰ چهار مرحله یک ماشین بنزینی درون‌سوز را با گاز کامل نشان می‌دهد. اگر در فرآیند بی‌درروی ۱ → ۴ حجم به مربع مقدارش کاهش یابد و نیز در هنگام ایجاد جرقه، فشار به ۳ برابر اولیه‌اش افزایش پیدا کند آنگاه مطلوب است:

الف) فشار و دمای نقاط ۲، ۳ و ۴ بر حسب فشار و دمای نقطه ۱.

ب) گرماهای جذب شده و نیز پس داده شده به وسیله سیستم.



شکل ۶-۱۰. مربوط به مثال ۷.

حل: برای هر فرآیند در مسیر ۱ → ۲، ۲ → ۳، ۳ → ۴ و ۴ → ۱ معادلات مربوطه را با توجه به کامل بودن گاز می‌نویسیم.

مسیر ۱ → ۲ فرآیند هم‌حجم است و فشار به ۳ برابر فشار اولیه‌اش می‌رسد و موجب می‌شود تا دمای آن مطابق قانون عمومی حاکم بر گازهای کامل به ۳ برابر دمای اولیه‌اش برسد.

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

چون $P_2 = 3P_1$ است پس

$$\frac{3P_1}{P_1} = \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow T_2 = 3T_1$$

مسیر ۲ → ۳ فرآیند بی‌درروی است لذا

$$P_2 V_2^\gamma = P_3 V_3^\gamma$$

از طرفی $V_4 = 4V_1$ که $V_4 = V_3$ و $V_2 = V_1$ است. با قرار دادن آنها در رابطه بالا نسبت فشارها و نیز دماها معلوم می‌شود.

$$P_3 (4V_1)^\gamma = (3P_1)(V_1)^\gamma \Rightarrow 4^\gamma P_3 = 3P_1$$

که فشار در نقطه ۳ بر طبق فشار در نقطه ۱ به دست می‌آید.

$$P_3 = 3 \times 4^{-\gamma} P_1$$

با معلوم بودن γ فشار در نقطه ۳ کاملاً معلوم می‌شود. اکنون با استفاده از رابطه

$$T_3 V_3^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1}$$

و یا

$$(3T_1) V_1^{\gamma-1} = T_3 (4V_1)^{\gamma-1}$$

$$3T_1 = 4^{\gamma-1} T_3 \Rightarrow T_3 = \frac{3}{4^{\gamma-1}} T_1$$

مسیر $3 \rightarrow 4$ که مرحله مکش است در واقع خلاف جهت فرآیند $1 \rightarrow 2$ را نشان می‌دهد.

مسیر $4 \rightarrow 1$ یک فرآیند بی‌دررو است و روابط زیر برای این فرآیند برقرار است.

$$P_1 V_1^\gamma = P_4 V_4^\gamma$$

و با $V_4 = 4V_1$ داریم:

$$P_1 V_1^\gamma = P_4 (4V_1)^\gamma$$

بنابراین

$$P_4 = \frac{1}{4^\gamma} P_1$$

همینطور برای دمای نقطه ۴ و نقطه ۱ داریم:

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_4 V_4^{\gamma-1}$$

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_4 (4V_1)^{\gamma-1}$$

که

$$T_1 = T_4 \times 4^{\gamma-1}$$

در نتیجه دمای نقطه ۴ هم به دست آمد که برابر است با

$$T_4 = \frac{1}{4^{\gamma-1}} T_1$$

ب) از آنجایی که $\gamma > 1$ می‌باشد لذا $\gamma - 1 > 0$ است. در نتیجه با توجه به روابط بین دماهای نقاط ۲، ۳ و ۴ نسبت به دمای نقطه ۱ که برابر بودند با

$$T_2 = 2T_1$$

$$T_3 = \frac{3}{4^{\gamma-1}} T_1$$

$$T_4 = \frac{1}{4^{\gamma-1}} T_1$$

می‌توان دید که

$$T_2 > T_1, \quad T_3 > T_1, \quad T_4 < T_1$$

دو فرآیند $2 \rightarrow 3$ و $4 \rightarrow 1$ فرآیندهای بی‌دررو هستند و $Q = 0$ است. یعنی هیچ گرمایی به سیستم وارد و یا از آن خارج نشده است. ولی در مسیر $1 \rightarrow 2$ که دما افزایش یافته است به منزله دریافت گرما به وسیله چرخه می‌باشد و رابطه گرما را با توجه به ثابت بودن حجم (یعنی $V_1 = V_2$) می‌توان چنین نوشت:

$$Q_{12} = n C_V (T_2 - T_1) = 2n C_V T_1$$

و برای مسیر $3 \rightarrow 4$ که فرآیندی هم‌حجم است و چون دما کاهش یافته است نتیجه می‌گیریم که سیستم گرما از دست داده است. پس

$$\begin{aligned} Q_{34} &= n C_V (T_3 - T_4) \\ &= n C_V \left(\frac{3}{4^{\gamma-1}} - \frac{1}{4^{\gamma-1}} \right) T_1 \\ &= n C_V \times \left(\frac{2}{4^{\gamma-1}} \right) T_1 \end{aligned}$$

و یا

$$Q_{۳۴} = \frac{۲}{۴\gamma-۱} \times n C_V T_۱$$

بنابراین گرمای جذب شده $Q_{۱۲}$ و گرمای پس داده شده $Q_{۳۴}$ به وسیله سیستم معلوم شد.

ج) با استفاده از رابطه بازده ترمودینامیکی (۴-۶) داریم:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_C|}{|Q_H|} = 1 - \frac{|Q_{۳۴}|}{|Q_{۱۲}|}$$

با توجه به

$$\frac{|Q_{۳۴}|}{|Q_{۱۲}|} = \frac{\frac{۲}{۴\gamma-۱}}{\frac{۱}{۴\gamma-۱}} = \frac{۲}{۴\gamma-۱}$$

و از آنجا بازده ترمودینامیکی ماشین بنزینی برابر است با

$$\eta = 1 - \frac{۱}{۴\gamma-۱}$$

و یا

$$\eta = 1 - \frac{۴^{۱-\gamma}}{۴\gamma-۱} \quad \eta = 1 - ۴^{۱-\gamma}$$

۴-۶ مثال‌های حل شده

۱. یک ماشین گرمایی با توان ۳۰ کیلووات قادر است تا آب را از منبع گرمایی با دمای ۴ درجه سانتی‌گراد بکشد و پس از سرد کردن آن تا ۲ درجه سانتی‌گراد به هوای بیرون با دمای ۱۳- درجه سانتی‌گراد بدهد. اگر بازده این ماشین ۳۰ درصد بازده ماشین کارنو باشد، تعیین کنید در مدت ۵ دقیقه چه مقدار آب به بیرون ریخته شده است؟
 حل: رابطه بازده ترمودینامیکی را با استفاده از رابطه (۴-۶) می‌نویسیم:

$$\eta = \frac{۳۰}{۱۰۰} \eta_{Carnot}$$

و چون از رابطه (۶-۶):

$$\eta_{\text{Camot}} = 1 - \frac{T_C}{T_H}$$

و یا

$$\eta = 1 - \frac{|Q_C|}{|Q_H|}$$

است می‌توان آن را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\eta = 1 - \frac{\frac{|Q_C|}{t}}{\frac{|Q_H|}{t}}$$

که t زمان است و رابطه بازده ترمودینامیکی بر حسب توان گرمایی هم بیان شده است. از طرف دیگر

$$|Q_C| = mc\Delta T$$

و نیز

$$1 - \frac{|Q_C|}{|Q_H|} = \frac{30}{100} \left(1 - \frac{T_C}{T_H} \right)$$

$$= 0.3 \left(1 - \frac{T_C}{T_H} \right) \Rightarrow \frac{|Q_H| - |Q_C|}{|Q_H|} = 0.3 \left(1 - \frac{T_C}{T_H} \right)$$

با جایگذاری مقادیر داده شده:

$$30 \text{ KW} = \frac{|Q_H| - |Q_C|}{t} \Rightarrow |Q_H| - |Q_C| = 20t$$

$$\Delta T = 4 - 2 = 2^\circ \text{C}, \quad c = 1 \frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ \text{C}},$$

$$T_H = 273 + 2 = 275^\circ \text{C}, \quad T_C = 273 - 13 = 260^\circ \text{C}$$

و از آنجا

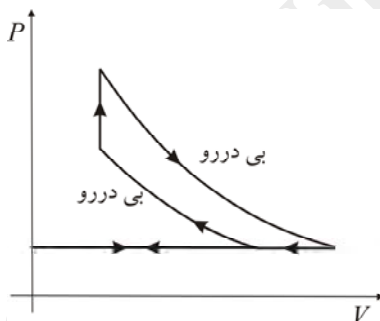
$$\frac{30t}{|Q_H|} = 0.73 \left(1 - \frac{260}{275} \right), \quad |Q_H| = mc\Delta T = m \times 1 \times 2 = 2m$$

$$t = 5 \text{ min} = 300 \text{ s}$$

$$\Rightarrow \frac{(300 \text{ KW})(300 \text{ s})}{2m} = 0.73 \left(\frac{15}{275} \right) \Rightarrow m = 27500 \text{ Kg}$$

۲. چرخه سارجنت را در نظر بگیرید که برای گاز کاملی با فرآیندهای ایستاوار مطابق شکل زیر داده شده است. نشان دهید که بازده گرمایی آن برابر است با

$$1 - \gamma \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$$



شکل ۶-۱۱. مربوط به مثال حل شده ۲.

حل: در مسیر ۲ → ۳ که یک فرآیند هم-حجم است می توان گرمای دریافتی

$|Q_H|$ را به صورت زیر به دست آورد:

$$|Q_H| = nC_V (T_3 - T_2)$$

گرمای $|Q_C|$ را در مسیر هم فشار ۴ → ۱ می توان به صورت زیر نوشت:

$$|Q_C| = nC_P (T_1 - T_4)$$

با استفاده از رابطه (۶-۴) می توان بازده ترمودینامیکی را چنین به دست آورد:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_C|}{|Q_H|} = 1 - \frac{c_P T_1 - T_2}{c_V T_3 - T_2}$$

$$= 1 - \gamma \frac{T_1 - T_2}{T_3 - T_2}$$

۳. شیب منحنی فرآیند بی‌درروی گاز کامل را برحسب ضریب اتمیسیته، فشار و حجم آن را به دست آورید.

حل: برای فرآیند بی‌درروی گاز کامل می‌توان رابطه زیر را نوشت:

$$PV^\gamma = \text{const}$$

با دیفرانسیل‌گیری از رابطه بالا داریم:

$$d(PV^\gamma) = (dP)V^\gamma + P d(V^\gamma)$$

$$= V^\gamma dP + \gamma PV^{\gamma-1} dV = 0$$

$$\Rightarrow V^{\gamma-1} (V dP + \gamma P dV) = 0$$

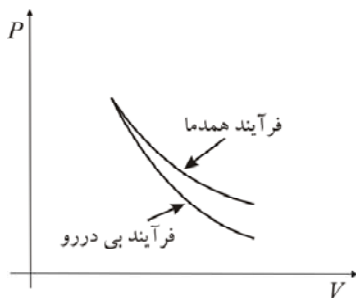
که از آنجا

$$V dP + \gamma P dV = 0$$

شیب منحنی فشار-حجم یعنی $\frac{dP}{dV}$ را می‌توان به راحتی به دست آورد:

$$\frac{dP}{dV} = -\gamma \frac{P}{V}$$

۴. نشان دهید که شیب منحنی گاز کامل در فرآیند بی‌دررو نسبت به شیب گاز کامل در حالت هم‌دمای بیشتر است.



شکل ۶-۱۲. مربوط به مثال حل شده ۴.

حل: در خودآزمایی ۳، شیب منحنی فشار-دما را برای گاز کاملی در فرآیند بی دررو به دست آوردیم. برای یک گاز کامل تک دما رابطه زیر برقرار است:

$$PV = nR = \text{const}$$

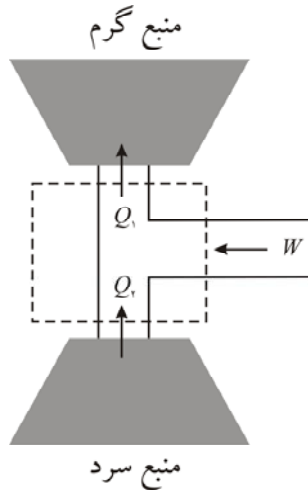
$$d(PV) = V dP + P dV = 0 \Rightarrow \frac{dP}{dV} = -\frac{P}{V}$$

از آنجایی که ضریب اتمیسیته $\gamma > 1$ است پس:

$$\left| \frac{dP}{dV} \right|_{\text{adiabatic}} > \left| \frac{dP}{dV} \right|_{\text{isothermal}}$$

در منحنی‌های شکل زیر تفاوت دو فرآیند بی دررو و تک دما به وضوح نشان داده شده است.

۵. یک پمپ گرمایی با انجام کار W می‌تواند مطابق نمودار طرح‌وار زیر گرمای Q_1 را از هوای بیرون که در دمای T_1 است بگیرد و گرمای زیادتر $Q_2 > Q_1$ را به درون انباری که دمای درون آن T_2 است منتقل کند.



شکل ۶-۱۳. مربوط به مثال حل شده ۵.

الف) چه تفاوت اصولی بین یخچال و این پمپ گرمایی وجود دارد؟
 ب) رابطه بین گرماهای Q_1 و Q_2 را با کار انجام یافته W به دست آورید؟
 ج) آیا امکان به کارگیری پمپ گرمایی به منظور استفاده در تابستان در جهت معکوس وجود دارد؟

د) امتیاز این پمپ گرمایی نسبت به دیگر وسایل گرم کننده را بیان کنید.

حل: در اینجا پمپ گرمایی همانند ماشین گرمایی است که در جهت عکس آن کار می‌کند. بدین شکل که پمپ کاری برابر W انجام می‌دهد تا گرمای Q_2 را از هوای بیرون که یک منبع سرد است و در دمای T_2 است بگیرد و آنگاه گرمای بیشتر Q_1 که برابر است با

$$|Q_1| = |Q_2| + |W|$$

را به منبع گرم درون انبار که در دمای T_1 است منتقل می‌کند. اما ماشین گرمایی، گرمای $|Q_H|$ را از منبع گرم دریافت می‌کند و کار بر روی محیط انجام می‌دهد و آنگاه مابقی گرما که به اندازه

$$|Q_C| = |Q_H| - |W|$$

بود را به منبع سرویس می‌داد.

بنابراین پمپ گرمایی بالا شبیه یخچال عمل می‌کند. دیدید که در هر چرخه یخچال، گرمای Q_2 از منبع سرد می‌گیرد و با مقدار کاری که کمپرسور یخچال انجام می‌دهد گرمای Q_1 به منبع گرم سپس می‌دهد.

ملاحظه می‌شود در هر دو ماشین پمپ گرمایی و یخچال، گرما از منبع سرد گرفته می‌شود و با انجام کار مکانیکی بر روی آن گرمایی برابر مجموع کار مکانیکی و گرمای گرفته شده از منبع سرد به منبع گرم داده می‌شود و تنها یک تفاوت کوچک بین پمپ گرمایی و یخچال وجود دارد و آن این است که:

در یخچال: منبع سرد، درون یخچال است و منبع گرم، هوای اطراف و بیرون یخچال می‌باشد.

در پمپ گرمایی: منبع سرد، هوای بیرون و اطراف انبار است و منبع گرم، هوای اطراف و درون انبار می‌باشد.

ب) مطابق با شکل می‌بینید که

$$|Q_1| = |Q_2| + |W| \Rightarrow |W| = |Q_1| - |Q_2|$$

ج) در تابستان پمپ گرمایی یا کولر به این شیوه عمل می‌کند که جای دو محیط درون و بیرون انبار عرض می‌شود. یعنی در اینجا منبع سرد، هوا درون انبار می‌شود در حالی که منبع گرم هوای بیرون و اطراف انبار است.

د) امتیاز این وسیله را می‌توان بیشتر از لحاظ اقتصادی توجیه کرد. چون مقدار کار مکانیکی در پمپ گرمایی برای انتقال بخار گاز به درون قسمت سرد کننده که گرما از آن به بیرون داده می‌شود، کم است. به عبارتی هزینه زیادی لازم نیست تا از هوای رایگان اطراف انبار گرما را دریافت کرد.

۵-۶ مسائل

۱. ماشین کارنویی در طی هر چرخه ۲ کیلوژول گرما از منبع گرم می‌گیرد و ۰٫۲۵

کیلوژول گرما را به منبع سرد پس می‌دهد. اگر دمای منبع خروجی چرخه ۳۰ درجه سانتی‌گراد باشد پیدا کنید:

الف) کار خروجی در هر چرخه

ب) بازده این ماشین

ج) دمای منبع گرم چقدر است؟

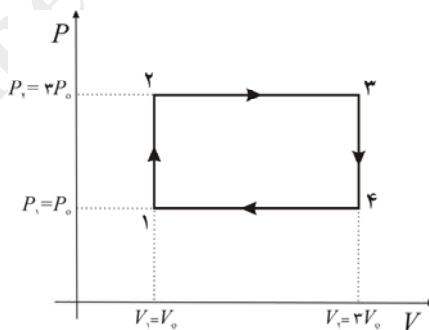
۲. اگر ضریب نسبت تغییر حجم r یک ماشین درون سوز بنزینی برابر ۹ و ضریب اتمیسته برابر ۱٫۵ باشد بازده ترمودینامیکی این ماشین چقدر است؟ (جواب: ۶۷ درصد)

۳. چرخه یک ماشین گرمایی گاز کامل در شکل زیر رسم شده است.

الف) کار انجام شده در چرخه را بیابید.

ب) گرمای دریافتی $|Q_H|$ و گرمایی که ماشین پس می‌دهد یعنی $|Q_C|$ را در دو مسیر از ۴ مسیر فرآیند در چرخه صورت می‌گیرد، مشخص کنید در کدام مسیر $|Q_H|$ وارد سیستم می‌شود و در کدام مسیر $|Q_C|$ از سیستم خارج می‌گردد؟ (ظرفیت‌های گرمایی را ثابت فرض کنید).

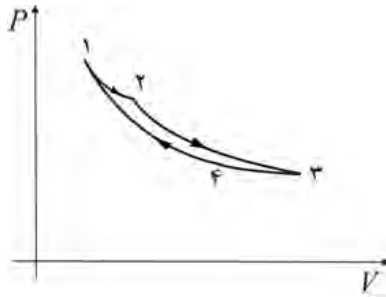
ج) بازده این ماشین را به دست آورید.



شکل ۶-۱۴. مربوط به مسئله ۳.

۴. در نواحی استوایی دمای آب‌های کنار ساحل از قسمت‌های عمیق‌تر آن گرم‌تر است. آیا ماشینی که بین این دو سطح کار می‌کند قانون دوم ترمودینامیک را نقض نمی‌کند؟

۵. یک چرخه کارنو برای یک مول گاز کامل در نمودار $P-V$ رسم شده است. فشار و دما در نقطه ۱ را فشار جو (یک اتمسفر) و دمای اتاق ($27^\circ C$) بگیرید. فشار، دما و حجم در نقاط ۲، ۳ و ۴ را به دست آورید.



شکل ۶-۱۵. مربوط به مسئله ۵.

۶. یک ماشین گرمایی قادر است مقدار 50 کیلوژول گرما را از منبع گرما با دمای 327 درجه سانتی‌گراد بگیرد و مقداری از آن را پس از انجام کار W به منبع سردی که در دمای 27 درجه سانتی‌گراد است بدهد.

الف) چه مقدار کار به وسیله ماشین در هر چرخه انجام شده است؟

ب) بازده این ماشین گرمایی را به دست آورید.

فصل هفتم

آنتروپی

۱-۷ مقدمه

دیدید که گاهی اصول ترمودینامیک و گاهی قوانین ترمودینامیک مطرح شد. واقع امر آن است که قوانین اول و دوم ترمودینامیک اثبات‌پذیر نیستند یعنی نمی‌توان آنها را ثابت کرد. البته بسیاری از قوانین در علوم تجربی اینگونه‌اند یعنی تنها با تجربه به دست می‌آیند. هر چند قانون اول را می‌توان با اطمینان بیشتر مطرح کرد چون از احتمالات در توجیه آن کمک گرفته نمی‌شود اما قانون دوم ترمودینامیک ماهیتی احتمالی دارد. یعنی هنگام حساب کردن و تعیین بعضی از کمیت‌های ماکروسکوپی نیاز است بیان شود که منظور میانگین آهنگ کمیت‌های میکروسکوپی هستند یعنی باید از میانگین‌گیری استفاده کرد.

اما قانون دیگری به نام قانون سوم ترمودینامیک وجود دارد که در کنار و همراه با کمیتی به نام آنتروپی مطرح می‌شود و قانونی است که ما را به سوی دماهای بسیار پایین می‌برد. بله به دماهای پایین و پایین‌تر اما گویی رسیدن به یک دمای بسیار پایین که صفر مطلق نام دارد دست نیافتنی است. به راستی دست یافتن به این دما چه اتفاقی را موجب می‌شود؟ هر چند نمی‌شود به طور کامل به آن پاسخ داد اما در این فصل به طور فشرده بیان می‌کنیم که با تعریفی از آنتروپی که وجود دارد رسیدن به دمای صفر مطلق گویی بی‌معنی است. اگر چه آنتروپی مفهومی بسیار اساسی در ترمودینامیک است و درک بسیاری از قوانین ترمودینامیکی بدون درک آنتروپی میسر نمی‌باشد ولی مفهوم آنتروپی به ویژه برای آنهایی که تازه در این گام می‌گذارند آسان نیست.

۲-۷ به سوی آنتروپی

دیدید که وقتی قانون اول ترمودینامیک بیان شد، دیگر فهم ماهیت گرما چندان مشکل نبود. گرما به صورت یک انرژی در کنار انرژی داخلی یک سیستم و انرژی انجام کار جای گرفت. انرژی درونی هم به صورت یک انرژی مکانیکی که معادل مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل ذرات تشکیل دهنده سیستم بود، معرفی شد.

کمی جلوتر که آمدیم با قانون دوم ترمودینامیک آشنا شدید و در آنجا گویی در دل این گفته که بازده ترمودینامیکی هیچ ماشین گرمایی، صددرصد نیست چیزی وجود داشت که حال ما آن را آنتروپی می‌نامیم.

چرا یک ماشین نمی‌تواند تمام انرژی گرمایی را به طور کامل و صددرصد به کار تبدیل کند؟

پاسخ ساده است ولی باید مواظب بود که در این پاسخ ساده دنیای دیگری پنهان شده است و آن هم این است که نیروهای مزاحم وجود دارد که مانع از بازده صددرصد وسیله ماشین گرمایی می‌شوند و بی‌نظمی را در سیستم ماشین گرمایی ایجاد می‌کنند و در واقع همین بی‌نظمی آنتروپی است. جالب آن که این بی‌نظمی، ریخت و پاش مداد، کاغذ، دفتر و کتاب در روی فرش اتاق منزلی نیست که قادر باشید آنها را دوباره مرتب کنید و به اصطلاح نظم را به خانه برگردانید. داستان این بی‌نظمی داستان طفلی است که می‌تواند کودک، نوجوان، جوان، بالغ و پیر شود و در نهایت دنیا را بدرود گوید و عکس آن صورت نخواهد گرفت. این چرخه را نمی‌توان در جهت عکس پیمود این بیانی از آنتروپی است.

به عبارت دیگر همواره گرما از محیط گرم به طور خودبه‌خود در هنگام تماس با منبع سرد به آن منتقل می‌شود و عکس آن اتفاق نمی‌افتد. طبیعت پر است از اینگونه نمونه‌ها که فرآیند تنها در یک سو ممکن است و در جهت عکس آن محال می‌باشد. چه بسا این نگاه به آنتروپی بود که ترمودینامیک را هم یک علم مهندسی ساخت و با آن عملکرد و کارایی ماشین‌های گرمایی و یخچال‌ها بررسی شد و بر اساس قوانین آن، این ماشین‌ها ساخته شده‌اند و هم از آن طرف در جزئیات برقراری تعادل در سیستم‌ها به کار آمد.

البته مقصود از بیانات بالا این نیست که اگر آنتروپی مطرح نمی‌شد این مسائل پیش نمی‌آمد بلکه شاید این موضوع از یکسان نبودن دمای دو نقطه نزدیک هم نشأت گرفته باشد. دو سیستم در تعادل ترمودینامیکی نیستند به این معنی است که سیستم‌ها در تعادل مکانیکی (صفر بودن برآیند نیروها و گشتاورها) تعادل شیمیایی و تعادل گرمایی (هم دمایی) با هم نیستند.

زیاد دور نشویم به ماشین کارنو پرداختیم. در مثال‌ها و تمرین‌های فصل پنجم تلاش شد تا به نوعی توان گرمایی که آهنگ زمانی گرما بود را وارد بحث کنیم. اما موضوع دیگری که در فصل جلوتر از آن یعنی فصل چهارم مطرح شده بود ظرفیت گرمایی بود. قابلیت و ظرفیت جسم با در نظر گرفتن گرما که ظرفیت گرمایی نام داشت و در کنار مقدار و اندازه جرم جسم خودنمایی می‌کرد.

اکنون اگر به رابطه ساده گرما که با اختلاف دما متناسب است و به صورت رابطه

زیر است:

$$Q = mc\Delta T$$

دقت کنید، می‌بینید که mc برابر نسبت گرما به تغییر دما است. شاید جالب به نظر نرسد که بدین شکل بیان شود که نسبت گرمای ΔQ به دمای T در یک فرآیند برگشت پذیر همان آنتروپی است. اما ناخوشایندتر زمانی است که به جای تغییر آنتروپی از خود آنتروپی استفاده شود، همانطور که گاهی جهت سهولت به جای اختلاف انرژی پتانسیل خود انرژی پتانسیل به کار می‌رود. در اینجا تنها برای راحتی مجاز هستیم بیان آنتروپی را به جای بیان تغییر آنتروپی به کار ببریم ولیکن آن چیزی که به راستی وجود دارد تغییر آنتروپی است که به صورت رابطه زیر ارائه می‌شود:

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} \quad (1-7)$$

برای فرآیند برگشت‌پذیر است و در حالت کلی برای هر سیستمی می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$\Delta S = \oint \frac{dQ}{T} \quad (2-7)$$

و برای فرآیند بی‌دررو چون گرمای $dQ = 0$ است در نتیجه $\Delta S = 0$ است یعنی تغییر آنتروپی وجود ندارد. توجه داشته باشید که یکای دما در این رابطه‌ها کلوین است.

۳-۷ تغییر آنتروپی کل در مخلوط دو سیستم

برای آن که بتوان تغییر آنتروپی کل که مجموع تغییر آنتروپی اجزای آن است را بهتر درک کنیم، بهتر است دو ظرف آب را به عنوان نمونه در نظر بگیرید که آب دو ظرف را در یک کاسه ریخته باشیم. آب درون یک ظرف به حجم V_1 و جرم m_1 و دمای T_1 درجه کلوین را در ظرف دیگری که حاوی آب به حجم V_2 و جرم m_2 و دمای پایین‌تر T_2 ($T_2 < T_1$) است می‌ریزیم تا مخلوط می‌شوند.

می‌خواهیم تغییر آنتروپی ایجاد شده در اثر مخلوط کردن آب دو ظرف را به دست آوریم. فرض کنید وقتی دو آب را در هم می‌آمیزیم آن دو به دمای تعادل T_c می‌رسند. اما در ابتدا تغییر آنتروپی را برای آب اول می‌نویسیم که دمای آن از T_1 به T_c رسیده است بنابراین می‌توان نوشت:

$$dQ = m c dT$$

و از رابطه (۲-۷) داریم:

$$\Delta S_1 = m_1 c \int_{T_c}^{T_1} \frac{dT}{T} = m_1 c \ln \left(\frac{T_1}{T_c} \right)$$

همچنین برای آب ظرف دوم هم داریم:

$$\Delta S_2 = m_2 c \int_{T_2}^{T_c} \frac{dT}{T} = m_2 c \ln \left(\frac{T_c}{T_2} \right)$$

از طرفی در هنگام مخلوط کردن می‌توان رابطه زیر را در نظر گرفت:

$$m_1 c (T_1 - T_c) = m_2 c (T_c - T_2)$$

که

$$m_1 T_1 + m_2 T_2 = (m_1 + m_2) T_c$$

و یا

$$T_c = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2} \quad (3-7)$$

چون آنتروپی کل برابر مجموع دو آنتروپی است یعنی

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$$

با استفاده از رابطه‌های ΔS_1 و ΔS_2 می‌توان ΔS را به دست آورد.

$$\Delta S = m_1 c \ln \left(\frac{T_1}{T_c} \right) + m_2 c \ln \left(\frac{T_2}{T_c} \right)$$

و یا

$$\Delta S = m_1 \ln \left(\frac{T_1}{T_c} \right)^{m_1 c} + m_2 \ln \left(\frac{T_2}{T_c} \right)^{m_2 c}$$

که

$$\begin{aligned} \Delta S &= \ln \left(\frac{T_1}{T_c} \right)^{m_1 c} \left(\frac{T_2}{T_c} \right)^{m_2 c} \\ &= \ln \left(\frac{T_1^{m_1} T_2^{m_2}}{T_c^{m_1+m_2}} \right)^c = c \ln \left(T_1^{m_1} T_2^{m_2} T_c^{-(m_1+m_2)} \right) \end{aligned} \quad (4-7)$$

تغییر آنتروپی کل سیستم به دست آمده است. حال مقادیر زیر را در نظر بگیرید تا یک مقدار عددی هم برابر تغییر آنتروپی کل مخلوط به دست آوریم. فرض کنید:

$$m_1 = 2m_2 = 0.1 \text{ Kg}, \quad T_1 = 6T_2 = 30^\circ \text{C}, \quad c = 1 \frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ \text{C}}$$

ابتدا باید دماها را بر حسب کلوین نوشت. با قرار دادن مقادیر داده شده در بالا

می‌توان دمای تعادل دو مخلوط یعنی T_f را به راحتی به دست آورد:

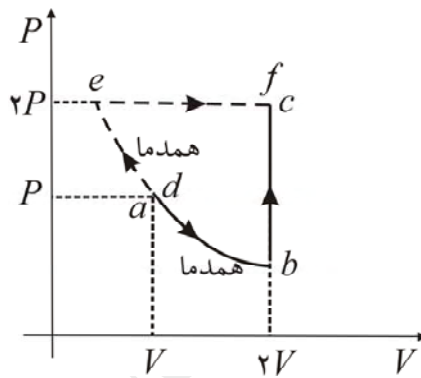
$$T_c = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2} = 21.7^\circ \text{C} = 295 \text{ K}$$

اکنون می‌توان تغییر آنتروپی کل مخلوط را به دست آورد که برابر است با

$$\Delta S = 0.13 \frac{\text{cal}}{\text{K}}$$

مثال ۱: مسیر دو فرآیند متفاوت برای یک مول گاز ایده‌آل تک اتمی را در شکل ۱-۷ مشاهده می‌کنید. یک مسیر $a \rightarrow b \rightarrow c$ است و مسیر یا فرآیند دیگر هم $d \rightarrow e \rightarrow f$ می‌باشد.

- الف) چه مقدار گرما در هر قسمت از مسیر فرآیند گرفته می‌شود؟
 ب) چه مقدار کار به وسیله گاز در هر قسمت از مسیر فرآیند انجام می‌شود؟
 ج) تغییر انرژی درونی درونی گاز را به دست آورید.
 د) تغییر آنتروپی گاز را پیدا کنید.



شکل ۱-۷. مسیر دو فرآیند یک مول گاز کامل تک اتمی.

حل: ابتدا فرآیند مسیر $a \rightarrow b \rightarrow c$ را در نظر می‌گیریم و سپس به سراغ فرآیند دیگر در مسیر $d \rightarrow e \rightarrow f$ می‌رویم و گرما، کار، تغییر انرژی درونی و تغییر آنتروپی‌ها را به دست می‌آوریم.
 در مسیر $a \rightarrow b$ گاز به طور تک دما از V تا $2V$ منبسط شده است.

$$PV = nRT = \text{const}$$

$$P = \frac{\text{const}}{V} = \frac{nRT}{V}$$

$$W = - \int_V^{2V} P dV = -nRT \int_V^{2V} \frac{dV}{V}$$

که

$$W = -nRT \ln\left(\frac{2V}{V}\right) = -nRT \ln 2$$

اما چون فرآیند هم‌دما است تغییر انرژی درونی $\Delta U = 0$ است پس

$$\Delta U = Q + W = 0$$

$$Q = -W$$

و بنابراین گرمای گرفته شده در مسیر $a \rightarrow b$ برابر است با

$$Q = nRT \ln 2$$

مسیر $b \rightarrow c$ یک فرآیند هم‌حجم است و لذا کاری انجام نمی‌شود:

$$\Delta U = Q$$

است. در اینجا اختلاف دما از T_b تا T_c است که با گرفتن گرمای Q بروز می‌کند:

$$Q = nc_V (T_c - T_b)$$

از طرفی برای یک مول گاز ایده‌آل تک اتمی داریم:

$$n = 1 \text{ mol}, \quad c_V = \frac{3}{2}R$$

و با توجه به رابطه

$$\frac{P_a V_a}{T_a} = \frac{P_b V_b}{T_b} \Rightarrow \frac{P_a V}{T} = \frac{P_b (2V)}{T}$$

آنگاه

$$P_b = \frac{1}{2}P_a$$

در اینجا فشار از $P_b = \frac{1}{2}P_a = \frac{P_0}{2}$ تا $P_c = 2P_0$ تغییر می‌کند و به همین منظور

خود کمیت فشار P را در مسیر $b \rightarrow c$ در نظر می‌گیریم که حد پایین و بالای آن به

ترتیب $\frac{P_0}{2}$ و $2P_0$ است. بدین ترتیب برای مسیر هم‌حجم $b \rightarrow c$ می‌توان نوشت:

$$\frac{P_c}{T_c} = \frac{P_b}{T_b} \Rightarrow \frac{2P_0}{T_c} = \frac{\frac{P_0}{2}}{T} \Rightarrow T_c = 4T$$

پس

$$Q_{cb} = nc_V (T_c - T_b) = (1) \left(\frac{3}{2} R \right) (4T - T)$$

که

$$Q_{cb} = \frac{9}{2} R$$

و یا از $PV = nRT$ داریم:

$$Q_{cb} = \frac{9}{2} PV$$

و تغییر انرژی درونی در این مسیر $b \rightarrow c$ هم برابر است با:

$$(\Delta U)_{bc} = Q_{cb} = \frac{9}{2} PV$$

حال فرآیند دومی که مسیر $d \rightarrow e \rightarrow f$ است را در نظر می‌گیریم.مسیر $d \rightarrow e$ هم یک فرآیند هم‌دما است پس $T_d = T_e$ و در نتیجه $(\Delta U)_{de} = 0$ است. اما در اینجا گاز متراکم می‌شود و فشار از $P_d = P$ تا $P_e = 2P$ می‌رسد.

و با توجه به

$$P_e V_e = P_d V_d \Rightarrow 2PV_e = PV_d \Rightarrow V_d = 2V_e$$

و چون $V_d = V$ می‌باشد پس $V_e = \frac{V}{2}$ می‌شود. در این مسیر هم به دلیل صفر بودن

تغییر انرژی درونی، کار و گرما برابرند یعنی

$$Q = +W$$

که

$$W = \int_{V_d}^{V_e} P dV = \int_{V}^{\frac{V}{2}} \frac{nRT}{V} dV = nRT \ln \left(\frac{\frac{V}{2}}{V} \right)$$

و یا

$$W = -nRT \ln 2$$

و گرمای گرفته شده در مسیر $d \rightarrow e$ برابر خواهد بود با

$$Q = -nRT \ln V$$

مسیر $e \rightarrow f$ یک فرآیند هم‌فشار است که با فشار $2P$ ، حجم گاز از $\frac{V}{2}$ به $2V$ افزایش می‌یابد. بنابراین

$$W = \int_{V_e}^{V_f} P' dV = \int_{\frac{V}{2}}^{2V} 2P dV$$

چون فشار ثابت است پس از انتگرال بیرون می‌آید و مقدار کار صورت گرفته برابر می‌شود با

$$W_{ef} = 2P \left(2V - \frac{V}{2} \right) = 3PV$$

حال باید مقدار گرمای Q را در مسیر $e \rightarrow f$ به دست آوریم و چون فشار ثابت است داریم:

$$\frac{V_e}{T_e} = \frac{V_f}{T_f} \Rightarrow \frac{\frac{V}{2}}{T_e} = \frac{2V}{T_f} \Rightarrow T_f = 4T_e$$

که به دلیل هم‌دما بودن فرآیند $d \rightarrow e$ دمای دو نقطه ابتدایی (T_d) و انتهایی (T_e) این فرآیند برابرند یعنی

$$T_e = T_d = T$$

$$T_f = 4T$$

که گرمای Q از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$Q_{ef} = n c_p (T_e - T_f)$$

برای گاز کامل تک اتمی رابطه زیر بین گرمای ویژه در حجم ثابت (c_v) و گرمای ویژه در فشار ثابت (c_p) برقرار است:

$$c_p - c_v = R$$

و چون $c_V = \frac{3}{2}R$ است پس

$$c_P = \frac{5}{2}R$$

با جایگذاری کمیت‌های به دست آمده در Q_{ef} داریم:

$$Q_{ef} = (n) \left(\frac{5}{2}R \right) (\varphi T - T) = \frac{15}{2}nRT$$

و چون

$$nRT = PV$$

است پس نتیجه می‌گیریم که

$$Q_{ef} = \frac{15}{2}PV$$

حال با استفاده از قانون اول ترمودینامیک می‌توانیم تغییر انرژی درونی ΔU را برای مسیر $e \rightarrow f$ به دست آوریم یعنی

$$\begin{aligned} (\Delta U)_{ef} &= Q_{ef} - W_{ef} \\ &= \frac{15}{2}PV - 3PV = \frac{9}{2}PV \end{aligned}$$

تا اینجای کار تلاش کردیم تا کار، گرما و انرژی درونی در هر قسمت از مسیر را به دست آوریم. حال به دلیل این که آنتروپی موضوع اصلی این فصل است تغییر آنتروپی را جداگانه پیدا می‌کنیم.

در مسیر $a \rightarrow b$ چون فرآیند هم‌دما است پس

$$\Delta S_{ab} = \frac{Q_{ab}}{T} = \frac{nRT}{T} \ln 2$$

پس برای یک مول گاز کامل می‌توان تغییر آنتروپی مسیر $a \rightarrow b$ را چنین نوشت:

$$\Delta S_{ab} = R \ln 2$$

در مسیر $b \rightarrow c$ باید از انتگرال استفاده کرد چون دما ثابت نیست که آن را از انتگرال بیرون آوریم.

$$\Delta S_{bc} = \int \frac{dQ}{T}$$

که با

$$dQ = n c_V dT$$

داریم:

$$\Delta S_{bc} = n c_V \int_{T_b}^{T_c} \frac{dT}{T} = n c_V \int_T^{4T} \frac{dT}{T}$$

در نتیجه تغییر آنتروپی برای مسیر $b \rightarrow c$ هم به دست آمد که برابر است با

$$\Delta S_{bc} = n c_V \ln\left(\frac{4T}{T}\right) = n c_V \ln 4$$

و با $n = 1 \text{ mol}$ و $c_V = \frac{3}{2}R$ داریم:

$$\Delta S_{bc} = \frac{3}{2}R \ln 4 = \frac{3}{2}R \ln 2^2$$

پس

$$\Delta S_{bc} = 3R \ln 2$$

حال به سراغ فرآیند دیگر در مسیر $d \rightarrow e \rightarrow f$ می‌رویم.

در مسیر $d \rightarrow e$ با فرآیند هم‌دما روبه‌رو هستیم لذا

$$\Delta S_{de} = \frac{Q_{de}}{T} = -\frac{nRT}{T} \ln 2 = -nR \ln 2$$

که با $n = 1 \text{ mol}$ گاز داریم:

$$\Delta S_{de} = -R \ln 2$$

همچنین برای مسیر هم‌فشار $e \rightarrow f$ می‌توان همانند مسیر $b \rightarrow c$ از انتگرال

استفاده کرد:

$$\Delta S_{ef} = \int_{T_e}^{T_f} \frac{dQ}{T} = n c_P \int_T^{4T} \frac{dT}{T} = n c_P \ln 4$$

با $n = 1 \text{ mol}$ و $c_P = \frac{5}{2}R$ داریم:

$$\Delta S_{ef} = \delta R \ln 2$$

حال تغییر آنتروپی کل و یا مجموع تغییر آنتروپی در هر فرآیند را به دست می‌آوریم:
در فرآیند اول $a \rightarrow b \rightarrow c$:

$$\Delta S_{\gamma} = \Delta S_{ab} + \Delta S_{bc}$$

که تغییر آنتروپی کل برای فرآیند اول برابر می‌شود با

$$\Delta S_{\gamma} = 4R \ln 2$$

و به همین شکل برای فرآیند دوم (مسیر $d \rightarrow e \rightarrow f$) داریم:

$$\Delta S_{\gamma} = \Delta S_{de} + \Delta S_{ef}$$

و یا

$$\Delta S_{\gamma} = 4R \ln 2$$

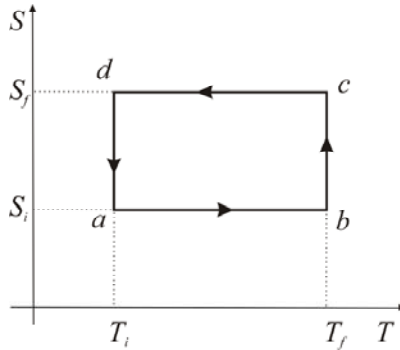
دقت می‌کنیم که تغییر آنتروپی کل برای دو فرآیند یکسان است علی‌رغم این که جهت انجام هر فرآیند با دیگری متفاوت بوده است.

۴-۷ نمودارهای آنتروپی - دما

در بررسی فرآیندهای ترمودینامیکی دیدید که عموماً نمودارهای فشار-حجم فرآیند را رسم می‌کردیم و با دنبال کردن مسیرها در نمودار $P-V$ اطلاعات لازم را در با هم‌حجم، هم‌فشار و بی‌دررو بودن فرآیند کسب می‌کردیم.

اکنون تلاش داریم نمودار آنتروپی-دما را برای هر فرآیند ترمودینامیکی ترسیم کنیم و حالت ترمودینامیکی سیستم را از آن دریابیم. اگر دما و آنتروپی را در جهت محور افقی و محور قائم در نظر بگیریم می‌توان آن را به صورت شکل ۷-۲ نمایش داد. در یک فرآیند بی‌درروی برگشت‌پذیر به دلیل صفر بودن گرمای Q از رابطه (۷-۱) می‌توان نتیجه گرفت که

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{0}{T} = 0 \quad (5-7)$$



شکل ۷-۲. نمودار آنتروپی - دما.

دو مسیر دیگر $b \rightarrow c$ و $d \rightarrow a$ هم قابل تأملند چون دمای نقاط b و c با هم برابر (T_f) است و دمای نقطه d و نقطه a هم برابر T_i می‌باشد. این فرایندها به فرایندهای هم‌دما معروف هستند. در عین حال این فرایندها برگشت پذیر هستند. پس در این فرایند چهار مسیر و یا چهار مرحله وجود دارد که در مسیر $a \rightarrow b$ کار و انرژی درونی داریم، در مسیر $b \rightarrow c$ گرما و تغییر آنتروپی وجود دارد و مسیر $c \rightarrow d$ مثل مسیر $a \rightarrow b$ و مسیر $d \rightarrow a$ مانند مسیر $b \rightarrow c$ می‌باشد. دقت کنید این چرخه $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d$ نمایش دهنده چرخه کارنو است.

از نمودار آنتروپی و دما می‌توان گرما را در حالت کلی به صورت رابطه زیر به دست آورد:

$$Q = \int_{S_i}^{S_f} T dS \quad (6-7)$$

انتگرال در رابطه (۶-۷) با توجه به نمودار آنتروپی - دما به روشنی مساحت را می‌دهد. مساحت زیر نمودار $S-T$ به ما گرمای Q را می‌دهد. همانطور که مساحت زیر نمودار $P-V$ مقدار کار را به دست می‌دهد.

حال می‌توان مقدار گرمای دریافت شده $|Q_H|$ را با توجه به نمودار شکل ۷-۲ به دست آورد. یعنی سیستم در طی مسیر $b \rightarrow c$ که یک فرایند هم‌دما است گرمای $|Q_H|$ زیر را کسب می‌کند:

$$|Q_H| = T_f (S_f - S_i) \quad (7-7)$$

از طرف دیگر در مسیر $d \rightarrow a$ به دلیل کاهش آنتروپی گرمای $|Q_C|$ را پس می‌دهد:

$$|Q_C| = T_i (S_i - S_f) \quad (8-7)$$

نکته مهمی که در روابط (7-7) و (8-7) نهفته است به نابرابر بودن دماها ($T_f < T_i$) و در نتیجه نابرابری $|Q_H|$ و $|Q_C|$ مربوط می‌شود. اگر به اندازه تغییر آنتروپی فکر کنیم آنگاه به دلیل آن که $T_f > T_i$ است باید

$$|Q_H| > |Q_C|$$

باشد و در نتیجه به قانون دوم ترمودینامیک دست یافتیم که تفاوت دو گرمای $|Q_H|$ و $|Q_C|$ به کار انجام یافته منجر می‌شود یعنی

$$|W| = |Q_H| - |Q_C|$$

و یا

$$|W| = (T_f - T_i) \Delta S$$

از طرف دیگر می‌توان به بازده ترمودینامیکی برگشت که برابر بود با

$$\eta = 1 - \frac{|Q_C|}{|Q_H|}$$

و در اینجا با استفاده از رابطه‌های (7-7) و (8-7) داریم:

$$\eta = 1 - \frac{T_i}{T_f}$$

که رابطه آشنایی است که در فصل جلوتر به دست آمده بود. با آنچه بیان شد و به ویژه در رابطه (7-6) دیدید که

$$dQ = T dS \quad (9-7)$$

بنابراین گرمای ویژه در حجم ثابت و فشار ثابت به ترتیب با رابطه‌های زیر داده می‌شوند:

$$c_v = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_v \quad (10-7)$$

و

$$c_p = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p \quad (11-7)$$

البته نباید از نظر دور داشت که فرآیندهای برگشت‌پذیر بیشتر ایده‌آل است تا یک واقعیت. اکنون می‌توان رابطهٔ گرما را با توجه به قانون اول ترمودینامیک نوشت:

$$dQ = dU + dW$$

و یا برای یک مول گاز ایده‌آل:

$$dQ = c_v dT + P dV$$

آنگاه تغییر آنتروپی برابرخواهد بود با

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{c_v dT}{T} + \frac{P dV}{T} \quad (12-7)$$

که

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{c_v dT}{T} + \int_{V_1}^{V_2} \frac{P dV}{T}$$

است. که در این صورت برای یک مول گاز ایده‌آل با استفاده از معادلهٔ حالت

$$PV = RT$$

تغییر آنتروپی را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} \Delta S &= c_v \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + R \int_{V_1}^{V_2} \frac{T dV}{VT} \\ &= c_v \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + R \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \end{aligned}$$

تغییر آنتروپی یک گاز کامل به صورت رابطهٔ زیر است:

$$\Delta S = c_V \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + R \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \quad (13-7)$$

با R و c_V ثابت می‌توان فهمید که تغییرات آنتروپی تنها به حالت اولیه و حالت نهایی گاز بستگی دارد.

حال اگر تغییر آنتروپی را تفاضل دو آنتروپی نهایی و اولیه بنویسیم آنگاه با استفاده از

$$\Delta S = S_2 - S_1 \quad (14-7)$$

داریم:

$$S = c_V \ln T + R \ln V \quad (15-7)$$

توجه کنید که با تغییر دما و یا تغییر حجم، آنتروپی گاز کامل تغییر می‌کند. اگر حجم ثابت باشد آنگاه

$$S = c_V \ln T + const \quad (16-7)$$

نشان می‌دهد که آنتروپی با تغییر دما تغییر می‌کند و تغییر آنتروپی بسیار کندتر از تغییر دما است چون آنتروپی با لگاریتم دما متناسب است. جالب است به نسبت آنتروپی به $\ln T$ که معادل گرمای ویژه در حجم ثابت c_V است دقیق باشید و آن را با رابطه انرژی درونی ΔU که تابعی از دما بود و به صورت رابطه زیر نوشته می‌شود یعنی با

$$U = c_V T + const \quad (17-7)$$

مقایسه کنید. می‌بینید که وابستگی انرژی درونی به دما در رابطه (۱۷-۷) بسیار بیشتر از وابستگی آنتروپی به دما در رابطه (۱۶-۷) است.

دوباره به رابطه (۱۵-۷) برمی‌گردیم و این بار فرآیند هم‌دمای گاز کاملی را در نظر می‌گیریم که در آن حجم V می‌تواند تغییر کند. بهتر است رابطه (۱۳-۷) که تغییر آنتروپی را می‌دهد و در دمای ثابت به رابطه زیر تبدیل می‌شود را بیشتر مورد بررسی قرار دهیم. برای دمای ثابت:

$$\Delta S = R \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) + const \quad (18-7)$$

از رابطه (۷-۱۸) می‌توان استنباط کرد که اگر سیستم منبسط شود یعنی در حالی که $V_2 > V_1$ است آنگاه

$$\Delta S > 1 \quad (19-7)$$

و چنانچه سیستم متراکم شود یعنی $V_2 < V_1$ باشد آنگاه آنتروپی روند کاهشی را خواهد داشت یعنی

$$\Delta S < 1 \quad (20-7)$$

پس اگر گاز کاملی را به طور هم‌دما و برگشت پذیر متراکم کنیم آنتروپی آن کاهش می‌یابد. علت کاهش آنتروپی را می‌توان اینگونه توجیه کرد که وقتی دما بدون تغییر می‌ماند مفهوم آن این است که با توجه به

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \int \frac{dQ}{T} \rightarrow dS = \frac{dQ}{T}$$

باید گرمای Q از سیستم خارج شده باشد. حال به همین دلیل می‌توان نتیجه گرفت که سیستم در حال انبساط برگشت پذیر گرما را جذب می‌کند.

موضوع ثابت ماندن دما را در هنگام ذوب شدن یخ و بخار شدن آب دیدید و هر کدام به ترتیب به گرمای نهان ذوب (Q_F) و گرمای نهان تبخیر (Q_V) منجر شدند:

$$Q_F = ml_F, \quad Q_V = ml_V$$

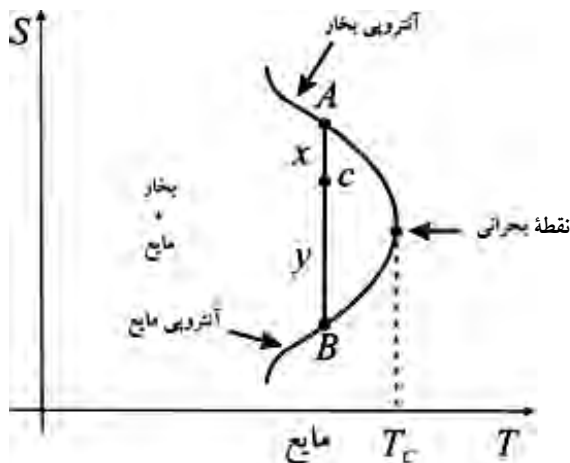
و در نتیجه تغییر آنتروپی در هنگام ذوب برابر است با

$$\Delta S = \frac{Q_F}{T} = \frac{ml_F}{T} \quad (21-7)$$

و در هنگام بخار شدن آب برابر است با

$$\Delta S = \frac{Q_V}{T} = \frac{ml_V}{T} \quad (22-7)$$

در اینجا T دمای تغییر حالت ماده است. در بحث جالبی توانست نمودار آنتروپی-دمای بخار و مایع در حال تعادل را ترسیم کند که در شکل (۳-۷) نشان داده شده است.



شکل ۳-۷. نمودار آنتروپی-دمای بخار و مایع در تعادل. ناحیه سمت چپ خط منحنی منطقه دو فاز را نشان می‌دهد که مایع و بخار با هم وجود دارند.

دگدیل در این شکل ۳-۷ نشان می‌دهد که نقطه A و B به ترتیب متناظر با آنتروپی بخار در تعادل با مایع و آنتروپی مایع در تعادل با بخار است. خط راست AB موازی محور آنتروپی است بنابراین یک پدیده هم‌دما را نشان می‌دهد و اگر این فاصله برابر با گرمای نهان تبخیر در همین دما باشد و آن را با l_v نشان دهیم آنگاه

$$S_2 - S_1 = \frac{ml_v}{T}$$

است. پس

$$T \frac{dS_2}{dT} - T \frac{dS_1}{dT} = T \frac{d}{dT} \left(\frac{ml_v}{T} \right) \quad (23-7)$$

بنابراین می‌توان هر یک از جملات طرف چپ رابطه (۲۳-۷) را نام‌گذاری کرد:

$$c_2 = T \left(\frac{dS_2}{dT} \right) \quad (24-7)$$

و

$$c_1 = T \left(\frac{dS_1}{dT} \right) \quad (25-7)$$

که c_1 و c_2 به ترتیب ظرفیت حرارتی بخار اشباع و ظرفیت حرارتی مایع اشباع نامیده می‌شوند و برای واحد جرم و $l_V = l$ داریم:

$$c_2 - S_1 = \frac{dl}{dT} - \frac{l}{T} \quad (26-7)$$

که به معادله کلاپیرون معروف است.

مثال ۲: قطعه یخی ۵۰ گرمی را از درون فریزر که دمای آن ۲۰- درجه سانتی‌گراد است را بر می‌داریم و درون یک ظرف عایق‌بندی شده که محتوی ۲۰۰ گرم آب ۳۰ درجه سانتی‌گراد می‌اندازیم تا به دمای تعادل برسند. تعیین کنید آنتروپی آن چقدر تغییر کرده است؟

حل: قطعه یخ ابتدا از 20°C تا صفر درجه سانتی‌گراد می‌رسد سپس در همین دما یخ ذوب می‌گردد و به آب صفر درجه تبدیل می‌شود. بدین ترتیب می‌توان برای تعادل گرمایی، گرمایی که آب ۳۰ درجه سانتی‌گراد از دست می‌دهد را برابر مجموع گرماهای بیان شده گرفت. آنگاه:

$$m_1 c_1 (\theta_1 - \theta_c) = m_2 c_2 (0 - \theta_c) + m_2 l_F + m_2 c_1 (\theta_c - 0)$$

و با جایگذاری مقادیر زیر در رابطه بالا داریم:

$$\theta_1 = 30^\circ\text{C}, \quad \theta_2 = -20^\circ\text{C}, \quad l_F = 80 \frac{\text{cal}}{\text{g}}, \quad c_1 = 1 \frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ\text{C}}$$

$$c_2 = 0.5 \frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ\text{C}}, \quad m_1 = 200 \text{g}, \quad m_2 = 50 \text{g}$$

پس

$$200 \times 1 \times (30 - \theta_c) = 50 \times 0.5 (0 + 20) + 50 \times 80 + 50 \times 1 \times \theta_c$$

اکنون در هر قسمت تغییر آنتروپی را به دست می‌آوریم.

یخ $253\text{ K} = -20^\circ\text{C}$ به صفر درجه سانتی گراد:
در اینجا تغییر دما داریم و باید رابطه گرما را به صورت رابطه زیر نوشت:

$$dQ = m c dT$$

آنگاه

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = mc \int_{253}^{273} \frac{dT}{T} = mc \ln\left(\frac{273}{253}\right)$$

$$(\Delta S)_1 = 50 \times 0.5 \times \ln\left(\frac{273}{253}\right) - 1.9 \frac{\text{cal}}{\text{K}}$$

از یخ صفر درجه به آب صفر درجه:

$$(\Delta S)_2 = \frac{Q_F}{T} = \frac{ml_F}{T} = \frac{50 \times 80}{273} = 14.7 \frac{\text{cal}}{\text{K}}$$

از آب صفر درجه تا آب ۶ درجه سانتی گراد:

$$\Delta S = m c \ln\left(\frac{279}{273}\right) = 50 \times 1 \times \ln\left(\frac{279}{273}\right) = 1.1 \frac{\text{cal}}{\text{K}}$$

از طرف دیگر برای ۲۰۰ گرم آب به دمای 30°C که به دمای 6°C رسیده است می توان تغییر آنتروپی را به دست آورد. در اینجا هم تغییر دما داریم پس:

$$(\Delta S)_3 = mc \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right) = 200 \times 1 \times \ln\left(\frac{279}{293}\right)$$

که تغییر آنتروپی به دلیل کاهش دما منفی می شود و در اینجا مقدار آن برابر است با

$$(\Delta S)_3 = -9.8 \frac{\text{cal}}{\text{K}}$$

بنابراین تغییر آنتروپی کل را می توان با جمع کلیه تغییر آنتروپی ها در طی فرآیند به دست آورد.

$$(\Delta S)_t = (\Delta S)_1 + (\Delta S)_2 + (\Delta S)_3 + (\Delta S)_4$$

$$(\Delta S)_t = 1.9 + 14.7 + 1.2 - 9.8 = 7.9 \frac{\text{cal}}{\text{K}}$$

۷-۵ قانون سوم ترمودینامیک

اگر نگاهی به دنیای میکروسکوپیکی درون سیستمی بیندازیم می‌بینیم که افزایش آنتروپی یک سیستم یعنی افزایش در بی‌نظمی بدین معنی که اگر جایگاه‌هایی باشد که قابل اشغال باشند آنگاه احتمال اشغال این جایگاه‌ها که به جایگاه‌های کوچک و یا میکروحالت معروفند زیاد می‌شود. یعنی اگر این میکروحالت‌ها را با Ω نشان دهیم آنگاه به دلیل فوق‌العاده زیاد بودن Ω مجبوریم با لگاریتم نپزین آن را کند کنیم و نظم و بی‌نظمی آن را مطالعه نماییم.

در دنیای ماکروسکوپیکی گرفتن لگاریتم را می‌توان به یک دستگاه ویدئو یا DVD مانسته کرد که برای درک بیشتر جزئیات فیلم آهنگ تعویض تصاویر را کند می‌کنید تا آن را بهتر مطالعه کنید. در اینجا هم لگاریتم نپزین می‌گیریم تا بی‌نظمی و یا اشغال میکروحالت‌ها را بهتر بتوان دنبال کرد.

بنابراین $\ln \Omega$ به ما آنتروپی را می‌دهد که ثابت تناسب در رابطه (۷-۲۷) ثابت بولتزمن است و در واقع ارتباط بین دنیای میکروسکوپیکی آماری (Ω) با دنیای ماکروسکوپیکی ترمودینامیکی (آنتروپی Ω) با رابطه زیر داده می‌شود:

$$S = k \ln \Omega \quad (۲۷-۷)$$

و

$$dS = kd \ln \Omega \quad (۲۸-۷)$$

این تغییر آنتروپی با گرما رابطه مستقیم و با دمای سیستم رابطه معکوس دارد. اما با همه این احوال چنانچه دما به دمای صفر مطلق برسد آنگاه:

$$\frac{dQ}{\circ}$$

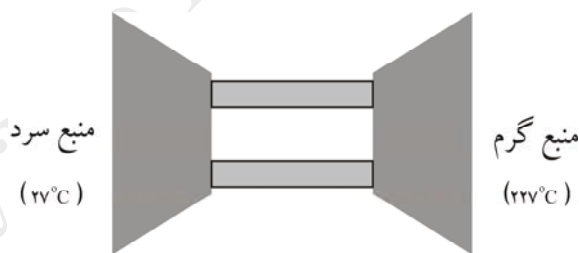
می‌شود که تقسیم عدد بر صفر خواهد بود که بی‌معنی است و این بی‌معنی بودن موجب شده است تا بیان کنیم که آنتروپی یک سیستم در صفر مطلق یک ثابت جهانی است و مستقل از تمام پارامترهای ماکروسکوپیکی که معادله حالت سیستم را مشخص می‌کنند می‌باشد.

به عبارت بهتر هر چه به صفر مطلق نزدیک شویم ممکن نیست به خود صفر مطلق برسیم و این همان قانون سوم ترمودینامیک است. با این قانون می‌توان رابطه بین آنتروپی و بی‌نظمی و یا احتمال اشغال میکروحالت‌ها را به خوبی درک کرد. در واقع با کاهش دما در سیر رسیدن به دمای صفر مطلق، حرکت‌های کاتوره‌ای کاهش می‌یابند و منظم و منظم‌تر می‌شوند. از نگاه کلاسیک در صفر مطلق تمام ذرات سیستم از حرکت و جنبش باز می‌ایستند آنگاه سیستم در کمینه‌ترین بی‌نظمی و یا بالاترین نظم خود به سر خواهد برد.

اما آنچه اهمیت دارد این است که نظم صددرصد نخواهیم داشت و همواره کمینه‌ای برای آنتروپی در همسایگی فوق‌العاده نزدیک به صفر مطلق وجود دارد و این را به نام قانون سوم ترمودینامیک به یاد داشته باشید.

۶-۷ مثال‌های حل شده

۱. میله‌ای فلزی مطابق شکل ۷-۴ در تماس با دو منبع گرم (۲۲۷ درجه سانتی‌گراد) و منبع سرد (۲۷ درجه سانتی‌گراد) است. تغییر آنتروپی کل میله با رسانش ۱۰۰۰ کالری گرما را به دست آورید.



شکل ۷-۴. مربوط به مثال حل شده ۱.

$$\text{حل: } Q = 1000 \text{ cal}, T_1 = 227^\circ \text{C} = 500 \text{ K}, T_2 = 27^\circ \text{C} = 300 \text{ K}$$

آنگاه آنتروپی در هر انتها را به دست می‌آوریم:

$$(\Delta S)_1 = \frac{Q}{T_1} = \frac{1000}{300} = 3.3 \frac{\text{cal}}{\text{K}}$$

$$(\Delta S)_2 = \frac{Q}{T_2} = \frac{-1000}{500} = -2 \frac{\text{cal}}{\text{K}}$$

و تغییر آنتروپی کل برابر است با

$$(\Delta S)_t = (\Delta S)_1 + (\Delta S)_2 = 3.3 - 2 = 1.3 \frac{\text{cal}}{\text{K}}$$

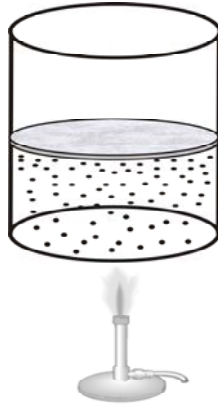
۲. قطعه سنگ بزرگی به جرم ۱۰۰ کیلو گرم از ارتفاع ۱۵۰ متری از کف دره‌ای قائم رها می‌شود و به کف دره می‌رسد. اگر دمای محیط هوای اطراف آن ۲۷ درجه سانتی‌گراد باشد تغییر آنتروپی سنگ به اضافه محیط چقدر خواهد بود؟
حل: فرض می‌کنیم که تمام انرژی پتانسیل سنگ به گرما تبدیل شده باشد:

$$\begin{aligned} \Delta Q &= E_p = mgh \\ &= 100 \times 10 \times 150 = 150000 \text{ J} \end{aligned}$$

اما فرآیند برگشت پذیر نیست ولی می‌شود تصور کرد که سنگ انرژی پتانسیل را طوری از دست می‌دهد که لحظه به لحظه باعث گرم شدن محیط می‌شود و اصطکاک و یا نیروی مقاوم دیگری در قبال آن آنقدر نیست که عدم تعادل ایجاد شده به وسیله آن زیاد باشد و در نتیجه با کاهش انرژی پتانسیل، محیط بر روی آن کار انجام می‌دهد و سپس می‌توان فرض کرد که فرآیندی برگشت پذیر داریم (هر چند یک نگاه ایده‌آل است). با این اوصاف می‌توان رابطه تغییر آنتروپی را به صورت زیر نوشت:

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{150000 \text{ J}}{300 \text{ K}} = 500 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

۳. شخصی یک پیستون پلاستیکی را در لیوان فلزی طوری قرار می‌دهد که گازی را به اندازه یک لیتر محبوس کند. سپس این لیوان را مطابق شکل بالای آتش قرار می‌دهد تا گرما موجب باعث شود این گاز کامل به اندازه دو لیتر افزایش حجم یابد. اگر فرآیند برگشت پذیر فرض شود و در طول آن دمای گاز کامل تغییر نکند آنگاه تغییر آنتروپی گاز چقدر است؟



شکل ۷-۵. مربوط به مثال حل شده ۳.

حل: چون دما ثابت است و انرژی درونی گاز کامل هم به دلیل وابستگی به دما که در اینجا ثابت است تغییر نمی‌کند می‌توان دریافت:

$$\Delta U = 0$$

و از قانون اول ترمودینامیک نوشت:

$$dU = dQ - dW$$

که

$$dQ = dW = P dV$$

آنگاه با توجه به رابطه

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

می‌توان نوشت:

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{P dV}{T}$$

که

$$PV = nRT \Rightarrow \frac{P}{T} = \frac{nR}{V} \Rightarrow \Delta S = nR \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = nR \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right)$$

که $V_f = 2V_i$ است. در نتیجه

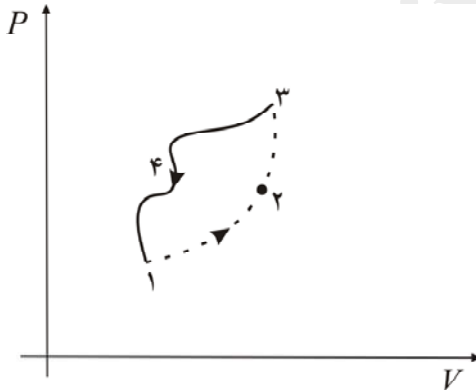
$$\Delta S = n R \ln 2$$

برای یک مول گاز کامل ($n = 1 \text{ mol}$) و با توجه به $R = 1,99 \frac{\text{cal}}{\text{K}}$ داریم:

$$\Delta S = 1,38 \frac{\text{cal}}{\text{K}}$$

۷-۷ مسائل

۱. تغییر آنتروپی را در دو فرآیند برگشت ناپذیر $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ و فرآیند برگشت پذیر $1 \rightarrow 4 \rightarrow 3$ را به طور تحلیلی بررسی کنید و با یکدیگر مقایسه نمایید.



شکل ۷-۶. مربوط به مسئله ۱.

۲. مقدار ۱۰۰ گرم آب ۴۰ درجه سانتی گراد را با ۱۰۰ گرم آب ۶۰ درجه سانتی گراد به طور هم فشار و بی دررو مخلوط می کنیم. تغییر آنتروپی را به دست آورید.

۳. از اصل آنتروپی ثابت کنید که قانون دوم ترمودینامیک با بیان:

(الف) کلونین - پلانک

(ب) کلاوسیوس برقرار است.

- (راهنمایی: بیان کلونین و ماکسول: ماشینی که در یک چرخه عمل می کند نمی تواند تمام گرما را بدون بر جای گذاشتن اثری در محیط اطرافش به کار تبدیل کند.

کلاسیوس: ماشینی که در چرخه‌ای عمل می‌کند نمی‌تواند گرما را از منبع سرد به منبع گرم ببرد بدون آن که اثر دیگری روی محیط بگذارد.)

۴. در یک تمرین زیمانسکی معتقد است که تغییر آنتروپی جهان برای جسمی با ظرفیت گرمایی ثابت C_p و دمای T_i در تماس با منبع گرم تر با دمای T_f است برابر است با

$$(\Delta S)_{universe} = c_p [x - \ln(1+x)]$$

که در آن $x = -\frac{T_f - T_i}{T_f}$ است و فشار جهان در مدت زمانی که جسم و منبع به دمای

تبادل می‌رسند ثابت است. ثابت کنید:

الف) نتیجه‌گیری زیمانسکی درست است.

ب) این تغییر آنتروپی مثبت است.

فصل هشتم

نورشناسی (هندسی)

۸-۱ مقدمه

وقتی به نور (شید) فکر می‌کنیم خودبه‌خود عظمت خورشید، مهشید (نور ماه) و جمشید (نور جام) در حافظه تاریخی، ادبی و در یک کلام علمی ما شکل می‌گیرد. نور با چه سرعتی حرکت می‌کند؟ از پرسش‌های بسیار داغ کهن بشر بوده است. تا جایی که آدمی به دلیل عدم شناخت کامل، خورشیدپرست، ستاره‌پرست و ماه‌پرست شده بود. انسان در غار مورد آزار سردی و تاریکی درون غار بوده است. در شب آتشی روشن می‌کند و آن گونه در باور یافتن ناجی خود غرق می‌شود که آتش خدای او می‌شود ولی پس از چند ساعتی، آتش می‌میرد و در صبح دم نوری همه جا را روشن می‌کند و خورشید خدای او می‌شود اما او نیز همواره تحت فرمانی بر مداری می‌گردد و روز هنگام پدیدار می‌شود و شب هنگام آدمی را با تاریکی شب به خود می‌سپارد.

این عبارات گفته شده است که بحث نور را از مباحث قدیمی بدانیم که گویی هیچ زمانی فرا نمی‌رسد تا کهنه گردد. یک روز اندازه‌های سرعت نور مورد بحث است و روزی دیگر روز موجی - ذره‌ای بودن آن. روزی بر همه آدمیان به یک سرعت می‌تابد و تبعیضی بین شمال، جنوب، شرق، غرب و سیاه و سفید نمی‌گذارد و روز دیگر در هر زمانی از فصلی پدیدار شود و با سرعتی ثابت بر ناظران خود می‌تابد. اما قبل از آن که برای پرسش‌های بالا پاسخی شایسته بیابند، همه آنها به نیکی تجربه کرده بودند که نور می‌تواند بر چیزی فشار آورد و این موضوع با چرخش پره‌های سیاه

جاذب نور تأیید شده بود و نتیجه آن شد که نور انرژی و تکانه دارد که در ادامه آنها را مورد بحث و موشکافی قرار می‌دهیم تا در کنار سیر تحولات مربوط به آنها به چگونگی اعمال فشار به وسیله نور پرداخته شود.

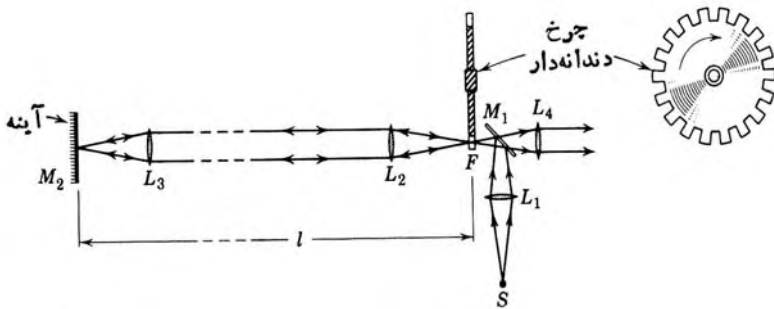
۸-۲ اندازه‌گیری سرعت نور

حتماً توجه کرده‌اید که در هنگام آذرخش نور خیلی زودتر از آن که صدای رعد شنیده شود، دیده می‌شود. یعنی نور خیلی سریع‌تر از صوت حرکت می‌کند و همین بالا بودن سرعت نور بود که اندازه‌گیری آن را مشکل ساخته بود. ایرانیان با رصدخانه‌ای که در مراغه بنا کرده بودند از پیشگامان مطالعه نور ستارگان و سیارات بوده‌اند اما گالیله شاید اولین کسی بود که در پی اندازه‌گیری سرعت نور دست به ابتکاری تازه زد. او و دستیارش با فانوس‌هایی که در دست داشتند در بالای دو تپه که حدود ۱۶۰۰ متر از یکدیگر فاصله داشتند رفتند و هر کدام فانوس خود را با پارچه‌ای پوشاندند. قرار بر این بود وقتی گالیله پارچه را از روی فانوس خود بر می‌دارد آنگاه دستیارش بلافاصله می‌بایست به محض آن که نور فانوس گالیله را رؤیت کند پارچه را از فانوس خود بردارد تا گالیله بتواند نور فانوس دستیار خود را ببیند و به عبارتی زمان رفت و برگشت نور را برآورد کند. هر چند گالیله با امکانات آن روز موفق به اندازه‌گیری سرعت نور نشد به دلیل آن که نور با سرعت بسیار زیادی که دارد فاصله $3200 = 2 \times 1600$ متری را به حدی سریع طی می‌کند که امکان اندازه‌گیری فاصله زمانی این اندازه کوتاه زمانی برای گالیله ممکن نشد. اما یک نتیجه حاصل شد و آن این که هر چند سرعت نور بسیار زیاد است اما بینهایت نیست. یعنی سرعت نور اندازه‌ای متناهی دارد و این نتیجه جرقه‌امیدی بود که دیگر پژوهشگران را واداشت تا حال که سرعت نور متناهی است و قابل اندازه‌گیری است تلاش کنند تا این مقدار متناهی سرعت نور را اندازه بگیرند.

پس از این نتیجه بود که در سال ۱۰۵۴/۱۶۷۵ در پاریس یک دانمارکی به نام غومه هنگام رصد قمرهای مشتری سرعتی برابر $2 \times 10^8 \text{ m/s}$ را برای نور به دست آورد و این البته دست آورد بزرگی بوده و به همین علت است که در دانمارک همواره با نیلز بوهر، هانس کریستین آندرسون (هوسی آندرسون) و ارستد نام غومه هم

می‌درخشد و جالب است بدانید که نیم قرن پس از وی سرعت نور برابر $3 \times 10^8 \text{ m/s}$ به وسیله جیمز برادلی انگلیسی به دست آمد. این سیر مطالعات و اندازه‌گیری سرعت نور ادامه داشت و تا فیزو و فوکوی فرانسوی که به ترتیب از چرخ دنده و آینه دوار استفاده کردند و زمان رفت و برگشت نور را برحسب $\theta = \omega t$ و یا $t = \frac{\theta}{\omega}$ به دست آوردند و در $x = V t$ و یا $2L = V t$ قرار دارند و سرعت نور V را به دست آوردند. از طرف دیگر مایکلسون و مورلی سعی نمودند تا در نقاط مختلف و در زمان‌های مختلف سرعت نور را اندازه‌گیری کنند و نتیجه کار آنها نشان داد که اندازه سرعت نور مستقل از زمان و مکان است و مقدار آن را در همه اندازه‌گیری‌ها یکسان بود. این باعث شد تا نابغه‌ای به نام آلبرت اینشتین بتواند یکی از فرضیه‌های مهم خود را ارائه کند. «سرعت نور برای همه ناظرها یکسان است».

مثال ۱: فیزو در سال ۱۸۴۹ با استفاده از یک چرخ دنده با ۷۲۰ دندانه که در شکل ۸-۱ نشان داده شده است، تلاش کرد تا آن را طوری بچرخاند که نور برگشتی به دندانه بعدی بخورد و دیده نشود. برای این کار به تجربه دریافت که اگر چرخ دندانه با سرعت ۱۲ دور بر ثانیه بچرخد انگار نور قادر است تا به آینه‌ای که در فاصله ۸٫۶۳ کیلومتری است بتابد و برگردد و به دندانه‌ای که با $\frac{1}{1440}$ دور چرخیده است بخورد و دیده نشود. حال با این اوصاف سرعت نوری که فیزو به دست آورده است را به دست آورید.



شکل ۸-۱. مربوط به مثال ۱.

$$\theta = \omega t \Rightarrow t = \frac{\theta}{\omega} \approx \frac{1}{12} \frac{1440}{12} = 5,78 \times 10^{-5} \text{ s}$$

حل:

آنگاه دیدیم که

$$x = Vt$$

و یا

$$2L = V t \Rightarrow V = \frac{2L}{t} = \frac{2 \times 18630}{1440 \times 12} \approx 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

۳-۸ سرعت نور از نگاه ناظرهای متفاوت

وقتی به یک مثال ساده کلاسیکی توجه می‌کنیم آنگاه تصور می‌شود که سرعت نور مطابق با این قاعده می‌بایست تغییر کند. در این مثال قطاری را فرض کنید که با سرعت ثابت u نسبت به ایستگاهی روی یک مسیر مستقیمی در حرکت است و شخصی درون قطار و در امتداد قطار با سرعت ثابت V نسبت به قطار حرکت می‌کند. اگر جهت سرعت قطار و شخص یکسان باشد آنگاه سرعت شخص نسبت به شخص ناظر در ایستگاه قطار برابر است با

$$w = u + V \quad (1-8)$$

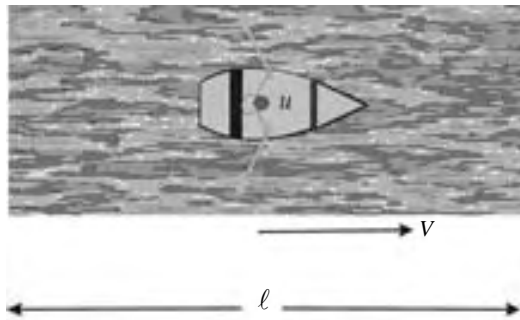
و اگر شخصی در خلاف جهت حرکت قطار حرکت کند آنگاه سرعت شخص نسبت به ایستگاه قطار برابر با

$$w' = u - V \quad (2-8)$$

است. اکنون این پرسش مطرح می‌شود که اگر چشمه نوری با سرعت u_1 گسیل کند و شخص با سرعت u_2 به سمت این چشمه نوری ثابت حرکت کند، سرعتی مطابق روابطهای (۱-۸) و (۲-۸) خواهد داشت که متفاوت با سرعتی خواهد بود که در هنگام دور شدن او از چشمه نور ثابت به دست می‌آید. بنابراین بسته به این که شخص در چه جهتی در حرکت باشد سرعت‌های متفاوتی را به دست می‌آورد.

برای آن که به نقش جهت سرعت و یا دور یا نزدیک شدن چشمه و ناظر به یکدیگر پی ببریم مثال زیر را مطرح می‌کنیم.

مثال ۲: شخصی قایق خود را با سرعت ثابت u ابتدا در جهت جریان آب (با سرعت V) و سپس با همان سرعت در خلاف جهت جریان آب پارو می‌زند و فاصله l را در امتداد رودخانه می‌رود و بر می‌گردد. زمان کل رفت و برگشت او را به دست آورید.



شکل ۸-۲. مربوط به مثال ۲.

حل: در شکل ۸-۲ زمانی که قایق طول l را با سرعت $u + V$ طی می‌کند:

$$t_1 = \frac{l}{u + V}$$

و در هنگام برگشت، زمان لازم تا نقطه شروع حرکت برابر با

$$t_2 = \frac{l}{u - V}$$

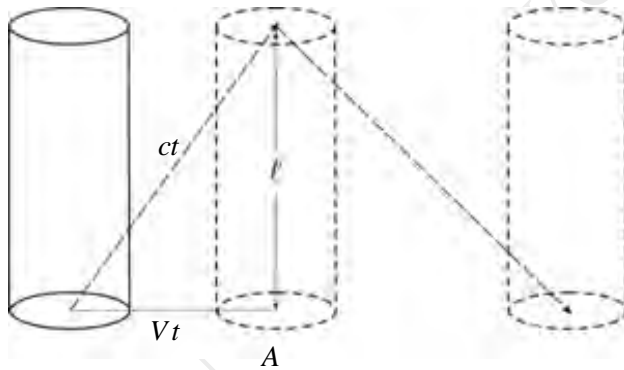
می‌باشد که کل زمان رفت و برگشت را می‌توان با جمع زمان‌های t_1 (زمان رفت) و t_2 (زمان برگشت) به دست آورد:

$$t = t_1 + t_2$$

$$t = l \left(\frac{1}{u + V} + \frac{1}{u - V} \right)$$

$$t = \frac{\gamma \ell u}{u^2 - V^2} = \frac{\frac{\gamma \ell}{u}}{1 - \left(\frac{V}{u}\right)^2} \quad (3-8)$$

مثال ۳: اکنون فرض کنید در انتهای استوانه قائمی به طول ℓ در شکل ۳-۸ آینه‌ای قرار دارد و نور مطابق شکل به مرکز آینه می‌تابد و بازتاب می‌یابد. در حین رفت و برگشت نور، خود استوانه با سرعت ثابت V در جهت افق به سمت راست جابجا می‌شود. زمان رفت و برگشت نور را به دست آورید.



شکل ۳-۸. زمان رفت و برگشت نور در حین جابه‌جایی افقی استوانه.

حل: در مثلث OAB داریم:

$$(OB)^2 = (OA)^2 + (AB)^2$$

$$c^2 t^2 = V^2 t^2 + \ell^2$$

$$\ell^2 = (c^2 - V^2) t^2 \Rightarrow t = \frac{\frac{\ell}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

زمان رفت و برگشت دو برابر زمان بالا است پس

$$T = \frac{\frac{2\ell}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \quad (4-8)$$

با مقایسه دو مثال بالا انتظار می‌رود که جهت سرعت‌ها (فرض کنید در اولی از لحاظ کلاسیکی نور و ناظر هم‌جهت و در خلاف جهت هم حرکت می‌کنند و زمان کل برابر رابطه (۳-۸) است نقش اساسی را دارند.

اما بنا به اصلی که انیشتین مطرح نمود، سرعت نسبی چشمه و ناظر هر چه باشد اندازه سرعتی که برای نور به دست می‌آید یکسان است. اما چگونه می‌توان این تغییر جهت چشمه و ناظر را لحاظ کرد. باید به سراغ رابطه سرعت نور با بسامد (ν) و طول موج (λ) رفت و می‌دانید که برای نوری با سرعت c می‌توان به رابطه مهم زیر اشاره نمود:

$$\lambda = \nu T = \frac{c}{\nu} \quad (5-8)$$

و یا

$$c = \nu \lambda \quad (6-8)$$

از رابطه (۶-۸) می‌توان دریافت که هرگونه تغییری در سرعت نسبی چشمه و ناظر باشد خواه از هم دور شوند و خواه به هم نزدیک گردند سرعت نور $c = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$ است و تنها بسامد و طول موج تغییر می‌کند. یعنی ν و λ طوری با یکدیگر تغییر می‌کنند که حاصلضرب آنها بدون تغییر می‌ماند و این همان اثر دوپلر است که به تغییرات انتقالی بسامد دوپلر ν معروف است و رابطه بین بسامدها را به دست می‌دهد. البته می‌توان از مثال قایق و آب بطور مشابه استفاده کرد و با در نظر گرفتن $T = \frac{1}{\nu}$ و $\lambda = \ell = (u - V)t$ نوشت.

$$\nu = \frac{\nu}{\lambda} = \frac{u}{(u - V)t} = \nu_0 \frac{u}{u - V}$$

بنابراین وقتی چشمه به ناظر نزدیک می‌شود بسامد انتقال دوپلری به صورت رابطه زیر تغییر می‌کند:

$$v = v_0 \left(\frac{u}{u - V} \right) \quad (7-8)$$

به همین روش می‌توان رابطهٔ بسامد انتقال دوپلری را در هنگام دور شدن چشمه از ناظر به دست آورد:

$$v = v_0 \left(\frac{u}{u + V} \right) \quad (8-8)$$

که V سرعت چشمه و u سرعت انتشار موج است. در بالا چشمه متحرک و ناظر ثابت فرض شده بود. حال اگر چشمه ثابت ($V = 0$) باشد و ناظر با سرعت u' به چشمه که با سرعت u موجی گسیل می‌دارد نزدیک شود آنگاه

$$t = \frac{\ell}{u' + v} \Rightarrow \frac{1}{v} = \frac{\ell}{u' + V}$$

$$v = \frac{u' + v}{\ell} = \frac{u' + V}{V t} = \frac{u' + V}{V} v_0$$

پس تغییر بسامد دوپلری در هنگام نزدیک شدن ناظر به چشمه برابر است با

$$v = v_0 \frac{u + u'}{u} \quad (9-8)$$

و نیز در هنگام دور شدن ناظر از چشمه برابر است با

$$v = v_0 \frac{u - u'}{u} \quad (10-8)$$

بنابراین انتقال بسامد موج دریافتی با سرعت نسبی چشمه و ناظر به صورت رابطهٔ زیر تغییر می‌کند:

$$v = v_0 \left(\frac{u \pm u'}{u \mp V} \right) \quad (11-8)$$

در رابطه (۸-۱۱) به ترتیب u و u' و V سرعت انتشار امواج، سرعت حرکت ناظر و سرعت حرکت چشمه است. V بسامد موجی است که ناظر ساکن دریافت می‌کند و V بسامد تغییر یافته ای است که با سرعت نسبی چشمه و ناظر تغییر می‌کند. در مجموع با نزدیک شدن آنها شاهد افزایش بسامد و با دور شدن آنها شاهد کاهش بسامد هستیم.

مثال استوانه و نور نکته‌ای را متوجه ما می‌سازد که به یاد بسامد دوپلری در نظریه نسبیت انیشتین باشیم و در اینجا می‌بایست رابطه

$$v = v_0 \frac{1 \mp \frac{u}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}} \quad (8-12)$$

را به کاربرد که علامت - برای دور شدن چشمه و ناظر و علامت + برای نزدیک شدن چشمه و ناظر نسبت به هم به کار می‌رود. به عبارت دیگر رابطه (۸-۱۱) برای امواج مکانیکی و رابطه (۸-۱۲) برای امواج الکترومغناطیس کاربرد دارد.

خودآزمایی ۱: حتماً شنیده‌اید که می‌گویند یک هواپیما دیوار صوتی را شکسته است. معنی این عبارت چیست؟

حل: وقتی هواپیمای سرعت بالا مثل فانتوم (شباهنگ) و یا میراژ (سراب) با سرعتی برابر و یا بیشتر از سرعت صوت حرکت کند، یک موج نوک تیز، مانند نوک سطح مخروطی ایجاد می‌کند.

برای درک بیشتر اجازه دهید حرکت قایق در سطح آب را مثال بزنیم. دیدید وقتی سنگریزه‌ای در آب فرو می‌افتد سطوح دایره‌ای به مرکز محل سقوط سنگریزه ایجاد می‌شوند و دور می‌شوند. حال اگر قایقی بر روی آب شناور باشد سطوح دایره‌ای مشابهی را شاهد خواهید بود که با سرعت v نسبت به محل قایق دور می‌شوند. حال اگر قایق در یک جهت مثلاً جهت شرق حرکت کند و اگر سرعت u آن از سرعت V کمتر باشد مسیرهای دایره‌ای کمی دستخوش تغییر می‌شود در حالی که سرعت آن بیشتر از سرعت

V باشد آنگاه دایره‌ها در سمت شرق کشیده می‌شوند و به صورت مخروطی که محور آن در جهت شرق است در می‌آیند و نوک مخروط سرعت زیادی دارد.

اکنون به جای قایق هواپیمای سرعت بالا را در نظر بگیرید که سرعت آن بیشتر از سرعت امواج ایجاد شده در هوا (سرعت صوت) است بالطبع سطحی مخروطی را به وجود می‌آورد که نوک مخروط انرژی بالایی دارد و می‌تواند فشار زیادی را به هر نقطه‌ای که می‌رسد وارد کند و حتی قادر است شیشه‌های منازل را بشکند. این غرش صوتی که هواپیما در رأس مخروط است باعث خسارت زیادی به ویژه هنگام جنگ می‌شود و برای این که نیروی مزبور بر نیروی پیوستگی بین شیشه‌های منازل فائق نیاید با زدن چسب نواری مناسب مقاومتی در قبال نیروی غرشی صوتی به وجود می‌آورند. این را به صورت عبارت زیر هم بیان می‌کنند: «هواپیما دیواره صوتی را شکسته است.»

مثال ۴: پدری می‌خواهد سوتی را از دست کودک بازیگوش خود بگیرد. همین که پدر به کنار میدان دایره‌ای به شعاع ۲۰ متری می‌رسد کودک در حالی که با سرعت $0.1 \frac{rad}{s}$ می‌دود، مدام سوت خود را با بسامد ۵۰۰ هرتز به صدا در می‌آورد و پدر در جای خود می‌ایستد. تعیین کنید بیشینه و کمینه بسامد صوتی که پدر می‌شنود چقدر است؟
حل: در اینجا ناظر ساکن است و می‌توان بیشینه و کمینه بسامد را به ترتیب از $(\lambda - \lambda)$ و $(\lambda + \lambda)$ به دست آورد.

در اینجا $v_0 = 500 \text{ Hz}$ و سرعت خطی چشمه صوت برابر است با

$$V = r \omega = 20 \times 0.1 = 2 \frac{m}{s}$$

و سرعت صوت هم برابر $\frac{340}{s} m$ است. بنابراین

$$v_{\max} = v_0 \frac{u}{u - V} = 500 \times \frac{340}{340 - 2} \approx 503 \text{ Hz}$$

و

$$v_{\min} = v_0 \frac{u}{u + V} = 500 \times \frac{340}{340 + 2} \approx 497 \text{ Hz}$$

مثال ۵: خفاش‌ها قادر به دیدن چیزی نیستند. آنها تنها با گسیل موج‌های فراصوت و دریافت پژواک آن پی به موانع و یا یافتن محل شکارشان می‌برند. فرض کنید خفاشی پدر با سرعت 25 m/s در جهتی در حرکت است صوتی با بسامد 40000 Hz در جهت حرکتش گسیل کند. خفاش مادر که با سرعت 10 m/s به سمت جفت خود (در جهت حرکت اولی) در حرکت است این موج را دریافت می‌کند. خفاش مادر چه بسامد صوتی را دریافت کرده است؟

حل: در اینجا هم چشمه و هم ناظر در حرکتند. خفاش پدر نقش چشمه و خفاش مادر نقش ناظر را باز می‌کند و این دو به هم نزدیک می‌شوند. بنابراین می‌بایست از رابطه (۸-۱۱) استفاده کرد:

$$v = v_0 \frac{u + u'}{u - v}$$

که

$$v_0 = 40000 \text{ Hz}, \quad u = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

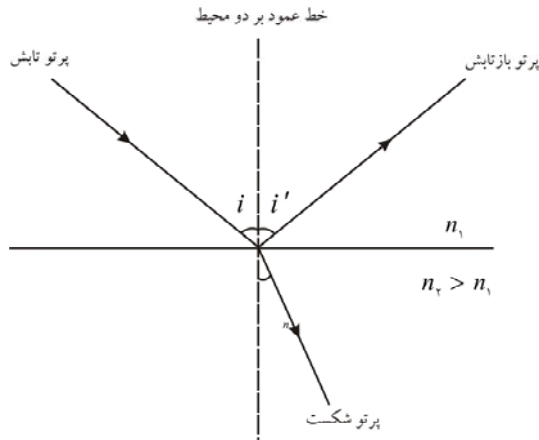
$$u' = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad u = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v = 40000 \times \frac{340 + 10}{340 - 25} \approx 44444 \text{ Hz}$$

۴-۸ رفتار نور در عبور از محیط‌های متفاوت

نور در خلاء بالاترین سرعت را داراست چون از نوع امواج الکترومغناطیسی است. این امواج وقتی به مانعی برخورد می‌کنند یا کاملاً عبور می‌کنند و یا قسمتی از آن بازتاب یافته و مابقی جذب و یا عبور می‌کنند. جدای از این موانع چگونگی سطح مانعی که در برابر نور قرار می‌گیرد دارای اهمیت است. ممکن است مانند آینه تخت سطحی صاف و هموار داشته باشد و یا همانند آینه‌های خمیده به صورت آینه‌های کروی کاو و کوژ قرار گیرد و همینطور ممکن است به شکل‌های غیرهندسی ظاهر شوند. جدای از آن مایعاتی مثل آب هستند که قادرند نقش آینه‌های تخت را بازی کنند و به اصطلاح دیوپتر هستند.

در ابتدا باریکه نوری را در نظر می‌گیریم که به طور مایل از هوا با ضریب شکست n_1 (ضریب شکست نسبت سرعت نور در خلاء به سرعت نور در محیط مادی

و برابر با $n = \frac{c}{V}$ است) وارد محیطی با ضریب شکست بالاتر n_2 می‌شود. مطابق شکل ۴-۸ می‌توان دو قانون معروف بازتابش و شکست نور (قانون اسنل - دکارت) را نوشت.



شکل ۴-۸. بازتابش و شکست نور در هنگام عبور نور از یک محیط به محیطی دیگر با $n_2 > n_1$.

قوانین بازتابش نور:

۱- زاویه تابش با زاویه بازتابش برابر است یعنی

$$i = i' \quad (۱۳-۸)$$

۲- پرتو تابش، پرتو بازتابش و خط عمود بر دو محیط در یک صفحه‌اند.

قوانین شکست نور:

۱- پرتو تابش، پرتو شکست و خط عمود بر دو محیط در یک صفحه قرار دارند.

۲- نسبت سینوس زاویه تابش به سینوس زاویه شکست متناسب با عکس ضریب

شکست‌های دو محیط است:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} \quad (۱۴-۸)$$

خودآزمایی ۲: بازتابش کلی و پدیده سراب چه موقع اتفاق می‌افتند؟ توضیح دهید.

۸-۴-۱ محیط پاشنده و غیرپاشنده

اشاره شد که محیط می‌تواند در برابر نور شفاف باشد و آن را به خوبی عبور دهد. اما گاهی به جسمی مثل منشور برخورد می‌کنید که نور رسیده را به صورت طیفی از رنگ‌ها و یا نورهایی در ترکیبش تجزیه می‌کند که در ادامه علت رفتار متفاوت شیشه و منشور را بیان می‌کنیم.

در مجموع دیدید که برای نور می‌توان رابطه بین بسامد، طول موج و سرعت نور را به صورت $c = \lambda v$ نوشت و یا برای هر موج الکترومغناطیسی با سرعت V چنین نوشت:

$$V = v\lambda = \frac{\lambda}{2\pi} \times 2\pi v \quad (۱۵-۸)$$

$$V = \frac{\omega}{k}$$

که k را عدد موج می‌گویند و سرعت در رابطه فوق را سرعت فاز V_{ph} می‌گویند:

$$v_{Ph} = \frac{\omega}{k} \quad (۱۶-۸)$$

اما خواندید که در مورد موج‌ها به جای سرعت فاز V_{ph} باید سرعت گروه V_{gr} را به کار برد: (چرا؟)

$$V_{gr} = \frac{d\omega}{dk} \quad (۱۷-۸)$$

و یا

$$d\omega = V_{gr} dk$$

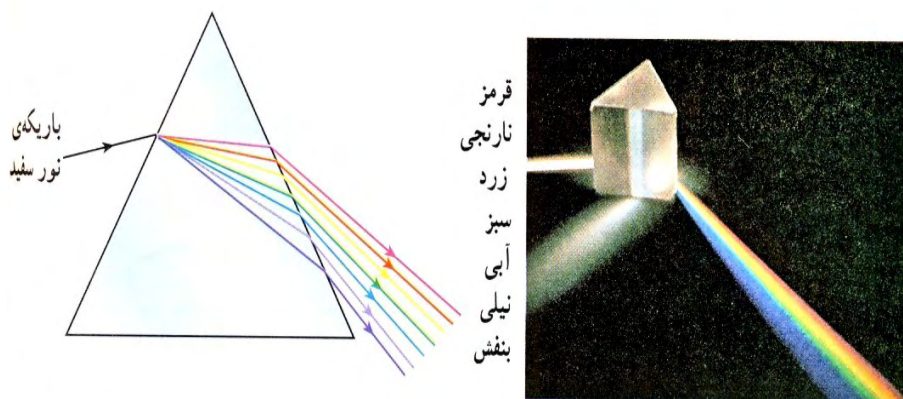
اکنون اگر رابطه بین بسامد (ω) و عدد (یا بردار) موج k خطی باشد:

$$\omega = ak$$

$$\frac{d\omega}{dk} = a = \text{const}$$

و به این نوع محیط که رابطه خطی بین ω و k برقرار است، محیط غیر پاشنده می‌گویند و مثال بارز آن شیشه است که نور عمودی را به خوبی عبور می‌دهد و آن را به رنگ‌هایی از بنفش تا قرمز تجزیه نمی‌کند اما اگر رابطه بسامد با بردار موج یک رابطه خطی نباشد و حاصل $\frac{d\omega}{dk}$ یک مقدار ثابت نباشد آنگاه محیط را پاشنده می‌گویند و همانطور که در مورد منشور شیشه‌ای دیدید، منشور می‌تواند نور را مطابق شکل ۵-۸ به رنگ‌هایی تجزیه کند که چشم قادر است تقریباً ۷ رنگ آن را از هم تمیز دهد.

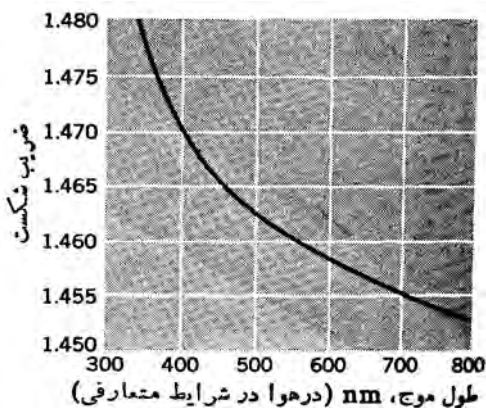
برای این که تغییر ضریب شکست با طول موج را هم دنبال کنید بدون توضیح زیادی به یک نمونه که در حالیدی برای ضریب شکست کوارتز شیشه‌ای نسبت به خلاء در شکل ۶-۸ ترسیم شده است توجه کنید.



شکل ۵-۸. تجزیه طیف نور سفید به اجزاء تشکیل دهنده آن.

وقتی طول موج‌های بالاتر را در شرایط متعارفی در نظر می‌گیرید شاهد پایین‌تر بودن ضریب شکست آن هستید که همین موضوع باعث تجزیه نوری مانند نور سفید به

رنگ‌های قرمز، نارنجی و ... می‌شود. همچنین می‌توانید برای برخی دیگر از مواد که ضریب شکست آنها در جدول (۸-۱) آمده است نمودار تغییرات طول موج با ضریب شکست را برای نور مرکبی تحقیق کنید.



شکل ۸-۶. ضریب شکست کوارتز شیشه‌ای نسبت به خلأ.

جدول ۸-۱. ضریب شکست مواد (برای طول موج ۵۸۹ nm)

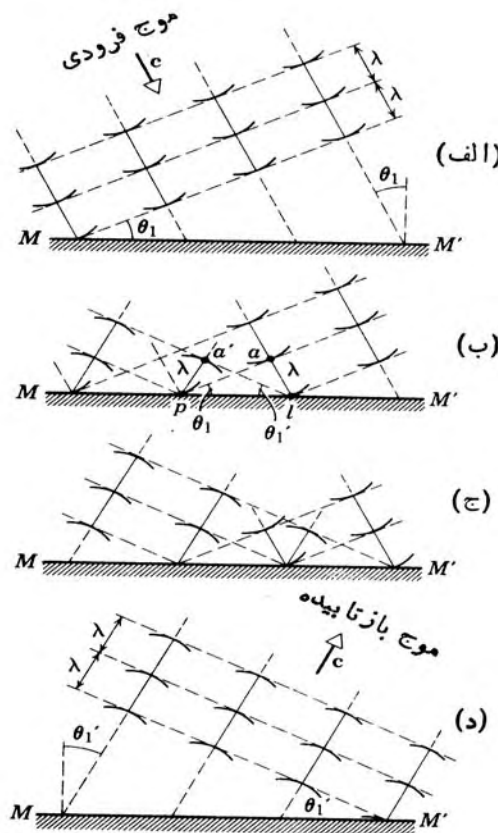
ضریب شکست	محیط
۱,۳۳	آب
۱,۳۶	اتیل الکل (کربن بی سولفیت)
۱,۰۰۰۳	هوا (۱ اتمسفر و $20^{\circ}C$)
۱,۷۴	متیلن یدید
۱,۴۶	کوارتز شیشه‌ای
۱,۵۲	شیشه کراون
۱,۶۶	شیشه فلنیت
۱,۵۳	سدیم کلرید

۸-۴-۲ اصل هویگنس

نه تنها می‌توان قوانین بازتابش و شکست را با ردیفی از ذرات نور تحقیق کرد بلکه با موج در نظر گرفتن نور هم می‌توان به آن رسید. اکنون موجی با طول موج λ را در نظر بگیرید که موج در هنگام عبور از روزنه‌ای با ابعادی در حدود اندازه طول موج λ به

صورت نیم کره‌ای در آن طرف روزنه ظاهر می‌شود. آنگاه هر نقطه روی این جبهه موج به صورت یک چشمه در ایجاد موجک‌های کروی بعدی عمل می‌کند و آنگاه نقطه‌های واقع بر جبهه‌های موج جدید موجک‌های کروی دیگر را در جلوی خود تولید می‌کنند و همانند شکل ۷-۸ موجک‌های جدید و جدیدتری تولید می‌شوند.

اما هر لحظه موجک‌هایی که ایجاد می‌شوند به یک صفحه می‌رسند و مطابق با شکل ۷-۸ یک موج تخت را تشکیل می‌دهند که این قضیه به اصل هویگنس معروف است. در واقع موج تخت را باید ساده‌ترین نمونه یک موج سه بعدی دانست. موجی که در آن نقاط بر صفحه و یا به عبارتی آشفتگی بر صفحه تخت قرار می‌گیرد و سطحی با فاز ثابت را تشکیل می‌دهد.



شکل ۷-۸. اصل هویگنس در مورد بازتابش موج.

بطور خلاصه، اصل هویگنس را می‌توان چنین بیان کرد: تمام نقاط واقع بر یک جبهه موج، چشمه‌های تولید کننده موجک‌های کروی بعدی هستند که موقعیت جبهه موج سطحی جدید، پس از مدتی مماس بر مکان تولید موجک‌های جدیدتر می‌شوند. با توجه به دو موضوع شکست نور و اصل هویگنس می‌توان مسیر مستقیم نور را نشان دهنده ذره‌ای بودن آن و تداخل و پراش (که در فصل‌های بعد به بررسی آنها خواهیم پرداخت) را نمایانگر موجی بودن نور دانست که این دو ویژگی ذره‌ای-موجی بودن نور را می‌توان به وسیله اصل مکملیت با رابطه دوبروی به هم مربوط کرد:

$$P = \frac{h}{\lambda} \quad (18-8)$$

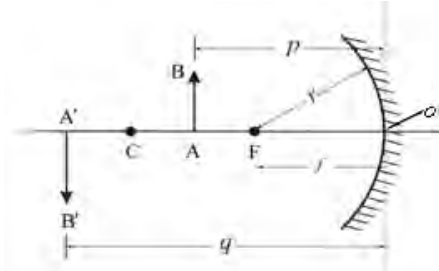
که در آن P تکانه خطی ذره نور و λ طول موج آن است که با ثابت پلانک $h = 6.63 \times 10^{-34}$ J.s به هم مرتبط شدند.

۸-۵ آینه‌های کروی

در آینه تخت اندازه تصویر با اندازه جسم برابر بود و همچنین فاصله جسم تا آینه تخت (p) برابر فاصله تصویر تا آینه تخت (q) است که بزرگنمایی (G) در آینه تخت که نسبت اندازه تصویر به اندازه جسم است برابر یک است. تصویر در آینه تخت حقیقی نیست (مجازی است). اما در آینه‌های خمیده که قسمتی از یک سطح کروی هستند و بسته به این که قسمت داخلی آن نقش آینه را باز می‌کند (آینه کاو) و یا قسمت بیرونی آن (آینه کوژ)، تصویری به دست می‌دهند که تفاوت بسیار زیادی با شیوه تشکیل تصویر در آینه تخت دارد. آینه کروی کاو شعاع کره (r) که فاصله مرکز کره (c) تا رأس آینه (o) است دو برابر فاصله کانونی (f) آینه می‌باشد. در واقع نقطه کانونی (F) در این آینه محل تلاقی بازتابش پرتوهای موازی با محور آینه است که در شکل ۸-۸ نشان داده شده است.

در مقاطع پایین‌تر تا حدود زیادی با ویژگی این آینه‌ها آشنا شدید و ما در اینجا رابطه بین p و q را با f نشان می‌دهیم:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad (19-8)$$



شکل ۸-۸. تعیین نقطه کانونی در آینه کاو.

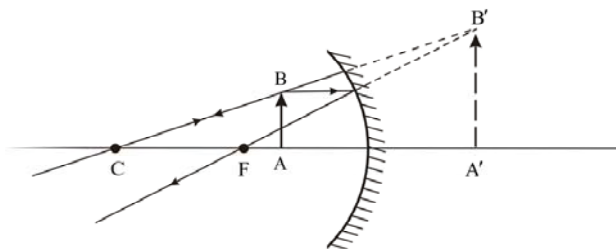
که فاصله کانونی f در آینه‌های کاو مثبت و در آینه‌های کوژ منفی است. همچنین چنانچه تصویر در جلوی آینه تشکیل شود $q > 0$ (حقیقی) است در حالیکه برای تصاویر درون آینه $q < 0$ (مجازی) است.

از طرف دیگر چنانچه پرتوهای بازتابیده از آینه کروی به خوبی در یک نقطه به نام کانون آینه متمرکز نشوند بسته به نوع قرارگیری محل رسیدن پرتوهای بازتابیده به محور آینه شاهد ابیراهی کروی خواهیم بود.

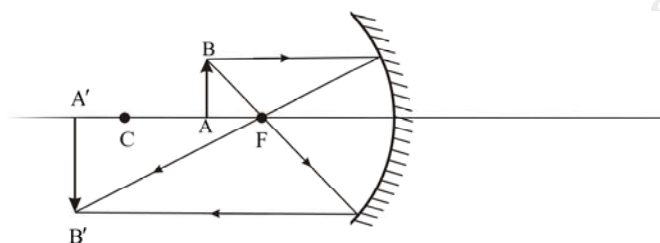
برای این که توضیح و تفسیر درباره منفی یا مثبت بودن تصاویر f ، p و q به درازا نکشد رابطه (۱۹-۸) را به صورت چگونگی تشکیل چندین تصویر در آینه‌های کاو و کوژ بسته به محل قرارگیری جسم نسبت به آینه که در شکل‌های ۸-۹ تا ۸-۱۲ آمده است.

$$\pm \frac{1}{p} \pm \frac{1}{q} = \pm \frac{1}{f} \quad (20-8)$$

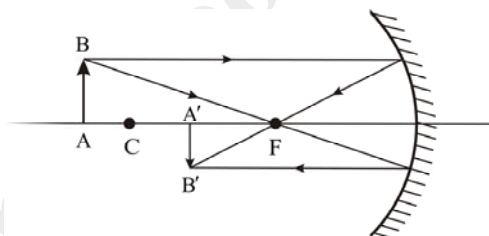
می‌نویسیم و یادآور می‌شویم که در صورت مجازی بودن کانون، شیء و تصویر مقادیر f ، p و q علامت منفی به خود می‌گیرند و گرنه علامت آنها مثبت است.



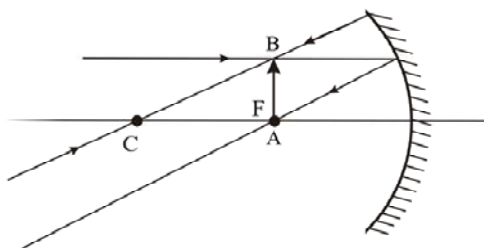
شکل ۸-۹. تعیین تصویر در حالتی که شیء در فاصله کانونی قرار دارد.



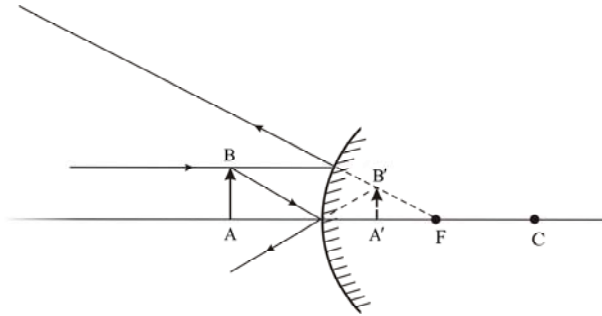
شکل ۸-۱۰. شیء در فاصله بین F و C .



شکل ۸-۱۱. شیء در خارج از C .

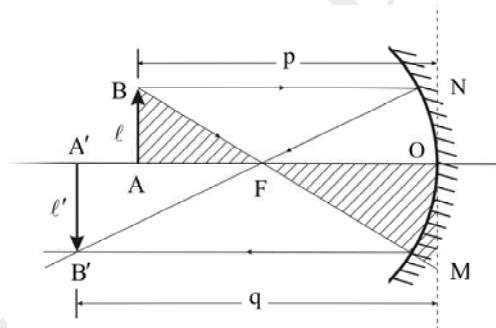


شکل ۸-۱۲. شیء در نقطه f .



شکل ۸-۱۳. شیء در جلو آینه کوز.

مثال ۶: آینه کاو شکل ۸-۱۳ را در نظر بگیرید و رابطه (۸-۱۹) را به دست آورید. سپس بزرگنمایی را برحسب فاصله جسم تا آینه (p) و فاصله تصویر تا آینه (q) مشخص کنید.



شکل ۸-۱۴. تصویر جسم AB در فاصله q بطور معکوس و حقیقی تشکیل شده است و اندازه تصویر $A'B'$ بزرگتر از اندازه جسم AB است.

حل: از تشابه دو مثلث هاشور خورده FOM و ABF می توان نوشت:

$$\frac{AB}{OM} = \frac{AF}{OF}$$

$$\frac{AB}{OM} = \frac{p-f}{f}$$

به همین شکل عمل می کنیم و از تشابه دو مثلث $A'B'F$ و NOF داریم:

$$\frac{A'B'}{ON} = \frac{A'F}{OF}$$

$$\frac{A'B'}{ON} = \frac{q-f}{f}$$

اما با توجه به شکل داریم:

$$ON = AB, \quad OM = A'B'$$

بنابراین

$$\frac{AB}{OM} = \frac{ON}{A'B'} \Rightarrow \frac{p-f}{f} = \frac{f}{q-f}$$

و از آنجا

$$f^2 = (p-f)(q-f) = pq - pf - qf + f^2 \Rightarrow pq = (p+q)f$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{p+q}{pq} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

و در نتیجه می‌توان رابطه مهم زیر را نوشت:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

بزرگنمایی هم نسبت اندازه تصویر به اندازه جسم است:

$$G = \frac{A'B'}{AB} = \frac{OM}{AB} = \frac{f}{p-f}$$

$$f = \frac{pq}{p+q} \Rightarrow p-f = p - \frac{pq}{p+q} = \frac{p^2 + pq - pq}{p+q}$$

$$p-f = \frac{p^2}{p+q}$$

$$\frac{f}{p-f} = \frac{\frac{pq}{p+q}}{\frac{p^2}{p+q}} = \frac{q}{p}$$

بنابراین می‌توان بزرگنمایی آینه را به صورت رابطه مهم زیر هم نوشت:

$$G = \frac{q}{p} \quad (۲۱-۸)$$

۸-۶ عدسی‌های نازک (محیط‌های کروی شفاف)

عدسی‌ها محیط‌های کروی شفاف هستند که تشکیل تصاویر در آنها بر اساس شکست نور است. عدسی‌ها دارای دو کانون f و f' هستند. اگر از ضخامت لایه بین دو سطح کروی تشکیل دهنده عدسی صرف‌نظر شود به اینگونه عدسی‌ها، عدسی‌های نازک گفته می‌شود و چنانچه نتوان از ضخامت لایه چشم پوشی کرد، این عدسی‌ها را عدسی‌های ضخیم می‌نامند. رابطه آشنای عدسی‌های نازک را می‌توان به صورت رابطه زیر نوشت:

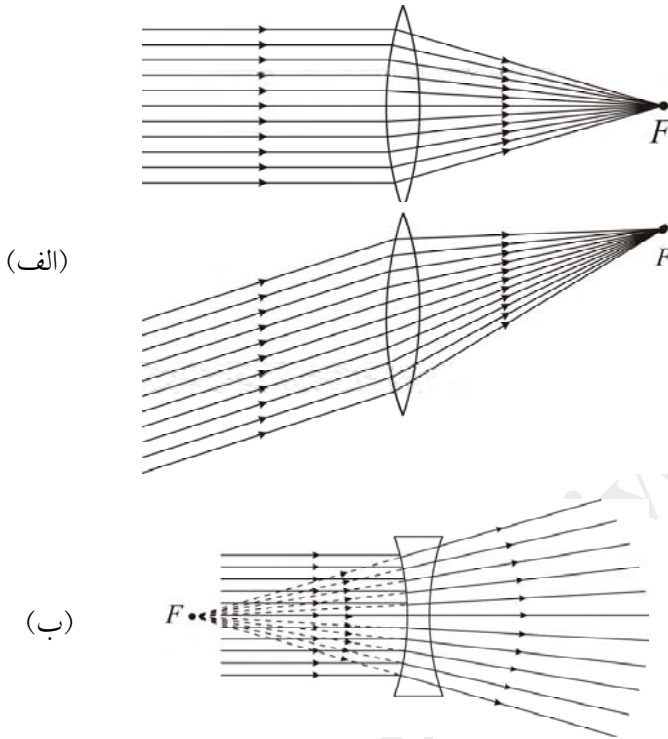
$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\pm \frac{1}{R_1} \pm \frac{1}{R_2} \right) \quad (۲۲-۸)$$

که n ضریب شکست عدسی، R_1 و R_2 شعاع انحنای دو سطح خمیده کروی تشکیل دهنده عدسی هستند. از طرفی همانطور که در شکل ۸-۱۵ دیده می‌شود عدسی‌ها می‌توانند همگرا شکل ۸-۱۵ (الف) و یا واگرا شکل ۸-۱۵ (ب) باشند که دلیل نامگذاری آنها را می‌توان به همگرا یا واگرا نمودن پرتوهای عبوری از عدسی‌ها نسبت داد. علامت منفی در پشت R_1, R_2 مربوط به زمانی است که سطوح خمیده یا کروی عدسی‌ها کاو و یا مقعر باشند و در صورت محدب بودن سطوح مقادیر R_1, R_2 علامت مثبت به خود می‌گیرند.

مثال ۷: فاصله کانونی یک عدسی دو کوژ (محدب الطرفین) با شعاع انحنای ۵۰ سانتیمتر در هر طرف و ضریب شکست ۱٫۵ را به دست آورید. آنگاه چنانچه جسمی در فاصله ۲۰ سانتی‌متری این عدسی واقع شده باشد، بزرگنمایی و موقعیت تصویر را مشخص کنید.

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} &= (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \\ &= (1.5-1) \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{50} \right) = 0.5 \left(\frac{2}{50} \right) = \frac{1}{50} \Rightarrow f = 50 \text{ cm} \end{aligned}$$

حل:



شکل ۸-۱۵. الف) عدسی‌های همگرا، ب) عدسی واگرا.

اکنون جسم در فاصله ۲۰ سانتی‌متری رأس عدسی قرار دارد یعنی بین کانون و رأس عدسی، بنابراین می‌توان فاصله تصویر از رأس عدسی را به دست آورد:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \Rightarrow \frac{1}{50} = \frac{1}{20} + \frac{1}{q} \Rightarrow q = 30.3 \text{ cm}$$

از طرفی

$$G = \frac{q}{p} = \frac{30.3}{20} = 1.5$$

بنابراین تصویر در جایی بین محل قرارگیری جسم و کانون عدسی تشکیل شده است و به دلیل مثبت بودن بزرگنمایی، یک تصویر مستقیم با بزرگی سه برابر جسم و به صورت حقیقی شکل گرفته است.

خودآزمایی ۳: در صورتی که عدسی در مثال قبلی دو کاو (مقعر الطرفین) بود آنگاه نتیجه چه می‌شد؟

۷-۸ مثال‌های حل شده

۱. شخصی از چراغ قرمز عبور می‌کند و به وسیله پلیس جریمه می‌شود. این شخص هنگام جریمه شدن معترض است که چراغ سبز بوده است و او مرتکب خطایی نشده است. پلیس در پاسخ به راننده معتقد است که این تغییر دیدن رنگ چراغ به دلیل سرعت بسیار بالای اتومبیل و خیالی است. به نظر شما حق با پلیس است یا راننده اتومبیل؟
حل: در اینجا چشمه ساکن است و ناظر به چشمه نزدیک می‌شود. بنابراین

می‌توان از رابطه (۸-۹) استفاده کرد:

$$v = v_0 \frac{u + u'}{u}$$

و چون $c = v\lambda$ است می‌توان رابطه را برحسب طول موج نیز نوشت یعنی

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\lambda_0} \times \frac{c + u'}{c} \Rightarrow \lambda = \lambda_0 \frac{c}{c + u'}$$

طول موج نور قرمز و $\lambda_0 = 620 \text{ nm}$ و $\lambda = 540 \text{ nm}$ طول موج نور سبز و u' سرعت اتومبیل است

$$540 = 620 \times \frac{3 \times 10^8}{3 \times 10^8 + u'} \Rightarrow u' = 4,44 \times 10^7 \frac{m}{s}$$

سرعت اتومبیل برابر $\frac{m}{s} 4,44 \times 10^7$ است که کاملاً حق با پلیس است. (چنین اتومبیلی چه موقع ساخته خواهد شد؟!)

۲. رابطه (۸-۱۱) را دوباره در نظر بگیرید. حال چارچوبی را در نظر بگیرید که به زمین متصل است و محیط با سرعت u_m نسبت به این چارچوب از چشمه به طرف ناظر حرکت می‌کند. در این حالت نشان دهید که رابطه (۸-۱۱) به رابطه زیر تعمیم می‌یابد:

$$v = v_0 \left(\frac{u + u_m \pm u'}{u + u_m \mp u''} \right)$$

حل: فرض کنید ناظر نسبت به چارچوب مرجع ساکن است. طبیعی است که نسبت مجموع سرعت‌های محیط و سرعت صوت در محیط به طول موج صوت، موج دریافتی را به دست می‌دهد که در مدت t ثانیه به تعداد $\frac{u+u_m}{\lambda}t$ موج دریافت می‌شود. حال اگر ناظر ساکن نباشد و با سرعت u' به سمت چشمه بیاید آنگاه تعداد بیشتری موج در مدت زمان t دریافت خواهد کرد که معادل $\frac{u'}{\lambda}t$ است. بنابراین تغییر بسامد انتقال دوپلری برابر است با

$$v = \frac{(u+u_m)\frac{t}{\lambda} + \frac{u'}{\lambda}t}{t} = \frac{u+u_m+u'}{\lambda}$$

از طرفی $\lambda v_0 = u+u_m$ است پس $\lambda = \frac{u+u_m}{v_0}$ می‌باشد و

$$v = v_0 \left(\frac{u+u_m+u'}{u+u_m} \right)$$

چنانچه ناظر با سرعت u' از چشمه دور شود آنگاه همانند روش بالا می‌توان دریافت که به تعداد $\frac{u'}{\lambda}t$ موج کمتر دریافت می‌کند:

$$v = \frac{(u+u_m)\frac{t}{\lambda} - \frac{u'}{\lambda}t}{t} = \frac{u+u_m-u'}{\lambda}$$

در این حالت

$$v = v_0 \left(\frac{u+u_m-u'}{u+u_m} \right)$$

تا اینجا دیدید که

$$v = v_0 \left(\frac{u+u_m \pm u'}{u+u_m} \right)$$

که علامت (+) در هنگام نزدیک شدن ناظر به چشمه و علامت (-) برای دور شدن ناظر از چشمه به کار می‌رود. از طرف دیگر چنانچه چشمه به سوی ناظر ساکنی

حرکت کند آنگاه چشمه در پی موج‌هایی که گسیل می‌کند در حرکت است در نتیجه طول موج کوتاه خواهد شد. اگر سرعت منبع را u'' بگیریم با روش بالا می‌توان نوشت:

$$v = \frac{u + u_m}{\lambda} = \frac{u + u_m}{(u + u_m - u'')} = v_0 \frac{u + u_m}{(u + u_m - u'')}$$

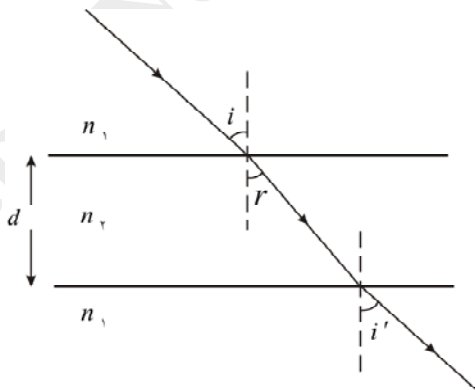
اگر منبع از ناظر دور شود تنها کافی است در رابطه بالا به جای u'' معادل آن $-u''$ را قرار می‌دهیم آنگاه

$$v = v_0 \frac{u + u_m}{(u + u_m + u'')}$$

و با تلفیق این روابط داریم:

$$v = v_0 \frac{u + u_m \pm u'}{(u + u_m \mp u'')}$$

۳. در شکل زیر نوری تحت زاویه i به سطح بالایی تیغه شیشه‌ای متوازی السطوحی می‌تابد.



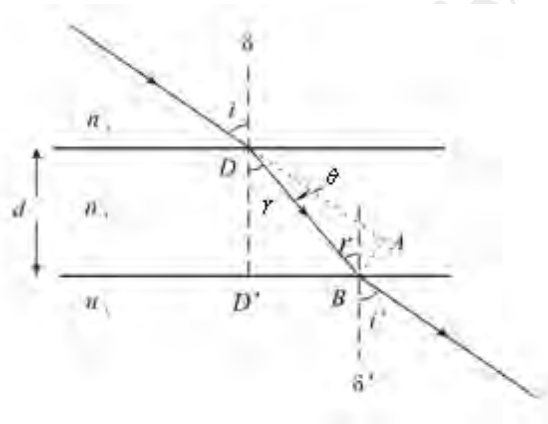
شکل ۸-۱۷. مربوط به مثال حل شده ۳.

الف) ثابت کنید $i = i'$.

ب) ثابت کنید که تغییر مکان عرضی نور خروجی برابر $d \frac{\sin(i-r)}{\cos r}$ است که d ضخامت تیغه شیشه‌ای است.

حل: الف) نور تحت زاویه i به سطح بالایی می‌تابد و تحت زاویه r شکست پیدا می‌کند. آنگاه همین پرتو به سطح زیرین تیغه شیشه‌ای می‌خورد و تحت زاویه i' از آن خارج می‌شود. بنابراین می‌توان با توجه به شکل ۸-۱۷ رابطه اسنل - دکارت را نوشت:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} \quad (1)$$



شکل ۸-۱۸. مربوط به رابطه اسنل و دکارت.

دو خط δ و δ' موازی هستند و خط مایل DB آن را قطع کرده است پس می‌توان نتیجه گرفت که $\hat{r} = \hat{r}'$ است.

از طرف دیگر برای سطح زیرین تیغه شیشه‌ای هم می‌توان رابطه اسنل - دکارت را نوشت:

$$\frac{\sin r'}{\sin i'} = \frac{n_1}{n_2} \quad (2)$$

$$\frac{\sin r}{\sin i'} = \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow \frac{\sin i'}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}$$

از مقایسه رابطه‌های (۱) و (۲) می‌توان نتیجه گرفت که $i = i'$ است.
 ب) تغییر مکان عرضی در شکل معادل AB است که با توجه به ضخامت d تیغه شیشه‌ای می‌توان کسینوس زاویه r را نوشت:

$$\cos r = \frac{DD'}{DB} = \frac{d}{DB} \quad (۳)$$

با توجه به شکل داریم:

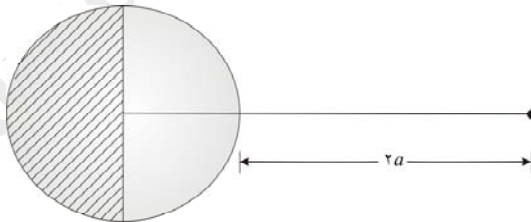
$$i = r + \theta \Rightarrow \theta = i - r$$

$$\sin \theta = \frac{AB}{DB} \Rightarrow AB = (DB) \sin \theta \quad (۴)$$

از (۳) و (۴) داریم:

$$AB = \frac{\sin(i - r)}{\cos r} d$$

۴. یک کره شیشه‌ای نازک به شعاع a از آب پر شده است. جسمی به فاصله $3a$ از سطح این کره قرار گرفته است. با چشم پوشی از اثر دیواره شیشه تعیین کنید که تصویر نهایی در چه فاصله‌ای از مرکز کره تشکیل می‌شود؟



شکل ۸-۱۷. مربوط به مثال حل شده ۴.

حل: ضریب شکست هوا و آب به ترتیب ۱ و $1/33$ است. این حالت مانند این

است که با یک عدسی سر و کار داریم. از

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

داریم:

$$\frac{1}{3a} + \frac{1/33}{q} = \frac{1/33 - 1}{R}$$

$$\frac{1/33}{q} = \frac{1/33}{a} - \frac{1}{3a} = 0$$

پس $0 \rightarrow \frac{1}{q}$ و یا $q \rightarrow \infty$ یعنی تصویر اول در بی نهایت تشکیل می شود. حال فرض می کنیم که جسمی در فاصله بی نهایت از سطح خمیده دیگر عدسی قرار دارد که شعاع آن $-a$ است آنگاه با $p = \infty$ و $R = -a$ ، q جدید را به دست می آوریم:

$$\frac{1/33}{\infty} + \frac{1}{q} = \frac{1 - 1/33}{-a} \Rightarrow 0 + \frac{1}{q} = \frac{1}{3a} \Rightarrow q = 3a$$

یعنی تصویر نهایی در فاصله $3a$ از سطح کره و یا به فاصله $4a$ از مرکز کره تشکیل می شود.

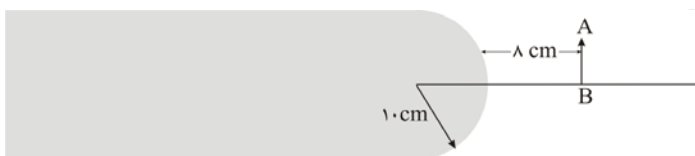
۸-۸ مسائل

۱. آژیر آمبولانسی صوتی با بسامد 1000 Hz گسیل می کند. اگر آمبولانس با سرعت 5 m/s از کنار شخصی که در کنار جاده است بگذرد و از روبه رو اتومبیلی با سرعت 2 m/s به آمبولانس نزدیک شود، معین کنید شخص کنار جاده و راننده اتومبیل هر یک چه بسامدی را می شنوند؟

۲. طیف مرئی شامل طول موج از 400 نانومتر تا حدود 700 نانومتر است. طول موج نورها در گستره بین نور بنفش تا نور قرمز را برحسب سانتی متر بیان کنید.

۳. کرنو در پی اندازه گیری سرعت نور روشی مشابه روش فیزو را به کار گرفت با این تفاوت که فاصله بین دو آینه را $22,9$ کیلومتر، قطر چرخ دندانه دار بزرگ را 40 میلی متر و تعداد دندانه های آن را 180 دندانه گرفت. سرعت زاویه ای چرخ چقدر باید باشد تا سوراخ بعدی در مسیر پرتو برگشتی نور قرار گیرد؟

۴. مطابق شکل ۸-۱۹ یک میله شیشه‌ای ۰٫۵ متری از سمت چپ صاف بوده و از سمت راست به صورت یک نیمکره به شعاع ۱۰ سانتی‌متر است. جسمی بر محور اصلی میله و به فاصله ۸ سانتی‌متری سطح نیم کره واقع شده است. الف) محل تصویر نهایی را پیدا کنید. ب) بزرگنمایی چقدر است؟



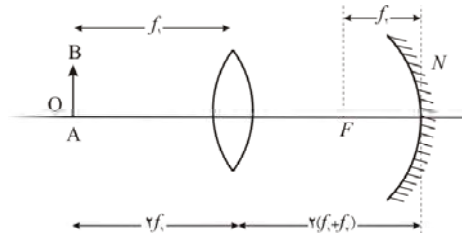
شکل ۸-۱۹. مربوط به مسئله ۴.

۵. جسمی به طول ۳ سانتی‌متر در فاصله ۴۰ سانتی‌متری مقابل یک آینه کوژ قرار گرفته است. شعاع انحنای آینه برابر ۶۰ سانتی‌متر است. الف) فاصله کانونی آن چقدر است؟ ب) تصویر جسم در کجا تشکیل می‌شود؟ ج) بزرگنمایی تصویر چقدر است؟ د) تصویر حقیقی است یا مجازی؟ مستقیم است یا معکوس؟

۶. جسمی در فاصله d از پرده قرار دارد. نشان دهید زمانی تصویری از جسم به وسیله یک عدسی همگرا با فاصله کانونی f بر پرده تشکیل می‌شود که

$$p = \frac{1}{2d \left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{4f}{d} \right)} \right]}$$

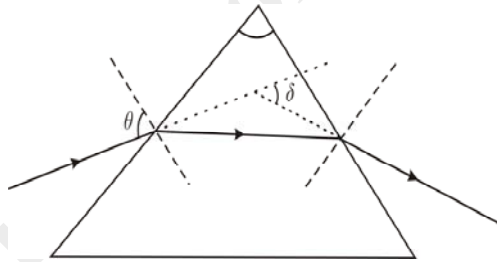
۷. در شکل ۸-۲۰ فاصله جسم AB از عدسی همگرا برابر $2f_1$ و فاصله این عدسی تا آینه کاو برابر $2(f_1 + f_2)$ است. الف) محل و چگونگی تصویر نهایی را بیابید. ب) نمودار پرتو خروجی را رسم کنید.



شکل ۸-۲۰. مربوط به مسئله ۷.

۸. پرتو نوری از هوا تحت زاویه θ نسبت به خط عمود بر وجه منشور شیشه‌ای می‌تابد. اگر زاویه رأس منشور A باشد، ضریب شکست منشور را برحسب زاویه رأس منشور و زاویه انحراف δ بیابید.

$$\text{حل: } n = \frac{\sin\left(\frac{A + \delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$$



شکل ۸-۲۱. مربوط به مسئله ۸.

فصل نهم

نورشناسی موجی (تداخل)

۹-۱ مقدمه

تا به حال تجربه کردید که وقتی دو سنگریزه را بر سطح آب ساکنی به فاصله‌ای از هم رها می‌سازید هر کدام موج‌های دایره‌ای به مرکز محل سقوط سنگریزه به وجود می‌آورند. این دایره‌های موجی بزرگ و بزرگ‌تر می‌شوند و وقتی موج‌های مربوط به دو سنگریزه در آب به هم می‌رسند پدیده معروف تداخل را به وجود می‌آورند. برخلاف دو ذره که ممکن نیست محل یکسانی را در آن واحد اشغال کنند اما دو موج می‌توانند با هم در محلی یکسان و در زمانی یکسان حضور داشته باشند و دو (یا چند) موج بر روی هم افتاده و باعث تقویت و یا ویرانی یکدیگر شوند. این موضوع در تفسیر پدیده‌های نوری که از نوع امواج الکترومغناطیسی هستند نیز صادق است یعنی امواج الکترومغناطیسی نور هم می‌توانند بر روی هم بیفتند و از معادله اصل برهم‌نهی پیروی کنند. در آن صورت برای دو موج الکترومغناطیسی می‌توان شدت برآیند را مجموع شدت‌های موج‌های رسیده به محل مورد نظر دانست. بنابراین تداخل نور از برهم‌کنش امواج نوری حاصل می‌شود و شدت برآیند آن بیشتر یا کمتر از مجموع شدت‌های موج‌های تداخل‌کننده است.

۹-۲ برهم‌نهی امواج

در فصل اول اشاره شد که هر موج با سه مشخصه دامنه موج بسامد موج و شکل تابع آن مشخص می‌شود. اگر در حالت کلی دو موج مکانیکی زیر را در نظر بگیریم:

$$y_1 = A_1 \sin(\omega t + \theta_{o1}) = A_1 \sin \theta \quad (1-9)$$

$$y_2 = A_2 \sin(\omega t + \theta_{o2}) = A_2 \sin \theta_2 \quad (2-9)$$

و دو موج y_1 و y_2 در رابطه‌های (۱-۹) و (۲-۹) دارای بسامد و امتداد یکسان باشند یعنی $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ولی با اختلاف فازی که نسبت به زمان ثابتند. به عبارتی

$$|\theta_1 - \theta_2| = \text{const} \quad (3-9)$$

آنگاه دو موج فوق می‌توانند از اصل برهم‌نهی پیروی کنند و در تشابه با دو موج با میدان الکتریکی‌های \vec{E}_1 و \vec{E}_2 می‌توان برآیند شدت میدان الکتریکی E آنها را در یک نقطه از فضا مطابق رابطه زیر به دست آورد:

$$E = E_1 + E_2 \quad (4-9)$$

در اینجا اگر دو چشمه نقطه‌ای که دو موج تک طول موج (تکفام) گسیل کرده‌اند را در محیطی همگن در نظر بگیریم آنگاه در یک نقطه بسیار دور که دو موج به صورت دو موج تخت رفتار می‌کنند می‌توان با شرط بزرگ بودن طول موج آنها در مقایسه با فاصله بین دو چشمه نقطه‌ای مزبور امواج را (که قطبیده خطی هستند) به صورت رابطه‌های زیر نوشت:

$$E_1(r, t) = E_{o1} \cos(\theta_1 + \alpha) \quad (5-9)$$

و

$$E_2(r, t) = E_{o2} \cos(\theta_2 + \beta) \quad (6-9)$$

در اینجا چون زمان، مکان و بسامد دو موج یکسان است آنگاه جدای از دامنه‌های $(\vec{E}_{o2}, \vec{E}_{o1})$ تفاوت دو موج در α و β و بردار موج آنها می‌باشد. توجه کنید که فاز هر موج در کنار α و β مطابق رابطه‌های زیر به بردارهای موج k_1 و k_2 نیز بستگی دارند:

$$\theta_1 = k_1 \cdot r - \omega t \quad (7-9)$$

$$\theta = k_{\nu} \cdot r - \omega t \quad (۸-۹)$$

این رابطه‌ها بیان می‌دارند که دو موج طول موج‌های متفاوتی دارند مثلاً اگر یکی از آنها نور سبز باشد، موج دیگری مثلاً یک نور آبی است که این دو موج نوری می‌توانند در زمان t به مکان یکسان r برسند و تداخل کنند و شدت برآیندی را به وجود آورند:

$$I = I_1 + I_2 + I_{12} \quad (۹-۹)$$

این شدت و به عبارت بهتر شدت تابش I با میانگین مجذور شدت میدان الکتریکی متناسب است و چون

$$E = E_1 + E_2 \quad (۱۰-۹)$$

آنگاه با توجه به

$$E \cdot E = (E_1 + E_2) \cdot (E_1 + E_2)$$

$$|E|^2 = |E_1|^2 + |E_2|^2 + 2|E_1||E_2|\cos\theta$$

و یا

$$|E|^2 = |E_1|^2 + |E_2|^2 + 2|E_1||E_2|\cos\theta$$

$$I = I_1 + I_2 + I_{12}$$

جمله

$$I_1 I_2 = 2|E_1||E_2|\cos\theta \quad (۱۱-۹)$$

جمله تداخلی نامیده می‌شود. حال اگر $\theta = \frac{\pi}{2}$ باشد آنگاه کمینه مقدار برابر با

$$I_1 I_2 = 0 \quad (۱۲-۹)$$

است و چنانچه $\theta = 0$ باشد جمله‌های تداخلی بیشینه مقدارش را دارد:

$$(I_1 I_2)_{\max} = 2|E_1||E_2| \quad (۱۳-۹)$$

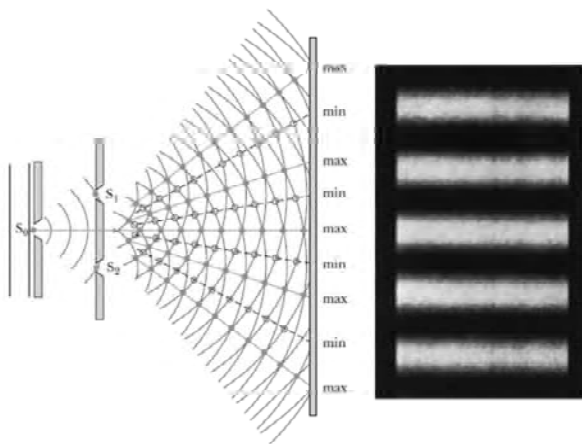
پس وقتی امواج به هم می‌رسند بسته به دامنه و فاز حرکتشان می‌توانند باعث تقویت و یا تضعیف هم شوند و به عبارتی بیشینه و کمینه‌هایی را در نقاطی از فضا داشته باشیم.

۳-۹ آزمایش یانگ

زمانی که اصل هویگنس را توضیح می‌دادیم به این نکته اشاره کردیم که هر یک از نقاط بر روی جبهه موج می‌توانند موجک‌های جدیدی را تولید کنند. حال اگر در سر راه موجی مطابق شکل ۹-۱ مانعی با دو شکاف S_1 و S_2 به فاصله d از یکدیگر قرار داشته باشد آنگاه هر یک از شکاف‌ها همانند چشمه هویگنس عمل می‌کند و قادر است موج‌های یکسانی را تولید کند. اگر دو چشمه در زمان یکسان پیش بروند و به اصطلاح همزمانی آنها (همدوسی زمانی) و هم‌مکانی آنها (همدوسی مکانی) برقرار باشند آنگاه دو شکاف را می‌توان ایجاد کننده موج‌های همدوس (همدوس مکانی + همدوس زمانی) تلقی کرد.

از طرف دیگر هم می‌توان اختلاف راه دو موج برآمده از دو شکاف را مطابق شکل ۹-۲ به دست آورد و از آنجا شرط تداخل سازنده و تداخل ویرانگر معلوم می‌گردد. در مثلث $S_1 S_2 \Delta$ می‌توان اختلاف راه r_2 و r_1 را به دست آورد:

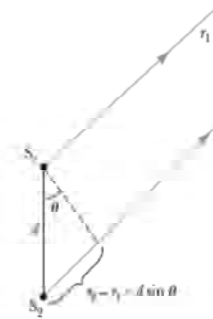
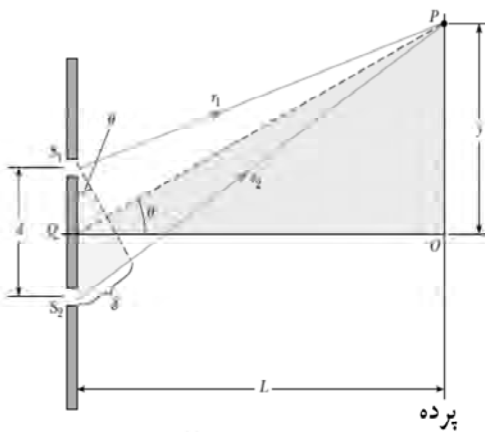
$$\sin \theta = \frac{r_2 - r_1}{d}$$



شکل ۹-۱. آزمایش یانگ.

و یا

$$r_1 - r_2 = d \sin \theta \quad (۱۴-۹)$$



شکل ۹-۲. پرده در فاصله دوری از صفحه دو شکاف S_1 و S_2 که پرتوهای نوری را گسیل می‌دارند قرار دارد.

در نقطه P زمانی روشنایی داریم به عبارتی تداخل سازنده است که اختلاف راه $r_1 - r_2$ و یا $2a \sin \theta$ مضرب صحیحی از طول موج λ باشد یعنی:

$$d \sin \theta = n \lambda \quad (۱۵-۹)$$

در مقابل چنانچه مضرب فردی از نصف طول موج باشد به عبارتی:

$$d \sin \theta = \left(n + \frac{1}{2} \right) \lambda \quad (۱۶-۹)$$

تاریکی را در نقطه p خواهیم داشت که تداخلی ویرانگر باعث این تاریکی می‌شود. توجه داشته باشید که n در روابط (۹-۱۴) تا (۹-۱۶) می‌تواند مقادیر صحیح را اختیار کند.

دوباره به رابطه‌های شدت در (۹-۱۱) بر می‌گردیم که با استفاده از آن می‌توان برای مؤلفه‌های میدان الکتریکی موج‌های بیرون آمده از شکاف‌ها نیز روابط متناظر را نوشت:

$$E_1 = E_{o1} \sin(\omega t + \theta_{o1})$$

و

$$E_2 = E_{o2} \sin(\omega t + \theta_{o2})$$

حال اگر دامنه میدان را یکسان در نظر بگیریم و تنها تفاوت در فاز نوسان را به حساب آوریم آنگاه روابط مربوط به مؤلفه‌های میدان الکتریکی دو موج را می‌توانیم به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_o \sin(\omega t + 0) = E_o \sin \omega t \\ E_2 &= E_o \sin(\omega t + \alpha) \end{aligned} \quad (9-16)$$

و نیز برای میدان برآیند رابطه متشابه را نوشت:

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 = E_o \sin \omega t + \sin(\omega t + \alpha) \\ &= \sqrt{2} E_o \cos \frac{\alpha}{2} + \sin(\omega t + \frac{\alpha}{2}) \end{aligned} \quad (9-17)$$

معادله موج برآیند عبارت خواهد بود $E = E'_o \sin(\omega t + \beta)$ که در اینجا $\beta = \frac{\pi}{2}$ و

$$E'_o \text{ برابر است با } \sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

بنابراین

$$E'_o = \sqrt{2} E_o \cos \beta \quad (9-18)$$

با مجذور کردن طرفین رابطه

$$\overline{E'^2} = \sqrt{2} \overline{E_o}^2 \cos^2 \beta$$

$$I' = \sqrt{2} I_o \cos^2 \beta$$

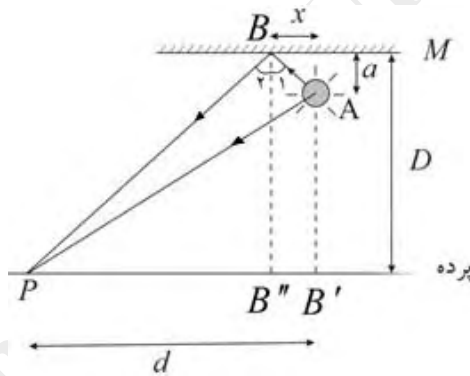
با β و یا α برابر صفر می‌توان بیشینه شدت نور برآیند را در نقطه P داشت که برابر است با:

$$I'_{\max} = 4I_0 \cos^2 0 = 4I_0$$

و یا

$$I' = I'_{\max} \cos^2 \beta \quad (9-19)$$

مثال ۱: یک لامپ کروی در نقطه‌ای به فاصله a سانتی‌متر از آینه M قرار دارد به طوری که نور لامپ و نور بازتابیده از آینه تحت در نقطه P به هم می‌رسند. اگر بسامد نور گسیلی لامپ متغیر باشد آنگاه این بسامد و بسامد نور بازتابیده چقدر باید باشند تا نقطه P را روشن ببینیم؟



شکل ۹-۳. موقعیت لامپ، آینه و پرده. پرده در فاصله دوری از آینه قرار دارد.

حل: در شکل ۹-۳ مشاهده می‌کنید که دو پرتو نور از لامپ و آینه (از نقطه B) در نقطه P با یکدیگر تداخل می‌کنند. بنا به قانون بازتابش نور $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ است. فاصله پرده و آینه را با D نشان می‌دهیم آنگاه از تشابه مثلث‌های $\triangle ABB' \approx \triangle B''PB'$ می‌توان نسبت تشابه را نوشت یعنی:

$$\frac{BB'}{PB''} = \frac{AB'}{D}$$

و یا

$$\frac{x}{d-x} = \frac{\alpha}{D}$$

بدین ترتیب x به دست می‌آید:

$$x(D+a) = ad \Rightarrow x = \frac{ad}{D+a} \quad (20-9)$$

اکنون می‌بایست اختلاف راه پرتو نور تابیده AB و AP و BP تابیده و بازتابیده را در نظر بگیریم:

$$\Delta = AB + BP - AP \quad (21-9)$$

که برای دیدن نقطه روشن در P می‌بایست:

$$\Delta = n\lambda$$

و با $n = 1$ داریم:

$$\Delta = \lambda_1$$

و یا

$$\lambda_1 = AB + BP - AP$$

و با $n = 2$ داریم:

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(AB + BP - AP)$$

بنابراین می‌توان بسامدهای مربوط به آنها را به دست آورد:

$$c = \lambda_1 \nu_1 = \lambda_2 \nu_2$$

که

$$\nu_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{c}{AB + BP - AP}$$

و

$$\nu_2 = \frac{c}{\lambda_2} = \frac{2c}{AB + BP - AP}$$

حال اگر به عنوان مثال فاصله لامپ از آینه را ۳ سانتی متر و فاصله آینه تا پرده را ۳۰ سانتی متر بگیریم که فاصله عمودی لامپ تا نقطه P برابر ۱۷ سانتی متر می شود آنگاه می توان x و ν_1 و ν_2 را به دست آورد. ابتدا x را به دست می آوریم:

$$x = \frac{ad}{D+a} = \frac{3 \times 17}{30+3} = \frac{51}{33} = 1,55 \text{ cm}$$

$$(AB)^2 = x^2 + a^2 \Rightarrow AB = \sqrt{(1,55)^2 + 3^2} = 3,38 \text{ cm}$$

همچنین

$$\begin{aligned} BP &= \sqrt{D^2 + (d-x)^2} \\ &= \sqrt{30^2 + (17-1,55)^2} = 33,74 \text{ cm} \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} AP &= \sqrt{(D-a)^2 + d^2} \\ &= \sqrt{(30-3)^2 + 17^2} = 31,91 \text{ cm} \end{aligned}$$

سپس

$$\lambda_1 = AB + BP - AP = 5,21 \text{ cm}$$

$$\lambda_2 = 2,61 \text{ cm}$$

و از آنجا می توان بسامدهای ν_1 و ν_2 را به راحتی به دست آورد:

$$\nu_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{3 \times 10^8}{5,21 \times 10^{-2}} = 5,78 \times 10^9 \text{ Hz}$$

و

$$\nu_2 = \frac{c}{\lambda_2} = \frac{2c}{\lambda_1} = 2\nu_1$$

که

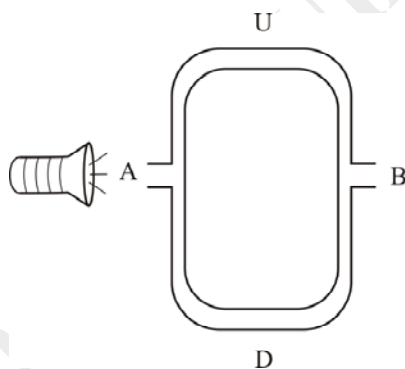
$$\nu_2 = 11,6 \times 10^9 \text{ Hz}$$

مثال ۲: شخصی درون لوله شکل ۹-۴ را صیقلی و براق کرده است. آنگاه نور چراغ قوه را از نقطه A به درون لوله می‌فرستد که نور دو مسیر ساعتگرد و پادساعتگرد را پیش می‌گیرد تا این که از روزنه دیگر B خارج می‌شود. اگر کم‌ترین روشنی در نقطه U برحسب واحد ۱۰۰ فرض شود و پس از آن طوری افزایش پیدا کند که در ۲ سانتی‌متری وضعیت اول به بیشینه مقدارش حدود ۴۰۰ واحد برسد. اگر طول مسیر AUB را می‌توان تغییر داد در حالی که طول مسیر ADB است. اگر به جایی برسیم که AUB نصف ADB گردد آنگاه:

الف) بسامد پرتو نور گسیل شده چراغ قوه در نقطه A چقدر است؟

ب) دامنه پرتوهای رسیده به U و نیز نسبت شدت آنها را در این نقطه به دست آورید.

ج) توضیح دهید چرا پرتوهای برآمده از چراغ قوه دامنه‌های متفاوتی را دارند؟



شکل ۹-۴. چراغ قوه نوری از نقطه A وارد لوله‌ای که درون آن صیقلی و آینه‌ای است می‌شود و در نقطه B به چشم می‌آیند.

حل: الف) با دیدن روشنائی در نقطه B می‌توان نتیجه گرفت که اختلاف مسیر

و یا اختلاف راه نوری دو مسیر AUB و ADB برابر است با

$$ADB - AUB = n\lambda = \lambda$$

از طرفی

$$ADB - AUB = 2\text{ cm} \Rightarrow \lambda = 2\text{ cm}$$

پس بسامد پرتو نور گسیل شده از نقطه A برابر است با

$$v = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{0.7} = 4.2857 \times 10^{10} \text{ Hz}$$

ب) در اینجا لازم است تا معادله هر پرتو نور که از مسیر ADB و AUB عبور می کند را بنویسیم. با استفاده از رابطه های (۹-۱) و (۹-۲) داریم:

$$y_1 = a_1 \sin \theta_1 \quad \text{در مسیر AUB}$$

$$y_2 = a_2 \sin \theta_2 \quad \text{در مسیر ADB}$$

که می توان با توجه به اختلاف فازی برابر α بین θ_1 و θ_2 و همدوسی آنها چنین نوشت:

$$y_1 = a_1 \sin(kx - \omega t)$$

$$y_2 = a_2 \sin(kx - \omega t - \alpha)$$

چون در معادله دوم اختلاف فاز α را نمایانده ایم پس با توجه به دو مقدار 0 و π می توان به ترتیب بیشینه و کمینه مقدار y_2 را به دست آورد یعنی

$$(y_2)_{\max} = a_2 \sin(kx - \omega t)$$

$$(y_2)_{\min} = a_2 \sin(kx - \omega t - \pi)$$

حال هر کدام از پرتو نور مسیر ADB که $(y_2)_{\min}$ و $(y_1)_{\max}$ هستند می توانند با پرتو نور عبوری از مسیر AUB تداخل کنند و برای این که دریابیم دامنه تداخل آنها چه تغییری می کند از اصل برهم نهی استفاده می کنیم:

$$\begin{aligned} y_1 + (y_2)_{\max} &= a_1 \sin(kx - \omega t) + a_2 \sin(kx - \omega t) \\ &= (a_1 + a_2) \sin(kx - \omega t) \end{aligned} \quad (9-22)$$

و نیز

$$\begin{aligned}
 y_1 + (y_2)_{\min} &= a_1 \sin(kx - \omega t) + a_2 \sin(kx - \omega t - \pi) \\
 &= a_1 \sin(kx - \omega t) - a_2 \sin(kx - \omega t) \quad (23-9) \\
 &= (a_1 - a_2) \sin(kx - \omega t)
 \end{aligned}$$

همانطور که در رابطه‌های (۲۲-۹) و (۲۳-۹) ملاحظه می‌شود دامنه برآیند دو پرتو نور هنگامی که به یکدیگر می‌رسند برابر $(a_1 + a_2)$ و یا $(a_1 - a_2)$ می‌باشند. از آنجایی که شدت پرتو نور با مجذور دامنه متناسب است و بسته به این که دامنه دو پرتوی نور به صورت $(a_1 + a_2)$ و یا $(a_1 - a_2)$ باشد به ترتیب بیشینه و کمینه شدت پرتوی نور را خواهیم داشت یعنی

$$I_{\max} \propto (a_1 + a_2)^2$$

و

$$I_{\min} \propto (a_1 - a_2)^2$$

با توجه به ثابت تناسب برابر می‌توان نسبت شدت‌ها را به دست آورد:

$$\frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{(a_1 + a_2)^2}{(a_1 - a_2)^2} = \left(\frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \right)^2$$

$$\frac{100}{400} = \left(\frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \right)^2 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2}$$

و از آنجا

$$2a_1 + 2a_2 = a_1 - a_2 \Rightarrow a_1 = 3a_2 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{1}$$

ج) طول مسیر AUB و ADB با توجه به شکل متفاوتند لذا راه نوری در این دو مسیر یکسان نیست و دامنه‌های متفاوتی به دست می‌آیند حتی اگر طول AUB طوری تغییر کند که دو مسیر AUB و ADB برابر گردند آنگاه با توجه به وجود محیط هوای درون لوله و مواردی چون تفاوت در بالا بودن مسیر و یا اصطکاک می‌توان اختلاف راه نوری را انتظار داشت که باعث وجود دامنه‌های نابرابر پرتوهای دو مسیر در روزنه B باشند.

۴-۹ تداخل سنج‌ها

تداخل سنج‌هایی که در بحث و بررسی تداخل پرتوهای نور به کار می‌آیند را می‌شود در سه نمونه خلاصه کرد. تداخل سنج مایکلسون شاید بیشتر از تداخل سنج‌های فرنل و لویدا در فیزیک مطرح باشند اما هر یک را می‌شود با توجه به طرح‌واره‌های آنها به طور اختصار توضیح داد تا به حوزه کار هر کدام از آنها پی برد.

۱-۴-۹ تداخل سنج فرنل

در شکل‌های ۵-۹ و ۶-۹ طرح‌واره‌هایی از تداخل سنج‌های فرنل را مشاهده می‌کنید که در شکل ۵-۹ دو آینه فرنل به کار گرفته شد در حالی که در شکل ۶-۹ دو منشور فرنل باعث ایجاد نوارهای تاریک- روشن بر پرده شده‌اند.

دو آینه فرنل که دو آینه تخت نقره‌اندود هستند مطابق شکل ۵-۹ زاویه باز (منفرجه) را با یکدیگر می‌سازند و پرتو نورهایی که از چشمه نور S گسیل می‌شوند پس از بازتاب در نقطه‌ای مثل P به هم می‌رسند که فرض می‌شود دو پرتو نور هم‌دوس هستند و تداخل آنها را همانند آزمایش دو شکاف یانگ ناشی از دو چشمه هم‌دوس جدا از هم در نظر گرفت و از آنجا فاصله بین نوارهای تداخل را به دست آورد.

اشاره شد که پرتوهای نور از چشمه نور به دو آینه تخت می‌تابند و بازتابیده آنها به نقطه P می‌رسند و این را می‌توان به گونه‌ای دیگر تصور کرد. بدین شکل که تصور کنیم که پرتو نور گسیل شده SA که بازتاب AP را دارد در واقع پرتو نوری باشد که از نقطه S_1 گسیل شده است و به صورت پرتو نور S_1P به نقطه P رسیده باشد. این نگاه زمانی بی‌اشکال خواهد بود که

$$AS = AS_1$$

و به همین دلیل

$$BS = BS_2$$

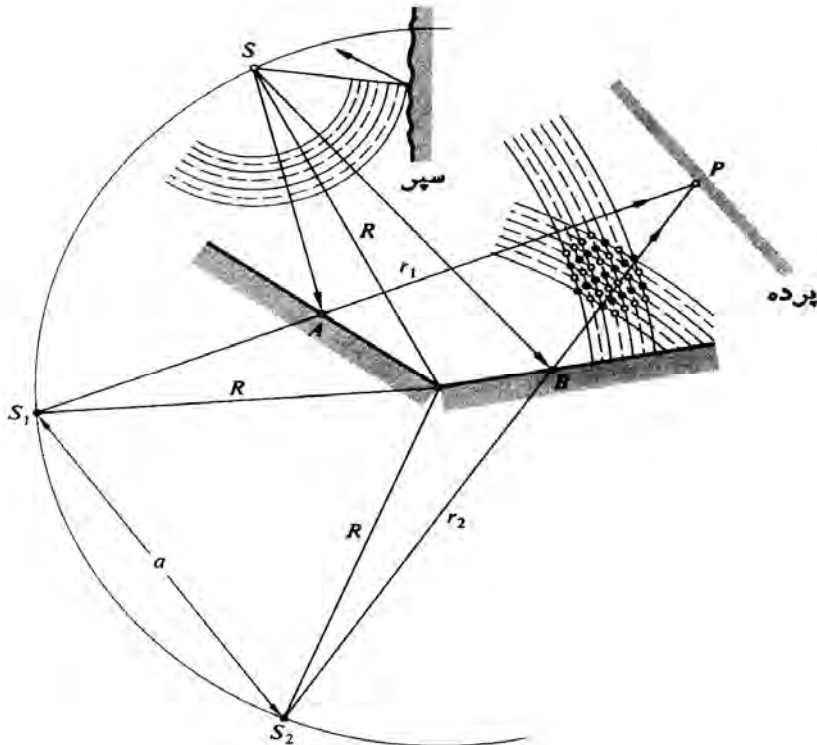
باشند که اگر نقطه تلاقی دو آینه (نقطه D) را مرکز فرض نماییم آنگاه S_1 و S_2 باید بر دایره‌ای به مرکز DS (DS_1 یا DS_2) واقع باشند. در آن صورت دو تساوی بالا برقرار می‌شوند و تفاوتی نخواهد بود که در نظر بگیرد نوارهای SAP

و SBP در نقطه P تداخل کردند و یا S_1AP و S_2BP . اکنون از راه نوری S_1AP را با r_1 و S_2BP را با r_2 نشان می‌دهیم و بسته به این که اختلاف راه نوری r_1 و r_2 مضرب صحیحی از طول موج پرتو نور و یا مضرب فردی از نیم طول موج باشند در روی پرده به ترتیب نورهای روشن و تاریک را خواهیم داشت پس:

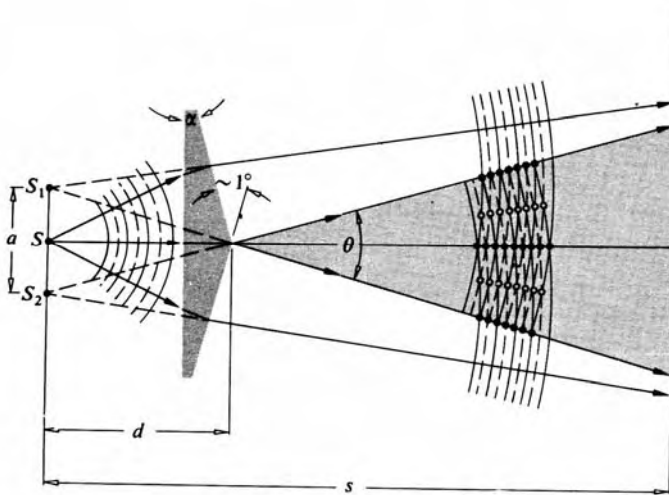
$$r_1 - r_2 = n\lambda$$

برای نوار تاریک

$$r_1 - r_2 = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

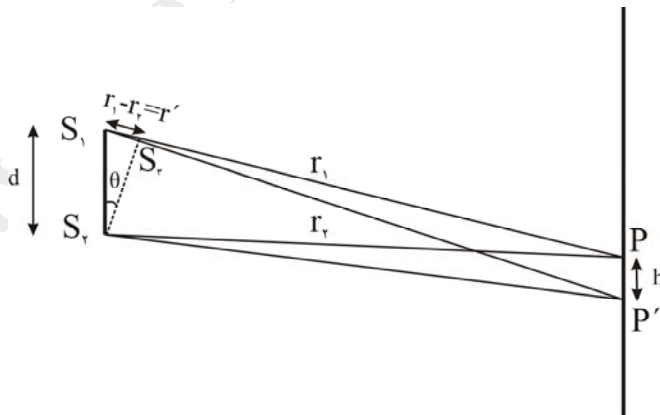


شکل ۹-۵. دو آینه فرنل.



شکل ۹-۶. منشور دوتایی فرنل.

حال که دلیل ایجاد نوارهای روشن و تاریک را فهمیدیم می‌توان فاصله بین این نوارهای تداخلی را (که با h نشان می‌دهیم) به دست آوریم. برای این منظور شکل ۹-۷ را در نظر می‌گیریم:



شکل ۹-۷. دو نقطه روشن P و P' را بر پرده در نظر می‌گیریم و می‌خواهیم فاصله بین این دو نقطه روشن (h) را به دست آوریم. فاصله دو چشمه مجازی S_1 و S_2 تا پرده را l می‌گیریم.

راه نوری دو چشمه مجازی S_1 و S_2 را مطابق با شکل با r_1 و r_2 نشان دادیم و آنگاه اختلاف راه نوری آنها باید مضرب صحیحی از طول موج λ باشد تا نقطه روشن در P داشته باشیم. حال می‌توان نسبت تشابه دو مثلث S_1S_2P و S_1S_2P' را نوشت:

$$\frac{r'}{d} = \frac{h}{\ell} \Rightarrow h = \frac{r'\ell}{d}$$

و از

$$r' = r_1 - r_2 = n\lambda$$

که برای نوارهای مجاور P و P' با $n=1$ است می‌توان فاصله بین نوارهای روشن مجاور P و P' را به دست آورد:

$$h = \frac{\ell}{d} \lambda \quad (9-25)$$

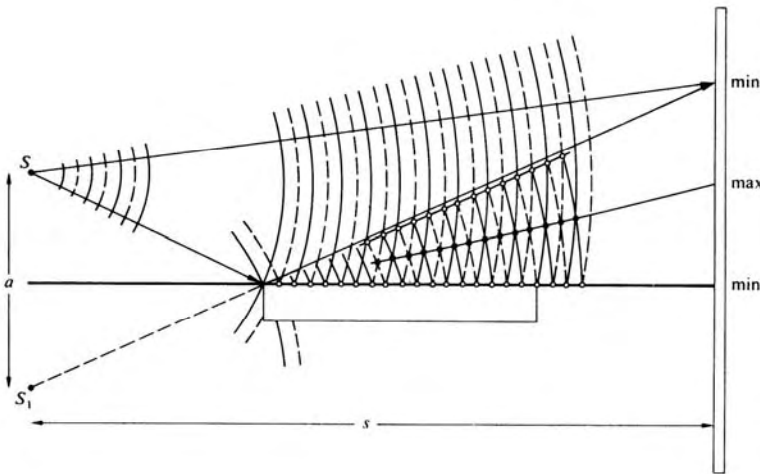
البته در شکل ۹-۵ زاویه بین دو آینه که برابر زاویه بین AD با DB است اغراق شده است تا اختلاف راه نوری بهتر مشاهده شود در صورتی که زاویه بین دو آینه (θ) بسیار کوچک است که باعث می‌شود تا بردارهای میدان الکتریکی دو پرتو نور تقریباً با هم موازی باشند.

۹-۴-۲ منشور دوتایی فرنل

دو منشور که از رأس‌هایشان مطابق شکل ۹-۶ به هم متصل شده اند قادرند نقش دو آینه فرنل را بازی کنند. در اینجا نیز فاصله چشمه از پرده بسیار زیاد است طوری که این دو منشور نازک می‌توانند نتیجه برهم نهی پرتوهای نور را بر پرده نمایان کنند. منشور نازک اول امتداد پرتو بازگشتی نور چشمه را از بالا و پایین منشور ایستاده طوری متمرکز می‌سازد که گویی دو چشمه نقطه‌ای هر یک پرتو نوری را گسیل داشته‌اند و این پرتو نورها امتداد پرتو نورهای حقیقی هستند که به وسیله منشور بزرگ و نازک دوم به صورت طیف‌های مجزا بر پرده دیده می‌شوند.

۹-۴-۳ آینه لوید

این تداخل سنج را در شکل ۹-۸ می‌بینید که از یک قطعه تخت فلزی که نقش آینه را بازی می‌کند تشکیل شده است. پرتوهای نوری که از شکاف می‌آیند و بازتابیده می‌شوند نقش دو چشمه را با هم بازی می‌کنند که قادرند پرتو نورهایی را گسیل نمایند و تداخل را باعث شوند.



شکل ۹-۸ آینه لوید.

اگر فاصله این دو چشمه از یکدیگر را d فرض کنیم و پرتو نورهای این دو چشمه نیز همدوس باشند آنگاه می‌توان فاصله بین دو نوار را با استفاده از (۹-۲۵) به دست آورد. اما نقش نواری که از آینه لوید می‌آید هر چند از همان اصول در آزمایش دو شکافی یانگ استفاده می‌شود ولی کمینه‌های یک نقش با بیشینه‌های نقش دیگر در آینه لوید متناظرند. یعنی کناره بالایی آینه لوید به ما مرکز نوار تاریکی را می‌دهد که در شکل نمایان است. در حالی که همین نقطه مرکزی بر روی پرده که در اینجا تاریک است در آزمایش یانگ روشن به نظر می‌رسد.

پس اگر ماده شفاف بر مسیر پرتوهای نور تا پرده قرار گیرد آنگاه شمار طول موج‌های هر پرتو افزایش می‌یابد و نقش روی پرده به سمت بالای پرده جابجا می‌شود به گونه‌ای که پرتوهای بازتابیده قبل از آن که به یکدیگر برسند و تداخل کنند راه

بیشتری را می‌باید پیمایند و این باعث می‌شود تا نوارهای تاریک و روشن در محل‌های به ترتیب نوارهای روشن و تاریک دو شکافی یانگ بر پرده نقش بندند.

۹-۴-۴ تداخل سنج مایکلسون

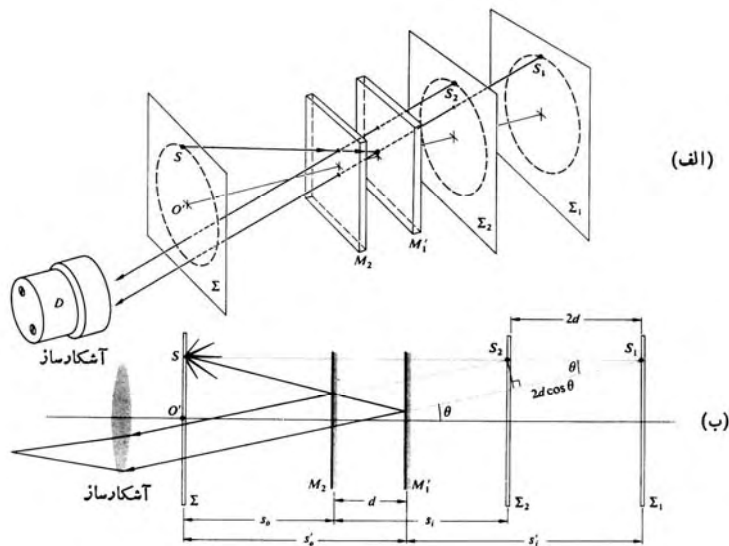
در ابتدای این فصل بیان شد که تداخل‌سنج‌ها را می‌توان به دو رده کلی تقسیم کرد. یک دسته از آنها موج را می‌شکافند و موج‌های شکافته شده بر روی پرده نوارهای تداخلی را به نمایش می‌گذارند. تداخل‌سنج‌هایی که اشاره نمودیم، آینه و منشور فرنل و آینه لویید از نمونه تداخل‌سنج‌هایی بودند که پرتو را طوری می‌شکافند که دو چشمه گسیلنده پرتو نور ایجاد می‌شد.

اکنون به دسته دوم تداخل‌سنج‌ها هم اشاره‌ای کنیم که در آنها دامنه موج یا پرتو نور شکافته می‌شود و پس از طی مسیری با یکدیگر تداخل می‌کنند. این گونه تداخل‌سنج‌ها به تداخل‌سنج مایکلسون معروفند که در فصل قبل به آن اشاره شده بود که چگونه در مستقل بودن سرعت نور از ناظرها به کمک ما آمد و نظریه انیشتین را در این مورد تأیید نمود.

در اینجا آینه نیمه نقره اندود که تقریباً نیم‌شفاف است و قادر است بخشی از پرتو نور را عبور و بخش دیگری از آن را بازتاب دهد در مسیر حرکت پرتو نور قرار می‌گیرد. پرتو نور پس از رسیدن به این آینه نیمه نقره اندود دو مسیر عمود بر هم را در پیش می‌گیرد و البته به دلیل عبور پرتو نور از آینه که ضریب شکستی متفاوت از ضریب شکست محیط اطرافش دارد و خللی در حرکت پرتو نور ایجاد می‌کند مایکلسون را بر آن داشت تا از یک جبران‌کننده استفاده کند تا مشکل عبور از آینه را مرتفع سازد. در شکل ۹-۹ می‌بینید که چگونه پرتوهای نور عبوری و بازتابیده به آینه‌ای که در مسیر هر کدام قرار دارد می‌رسند و بازتاب آنها دوباره به چشم ناظر یا آشکارساز می‌رسند (تیغه جبران‌کننده را در شکل می‌بینید).

گفتیم که آزمایش مایکلسون نظریه انیشتین را تأیید نمود اما فراموش نشود که آزمایش مایکلسون حدود ۲۴ سال پیشتر از آن که انیشتین نظریه خود را بیان کند یعنی در سال ۱۸۸۱ مطرح شد و شاید بشود عبارت درست‌تر را به این صورت به کار برد که انیشتین توانست بر اساس یک سری آزمایشاتی که دانشمندانی از جمله مایکلسون در تداخل‌سنج خود به دست آوردند بیان کند که سرعت نور در هوای آزاد ثابت است.

در اینجا می‌توان از یک پرتو تکفام لیزری استفاده کرد (پرتویی که تک طول موج است) و با پرتوهای نور مرکب سفید و یا پرتو نوری که از یک لامپ تخلیه جیوه می‌آید مقایسه نمود. در اینجا چون پرتو تکفام است دارای مؤلفه‌های بسیار بسامدی نیست و نوارهای مشاهده شده حلقه‌های تاریک و روشن دایره‌ای هستند که به صورت دایره‌های هم مرکز نشان داده می‌شوند. در شکل ۹-۱۰ یک نمونه از حلقه‌های دایره‌ای را می‌بینید. اگر یک حلقه خاص را در نظر بگیریم و آنگاه به سمت مرکز پیش رویم و یا به عبارتی حلقه‌ها را به سوی مرکز جمع کنیم وقتی فاصله آینه‌ها در مسیر حرکت پرتوها طوری تغییر کند که اختلاف راه نوری بین پرتوها برابر نصف طول موج اولیه (اصلی) شود، بالاترین حلقه و یا حلقه با بالاترین مرتبه ناپدید می‌شود و باعث پهن شدن مابقی حلقه‌ها در پرده می‌شود. حال از رابطه (۹-۱۶) می‌توان به ازای زاویه صفر θ چنین نوشت:



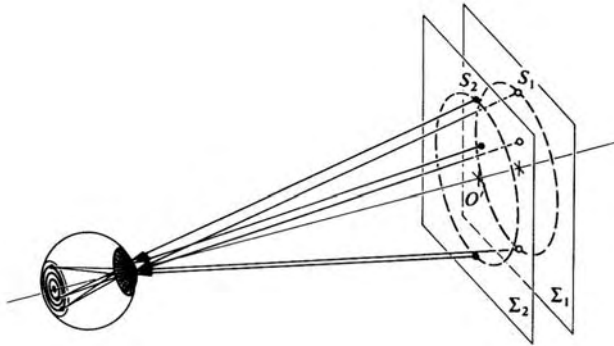
شکل ۹-۹. تداخل سنج مایکلسون.

$$2a = n_0 \lambda_0$$

که a تغییر فاصله دو آینه نسبت به هم است.

نوار مرکزی تاریک است و فاصله حلقه‌های تاریک متوالی بعدی که با ثابت d مشخص می‌شود از رابطه‌های زیر به دست می‌آیند:

$$2d \cos \theta_i = (n_i - 1)\lambda_0 \quad (۲۶-۹)$$



شکل ۹-۱۰. تشکیل نوارهای حلقه‌ای دایره‌ای.

که θ_i زاویه بین امتداد پرتو بازتابیده از آینه به خط راست عمود بر صفحه آشکارساز است و n_i مرتبه حلقه را نشان می‌دهد. منظور از مرتبه این است که چندمین حلقه را انتخاب کرده‌اید مثلاً برای حلقه پنجم می‌توان رابطه مربوط به آن را چنین نوشت:

$$2d \cos \theta_5 = 4\lambda_0$$

اکنون اگر فرض شود که زاویه θ_i بسیار کوچک است آنگاه می‌توان با استفاده از بسط زیر

$$\cos \theta_i = 1 - \frac{\theta_i^2}{2} + \frac{\theta_i^4}{4} - \dots$$

و با چشم پوشی از مرتبه‌های بالاتر از مرتبه دو نوشت:

$$\cos \theta_i = 1 - \frac{\theta_i^2}{2}$$

که برای حلقه m ام داریم:

$$\theta_m = \left(\frac{m\lambda_0}{d} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (۲۷-۹)$$

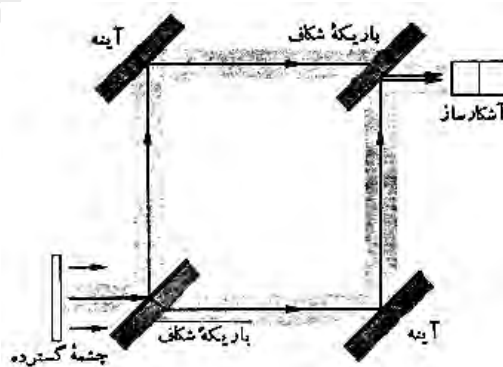
ناگفته نماند که تداخل سنج مایکلسون قادر است اندازه‌گیری‌های بسیار دقیقی در اندازه‌گیری طول جابجایی هر نوار به دست بدهد و وقتی آینه‌ای به اندازه $\frac{1}{4}\lambda_0$ جابجا شود آنگاه هر نوار جای نوار مجاور خود را می‌گیرد و با تعداد نوارهای N می‌توان فاصله پیموده شده هر نوار (Δd) را به دست آورد:

$$\Delta d = N \frac{\lambda_0}{2} \quad (9-28)$$

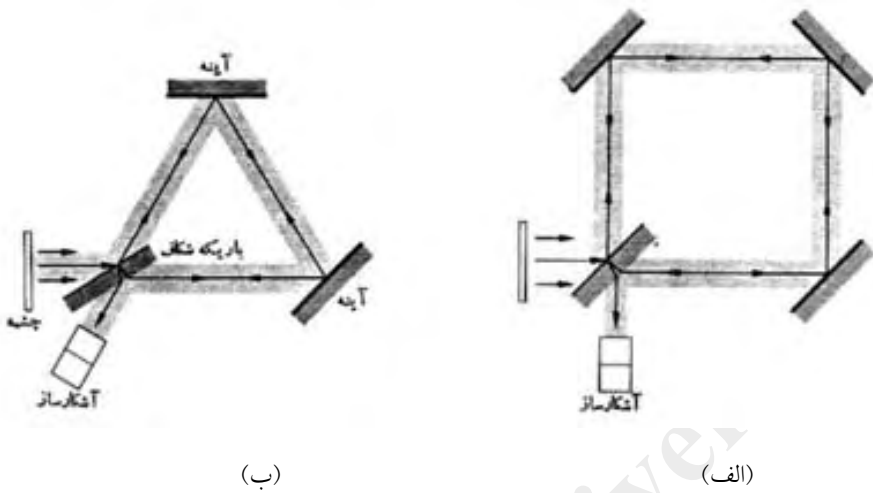
خودآزمایی ۱: از شکافنده‌های دیگر دامنه پرتو موج نیز بکار می‌آیند که به تداخل سنج ماخ-زندر و تداخل سنج ساگاناک معروف هستند. روش کار هر یک را توضیح دهید و با هم مقایسه کنید. این تداخل سنج‌ها را در شکل‌های ۹-۱۱ و ۹-۱۲ نشان داده‌ایم.

مثال ۲: نیم عدسی شیشه‌ای با شعاع انحنای R را روی یک تیغه شیشه‌ای کاملاً تخت قرار می‌دهیم. نوری از مرکز انحنای عدسی بر محل تماس عدسی و تیغه می‌تابد و باعث ایجاد نوارهای تداخلی دایره‌ای به نام حلقه‌های نیوتن می‌شود که شما نمونه‌ای از آن را می‌توانید با تصور حلقه‌های رنگی روغن و بنزین بر آب مشاهده کنید. علت تشکیل این حلقه‌ها به ضخامت متغیر لایه هوایی بستگی دارد که میان عدسی و شیشه وجود دارد. شعاع بیشینه‌های تداخلی حلقه‌ها را بیابید.

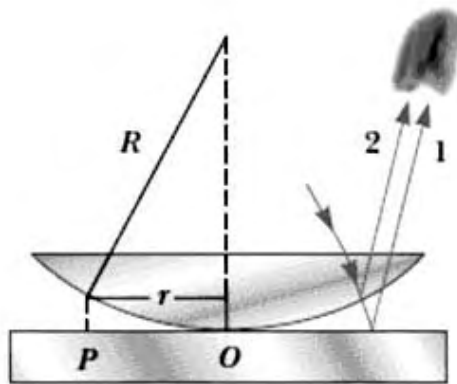
حل: چگونگی قرارگیری عدسی بر تیغه شیشه‌ای کاملاً تخت در شکل ۹-۱۲ نشان داده شده است.



شکل ۹-۱۱. تداخل سنج ماخ-زندر.



شکل ۹-۱۱. الف) تداخل سنج ساگنک. ب) نوع دیگری از تداخل سنج ساگنک.



شکل ۹-۱۲. چگونگی تشکیل حلقه‌های نیوتنی.

زاویه‌ای که پرتو نور با شعاع انحنای R می‌سازد باعث می‌شود که به جای رابطه (۹-۱۵) از رابطه (۹-۱۶) استفاده کنیم تا بیشینه‌ها را به دست آوریم. در واقع چون ضریب شکست هوا با شیشه فرق می‌کند آنگاه پرتو بازتابیده از سطح زیرین لایه هوا با

اختلاف فاز 180° درجه نسبت به پرتویی که از سطح بالای لایه می‌آید بازتابیده می‌شوند. از طرفی ضریب شکست هوا برابر یک است و

$$2a = \left(n + \frac{1}{2} \right) \lambda$$

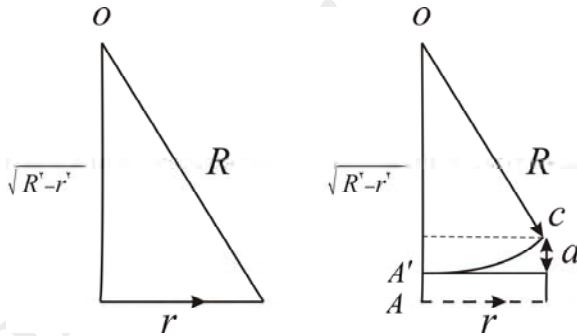
$$n = 0, 1, 2, \dots$$

که از طرفی با توجه به شکل زیر:

$$a = R - OA' = R - \sqrt{R^2 - r^2}$$

چون $r \ll R$ است با استفاده از بسط دو جمله‌ای:

$$(\ell - \varepsilon)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\ell} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\ell} \right)^{\frac{1}{2}}$$



شکل ۹-۱۳. مربوط به مثال ۲.

با $\ell \ll \varepsilon$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} (\ell - \varepsilon)^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{\ell} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\ell} + \dots \right) \\ &\approx \sqrt{\ell} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\ell} \right) \end{aligned}$$

$$a = R - R \left(1 - \frac{r^2}{2R^2} \right) + \dots \approx \frac{r^2}{2R}$$

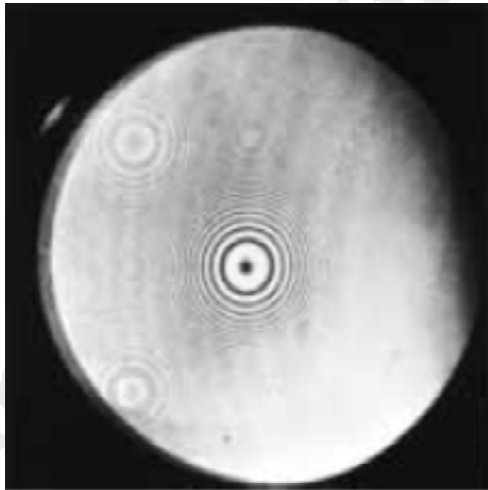
بنابراین

$$\frac{r^2}{2R} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \lambda$$

و یا

$$r = \sqrt{\left(n + \frac{1}{2} \right) \lambda R}$$

شعاع حلقه‌های دایره‌ای روشن را به دست آوردیم. تصویر زیبایی از حلقه‌های نیوتن را در شکل ۹-۱۴ مشاهده می‌کنید.



شکل ۹-۱۴. حلقه‌های نیوتن.

مثال ۳: هشت در کتاب خود صحبت از یک ژيروسکوپ لیزری حلقه‌ای کرده است که تصویر آن در شکل ۹-۱۵ آمده است. تداخل سنج چرخان ساگناک قادر است سرعت چرخشی یک سیستم را اندازه‌گیری کند و همینطور می‌توان از آن استفاده کرد و لیزر حلقه‌ای را نشان دهد.

طرح‌واره‌ای از تداخل‌سنج چرخان ساگناک در شکل ۹-۱۶ نشان داده شده است. در این تداخل‌سنج، آینه‌ها، چشمه و آشکارساز حول محور عمودی عبوری از مرکز آن می‌چرخد. در اثر تداخل که از برهم نهی دو پرتویی که با چرخش دستگاه، یکی ساعتگرد و دیگری پادساعتگرد به وجود می‌آید، نوارهایی را تشکیل می‌دهند. فرض کنید که زمان تناوب نور تکفام به کار رفته $\tau = \frac{\lambda}{c}$ باشد آنگاه جابجایی جزئی نوارها را به دست می‌آوریم.



شکل ۹-۱۵. یک ژيروسکوپ لیزری حلقه‌ای.

حل: در شکل ۹-۱۶ می‌توان سرعت خطی هر گوشه‌ای مثل A را به دست آورد که در مسیر AB دو سرعت V (سرعت خطی دستگاه) و سرعت نور را داریم:

$$V = R \omega$$

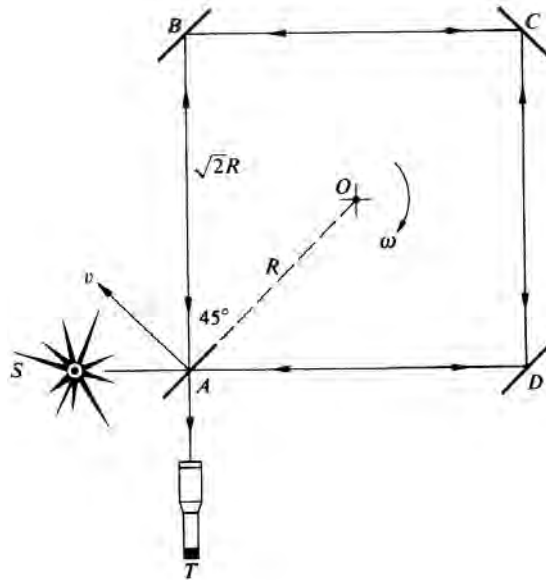
و از شکل زیر سرعت در راستای دستگاه را می‌توان به دست آورد. سرعت V' برابر $V - 0.7V = c$ است. ضلع مربع AB به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

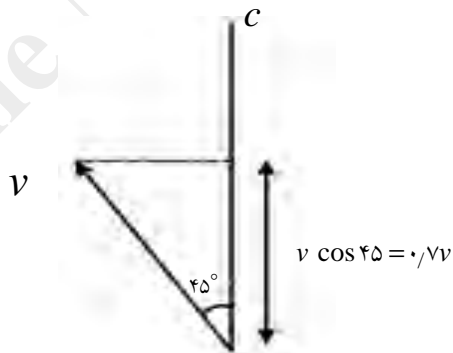
$$(2R)^2 = 2(AB)^2 \Rightarrow 4R^2 = 2(AB)^2$$

که

$$AB = \sqrt{2} R = 1,4 R$$



شکل ۹-۱۶. تداخل سنج چرخان ساگناک.



شکل ۹-۱۷. مربوط به مثال ۳.

است. بنابراین با استفاده از

$$AB = V' t_{AB}$$

داریم:

$$t_B = \frac{\frac{1}{4}R}{c - \frac{1}{2}V} = \frac{\frac{1}{4}R}{c - \frac{1}{2}R\omega} = \frac{\frac{1}{4}R}{\frac{1}{2}c - \omega R}$$

به همین شکل می‌توان مدت زمانی که نور مسافت AD چرخان را طی می‌کند را به دست آورد:

$$t_{AD} = \frac{\frac{1}{4}R}{c + \frac{1}{2}R\omega} = \frac{\frac{1}{4}R}{\frac{1}{2}c + R\omega}$$

بنابراین زمان کل حرکت در سوی ساعتگرد و سوی پاد ساعتگرد به ترتیب برابر است با

$$t_C = \frac{R}{\frac{1}{2}c - \omega R}$$

و

$$t_A = \frac{R}{\frac{1}{2}c + \omega R}$$

اگر سرعت چرخش در مقایسه با سرعت نور ناچیز باشد یعنی $\omega R \ll c$ برقرار باشد آنگاه

$$\Delta t = t_C - t_A = \frac{R^2 \omega}{c^2}$$

است و چون مساحت مربع تشکیل دهنده پرتوهای نور که برابر

$$S = (AB)^2 = (\sqrt{2}R)^2 = 2R^2$$

است. آنگاه

$$\Delta t = \frac{S \omega}{c^2}$$

از طرفی زمان تناوب پرتو تکفام برابر $\tau = \frac{\lambda}{c}$ است. آنگاه می‌توان جابجایی جزئی نوارها را به دست آورد.

$$\Delta t = (\Delta N) \tau$$

$$\Delta N = \frac{4S \omega}{c \lambda}$$

۹-۵ مثال‌های حل شده

۱. برآیند موج‌های زیر را به طریق ترسیمی به دست آورید.

$$y_1 = 2 \sin \omega t$$

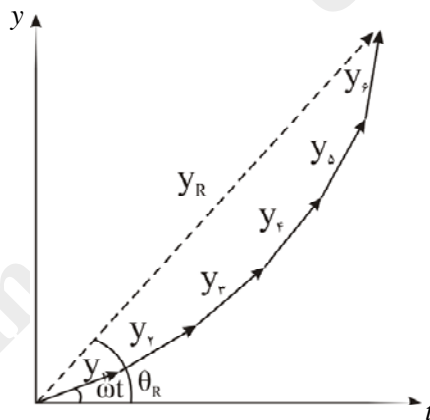
$$y_2 = 2 \sin (\omega t + 10^\circ)$$

$$y_3 = 2 \sin (\omega t + 20^\circ)$$

$$y_4 = 2 \sin (\omega t + 30^\circ)$$

$$y_5 = 2 \sin (\omega t + 40^\circ)$$

$$y_6 = 2 \sin (\omega t + 60^\circ)$$



شکل ۹-۱۸. مربوط به مثال حل شده ۱.

حل: ابتدا محورهای عمود بر هم $y-t$ را رسم می‌کنیم که y_1 با واحد طول ۲ به طور

مایل با زاویه $\theta = \omega t$ نسبت به محور t قرار می‌گیرد. از اصل برهم نهی استفاده می‌کنیم:

$$y_R = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6$$

می‌توان از طریق نقاله و خط‌کش θ_R و y_R را به دست آورد.

۲. کودکی دست‌های خیس خود را با صابون مالش می‌دهد و سپس برای بازیگوشی در آن به آرامی می‌دمد تا به اصطلاح بادکنک درست کند. اما می‌بیند که حباب صابونی نازک و رنگی ظاهر می‌شود. سپس با انگشت دیگر به آرامی قسمت پایین آن را به سمت خودش می‌کشد و در این حالت تغییرات رنگی حلقه‌ها را ببیند که گویی یک قسمت آن تاریک به نظر می‌رسد. علت را توضیح دهید.

حل: حباب که یک فیلم بسیار نازک است با کشش، پرتو نور را هم از سطح جلو و هم سطح پشتی بازتاب می‌دهد و در تاریکی تداخلی ویرانگر از تداخل پرتوهای بازتابیده به وجود می‌آید.

۳. وقتی بر لایه نازکی به ضخامت $0.4 \mu\text{m}$ میکرومتر از فیلم آب، نور سفید عمودی بتابد انتظار دارید که نور بازتابیده به چه رنگی ظاهر شود؟

حل: از رابطه‌های (۹-۱۵) و (۹-۱۶) استفاده کنید و با 400 nm و $N = \frac{4}{3}$ کمینه و بیشینه‌های طول موج را به دست آورید.

۴. دو صفحه نازک میکا مطابق شکل زیر قرار گرفته‌اند و بین آنها را شیشه پر کرده است. اگر زاویه رأس گوه را α (که زاویه کوچکی است) بگیریم آنگاه الف) محل بیشینه‌ها را نسبت به رأس گوه به دست آورید. ب) ضخامت گوه شیشه در محل بیشینه‌ها را به دست آورید. **حل:** شرط بیشینه تداخل را به کار می‌بریم (به زاویه فرودی توجه کنید):

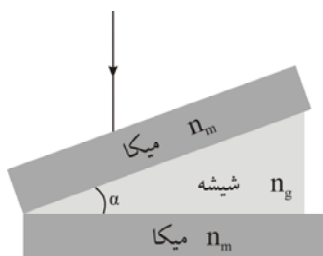
$$2n_y d_{\max} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

و ضخامت در هر نقطه از شیشه نسبت به رأس گوه برابر است با:

$$d = x \alpha$$

که x فاصله افقی نقطه تا رأس گوه می‌باشد و α زاویه رأس گوه است. از طرفی بنا به تعریف ضریب شکست می‌توان به رابطه عکس آنها با طول موج پرتو عبوری رسید یعنی

$$n_f = \frac{\lambda}{\lambda_f}$$



شکل ۹-۱۹. مربوط به مثال حل شده ۴.

با جایگذاری d و n_f داریم:

$$2 \frac{\lambda}{\lambda_f} (x \alpha) = \left(n + \frac{1}{2} \right) \lambda$$

و یا

$$x = \left(\frac{2n+1}{4\alpha} \right) \lambda_f$$

با $n = 0, 1, 2, \dots$ مکان‌های متوالی بیشینه‌ها از رأس گوه به دست می‌آیند که عبارتند از

$$x_{\max} = \frac{\lambda_f}{4\alpha}, \frac{3\lambda_f}{4\alpha}, \frac{5\lambda_f}{4\alpha}, \dots$$

ملاحظه می‌شود که فاصله بین نوارهای متوالی Δx را می‌توان با تفریق هر دو بیشینه بالا به دست آورد.

$$\Delta x = \frac{\lambda_f}{2\alpha}$$

یعنی می‌توان اختلاف ضخامت گوه را با توجه به $d = x\alpha$ معادل

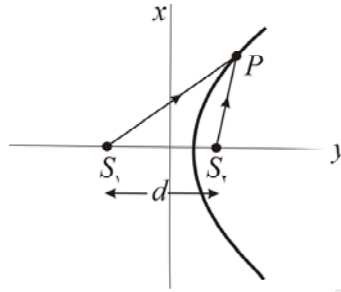
$$d = \frac{\lambda_f}{2}$$

به دست آورد. از طرفی پرتو بازتابیده از سطح زیرین دو بار از گوه می‌گذرد. اختلاف راه نوری بیشینه‌های مجاور برابر λ_f خواهد بود و می‌توان ضخامت پوسه در بیشینه‌های مختلف را به دست آورد.

$$d_{\max} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda_f}{2}$$

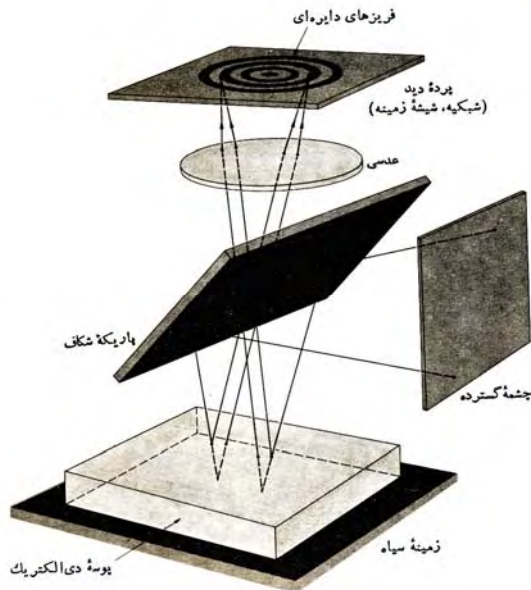
۹-۶ مسائل

۱. در شکل زیر دو پرتو نور همدوس از دو چشمه گسیلنده نور S_1 و S_2 گسیل می‌شوند. نشان دهید که منحنی با اختلاف فاز ثابت پرتوهای r_1 و r_2 یک هذلولی است.



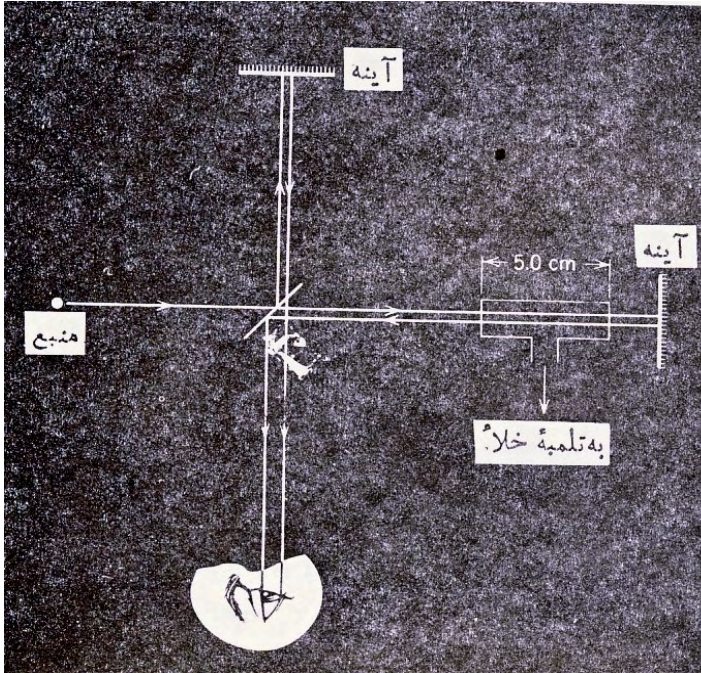
شکل ۹-۲۰. مربوط به مسئله ۱.

۲. نوارهای دایره‌ای هایدینگر که مرکز آنها روی محور عدسی است و با سیستم زیر به وجود آمده‌اند را مشاهده می‌کنید. شیوه تشکیل نوارهای دایره‌ای را شرح دهید.



شکل ۹-۲۱. مربوط به مسئله ۲.

۳. تداخل سنج مایکلسون را با شکل زیر در نظر بگیرید و شدت تداخل سنج که با تغییر محل آینه تغییر می‌کند را تفسیر کنید.



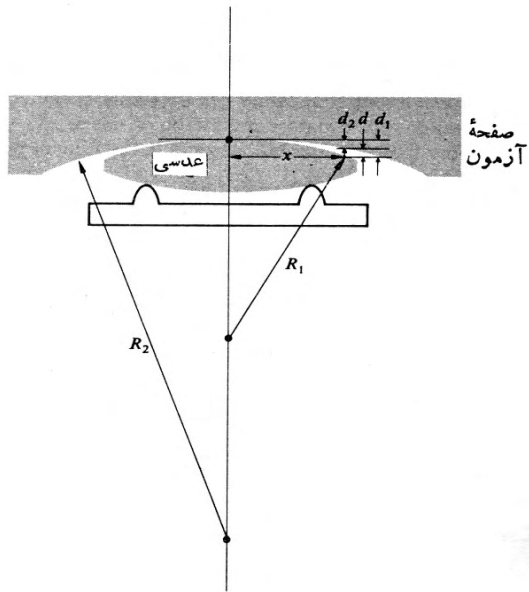
شکل ۹-۲۲. مربوط به مسئله ۳.

۴. در دو آینه فرنل فاصله چشمه تا پرده ۲ متر و فاصله بین نوارها ۶۰۰ نانومتر است. اگر طول موج پرتو نور ۶۰۰ nm باشد و فاصله عمودی چشمه نقطه‌ای حقیقی تا فصل مشترک دو آینه یک متر باشد زاویه بین دو آینه را به دست آورید.

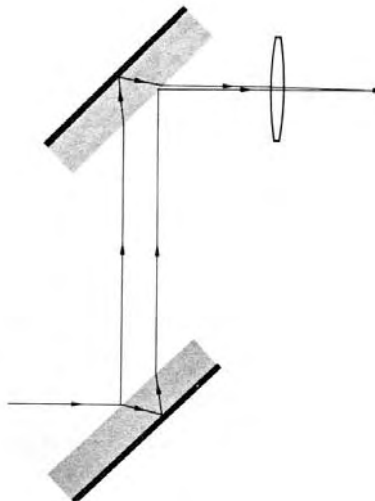
۵. در شکل ۹-۲۳ نشان دهید که

$$d = x^2 \frac{(R_2 - R_1)}{2R_1 R_2}$$

۶. تداخل سنج ژامن که در شکل ۹-۲۴ نشان داده شده است، به چه کار می‌آید؟ توضیح دهید.

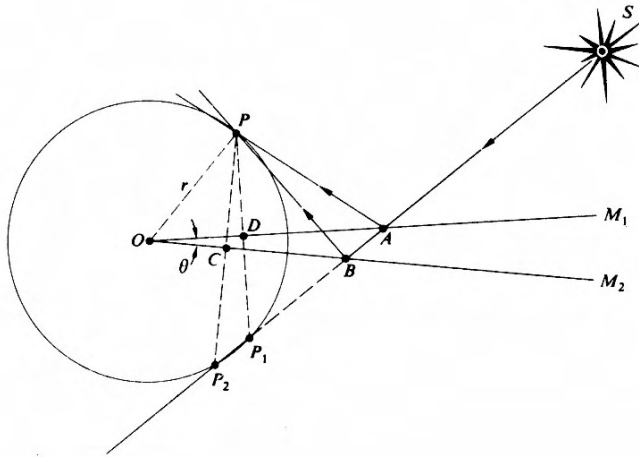


شکل ۹-۲۳. مربوط به مسئله ۵.



شکل ۹-۲۴. مربوط به مسئله ۶.

۷. در شکل ۹-۲۵ دو تیغه مرزی $\overline{OM_1}$ و $\overline{OM_2}$ پرتوهای نور را باز می‌تابند تا با یکدیگر تداخل کنند. نشان دهید که اختلاف راه نوری این دو پرتو $2r \sin \theta$ است.



شکل ۹-۲۵، مربوط به مسئله ۷.

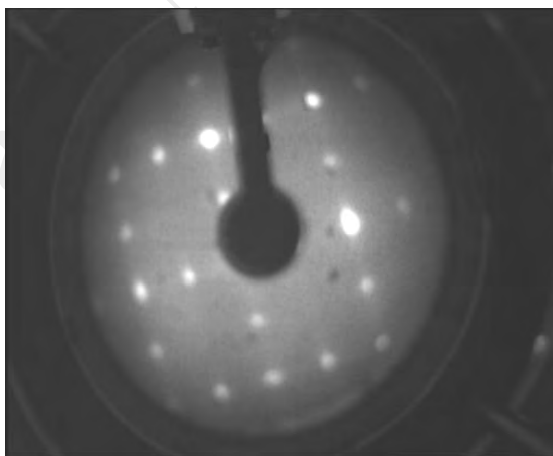
۸. حلقه‌های نیوتن با نور تقریباً تکفام $0.7 \mu\text{m}$ میکرومتری مشاهده می‌شوند. اگر شعاع دهمین حلقه روشن 8 cm باشد شعاع انحنای عدسی دستگاه تداخل سنج را بیابید.

فصل دهم

نورشناسی موجی (پراش)

۱-۱۰ مقدمه

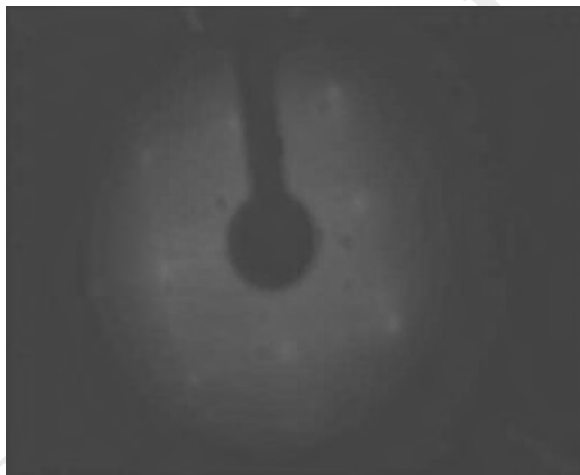
امروزه با استفاده از پراش می‌توان به مطالعه اتم‌ها، مولکول‌ها و بلورها پرداخت. نمونه‌ای از کاربرد پراش را می‌توان در پراش الکترون‌های انرژی پایین برای پی بردن به ساختار کریستالی و یا آمورف (بی‌شکل) سطح مواد پی برد. مثلاً همانند شکل ۱-۱۰ که از پراش الکترون‌های انرژی پایین یا *LEED* نام برد که چگونه وجود اتم‌های سیلیکون را به صورت ساختار کریستالی نشان می‌دهد.



شکل ۱-۱۰. تصویر *LEED* از سیلیکون.

از طرف دیگر می‌توان به شکل ۱۰-۲ اشاره کرد که هیچ نقطه قابل تمایزی وجود ندارد و به عبارتی سطح جسم را به صورت یک ماده تار و بی‌شکل مشاهده می‌کنید که دلالت بر آموروف یا بی‌شکل بودن اکسید سیلیکون دارد.

هر چند در این فصل تمرکز بر پراش پرتوهای نور می‌باشد ولی نمونه‌های بالا نشان دهنده استفاده از تکنیک پراش در مطالعه ساختار سطح مواد بسیار مهمی چون سیلیسیم و اکسید سیلیسیم را نشان می‌دهد که مواد اصلی تشکیل دهنده قطعات الکترونیکی نظر ترانزیستورها هستند که سیلیسیوم به عنوان زیر لایه و اکسید سیلیسیوم و هم به عنوان ماده مناسب گیت دی‌الکتریک ترانزیستور به کار می‌آیند که کریستالی یا بی‌شکل بودن این ماده بسیار پر اهمیت می‌باشد و به همین دلیل فن پراش حائز اهمیت است.



شکل ۱۰-۲. تصویر *LEED* از اکسید سیلیکون.

۱۰-۲ پراش پرتوهای نوری

شاید تا حال تجربه کردید که وقتی از پشت پارچه‌ای با روزنه‌های ریز به نور لامپ جابجایی در اتاقی خیره می‌شوید پرتوهای باریک نور را به صورت پاشیده شده و به عبارتی موجک‌های بسیاری در کنار هر پرتو نور می‌بینید این همان پدیده پراش است.

همینطور در عبور پرتوهای نور از دو شکاف یانگ ملاحظه کردید که تنها دو پرتو در نقطه‌ای از فضا که به هم می‌رسند یا تداخل سازنده و یا ویرانگر را خواهند داشت که موجب روشنی یا تاریکی آن نقطه می‌شوند. اما پرسشی مطرح است که در ناحیه سایه‌ها هم، پرتوهای نوری هستند. بگذارید بهتر عنوان کنیم تفاوت ابتدائی تداخل و پراش را اگر تعداد محدودی از پرتوها به یکدیگر برسند می‌توان اینطور بیان کرد که به آن تداخل گویند. ولی چنانچه تعداد بسیار زیادی از پرتوها را در نظر بگیریم آنگاه با پدیده پراش سروکار داریم.

در حالت دیگر می‌توان به نسبت طول موج (λ) پرتو نور فرودی بر شکافی به اندازه a اشاره کرد آنگاه چنانچه طول موج (λ) خیلی کوچکتر از a باشد پدیده پراش اتفاق نخواهد افتاد ولی چنانچه اندازه a و λ قابل مقایسه باشند و یا حتی اندازه شکاف a از اندازه طول موج λ پرتو نور کوچکتر باشد آنگاه پرتو نور هنگام عبور پراشیده می‌شوند و نقش پراش را به نمایش می‌گذارند حتی اگر اندازه بعد روزنه شکاف بسیار بسیار کوچکتر از طول موج پرتو نور باشد آنگاه جالب است حتی شکاف یا روزنه به چشم نمی‌آید و مثل این که شکافی به صورت یک مانع در برابر پرتو نور وجود ندارد. بحث در جزئیات پدیده پراش یک تک شکاف باریک را به بخش بعد موکول می‌کنیم و در اینجا به حاشیه‌های هر نوار بر می‌گردیم. منظور این است که نوارهای روشن را با سایه‌های تاریک ملاحظه می‌کنید و وضوحی در تمایز و باریکی نوارها نمی‌توان دید. برای درک مطالبی که در بالا به آنها اشاره شده است. مشاهده می‌کنید که پرتوهای نور به خط مستقیم منتشر نشده‌اند بلکه هر گاه مانعی را در سر راه خود دیدند آن را دور زدند.

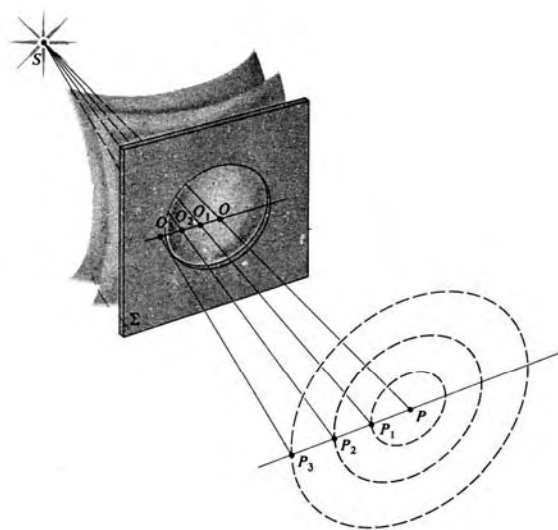
۳-۱۰ پراش از یک شکاف

مطابق شکل ۳-۱۰ چنانچه در مسیر یک پرتو نوری، شکافی به پهنای d قرار گیرد آنگاه تصویر در آن نسبت به امتداد اصلی زاویه θ را می‌سازد که با توجه به شکل می‌توان رابطه زیر را برای زاویه مزبور نوشت:

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{d} \quad (1-10)$$

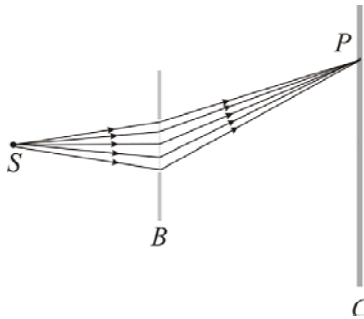
رابطه (۱-۱۰) نشان می‌دهد که میزان انحراف از خط مستقیم به دو کمیت کلیدی وابسته است که در بخش ۲-۱۰ به آن اشاره شد و آن طول موج پرتو نور (λ) و پهنای

شکاف (d) است. اگر λ کوچکتر از d باشد زاویه θ کوچکتر می‌شود و به عبارتی انحراف از خط مسیر مستقیم کمتر می‌گردد. ولی در عوض انحراف بسیار زیادی را با بزرگ بودن $\frac{\lambda}{d}$ داریم. یعنی هر چقدر λ بزرگتر از d گردد θ بزرگتر می‌شود و به عبارتی میزان انحراف بیشتری را شاهد خواهیم بود و در هنگامی که $\lambda = d$ باشد $\theta = \frac{\pi}{2}$ است و به جایی هم می‌توان رسید که $\lambda \gg d$ شود که در آن صورت شکاف به چشم نمی‌آید.



شکل ۳-۱۰. الگوی پراش هنگامی که فاصله چشمه تا شکاف کم باشد.

بنابراین اگر پهنای شکاف و یا ابعاد جسمی از طول موج پرتو نور فرودی و یا طول موج فرودی کوچکتر و یا برابر آن باشد آن شکاف یا جسم و در حالت کلی اجزای آن را نمی‌توان به وضوح از هم تمییز داد. در شکل ۴-۱۰ تأثیر کوچک شدگی پهنای شکاف یا روزنه را نسبت به اندازه طول موج پرتوی نور فرودی بر تصاویر به دست آمده نشان دادیم که وجود پدیده پراش در هنگامی که طول موج از پهنای شکاف بزرگتر است را به خوبی می‌بینید.



شکل ۱۰-۴. پراش فرنل.

پدیده مزبور را نمی‌توان با اپتیک هندسی توجیه کرد و فرانیسیکو گریمالدی اولین کسی بود که در قرن هفدهم بیان داشت که نور می‌تواند انتشاری غیر از انتشار راست خط هم داشته باشد.

پس هر موجی که با شکل تابع و دامنه‌اش معرفی می‌شود می‌تواند دامنه یا فاز قسمتی از جبهه موج آن در هنگام برخورد به مانع سر راهش، تغییر مسیر دهد و پدیده مهم پراش را در معرض نمایش بگذارد.

نام جدید پراش بر آن نهاده شده است تا گمان نشود که همان تداخل است و تابع اصل هویگنس می‌باشد. به یاد دارید که بنا به اصل هویگنس هر نقطه بر جبهه موجی خود نقش چشمه مولد موجک‌های کروی بعدی است. بنابراین می‌توان مشخص کرد که پوش موجک‌های بعدی هستند که به جلو پیش می‌روند و در واقع منحنی مماس بر موجک‌های کروی نمایان گر حرکت آنها می‌باشد. مشکل بزرگ این اصل که سبب شده تا در تشریح پدیده پراش از آن استفاده نشود، به نادیده گرفتن بخش عمده‌ای از هر موجک بعدی (و یا ثانویه) است و تنها موجک‌هایی که با پوش در تماس هستند و در اصطلاح با پوش مشترک هستند مدنظر اصل هویگنس قرار می‌گیرند. اصلاً در اصل هویگنس، نقش طول موج پرتو نور چشمه‌ها تا به حدی کم رنگ بوده است که در واقع به مستقل بودن اصل هویگنس از طول موج حکایت می‌کرد در حالی که در بالا نسبت طول موج به ابعاد روزنه و یا شکاف را دیدید که

چگونه خاصیت موجی ذره و نور را نشان می‌دهد و میزان تغییر آن نسبت به پهنای روزنه، باعث پدیده‌هایی نظیر پراش می‌شود.

طبق معمول شخص یا اشخاص دیگری می‌آیند تا با اصلاح اصل هویگنس تلاش کنند در تشریح پدیده پراش هم از آن استفاده شود. در اینجا به فرنل اشاره می‌کنیم که اصل هویگنس - فرنل تا آنجایی کار آمد شد که بتوان آن را با عبارت زیر بیان کرد:

هر نقطه بدون مانع از جبهه موج نوری، نقش چشمه نوری را بازی می‌کند و موجب ایجاد موجک‌های بعدی با بسامدی برابر بسامد پرتوی فرودی می‌شود. دامنه میدان در نقطه‌ای که دورتر قرار دارد، نتیجه برهم نهی تمام موجک‌ها است.

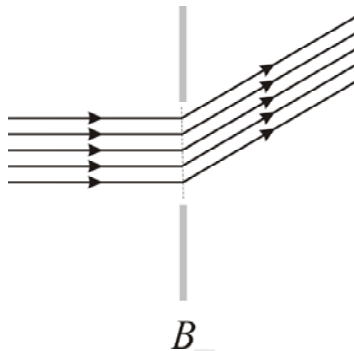
البته این اصل (هویگنس - فرنل) هم اشکالاتی دارد که پرداختن به آن از حوصله کتاب حاضر خارج است. هرچند گوستاو کیرشهوف با استفاده از یک نظریه قدیمی جامد - کشسان نور تلاش کرد تا آن را اصلاح کند ولی طرح و پی‌گیری مواردی این چنین و چگونگی اصلاح نظرات قدیمی‌تر را به منابع آخر کتاب ارجاع می‌دهیم.

۱۰-۴ پراش فرنل و پراش فرانهورفر

در فصل‌های آخر کتاب از سه چیز به نام چشمه گسیلنده پرتو نور، مانع و پرده‌ای که نقش تداخل یا پراش بر آن قابل مشاهده است سخن به میان آمد. در فصل پیش برای این که پدیده تداخل صورت گیرد حداقل به دو موج و یا پرتو نور نیاز بود و مانع یا موانع به عنوان ابزاری بودند که موج ورودی را به دو یا چند بخش تقسیم می‌کردند و ترکیب مجدد آنها تداخل را به وجود می‌آورد. در این فصل، مانع دارای شکافی بود که پهنای آن کوچکتر از طول موج پرتو نور فرودی بوده است و پدیده پراش بر پرده نقش می‌بست. آن چیزی که مطرح بود طول موج پرتو نور و اندازه شکاف بوده است و اصلاً از فاصله چشمه و پرده تا مانع صحبتی نشد.

اکنون به اهمیت فاصله چشمه گسیلنده پرتو نور تا شکاف و نیز فاصله پرده تا شکاف می‌پردازیم و تأثیر آن را در الگو پراش بررسی می‌کنیم. دلیل آن این است که تابع موج همراه با ذره آزاد کروی است و نیز در اینجا موج‌ها نیاز به طی مسیری دارند که به صورت تخت مانسته گردند. پس اگر فاصله چشمه تا شکاف کم باشد، موج‌ها فرصت نمی‌کنند تا به صورت امواج تخت در آیند و همین امر در هنگامی که پرده و

شکاف نزدیک هم هستند اتفاق می افتد و لذا موجها موازی نمی شوید و الگوی پراش به صورت شکل ۱۰-۳ در می آید. این پراش به پراش فرنل معروف است و چگونگی قرار گرفتن چشمه و پرده تا شکاف در پراش فرنل در شکل ۱۰-۴ آمده است تا با پراش دیگر که چشمه و پرده در فاصله دوری از شکاف قرار دارند و در شکل ۱۰-۵ نمایش داده شده است مقایسه گردد و تفاوتها را به راحتی دریابید.



شکل ۱۰-۵. چشمه و پرده در فاصله دور از شکاف قرار دارند.

- مثال ۱:** در پراش ایجاد شده پانک-شکافی، پرتوها دارای معادله سینوسی یکسان می باشند. الف) θ چقدر باشد تا وسط نقش پراش به دست آید؟
 ب) به طریق ترسیمی، اختلاف فاز و دامنه برآیند N پرتو این چنینی را بیابید.
 ج) شدت حاصل از تک شکاف را پیدا کنید.

حل: الف) با $\theta = 0$ می توان وسط نقش پراش را به دست آورد. توجه داشته باشید که اختلاف فاز میان نوارهای مجاور هم صفر می شود. در این حالت چون اختلاف فازی بین آنها نیست پس همه آنها در امتداد هم قرار می گیرند همانطوری که در شکل زیر می بینید.

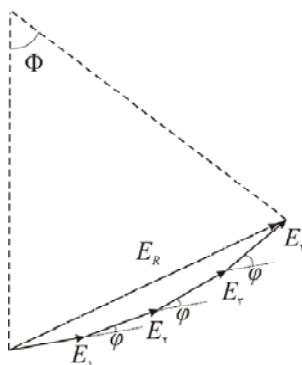


شکل ۱۰-۶. مربوط به بخش الف) مثال ۱.

و میدان برآیند مجموع E ها می شود یعنی

$$E = \sum_i E_i \quad (۲-۱۰)$$

ب) اکنون یک اختلاف فاز یکسان بین موجی با موج قبل و بعد آن وجود دارد. بدین ترتیب چند تا از آن را در موج شکل زیر رسم کردیم.



شکل ۷-۱۰. مربوط به بخش (ب) مثال ۱.

توجه داشته باشید که میدان E با مجذور دامنه A_0 متناسب است همانطوری که قبلاً در تمرین فصل ۷ به دست آوردیم.

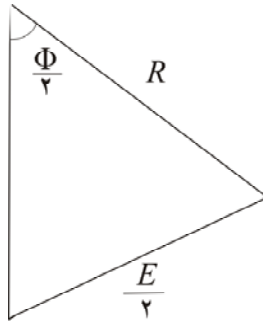
در اینجا اگر موج‌های بسیار زیادی در نظر گرفته شود و شکل بالا را ادامه دهیم به یک دایره‌ای می‌رسیم و چون یک دایره برابر ۲π رادیان است و هر زاویهٔ مقابل E را می‌توان نسبت به ۲π به دست آورد آنگاه با توجه به برابری پیرامون دایره با طول موج پرتو، مقدار اختلاف راه به دست می‌آید که برابر $A \sin \theta$ است. به عبارتی

$$\frac{\Phi}{۲\pi} = \frac{y}{\lambda}$$

و یا

$$\frac{\Phi}{۲\pi} = \frac{A \sin \theta}{\lambda} \Rightarrow \Phi = \frac{۲\pi}{\lambda} A \sin \theta \quad (۳-۱۰)$$

همچنین با توجه به شکل زیر می‌توان میدان E مربوط هر یک را به دست آورد:



شکل ۱۰-۸ مربوط به محاسبه E

$$\sin\left(\frac{\Phi}{2}\right) = \frac{\frac{E}{2}}{R} = \frac{E}{2R}$$

و یا

$$E = 2R \sin\left(\frac{\Phi}{2}\right) \quad (4-10)$$

در جایی که $\sin \frac{\Phi}{2} \sim \frac{\Phi}{2}$ است آنگاه داریم:

$$E_m \approx 2R \left(\frac{\Phi}{2}\right) \sim R\Phi$$

که

$$R = \frac{E_m}{\Phi} \quad (5-10)$$

و

$$E = 2R \sin\left(\frac{\Phi}{2}\right) \sim \frac{2E_m}{\Phi} \sin\left(\frac{\Phi}{2}\right)$$

$$E = E_m \frac{\sin\left(\frac{\Phi}{2}\right)}{\frac{\Phi}{2}} \quad (6-10)$$

چون شدت در نقش (I) با مربع میدان E متناسب است پس:

$$I = I_m \left(\frac{\sin \frac{\Phi}{2}}{\frac{\Phi}{2}} \right)^2 \quad (7-10)$$

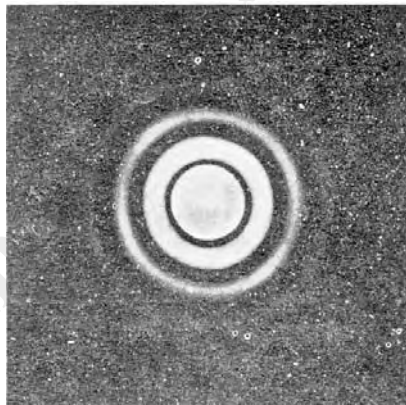
که شدت حاصل از تک پراش است که I_m شدت نقش مرکزی پراش می‌باشد.

مثال ۲: منحنی تغییرات شدت نسبی در پراش حاصل از تک شکاف برای سه مقدار برحسب زاویه θ در هالیدی به صورت شکل (۱۰-۹) ترسیم شده است. با استفاده از آن معلوم کنید:

الف) تحت چه شرایطی کمینه‌ها صورت می‌گیرد؟

ب) شدت بیشینه‌های بعدی پراش چقدر است؟

ج) نیم پهنای بیشینه مرکزی پراش را از چه رابطه‌ای می‌توان به دست آورد؟



شکل ۱۰-۹. نمایش پراش از یک تک شکاف.

حل: الف) با توجه به رابطه (۷-۱۰) می‌بینید که کمینه‌ها در جایی صورت

می‌گیرند که $\frac{\sin \frac{\Phi}{2}}{\frac{\Phi}{2}}$ صفر باشد که این با شرط به ازاء $\Phi = 2m\pi$ صورت می‌پذیرد و

$$m = 1, 2, \dots$$

(ب) بیشینه‌ها در وسط کمینه‌ها ظاهر می‌شوند و بالطبع جایی است که شرط قسمت (الف) برقرار نباشد پس بیشینه‌های بعدی در

$$\Phi = (2m + 1)\pi$$

که

$$m = 1, 2, 3$$

است پدیدار می‌شود که با توجه به

$$\frac{\sin \frac{\Phi}{2}}{\frac{\Phi}{2}} = \frac{\sin \left(\frac{(2m+1)\pi}{2} \right)}{\frac{(2m+1)\pi}{2}} = \frac{(\pm 1)^m}{\frac{(2m+1)\pi}{2}}$$

و یا

$$\frac{\sin \frac{\Phi}{2}}{\frac{\Phi}{2}} = \frac{1}{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}$$

نسبت شدت بیشینه‌های بعدی به قبلی به دست می‌آید و با استفاده از رابطه (۷-۱۰)

$$\frac{I}{I_m} = \frac{1}{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2} \quad (۸-۱۰)$$

که با $m = 1, 2, 3, \dots$ به ترتیب مقدار $0,7045$ ، $0,16$ ، $0,083$ و ... به دست می‌آید که نشان دهنده سیر کاهشی دامنه‌ها و در نتیجه شدت‌های بعدی در قیاس با دامنه و شدت قبلی است.

(ج) منظور از نیم پهنا که در اینجا مطرح شده است به زاویه میان دو نقطه در پراش فرانهوفر بر می‌گردد که شدت در این دو نقطه نصف شدت مرکزی پراش است یعنی

$$I = \frac{I_m}{2}$$

و چون اختلاف فاز آنها برابر π است آنگاه با استفاده از رابطه (۷-۱۰) می‌توان نوشت:

$$I = I_m \left(\frac{\sin \frac{\Phi}{2}}{\frac{\Phi}{2}} \right)^2$$

$$\frac{I}{I_m} = \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} \right)^2 = 0,4$$

در صورتی که نسبت $\frac{I}{I_m} = 0,5$ بوده است این تفاوت به شیوه حل مسأله بر می‌گردد که تعیین ترسیمی را به جای محاسبات تحلیلی به کار گرفتیم و با توجه به شکل که $\frac{A}{\lambda} = 5$ است و با استفاده از رابطه (۱۰-۳) نوشت:

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} A \sin \theta$$

که

$$\sin \theta = \frac{\Phi \lambda}{2\pi A} \Rightarrow \Delta \theta = 2\theta = 2 \sin^{-1} \left(\frac{\Phi \lambda}{2\pi A} \right)$$

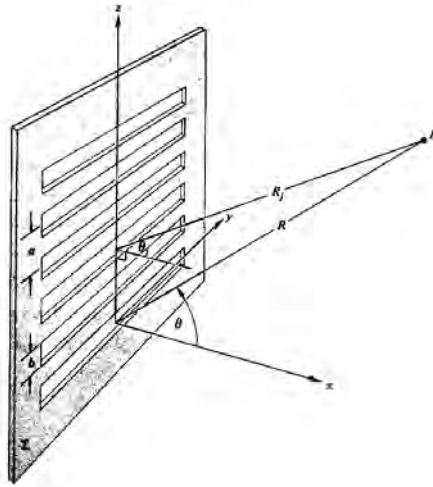
مثال ۳: آنتن‌های تابان همانند N نوسانگر نقطه‌ای همدوس هستند که موجک‌های گروهی $E_1 = E_0(r) e^{i(k_i \cdot r - \alpha t)}$ را تولید می‌کنند. با توجه شکل (۱۰-۱۰) نشان دهید که وابستگی شدت با تعداد نوسانگر (N)، فاصله بین هر دو نوسانگر مجاور (d) و زاویه پرتو (θ) به صورت رابطه زیر است:

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \left[N \left(\frac{kd}{2} \right) \sin \theta \right]}{\sin^2 \left[\left(\frac{kd}{2} \right) \sin \theta \right]}$$

حل: می‌توان میدان الکتریکی برآیند E را در فاصله بسیار دور به صورت مجموع تک میدان‌ها نوشت یعنی:

$$E = \sum_{i=1}^N E_i = E_1 + E_2 + \dots + E_N$$

و چون دامنه و قسمت زمانی میدان برای تمام آنها یکسان است پس می‌توان با در نظر گرفتن اختلاف راه هر کدام از نوسانگرهای نقطه‌ای، اول به رابطه زیر دست یافت.



شکل ۱۰-۱۰. نمایش پراش توسط طوری پراش.

$$E = E_0(r) e^{i(kr - \omega t)} \left[1 + e^{ik(r_2 - r_1)} + e^{ik(r_3 - r_1)} + e^{ik(r_4 - r_1)} + \dots + e^{ik(r_N - r_1)} \right] \quad (9-10)$$

در اینجا با اختلاف راه نوری سر و کار داریم که برابر است با فاصله‌ای که نور می‌پیماید ($d \sin \theta$) در ضریب شکست محیطی (n) که نور، سیری مزبور را می‌پیماید یعنی با جای گذاری k به جای n می‌توان نوشت:

$$\delta = kd \sin \theta$$

که با برابر بودن اختلاف راه بین هر دو موج مجاور هم می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
 k(r_2 - r_1) &= kd \sin \theta = \delta \\
 k(r_3 - r_1) &= k(r_2 - r_1) + k(r_2 - r_1) \\
 &= \delta + \delta \\
 &= 2\delta
 \end{aligned}$$

و به همین شکل

$$k(r_N - r_1) = (N - 1)\delta$$

و از آنجا

$$\begin{aligned}
 e^{ik \cdot (r_2 - r_1)} &= e^{i\delta} \\
 e^{ik \cdot (r_3 - r_1)} &= e^{2i\delta} = (e^{i\delta})^2 \\
 &\vdots \\
 e^{ik \cdot (r_N - r_1)} &= e^{(N-1)i\delta} = (e^{i\delta})^{N-1}
 \end{aligned}$$

پس نسبت میدان الکتریکی بعدی به قبلی اش برابر خواهد بود با قدر نسبت:

$$\frac{E_i}{E_{i-1}} = e^{i\delta} = q$$

با استفاده از تصاعد هندسی می توان مجموع رابطه (۱۰-۹) را به دست آورد:

$$\text{مجموع} = t_1 \frac{1-q^N}{1-q} = 1 \times \frac{1-e^{iN\delta}}{1-e^{i\delta}} \quad (10-10)$$

با جایگذاری رابطه (۱۰-۱۰) در رابطه (۹-۱۰) داریم:

$$E = E_0(r) e^{i(kr_1 - \omega t)} \frac{1 - e^{iN\delta}}{1 - e^{i\delta}}$$

و یا

$$E = E_0(r) e^{i(kr_1 - \omega t)} \frac{e^{i\frac{N\delta}{2}} \left(e^{-i\frac{N\delta}{2}} - e^{i\frac{N\delta}{2}} \right)}{e^{i\frac{\delta}{2}} \left(e^{-i\frac{\delta}{2}} - e^{i\frac{\delta}{2}} \right)}$$

می‌دانید که

$$\sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

پس

$$E = E_0(r) e^{i(kr - \alpha)} \frac{e^{i \frac{N\delta}{2}} \sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{e^{i \frac{\delta}{2}} \sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

یا

$$E = E_0(r) e^{-i\alpha} e^{i \left[kr + (N-1) \frac{\delta}{2} \right]} \left(\frac{\sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} \right)$$

با تعریف

$$kr + (N-1) \frac{\delta}{2} = kR$$

داریم:

$$E = E_0(r) e^{i(kR - \alpha)} \left(\frac{\sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} \right)$$

و چون شدت پراش برابر با مجذور میدان متناسب است پس

$$I = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} \quad (11-10)$$

که I_0 شدت ناشی از هر تک چشمه می‌باشد که به نقطه دور P می‌رسند و شدت کل رسیده به نقطه P که در فصل تداخل به دست آوردیم در اینجا به صورت رابطه زیر نوشته می‌شود:

$$I = 4 I_0 \cos^2 \left(\frac{\delta}{2} \right) \quad (12-10)$$

که از آنجا

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \left[N \left(\frac{kd}{2} \right) \sin \theta \right]}{\sin^2 \left[\left(\frac{kd}{2} \right) \sin \theta \right]} \quad (13-10)$$

۱۰-۵ ترکیب تداخل و پراش

چندین بار تأکید شد که تمایز بین تداخل و پراش با نسبت طول موج پرتو نور (λ) به پهنای شکاف (d) معین می‌شود. آزمایش دو شکاف یانگ را در نظر بگیرید. دیده بودید وقتی $\lambda < d$ است هر شکاف موج را منحرف می‌کند تا پس از رسیدن آنها به یکدیگر نقش تداخلی را در پرده مشاهده می‌کنیم. حال اگر اندازه شکاف‌ها کوچک و کوچکتر شود به طوری که $d \ll \lambda$ گردد آنگاه پدیده پراش اتفاق می‌افتد و در اینجا هم پراش پرتو نوری طوری بروز می‌کند که در قسمت مرکزی پرده، نقش یکنواخت مربوط به هر شکاف را مشاهده می‌کنید. این پرتوهای پراشیده هم بر روی پرده به هم می‌رسند و تداخل می‌کنند با این تفاوت که نوارهای با شدت‌های مختلف شکل می‌گیرد و نقش این پدیده تداخلی از نقش پراش تک شکافی پیروی می‌کند. آنگاه در رابطه

$$I_{\text{تداخل}} = (I_m)_{\text{تداخل}} \cos^2 \beta \quad (14-10)$$

$$\beta = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta \quad (15-10)$$

داده می‌شود که a فاصله میان خطوط مرکزی شکاف‌ها است. از طرفی در رابطه (۱۰-۷) دیدید که

$$I_{\text{پراش}} = (I_m)_{\text{پراش}} \left(\frac{\sin \left(\frac{\Phi}{2} \right)}{\frac{\Phi}{2}} \right)^2 = (I_m)_{\text{پراش}} \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2$$

که در آن

$$\alpha = \frac{\Phi}{\gamma} = \frac{\pi A}{\lambda} \sin \theta$$

آنگاه به راحتی می‌توان رابطه‌ای برای شدت (تداخل + پراش) به دست آورد:

$$I = I_m \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \cos^2 \beta \quad (16-10)$$

در پراش فرانوفر پرتوهای موازی از چشمه گسیلنده به یک نقطه می‌رسند و سبب می‌شوند تا دو پرتو پراشیده همدوس با یکدیگر تداخل کنند.

مثال ۴: دیدید که هر نقطه بر جبهه موج هویگنس یک موجک کروی را ایجاد یا به عبارتی گسیل می‌دارد که میدان مربوط به آن بسته به "قدرت چشمه" E_0 می‌تواند به صورت رابطه زیر داده شود:

$$E = \frac{\epsilon_0 e^{i(kr - \alpha)}}{r}$$

اگر در نقطه‌ای با فاصله بسیار زیاد که به فاصله بسیار ناچیزی از یکدیگر قرار دارند در جبهه موج بالا اختیار شوند آنگاه رابطه میدان E برآیند آنها را پیدا نمایید.

حل: چون تعداد نقاط بسیار زیاد است و فاصله بین نقاط بسیار ناچیز می‌باشد می‌توان از انتگرال استفاده کرد و اما متغیر انتگرالی می‌باید مربوط به یک چشمه خطی همدوس باشد. پس یک متغیر انتگرالی در یک راستای فرضی مثل z خواهیم داشت. که هر عنصر Δz آن به تعداد $\frac{N}{L} \Delta z$ چشمه می‌باشد که طول کامل آرایه است حال چنانچه از اختلاف فاز نسبی در عنصرها چشم‌پوشی شود آنگاه مقدار r که فاصله عنصر Δz تا پرده است را می‌توان تقریباً ثابت گرفت و آرایه را به صورت خطی از نقاط و به عبارت بهتر یک آرایه چشمه خطی پیوسته همدوس در نظر گرفت آنگاه

$$\Delta E = \frac{\epsilon L}{r} e^{i(kr - \alpha)} \Delta z$$

و یا چون به طور پیوسته تغییر می‌کنند می‌توان رابطه بالا را به صورت دیفرانسیلی زیر نوشت:

$$dE = \frac{\mathcal{E}_L}{r} e^{i(kr - \omega t)} dz \quad (17-10)$$

که قدرت چشمه واحد طول \mathcal{E}_l به صورت زیر تعریف شده است:

$$\mathcal{E}_L = \frac{1}{L} \lim_{N \rightarrow \infty} (N \mathcal{E}_0) \quad (18-10)$$

که از آنجا

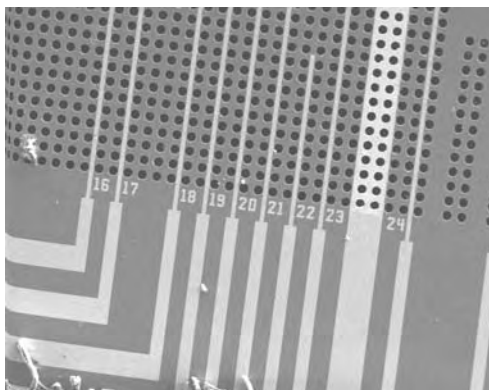
$$E = \mathcal{E}_L \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{e^{i(kr - \alpha)}}{r} dz \quad (19-10)$$

در رابطه (۱۹-۱۰) نکته مهمی نهفته است و آن این که فاصله مانع تا پرده r باید تابعی از z باشد در غیر این صورت r از انتگرال بیرون می‌آید. حال بسته به کوچک و بزرگ بودن r به ترتیب پراش فرنل و یا فرانهوفر را خواهیم داشت. پس انتگرال رابطه (۱۹-۱۰) توانایی تمایز دو پراش فرنل و فرانهوفر را به ما می‌دهد.

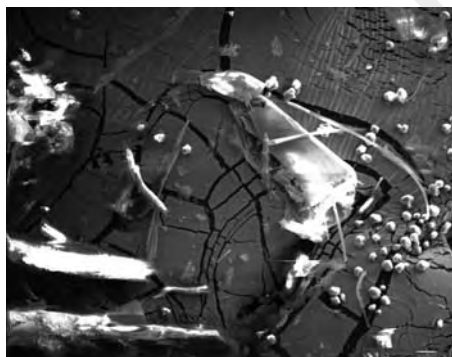
۱۰-۶ توان تفکیک سازی دستگاه‌های روبشی

تحولات سریعی که در ساخت ابزارهای تصویر سازی به وجود آمده را نمی‌توان نادیده گرفت. نمونه‌ای از این دستگاه که میکروسکوپ الکترونی است قادر است از اجسام رسانا تصاویری با توان تفکیک‌سازی بالا بدهد و حتی با نشان دادن پودر طلا بر اجسام غیررسانا نیز تصاویری همانند شکل‌های ۱۰-۱۰ تا ۱۶-۱۰ را بدهد.

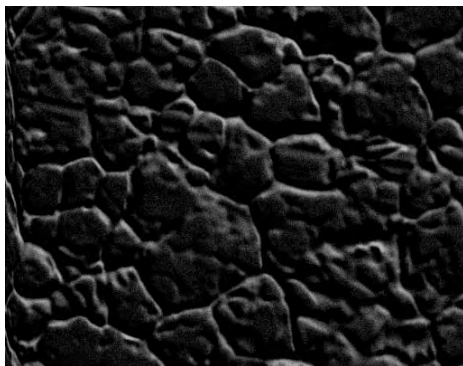
در این تصاویر به راحتی می‌توان هر جزء بدن را دید و به مطالعه آن پرداخت. در میکروسکوپ الکترونی روبشی الکترونی‌هایی که بر سطح نمونه می‌رسند به دو صورت الکترون‌های ثانویه (برهم‌کنش با الکترون‌های نو و الکترون‌های پس زده (برهم‌کنش با هسته‌های نمونه) ظاهر می‌شوند و تصاویر در شکل‌های ۱۰-۱۱ تا ۱۴-۱۰ را می‌دهند. این میکروسکوپ الکترونی شبیه میکروسکوپ‌های نوری است و تنها تفاوت‌های کوچکی که در شکل ۱۰-۱۵ ملاحظه می‌کنید را دارند.



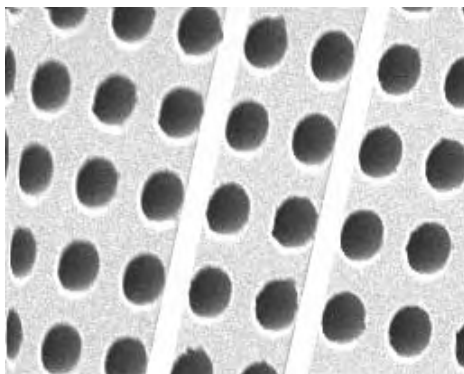
شکل ۱۰-۱۱. تصویر مربوط به میکروسکوپ الکترونی روبشی.



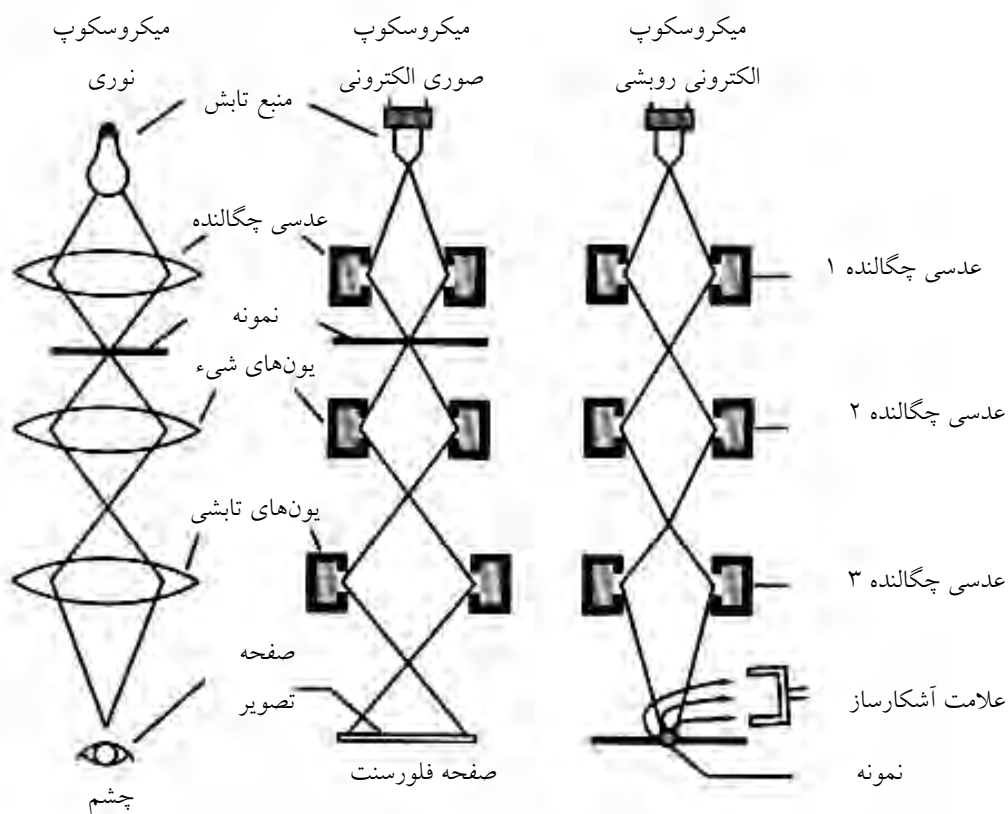
شکل ۱۰-۱۲. تصویر مربوط به میکروسکوپ الکترونی روبشی.



شکل ۱۰-۱۳. تصویر مربوط به میکروسکوپ الکترونی روبشی.



شکل ۱۰-۱۴. تصویر مربوط به میکروسکوپ الکترونی روبشی.



شکل ۱۰-۱۵. ساختار میکروسکوپ‌های الکترونی.

اکنون با توجه به مطالبی که در این فصل گفته شده، می‌توان قدرت تفکیک‌سازی آن را به دست آورد. شکاف را یک روزنه دایره‌ای در نظر می‌گیریم که D قطر روزنه دایره‌ای است که در بالاتر از یک عدسی همگرا قرار گرفته است و چنانچه طول موج پرتوهای نور و یا در میکروسکوپ الکترونی طول موج پرتو الکترونی بزرگتر از قطر روزنه باشد آنگاه پدیده پراش را خواهیم داشت و از آنجایی که فاصله پرتو تا روزنه نسبتاً زیاد است (توجه داشته باشید فاصله دوری که در پراش فرانهوفر مطرح شده است آن چنان زیاد تصور نکنید و در آزمایشگاه تا حدود یک متر آن را خواهید دید) می‌توان پراش را یک پراش فرانهوفر در نظر گرفت. با نقش ایری ستاره‌شناس سلطنتی انگلیسی که در آن D قطر روزنه به عنوان قطر قرص ایری و f فاصله کانونی عدسی و λ طول موج است، شعاع اولین کمینه نقش پراش از روزنه را مطابق رابطه زیر به دست آورد:

$$\sin \theta = 1,22 \frac{\lambda}{D} \quad (20-10)$$

که از آنجا حد زاویه‌ای تفکیک به دست می‌آید:

$$\Delta \theta = 1,22 \frac{\lambda}{D} \quad (21-10)$$

و آنگاه توان تفکیک دستگاه روبشی عبارت است از

$$(\Delta R)_{\min} = \frac{1,22 f \lambda}{D} \quad (22-10)$$

به $(\Delta R)_m$ معیار تفکیک ریلی می‌گویند. یعنی بیشینه پراش یکی بر اولین کمینه نقش پراش دیگری می‌افتد. پس برای داشتن قدرت تفکیک بالاتر لازم است از پرتوهایی با طول موج کوچک‌تر استفاده کرد هنگامی که فاصله کانونی و قطر روزنه ثابت می‌باشند. اثبات رابطه (۲۰-۱۰) به توابع بسل بر می‌گردد که به دلیل پیچیدگی محاسبات ریاضی آن، خواننده را به منابع آخر کتاب ارجاع می‌دهیم.

مثال ۵: پرتو نوری به طول موج $0,5$ میکرومتر و به قطر 20 میلی‌متر و فاصله کانونی 10 سانتی‌متر در جلوی روزنه دایره‌ای قرار دارد. تعیین کنید:

الف) حد زاویه‌ای تفکیک چقدر باید باشد تا تصاویری با تباین بالایی را بر پرده مشاهده کنیم (به عبارتی معیار تفکیک ریلی برقرار باشد).

ب) فاصله بین مراکز نقش‌های پراش که در صفحه کانونی عدسی شکل می‌گیرد چقدر است؟

حل: الف) از رابطه (۱۰-۲۱) حد زاویه تفکیک را به دست می‌آوریم:

$$\Delta\theta = 1,22 \frac{\lambda}{D} = 1,22 \times \frac{5 \times 10^{-7}}{2 \times 10^{-2}}$$

$$= 3,05 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

ب) این فاصله خطی را می‌توان از رابطه (۱۰-۲۲) به دست آورد:

$$(\Delta R)_{\min} = 1,22 \frac{\lambda}{D} f = (\Delta\theta) f$$

$$= (3,05 \times 10^{-5} \text{ rad})(10 \text{ cm})$$

$$= 3,05 \times 10^{-4} \text{ cm}$$

۱۰-۷ مثال‌های حل شده

۱. پرتویی با طول موج ۲ آنگستروم تحت زاویه 60° از بلور صافی بازتاب می‌یابد. فاصله بین لایه‌های اتم‌های بلور را بیابید.

حل: در اینجا زاویه θ در معادله براگ برابر $30^\circ = 90^\circ - 60^\circ$ است و داریم:

$$n\lambda = 2a \sin \theta$$

$$n(2) = 2 \times a \times \sin 30^\circ$$

$$a = 2n \text{ \AA}$$

با نسبت دادن هر عدد درستی به n می‌توان فاصله بین لایه‌های اتم‌های بلور را به دست آورد:

$$n=1 \Rightarrow a=2 \text{ \AA}, \quad n=2 \Rightarrow a=4 \text{ \AA}, \quad \dots$$

۲. مردمک چشم انسان که ۲ میلی‌متر قطر دارد به دلیل اثرات پراش قادر نیست خطوط علامت‌گذاری میلی‌مترها را که تحت تابش پرتو نوری به طول موج 500 nm است را از یکدیگر به خوبی تشخیص دهد. پیدا کنید که خط‌کش را در چه فاصله‌ای از چشم

باید قرار داد تا قدرت تفکیک پذیری چشم بالا رود و خطوط علامت‌گذاری شده میلی‌متری به خوبی متمایز گردند؟

حل: با استفاده از رابطه (۱۰-۲۲) داریم:

$$(\Delta R)_{\min} = 1/22 \frac{f \lambda}{D}$$

که f همان محل قرارگیری خط‌کش نسبت به عدسی چشم می‌باشد که لزوماً معنی فاصله کانونی را ندارد. چشم باید قادر باشد تا حداقل فاصله یک میلیمتری را از هم متمایز دهد پس

$$(\Delta R)_{\min} = 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$$

بنابراین

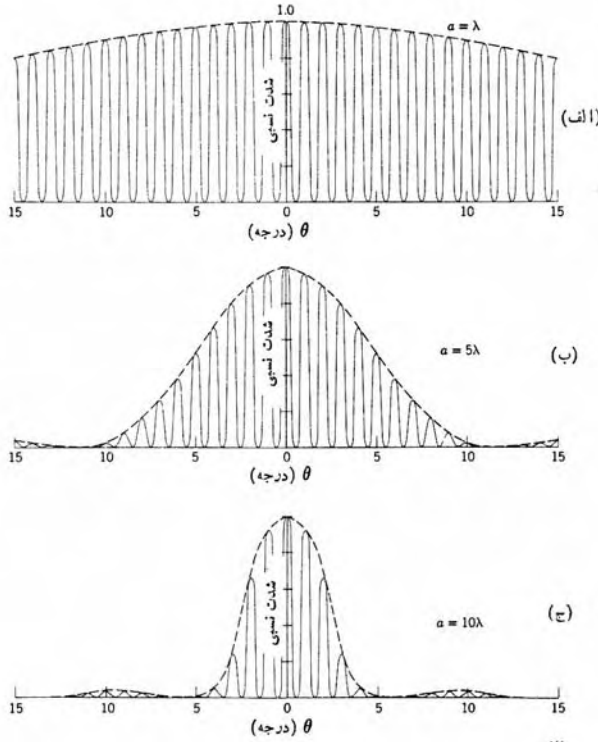
$$10^{-3} = 1/22 \times \frac{500 \times 10^{-9}}{2 \times 10^{-3}} f \Rightarrow f = 3/3 \text{ m}$$

۳. هالیدی شدت‌های مربوط به نوارهای تداخلی دو شکافی که فاصله آنها $d = 50 \lambda$ است را در شکل‌های ۱۰-۱۶ ترسیم نموده است. با توجه به نمودارهای شکل ۱۰-۱۶، نقش هر یک از موارد زیر را در شکل منحنی نمودار بررسی کنید.
الف) افزایش پهنای شکاف از $a = \lambda$ تا $a = 10 \lambda$ چه تأثیری بر منحنی شدت نسبی بر حسب زاویه پراش می‌گذارد؟
ب) افزایش فاصله شکاف و افزایش طول موج چه تغییراتی در منحنی شکل‌ها ایجاد می‌کند؟ بحث کنید.

حل: الف) اگر به نمودارهای (الف) تا نمودار (ج) نگاه کنید در می‌یابید که نیم پهنای منحنی در بیشینه قله مرکزی کاهش می‌یابد به عبارتی قله تیزتر می‌شود. نمودار در (ب) یک شکل منحنی تابع گوس را نشان می‌دهد که این منحنی گوس در شکل (ج) باریک‌تر می‌گردد.

ب) خطوط سینوسی مانند داخل خط‌چین (پوش منحنی) همان نوارها هستند که با افزایش فاصله شکاف‌ها، نوارها فشرده‌تر می‌گردند بدون آن که منحنی خط چین (پوش منحنی) تغییری کند.

با افزایش طول موج انتظار پهن‌شدگی پوش منحنی را داریم و همینطور نوارها در فاصله بیشتری از یکدیگر قرار می‌گیرند البته اگر طول موج با ثابت بودن پهنای شکاف افزایش یابد پدیده‌های پراش با درهم رفتگی موجک‌های بیشتری را می‌توان انتظار داشت.



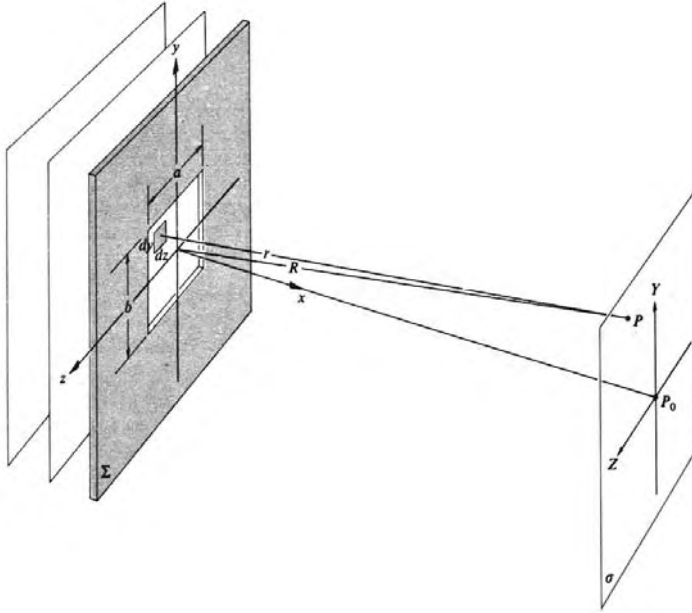
شکل ۱۰-۱۶. مربوط به مثال حل شده ۳.

۴. پرتوی نور تکفامی در امتداد محور x به یک روزنه مستطیل شکلی با طول و عرض b و a می‌تابد. اگر پرتوی فرودی یک عنصر طول با رابطه زیر داده شود:

$$\Delta E = \frac{\mathcal{E}}{r} e^{i(kr - \alpha t)} \Delta S$$

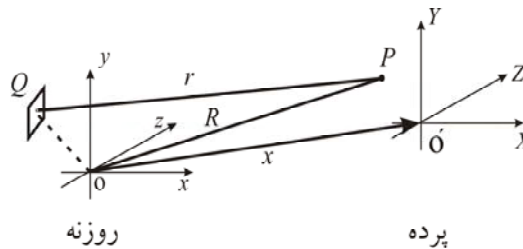
که ΔS مساحت سطح داخل روزنه باشد و \mathcal{E} قدرت در واحد سطح چشمه فرض گردد آنگاه با توجه به شکل ۱۰-۱۷ شدت تابندگی آن را به دست آورید.

سپس اگر $a=b$ باشد نقش پراش فرانهورفر مربوط به آن را با انرژی زیادتر و کم تر ترسیم کنید و توزیع تابندگی را برای روزنه مربعی فقط ترسیم نمائید.



شکل ۱۰-۱۷. مربوط به مثال حل شده ۴.

حل: مطابق شکل بالا r فاصله عنصر سطح ΔS از نقطه P واقع بر پرده σ می باشد. فاصله مبدأ دستگاه عبوری از روزنه تا اولین نوار مرکزی x و تا نقطه P برابر X می باشد.



شکل ۱۰-۱۹. فاصله مبدأ دستگاه عبوری از روزنه تا اولین نوار مرکزی.

r فاصله \overline{PQ} می‌باشد که ابتدا مختصات P و Q را می‌نویسیم:

$$P \begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix}, \quad Q \begin{matrix} o \\ y \\ z \end{matrix}$$

پس

$$|\overline{PQ}| = \left((x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$r = |\overline{PQ}| = \left(X^2 + (Y + y)^2 + (Z - z)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

و نیز

$$R = |\overline{OP}| = \left((x_P - x_O)^2 + (y_P - y_O)^2 + (z_P - z_O)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left((X - o)^2 + (Y - o)^2 + (Z - o)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow R = \left(X^2 + Y^2 + Z^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

اگر پراش فرانهورفر در نظر گرفته شود با میدان دور یا $R \gg 1$ سر و کار داریم.

$$r = \left(X^2 + (Y + y)^2 + (Z - z)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= R \left(1 + \frac{y^2 + z^2}{R^2} - \frac{2(Yy + Zz)}{R^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

چون $(y^2 + z^2) \gg R^2$ و $R \gg 1$ است، از جمله دوم داخل پرانتز می‌توان صرف‌نظر کرد و با استفاده از بسط دو جمله‌ی تیلور به رابطه‌ی زیر رسید:

$$r \approx R \left[1 - \frac{Yy + Zz}{R^2} \right]$$

آنگاه

$$k.r = kR \left(1 - \frac{Yy + Zz}{R^2} \right)$$

پس

$$e^{i(k.r-\alpha t)} = e^{i(kR-\alpha t)} e^{-ik\left(\frac{Yy+Zz}{R}\right)}$$

با توجه به این که عنصر سطح dS در صفحه z,y برابر است با

$$dS = dy dz$$

می توان از (۱۰-۱۹) استفاده کرد و آشفتگی کلی به P می رسد را به دست آورد:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\epsilon e^{i(kR-\alpha t)}}{R} \int_{\frac{b}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{\frac{b}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-ik\left(\frac{Yy+Zz}{R}\right)} dy dz \\ &= \frac{\epsilon e^{i(kR-\alpha t)}}{R} \left(\int_{\frac{b}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-ik\frac{Yy}{R}} dy \right) \left(\int_{\frac{b}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-ik\frac{Zz}{R}} dz \right) \\ &= \frac{\epsilon e^{i(kR-\alpha t)}}{R} \left(\frac{R}{ikY} e^{-ik\frac{Yy}{R}} \right) \Bigg|_{\frac{b}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\frac{R}{ikZ} e^{-ik\frac{Zz}{R}} \right) \Bigg|_{\frac{b}{2}}^{\frac{a}{2}} \\ &= \frac{\epsilon ab}{R} e^{i(kR-\alpha t)} \left(-\frac{R^2}{k^2 YZ} \right) \left(e^{-ik\frac{Yb}{2R}} - e^{ik\frac{Yb}{2R}} \right) \left(e^{-ik\frac{Za}{2R}} - e^{ik\frac{Za}{2R}} \right) \end{aligned}$$

و یا

با توجه به مساحت مستطیل $A = ab$ می توان آشفتگی در E را به صورت زیر به دست آورد:

$$E = \frac{A \epsilon e^{i(kR-\alpha t)}}{R} \left(\frac{\sin \gamma}{\gamma} \right) \left(\frac{\sin \eta}{\eta} \right)$$

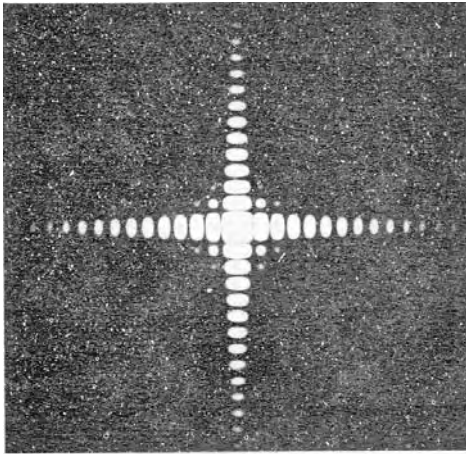
و چون شدت با مجذور میدان متناسب است و در λ و η برابر صفر میدان $E(0)$ را داریم:

$$E(\theta) = E = \frac{A \epsilon e^{i(kR - \omega t)}}{R}$$

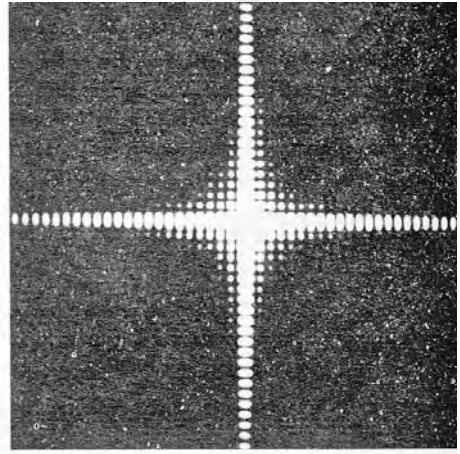
است آنگاه

$$I(Y, Z) = I(0) \left(\frac{\sin \gamma}{\gamma} \right)^2 \left(\frac{\sin \eta}{\eta} \right)^2$$

در اینجا $I(0)$ شدت یا تابندگی در نقطه P جایی که Y و Z صفر است می باشد. نقش پراش فرانهور با انرژی زیاد و کم در کتاب هشت ترسیم شده است که تصاویر آنها را به همراه توضیح تابندگی در وضعیت $a = b$ در زیر آمده‌اند.



(الف)



(ب)

شکل ۱۰-۲۰. نمایش شدت نوارها.

۵. در مثال حل شده ۴ روزنه را مطابق شکل زیر یک دایره به شعاع a در نظر بگیرید و با توجه به تابع بسل زیر

$$J_m(u) = \frac{i^{-m}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(mv + u \cos v)} dv$$

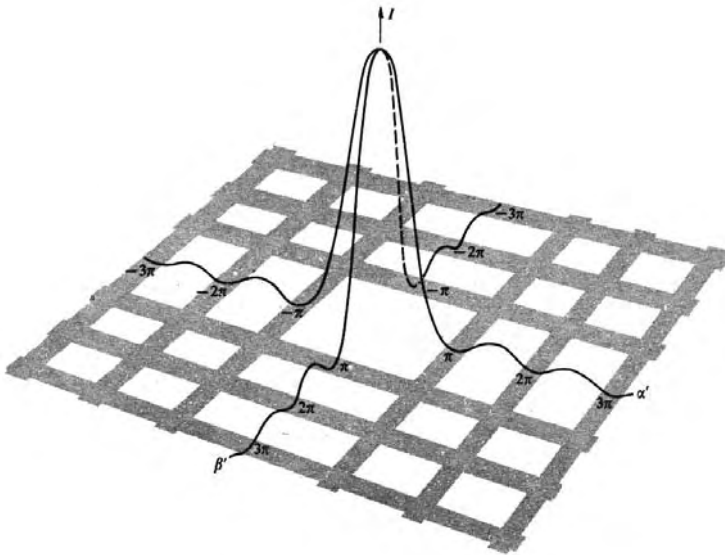
و یا برای مرتبه صفرم بسل:

$$J_0(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iu \cos v} dv$$

باشد، نشان دهید که شدت در نقطه P از رابطه زیر به دست می آید:

$$I = \frac{\epsilon^2 A^2}{R^2} \left(\frac{J_1(u)}{u} \right)^2$$

که $u = \frac{kaq}{R}$ ، مساحت روزنه و $q = R \sin \theta$ است.



شکل ۱۰-۲۱. پراش در حلقه‌های E

حل: با استفاده از روابط زیر:

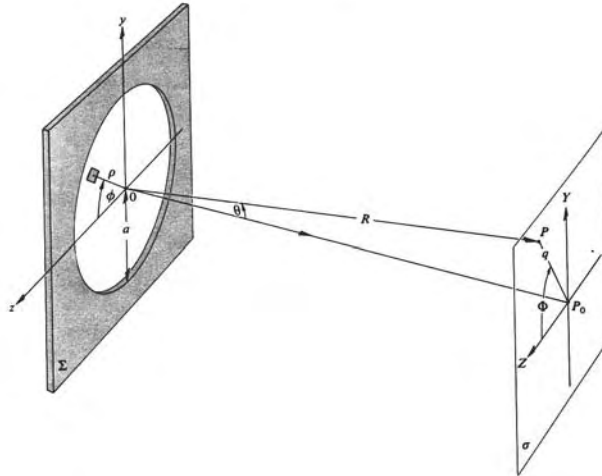
$$y = \rho \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \varphi$$

$$Y = q \sin \Phi, \quad Z = q \cos \Phi$$

و

$$ds = \rho d\rho d\varphi$$

به محاسبه $K(Yy + Zz)/R$ پردازید و از انتگرال بسط استفاده کنید.



شکل ۱۰-۱۸. مربوط به مثال حل شده ۵.

۱۰-۸ مسائل

۱. تعیین کنید تحت چه شرایطی می‌توان در بیشینه مرکزی پوش نقش دو شکافی فرانوفر، ۹ تا فریز را جای داد.

۲. نشان دهید نیم پهنای پرتو پراشیده از شکافی که پهنای آن 1λ است حدود $5/3$ برابر شکافی که پهنای آن 5λ است می‌باشد.

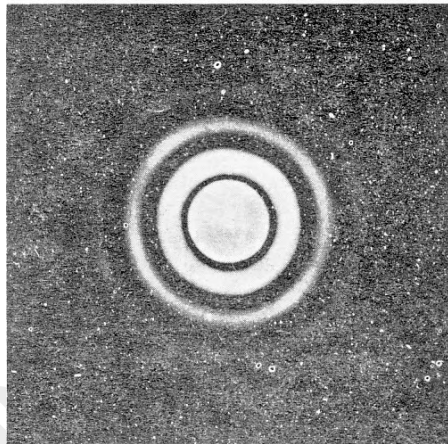
۳. با نوری با طول موج 550 نانومتر در تلسکوپی با قطر عدسی جسمی 30 میلیمتر به کار می‌آید تا دو جسم کوچک در فاصله 30 متری را از هم تفکیک کنیم. تعیین کنید حداقل فاصله دو جسم چقدر می‌تواند باشد؟
(جواب: $8,3 \text{ mm}$)

۴. شخصی برای آن که طول موج پرتو نور گسیلی چراغ‌های اتومبیل دوستش را معین کند، در فاصله مستقیم 10 کیلومتری از اتومبیل توانست دو چراغ جلوی اتومبیل را

که ۱٫۴ متری هم بود را از هم تفکیک کند. اگر قطر مردمک چشم این شخص را ۵ میلی‌متر فرض کنیم طول موج پرتو نور را به دست آورید.
(جواب: 550 nm)

۵. اگر بتوان ۱۱ فریز را در پوش قله مرکزی نقش دو شکافی فرانهوفر جای داد. آنگاه تعیین کنید چند نوار را می‌توان بین اولین و دومین کمینه پوش منحنی جای داد؟
(جواب: پنج نوار)

۶. قطر قرص ایری را مطابق شکل زیر دو برابر می‌کنیم. علت تفاوت پراش‌ها در حلقه‌های ایری را توضیح دهید.

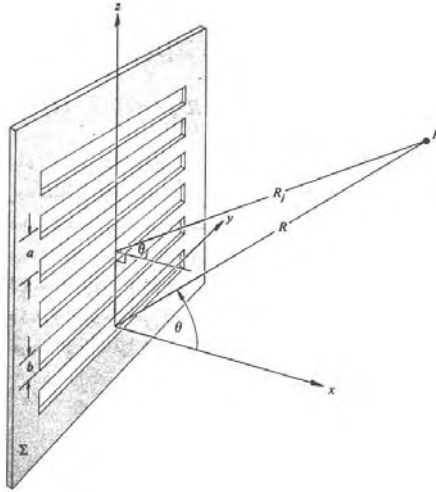


شکل ۱۰-۲۱. مربوط به مسئله ۶.

۷. تعداد N شکاف باریک موازی و دراز به عرض b و فاصله مرکز به مرکز a را مطابق شکل زیر در نظر بگیرید و نشان دهید که شدت تابندگی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \left(\frac{\sin N \alpha}{\sin \alpha} \right)^2$$

که $\alpha = \frac{ka}{\lambda} \sin \theta$ و $\beta = \frac{kb}{\lambda} \sin \theta$ است.



شکل ۱۰-۲۲. مربوط به مسئله ۷.

واژگان انگلیسی به فارسی

Absorption	جذب، درآشامی	Critical temperature	دمای بحرانی
Accumulation	انبارش	Cycle	چرخه
Action	کنش	Damped	میرا
Adiabatic	بی دررو	Deformation	تغییر شکل
Adiabatic process	فرآیند بی دررو	Destructive interference	تداخل ویرانگر
Agitation	اغتشاش	Diffuion	پخش
Airfoil	برگه هواپر	Dispersion	پاشندگی
Analogy	مانستگی	Disturbance	آشفستگی
Anticlockwise	پاد ساعتگرد	Efficiency	کارایی
Antinode	شکم (موج)	Eigenfrequency	ویژه بسامد
Attenuation	تضعیف	Elastic	کشسان
Audible waves	امواج شنیده شدنی	Elastic limit	حد کشسانی
Barometer	جوسنج	Elasticity	کشسانی
Beam	باریکه	Emission	گسیل
Beat	زنش	Envelope	پوش
Buoyancy	بالابری، بالاروی	Equipartition of energy	تقسیم مساوی انرژی
Buoyant force	نیروی بالابر	Equivalence principle	اصل هم‌ارزی
Cavitation	حفره سازی	Escape velocity	سرعت فرار
Center of gravity	گرانیگاه	Excitation energy	انرژی برانگیختگی
Centripetal force	نیروی مرکزگرا	Excited stste	حالت برانگیخته
Cerenkov radiation	تابش چرنکوف	Exponential function	تابع نمایی
Complex wave	موج مختلط	Extensive quantity	کمیت فزونور
Condenser	چگالنده	Extreme	فرین
Conduction	رسانش	Flow	شارش
Conductivity	رسانایی	Flow rate	آهنگ شارش
Conductor	رسانا	Fluctuation	افت و خیز
Configuration	پیکربندی	Fluid	شاره
Conservation of energy	پایستگی انرژی	Fluid particle	ذره-شاره
Conservative	پایستار	Fundamental Frequency	بسامد اصلی
Constructive interference	تداخل سازنده	Fundamental mode	مد اصلی
Convection	همرفت	Gain	بهره
Coupled oscillators	نوسانگرهای جفت شده	Gauge pressure	فشار پیمانهای
Critical point	نقطه بحرانی	Gradient	شیب، گرادیان

واژگان فارسی به انگلیسی

Dispersion	پاشندگی	Superconductivity	ابر رسانایی
Steady	پایا	Superheated	ابر گرماییده
Conservative	پایستار	Lumped elements	اجزای کلوخه‌ای
Conservation of energy	پایستگی انرژی	Vibration	ارتعاش
Velocity potential	پتانسیل سرعت	Tidal bore	اشترک کشندی
Diffuion	پخش	Disturbance	آشفتگی
Envelope	پوش	Equivalence principle	اصل هم‌ارزی
Configuration	پیکربندی	Agitation	اغتشاش
Venturi meter	پیمانۀ ونتوری	Fluctuation	افت و خیز
Cerenkov radiation	تابش چرنکوف	Torsional waves	امواج پیچشی
Exponential function	تابع نمایی	Audible waves	امواج شنیده شدنی
Pulse	تپ	Accumulation	انبارش
Constructive interference	تداخل سازنده	Excitation energy	انرژی برانگیختگی
Destructive interference	تداخل ویرانگر	Rate	آهنگ
Transport	ترابرد	Flow rate	آهنگ شارش
Resonance	تشدید	Quasi-ststic	ایستاوار
Attenuation	تضعیف	Beam	باریکه
Deformation	تغییر شکل	Rearrangement	باز آرایش
Equipartition of energy	تقسیم مساوی انرژی	Reversible	بازگشت پذیر
Impulse	تکان	Irreversible	بازگشت ناپذیر
Shearing Stress	تنش چینشی	Interval	بازه، فاصله
Overtone	تون فرعی	Buoyancy	بالابری، بالاروی
Wavefront	جبهۀ موج	Airfoil	برگۀ هواپر
Absorption	جذب، درآشامی	Interaction	برهم‌کنش
Root mean square (rms)	جذر میانگین مربعی	Superposition	برهم‌نهمش
Barometer	جوسنج	Fundamental Frequency	بسامد اصلی
Reference frame	چارچوب مرجع	Net inflow of mass	بستان خالص جرم
Sink	چاهک	Loudness	بلندی (صدا)
Cycle	چرخه	Gain	بهره
Viscosity	چسبندگی	Irrotational	بی‌تاو، بدون چرخش
Source	چشمه، منبع	Adiabatic	بی‌درو
Condenser	چگالنده	Maximum	بیشینه، ماکزیمم
Relative density	چگالی نسبی	Anticlockwise	پاد ساعتگرد

Adiabatic process	فرآیند بی دررو	Weight density	چگالی وزنی
Isothermal process	فرآیند تک دما	Excited stste	حالت برانگیخته
Isobaric process	فرآیند تک فشار	Elastic limit	حد کشسانی
Infrasonic	فروصوتی	Vortex motion	حرکت گرد شاره
Extreme	فرین	Simple harmonic motion	حرکت هماهنگ ساده
Gauge pressure	فشار پیمانه‌ای	Cavitation	حفره سازی
Ram pressure	فشار کوبش	Thermometric property	خاصیت دماسنجی
Manometer	فشارسنج	Stream line	خط - جریان
Regularity	قاعدہ مندی	Nodal line	خط گرهی
Law of cooling	قانون سرمایش	Pipeline	خط لوله
Zeroh law	قانون صفرم	Internal combustion	درونسوز
Plane polarized	قطبیده تخت	Interpolation	درونیابی
Random	کاتوره‌ای	Critical temperature	دمای بحرانی
Efficiency	کارآیی	Period	دوره
Elastic	کشسان	Periodic	دوره‌ای
Elasticity	کشسانی	Tuning fork	دیپازون، چنگال کوک
Tension	کشش	Fluid particle	ذره - شاره
Extensive quantity	کمیت فزونور	Conductor	رسانا
Intensive quantity	کمیت نافزونور	Conductivity	رسانایی
Minimum	کمینه، مینیم	Conduction	رسانش
Action	کنش	Beat	زنش
Short- rang	کوتاه - برد	Structure	ساختار
Gravitation	گرانش، ثقل	Mechanism	سازوکار
Gravity	گرانی	Velocity, Speed	سرعت
Center of gravity	گرانیگاه	Phase velocity	سرعت فاز
Vortex	گردشاره	Escape velocity	سرعت فرار
Node	گره	Orientation	سمتیت، جهت گیری
Range	گستره، برد	Index	شاخص
Emission	گسیل	Subscript	شاخص پایین
Torque	گشتاور نیرو	Mass flux	شار جرمی
Heat engine	ماشین حرارتی	Volume flux	شار حجمی
Analogy	مانستگی	Flow	شارش
Fundamental mode	مد اصلی	Fluid	شاره
Model	مدل، الگو	Antinode	شکم (موج)
Shear modulus	مدول برشی	Gradient	شیب، گرادیان
Mean free path	مسافت آزاد میانگین	Insulated	عایق بندی شده
Locus	مکان هندسی	Performance	عملکرد
Isolated	منزوی	Nonviscous	غیر چسبنده
Zone	منطقه	Ultrasonic	فراصوتی

Plan wave	موج تخت
Traveling wave	موج سیار
Shock wave	موج ضربه‌ای
Longitudinal wave	موج طولی
Transverse wave	موج عرضی
Complex wave	موج مختلط
Damped	میرا
Heterogeneous	ناهمگن
Scalar	نرده‌ای، اسکالر
Standing wave ratio (SWR)	نسبت موج ایستاده
Pattern	نقش
Critical point	نقطه بحرانی
Triple point	نقطه سه‌گانه
Notation	نمادنگاری
Oscillation	نوسان
Oscillator	نوسانگر
Coupled oscillators	نوسانگرهای جفت شده
Restoring Force	نیروی بازگرداننده
Buoyant force	نیروی بالابر
Shearing force	نیروی برشی
Tbtust	نیروی پیشرانده
Centripetal force	نیروی مرکزگرا
Convection	همرفت
Isotropic	همسانگرد
Homogeneous	همگن
Reaction	واکنش
Specific gravity	وزن مخصوص، گرانی ویژه
Eigenfrequency	ویژه بسامد
Monotonic	یکنوا
Unique	یگانه

خواننده محترم

این پرسشنامه به منظور ارتقای کیفیت کتاب‌های درسی و رفع نواقص آن‌ها تهیه شده است. دقت شما در پاسخگویی به این پرسشنامه در پایان هر نیمسال ما را در تحقق این هدف یاری خواهد کرد.

نام کتاب نام مؤلف/مترجم سال انتشار
 پاسخگو: عضو علمی پیام‌نور عضو علمی سایر دانشگاه‌ها رشته تخصصی سابقه تدریس
 دانشجوی پیام‌نور دانشجوی سایر دانشگاه‌ها رشته تحصیلی ورودی سال

سوال	خیلی زیاد	زیاد	متوسط	کم	بسیار کم
۱. آیا از زمان تحویل و نحوه دسترسی به کتاب راضی بودید؟					
۲. آیا حجم کتاب با توجه به تعداد واحد مناسب بود؟					
۳. آیا راهنمایی‌های لازم برای مطالعه کتاب منظور شده بود؟					
۴. آیا در ترتیب مطالب کتاب سلسله مراتب شناختی (آسان به مشکل) رعایت شده بود؟					
۵. آیا تقسیم‌بندی مطالب در فصل‌ها یا بخش‌ها متناسب و بجا بود؟					
۶. آیا متن کتاب روان و ساده و جمله‌ها قابل فهم بود؟					
۷. آیا به‌روزر بودن مطالب و آمارها رعایت شده بود؟					
۸. آیا مطالب تکراری داشت؟					
۹. آیا پیوستگی مطالب با درس‌های پیش‌نیاز رعایت شده بود؟					
۱۰. آیا مثال‌ها، شکل‌ها، نمودارها، جدول‌ها و ... گویا بودند و در فهم مطلب تأثیر داشتند؟					
۱۱. مطالعه هدف‌های کلی، آموزشی/ رفتاری تا چه اندازه به درک بهتر شما کمک کرد؟					
۱۲. آیا خودآزمایی‌های کتاب به‌گونه‌ای بود که تمام مطالب درسی را شامل شود؟					
۱۳. آیا پاسخ خودآزمایی‌ها و تمرین‌ها کامل و گویا بود؟					
۱۴. چقدر با غلط‌های املائی و اشکال‌های چاپی مواجه شدید؟					
۱۵. آیا از کیفیت چاپ و صحافی کتاب راضی بودید؟					
۱۶. آیا طرح روی جلد کتاب با مطالب کتاب تناسب داشت؟					
۱۷. چنانچه دانشگاه وسایل کمک‌آموزشی از قبیل نوار، فیلم، لوح فشرده و ... در اختیارتان گذارده، آیا به درک بهتر شما کمک کرده‌اند؟					
۱۸. تا چه اندازه این کتاب شما را از حضور در کلاس بی‌نیاز کرد؟					

در مجموع کتاب را چگونه ارزیابی می‌کنید؟ عالی خوب متوسط ضعیف بسیار ضعیف
 لطفاً چنانچه با اشکال‌های تایپی یا محتوایی و مطالب تکراری مواجه شده‌اید، فهرستی از آن‌ها را با ذکر شماره صفحه ضمیمه کنید. در صورت تمایل سایر پیشنهاد‌های خود را نیز بنویسید.

این پرسشنامه را پس از تکمیل از کتاب جدا کنید و به قسمت آموزش مرکز تحویل دهید یا مستقیماً به نشانی تهران، صندوق پستی ۳۳۳-۱۴۳۳۵، مدیریت تولید مواد و تجهیزات آموزشی کتاب ارسال فرمایید. آدرس وبگاه ما www.pnu.ac.ir است. با ورود به وبگاه، مسیر زیر را طی نمایید: ساختار دانشگاه/ معاونت‌ها/ فناوری اطلاعات/ مدیریت تولید مواد و تجهیزات آموزشی.

با تشکر

مدیریت تولید مواد و تجهیزات آموزشی

