فصل ٦

تبدیل لاپلاس

تبديل لاپلاس يك وسيله اساسي براي مطالعه سيستم‌هاي خطي تغيير ناپذير بازمان مي‌باشد. در اين فصل بطور مختصر به معرفي تبديل لاپلاس و خواص آن پرداخته وكاربرد عمده آن در حل معادلات ديفرانسيل خطي با ضرائب ثابت را كه در تجزيه و تحليل مدارهاي الكتريكي در فصول قبل آموختيم را خواهيم ديد.

٦-١) تبديل لاپلاس و خواص آن

تعريف : تبديل لاپلاس تابع f(t) كه در فاصله $[0,\infty)$ معين است بصورت زير تعريف مي‌شود.

$$F(S) = L[F(t)] = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt \qquad (٦\text{-}١)$$

$s = \sigma + j\omega$ يك متغير مختلط بوده وآنرا فركانس مختلط نامند. از آنجا كه انتگرال فوق بازاء مقادير مشخصي از s همگرا خواهد بود بنابراين تبديل لاپلاس هر تابع داراي ناحيه همگرايي مشخصي خواهد بود كه در صفحه اعداد مختلط (s-plan) معين مي‌گردد.

مثال: تبديل لاپلاس توابع زير را محاسبه كنيد.

الف) f(t)=u(t)

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}u(t)\,dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\,dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-(\sigma+j\omega)t}\,dt = -\frac{1}{\sigma+j\omega}e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}\Big]_0^{\infty} = \frac{1}{s} \qquad (٦\text{-}٢)$$

همانگونه كه مشاهده مي‌شود انتگرال فوق تنها بازاء مقادير $\mathrm{Re}[s] = \sigma > 0$ همگراست. اين ناحيه را ناحيه همگرایی تبدیل لاپلاس می نامند.

ب) $f(t) = e^{at}u(t)$ بطوريكه a يك عدد حقيقي است

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{at}e^{-st}\,dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-(s-a)t}\,dt = \frac{1}{s-a} \qquad (٦\text{-}٣)$$

در اين حالت ناحيه همگرايي عبارت از $\sigma = \mathrm{Re}[s] > a$

ج) $f(t) = \delta(t)$

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)e^{-st}\,dt = \int_{0}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1 \qquad (٦\text{-}٤)$$

در اين حالت ناحيه همگرايي تمام مقادير مختلط S مي‌باشد.

٦-٢): خواص تبديل لاپلاس

١) خاصيت خطي بودن : اگر توابع $f_2(t), f_1(t)$ دارای تبدیل لاپلاسهای $F_2(s)$, $F_1(s)$ بوده و b,a ثابتهای اختیاری باشند آنگاه:

$$L\{af_1(t) + bf_2(t)\} = aF_1(s) + bF_2(s) \qquad (٦\text{-}٥)$$

مثال: با استفاده از خاصيت خطي تبديل لاپلاس رابطه زير را اثبات كنيد.

$$L[\cos\omega t] = \frac{s}{s^2+\omega^2} \qquad (٦\text{-}٦)$$

حل: ابتدا با کمک رابطه اویلر تابع $\cos\omega t$ را بسط می دهیم.

$$L[\cos\omega t]=L\left[\frac{1}{2}e^{j\omega t}+\frac{1}{2}e^{-j\omega t}\right]=\frac{1}{2}L\left[e^{j\omega t}\right]+\frac{1}{2}L\left[e^{-j\omega t}\right]=\frac{1}{2}\frac{1}{s-j\omega}+\frac{1}{2}\frac{1}{s+j\omega}=\frac{s}{s^2+\omega^2} \qquad (٦\text{-}٧)$$

به همین ترتیب مي‌توان نشان داد که :

$$L[\sin\omega t]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2} \qquad (٦\text{-}٨)$$

۲- خاصیت مشتق گیري : مي‌توان نشان داد که :

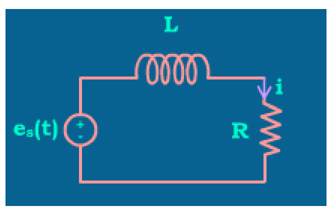
$$L[f'(t)]=sL[f(t)]-f(\bar{0}) \qquad (٦\text{-}٩)$$

با تعمیم قضیه فوق همچنین داریم :

$$L[f''(t)]=s^2L[f(t)]-sf(\bar{0})-f'(\bar{0}) \qquad (٦\text{-}١٠)$$

$$.L\left[f^{n}(t)\right]=s^{n}L[f(t)]-s^{n-1}f(\bar{0})-s^{n-2}f^{(1)}(\bar{0})-\dots-f^{(n-1)}(\bar{0}) \qquad (٦\text{-}١١)$$

مثال: در مدار زیر در صورتیکه iپاسخ فرض شود پاسخ ضربه مدار را بکمك تبدیل لاپلاس محاسبه کنید.



حل: معادله دیفرانسیل مدار با اعمال kvl در حلقه مربوطه بر حسب متغیر i بصورت زیر خواهد بود.

$$kvl \quad L\frac{di}{dt}+Ri=e_s(t)=\delta(t) \qquad (٦\text{-}١٢)$$

اگر از طرفین تبدیل لاپلاس بگیریم با فرض اینکه شرایط اولیه صفر بوده و با استفاده از خاصیت خطی و مشتق گیری تبدیل لاپلاس داریم :

$$L\left[sI(s)-i(\bar{0})\right]+RI(s)=1\Rightarrow I(s)=\frac{1}{R+sL} \qquad (٦\text{-}١٣)$$

$$\Rightarrow I(s)=\frac{1/L}{s+R/L}\Rightarrow h(t)=\frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t}u(t) \qquad (٦\text{-}١٤)$$

نکته : روش تبدیل لاپلاس در حل معادلات دیفرانسیل پاسخ را تنها براي $t\ge 0$ بدست مي‌دهد . در صورتي که تعریف تبدیل لاپلاس بفرم کلي آن یعني:

$$L[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-st}dt \qquad (٦\text{-}١٥)$$

در نظر بگیریم پاسخ براي کلیه زمانها بدست خواهد آمد. این نوع تبدیل لاپلاس به تبدیل لاپلاس دو طرفه معروف است.

۳- خاصیت انتگرال گیری: می‌توان نشان داد که :

$$L\left[\int_{0^-}^{t} f(\tau)d\tau\right]=\frac{1}{s}L\left[f(t)\right] \qquad (٦-١٦)$$

مثال: با استفاده از تبدیل لاپلاس u(t)، تبدیل لاپلاس توابع زیر را محاسبه کنید.

$$L\left[t^n\right]=?\quad ,L\left[t^2\right]=?\quad ,L[t]=?\quad L[u(t)]=\frac{1}{s} \qquad (٦-١٧)$$

حل: می‌دانیم که :

$$\int_{0^-}^{t} u(\tau)d\tau=t\ ,\int_{0^-}^{t}\tau d\tau=\frac{t^2}{2}\ ,\int_{0^-}^{t}\frac{\tau^2}{2}d\tau=\frac{t^3}{3!} \qquad (٦-١٨)$$

$$.................,\int_{0^-}^{t}\frac{\tau^n}{n!}d\tau=\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$$

با کمك خاصیت انتگرال گیری خواهیم داشت:

$$L[tu(t)]=\frac{1}{s}L[u(t)]=\frac{1}{s^2} \qquad (٦-١٩)$$

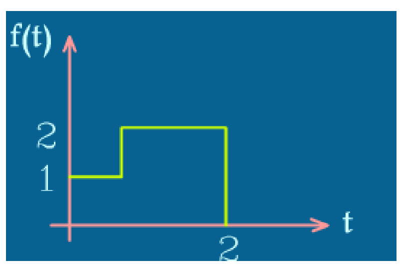
همچنین برای هر n صحیح داریم:

$$L\left[\frac{t^2}{2}\right]=\frac{1}{s}L[t]=\frac{1}{s^3}\Rightarrow L(t^2)=\frac{2}{s^3}\ ,...L\left[\frac{t^n}{n!}\right]=\frac{1}{s^{n+1}}\Rightarrow L\left[t^n\right]=\frac{n!}{s^{n+1}} \qquad (٦-٢٠)$$

٤) خاصیت شیفت در حوزه زمان : براحتی می‌توان نشان داد که :

$$L\left[f(t-t_0)\right]=e^{-st_0}L\left[f(t)\right] \qquad (٦-٢١)$$

مثال: تبدیل لاپلاس شکل (٦-١) را محاسبه کنید.



شکل (٦-١)

حل: f(t) برحسب توابع پله و شیفت داده شده‌های آن بصورت زیر نوشته می شود:

F(t)=u(t)+u(t-١)-٢u(t-٢) (٦-٢٢)

$$\Rightarrow F(s)=\frac{1}{s}+\frac{1}{s}e^{-s}-\frac{2}{s}-e^{-2s}=\frac{1}{s}(1+e^{-s}-2e^{-2s}) \qquad (٦-٢٣)$$

٥) خاصیت شیفت در حوزه فرکانس : می‌توان نشان داد که :

$$L\left[e^{-at}f(t)\right]=F(s+a) \qquad (٦-٢٤)$$

مثال : تبديل لاپلاس $e^{-at}\cos\omega t$ را محاسبه کنید.

حل : مي دانيم كه: $L[\cos\omega t]=\frac{s}{s^2+\omega^2}$ حال با استفاده از خاصیت شیفت در حوزه فرکانس تبدیل لاپلاس سیگنال مورد نظر بصورت زیر به دست می آید:

$$L\left[e^{-at}\cos\omega t\right]=\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2} \qquad (٦\text{-}٢٥)$$

همچنین تبدیل لاپلاس $e^{-at}\sin\omega t$ بصورت زیر خواهد بود:

$$L\left[e^{-at}\sin\omega t\right]=\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2} \qquad (٦\text{-}٢٦)$$

٦) خاصیت کانولوشن: تبدیل لاپلاس کانولوشن دو تابع برابر با حاصل ضرب تبدیل لاپلاس آنها يعني:

$$L[x(t)*h(t)]=L[x(t)].L[h(t)]=X(s)H(s) \qquad (٦\text{-}٢٧)$$

٦-٣) تبدیل لاپلاس معکوس

براي يافتن شكل زماني تابع بكمك تبديل لاپلاس آن (تبديل لاپلاس معكوس) از روش گسترش تابع به كسرهاي جزيي استفاده ميشود. فرض كنيد $F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}$ يك تابع گويا با ضرائب حقيقي باشد در اينصورت P(s) , Q(s) چند جمله اي هاي بترتيب از درجات n,m برحسب s خواهند بود. يك طرز نمايش ديگري براي تابع F(s) عبارت از:

$$F(s)=k\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)} \qquad (٦\text{-}٢٨)$$

z_i ها صفرها و P_jها قطب‌هاي تابع F(s) ناميده ميشود.

اگر p_j يك ريشه ساده Q(s) باشد . (ريشه غير تكراري) آنرا يك قطب ساده F(s) نامند و اگر P_j يك ريشه تكراري ازمرتبه r چند جمله‌اي Q(s) باشد آنرا قطب مرتبه r تابع فوق نامند. براي يافتن تبديل لاپلاس معكوس لازمست ابتدا F(s) به يك تابع گوياي مناسب (m<n) تبديل شود. (با عمل تقسيمP(s) به Q(s) اينكار صورت ميگيرد) . با فرض اینکه F(s) یک تابع گویای مناسب است در این صورت سه حالت مختلف وجود خواهد داشت:

حالت ۱) F(s) داراي قطب‌هاي ساده باشد در این صورت F(s) بصورت زير قابل تبديل است:

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{K_1}{s-p_1}+\frac{k_2}{s-p_2}+.....+\frac{k_n}{s-p_n} \qquad (٦\text{-}٢٩)$$

k_iها مانده‌هاي (Residues) تابع F(s) در قطب هاي P_i مي‌باشند و بصورت زير محاسبه مي‌گردند.

$$K_i=(s-p_i)F(s)|_{s=p_i} \qquad (٦\text{-}٣٠)$$

حالت ۲) F(s) داراي قطبهاي مكرر باشد.

مثلاً اگر p_i قطب مرتبه r (r<n) باشد. F(s) بصورت زير به كسرهاي جزيي تبديل خواهد شد.

$$F(s)=\frac{k_1}{s-p_1}+\frac{k_2}{(s-p_1)^2}+....+\frac{k_r}{(s-p_1)^r}+..... \qquad (٦\text{-}٣١)$$

ضرائب k_i بصورت زیر محاسبه مي‌گردند.

$$k_1 = \frac{1}{(r-1)!}\frac{d^{(r-1)}}{ds^{(r-1)}}\left[(s-p_1)^r F(s)\right]_{s=p_1} \qquad (٦\text{-}٣٢)$$

$$k_2 = \frac{1}{(r-2)!}\frac{d^{(r-2)}}{ds^{(r-2)}}\left[(s-p_1)^r F(s)\right]_{s=p_1},\dots, k_{r-1} = \frac{d}{ds}\left[(s-p_1)^r F(s)\right]_{s=p_1} \qquad (٦\text{-}٣٣)$$

$$k_r = (s-p_1)^r F(s)|_{s=p_1} \qquad (٦\text{-}٣٤)$$

مثال: تبدیل لاپلاس معکوس تابع زیر را بیابید.

$$F(s) = \frac{s^2+3s+5}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{(s+1)^2} + \frac{k_3}{s+2} \qquad (٦\text{-}٣٥)$$

حل: تابع فوق دارای یک قطب ساده در s=-۲ و یک قطب مرتبه دو در s=-۱ است.

$$k_3 = (s+2)F(s)|_{s=-2} = 3 \qquad (٦\text{-}٣٦)$$

$$k_2 = (s+1)^2 F(s)|_{s=-1} = 3 \qquad (٦\text{-}٣٧)$$

$$k_1 = \frac{d}{ds}\left[(s+1)^2 F(s)\right] = \frac{d}{ds}\left[\frac{s^2+3s+5}{s+2}\right]_{s=-1} = -2 \qquad (٦\text{-}٣٨)$$

$$\Rightarrow f(t) = -2e^{-t} + 3te^{-t} + 3e^{-2t} \qquad t \ge 0 \qquad (٦\text{-}٣٩)$$

حالت ۳) F(s) داراي قطب‌هاي مختلط باشد.

چون ضرائب چند جمله‌ایهاي صورت ومخرج تابع گویای F(s) حقيقي هستند کلیه قطب و صفرهاي مختلف بصورت مزدوج ظاهر خواهند شد. بنابراین اگر $p_1 = a + jb$ يك قطب F(s) باشد حتماً $p_2 = a - jb$ نیز قطب آن خواهد بود. برای تبدیل اینگونه توابع به کسرهای جزیی به صورت زیر عمل می کنیم.

$$F(s) = \frac{k_1}{s-a-jb} + \frac{k_2}{s-a+jb} \qquad (٦\text{-}٤٠)$$

K_2, k_1 نیز بصورت قبل قابل محاسبه است:

$$k_1 = (s-p_1)F(s)|_{s=p_1} \quad ,k_2 = (s-P_2)F(s)|_{s=p_2} \qquad (٦\text{-}٤١)$$

با توجه به حقیقي بودن ضرائب تابع گویاي F(s) مي‌توان نشان داد که : $k_2 = k_1^*$ یعني ضرائب k_2, k_1 مزدوج یکدیگر خواهند بود.

$$f(t) = k_1 e^{(a+jb)t} + k_1^* e^{(a-jb)t} = (k_1 e^{jbt} + k_1^* e^{-jbt})e^{at}$$
$$= e^{at}.2\,\mathrm{Re}\left[k_1 e^{jbt}\right] = 2e^{at}\,|k_1|\cos(bt + \angle k_1) \qquad (٦\text{-}٤٢)$$

بطوریکه $K_1 = |K_1| e^{j\angle K_1}$ می باشد.

مثال: تبدیل لاپلاس معکوس تابع زیر را محاسبه کنید.

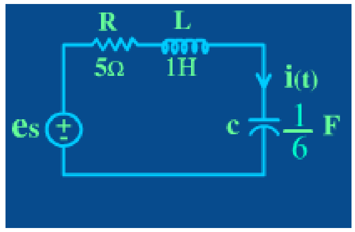
$$F(s) = \frac{s^2+3s+7}{(s^2+4s+8)(s+1)} = \frac{k_1}{s+2-j2} + \frac{k_1^*}{s+2+j2} + \frac{k_3}{s+1} \qquad (٦\text{-}٤٣)$$

$$k_3 = (s+1)F(s)|_{s=-1} = +1, k_1 = (s+2-j2)F(s)|_{s=-2+j2} = \frac{j}{4} = \frac{1}{4}e^{j90^\circ} \qquad (٦\text{-}٤٤)$$

$$\Rightarrow f(t) = 2.e^{-2t}\frac{1}{4}\cos(2t+90^\circ) + e^{-t} = -\frac{1}{2}e^{-2t}\sin 2t + e^{-t} \qquad t \ge 0 \qquad (٦\text{-}٤٥)$$

٦-٤) تجزيه و تحليل مدارهاي خطي تغيير ناپذير با زمان بكمك تبديل لاپلاس

١-٤-٦): پاسخ حالت صفر : مدار خطي تغيير ناپذير با زمان زير را در نظر گرفته و با فرض اينكه ورودي $e_s(t)$ داراي تبديل لاپلاس $E_s(s)$ باشد پاسخ $i(t)$ را بازاء هر ورودي دلخواه محاسبه و بكمك آن پاسخ پله و ضربه را بدست آوريد:



شكل (٦-٢)

حل: معادله ديفرانسيل مدار با فرض شرايط اوليه صفر با نوشتن kvl در حلقه مربوطه بدست می آيد :

$$kvl : R\,i(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{c}\int_{0^-}^{t} i(t')dt' = e_s(t) \qquad (٦\text{-}٤٦)$$

با اخذ تبديل لاپلاس از معادله انتگرال ديفرانسيل فوق معادله زير حاصل خواهد شد:

$$R\,I(s) + L(sI(s) - i(0^-)) + \frac{1}{Cs}I(s) = E_s(s) \qquad (٦\text{-}٤٧)$$

و يا:

$$\Rightarrow I(s) = \frac{1}{R + Ls + \frac{1}{Cs}}E_s(s) \qquad (٦\text{-}٤٨)$$

تابع شبكه بصورت نسبت تبديل لاپلاس پاسخ حالت صفر به تبديل لاپلاس ورودي تعريف می شود.

$$H(s) = \frac{I(s)}{E_s(s)} = \frac{1}{R + Ls + \frac{1}{Cs}} \qquad (٦\text{-}٤٩)$$

بنابراين رابطه بين تبديل لاپلاس پاسخ حالت صفر و تبديل لاپلاس ورودی بصورت زير خواهد بود:

(تبديل لاپلاس ورودي).(تابع شبكه) = (تبديل لاپلاس پاسخ حالت صفر)

از آنجا كه تبديل لاپلاس تابع ضربه واحد، برابر با ١ است پس تابع شبكه برابر با تبديل لاپلاس پاسخ ضربه واحد مي‌باشد يعني :

$$L[h(t)] = H(s) \qquad (٦\text{-}٥٠)$$

براي محاسبه پاسخ ضربه كافيست تبديل لاپلاس معكوس تابع شبكه را محاسبه نمود. با جايگذاری مقادير عناصر مدار داده شده تابع شبكه بصورت زير در می آيد:

$$H(s) = I(s) = \frac{s}{s^2 + 5s + 6} = \frac{-2}{s+2} + \frac{3}{s+3} \qquad (٦\text{-}٥١)$$

بنابراين تبديل لاپلاس معكوس تابع شبكه برابر است با:

$$h(t) = (-2e^{-2t} + 3e^{-3t})u(t) \qquad (١\text{-}٥٢)$$

پاسخ پله نيز با توجه به ورودي $e_s(t)=u(t)$ و در نتيجه $E_s(s) = \frac{1}{s}$ قابل محاسبه است:

$$I(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 6} = \frac{1}{s+2} + \frac{-1}{s+3} \qquad (٦\text{-}٥٣)$$

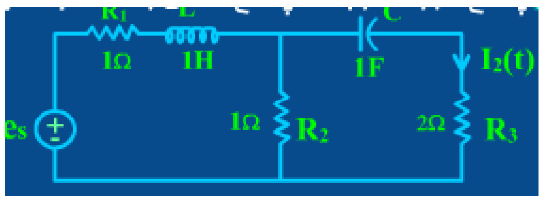
بنابراین پاسخ پله بصورت زیر است:

$$\Rightarrow S(t) = (e^{-2t} - e^{-3t})u(t) \qquad (٦\text{-}٥٤)$$

تمرین : نشان دهید که پاسخ ضربه مشتق پاسخ ضربه است.

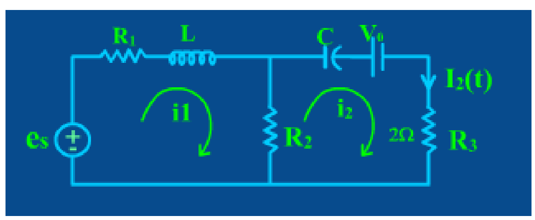
٢-٤-٦) پاسخ کامل

در شبکه زیر اگر جریان $i_2(t)$ پاسخ مورد نظر باشد پاسخ کامل را محاسبه کنید.
شرایط اولیه برابر با $i_L = (\bar{0}) = I_0$ و $V_C = (\bar{0}) = V_0$ فرض می شود.



شکل (٣-٦)

حل : ابتدا با استفاده از تجزیه و تحلیل مش معادلات انتگرال دیفرانسیل شبکه را بروش نظري یا میانبر بدست می آوریم. برای این کار لازم است مدار معادل خازن را در شبکه جایگزین نماییم.



شکل (٤-٦)

حال معادلات انتگرال دیفرانسیل بصورت زیر نوشته خواهد شد:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + LD & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + \dfrac{D^{-1}}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_s \\ -V_0 \end{bmatrix} \qquad (٦\text{-}٥٥)$$

اگر از طرفین دستگاه معادلات فوق تبدیل لاپلاس بگیریم و با فرض اینکه تبدیل لاپلاس های $i_2(t), i_1(t)$ به ترتیب برابر با I_2, I_1 باشد داریم:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + Ls & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + \dfrac{1}{Cs} \end{bmatrix}}_{Z_m(s)} \underbrace{\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}}_{\bar{I}} = \underbrace{\begin{bmatrix} E_s + LI_0 \\ -V_0 / s \end{bmatrix}}_{\bar{V}_S(S)} \qquad (٦\text{-}٥٦)$$

$$\bar{Z}_m(s)\,\bar{I} = \bar{V}_s(s)$$

حال با استفاده از روش کوفاکتور یا قاعده کرامر متغیر مورد نظر $I_2(s)$ بصورت زیر محاسبه می شود.

$$I_2(s)=\frac{\Delta_{12}(s)}{\Delta_m(s)} \qquad (٦\text{-}٥٧)$$

$\Delta_m(s)$ دترمينان ماتريس $\Delta_{12}(s),\overline{Z}_m(s)$ كوفاكتور عنصر (۱،۲) ماتريس $\overline{Z}_m(s)$ بوده و برابر است با دترمينان

$$\Delta_{12}(s)=\begin{bmatrix} R_1+R_2+Ls & E_S+LI_0 \\ -R_2 & -V_0/s \end{bmatrix} \qquad (٦\text{-}٥٨)$$

بنابراين:

$$I_2(s)=\frac{\begin{vmatrix} 2+s & E_s+I_0 \\ -1 & -\frac{V_\circ}{s} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2+s & -1 \\ -1 & 3+\frac{1}{s} \end{vmatrix}}=\underbrace{\frac{E_s}{s^2+5s+5}}_{(1)}+\underbrace{\frac{I_0}{s^2+5s+5}+\frac{(s+2)V_0}{s(s^2+5s+5)}}_{(2)} \qquad (٦\text{-}٥٩)$$

(۲): ناشی از شرایط اولیه (۱):ناشی از ورودی

مشاهده مي‌شود كه تبديل لاپلاس پاسخ كامل برابر با مجموع تبديل لاپلاس‌هاي پاسخ ورودي صفر و پاسخ حالت صفر يعني:

L (پاسخ كامل) =L(پاسخ حالت صفر)+L(پاسخ ورودي صفر)

در صورتي كه شرايط اوليه صفر باشد $I_0=0\ ,V_0=0$ تابع شبكه يا تبديل لاپلاس پاسخ ضربه بصورت زير بدست مي‌آيد:

$$H(s)=\frac{I_2}{E_s}=\frac{1}{s^2+5s+5}=\frac{K_1}{s+\frac{5+\sqrt{5}}{2}}+\frac{K_2}{s+\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \qquad (٦\text{-}٦٠)$$

$$K_1=(s+\frac{5+\sqrt{5}}{2})H_{(S)}\,|_{S=-\frac{5+\sqrt{5}}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}\ ,K_2=(s+\frac{5-\sqrt{5}}{2})H(s)\,|_{s=\frac{-5+\sqrt{5}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}} \qquad (٦\text{-}٦١)$$

بنابراين پاسخ ضربه برابر با: $\Rightarrow h(t)=\frac{1}{\sqrt{5}}(-e^{-\frac{+5+\sqrt{5}}{2}t}+e^{-\frac{5-\sqrt{5}}{2}t})u(t)$ (٦-٦٢)

٦-٤-٣) توابع شبكه و حالت دائمي سينوسي

در صورتي كه هدف محاسبه پاسخ حالت دائمي سينوسي با فرض سينوسي بودن ورودي باشد مي‌توان با استفاده از روش فازورها وبا روش تبديل لاپلاس بصورت زير عمل نمود. در شبكه مثال قبل فرض كنيد هدف محاسبه پاسخ حالت دائمي بازاء ورودي $e_s(t)=V_m\cos\omega_0 t$ باشد. به عبارت دیگر پاسخ حالت دائمی سینوسی بازاء $t\to\infty$ مورد نظر می باشد.

حل : با استفاده از روش تجزيه و تحليل مش پاسخ $I_2(s)$ بصورت زير بدست خواهد آمد.

$$I_2(s)=\frac{\Delta_{12}(s)}{\Delta_m(s)}=E_s(s)H(s)=\frac{1}{s^2+5s+5} \qquad (٦\text{-}٦٣)$$

براي محاسبه پاسخ حالت دائمي ورودي $\hat{e}_s(t)=V_m e^{j\omega_\circ t}$ در نظر گرفته و جزء حقيقي پاسخ را درنظر خواهيم گرفت بنابراين $\hat{E}_S(s)=\frac{V_m}{s-j\omega_\circ}$ و تبديل لاپلاس پاسخ بصورت زير خواهد بود:

$$\hat{I}_2(s)=\frac{V_m}{s-j\omega_\circ}H(s) \qquad (٦-٦٤)$$

برای محاسبه لازمست $\hat{i}_2(t)$ را بصورت زیر به کسرهاي جزيي تبديل نمائيم.

$$\hat{I}_2(s)=\frac{k_1}{s-j\omega_0}+\frac{k_2}{s-p_1}+\frac{k_3}{s-p_2}+.... \qquad (٦-٦٥)$$

$$k_1=(s-j\omega_0)\hat{I}_2(s)|_{s=j\omega_\circ}=V_mH(j\omega_\circ) \qquad (٦-٦٦)$$

$$\Rightarrow \hat{i}_2(t)=V_mH(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}+k_2e^{p_1t}+k_3e^{p_2t} \qquad (٦-٦٧)$$

با فرض اينکه تمام قطب‌هاي H(s) در نيم صفحه باز چپ باشند (يعني $\mathrm{Re}[p_j]<0$ براي $i=1,2,...$ p_j ها قطب‌هاي H(s) هستند) در اينصورت در حالت دائمي يعني وقتي $t\to\infty$ تمام جملات نمايي سمت صفر ميل خواهند کرد و بنابراين :

براي مقادير بزرگ t $\quad \hat{i}_2(t)\approx V_mH(j\omega_\circ)e^{j\omega_\circ t}$

براي محاسبه پاسخ دائمي سينوسي بازاء ورودي $e_s(t)=V_m\cos\omega_0 t$ کافيست جزء حقيقي را محاسبه کنیم یعنی:

$$i_2(t)=\mathrm{Re}[\hat{i}_2(t)]$$

در شبکه حاضر داريم:

$$i_2(t)=V_m\,|H(j\omega_0)|\cos(\omega_0 t+\angle H(j\omega_0)) \qquad (٦-٦٨)$$

$$H(j\omega_0)=\frac{1}{(j\omega_0)^2+5(j\omega_0)+5}=\frac{1}{(5-\omega_0^2)+j5\omega_0}$$

بنابراین $|H(j\omega_0)|=-\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{(5-\omega_0)^2+25\omega_0^2}}$ و $\angle H(j\omega_0)=-\tan^{-1}\frac{5\omega_0}{5-\omega_0^2}$ می باشد.

تمرين : نشان دهيد که با استفاده از بکارگيري فازورها پاسخ حالت دائمي محاسبه شده با پاسخ محاسبه شده فعلي يکسان خواهند بود.

٤-٤-٦): خواص اساسي شبکه‌هاي خطي تغيير ناپذير بازمان (LTI)

۱) تبديل لاپلاس پاسخ کامل برابر با مجموع تبديل لاپلاس‌هاي پاسخ حالت صفر و پاسخ ورودي صفر است.

۲) تابع شبکه يك مدار LTI تابعي گويا با ضرائب حقيقي است که هر گاه در تبديل لاپلاس ورودي ضرب شود تبديل لاپلاس پاسخ حالت صفر را بدست مي‌دهديعنی:

$$Y(s)=H(s)\ X(s)$$

این نتیجه از خاصیت کانوالوشن تبدیل لاپلاس حاصل می شود.

۳) شرايط اوليه مورد نياز براي حل شبکه نسبت به هر متغير آن بوسيله ولتاژهاي اوليه دو سرخازن‌ها و جريانهاي اوليه سلفها کاملاً شخص مي‌شود.

٤) تابع شبکه يك مدار LTI برابر با تبديل لاپلاس پاسخ ضربه متناظر آن شبکه است.

۵) مشتق پاسخ پله برابر با پاسخ ضربه و انتگرال پاسخ ضربه برابر با پاسخ پله مي‌باشد.

٦) اگر تمام قطب‌هاي H(s) داراي جزء حقيقي منفي باشند (در نيم صفحه چپ صفحه S) پاسخ حالت صفر به ورودي سينوسى $e_s(t)=V_m\cos\omega_0 t$ به سمت پاسخ حالت دائمي سينوسي $y(t)=|H(j\omega_0)|V_m\cos(\omega_0 t+\angle H(j\omega_0))$ ميل مي‌كند.

٧) اگر تابع شبكه H(s) را در s=jω_0 محاسبه كنيم نتيجه بدست آمده نسبت فازور خروجي به فازور ورودي در حالت دائمي سينوسي خواهد بود.

٦-٥) حل معادلات حالت يك شبكه LTI بكمك تبديل لاپلاس

همچنانكه در فصل ٥ (معادلات حالت) مشاهده شد دستگاه معادلات حالت يك شبكه خطي تغيير ناپذير بازمان بصورت زير بدست مي‌آيد.

$$\dot{\overline{X}}(t)=\overline{A}\,\overline{X}(t)+\overline{b}\,w(t) \qquad (٦\text{-}٦٩)$$

$$y(t)=\overline{c}^T\,\overline{X}(t)+d\,w(t) \qquad (٦\text{-}٧٠)$$

در دستگاه فوق $\overline{X}(t)$ بردار حالت ($\dot{\overline{X}}(t)$ مشتق بردار حالت نسبت به زمان) و w(t) ورودي و y(t)پاسخ يا خروجي شبكه مي باشد.

در صورتي كه از طرفين رابطه (٦٩-٦) تبديل لاپلاس بگيريم با استفاده از خاصيت خطي و مشتق تبديل لاپلاس داريم:

$$s\,\overline{X}(s)-\overline{X}(0)=\overline{A}\,\overline{X}(s)+\overline{b}\,W(s) \qquad (٦\text{-}٧١)$$

$\overline{X}(s)$ تبديل لاپلاس بردار حالت $x_{(t)}$ است با مرتب كردن معادله اخير داريم:

$$(s\,\overline{I}-\overline{A})\,\overline{X}(s)=\overline{b}\,W(s)+\overline{X}(0) \qquad (٦\text{-}٧٢)$$

بطوريكه $\overline{I}$ ماتريس يكه مي‌باشد.

$$\Rightarrow \overline{X}(s)=(s\,\overline{I}-\overline{A})^{-1}\left[\overline{X}(0)+\overline{b}\,W(s)\right] \qquad (٦\text{-}٧٣)$$

تبديل لاپلاس رابطه (٧٠-٦) نيز بصورت زير محاسبه خواهد شد.

$$Y(s)=\overline{c}^T\,\overline{X}(s)+dW(s) \qquad (٦\text{-}٧٤)$$

با قراردادن رابطه (٧٣-٦) در (٧٤-٦)تبديل لاپلاس كامل بصورت زير بدست مي‌آيد.

$$Y(s)=\underbrace{\overline{c}^T\,(s\,\overline{I}-\overline{A})^{-1}\,\overline{X}(0)}_{(1)}+\underbrace{\left[\overline{C}^T\,(s\,\overline{I}-\overline{A})^{-1}\,\overline{b}+d\right]W(s)}_{(2)} \qquad (٦\text{-}٧٥)$$

(١):تابعی از شرايط اوليه (٢):تابعی از ورودی

بنابراين باز هم واقعيت زير مشاهده مي‌شودكه:

(تبديل لاپلاس پاسخ حالت صفر) +(تبديل لاپلاس پاسخ ورودي صفر) = (تبديل لاپلاس پاسخ كامل)

٦-٥-١) محاسبه تابع شبكه بكمك معادلات حالت

براي محاسبه تابع شبكه H(s) مي‌توان در معادله (٧٥-٦) شرايط اوليه $\overline{X}(0)$ را برابر با صفر قرار داد و پاسخ حالت صفر را محاسبه نمود در اين صورت داريم:

$$Y(s)=\underbrace{\left[\overline{C}^{T}(s\overline{I}-\overline{A})^{-1}\overline{b}+d\right]}_{H(s)}W(s) \qquad (۶-۷۶)$$

بنابراین تابع شبکه برابر است با :

$$H(s)=\overline{C}^{T}(s\overline{I}-\overline{A})^{-1}\overline{b}+d \qquad (۶-۷۷)$$

۶-۵-۲) محاسبه پاسخ ورودي صفر و $e^{\overline{A}t}$ بکمک تبدیل لاپلاس

مي دانيم که معادله حالت بازاء ورودي صفر بصورت (۶-۷۸) مي باشد.

$$\dot{\overline{X}}(t)=\overline{A}\,\overline{X}(t) \qquad (۶-۷۸)$$

پاسخ ورودي صفر معادله ديفرانسيل برداري فوق بصورت زير محاسبه مي شود.

$$\overline{X}_\circ=\overline{X}(0) \quad \text{بطوریکه} \quad \overline{X}(t)=e^{\overline{A}t}\,\overline{X}_\circ, \qquad t\ge 0 \qquad (۶-۷۹)$$

براي محاسبه $e^{\overline{A}t}$ مي توان از روش تبدیل لاپلاس بصورت زیر استفاده کرد.

اگر از معادله (۶-۷۸) تبدیل لاپلاس بگیریم با استفاده از خاصیت مشتق تبدیل لاپلاس داریم:

$$s\overline{X}(s)-\overline{X}_0=\overline{A}\,\overline{X}(s)\Rightarrow(s\overline{I}-\overline{A})\overline{X}(s)=\overline{X}_0$$
$$\Rightarrow \overline{X}(s)=(s\overline{I}-\overline{A})^{-1}\overline{X}_0 \qquad (۶-۸۰)$$

تبدیل لاپلاس معکوس رابطه (۶-۸۰) پاسخ ورودي صفر را خواهد داد:

$$\overline{X}(t)=L^{-1}\left[\overline{X}(s)\right]=L^{-1}\left[(s\overline{I}-A)^{-1}\right]\overline{X}_0 \qquad (۶-۸۱)$$

با مقایسه رابطه (۶-۸۱) با (۶-۷۹) در مي یابیم که :

$$e^{\overline{A}t}=L^{-1}\left[(s\overline{I}-\overline{A})^{-1}\right] \qquad (۶-۸۲)$$

مثال : معادلات حالت یک شبکه LTI بصورت زیر داده شده است:

$$\dot{\overline{X}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{bmatrix}\overline{X}(t)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}W(t) \qquad (۶-۸۳)$$

$$\overline{X}(0)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \qquad y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\overline{X}(t) \qquad (۶-۸۴)$$

پاسخ ضربه و نیز پاسخ ورودي صفر شبکه را محاسبه کنید.

حل: تابع شبکه با توجه به رابطه (۶-۷۷) بحث قبل بصورت زیر محاسبه مي گردد.

$$H(s)=\overline{c}^{T}(s\overline{I}-\overline{A})^{-1}\overline{b}=\frac{1}{s^2+5s+6}=\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+3} \qquad (۶-۸۵)$$

پاسخ ضربه برابر خواهد بود با: $\Rightarrow h(t)=(e^{-2t}-e^{-3t})u(t)$ (۶-۸۶)

پاسخ ورودي صفرنیز بصورت زیر با محاسبه $e^{\overline{A}t}$ بدست می آید.

$$e^{\overline{A}t}=L^{-1}\left[(s\overline{I}-\overline{A})^{-1}\right]=L^{-1}\begin{bmatrix}\frac{s+5}{s^2+5s+6} & \frac{1}{s^2+5s+6}\\ \frac{6}{s^2+5s+6} & \frac{s}{s^2+5s+6}\end{bmatrix} \qquad (۶-۸۷)$$
$$=\begin{bmatrix}3e^{-2t}-2e^{-3t} & e^{-2t}-e^{-3t}\\ -6e^{-2t}+6e^{-3t} & -2e^{-3t}+3e^{-3t}\end{bmatrix}$$

و بردار حالت برابر با:

$$\Rightarrow \overline{X}(t) = e^{\overline{A}\,t}\,\overline{X}(0) = \begin{bmatrix} 3e^{-2t} & -2e^{-3t} \\ 6e^{-3t} & -6e^{-2t} \end{bmatrix} \qquad (٦\text{-}٨٨)$$

٦-٦) نكاتي چند در مورد نوشتن معادلات تجزيه و تحليل گره و مش و حلقه وكات ست با استفاده از تبدیل لاپلاس:

نکات زیر در محاسبه پاسخ کامل با استفاده از تبدیل لاپلاس بكمك هر كدام از روشـهاي تجزيه و تحليل بكار مى رود در صورتي که محاسبه پاسخ حالت صفر مورد نظر باشد کافیست شرايط اوليه را صفر قرار دهيم .

۱) مدار معادل سلف در حوزه s

رابطه ولتاژ یا جریان یک سلف با مقدار اولیه $i_L(0)$ در حوزه لاپلاس (s) بصورت زیر می باشد:

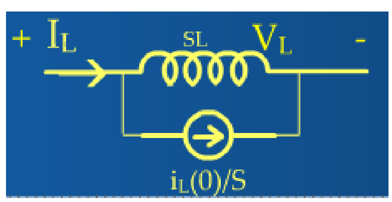
$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \Rightarrow V_L(s) = L(sI_L(s) - i_L(0^-)) \qquad (٦\text{-}٨٩)$$

$$= Ls\,I_L(s) - Li_L(0^-)$$

با توجه به رابطه فوق مدار معادل تونن در حوزه s را برای زیر برای سلف بدست می آید.

شکل (٦-٥) مدار معادل سلف در حوزه S براي تجزيه و تحليل حلقه و مش

می توان با تبدیل مدار معادل نورتن مدار معادل سلف را بصورت زیر بیان نمود:



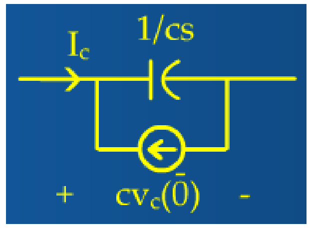
شکل (٦-٦) مدار معادل سلف در حوزه S براي تجزيه و تحليل گره و کات ست

۲)مدار معادل خازن در حوزه s :

رابطه ولتاژ یا جریان یک خازن با مقدار اولیه $v_C(0)$ در حوزه لاپلاس (s) بصورت زیر می باشد.

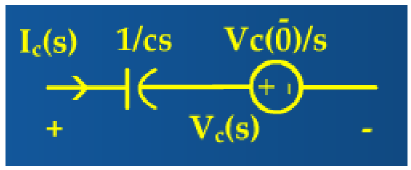
$$i_c(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt} \Rightarrow I_C = csV_C(s) - c\,v_c(0^-) \qquad (٦\text{-}٩٠)$$

با توجه به رابطه فوق مدار معادل نورتن زیر برای خازن بدست می آید:



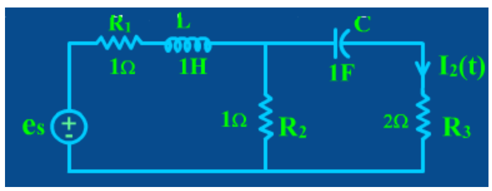
شکل (٦-٧)   مدار معادل يك خازن در حوزه S براي تجزيه و تحليل گره و كات ست

می توان با تبدیل مدار معادل تونن مدار معادل تونن خازن را در حوزه s بصورت زیر بیان نمود:



شكل(٦-٨) مدار معادل يك خازن حوزه S براي تجزيه و تحليل مش و حلقه

مثال: در شبکه زیر جریان $i_2(t)$ را به کمک تجزیه و تحلیل مش و با استفاده از حوزه s بدست آورید.

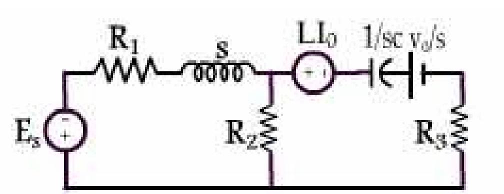


شکل (٦-٩)

$i_L(\circ^-) = I_\circ$

$v_c(\circ^-) = V_\circ$

حل: با توجه به نکات ذکر شده شبکه فوق در حوزه s بصورت زیر در می آید:



شکل (٦-١٠)

با کمک روش نظری مش دستگاه معادلات لازم برای محاسبه پاسخ مورد نظر بصورت زیر حاصل می شود:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + sL & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + \dfrac{1}{cs} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_s + LI_\circ \\ -\dfrac{V_\circ}{s} \end{bmatrix} \qquad (٦\text{-}٩١)$$

حال تبدیل لاپلاس مورد نظر را به کمک روش گرامر محاسبه و با کمک تبدیل لاپلاس معکوس پاسخ $i_2(t)$ بدست می آید.