

چرخ دنده‌ها

فهرست مطالب

عنوان	شماره صفحه
۱- معرفی چرخ دنده‌ها.....	۱
۱-۱- فرمهای اصلی چرخ دنده‌ها.....	۱
۲-۱- پارامترهای عمومی چرخ دنده‌ها.....	۳
۳-۱- اصول (قوانین) چرخ دنده‌ها.....	۴
۴-۱- جنس چرخ دنده‌ها.....	۵
۵-۱- شکل دادن دندانه‌های چرخ دنده.....	۵
۲- چرخ دنده‌های ساده.....	۶
۱-۲- عمل مزدوج.....	۶
۲-۲- نسبت تماس.....	۸
۳-۲- تداخل.....	۸
۴-۲- اصلاح دنده.....	۹
۵-۲- بازرسی چرخ دنده‌ها.....	۱۲
۶-۲- اندازه‌گیری ارتفاع ضخامت و تری.....	۱۴
۷-۲- مجموعه‌های چرخ دنده.....	۱۵
۸-۲- تحلیل نیرو.....	۱۷
۹-۲- طراحی چرخ دنده‌های ساده و مارپیچ بر اساس استاندارد AGMA.....	۱۷
۳- چرخ دنده‌های مارپیچ و حلزون.....	۲۶
۱-۳- روابط چرخ دنده مارپیچی با محور موازی.....	۲۸
۲-۳- چرخ دنده‌های مارپیچ- تحلیل نیروها.....	۲۸
۳-۳- چرخ دنده‌های مارپیچ- تحلیل استحکام.....	۲۹
۴- چرخ دنده‌ی حلزونی- سینماتیک.....	۳۱
۱-۴- چرخ دنده‌ی حلزونی- تحلیل نیرو.....	۳۲
۲-۴- چرخ دنده‌های مخروطی ساده- سینماتیک.....	۳۴
۳-۴- چرخ دنده‌های مخروطی- تحلیل نیرو.....	۳۵

۱- معرفی چرخ دنده‌ها

چرخ دنده‌ها حرکت چرخشی یک محور را به محور دیگر از طریق اتصال دندانه‌ای منتقل می‌نمایند. مراحل کلی که در چرخ دنده‌ها مطرح است عبارتند از: ۱- شناسایی چرخ دنده‌ها، ۲- تحلیل نیرویی چرخ دنده‌ها، ۳- ساخت چرخ دنده‌ها و ۴- بررسی چرخ دنده‌ها. در این مختصر به ساخت چرخ دنده‌ها اشاره‌ای چندانی نمی‌شود. **محاسن:** ۱- انتقال حرکت بدون لغزش صورت می‌پذیرد. ۲- درگیری مستقل از بار است. ۳- فضای کمی اشغال می‌کند. ۴- راندمان خوبی دارند. ۵- براساس ابعاد، هر نسبت حرکت انتقالی دلخواه را دارند. **معایب:** ۱- عمدتاً انتقال نیرو توأم با لرزش است. ۲- سر و صدای زیادی تولید می‌شود. ۳- نیاز به فاصله محوری دقیق نسبت به ابعاد چرخ دنده‌ها است. ۴- نسبتاً ساخت و استفاده آنها پرهزینه است.

۱-۱- فرمهای اصلی چرخ دنده‌ها

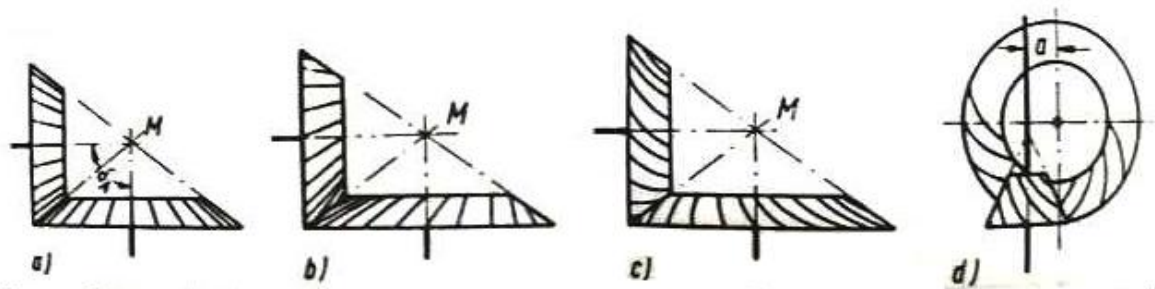
نسبت به وضع اتصال محورها، چرخ دنده‌ها فرمهای مختلفی دارند.

۱- چرخ‌های دنده پیشانی: الف) دنده‌ها روی پیشانی چرخ تراشیده شده است. ب) دنده‌ها می‌توانند مستقیم، مایل و یا جناغی باشد. ج) محورهای باید موازی هم باشند. د) حداکثر نسبت انتقال ۱۰ است. $(i \leq 8, i_{\max} \sim 10)$. **الف) چرخ دنده‌های دنده مستقیم:** ۱) در دورهای متوسط و کم و در سرعت‌های محیطی $(V \leq 20 \text{ m/s})$ و بارهای معمولی استفاده می‌شود. مانند جعبه دنده‌ها و بالابرها کوچک. ۲) محاسن: بار محوری ایجاد نمی‌کنند، راندمانشان بالاست (۹۷-۹۹٪)، با پهن ساختن می‌توان لهدگی و سایش را کاهش داد. ۳) معایب: برای دورهای زیاد مناسب نیست، سر و صدا ایجاد می‌کنند. نسبت به خطای فرم دنده‌ها و بارهای دینامیکی اضافی حساسند. **ب) چرخ دنده‌های دنده مایل:** ۱) در تعداد دورهای بالا و بارهای زیاد مصرف می‌شوند مانند جعبه دنده‌های کشتی‌ها، ماشین‌های ابزار و غیره. ۲) محاسن (در مقایسه با دنده مستقیم): چرخش آرام و کم سر و صدا، انتقال دور زیاد، قابلیت بارپذیری بیشتر در مقابل اشتباهات فرم دنده حساس نیستند. ۳) معایب: نیروی محوری ایجاد می‌کند، راندمان کمتری دارند.

ج) چرخ دنده‌های مارپیچی: ۱) انتقال قدرت در محل درگیری روی هر دنده شبیه پیچها است. ۲) به ندرت و فقط در بارهای کم، نسبت انتقال حداکثر ۵ مصرف می‌شوند مانند محورهای تقسیم جرقه دلکو. ۳) محاسن: تحت هر زاویه دلخواه حرکت و قدرت را انتقال دهند. نیاز به دقت ساخت بالا ندارند. ۴) معایب: قابلیت انتقال کم، سائیدگی خیلی زیاد، راندمان کم در مقایسه با چرخهای دنده پیشانی، چرخ دنده مخروطی و دنده حلزون هستند.

۲- چرخ دنده‌های مخروطی: الف) با دنده‌های مستقیم، مایل، قوسی یا مارپیچی تراشیده می‌شود، ب) برای انتقال حرکت بین محورهای متقاطع (متنافر و صلیبی) بکار می‌رود. ج) حداکثر نسبت انتقال $i_{\max} \sim 6$ می‌باشد. د) دنده مستقیم فقط در تعداد دورهای کم مانند ابزار دستی و جرثقیل دستی و ... و به طور کلی جهت انتقال قدرت کم استفاده می‌شود. ه) مایل دارای درجه پوشش بیشتر، کار آرام و با سر و صدای هستند، برای انتقال قدرتها و دورهای زیادتر استفاده می‌شود مانند جعبه دنده‌های ماشین‌افزار. و) مخروطی با فرم دنده قوسی بین محورهای متنافر و صلیبی در

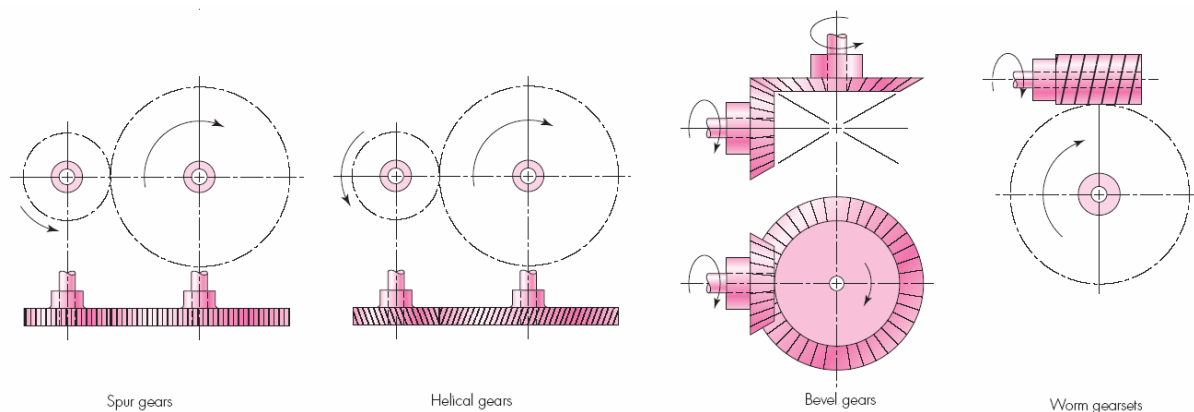
حرکتهای خیلی سریع و بدون سر و صدا و انتقال قدرت زیادتر، مانند جعبه دنده‌های پرقدرت، دیفرانسیل ماشینهای حمل و نقل و غیره. (ز) عمر بستگی به دقت ساخت و بخصوص دقت مونتاژ دارد.



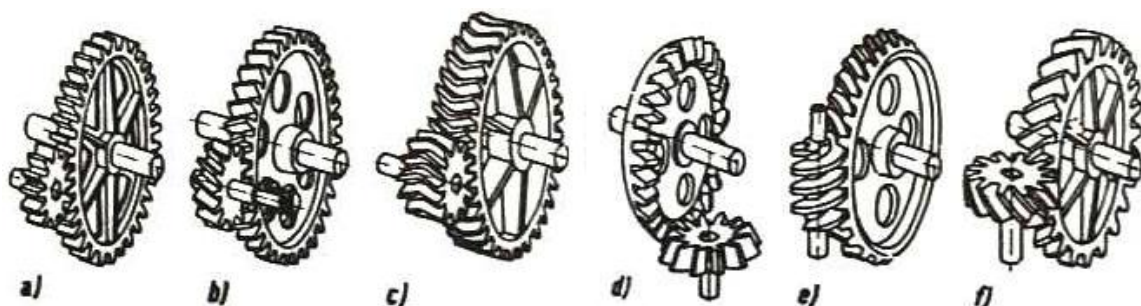
شکل ۱- فرمهای اصلی دنده‌های چرخدنده‌های مخروطی (a) با دنده‌های مستقیم (b) با دنده‌های مایل (c) با دنده‌های قوسی (d) چرخهای مخروطی با فاصله محوری

۳- چرخ‌دنده‌ی حلزونی و محور حلزونی: الف) برای انتقال حرکت بین محورهای صلیبی (عمود بر هم)،

ب) نسبت انتقال از $i_{\max} \sim 60$ تا $i_{\min} \sim 5$ (در مواردی $i_{\max} \sim 100$ و یا بیشتر). ج) موارد مصرف: برای انتقال حرکت و قدرت بین دو محور متعامد (مانند جعبه دنده چرخ حلزون اونیورسال). د) محاسن: آرام و بی‌سر و صدا کار می‌کنند. نوسانات را خنثی می‌کند. سبک و کم حجم هستند. ه) معایب: سائیدگی زیاد است، راندمان کم است. نیروی محوری بخصوص در حلزونها زیاد است. و) تعداد راههای در نسبت انتقال بزرگتر کمتر است.



شکل ۲- انواع چرخ دنده‌ها



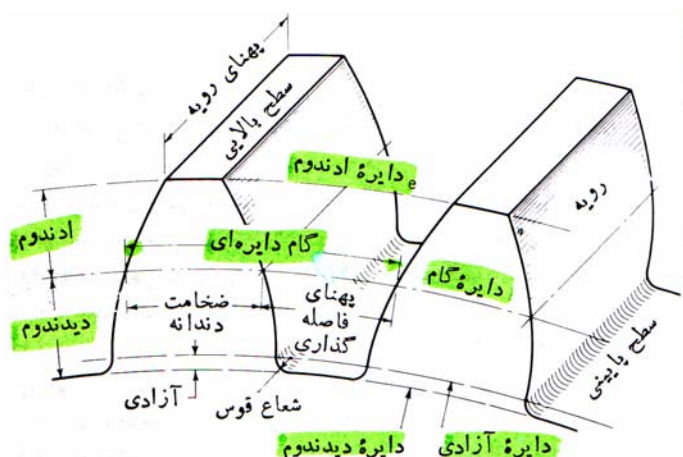
شکل ۳- فرمهای اصلی چرخدنده‌ها (a-c) چرخدنده‌های پیشانی، (d) چرخدنده‌های مخروطی، (e) محور حلزونی و چرخدنده حلزونی،

(f) چرخدنده‌های مارپیچی

۱-۲- پارامترهای عمومی چرخ دنده‌ها

پارامترهای عمومی در چرخ دنده‌ها در شکل روبرو که مربوط به چرخ دنده ساده است، نشان داده شده است. این پارامترها به قرار زیر است:

دایره‌ی گام: دایره‌ای فرضی است. دایره‌های گام یک جفت چرخ دنده درگیر بر هم مماس است. روی دایره‌ی گام ضخامت دندانه با پهنای فاصله گذاری با هم برابرند.



مدول m : نسبت قطر گام به تعداد دندانه‌هاست $\left(m = \frac{d}{N}\right)$. مدول شاخص اندازه دندانه در سیستم SI است. البته در کشورهایی که واحدهای اینچی هنوز به طور گسترده‌ای بکار می‌روند از عکس مدول بنام گام قطری، بعنوان معیار اندازه دندانه استفاده می‌شود. گام قطری تعداد دندانه به اینچ است.

نکته: مدول یک جفت چرخ دنده درگیر (پینیون و چرخ دنده) دقیقاً یکسان است.

گام دایره‌ای P : فاصله‌ای است که بر روی دایره گام، از یک نقطه بر روی یک دندانه تا نقطه مشابه بر روی دندانه مجاور اندازه گیری می‌شود. $(p = m\pi)$

پینیون: چرخ دنده‌ی کوچکتر از بین دو چرخ دنده درگیر را پینیون گویند. چرخ دنده‌ی بزرگتر غالباً چرخ دنده نامیده می‌شود.

ادندوم (a): فاصله شعاعی بین سطح بالایی و دایره گام است.

دیدندوم (b): فاصله شعاعی از سطح پائینی تا دایره گام.

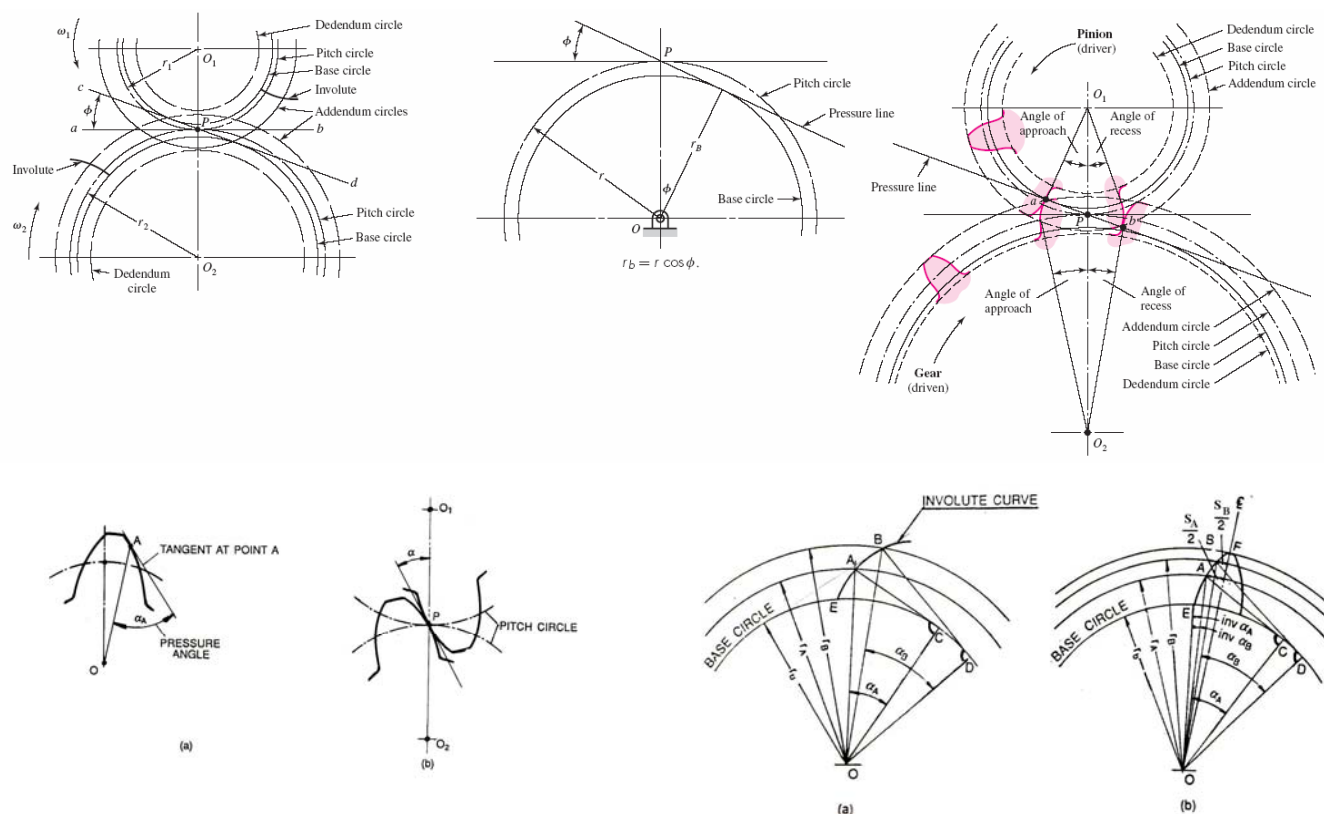
عمق کامل (h_t) : جمع ادندوم و دیدندوم است.

لقی سر: فاصله‌ی بین سر دنده یکی از چرخ دنده‌ها تا پای دنده‌ی چرخ دنده‌ی دیگر که بطور متوسط $0.2 m$ است.

دایره‌ی آزادی: دایره‌ای است که بر دایره ادندوم چرخ دنده درگیر مماس است.

خط فشار: راستای نیروی برآیند بین چرخ دنده‌های درگیر که از نقطه تماس دواير گام می‌گذرد را خط فشار، خط مولد یا خط عمل می‌نامند.

زاویه فشار: زاویه بین خط فشار و مماس مشترک دواير گام است.



شکل ۴- پارامتر چرخ دنده‌ی ساده به انضمام زاویه‌ی فشار و ضخامت دنده در شعاع‌های مختلف برای منحنی اینولوت

۱-۳- اصول (قوانین) چرخ دنده‌ها

۱- دواير گام چرخ دنده‌های درگیر بدون لغزش بر روی یکدیگر می‌غلطند.

۲- نقطه تماس دواير گام در چرخ دنده‌ها همواره ثابت است.

۳- براساس بند ۱ و ۲ می‌توان نتیجه گرفت: $\frac{w_1}{w_2} = \frac{r_2}{r_1}$ = نسبت انتقال

۴- برای رعایت قانون اساسی چرخ دنده‌ها دنده‌ها باید طوری طراحی شوند که در تمام اوقات خط عمل از نقطه تماس دواير گام بگذرد.

نکته ۱- می‌توان ثابت کرد که اگر دندانه‌های چرخ دنده از اینولوت یا سیکلوئید تشکیل شوند، قانون اساسی چرخ دنده‌ها رعایت خواهد شد.

نکته ۲- مسیری که یک نقطه شروع روی نخ پیچیده شده حول استوانه هنگام باز شدن طی می‌کند، مسیر اینولوت است. در عمل به دایره‌ای که منحنی اینولوت براساس آن ایجاد می‌شود، دایره‌ی مبنا موسوم بوده و $r_b = r \cos \phi$ جایی که ϕ زاویه‌ی فشار است.

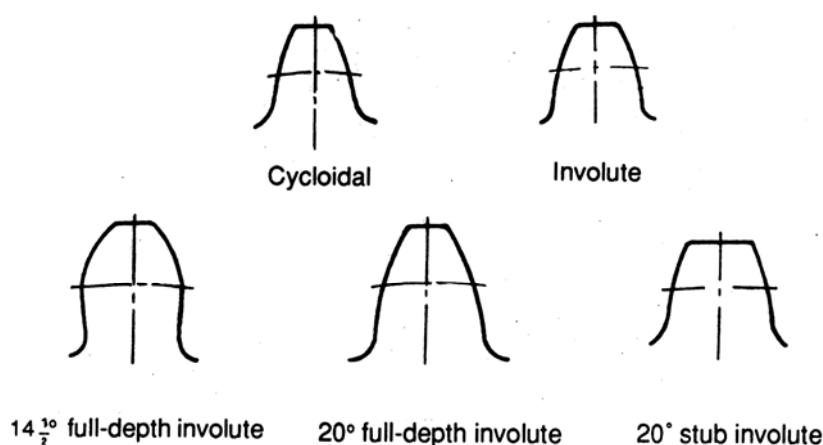
نکته ۳- از مسیری که یک نقطه ثابت روی یک دایره هنگام غلتیدن دایره روی سطوح تخت، محیط داخلی یا خارجی دایره طی می‌کند منحنی‌های سیکلوئیدی ایجاد می‌شود.

نکته ۴- در منحنی‌های سیکلوئیدی سطوح دنده‌ها با منحنی محدب و مقعر با هم کار می‌کنند، ناحیه تماس پهن بوده لذا لهیدگی و سائیدگی کم است و قابلیت بارپذیری زیاد است. تولیدشان پرهزینه است.

نکته ۵- اغلب پروفیل چرخدنده‌ها از اینولوت است، تولید آنها ساده است، در مقابل عدم دقت فاصله محوری حساس نیستند البته قدرت بارپذیری آنها کم بوده و سایش در آنها زیاد است.

نکته: اگر تعداد دنده در چرخدنده‌های اینولوتی کمتر از حد باشد، دنده‌ها در برابر خطر بریده شدن قرار خواهند گرفت و $Z_g = \frac{2}{\sin^2 \alpha}$ حداقل تعداد دندانه که α زاویه فشار است.

نکته: ضخامت سردنده‌ها محدودیت دارد و از حدی کمتر نمی‌تواند باشد.



شکل ۵- مقایسه انواع پروفیل‌های دندانه

۱-۴- جنس چرخدنده‌ها

الف) فلزی: چرخدنده‌های کوچک (پینیون) اغلب فولادی هستند، چرخهای بزرگ نسبت به تنش‌های وارده از چدن، فولاد ریخته و یا فولاد ساخته می‌شوند. قسمت دنده از جنس فولاد قابل بهینه‌سازی و یا با قابلیت سخت کاری تولید می‌شوند. جنس پینیون بخاطر اصطکاک شدید سخت‌تر از چرخ‌های بزرگ در نظر گرفته می‌شود. در چرخ حلزون‌ها بخاطر خوردگی نباید هر دو از جنس فولاد سخت شده استفاده کرد. ۲- اجناس مصنوعی: چرخ‌دنده‌ها را اصولاً از سه جنس مصنوعی مواد لایه‌ای پرسی، بافته‌های سخت و پلی‌آمیدها می‌سازند.

ب) چرخ‌دنده‌های از جنس مواد مصنوعی: محاسن: این نوع چرخدنده‌ها بدون سر و صدا کار کرده، ضربات ناشی از حرکت مستهلک می‌کنند. دارای استحکام کار و قابلیت درگیری زیاد و اصطکاک کم و وزن مخصوص اندک می‌باشند با مدول الاستیکی کم موجب تعدیل خطای گام درگیری می‌شوند. در مقابل خوردگی، روغنکاری ناقص اطمینان کاری زیادی دارند. معایب: در مقابل رطوبت تورم می‌کنند. قابلیت بارپذیری کمی دارند. اغلب گرانیقیمت هستند. موارد مصرف: دستگاه‌های خانگی، ماشینهای دفتري، ماشینهای نساجی و بافندگی، ابزار الکتریکی و اسباب‌بازیها.

۱-۵- شکل دادن دندانه‌های چرخدنده

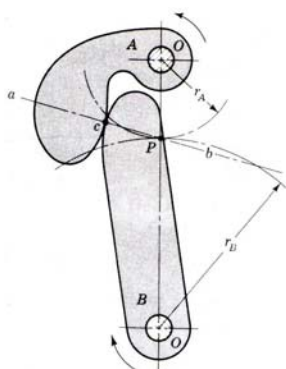
۱- ریخته‌گری ماسه‌ای، قالب‌گیری پوسته‌ای، ریخته‌گری دقیق، ریخته‌گری در قالب دائمی و سایر روشهای ریخته‌گری. ۲- فرآیند متالوژی پودر ۳- فرآیند اکستروژن ۴- ماشینکاری (فرزکاری، صفحه‌تراشی و هاب‌زنی) معمولاً چرخدنده‌هایی که نسبت به اندازه‌شان بارهای زیاد تحمل می‌کنند ۵- نوردکاری سرد

۲- چرخ دنده‌های ساده

جدول ۱- روابط چرخ دنده‌های ساده

$p = \pi.m$	p	گام نرمال
$d = Z.m$	d	قطر دایره‌ی گام
$d_a = d + 2m$	d_a	قطر دایره‌ی سر دنده
$d_f = d - 2 \times 1.25m$	d_f	قطر دایره‌ی ته دنده
$d_b = d \cdot \cos(\alpha)$	d_b	قطر دایره‌ی مبناء
$S = \frac{\pi.m}{2} = \frac{p}{2}$	S	ضخامت دنده روی دایره‌ی گام
$a = m \cdot \frac{Z_1 + Z_2}{2}$	a	فاصله‌ی مرکزی
$p_b = \pi.m \cdot \cos(\alpha)$	p_b	گام پایه
$\text{Inv}(\alpha) = \text{Tan}(\alpha) - \alpha$		تابع اینولوت
$\cos(\alpha_B) = \frac{d}{d_B} \cos(\alpha)$	α_B	زاویه‌ی فشار در هر شعاع
$S_B = d_B \left(\frac{S_n}{Z.m} + \text{Inv}(\alpha) - \text{Inv}(\alpha_B) \right)$	S_B	ضخامت دنده روی هر شعاع

۲-۱- عمل مزدوج



شکل ۶- نمایی از عملکرد دنده

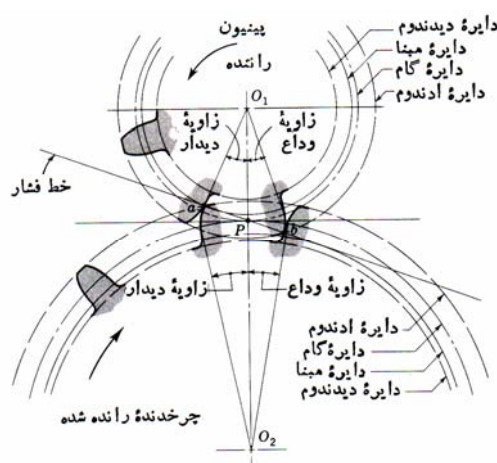
هنگامی که پروفیل‌های دندانه، یا بادامک‌ها طوری طراحی شوند که در حین درگیری نسبت سرعت زاویه‌ای ثابتی ایجاد کنند، گفته می‌شود که آن‌ها عمل مزدوج دارند. یکی از این راه‌حل‌ها، پروفیل اینولوت است، که با استثنای اندکی، برای دندانه‌ی چرخ دنده کاربرد عمومی دارد.

هنگامی که سطح منحنی شکل در مقابل سطح دیگری فشار می‌آورد. نیروها در هر لحظه در امتداد عمود مشترک ab دو منحنی جهت می‌گیرند. خط ab ، که راستای عمل نیروها را نمایش می‌دهد، خط عمل نامیده می‌شود. خط عمل، خط مرکزهای $O-O$ را در نقطه‌ای مثل P قطع می‌کند.

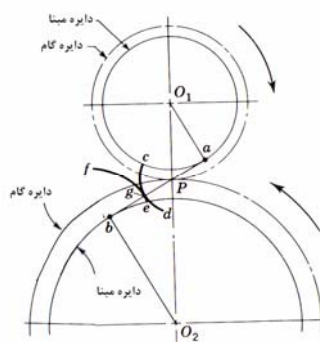
دایره‌هایی که از هر مرکز رسم می‌شوند و از نقطه‌ی P می‌گذرند دایره‌های گام نامیده می‌شوند، و شعاع هر دایره شعاع گام نام دارد. نقطه‌ی P را، نقطه‌ی گام می‌نامند. برای انتقال حرکت با نسبت سرعت زاویه‌ای ثابت، نقطه‌ی گام باید ثابت بماند؛ یعنی، همه‌ی خط‌های عمل برای هر نقطه تماس لحظه‌ای باید از نقطه‌ی P بگذرند.

حال پروفیل اینولوت را امتحان می‌کنیم تا ببینیم چگونه نیاز به انتقال حرکت یکنواخت را ارضا می‌کند. در شکل زیر دو چرخ دنده با مرکزهای ثابت O_1 و O_2 نشان داده شده‌اند که شعاع‌های دایره‌های مبنای آن‌ها به ترتیب O_1a و O_2b است. حال تصور می‌کنیم که ریسمانی دور دایره‌ی مبنای چرخ دنده‌ی ۱ در جهت ساعتگرد پیچیده شده است و بین نقطه‌های a و b محکم کشیده شده، و دور دایره‌ی مبنای چرخ دنده‌ی ۲ در جهت پاد ساعتگرد پیچیده شده است. حال اگر

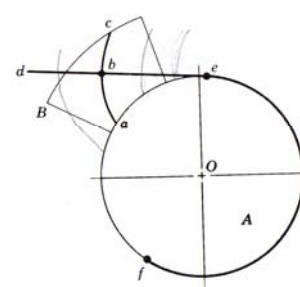
دایره‌های مبنا در جهت‌های مختلفی بچرخند به طوری که ریسمان را محکم نگه دارند، نقطه‌ی g از ریسمان، اینولوت‌های cd را روی چرخنده‌ی ۱ و ef را روی چرخنده‌ی ۲ ردگذاری می‌کند. لذا اینولوت‌ها همزمان با هم توسط نقطه‌ی ردگذاری ایجاد می‌شوند. بنابراین، نقطه‌ی ردگذاری، نقطه‌ی تماس را نشان می‌دهد، در حالی که بخشی از ریسمان ab خط مولد است. که به خط فشار یا خط عمل نیز موسوم است. نقطه‌ی تماس در طول خط مولد حرکت می‌کند، موقعیت خط مولد تغییر نمی‌کند زیرا این خط همیشه بر دایره‌های مبنا مماس است، و چون خط مولد همواره بر اینولوت‌ها در نقطه‌ی تماس عمود است، نیاز برای حرکت یکنواخت ارضاء می‌شود.



شکل ۸- عمل دندان



شکل ۷- الف) ایجاد اینولوت، ب) عمل اینولوت



در عمل دایره‌ها را به گونه‌ای در نظر می‌گیرند که زاویه خط فشار ۲۰ درجه یا ۲۵ درجه باشد البته قبلاً $14\frac{1}{2}$ درجه استفاده می‌شد.

زاویه‌ی عمل: مجموع زاویه‌ی دیدار و زاویه‌ی وداع برای هر چرخنده زاویه‌ی عمل نامیده می‌شود.

تمرین ۱- به روش ترسیمی مجموعه چرخ دنده درگیری ارائه دهید که ورودی 1800 rpm خروجی 1200 rpm بزند و قطر دایره‌ی گام پینیون 100 mm و مدول 12 میلی‌متر باشد. کلیه پارامترها را نشان دهید.

می‌توان دنده‌ی شانه‌ای را به عنوان چرخنده‌ی ساده‌ای فرض کرد که قطر گام آن بی‌نهایت بزرگ است. بنابراین، دنده‌ی شانه‌ای بی‌نهایت دندانه دارد و فاصله‌ی دایره‌ی مبنا‌ی آن از نقطه گام بی‌نهایت است. پهلوه‌ای دندانه‌های اینولوت بر روی یک دنده‌ی شانه‌ای خط‌های مستقیمی هستند که زاویه‌ی آن‌ها با خط مرکزها برابر زاویه‌ی فشار است.

لزومی ندارد قطرهای عملی دایره‌های گام یک جفت چرخنده‌ی درگیر با قطرهای گام طراحی آن‌ها برابر باشد، اگر فاصله‌ی مرکزها را افزایش دهیم دو دایره‌ی گام عملی جدید به وجود می‌آوریم که قطرهای بزرگتری دارند چون باید در نقطه‌ی گام بر هم مماس باشند. لذا دایره‌های گام چرخنده‌ها، تا زمانی که یک جفت چرخنده درگیر نشده‌اند، حقیقتاً وجود ندارند.

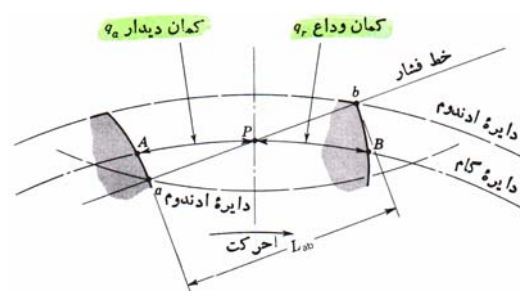
تغییر فاصله‌ی مرکزی بر دایره‌های مبنا اثری ندارد چون از این دایره‌ها در ایجاد پروفیل‌های دندانه استفاده شد. بنابراین دایره‌ی مبنا، اساس هر چرخنده است. افزایش فاصله‌ی مرکزها، زاویه‌ی فشار را می‌افزاید و از طول خط عمل می‌کاهد ولی دندانه‌ها هنوز در حالت مزدوج‌اند و شرایط لازم برای انتقال حرکت یکنواخت هنوز برقرار است، و نسبت سرعت زاویه‌ای تغییر نکرده است.

تمرین ۲- مجموعه‌ی چرخ دنده‌ای از یک پینیون 16 دندانه‌ای تشکیل می‌شود که یک چرخ دنده‌ی 40 دندانه‌ای را می‌راند. مدول، 12 mm است و ادندوم و دیدندوم به ترتیب 12 و 15 میلی‌متر هستند. چرخ دنده‌ها با زاویه‌ی فشار 20° تراشیده می‌شوند. الف) گام دایره‌ای، فاصله‌ی مرکزها، و شعاع دایره‌های مبنا را محاسبه کنید. ب) در نصب این چرخ دنده‌ها، فاصله‌ی مرکزها اشتباهاً 5 میلی‌متر بیشتر در نظر گرفته شد. مقدارهای تغییر یافته‌ی زاویه‌ی فشار و قطر دایره‌های گام را محاسبه کنید.

۲-۲- نسبت تماس

ناحیه‌ی عمل دندانه‌های چرخ دنده‌ی درگیر تماس دندانه در برخوردگاه دو دایره‌ی ادندوم با خط فشار آغاز می‌شود و پایان می‌یابد. در شکل تماس اولیه در a و تماس نهایی در b صورت گرفته است. پروفیل‌های رسم شده‌ی دندانه‌هایی که از این نقطه‌ها می‌گذرند، دایره‌ی گام را به ترتیب در A و B قطع می‌کنند. همان‌گونه که نشان داده شده، فاصله‌ی AP کمان دیدار q_d ، و فاصله‌ی PB، کمان وداع q_r نامیده می‌شود. مجموع این کمان‌ها کمان عمل q_t است. اگر $q_t = P$ باشد یعنی تنها یک دندانه درگیر است. لذا اصطلاح نسبت تماس مطرح می‌گردد. اصطلاح نسبت تماس m_c را به صورت زیر تعریف کرد.

$$m_c = \frac{q_t}{P} = \frac{L_{ab}}{p \cos \phi} = \frac{\sqrt{D_o^2 - D_b^2} + \sqrt{d_o^2 - d_b^2} - 2C \sin \phi}{2P \cos \phi} \quad (1)$$



شکل ۹- تعریف نسبت تماس

که میانگین تعداد جفت‌های در حال تماس دندانه‌ها را مشخص می‌کند. توجه کنید که این نسبت برابر طول مسیر تماس تقسیم بر گام مبنا نیز هست. چرخ دنده‌ها عموماً نباید با نسبت‌های تماس کمتر از حدود 1.2 طراحی شوند چون عدم دقت در نصب ممکن است نسبت تماس را بیشتر کاهش دهد، و امکان برخورد بین دندانه‌ها و زیاد شدن سر و صدا را افزایش دهد. اگر $m_c = 2$ ، چرخ دنده‌ها قفل می‌کنند.

۲-۳- تداخل

تماس قسمت‌هایی از پروفیل‌های دندانه که در عمل مزدوج نیستند تداخل نامیده می‌شود. به عبارت دیگر، تماس در زیر دایره‌ی مبنا‌ی روی قسمت غیر اینولوت ریشه رخ می‌دهد. اثر واقعی این است که تاج اینولوت یا رویه‌ی چرخ دنده‌ی رانده شده می‌خواهد ریشه‌ی غیر اینولوت راننده را بکند.

تداخل را می‌توان با استفاده از زاویه‌ی فشار بزرگ‌تر کاهش داد. این عمل به ایجاد دایره‌ی مبنا‌ی کوچک‌تری منجر می‌شود، به طوری که بخش عمده‌ی پروفیل دندانه، اینولوت می‌شود. لذا تمایل به استفاده از پینیون‌های کوچک‌تری با دندانه‌های کمتر، استفاده از زاویه‌ی فشار 25° را مطلوب می‌سازد. حتی اگر نیروهای اصطکاک و بارهای یاتاقان افزایش نسبت تماس کاهش یابد.

از اصلاح دنده‌ها نیز می‌توان جهت حذف تداخل استفاده کرد. بدین منظور می‌توان فاصله‌ی مرکزی چرخ دنده‌ها را تغییر داد و اصلاحات در ابعاد دنده ایجاد کرد.

۲-۴-۱ اصلاح دنده

همانگونه که ذکر شد حداقل تعداد دنده تئوریک جهت دوری از تداخل (زیر برش) از رابطه‌ی زیر قابل محاسبه است. از این رو برای زاویه‌ی فشار ۲۰ درجه $Z_1 \approx 17.097$ خواهد شد. رابطه جهت جلوگیری از تداخل دنده‌ها عبارت است از:

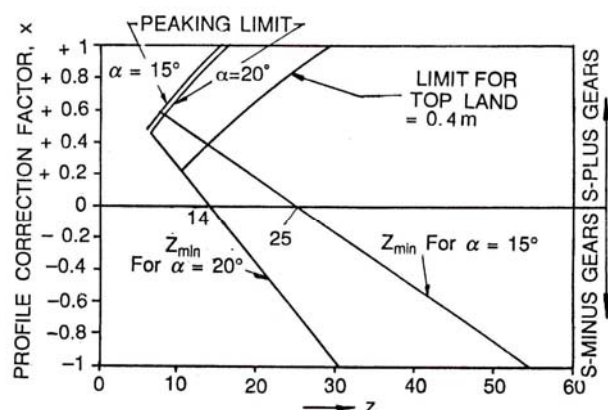
$$Z_1^2 + 2Z_1Z_2 = \frac{4(1+Z_2)}{\sin^2(\alpha)} \xrightarrow{\text{if } Z_2 \rightarrow \infty} Z_1 = \frac{2}{\sin^2(\alpha)}$$

همانگونه که مشاهده می‌شود حداقل دنده به نسبت دو چرخ دنده درگیر بستگی دارد. متخصصین حداقل دنده‌ای که تاثیرات زیان آور زیادی ندارد تقریباً ۱۴ عدد توصیه می‌کنند.

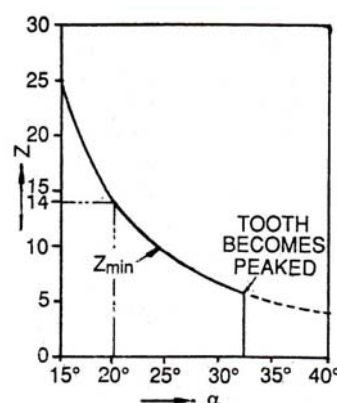
با تصحیح چرخ دنده علاوه بر جلوگیری از تداخل موارد زیر را نیز به همراه دارد.

- حصول فاصله‌ی مرکزی مورد نظر
- افزایش استحکام ریشه چنانچه از تصحیح مثبت استفاده شود.
- لغزش و ارتباط تماسی بهتر
- دوری شروع پروفیل موثر از دایره‌ی مبنا

رابطه‌ی عمومی جهت ضریب تصحیح چنین است: $x = \frac{Z_{\min} - Z}{Z_{\min}}$. با توجه به حداقل تعداد دنده‌ی تئوری و عملی که بحث آن گذشت؛ می‌توان از رابطه‌ی عمومی تر $x = \frac{14 - Z}{17}$ جهت تعیین ضریب تصحیح استفاده نمود. با این حال چنانچه چرخ دنده‌ها با سرعت متوسط کار کنند ($Z_{\min} = 14 \rightarrow x = 0$) مطلوب است. برای سرعت‌های خیلی پایین ($Z_{\min} = 12$) و برای سرعت‌های بالا ($Z_{\min} = 18$) توصیه می‌شود. گراف‌های زیر محدودیت دنده با ضریب تصحیح را به تصویر کشیده است.



شکل ۱۱- اثر ضریب تصحیح بر روی محدودیت تعداد دنده



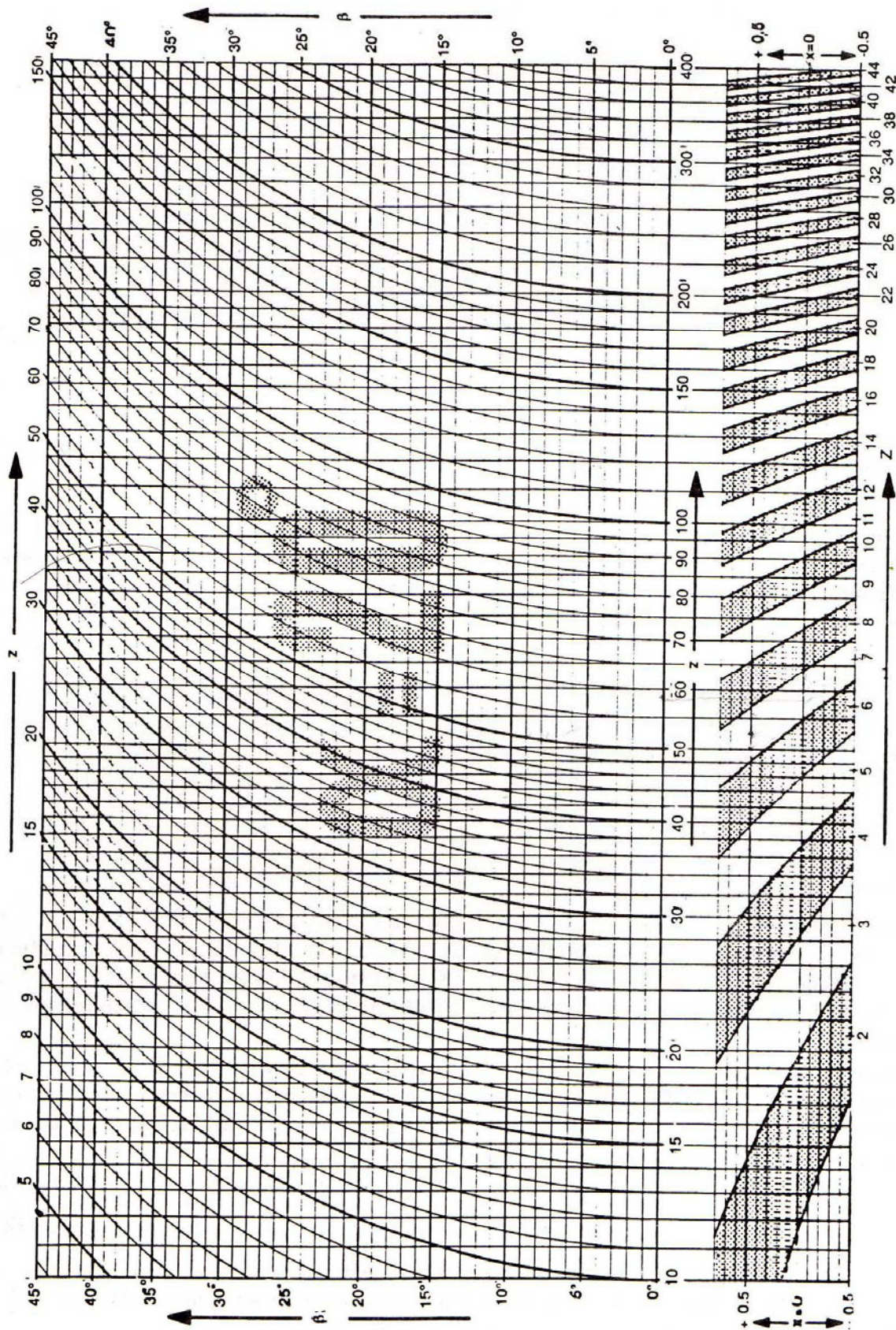
شکل ۱۰- محدودیت تعداد دنده بر حسب زاویه‌ی فشار

ضرایب تصحیح می‌تواند مثبت یا منفی باشد. براین اساس چرخ‌دنده‌ها S-plus Gear یا S-minus Gear قابل تقسیم بندی هستند. در برخی از فلسفه‌های طراحی ضرایب تصحیح را قرینه‌ی هم انتخاب می‌کنند. در این صورت نقطه‌ی درگیری همچنان بر روی دایره‌ی گام بوده و زاویه تماس همان زاویه‌ی استاندارد باقی خواهد ماند. فاصله‌ی مرکز چرخ‌دنده‌ها نیز تغییری نمی‌کند. این نوع تصحیح به S0-Gearing موسوم است و زمانی مفید است که نسبت تبدیل بزرگ بوده و تعداد دنده‌های چرخ‌دنده‌ی پینیون کمتر از تعداد دنده‌های عملی باشد و رابطه‌ی $Z_1 + Z_2 \geq 2Z_{\min}$ صادق باشد.

جدول ۲- روابط پارامترهای S0-Gearing ($+x_1 = -x_2 = x$)

$d = Z.m$	d	قطر دایره‌ی گام
$d_a = d + 2m + 2xm$	d_a	قطر دایره‌ی سر دنده
$d_f = d - 2(1.25 - x)m$	d_f	قطر دایره‌ی ته دنده
$S_n = m \left(\frac{\pi}{2} + 2.x.Tan(\alpha) \right)$	S_n	ضخامت دنده روی دایره‌ی گام
$S_a = d_a \left(\frac{S_n}{Z.m} + Inv(\alpha) - Inv(\alpha_a) \right)$	S_a	ضخامت دنده روی دایره‌ی سر دنده
$a = a_0 = m. \frac{Z_1 + Z_2}{2} = \frac{d_1 + d_2}{2}$	a	فاصله‌ی مرکزی
$W_{Z'} = mCos(\alpha) [(Z' - 0.5)\pi + ZInv(\alpha)] + 2xmSin(\alpha)$	$W_{Z'}^*$	طول تماس پایه
$\bar{S} = mZSin \left[\left(\frac{\pi}{2} + 2xTan(\alpha) \right) / Z \right]$	\bar{S}	ضخامت وترى
$\bar{h}_a = m(1 + x) + \frac{d}{2} \left(1 - Cos \left(\frac{S_n}{d} \right) \right)$	\bar{h}_a	ارتفاع وترى

*- Z' تعداد دندانه‌هایی است که بر مبنای آنها طول تماس اندازه‌گیری می‌شود و از شکل (۱۲) بدست می‌آید.



شکل ۱۲- تعیین تعداد دندانه‌ها جهت اندازه‌گیری طول تماس مبناء

S-gearing یکی دیگر از فلسفه‌های تصحیح چرخ‌دنده است. در این روش مقادیر ضریب تصحیح جفت چرخ‌دنده‌های درگیر هر عددی بین -۱ تا +۱ می‌تواند باشد. در این حالت فاصله‌ی مرکزی چرخ‌دنده‌ها هر مقداری می‌تواند باشد. روابط نظیر این حالت در جدول زیر لیست شده‌است.

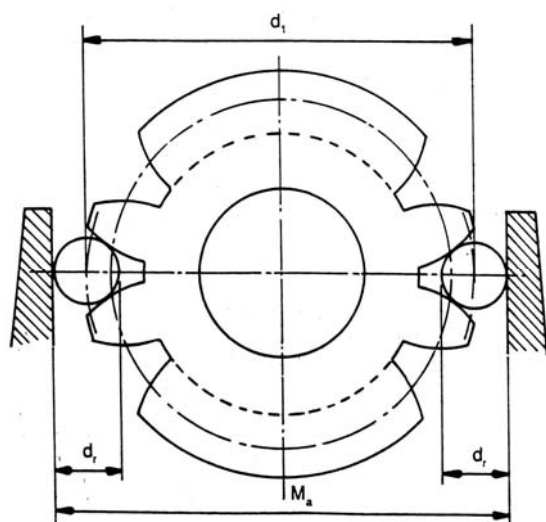
جدول ۳- روابط پارامترهای (S-Gearing) ($x_1 \neq x_2$)

$d = Z.m$	d	قطر دایره‌ی گام
$d_{a1} = d_1 + 2m(1 + x_1)$ & $d_{a2} = d_2 + 2m(1 + x_2)$	d_a	قطر دایره‌ی سر دنده
$d_{f1} = d_1 - 2(1.25 - x_1)m$ & $d_{f2} = d_2 - 2(1.25 - x_2)m$	d_f	قطر دایره‌ی ته دنده
$S_{n1} = m\left(\frac{\pi}{2} + 2.x_1.Tan(\alpha)\right)$ & $S_{n2} = m\left(\frac{\pi}{2} + 2.x_2.Tan(\alpha)\right)$	S_n	ضخامت دنده روی دایره‌ی گام
$a_0 = m.\frac{Z_1 + Z_2}{2} = \frac{d_1 + d_2}{2}$	a_0	فاصله‌ی مرکزی استاندارد
$a = a_0 \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\alpha_w)} = m \frac{z_1 + z_2}{2} \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\alpha_w)}$	a	فاصله‌ی مرکزی واقعی
$ym = a_0 + (x_1 + x_2)m - a^*$	ym	مقدار سر دنده زنی
$Inv(\alpha_w) = 2 \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} Tan(\alpha) + Inv(\alpha)$	α_w	زاویه‌ی فشار کاری
$C = a - \left(\frac{d_{a1} + d_{a2}}{2} + ym - h\right)$	C	لقی سر
$x_1 + x_2 = (z_1 + z_2) \frac{Inv(\alpha_w) - Inv(\alpha)}{2Tan(\alpha)}$		مجموع ضرایب اصلاح
$x_1 \approx \frac{x_1 + x_2}{i + 1} + \frac{i - 1}{i + 1 + 0.4z_2}$		برای سرعت لغزش برابر
$x_1 \approx \frac{x_1 + x_2}{i + 1} + 0.5 \frac{i - 1}{i + 1}$		برای تنش ریشه‌ی برابر
$x_1 \approx \frac{x_1 + x_2}{i + 1} + \frac{z_1 + 12}{z_1 + 2} + \frac{8}{z_1 + 2}$		برای تنش تماسی برابر ($i \geq 2$)

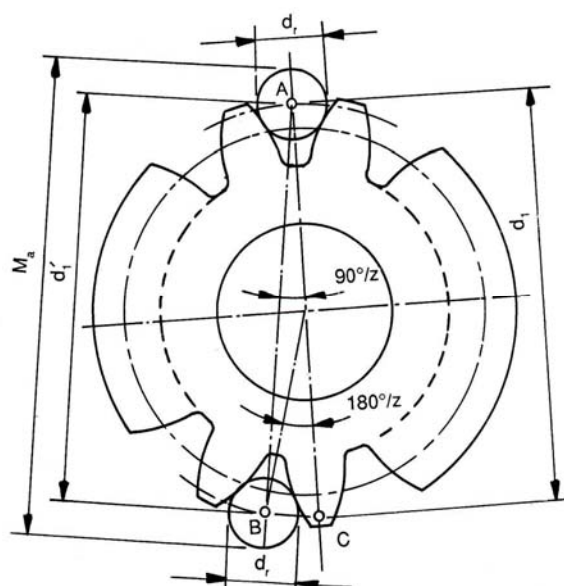
۲-۵- بازرسی چرخ‌دنده‌ها

۲-۵-۱- استفاده از پین یا ساچمه

یکی از روش‌های معمول چک کردن دنده و چرخ‌دنده استفاده از پین است که ضخامت دنده‌ها مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. اگر اندازه‌ی M_a بزرگتر از مقادیر ذکر شده در جدول باشد دنده ضخیم‌تر از معمول است و بالعکس.



شکل ۱۴- اندازه گیری با استفاده از ساچمه یا غلتک با دنده‌ی زوج



شکل ۱۳- اندازه گیری با استفاده از ساچمه یا غلتک با دنده‌ی فرد

روابط برای تعداد دنده‌ی زوج چنین است:

روابط نظیر دنده زوج

$$\text{Inv}(\alpha_1) = \frac{d_r}{d \cos(\alpha)} + \text{Inv}(\alpha) + \frac{S}{d} - \frac{\pi}{Z}$$

$$d_1 = d \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\alpha_1)}$$

$$M_a = d_1 + d_r$$

روابط نظیر دنده فرد

$$d'_1 = d_1 \cos\left(\frac{90^\circ}{Z}\right)$$

$$M_a = d'_1 + d_r = d_1 \cos\left(\frac{90^\circ}{Z}\right) + d_r$$

همانگونه که مشاهده می‌شود به لحاظ تئوری به ترتیب α_1 ، d_1 و سپس M_a قابل محاسبه است. چنانچه M_a

اندازه گیری شده بیشتر از مقدار تئوری باشد مبین این است که دنده‌ها ضخیم می‌باشد.

مقدار قطر ساچمه یا غلتک از اهمیت چندانی برخوردار نیست. لیکن مطلوب است که قطر آنها به نحوی تعیین گردد

که تماس ساچمه با دنده روی دایره گام صورت پذیرد. بر این اساس توصیه می‌شود قطر ساچمه یا غلتک در روابط زیر صدق کند.

$$d_r = d \frac{\sin(\theta)}{\cos(\alpha \pm \theta)}, \quad \theta = \frac{180^\circ}{Z} \times \left(1 - \frac{S}{\pi m}\right)$$

لازم به ذکر است که در عمل به علت وجود تolerانس، لازم است مقادیر حداکثر و حداقل M_a را محاسبه نمود.

نکته‌ی دیگر این که چنانچه قطر ساچمه استاندارد نباشد که عمدتاً همین گونه پیش خواهد آمد، لازم است پارامتر M_a اصلاح گردد.

$$M_{\text{Corrected}} = M_{\text{Standard}} \pm \Delta M_{\text{Standard}}$$

$$\Delta M_{\text{Standard}} = \Delta d_r C$$

$$\text{Where } C = \frac{d(M)}{d(d_r)} \xrightarrow{\text{For Exrenal Spur Gear}} \begin{cases} C = \frac{1}{\sin(\alpha_1)} + 1 & \text{Even Teeth Number} \\ C = \frac{\cos\left(\frac{90^\circ}{Z}\right)}{\sin(\alpha_1)} + 1 & \text{Odd Teeth Number} \end{cases}$$

برای مثال چنانچه در حالت استاندارد $Z=24$, $m=3$, $d_r=6$ mm, $x=0.5$ باشد، طبق روابط فوق $Ma=84.064$ & $C=3.0047$ خواهد شد. حال اگر به جای این که قطر ساچمه ۶ میلیمتر باشد ۶/۱ شود در این صورت خواهیم داشت:

$$\Delta M_{\text{Standard}} = \Delta d_r C = (6.1 - 6) \times 3.0047 = 0.30047$$

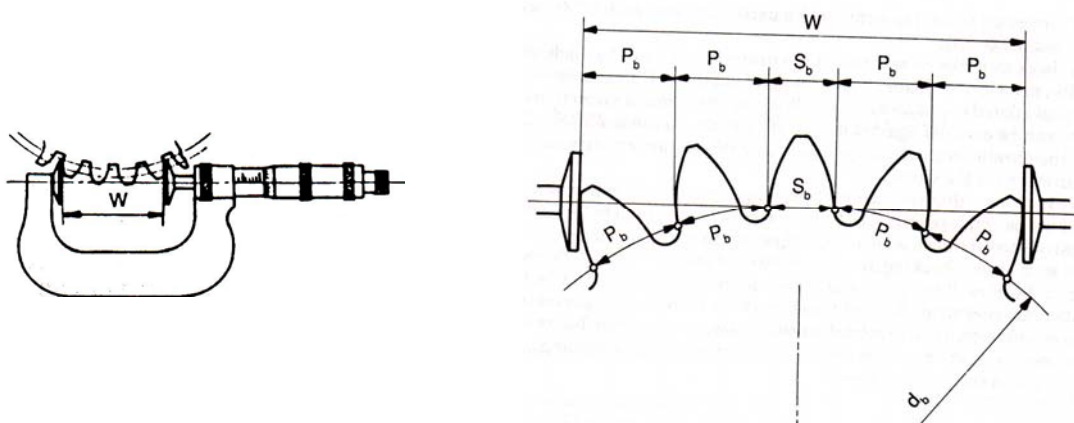
$$M_{\text{Corrected}} = M_{\text{Standard}} \pm \Delta M_{\text{Standard}} = 84.064 + 0.30047 = 84.364$$

۲-۵-۲- میکرومتر با فک مخصوص

جهت اندازه‌گیری طول مماس پایه از این وسیله استفاده می‌شود. جهت اندازه‌گیری این پارامتر ابتدا تعداد دنده‌های لازم تعیین می‌گردد. سپس براساس موقعیت‌های مختلف از چرخ‌دنده این پارامتر اندازه‌گیری می‌شود. لازم به ذکر است علاوه براینکه هریک از اندازه‌ها باید در محدوده‌ی تoleransi قید شده در نقشه‌باشد، تفاوت اندازه‌گیری روی دنده‌های مختلف نیز نباید از مقدار درج شده در نقشه تجاوز کند. در زیر به روابط نظیر اشاره شده‌است.

$$W_{Z'} = m \cos(\alpha) [(Z' - 0.5)\pi + Z \operatorname{Inv}(\alpha)] + 2xm \sin(\alpha)$$

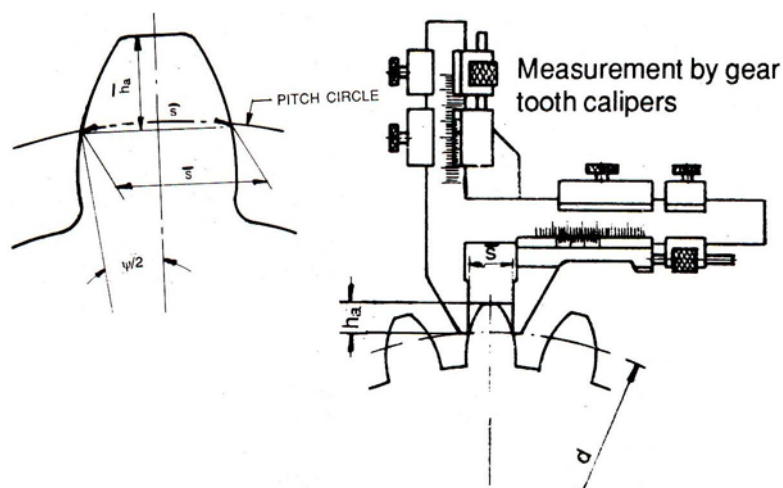
Z' به تعداد دنده‌هایی که جهت اندازه‌گیری طول مماس مبناء استفاده می‌شود اشاره دارد و از شکل (۱۲) تعیین می‌گردد.



شکل ۱۵- روش چک دنده با استفاده از روش طول مماس مبناء [۱]

۲-۶- اندازه‌گیری ارتفاع ضخامت وتري

با کولیس دنده‌ی چرخ‌دنده پارامترهای ارتفاع و ضخامت وتري اندازه‌گیری می‌گردد.



اندازه گیری به وسیله کولیس دنده

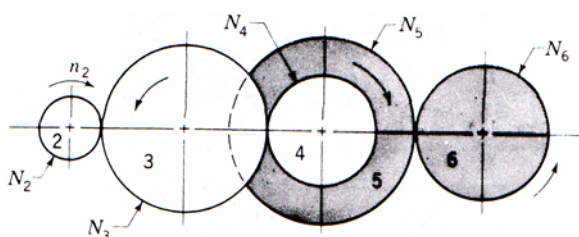
روابط نظیر ارتفاع و ضخامت و تری:

$$\bar{h}_a = m(1+x) + \frac{d}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{s_n}{d} \right) \right)$$

$$\bar{S} = m.Z \sin \left[\left(\frac{\pi}{2} + 2x \cdot \tan(\alpha) \right) / Z \right]$$

۲-۲- مجموعه‌های چرخ دنده

برای چرخ دنده‌های ساده، جهت‌ها از قانون دست راست پیروی می‌کنند و بنا بر پادساعت گرد یا ساعت گرد بود نشان مثبت یا منفی هستند. مجموعه‌ی چرخ دنده‌ی نشان داده شده در شکل زیر از پنج چرخ دنده تشکیل شده است. سرعت چرخ دنده‌ی 6 برابر است با:



شکل ۱۶- مجموعه‌ای از چرخ دنده‌ی ساده

$$n_6 = \frac{N_2}{N_3} \frac{N_3}{N_4} \frac{N_5}{N_6} n_2$$

مقدار مجموعه‌ی e را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

حاصل ضرب تعداد دندانه‌های رانده شده‌ها / حاصل ضرب تعداد دندانه‌های راننده‌ها $= e$

مجموعه‌های سیاره‌ای همیشه شامل یک چرخ دنده‌ی خورشیدی، یک حمل کننده‌ی سیاره یا بازو، و یک یا بیش از یک چرخ دنده‌ی سیاره‌ای هستند. مجموعه‌ی چرخ دنده‌های سیاره‌ای مکانیسمی غیرعادی است زیرا دو درجه‌ی آزادی دارد؛ یعنی، یک مجموعه‌ی سیاره‌ای برای حرکت مقید باید دو ورودی داشته باشد. برای مثال، در شکل این دو ورودی می‌تواند حرکت هر دو جزئی از مجموعه باشد. مثلاً در شکل زیر می‌توان مشخص کرد که چرخ دنده‌ی خورشیدی 100 rev/min ساعت گرد می‌چرخد و چرخ دنده‌ی رینگ 50 rev/min پاد ساعت گرد می‌چرخد؛ این‌ها ورودی‌هایند. خروجی حرکت بازو خواهد بود. در بیشتر مجموعه‌های سیاره‌ای، یکی از اجزا به بدنه متصل می‌شود و حرکت ورودی صفر دارد.

شکل یک مجموعه‌ی سیاره‌ای را نشان می‌دهد که از چرخ دنده‌ی خورشیدی 2، بازو یا حمل کننده‌ی 3، و چرخ دنده‌های سیاره‌ای 4 و 5 تشکیل شده است. سرعت زاویه‌ای چرخ دنده‌ی 2، نسبت به بازو بر حسب rev/min برابر

$$n_{23} = n_2 - n_3 \quad \text{است با:}$$

همچنین، سرعت چرخنده‌ی 5 نسبت به بازو چنین است $n_{53} = n_5 - n_3$

با تقسیم معادله
$$\frac{n_{53}}{n_{23}} = \frac{n_5 - n_3}{n_2 - n_3}$$

معادله‌ی بالا نسبت سرعت نسبی چرخنده‌ی 5 به 2 را بیان می‌کند، و هر دو سرعت نسبت به بازو در نظر گرفته می‌شوند. حال این نسبت، یکسان و متناسب با تعداد دندانه‌ها است، خواه بازو بچرخد یا نچرخد. این مقدار مربوط به

مجموعه است، بنابراین می‌توان نوشت.

$$e = \frac{n_5 - n_3}{n_2 - n_3}$$

از این معادله می‌توان برای یافتن حرکت خروجی هر مجموعه‌ی سیاره‌ای استفاده کرد. بهتر است آن را به شکل زیر

نوشت.

$$e = \frac{n_L - n_A}{n_F - n_A}$$

که n_F = سرعت اولین چرخنده در مجموعه‌ی سیاره‌ای. n_L = سرعت آخرین چرخنده در مجموعه‌ی سیاره‌ای.

n_A = سرعت بازو.

جدول ۴- حالت‌های مختلف یک جعبه دنده‌ی خورشیدی تک واحدی

ردیف	عضو ثابت	عضو محرک	عضو متحرک	گشتاور و دور خروجی	شرح مصور
۱	خورشیدی	رینگ	قفسه	$I_1 = \frac{M_C}{M_R} > 1$ $I_1 = \frac{n_R}{n_C} < 1$	
۲	خورشیدی	قفسه	رینگ	$I_2 = \frac{M_R}{M_C} < 1$ $I_2 = \frac{n_C}{n_R} > 1$	
۳	قفسه	خورشیدی	رینگ	$I_3 = \frac{M_R}{M_S} > 1$ $I_3 = \frac{n_S}{n_R} < 1$	
۴	قفسه	رینگ	خورشیدی	$I_4 = \frac{M_S}{M_R} < 1$ $I_4 = \frac{n_R}{n_S} > 1$	
۵	رینگ	خورشیدی	قفسه	$I_5 = \frac{M_S}{M_C} > 1$ $I_5 = \frac{n_C}{n_S} < 1$	
۶	رینگ	قفسه	خورشیدی	$I_6 = \frac{M_C}{M_S} < 1$ $I_6 = \frac{n_S}{n_C} > 1$	
۷	دو عضو ثابت یا آزاد				<p>عضو سوم هم ثابت یا آزاد می‌شود، در صورت ثابت بودن و قفل شدن با هم مانند کوپلینگ گشتاور را با نسبت $\frac{1}{e}$ انتقال می‌دهد و در صورت آزاد شدن جعبه دنده خلاص می‌شود. مثال: دو عضو رینگ و خورشیدی قفل شده‌اند، عضو سوم قفسه هم قفل می‌شود، دنده هرزگرد از یک طرف با رینگ در جهت موافق \uparrow و از طرف دیگر با خورشیدی در جهت مخالف نمی‌تواند بچرخد بنابراین بین دو عضو ثابت و قفل می‌شود.</p>

حالت اول:	حالت سوم (دنده معکوس):	حالت پنجم:	حالت هفتم: خلاص یا نسبت یک به یک
$I = \frac{Z_C}{Z_R} = \frac{Z_R + Z_C}{Z_R}$	$I = \frac{Z_R}{Z_S}$	$I = \frac{Z_C}{Z_S} = \frac{Z_R + Z_S}{Z_S}$	
حالت دوم:	حالت چهارم (دنده معکوس):	حالت ششم:	
$I = \frac{Z_R}{Z_C} = \frac{Z_R + Z_C}{Z_C}$	$I = \frac{Z_S}{Z_R}$	$I = \frac{Z_S}{Z_C} = \frac{Z_R + Z_S}{Z_C}$	

۲-۸- تحلیل نیرو

ابتدا برخی اصطلاحات بیان می‌شود، بدنه با شماره‌ی ۱، چرخ دنده‌ها به ترتیب ۲، ۳ و ... استفاده می‌شود. محورهای را نیز با حروف کوچک مشخص شود. جهات نمایشی و شعاعی با حروف t و r مشخص می‌گردد. با این مقدمه روابط مفید

$$H = F^t v \quad V = \frac{\pi d n}{60} \quad T = F^t r$$

عبارتند از:

۲-۹- طراحی چرخ دنده‌های ساده و مارپیچ بر اساس استاندارد AGMA

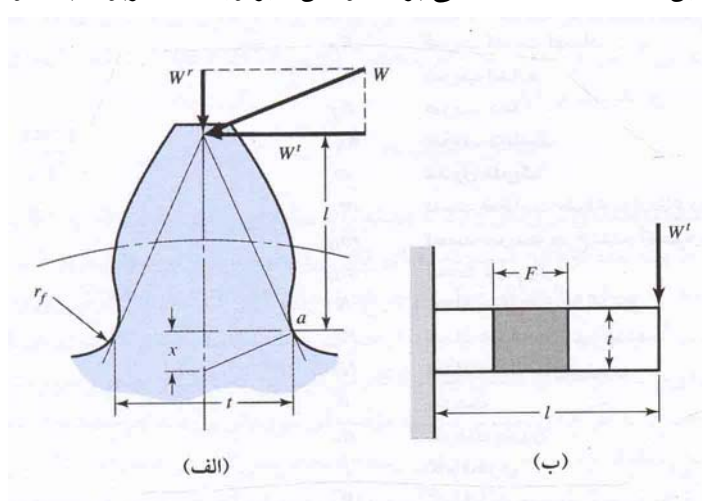
در این فصل تحلیل و طراحی چرخ دنده‌های ساده و مارپیچ از دیدگاه شکست خمشی دندانه‌ها و همچنین آسیبهای ناشی از تنشهای تماسی در سطح دندانه‌ها انجام خواهد شد.

۲-۹-۱- معادله لوییس برای تنش خمشی در دندانه

در سال ۱۹۸۲ ویلفرد لوییس معادله‌ای برای محاسبه تنش خمشی در دندانه چرخ دنده ارائه کرد که در آن، شکل دندانه نیز وارد معادلات شد. این معادله تا امروز به عنوان مبنایی برای طراحی چرخ دنده‌ها باقی مانده است. برای به دست آوردن شکل اصلی معادله لوییس از مدل یک تیر یک سر درگیر استفاده می‌گردد. ابعاد مقطع این تیر F و t و طول آن l است که بار W^t به طور یکنواخت در پهنای F توزیع شده است. مدول مقطع این تیر $\frac{I}{c} = \frac{Ft^2}{6}$ است که از آنجا تنش خمشی در آن به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\sigma = \frac{M}{I/c} = \frac{6W^t l}{Ft^2} = \frac{W^t}{F} \frac{1}{t^2/6l} = \frac{W^t}{F} \frac{1}{t^2/4l} \frac{4}{6} \quad (2)$$

طراحان چرخ دنده مؤلفه‌های نیروهای وارد به دندانه را با نمادهای W_t ، W_r و W_a یا W^t ، W^r و W^a نشان می‌دهند. مزیت نمادهای دوم این است که فضای کافی برای نوشتن زیرنویسهای مربوط به نمودار آزاد را به دست می‌دهد.



شکل ۱۷- نیروهای اعمالی در اثر انتقال قدرت

اکنون با توجه به شکل (۱۷)، با فرض آنکه بیشترین تنش در دندانه در نقطه a رخ می‌دهد، با استفاده از تشابه مثلثها

می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{t/2}{x} = \frac{l}{t/2} \quad x = \frac{t^2}{4l} \rightarrow \sigma = \frac{W' p}{f(\frac{2}{3})xp} \quad (3)$$

با فرض $y = \frac{2x}{3p}$ می‌توان نوشت: $\sigma = \frac{W'}{Fpy}$

که به این ترتیب شکل اولیه معادله لوئیس به دست می‌آید. ضریب Y به ضریب شکل لوئیس موسوم است که می‌توان آن را با رسم شکل دندانه یا به کمک محاسبات عددی به دست آورد. در استفاده از این معادله، بسیاری از مهندسان ترجیح می‌دهند که از گام قطری برای تعیین تنشها استفاده کنند. لذا $P = \frac{\pi}{p}$ و $Y = \pi y$ آنگاه:

$$\sigma = \frac{W' P}{FY} \quad \left(Y = \frac{2xP}{3} \right) \quad (4)$$

استفاده از این معادله برای Y به این معنی است که تنها خمش دندانه در نظر گرفته می‌شود و از تنشهای فشاری ناشی از مؤلفه‌های شعاعی نیرو چشم‌پوشی می‌گردد. مقادیر Y که از این معادله به دست آمده‌اند در جدول زیر قابل مشاهده‌اند.

جدول ۵- مقادیر مختلف ضریب لوئیس

تعداد دندانه‌ها	Y	تعداد دندانه‌ها	Y
۲۸	۰٫۳۵۳	۱۲	۰٫۲۴۵
۳۰	۰٫۳۵۹	۱۳	۰٫۲۶۱
۳۴	۰٫۳۷۱	۱۴	۰٫۲۷۷
۳۸	۰٫۳۸۴	۱۵	۰٫۲۹۰
۴۳	۰٫۳۹۷	۱۶	۰٫۲۹۶
۵۰	۰٫۴۰۹	۱۷	۰٫۳۰۳
۶۰	۰٫۴۲۲	۱۸	۰٫۳۰۹
۷۵	۰٫۴۳۵	۱۹	۰٫۳۱۴
۱۰۰	۰٫۴۴۷	۲۰	۰٫۳۲۲
۱۵۰	۰٫۴۶۰	۲۱	۰٫۳۲۸
۳۰۰	۰٫۴۷۲	۲۲	۰٫۳۳۱
۴۰۰	۰٫۴۸۰	۲۴	۰٫۳۳۷
میل دندانه‌دار	۰٫۴۸۵	۲۶	۰٫۳۴۶

استفاده از این معادله همچنین به این معنی است که دندانه‌ها نیروی وارده را بین خود تقسیم نمی‌کنند و بیشترین نیرو به نوک یک دندانه وارد می‌شود؛ آنچنانکه پیش‌تر گفته شد، برای عملکرد مطلوب چرخ‌دنده‌ها، نسبت درگیری باید مقداری بیش از واحد باشد، برای مثال ۱/۵. در حقیقت اگر دندانه‌های چرخ‌دنده به دقت تراشیده شوند، بارگذاری در نوک دنده بدترین حالت نخواهد بود؛ چرا که در همین هنگام یک جفت دندانه دیگر درگیر هستند.

معادله AGMA برای ضریب شکل لوئیس هر دوی این ایرادها را برطرف می‌کند.

$$Y = \frac{1}{\frac{\cos \Phi_L}{\cos \Phi} \left(\frac{1/5}{x} - \frac{tg \Phi_L}{t} \right) m_s} \quad (5)$$

که Φ_L زاویه بین بردار بار کلی W و عمودی بر خط مرکزی دندانه در بالاترین نقطه تماس یک جفت دندانه است. m_s مدول عمودی شکل یا مدول مقیاس و معمولاً $25/4 \text{ mm}$ است. تعیین فاصله‌های x و t در شکل ۱۷ نشان داده شده و Φ زاویه فشار است.

تمرکز تنش: میچینر و میبی نتیجه‌هایی را بر حسب ضریب تمرکز تنش خستگی K_f به صورت زیر ارائه داده‌اند.

$$K_f = H + \left(\frac{t}{r}\right)^L + \left(\frac{t}{l}\right)^M$$

$$H = 0.34 - 0.4583662\Phi$$

$$M = 0.290 + 0.4583662\Phi$$

$$L = 0.316 - 0.4583662\Phi \quad r = \frac{r_f + (b - r_f)^2}{\frac{d}{2} + b - r_f}$$

در روابط فوق b دیدن دوم و d قطر گام است. بقیه پارامترها در شکل ۱۷ نشان داده شده است.

ضریب هندسی: ضریب هندسی J شکل از اثرات ضریب شکل Y ، ضریب تمرکز تنش K_f و نسبت اشتراک بار

m_N است. m_N مقدار باری است که توسط دندانه با سنگین‌ترین بار حمل می‌شود برای چرخ دنده ساده $m_N = 1$ است.

$$J = \frac{Y}{K_f m_N} \longrightarrow \sigma = \frac{W_t}{F m J}$$

(۶)

ضریب هندسی AGMA، J برای دندانه‌های با $\phi = 20^\circ$ ، $a = 1\text{ m}$ $b = 125\text{ mm}$ و $r_f = 300\text{ mm}$

تعداد دندانه‌های چرخ دنده در گیر

تعداد دندانه‌ها	1	17	25	35	50	85	300	1000
18	0.244 86	0.324 04	0.332 14	0.338 40	0.344 04	0.350 50	0.355 94	0.361 12
19	0.247 94	0.330 29	0.338 78	0.345 37	0.351 34	0.358 22	0.364 05	0.369 63
20	0.250 72	0.336 00	0.344 85	0.351 76	0.358 04	0.365 32	0.371 51	0.377 49
21	0.253 23	0.341 24	0.350 44	0.357 64	0.364 22	0.371 86	0.378 41	0.384 75
22	0.255 52	0.346 07	0.355 59	0.363 06	0.369 92	0.377 92	0.384 79	0.391 48
24	0.259 51	0.354 68	0.364 77	0.372 75	0.380 12	0.388 77	0.396 26	0.403 60
26	0.262 89	0.362 11	0.372 72	0.381 15	0.388 97	0.398 21	0.406 25	0.414 18
28	0.265 80	0.368 60	0.379 67	0.388 51	0.396 73	0.406 50	0.415 04	0.423 51
30	0.268 31	0.374 62	0.385 80	0.395 00	0.403 59	0.413 83	0.422 83	0.431 79
34	0.272 47	0.383 94	0.396 71	0.405 94	0.415 17	0.426 24	0.436 04	0.445 86
38	0.275 75	0.391 70	0.404 46	0.414 80	0.424 56	0.436 33	0.446 80	0.457 35
45	0.280 13	0.402 23	0.415 79	0.426 85	0.437 35	0.450 10	0.461 52	0.473 10
50	0.282 52	0.408 08	0.422 08	0.435 55	0.444 48	0.457 78	0.469 75	0.481 93
60	0.286 13	0.417 02	0.431 73	0.443 83	0.455 42	0.469 60	0.482 43	0.495 57
75	0.289 79	0.426 20	0.441 63	0.454 40	0.466 68	0.481 79	0.495 54	0.509 70
100	0.293 53	0.435 61	0.451 80	0.465 27	0.478 27	0.494 37	0.509 09	0.524 35
150	0.297 38	0.445 30	0.462 26	0.476 45	0.490 23	0.507 36	0.523 12	0.539 54
300	0.301 41	0.455 26	0.473 04	0.487 98	0.502 56	0.520 78	0.537 65	0.555 33
شانه‌ای	0.305 71	0.465 54	0.484 15	0.499 88	0.515 29	0.534 67	0.552 72	0.571 73

ضریب هندسی AGMA، J برای دندانه‌های با $\phi = 25^\circ$ ، $a = 1\text{ m}$ $b = 125\text{ mm}$ و $r_f = 300\text{ mm}$

تعداد دندانه‌های چرخ دنده در گیر

تعداد دندانه‌ها	1	17	25	35	50	85	300	1000
13	0.286 65	0.346 84	0.352 92	0.357 44	0.361 38	0.365 72	0.369 25	0.372 51
14	0.293 64	0.359 24	0.365 87	0.370 81	0.375 14	0.379 94	0.383 86	0.387 49
15	0.300 09	0.370 27	0.377 40	0.382 75	0.387 44	0.392 67	0.396 94	0.400 92
16	0.305 58	0.380 16	0.387 75	0.393 46	0.398 49	0.404 11	0.408 73	0.413 03
17	0.310 43	0.389 07	0.397 09	0.403 14	0.408 49	0.414 48	0.419 41	0.424 02
18	0.314 75	0.397 14	0.405 56	0.411 93	0.417 56	0.423 90	0.429 13	0.434 03
19	0.318 62	0.404 49	0.413 28	0.419 94	0.425 85	0.432 50	0.438 01	0.443 18
20	0.322 11	0.411 21	0.420 34	0.427 27	0.433 44	0.440 39	0.446 16	0.451 59
21	0.325 28	0.417 38	0.426 82	0.434 01	0.440 42	0.447 65	0.453 67	0.459 33
22	0.328 16	0.423 06	0.432 80	0.440 23	0.446 86	0.454 36	0.460 60	0.466 50
24	0.333 22	0.433 18	0.443 46	0.451 32	0.458 36	0.466 35	0.473 01	0.479 32
26	0.337 52	0.441 93	0.452 68	0.460 93	0.468 33	0.476 74	0.483 78	0.490 46
28	0.341 22	0.449 57	0.460 75	0.469 33	0.477 05	0.485 85	0.493 23	0.500 23
30	0.344 43	0.456 31	0.467 85	0.476 75	0.484 75	0.493 89	0.501 57	0.508 68
34	0.349 76	0.467 63	0.479 81	0.489 23	0.497 72	0.507 46	0.515 66	0.523 49
38	0.354 00	0.476 78	0.489 48	0.499 33	0.508 24	0.518 47	0.527 10	0.535 36
45	0.359 67	0.489 19	0.502 61	0.513 05	0.522 52	0.533 44	0.542 68	0.551 54
50	0.362 78	0.496 08	0.509 91	0.520 68	0.530 47	0.541 77	0.551 36	0.560 56
60	0.367 50	0.506 83	0.521 09	0.532 38	0.542 67	0.554 57	0.564 69	0.574 44
75	0.372 32	0.517 47	0.532 57	0.544 40	0.555 20	0.567 73	0.578 42	0.588 73
100	0.377 26	0.528 60	0.544 36	0.556 76	0.568 10	0.581 29	0.592 57	0.603 48
150	0.382 37	0.540 05	0.556 51	0.569 51	0.581 38	0.595 26	0.607 16	0.618 69
300	0.387 72	0.551 85	0.569 02	0.582 59	0.595 07	0.609 67	0.622 22	0.634 42
شانه‌ای	0.393 42	0.564 05	0.581 94	0.596 13	0.609 21	0.624 56	0.637 78	0.650 68

۲-۹-۲ اثر بارهای دینامیکی بر چرخ دنده‌ها

در استانداردهای ANSI/AGMA 2110-C95 و 2101-C95 این تذکرات آمده است:

هنگامی که یک جفت چرخ دنده در گیر با سرعت متوسط یا بالا می‌چرخند و در حین چرخش سر و صدا تولید می‌کنند، مشخص است که اثرات دینامیکی وجود دارند. برای چرخ دنده‌های چدنی $K_v = \frac{3}{3+V}$ که V سرعت خطی بر حسب m/s است.

برای دندانه‌ها تراشیده شده یا با دقت تولید نشده $K_v = \frac{6}{6+V}$ ، AGMA برای چرخ دنده‌های ساده که به روش هاب‌زنی یا صفحه تراشی تولید شده‌اند $K_v = \frac{50}{50 + \sqrt{200V}}$ ، اگر دنده‌ها پرداخت شده یا سنگ زده بسیار دقیق باشند

$$K_v = \sqrt{\frac{78}{78 + \sqrt{200V}}} \quad \text{البته در تمامی موارد} \quad K'_v = \frac{1}{K_v} \quad \text{است.}$$

لذا با وارد کردن ضریب سرعت در معادله تنش می‌توان نوشت:

$$\sigma = \frac{K'_v W^t P}{F Y} \quad (7)$$

این معادله در سیستم SI به صورت زیر در می‌آید:

$$\sigma = \frac{K'_v W^t}{F m Y} \quad \sigma = \frac{K'_v W^t}{F m J} \quad (8)$$

که پهنای صورت دندانه F و مدول m هر دو بر حسب میلیمتر (mm) هستند. با بیان مؤلفه مماسی بار W^t بر حسب نیوتن (N) تنش حاصل به مگاپاسکال (MPa) خواهد بود. به عنوان یک قاعده کلی، پهنای صورت دندانه F برای چرخ دنده‌های ساده باید در بازه سه برابر تا پنج برابر گام دایره‌ای p قرار گیرد.

معادلات اخیر از این جهت مهمند که مبنای محاسبات AGMA برای استحکام خمشی دندانه‌های چرخ دنده‌اند و هنگامی که عمر و قابلیت اعتماد عوامل تعیین کننده نیستند، دارای کاربرد عمومی برای محاسبه ظرفیت چرخ دنده‌ها می‌باشند. این معادلات همچنین به منظور برآورد اولیه اندازه‌های چرخ دنده برای کاربردهای مختلف می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند.

تمرین ۳- یک جفت چرخ دنده کاهنده با نسبت ۴ به ۱ برای موتور 75 KW که با سرعت بار کامل 1120 rpm است نیاز داریم. چرخ دنده‌ها تمام عمق با زاویه فشار 20° بوده و از جنس فولاد و با $S_u = 800$ و $S_y = 580$ مگاپاسکال ساخته شده‌اند. اندازه‌ی چرخ دنده‌های مورد نیاز را تخمین بزنید.

۲-۹-۳- استحکام خستگی

$$S_e = K_a K_b K_c K_d K_e K_f S'_e \quad (9)$$

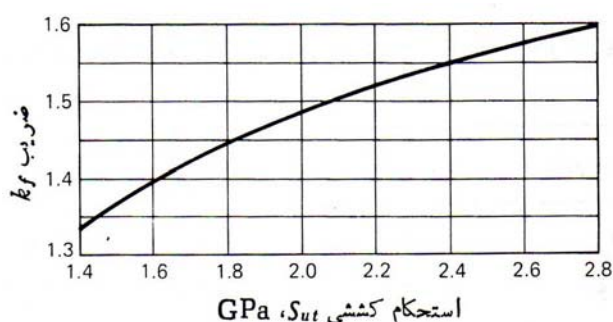
که S_e حد دوام دندانه چرخ دنده، S'_e حد دوام نمونه تیر چرخان، K_a ضریب سطح، K_b ضریب اندازه، K_c ضریب قابلیت اعتماد، K_d ضریب دما، K_e ضریب اصلاحی تمرکز تنش (برای چرخ دنده در J لحاظ شده پس $K_e = 1$) و K_f ضریب اثرهای گوناگون است. ضریب اندازه (K_b) ، با توجه به این که مقطع چرخ دنده مستطیلی است

$$d = 0.808\sqrt{bh} \quad \text{از این رو در دایره گام:} \quad d_{eq} \sim P = \pi m \quad \rightarrow \quad F = 3P \quad , \quad h = \frac{P}{2}$$

K_f : اثرهای گوناگون وقتی دندانه‌ها تحت خمش یک طرفه است

$$\sigma_a = \sigma_m = \frac{\sigma}{2} \quad \rightarrow \quad n = 1 \quad \text{اصلاح شده گودمن} \quad \rightarrow \quad \sigma = \frac{2S_e S_{ut}}{S_{ut} + S_e}$$

چنانچه $S_{ut} \leq 1400 \text{ MPa}$ آن گاه $S_{ut} \leq 2S'_e$ لذا $\sigma = 1/33 S'_e$ یعنی $K_f = 1/33$ برای سایر موارد از گراف زیر استفاده شود.



۲-۹-۴-ضریب ایمنی:

$$n_G = K_o K_m n \quad (10)$$

که K_o ضریب اضافه بار، K_m ضریب توزیع بار و n ضریب ایمنی معمولی است. AGMA برای مقابله با شکست خستگی $n \geq 2$ را توصیه می‌کند.

جدول ۶- ضریب تصحیح اضافه بار (K_o)

ماشین رانده شده			
منبع قدرت	یکنواخت	شوک متوسط	شوک سنگین
یکنواخت	۱۲۰۰	۱۲۲۵	۱۲۷۵
شوک سبک	۱۲۲۵	۱۲۵۰	۲۲۰۰
شوک متوسط	۱۲۵۰	۱۲۷۵	۲۲۲۵

جدول ۷- ضریب توزیع بار برای چرخ‌دنده‌ی ساده (K_m)

پهنای رویه، mm				مشخصه‌های تکیه‌گاه
۵۰ تا ۸۰	۱۵۰	۲۲۵	۴۰۰ به بالا	
۱۲۳	۱۲۴	۱۲۵	۱۲۸	نصبهای دقیق، آزادی کم یا ناقص، خیز کمینه، چرخ‌دنده‌های دقیق
۱۲۶	۱۲۷	۱۲۸	۲۲۲	نصبهای کمتر صلب، چرخ‌دنده‌های کم دقت‌تر، تماس در تمام طول رویه
بیش از ۲۲۲				دقت در نصب به قسمی که تماس کمتر از تمام رویه وجود داشته باشد

تمرین ۴- در تمرین قبل پهنای رویه 95 mm، مدول 6 mm با 18 و 72 دندانه، براساس شرایط نصب متوسط، شوک سبک در ماشین رانده شده با قابلیت اعتماد 95 درصد ضریب‌های ایمنی n و n_{II} را برای مقابل با گسیختگی خستگی پیدا کنید.

۲-۹-۵- دوام سطح

در این بخش شکست سطح دندانه‌های چرخ‌دنده که عموماً آن را سایش گویند بررسی می‌گردد. همان طور که پیشتر گفته شد، ایجاد حفره ۱ در سطح دندانه نوعی شکست خستگی ناشی از تکرار زیاد تنشهای تماسی است. نوع دیگری از شکست سطح، ساییدگی ۲ نام دارد که در اثر روانکاری ناقص بروز می‌کند. خراش ۳ نیز نوع دیگری از فرسایش است که در اثر ورود مواد خارجی لابه‌لای دندانه‌ها رخ می‌دهد.

به منظور یافتن رابطه‌ای برای تنش تماسی از تئوری هرتز استفاده می‌شود. می‌توان نشان داد که تنش تماسی بین دو استوانه از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$p_{\max} = \frac{2F}{\pi bl} \quad (11)$$

که در آن p_{\max} = بیشترین فشار سطح، F = نیرویی که دو استوانه را به هم فشار می‌دهد، l طول استوانه‌ها و b مقداری است که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$b = \left\{ \frac{2F}{\pi l} \frac{\frac{1-v_1^2}{E_1} + \frac{1-v_2^2}{E_2}}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

که در آن v_1, v_2, E_1 و E_2 ثابتهای الاستیک و d_1 و d_2 قطرهای استوانه‌ها هستند.

برای سازگاری این روابط با نمادهایی که در چرخ‌دنده‌ها وجود دارند، به جای F عبارت $\frac{W^t}{\cos \phi}$ ، به جای d عبارت $2r$ و به جای l پهنای صورت دندانه F قرار داده می‌شود. با جایگزینی σ_c با p_{\max} ، تنش فشاری سطح ۴ (تنش هرتز) از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sigma_c^2 = \frac{W^t}{\pi F \cos \phi} \frac{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}{\frac{1-v_1^2}{E_1} - \frac{1-v_2^2}{E_2}} \quad (13)$$

که r_1 و r_2 مقادیر لحظه‌ای شعاع انحنای نیم‌رخ دندانه‌های چرخ‌دنده و پینیون در نقطه تماس است. با در نظر گرفتن سهم نیروی وارده در مقدار W^t ، معادله (۹) را می‌توان برای تنش هرتز برای هر نقطه دلخواه یا تمام نقاط از ابتدا تا انتهای سطح تماس دندانه حل کرد. البته باید توجه داشت که غلتش خالص تنها در نقطه گام رخ می‌دهد و در بقیه نقاط، حرکت

¹ - Pitting

² - Scoring

³ - Abrasion

⁴ - Surface Compressive Stress

ترکیبی از حرکات غلتشی و لغزشی است. در معادله (۹) حرکت لغزشی در ارزیابی تنش لحاظ نمی‌گردد. تا کنون مشخص شد که نخستین نشانه سایش در نزدیکی خط گام رخ می‌دهد. شعاعهای انحای نیمرخ دندانه‌ها در نقطه گام برابرند با:

$$r_1 = \frac{d_p \sin \phi}{2} \quad r_2 = \frac{d_G \sin \phi}{2} \quad (14)$$

که ϕ زاویه فشار، d_p و d_G به ترتیب قطرهای گام پینیون و چرخدنده هستند. به منظور ساده کردن محاسبات و ترکیب ضرایب مواد موجود در مخرج کسر برای مواد مختلف پینیون و چرخدنده، AGMA ضریب الاستیک^۵ C_p را به صورت زیر تعریف می‌کند:

$$C_p = \left[\frac{1}{\pi \left(\frac{1 - \nu_p^2}{E_p} + \frac{1 - \nu_G^2}{E_G} \right)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (15)$$

مقدارهای ضریب کشسان C_p برای چرخدنده‌های ساده و مارپیچ با تماس غیر موضعی و برای $\nu = 0.3$ و واحد C_p ، $(\text{MPa})^{1/2}$ است

پینیون	مدول کشسان E , GPa	چرخدنده				
		فولاد	چکش‌خوار	چدن داکتیل	چدن خاکستری	برنز آلومینیم قلع
فولاد	۲۰۰	۱۹۱	۱۸۱	۱۷۹	۱۷۴	۱۶۲
چدن چکش‌خوار	۱۷۰	۱۸۱	۱۷۴	۱۷۲	۱۶۸	۱۵۸
چدن داکتیل	۱۷۰	۱۷۹	۱۷۲	۱۷۰	۱۶۶	۱۵۶
چدن خاکستری	۱۵۰	۱۷۴	۱۶۸	۱۶۶	۱۶۳	۱۵۴
برنز آلومینیم	۱۲۰	۱۶۲	۱۵۸	۱۵۶	۱۵۴	۱۴۵
برنز قلع	۱۱۰	۱۵۸	۱۵۴	۱۵۲	۱۴۹	۱۴۱

با ساده‌سازی و افزودن ضریب سرعت K'_v ، معادله (۹) را می‌توان چنین نوشت:

$$\sigma_c = -C_p \left[\frac{K'_v W^t}{F \cos \phi} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (16)$$

علامت منفی نشانگر فشاری بودن σ_c است.

علاوه بر ضریب دینامیکی K'_v که تشریح شد، میزان بار منتقل شده و توزیع آن در محل تماس دندانه‌ها نیز می‌تواند غیر یکنواخت باشند. ضخامت طوقه چرخدنده نیز بر تنش خمشی بی‌تأثیر نیست. مقادیر جدولی استحکام می‌توانند مقادیر میانگین، کمترین مقادیر ASTM یا نظیر این باشند. در حالت خستگی سطحی، حد دوام وجود ندارد. استحکامهای دوام بایستی به صورت تعداد سیکل‌های متناظر ارزیابی شوند و شیب نمودار $S-N$ نیز بایستی مشخص گردد. در حالت خستگی

⁵ - Elastic Coefficient

خمشی تغییر مشخصی در شیب نمودار S-N در نزدیکی 10^6 cycles وجود دارد؛ اما برخی شواهد حاکی از این است که حد دوام مشخصی وجود ندارد. آزمایش بر روی چرخ‌دنده‌ها، تعداد سیکل 10^{11} یا بیشتر را نشان می‌دهد.

$$S_C = 2.76HB - 70 \quad MTa \quad 2-9-6-استحکام خستگی سطح:$$

$$S_H = \frac{C_L C_H}{C_T C_R} S_C \quad \text{استحکام خستگی تصحیح شده (AGMA):}$$

S_H : استحکام خستگی تصحیح شده، C_L ضریب عمر، C_H ضریب نسبت سختی که برای چرخ‌دنده‌های ساده برابر یک استفاده شود، C_T ضریب دما، برای دمای کمتر از 120 درجه سانتی‌گراد 1 استفاده شود و C_R ضریب قابلیت اطمینان است.

بار منتقل شده مجاز چنین است $W_{t,P} = n_G W_t$ و $n_G = C_o C_m n$ ضریبهای اصلاحی عمر و قابلیت اعتماد

چرخه‌های عمر	ضریب عمر C_L	قابلیت اعتماد R	ضریب قابلیت اعتماد C_R
10^4	1.25	تا 99.9	0.80
10^5	1.3	99.9 تا 99.99	1.00
10^6	1.31	99.99 به بالا	1.25 به بالا
10^8 به بالا	1.35		

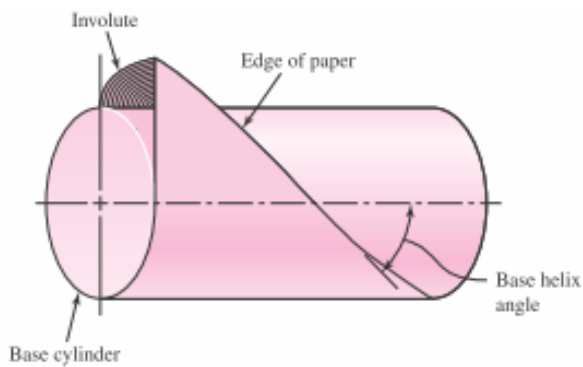
که C_o ضریب اضافه بار و C_m ضریب توزیع بار بوده و با مقادیر K_o و K_m یکسان است و در این صورت:

$$S_H = -C_P \sqrt{\frac{K'_r W_{t,P}}{F \sigma S \Phi} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)} \quad (17)$$

تمرین 5- ضریب‌های ایمنی n و n_G که در مقابل گسیختگی ناشی از خستگی سطح مجموعه‌ی چرخ‌دنده‌ی تمرین قبل تعیین کنید (سطحی سختی $HB = 232$ فرض شود).

معادلات AGMA آخر فصل جهت مطالعه

۳- چرخ دنده‌های مارپیچ و حلزون

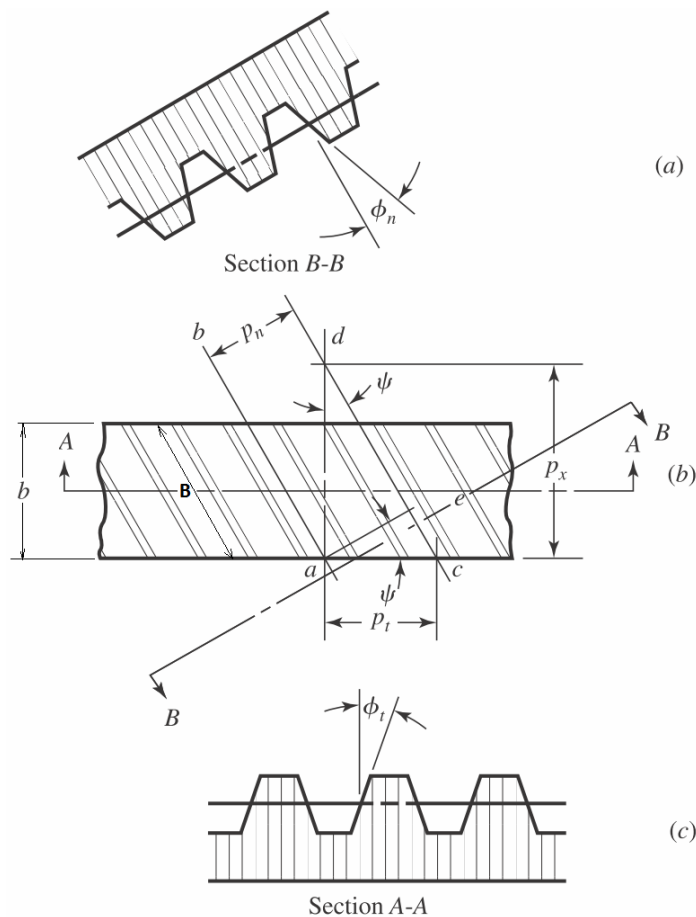


شکل ۱۸- یک مارپیچ وار اینولوت

شکل دندانه، مارپیچ وار اینولوتی است. اگر تکه‌ای کاغذ به شکل متوازی‌الاضلاع بریده و دور استوانه‌ای پیچیده شود، لبه‌ی زاویه‌دار کاغذ به صورت مارپیچ در می‌آید. اگر این کاغذ را باز کنیم، هر نقطه روی لبه‌ی زاویه یک منحنی اینولوت می‌سازد.

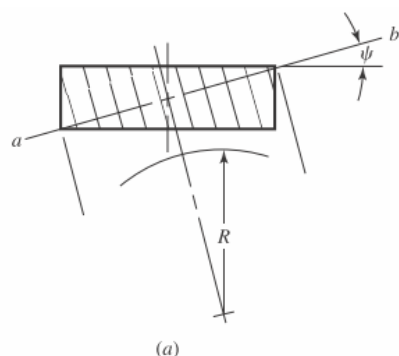
تماس اولیه‌ی دندانه‌های چرخ دنده‌ی مارپیچ یک نقطه است که با بیشتر درگیر شدن دندانه به خط تبدیل می‌شود.

برخی پارامترهای این نوع چرخ دنده در شکل نشان داده شده است.

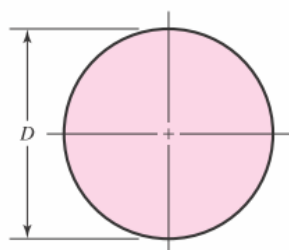


شکل ۱۹- نام گذاری چرخ دنده‌های مارپیچ

در چرخ دنده‌های مارپیچ، خط تماس اریب، و در امتداد رویه‌ی دندانه است. این درگیری تدریجی دندانه‌ها و انتقال آرام بار از دندانه‌ای به دندانه‌ی دیگر است که به چرخ دنده‌های مارپیچ توانایی انتقال بارهای سنگین در سرعت‌های بالا را می‌دهد. به دلیل ماهیت تماس بین چرخ دنده‌های مارپیچ، نسبت تماس اهمیت کمی دارد، و این مساحت تمامی است که با پهنای وریه‌ی چرخ دنده متناسب است و اهمیت بیشتری دارد.



(a)



(b)

در شکل روبرو استوانه‌ای را نشان می‌دهد که با صفحه‌ی مایل ab با زاویه‌ی ψ تحت مقطع عمودی بریده شده است. صفحه‌ی مایل، قوسی را می‌برد که شعاع انحنای R دارد. اگر $\psi = 0$ باشد، شعاع انحنای $R = D/2$ خواهد بود. اگر فرض کنیم زاویه‌ی ψ از صفر تا 90° به آرامی افزایش یابد، می‌بینیم که R از مقدار $D/2$ آغاز می‌شود و در $\psi = 90^\circ$ به $R = \infty$ افزایش می‌یابد. شعاع R ، شعاع گام ظاهری دندانه‌ی چرخ‌دنده‌ی مارپیچ است هنگامی که در راستای دندانه دیده می‌شود. چرخ‌دنده‌ای با همان گام و با شعاع R ، به دلیل شعاع افزایش یافته، تعداد بیشتری دندانه دارد. در طراحی چرخ‌دنده‌ی مارپیچ، این تعداد دندانه‌ها، تعداد مجازی دندانه‌ها نامیده می‌شود. با استفاده از هندسه تحلیلی می‌توان نشان داد که تعداد مجازی دندانه‌ها و تعداد واقعی آن‌ها با معادله‌ی زیر به هم مربوط می‌شوند.

$$N' = \frac{N}{\cos^3 \psi}$$

که N' تعداد مجازی، و N تعداد حقیقی دندانه‌هاست. دانستن تعداد مجازی دندانه‌ها برای استفاده از معادله‌ی لوئیس، و نیز گاهی اوقات در هنگام تراش دندانه‌های مارپیچ لازم است. این شعاع انحنای به ظاهر بزرگ‌تر به این معنی است که تعداد دندانه‌های چرخ‌دنده‌های مارپیچ می‌بایست کمتر باشد، چون ریشه‌تراشی کمتر خواهد بود. چرخ‌دنده‌های مارپیچ، یاتاقان‌های محور را تحت هر دو نوع بارشعاعی و محوری قرار می‌دهند. هنگامی که بارهای محوری زیاد شوند یا به دلیل‌های دیگر قابل ملاحظه باشند، ممکن است استفاده از دو چرخ‌دنده‌ی مارپیچ مطلوب باشد. هنگامی که دو یا بیش از دو چرخ‌دنده‌ی تک مارپیچ بر روی یک محور نصب شوند، راستگرد یا چپ‌گرد بودن چرخ‌دنده‌ها را باید به طوری انتخاب کرد که بار محوری کمینه‌ای ایجاد شود. چند نکته:

- اگر یک چرخ‌دنده مارپیچ با زاویه مارپیچ ψ و تعداد دنده N داشته باشیم، N' مقدار تعداد چرخ‌دنده معادل

$$N' = \frac{N}{\cos^3 \psi} \quad \text{چرخ‌دنده ساده است.}$$

- چون تعداد دندانه‌های درگیر در چرخ‌دنده مارپیچ بیشتر از چرخ‌دنده ساده است لذا ده درصد بهتر کار می‌کند.

- اگر $\psi > 0$ باشد مارپیچ راستگرد و اگر $\psi < 0$ باشد مارپیچ چپ‌گرد است.

- زاویه بین محورهای که با چرخ‌دنده‌ی مارپیچ با هم درگیرند: $\Sigma = \psi_1 + \psi_2$

- برای محورهای موازی $\Sigma = 0 \rightarrow \psi_1 = -\psi_2$

$$m_N = \frac{P_N}{0.95Z} \quad \text{نسبت اشتراک بار}$$

P_N : گام مبنای عمودی است و با گام دایره‌ای عمودی P_n رابطه دارد: $P_N = P_n \cos \Phi_n$

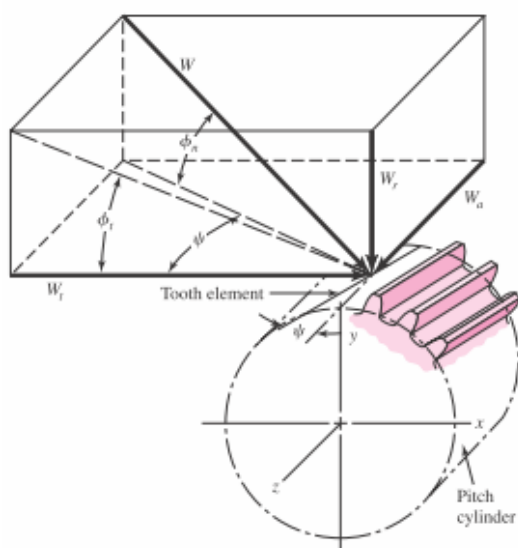
و $Z = \sqrt{(r_p + a)^2 - r_{bp}^2} + \sqrt{(r_a + a)^2 - r_{ba}^2} - (r_p + r_c) \sin \Phi_t$ که به ترتیب r_p و r_G شعاع‌های گام و r_{bp} شعاع‌های دایره‌ی مبنای پینیون و چرخ‌دنده‌اند. برای استفاده از معادله‌ی بالا باید پیش‌بینی‌هایی معینی انجام داد. پروفیل‌های دندانه، زیر دایره‌ی مبنا مزدوج نیستند، و نتیجتاً اگر $\sqrt{(r_p + a)^2 - r_{bp}^2}$ یا $\sqrt{(r_G + a)^2 - r_{bG}^2}$ بزرگ‌تر از $(r_p + r_G) \sin \Phi$ باشد، به جای عبارت فوق می‌بایست $(r_p + r_G) \sin \Phi$ را قرار داد. به علاوه، گاهی اوقات شعاع بیرونی موثر کمتر از $r + a$ است که علت آن پلیسه‌برداری یا گرد کردن تاج دندانه‌هاست. در چنین حالتی، همیشه به جای $r + a$ از شعاع بیرونی موثر استفاده کنید.

۳-۱- روابط چرخ‌دنده مارپیچی با محور موازی

نام	فرمول
زاویه انحراف	$\psi \Rightarrow \cos \psi = \frac{m_n}{m_s}$
مدول نرمال	$m_n = \frac{P_n}{\pi} = m_t \times \cos \psi$
مدول پیشانی	$m_t = \frac{P_t}{\pi} = \frac{m_n}{\cos \beta}$
گام نرمال	$P_n = m_n \times \pi$
گام پیشانی	$P_t = m_t \times \pi$
قطر متوسط	$d_o = m_t \times Z$
قطر خارجی	$d_K = d_o + 2m_n$
قطر داخلی	$d_f = d_o - \frac{14}{6}m_n = d_o - 2.33m_n$
ارتفاع چرخ‌دنده	$h = h_K + h_f = 1m_n + \frac{7}{6}m_n = \frac{13}{6}m_n = 2.167m_n$
پهنای چرخ‌دنده	$b = 10m_n$
پهنای دنده	$B = \frac{b}{\cos \psi}$
انحراف دنده	$S_p = b \times \tan \psi$
تاج سر دنده	$K \geq 1.6m_n$
گام پیش چرخ‌دنده	$P = d_o \times \pi \times \cot g \psi$
فاصله بین دو محور	$a = \frac{d_{o1} + d_{o2}}{2}$
تعداد دندانه فرضی	$Z_i = \frac{Z}{\cos^3 \psi}$

۳-۲- چرخ‌دنده‌های مارپیچ - تحلیل نیروها

شکل ، تصویر سه بعدی نیروهای وارد به دندانه‌ی چرخ‌دنده‌ی مارپیچی است. نقطه‌ی اعمال نیروها در صفحه‌ی گام و در مرکز رویه‌ی چرخ‌دنده‌هاست. از هندسه‌ی شکل، سه مولفه‌ی نیروی کل (عمودی) دندانه W عبارت‌اند از



شکل ۲۱- نیروی اعمالی دنده‌ی راستگرد

$$W_r = W \sin \Phi_n$$

$$W_t = W \cos \Phi_n \cos \psi$$

$$W_a = W \cos \Phi_n \sin \psi$$

که W = نیروی کل، W_r = مولفه‌ی شعاعی، W_t = مولفه مماسی، که بار منتقل شده هم نامیده می‌شود. W_a = مولفه‌ی محوری، که بار محوری هم نامیده می‌شود. معمولاً W_t معلوم و سایر نیروها مطلوب‌اند. در این مورد، به راحتی می‌توان دریافت که

$$W_r = W_t \tan \Phi_t$$

$$W_a = W_t \tan \psi$$

$$W = \frac{W_t}{\cos \Phi_n \cos \psi}$$

تمرین ۶- موتور الکتریکی $0.75 kW$ نشان داده شده در شکل، اگر از طرف مثبت محور x نگریسته شود، با سرعت 1800 rev/min ساعتگرد می‌چرخد. پینیون مارپیچ ۱۸ دندانه‌ای با زاویه‌ی فشار عمودی 20° ، زاویه‌ی مارپیچ 30° ، و مدول عمودی 2 mm توسط خار به محور موتور متصل شده است. راستگردی یا چپگردی مارپیچ در شکل نشان داده شده است. نموداری سه بعدی از محور موتور و پینیون رسم کنید و نیروهای وارد بر پینیون و واکنش‌های تکیه‌گاهها را در A و B نشان دهید. نیروی محوری می‌بایست در A فرض شود.

۳-۳- چرخ‌دنده‌های مارپیچ- تحلیل استحکام

در این‌جا معادله‌ی تنش‌های خمشی و سطح را در چرخ‌دنده‌های ساده تکرار می‌کنیم چون این معادله‌ها در چرخ‌دنده‌های مارپیچ نیز به کار می‌روند.

$$\sigma = \frac{W_t}{K_v F m J} \quad (18)$$

$$\sigma_H = -C_P \sqrt{\frac{W_t}{C_v F d_p I}} \quad (19)$$

که σ = تنش خمشی، σ_H = تنش فشاری سطح، W_t = بار منتقل شده، m = مدول عرضی، $C_v = K_v$ = ضریب دینامیکی یا سرعت، d_p = قطر گام پینیون، J = ضریب هندسی (خمشی) که برای $\phi_n = 20^\circ$ می‌توان از جدول چرخ‌دنده‌ی ساده استفاده کرد. I = ضریب هندسی (دوام سطح) بوده از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود. F = پهنای رویه است. برای چرخ‌دنده‌های مارپیچ، ضریب سرعت معمولاً به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$K_v = C_v = \left[\frac{78}{78 + (200V)^{1/2}} \right] \quad (20)$$

ضریب‌های هندسی I برای چرخ‌دنده‌های مارپیچ و دنده جناقی با دندانه‌های خارجی از معادله‌ی

$$I = \frac{\sin \Phi_t \cos \Phi_t}{2m_N} \frac{m_C}{m_C + 1} \quad (21)$$

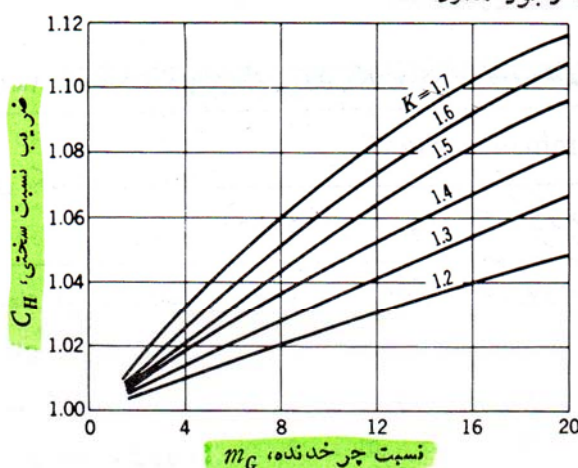
محاسبه می‌شوند. (برای چرخ‌دنده‌های دندانه داخلی، در مخرج دومین عبارت علامت منفی بگذارید) در این معادله Φ_r زاویه‌ی فشار عرضی و m_N نسبت اشتراک بار است که قبلاً معرفی شد.

ضریب‌های اصلاحی، به غیر از ضریب‌های توزیع بار K_m و C_m (جدول زیر) و ضریب نسبت سختی C_H (شکل)، برای چرخ‌دنده‌های مارپیچ مانند چرخ‌دنده‌های ساده است. با این تغییرها، از معادله‌ی (۸) حد دوام خمشی، از معادله‌ی (۱۰) ضریب ایمنی و از معادله‌ی (۱۷) استحکام خمشی سطح را می‌توان به دست آورد.

جدول ۱۴-۱ ضریب‌های توزیع بار K_m و C_m برای چرخ‌دنده‌های مارپیچ

پهنای رویه، mm				مشخصه‌های تکیه‌گاه
۴۰۰ به بالا	۲۲۵	۱۵۰	۵۰-۰	
۱۰۷	۱۰۴	۱۰۳	۱۰۲	نصب‌های دقیق، لقی‌های کم یا ناقان، خیز کمینه، چرخ‌دنده‌های دقیق
۲۰۰	۱۰۷	۱۰۶	۱۰۵	نصب‌های کمتر صلب، چرخ‌دنده‌های کم دقت‌تر، تماس در تمام طول رویه دقت و نصب به قسمی است که تماس در تمام طول رویه وجود ندارد

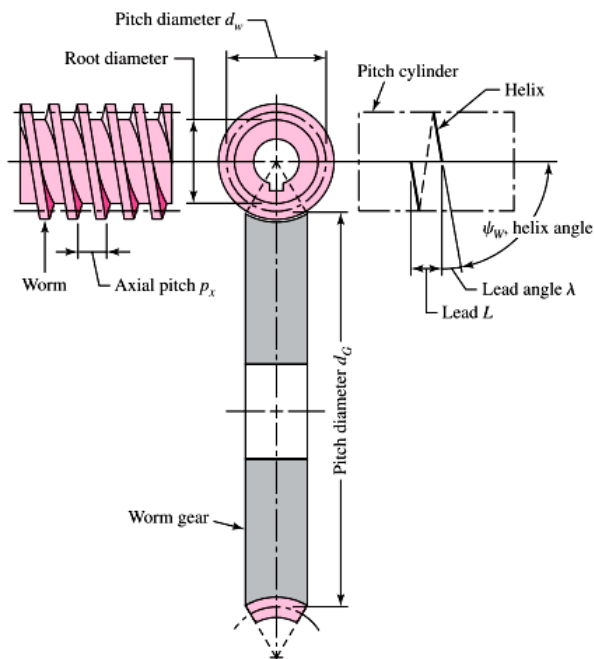
بیش از ۲۰۰



ضریب نسبت سختی C_H برای چرخ‌دنده‌های مارپیچ، ضریب K سختی برینل پیتنیون تقسیم بر سختی برینل چرخ‌دنده است. هنگامی که $K < ۱.۲$ ، از $C_H = ۱.۰۰$ استفاده کنید.

۴- چرخ دنده‌ی حلزونی - سینماتیک

شکل زیر یک حلزون و یک چرخ دنده‌ی حلزونی را نشان می‌دهد. توجه کنید که محورها متقاطع نیستند و زاویه‌ی محور 90° است، این زاویه‌ی معمول محور است، گرچه از زاویه‌های دیگری هم می‌توان استفاده کرد. نامگذاری حلزون و چرخ دنده‌ی حلزونی در شکل نشان داده شده است.



شکل ۲۲- جفت چرخ دنده حلزونی یک جانبه

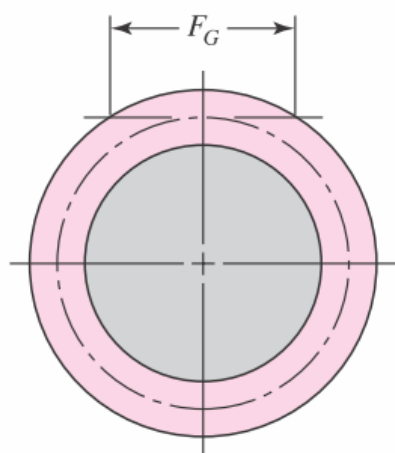
شکل ۲۳- نامگذاری حلزون و چرخ حلزون با پوش یک جانبه

سیستم محرکه چرخ دنده حلزونی			
محاسبه سیستم محرکه چرخ دنده حلزونی			
نام	حلزون	چرخ حلزون	
قطر دایره گام	$d_1 = \text{اندازه نامی}$	$d_2 = m \cdot z_2$	
گام	$p_x = \pi \cdot m$	$p = \pi \cdot m$	
قطر دایره سر	$d_{a1} = d_1 + 2 \cdot m$	$d_{a2} = d_2 + 2 \cdot m$	
قطر خارجی		$d_A = d_{a2} + m$	
شعاع سر دندانه		$r_k = \frac{d_1}{2} - m$	
ارتفاع گام	$p_z = p_x \cdot z_1 = \pi \cdot m \cdot z_1$		
فاصله محور	$a = \frac{d_1 + d_2}{2}$		

<p>مثال: در یک سیستم محرکه چرخ دنده حلزونی با مدول $m = 2,5 \text{ mm}$ باید حلزون دو دندانه ($z_1 = 2$ دو راهه) و با قطر گام $d_1 = 40 \text{ mm}$ و چرخ حلزون با $z_2 = 40$ باشد. سایر اندازه‌ها را حساب کنید.</p>			
چرخ حلزون			
حل:	$d_2 = m \cdot z_2 = 2,5 \text{ mm} \cdot 40$	$= 100 \text{ mm}$	
	$d_{a2} = d_2 + 2m = 100 \text{ mm} + 2 \cdot 2,5 \text{ mm}$	$= 105 \text{ mm}$	
	$d_A = d_{a2} + m = 105 \text{ mm} + 2,5 \text{ mm}$	$= 107,5 \text{ mm}$	
	$r_k = \frac{d_1}{2} - m = \frac{40 \text{ mm}}{2} - 2,5 \text{ mm}$	$= 17,5 \text{ mm}$	

حلزون			
	$p_x = \pi \cdot z_1 \cdot m = \pi \cdot 2 \cdot 2,5 \text{ mm}$	$= 15,708$	
	$d_{a1} = d_1 + 2 \cdot m = 40 \text{ mm} + 2 \cdot 2,5 \text{ mm}$	$= 45 \text{ mm}$	
	$a = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{40 \text{ mm} + 100 \text{ mm}}{2}$	$= 70 \text{ mm}$	

شکل ۲۴- برخی روابط حاکم بر حلزون و چرخ حلزون

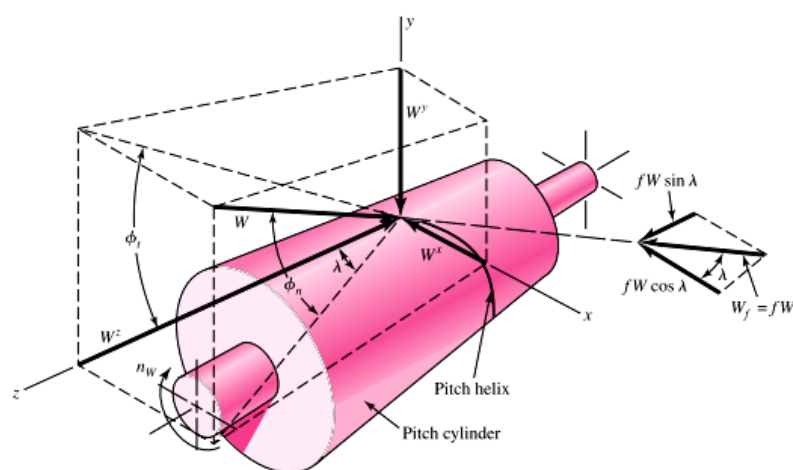


شکل ۲۵- پهنای چرخ حلزون

پهنای رویه‌ی F_G چرخ‌دنده‌ی حلزونی می‌بایست برابر طول مماس بر دایره‌ی گام حلزون، بین نقطه‌های تقاطع آن با دایره‌اندوم، در نظر گرفته شود، همان‌گونه که در شکل روبرو نشان داده شده است.

۴-۱- چرخ‌دنده‌ی حلزونی - تحلیل نیرو

اگر از اصطکاک چشم‌پوشی شود، تنها نیروی وارد توسط چرخ‌دنده، نیروی W خواهد بود که در شکل روبرو نشان داده شده است و سه مولفه‌ی عمود بر هم W^x , W^y و W^z دارد.



شکل ۲۶- پهنای چرخ حلزون

$$W^x = W \cos \Phi_n \sin \lambda$$

$$W^y = W \sin \Phi_n$$

$$W^z = W \cos \Phi_n \cos \lambda$$

حال از زیر نماهای W و G برای مشخص کردن نیروهایی که به ترتیب بر حلزون و چرخ‌دنده وارد می‌شوند استفاده می‌کنیم. توجه می‌کنیم که W^y نیروی جدایی یا شعاعی، هم برای حلزون و هم برای چرخ‌دنده است. زاویه‌ی محور را 90° فرض می‌کنیم، در این صورت نیروی مماسی وارد بر حلزون W^x ، و وارد بر چرخ‌دنده‌ی W^z است. نیروی محوری وارد بر حلزون W^z است. چون نیروهای چرخ‌دنده با نیروهای حلزون مخالف‌اند، می‌توانیم این رابطه‌ها را به صورت زیر خلاصه کنیم

$$W^x = W(\cos \Phi_n \sin \lambda + \mu \cos \lambda)$$

$$W^y = W \sin \Phi_n$$

$$W^z = W(\cos \Phi_n \cos \lambda - \mu \sin \lambda)$$

بازده η را می‌توان با استفاده از معادله‌ی زیر تعریف کرد:

$$\eta = W_{W_t} (\text{با اصطکاک}) / W_{W_t} (\text{بدون اصطکاک})$$

آزمایش‌های بسیاری نشان داده‌اند که ضریب اصطکاک به سرعت نسبی یا لغزشی بستگی دارد. در شکل V_G ، سرعت خط گام چرخنده و V_W سرعت خط گام حلزون است به صورت برداری، $V_W = V_C + V_t$ ، در نتیجه:

$$V_s = \frac{V_m}{\cos \lambda}$$

تمرین ۷- یک حلزون 2 دندانه‌ای راستگرد، توان 0.75 kW را با سرعت 1200 rev/min به یک چرخنده‌ی حلزونی 30 دندانه‌ای منتقل می‌کند. حلزون دارای گام محوری 13 mm ، قطر گام 50 mm ، و پهنای رویه‌ی 63 mm است. پهنای رویه‌ی چرخنده 25 mm و زاویه‌ی فشار آن $14(1/2)^\circ$ است. ضریب اصطکاک 0.03 در نظر گرفته شود..
الف) فاصله‌ی مرکزی، جلوبر، و زاویه‌ی جلوبر را پیدا کنید.

ب) شکل رسمی از مجموعه‌ی چرخنده است که نسبت به سیستم مختصاتی که قبلاً در این بخش توضیح داده شد سمتگیری دارد؛ چرخنده بر یاتاقان‌های A و B حمل می‌شود. نیروهایی که از یاتاقان‌ها به محور چرخنده‌ی حلزونی وارد می‌شوند، و لنگر خروجی را پیدا کنید.

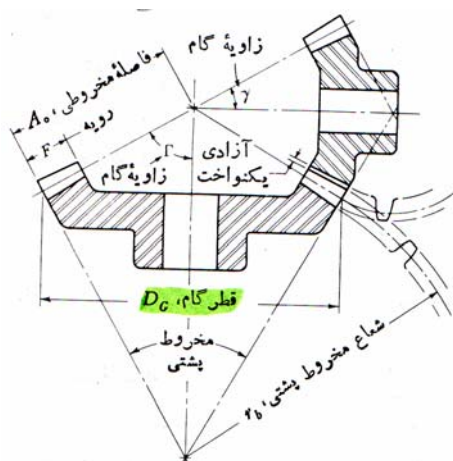
۴-۲- چرخ دنده‌های مخروطی ساده- سینماتیک

هنگامی که قرار باشد از چرخ دنده برای انتقال حرکت بین محورهای متقاطع استفاده کرد یکی از انواع چرخ دنده‌ی مخروطی مورد نیاز است. اگر چه چرخ دنده‌های مخروطی معمولاً برای زاویه‌ی محور 90° ساخته می‌شوند، ولی می‌توان آن‌ها را برای تقریباً هر زاویه محوری ساخت.

نامگذاری چرخ دنده‌های مخروطی در شکل ۲۷ نشان داده شده است. گام چرخ دنده‌های مخروطی دو سر بزرگ دندانه اندازه‌گیری می‌شود و گام دایره‌ای و قطر گام هر دو به همان روش چرخ دنده‌های ساده محاسبه می‌شوند.

$$\tan \gamma = \frac{N_P}{N_G} \quad \tan \Gamma = \frac{N_G}{N_P}$$

اگر شکل دندانه‌ها، هنگامی که روی مخروط پشتی تصویر شوند، مانند شکل دندانه‌ی چرخ دنده‌ی ساده‌ای است که دارای شعاعی معادل فاصله‌ی مخروط پشتی r_b باشد.



شکل ۲۷- نامگذاری چرخ دنده‌ی مخروطی

این عمل، تقریب‌زنی ترد گولد نامیده می‌شود. تعداد دندانه‌های این چرخ دنده‌ی خیالی چنین است

$$N' = \frac{2\pi r_b}{p}$$

که N' تعداد مجازی دندانه‌ها و p گام دایره‌ای اندازه‌گیری شده در سر بزرگ دندانه‌هاست.

نسبت‌های دندانه برای چرخ دنده‌ی مخروطی ساده 20°

عنوان	فرمول										
عمق کاری	$h_k = 2.0 \text{ m}$										
لقی	$c = 0.188 \text{ m} + 0.005$										
اندوم چرخ دنده	$a_G = m \left[0.54 + \frac{0.46}{(m_{\alpha_0})^2} \right]$										
نسبت چرخ دنده	$m_G = N_G / N_P$										
نسبت 90° معادل	$\Sigma = 90^\circ$ هنگامی که $m_{\alpha_0} = m_G$										
	$\Sigma \neq 90^\circ$ هنگامی که $m_{\alpha_0} = \sqrt{m_G \frac{\cos \gamma}{\cos \Gamma}}$										
پهنای روبه	$F = 10 \text{ m}$ یا $F = \frac{A_0}{3}$ ، هر کدام کوچکتر باشد										
تعداد دندانه کمینه	<table> <tr> <td>پینیون</td> <td>۱۶</td> <td>۱۵</td> <td>۱۴</td> <td>۱۳</td> </tr> <tr> <td>چرخ دنده</td> <td>۱۶</td> <td>۱۷</td> <td>۲۰</td> <td>۳۰</td> </tr> </table>	پینیون	۱۶	۱۵	۱۴	۱۳	چرخ دنده	۱۶	۱۷	۲۰	۳۰
پینیون	۱۶	۱۵	۱۴	۱۳							
چرخ دنده	۱۶	۱۷	۲۰	۳۰							

۳-۴- چرخ دنده‌های مخروطی - تحلیل نیرو

در تعیین بارهای محور و یاتاقان برای کاربردهای چرخ دنده‌های مخروطی، روش معمول، استفاده از بار مماسی یا منتقل شده به شرطی است که همه‌ی نیروها در میانه‌ی دندانه متمرکز شده باشند. با توجه به این که برآیند واقعی جایی بین میانه و سر بزرگ دندانه واقع می‌شود، در این فرض خطای ناچیزی وجود دارد.

$$W_t = \frac{T}{r_{av}}$$

که T لنگر و r_{av} شعاع گام چرخ دنده‌ی مورد بررسی در

میانه‌ی دندانه است.

شکل ۲۸- نیروهای دندانه‌ی چرخ دنده‌ی مخروطی

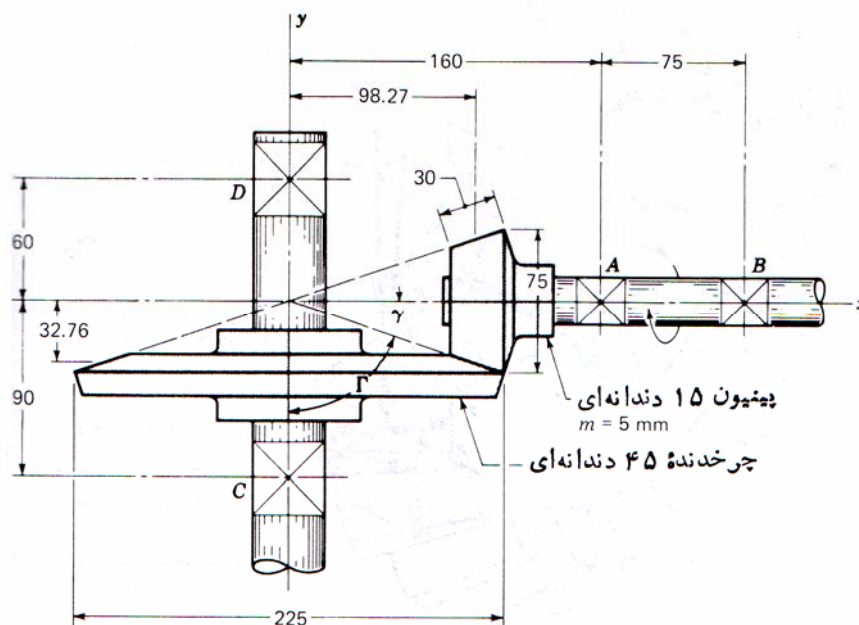
نیروهای وارد بر مرکز دندانه در شکل ۲۹ نشان داده شده است. برآیند نیروی W سه مولفه دارد، یک نیروی مماسی W_t ، یک نیروی شعاعی W_r ، و یک نیروی محوری W_a با استفاده از مثلثات و شکل داریم:

$$W_r = W_t \tan \phi \cos \gamma$$

$$W_a = W_t \tan \phi \sin \gamma$$

سه نیروی W_t ، W_r و W_a بر یکدیگر عمودند و می‌توان با استفاده از روش‌های استاتیک برای تعیین بارهای تکیه گاهی از آن‌ها استفاده کرد.

تمرین ۸- پینیون مخروطی نشان داده شده در شکل زیر با سرعت 600 rev/min در جهت نشان داده شده می‌چرخد و 3.75 kW را به چرخ دنده انتقال می‌دهد. فاصله‌های نصب، موقعیت همه‌ی یاتاقان‌ها، و شعاع‌های متوسط دایره‌های گام پینیون و چرخ دنده در شکل نشان داده شده‌اند. برای سادگی، دندانه‌ها با مخروط‌های گام عوض شده‌اند. یاتاقان‌های A و C می‌بایست بارهای محوری را بگیرند. نیروهای تکیه گاهی وارد بر محور چرخ دنده را پیدا کنید.



روابط AGMA جهت مطالعه

۱-۳-۴ معادلات تنش AGMA

در روش AGMA دو معادله اصلی تنش مورد استفاده قرار می‌گیرد؛ یکی برای تنش خمشی و دیگری برای تنش تماسی. در واژگان AGMA، این دو تنش به اعداد تنش موسومند و با نماد s به جای حرف یونانی σ که در اینجا به کار گرفته شد، نشان داده می‌شوند. این معادلات اصلی عبارتند از:

$$\sigma = \begin{cases} W^t K_O K'_V K_s \frac{P_d}{F} \frac{K_m K_B}{J} \\ W^t K_O K'_V K_s \frac{1}{b m_t} \frac{K_H K_B}{Y_J} \end{cases} \quad (22)$$

که معادله بالایی در سیستم واحدهای آمریکایی و معادله پایینی در سیستم SI است. همچنین،

W^t = بار منتقل شده مماسی، K_O = ضریب فرابار، K'_V = ضریب دینامیک، K_s = ضریب اندازه، P_d = گام قطری عرضی، F = پهنای صورت دندانه چرخدنده باریکتر، K_m = ضریب توزیع بار، K_B = ضریب ضخامت طوقه چرخدنده و J = ضریب شکل برای استحکام خمشی (که شامل تمرکز تنش ماهیچه ریشه دندانه K_f است).
در معادله سیستم SI: b = پهنای رخ دندانه چرخدنده باریکتر، m_t = مدول SI عرضی، K_H = ضریب توزیع بار، Y_J = ضریب شکل برای استحکام خمشی (که شامل ضریب تمرکز تنش ماهیچه ریشه دندانه K_f است).
معادله اصلی برای تنش تماسی چنین است:

$$\sigma_C = \begin{cases} C_P \sqrt{W^t K_O K'_V K_s \frac{K_m C_f}{d F} \frac{1}{I}} \\ Z_E \sqrt{W^t K_O K'_V K_s \frac{K_H Z_R}{d_{w1} b} \frac{1}{Z_I}} \end{cases} \quad (23)$$

که معادله بالایی در سیستم آمریکایی و معادله پایینی در سیستم SI است.

در معادله مربوط به سیستم آمریکایی: C_P = ضریب الاستیک، $(\text{lb}/\text{in}^2)^{0.5}$ ، W^t = بار منتقل شده مماسی، K_O = ضریب فرابار، K'_V = ضریب دینامیک، K_s = ضریب اندازه، K_m = ضریب توزیع بار، C_f = ضریب شرایط سطح، d = قطر گام پینیون و F = پهنای رخ دندانه چرخدنده.
در معادله مربوط به سیستم SI: Z_E = ضریب الاستیک، $(\text{N}/\text{mm}^2)^{0.5}$ ، K_H = ضریب توزیع بار، Z_R = ضریب شرایط سطح برای مقاومت در مقابل ایجاد حفره، d_{w1} = قطر گام پینیون، b = پهنای رخ دندانه چرخدنده و Z_I = ضریب شکل برای مقاومت در مقابل ایجاد حفره.

۴-۳-۲- معادلات استحکام AGMA

به جای استفاده از اصطلاح استحکام، AGMA داده های موسوم به اعداد تنش مجاز^۶ را به کار می برد و آنها را با نماد S_a نشان می دهد. با این وجود، بهتر است که در اینجا برای جلوگیری از اشتباه از همان نمادهای معمول برای استحکام (یعنی S) و تنش (یعنی σ و τ) استفاده گردد. برای روشنی بیشتر، از عبارت استحکام AGMA به جای عبارت اعداد تنش مجاز که توسط AGMA به کار می رود، استفاده می شود. بر اساس این توافق، مقادیر استحکام خمشی AGMA در اینجا با نماد S_t نشان داده می شود.

در روش AGMA استحکامها به کمک ضرایب گوناگون تصحیح می شوند تا اینکه مقادیر حدی تنش خمشی و تنش تماسی به دست آیند. اگر مقادیر تصحیح شده با عبارات تنش خمشی مجاز σ_{all} و تنش تماسی مجاز $\sigma_{c,all}$ نامگذاری شود، معادله مربوط به تنش خمشی مجاز چنین است:

$$\sigma_{all} = \begin{cases} \frac{S_t}{S_F} \frac{Y_N}{K_T K_R} \\ \frac{\sigma_{FP}}{S_F} \frac{Y_N}{Y_\theta Y_Z} \end{cases} \quad (24)$$

که معادله بالایی در سیستم واحدهای آمریکایی و معادله پایینی در سیستم SI است.

σ_{FP}, S_t تنشهای خمشی مجاز، $(\text{N/mm}^2) \text{ lbf/in}^2$ ، Y_N ضریب سیکل تنش برای تنش خمشی، Y_θ, K_T ضرایب دما، Y_Z, K_R ضرایب قابلیت اعتماد و S_F ضریب اطمینان AGMA، نسبت تنشها، معادله مربوط به تنش تماسی مجاز $\sigma_{c,all}$ چنین است:

$$\sigma_{c,all} = \begin{cases} \frac{S_C}{S_H} \frac{Z_N C_H}{K_T K_R} \\ \frac{\sigma_{HP}}{S_H} \frac{Z_N Z_W}{Y_\theta Y_Z} \end{cases} \quad (25)$$

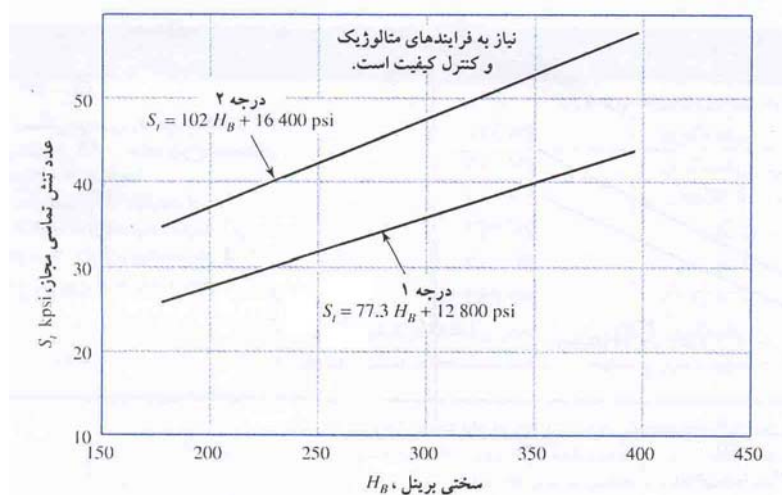
که معادله بالایی در سیستم واحدهای آمریکایی و معادله پایینی در سیستم SI است.

σ_{HP}, S_C تنشهای تماسی مجاز، $(\text{N/mm}^2) \text{ lbf/in}^2$ ، Z_N ضریب سیکل تنش - عمر، Z_W, C_H ضرایب نسبت سختی برای مقاومت در مقابل ایجاد حفره، Y_θ, K_T ضرایب دما، Y_Z, K_R ضرایب قابلیت اعتماد، S_H ضریب اطمینان AGMA، نسبت تنشها

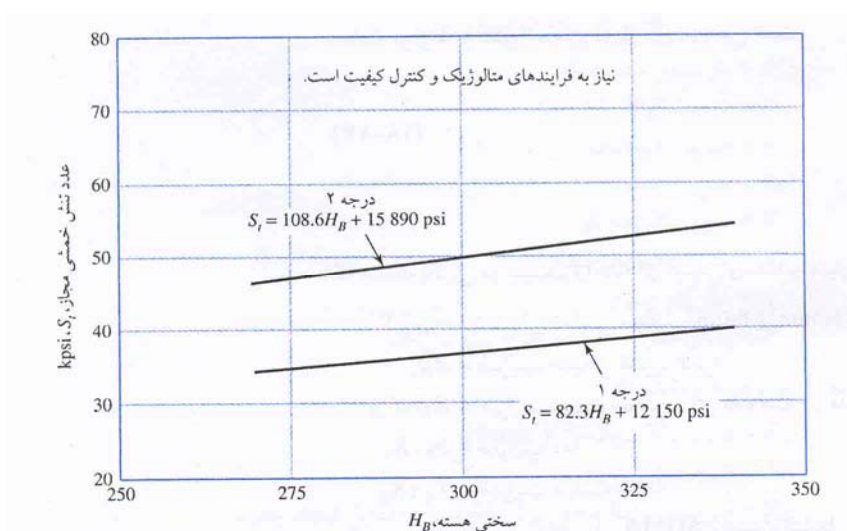
مقادیر تنش تماسی AGMA در اینجا با نماد S_C نشان داده شده است.

شکلهای و جداول زیر اعداد (استحکامهای) تنش مجاز AGMA برای تنش خمشی و تنش تماسی را نشان می دهند که در شرایط بار گذاری یک طرفه، ۱۰ میلیون سیکل تنش و قابلیت اعتماد ۹۹ درصد به کار می رود.

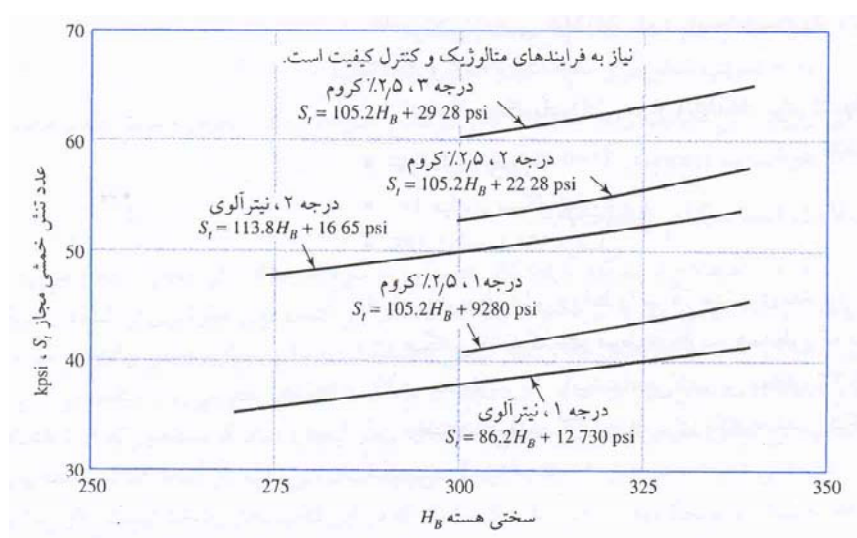
⁶ - Allowable Stress Numbers



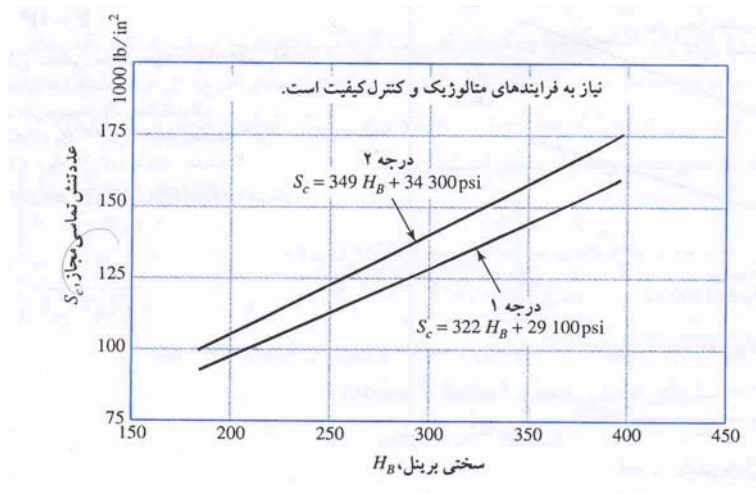
شکل ۲۹- عدد تنش خمشی مجاز S_t برای فولادهای تماماً سخت کاری شده [۱]



شکل ۳۰- عدد تنش خمشی مجاز S_t برای فولادهای تماماً سخت کاری و نیتريددهی شده [۱]



شکل ۳۱- اعداد تنش خمشی مجاز S_t برای چرخ‌دنده‌های فولادی نیتريددهی شده [۱]



شکل ۳۲- استحکام خمشی تماسی S_C برای فولاد تماماً سخت شده

جدول ۸- استحکام خمشی متناوب S_t برای چرخ دنده‌های فولادی

ماده	عملیات حرارتی	کمترین سختی سطح ^۱	عدد تنش خمشی مجاز S_t , psi		
			درجه ۱	درجه ۲	درجه ۳
فولاد ^۲	تماماً سخت شده	به شکل ۲-۳ نگاه کنید	به شکل ۲-۳ نگاه کنید	به شکل ۲-۳ نگاه کنید	-
	سخت شده به روش سختکاری شعله‌ای ^۴ یا القایی ^۴ با الکوی A ^۵	-	۴۵۰۰۰	۵۵۰۰۰	-
	سخت شده به روش سختکاری شعله‌ای ^۴ یا القایی ^۴ با الکوی B ^۵	-	۲۲۰۰۰	۲۲۰۰۰	-
	کربن دهی و سختکاری	-	۵۵۰۰۰	۶۵۰۰۰ یا ۷۰۰۰۰ ^۶	۷۵۰۰۰
	نیترورژن دهی ^{۴، ۷} (فولادهای تماماً سخت شده)	۸۳٫۵ HR۱۵N	به شکل ۳-۳ نگاه کنید	به شکل ۳-۳ نگاه کنید	-
نیترآلوی ۱۳۵M، نیترآلوی N، و ۲/۵٪ کروم (بدون آلومینیم)	نیترورژن دهی ^{۴، ۷}	۸۷٫۵ HR۱۵N	به شکل ۴-۳ نگاه کنید	به شکل ۴-۳ نگاه کنید	به شکل ۴-۳ نگاه کنید

استحکام خمشی متناوب S_t برای چرخ دنده‌های آهنی و برنزی

ماده	نماد ماده ^۱	عملیات حرارتی	کمترین سختی سطح ^۲	عدد تنش خمشی مجاز S_t , psi
چدن خاکستری	رده ۲۰	ریخته گری	-	۵۰۰۰
ASTM A۴۸	رده ۳۰	ریخته گری	۱۷۴ HB	۸۵۰۰
	رده ۴۰	ریخته گری	۲۰۱ HB	۱۳۰۰۰
آهن شکل پذیر (کروی)	درجه ۱۸-۴۰-۶۰	بازپخت شده	۱۴۰ HB	۳۳۰۰۰-۲۲۰۰۰
	درجه ۵۵-۸۰-۱۰۰	Q & T	۱۷۹ HB	۳۳۰۰۰-۲۲۰۰۰
	درجه ۷۰-۱۰۰-۱۳۰	Q & T	۲۲۹ HB	۴۰۰۰۰-۲۷۰۰۰
	درجه ۹۰-۱۲۰-۱۵۰	Q & T	۲۶۹ HB	۴۴۰۰۰-۳۱۰۰۰
برنز		ریخته گری ماسه‌ای	کمترین استحکام کششی ۴۰۰۰۰ lb/in ^۲	۵۷۰۰
	ASTM B-۱۴۸	عملیات حرارتی شده	کمترین استحکام کششی ۹۰۰۰۰ lb/in ^۲	۲۳۶۰۰

جدول ۹- دمای اسمی مورد استفاده در عملیات نیترورژن دهی و سختی های بدست آمده

سختی راکول مقیاس C	پوسته	نیتروژن دهی °F	دما پیش از نیتروژن دهی، °F	
			نیتروژن دهی، °F	فولاد
۳۵-۳۰	۶۵-۶۲	۹۷۵	۱۱۵۰	نیتروآلوی ۱۳۵
۳۶-۳۲	۶۵-۶۲	۹۷۵	۱۱۵۰	نیتروآلوی ۱۳۵M
۴۴-۴۰	۶۵-۶۲	۹۷۵	۱۰۰۰	نیتروآلوی N
۳۵-۲۷	۵۳-۴۸	۹۷۵	۱۱۰۰	AISI ۴۳۴۰
۳۵-۲۷	۵۴-۴۹	۹۷۵	۱۱۰۰	AISI ۴۱۴۰
۳۳-۲۷	۶۲-۵۸	۹۷۵	۱۱۰۰	۳۱ Cr Mo V ۹

* نیتروآلوی علامت تجاری شرکت Nitralloy Corp., New York, NY است.

جدول ۱۰- استحکام تماسی متناوب S_C برای چرخ دنده های فولادی

عدد تنش تماسی مجاز S_C ، psi				عملیات حرارتی	ماده
درجه ۳	درجه ۲	درجه ۱	کمترین سختی سطح ^۱		
-	به شکل ۳-۵ نگاه کنید	به شکل ۳-۵ نگاه کنید	به شکل ۳-۵ نگاه کنید	تماماً سخت شده ^۴ سختکاری شعله ای ^۵ یا القایی ^۵	فولاد ^۲
-	۱۹۰۰۰۰	۱۷۰۰۰۰	۵۰ HRC		
-	۱۹۵۰۰۰	۱۷۵۰۰۰	۵۴ HRC		
۲۷۵۰۰۰	۲۲۵۰۰۰	۱۸۰۰۰۰	-	کربن دهی و نیتروژن دهی ^۵	
۱۷۵۰۰۰	۱۶۳۰۰۰	۱۵۰۰۰۰	۸۳,۵ HR۱۵N	نیتروژن دهی ^۵ (فولاد)	
۱۸۰۰۰۰	۱۶۸۰۰۰	۱۵۵۰۰۰	۸۴,۵ HR۱۵N	تماماً سخت شده ^۴	
۱۸۹۰۰۰	۱۷۲۰۰۰	۱۵۵۰۰۰	۸۷,۵ HR۱۵N	نیتروژن دهی ^۵	۲,۵٪ کروم (بدون آلومینیم)
۱۹۵۰۰۰	۱۸۳۰۰۰	۱۷۰۰۰۰	۹۰,۰ HR۱۵N	نیتروژن دهی ^۵	نیتروآلوی ۱۳۵M
۲۰۵۰۰۰	۱۸۸۰۰۰	۱۷۲۰۰۰	۹۰,۰ HR۱۵N	نیتروژن دهی ^۵	نیتروآلوی N
۲۱۶۰۰۰	۱۹۶۰۰۰	۱۷۶۰۰۰	۹۰,۰ HR۱۵N	نیتروژن دهی ^۵	۲,۵٪ کروم (بدون آلومینیم)

جدول ۱۱- استحکام تماسی متناوب S_C برای چرخ دنده های آهنی و برنزی

ماده	نماد ماده ^۱	عملیات حرارتی	کمترین سختی سطح ^۲	عدد تنش تماسی مجاز ^۳ , S _c
چدن خاکستری	رده ۲۰	ریخته‌گری	-	۵۰۰۰۰ - ۶۰۰۰۰
ASTM A۴۸	رده ۳۰	ریخته‌گری	۱۷۴ HB	۶۵۰۰۰ - ۷۵۰۰۰
	رده ۴۰	ریخته‌گری	۲۰۱ HB	۷۵۰۰۰ - ۸۵۰۰۰
آهن شکل‌پذیر (کروی)	درجه ۱۸-۴۰-۶۰	بارپخت شده	۱۴۰ HB	۷۷۰۰۰ - ۹۲۰۰۰
ASTM A۵۳۶	درجه ۵۵-۸۰-۰۶	Q & T	۱۷۹ HB	۷۷۰۰۰ - ۹۲۰۰۰
	درجه ۷۰-۱۰۰-۰۳	Q & T	۲۲۹ HB	۹۲۰۰۰ - ۱۱۲۰۰۰
	درجه ۹۰-۱۲۰-۰۲	Q & T	۲۶۹ HB	۱۰۳۰۰۰ - ۱۲۶۰۰۰
برنز	-	ریخته‌گری ماسه‌ای	کمترین استحکام کششی ۴۰۰۰۰ psi	۳۰۰۰۰
	ASTM B-۱۴۸	عملیات حرارتی شده	کمترین استحکام کششی ۹۰۰۰۰ psi	۶۵۰۰۰

۳-۳-۴- ضرایب شکل هندسی I و J (Y1, Z1)

در معادله لوئیس، مشاهده شد که چگونه ضریب Y برای وارد کردن اثر شکل دندانه در معادله تنش به کار می‌رود. ضرایب I و J در روش AGMA نیز نقش مشابهی ایفا می‌کنند.

تعیین I و J بستگی به نسبت تماس رخ دندانه (m_F) دارد. این نسبت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$m_F = \frac{F}{p_x} \quad (26)$$

که در آن p_x گام محوری و F پهنای رخ دندانه است. برای چرخ‌دنده‌های ساده $m_F = 0$ است.

چرخ‌دنده‌های مارپیچ با نسبت تماس پایین دارای زاویه مارپیچ کوچک، یا پهنای رخ کوچک یا هر دو هستند و مقدار نسبت صورت دندانه آنها کمتر از واحد است ($m_F \leq 1$) که در اینجا در نظر گرفته نخواهد شد. میزان سر و صدای این چرخ‌دنده‌ها تفاوت چندانی با چرخ‌دنده‌های ساده ندارد. در نتیجه، در اینجا فقط چرخ‌دنده‌های ساده با $m_F = 0$ و چرخ‌دنده‌های مارپیچ معمولی با $m_F > 1$ را بررسی می‌گردد.

ضریب شکل هندسی استحکام خمشی J: برای محاسبه ضریب J در روش AGMA از مقدار تصحیح شده ضریب شکل لوئیس Y، ضریب تمرکز تنش خستگی K_f و نسبت سهم بار دندانه m_N استفاده می‌گردد. معادله حاصل برای J به صورت زیر است:

$$J = \frac{Y}{K_f m_N} \quad (27)$$

باید توجه داشت که ضریب شکل Y در معادله فوق به هیچ وجه ضریب لوئیس نیست. مقدار Y در اینجا از طرح نیم‌رخ دندانه در صفحه عمودی به دست آمده است که بر اساس بالاترین نقطه تماس یک جفت دندانه استوار است.

ضریب K_f ضریب تصحیح تنش AGMA نامیده می‌شود. این ضریب بر اساس فرمولی که از تحقیقات فتوالاستیک تمرکز تنش در دندانه چرخ‌دنده‌ها در طول ۵۰ سال گذشته به دست آمده استوار است. شکل زیر که از روش فتوالاستیک حاصل شده است، الگوی توزیع تنش و مواضع تمرکز تنش را بر روی دندانه چرخ‌دنده نشان می‌دهد.



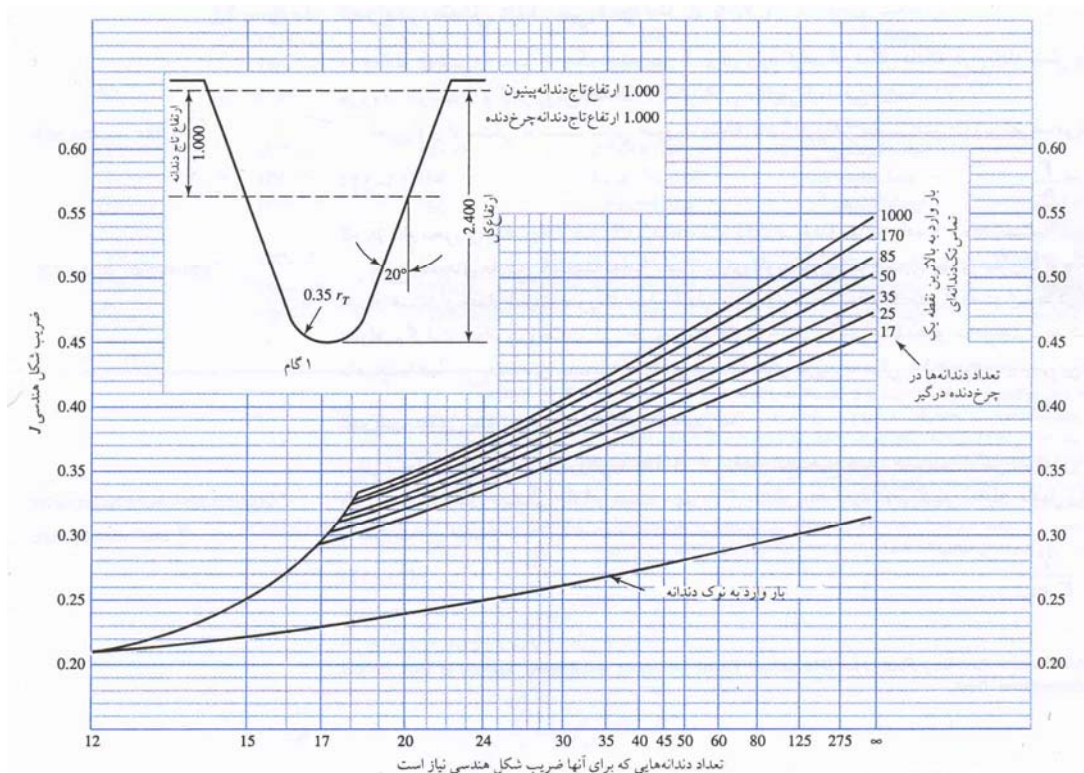
شکل ۳۳- الگوی توزیع تنش

نسبت سهم بار m_N برابر با پهنای صورت دندانه تقسیم بر کمترین طول کل خط تماس است. این ضریب بستگی به نسبت درگیری عرضی m_p ، نسبت تماس رخ دندانه m_F ، اثرات مربوط به تصحیح نیمرخ دندانه و خمش دندانه‌ها دارد. برای چرخ‌دنده‌های ساده $m_N = 1.0$ است. برای چرخ‌دنده‌های مارپیچ با نسبت تماس رخ دندانه $m_F > 2.0$ معادله زیر یک رابطه تقریبی برای محاسبه نسبت سهم بار به دست می‌دهد:

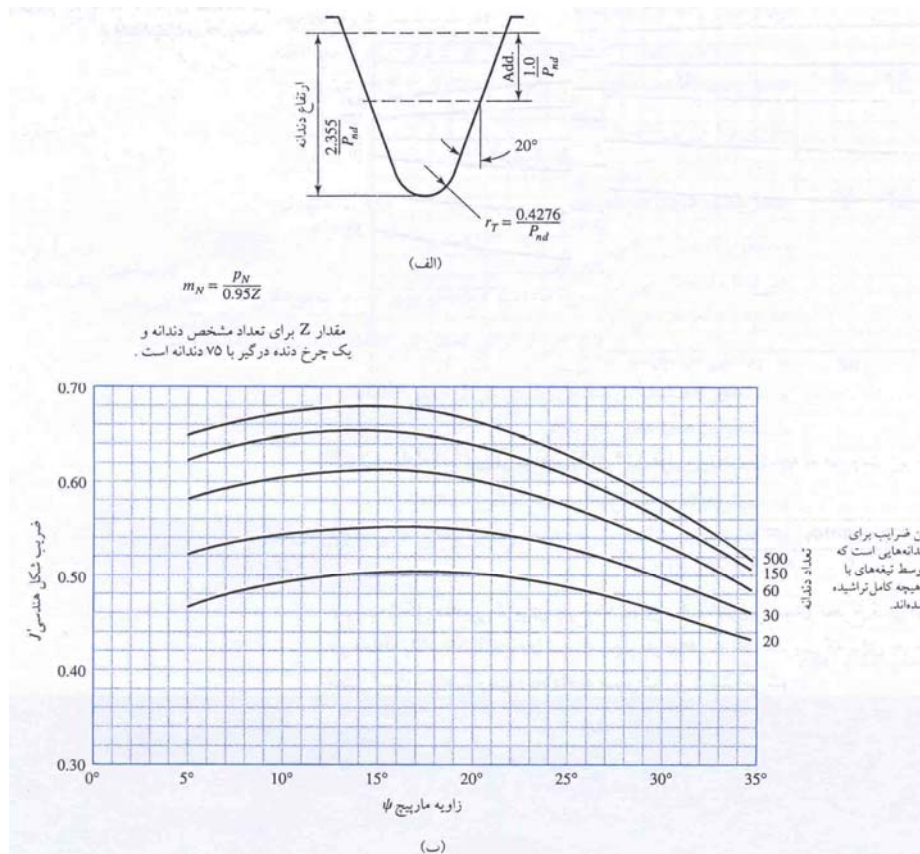
$$m_N = \frac{P_N}{0.95Z} \quad (28)$$

که P_N گام مبنای عمودی و Z طول خط اثر در صفحه عرضی است (فاصله L_{ab}).

برای به دست آوردن ضریب شکل هندسی برای چرخ‌دنده‌های ساده و مارپیچ با زاویه فشار 20° و دندانه‌های بلند از شکل‌های زیر استفاده می‌شود. برای چرخ‌دنده‌های دیگر لازم است به استانداردهای AGMA مراجعه گردد.



شکل ۳۴- ضرایب شکل هندسی برای چرخ‌دنده‌های ساده



شکل ۳۵- ضرایب شکل هندسی برای چرخ‌دنده‌های مارپیچ

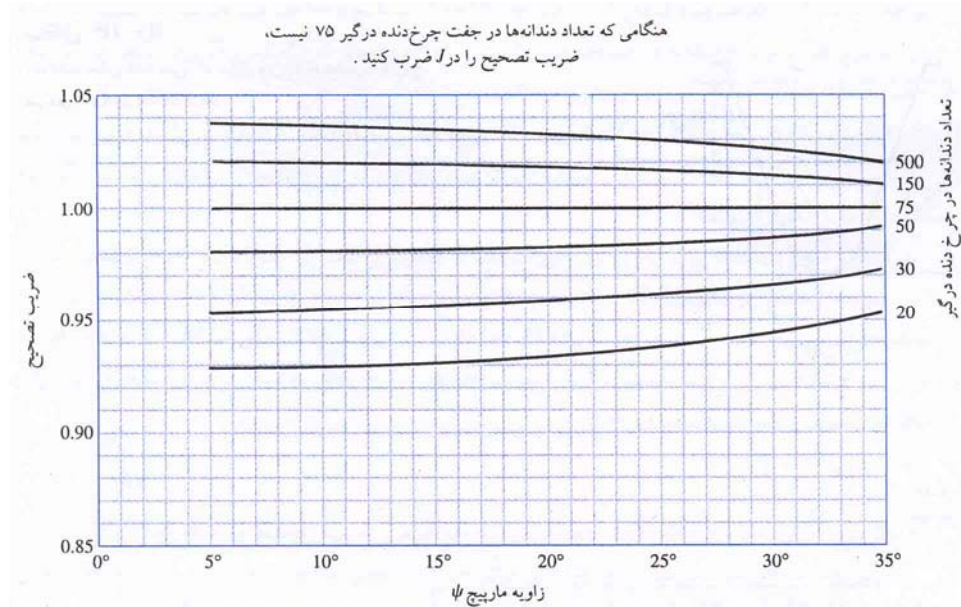
ضریب شکل هندسی استحکام I و ZI : ضریب I نیز ضریب شکل هندسی برای مقاومت در مقابل ایجاد حفره AGMA نامیده می‌شود.

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{2}{\sin \phi_t} \left(\frac{1}{d_p} + \frac{1}{d_G} \right) \quad (29)$$

که ϕ با ϕ_t ، یعنی زاویه فشار عرضی، جایگزین شده است. بنابراین این رابطه را می‌توان برای چرخ‌دنده‌های مارپیچ

نیز به کار برد. اینک، نسبت سرعت m_G به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$m_G = \frac{N_G}{N_P} = \frac{d_G}{d_P} \rightarrow \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{d_P} \frac{1}{\sin \phi_t} \frac{m_G + 1}{m_G}$$



شکل ۳۶- ضریب تصحیح برای استفاده در شکل (۷-۳) به منظور یافتن ضریب J

با توجه به روابط ذکر شده:

$$\sigma_c = -\sigma_C = C_p \left[\frac{W^t}{d_p F} \frac{1}{\frac{\cos \phi_t \sin \phi_t}{2} \frac{m_G}{m_G + 1}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (30)$$

ضریب شکل هندسی I برای چرخ دنده‌های ساده خارجی همان مخروط کسر دومین عبارت درون کروشه در معادله بالاست. با افزودن نسبت سهم بار m_N ، یک ضریب که برای چرخ دنده‌های ساده و مارپیچ معتبر است حاصل خواهد شد. معادله به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$I = \begin{cases} \frac{\cos \phi_t \sin \phi_t}{2m_N} \frac{m_G}{m_G + 1} & \text{چرخ دنده‌های خارجی} \\ \frac{\cos \phi_t \sin \phi_t}{2m_N} \frac{m_G}{m_G - 1} & \text{چرخ دنده‌های داخلی} \end{cases} \quad (31)$$

در این رابطه برای چرخ دنده‌های ساده $m_N = 1$ است. در حل معادله (۲۲-۳) برای m_N ، باید توجه داشت که،

$$p_N = p_n \cos \phi_n$$

که p_n گام دایره‌ای عمودی است. اگر طرح درگیری چرخ دنده‌ها وجود نداشته باشد، از معادله زیر می‌توان مقدار Z را برای استفاده در معادله (۲۲-۳) به دست آورد:

$$Z = \left[(r_p + a)^2 - r_{bp}^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \left[(r_G + a)^2 - r_{bG}^2 \right]^{\frac{1}{2}} - (r_p + r_G) \sin \phi_t$$

که r_p و r_G شعاعهای گام و r_{bp} و r_{bG} شعاعهای دایره مبنا هستند.

در استفاده از معادله (۲۹-۳) بایستی مراقب چند نکته بود: نیمرخ دندانه‌ها در زیر دایره گام دارای اثر مزدوج نیستند، بنابراین اگر یکی از دو عبارت نخست درون کروشه از سومی بزرگتر باشد، باید عبارت سوم را جایگزین آن کرد. علاوه

بر این، در اثر گرد کردن نوک دندانه‌ها شعاع خارجی مؤثر در معادله برخی اوقات کمتر از $r+a$ است. در این صورت، لازم است همواره از شعاع خارجی مؤثر به جای $r+a$ استفاده گردد.

ضریب الاستیک C_p (ZE) [۱]

مقادیر C_p را می‌توان به طور مستقیم از معادله (۳-۱۴) محاسبه نمود یا از جدول (۳-۷) به دست آورد.

ضرایب الاستیک [۱]

ماده چرخ‌دنده و مدول الاستیسته E_n (MPa) lb/in ²							
برنز	برنز	آهن	آهن	آهن	فولاد	بنیون E_n	
قلع‌دار	آلومینیم‌دار	چدن	کروی	چکش‌خوار		$\sqrt{\text{psi}}$	
16×10^4	17.5×10^4	22×10^4	24×10^4	25×10^4	30×10^4	$\sqrt{\text{MPa}}^*$	
(1.1×10^5)	(1.2×10^5)	(1.5×10^5)	(1.7×10^5)	(1.7×10^5)	(2×10^5)	ماده بنیون	
۱۹۰۰	۱۹۵۰	۲۱۰۰	۲۱۶۰	۲۱۸۰	۲۳۰۰	30×10^6	فولاد
(۱۵۸)	(۱۶۲)	(۱۷۴)	(۱۷۹)	(۱۸۱)	(۱۹۱)	(2×10^5)	
۱۸۵۰	۱۹۰۰	۲۰۲۰	۲۰۷۰	۲۰۹۰	۲۱۸۰	25×10^6	آهن چکش‌خوار
(۱۵۴)	(۱۵۸)	(۱۶۸)	(۱۷۲)	(۱۷۴)	(۱۸۱)	(1.7×10^5)	
۱۸۳۰	۱۸۸۰	۲۰۰۰	۲۰۵۰	۲۰۷۰	۲۱۶۰	24×10^6	آهن کروی
(۱۵۲)	(۱۵۶)	(۱۶۶)	(۱۷۰)	(۱۷۲)	(۱۷۹)	(1.7×10^5)	
۱۸۰۰	۱۸۵۰	۱۹۶۰	۲۰۰۰	۲۰۲۰	۲۱۰۰	22×10^6	چدن
(۱۴۹)	(۱۵۴)	(۱۶۳)	(۱۶۶)	(۱۶۸)	(۱۷۴)	(1.5×10^5)	
۱۷۰۰	۱۷۵۰	۱۸۵۰	۱۸۸۰	۱۹۰۰	۱۹۵۰	17.5×10^6	برنز آلومینیم‌دار
(۱۴۱)	(۱۴۵)	(۱۵۴)	(۱۵۶)	(۱۵۸)	(۱۶۲)	(1.2×10^5)	
۱۶۵۰	۱۷۰۰	۱۸۰۰	۱۸۳۰	۱۸۵۰	۱۹۰۰	16×10^6	برنز قلع‌دار
(۱۳۷)	(۱۴۱)	(۱۴۹)	(۱۵۲)	(۱۵۴)	(۱۵۸)	(1.1×10^5)	

ضریب پواسون $\nu = 0.3$ *

* هنگامی که مقادیر دقیق‌تر برای مدول الاستیسته از آزمایشهای تماس غلشی در دست باشد می‌توان از آنها استفاده کرد.

ضریب دینامیک KV [۱]

همان‌طور که پیش از این گفته شد، ضرایب دینامیک برای احتساب بی‌دقتی‌ها در هنگام ساخت و درگیری چرخ‌دنده‌ها به کار می‌روند. خطای انتقال ۸ به صورت انحراف از سرعت زاویه‌ای یکنواخت یک جفت چرخ‌دنده تعریف می‌شود. برخی از اثراتی که موجب خطای انتقال می‌شوند، عبارتند از:

بی‌دقتی در ساخت نیم‌رخ دندانه‌ها

ارتعاش دندانه‌ها در هنگام درگیری در اثر سفتی ۹ آنها

مقدار سرعت خطی دایره گام

عدم تعادل دینامیکی عضوهای چرخنده

سایش و تغییر شکل دائم سطح تماس دندانه‌ها

ناهمراستایی شفت چرخ‌دنده‌ها و تغییر شکل خطی یا زاویه‌ای شفت

اصطکاک دندانه‌ها

در تلاش برای دستیابی به عوامل کنترل این اثرات، AGMA مجموعه‌ای از اعداد کنترل کیفیت ۱۰ را تعریف کرده است. این اعداد مشخص‌کننده تolerانس‌ها برای چرخ‌دنده‌های با ابعاد مختلف است که بر اساس رده‌های کیفیتی مشخصی ساخته شده‌اند. رده‌های ۳ تا ۷ شامل بسیاری از چرخ‌دنده‌های صنعتی است. رده‌های ۸ تا ۱۲ شامل چرخ‌دنده‌های با دقت بالاست. با توجه به مورد کاربرد، می‌توان به کمک جدول (۳-۸) اعداد کیفیت را مشخص نمود.

اعداد کیفیت پیشنهادی AGMA [۱۸]

⁸ - Transmission Error

⁹ - Stiffness

¹⁰ - Quality-Control Numbers

Recommended AGMA Quality Numbers			
Application	Quality Number	Application	Quality Number
Cement mixer drum Drive	3 - 5	Small power drill	7 - 9
Cement kiln	5 - 6	Clothes washing machine	8 - 10
Steel mill drives	5 - 6	Printing press	9 - 11
Corn picker	5 - 7	Computing mechanism	10 - 11
Cranes	5 - 7	Automotive transmission	10 - 11
Punch press	5 - 7	Radar antenna drive	10 - 12
Mining Conveyor	5 - 7	Marine propulsion drive	10 - 12
Paper-box-making machine	6 - 8	Aircraft engine drive	10 - 13
Gas meter mechanism	7 - 9	Gyroscope	12 - 14

در روش AGMA عدد سطح دقت انتقال Q_v را می‌توان مانند عدد کیفیت در نظر گرفت. معادلات زیر برای ضریب دینامیک بر اساس این اعداد Q_v است:

$$K'_v = \begin{cases} \left(\frac{A + V}{A} \right)^B & V \text{ بر حسب } \text{ft}/\text{min} \\ \left(\frac{A + \sqrt{200V}}{A} \right)^B & V \text{ بر حسب } \text{m}/\text{s} \end{cases}$$

که در آن،

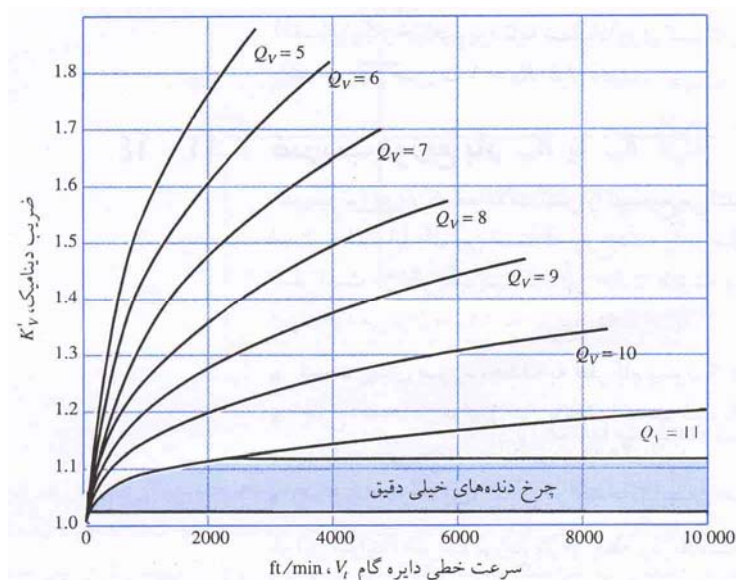
$$A = 50 + 56(1 - B)$$

$$B = 0.25(12 - Q_v)^{2/3}$$

و بیشترین سرعت که نشانگر نقطه انتهایی بر روی منحنی Q_v است از روابط زیر به دست می‌آید:

$$(V_t)_{\max} = \begin{cases} [A + (Q_v - 3)]^2 & \text{ft}/\text{min} \\ \frac{[A + (Q_v - 3)]^2}{200} & \text{m}/\text{s} \end{cases}$$

شکل (۳-۱۰) نمودار ضرایب دینامیک K'_v به صورت تابعی از سرعت خطی دایره گام است.



شکل ۳۷- ضرب دینامیک K'_v [۱]

ضرب فرابار K_O

ضرب فرابار K_O به منظور ایجاد یک حاشیه اطمینان برای بارهای خارجی وارده بیش از بار مماسی اسمی W^t در کاربردهای خاص است. انحراف گشتاور از مقدار میانگین در مرحله انفجار یک موتور درونسوز یا عکس‌العمل در مقابل تغییرات گشتاور در یک پمپ پیستونی، مثالهایی از این قبیل است. این ضرب را برخی اوقات ضرب کاربری نیز می‌نامند. این ضرایب را پس از آزمایشهای فراوان از یک کاربرد خاص تعیین می‌کنند. برای ضرایب فرابار از جدول (۳-۹) استفاده می‌گردد.

جدول ۱۲- ضرایب فرابار

ماشین متحرک			
منبع توان	یکنواخت	ضربه متوسط	ضربه سنگین
یکنواخت	۱/۰۰	۱/۲۵	۱/۷۵
ضربه سبک	۱/۲۵	۱/۵۰	۲/۰۰
ضربه متوسط	۱/۵۰	۱/۷۵	۲/۲۵

۴-۳-۴- ضرایب شرایط سطح C_f و Z_R

ضرایب شرایط سطح C_f و Z_R تنها در معادله مربوط به مقاومت سطح به کار می‌روند. این ضرایب بستگی به موارد زیر دارند:

پرداخت سطح، تنشهای پسماند، اثرات ناشی از رفتار پلاستیک (کار سختی)

تا کنون استانداردهای شرایط سطح برای دندانه‌های چرخ‌دنده تدوین نشده است. هنگامی که اثرات زیانبخش ناشی

از پرداخت سطح نامطلوب وجود داشته باشد، AGMA یک مقدار بزرگتر از واحد را پیشنهاد می‌کند.

۴-۳-۵- ضریب اندازه K_s [۱]

ضریب اندازه بیانگر غیر یکنواختی خواص ماده ناشی از اندازه است. این ضریب بستگی به موارد زیر دارد:

اندازه دندانه، قطر قطعه، نسبت اندازه دندانه به قطر قطعه، پهنای صورت دندانه، سطح الگوی تنش، نسبت عمق پوسته به اندازه دندانه، سختی پذیری و عملیات حرارتی

ضرایب اندازه استاندارد برای دندانه‌های چرخ‌دنده، به ویژه در مواردی که اثر اندازه ممکن است نامطلوب باشد، هنوز تدوین نشده است. در این گونه موارد، AGMA یک ضریب اندازه بزرگتر از واحد را پیشنهاد می‌کند. در غیر این صورت، مقدار واحد به کار برده می‌شود.

AGMA در معادلات (۳-۱۶) و (۳-۱۷) مکانی را برای اعمال ضریب اندازه در نظر گرفته است. در حالت معمول،

$$K_s = 1 \quad \text{پیشنهاد می‌شود؛ مگر اینکه اطلاعات بیشتری در مورد این ضریب وجود داشته باشد. از جدول (۲-۲)،} \quad l = \frac{2.25}{P}$$

ضخامت دندانه t در شکل (۳-۷) در معادله (۳-۱) به صورت $t = \sqrt{4lx}$ داده شده است که در آن $x = \frac{3Y}{2P}$ است. قطر

معادل d_e یک مقطع چهارگوش تحت خمش برابر $d_e = 0.808\sqrt{Ft}$ است. $k_b = \left(\frac{d_e}{0.30}\right)^{-0.107}$ است. K_s در روش AGMA عکس k_b است. پس از انجام تمام جایگذاری‌ها چنین خواهیم داشت:

$$K_s = \frac{1}{k_b} = 1.192 \left(\frac{F\sqrt{Y}}{P} \right)^{0.0535} \quad (32)$$

K_s در روش AGMA را می‌توان مانند ضریب شکل هندسی لوئیس که در ضریب اندازه مارین در حالت خستگی اعمال می‌شود، تصور کرد. در روش AGMA می‌توان از $K_s = 1$ یا از معادله (۳-۳۴) استفاده نمود. معادله (۳-۳۴) به این علت به کار گرفته می‌شود تا یادآوری شود که یک انتخاب وجود دارد. اگر K_s در معادله (۳-۳۴) کمتر از ۱ باشد، در این صورت $K_s = 1$ خواهد بود.

۴-۳-۶- ضریب توزیع بار K_m یا K_H

ضریب توزیع بار که معادلات تنش را تصحیح می‌کند، بیانگر توزیع غیر یکنواخت بار در امتداد خط تماس است. حالت ایده‌آل این است که چرخ‌دنده را در میانه شفت بین دو یاتاقان در نقطه‌ای که شیب شفت صفر است، در نظر گرفته شود. البته این حالت همیشه برقرار نیست. دستورالعملی که در زیر می‌آید را برای این موارد می‌توان مورد استفاده قرار داد:

$$\text{نسبت پهنای صورت دندانه به قطر گام پینیون} \quad \frac{F}{d} \leq 2 \quad \text{باشد. چرخ‌دنده‌ها در فواصل بین یاتاقانها نصب شده باشند.}$$

پهنای صورت دندانه‌ها کمتر از 40 in باشند. در هنگام بارگذاری، تماس در امتداد کل پهنای صورت دندانه باریکترین چرخ‌دنده باشد. در این شرایط، ضریب توزیع بار از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$K_m = C_{mf} = 1 + C_{mc}(C_{pf}C_{pm} + C_{ma}C_e)$$

برای دندانه‌های بدون تاج

برای دندانه‌های تاج‌دار

$$C_{mc} = \begin{cases} 1 \\ \end{cases}$$

$$C_{pf} = \begin{cases} \frac{F}{10d} - 0.025 & F \leq 1 \text{ in} \\ \frac{F}{10d} - 0.0375 + 0.0125F & 1 < F \leq 17 \text{ in} \\ \frac{F}{10d} - 0.1109 + 0.0207F - 0.000228F^2 & 17 < F \leq 40 \text{ in} \end{cases} \quad (33)$$

برای مقادیر $\frac{F}{10d} < 0.05$ ، مقدار $\frac{F}{10d} = 0.05$ به کار برده می‌شود.

$$C_{pm} = \begin{cases} 1 & \frac{S_1}{S} < 0.175 \\ 1.1 & \text{برای نصب پینیون در فاصله بین دو یاتاقان با} \end{cases}$$

(مقادیر A، B و C از جدول بدست می‌آیند.) $C_{ma} = A + BF + CF^2$

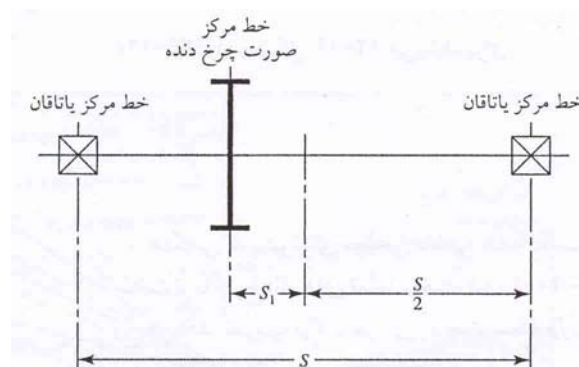
جدول ۱۳- ثابتهای تجربی A, B, C

شرایط	A	B	C
چرخ دنده‌های بدون پوشش	۰٫۲۴۷	۰٫۱۶۷	$-۰٫۷۶۵(۱۰^{-۴})$
چرخ دنده‌های تجاری، درون جعبه	۰٫۱۲۷	۰٫۱۵۸	$-۰٫۰۹۳(۱۰^{-۴})$
چرخ دنده‌های دقیق، درون جعبه	۰٫۰۶۷۵	۰٫۱۲۸	$-۰٫۰۹۲۶(۱۰^{-۴})$
چرخ دنده‌های فوق دقیق، درون جعبه	۰٫۰۰۳۶۰	۰٫۱۰۲	$-۰٫۸۲۲(۱۰^{-۴})$

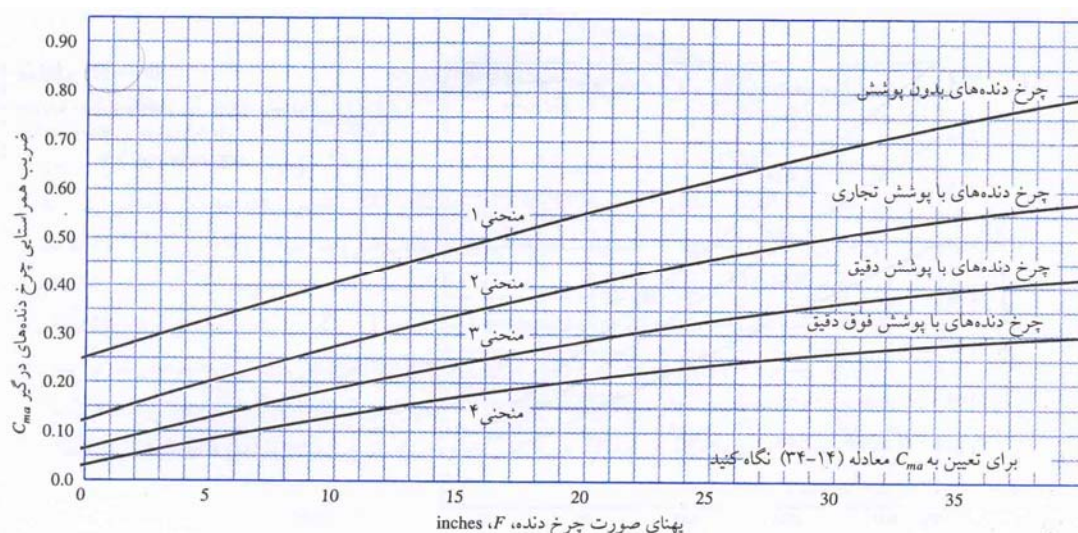
* برای شکل معادلات در سیستم SI به استاندارد ANSI/AGMA 2101-C95 مراجعه کنید.

$$C_e = \begin{cases} 0.8 & \text{برای چرخ دنده‌هایی که صیقل دهی شده‌اند} \\ 1 & \text{برای بقیه شرایط} \end{cases}$$

مقادیر S و S_1 به منظور استفاده در معادله (۳-۳۸) از شکل (۳-۱۱) مشخص می‌شوند. C_{ma} نیز از شکل (۳-۱۲) بدست می‌آید.



شکل ۳۸- تعریف فواصل S و S1



شکل ۳۹- ضریب همراستایی چرخ دنده‌های درگیر

۴-۳-۷- ضریب نسبت سختی C_H [۱]

پینیون‌ها معمولاً دارای تعداد دندانه کمتری نسبت به چرخ دنده‌ها هستند. از این رو در معرض تعداد بیشتری سیکل‌های تنش تماسی قرار دارند. اگر پینیون و چرخ دنده هر دو تماماً سخت شده باشند، در این صورت برای دستیابی به استحکام سطح یکنواخت می‌توان پینیون را سخت‌تر از چرخ دنده ساخت. اثر مشابهی را می‌توان هنگامی که یک پینیون سطحی سختی شده با یک چرخ دنده تماماً سخت شده درگیر می‌شوند به دست آورد. ضریب نسبت سختی C_H تنها برای چرخ دنده به کار می‌رود و هدف آن تنظیم استحکامهای سطح برای این اثر است. مقادیر C_H از معادله زیر به دست می‌آیند:

$$C_H = 1.0 + A'(m_G - 1.0)$$

که در آن،

$$A' = 8.98(10^{-3})\left(\frac{H_{BP}}{H_{BG}}\right) - 8.29(10^{-3}) \quad 1.2 \leq \frac{H_{BP}}{H_{BG}} \leq 1.7$$

عبارات H_{BP} و H_{BG} به ترتیب سختی برینل پینیون و چرخ دنده هستند (ساقچه 10 mm در بار 300 kg). عبارت

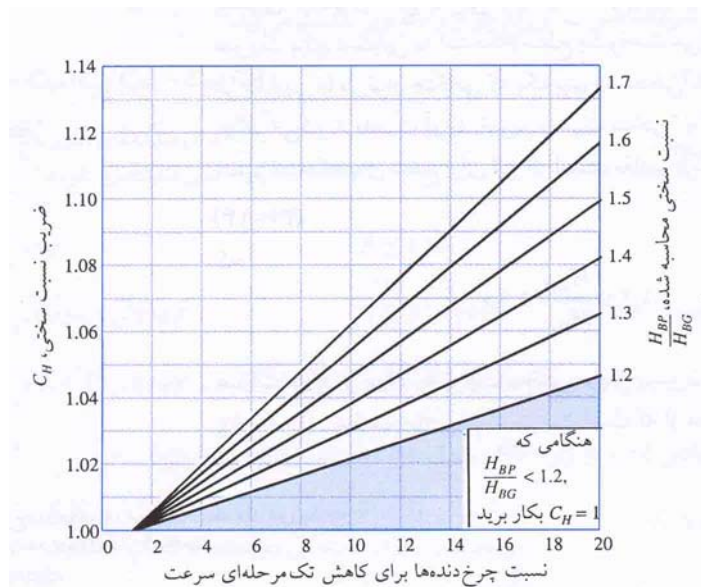
m_G نسبت سرعت است که از معادله (۳-۲۲) به دست می‌آید. نمودار معادله (۳-۴۱) در شکل (۳-۱۳) دیده می‌شود. برای،

$$\frac{H_{BP}}{H_{BG}} > 1.7, \quad A' = 0.00698 \quad \frac{H_{BP}}{H_{BG}} < 1.2, \quad A' = 0$$

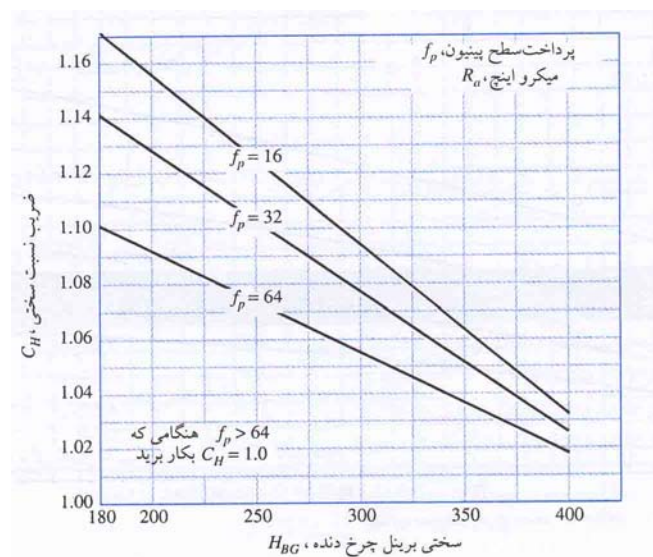
هنگامی که پینیون‌های سطحی سختی شده با سختی راکول ۴۸ نوع C (Rockwell C48) یا سخت‌تر با چرخ دنده‌های تماماً سخت شده (Brinell 180-400) درگیر می‌شوند، پدیده کارسختی رخ می‌دهد. ضریب C_H تابعی از پرداخت سطح f_p و سختی چرخ دنده درگیر با آن است. شکل (۳-۱۴) این رابطه را نشان می‌دهد:

$$C_H = 1 + B'(450 - H_{BG})$$

که $B' = 0.00075 \exp(-0.0112f_p)$ و f_p پرداخت سطح پینیون است که به صورت ریشه میانگین زبری R_a بر حسب μin بیان می‌شود.



شکل ۴۰- ضریب نسبت سختی (برای فولاد تماماً سخت شده) [۱]

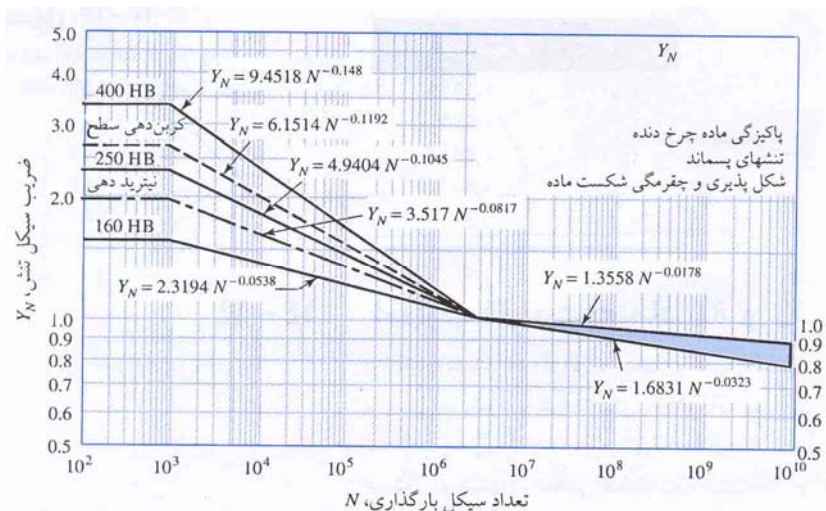


شکل ۴۱- ضریب نسبت سختی (برای پینیون فولادی سطحی سخت شده) [۱]

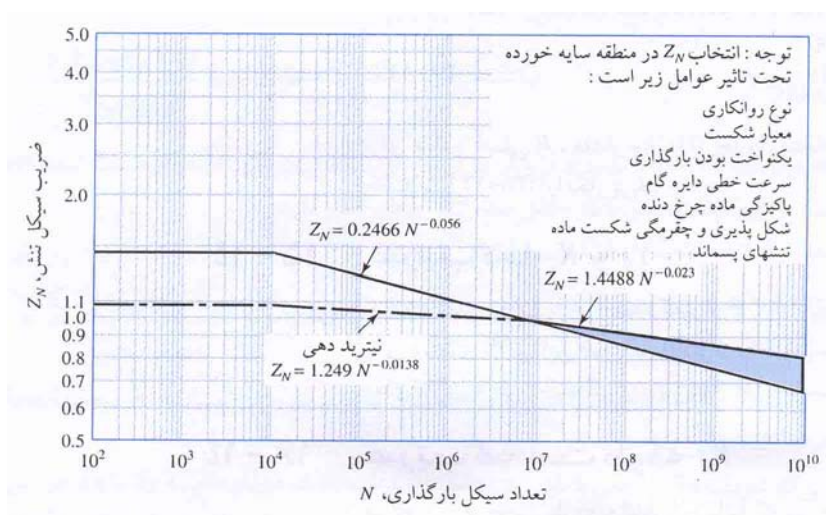
۴-۳-۸- ضرایب سیکل بارگذاری YN و ZN [۱]

استحکامهای AGMA که در شکل‌های (۲-۳) تا (۴-۳)، جداول (۳-۳) و (۴-۳) برای خستگی خمشی و در شکل

(۵-۳) و جداول (۵-۳) و (۶-۳) برای خستگی تنش تماسی داده شده‌اند، همگی بر اساس بارگذاری متناوب 10^7 cycles تنظیم شده‌اند.



شکل ۴۲- ضریب سیکل استحکام [۱]



شکل ۴۳- ضریب سیکل تنش [۱]

هدف از اعمال ضرایب سیکل بارگذاری Y_N و Z_N تصحیح استحکام AGMA برای عمرهای غیر از 10^7 cycles است. مقادیر این ضرایب در شکلها آمده است. بر روی نمودار برای 10^7 cycles، $Z_N = Y_N = 1$ است. همچنین باید توجه داشت که معادلات مربوط به Y_N و Z_N در هر دو طرف 10^7 cycles تغییر می کنند.

برای عمرهای اندکی بیش از 10^7 cycles، چرخنده‌های درگیر ممکن است در عمر کمتر از 10^7 cycles آزمایش شده باشند و معادلات مربوط به $(Y_N)_G$ و $(Y_N)_P$ می توانند متفاوت باشند. این نکته در مورد $(Z_N)_G$ و $(Z_N)_P$ نیز صحیح است.

۹-۳-۴- ضرایب قابلیت اعتماد KR و YZ [۱]

ضریب قابلیت اعتماد، اثر توزیعهای آماری شکست خستگی ماده را منظور می کند. تغییرات بار در اینجا بررسی نمی شود. استحکامهای AGMA یعنی S_t و S_c بر اساس قابلیت اعتماد ۹۹ درصد محاسبه شده اند. جدول (۳-۱۱) بر مبنای داده های به دست آمده توسط نیروی دریایی آمریکا برای شکست خستگی و تنشهای تماسی تنظیم شده است.

رابطه بین k_R و قابلیت اعتماد کاملاً غیر خطی است. هنگامی که نیاز به درونیابی باشد، استفاده از درونیابی خطی نتایج بسیار تقریبی به دست خواهد داد. تبدیل لگاریتمی برای هر کمیت، یک رشته خطی تولید می‌کند. برازش خم به روش حداقل مربعات چنین است:

$$\begin{aligned} 0.658 - 0.0759 \ln(1 - R) & \quad 0.5 < R < 0.99 \\ 0.50 - 0.109 \ln(1 - R) & \quad 0.99 \leq R \leq 0.9999 \end{aligned}$$

برای مقادیر اصلی R ، مقدار k_R از جدول انتخاب می‌شوند. در غیر این صورت، درونیابی لگاریتمی معادلات (۳-۴۳) به کار برده می‌شوند.

جدول ۱۴- ضرایب قابلیت اعتماد [۱]

قابلیت اعتماد	$Y_Z \cdot K_R$
۰.۹۹۹۹	۱.۵۰
۰.۹۹۹	۱.۲۵
۰.۹۹	۱.۰۰
۰.۹۰	۰.۸۵
۰.۵۰	۰.۷۰

۱۰-۳-۴- ضرایب دما KT و $Y\theta$ [۱]

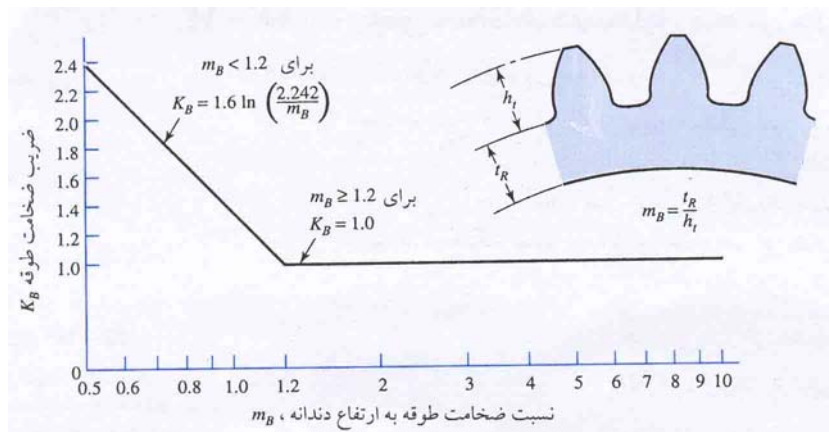
چنانچه دمای روغن یا چرخدنده کمتر از $250^\circ F$ ($120^\circ C$) باشد، رابطه $K_T = Y_\theta = 1.0$ صادق می‌باشد. برای دماهای بالاتر، این ضرایب بزرگتر از واحدند. می‌توان با استفاده از مبدل‌های حرارتی مطمئن شد که دمای کاری به طور چشمگیری پایین‌تر از این دماست.

۱۱-۳-۴- ضرایب ضخامت طوقه KB [۱]

هنگامی که ضخامت طوقه به اندازه‌ای نباشد که بتواند تکیه‌گاه کاملی برای ریشه دندانه‌ها باشد، شکست خستگی ممکن است به جای ماهیچه دندانه در طوقه چرخدنده رخ دهد. در چنین حالتی، استفاده از ضریب تصحیح تنش K_B یا (t_R) توصیه می‌شود. ضریب ضخامت طوقه KB ، تنش خمشی محاسبه شده برای چرخدنده‌ای با طوقه نازک را تصحیح می‌کند. این ضریب تابعی از نسبت m_B است،

$$m_B = \frac{t_R}{h_t}$$

که در آن، t_R = ضخامت طوقه، h_t = ارتفاع کل دندانه،



شکل ۴۴- ضریب ضخامت طوقه [۱]

با توجه به شکل (۳-۱۷)، ضریب ضخامت طوقه K_B از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$K_B = \begin{cases} 1.6 \ln \frac{2.242}{m_B} & m_B < 1.2 \\ 1 & m_B \geq 1.2 \end{cases}$$

مقدار K_B را می‌توان از نمودار نیز به دست آورد.

۳-۱۲- ضرایب اطمینان SF و SH [۱]

استانداردهای ANSI/AGMA 2001-C95 و 2101-C95 ضریب اطمینان S_F را برای شکست خمشی و ضریب

اطمینان S_H را برای شکست ناشی از تنشهای تماسی مجدداً ارائه کرده‌اند.

از معادله (۳-۱۸)، تعریف S_F چنین است:

$$S_F = \frac{S_t Y_N / K_T K_R}{\sigma_{\text{imposed}}} = \frac{\text{استحکام خمشی کاملاً تصحیح شده}}{\text{تنش خمشی وارد شده}}$$

که σ_{imposed} از معادله (۳-۱۶) به دست می‌آید. در اینجا تعریف ضریب اطمینان همان نسبت استحکام به تنش است.

در این حالت، تنش با بار منتقل شده W^t رابطه خطی دارد.

تعریف S_H از معادله (۳-۱۹) چنین است:

$$S_H = \frac{S_c Z_N C_H / K_T K_R}{\sigma_{\text{imposed}}} = \frac{\text{استحکام تماسی کاملاً تصحیح شده}}{\text{تنش تماسی وارد شده}}$$

که σ_{imposed} از معادله (۳-۱۷) به دست می‌آید. در اینجا نیز، تعریف ضریب اطمینان همان نسبت استحکام به تنش

است؛ البته با این تفاوت که تنش با بار منتقل شده W^t رابطه خطی ندارد.

مادامی که تعریف S_H تداخلی با نقش مورد نظر آن نداشته باشد، هنگام مقایسه S_F با S_H در جریان یک تحلیل به منظور تعیین ماهیت و شدت تهدید شکست بایستی مراقب باشیم. برای ارائه رابطه خطی S_H با بار منتقل شده W^t بایستی آن را به صورت زیر تعریف کرد:

$$S_H = \left(\frac{\text{استحکام تماسی کاملاً تصحیح شده}}{\text{تنش تماسی وارد شده}} \right)^2$$

توان ۲ برای تماسهای خطی یا مارپیچ و توان ۳ برای دندانه‌های تاج‌دار (تماس کروی) است. بر اساس تعریف AGMA، یعنی معادله (۳-۴۷)، هنگامی که لازم است تهدید شکست با اطمینان بیان گردد، باید S_F را با S_H^2 (یا S_H^3 برای دندانه‌های تاج‌دار) مقایسه نمود.

نقش ضریب فرابار K_O احتساب افزایش قابل پیش‌بینی بار بیش از میزان W^t بر اساس تجربه است. در حالی که ضریب اطمینان برای در نظر گرفتن عوامل غیر قابل سنجش به غیر از K_O است. در طراحی چرخ‌دنده‌ها، کمیت S_F به صورت ضریب طراحی $(S_F)_d$ به همان معنی که در اینجا به کار رفته است در می‌آید. کمیت S_F که به عنوان بخشی از ارزیابی شایستگی در نظر گرفته می‌شود، همان ضریب اطمینان است. همین مطلب برای کمیت S_H نیز صادق است.