

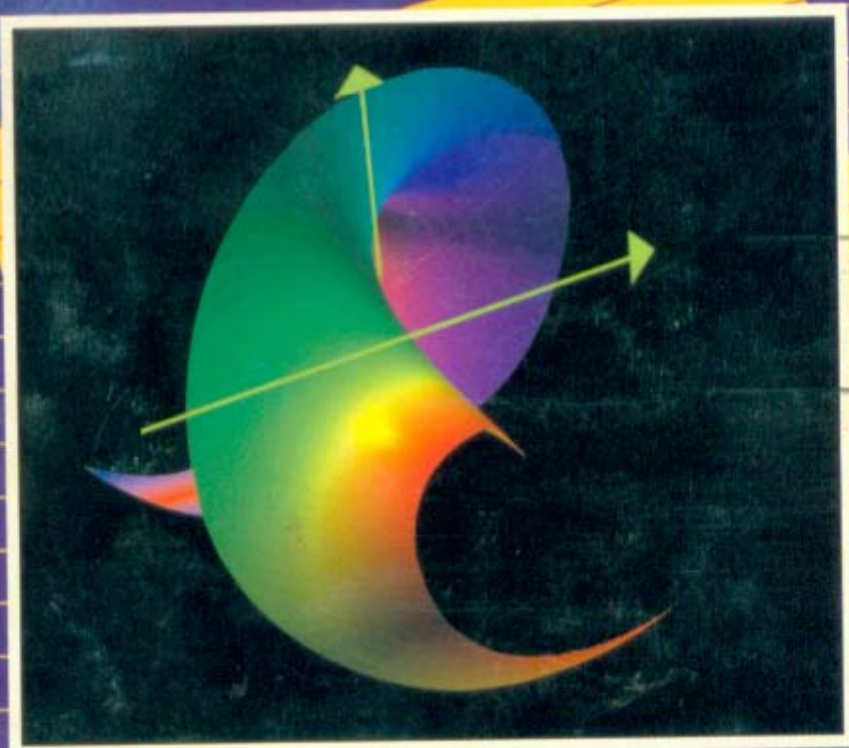
# حساب دیفرانسیل و انتگرال با هندسه تحلیلی

۱

«کتاب عام»

نوشته ریچارد ا. سیلورمن

ترجمه دکتر علی اکبر عالم زاده



[www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

جلد اول



## پیش حساب<sup>۰</sup>

در این فصل به چند مبحث از جبر و هندسه می پردازیم که پیش نیاز حساب دیفرانسیل و انتگرال اند؛ و لذا، تحت نام "پیش حساب" گرد آمده اند. این امر که با بعضی از این مباحث قبلاً در درسهای گذشته، به شکلی، آشنا شده اید نباید به شما امنیت کاذب بدهد. در عوض، از آشنایی به مهارت در آنها بروید، هرکجا لازم بود به معلوماتتان بیفزایید، آنقدر که در مطالعه خود حساب دیفرانسیل و انتگرال به خاطر عدم آمادگی سرگردان نشوید.

### ۱۰۰ مجموعه ها و اعداد

زبان مجموعه ها اغلب در ساده کردن بحثهای ریاضی مفید است. لیکن، مواظب افراط در استعمالش باشید؛ آن را ممسکانه و فقط وقتی به کار برید که واقعا "مورد نیاز است".

هر گردایه از اشیاء از هر نوع یک مجموعه نام دارد، و خود اشیاء عنصرها یا عضوهای مجموعه نامیده می شوند. مجموعه ها اغلب با حروف بزرگ و عنصرهایشان با حروف کوچک نموده می شوند. اگر  $x$  عنصری از مجموعه  $A$  باشد، می نویسیم  $x \in A$ ، که در آن علامت  $\in$  خوانده می شود؛ "یک عنصر ... است". طرق دیگر خواندن  $x \in A$  عبارتند از "  $x$  یک عضو  $A$  است"، "  $x$  متعلق به  $A$  است"، و "  $A$  شامل  $x$  است".

مثال ۱. الفبای انگلیسی مجموعه ای شامل ۲۶ عنصر است؛ یعنی، کلیه حروف از  $a$  تا  $z$ .

اگر هر عنصر مجموعه  $A$  یک عنصر مجموعه  $B$  نیز باشد، می نویسیم  $A \subset B$ ، که خوانده می شود "  $A$  یک زیر مجموعه  $B$  است". اگر  $A$  زیر مجموعه  $B$  باشد، ولی  $B$  زیر مجموعه  $A$  نباشد، گوئیم  $A$  یک زیر مجموعه حقیقی  $B$  است. این یعنی  $B$  نه تنها شامل همه عناصر  $A$  است، بلکه یک یا چند عنصر دیگر را نیز شامل است.

مثال ۲. دوزیر مجموعه حقیقی الفبای انگلیسی مجموعه حروف صدادار و مجموعه حروف بی صدا می باشند.

یک راه توصیف مجموعه نوشتن عناصر آن بین دو ابروست. مثلاً، "مجموعه  $\{a, b, c\}$  از عنصرهای  $a$ ،  $b$ ، و  $c$  ساخته شده است. مجموعه با تغییر ترتیب عناصر تغییر نمی کند. مثلاً، "مجموعه  $\{b, c, a\}$  همان مجموعه  $\{a, b, c\}$  است. تکرار یک عنصر نیز مجموعه را تغییر نمی دهد. مثلاً، "مجموعه  $\{a, a, b, c, c\}$  همان مجموعه  $\{a, b, c\}$  می باشد.

مثال ۳. مجموعه تمام روزهای ماه که بر ۷ بخشپذیرند عبارت است از  $\{7, 14, 21, 28\}$ .

یک مجموعه را می توان با خواصی که عناصرش را به طور منحصر به فرد مشخص می کنند نیز توصیف کرد. مثلاً،

$$\{1, -1\} = \{x: x^2 = 1\} = \{\text{تمام } x \text{ ها به طوری که } x^2 = 1\}$$

که در عبارت آخر، دونقطه یعنی "به طوری که" و ما کلمه "زاید" تمام را حذف می کنیم.

مثال ۴. مجموعه  $\{x: x = x^2\}$  مجموعه تمام اعدادی است که مساوی مجذور خود می باشند. به آسانی تحقیق می شود که این مجموعه فقط شامل دو عنصر ۰ و ۱ است.

اگر مجموعه هیچ عنصری نداشته باشد، گویند تهی است و با علامت  $\emptyset$  نموده می شود. مثلاً، "مجموعه فیلمهای صورتی در باغ وحش تهران تهی است؛ و همچنین است مجموعه ماههایی که بیش از پنج جمعه دارند. طبق قرارداد، یک مجموعه تهی زیرمجموعه هر مجموعه گرفته می شود.

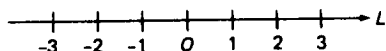
می گوئیم دو مجموعه  $A$  و  $B$  مساوی اند، و می نویسیم  $A = B$ ، اگر  $A$  و  $B$  عناصر یکسان داشته باشند. مثلاً، همانطور که در مثال ۴ دیدیم،  $\{x: x = x^2\} = \{0, 1\}$ . اگر  $A$  تهی باشد، می نویسیم  $A = \emptyset$ .

مثال ۵. هر عدد  $x$  مساوی خودش است؛ و در نتیجه،  $\{x: x \neq x\} = \emptyset$ .

توجه کنید که هرگاه  $A \subset B$  و  $B \subset A$  با هم برقرار باشند، آنگاه هر عنصر  $A$  عنصر  $B$  و هر عنصر  $B$  عنصر  $A$  است؛ در نتیجه،  $A = B$ . در حالت خاص، همه مجموعه های

تهی مساوی اند، زیرا هرگاه  $\emptyset$  و  $\emptyset'$  هر دو تهی باشند، آنگاه  $\emptyset \subset \emptyset'$  و  $\emptyset' \subset \emptyset$  (چرا؟)؛ در نتیجه،  $\emptyset = \emptyset'$ . لذا، ما از "مجموعه تهی" سخن خواهیم گفت.  
 دو مجموعه  $A$  و  $B$  بدون عنصر مشترک را از هم جدا می‌نامند. این را نباید با مفهوم مجموعه‌های متمایز، که در آن "تمایز" واژه دیگری برای "نامساوی" است، خلط کرد. مثلاً، مجموعه‌های  $A = \{1, 2\}$  و  $B = \{2, 3\}$  متمایزند، اما چون در عنصر 2 سهیم‌اند، از هم جدا نیستند.

اعداد و نمایشهای آنها. حال به بحث انواع متعدد اعداد می‌پردازیم؛ با اعداد صحیح و اعداد گویا شروع کرده، سپس به اعداد گنگ و اعداد حقیقی می‌رویم. مجموعه تمام اعداد حقیقی دستگاه اعدادی است که در بررسی حساب دیفرانسیل و انتگرال لازم است. فرض کنید خط مستقیم و افقی  $L$  مار بر نقطه  $O$  راساخته‌باشیم، و تصور کنید که  $L$  در طرفین تا بی‌نهایت رفته باشد. با انتخاب واحد سنجش، روی  $L$  در سمت راست و چپ  $O$  و در فواصل 1 واحد، 2 واحد، 3 واحد، و غیره علامت می‌گذاریم. همانند شکل 1، علامت سمت راست  $O$  نمایش اعداد صحیح مثبت  $1, 2, 3, \dots$  و علامت سمت



شکل 1

چپ  $O$  نمایش اعداد صحیح منفی  $\dots, -3, -2, -1$  می‌باشند. (در اینجا نقاط  $\dots$  یعنی "و غیره") خط  $L$  یک خط اعداد نام دارد؛ نقطه  $O$  مبدأ ( $L$ ) نامیده شده، و نظیر  $0$  (عدد صفر) است، که عددی است صحیح نه مثبت و نه منفی. جهت از اعداد منفی به مثبت در امتداد  $L$  جهت مثبت نام دارد و، همانند شکل فوق، با سر سهم نموده می‌شود.

هرگاه دو عدد صحیح مثبت جمع یا ضرب شوند، عدد صحیح مثبت دیگری به دست می‌آید. این امر با ذکر اینکه مجموعه اعداد صحیح مثبت تحت اعمال جمع و ضرب بسته است خلاصه می‌شود. مثلاً،  $2 + 3 = 5$  و  $2 \cdot 3 = 6$ ، که در آنها 5 و 6 اعداد صحیح مثبتی هستند. اما، مجموعه اعداد صحیح مثبت تحت تفریق بسته نیست. مثلاً،  $2 - 3 = -1$ ، که در آن  $-1$  عدد صحیح مثبتی نیست، بلکه عدد صحیح منفی است. ما به پیروی از قراردادهای ریاضی، حرف  $Z$  را برای نمایش مجموعه تمام اعداد صحیح، مثبت، منفی، یا صفر، به کار می‌بریم. مجموعه  $Z$ ، به خلاف مجموعه اعداد



صحیح مثبت ( که با  $Z^+$  نموده می شود ) ، علاوه بر بسته بودن تحت جمع و ضرب ، تحت تفریق نیز بسته است . مثلاً ،  $4 - 2 = 2$  ،  $3 - 3 = 0$  ، و  $6 - 11 = -5$  ، که در آنها اعداد  $2$  ،  $0$  ، و  $-5$  همه اعدادی صحیح اند .

عدد صحیح  $n$  را یک عدد زوج گویند اگر  $n = 2k$  ، که در آن  $k$  خود عددی صحیح است ؛ یعنی ، اگر  $n$  بر  $2$  بخش پذیر باشد . از آن سو ، عدد صحیح  $n$  را یک عدد فرد نامند اگر  $n = 2k + 1$  ، که در آن  $k$  عددی صحیح است . واضح است که هر عدد صحیح زوج یا فرد است . مثلاً ،  $-22 = 2(-11)$  زوج است ، حال آنکه  $7 = 3(2) + 1$  فرد می باشد . همچنین ،  $0 = 2(0)$  زوج است ، در حالی که  $-1 = 2(-1) + 1$  فرد می باشد ( در این دو حالت ، اعداد صحیح  $n$  و  $k$  تصادفاً یکی هستند ) .

مثال ۶: نشان دهید که مربع هر عدد زوج زوج است ، حال آنکه مربع هر عدد فرد فرد می باشد .

حل . هرگاه  $n$  زوج باشد ، آنگاه  $n = 2k$  ، که در آن  $k$  عددی صحیح است ؛ و در نتیجه ،

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2),$$

که عددی زوج است ، زیرا به شکل  $2m$  است ، که در آن  $m = 2k^2$  عددی صحیح می باشد . از آن سو ، هرگاه  $n$  فرد باشد ، آنگاه  $n = 2k + 1$  (  $k$  عددی صحیح است ) ؛ و در نتیجه ،

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

که عددی است فرد ، زیرا به شکل  $2m + 1$  است ، که این بار عدد صحیح  $m$  مساوی  $2k^2 + 2k$  می باشد .

اعداد گویا . مجموعه  $Z$  مرکب از تمام اعداد صحیح تحت تقسیم بسته نیست . این یعنی خارج قسمت دو عدد صحیح همیشه عددی صحیح نیست . مثلاً ،  $2 \div 3 = \frac{2}{3}$  و  $-5 \div 4 = -\frac{5}{4}$  ، که در آنها  $\frac{2}{3}$  و  $-\frac{5}{4}$  کسر هستند نه اعدادی صحیح . البته ، خارج قسمت دو عدد صحیح گاهی عددی صحیح است ؛ مثلاً ،  $12 \div 3 = 4$  و  $-5 \div (-10) = \frac{1}{2}$  . اما ، برای آنکه تقسیم کلاً ممکن باشد ، به مجموعه ای از اعداد بزرگتر از  $Z$  نیاز داریم . لذا ، اعداد گویا را معرفی می کنیم ؛ یعنی ، کسرهایی به شکل  $m/n$  ، که در آن  $m$  و  $n$  اعدادی صحیح بوده و  $n$  صفر نیست . توجه کنید که هر عدد صحیح  $m$  ، به انضمام  $0$  ، عددی گویاست ، زیرا  $m/1 = m$  . یک عدد گویا را تحویل ناپذیر گویند اگر صورت و مخرجش عامل مشترک

## ۵ پیش حساب

صحیح نداشته باشند. ( اعداد 1 و -1 در اینجا عامل مشترک به حساب نمی آیند. )  
مثلاً،  $\frac{1}{2}$  تحویل ناپذیر نیست، اما، با تقسیم صورت و مخرج آن بر 4، عدد گویای  $\frac{1}{8}$  به دست می آید، که تحویل ناپذیر است.

فرض کنیم  $Q$  مجموعه تمام اعداد گویا باشد. مجموعه  $Q$  تحت چهار عمل اصلی حساب، یعنی جمع، تفریق، ضرب، و تقسیم مشروط بر اینکه بر صفر تقسیم نکنیم، بسته است. برای آنکه ببینیم چرا تقسیم بر صفر مستثنی شده است، ابتدا ملاحظه می کنیم که هرگاه  $a/b = c$ ، آنگاه حتماً  $a = bc$ . فرض کنیم  $b = 0$ ، که نظیر تقسیم  $a$  بر صفر است. در این صورت،

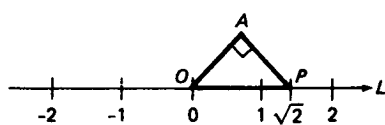
$$(۱) \quad a = 0 \cdot c,$$

که غیر ممکن است مگر  $a = 0$ ، زیرا عبارت سمت راست مساوی صفر است. اما اگر  $a = 0$ ، فرمول (۱) خواهد شد

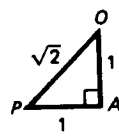
$$(۱') \quad 0 = 0 \cdot c,$$

که به ازای هر عدد  $c$  درست است. از اینرو، یا عددی مانند  $c$  نیست که در  $a/0 = c$  به ازای  $a \neq 0$  صدق کند، یا هر عدد  $c$  این خاصیت را به ازای  $a = 0$  دارد. ( به این دلیل، عبارت  $0/0$  را اغلب یک صورت مبهم می نامند. ) بنابراین، تقسیم بر صفر یا غیر ممکن است یا مبهم؛ و لذا، در هر حال بی معنی است.

اعداد گنگ. اعداد گویا در رسم روی خط اعداد، نقاط نظیر به اعداد صحیح و بسیاری دیگر را می گیرند اما نه همه؛ نقاط بین را. به عبارت دیگر، نقاطی از خط اعداد وجود دارند که نظیر هیچ عدد گویایی نیستند. برای مشاهده این امر، مثلث قائم الزاویه  $PAO$  را مطابق شکل ۲ (T) به اضلاع  $PA$  و  $AO$  به طول 1 می سازیم. بنا بر قضیه آشنای فیثاغورس، ضلع  $OP$  به طول  $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$  است. حال ضلع  $OP$  را مثل شکل ۲ (ب) بر خط اعداد قرار می دهیم، به طوری که نقطه  $O$  بر مبدأ خط منطبق شود. در این صورت،



(ب)



(T)

شکل ۲

نقطه  $P$  نظیر به عدد  $\sqrt{2}$  می باشد. اما، همانطور که مدتها پیش کشف شده است، عدد

$\sqrt{2}$  نمی‌تواند گویا باشد؛ و لذا،  $P$  نقطه‌ای از خط اعداد است که نظیر یک عدد گویا نیست.

منظور از یک عدد گنگ یعنی عددی، مانند  $\sqrt{2}$ ، که گویا نباشد. گنگ بودن  $\sqrt{2}$  به‌طور غیرمستقیم ثابت شده است؛ با نشان دادن اینکه فرض گویا بودن  $\sqrt{2}$  به تناقض می‌انجامد.

اختیاری. فرض کنیم  $\sqrt{2}$  عددی گویا باشد. پس

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n},$$

که در آن  $m$  و  $n$  اعداد صحیح مثبتی هستند، و می‌توان فرض کرد کسر  $m/n$  قبلاً "به صورت تحویل‌ناپذیر درآمده باشد. با مربع کردن طرفین این معادله، به دست می‌آوریم  $2 = m^2/n^2$  یا، معادلاً"،

$$m^2 = 2n^2.$$

لذا،  $m^2$  بر 2 بخشپذیر است؛ و در نتیجه، عددی زوج می‌باشد. اما، در این صورت، خود  $m$  باید زوج باشد، چرا که اگر  $m$  فرد می‌بود، همانطور که در مثال ۶ نشان داد شد،  $m^2$  نیز فرد می‌شد. چون  $m$  زوج است، می‌توان  $m$  را به شکل  $m = 2k$  نوشت، که در آن  $k$  عدد صحیح مثبتی است. بنابراین،  $m^2 = 4k^2$ ، و وقتی این فرمول را با  $m^2 = 2n^2$  مقایسه می‌کنیم، در می‌یابیم که  $4k^2 = 2n^2$  یا، معادلاً"،

$$n^2 = 2k^2.$$

بنابراین،  $n^2$  عددی زوج است؛ و در نتیجه، به دلیلی که هم اکنون در رابطه با  $m^2$  و  $m$  شرح داده شد،  $n$  زوج می‌باشد.

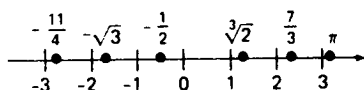
لذا، نشان داده‌ایم که  $m$  و  $n$  هر دو زوجند؛ یعنی، هر دوی  $m$  و  $n$  بر 2 بخش پذیرند. اما این با فرض اصلی که کسر  $m/n$  تحویل‌ناپذیر است تعارض دارد. چون با فرض گویا بودن  $\sqrt{2}$  به تناقض رسیدیم، باید نتیجه بگیریم که  $\sqrt{2}$  عددی گنگ است. این مطلب بر یونانیان باستان، که آن را به همین ترتیب ثابت کردند، معلوم بوده است.

اعداد گنگ بسیار دیگری وجود دارند. مثلاً،  $\sqrt{3}$ ،  $\sqrt{5}$ ، و  $\sqrt{7}$  همه گنگ‌اند؛ و همچنین است  $\pi$  (حرف کوچک یونانی پی)، که نسبت محیط هر دایره به قطرش می‌باشد.

اعداد حقیقی. حال یک عدد حقیقی را عددی، گویا یا گنگ، تعریف می‌کنیم که نظیر به نقطه‌ای از یک خط اعداد باشد. مجموعه تمام اعداد حقیقی دستگاه اعداد حقیقی نام

## ۷ پیش حساب

دارد، و خط اعداد نیز خط حقیقی نامیده می شود. از حالا به بعد، وقتی از کلمه "عدد" بی توصیف بیشتر استفاده می کنیم، همیشه مقصودمان عددی حقیقی است. شکل ۳ جای تقریبی چند عدد گویا و گنگ بر خط حقیقی را نشان می دهد.



شکل ۳

رابطه اعداد حقیقی با اعشاریها قابل توجه است، و بینش بیشتری از تمایز بین اعداد گویا و گنگ به شما می دهد. هرگاه عددی گویا به شکل اعشاری بیان شود، آن عدد اعشاری یا مختوم است، مثل

$$(۲) \quad \frac{5}{8} = 0.625,$$

یا دسته ای از ارقام را داراست که بی پایان تکرار می شود، مثل دسته 037 در

$$\frac{28}{27} = 1.037037037 \dots$$

این اعشاری را می توان با نوشتن

$$\frac{28}{27} = 1.\overline{037}$$

خلاصه کرد، که علامت بار دسته مکرر را می پوشاند، که در این حالت 037 است. اما، هرگاه عددی گنگ به شکل اعشاری بیان شود، اعشاری نه مختوم است و نه دسته ای بی پایان از ارقام مکرر را داراست. مثلاً،

$$\sqrt{2} = 1.414213562373 \dots,$$

که رشته ارقام بی پایانش از نظمی برخوردار نیست. در واقع، می توان عدد گویای (۲) را به صورت زیر نیز نوشت:

$$\frac{5}{8} = 0.625000 \dots = 0.625\overline{0}.$$

این نشان می دهد که هر اعشاری مختوم را می توان یک اعشاری مکرر گرفت که از مرحله ای به بعد ارقامش رشته ای از صفر است. در نتیجه، اگر درست نگاه کنیم، فقط دو نوع اعشاری می بینیم، اعشاریهای مکرر که نظیر اعداد گویا، و اعشاریهای نامکرر که نظیر اعداد گنگ می باشند. شهوداً واضح است که نوع دوم به مراتب از اولی بیشترند؛ در واقع، این امر به نوعی درست است و می توان آن را دقیق ساخت.

مثال ۷. نمایشهای اعشاری دیگری از اعداد گویا عبارتند از:

$$\frac{7}{16} = 0.4375, \quad -\frac{93}{32} = -2.90625, \quad \frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$$

( دو تای اول اعشاریهایی مختوم هستند ) ، و نمایشهای اعشاری دیگری از اعداد گنگ عبارتند از:

$$\sqrt{3} = 1.732050807568 \dots, \quad \sqrt[3]{2} = 1.259921049894 \dots, \\ \pi = 3.141592653589 \dots$$

تبصره. می توان نشان داد که تناظر بین اعشاریها و اعداد حقیقی یک به یک است ، بدین معنی که به ازای هر اعشاری عددی منحصر به فرد و به ازای هر عدد حقیقی اعشاری منحصر به فرد وجود دارد . برای درست بودن این حکم ، باید اعشاریهایی که از مرحله ای به بعد رشته بی پایانی ندارند را با اعشاری مختوم " بلافاصله پس از آن " یکی کنیم . مثلاً ،  
 $0.14999 \dots = 0.14\overline{9} = 0.15.$

قواعد اساسی اعمال حسابی بر اعداد ( حقیقی ) در لیست زیر آمده اند ، که در آنها  $a$  ،  $b$  ، و  $c$  اعدادی دلخواه می باشند .

$$\begin{array}{ll} a + b = b + a, & ab = ba \quad (\text{قوانین تعویض پذیری}) \\ (a + b) + c = a + (b + c), & (ab)c = a(bc) \quad (\text{قوانین شرکت پذیری}) \\ (a + b)c = ac + bc, & a(b + c) = ab + ac \quad (\text{قوانین پخش پذیری}) \\ a + 0 = a, & a + (-a) = 0, \\ 1 \cdot a = a, & a\left(\frac{1}{a}\right) = 1 \quad (a \neq 0) \\ 0 \cdot a = 0, & (-1)a = -a, \\ (-a)b = a(-b) = -ab, & (-a)(-b) = ab. \end{array}$$

بعضی از این قواعد را می توان از دیگران نتیجه گرفت ، اما این یک موضوع تکنیکی است .  
 قرینه  $a$  ، که با  $-a$  نموده می شود ، عددی است که  $a + (-a) = 0$  . بخصوص ، این ایجاب می کند که  $-(-a) = a$  . توجه کنید که  $0 = -0$  ، زیرا  $0 = 0 + 0$  ، اما هیچ عددی غیر از  $0$  قرینه خود نیست . متقابل  $a$  ، که با  $1/a$  نموده می شود ، عددی است که  $a(1/a) = 1$  ؛ در اینجا ، برای احتراز از تقسیم بر صفر ، باید تأکید کنیم که  $a \neq 0$  .

تفریق  $b$  معادل جمع با قرینه  $b$  است:

$$a - b = a + (-b).$$

به همین نحو، تقسیم بر  $b$  معادل ضرب در متقابل  $b$  می باشد:

$$\frac{a}{b} = a \left( \frac{1}{b} \right) \quad (b \neq 0).$$

مثال ۸. به کمک قواعد فوق، ثابت کنید هرگاه  $ab = 0$ ، آنگاه دست کم یکی از عوامل  $a$  و  $b$  صفر است.

حل. هرگاه  $a = 0$ ، برهان تمام است. هرگاه  $a \neq 0$ ، طرفین تساوی  $ab = 0$  را در  $1/a$  ضرب می کنیم. این نتیجه می دهد که

$$(ab) \left( \frac{1}{a} \right) = 0 \cdot \frac{1}{a} = 0.$$

اما نیز داریم

$$(ab) \left( \frac{1}{a} \right) = \left[ a \left( \frac{1}{a} \right) \right] b = 1 \cdot b = b,$$

و در نتیجه،  $b = 0$ .

### مسائل

هر یک از مجموعه های زیر را با ذکر عناصر به صورتی دیگر بنویسید.

- |                                 |                           |
|---------------------------------|---------------------------|
| $\{x: x^2 = 9\}$ . ۲ ✓          | $\{x: x = -x\}$ . ✓       |
| $\{x: x^2 - 5x + 6 = 0\}$ . ۴ ✓ | $\{x: x + 7 = 13\}$ . ۳ ✓ |
| $\{x: x = x^4\}$ . ۶ ✓          | $\{x: x = x^3\}$ . ۵ ✓    |

فرض کنید  $A$  مجموعه  $\{1, 2, \{3\}, \{4, 5\}\}$  باشد. ( توجه کنید که دو عنصر از  $A$  خود مجموعه اند ) از روابط زیر کدامها درست اند کدامها نادرست، و جواب خود را توضیح دهید.

- |                                 |                             |
|---------------------------------|-----------------------------|
| $3 \in A$ . ۸ ✓                 | $1 \in A$ . ۷ ✓             |
| $\{2\} \subset A$ . ۱ ✓         | $\{2\} \in A$ . ۸ ✓         |
| $\{1, \{3\}\} \subset A$ . ۱۳ ✓ | $\{1, 2\} \in A$ . ۱۱ ✓     |
| $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . ۱۴ ✓  | $\{4, 5\} \subset A$ . ۱۲ ✓ |

۱۵ ✓  $\emptyset = \{A\}$

۱۶ ✓ مجموعه  $A = \{a, b, c\}$  چند زیرمجموعه دارد؟ آنها را ذکر کنید.  
عدد گویای داده شده را به صورت یک اعشاری مختوم بیان کنید.

$\frac{1}{8} \cdot ۱۹ ✓$	$-\frac{1}{5} \cdot ۱۸ ✓$	$\frac{1}{4} \cdot ۱۲ ✓$
$\frac{1}{64} \cdot ۲۲ ✓$	$\frac{1}{125} \cdot ۲۱ ✓$	$\frac{1}{25} \cdot ۲۰ ✓$

عدد گویای داده شده را به صورت یک اعشاری مکرر بیان کنید.

$\frac{1}{9} \cdot ۲۵ ✓$	$\frac{1}{6} \cdot ۲۴ ✓$	$\frac{1}{3} \cdot ۲۳ ✓$
$\frac{1}{33} \cdot ۲۸ ✓$	$-\frac{1}{22} \cdot ۲۷ ✓$	$\frac{1}{11} \cdot ۲۶ ✓$

عدد گویای داده شده را به صورت تحویل ناپذیر درآورید.

$-\frac{161}{99} \cdot ۳۰ ✓$	$\frac{57}{133} \cdot ۲۹ ✓$
$\frac{91}{169} \cdot ۳۲ ✓$	$\frac{81}{363} \cdot ۳۱ ✓$

۳۳ ✓ نشان دهید هرگاه دو عدد گویا باشند، آنگاه مجموع و حاصل ضربشان نیز چنین اند.

۳۴ ✓ بدون استفاده از اعشاریها، نشان دهید که عدد  $\sqrt{2} - 1$  گنگ است.

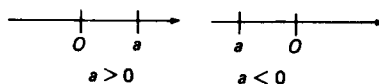
۳۵ ✓ دو عدد گنگ مثال بزنید که مجموعشان گویا باشد.

۳۶ ✓ دو عدد گنگ (نا برابر) مثال بزنید که حاصل ضربشان گویا باشد.

۳۷ ✓ در نمایش اعشاری  $\frac{1}{7}$ ، دسته مکرر چند رقمی است؟

## ۲۰۰ نامساویها و قوانین نماها

فرض کنیم  $a$  یک عدد حقیقی ناصفر باشد. پس  $a$  یا مثبت است، که می نویسیم  $a > 0$ ، یا منفی است، که می نویسیم  $a < 0$ . هرگاه  $a$  را نقطه‌ای از خط حقیقی  $L$  با جهت از چپ به راست بگیریم، همانطور که شکل ۴ نشان داده،  $a > 0$  یعنی  $a$  سمت راست مبدأ



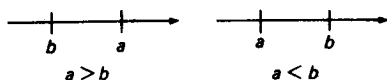
شکل ۴

$0$  است، و  $a < 0$  یعنی  $a$  سمت چپ  $0$  قرار دارد.



## ۱۱) پیش حساب

علامه  $>$  و  $<$ . حال فرض کنیم  $a$  و  $b$  یک جفت عدد نابرابر باشند. در این صورت، یا  $a - b > 0$  یا  $a - b < 0$ . در حالت اول گوییم  $a$  از  $b$  بزرگتر است، که می نویسیم  $a > b$ ، و در حالت دوم گوییم  $a$  از  $b$  کوچکتر است، که می نویسیم  $a < b$ . به طور هندسی،  $a > b$  یعنی  $a$  سمت راست  $b$  قرار دارد، و  $a < b$  یعنی  $a$  سمت چپ  $b$  واقع است، مثل شکل ۵.



شکل ۵

هر فرمول از نوع  $a > b$  یا  $a < b$  یک نامساوی نامیده می شود.

مثال ۱. چند نامساوی نمونه عبارتند از

$$\sqrt{2} > 0, \quad -3 < 0, \quad -2 > -3, \quad 3 < \pi, \quad 4 > \pi, \\ -1 > -1000, \quad -\frac{1}{7} < -\frac{1}{8}, \quad -1 < -0.001, \quad 3.2999 > 3.2998.$$

مطالب زیر در باب اعداد مثبت و منفی را دانسته گرفته و آزادانه به کار خواهیم

برد.

(یک)  $a$  مثبت است اگر و فقط اگر  $-a$  منفی باشد؛ یعنی،  $a$  و  $-a$  مختلف‌العلامه‌اند.

(دو) اگر  $a$  مثبت باشد، متقابل آن  $1/a$  نیز چنین است.

(سه) اگر  $a$  و  $b$  مثبت باشند، مجموع  $a + b$  و حاصل ضرب  $ab$  نیز چنین است.

(چهار) حاصل ضرب  $ab$  مثبت است اگر و فقط اگر  $a$  و  $b$  متحد‌العلامه باشند، و منفی است اگر و فقط اگر  $a$  و  $b$  مختلف‌العلامه باشند.

در حالت خاص، با انتخاب  $b = a$  در قاعده (چهار)، معلوم می شود که به ازای هر  $a$  ناصفر،  $a^2 > 0$ . این، همراه با فرمول  $0^2 = 0$ ، نشان می دهد که مربع هر عدد حقیقی همیشه نامنفی است. (یک عدد نامنفی عددی است که مثبت یا صفر است.)

نامساویها اغلب تلفیق شده‌اند. مثلاً، " $a < b < c$ " به معنی دو نامساوی  $a < b$

و  $b < c$  است. به همین نحو،  $a > b > c$  به معنی  $a > b$  و  $b > c$  می باشد. مثلاً،

$$2 > \sqrt{2} > 1 \text{ و } 3 < \pi < 4$$

حال چند قضیه آسان ثابت می کنیم که ابزار کار با نامساویها به طور جبری را به

ما می‌دهند .

قضیه ۱ ( قاعده جمع برای نامساویها ) . هرگاه  $a < b$  ، آنگاه به ازای هر عدد  $c$  ،  
(۱) 
$$a + c < b + c$$

برهان . هرگاه  $a < b$  ، یا معادلاً  $b - a > 0$  ، آنگاه  
$$(b + c) - (a + c) = (b - a) + (c - c) = b - a > 0$$
  
که با (۱) معادل است .

قضیه ۲ ( قاعده ضرب برای نامساویها ) . هرگاه  $a < b$  ، آنگاه به ازای هر عدد مثبت  $c$  ،

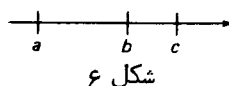
(۲) 
$$ac < bc$$
  
ولی به ازای هر عدد منفی  $c$  ،  
(۲') 
$$ac > bc$$

برهان . فرض کنیم  $a < b$  ، پس  $b - a$  مثبت است . در این صورت ،  $(b - a)c$  همان علامت  $c$  را دارد . لذا ، به ازای  $c$  ای مثبت ،  $bc - ac > 0$  ، که با (۲) معادل است ، حال آنکه به ازای  $c$  ای منفی ،  $bc - ac < 0$  ، که با (۲') معادل می‌باشد .

مهم است توجه شود که قضیه ۱ با قضیه ۲ فرق دارد . اولی می‌گوید هرگاه عددی ، مثبت یا منفی ، را به طرفین یک نامساوی بیفزاییم ، نتیجه نامساوی درست دیگری است . از آن سو ، طبق قضیه ۲ ، نامساوی حاصل از ضرب طرفین یک نامساوی در یک عدد ناصفر درست است فقط اگر عدد مثبت باشد ، و در واقع جهت نامساوی در صورت منفی بودن عدد عکس می‌شود .

قضیه ۳ ( تعدی نامساویها ) . هرگاه  $a < b$  و  $b < c$  ، آنگاه  $a < c$  .

برهان .  $a$  ،  $b$  ، و  $c$  را نقاط خط حقیقی می‌گیریم . در این صورت ،  $a$  سمت چپ  $b$  ، و  $b$  سمت چپ  $c$  قرار دارد ( ر.ک. شکل ۶ ) . پس  $a$  سمت چپ  $c$  قرار خواهد داشت .



### پیش حساب ۱۳

به آسانی می بینیم که اگر جهت تمام نامساویها را عوض کنیم، یعنی هر علامت  $<$  را با علامت مخالف آن  $>$  تعویض کنیم، قضایای ۱ تا ۳ درست خواهند ماند.

قضیه ۴ (قاعده تقابلها برای نامساویها). هرگاه  $0 < a < b$  یا  $a < b < 0$ ، آنگاه

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{b} \quad (۳)$$

برهان. هرگاه  $0 < a < b$  یا  $a < b < 0$ ، آنگاه  $a$  و  $b$  متحدالعلامه اند و  $a < b$ ؛ در نتیجه،  $ab > 0$  و  $b - a > 0$ . چون خارج قسمت دو عدد مثبت مثبت است، نتیجه می شود که

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} > 0,$$

که با (۳) معادل است.

مثالهای زیر موارد استعمال این قضایا را نشان می دهند. توجه کنید که یک نامساوی در صورت تقسیم طرفین آن بر عددی مثبت حفظ می شود، زیرا تقسیم بر عدد مثبت  $c$  معادل ضرب در متقابل آن  $1/c$  است، که این عدد نیز مثبت است.

#### مثال ۲. نامساوی

$$(۴) \quad 3x - 5 < \pi$$

را حل کنید؛ یعنی، جميع  $x$  هایی را بیابید که به ازای آنها (۴) برقرار باشد.

حل. بنابر قضیه ۱،  $(3x - 5) + 5 < \pi + 5$ ؛ و در نتیجه،

$$3x < \pi + 5.$$

با تقسیم طرفین این نامساوی بر ۳، به دست می آوریم

$$(۵) \quad x < \frac{\pi + 5}{3}.$$

#### مثال ۳. نامساوی

$$x^2 - x - 6 > 0$$

را حل کنید.

حل. عبارت سمت چپ را تجزیه کرده، و (۵) را به شکل زیر می نویسیم:

$$(x + 2)(x - 3) > 0.$$

سپس جدولی می‌سازیم که بستگی علامت  $x$  به عاملهای  $x + 2$  و  $x - 3$  و حاصل ضربشان  $(x + 2)(x - 3)$  را نشان می‌دهد:

علامت $(x + 2)(x - 3)$	علامت $x - 3$	علامت $x + 2$	شرط بر $x$
+	-	-	$x < -2$
-	-	+	$-2 < x < 3$
+	+	+	$x > 3$

در اینجا راهنمای ما این امر بود که عبارت  $x - a$  به ازای  $x < a$  منفی و به ازای  $x > a$  مثبت است. از جدول فوقاً می‌بینیم که نامساوی  $(x + 2)(x - 3) > 0$  برقرار است اگر و فقط اگر  $x < -2$  یا  $x > 3$ ؛ و در نتیجه، همین برای نامساوی اصلی (۵) درست است. تلفیق دو نامساوی اخیر به صورت تنها فرمول  $x > 3$  و  $x < -2$  صحیح نیست، زیرا عددی مانند  $x$  صادق در هر دو نامساوی  $x < -2$  و  $x > 3$  به‌طور همزمان وجود ندارد.

#### مثال ۴. نامساوی

$$(۶) \quad \frac{x+1}{2-x} > 1$$

را حل کنید.

حل. با تفریق ۱ از طرفین (۶)، به دست می‌آوریم

$$\frac{x+1}{2-x} - 1 > 0$$

یا معادلاً

$$\frac{(x+1) - (2-x)}{2-x} = \frac{2x-1}{2-x} > 0.$$

سپس جدولی می‌سازیم که بستگی علامت صورت  $2x - 1$  و مخرج  $2 - x$  و خارج قسمت آنها  $(2x - 1)/(2 - x)$  به  $x$  را نشان دهد:

علامت $\frac{2x-1}{2-x}$	علامت $2-x$	علامت $2x-1$	شرط بر $x$
-	+	-	$x < \frac{1}{2}$
+	+	+	$\frac{1}{2} < x < 2$
-	-	+	$x > 2$

از جدول واضح است که نامساوی  $(2x-1)/(2-x) > 0$  برقرار است اگر و فقط اگر  $\frac{1}{2} < x < 2$ .  
از اینرو، همین امر برای نامساوی اصلی (۶) درست است.

علامت  $\geq$  و  $\leq$ . دو عدد  $a$  و  $b$  (نه لزوماً متمایز) داده شده‌اند. منظور از  $a \geq b$  یعنی  $a$  بزرگتر یا مساوی  $b$  است. به عبارت دیگر، هرگاه  $a \geq b$ ، آنگاه  $a > b$  یا  $a = b$ .  
به همین نحو،  $a \leq b$  یعنی  $a$  کوچکتر یا مساوی  $b$  است؛ یعنی،  $a < b$  یا  $a = b$ . مثلاً،

$$(۷) \quad \sqrt{3} \geq \sqrt{2} \geq 1^3 \geq 1, \quad -3 \leq 0 \leq \frac{1-1}{2} \leq 1.$$

علامت  $\geq$  و  $\leq$  تخمینهای "ضعیفتری" از علامت  $>$ ،  $<$ ، و  $=$  به دست می‌دهند؛ و در واقع، صورتهای "دقیقتری" از (۷) عبارتند از

$$\sqrt{3} > \sqrt{2} > 1^3 = 1, \quad -3 < 0 = \frac{1-1}{2} < 1.$$

نامساویهای شامل علامت  $>$  و  $<$  را گاهی نامساویهای اکید گویند تا با نامساویهای شامل علامت  $\geq$  و  $\leq$  فرق داشته باشند. هرگاه دو نامساوی  $a \leq b$  و  $a \geq b$  باهم برقرار باشند، آنگاه  $a = b$ . در واقع،  $a \leq b$  ایجاب می‌کند که  $a < b$  یا  $a = b$ ، اما  $a < b$  با  $a \geq b$  ناسازگار است.

علامت  $\max$  و  $\min$ .  $n$  عدد  $a_1, a_2, \dots, a_n$  داده شده‌اند. دست کم یکی از آنها، که آن را  $M$  می‌نامیم، بزرگتر یا مساوی بقیه است. به همین نحو، دست کم یکی، به نام  $m$ ، از دیگران کوچکتر یا مساوی است. اعداد  $M$  و  $m$  به ما گزیم و مینیم  $a_1, a_2, \dots, a_n$  معروفند، که به ترتیب با  $\max \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  و  $\min \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  نموده می‌شوند. مثلاً،

$$\max \{-1, 2, 2\} = 2, \quad \min \{-1, 1, -3\} = -3.$$

واضح است که  $M \geq m$  ، و  $M = m$  اگر و فقط اگر  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  .

توانها و ریشهها. اگر  $a$  عددی دلخواه و  $n$  عدد صحیح مثبتی باشد، حاصل ضرب

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ عامل}}$$

توان  $n$  م  $a$  نامیده و به صورت  $a^n$  نوشته می شود. حال تعریف می کنیم

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a^0 = 1,$$

که در این فرمولها  $a \neq 0$  فرض شده است. مثلاً،

$$4^2 = 16, \quad (-2)^2 = 4, \quad (-1)^3 = -1, \quad 3^3 = 27, \quad 10^4 = 10000,$$

$$2^6 = 64, \quad 2^{-2} = \frac{1}{4}, \quad 10^{-3} = \frac{1}{1000}, \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} = -8, \quad \pi^0 = 1.$$

توانهای صحیح اعداد حقیقی از قوانین نماها که کاملاً شناخته شده اند تبعیت می کنند:

$$(۸) \quad a^m a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad (ab)^n = a^n b^n.$$

در اینجا  $m$  و  $n$  اعداد صحیح دلخواهی، مثبت، منفی، یا صفرند، درحالی که  $a$  و  $b$  اعدادی دلخواهند مگر در فرمول دوم که  $a \neq 0$ . همچنین، تأکید می کنیم که عدد ۰ نباید به توانی نامثبت برسد.

اگر  $a \geq 0$ ، درست یک عدد نامنفی هست که مربعش مساوی  $a$  است. این عدد، که با  $\sqrt{a}$  نموده می شود، ریشه دوم  $a$  نام دارد. مثلاً،  $\sqrt{0} = 0$  و  $\sqrt{4} = 2$ ، ولی  $\sqrt{4} = -2$  نادرست است هرچند که  $(-2)^2 = 4$ ، زیرا  $\sqrt{4}$  طبق تعریف نامنفی است. ریشه دوم یک عدد منفی نمی تواند عددی حقیقی باشد، زیرا مجذور هر عدد حقیقی همواره نامنفی است. مثلاً،  $\sqrt{-4}$  عددی حقیقی نیست. با معرفی اعدادی کلیتر، به نام اعداد مختلط، امکان جذرگرفتن از اعداد منفی را خواهیم داشت. اما اعداد مختلط هیچگاه در این کتاب به کار نمی روند؛ و در نتیجه، ریشه یک عدد منفی را تعریف نشده می گیریم.

به طور کلی، اگر  $a \geq 0$  و  $n$  عدد صحیح مثبتی باشد، درست یک عدد نامنفی هست که توان  $n$  م مساوی  $a$  است، که ریشه  $n$  م  $a$  نامیده و به صورت  $\sqrt[n]{a}$  نوشته می شود. مثلاً،

$$\sqrt[3]{27} = 3, \quad \sqrt[3]{0} = 0, \quad \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}, \quad \sqrt[3]{64} = 2.$$

بخصوص،  $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a}$ ، ولی همیشه می نویسند  $\sqrt[n]{a}$ . با این تعریف ریشه  $n$  م، قواعد آشنای زیر را خواهیم داشت:

$$\sqrt[n]{a^n} = a, \quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}, \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad \sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n^2]{a}$$

در اینجا  $m$  و  $n$  اعداد صحیح مثبت دلخواهی هستند، درحالی که  $a$  و  $b$  اعداد نامنفی دلخواهی هستند مگر در فرمول سوم که  $b \neq 0$ .

اگر  $n$  فرد باشد، می توان  $\sqrt[n]{a}$  را به ازای مقادیر منفی  $a$  نیز تعریف کرد، و آن عدد (منفی) منحصر به فردی است که توان  $n$  مساوی  $a$  است. مثلاً،  $\sqrt[3]{-1} = -1$  و  $\sqrt[5]{-32} = -2$ . اما، اگر  $n$  زوج باشد،  $\sqrt[n]{a}$  به ازای  $a$  ی منفی، مثل حالت جذر، تعریف نشده است. این بدان خاطر است که اگر  $n$  زوج باشد،  $n = 2k$  که در آن  $k$  عددی صحیح است؛ در نتیجه،  $a^n = (a^k)^2 \geq 0$ .

مثال ۵. نشان دهید هرگاه  $0 < a < b$ ، آنگاه  $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ .

حل. داریم  $b - a > 0$ ، یا معادلاً، برحسب ریشه های دوم  $A = \sqrt{a}$ ,  $B = \sqrt{b}$ ،  $B^2 - A^2 > 0$ . با تجزیه  $B^2 - A^2$ ، خواهیم داشت

$$(9) \quad B^2 - A^2 = (B - A)(B + A) > 0.$$

عامل  $B + A$  مثبت است، زیرا مجموع دو عدد مثبت است. لذا، (۹) ایجاب می کند که  $B - A > 0$ ؛ یعنی،  $A < B$  که با  $\sqrt{a} < \sqrt{b}$  معادل می باشد.

مثال ۶. به طور کلی، نشان دهید هرگاه  $0 < a < b$  و  $n$  عدد صحیح مثبتی باشد، آنگاه  $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$ .

حل. مجدداً " $b - a > 0$ ، یا معادلاً"، برحسب ریشه های  $n$  م  $A = \sqrt[n]{a}$ ,  $B = \sqrt[n]{b}$ ،  $B^n - A^n > 0$ . با استفاده از فرمولی در جبر برای تجزیه  $B^n - A^n$ ، معلوم می شود که

$$(9') \quad B^n - A^n = (B - A)(B^{n-1} + B^{n-2}A + \dots + BA^{n-2} + A^{n-1}) > 0.$$

عامل  $B^{n-1} + B^{n-2}A + \dots + BA^{n-2} + A^{n-1}$  مثبت است، زیرا مجموع  $n$  عدد مثبت می باشد. لذا، (۹') ایجاب می کند که  $B - A > 0$ ؛ یعنی،  $A < B$  یا معادلاً " $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$ ".



بالاخره، معنی عبارت  $a^r$  را مورد بحث قرار می‌دهیم، که در آن  $r$  عددی است گویا؛ یعنی، عددی به شکل  $m/n$  که در آن  $m$  و  $n$  صحیح‌اند (و  $n \neq 0$ ). فرض مثبت بودن  $n$  خللی به کلیت وارد نمی‌کند، زیرا اگر  $r$  منفی باشد، همواره می‌توان  $m$  را منفی گرفت. برای سادگی، نیز فرض می‌کنیم  $a$  مثبت باشد؛ در نتیجه، ریشه  $n$ ام  $a$  همیشه تعریف شده است، و نیز فرض می‌کنیم  $m/n$  تحویل‌ناپذیر باشد. در این صورت، تعریف  $a^{m/n}$  خواهد شد

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m},$$

یا معادلاً

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$$

(توجه کنید که  $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ ). مثلاً،

$$8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4, \quad 32^{-3/5} = (\sqrt[5]{32})^{-3} = 2^{-3} = \frac{1}{8},$$

و اگر  $r$  مثبت باشد،  $0^r = 0$ . چون

$$a^{-m/n} = \sqrt[n]{a^{-m}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{a^{m/n}},$$

داریم  $a^{-r} = 1/a^r$ ، و نشان دادن اینکه

$$(10) \quad a^r a^s = a^{r+s}, \quad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}, \quad (a^r)^s = a^{rs}, \quad (ab)^r = a^r b^r$$

چندان مشکلتر نیست (جزئیات آن در هر کتاب جبر دبیرستانی بیان شده‌است). در اینجا  $r$  و  $s$  اعداد گویای دلخواهی هستند، درحالی‌که  $a$  و  $b$  اعداد حقیقی مثبت دلخواهی می‌باشند. اگر  $r$  و  $s$  اعدادی صحیح بوده، و شرط مثبت بودن  $a$  و  $b$  را حذف کنیم، قوانین نماهای (۱۰) به قوانین نظیر برای توانهای صحیح تحویل می‌شوند.

مثال ۷.  $2^{1/6} \cdot 8^{1/9}$  را ساده کنید.

حل. با استفاده از دو فرمول (۱۰)، معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned} 2^{1/6} \cdot 8^{1/9} &= 2^{1/6} \cdot (2^3)^{1/9} = 2^{1/6} \cdot 2^{3/9} \\ &= 2^{1/6} \cdot 2^{1/3} = 2^{(1/6)+(1/3)} = 2^{1/2} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

مسائل

نشان دهید

۱. هرگاه  $a < b$ ، آنگاه  $-a > -b$  ✓

۲. هرگاه  $a < b$ ، آنگاه  $c - b < c - a$  ✓

۳. هرگاه  $a < b$  و  $c < d$ ، آنگاه  $a + c < b + d$  ✓

۴. هرگاه  $0 < a < b$  و  $0 < c < d$ ، آنگاه  $0 < ac < bd$  ✓

۵. هرگاه  $0 < a < 1$ ، آنگاه به ازای هر عدد صحیح  $n \geq 2$ ،  $\sqrt[n]{a} > a$  ✓

بدون محاسبات عددی، معین کنید کدام عدد بزرگتر است.

۶.  $\frac{1}{3}$  یا  $\frac{1}{\pi}$  ✓

۷.  $\frac{1}{2}$  یا  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  ✓

۸.  $94 \cdot 98$  یا  $96^2$  ✓

۹.  $23 \cdot 24 \cdot 26 \cdot 27$  یا  $25^4$  ✓

۱۰.  $\sqrt{3} + \sqrt{5}$  یا  $\sqrt{2} + \sqrt{6}$  ✓

۱۱.  $\sqrt{7} - \sqrt{3}$  یا  $\sqrt{6} - 2$  ✓

۱۲. فرض کنید  $p = m/n$  و  $p' = m'/n'$  دو عدد گویای مختلف باشند، که با مخرجهای مثبت

نوشته شده‌اند (این همیشه ممکن است). نشان دهید که  $p < p'$  معادل  $mn' > m'n$

است، حال آنکه  $p > p'$  معادل  $mn' < m'n$  می‌باشد.

بدون تقسیم، با استفاده از مسئله قبل، بگویید کدام عدد بزرگتر است.

۱۳.  $\frac{10}{3}$  یا  $\frac{33}{10}$  ✓

۱۴.  $\frac{11}{6}$  یا  $\frac{46}{25}$  ✓

۱۵.  $\frac{18}{49}$  یا  $\frac{7}{19}$  ✓

۱۶.  $-\frac{167}{50}$  یا  $-\frac{10}{3}$  ✓

۱۷. از  $a^2 + b^2 = 0$  چه چیز در باب  $a$  و  $b$  نتیجه می‌شود؟ ✓

۱۸. تحقیق کنید که ✓

$$\frac{4}{7} < \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} < 1.$$

۱۹. میانگین هندسی دو عدد مثبت  $x$  و  $y$  با  $g = \sqrt{xy}$  و میانگین حسابی (یا متوسط) ✓

آنها با  $a = \frac{1}{2}(x + y)$  تعریف می‌شود. نشان دهید که  $g < a$  مگر آنکه  $x = y$ ، که در

این حالت  $g = a$ .

۲۰. با استفاده از مسئله قبل، نشان دهید که از تمام مستطیل‌های با محیط معلوم  $p$ ، ✓

مربع بیشترین مساحت را دارد. این مساحت چقدر است؟

۲۱ ✓ هرگاه  $2 \leq a \leq 4$  و  $4 \leq b \leq 6$ ، در باب اندازه  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  چه می توان گفت؟

جميع  $x$  هایی را بیایید که به ازای آنها:

۲۲  $2 < 4x - 5 < 7$

۲۳ ✓  $(x-1)(x+1) \leq (x+1)(x+2)$

۲۴  $x^2 < 5x - 6$

۲۵ ✓  $\frac{x}{x+2} > 0$

۲۶  $\frac{x+1}{x+2} < 1$

۲۷ ✓  $(x+1)(x+2)(x+3) > 0$

۲۸  $(x-1)^2 x(x+1) > 0$

۲۹ ✓  $(x-1)(x+1)(x^2+1) < 0$

مقادیر زیر را بیایید:

۳۰ ✓  $\max \{-2, (-2)^2, (-2)^3\}$

۳۱ ✓  $\min \{-1, (-1)^2, (-1)^3\}$

۳۲ ✓  $\min \{-\sqrt{2}, -\sqrt{3}, -2\}$

۳۳ ✓  $\max \{1, 2, \frac{4}{2}, (\sqrt{2})^2\}$

عبارات زیر را بدون نماهای منفی بنویسید:

۳۶ ✓  $\frac{a^{-1}b^{-2}c^{-3}}{a^3b^2c}$

۳۵ ✓  $\frac{a^3b^2c}{a^{-1}b^{-2}c^{-3}}$

۳۴ ✓  $\left(\frac{x^2}{yz}\right)^{-3}$

عبارات زیر را به صورت توانی از ۲ بنویسید:

۳۹  $2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16$

۳۸ ✓  $\left(\frac{1}{8}\right)^{-5}$

۳۷ ✓  $\left(\frac{1}{4}\right)^7$

عبارات زیر را ساده کنید:

۴۱ ✓  $\sqrt[3]{64a^9}$

۴۰  $\sqrt{4 \cdot 16 \cdot 36}$

۴۳ ✓  $\sqrt[3]{81a^4}$

۴۲  $\sqrt[3]{1.728 \times 10^6}$

۴۵ ✓  $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$

۴۴  $\sqrt[3]{-0.00001}$

۴۷ ✓  $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$

۴۶  $\sqrt{\sqrt{12}-\sqrt{3}}$

۴۹ ✓  $(125a^3)^{-2/3}$

۴۸  $(8a^6)^{4/3}$

۵۱ ✓  $2^{1/6} \cdot 2^{1/3} \cdot 2^{1/2}$

۵۰  $(32)^{-4/5}(16)^{5/4}$

$$\left(\frac{81}{625}\right)^{-3/4} \cdot 53 \checkmark \quad (0.0001)^{3/2} \cdot 52$$

۵۴. دانشجویان موسیقی رشته C, C#, D, D#, E, F, F#, G, G#, A, A#, B, C را به عنوان یک گام کروماتیک C، مرکب از 12 نیمصدای متوالی، می شناسند. C ی دوم یک اکتاو بالاتر از C ی اول است و دارای فرکانس ( پای ) دو برابر می باشد. فرض کنید فرکانس هر نت گام r ( ثابت ) برابر فرکانس نت قبلی باشد، که در دستگاه با فواصل مساوی برای کوک کردن وسایل به کار می رود. r را بیابید. نسبت فرکانس دو صدای کامل متوالی ( مانند C و D ) چیست؟

۵۵. نشان دهید که هرگاه  $p < q$  و  $r = \frac{1}{2}(p + q)$ ، آنگاه  $p < r < q$ ، که در آن r در صورت گویا بودن p و q گویاست.

۵۶. با استفاده از مسئله قبل، نشان دهید که بزرگترین عدد گویا ( یا حقیقی ) کوچکتر از 1 وجود ندارد، و کوچکترین عدد گویا ( یا حقیقی ) بزرگتر از 0 موجود نیست.

### ۳۰. قدر مطلق و بازه ها

علامت | | . منظور از قدر مطلق عدد a، که به صورت |a| با دو خط قائم نوشته می شود، یعنی عددی مساوی خود a اگر a نامنفی باشد و مساوی -a اگر a منفی باشد. به عبارت دیگر،

$$(۱) \quad |a| = \begin{cases} a & , \quad a \geq 0 \\ -a & , \quad a < 0 \end{cases} \text{ اگر}$$

که در آن دو ابرو برای تلفیق دو فرمول در یک فرمول به کار می رود. به عنوان مثال،

$$\begin{aligned} |0| &= 0, & |-1.45| &= -(-1.45) = 1.45, \\ |(-3)^2| &= |9| = 9, & |(-3)^3| &= |-27| = -(-27) = 27, \\ |x-2| &= -(x-2) = 2-x, & x &< 2 \text{ اگر} \end{aligned}$$

به آسانی معلوم می شود که

$$(۲) \quad |a| = \sqrt{a^2}.$$

در واقع، هرگاه  $a \geq 0$ ،  $|a| = a$  و  $\sqrt{a^2} = a$ ، اما هرگاه  $a < 0$ ، آنگاه  $|a| = -a$  و  $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)(-a)} = -a$  ( چرا  $\sqrt{a^2} = a$  به ازای a ی منفی نادرست است؟ ) با

مربع کردن طرفین (۲)، به دست می‌آوریم

$$(۲') \quad |a|^2 = a^2$$

لذا، مربع قدر مطلق یک عدد مساوی مربع خود عدد است. از (۲) معلوم می‌شود که

$$|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2 b^2} = \sqrt{a^2} \sqrt{b^2},$$

یا، معادلاً،

$$(۳) \quad |ab| = |a| |b|.$$

این فرمول مهم به ازای هر دو عدد  $a$  و  $b$  معتبر است. استدلالی مشابه نشان می‌دهد که

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0),$$

و به عنوان تمرین گذارده می‌شود. با اختیار  $b = -1$  در (۳)، درمی‌یابیم که

$$|-a| = |a|.$$

بی‌درنگ از (۱) نتیجه می‌شود که

$$(۱') \quad a = \begin{cases} |a| & , \quad a \geq 0 \\ -|a| & , \quad a < 0 \end{cases}$$

بنابراین، به ازای هر عدد  $a$ ،

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

نامساوی مثلثی، قضیه زیر در حساب دیفرانسیل و انتگرال اهمیت زیادی دارد.

قضیه ۵ (نامساوی مثلثی). نامساوی

$$(۴) \quad |a + b| \leq |a| + |b|$$

به‌ازای هر دو عدد  $a$  و  $b$  برقرار است.

برهان. از نامساوی

$$ab \leq |ab| = |a| |b|$$

معلوم می‌شود که

$$|a + b|^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq a^2 + 2|a| |b| + b^2 = |a|^2 + 2|a| |b| + |b|^2.$$

بنابراین ،

$$|a + b|^2 \leq (|a| + |b|)^2,$$

و با گرفتن جذر از طرفین آن ( به کمک مثال ۵ ، صفحه ۱۷ ) ، نامساوی (۴) به دست می آید .

هرگاه  $a$  و  $b$  متحدالعلامه باشند ، یا دست کم یکی از  $a$  و  $b$  صفر باشد ، نامساوی مثلثی (۴) به تساوی  $|a + b| = |a| + |b|$  تحویل می شود ، زیرا اینها شرایطی هستند که تحت آنها  $ab = |ab|$  . اما ، اگر  $a$  و  $b$  مختلف‌العلامه باشند ، نامساوی مثلثی به صورت اکید  $|a + b| < |a| + |b|$  درمی آید ، زیرا در این صورت  $ab < |ab|$  . به عنوان مثال ،

$$4 = |3 - 7| < |3| + |-7| = 10.$$

نکته مهم این است که (۴) همواره ، بی توجه به علامات  $a$  و  $b$  ، برقرار است .

تعویض  $a$  با  $a - b$  در (۴) نتیجه می دهد

$$|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|,$$

که ایجاب می کند

$$|a - b| \geq |a| - |b|.$$

به همین نحو ، از تعویض  $b$  با  $b - a$  در (۴) نتیجه می شود

$$|b| = |a + (b - a)| \leq |a| + |b - a| = |a| + |a - b|,$$

که ایجاب می کند

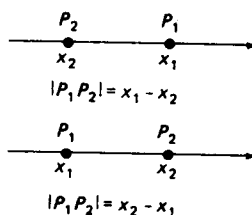
$$|a - b| \geq |b| - |a|.$$

اما یکی از دو عدد  $|a| - |b|$  و  $|b| - |a|$  قدرمطلق  $|a| - |b|$  است ؛ و لذا ،

$$(۵) \quad |a - b| \geq ||a| - |b||.$$

ما گاهی به این نامساوی نیاز خواهیم داشت .

مختصات و فاصله بین نقاط. منظور از مختص نقطه  $P$  بر خط حقیقی یعنی عدد حقیقی نظیر  $P$  . فرض کنیم  $P_1$  و  $P_2$  دو نقطه بر خط حقیقی به مختصات  $x_1$  و  $x_2$  بوده ، و  $|P_1 P_2|$  فاصله بین  $P_1$  و  $P_2$  یا معادلاً " طول پاره خط  $P_1 P_2$  باشد . همانطور که شکل ۷ نشان داده ،  $|P_1 P_2|$  چیزی جز تفاضل بین بزرگترین و کوچکترین دو عدد  $x_1$  و  $x_2$  نیست . (نقاط  $P_1$  و  $P_2$  در صورتی که  $x_1 = x_2$  منطبق اند .) به طور دقیقتر ،



شکل ۷

$$|P_1P_2| = \begin{cases} x_1 - x_2 & , \quad x_1 \geq x_2 \\ x_2 - x_1 & , \quad x_1 < x_2 \end{cases}$$

که معادل است با

$$|P_1P_2| = \begin{cases} x_1 - x_2 & , \quad x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_2 - x_1 & , \quad x_1 - x_2 < 0 \end{cases}$$

این ظاهر پیچیده‌ای دارد، ولی برحسب قدرمطلق به صورت

$$|P_1P_2| = |x_1 - x_2|$$

در می‌آید. پیش‌بینی این نتیجه بود که در نمادمان برای فاصله بین  $P_2$  و  $P_1$  خطوط قائم به‌کار بردیم. توجه کنید که، طبق خاصیتی از قدرمطلق،  $|P_2P_1| = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$ ؛ و لذا، همانطور که از ملاحظات هندسی انتظار می‌رفت،  $|P_1P_2| = |P_2P_1|$ .

چون  $|x| = |x - 0|$ ، قدرمطلق  $x$  چیزی جز فاصله نقطه  $x$  تا مبدا خط حقیقی نیست. البته، منظور از "نقطه"  $x$  یعنی نقطه به مختص  $x$ . به همین نحو،  $|x - 3|$  فاصله بین نقطه  $x$  و نقطه ۳ است، حال آنکه  $|x + 3| = |x - (-3)|$  فاصله بین  $x$  و نقطه  $-3$  می‌باشد. برای تعبیر  $|x + 3|$  به عنوان فاصله باید  $+3$  را  $-(-3)$  تصور کرد.

نامساوی

$$|x| < a \quad (a > 0)$$

می‌گوید که فاصله بین نقطه  $x$  و مبدا کوچکتر از  $a$  است. مجموعه تمام  $x$  هایی که این نامساوی به ازای آنها درست است همان مجموعه تمام  $x$  هایی است که

$$-a < x < a.$$

به همین نحو، اگر  $|x| \leq a$  و فقط اگر  $-a \leq x \leq a$ . به عنوان تمرین، نشان دهید که  $|x| > a$  ( $a > 0$ ) اگر و فقط اگر  $x > a$  یا  $x < -a$ ، و  $|x| \geq a$  اگر و فقط اگر  $x \geq a$  یا



$$x \leq -a$$

مثال ۱. کلیه  $x$  هایی را بیابید که  $|x^2 - 2| \leq 7$ .

حل. این نامساوی مضاعف معادل است با  $-7 \leq x^2 - 2 \leq 7$ ، که به نوبه خود برقرار است اگر و فقط اگر

$$(۶) \quad -5 \leq x^2 \leq 9.$$

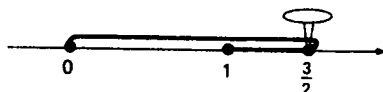
نامساوی اول در (۶) خود به خود برقرار است، زیرا  $x^2$  به ازای هر  $x$  نامنفی است، حال آنکه نامساوی دوم را می توان به صورت  $|x|^2 \leq 9$  یا معادلاً  $|x| \leq 3$  نوشت. بنابراین،  $x$  در نامساوی  $|x^2 - 2| \leq 7$  صدق می کند اگر و فقط اگر  $-3 \leq x \leq 3$ .

مثال ۲. معادله

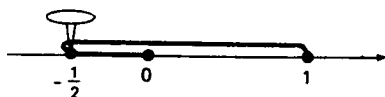
$$(۷) \quad |x| + |x - 1| = 2$$

را حل کنید.

حل. در اینجا روش هندسی خوب کار می کند. معادله (۷) می گوید که فاصله بین نقطه  $x$  و مبدأ به علاوه فاصله بین نقطه  $x$  و نقطه ۱ مساوی ۲ است. یک نخ به طول ۲ که دو انتهایش در نقاط ۰ و ۱ محکم شده است را در نظر می گیریم. اگر نخ را تا نقطه  $\frac{3}{2}$ ، یعنی نصف واحد به راست ۱ [ر.ک. شکل ۸ (ت)]، یا به نقطه  $-\frac{1}{2}$ ، یعنی نصف واحد به چپ ۰، بکشیم، نخ محکم کشیده می شود [ر.ک. شکل ۸ (ب)]. به عبارت دیگر، معادله (۷) دارای دو جواب  $x = \frac{3}{2}$  و  $x = -\frac{1}{2}$  است.



(ت)



(ب)

شکل ۸

مثال ۳. معادله (۷) را به طور جبری حل کنید.

حل. هرگاه

$$x \geq 1,$$

آنگاه  $x$  و  $x - 1$  هر دو نامنفی اند؛ در نتیجه، (۷) به معادله  $x + (x - 1) = 2$  یا  $2x = 3$ ، با جواب  $x = \frac{3}{2}$ ، تحویل می شود. هرگاه

$$0 \leq x < 1,$$

آنگاه  $x$  نامنفی است و  $x - 1$  منفی. در این حالت، (۷) به صورت  $x - (x - 1) = 2$  یا معادلا " $1 = 2$ " درمی آید، که نادرست است؛ لذا، (۷) جوابی به ازای  $0 \leq x < 1$  ندارد. بالاخره، هرگاه

$$x < 0,$$

آنگاه  $x$  و  $x - 1$  هر دو منفی اند و (۷) به معادله  $-x - (x - 1) = 2$  یا  $-2x = 1$ ، با جواب  $x = -\frac{1}{2}$ ، تحویل می شود. با توجه به جميع حالات، نتیجه می شود که معادله (۷) فقط دو جواب  $x = \frac{3}{2}$  و  $x = -\frac{1}{2}$  را دارد.

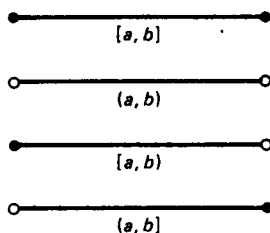
انواع بازه ها. فرض کنیم  $a$  و  $b$  دو نقطه از خط حقیقی باشند به طوری که  $a < b$ . در این صورت، مجموعه تمام نقاط بین  $a$  و  $b$  یک بازه نام دارد. در اینجا موقتا "تعلق نقاط انتهایی  $a$  و  $b$  به بازه را مشخص نمی کنیم. در واقع، چهار حالت وجود دارد: (یک) مجموعه  $\{x: a \leq x \leq b\}$  مرکب از تمام نقاط  $x$  بین  $a$  و  $b$  به انضمام نقاط انتهایی  $a$  و  $b$  یک بازه بسته نام دارد و با  $[a, b]$  نموده می شود، که در آن از دوگروشه استفاده می شود.

(دو) مجموعه  $\{x: a < x < b\}$  مرکب از تمام نقاط  $x$  بین  $a$  و  $b$  جز نقطه انتهایی  $a$  و  $b$  یک بازه باز نام دارد و با  $(a, b)$  نموده می شود، که در آن از دوپراانتز استفاده می شود.

(سه) مجموعه  $\{x: a \leq x < b\}$  مرکب از تمام نقاط  $x$  بین  $a$  و  $b$  به انضمام نقطه انتهایی  $a$  جز نقطه انتهایی راست  $b$  یک بازه نیمباز نام دارد و با  $[a, b)$  نموده می شود، که در آن از گروشه در چپ و پراانتز در راست استفاده می شود.

(چهار) مجموعه  $\{x: a < x \leq b\}$  مرکب از تمام نقاط بین  $a$  و  $b$  جز نقطه انتهایی چپ  $a$  به انضمام نقطه انتهایی راست  $b$  نیز یک بازه نیمباز نام دارد، منتها این بار با  $[a, b]$  نموده می شود، که در آن از پراانتز در چپ و از گروشه در راست استفاده می شود.

هر چهار بازه  $[a, b]$  ،  $(a, b)$  ،  $[a, b)$  ، و  $(a, b]$  دارای نقاط انتهایی  $a$  و  $b$  اند؛ و در نتیجه، به همه آنها طول  $b - a$  اطلاق می شود ( برای مشاهده علت، نقطه را با طول صفر تصور کنید ). معنی هندسی انواع مختلف بازه ها در شکل ۹ نموده شده است،



انواع مختلف بازه های متناهی

شکل ۹

که در آن نقاط انتهایی داخل بازه ها به صورت نقاط توپر و نقاط انتهایی خارج بازه ها به شکل نقاط توخالی نموده شده اند. منظور از یک نقطه درونی یکی از این بازه ها یعنی نقطه ای غیر از یک نقطه انتهایی؛ یعنی، نقطه ای از بازه  $(a, b)$ .

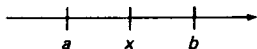
در نوشتجات علمی به عباراتی مانند "بازه  $1 \leq x \leq 4$ " یا "بازه  $-2 < y < 5$ " برمی خورید، که در واقع به معنی بازه  $\{x: 1 \leq x \leq 4\}$  یا بازه  $\{y: -2 < y < 5\}$  است. هر بازه یک مجموعه است نه یک نامساوی مضاعف. در هر صورت، وقتی این تمایز روشن باشد، استفاده از نماد "نامساوی" برای بازه ها اشکالی ندارد، و هر وقت مناسب بود از آن استفاده خواهیم کرد.

مثال ۴. نشان دهید که هر بازه با نقاط انتهایی  $a$  و  $b$  دارای نقطه میانی  $\frac{1}{2}(a + b)$  است.

حل. فرض کنیم  $x$  نقطه میانی بازه، مثل شکل ۱۰، بوده، و  $a < b$  پس  $a < x < b$  و

$$x - a = b - x$$

زیرا  $x$  از  $a$  و  $b$  به یک فاصله است. با حل این معادله نسبت به  $x$ ، درمی یابیم که



شکل ۱۰

$x = \frac{1}{2}(a+b)$  . همین نتیجه اگر  $b < a$  به دست می‌آید ( چرا؟ ) .

مثال ۵. مجموعه  $I$  مرکب از تمام نقاطی که فاصله‌شان تا نقطه ۴ کوچکتر از ۰.۱ است را بیابید .

حل . واضح است که

$$I = \{x: |x - 4| < 0.1\} = \{x: -0.1 < x - 4 < 0.1\},$$

در نتیجه ،

$$I = \{x: 4 - 0.1 < x < 4 + 0.1\} = \{x: 3.9 < x < 4.1\}.$$

بنابراین ،  $I$  بازه  $(3.9, 4.1)$  است .

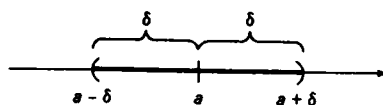
همسایگیها . مثال ۵ را تعمیم داده ، فرض می‌کنیم  $I$  مجموعه تمام نقاطی باشد که فاصله‌شان تا نقطه ثابت  $a$  از عدد مفروض  $\delta > 0$  کوچکتر است . ( استفاده از  $\delta$  ، یعنی دلتای کوچک یونانی ، در این محدوده رسم شده است ) . در این صورت ،

$$I = \{x: |x - a| < \delta\} = \{x: -\delta < x - a < \delta\},$$

در نتیجه ،

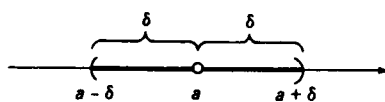
$$I = \{x: a - \delta < x < a + \delta\}.$$

بنابراین ، همانطور که شکل ۱۱ (آ) نشان داده ،  $I$  بازه  $(a - \delta, a + \delta)$  به طول  $2\delta$  با نقطه میانی  $a$  است . هر بازه از این نوع یک همسایگی  $a$  ، یا دقیقتر ،  $\delta$ -همسایگی  $a$  ، نام دارد .



یک  $\delta$ -همسایگی

(آ)



یک  $\delta$ -همسایگی بسته

(ب)

چون نامساوی  $|x - a| < \delta$  معرف  $\delta$ -همسایگی  $a$  است، نامساوی مضاعف

$$(۸) \quad 0 < |x - a| < \delta$$

همان همسایگی را که یک نقطه اش، یعنی خود نقطه  $a$  میانی  $a$ ، مفقود شده تعریف می کند [ر.ک. شکل ۱۱ (ب)]. در واقع، (۸) برقرار است اگر و فقط اگر

$$a - \delta < x < a \quad \text{یا} \quad a < x < a + \delta$$

یعنی، نقاط  $x$  صادق در (۸) یک جفت بازه  $a$  باز

$$(a - \delta, a) \quad \text{و} \quad (a, a + \delta)$$

را می سازند. اسم تکنیکی برای مجموعه نقاط تعریف شده با (۸) همسایگی سفته  $a$  است. مثلاً، "0.01 - همسایگی سفته نقطه 2 بازه (1.99, 2.01) است که خود نقطه 2 از آن مفقود شده، یا معادلاً "جفت بازه های باز (1.99, 2) و (2, 2.01) می باشد. می توانستیم (۸) را به شکل

$$(۸') \quad 0 \neq |x - a| < \delta$$

بنویسیم، که حذف  $a$  را روشنتر نشان می دهد، ولی (۸) زیباتر به نظر می رسد و به صورت متعارف درآمده است.

بازه های نامتناهی. بازه هایی که تاکنون در نظر گرفته ایم متناهی یا گراندار اند، بدین معنی که طول معینی دارند. همچنین، می توان بازه های نامتناهی یا بی گران در نظر گرفت؛ یعنی، بازه هایی که در یک یا هر دو جهت در امتداد خط حقیقی "تا ابد می روند". و لذا، نمی توان به آنها طول نسبت داد. (گرچه می توان گفت که این بازه ها بی نهایت طولی اند.) برای توصیف بازه های نامتناهی، دو علامت جدید معرفی می کنیم. این علائم عبارتند از  $\infty$ ، به نام (به علاوه) بی نهایت، و  $-\infty$ ، به نام منهای بی نهایت. علائم  $\infty$  و  $-\infty$  را نباید عدد گرفت، اگر چه می توانند در نامساویها ظاهر شوند. حال، با استفاده از  $\infty$  و  $-\infty$ ، بازه های نامتناهی زیر را معرفی می کنیم، که در آنها  $c$  عدد ثابتی است:

(یک) مجموعه  $\{x: x \geq c\}$ ، که با  $[c, \infty)$  یا  $c \leq x < \infty$  نموده می شود؛

(دو) مجموعه  $\{x: x \leq c\}$ ، که با  $(-\infty, c]$  یا  $-\infty < x \leq c$  نموده می شود؛

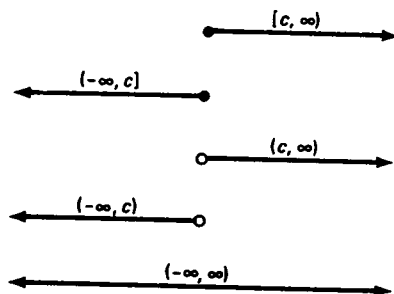
(سه) مجموعه  $\{x: x > c\}$ ، که با  $(c, \infty)$  یا  $c < x < \infty$  نموده می شود؛

(چهار) مجموعه  $\{x: x < c\}$ ، که با  $(-\infty, c)$  یا  $-\infty < x < c$  نموده می شود؛

(پنج) تمام خط حقیقی، که با  $(-\infty, \infty)$  یا  $-\infty < x < \infty$  نموده می شود.

بازه های (یک) و (دو) را بسته، و بازه های (سه) و (چهار) و (پنج) را باز

می‌گیرند. تعبیر هندسی انواع مختلف بازه‌های نامتناهی در شکل ۱۲ نموده شده است، که در آن نقاط انتهایی جزو بازه‌ها با نقاط توپر، نقاط انتهایی خارج بازه‌ها با نقاط توخالی،



انواع مختلف بازه‌های نامتناهی

شکل ۱۲

و نقاط انتهایی نامتناهی با سر سهم که اشاره به "بی‌نهایت" دارد نشان داده شده‌اند. چون  $\infty$  و  $-\infty$  عدد نیستند، مجاز نیستیم بنویسیم  $x = \infty$  یا  $x = -\infty$ . بنابراین، نوشتن  $x \leq \infty$  یا  $x \geq -\infty$ ، یا گذاردن کروشه کنار علامت  $\infty$  یا  $-\infty$  درست نیست.

مثال ۶. بنابر مثال ۳، صفحه ۱۳،  $x$  در نامساوی درجه دوم  $x^2 - x - 6 > 0$  صدق می‌کند اگر و فقط اگر  $x$  متعلق به یکی از بازه‌های باز نامتناهی  $(3, \infty)$  یا  $(-\infty, -2)$  باشد.

تبصره. ما هم اکنون انواع مختلف بازه‌ها، متناهی و نامتناهی، را معرفی کردیم. هریک از این بازه‌ها "همبند" است به این معنی که هرگاه شامل دو نقطه متمایز  $x$  و  $y$  باشد، آنگاه شامل هر نقطه بین  $x$  و  $y$  است. به عکس، هر مجموعه همبند از نقاط بر خط حقیقی باید یک بازه از انواع فوق باشد. این امر شهوداً واضح است، اما اثبات دقیق آن نیاز به فوت و فنهایی دارد که در اینجا داده نمی‌شود.

### مسائل

قدرمطلقهای زیر را حساب کنید.

۲.  $|1 - \sqrt{3}|$

۱.  $|6 - 15|$

۴.  $|-|-3||$

۳.  $|\sqrt{2} - 1|$

پیش حساب ۳۱

$$|1 - (\frac{1}{2})^{-2}| \quad ۰.۶$$

$$\| -1 \| - \| -2 \| \quad ۰.۵ \checkmark$$

$$|(-1)^n| \quad ۰.۸ \quad (n \text{ عدد صحیح دلخواهی است})$$

$$|\pi - \sqrt{11}| \quad ۰.۷ \checkmark$$

فرض کنید  $|a - 10| < 2$  و  $|b - 6| < 1$  . در باب اندازه کمیات زیر چه می توان گفت ؟

$$a - b \quad ۰.۱۰ \checkmark$$

$$a + b \quad ۰.۹ \checkmark$$

$$a^2 + ab + 1 \quad ۰.۱۲ \checkmark$$

$$a^2 - b^2 \quad ۰.۱۱ \checkmark$$

عبارات زیر را بر حسب قدر مطلق بیان کنید .

$$۰.۱۳ \checkmark \quad x \text{ به مبدا تا نقطه } -2 \text{ نزدیکتر است .}$$

$$۰.۱۴ \checkmark \quad \text{فاصله بین } x \text{ و نقطه } 2 \text{ از } \pi \text{ متجاوز نیست .}$$

$$۰.۱۵ \checkmark \quad \text{فاصله } x \text{ تا نقطه } 1 \text{ دو برابر فاصله اش تا نقطه } -1 \text{ است .}$$

جميع  $x$  هایی را بیابید که

$$۰.۱۶ \checkmark \quad \text{از نقاط } -3 \text{ و } 7 \text{ به یک فاصله اند .}$$

$$۰.۱۷ \checkmark \quad \text{فاصله شان تا نقطه } -1 \text{ یک چهارم فاصله شان تا نقطه } 4 \text{ است .}$$

$$۰.۱۸ \checkmark \quad \text{در فاصله } 2 \text{ تا نقطه } -1 \text{ قرار دارند .}$$

$$۰.۱۹ \checkmark \quad \text{به نقطه } 1 \text{ نزدیکترند تا مبدا .}$$

$$۰.۲۰ \checkmark \quad \text{از نقطه } 2 \text{ دورترند تا از نقطه } -3 \text{ .}$$

$$۰.۲۱ \checkmark \quad \text{مجموع فواصل شان تا نقاط } 1 \text{ و } -1 \text{ کوچکتر از } 4 \text{ است .}$$

جميع  $x$  هایی را بیابید که در معادله داده شده صدق می کنند .

$$|x - 1| = |3 - x| \quad ۰.۲۲ \checkmark$$

$$|1 - x| = 2 \quad ۰.۲۲ \checkmark$$

$$|2x| = |x - 2| \quad ۰.۲۵ \checkmark$$

$$|x + 1| = |3 + x| \quad ۰.۲۴ \checkmark$$

$$|x + 2| + |x - 1| = 4 \quad ۰.۲۶ \checkmark$$

$$|x + 2| + |x - 1| = 2 \quad ۰.۲۶ \checkmark$$

۰.۲۸ چند عدد صحیح مثبت قدر مطلق کوچکتر از 5 دارند ؟ چند عدد صحیح از این

خاصیت برخوردارند ؟

جميع  $x$  هایی را بیابید که در نامساوی داده شده صدق می کنند .

$$|2x + 1| < |3x + 4| \quad ۰.۳۰ \checkmark$$

$$|x + 1| \geq 2 \quad ۰.۲۹ \checkmark$$

$$|x| - |x - 1| \geq 0 \quad ۰.۳۲ \checkmark$$

$$|x^2 - 1| > 3 \quad ۰.۳۱ \checkmark$$

$$|x| - |x - 1| > 1 \quad ۰.۳۴$$

$$|x| - |x - 1| < 1 \quad ۰.۳۳ \checkmark$$

$$\left| \frac{x-1}{x+1} \right| < 1 \quad ۰.۳۶ \checkmark$$

$$\left| \frac{x-1}{x+1} \right| > 0 \quad ۰.۳۵ \checkmark$$

$$\left| \frac{x-1}{x+1} \right| \geq 1 \quad ۰.۳۷ \checkmark$$



۳۸. برهان دیگری از نامساوی (۵) بیاورید، از این شروع کنید که

$$|a - b|^2 = (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

نقطهء میانی هر بازه با نقاط انتهایی داده شده را بیابید.

$$-1, 8 \quad .40$$

$$3, 6 \quad .39 \checkmark$$

$$-\sqrt{2}, \sqrt{4} \quad .42$$

$$-7, -1 \quad .41 \checkmark$$

بازه‌های زیر را به طریقی دیگر بنویسید.

$$(2, \pi) \quad .44$$

$$-2 < x \leq 3 \quad .43 \checkmark$$

$$-\infty < x < 3 \quad .46$$

$$[-1, 1) \quad .45 \checkmark$$

$$2 \leq x < \infty \quad .48$$

$$5 < x < 13 \quad .47 \checkmark$$

$$(-\infty, -1] \quad .50$$

$$(3, \infty) \quad .49 \checkmark$$

$$(-3, 4] \quad .52$$

$$-4 \leq x < -2 \quad .51 \checkmark$$

$$3 \leq x \leq 9 \quad .54$$

$$[-2, -1] \quad .53 \checkmark$$

$$-1 < x < \infty \quad .56$$

$$-\infty < x \leq -5 \quad .55 \checkmark$$

$$[-\pi, \infty) \quad .58$$

$$(-\infty, 5) \quad .57 \checkmark$$

$$|x| < \sqrt{2} \quad .60 \checkmark$$

$$|x - 3| \leq 2 \quad .59 \checkmark$$

$$|x - \frac{1}{2}| \leq \frac{3}{2} \quad .62 \checkmark$$

$$|x + 2| < 1 \quad .61 \checkmark$$

همسایگیهای زیر را به کمک قدرمطلق بنویسید.

$$.63 \checkmark \quad 2 - \text{همسایگی } 1$$

$$.64 \checkmark \quad \sqrt{3} - \text{همسایگی } -2$$

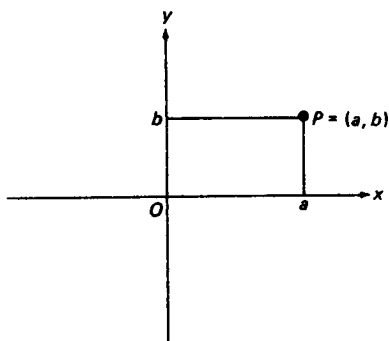
$$.65 \quad 1 - \text{همسایگی سفته } -1$$

$$.66 \checkmark \quad \frac{1}{2} - \text{همسایگی سفته } \pi$$

#### ۴.۵ مختصات در صفحه

تا بحال ما فقط مختصات روی یک خط را داشته‌ایم. برای معرفی مختصات در صفحه (مثلاً "، همین صفحه" کاغذ)، دو خط جهت‌دار می‌کشیم که در زاویه قائمه متقاطع باشند، و آنها را خطوط اعداد تصور می‌کنیم. نقطه برخورد خطوط مبدأ مشترک 0 است که فواصل از آن در امتداد دو خط با یک واحد طول سنجیده می‌شوند. دو خط محورهای مختصات نام دارند. یک خط، به نام محور x، معمولاً افقی و به طرف راست، و دیگری، به نام محور y، معمولاً قائم و به بالا، مثل شکل ۱۳، رسم می‌گردند. صفحه معین شده به وسیله

محورهای  $x$  و  $y$  صفحه  $xy$  نام دارد.



شکل ۱۳

جفت‌های مرتب و مختصات قائم . حال فرض کنیم  $(a, b)$  جفت مرتبی از اعداد حقیقی باشد، که در آن  $a$  اول می‌آید و  $b$  دوم<sup>۱</sup>. عنصر اول  $a$  از جفت  $(a, b)$  را به عنوان نقطه‌ای از محور  $x$  و عنصر دوم  $b$  را به عنوان نقطه‌ای از محور  $y$  رسم کرده، عمودی در  $a$  بر محور  $x$  و عمودی در  $b$  بر محور  $y$  می‌کشیم. همانند شکل ۱۳، این عمودها در نقطه  $P$  متقاطعند، که آن را نمایش جفت مرتب  $(a, b)$  می‌گیریم. گوییم نقطه  $P$  دارای مختصات (قائم)  $a$  و  $b$  است؛ به‌طور مشخص، مختص  $x$  آن  $a$  و مختص  $y$  آن  $b$  است. با معکوس کردن این ساختن، یعنی با رسم عمودهایی از  $P$  بر محورهای مختصات، می‌توان مختصات و در نتیجه جفت مرتب نظیر به نقطه  $P$ ، را یافت.

لذا، نظیر هر جفت مرتب نقطه منحصر به فردی در صفحه وجود دارد؛ و به عکس، نظیر هر نقطه در صفحه جفت مرتب منحصر به فردی موجود است. به خاطر این تناظر یک به یک، مابین جفت‌های مرتب و نقاط نمایش آنها تمایز کمی می‌گذاریم یا اصلاً "تمایزی قایل نمی‌شویم. بخصوص،  $P = (a, b)$  یعنی  $P$  نقطه‌ای است که مختص  $x$  آن  $a$  و مختص  $y$  آن  $b$  است. (بعضی از مؤلفان برای این نقطه می‌نویسند  $P = (a, b)$ ). توجه کنید که مبدأ  $O$  نقطه  $(0, 0)$  است. البته، تساوی دو جفت مرتب  $(a, b)$  و  $(c, d)$  یعنی این دو جفت دارای یک عنصر اول و یک عنصر دومند؛ یعنی،  $a = c$  و  $b = d$ . مثلاً،  $(2, 1) = (\sqrt{4}, 1)$ ، ولی  $(2, 1) \neq (2, \sqrt{3})$ .

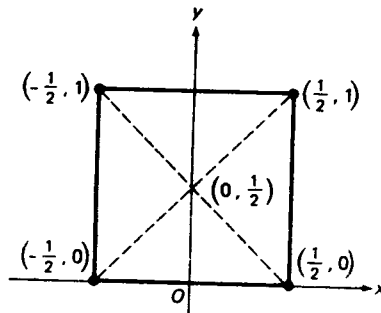
---

۱. نماد دو پرانتزی هم برای جفت‌های مرتب به کار می‌رود هم برای بازه‌های باز، لیکن زمینه بحث همواره از خلط این دو مفهوم جلوگیری خواهد کرد.

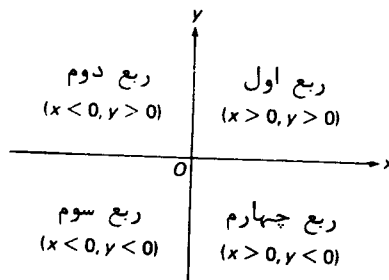
ما هم اکنون یک دستگاه مختصات قائم در صفحه برپا کردیم . به طور کلی ، محورها را می توان با حروفی غیر از  $x$  و  $y$  برچسب زد ، و واحدهای سنجش در امتداد دو محور ممکن است متفاوت باشند . مثلاً ، در هواشناسی می توان محور افقی را با  $t$  برای زمان ، که با ثانیه سنجیده می شود ، و محور قائم را با  $p$  برای فشار هوا ، که با میلی بار سنجیده می شود ، برچسب زد . منظور از طول یک نقطه یعنی مختص آن در امتداد محور افقی ، و منظور از عرض یعنی مختص آن در امتداد محور قائم . این اصطلاحات مفیدند ، زیرا مشکل کمبود اسم برای علامات به کار رفته برای مختصات را برطرف می کنند . حال ، با این ملاحظات ، به صفحه  $xy$  باز می گردیم ، که در آن طول  $x$  و عرض  $y$  بوده ، و واحدهای سنجش در امتداد دو محور یکی هستند .

مثال ۱ . یک ضلع مربعی در امتداد محور  $x$  بوده و اقطارش در نقطه  $(0, \frac{1}{2})$  متقاطعند . رئوس مربع کجا هستند ؟

حل . جواب از شکل ۱۴ واضح است . توجه کنید که طول ضلع مربع ۱ است .



شکل ۱۴



چهار ربع صفحه  $xy$

شکل ۱۵

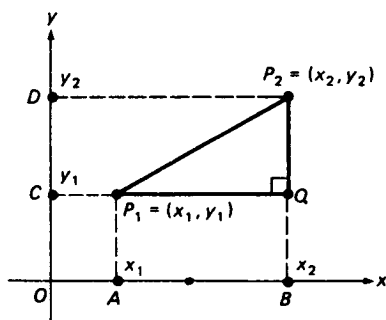
نقطه  $(x, y)$  بر محور  $x$  واقع است اگر و فقط اگر  $y = 0$  ، و بر محور  $y$  قرار دارد اگر و فقط اگر  $x = 0$  . محور مثبت  $x$  مشتمل است بر نقاط  $(x, 0)$  با  $x > 0$  ، و محور منفی  $x$  مشتمل است بر نقاط با  $x < 0$  . به همین نحو ، محور مثبت  $y$  مرکب است از نقاط  $(0, y)$  با  $y > 0$  ، و محور منفی  $y$  مرکب است از نقاط با  $y < 0$  . همانطور که در شکل ۱۵ نموده شده ، محورهای مختصات صفحه  $xy$  را به چهار قسمت ، به نام ربع ، تقسیم می کنند . ربع اول مرکب است از تمام نقاط  $(x, y)$  که در آنها  $x > 0, y > 0$  ، و سه ربع دیگر با شرایط داده شده در شکل بر  $x$  و  $y$  تعریف می شوند .

فرمول فاصله . فاصله بین دو نقطه  $P_1$  و  $P_2$  در صفحه با همان نماد  $|P_1P_2|$  برای نقاط بر خط نموده می شود . قضیه زیر طرز محاسبه این فاصله را نشان می دهد .

قضیه ۶ ( فاصله بین دو نقطه در صفحه ) . فاصله بین دو نقطه  $P_1 = (x_1, y_1)$  و  $P_2 = (x_2, y_2)$  در صفحه با فرمول زیر داده می شود :

$$(۱) \quad |P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

برهان . با رسم عمودهایی از  $P_2$  و  $P_1$  بر محورهای  $x$  و  $y$  ، درمی یابیم که  $P_1P_2$  وتر مثلث قائم الزاویه  $P_1QP_2$  نموده شده در شکل ۱۶ است ، که در آن



شکل ۱۶

$Q$  نقطه  $(x_2, y_1)$  است ، واضح است که  $|P_1Q| = |AB|$  و  $|QP_2| = |CD|$  ، که در آنها  $A$  و  $B$  به مختصات  $x_1$  و  $x_2$  به صورت نقاطی از محور  $x$  در نظر گرفته شده اند ، درحالی که  $C$  و  $D$  به مختصات  $y_1$  و  $y_2$  اند که به صورت نقاطی از محور  $y$  در نظر گرفته شده اند . لذا ، طبق قضیه فیثاغورس و فرمول فاصله بین دو نقطه بر خط ( ر . ک . صفحه

(۲۴)، داریم

$$|P_1P_2|^2 = |P_1Q|^2 + |QP_2|^2 = |AB|^2 + |CD|^2 = |x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2.$$

یا، معادلاً،

$$(۲) \quad |P_1P_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

با جذر گرفتن از طرفین (۲)، فرمول مطلوب (۱) به دست می‌آید.

شکل ۱۶ با فرض  $x_1 < x_2$  و  $y_1 < y_2$  رسم شده است، اما به آسانی دیده می‌شود که، با عکس کردن جهت یکی از این دو نامساوی (یا هر دو)، همان فرمول فاصله (۱) به دست می‌آید.

مثال ۲. فاصله بین نقاط  $P_1 = (1, 7)$  و  $P_2 = (13, 2)$  را بیابید.

حل. بنابر (۱)،

$$\begin{aligned} |P_1P_2| &= \sqrt{(1-13)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{(-12)^2 + 5^2} \\ &= \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13. \end{aligned}$$

مثال ۳. آیا مثلث  $ABC$  به رأسهای  $A = (-1, -4)$ ،  $B = (2, -1)$  و  $C = (-2, 3)$  قائم‌الزاویه است؟

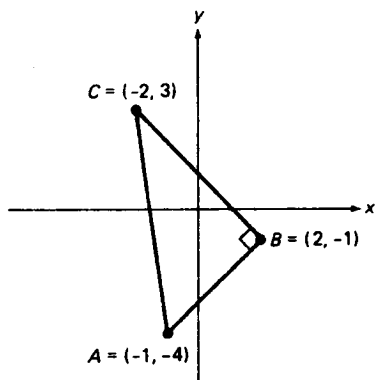
حل. با استفاده از فرمول (۲)، مجذور طول اضلاع  $ABC$  را حساب می‌کنیم، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= (-3)^2 + (-3)^2 = 18, & |BC|^2 &= 4^2 + (-4)^2 = 32, \\ |AC|^2 &= 1^2 + (-7)^2 = 50. \end{aligned}$$

لذا، طول اضلاع  $ABC$  در فرمول فیثاغورس

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$$

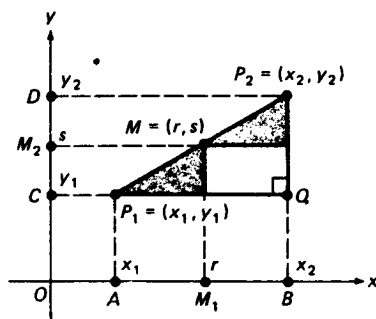
صدق می‌کنند. بنابراین،  $ABC$  یک مثلث قائم‌الزاویه است، که ضلع  $AC$  وتر آن می‌باشد (ر.ک. شکل ۱۷). در اینجا عملاً "از عکس قضیه فیثاغورس استفاده می‌کنیم."



شکل ۱۷

مثال ۴. نقطهء میانی  $M$  پاره خط  $P_1P_2$  و اصل بین نقاط  $P_1 = (x_1, y_1)$  و  $P_2 = (x_2, y_2)$  را بیابید.

حل. با امتحان شکل ۱۸، که تعدیلی از شکل ۱۶ است، می بینیم



$M$  نقطهء میانی پاره خط  $P_1P_2$  است.

شکل ۱۸

که مثلشهای قائم سایه دار همنهشت اند (چرا؟). بنابراین،  $M_1$  و  $M_2$ ، یعنی پای عمودهای وارد از  $M$  به محورهای  $x$  و  $y$ ، نقاط میانی  $AB$  و  $CD$  اند. مثلاً، اگر  $M = (r, s)$ ، بنا بر مثال ۴، صفحه ۲۷،

$$r = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad s = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

و فرمول نقطه میانی را خواهیم داشت:

$$M = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

نمودار معادلات و نامعادلات. منظور از نمودار یک معادله یا نامعادله از دو متغیر  $x$  و  $y$  یعنی مجموعه نقاطی چون  $(x, y)$  در صفحه  $xy$  که مختصاتش در معادله یا نامعادله صدق می‌کنند. مثلاً، "نمودار معادله"

$$xy = 0$$

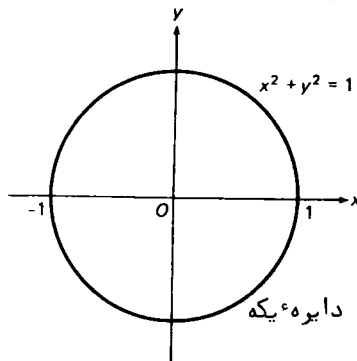
از دو محور مختصات تشکیل شده است، زیرا  $xy = 0$  اگر و فقط اگر  $x = 0$  یا  $y = 0$  (یا هر دو). یکی از متغیرهای  $x$  و  $y$  ممکن است غایب باشد. مثلاً، "نمودار  $x = a$  خط قائم ماربر نقطه  $(a, 0)$  است، حال آنکه نمودار  $y = b$  خط افقی ماربر نقطه  $(0, b)$  می‌باشد.

مثال ۵. نمودار معادله

$$(۳) \quad x^2 + y^2 = 1$$

را رسم کنید.

حل. چون  $x^2 + y^2$  مربع فاصله بین نقطه  $(x, y)$  و مبدأ  $O = (0, 0)$  است، نقطه  $(x, y)$  متعلق به نمودار (۳) است اگر و فقط اگر فاصله بین  $(x, y)$  و  $O$  مساوی ۱ باشد. لذا، نمودار معادله (۳) دایره یکه است؛ یعنی، دایره‌ای به شعاع ۱ و به مرکز  $O$  (ر. ک. شکل ۱۹).



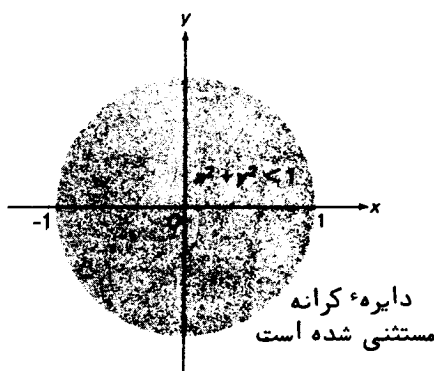
شکل ۱۹

مثال ۶. نمودار نامعادله

$$(۴) \quad x^2 + y^2 < 1$$

را رسم کنید.

حل. بنا بر (۴)، مربع فاصله بین نقطه  $(x, y)$  و مبدأ  $O$  کوچکتر از ۱ است؛ و در نتیجه، همین امر برای خود فاصله درست است. لذا، نمودار (۴) ناحیه داخل دایره یکه است (ناحیه سایه دار در شکل ۲۰).



شکل ۲۰

به همین نحو، نمودار نامعادله  $x^2 + y^2 > 1$  ناحیه خارج دایره یکه است.

دایره‌ها و کامل کردن مربع. با تعمیم مثال ۵، درمی‌یابیم که مختصات نقطه  $(x, y)$  در معادله

$$(۵) \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad (r > 0)$$

صدق می‌کند اگر و فقط اگر مربع فاصله بین  $(x, y)$  و نقطه ثابت  $(a, b)$  مساوی  $r^2$  باشد، یا معادلاً اگر و فقط اگر فاصله بین  $(x, y)$  و  $(a, b)$  مساوی  $r$  باشد. لذا، مختصات  $(x, y)$  در (۵) صدق می‌کنند اگر و فقط اگر  $(x, y)$  بر دایره به شعاع  $r$  و مرکز  $(a, b)$  واقع باشد. توجه کنید که اگر  $a = b = 0$  و  $r = 1$  انتخاب شوند رابطه (۵) به معادله (۳) دایره یکه تحویل می‌شود.

حال فرض کنیم معادله‌ای به شکل

$$(۶) \quad x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$



داده شده باشد، که در آن  $A$ ،  $B$ ، و  $C$  ثابت (اعدادی ثابت) می باشند. آیا این معادله یک دایره است؟ برای جواب دادن به این سؤال، سعی می کنیم (۶) را به شکلی شبیه (۵) برگردانیم. ابتدا در هر یک از عبارات  $x^2 + Ax$  و  $y^2 + By$  مربع را کامل می کنیم؛ یعنی، می نویسیم

$$x^2 + Ax = \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 - \frac{A^2}{4}, \quad y^2 + By = \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 - \frac{B^2}{4}.$$

سپس، با گذاردن این عبارات در معادله (۶)، معادله معادل زیر را به دست می آوریم

$$(۶') \quad \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = D,$$

که در آن

$$D = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C.$$

حال همه چیز به علامت کمیت  $D$  وابسته است. اگر  $D \geq 0$ ، نمودار (۶')، و در نتیجه نمودار (۶)، دایره ای است به شعاع  $\sqrt{D}$  و مرکز  $(-A/2, -B/2)$ ، که اگر  $D = 0$ ، دایره به نقطه  $(-A/2, -B/2)$  "تباہ می شود"، زیرا در این صورت شعاع دایره صفر است. از آن سو، اگر  $D < 0$ ، نقطه ای مانند  $(x, y)$  که مختصاتش در معادله (۶) صدق کنند وجود ندارد، زیرا طرف چپ معادله معادل (۶') همواره نامنفی است. در این حالت گوئیم (۶) نمودار ندارد، یا به طور صریح تر، نمودار (۶) مجموعه تهی است.

مثال ۷. نمودار معادله

$$(۷) \quad x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0$$

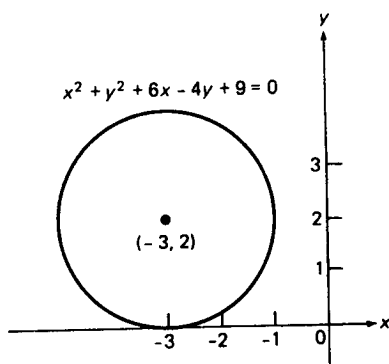
را رسم کنید.

حل. این معادله به شکل (۶) یا (۶') است، که در آن  $A = 6$ ،  $B = -4$ ،  $C = 9$ ،

و

$$D = \frac{6^2}{4} + \frac{(-4)^2}{4} - 9 = 9 + 4 - 9 = 4 > 0.$$

از اینرو، نمودار (۷) دایره ای است به شعاع  $\sqrt{D} = 2$  به مرکز  $(-A/2, -B/2) = (-3, 2)$ . توجه کنید که، همانطور که شکل ۲۱ نشان داده، محور  $x$  بر دایره در نقطه  $(-3, 0)$  مماس است. راه بهتر حل این مسئله آن است که، بدون استفاده از معادلات کلی (۶) و



شکل ۲۱

(۶)، مستقیماً" در (۷) مربعها را کامل کنیم . در واقع ، با گذاردن

$$x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 9, \quad y^2 - 4y = (y - 2)^2 - 4$$

در (۷) ، به دست می آوریم

$$(x + 3)^2 - 9 + (y - 2)^2 - 4 + 9 = 0,$$

یا ، معادلاً ،

$$(۸) \quad (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 4,$$

که فوراً" به عنوان یک معادله دایره به شعاع ۲ و مرکز  $(-3, 2)$  شناخته می شود . از اینرو ، معادله اصلی (۷) نیز این دایره را به عنوان نمودار دارد .

توجه کنید که در سطر دوم از آخر در مثال ۷ می گوئیم "یک" معادله تا معادله . علتش آن است که بی نهایت معادله با یک نمودار وجود دارند . در واقع ، اگر طرفین یک معادله را در عددی ناصفر ضرب کنیم ، اگر جملات یک معادله را از یک طرف به طرف دیگر ببریم ، یا اگر اعمالی جبری ( نظیر محاسبه مربعها ) صریحاً انجام شوند ، معادله جدید همان نمودار معادله قدیم را دارد . مثلاً ، معادلات

$$\frac{1}{4}(x + 3)^2 + \frac{1}{4}(y - 2)^2 = 1$$

و

$$(x + 3)^2 = 4 - (y - 2)^2$$

همان نمودار (۸) را دارند، و همین طور معادله اصلی (۷). لذا، هر یک از این معادلات یک معادله دایره به شعاع ۲ و مرکز  $(-3, 2)$  است.

### مسائل

۱. ✓ نقاط  $A = (2, 0)$ ,  $B = (0, 3)$ ,  $C = (-2, 0)$ ,  $D = (-2, 2)$ ,  $E = (0, -1)$ ,  $F = (2, 2)$  را بر یک کاغذ گراف معمولی بکشید. سپس  $A$  را به  $B$  به  $C$  به  $A$  و نیز  $D$  را به  $E$  به  $F$  به  $D$  وصل کنید. شکل حاصل چیست؟
۲. ✓ فرض کنید شکل مسئله قبل به قدر یک واحد به راست و دو واحد به بالا انتقال یافته باشد. در این صورت  $A, B, C, D, E, F$  به نقاط جدید  $A', B', C', D', E', F'$  می‌روند. این نقاط جدید چه هستند؟
۳. ✓ از نقاط  $(0, 2)$ ,  $(-2, 0)$ ,  $(2, -1)$ ,  $(-2, 1)$ ,  $(0, -2)$ ,  $(2, 0)$  کدامها در ربع چهارم قرار دارند؟
۴. ✓ نشان دهید هرگاه نقاط  $P_1 = (x_1, y_1)$  و  $P_2 = (x_2, y_2)$  بر یک خط افقی واقع باشند، آنگاه  $|P_1 P_2| = |x_1 - x_2|$ ، اما هرگاه بر یک خط قائم واقع باشند، آنگاه  $|P_1 P_2| = |y_1 - y_2|$ .
- فاصله بین هر جفت نقاط زیر را بیابید.

۵. ✓ $(1, 3), (5, 7)$	۶. $(-2, -3), (1, 1)$
۷. ✓ $(1, 3), (1, 4)$	۸. $(6, 2), (4, 2)$
۹. ✓ $(1, -1), (-1, 1)$	۱۰. $(0, 1), (1, 0)$
۱۱. ✓ $(-1, 1), (3, 3)$	۱۲. $(3, 5), (-2, -4)$
۱۳. ✓ $(2, -1), (-1, 3)$	۱۴. $(7, 11), (3, 9)$
۱۵. ✓ $(\pi, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, -\pi)$	۱۶. $(2\sqrt{2}, 4), (2, -\sqrt{2})$

- آیا مثلث به رئوس داده شده قائم الزاویه است؟

۱۷. ✓ $(2, 3), (-3, 3), (1, 1)$	۱۸. $(7, -4), (5, -3), (7, 1)$
۱۹. ✓ $(3, 1), (2, 0), (0, 1)$	۲۰. $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}), (4, 2), (-1, 2)$

- نقطه میانی پاره خط واصل بین هر جفت نقطه را بیابید.

۲۱. ✓ $(-1, 3), (11, 5)$	۲۲. $(3, -2), (-4, 3)$
۲۳. ✓ $(100, -50), (-100, 50)$	۲۴. $(-2, -5), (18, 3)$

۲۵. ✓ نقاط  $A = (4, 0)$ ,  $B = (3, 4)$ ,  $C = (-1, 3)$ ,  $D = (0, -1)$  را رسم کنید. نشان دهید که

شکل  $ABCD$  مربع است. طول ضلع مربع چقدر است؟

۲۶. نقاط میانی اضلاع مربع مسئله قبل را بیابید. معادله دایره به شعاع و مرکز داده شده را بیابید.

۲۸.  $\sqrt{2}, (0, 1)$

۲۷.  $1, (-1, 1)$

۳۰.  $\frac{3}{4}, (-1, 0)$

۲۹.  $3, (4, -5)$

نمودار معادله داده شده را توصیف کنید.

۳۱.  $(x+2)^2 + y^2 = 64$

۳۲.  $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 36$

۳۳.  $(x+5)^2 + (y-2)^2 = 0$

۳۴.  $x^2 + (y-5)^2 = 5$

۳۵.  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$

۳۶.  $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$

معادله دایره‌ای را بیابید که

۳۷.  $(3, 2)$  و  $(-1, 6)$  دو انتهای یک قطر باشند.

۳۸. به شعاع ۱ بوده و محورهای مختصات مثبت بر آن مماس باشند.

۳۹. از نقاط  $(1, 1), (2, 2), (3, 1)$  بگذرد.

معین کنید نقطه  $(1, -2)$  داخل، خارج، یا روی نمودار معادله داده شده است.

۴۰.  $x^2 + y^2 = 1$

۴۱.  $x^2 + y^2 = 5$

۴۲.  $x^2 + y^2 = 9$

۴۳.  $x^2 + y^2 - 10x + 8y = 0$

۴۴.  $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5 = 0$

ناحیه‌ای از صفحه  $xy$  را که با جفت نامساویهای زیر معین شده رسم کنید.

۴۶.  $|x| \geq 1, |y| \geq 2$

۴۵.  $x \leq 2, y \leq -1$

۴۸.  $xy < 0, x^2 + y^2 < 4$

۴۷.  $xy > 0, |y| < 2$

۴۹. با کامل کردن مربع، نشان دهید معادله درجه دو  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  به

ازای  $b^2 > 4ac$  دارای دو ریشه

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

است، به ازای  $b^2 = 4ac$  فقط ریشه  $x = -b/2a$  را دارد، و به ازای  $b^2 < 4ac$  ریشه

(حقیقی) ندارد.

### ۵.۵ خطوط مستقیم و معادلات آنها

شیب خط. فرض کنیم  $L$  یک خط مستقیم مایل در صفحه  $xy$  بوده، و  $P_1 = (x_1, y_1)$  و  $P_2 = (x_2, y_2)$  دو نقطه متمایز از  $L$  باشند. منظور از شیب  $L$  یعنی نسبت

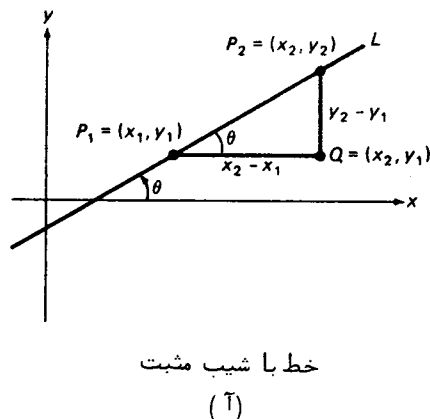
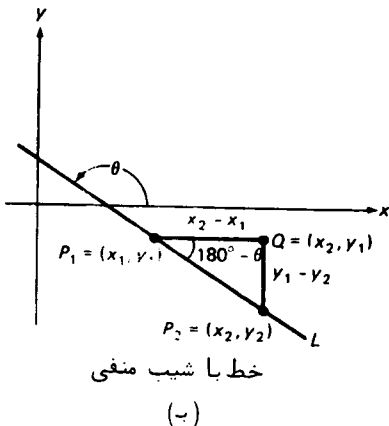
$$(۱) \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

فرض مایل بودن  $L$  تضمین می‌کند که  $x_1 \neq x_2$ ؛ در نتیجه، مخرج این نسبت ناصفر بوده و شیب  $m$  تعریف شده است. شیب یک خط قائم تعریف نشده است، زیرا در چنین خط  $x_1 = x_2$

برای تعبیر هندسی شیب، فرض می‌کنیم نقطه  $P_1$ ، وقتی از چپ به راست می‌رویم، پیش از نقطه  $P_2$  بر خط  $L$  است. در واقع، این فرض خللی به کلیت وارد نمی‌کند، زیرا تعویض برچسبهای ۱ و ۲ در نقاط  $P_1$  و  $P_2$  و مختصات آنها مقدار  $m$  داده شده بافرمول (۱) را تغییر نمی‌دهد. فرض کنیم نقطه برخورد خط مار بر  $P_1$  موازی محور  $x$  و خط مار بر  $P_2$  موازی محور  $y$  باشد؛ در نتیجه، مثلث قائم الزاویه‌ای به اضلاع  $P_1Q$  و  $P_2Q$  است. پس شیب مساوی است با

$$(۲) \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{|P_2Q|}{|P_1Q|} > 0$$

اگر، مثل شکل ۲۲ (آ)، خط  $L$  از چپ به راست بالا رود. کمیت  $|P_2Q|/|P_1Q|$  نسبت طول پاره خط قائم  $P_2Q$  به طول پاره خط افقی  $P_1Q$  است. در مهندسی راه و ساختمان، این



را نسبت پرش به دوش می نامند ، و میزان صعود یک جاده کوهستانی را می سنجند . هرگاه خط  $L$  از چپ به راست سقوط کند ، آنگاه ، همانند شکل ۲۲ (ب) ، به جای (۲) خواهیم داشت

$$(۲) \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1} = -\frac{|P_2Q|}{|P_1Q|} < 0,$$

از دید مهندسی ، یک جاده با شیب منفی  $m$  به پای تپه می رود ، و  $|m|$  میزان پایین رفتن آن را می سنجد .

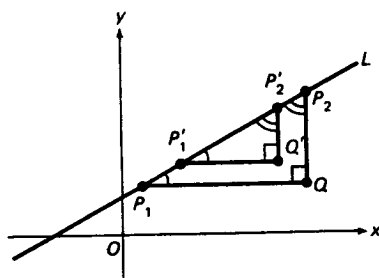
به بیان دیگر ، وقتی یک نقطه در امتداد خط  $L$  از  $P_1$  به  $P_2$  می رود ، مختص  $x$  آن از  $x_1$  به  $x_2$  تغییر می کند ، درحالی که مختص  $y$  از  $y_1$  به  $y_2$  تغییر خواهد کرد . لذا ،

$$\text{شیب} = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{تغییر در } y}{\text{تغییر در } x} = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

که در نوشتن  $\Delta y / \Delta x$  نماد نمو که در فصل ۲ معرفی می شود پیش بینی شده است (  $\Delta$  دلتای بزرگ یونانی است ) .

باید توجه کرد که شیب خط  $L$  به نقاط  $P_1$  و  $P_2$  که در محاسبه شیب به کار رفتند بستگی ندارد . این صرفاً " بدان خاطر است که هر دو مثلث قائم الزاویه که وترهایشان در امتداد خط  $L$  بوده و اضلاع دیگرشان موازی محورهای مختصات باشند متشابهند " . در نتیجه ، نسبتهای اضلاع نظیرشان مساوی می باشند . به عنوان مثال ، در شکل ۲۳ شیب برابر است با

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{|P_2Q|}{|P_1Q|}$$



شکل ۲۳

اگر با استفاده از نقاط  $P_1 = (x_1, y_1)$ ,  $P_2 = (x_2, y_2)$ ,  $Q = (x_2, y_1)$  حساب شود، و

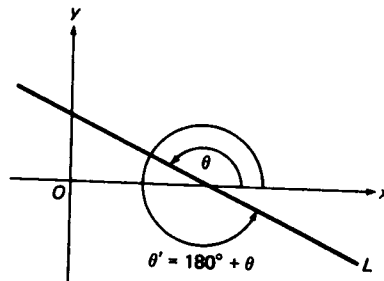
$$m' = \frac{y'_2 - y'_1}{x'_2 - x'_1} = \frac{|P'_2Q'|}{|P'_1Q'|}$$

اگر با استفاده از نقاط  $P_1 = (x_1', y_1')$ ,  $P_2 = (x_2', y_2')$ ,  $Q' = (x_2', y_1')$  محاسبه گردد. اما،  
بنابر تشابه دو مثلث قائم الزاویه  $P_1QP_2$  و  $P_1Q'P_2$ ،

$$\frac{|P_2Q|}{|P_1Q|} = \frac{|P_2Q'|}{|P_1Q'|}$$

در نتیجه،  $m = m'$

میل خط. منظور از زاویه میل، یا فقط میل، خط مستقیم  $L$  در صفحه  $xy$  یعنی کوچکترین زاویه  $\theta$  بین محور مثبت  $x$  و  $L$ ، که از محور  $x$  به  $L$  در جهت خلاف عقربه‌های ساعت سنجیده می‌شود ( $\theta$  تتای کوچک یونانی است). هر خط موازی محور  $x$  میل صفر دارد. از شکل ۲۴ واضح است که شیب  $\theta$  هر خط مستقیم باید در شرط  $0^\circ \leq \theta < 180^\circ$  صدق



میل  $L$  مساوی  $\theta$  است نه  $\theta'$

شکل ۲۴

کند. به عنوان مثال، میل خط  $L$  در شکل مساوی  $150^\circ$  است نه  $330^\circ$  یا  $-30^\circ$ .  
به کمک قدری مثلثات<sup>۱</sup>، به آسانی فرمولی ثابت می‌شود که شیب  $m$  خط  $L$  را به  
میلش  $\theta$  مربوط می‌کند. فرض کنیم  $L$  با رفتن از چپ به راست بالا می‌رود. در این صورت،  
مثل شکل ۲۲ (آ)،

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan \theta,$$

۱. مثلثات در بخش ۳.۱ مرور خواهد شد. ما فعلاً "فقط به تعریف تانژانت و فرمولهای  
 $\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$  و  $\tan(90^\circ + \theta) = -1/\tan \theta$ ، که در مثال ۳، صفحه ۹۶، ثابت  
شده‌اند، نیاز داریم.

که در آن  $\tan \theta$  تانژانت زاویه  $\theta$  است؛ یعنی، طول ضلع مقابل  $\theta$  در مثلث قائم  $P_1QP_2$  بخش بر طول ضلع مجاور به  $\theta$ . اگر میل  $\theta$  بین  $90^\circ$  و  $180^\circ$  واقع باشد، خط  $L$  با رفتن از چپ به راست پایین می‌آید، اما فرمول

$$(۳) \quad m = \tan \theta$$

هنوز به قوت خود باقی است. در واقع، در این حالت، مثل شکل ۲۲ (ب)،

$$m = -\frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1} = -\tan(180^\circ - \theta),$$

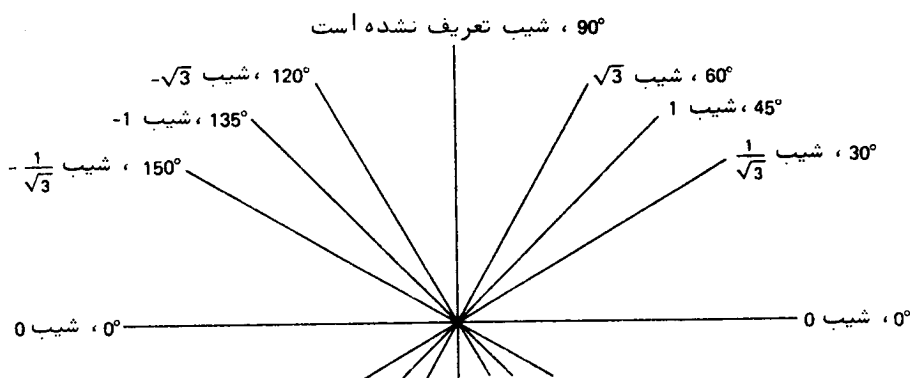
که در آن، بنابر فرمول آشنایی از مثلثات،

$$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$$

در نتیجه، مثل قبل،

$$m = -\tan(180^\circ - \theta) = \tan \theta,$$

شکل ۲۵ خطوط مختلف، همراه با میلیها و شیبهای آنها را که با فرمول (۳) به هم مربوط شده‌اند، را نشان می‌دهد. توجه کنید که یک خط قائم، با وجود آنکه شیبش تعریف نشده است، دارای میل  $90^\circ$  است.



مقایسه میلیها و شیبها

شکل ۲۵

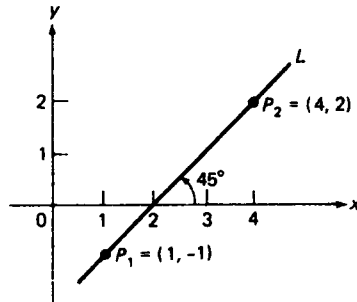
مثال ۱. شیب و میل خط  $L$  ماربر نقاط  $P_1 = (1, -1)$  و  $P_2 = (4, 2)$  را بیابید.

حل. در اینجا

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - (-1)}{4 - 1} = \frac{3}{3} = 1.$$



لذا، طبق (۳) و تعریف میل،  $\theta$  کوچکترین زاویه مثبتی است که تانژانت آن مساوی ۱ است؛ یعنی،  $45^\circ$  (ر.ک. شکل ۲۶).



شکل ۲۶

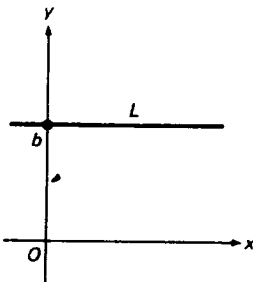
مثال ۲. شیب  $m$  خطی را بیابید که میلش  $15^\circ$  است.

حل. در اینجا، تا پنج رقم اعشار،

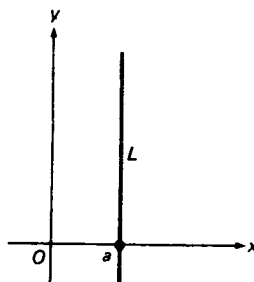
$$m = \tan 15^\circ = 0.26795$$

که در آن از جدول تانژانتها کمک گرفته‌ایم یا از یک ماشین حساب استفاده کرده‌ایم.

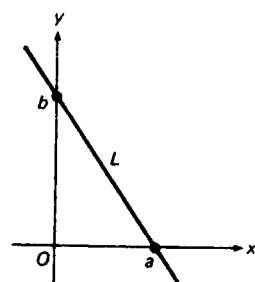
قطعه‌های خط. با توجه به شکل ۲۷ (آ)، می‌بینیم که اگر خط مستقیم  $L$  مایل باشد، یعنی نه افقی باشد نه قائم،  $L$  محور  $x$  را در نقطه  $(a, 0)$  و محور  $y$  را در نقطه  $(0, b)$  قطع می‌کند. ما (عدد)  $a$  را قطع  $x$ ،  $L$  و  $b$  را قطع  $y$ ،  $L$  می‌نامیم، و وقتی از اصطلاح



فقط قطع  $y$   
(پ)



فقط قطع  $x$   
(ب)



دو قطع  
(آ)

شکل ۲۷

قطع استفاده می‌کنیم منظور قطع  $x$  یا قطع  $y$  است. هر خط غیرمایل فقط یک قطع دارد. لذا، اگر  $L$  مثل شکل ۲۷ (ب) قائم باشد،  $L$  دارای قطع  $x$ ،  $a$  است ولی قطع  $y$  ندارد، درحالی که اگر  $L$  مثل شکل ۲۷ (پ) افقی باشد،  $L$  دارای قطع  $y$ ،  $b$  است ولی قطع  $x$  ندارد. این در مورد محورهای مختصات نیز صادق است؛ یعنی، محور  $y$  فقط قطع  $x$  (مساوی ۰) دارد، و محور  $x$  فقط قطع  $y$  (نیز مساوی ۰) خواهد داشت.

قضیه ۷ (معادلات نقطه - شیب و شیب - قطع خط). معادله خط به شیب  $m$  و ماربر نقطه داده شده  $P_1 = (x_1, y_1)$  عبارت است از

$$(4) \quad y - y_1 = m(x - x_1).$$

معادله خط به شیب  $m$  و قطع  $y$ ،  $b$  مساوی است با

$$(5) \quad y = mx + b.$$

برهان. فرض کنیم  $P = (x, y)$  نقطه متغیری از خط باشد. در این صورت، اگر  $x \neq x_1$ ، خط دارای شیب  $(y - y_1)/(x - x_1)$  است، زیرا از  $P_1$  و  $P$  می‌گذرد. از مساوی قرار دادن این عبارت با شیب  $m$ ، به دست می‌آوریم

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m,$$

که با (۴) معادل است. معادله (۴) برای مقدار مستثنی شده  $x = x_1$  نیز برقرار است (چرا؟). اگر خط دارای قطع  $y$ ،  $b$  باشد، نقطه  $(0, b)$  بر خط قرار دارد، و با فرض  $x_1 = 0, y_1 = b$ ، به دست می‌آوریم  $y - b = mx$ ، که معادل (۵) است.

مثال ۳. بنابر (۴)، معادله خط به شیب  $-2$  و ماربر نقطه  $(-1, 5)$  عبارت است از

$$y = -2(x + 1) + 5 = -2x + 3.$$

بنابر (۵)، معادله خط به شیب  $9$  و قطع  $y$ ،  $-7$  مساوی است با

$$y = 9x - 7.$$

مثال ۴. معادله

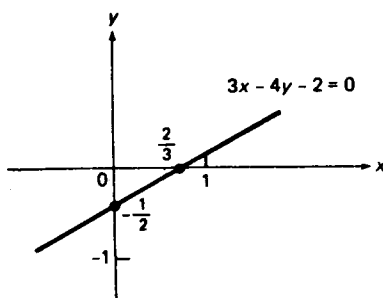
$$(6) \quad 3x - 4y - 2 = 0$$

را رسم کنید.

حل. معادله (۶) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$(۶) \quad y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}.$$

اما فوراً " معلوم می‌شود که (۶) معادله خطی است به شیب  $\frac{3}{4}$  و قطع  $y$ ،  $-\frac{1}{2}$  (ر. ک. شکل ۲۸). این خط دارای قطع  $x$ ،  $\frac{2}{3}$  است، که با گذاردن  $y=0$  در (۶) و حل آن نسبت به  $x$  معلوم می‌شود.



شکل ۲۸

به‌طور کلی، همان‌طور که به آسانی ثابت می‌شود، نمودار هر معادله به شکل

$$(۷) \quad Ax + By + C = 0,$$

که در آن  $A$ ،  $B$ ، و  $C$  ثابت‌اند، خطی مستقیم است؛ و به عکس، هر خط مستقیم نمودار معادله‌ای به این شکل می‌باشد؛ در اینجا البته فرض شده که  $A$  و  $B$  هر دو صفر نباشند. بنابراین، هر معادله به شکل (۷) را خطی می‌گویند.

قضیه ۸ (معادلات دوتقطه‌ای و دوقطعی خط). معادله خط ماربر دو نقطه  $P_1 = (x_1, y_1)$  و  $P_2 = (x_2, y_2)$  عبارت است از

$$(۸) \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

اگر  $x_1 \neq x_2$ . معادله خط با قطع  $x$ ،  $a$  و قطع  $y$ ،  $b$  مساوی است با

$$(۹) \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

اگر  $a \neq 0$ ،  $b \neq 0$ .

برهان. با گذاردن  $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$  در (۴)، رابطه (۸) به دست می‌آید.

# پیش حساب ۵۱

هرگاه خط‌دارای قطع  $x$ ،  $a$  و قطع  $y$ ،  $b$  باشد، آنگاه دو نقطه  $(a, 0)$  و  $(0, b)$  بر خط واقعند. لذا، برای این خط، می‌توان در (۸) اختیار کرد  $x_1 = a$ ،  $y_1 = 0$  و  $x_2 = 0$ ،  $y_2 = b$  تا به دست آید

$$y = \frac{b}{-a}(x - a),$$

یا، معادلا،

$$bx + ay = ab,$$

که، پس از تقسیم بر  $ab$ ، به رابطه (۹) تحویل می‌شود.

مثال ۵. بنابر (۸)، معادله خط‌ماربر نقاط  $(-2, 3)$  و  $(4, -1)$  عبارت است از

$$y - 3 = \frac{-1 - 3}{4 - (-2)}(x + 2) = -\frac{2}{3}(x + 2),$$

یا، معادلا،

$$2x + 3y - 5 = 0$$

که به شکل (۷) است. بنابر (۹)، معادله خط‌با قطع  $x$ ،  $-2$  و قطع  $y$ ،  $5$  مساوی است با

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{5} = 1$$

یا، معادلا،

$$5x - 2y + 10 = 0.$$

حال نظرم‌ان را به جفت‌هایی از خطوط مستقیم معطوف می‌کنیم.

مثال ۶. نقطه برخورد  $P$  دو خط به معادلات

$$(10) \quad x + y - 3 = 0, \quad x - 2y + 2 = 0$$

را بیابید.

حل. نقطه  $P$  بر هر دو خط است؛ در نتیجه، مختصات  $P$  باید در هر دو معادله (۱۰) صدق کنند. لذا، یافتن  $P$  به‌طور جبری معادل حل دستگاه (۱۰) مرکب از دو معادله خطی با دو مجهول  $x$  و  $y$  است. برای این کار، دو برابر معادله اول را به دومی

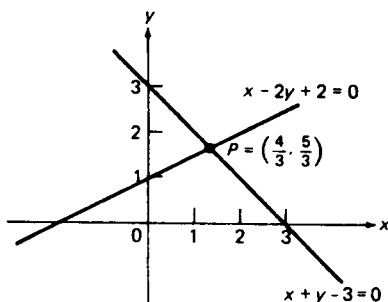
می‌افزاییم:

$$2(x + y - 3) + (x - 2y + 2) = 0.$$

پس جملات شامل  $y$  حذف شده، فقط معادله

$$3x - 4 = 0$$

با جواب  $x = \frac{4}{3}$  باقی می‌ماند. حال  $x = \frac{4}{3}$  را در یکی از معادلات اصلی قرار داده، به دست می‌آوریم  $y = \frac{5}{3}$ . همانطور که شکل ۲۹ نشان داده،  $P = (\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$  نقطه برخورد دو خط داده شده می‌باشد.



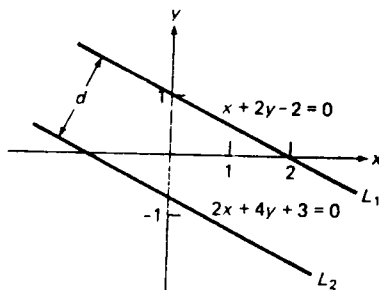
شکل ۲۹

خطوط موازی، واضح است که دو خط در صفحه  $xy$  موازیند اگر و فقط اگر دارای یک میل باشند. لذا، دو خط غیرمایل موازیند اگر و فقط اگر یک شیب داشته باشند. البته، جمیع خطوط قائم موازیند.

مثال ۷. دو خط  $L_1$  و  $L_2$  به معادلات

$$(11) \quad x + 2y - 2 = 0, \quad 2x + 4y + 3 = 0$$

دارای شیب مساوی  $-\frac{1}{2}$  اند؛ و در نتیجه، موازی می‌باشند (ر.ک. شکل ۳۰). اگر به حل



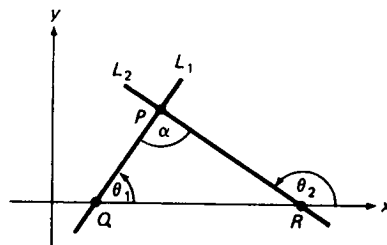
شکل ۳۰

دستگاه معادلات (۱۱) بپردازید، به سرعت به مشکل برخورد خواهید خورد. در واقع، تفریق دوبرابر معادله اول از معادله دوم نتیجه می دهد  $7 = 0$ ، که نادرست است. پس نتیجه می شود که دستگاه (۱۱) جواب ندارد. به طور هندسی، این امر معادل آن است که خطوط موازی متمایز هم را قطع نمی کنند.

خطوط عمود برهم. حال شرطی برای عمود بودن دو خط، یعنی برای آنکه در زاویه قائمه متقاطع باشند، بیان می داریم.

قضیه ۹ (شرط تعامد). دو خط مایل برهم عمودند اگر و فقط اگر حاصل ضرب شیبهایشان ۱- باشد.

برهان. یک خط، که آن را  $L_1$  می نامیم، دارای شیب مثبت  $m_1$  و زاویه میل  $\theta_1$  بین  $0^\circ$  و  $90^\circ$  است، و خط دیگر، که آن را  $L_2$  می نامیم، دارای شیب منفی  $m_2$  و زاویه میل  $\theta_2$  بین  $90^\circ$  و  $180^\circ$  است. می توان فرض کرد محور  $x$  زیر نقطه برخورد  $P$  خطوط  $L_2$  و  $L_1$  قرار دارد (در غیراین صورت، می توان محور  $x$  جدید را موازی محور قدیم گرفت با نقطه برخورد بالای آن، اما این شیب خطوط را تغییر نمی دهد). لذا، وضعیتی مانند شکل ۳۱ داریم، که در آن  $\theta_1$  و  $\alpha$  (آلفای کوچک یونانی) زوایای درونی مثلث  $PQR$  و  $\theta_2$  یک



شکل ۳۱

زاویه بیرونی  $PQR$  است. هر زاویه بیرونی یک مثلث مساوی مجموع زوایای درونی غیر مجاور به آن است. بنابراین،  $\theta_2 = \alpha + \theta_1$ ، یا معادلاً  $\alpha = \theta_2 - \theta_1$ . هرگاه  $L_2$  و  $L_1$  برهم عمود باشند، آنگاه  $\alpha = 90^\circ$  و، بنابر فرمول آشنایی از مثلثات،

$$m_2 = \tan \theta_2 = \tan (90^\circ + \theta_1) = -\frac{1}{\tan \theta_1},$$

در نتیجه،

$$m_1 m_2 = \tan \theta_1 \left( -\frac{1}{\tan \theta_1} \right) = -1.$$

به عکس، هرگاه  $m_1 m_2 = \tan \theta_1 \tan \theta_2 = -1$ ، آنگاه

$$\tan \theta_2 = -\frac{1}{\tan \theta_1} = \tan (90^\circ + \theta_1),$$

که ایجاب می‌کند که  $\theta_2 = 90^\circ + \theta_1$  یا  $\alpha = 90^\circ$ . در نتیجه،  $L_1$  و  $L_2$  برهم عمودند.

لذا، دو خط مایل به شیبهای  $m_1$  و  $m_2$  برهم عمودند اگر و فقط اگر

$$m_1 m_2 = -1,$$

یعنی، اگر فقط اگر شیب هر خط قرینه متقابل شیب خط دیگر باشد.

تبصره. در اثبات اینکه  $\tan \theta_2 = \tan (90^\circ + \theta_1)$  ایجاب می‌کند که  $\theta_2 = 90^\circ + \theta_1$  "تلوّیحا" براین امر تکیه داشتیم که  $\theta_2$  و  $\theta_1 + 90^\circ$  هر دو در بازه  $90^\circ < \theta < 180^\circ$  قرار دارند. این تضمین می‌کند که هر دو تانژانت تعریف شده‌اند و تانژانت‌های دوزاویه  $\theta_2$  و  $\theta_1 + 90^\circ$  مساویند فقط اگر خود زوایا مساوی باشند.

مثال ۸. تحقیق کنید که دو خط به معادلات  $2x + 5y - 7 = 0$  و  $15x - 6y + 4 = 0$  برهم عمودند.

حل. خط اول به شیب  $-\frac{2}{5}$  و خط دوم به شیب  $\frac{5}{6}$  است. چون  $-\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{6} = -1$ ، خطوط برهم عمودند.

مثال ۹. عمود منصف پاره خط به نقاط انتهایی  $P_1 = (-4, 3)$  و  $P_2 = (2, -1)$  را بیابید.

حل. نقطه میانی پاره خط  $P_1 P_2$  نقطه

$$\left( \frac{-4+2}{2}, \frac{3-1}{2} \right) = (-1, 1)$$

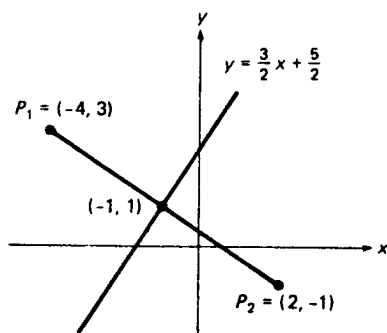
است (ر.ک. مثال ۴، صفحه ۲۷)، و  $P_1 P_2$  به شیب

$$\frac{-1-3}{2-(-4)} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

است. از اینرو، عمود منصف  $P_1P_2$  خط ماربر  $(-1, 1)$  به شیب  $\frac{3}{2}$ ، مساوی قرینه متقابل  $-\frac{3}{2}$  می باشد. بنابراین قرینه  $\gamma$ ، معادله این خط خواهد بود

$$y = \frac{3}{2}(x + 1) + 1 = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$$

(ر. ک. شکل ۳۲)



شکل ۳۲

فاصله بین یک نقطه و یک خط. بالاخره، قضیه ای ثابت می کنیم که مطالب این بخش را در خود جمع داشته و به خودی خود اهمیت قابل توجهی دارد.

قضیه ۱۰ (فاصله بین نقطه و خط). فاصله  $d$  بین نقطه  $P_1 = (x_1, y_1)$  و خط  $L$  به معادله

$$(12) \quad Ax + By + C = 0$$

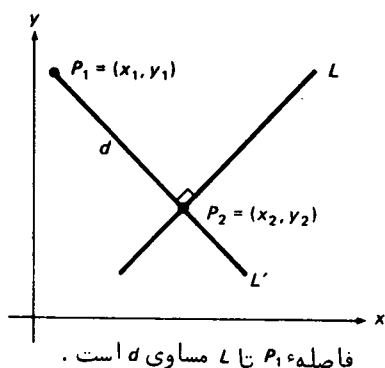
مساوی است با

$$(13) \quad d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

برهان. همانند شکل ۳۳، فرض کنیم  $P_2 = (x_2, y_2)$  پای عمود مرسوم از  $P_1$  به  $L$  باشد. در این صورت، فاصله  $d$  بین  $P_1$  و  $L$  مساوی طول پاره خط  $P_1P_2$  تعریف می شود. چون شیب  $L$  مساوی  $-A/B$  است، با حل (۱۲) نسبت به  $y$  می توان دید که شیب خط  $L'$  ماربر  $P_1$  عمود بر  $L$  مساوی  $B/A$ ، یعنی قرینه متقابل  $-A/B$ ، است. لذا، معادله  $L'$  خواهد بود

$$y - y_1 = \frac{B}{A}(x - x_1).$$





شکل ۳۳

اما  $P_2$  بر  $L'$  قرار دارد. بنابراین،

$$y_2 - y_1 = \frac{B}{A}(x_2 - x_1),$$

یا، معادلاً،

$$(14) \quad \frac{x_2 - x_1}{A} = \frac{y_2 - y_1}{B}.$$

اگر نسبت (۱۴) را با  $q$  نشان دهیم، درمی یابیم که

$$x_2 - x_1 = Aq, \quad y_2 - y_1 = Bq;$$

و در نتیجه،

$$(15) \quad d = |P_1 P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{A^2 q^2 + B^2 q^2} = \sqrt{A^2 + B^2} |q|.$$

اما  $P_2$  نیز بر  $L$  واقع است؛ در نتیجه،  $x_2$  و  $y_2$  در معادله (۱۲) صدق می کنند. بنابراین،

$$Ax_2 + By_2 + C = A(Aq + x_1) + B(Bq + y_1) + C = 0.$$

با حل آن نسبت به  $q$ ، به دست می آوریم

$$(16) \quad q = -\frac{Ax_1 + By_1 + C}{A^2 + B^2}.$$

بالاخره، با گذاردن (۱۶) در (۱۵)، رابطه (۱۳) به دست خواهد آمد.

در اثبات قضیه ۱۰ تلویحا "فرض کرده ایم هر دوی  $A$  و  $B$  ناصفر باشند. لازم است

تحقیق شود که (۱۳) حتی اگر  $A$  یا  $B$  صفر باشد نیز صحیح است.

مثال ۱۰. فاصله بین نقطه  $(3, 1)$  و خط  $3x + 4y - 3 = 0$  را بیابید.

حل. البته، منظور از خط  $3x + 4y - 3 = 0$  یعنی خط به معادله  $3x + 4y - 3 = 0$  (این نوع زبان اختصاری مرسوم است). به کمک (۱۳)، درمی یابیم که

$$d = \frac{|3(3) + 4(1) - 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2.$$

مثال ۱۱. فاصله  $d$  بین خطوط موازی در مثال ۷ را بیابید.

حل. واضح است که  $d$  مساوی فاصله بین  $L_1$  و یک نقطه  $L_2$  است، یا بین  $L_2$  و یک نقطه  $L_1$  می باشد (ر.ک. شکل ۳۰). نقطه  $(0, 1)$  بر  $L_1$  واقع است؛ و لذا،

$$d = \frac{|2(0) + 4(1) + 3|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{7}{\sqrt{20}}.$$

### مسائل

با استفاده از جدول تانژانتها و یک ماشین حساب علمی، شیب خط با میل داده شده را (تا سه رقم اعشار) بیابید.

۳۰° ✓	۲۰° ✓	۱۰۰°
۶۰°	۵۰° ✓	۱۴۰°

شیب خط ماربر جفت نقاط داده شده را بیابید.

۸۰°	۷۰° ✓	۲۰°
۱۰°	۹۰° ✓	۱۱۰° ✓

میل خط ماربر بر جفت نقاط داده شده را بیابید.

۱۳° ✓	۱۲°
۱۵° ✓	۱۴°
	۱۶°

۱۷. نشان دهید که  $y = mx$  معادله خطی است به شیب  $m$  ماربر مبدأ.

معادله خطی را بیابید به شیب  $m$  که از نقطه داده شده  $P$  بگذرد.

$$m = -1, P = (2, -1) \cdot ۱۹✓$$

$$m = 2, P = (1, 2) \cdot ۱۸$$

$$m = -2, P = (-1, -2) \cdot ۲۱✓$$

$$m = \frac{1}{2}, P = (3, 1) \cdot ۲۰$$

$$m = 1, P = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \cdot ۲۲$$

معادله خطی را بیابید به شیب  $m$  و قطع  $y$ ،  $b$ .

$$m = 3, b = 0 \cdot ۲۴$$

$$m = \frac{2}{3}, b = 3 \cdot ۲۳✓$$

$$m = -\frac{1}{2}, b = 1 \cdot ۲۶$$

$$m = 0, b = -2 \cdot ۲۵✓$$

$$m = -7, b = -3 \cdot ۲۷✓$$

۲۸. تحقیق کنید هرگاه خطی قطع  $x$ ،  $a$  و قطع  $y$ ،  $b$  داشته باشد، آنگاه  $a = b = 0$

یا  $a$  و  $b$  هر دو ناصفرند.

شیب  $m$ ، قطع  $x$ ،  $a$ ، و قطع  $y$ ،  $b$  خط داده شده را بیابید.

$$2x + 3y - 5 = 0 \cdot ۳۰$$

$$5x - y + 3 = 0 \cdot ۲۹✓$$

$$3x + 2y = 0 \cdot ۳۲$$

$$5x + 2y + 2 = 0 \cdot ۳۱✓$$

$$2y - 4 = 0 \cdot ۳۳✓$$

معادله خط ماربر جفت نقاط داده شده را بیابید.

$$(-\frac{1}{2}, 0), (0, \frac{1}{2}) \cdot ۳۵✓$$

$$(2, -5), (3, 2) \cdot ۳۴$$

$$(5, 3), (-1, 6) \cdot ۳۷✓$$

$$(-3, 1), (7, 8) \cdot ۳۶$$

$$(-3, -7), (-4, -5) \cdot ۳۸$$

معادله خط با قطع  $x$ ،  $a$  و قطع  $y$ ،  $b$  را بیابید.

$$a = -\frac{1}{3}, b = -1 \cdot ۴۰$$

$$a = -1, b = 2 \cdot ۳۹✓$$

$$a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{8} \cdot ۴۲$$

$$a = 4, b = -\frac{1}{2} \cdot ۴۱✓$$

$$a = 5, b = \frac{1}{3} \cdot ۴۳✓$$

اگر میل خطی مقدار داده شده زیر باشد، قطع  $x$ ،  $a$  و قطع  $y$ ،  $b$  چگونه به هم

مربوطند؟

$$135^\circ \cdot ۴۴✓$$

$$60^\circ \cdot ۴۵✓$$

$$45^\circ \cdot ۴۶✓$$

نقطه برخورد جفت خطوط داده شده را بیابید.

$$5x + y - 2 = 0, 2x - 2y + 1 = 0 \cdot ۴۷✓$$

$$3x - 2y + 4 = 0, 3x + y - 5 = 0 \cdot ۴۸$$

$$2x + 6y - 1 = 0, x + 3y + 4 = 0 \cdot ۴۹✓$$

$$-4x + 5y + 1 = 0, 3x + 4y + 7 = 0 \cdot ۵۰$$

معادله خط ماربر نقطه  $P$  موازی خط داده شده را بیابید .

$$P = (0, 0), x + y + 1 = 0 \cdot ۵۱✓$$

$$P = (2, -3), 3x - 7y + 3 = 0 \cdot ۵۲$$

$$P = (1, 2), x + 9y - 11 = 0 \cdot ۵۳✓$$

$$P = (-4, 1), 16x - 24y - 7 = 0 \cdot ۵۴$$

معادله خط ماربر نقطه  $P$  عمود بر خط داده شده را بیابید .

$$P = (0, 0), 3x - y + 2 = 0 \cdot ۵۵✓$$

$$P = (2, 3), 4x + 3y + 5 = 0 \cdot ۵۶$$

$$P = (-1, 4), x - 2y - 7 = 0 \cdot ۵۷✓$$

$$P = (0, 5), 2x - 5y + 6 = 0 \cdot ۵۸$$

معادله عمود منصف پاره خط واصل بین نقاط داده شده را بیابید .

$$(7, 4), (-3, 5) \cdot ۶۰ \quad (2, 1), (1, 2) \cdot ۵۹✓$$

$$(-5, -2), (6, -4) \cdot ۶۲ \quad (3, 3), (0, -1) \cdot ۶۱✓$$

فاصله بین نقطه  $P$  و خط داده شده را بیابید .

$$P = (2, -1), 4x + 3y + 10 = 0 \cdot ۶۳✓$$

$$P = (0, 3), 5x - 12y - 29 = 0 \cdot ۶۴$$

$$P = (-2, 3), 2x - y - 3 = 0 \cdot ۶۵✓$$

$$P = (1, -2), x - 2y - 5 = 0 \cdot ۶۶$$

فاصله بین جفت خطوط موازی داده شده را بیابید .

$$3x - 4y - 10 = 0, 6x - 8y + 5 = 0 \cdot ۶۷✓$$

$$5x - 12y + 26 = 0, 5x - 12y - 13 = 0 \cdot ۶۸$$

$$4x - 3y + 15 = 0, 8x - 6y + 25 = 0 \cdot ۶۹$$

$$24x - 10y + 39 = 0, 12x - 5y - 26 = 0 \cdot ۷۰✓$$

اصطلاحات و مباحث کلیدی

مجموعه ها و اعداد ، مجموعه تهی

اعداد گویا و گنگ ، اعداد حقیقی و خط حقیقی

محاسبات جبری با نامساویها  
 ماکزیمم و مینیمم یک مجموعه از  $n$  عدد  
 توانها و ریشهها، قوانین نماها  
 قدرمطلق و نامساوی مثلثی  
 بازه‌های بسته، باز، و نیمباز؛ بازه‌های نامتناهی  
 همسایگیها و همسایگیهای سفته  
 جفت‌های مرتب و مختصات قائم  
 فاصله بین دو نقطه در صفحه  
 نمودارهای معادلات و نامعادلات  
 معادلات دوایر و کامل کردن مربع  
 شیب، میل، و قطعهای خط  
 معادلات نقطه - شیب و شیب - قطع خط  
 شرط تعامد  
 فاصله بین نقطه و خط

### مسائل تکمیلی

مجموعه تمام عناصر متعلق به دست کم یکی از دو مجموعه  $A$  و  $B$  اجتماع  $A$  و  $B$  نام دارد و با  $A \cup B$  نموده می‌شود، و مجموعه تمام عناصر متعلق به هر دوی  $A$  و  $B$  اشتراک  $A$  و  $B$  نام دارد و با  $A \cap B$  نموده می‌شود.  $A \cup B$  و  $A \cap B$  را در صورتی بیابید که

$$1. A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$2. A = \{x: x^2 = 4\}, B = \{x: 2x = 4\}$$

$$3. A = \{x: x \geq 1\}, B = \{x: |x| > 1\}$$

$$4. A = \{x: x^2 - 2x + 1 = 0\}, B = \{x: x^2 + 1 = 0\}$$

دو مجموعه  $A$  و  $B$  داده شده‌اند. منظور از تفاضل بین  $A$  و  $B$ ، که با  $A - B$  نموده می‌شود، یعنی مجموعه تمام عناصر متعلق به  $B$  ولی غیر متعلق به  $A$ . فرض کنید  $A = \{1, 2, 3\}$ .  $A - B$  را در صورتی بیابید که

$$5. B = \{1, 2\} \quad 6. B = \{4, 5\}$$

$$7. B = \emptyset \quad 8. B = \{1, 2, 3\}$$

$$9. 16 \cdot 8^2 \cdot 4^3 \cdot 2^4 \text{ را به صورت توانی از } 2 \text{، و به صورت توانی از } 4 \text{ بیان کنید.}$$

$$10. \text{ نشان دهید که اگر } n \text{ زوج باشد، } a^n \text{ به ازای هر } a \text{ نامنفی است، درحالی که اگر } n$$

فرد باشد،  $a$  با  $a \neq 0$  همعلامت خواهد بود.

۱۱. عدد گویای دیگری بین  $\frac{1}{100}$  و  $\frac{1111}{10000}$  قرار دهید.

۱۲. فرض کنید  $r = m/n$  عددی گویا به صورت تحویل ناپذیر، با  $n$  مثبت، باشد. نشان

دهید که اگر  $n$  فرد باشد،  $a$  به ازای  $a$  ی منفی تعریف شده است، ولی اگر  $n$

زوج باشد تعریف نشده است.

نشان دهید هرگاه  $a > 0$ ،  $a$ ،  $a$  نگاه

$$\sqrt{a+1} - \sqrt{a} < \frac{1}{\sqrt{a+1}} \quad ۱۴. \quad a + \frac{1}{a} \geq 2 \quad ۱۳.$$

تحقیق کنید که

$$|a - b| = \max\{a, b\} - \min\{a, b\} \quad ۱۵.$$

$$\max\{a, b\} = \frac{(a+b) + |a-b|}{2} \quad \text{و} \quad \min\{a, b\} = \frac{(a+b) - |a-b|}{2} \quad ۱۶.$$

۱۷. وقتی  $x$  از ۰ تا ۱ تغییر کند، بر سر نقطه  $(1-x)a + xb$  چه خواهد آمد؟ (فرض

کنید  $a \neq b$ .)

۱۸. چه وقت نقطه  $x^2$  سمت راست  $x$  واقع است؟ چه وقت سمت چپ  $x$  است؟ چه وقت

بر  $x$  منطبق است؟

۱۹. بدون محاسبات عددی، نشان دهید که

$$\frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \cdots \frac{99}{100} < \frac{1}{10}.$$

۲۰. نشان دهید که به ازای اعداد دلخواه  $a$ ،  $b$ ، و  $c$ ،

$$ab + bc + ac \leq a^2 + b^2 + c^2$$

$M = \max\{a, a^2, \dots, a^n\}$  و  $m = \min\{a, a^2, \dots, a^n\}$  را به ازای  $n > 1$  در صورتی بیابید که

$$a = 0, \pm 1 \quad ۲۳. \quad a > 1 \quad ۲۲. \quad 0 < a < 1 \quad ۲۱.$$

$$a < -1 \quad ۲۵. \quad -1 < a < 0 \quad ۲۴.$$

هر یک از مجموعه‌های داده شده، که اجتماع یا اشتراک دوباره‌اند (ر.ک. مقدمه مسائل

تا ۴)، را به صورت یک بازه بنویسید.

$$[-1, 2) \cup [2, 4) \quad ۲۷. \quad (-\infty, 1) \cup (0, \infty) \quad ۲۶.$$

$$(-\infty, 1] \cap (-2, \infty) \quad ۲۹. \quad [-2, 3] \cap [0, 4] \quad ۲۸.$$

نمودار معادله داده شده را توصیف کنید.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 14 = 0 \quad ۳۰.$$

$$x^2 + y^2 + x = 0 \quad ۳۱$$

$$x^2 + y^2 + y = 0 \quad ۳۲$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 12 = 0 \quad ۳۳$$

$$۳۴. \text{ معادله } x^2 - y^2 = 0 \text{ را رسم کنید.}$$

$$۳۵. \text{ نمودار نامعادله } x^2 - y^2 > 0 \text{ را رسم کنید.}$$

$$۳۶. \text{ نمودار نامعادلات همزمان } x^2 + y^2 < 1, x^2 - y^2 > 0 \text{ را رسم کنید.}$$

۳۷. جميع نقاطی از صفحه  $xy$  که از محور  $x$ ، محور  $y$ ، و نقطه  $(3, 6)$  هم فاصله‌اند را بیابید.

۳۸. جميع نقاطی از دایره  $x^2 + y^2 = 1$  که از نقاط  $(1, 3)$  و  $(-2, 2)$  هم فاصله‌اند را بیابید.

۳۹. چند نقطه مانند  $(m, n)$ ، که  $m$  و  $n$  هر دو اعدادی صحیح‌اند، داخل دایره به شعاع  $\frac{1}{2}$  و مرکز مبدأ قرار دارند؟

۴۰. نقطه  $P = (x, y)$  طوری حرکت می‌کند که تفاضل بین مربعات فواصل آن تا نقاط  $(-1, 1)$  و  $(1, -1)$  همواره مساوی ۴ است. مسیر نقطه را بیابید.

۴۱. مساحت ناحیه مثلثی محدود به محورهای مختصات و خط  $2x + 5y - 20 = 0$  چقدر است؟

۴۲. از تمام خطوط ماربر نقطه  $(2, 3)$ ، دو تا قطع مساوی دارند. این دو خط را بیابید.

۴۳. خط ماربر نقطه  $(1, 2)$  عمود بر خط ماربر نقاط  $(2, 4)$  و  $(3, 5)$  را بیابید. نقطه برخورد این دو خط را بیابید.

خط واصل بین مبدأ و نقطه برخورد جفت خطوط داده شده را بیابید.

$$x + 2y - 3 = 0, x - 3y + 7 = 0 \quad ۴۴$$

$$2x + 3y + 4 = 0, x - 2y - 3 = 0 \quad ۴۵$$

۴۶. تحقیق کنید که چهارضلعی به رئوس  $(2, -2)$ ،  $(5, 1)$ ،  $(3, 6)$  و  $(0, 3)$  یک متوازی-

الاضلاع است. معادلات اقطار آن را بیابید. نقطه برخورد اقطار چیست؟

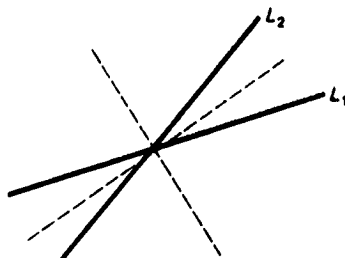
دو خط متقاطع  $L_1$  و  $L_2$  داده شده‌اند. دو خط دیگر، یعنی خطوط نقطه چین در شکل ۳۴، وجود دارند که نیمسازهای زوایای بین  $L_1$  و  $L_2$  اند (چرا نیمسازها همواره برهم عمودند؟). نیمسازهای زوایای بین جفت خطوط داده شده را بیابید، و در هر حالت عمودبودن آنها را تحقیق نمایید.

$$x - y = 0, x + y = 0 \quad ۴۷$$

$$2x + 3y - 4 = 0, 3x + 2y + 1 = 0 \quad ۴۸$$

$$6x + 2y + 1 = 0, x - 3y - 2 = 0 \quad ۴۹$$

$$x + y + 2 = 0, 2x - 2y - 3 = 0 \quad ۵۰$$



شکل ۳۴

راهنمایی. نقاط هر نیمساز از  $L_1$  و  $L_2$  متساوی الفاصله اند.

نامعادله خطی داده شده را رسم کنید.

$$x + y - 3 > 0 \quad ۵۲$$

$$x + 2y - 2 < 0 \quad ۵۱$$

$$2x - 3y - 3 \leq 0 \quad ۵۴$$

$$3x - 4y + 6 \geq 0 \quad ۵۳$$

مسائل ۵۵ تا ۶۲ نشان می دهند که چگونه خطوط مستقیم در حل مسائل تجارت و اقتصاد به کار می روند. فرض کنیم  $q_d$  مقداری از یک کالای مورد تقاضا به بهای  $p$  بوده، و  $q_s$  مقدار تولید شده به بهای  $p$  باشد. اغلب فرض اینکه  $q_d$  و  $q_s$  توابعی خطی از  $p$  اند تقریب موجهی است، و بدین معنی است که

$$(یک) \quad q_d = a + bp,$$

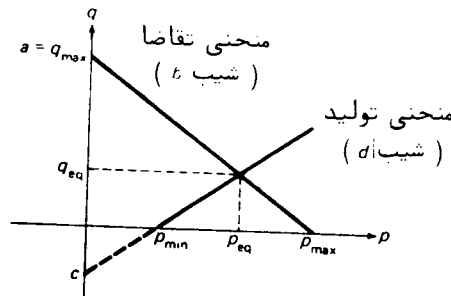
$$(دو) \quad q_s = c + dp,$$

که در آنها  $a$ ،  $b$ ،  $c$ ، و  $d$  ثابت اند. در شرایط عادی بازار، افزایش بهای به کاهش  $q_d$  و افزایش  $q_s$  منجر می شود. همچنین،  $q_d$ ،  $q_s$ ، و  $p$  به جهت معنی اقتصادی آنها، ذاتاً "نامنفی" اند، و  $q_s = 0$  اگر  $p$  کوچکتر از عدد معینی باشد (در قیمت خیلی پایین تولیدی وجود ندارد). پس نتیجه می شود که ضرایب  $a$  و  $d$  مثبت اند، حال آنکه  $b$  و  $c$  منفی می باشند (ر.ک. شکل ۳۵). توجه کنید که  $b$  شیب منحنی تقاضای (یک) است، حال آنکه  $d$  شیب منحنی تولید (دو) می باشد.

۵۵. فرض کنید ماکزیمم تقاضا برای کالایی خاص در هر بهای  $q_{max}$  بوده، و بهایی که در آن تقاضا متوقف می شود  $p_{max}$  باشد. منحنی تقاضای (یک) را بیابید.

۵۶. فرض کنید بهایی که در آن کالای مفروضی شروع به تولید می شود  $p_{min}$  باشد، درحالی





شکل ۳۵

که به ازای هر واحد افزایش در بها تولید  $d$  واحد بالا رود. منحنی تولید (دو) را پیدا کنید.

۵۷. بازار یک کالا وقتی در حال تعادل است که کمیت مورد تقاضا مساوی کمیت تولید شده باشد. بهای تعادل نظیر  $p_{eq}$  و تقاضای تعادل (یا تولید تعادل)  $q_{eq}$  برای مدل بازار خطی (یک) و (دو) را معین نمایید.

۵۸. فرض کنید تقاضا برای کالایی در هر بها به یک مقدار افزایش یابد؛ این ممکن است مثلاً "در بازار شکر رخ دهد، پس از آنکه دولت شکر خاصی را که احتمالاً "سرطان‌زا" است قدغن نماید. نشان دهید که اثر این کار افزایش بهای تعادل و تقاضای تعادل می‌باشد.

بهای تعادل  $q_{eq}$  و تقاضای تعادل  $p_{eq}$  را برای بازار با منحنیهای تقاضا و تولید داده شده بیابید.

$$q_d = 450 - 3p, q_s = -100 + 2p \quad ۵۹$$

$$q_d = 1000 - 40p, q_s = -50 + 10p \quad ۶۰$$

$$q_d = 3000 - 12p, q_s = -2000 + 38p \quad ۶۱$$

$$q_d = 1600 - 5p, q_s = 75p \quad ۶۲$$

## توابع و حدود<sup>۱</sup>

در چهار بخش اول این فصل توابع و نمودارهایشان، با تأکیدی خاص بر توابع مثلثاتی مهم، بررسی می‌شوند. مفهوم تابع بین ریاضیات پیش حساب و حساب دیفرانسیل و انتگرال قرار دارد، و فقط در بخش ۵.۱ است که وقتی به ایده، حد و ایده، نزدیک به آن پیوستگی می‌رسیم، حساب دیفرانسیل و انتگرال را آغاز کرده‌ایم. در واقع، اغلب حساب دیفرانسیل و انتگرال را بخشی از ریاضیات تعریف می‌کنند که در آن حدود نقشی اساسی برعهده دارند. یکی از نکات اصلی این کتاب نوع خاصی حد است، به نام مشتق، که در کاربردها از اهمیت والایی برخوردار است. لذا، باید به یاد داشت که تکنیکهای حد ارائه شده در اینجا، با وجود رنگ و بوی نظری، در واقع منبعی است برای استفاده‌های بعدی در مطالعه مشتقها.

### ۱.۱ مفهوم تابع

توابع و متغیرها. منظور از تابع یعنی تناظری یک به یک بین دو مجموعه از اعداد با خاصیت کلیدی زیر: به هر عدد در مجموعه اول، به نام قلمرو (تعریف) تابع، یک و فقط یک عدد در مجموعه دوم نظیر است. مرسوم است که اعداد مجموعه اول را مقادیر یک متغیر مستقل و اعداد مجموعه دوم نظیر آنها را مقادیر یک متغیر وابسته می‌گیرند؛ واژه "متغیر" یعنی علامتی که برای نمایش عضو نامشخصی از یک مجموعه به کار می‌رود. در این صورت، گوییم متغیر وابسته تابعی از متغیر مستقل است، و این متغیرها می‌توانند در یک مسئله هر چه بخواهند باشند. توجه کنید که در این زبان قلمرو تابع مجموعه تمام مقادیری است که متغیر مستقل می‌گیرد. مجموعه تمام مقادیری که متغیر وابسته می‌گیرد برد تابع نام دارد.

مثال ۱. مساحت یک مربع تابعی از طول ضلع آن است، چرا که اگر  $s$  طول ضلع مربع باشد،

مساحتش  $A$  از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$A = s^2.$$

در اینجا  $s$  متغیر مستقل است، و  $A$  متغیر وابسته. قلمرو و برد تابع مجموعه‌هایی یکسانند؛ یعنی، مجموعه تمام اعداد مثبت. مساحت یک مربع تابعی از محیطش نیز هست. در واقع، یک مربع به طول ضلع  $s$  دارای محیط  $p = 4s$  است. لذا،  $s = \frac{1}{4}p$  و  $A = s^2 = (\frac{1}{4}p)^2$ ؛ در نتیجه،

$$A = \frac{1}{16} p^2.$$

در اینجا، مثل قبل، متغیر وابسته مساحت  $A$  است، ولی متغیر مستقل محیط  $p$  می‌باشد.

مثال ۲. آیا مساحت یک مستطیل تابعی از محیطش است؟

حل. خیر، زیرا محیط یک مستطیل کلی (برخلاف مربع) مساحتش را به طور منحصر به فرد مشخص نمی‌کند. لذا، مثلاً، "مستطیلی به طول ۱۵ و عرض ۳ دارای محیط  $15 + 3 + 15 + 3 = 36$  و مساحت  $15 \cdot 3 = 45$  است، در حالی که مربعی به ضلع ۹ همان محیط  $9 + 9 + 9 + 9 = 36$  را دارد، ولی با مساحت متفاوت  $9^2 = 81$  (ر. ک. شکل ۱).

9

	15		9	مساحت 81	
3	45	مساحت	3		
	15			9	
	36	محیط		36	محیط

شکل ۱

نماد تابع. به طور صریح‌تر، فرض کنیم  $x$  متغیر مستقل،  $y$  متغیر وابسته، و  $f$  تابع باشد. ایده، تمایش تابع به وسیله علامتی چون  $f$  فکری اساسی است، و ما آن را از ریاضیدان بزرگ سوئسی، لئونارد اویلر<sup>۱</sup> (۱۷۸۳-۱۷۰۷) داریم. بالاخره، مقادیر  $x$  و  $y$  عددند، ولی  $f$  چیزی مجردتر است. در واقع،  $f$  را می‌توان قاعده یا روندی تصور کرد که تناظری بین

1. Leonhard Euler

مقادیر  $x$  و  $y$  برقرار می‌کند، و به هر مقدار داده شده از  $x$  مقدار منحصر به فردی از  $y$  را نسبت می‌دهد. این را می‌توان با علامت بیان کرد:

$$y = f(x),$$

که خوانده می‌شود: " $y$  مساوی  $f$  از  $x$  است." اگر  $x$  مقدار خاصی چون  $c$  داشته باشد، مقدار نظیر  $y$  با  $f(c)$  نموده و مقدار  $f$  در  $c$  نامیده می‌شود. اما استفاده از یک حرف برای نمایش متغیر مستقل و مقادیرش ساده‌تر است، و با این قرار،  $f(x)$  را مقدار  $f$  در  $x$  می‌نامیم. گوییم  $f$  بر (یا در) یک مجموعه تعریف شده است اگر هر نقطه از مجموعه به قلمرو  $f$  تعلق داشته باشد.

مثال ۳. فرض کنیم تابع  $f$  ریشه دوم عدد  $x$  را بگیرد. در این صورت،

$$(1) \quad f(x) = \sqrt{x}.$$

بین تابع  $f$  ("ریشه دوم گیر") و مقدارش در  $x$  تمایزی وجود دارد، ولی اگر این تمایز مانعی در زبان ایجاد کند چیزی جز سواس نخواهد بود. لذا، نمی‌گوییم "تابع  $f$  به طوری که  $f(x) = \sqrt{x}$ "، هرچند این بیان منطقاً درست است. به جای آن فقط می‌گوییم "تابع  $f(x) = \sqrt{x}$ " یا "تابع  $y = \sqrt{x}$ " اگر  $y$  متغیر وابسته باشد، یا حتی خلاصه‌تر "تابع  $\sqrt{x}$ ". توجه کنید که وسیعترین مجموعه‌ای که تابع (۱) بر آن تعریف شده است مجموعه تمام اعداد نامنفی است، زیرا نمی‌توان از اعداد منفی جذر گرفت. چند مقدار نمونه از تابع (۱) عبارتند از

$$f(0) = \sqrt{0} = 0, \quad f(9) = \sqrt{9} = 3, \quad f(50) = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

هرگاه یک تابع با فرمول صریحی مانند (۱)، بدون هیچ اطلاعی از مقادیر متغیر مستقل، داده شده باشد، فرض است که قلمرو تابع وسیعترین مجموعه مقادیری است که فرمول به ازای آنها با معنی است. این مجموعه قلمرو طبیعی تابع نام دارد. مثلاً، قلمرو طبیعی تابع (۱) بازه  $0 \leq x < \infty$  است. به همین نحو، اگر

$$(2) \quad y = f(x) = \sqrt{1 - x^2},$$

قلمرو طبیعی  $f$  بازه  $-1 \leq x \leq 1$  است، زیرا  $1 - x^2$  منفی است اگر  $x$  خارج این بازه باشد. هر مجموعه کوچکتر از قلمرو طبیعی تابع  $f$  را نیز می‌توان قلمرو  $f$  گرفت، ولی در اینگونه حالات همواره قلمرو را صریحاً نشان می‌دهیم، مثل فرمول زیر

$$(2') \quad y = f(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad (0 < x < \frac{1}{2}),$$

که در آن قلمرو، به جای  $-1 \leq x \leq 1$ ، مساوی بازه  $0 < x < \frac{1}{2}$  است.

مثال ۴. فرض کنید

$$(۳) \quad y = f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}.$$

$f(0)$ ،  $f(1)$ ،  $f(2)$ ، و  $f(-3)$  را بیابید.

حل. برای یافتن  $f(0)$ ،  $x = 0$  را در فرمول (۳) می‌گذاریم. این نتیجه می‌دهد که

$$f(0) = \frac{1}{0^2 - 4} = -\frac{1}{4},$$

و، به همین نحو،

$$f(1) = \frac{1}{1^2 - 4} = -\frac{1}{3}, \quad f(-3) = \frac{1}{(-3)^2 - 4} = \frac{1}{5}.$$

از آن سو، کمیت

$$f(2) = \frac{1}{2^2 - 4} = \frac{1}{4 - 4}$$

تعریف نشده است، زیرا مستلزم تقسیم بر صفر است! توجه کنید که قلمرو طبیعی  $f$  از تمام اعداد  $x$  جز ۲ و -۲ تشکیل شده است.

استفاده از حروف  $x$ ،  $y$ ، و  $f$  برای متغیر مستقل، متغیر وابسته، و تابع، اگرچه زیاد به کار می‌روند، اجباری نیست. مثلاً، در مثال ۱ می‌توان تابعی را که محیط  $p$  یک مربع را به مساحتش  $A$  مربوط می‌کند به صورت زیر نوشت:

$$A = \phi(p) = \frac{1}{16} p^2,$$

که در آن علامت  $\phi$  (حرف کوچک یونانی فی) برای تابع انتخاب شده است. متغیرها اغلب، مثل این حالت، کمیات هندسی یا فیزیکی مورد بحث را یارگو می‌کند. مثلاً،  $A$  برای مساحت،  $V$  برای حجم،  $t$  برای زمان، و غیره به کار می‌روند. واژه، شناسه مترادف دیگری برای متغیر مستقل است. لذا،  $x$  شناسه تابع  $f(x) = x^2$  است،  $u$  شناسه تابع  $y(u) = u^3 - 1$  است، و از این قبیل.

همانند مثالهای فوق، توابع معمولاً به کمک فرمول تعریف می‌شوند. ولی دلیلی برای آنکه "کلاً" چنین باشد وجود ندارد؛ در مثال زیر تابعی را می‌بینیم که فرمولی متغیرهای

مستقل و وابسته، آن را به هم ربط نمی‌دهد. در واقع، در تحلیل اخیر، یک تابع چیزی جز گردایدای از جفت‌های مرتب متمایز از اعداد حقیقی که هیچ دو تای آنها عنصر اول یکسان ندارند نیست (ر.ک. مسئله ۵۸). همچنین، توابع مورد نظر در اینجا توابعی حقیقی از یک متغیر حقیقی‌اند؛ یعنی، هر دو متغیر مستقل و وابسته اعدادی حقیقی‌اند، معادلاً، "نقاطی بر خط حقیقی می‌باشند. بعداً" در این کتاب مفهوم تابع را با اختیاریک نقطه در صفحه یا در فضای سه‌بعدی (یا بیشتر) ابتدا به عنوان متغیر وابسته و سپس متغیر مستقل تعمیم خواهیم داد.

مثال ۵. فرض کنیم  $p$  بهای قطعی فولاد آمریکا در بورس نیویورک بوده، و  $d$  مدت زمان باز بودن بورس باشد ( $d$  را می‌توان یک عدد هشت رقمی گرفت، که دو رقم اول ماه، دو رقم بعدی روز، و چهار رقم آخر سال را بدهد؛ مثلاً، "10241929 عبارت است از 24 اکتبر 1929"، "07041976 عبارت است از 4 ژوئیه 1976"، و از این قبیل). در این صورت،  $p$  تابعی است از  $d$ . با آنکه فرمول صریحی متغیرهای  $p$  و  $d$  را به هم ربط نمی‌دهد، همیشه می‌توان مقدار  $p$  نظیر به مقدار داده شده  $d$  را با نگاه کردن به مقدار منحصر فرد  $p$  در ستون مالی یک روزنامه عصر منتشر شده در روز  $d$  یافت. منحصر به فرد بودن  $p$  تابع  $d$  بودن آن را تضمین می‌کند. این تابع را می‌توان با علامت  $p = h(d)$  بیان کرد، این بار علامت  $h$  برای تابع اختیار شده است.

مثال ۶. فرض کنیم سنگی را در چاه خشک عمیقی بیاندازیم. فرض کنیم  $s$  مقدار سقوط سنگ به فوت بوده، و  $t$  زمان سپری شده به ثانیه پس از سقوط سنگ باشد. همانطور که در فیزیک دیده‌ایم، فرمول

$$(۴) \quad s = 16t^2$$

با تقریبی مناسب،  $s$  را به عنوان تابعی از  $t$  بیان می‌کند. با اینحال، فرمول (۴) فقط برای زمانی محدود معتبر است، زیرا سنگ مالا به ته چاه می‌خورد. اگر چاه 64 ft عمق داشته باشد، سنگ پس از 2 sec به ته چاه رسیده و سپس بی حرکت می‌شود (فرض می‌کنیم برگشت نداشته باشد). در این حالت، فرمول (۴) فقط به ازای  $0 \leq t \leq 2$  معنی دارد؛ یعنی، قلمرو تابع (۴) بازه  $0 \leq t \leq 2$  است. این را می‌توان با نوشتن

$$(۴') \quad s = 16t^2 \quad (0 \leq t \leq 2),$$

به جای (۴)، تصریح کرد. رفتار بعدی سنگ با فرمول  $s = 64$ ، یا به طور دقیقتر، با

$$s = 64 \quad (t > 2)$$

توصیف می‌شود. ضمناً، در اینجا داشتن توابع ثابت، یعنی تابعی که فقط یک مقدار دارند، احساس می‌شود.

دو فرمول اخیر را می‌توان در یک فرمول تلفیق کرد:

$$s = \begin{cases} 16t^2 & , \quad 0 \leq t \leq 2 \text{ اگر} \\ 64 & , \quad t > 2 \text{ اگر} \end{cases} \quad (۴'')$$

قلمرو تابع جدید بازه نامتناهی  $0 \leq t < \infty$  است. توجه کنید که دو تابع  $(۴')$  و  $(۴'')$ ، اگرچه متفاوتند، ولی یک برد (یعنی بازه  $0 \leq s \leq 64$ ) دارند.

### مسائل

فرض کنید  $f(x) = x^2 + 3x + 5$ . مقادیر زیر را بیابید.

$$\begin{array}{lll} f(1) \cdot ۳ \checkmark & f(-1) \cdot ۲ & f(0) \cdot ۱ \checkmark \\ f(\sqrt{3}) \cdot ۶ & f(-7) \cdot ۵ \checkmark & f(2) \cdot ۴ \end{array}$$

فرض کنید  $g(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ . مقادیر زیر را بیابید.

$$\begin{array}{lll} g(1) \cdot ۹ \checkmark & g(0) \cdot ۸ & g(-1) \cdot ۷ \checkmark \\ g(4) \cdot ۱۲ & g(3) \cdot ۱ \checkmark & g(2) \cdot ۱۰ \end{array}$$

فرض کنید  $h(x) = |x|/x$ . مقادیر زیر را بیابید.

$$\begin{array}{lll} h(-1) \cdot ۱۵ \checkmark & h(1) \cdot ۱۴ & h(0) \cdot ۱۳ \checkmark \\ h(-99) \cdot ۱۸ & h(100) \cdot ۱۷ \checkmark & h(\pi) \cdot ۱۶ \end{array}$$

فرض کنید  $F(s) = (s-1)/(s+1)$ . مقادیر زیر را بیابید.

$$\begin{array}{lll} F(\frac{2}{10}) \cdot ۲۱ \checkmark & F(0) \cdot ۲۰ & F(1) \cdot ۱۹ \checkmark \\ F(1+a) \cdot ۲۴ \checkmark & F(\sqrt{2}) \cdot ۲۳ & F(-1) \cdot ۲۲ \checkmark \end{array}$$

فرض کنید  $G(t) = \sqrt{4-3t}$ . مقادیر زیر را بیابید.

$$\begin{array}{lll} G(1.33) \cdot ۲۷ \checkmark & G(0) \cdot ۲۶ & G(1) \cdot ۲۵ \checkmark \\ G(-4) \cdot ۳۰ & G(4) \cdot ۲۹ \checkmark & G(1.34) \cdot ۲۸ \end{array}$$

فرض کنید  $\phi(u) = 2u^2 - |u|$ . مقادیر زیر را بیابید.

$$\begin{array}{lll} \phi(-\sqrt{5}) \cdot ۳۳ \checkmark & \phi(-\frac{1}{2}) \cdot ۳۲ \checkmark & \phi(3) \cdot ۳۱ \checkmark \\ \phi(\sqrt{3}-2) \cdot ۳۶ \checkmark & \phi(1-\pi) \cdot ۳۵ \checkmark & \phi(\sqrt{2}) \cdot ۳۴ \end{array}$$

۳۷. آیا مساحت یک دایره تابعی از محیط آن است؟

۳۸. آیا مساحت یک مثلث تابعی از محیط آن است؟

توابع و حدود ۷۱

۳۹✓ فرض کنید  $c$  تعداد ویرگولها در صفحه  $p$  این کتاب باشد. آیا  $c$  تابعی از  $p$  است؟  
آیا  $p$  تابعی از  $c$  است؟

۴۰. آیا وزن یک نامه سفارشی تابع هزینه پست آن است؟

۴۱✓ فرض کنید  $f(n) = a_n$ ، که در آن

$$3.a_1 a_2 \dots a_n \dots \quad (0 \leq a_n \leq 9)$$

نمایش اعشاری عدد  $\pi$  است. کدام بزرگتر است،  $f(4)$  یا  $f(5)$ ؟

۴۲. تابعی که بعضی از مقادیرش در جدول زیر داده شده است:

$x$	0	20	—	60	80	100
$y$	32	68	104	140	—	212

یک تابع آشنا در زندگی روزمره است. این چه تابعی است؟ فرمولی برای بیان  $y$  به

صورت تابعی از  $x$  و فرمولی برای بیان  $x$  به صورت تابعی از  $y$  بیابید. دوجای خالی

در جدول را پر کنید.  $y$  به ازای  $x = -40$  چقدر است؟

۴۳✓ کسر

$$\frac{f(1+a) - f(1)}{a} \quad (a \neq 0)$$

را در صورتی حساب کنید که  $f(x) = x^2$  ( کسرهایی از این نوع در بررسی مشتقات ظاهر می شوند. )

۴۴. کسر

$$\frac{f(-2+a) - f(-2)}{a} \quad (a \neq 0)$$

را در صورتی حساب کنید که  $f(x) = x^3$ .

قلمرو (طبیعی) توابع زیر را بیابید.

$$y = \frac{1}{2x-3} \quad ۴۶✓$$

$$y = \frac{x(x+1)}{x} \quad ۴۵✓$$

$$y = \sqrt{x+2} \quad ۴۸✓$$

$$y = \frac{1}{x+|x|} \quad ۴۷✓$$

$$y = \sqrt{x^2-9} \quad ۵۰✓$$

$$y = \sqrt[3]{x+1} \quad ۴۹✓$$

$$y = \sqrt{4x-x^2} \quad ۵۲✓$$

$$y = \sqrt{16-x^2} \quad ۵۱✓$$

$$y = \sqrt{\frac{x-1}{2-x}} \quad ۵۳✓$$

تابع  $y = f(x)$  را با بازه داده شده به عنوان قلمرو طبیعی اش بیابید.



۵۴. بازهٔ بستهٔ  $[0, 1]$

۵۵. بازهٔ باز  $(0, 1)$

۵۶. بازهٔ نیمباز  $[0, 1)$

۵۷. بازهٔ نیمباز  $(0, 1]$

۵۸. تحقیق کنید که تعاریف زیر در اساس با تعاریف این بخش سازگارند. فرض کنید  $f$  مجموعه‌ای از جفت‌های مرتب متمایز از اعداد حقیقی باشد به طوری که هیچ دو جفت  $(x, y)$  در  $f$  یک عنصر اول نداشته باشند، و فرض کنید  $D = \{x: (x, y) \in f\}$ . یعنی،  $D$  مجموعهٔ تمام عناصر اول جفت‌های در  $f$  باشد. در این صورت، گوییم  $f$  یک تابع تعریف شده بر  $D$  است، و  $D$  قلمرو  $f$  نام دارد. هرگاه  $(x, y)$  جفت مرتبی در  $f$  باشد، آنگاه  $y$ ، یعنی عنصر دوم جفت، مقدار  $f$  در  $x$  نامیده و به صورت  $f(x)$  نوشته می‌شود. مجموعهٔ  $\{(y: (x, y) \in f)\}$ ، یعنی مجموعهٔ تمام عناصر دوم جفت‌های در  $f$ ، برد  $f$  نامیده می‌شود. راهنمایی.  $x$  را متغیر مستقل و  $y$  را متغیر وابسته بگیرید. آنچه از  $x$  می‌دانیم  $y$  را به طور منحصر به فرد معین می‌کند.

## ۲.۱ اعمال بر توابع؛ نمودار توابع

دو تابع  $f$  و  $g$  داده شده‌اند. فرض کنیم  $D$  بزرگترین مجموعه‌ای باشد که هر دوی  $f$  و  $g$  بر آن تعریف شده‌اند ( $D$  ناتهی فرض می‌شود). در این صورت، منظور از مجموع  $f + g$  یعنی تابعی که مقدارش در هر نقطهٔ  $x$  در  $D$  مجموع مقدار  $f$  در  $x$  و مقدار  $g$  در  $x$  است. به طور دقیقتر، به ازای هر  $x$  در  $D$ ،

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

اعمال جبری دیگر بر  $f$  و  $g$  به همین نحو تعریف می‌شوند؛ یعنی،

$$(cf)(x) = cf(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x),$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

$$f^n(x) = \underbrace{f(x)f(x) \cdots f(x)}_{n \text{ عامل}}$$

$n$  عامل

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

که البته در فرمول آخر فرض است که به ازای هر  $x$  در  $D$ ،  $g(x) \neq 0$ .

مثال ۱. فرض کنید

$$f(x) = \sqrt{x-1}, \quad g(x) = \frac{1}{x+1}.$$

مقادیر  $f+g$  و  $fg$  را در نقطه  $x=5$  بیابید.

حل. چون

$$f(5) = \sqrt{5-1} = 2, \quad g(5) = \frac{1}{5+1} = \frac{1}{6},$$

داریم

$$(f+g)(5) = f(5) + g(5) = 2 + \frac{1}{6} = \frac{13}{6},$$

$$(fg)(5) = f(5)g(5) = 2\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}.$$

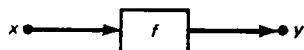
قلمرو طبیعی توابع  $f+g$  و  $fg$  بازه  $[1, \infty)$  است، زیرا این وسیعترین مجموعه‌ای است که هر دوی  $f$  و  $g$  بر آن تعریف شده‌اند.

علامت  $\equiv$ . منظور از  $f(x) \equiv g(x)$  یعنی توابع  $f$  و  $g$  دارای قلمرو یکسان  $D$  اند و به ازای هر  $x$  در  $D$ ،  $f(x) = g(x)$ . فرمول  $f(x) \equiv g(x)$  را، که یک همانی نامیده می‌شود، می‌خوانیم: " $f(x)$  به‌طور همانی مساوی  $g(x)$  است." تساوی توابع یعنی تساوی همانی؛ بدین معنی که  $f = g$  یعنی  $f(x) \equiv g(x)$ .

مثال ۲. توابع  $f(x) = |x|$  و  $g(x) = \sqrt{x^2}$  (به‌طور همانی) مساویند. قلمرو تعریف مشترکشان تمام خط حقیقی  $-\infty < x < \infty$  است.

درحالاتی که از قرائین روشن باشد که فرمولی یک‌همانی است، علامت تساوی = اغلب به‌جای علامت همانی  $\equiv$  به‌کار می‌رود. مثلاً، "تجزیه‌آشنای فرمول  $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$  یک همانی است، زیرا به ازای هر  $x$  معتبر است.

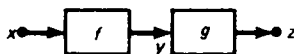
شکل ۲ روش سودمندی را برای تصور تابع  $f$  به صورت دستگاه ورودی - خروجی



شکل ۲

نشان می دهد. عدد  $x$  به دستگاه  $f$  خورانده می شود، و عدد  $y = f(x)$ ، یعنی مقدار  $f$  در  $x$ ، از آن بیرون می آید. این را این طور نیز توصیف می کنند که می گویند  $f$ ،  $x$  را به  $y$  می نگارد، یا  $y$  نقش  $x$  تحت  $f$  است. اینکه  $f$  تابع است یعنی ورودی مفروض  $x$  همواره خروجی  $y$  را تولید می کند. به طور کلی، ممکن است طرز کار دستگاه را ندانیم، و مهندسان وقتی محتویات یک دستگاه مجهول یا اغماض شده باشد، آن را یک "جعبه سیاه" می نامند.

توابع مرکب. حال طبیعی است بپرسیم اگر خروجی یک دستگاه ورودی دستگاه دیگری باشد، چه رخ می دهد، مثل شکل ۳، که در آن  $x$  به دستگاه  $f$  خورانده شد، خروجی  $y$  به دست می آید، و سپس آن را به دستگاه دوم  $g$  خورانده ایم و خروجی نهایی  $z$  به دست آمده است.



شکل ۳

چون  $z = g(y)$  و  $y = f(x)$ ، واضح است که  $z = g(f(x))$ . یک تابع مانند  $g(f(x))$  یک تابع مرکب نامیده می شود، و این گونه توابع در سراسر حساب دیفرانسیل و انتگرال ظاهر می شوند. عمل تلفیق توابع به این نحو ترکیب نام دارد. البته، در شکل ۳ باید تأکید کنیم که خروجی "میانی"  $y$  یک ورودی قابل قبول برای دستگاه دوم  $g$  است؛ این بدان خاطر است که  $g(f(x))$  فقط به ازای مقادیری از  $x$  تعریف شده است که  $f(x)$  در قلمرو  $g$  است. به همین نحو، می توان توابع مرکب دیگر، مانند  $f(g(x))$ ،  $f(f(x))$ ، و غیره را تعریف کرد.

مثال ۳. فرض کنیم

$$(۱) \quad f(x) = x + 1, \quad g(x) = x^2$$

جانشانی مستقیماً "نتیجه می دهد"

$$(۲) \quad g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

و

$$(۳) \quad f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1.$$

به همین نحو،

$$f(f(x)) = f(x + 1) = (x + 1) + 1 = x + 2$$

و

$$g(g(x)) = g(x^2) = (x^2)^2 = x^4.$$

علامت  $\circ$  . تابعی که از  $x$  به  $g(f(x))$  می‌رود با  $f \circ g$  نموده می‌شود. لذا،

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

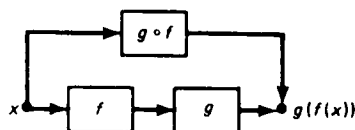
و به همین نحو،  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ،  $(f \circ f)(x) = f(f(x))$ ، و غیره. با این نماد، (۲) خواهد شد

$$(۲) \quad (g \circ f)(x) = x^2 + 2x + 1,$$

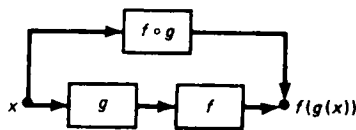
و (۳) به صورت زیر درمی‌آید:

$$(۳) \quad (f \circ g)(x) = x^2 + 1,$$

و غیره. تعبیر  $f \circ g$  به صورت یک دستگاه ورودی - خروجی در شکل ۴ (آ) نموده شده است. این دستگاهی است که همان اثر دو دستگاه  $f$  و  $g$  را دارد که "به‌طور سری" به هم مربوطند که  $f$  اول و  $g$  دوم است. اگر  $f$  و  $g$  با ترتیب دیگر، اول  $g$  و بعد  $f$ ، به هم مربوط شوند، اثر کل دو دستگاه با اثر دستگاه  $f \circ g$  یکی است [شکل ۴ (ب)].



(آ)



(ب)

شکل ۴

تابع مرکب  $f \circ g$  را نباید با تابع حاصل ضرب  $fg$  اشتباه کنید (علامت  $\circ$  در ترکیب به کار می‌رود نه در ضرب). مثلاً، حاصل ضرب توابع (۱) مساوی است با

$$(fg)(x) = (x+1)x^2 = x^3 + x^2,$$

که کاملاً با توابع مرکب (۲) و (۳) متفاوت است. ترکیب توابع تعویض‌ناپذیر است؛ یعنی، در حالت کلی،  $f \circ g \neq g \circ f$ ، مثل توابعی که هم‌اکنون در نظر گرفتیم، درحالی که ضرب توابع همیشه تعویض‌پذیر است ( $fg = gf$ ).

مثال ۴. فرض کنیم  $f(x) = \sqrt{x}$  و  $g(x) = -x^2$  . در این صورت ،

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{-x^2}$$

به ازای هر مقدار  $x$  جز  $x = 0$  تعریف نشده است ، و  $(f \circ g)(0) = 0$  ، حال آنکه

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = -(\sqrt{x})^2 = -x$$

به ازای هر مقدار نامنفی  $x$  تعریف شده است .

عمل ترکیب می تواند شامل بیش از دو تابع باشد . در این صورت ، ترکیب مرحله به مرحله ، از چپ به راست در مورد نماد  $\circ$  و از داخل به خارج در مورد پرانتزها ، انجام می شود .

مثال ۵. فرض کنیم

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = x^2, \quad h(x) = \sqrt{x}.$$

در این صورت ،

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))) = f(g(\sqrt{x})) = f((\sqrt{x})^2) = f(x) = \frac{1}{x},$$

$$\begin{aligned} (h \circ g \circ f)(x) &= h(g(f(x))) = h\left(g\left(\frac{1}{x}\right)\right) = h\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2\right) = h\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \sqrt{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{|x|}, \end{aligned}$$

و غیره . توجه کنید که قلمرو  $f \circ g \circ h$  مجموعه تمام  $x > 0$  های است ، ولی قلمرو  $h \circ g \circ f$  مجموعه تمام  $x \neq 0$  های می باشد . به عنوان تمرین ، نشان دهید که ترکیب توابع شرکتپذیر است ، بدین معنی که  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$  . و لذا ، بدون پرانتز می نویسیم  $f \circ g \circ h$  .

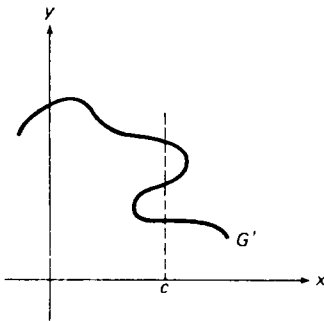
خاصیت خط قائم . حال به نمایش تصویری توابع رو می آوریم . منظور از نمودار تابع

$$(۴) \quad y = f(x)$$

یعنی شکلی هندسی در صفحه  $xy$  که از رسم تمام نقاط  $(x, y)$  که مختصاتشان در فرمول (۴) ، به عنوان معادله ای از دو متغیر  $x$  و  $y$  ، صدق می کنند به دست می آید . نمودار تابع

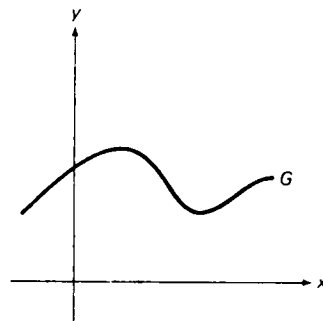
$y = f(x)$  ، بر خلاف نمودار یک معادلهٔ کلیتر از متغیرهای  $x$  و  $y$  ، خاصیت متمایز زیر را دارد: هیچ خط قائم ، یعنی هیچ خط موازی محور  $y$  ، نمی‌تواند نمودار  $y = f(x)$  را در بیش از یک نقطه قطع کند . زیرا هرگاه خط قائم  $x = c$  نمودار  $y = f(x)$  را در دو یا چند نقطه قطع کند ، آنگاه دو یا چند مقدار از  $y$  ، یعنی عرضهای این نقاط ، نظیر یک مقدار از  $x$  ، یعنی  $c$  ، اند و این با تعریف تابع تضاد دارد .

مثال ۶ . هیچ خط قائمی منحنی  $G$  در شکل ۵ (آ) را در بیش از یک نقطه قطع نمی‌کند . لذا  $G$  نمودار یک تابع است . از آن سو ، خطوط قائمی وجود دارند که منحنی  $G'$  در شکل ۵ (ب) را در بیش از یک نقطه قطع کنند؛ مثلاً " ، خط  $x = c$  نمودار  $G'$  را در سه نقطه



$G'$  نمودار یک تابع نیست .

(ب)



$G$  نمودار یک تابع است .

(آ)

شکل ۵

قطع می‌کند . بنابراین ،  $G'$  نمودار یک تابع نیست .

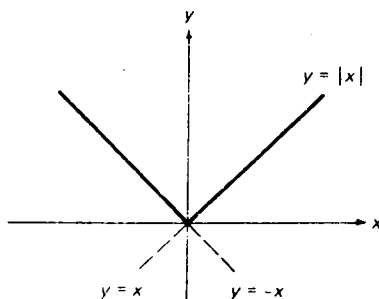
مثال ۷ . نمودار تابع قدرمطلق

$$y = |x| \quad (۵)$$

را رسم کنید .

حل . هرگاه  $x \geq 0$  ، آنگاه  $|x| = x$  و (۵) به خط مستقیم  $y = x$  به شیب ۱ مار بر مبداء تحویل می‌شود ، ولی هرگاه  $x < 0$  ، آنگاه  $|x| = -x$  و (۲) به خط مستقیم  $y = -x$  به شیب -۱ مار بر مبداء تحویل خواهد شد . لذا ، نمودار تابع (۵) ، که در شکل ۶ نموده شده است ، از قطعاتی از خطوط  $y = x$  و  $y = -x$  تشکیل شده است . توجه کنید که نمودار در مبداء ،

که در آنجا خطوط  $y = x$  و  $y = -x$  متقاطع اند، گوشه تیز دارد.



شکل ۶

یک تابع مانند  $|x|$ ، که نمودارش از قطعاتی از خطوط مستقیم ساخته شده، قطعه قطعه خطی نام دارد (اگر فقط یک خط موجود باشد، تابع خطی خوانده می شود).

مثال ۸. نمودار تابع

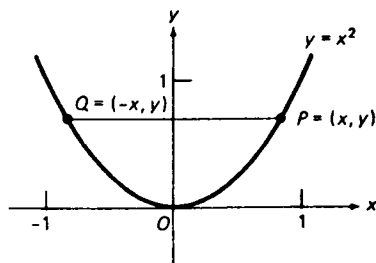
$$(۶) \quad y = x^2$$

را رسم کنید.

حل. با تشکیل جدول کوچکی از مقادیر  $x$  و مقادیر نظیر  $y$  حاصل از فرمول (۶) آغاز می کنیم:

$x$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	-1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$
$y$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	1	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4}$

سپس جفت‌های  $(x, y)$  را به صورت نقاطی در صفحه  $xy$  رسم کرده و آنها را با منحنی همواری به هم وصل می نماییم. با این کار منحنی شکل  $y$  به دست می آید، که یک سهمی است. چون قلمرو و برد تابع (۶) هر دو بازه‌هایی نامتناهی‌اند (از کدام نوع؟)، شکل در واقع بخشی از نمودار در مجاورت مبدا است. هرگاه نقطه  $P = (x, y)$  به نمودار (۶) تعلق داشته باشد، نقطه  $Q = (-x, y)$  نیز دارد، زیرا  $(-x)^2 = x^2$ . همچنین،  $P$  و  $Q$  از محور  $y$  به یک فاصله بوده و بر یک خط افقی قرار دارند. لذا، به ازای هر نقطه  $P$  از نمودار در یک طرف محور  $y$ ، نقطه‌ای مانند  $Q$  از نمودار در آن طرف وجود دارد به طوری



شکل ۷

که محور  $y$  عمود منصف پاره خط  $PQ$  است. این را خلاصه کرده می‌گویند منحنی  $y = x^2$  نسبت به محور  $y$  متقارن می‌باشد.

تبصره. این امر که با اتصال چند نقطه "نوعی" به این طریق ویژگیهای اصلی نمودار (۶) ضایع نمی‌شود کاملاً "موجه" است، و می‌توان آن را به کمک روشهای رسم منحنی در حساب دیفرانسیل و انتگرال که در فصل ۳ عرضه شد یا توصیف هندسی سهمی در فصل ۱۰ توجیه کرد. به طور کلی، نمودار  $G$  هر تابع به شکل  $y = ax^2 + bx + c$ ، که در آن  $a$ ،  $b$ ، و  $c$  ثابت‌اند (با  $a \neq 0$ ) یک سهمی است؛ و همچنین است هر شکلی که از انتقال یا دوران  $G$  در صفحه  $xy$  به دست آید.

توابع زوج. تابع  $f$  را زوج گوئیم اگر

$$(۷) \quad f(-x) \equiv f(x).$$

ما هم اکنون نشان دادیم که تابع  $f(x) = x^2$  زوج است و نمودارش نسبت به محور  $y$  متقارن است. نمودار هر تابع زوج دیگر همین خاصیت تقارن را داراست. مثلاً، تابع  $f(x) = |x|$  زوج است، زیرا  $|-x| \equiv |x|$ ؛ و در نتیجه، نمودار  $y = |x|$  نسبت به محور  $y$  متقارن است، و این از شکل ۸ آشکار می‌باشد.

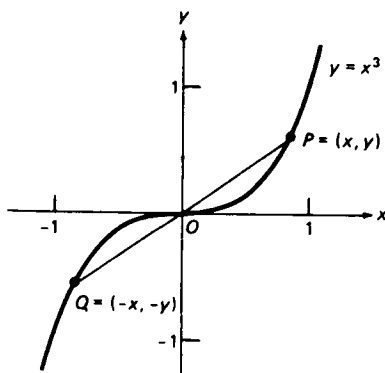
مثال ۹. تابع زیر را رسم کنید:

$$(۸) \quad y = x^3.$$

حل. با رسم چند نقطه "نوعی"  $(x, y)$  که  $y$  شان از (۸) به دست آمده و وصل آنها با یک منحنی هموار، نمودار شکل ۸ به دست می‌آید. هرگاه نقطه  $P = (x, y)$  متعلق به نمودار



(۸) باشد، آنگاه نقطه  $Q = (-x, -y)$  نیز تعلق دارد، زیرا  $(-x)^3 = -x^3$ ، همچنین،



شکل ۸

بنا بر مثال ۴، صفحه ۳۷، نقطه میانی پاره خط  $PQ$  نقطه

$$\left( \frac{x + (-x)}{2}, \frac{y + (-y)}{2} \right) = (0, 0)$$

است؛ یعنی، مبدأ  $O$ . لذا، به ازای هر نقطه  $P$  از نمودار در یک طرف محور  $y$ ، نقطه‌ای مانند  $Q$  از نمودار در طرف دیگر محور  $y$  وجود دارد به طوری که مبدأ  $O$  نقطه میانی پاره خط  $PQ$  است. این را خلاصه کرده می‌گویند منحنی  $y = x^3$  نسبت به مبدأ متقارن است.

توابع فرد. تابع  $f$  را فرد گوئیم اگر

$$(۷') \quad f(-x) \equiv -f(x).$$

هم اکنون نشان دادیم که تابع  $f(x) = x^3$  فرد و نمودارش نسبت به مبدأ متقارن است. نمودار هر تابع فرد دیگر از همین خاصیت تقارن برخوردار است. به عنوان مثال، هر خط  $y = mx$  ماربر مبدأ همین خاصیت را دارد.

خاصیت زوج یا فرد بودن توابع نقش مهمی در ریاضیات کاربردی دارد. به ازای تابع  $f$ ، این سؤال که "جفتی  $f$  چیست؟" صرفاً "یعنی "آیا  $f$  زوج است یا فرد؟" البته، اغلب توابع نه زوجند نه فرد. این، مثلاً، در مورد تابع  $f(x) = x^2 + x^3$  درست است، که نه در  $(۷)$  صدق می‌کند نه در  $(۷')$ .

توابع صعودی و نزولی. حال فرض کنیم نمودار تابع  $y = f(x)$ ، با حرکت ارجح به راست نقطه متغیر  $P$  بر نمودار آن، که طول  $x$  آن در بازه‌ای مانند  $I$  است، بالا رود. در این

## توابع و حدود ۸۱

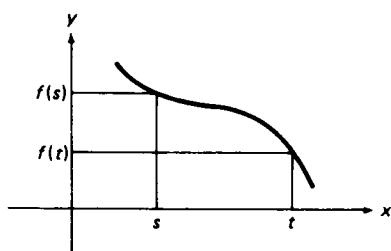
صورت، گوئیم  $f$  بر  $I$  صعودی است. به همین نحو، اگر نمودار  $f$ ، با حرکت از چپ به راست نقطه  $P$ ، که طول  $x$  آن در بازه‌ای مانند  $I$  است، پایین بیاید، گوئیم  $f(x)$  بر  $I$  نزولی است.

مثال ۱۰. توابع  $|x|$  و  $x^2$  هر دو بر بازه  $0 \leq x < \infty$  صعودی‌اند، و این فوراً از شکلهای ۶ و ۷ دیده می‌شود. همچنین، از این اشکال معلوم می‌شود که  $|x|$  و  $x^2$  بر  $-\infty < x \leq 0$  نزولی‌اند.

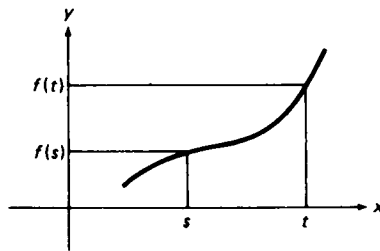
مثال ۱۱. تابع  $x^3$  بر تمام خط حقیقی صعودی است، یعنی بر بازه  $-\infty < x < \infty$ ، و این از شکل ۸ مشهود است.

مثال ۱۲. نمودار تابع ثابت  $f(x) \equiv c$  خط افقی  $y = c$  است، که نه بالا می‌رود نه پایین می‌آید. لذا، یک تابع ثابت (بر هر بازه) نه صعودی است نه نزولی.

به آسانی می‌توان برای تابع صعودی یا نزولی تعریف جبری آورد. تابع  $f$  تعریف شده بر مجموعه  $X$ ، که معمولاً "یک بازه است"، بر  $X$  صعودی است اگر هر وقت  $s < t$ ،  $f(s) < f(t)$  (در اینجا  $s$  و  $t$  هر دو در  $X$  قرار دارند). به همین نحو،  $f$  بر  $X$  نزولی است اگر هر وقت  $s < t$ ، نامساوی  $f(s) > f(t)$  برقرار باشد. تعبیر هندسی این تعاریف در شکل ۹ (آ) برای تابع صعودی و در شکل ۹ (ب) برای تابع نزولی شده است.



(ب)  $f$  نزولی



(آ)  $f$  صعودی

شکل ۹

مثال ۱۳. به طور جبری نشان دهید که  $f(x) = x^2$  بر  $[0, \infty)$  صعودی و بر  $(-\infty, 0]$  نزولی است.

حل. هرگاه  $0 \leq s < t < \infty$ ، آنگاه  $t + s > 0$  و  $t - s > 0$ ؛ در نتیجه،

$$f(t) - f(s) = t^2 - s^2 = (t + s)(t - s) > 0,$$

و لذا،  $f(s) < f(t)$ . به همین نحو، هرگاه  $-\infty < s < t \leq 0$ ، آنگاه  $t + s < 0$  و

$t - s > 0$ ؛ در نتیجه،

$$f(t) - f(s) = (t + s)(t - s) < 0,$$

که نامساوی  $f(s) > f(t)$  را نتیجه می دهد.

نمودارهای انتقال. قضیه زیر طرز انتقال نمودار یک تابع در جهت افقی یا قائم را نشان می دهد.

قضیه ۱ (انتقال نمودار یک تابع). تابع

$$(9) \quad y = f(x)$$

با نمودار  $G$  داده شده است. نمودار تابع

$$(10) \quad y = f(x - c)$$

حاصل انتقال افقی  $G$  به اندازه  $|c|$  واحد است، به راست اگر  $c > 0$  و به چپ اگر  $c < 0$ . به همین نحو، نمودار تابع

$$(10') \quad y = f(x) + c$$

حاصل انتقال قائم  $G$  به اندازه  $|c|$  واحد است، به بالا اگر  $c > 0$  و به پایین اگر  $c < 0$ .

برهان. نقطه  $(x, y)$  در (۹) صدق می کند اگر و فقط اگر نقطه افقی انتقال یافته  $(x + c, y)$  در (۱۰) صدق کند. به همین نحو،  $(x, y)$  در (۹) صدق می کند اگر و فقط اگر نقطه قائم انتقال یافته  $(x, y + c)$  در (۱۰') صدق نماید.

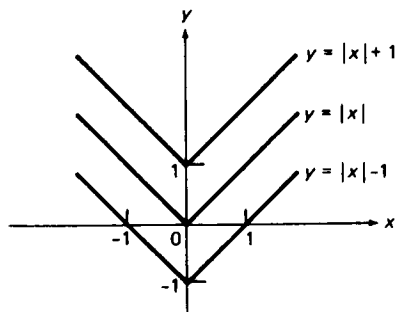
علامت منها در (۱۰) و علامت به علاوه در (۱۰') ممکن است معما باشند و این معما حل نمی شود مگر درک کنیم "  $y$  شبیه " دقیق (۱۰) عبارت است از

$$y - c = f(x)$$

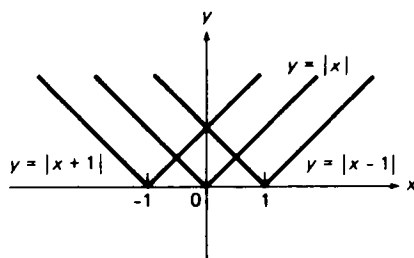
تا معادله معادل (۱۰') که در آن، طبق معمول، ثابت  $c$  به طرف راست انتقال یافته است.

مثال ۱۴. فرض کنیم  $G$  نمودار تابع  $y = |x|$  باشد. نمودار  $y = |x - 1|$  از انتقال  $G$  به اندازه یک واحد به راست، و نمودار  $y = |x + 1|$  از انتقال  $G$  به اندازه یک واحد به چپ

به دست می‌آید [ر.ک. شکل ۱۰ (ت)]. به همین نحو، نمودار  $y = |x| + 1$  از انتقال  $G$  به اندازه یک واحد به بالا، و نمودار  $y = |x| - 1$  از انتقال  $G$  به اندازه یک واحد به پایین به دست می‌آید [ر.ک. شکل ۱۰ (ب)].



(ب) انتقالهای قائم یک نمودار



(ت) انتقالهای افقی یک نمودار

شکل ۱۰

مثال ۱۵. نمودار تابع

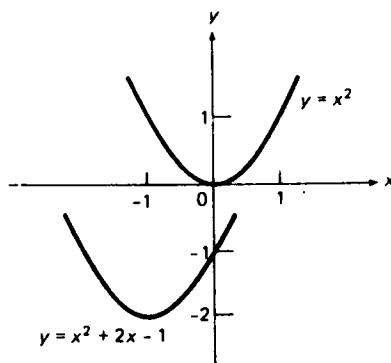
$$(۱۱) \quad y = x^2 + 2x - 1$$

را رسم کنید.

حل. با کامل کردن مربع در (۱۱)، به دست می‌آوریم

$$(۱۱') \quad y = (x + 1)^2 - 2.$$

بنابر قضیه ۱، نمودار (۱۱') همان نمودار  $y = (x + 1)^2$  است که ۲ واحد به پایین انتقال یافته است، و نمودار  $y = (x + 1)^2$  همان نمودار  $y = x^2$  است که ۱ واحد به چپ انتقال یافته است. لذا، همانطور که شکل ۱۱ نشان می‌دهد، نمودار (۱۱')، یا معادلاً (۱۱)،



شکل ۱۱

نمودار سهمی  $y = x^2$  است که ۱ واحد به چپ و ۲ واحد به پایین انتقال یافته است.

### مسائل

فرض کنید  $f(x) = \sqrt{x+1}$  و  $g(x) = 1/x$ . مقادیر زیر را حساب کنید.

$$(f+g)(3) \cdot ۱۷ \quad (f-g)(8) \cdot ۲ \quad (fg)(-2) \cdot ۳$$

$$(2f+3g)(15) \cdot ۴ \quad (f^2)(24) \cdot ۵ \quad (f/g)(35) \cdot ۶$$

فرض کنید  $f$  و  $g$  توابع زیر باشند. آیا  $f(x) \equiv g(x)$  درست است؟

$$f(x) = x, g(x) = (\sqrt{x})^2 \cdot ۷$$

$$f(x) = x/x, g(x) \equiv 1 \cdot ۸$$

$$f(x) = |x|/x, g(x) = x/|x| \cdot ۹$$

$$f(x) = (1+x)^2 - (1-x)^2, g(x) = 4x \cdot ۱۰$$

فرض کنید  $f(x) = x^2 + 1$  و  $g(x) = x^2 - 1$ . مقادیر زیر را حساب کنید.

$$f(f(2)) \cdot ۱۱ \quad f(g(1)) \cdot ۱۲ \quad g(f(-1)) \cdot ۱۳$$

$$g(g(0)) \cdot ۱۴ \quad g(f(g(1))) \cdot ۱۵ \quad f(f(f(0))) \cdot ۱۶$$

فرض کنید  $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$  و  $g(x) = \frac{1+x}{1-x}$ . تابع مرکب ذکر شده را بیابید.

$$(f \circ f)(x) \cdot ۱۷ \quad (f \circ g)(x) \cdot ۱۸ \quad (g \circ f)(x) \cdot ۱۹ \quad (g \circ g)(x) \cdot ۲۰$$

فرض کنید  $f(x) = x^3$ ،  $g(x) = x - 1$  و  $h(x) = \sqrt{x}$ . تابع مرکب ذکر شده را بیابید.

$$(f \circ g \circ h)(x) \cdot ۲۱ \quad g(g(f(x))) \cdot ۲۲ \quad f(f(g(x))) \cdot ۲۳$$

$$(h \circ g \circ f)(x) \cdot ۲۴ \quad (g \circ h \circ f)(x) \cdot ۲۵ \quad f(h(g(x))) \cdot ۲۶$$

تابع خطی  $f(x) = ax + b$  را طوری بیابید که در اتحاد داده شده صدق کند.

$$f(x+1) \equiv 2x \cdot ۲۷ \quad f(2x+3) \equiv 3x-2 \cdot ۲۸$$

$$f(1-x) \equiv 5x+1 \cdot ۲۹ \quad f(f(x)) \equiv 4x+3 \cdot ۳۰$$

تابع داده شده را رسم کنید.

$$y = 1 - x^2 \cdot ۳۲$$

$$y = x^2 + x + 1 \cdot ۳۱$$

$$y = \sqrt{9 - x^2} \cdot ۳۴$$

$$y = \sqrt{x^2 + 4} \cdot ۳۳$$

$$y = 3 - \sqrt{16 - x^2} \cdot ۳۶$$

$$y = \frac{3}{x^2 + 1} \cdot ۳۵$$

$$y = |x+1| + |x-1| \cdot ۳۷$$

$$y = |x| + |x+1| + |x+2| \cdot ۳۸$$

معین کنید که تابع داده شده زوج یا فرد (یا هیچکدام) است.

$$f(x) = \frac{1}{x} \cdot ۴۰ \checkmark$$

$$f(x) \equiv 10 \cdot ۳۹ \checkmark$$

$$f(x) = x^4 + x^2 - 7 \cdot ۴۲ \checkmark$$

$$f(x) = x^3 - x + 1 \cdot ۴۱ \checkmark$$

$$f(x) = x^6 + x^3 \cdot ۴۴ \checkmark$$

$$f(x) = x^5 - x^3 + x \cdot ۴۳ \checkmark$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} \cdot ۴۶ \checkmark$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 1} \cdot ۴۵ \checkmark$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^3 + x}} \cdot ۴۸$$

$$f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^3 + 2}} \cdot ۴۷ \checkmark$$

۴۹ ✓ فرض کنید فکتور تابع  $f$  چنان است که وقتی شامل  $x$  باشد، شامل  $-x$  نیز هست. نشان دهید که اتحاد

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

$f$  را به صورت مجموعی از یک تابع زوج و یک تابع فرد نمایش می‌دهد. تابع داده شده را به صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد بنویسید.

$$f(x) = (1 + x)^{100} \cdot ۵۱ \checkmark$$

$$f(x) = \frac{2}{x^2 - x + 1} \cdot ۵۰ \checkmark$$

۵۲ ✓ تابع  $y = x^2 - 4x + 3$  کجا صعودی است؟ کجا نزولی است؟

۵۳ ✓ تابع  $y = |x + 1| + |x - 1|$  کجا صعودی است؟ کجا نزولی است؟

کجا ثابت است؟ (ر.ک. مسئله ۳۷).

۵۴. از یک قطعه نخ به طول ۱۲ برای ساختن یک کنتور مستطیلی، که یکی از اضلاعش به

طول  $x$  است، استفاده شده است. بزرگترین بازه  $a \leq x \leq b$  را بیابید که مساحت

داخل کنتور تابعی صعودی از  $x$  باشد.

تابع  $y = g(x)$  را طوری بیابید که نمودارش حاصل دو انتقال داده شده بر نمودار

$$y = f(x) = x^2 + x + 1 \text{ باشد.} \checkmark$$

۵۵ ✓ ۵ واحد به راست و ۶ واحد به بالا

۵۶ ✓ ۳ واحد به راست و ۴ واحد به پایین

۵۷ ✓ ۲ واحد به چپ و ۷ واحد به پایین

۵۸ ✓ ۱۰ واحد به چپ و ۱۰۰۰ واحد به بالا

۵۹ ✓ دو انتقال نام ببرید که نمودار  $y = f(x) = x^2 + x$  را به نمودار  $y = g(x) = x^2 + 2x$

تبدیل نمایند.

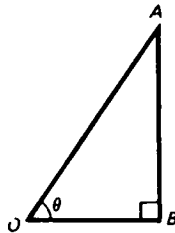
۶۰. فرض کنید  $f(x+1) - f(x) \equiv 8x + 3$ ، که در آن  $f(x) = ax^2 + bx + 5$  و  $a$  و  $b$  را بیابید.

۶۱. نشان دهید که تابع  $f$  بر بازه  $I$  صعودی است اگر و فقط اگر  $-f$  بر  $I$  نزولی باشد.

۶۲. نشان دهید که تابع  $f$  با علامت ثابت (یعنی، تابعی که مقادیرش یا همه مثبت اند یا همه منفی) بر بازه  $I$  صعودی است اگر و فقط اگر متقابلش  $1/f$  بر  $I$  نزولی باشد.

### ۳.۱ توابع مثلثاتی

فرض کنیم  $OAB$  مثلث قائم الزاویه‌ای با وتر  $OA$  بوده، و  $\theta$  (تتای کوچک یونانی) زاویه حاده در رأس  $O$  باشد، مثل شکل ۱۲. در این صورت، با گرفتن  $\theta$  به عنوان متغیر مستقل،



شکل ۱۲

توابع مثلثاتی زیر را معرفی می‌کنیم. ابتدا سینوس و کسینوس  $\theta$  را با نسبت‌های زیر معرفی می‌کنیم:

$$\sin \theta = \frac{\text{ضلع مقابل } \theta}{\text{وتر}} = \frac{|AB|}{|OA|}, \quad \cos \theta = \frac{\text{ضلع مجاور } \theta}{\text{وتر}} = \frac{|OB|}{|OA|}.$$

سپس تانژانت و کتانژانت  $\theta$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(۱) \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \quad \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\tan \theta},$$

و سکانت و کسکانت  $\theta$  را به صورت زیر:

$$(۲) \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \quad \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}.$$

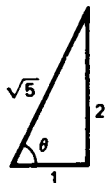
برحسب مثلث  $OAB$ ،

$$\tan \theta = \frac{\text{ضلع مقابل } \theta}{\text{ضلع مجاور } \theta} = \frac{|AB|}{|OB|},$$

$$\cot \theta = \frac{|OB|}{|AB|}, \quad \sec \theta = \frac{|OA|}{|OB|}, \quad \csc \theta = \frac{|OA|}{|AB|}$$

تناسب این شش تعریف توابع مثلثاتی مبتنی بر این امر است که تمام مثلثهای قائم الزاویه دارای زاویه حاده  $\theta$  متشابه اند ( چرا؟ )

مثال ۱. در مثلث قائم الزاویه شکل ۱۳، داریم



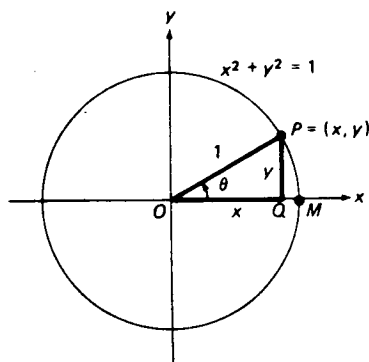
شکل ۱۳

$$\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \tan \theta = 2,$$

$$\cot \theta = \frac{1}{2}, \quad \sec \theta = \sqrt{5}, \quad \csc \theta = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

توجه کنید که چون طول اضلاع مثلث ۱ و ۲ است، از قضیه فیثاغورس معلوم می شود که طول وتر مساوی است با  $\sqrt{5} = \sqrt{1^2 + 2^2}$ .

فرض کنید  $OAB$  را با مثلث قائم الزاویه و متشابه  $OPQ$  به طول وتر ۱ عوض کرده باشیم. در این صورت،  $OPQ$  را می توان در دایره یکه  $x^2 + y^2 = 1$  چنان جا داد که  $O$  مرکز دایره،  $OP$  شعاع دایره، و  $OQ$  در امتداد محور مثبت  $x$  واقع باشد، مثل شکل ۱۴.



شکل ۱۴



فرض کنیم نقطه  $P$  به طول  $x$  و عرض  $y$  باشد. در این صورت،

$$\cos \theta = \frac{|OQ|}{|OP|} = \frac{x}{1}, \quad \sin \theta = \frac{|PQ|}{|OP|} = \frac{y}{1},$$

در نتیجه،

$$(۳) \quad \cos \theta = x, \quad \sin \theta = y.$$

برای تعریف سینوس و کسینوس به ازای  $\theta$  دلخواه، که فقط زاویه  $\theta$  حاده (یعنی، بین  $0^\circ$  و  $90^\circ$ ) نباشد، کافی است استفاده از فرمولهای (۳) را ادامه دهیم. در این وضع، فرمولهای (۱) و (۲) را تعاریف تناژانت، کتانژانت، سکانت، و کسکانت به ازای مقادیر دلخواه  $\theta$  می‌گیریم. مثل همیشه، زوایا وقتی در جهت خلاف عقربه‌های ساعت سنجیده می‌شوند مثبت، و وقتی در جهت عقربه‌های ساعت سنجیده می‌شوند منفی گرفته می‌شوند. به‌عنوان نتیجه‌ای فوری از این تعاریف، فرمولهای مهم زیر را به دست می‌آوریم:

$$(۴) \quad \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1,$$

$$(۵) \quad |\cos \theta| \leq 1, \quad |\sin \theta| \leq 1,$$

که به ازای هر  $\theta$  معتبرند. در واقع، طبق (۳)،  $\cos \theta$  و  $\sin \theta$  مختصات  $x$  و  $y$  نقطه متغیر  $P$  از دایره  $x^2 + y^2 = 1$  اند، و این بی‌درنگ فرمول (۴) را ایجاب می‌کند، که در آن رسم است که به جای  $(\cos \theta)^2$  و  $(\sin \theta)^2$  می‌نویسند  $\cos^2 \theta$  و  $\sin^2 \theta$ . همچنین، واضح است که مختصات هر نقطه  $P = (x, y)$  از دایره  $x^2 + y^2 = 1$  باید  $|x| \leq 1$ ،  $|y| \leq 1$ ، که معادل (۵) اند، صدق می‌کنند. سایر فرمولهای مثلثاتی را می‌توان از (۴) نتیجه گرفت. مثلاً،

$$(۶) \quad 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta,$$

زیرا، به کمک (۱)، (۲) و (۴)،

$$1 + \tan^2 \theta = 1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} = \sec^2 \theta.$$

به همین نحو، همانطور که به آسانی معلوم می‌شود،

$$(۶') \quad 1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta.$$

مقیاس رادیان. در شکل ۱۴ فرض کنیم  $M = (1, 0)$  نقطه‌ای از دایره، یک باشد که بر محور مثبت  $x$  قرار دارد. منظور از مقیاس رادیان زاویه  $\theta$  یعنی طول قوس  $\widehat{MP}$  به صورت یک عدد "بدون بعد"؛ یعنی، بدون بعد فیزیکی طول (که مثلاً به اینچ یا متر است).

چون محیط دایره یک  $2\pi$  است، پس  $2\pi$  رادیان =  $360^\circ$  درجه، یا معادلاً  $\pi$  رادیان =  $180^\circ$  درجه. بنابراین،

$$0.01745 \text{ رادیان} \approx \frac{\pi}{180} \text{ رادیان} = 1^\circ \text{ درجه}$$

$$59.29578^\circ \text{ درجه} \approx \frac{180}{\pi} \text{ درجه} = 1 \text{ رادیان}$$

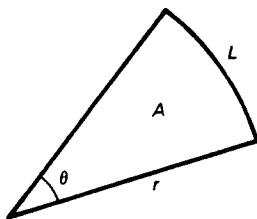
که در آن علامت  $\approx$  تساوی تقریبی است. برای احتراز از خلط درجه و رادیان، این قرارداد را می‌پذیریم که زاویه به رادیان است مگر آنکه همراه با کلمه "درجه" یا علامت درجه  $^\circ$  باشد. لذا، با این فرض،

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \frac{180}{\pi} \text{ درجه} = 30^\circ, \quad \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \frac{180}{\pi} \text{ درجه} = 45^\circ,$$

$$60^\circ = 60 \left( \frac{\pi}{180} \right) = \frac{\pi}{3}, \quad 90^\circ = 90 \left( \frac{\pi}{180} \right) = \frac{\pi}{2},$$

و از این قبیل.

به‌طور کلی، فرض کنیم دایره شکل ۱۴ به شعاع  $r$  باشد؛ در نتیجه،  $|OP| = r$ ،  $M = (r, 0)$  به جای  $|OP| = 1$ ، و  $M = (1, 0)$ ، و  $L$  طول قوس  $\widehat{MP}$  باشد. در این صورت، مقیاس رادیان  $\theta$  مساوی نسبت  $L/r$  تعریف می‌شود (اگر  $r = 1$ ، این به تعریف قبل تحویل می‌شود). واحد طول در نسبت  $L/r$  حذف می‌شود، و به این دلیل مقیاس رادیان "بدون بعد" است. حال می‌توان برای طول  $L$  یک قوس مستدیر به شعاع  $r$  که، مثل شکل ۱۵، در مرکزش زاویه‌ای برابر  $\theta$  رادیان دربردارد یک فرمول نوشت. در واقع، چون  $\theta = L/r$



شکل ۱۵

فورا " معلوم می‌شود که

$$(۷) \quad L = r\theta.$$

همچنین، برای مساحت  $A$  یک قطاع مستدیر به شعاع  $r$  که زاویه مرکزی‌اش  $\theta$  رادیان است فرمول ساده‌ای وجود دارد (ر.ک. شکل ۱۵). واضح است که  $A$  با  $\theta$  نسبت مستقیم

داشته و وقتی  $\theta = 0$  مساوی صفر است. بنابراین،  $A = k\theta$ ، که در آن  $k$  یک ثابت تناسب مثبت است. برای تعیین  $k$ ، ملاحظه می‌کنیم که وقتی  $\theta = 2\pi$ ،  $A = \pi r^2$ ، زیرا مساحت یک قرص مستدیر کامل به شعاع  $r$  مساوی  $\pi r^2$  است. لذا،  $\pi r^2 = 2\pi k$ ، یا معادلاً  $k = \frac{1}{2}r^2$  و فرمول  $A = k\theta$  خواهد شد

$$(A) \quad A = \frac{1}{2}r^2\theta.$$

تبصره. فرمولهایی که بعداً "برای محاسبهٔ حدود، مشتقات، و انتگرالهای توابع مثلثاتی به دست می‌آیند همه برای فرض تلویحی استوارند که زوایا به رادیان اند، و در صورتی که به درجه باشند شکل متفاوت پیچیده‌تری را به خود می‌گیرند. لذا، در حل مسائل حساب دیفرانسیل و انتگرال باید از مقیاس رادیان استفاده کرد، که اغلب در این مورد اشتباه می‌شود. با اینحال، اغلب می‌خواهند جوابهای مسائل حساب دیفرانسیل و انتگرال را به درجه بیان کنند، زیرا در زندگی روزمره مقیاس درجه از مقیاس رادیان معمولتر است.

فرض کنیم  $n$  عدد صحیح دلخواهی باشد. با افزودن  $2n\pi$  رادیان به زاویهٔ  $\theta$  در شکل ۱۴ موجب می‌شود که شعاع  $OP$ ،  $|n|$  دوران کامل حول مبدا در جهت خلاف عقربه‌های ساعت بزند اگر  $n > 0$  و در جهت عقربه‌های ساعت بزند اگر  $n < 0$  در صورت  $n = 0$  اصلاً "تغییر نمی‌کند". این تأثیری بر موضع نهایی  $OP$  ندارد؛ در نتیجه، اثری بر مختصات  $P$ ، یعنی بر مقادیر کسینوس و سینوس، نخواهد داشت. بنابراین، به‌ازای هر عدد صحیح  $n$

$$\cos(\theta + 2n\pi) = \cos \theta, \quad \sin(\theta + 2n\pi) = \sin \theta$$

همچنین، شعاع  $OP$  قائم است اگر و فقط اگر  $\theta = (n + \frac{1}{2})\pi$  و افقی است اگر و فقط اگر  $\theta = n\pi$ ، که در آن  $n$  عدد صحیح دلخواهی است. چون  $P = (\cos \theta, \sin \theta)$ ، پس  $\cos \theta = 0$  اگر و فقط اگر  $\theta = (n + \frac{1}{2})\pi$ ، در حالی که  $\sin \theta = 0$  اگر و فقط اگر  $\theta = n\pi$ . به‌خصوص

$$\cos \frac{\pi}{2} = \cos \frac{3\pi}{2} = 0$$

و

$$\sin 0 = \sin \pi = 0.$$

شعاع  $OP$  در امتداد محور مثبت  $x$  است اگر  $\theta = 0$  و در امتداد محور منفی  $x$  است اگر  $\theta = \pi$ . در نتیجه،

$$\cos 0 = 1, \quad \cos \pi = -1,$$

در حالی که  $OP$  در امتداد محور مثبت  $y$  است اگر  $\theta = \pi/2$  و در امتداد محور منفی  $y$  است

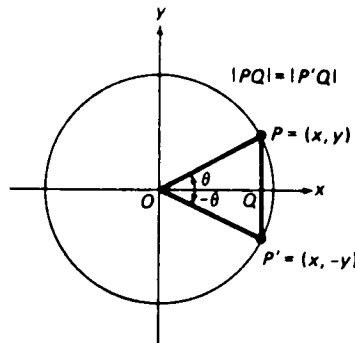
اگر  $\theta = 3\pi/2$ ؛ در نتیجه،

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \sin \frac{3\pi}{2} = -1.$$

همچنین، تغییر  $\theta$  به  $-\theta$  موجب تبدیل نقطه  $P = (x, y) = (\cos \theta, \sin \theta)$  به نقطه  $P' = (x, -y) = (\cos \theta, -\sin \theta)$  می‌شود، که منعکس آن نسبت به محور  $x$  است (ر. ک. شکل ۱۶). اما  $P' = (\cos(-\theta), \sin(-\theta))$ ؛ و لذا، طبق تساوی جفت‌های مرتب،

$$(9) \quad \cos(-\theta) = \cos \theta, \quad \sin(-\theta) = -\sin \theta.$$

اولین فرمول از این فرمول‌های مهم به ما می‌گوید که  $\cos \theta$  یک تابع زوج است، و دومین فرمول می‌گوید که  $\sin \theta$  یک تابع فرد می‌باشد.



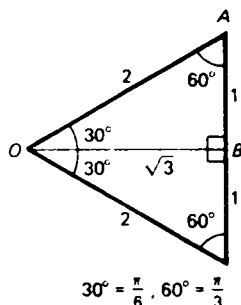
شکل ۱۶

علاوه بر مضارب صحیح  $\pi/2$ ، چند مقدار خاص دیگری از  $\theta$  وجود دارند که مقادیر توابع مثلثاتی در آنها را می‌توان بدون مراجعه به جداول عددی یا ماشین حساب علمی حساب کرد. شکل ۱۷ (آ) یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین به طول ضلع ۱ را نشان می‌دهد، که در آن می‌توان دید

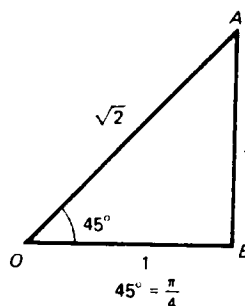
$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{|AB|}{|OA|} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos \frac{\pi}{4} = \frac{|OB|}{|OA|} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \tan \frac{\pi}{4} = \frac{|AB|}{|OB|} = 1,$$

و شکل ۱۷ (ب) یک مثلث متساوی الاضلاع دو نیم شده به طول ضلع ۲ را نشان می‌دهد، که در آن می‌توان دید

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{6} &= \frac{|AB|}{|OA|} = \frac{1}{2}, & \cos \frac{\pi}{6} &= \frac{|OB|}{|OA|} = \frac{\sqrt{3}}{2}, & \tan \frac{\pi}{6} &= \frac{|AB|}{|OB|} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \sin \frac{\pi}{3} &= \frac{|OB|}{|OA|} = \frac{\sqrt{3}}{2}, & \cos \frac{\pi}{3} &= \frac{|AB|}{|OA|} = \frac{1}{2}, & \tan \frac{\pi}{3} &= \frac{|OB|}{|AB|} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$



(ب)



(آ)

شکل ۱۷

این مقادیر از توابع سینوس، کسینوس، و تانژانت را باید به خاطر سپرد، زیرا با آنها مکرر مواجه می‌شویم.

قانون کسینوسها. تعمیم زیر از قضیه فیثاغورس ابزار مفیدی برای حل مسائل مثلثاتی است.

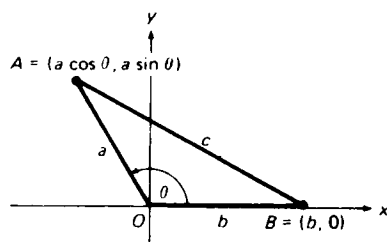
قضیه ۲ (قانون کسینوسها). فرض کنیم  $OAB$  مثلثی (نه لزوماً "قائم‌الزاویه") بوده، و  $\theta$  زاویه‌ای به رأس  $O$  باشد. در این صورت،

(۱۰)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta,$$

که در آن  $a = |OA|$ ،  $b = |OB|$  و  $c = |AB|$ .

برهان. مثلث  $OAB$  به رأس  $O$  را در مبدأ صفحه  $xy$  و ضلع  $OB$  را در امتداد محور مثبت  $x$  قرار می‌دهیم. در این صورت، مثل شکل ۱۸، و به کمک فرمول (۲)، صفحه ۳۶، برای



شکل ۱۸

مجذور فاصله بین دو نقطه، درمی یابیم که

$$\begin{aligned} c^2 &= |AB|^2 = (a \cos \theta - b)^2 + (a \sin \theta)^2 \\ &= a^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + b^2 - 2ab \cos \theta, \end{aligned}$$

که، به خاطر (۴)، معادل (۱۰) می باشد.

توجه کنید که اگر  $\theta = \pi/2$ ، مثلث  $OAB$  قائم الزاویه شده و قانون کسینوسها به قضیه فیثاغورس  $c^2 = a^2 + b^2$  تحویل می شود.

مثال ۲. زاویه بین دو ضلع یک مثلث  $60^\circ$  است. اگر این اضلاع به طولهای ۲ و ۳ باشند، طول ضلع سوم چقدر است؟

حل. فرض کنیم  $a$  و  $b$  طول اضلاع داده شده بوده، و  $c$  طول ضلع سوم باشد. می دانیم که  $a = 2$ ،  $b = 3$ ، و نیز  $\theta = \pi/3$ . بنابراین، طبق فرمول (۱۰)،

$$c^2 = 2^2 + 3^2 - 2(2)(3)\left(\cos \frac{\pi}{3}\right) = 4 + 9 - 12\left(\frac{1}{2}\right) = 7,$$

در نتیجه،  $c = \sqrt{7}$ .

به کمک قضیه ۲، می توان فرمول کلیدی

$$(11) \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

برای کسینوس تفاضل بین دو زاویه  $\alpha$  و  $\beta$  (حروف کوچک یونانی آلفا و بتا) را ثابت کرد.

مثلث  $OAB$  در شکل ۱۹ را در نظر می گیریم، که در آن  $O$  مبدأ است،  $A = (\cos \alpha, \sin \alpha)$  و  $B = (\cos \beta, \sin \beta)$ . زاویه مقابل به ضلع  $AB$  مساوی  $\theta = \alpha - \beta$  است، و  $|OA| = |OB| = 1$ . از یک سو، طبق قانون کسینوسها که بر مثلث  $OAB$  اعمال شده،

$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA||OB|\cos \theta = 2 - 2\cos(\alpha - \beta),$$

و از سوی دیگر، بنابر فرمول مجذور فاصله بین نقاط  $A$  و  $B$

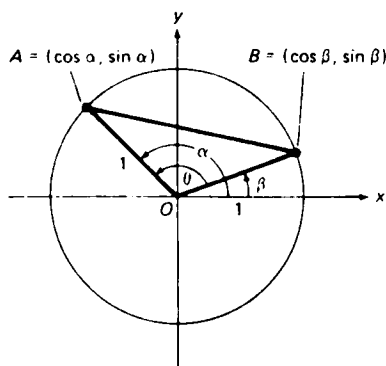
$$\begin{aligned} |AB|^2 &= (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 \\ &= \cos^2 \alpha - 2\cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha - 2\sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta \\ &= (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \\ &= 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta), \end{aligned}$$

پس نتیجه می شود که

$$2 - 2 \cos(\alpha - \beta) = 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta),$$

که با (۱۱) معادل است.

شکل ۱۹ با این فرض رسم شده که  $\alpha > \beta > 0$ . لازم است حالات دیگر را در نظر گرفته و متقاعد شوید که در هر مورد همان فرمول (۱۱) به دست می‌آید.



شکل ۱۹

از تعویض  $\beta$  با  $-\beta$  در (۱۱) و استفاده از فرمولهای (۹)، فرمول لنگه

$$(11') \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

به دست می‌آید. برای به دست آوردن فرمولهایی برای  $\sin(\alpha + \beta)$  و  $\sin(\alpha - \beta)$  ابتدا در (۱۱) اختیار می‌کنیم  $\alpha = (\pi/2) + \theta$ ,  $\beta = \pi/2$ . این کار نتیجه می‌دهد

$$\cos \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \cos \frac{\pi}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \sin \frac{\pi}{2},$$

یا، معادلاً،

$$(12) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta,$$

زیرا  $\cos(\pi/2) = 0$  و  $\sin(\pi/2) = 1$ . حال در (۱۱') اختیار می‌کنیم  $\alpha = \pi/2$ ,  $\beta = \theta$ . نتیجه می‌دهد

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos \theta - \sin \frac{\pi}{2} \sin \theta,$$

یا، معادلاً،

$$(12') \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta.$$

حال ، از تعویض  $\alpha$  با  $\alpha + (\pi/2)$  در (۱۱') ، به دست می‌آوریم

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha + \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cos \beta - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sin \beta,$$

که پس از اعمال (۱۲) و (۱۳') و ضرب در  $-1$  ، به صورت زیر درمی‌آید :

$$(13) \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

بالاخره ، از تعویض  $\beta$  با  $\beta - \pi$  در (۱۳) ، فرمول لنگه زیر را خواهیم داشت :

$$(13'') \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

قوانین جمع . فرمولهای (۱۱) ، (۱۱') ، (۱۳) ، و (۱۳'') که اکنون آنها را به شکل مناسبتری برای به خاطر آوردن درمی‌آوریم ، قوانین جمع برای توابع سینوس و کسینوس نامیده می‌شوند .

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

جدول زیر شامل چند فرمول مثلثاتی مفید دیگر است و به طرز اثبات آنها اشاره شده است .

فرمول	برهان
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta \quad \checkmark$	در فرمول مربوط به $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ ، $\theta$ را به $\theta - \pi$ تغییر دهید .
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta \quad \checkmark$	در فرمول مربوط به $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ ، $\theta$ را به $\theta - \pi$ تغییر دهید .
$\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta \quad \checkmark$	در فرمول مربوط به $\sin(\alpha + \beta)$ ، $\alpha = \pi$ ، $\beta = \theta$ را اختیار کنید .
$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta \quad \checkmark$	در فرمول فوق ، $\theta$ را به $\theta - \pi$ تغییر دهید .
$\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta \quad \checkmark$	در فرمول مربوط به $\cos(\alpha + \beta)$ ، $\alpha = \pi$ ، $\beta = \theta$ را اختیار کنید .
$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta \quad \checkmark$	در فرمول فوق ، $\theta$ را به $\theta - \pi$ تغییر دهید .



فرمولهای زاویه مضاعف. با فرض  $\alpha = \beta = \theta$  در فرمولهای مربوط به  $\sin(\alpha + \beta)$  و  $\cos(\alpha + \beta)$ ، فرمولهای مهم زاویه مضاعف به دست می‌آیند:

$$(۱۴) \quad \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta,$$

$$(۱۴') \quad \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta.$$

باتوجه به

$$1 + \cos 2\theta = 1 + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = (1 - \sin^2 \theta) + \cos^2 \theta = 2 \cos^2 \theta,$$

$$1 - \cos 2\theta = 1 - (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = (1 - \cos^2 \theta) + \sin^2 \theta = 2 \sin^2 \theta$$

به جفت فرمول مفید دیگری می‌رسیم:

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}, \quad \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}.$$

ما قبلاً "فرمولی برای سینوس تفاضل بین زوایا داشتیم. همچنین، می‌توان فرمولی برای تفاضل بین دو سینوس به دست آورد. در واقع،

$$\begin{aligned} \sin \alpha - \sin \beta &= \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\ &= \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \\ &\quad - \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}, \end{aligned}$$

و لذا. پس از حذف یک جفت جمله،

$$(۱۵) \quad \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

بعداً "خواهید دید که این فرمول مفید است.

فرمولهای فوق، که مربوط به سینوس و کسینوس اند، می‌توانند در اثبات فرمولهای مشابهی در باب سایر توابع مثلثاتی مفید واقع شوند.

مثال ۳. نشان دهید که

$$\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta, \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot \theta,$$

و

$$(۱۶) \quad \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}.$$

حل. با استفاده از فرمولهای نظیر به سینوس و کسینوس، داریم

$$\tan(\pi - \theta) = \frac{\sin(\pi - \theta)}{\cos(\pi - \theta)} = \frac{\sin \theta}{-\cos \theta} = -\tan \theta,$$

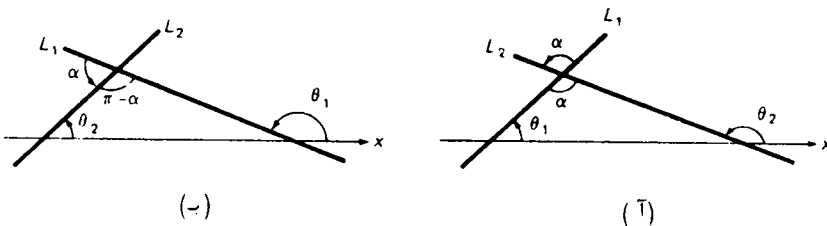
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = \frac{\cos \theta}{-\sin \theta} = -\cot \theta.$$

همچنین،

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}.$$

که پس از تقسیم صورت و مخرج بر حاصل ضرب  $\cos \alpha \cos \beta$ ، به فرمول (۱۶) تحویل می‌شود.

زاویه بین دو خط. حال، به عنوان کاربردی از فرمول (۱۶)، زاویه بین دو خط را مورد بحث قرار می‌دهیم. فرض کنیم  $L_1$  و  $L_2$  دو خط متقاطع در نقطه  $P$  باشند، که می‌توان فرض کرد بالای محور  $x$  باشد (مثل برهان قضیه ۹، صفحه ۵۳). در این صورت، کوچکترین زاویه  $\alpha$  که  $L_1$  می‌تواند حول  $P$  در جهت خلاف عقربه‌های ساعت بچرخد تا بر  $L_2$  منطبق شود زاویه بین  $L_1$  و  $L_2$ ، یا دقیقتر زاویه از  $L_1$  به  $L_2$ ، نام دارد. (زاویه بین دو خط موازی یا منطبق ۰ تلقی می‌شود.) از شکل ۲۰ واضح است که  $\alpha$  همواره در بازه  $0 \leq \alpha < \pi$  قرار دارد. فرض کنیم  $\theta_1$  میل  $L_1$  و  $\theta_2$  میل  $L_2$  باشد. هرگاه مثل شکل ۲۰ (ب) آنگاه  $\theta_1 < \theta_2$ ، آنگاه  $\theta_2 = \alpha + \theta_1$  یا  $\alpha = \theta_2 - \theta_1$  (ر.ک. برهان قضیه



شکل ۲۰

مذکور)، حال آنکه هرگاه مثل شکل ۲۰ (ب)، آنگاه  $\theta_1 > \theta_2$ ، آنگاه  $\theta_1 = (\pi - \alpha) + \theta_2$  یا  $\alpha = \pi + (\theta_2 - \theta_1)$ . فرض کنیم  $L_1$  و  $L_2$  مایل و غیرعمود به شیبهای  $m_1$  و  $m_2$  باشند؛ در نتیجه،  $m_1 = \tan \theta_1$  و  $m_2 = \tan \theta_2$ . هرگاه  $\theta_1 < \theta_2$ ، آنگاه، به کمک رابطه

(۱۶)

$$\tan \alpha = \tan (\theta_2 - \theta_1) = \frac{\tan \theta_2 - \tan \theta_1}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2},$$

حال آنکه هرگاه  $\theta_1 > \theta_2$  ، آنگاه

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \tan [\pi + (\theta_2 - \theta_1)] = \frac{\sin [\pi + (\theta_2 - \theta_1)]}{\cos [\pi + (\theta_2 - \theta_1)]} \\ &= \frac{-\sin (\theta_2 - \theta_1)}{-\cos (\theta_2 - \theta_1)} = \tan (\theta_2 - \theta_1), \end{aligned}$$

در نتیجه ، مثل قبل ،

$$(۱۷) \quad \tan \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}.$$

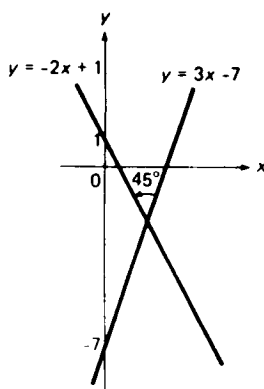
توجه کنید که  $m_1 m_2 \neq -1$  ، زیرا  $L_1$  و  $L_2$  غیر عمودند ؛ در نتیجه ، مخرج  $1 + m_1 m_2$  در (۱۷) ناصفر است .

مثال ۴ . زاویه  $\alpha$  ی بین خطوط  $y = 3x - 7$  و  $y = -2x + 1$  را بیابید .

حل . اولین خط به شیب  $m_1 = 3$  ، و دومین خط به شیب  $m_2 = -2$  است . با گذاردن این مقادیر در فرمول (۱۷) ، به دست می آوریم

$$\tan \alpha = \frac{-2 - 3}{1 - 6} = 1.$$

چون  $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$  ، نتیجه می گیریم که زاویه  $\alpha$  مساوی  $45^\circ$  است ، که از خط اول به خط دوم سنجیده می شود (ر.ک. شکل ۲۱) .



شکل ۲۱

مسائل

زاویه داده شده را از درجه به رادیان برید .

$$1500^\circ \cdot ۳ ✓$$

$$150^\circ \cdot ۲ ✓$$

$$15^\circ \cdot ۱ ✓$$

$$423^\circ \cdot ۶ ✓$$

$$-220^\circ \cdot ۵ ✓$$

$$-72^\circ \cdot ۴ ✓$$

زاویه داده شده را از رادیان به درجه برید .

$$-\pi/12 \cdot ۹ ✓$$

$$\pi/45 \cdot ۸ ✓$$

$$\pi/15 \cdot ۷ ✓$$

$$60 \cdot ۱۲ ✓$$

$$\pi^2 \cdot ۱ ✓$$

$$-5 \cdot ۱۰ ✓$$

طول  $L$  قوس مستدیر و مساحت  $A$  قطاع مستدیر با شعاع  $r$  و زاویه مرکزی  $\theta$  ی داده شده را

بیابید .

$$r = 3, \theta = \pi/6 \cdot ۱۴ ✓$$

$$r = 2, \theta = \pi/4 \cdot ۱۳ ✓$$

$$r = 10, \theta = 5\pi/6 \cdot ۱۶ ✓$$

$$r = 5, \theta = 120^\circ \cdot ۱۵ ✓$$

$$r = 4, \theta = 36^\circ \cdot ۱۸ ✓$$

$$r = 50, \theta = 1^\circ \cdot ۱۲ ✓$$

مثلث به اضلاع  $a, b, c$  و زاویه  $\theta$  مقابل ضلع  $c$  داده شده است .

$$a = 3, b = 5, \theta = \pi/6 \cdot ۱۹ ✓$$

$$a = 4, b = 6, \theta = \pi/4 \cdot ۲۰ ✓$$

$$a = 5, c = 7, \theta = 2\pi/3 \cdot ۲۱ ✓$$

$$b = 6, c = 9, \theta = \pi/3 \cdot ۲۲ ✓$$

$$b = 10, c = 15, \theta = 3\pi/4 \cdot ۲۳ ✓$$

$$a = 5, b = 12, c = 13 \cdot ۲۴ ✓$$

رسم است که برای اضلاع و طولشان یک علامت به کار می رود .

در مسائل ۲۵ تا ۴۸ عبارت داده شده را بدون توسل به جدول یا ماشین حساب محاسبه

کنید .

$$\csc 60^\circ \cdot ۲۷ ✓$$

$$\sec 45^\circ \cdot ۲۶ ✓$$

$$\tan 135^\circ \cdot ۲۵ ✓$$

$$\cot 45^\circ \cdot ۳۰ ✓$$

$$\csc 30^\circ \cdot ۲۹ ✓$$

$$\cot 30^\circ \cdot ۲۸ ✓$$

$$\sec \frac{\pi}{3} \cdot ۳۳ ✓$$

$$\tan \frac{2\pi}{3} \cdot ۳۲ ✓$$

$$\sec \frac{\pi}{6} \cdot ۳۱ ✓$$

$$\csc \frac{\pi}{4} \cdot ۳۶ ✓$$

$$\cot \frac{\pi}{3} \cdot ۳۵ ✓$$

$$\tan \frac{5\pi}{6} \cdot ۳۴ ✓$$

$$\sec 150^\circ \cdot ۳۹ ✓$$

$$\sin 765^\circ \cdot ۳۸ ✓$$

$$\cos (-120^\circ) \cdot ۳۷ ✓$$

$$\tan 300^\circ \cdot ۴۲ ✓$$

$$\csc 135^\circ \cdot ۴۱ ✓$$

$$\cot 210^\circ \cdot ۴۵ ✓$$

$$\tan \frac{19\pi}{6} \cdot ۴۵ ✓$$

$$\sin \left( \frac{17\pi}{3} \right) \cdot ۴۴ ✓$$

$$\cot \left( -\frac{35\pi}{4} \right) \cdot ۴۳ ✓$$

$$\cos \frac{99\pi}{4} \cdot ۴۸$$

$$\sec \frac{11\pi}{3} \cdot ۴۷✓$$

$$\csc \left( -\frac{15\pi}{4} \right) \cdot ۴۶✓$$

آیا عدد داده شده مثبت، منفی، یا صفر است؟

$$\sin 2^\circ \cdot ۵۲✓$$

$$\cos 899^\circ \cdot ۵۱✓$$

$$\sec 5 \cdot ۵۰$$

$$\sin 200\pi \cdot ۴۹✓$$

۵۳. مثلثی به اضلاع  $a, b, c$  و زوایای  $A, B, C$  مقابل به این اضلاع داده شده است. قانون سینوسها را تحقیق کنید:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

۵۴. نشان دهید که مساحت مثلث مسئله قبل مساوی است با

$$\frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C.$$

۵۵. مساحت یک مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع  $s$  چقدر است؟

۵۶. مساحت یک مثلث متساوی الساقین قائم الزاویه به طول وتر  $h$  چقدر است؟ اتحاد مثلثاتی داده شده را ثابت کنید.

$$\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta \cdot ۵۷✓$$

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \cdot ۵۸✓$$

$$\cos 4\theta = 8 \cos^4 \theta - 8 \cos^2 \theta + 1 \cdot ۵۹✓$$

$$\sin 4\theta = 8 \sin \theta \cos^3 \theta - 4 \sin \theta \cos \theta \cdot ۶۰✓$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot ۶۱✓$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot ۶۲✓$$

$$\tan \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta} \cdot ۶۴✓$$

$$\tan \theta = \frac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta} \cdot ۶۳✓$$

$$\tan 2\theta = \frac{2}{\cot \theta - \tan \theta} \cdot ۶۶✓$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \cdot ۶۵✓$$

زاویه بین جفت خطوط داده شده، که از خط اول به خط دوم سنجیده می شود، را بیابید.

$$5x - y + 7 = 0, 3x + 2y = 0 \cdot ۶۷✓$$

$$3x - 2y + 7 = 0, 2x + 3y - 3 = 0 \cdot ۶۸✓$$

$$2x - y - 4 = 0, x - 3y + 5 = 0 \cdot ۶۹✓$$

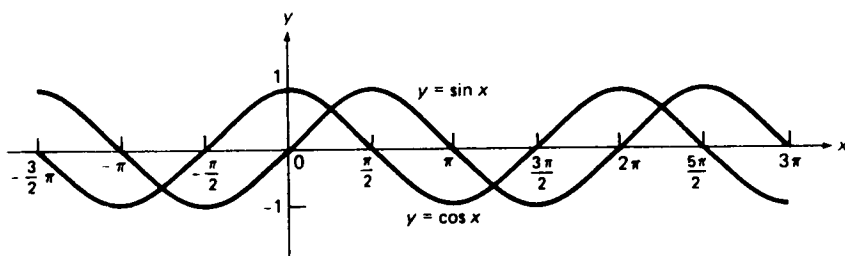
$$\sqrt{3}x - y + 1 = 0, \sqrt{3}x + y - 1 = 0 \cdot ۷۰✓$$

۷۱. تقریب  $\pi \approx \frac{355}{113}$  با کمال تعجب دقیق است. چقدر دقیق؟

۷۲. نشان دهید که طول شیار مارپیچ در یک صفحه گرامفون ۱۲ اینچی حدود یک چهارم میل است. فرض کنید صفحه ۲۰ دقیقه طول بکشد، در ۲ اینچی مرکز تمام شود، و سرعتش  $33\frac{1}{3}$  rpm (دور بر دقیقه) باشد.

#### ۴.۱ مطالب دیگر در باب توابع مثلثاتی

حال نمودار توابع مثلثاتی را بررسی می‌کنیم، متغیر مستقل را به جای  $\theta$  با  $x$  نشان داده، و فرض می‌کنیم  $x$  به رادیان باشد. بحث را با سینوس و کسینوس آغاز می‌کنیم. نمودارهای  $\sin x$  و  $\cos x$  در شکل ۲۲ و در یک دستگاه مختصات دکارتی نموده شده‌اند، و هریک را



شکل ۲۲

می‌توان مستقیماً "از تعبیر هندسی توابع یا غیرمستقیم به کمک ماشین حساب علمی یا جداول توابع مثلثاتی به دست آورد. هر نمودار یک منحنی است که به طور مرتب بالا و پایین می‌رود. البته، هیچ شکلی نمی‌تواند بیش از قسمتی از نمودار تابعی مانند  $\sin x$  که بر تمام خط حقیقی تعریف شده است را نشان دهد، ولی آنچه رخ می‌دهد واضح است. بخشی از  $\sin x$  که روی هر بازه

$$2n\pi \leq x \leq 2(n+1)\pi \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

است نسخه کامل بخشی از آن است که روی بازه  $0 \leq x \leq 2\pi$  قرار دارد، و همین امر در مورد نمودار  $\cos x$  درست است.

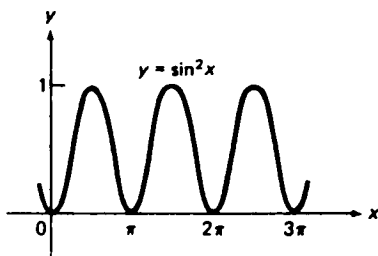
توابع متناوب. این خاصیت تکراری نمودارهای سینوس و کسینوس (و توابع بسیار دیگر، از جمله توابع مثلثاتی دیگر) تناوب نام دارد. به طور دقیقتر، گوئیم تابع  $f$  متناوب، با دوره تناوب  $p$  ( $p \neq 0$ ) است اگر

$$f(x+p) \equiv f(x),$$

یعنی، اگر  $p$  را به شناسه  $f$  بیفزاییم، مقدارش تغییر نکند. در اینجا فرض است که قلمرو

$f$  در صورت شامل بودن  $x$  حاوی  $x \pm p$  باشد. با این زبان، توابع  $\sin x$  و  $\cos x$  هر دو متناوب‌اند، با دوره تناوب  $2\pi$ . این توابع متناوب با دوره تناوب  $2n\pi$ ، که  $n$  عدد صحیح مثبت یا منفی دلخواهی است، نیز می‌باشند. کوچکترین دوره تناوب مثبت یک تابع متناوب دوره تناوب اساسی آن نام دارد. از شکل ۲۲ واضح است که دوره تناوب اساسی  $\sin x$  و  $\cos x$  مساوی  $2\pi$  است.

مثال ۱. شکل ۲۳ نشان می‌دهد که دوره تناوب اساسی  $\sin^2 x$  مساوی  $\pi$ ، یعنی نصف



شکل ۲۳

دوره تناوب اساسی خود  $\sin x$  است.

اختیاری. این مطلب را می‌توان به‌طور جبری به صورت زیر دید. عدد  $\pi$  دوره تناوب  $\sin^2 x$  است، زیرا  $\sin^2(x + \pi) \equiv (-\sin x)^2 \equiv \sin^2 x$ . فرض کنیم  $\sin^2 x$  دوره تناوب مثبت  $p$  کوچکتر از  $\pi$  دارد. پس

$$\sin^2(x + p) \equiv \sin^2 x,$$

که در آن  $0 < p < \pi$ ، با اختیار  $x = 0$  در آخرین فرمول، به دست می‌آوریم

$$\sin^2 p = \sin^2 0 = 0,$$

یا معادلاً  $\sin p = 0$ . اما این ممکن نیست، زیرا  $\sin p$  به ازای  $0 < p < \pi$  نا صفر است. بنابراین،  $\pi$  کوچکترین دوره تناوب مثبت  $\sin^2 x$  می‌باشد.

توابع کراندار و بی‌کران. نمودار توابع  $y = \sin x$  و  $y = \cos x$  هر دو به نوار افقی  $-1 \leq y \leq 1$  محدود شده‌اند. این نظیر آن است که بگوییم به ازای هر  $x$ ،  $|\sin x| \leq 1$  و  $|\cos x| \leq 1$  (ر.ک. صفحه ۸۸). اگر نمودار تابع  $y = f(x)$  کاملاً "در نوار افقی  $-C \leq y \leq C$  جا

داشته باشد، یا معادلاً"، به ازای هر  $x$ ،  $|f(x)| \leq C$ ، گوییم  $f$  کراندار است، در غیر این صورت گوییم  $f$  بی‌کران است. به‌طورکلی، گوییم تابع  $y = f(x)$  بر بازه  $I$  کراندار است اگر  $C \leq f(x) \leq -C$ ، یا معادلاً"، به ازای جمیع مقادیر  $x$  در  $I$  و  $C > 0$  ای،  $|f(x)| \leq C$ ، اما در غیر این صورت گوییم  $f$  بر  $I$  بی‌کران می‌باشد.

## مثال ۲. تابع خطی

$$f(x) = mx + b \quad (m \neq 0)$$

بر  $[-1, 1]$  کراندار و بر  $[0, \infty)$  بی‌کران است. به‌طورکلی،  $f$  بر هر بازه نامتناهی کراندار و بر بازه نامتناهی بی‌کران است.

به‌خاطر قضیه ۱، صفحه ۸۲، و فرمولهای

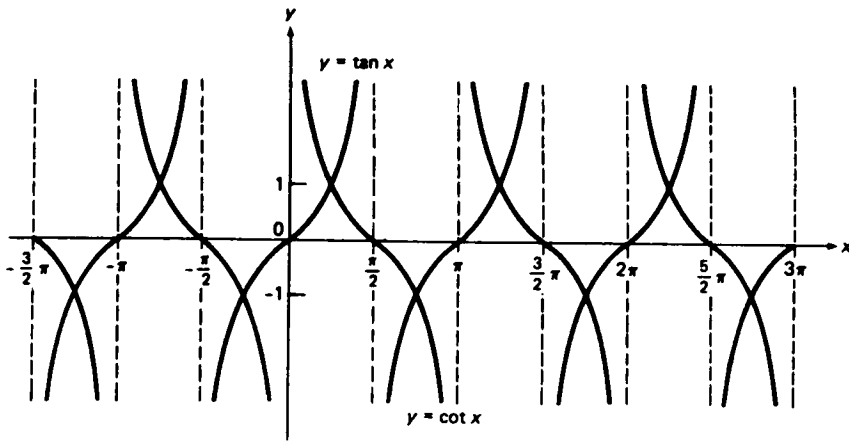
$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad \sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right),$$

انتقال  $\sin x$  به اندازه  $\pi/2$  به چپ نمودار  $\cos x$  را می‌دهد، و معادلاً"، انتقال نمودار  $\cos x$  به اندازه  $\pi/2$  به راست نمودار سینوس را خواهد داد (ر.ک. شکل ۲۲). به‌زبان مهندسی، که توابع سینوس و کسینوس برای توصیف پدیده‌های متناوب به کار می‌روند و  $x$  زمان است،  $\cos x$  از  $\sin x$  به اندازه  $\pi/2$  (یا  $90^\circ$ ) تقدم دارد ("جلو است")، ولی  $\sin x$  از  $\cos x$  به اندازه  $\pi/2$  تأخر دارد ("عقب است"). در همین وضع، گویند دو "شکل موجی"  $\sin x$  و  $\cos x$  به اندازه  $90^\circ$  تفاوت فاز دارند. توجه کنید که نمودار  $\cos x$  نسبت به محور  $y$  متقارن است، و این مطلب انتظارش می‌رفت، زیرا  $\cos x$  تابعی زوج است، و نمودار  $\sin x$  نسبت به مبدأ متقارن است، زیرا  $\sin x$  یک تابع فرد است. همچنین، می‌بینیم که  $\cos x$  بر  $[-\pi, 0]$  صعودی و بر  $[0, \pi]$  نزولی است، ولی  $\sin x$  بر  $[-\pi/2, \pi/2]$  صعودی و بر  $[\pi/2, 3\pi/2]$  نزولی می‌باشد.

حال توابع  $\tan x$  و  $\cot x$  را در نظر می‌گیریم. شکل ۲۴ نمودار این دو تابع را در یک دستگاه مختصات قائم نشان می‌دهد. تابع  $\tan x$  به ازای  $x = (n + \frac{1}{2})\pi$ ، که در آن  $n$  عدد صحیح است، تعریف نشده است. از اینرو، می‌توان  $\tan x$  را متشکل از بی‌نهایت<sup>۱</sup>

۱. اگر مجموعه‌ای شامل  $n$  عنصر باشد، که  $n$  عددی صحیح و نامنفی است، گوییم مجموعه نامتناهی است. در غیر این صورت، گوییم مجموعه نامتناهی است، یا شامل بی‌نهایت عنصر است. مثلاً"، مجموعه تمام اعداد صحیح نامتناهی است، به ازای بی‌نهایت مقدار از  $x$ ،  $\sin x = 0$ ، و از این قبیل.





شکل ۲۴

تابع جداگانه

$$y = \tan x \quad \left( (n - \frac{1}{2})\pi < x < (n + \frac{1}{2})\pi \right)$$

تصور کرد به نام شاخه‌های  $\tan x$  که هر یک قلمرو تعریف و نمودار خود (که آن نیز یک شاخه نامیده می‌شود) را دارد که روی بازه بازی به طول  $\pi$  قرار دارد. توجه کنید که شاخه‌های  $\tan x$  به وسیله خطوط قائم  $x = (n + \frac{1}{2})\pi$  از هم جدا شده‌اند. به همین نحو، تابع  $\cot x$  به ازای  $x = n\pi$  تعریف نشده است؛ و لذا، این نیز از بی‌نهایت شاخه

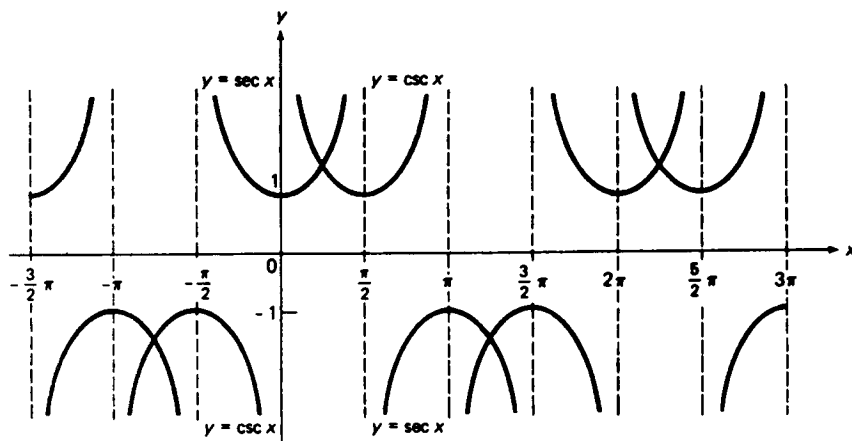
$$y = \cot x \quad (n\pi < x < (n + 1)\pi)$$

تشکیل شده است که به وسیله خطوط مستقیم  $x = n\pi$  از هم جدا شده‌اند. از شکل ۲۴ معلوم می‌شود که هر شاخه  $\tan x$  یک تابع صعودی بی‌کران است، حال آنکه هر شاخه  $\cot x$  یک تابع نزولی بی‌کران می‌باشد. شکل نیز نشان می‌دهد که هر دو تابع  $\tan x$  و  $\cot x$  متناوبند، با دوره تناوب اساسی  $\pi$  (یک تابع متناوب لازم نیست به ازای هر مقدار از  $x$  تعریف شده باشد). البته،  $2\pi$  نیز دوره تناوب این توابع است، ولی دوره تناوب اساسی، یعنی کوچکترین دوره تناوب مثبت، نیست. توجه کنید که  $\tan x = 0$  اگر و فقط اگر  $x = n\pi$ ، حال آنکه  $\cot x = 0$  اگر و فقط اگر  $x = (n + \frac{1}{2})\pi$ .

نمودار توابع مثلثاتی  $\sec x$  و  $\csc x$  در شکل ۲۵ نموده شده است.

از این شکل واضح است که هر یک از این توابع بی‌کران و متناوب است، با دوره تناوب اساسی  $2\pi$ ، و بی‌نهایت شاخه دارد. توجه کنید که  $\sec x$  به اندازه  $\pi/2$  بر  $\csc x$  تقدم دارد، ولی  $\csc x$  به اندازه  $\pi/2$  از  $\sec x$  تأخر دارد. این خاصیت از توابع  $\sin x$  و

$\cos x$ ، که  $\sec x$  و  $\csc x$  متقابلهای آنهاند، "به ارث رسیده است".



شکل ۲۵

مثال ۳. جمع مقادیر  $x$  را بیابید که  $\sec x = 2$ .

حل. تابع  $\sec x$  مساوی ۲ است هر وقت  $\cos x = 1/\sec x$  مساوی  $\frac{1}{2}$  باشد. این امر در نقاط  $x = \pm \pi/3$  رخ می‌دهد، ولی در هیچ نقطه از بازه  $[-\pi, \pi]$  رخ نمی‌دهد، زیرا  $\cos x$  بر  $[-\pi, 0]$  صعودی و بر  $[0, \pi]$  نزولی است. همچنین، به ازای هر عدد صحیح  $n$ ،  $\sec(x + 2n\pi) \equiv \sec x$ . بنابراین،  $\sec x = 2$  اگر و فقط اگر  $x = (2n \pm \frac{1}{3})\pi$  که در آن  $n$  عدد صحیح دلخواهی است.

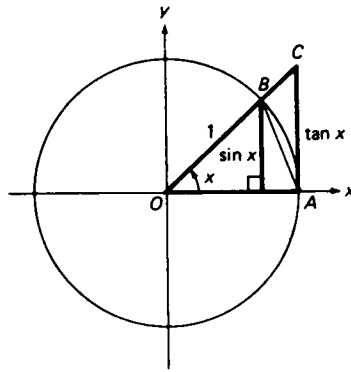
چند نامساوی مثلثاتی. بالاخره، چند نامساوی مفید به دست می‌آوریم که توابع سینوس و کسینوس در آنها صدق می‌کنند. شکل ۲۶ را در نظر می‌گیریم، که در آن دایره به شعاع یک بوده و زاویه  $x$  در بازه  $0 < x < \pi/2$  قرار دارد. چون

$$\text{مساحت مثلث } AOC < \text{مساحت قطاع } AOB < \text{مساحت مثلث } AOB$$

نتیجه می‌شود که

$$(۱) \quad \frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x,$$

که در آن از فرمول (۸)، صفحه ۹۰، و این امر که مساحت یک مثلث نصف حاصل ضرب قاعده در ارتفاعش می‌باشد استفاده کرده‌ایم. از تقسیم (۱) بر کمیت مثبت  $\frac{1}{2} \sin x$ ، به



شکل ۲۶

دست می‌آوریم

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

یا، معادلاً،

$$(۲) \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

(ر.ک. قضیه ۴، صفحه ۱۳). این نامساوی مضاعف به ازای  $-\pi/2 < x < 0$  و نیز به ازای  $0 < x < \pi/2$  برقرار است؛ و در نتیجه، به ازای  $0 < |x| < \pi/2$  برقرار است، زیرا تعویض  $x$  با  $-x$  مقدار تابع زوج  $\cos x$  یا تابع  $(\sin x)/x$ ، که آن نیز زوج است، را تغییر نمی‌دهد:

$$\frac{\sin(-x)}{-x} \equiv \frac{-\sin x}{-x} \equiv \frac{\sin x}{x} \quad (x \neq 0).$$

چون  $(\sin x)/x$  به ازای  $0 < |x| < \pi/2$  مثبت است، نامساوی دوم در (۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right| < 1,$$

یا، معادلاً،

$$(۳) \quad |\sin x| < |x|.$$

این نامساوی به ازای  $|x| \geq \pi/2$  و نیز به ازای  $0 < |x| < \pi/2$  برقرار است، زیرا  $|\sin x| \leq 1$  و  $1 > 1.57 \approx \pi/2$ . بنابراین، (۳) به ازای هر  $x \neq 0$  برقرار است، و در واقع،

(۳)

$$|\sin x| \leq |x|$$

به ازای هر  $x$  ، به انضمام  $x=0$  ، برقرار است ، زیرا  $|\sin 0| = |0|$  .

### مسائل

فرض کنید  $n$  عددی صحیح باشد . نشان دهید که

$$\sin(x + n\pi) = (-1)^n \sin x \quad .1$$

$$\cos(x + n\pi) = (-1)^n \cos x \quad .2$$

فرض کنید تابع  $f$  متناوب با دوره تناوب  $p$  باشد ، در نتیجه ،  $f(x+p) \equiv f(x)$  . نشان دهید که

$$f(x-p) \equiv f(x) \quad .3$$

. ۴ به ازای هر عدد صحیح  $n$  ،  $f(x+np) \equiv f(x)$  .

نشان دهید که

$$\tan x \text{ و } \cot x \text{ هر دو توابعی فردند} \quad .5 \checkmark$$

$$\sec x \text{ یک تابع زوج است ، ولی } \csc x \text{ یک تابع فرد می باشد} .6 \checkmark$$

بگویید تابع داده شده زوج است یا فرد ( یا هیچکدام ) .

$$f(x) = x + \sin x \quad .8 \checkmark \quad f(x) = \sin x + \cos x \quad .7 \checkmark$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x} \quad .10 \checkmark \quad f(x) = \sin^2 x - \cos x \quad .9 \checkmark$$

تمام مقادیر صادق در هر یک از روابط زیر را بیابید .

$$\sin x = 1 \quad .12 \checkmark \quad \cos x = 1 \quad .11 \checkmark$$

$$\cos x = -1 \quad .14 \checkmark \quad \sin x = -1 \quad .13 \checkmark$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \quad .16 \checkmark \quad \sin x = \frac{1}{2} \quad .15 \checkmark$$

$$\cot x = -1 \quad .18 \checkmark \quad \tan x = 1 \quad .17 \checkmark$$

$$\sec x = \sqrt{2} \quad .20 \checkmark \quad \csc x = -2 \quad .19 \checkmark$$

$$\csc x \text{ تعریف نشده است} .21 \checkmark \quad \sec x \text{ تعریف نشده است} .22 \checkmark$$

جمع بازه‌هایی به طول  $\pi$  را بیابید که بر آنها

$$\sin x \text{ صعودی است} \quad .23 \checkmark \quad \sin x \text{ نزولی است} \quad .24 \checkmark$$

$$\cos x \text{ نزولی است} \quad .25 \checkmark \quad \cos x \text{ صعودی است} \quad .26 \checkmark$$

دوره تناوب اساسی تابع داده شده را بیابید .

$$\sqrt{\sin x} \quad .27 \checkmark \quad \cos^3 x \quad .28 \checkmark$$

$$|\cos x| \quad .29 \checkmark \quad \cos x + \sin x \quad .30 \checkmark$$

۳۱. نمودار تابع متناوب  $y = f(x)$  را بکشید، با دوره تناوب ۲، که مقادیرش بر بازه  $-1 \leq x \leq 1$  با فرمول  $y = 1 - |x|$  داده شده‌اند.

۳۲. تحقیق کنید که

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cot\left(\frac{\pi}{4} + x\right).$$

از این چه رابطهای بین نمودارهای  $\tan x$  و  $\cot x$  نتیجه می‌شود؟

### ۵.۱ مفهوم حد و پیوستگی

حال یک مسئله اساسی از حساب دیفرانسیل و انتگرال را مطرح می‌کنیم. وقتی شناسه  $x$  تابع  $f(x)$  به مقدار معلوم  $a$  نزدیک می‌شود، رفتار مقادیر این تابع چگونه است؟ در بعضی حالات جواب شهوداً واضح است. مثلاً، اگر  $f(x) = x^2 + 1$  و  $x$  به عدد ۲ نزدیک شود، به نظر واضح است که  $f(x)$  به عدد  $f(2) = 2^2 + 1 = 5$ ، یعنی مقدار تابع در  $x = 2$ ، نزدیک می‌شود. این را خلاصه کرده می‌گوییم حد  $f(x)$ ، وقتی  $x$  به ۲ نزدیک شود، مساوی ۵ است. اما، در حالات دیگر، نمی‌توان حد را به این آسانی، با یک جا نشانی ساده، یافت. در واقع، ممکن است تابع حتی در نقطه‌ای که باید حد حساب شود تعریف نشده باشد! مثالهای زیر نحوه بروز این امر را نشان می‌دهند. در فصل بعد خواهید دید که این مثالها، صرف‌نظر از طبیعی بودن، مواردی است که هر لحظه بخواهیم نوع مهمی حد، به نام مشتق، را حساب کنیم رخ می‌دهند. لذا، خوب است در اینجا حدود را بیاموزیم؛ در نتیجه، داستان مشتق را می‌توان بعداً "بدون وقفه بازگو کرد".

### مثال ۱. تابع

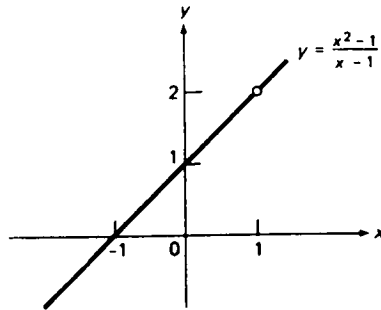
$$(1) \quad f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

به ازای هر  $x \neq 1$  تعریف شده است، ولی به ازای  $x = 1$  تعریف نشده است، زیرا مخرج  $x - 1$  به ازای  $x = 1$  صفر است. در واقع، طرف راست (۱) به ازای  $x = 1$  به صورت مبهم  $0/0$  درمی‌آید. چون

$$(1') \quad f(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1, \quad x \neq 1$$

ولی  $f(1)$  تعریف نشده است، نمودار (۱) خط مستقیم  $y = x + 1$  بدون نقطه  $(1, 2)$  می‌باشد. این نمودار در شکل ۲۷ نموده شده است، که در آن نقطه مفقود، طبق معمول،

با نقطهٔ توخالی نموده شده است. از شکل واضح است که، با آنکه  $f(x)$  به ازای  $x = 1$  تعریف نشده است، اگر  $x$  خیلی به ۱ نزدیک باشد،  $f(x)$  خیلی به ۲ نزدیک است، که از



شکل ۲۷

فرمول (۱) به طور جبری نیز واضح است، چرا که اگر  $x$  تقریباً (ولی نه صد درصد) مساوی ۱ باشد،  $x + 1$  باید تقریباً مساوی ۲ باشد. ما همهٔ این نکات را خلاصه کرده می‌گوییم حد  $f(x)$  وقتی  $x$  به ۱ نزدیک شود مساوی ۲ است، یا، با علامت،

$$(۲) \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2.$$

به بیان دیگر، می‌توان گفت که وقتی  $x$  به ۱ نزدیک شود،  $f(x)$  به ۲ نزدیک می‌شود، یا به طور خلاصه

$$(۲') \quad \text{وقتی } x \rightarrow 1, \quad f(x) \rightarrow 2$$

هنوز باید مفهوم حد را صوری کرد و آن را دقیقتر ساخت، و این کار در بخش بعد خواهد شد. ولی در این بین متذکر می‌شویم که هم‌اکنون به طور غیرصوری نشان داده‌ایم که

$$(۳) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

حد (۳) نمونه‌ای است از یک مشتق؛ یعنی، مشتق تابع  $x^2$  در نقطهٔ ۱. به طور کلی، مشتق  $x^2$  در نقطهٔ  $a$  حد زیر است:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a},$$

که اساساً با همان استدلالی که در اثبات فرمول (۳)، که نظیر به حالت  $a = 1$  است، به کار رفت معلوم می‌شود که مساوی  $2a$  می‌باشد. بعداً در این باب مطالب بسیاری خواهیم

گفت.

برای محاسبه حد (۳)، فقط به کمی جبر نیاز داریم. همانطور که مثال زیر نشان می‌دهد، بعضی از حدود به این آسانی محاسبه نمی‌شوند.

مثال ۲. حد

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \quad (۴)$$

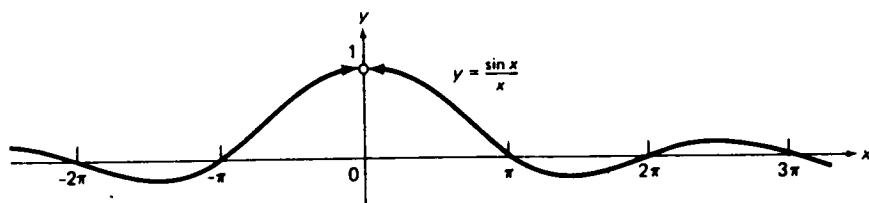
را محاسبه کنید.

حل. تابع  $(\sin x)/x$  در  $x = 0$ ، یعنی نقطه‌ای که می‌خواهیم حد را در آن حساب کنیم، تعریف نشده است. به خاطر شباهت با مثال ۱، ممکن است بخواهیم صورت و مخرج را بر  $x \neq 0$  تقسیم کنیم. اما در اینجا راهی برای تقسیم جبری وجود ندارد. برای محاسبه حد (۴)، مآلاً "به روش دیگری متوسل می‌شویم. اما فعلاً" می‌خواهیم ببینیم آیا می‌توان مقدار حد را حدس زد.

برای این کار، از یک ماشین حساب علمی استفاده کرده مقادیر  $(\sin x)/x$  را به ازای  $x$  های نزدیک به 0 محاسبه می‌کنیم، و در این راه توجه می‌کنیم که  $(\sin x)/x$  تابعی زوج است؛ و لذا، در هر دو نقطه  $x$  و  $-x$  یک مقدار خواهد داشت. نتایج محاسبات ما در جدول زیر نموده شده‌اند، که در آن  $x$  به رادیان بوده و علامت  $\pm$  داخل پرانتز به یاد می‌آورد که هر درایه  $x$  عدد ذکر شده یا قرینه آن می‌باشد.

$x$	$\frac{\sin x}{x}$	$x$	$\frac{\sin x}{x}$
$(\pm) 1.2$	0.77670	$(\pm) 0.10$	0.99833
1.0	0.84147	0.08	0.99893
0.8	0.89670	0.06	0.99940
0.6	0.94107	0.04	0.99973
0.4	0.97355	0.02	0.99993
0.2	0.99335	0	تعریف نشده

از این جدول قویاً این برداشت می‌شود که وقتی  $x$  به 0 نزدیک شود، مقادیر تابع  $(\sin x)/x$  به 1 نزدیک می‌شوند، و این امر در شکل ۲۸ نموده شده است، که نمودار  $(\sin x)/x$  را نشان می‌دهد. رفتار حدی تابع  $(\sin x)/x$  در  $x = 0$ ، یعنی رفتار تابع وقتی  $x \rightarrow 0$ ، با رسم دو سر سهم در نقطه  $(0, 1)$  که نمودار وقتی  $x \rightarrow 0$  به آن‌ها می‌رسد نموده شده است. خود نقطه  $(0, 1)$  به نمودار تعلق ندارد، و این امر با نقطه توخالی در  $(0, 1)$  نموده شده است؛ این صرفاً بدان خاطر است که تابع  $(\sin x)/x$  در  $x = 0$  تعریف نشده است. لذا،



شکل ۲۸

به نظر می‌رسد که

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

و ما مآلاً "برهان دقیق آن را در مثال ۷، صفحه ۱۳۸، خواهیم داد.

تعریف غیرصوری حد. حال مثالهای ۱ و ۲ را در محدودهٔ کلیتری قرار داده و در باب هر تابع  $f(x)$ ، هر حد  $L$ ، و هر نقطهٔ ثابت  $a$  که متغیر مستقل یا شناسهٔ  $x$  به آن نزدیک می‌شود صحبت می‌کنیم. مثلاً، در مثال ۱،

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \quad a = 1, \quad L = 2,$$

و در مثال ۲،

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad a = 0, \quad L = 1.$$

حال گوییم وقتی  $x \rightarrow a$ ،  $f(x)$  به حد  $L$  نزدیک می‌شود، یا  $f(x)$  در  $a$  دارای حد  $L$  است، اگر وقتی  $x$  به  $a$  (بدون آنکه مساوی  $a$  شود) نزدیک شود،  $f(x)$  به  $L$  نزدیک گردد. این را به صورت

$$(\Delta) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

یا

$$(\Delta') \quad f(x) \rightarrow L, \quad x \rightarrow a \text{ وقتی}$$

می‌نویسیم.

همانطور که امثلهٔ فوق نشان می‌دهند، وقتی می‌گوییم به ازای  $x \rightarrow a$ ،  $f(x)$  به  $L$  نزدیک می‌شود، مقصود ما واقعاً "این است که وقتی  $x \rightarrow a$ ،  $f(x)$  می‌تواند به هر میزان خواسته شده به  $L$  نزدیک شود. به عبارت دیگر، به ازای هر  $x$  به قدر کافی نزدیک  $a$ ، چه



سمت چپ چه سمت راست آن، باید بتوان  $f(x)$  را هر قدر بخواهیم به  $L$  نزدیک سازیم (این کار به تغییر "دوطرفه"  $x$  نیاز دارد). هر قدر کمیت  $|f(x) - L|$  کوچکتر باشد،  $f(x)$  به  $L$  نزدیکتر است. بدین معنی که کوچکی  $|f(x) - L|$  یعنی نزدیکی  $f(x)$  به  $L$ ، و به همین نحو، کوچکی  $|x - a|$  یعنی نزدیکی  $x$  به  $a$ . لذا، رابطه (۵)، بر حسب قدر مطلق، می‌گوید که  $|f(x) - L|$  را می‌توان به ازای جمیع مقادیر "به قدر کافی کوچک" (ولی ناصفر) از  $|x - a|$ ، "بدلخواه کوچک" نمود. این ایده‌ها در بخش بعد دقیقتر خواهند شد.

اغلب کافی است از یک تابع حددار بدون تعیین حد آن سخن گفت. لذا، گوییم  $f(x)$  در  $a$  حد دارد اگر عددی مانند  $L$  باشد به طوری که (۵) برقرار باشد، و در این حالت گوییم حد سمت چپ (۵) وجود دارد. اگر عدد  $L$  موجود نباشد، گوییم حد وجود ندارد، یا اینکه  $f(x)$  در  $a$  حد ندارد.

مثال ۳. نشان دهید که تابع

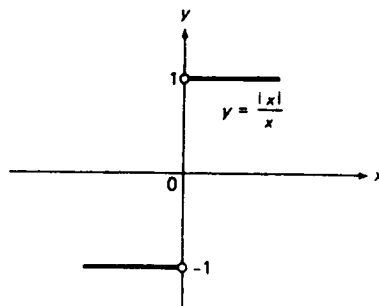
$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

در  $x = 0$  حد ندارد.

حل. به آسانی معلوم می‌شود که تابع  $|x|/x$  به ازای هر  $x \neq 0$  تعریف شده است و دقیقاً "با تابع زیر یکی است:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad \text{اگر}$$

که در شکل ۲۹ رسم شده است. هرگاه وقتی  $x \rightarrow 0$ ،  $f(x) \rightarrow L$ ، آنگاه  $f(x)$  باید بدلخواه نزدیک  $L$  باشد؛ مثلاً، "به ازای جمیع  $x$  های نزدیک به ۰، در فاصله کمتر از  $\frac{1}{2}$ ، اما این ممکن نیست، زیرا هر همسایگی سفته  $x = 0$  مهم نیست چقدر کوچک، شامل نقاطی مانند



شکل ۲۹

$x > 0$  است که  $f(x) = 1$  و نیز شامل نقاطی مانند  $x < 0$  که  $f(x) = -1$ ، و عددی مانند  $L$  وجود ندارد که در فاصله کمتر از  $\frac{1}{2}$  از ۱ و -۱ باشد. پس نتیجه می شود که  $f(x)$  در  $x = 0$  حد ندارد.

مثال ۴.  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$  را محاسبه کنید.

حل. مثل مثال ۲، با استفاده از یک ماشین حساب، مقادیر تابع  $\cos x$  را به ازای مقادیر نوعی  $x$  که به ۰ نزدیک می شوند حساب می کنیم. نتایج در جدول زیر داده شده اند (به یاد آورید که  $\cos x$  یک تابع زوج است).

$x$	$\cos x$	$x$	$\cos x$
1.2	0.3624	0.10	0.9950
1.0	0.5403	0.08	0.9968
0.8	0.6967	0.06	0.9982
0.6	0.8253	0.04	0.9992
0.4	0.9211	0.02	0.9998
0.2	0.9801	0	تعریف شده و مساوی ۱ است

با امتحان این اعداد قویاً این برداشت را خواهیم داشت که

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1,$$

و، در واقع، می توان نشان داد که این امر درست است. اما، بین این جدول و جدول مثال ۲ تفاوتی اساسی وجود دارد، زیرا  $\cos x$  به ازای  $x = 0$  تعریف شده است، حال آنکه تابع  $(\sin x)/x$  تعریف نشده است. به علاوه، حد  $\cos x$  در  $x = 0$  همان مقدار  $\cos x$  در  $x = 0$  است؛ یعنی،  $\cos 0 = 1$ . این مطلب کلیدی را این طور بیان می کنیم که می گوئیم تابع  $\cos x$  در  $x = 0$  پیوسته است.

پیوستگی و دلایل ناپیوستگی. به طور کلی، فرض کنیم  $f$  تابعی باشد که در نقطه  $a$  تعریف شده است، و نیز حد  $f$  در  $x = a$  موجود و مساوی  $f(a)$  باشد؛ در نتیجه،

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \quad (۶)$$

در این صورت، گوئیم  $f$  در  $a$  پیوسته است. تابع  $f$  می تواند به یکی از سه دلیل زیر در  $a$  ناپیوسته باشد (یعنی، در  $a$  پیوسته نباشد):  
(یک) ممکن است حد  $f$  در  $a$  موجود نباشد، مثل مثال ۳؛

(دو) ممکن است حد  $f$  در  $a$  موجود باشد، ولی  $f$  در  $a$  تعریف نشده باشد، مثل مثالهای ۲۱؛

(سه) ممکن است حد  $f$  در  $a$  موجود و  $f$  در  $a$  تعریف شده باشد، ولی این حد مساوی  $f(a)$  نباشد، مثل مثال ۷ در زیر.

هرگاه تابع  $f$  در  $a$  ناپیوسته باشد، ناپیوستگی همیشه به وسیلهٔ غیرعادی بودن نمودار  $f$  در امتداد خط  $x = a$  آشکار می‌شود. به بیان نادقیق، نمودار یک تابع پیوسته در  $a$  نمی‌تواند در  $a$  "شکستگی" داشته باشد و، بخصوص، نمی‌تواند در  $a$  "سوراخ" یا "جهش" داشته باشد.

مثال ۵. تابع

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

رسم شده در شکل ۲۹ به دلیل (یک) در  $x = 0$  ناپیوسته است، و این از جهش نمودار از خط  $y = -1$  به خط  $y = 1$  آشکار می‌شود.

مثال ۶. در شکل ۲۷ نمودار تابع

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

بدلخواه به نقطهٔ  $(1, 2)$  نزدیک می‌شود، ولی خود نقطه در نمودار نیست، و وجود سوراخ نظیر به ما فوراً می‌گوید که تابع به دلیل (دو) در  $x = 1$  ناپیوسته است.

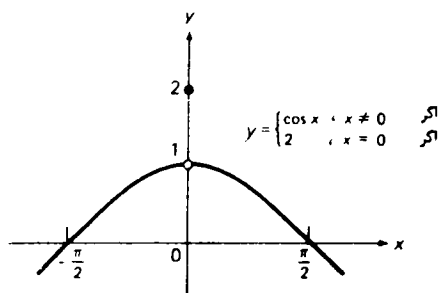
مثال ۷. تابع

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

که در شکل ۳۰ رسم شده است، به دلیل (سه) در  $x = 0$  ناپیوسته است. در واقع، به همان دلیل مذکور در مثال ۴، وقتی  $x \rightarrow 0$ ،  $f(x) \rightarrow 1$ ، ولی  $f(0) = 2$ ؛ در نتیجه،

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \neq f(0),$$

که بدین وسیله شرط پیوستگی  $f$  در  $x = 0$  نقض می‌شود. ناپیوستگی  $f$  در  $x = 0$  مجدداً



شکل ۳۰

وجود یک سوراخ در نمودار را آشکار می‌کند، که این بار در نقطه  $(0, 1)$  می‌باشد. نمودار دارای یک نقطهٔ توپر "تنها" در  $(0, 2)$  نیز هست، که می‌گوید  $f(0) = 2$ . در قضیهٔ ۸، صفحهٔ ۱۳۵، نشان خواهیم داد که هر تابع چند جمله‌ای (یا فقط چند جمله‌ای)، یعنی تابعی به شکل

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \quad (a_n \neq 0),$$

به ازای هر  $x$  پیوسته است. در اینجا  $n$  یک عدد صحیح نامنفی است، به نام درجهٔ چند جمله‌ای، و  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  ثابت‌هایی هستند به نام ضرایب چندجمله‌ای. به علاوه، در قضیهٔ ۹، صفحهٔ ۱۳۶، نشان خواهیم داد که هر یک از شش تابع مثلثاتی  $\cos x$ ،  $\sin x$ ،  $\tan x$ ،  $\cot x$ ،  $\sec x$  و  $\csc x$  در هر نقطه که تابع تعریف شده باشد پیوسته است.

مثال ۸. بنابر پیوستگی چندجمله‌ای  $x^2 + 1$ ، مانند اولین بند این بخش،

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) = 2^2 + 1 = 5.$$

به همین نحو، بنابر پیوستگی چندجمله‌ای  $x^3 - 3x + 2$ ،

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 - 3x + 2) = (-2)^3 - 3(-2) + 2 = 0.$$

مثال ۹. بنابر پیوستگی  $\sin x$ ،

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \sin 0 = 0.$$

در تعریف نسبتاً "غیرصوری" ما از حد تابع  $f$  در نقطهٔ  $a$ ، متغیر مستقل  $x$  باید بتواند مقادیر بدخواه نزدیک  $a$  را اختیار کند، ولی از آن طرف، لازم نیست  $f$  در خود نقطهٔ  $a$  تعریف شده باشد، مثل تابع  $(\sin x)/x$  که در  $x = 0$  تعریف نشده است. از اینرو،

حد  $f$  در  $a$  فقط تحت تأثیر مقادیر  $f$  در محاورت  $a$  می باشد. لذا، برای بحث در حد تابع  $f$  در نقطه  $a$ ، کافی است فرض کنیم  $f$  در همسایگی سفته‌ای از  $a$  تعریف شده باشد. به همین نحو، برای بحث در پیوستگی تابع  $f$  در نقطه  $a$ ، کافی است فرض کنیم  $f$  در همسایگی  $a$  تعریف شده است، ولی این باید یک همسایگی عادی ناسفته شامل خود  $a$  باشد، زیرا فرمول (۶) معرف پیوستگی  $f$  در  $a$  مستلزم مقدار  $f$  در  $a$  است.

## مسائل

با استفاده از استدلالی همانند در مثال ۱، حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x + 2} \quad . ۲ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 4} \quad . ۱ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 125}{x - 5} \quad . ۴ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3} \quad . ۳ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x - 2} \quad . ۶ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} \quad . ۵ \checkmark$$

۷. با ساختن جدولی از مقادیر تابع  $f(x) = (x-1)/(\sqrt{x}-1)$  نزدیک  $x=1$ ، متقاعد شوید که

وقتی  $x \rightarrow 1$ ، تابع به حدی نزدیک می شود. این حد چقدر است؟ همین نتیجه را به طور جبری ثابت کنید. تابع را در محاورت  $x=1$  رسم کنید.

۸. با ساختن جدولی از مقادیر تابع  $(\tan x)/x$  نزدیک  $x$ ، متقاعد شوید که وقتی  $x \rightarrow 0$ ، تابع به حدی نزدیک می شود. این حد چقدر است؟ تابع را در محاورت  $x=0$  رسم کنید.

حدود زیر را با استدلالی غیرصوری محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} \quad . ۱۱ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x} \quad . ۱۰ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| \quad . ۹ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow -0.2} \frac{|x|}{x} \quad . ۱۴ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0.1} \frac{|x|}{x} \quad . ۱۳ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x}{x} \quad . ۱۲ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2}}{x} \quad . ۱۷ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{x} \quad . ۱۶ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} \quad . ۱۵ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin |x|}{x} \quad . ۲۰ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|}{x} \quad . ۱۹ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2}}{x} \quad . ۱۸ \checkmark$$

حدود زیر را با استفاده از پیوستگی چند جمله‌ایها محاسبه نمایید.

$$\lim_{x \rightarrow 4} (x^3 + 1) \quad . ۲۳ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} (x^2 + 3x + 4) \quad . ۲۵ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x^5 + 5x^2) \quad ۲۴ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^4 - 9x - 6) \quad ۲۳ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^{11} - x^7 + 2) \quad ۲۶ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x^6 - 3x^5 + x^4) \quad ۲۵ \checkmark$$

حدود زیر را با استفاده از پیوستگی توابع مثلثاتی محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -\pi/4} \tan x \quad ۲۹ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \cos x \quad ۲۸ \checkmark$$

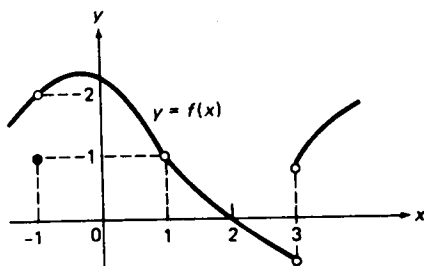
$$\lim_{x \rightarrow 1} \sin x \quad ۲۷ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \csc x \quad ۳۲ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sec x \quad ۳۱ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \cot x \quad ۳۰ \checkmark$$

شکل ۳۱ نمودار تابع  $f$  را نشان می دهد. حدود زیر را بیابید.



شکل ۳۱

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad ۳۴$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \quad ۳۳$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \quad ۳۶$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \quad ۳۵$$

۳۷. تابع شکل ۳۱ در کدام نقاط  $x = \pm 1, 2, 3$  پیوسته است؟

### ۶.۱ نگاهی دقیقتر به حدود

به یاد آورید که گفتیم وقتی  $x \rightarrow a$ ،  $f(x) \rightarrow L$ ، یعنی  $|f(x) - L|$  را می توان، به ازای جميع مقادیر "به قدر کافی کوچک" ولی ناصفر از  $|x - a|$ ، "بدلخواه کوچک" کرد. آیا می توان این تعریف شهودی حد را كاملاً "دقیق ساخت" جواب مثبت است، و این كار به روشی انجام می شود كه توسط ریاضیدانان آلمانی، وایراشتراس<sup>۱</sup> و هاینه<sup>۲</sup>، حدود صدسال قبل، یعنی دویست سال پس از ابداع حساب دیفرانسیل و انتگرال توسط نیوتن<sup>۳</sup> و لایب

نیتراً، معرفی شد. این روش "روش  $\delta, \varepsilon$ " نامیده می‌شود، زیرا شامل اعدادی است که از قدیم با حروف یونانی  $\varepsilon$  و  $\delta$  (حروف کوچک اپسیلون و دلتا) نموده می‌شوند. اینکه می‌گوییم  $|f(x) - L|$  به ازای جمیع  $|x - a|$  های به قدر کافی کوچک بدخواه کوچک است چه معنی دارد؟ معنی آن این است که: فرض کنیم شخصی که ما وی را "مدعی" می‌نامیم عدد مثبتی مانند  $\varepsilon$  به ما بدهد. باید بتوانیم عدد مثبت دیگر  $\delta$  را طوری بیابیم که به ازای هر  $x \neq a$  صادق در نامساوی  $|x - a| < \delta$ ، داشته باشیم  $|f(x) - L| < \varepsilon$ . در اینجا ممکن است برسید این چهره‌بندی به کوچک بودن اعداد  $|f(x) - L|$  و  $|x - a|$  دارد. جواب این است که ما به مدعی اجازه می‌دهیم هر عدد مثبت  $\varepsilon$  که بخواهد اختیار کند؛ بخصوص،  $\varepsilon$  ی که مدعی هر قدر بخواهد کوچک باشد؛ یعنی، بدخواه کوچک. سپس باید عدد مثبت نظیر  $\delta$  را بیابیم، که در حالت کلی اندازه‌اش باید کنترل شود و در نتیجه باید به قدر کافی کوچک باشد، به طوری که هر وقت  $|x - a| < \delta$  و  $x \neq a$ ، داشته باشیم  $|f(x) - L| < \varepsilon$ .

تعریف صوری حد. به زبان صریحتر، فرض کنیم  $f(x)$  در همسایگی سفته‌ای از نقطه  $a$  تعریف شده باشد. در این صورت،

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

یعنی به ازای هر  $\varepsilon > 0$  (مهم نیست چقدر کوچک)، می‌توان  $\delta > 0$  ای (به قدر کافی کوچک) یافت به طوری که هر وقت

$$(2) \quad 0 < |x - a| < \delta,$$

داشته باشیم

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

در اینجا نامساوی مضاعف (۲) شیوه مناسبی است برای نوشتن همزمان  $|x - a| < \delta$  و  $x \neq a$ ، و ما قبلاً "به آن در صفحه ۲۹ برخوردیم. عبارات داخل پرانتز را می‌توان پس از خوگرفتن با تعریف حذف کرد. همچنین، وقت آن است که به مسئله ۳۱، که به بحث فعلی مربوط است، نگاه کنیم.

تبصره. مهم است درک شود که هرگاه نامساوی  $|f(x) - L| < \varepsilon$  به ازای برقراری (۲) برقرار

باشد، آنگاه به ازای هر عدد مثبت کوچکتر از  $\delta$  نیز چنین است. بخصوص،  $\delta$  تابع  $\varepsilon$  نیست، اگرچه  $\delta$  به  $\varepsilon$  وابسته است، زیرا  $\delta$  به طور منحصر به فرد به وسیله  $\varepsilon$  معین نمی شود (هر  $\delta$  ی کوچکتر نیز قابل استفاده است)،

اگر نامساوی مضاعف (۲) را با نامساوی ساده

$$(۲') \quad |x - a| < \delta$$

عوض کرده و ضمناً "خواهیم  $f(x)$  در یک همسایگی معمولی ناسفته  $a$  تعریف شده باشد، که بخصوص  $f(a)$  تعریف شده است، چه رخ خواهد داد؟ به عبارت دیگر، اینکه بگوییم به ازای هر  $\varepsilon > 0$  می توان  $\delta > 0$  ای یافت به طوری که هر وقت (۲') برقرار باشد،  $|f(x) - L| < \varepsilon$  چه معنی دارد؟ با کمی فکر معلوم می شود که این باید به این معنی باشد که  $f(x)$  در  $a$  پیوسته است. در واقع،  $f(x)$  هنوز در  $a$  حد  $L$  را دارد، چرا که اگر هر وقت (۲') برقرار باشد، داشته باشیم  $|f(x) - L| < \varepsilon$ ، مسلماً "هر وقت شرط محدودتر (۲) برقرار باشد، خواهیم داشت  $|f(x) - L| < \varepsilon$ ". به علاوه، چون در اینجا  $x = a$  مجاز بوده، و (۲') خود به خود به ازای  $x = a$  برقرار است، بی توجه به مقدار  $\delta$ ، باید به ازای هر  $\varepsilon > 0$  داشته باشیم  $|f(a) - L| < \varepsilon$ ، که فقط وقتی ممکن است که  $f(a) = L$ . به عبارت دیگر، در اینجا به جای (۱) داریم

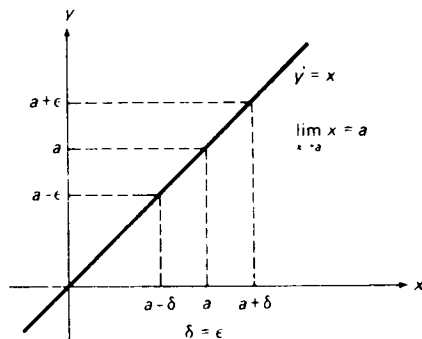
$$(۱') \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L = f(a),$$

و این دقیقاً "یعنی  $f(x)$  در  $a$  پیوسته است".

حال کاربرد روش  $\varepsilon, \delta$  را نشان می دهیم.

مثال ۱. نشان دهید که به ازای هر  $a$ ،

$$(۳) \quad \lim_{x \rightarrow a} x = a$$



شکل ۳۲



حل. به ازای  $\varepsilon > 0$  داده شده، کافی است، مثل شکل ۳۲،  $\delta = \varepsilon$  را اختیار کنیم. در این صورت، واضح است که هر وقت  $0 < |x - a| < \delta$ ، یا به خاطر  $|x - a| < \delta$ ،  $|x - a| < \varepsilon$ . علی‌رغم بداهت، (۳) مطلب مهمی را بیان می‌کند و آن این است که تابع  $f(x) = x$  به ازای هر  $x$  پیوسته است.

مثال ۲. فرض کنید  $c$  ثابت دلخواهی باشد. نشان دهید که به ازای هر  $a$ ،

$$(۴) \quad \lim_{x \rightarrow a} c = c$$

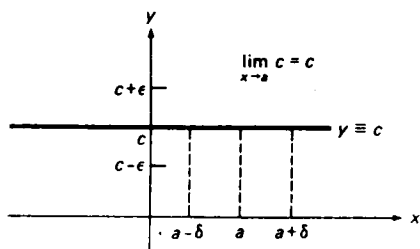
به‌طور دقیق‌تر، نشان دهید هرگاه  $f(x) \equiv c$ ، آنگاه، به ازای هر  $a$ ،

$$(۴') \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$$

حل. می‌بینیم که در این حالت

$$|f(x) - c| \equiv |c - c| = 0.$$

لذا، به‌ازای هر  $\varepsilon > 0$ ،  $|f(x) - c| < \varepsilon$  به‌ازای  $0 < |x - a| < \delta$ ، یا به‌ازای  $|x - a| < \delta$ ، بی‌توجه به  $\delta$  ی‌اختیار شده، خود به خود برقرار است (ر.ک. شکل ۳۳). فرمول (۴) می‌گوید که حد یک ثابت خود ثابت است، یا معادلاً، یک تابع ثابت همه جا (یعنی، به



هر  $\delta > 0$  ی‌کار ساز است

شکل ۳۳

ازای هر  $x$  پیوسته است.

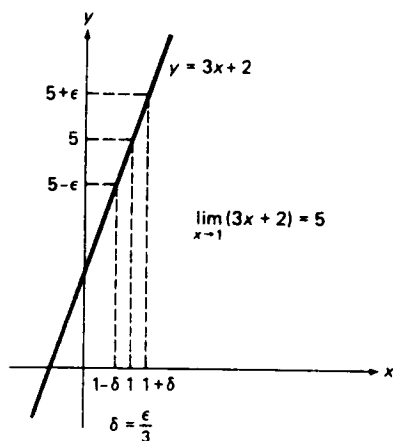
مثال ۳. نشان دهید که

$$(۵) \quad \lim_{x \rightarrow 1} (3x + 2) = 5.$$

حل. ما قبلاً این نوع مسئله را با استفاده از پیوستگی چندجمله‌ایها حل کرده‌ایم (ر.ک. مثال ۸، صفحه ۱۱۵)، ولی آموزنده است ببینیم برهان  $\delta, \varepsilon$  چطور پیش می‌رود. به ازای هر  $\varepsilon > 0$ ،  $\delta > 0$  ای می‌خواهیم که هر وقت  $0 < |x - 1| < \delta$

$$|(3x + 2) - 5| = |3(x - 1)| = 3|x - 1| < \varepsilon$$

زیرا در این صورت (۵) ثابت خواهد شد. چون  $3|x - 1| < \varepsilon$  معادل  $|x - 1| < \varepsilon/3$  است. همانطور که شکل ۳۴ نشان می‌دهد، یک انتخاب مناسب  $\delta = \varepsilon/3$  می‌باشد.



شکل ۳۴

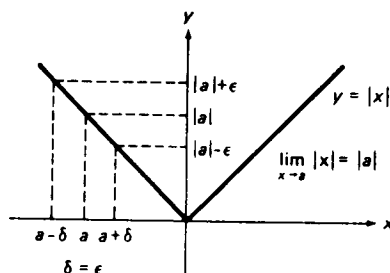
مثال ۴. نشان دهید که به ازای هر  $a$ ،

$$\lim_{x \rightarrow a} |x| = |a| \quad (۶)$$

حل. با اعمال نامساوی (۵)، صفحه ۲۳، داریم

$$||x| - |a|| < |x - a|$$

لذا، به ازای هر  $\varepsilon > 0$ ، کافی است  $\delta = \varepsilon$  را اختیار کنیم تا هر وقت  $0 < |x - a| < \delta$  (یا  $|x - a| < \delta$ )، داشته باشیم  $||x| - |a|| < \varepsilon$ . این مطلب در شکل ۳۵ برای  $a$  منفی نموده شده است. فرمول (۶) می‌گوید که  $|x|$ ، یعنی تابع قدرمطلق، هم‌جایسته است.



شکل ۳۵

مثال ۵. برای حد

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2,$$

که در مثال ۱، صفحه ۱۰۸، به طور غیر صوری محاسبه شد، برهان دقیق بیاورید.

حل. به ازای  $\varepsilon > 0$ ،  $\delta > 0$  ای می‌خواهیم که هر وقت  $0 < |x - 1| < \delta$  داشته باشیم

$$\left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| = \left| \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} - 2 \right| = |(x + 1) - 2| = |x - 1| < \varepsilon$$

البته، یک انتخاب مناسب  $\delta = \varepsilon$  است. توجه کنید که در اینجا قسمت اول نامساوی مضاعف  $0 < |x - 1| < \delta$  مورد نیاز است، زیرا تابع  $(x^2 - 1)/(x - 1)$  به ازای  $x = 1$  تعریف نشده است.

مثال ۶. نشان دهید که

$$(۷) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x}{x} = 1.$$

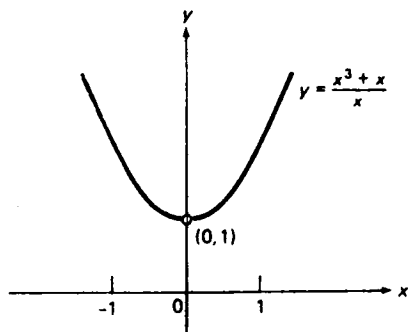
حل. به ازای هر  $\varepsilon > 0$ ،  $\delta > 0$  ای جستجو می‌کنیم که هر وقت  $0 < |x| < \delta$

$$\left| \frac{x^3 + x}{x} - 1 \right| = |(x^2 + 1) - 1| = |x^2| = |x|^2 < \varepsilon$$

چون  $|x|^2 < \varepsilon$  معادل  $|x| < \sqrt{\varepsilon}$  است، یک انتخاب مناسب  $\delta = \sqrt{\varepsilon}$  می‌باشد. به صورت دیگر، با تقسیم صورت  $x^3 + x$  بر مخرج  $x$  و استفاده از پیوستگی چند جمله‌ای حاصل  $x^2 + 1$ ، درمی‌یابیم که

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1) = 0^2 + 1 = 1.$$

( در این مورد ، مسئله ۹ به نکته مهمی اشاره می کند . ) برقراری (۷) را نیز می توان با امتحان نمودار تابع  $(x^3 + x)/x$  ، که یک سهمی بدون نقطه  $(0, 1)$  است ، به طور غیر صوری دید ( ر. ک. شکل ۳۶ ) .

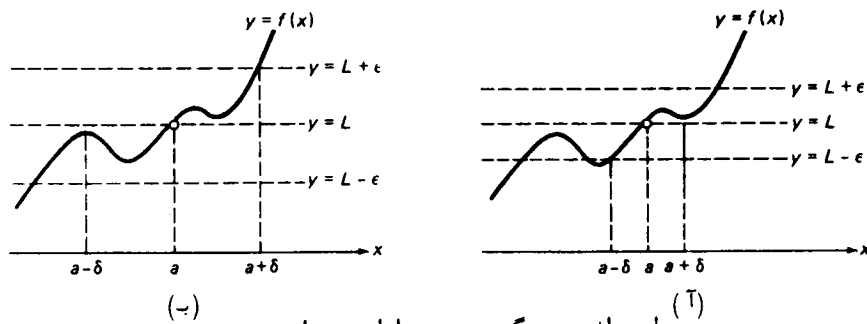


شکل ۳۶

تعبیر هندسی حد . فرض کنیم وقتی  $x \rightarrow a$  ،  $f(x) \rightarrow L$  . در این صورت ، به ازای هر  $\varepsilon > 0$  ،  $\delta > 0$  ای هست به طوری که هر وقت  $0 < |x - a| < \delta$  ،  $|f(x) - L| < \varepsilon$  اما نامساوی  $|f(x) - L| < \varepsilon$  معادل است با  $-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$  یا

$$(۸) \quad L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon.$$

لذا ، تعریف  $\delta, \varepsilon$  حد تعبیر هندسی ساده ای دارد : آن قسمت از نمودار تابع  $y = f(x)$  نظیر به مقادیر  $x$  در همسایگی سفته  $0 < |x - a| < \delta$  کاملاً "در نواری افقی"  $L - \varepsilon < y < L + \varepsilon$  به عرض  $2\varepsilon$  و موازی محور  $x$  جای دارد . با استفاده از این مطلب می توان بزرگترین همسایگی سفته ای را ساخت که در آن  $|f(x) - L| < \varepsilon$  . دو قسمت شکل ۳۷ این ساخت را برای تابع



(A)

(B)

طرز یافتن بزرگترین  $\delta$  به ازای  $\varepsilon$  داده شده

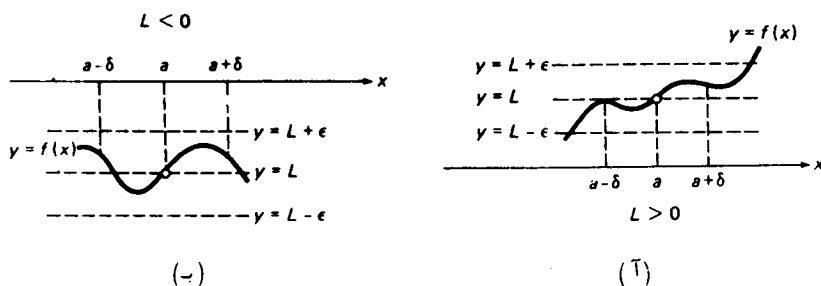
شکل ۳۷

$f$  و دو مقدار مختلف  $\varepsilon$  نشان می دهند. مطمئن شوید که فهمیده‌اید چرا بزرگترین مقدار  $\delta$  در شکل ۳۷ (آ) از رفتار  $f$  در سمت چپ  $a$  و در شکل ۳۷ (ب) از رفتار  $f$  در سمت راست  $a$  معین می شود. ما در نقطه  $(a, L)$  یک نقطه توخالی گذارده‌ایم تا نشان دهیم که تابع  $f$  می تواند در  $a$  تعریف نشده باشد، یا اینکه ممکن است مقدارش در  $a$  با  $L$  یکی نباشد. اگر  $f$  در  $a$  پیوسته باشد، نقطه توخالی یک نقطه توپر خواهد شد.

قواعد اساسی حد. به کمک این تعبیر هندسی روند  $\delta, \varepsilon$ ، می توان چند قاعده اساسی حدود را اثبات کرد. در هر حالت، از نامساوی مضاعف (۸)، که به ازای هر  $x$  در  $\delta$ -همسایگی سفته  $0 < |x - a| < \delta$  برقرار است، آغاز می کنیم.

(یک) هرگاه  $f(x)$  در  $a$  دارای حد  $L$  باشد، آنگاه  $f(x)$  در یک همسایگی سفته  $a$  کراندار است؛ یعنی، اعداد مثبتی مانند  $C$  و  $\delta$  وجود دارند به طوری که هر وقت  $0 < |x - a| < \delta$   $|f(x)| \leq C$ ، یا معادلاً  $-C \leq f(x) \leq C$ . در واقع، کافی است  $C$  را آنقدر بزرگ بگیریم که نوار  $-C \leq y \leq C$  شامل نوار  $L - \varepsilon < y < L + \varepsilon$  شود، که همیشه امکان پذیر است.

(دو) اگر  $f(x)$  در  $a$  حد ناصفر  $L$  را داشته باشد، همسایگی سفته‌ای از  $a$  هست که در آن  $f(x)$  ناصفر بوده و با  $L$  همعلامت است. برای مشاهده این امر، ابتدا  $\varepsilon$  را آنقدر کوچک می گیریم که  $L - \varepsilon > 0$  اگر  $L > 0$  یا  $L + \varepsilon < 0$  اگر  $L < 0$ . در این صورت، همانطور که در شکل ۳۸ (آ) برای  $L > 0$  و در شکل ۳۸ (ب) برای  $L < 0$  نشان داده شده است،



شکل ۳۸

تابع  $f(x)$  به ازای تمام  $x$  های واقع در همسایگی مناسبی از  $a$ ، با  $L$  همعلامت است. (سه) هرگاه  $f(x)$  در همسایگی سفته‌ای از  $a$  نامنفی باشد، آنگاه  $f(x)$  نمی تواند در  $a$  حد منفی داشته باشد. همین مطلب که در آن نامنفی و منفی با نامثبت و مثبت عوض شده باشند نیز درست است. این بیان دیگری است از قاعده (دو).

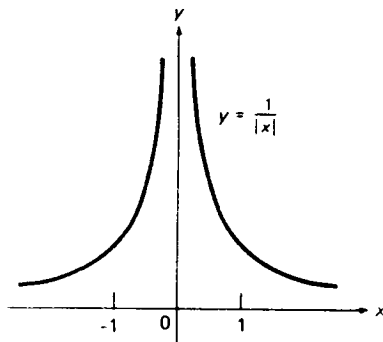
قاعده آخر تکنیکی تر است، و از اینجهت ذکر شده است که در برهان قضیه ۶، صفحه ۱۳۳، به کار خواهد رفت.

اختیاری. (چهار) هرگاه  $f(x)$  در  $a$  حد ناصفر  $L$  داشته باشد، آنگاه تابع متقابل  $1/f(x)$  در همسایگی سفته‌ای از  $a$  کراندار است. برای اثبات این قاعده، محدا "  $\varepsilon$  را آنقدر کوچک می‌گیریم که  $L - \varepsilon > 0$  اگر  $L > 0$  و  $L + \varepsilon < 0$  اگر  $L < 0$  (ر.ک. شکل ۳۸). در این صورت،  $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$ ، به کمک قضیه ۴، صفحه ۱۳۳، ایجاب می‌کند که

$$\frac{1}{L + \varepsilon} < \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{L - \varepsilon}.$$

لذا، آن قسمت از نمودار تابع  $y = 1/f(x)$  نظیر به مقادیر  $x$  در همسایگی سفته  $0 < |x - a| < \delta$  کاملاً " در نوار افقی  $1/(L + \varepsilon) < y < 1/(L - \varepsilon)$  قرار دارد، و برای اتمام برهان،  $C$  را آنقدر بزرگ می‌گیریم که این نوار داخل نوار  $-C \leq y \leq C$  قرار گیرد.

مثال ۷. تابع  $f(x) = 1/|x|$ ، که در شکل ۳۹ رسم شده است، در هر همسایگی سفته نقطه  $x = 0$  بی‌کران است. در واقع، به ازای هر  $C > 0$ ، می‌توان با اختیار  $0 < |x| < 1/C$  چنین داشت  $|f(x)| > C$ . لذا، طبق قاعده (یک)،  $f(x)$  در  $x = 0$  حد ندارد.



شکل ۳۹

حال بررسی حدود مستلزم دو یا چند تابع را آغاز می‌کنیم، که در دو بخش آینده ادامه خواهد یافت. اولین نتیجه می‌گوید هرگاه تابع کراندار در یک تابع نزدیک شونده به صفر ضرب شود، آنگاه حاصل ضرب نیز به صفر نزدیک خواهد شد.

قضیه ۳ (حفظ نزدیک شدن به صفر). هرگاه  $f(x)$  در همسایگی سفته‌ای از  $a$  کراندار بوده

و وقتی  $x \rightarrow a$  ،  $g(x) \rightarrow 0$  ، آنگاه وقتی  $x \rightarrow a$  ،  $f(x)g(x) \rightarrow 0$  .

برهان (اختیاری) . چون  $f(x)$  در همسایگی سفته‌ای از  $a$  کراندار است ، اعدادی مانند  $C > 0$  و  $\delta_r > 0$  وجود دارند به طوری که هر وقت  $0 < |x - a| < \delta_r$  ،  $|f(x)| \leq C$  . همچنین ، چون وقتی  $x \rightarrow a$  ،  $g(x) \rightarrow 0$  ، به ازای هر  $\varepsilon > 0$  ،  $\delta_\theta > 0$  ای وجود دارد به طوری که هر وقت  $0 < |x - a| < \delta_\theta$  ،  $|g(x) - 0| = |g(x)| < \varepsilon/C$  . (استفاده از  $\varepsilon/C$  به جای  $\varepsilon$  آخرین مرحله برهان را پیش‌بینی می‌کند) . حال  $\delta$  را از دو عدد  $\delta_r$  و  $\delta_\theta$  کوچکتر می‌گیریم ؛ یعنی ،  $\delta = \min \{\delta_r, \delta_\theta\}$  را اختیار می‌کنیم . این  $\delta$  از نیاز به داشتن همسایگی سفته‌ای از  $a$  ناشی شده است که در آن همزمان داشته باشیم  $|f(x)| \leq C$  و  $|g(x)| < \varepsilon/C$  . در این صورت ، هر وقت  $0 < |x - a| < \delta$  ، خواهیم داشت

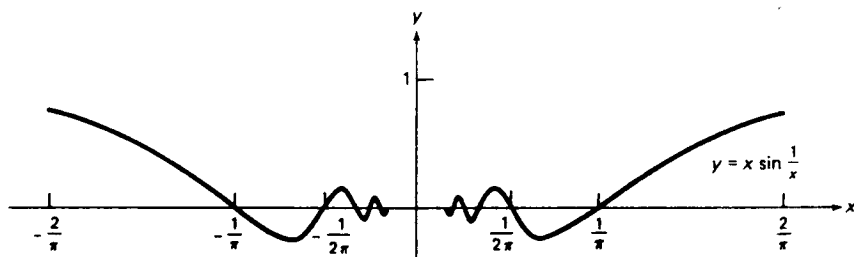
$$|f(x)g(x) - 0| = |f(x)||g(x)| < C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$$

اما این به زبان  $\delta, \varepsilon$  یعنی وقتی  $x \rightarrow a$  ،  $f(x)g(x) \rightarrow 0$  .

نتیجه . هرگاه  $f(x)$  در  $a$  حد داشته باشد و وقتی  $x \rightarrow a$  ،  $g(x) \rightarrow 0$  ، آنگاه وقتی  $x \rightarrow a$  ،  $f(x)g(x) \rightarrow 0$  .

برهان . قضیه ۳ را به کار برده ، ملاحظه می‌کنیم که هرگاه  $f(x)$  در  $a$  حد داشته باشد ، آنگاه ، به خاطر قاعده (یک) ،  $f(x)$  در همسایگی سفته‌ای از  $a$  کراندار است .

مثال ۸ . تابع  $x \sin(1/x)$  را ، که در شکل ۴۰ رسم شده ، در نظر می‌گیریم ، که وقتی  $x \rightarrow 0$  بیشتر و بیشتر نوسان می‌کند (این تابع به ازای  $x = 0$  تعریف نشده است) . چون به ازای



حد در  $x = 0$  موجود و مساوی ۰ است

شکل ۴۰

هر  $x \neq 0$ ،  $|\sin(1/x)| \leq 1$  و چون  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ ، از قضیه ۳ نتیجه می شود که

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

مثال ۹. فرض کنیم  $f(x) = 1/|x|$  و  $g(x) = |x|$ . در این صورت،

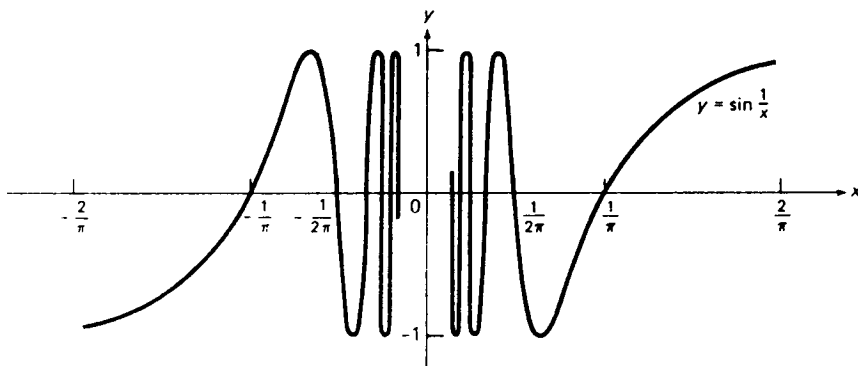
$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$$

(ر.ک. مثال ۴)، حال آنکه

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

این با قضیه ۳ تعارضی ندارد، زیرا، همانطور که در مثال ۷ گفتیم،  $f(x)$  در همسایگی سفته‌ای از  $x = 0$  کراندار نیست.

مثال ۱۰. در مثال ۸، به خاطر عامل  $x$ ، نوسانات  $x \sin(1/x)$ ، وقتی  $x \rightarrow 0$ ، ضعیفتر می شوند. حال این عامل را حذف کرده و رفتار خود تابع  $\sin(1/x)$  را در نظر می گیریم. وقتی  $x \rightarrow 0$ ،  $\sin(1/x)$  نوسانات بیشتری بین  $-1$  و  $1$  خواهد داشت، و همزمان با آن فاصله بین عبورهای متوالی نمودار تابع از محور  $x$  کوچکتر می شود (ر.ک. شکل ۴۱). به سختی می توان باور کرد که  $\sin(1/x)$  در مجاورت  $x = 0$  نزدیک عددی بماند، زیرا همسایگی سفته‌ای از  $x = 0$  وجود ندارد که در آن تابع نوسان کاملی (در واقع، بی نهایت نوسان!) داشته باشد.



حد در  $x = 0$  وجود ندارد.



نداشته باشد. لذا، درک شهودی ما قویاً "می‌گوید که  $\sin(1/x)$  در  $x=0$  حد ندارد.

اختیاری. برای اثبات این مطلب، به روش  $\delta, \varepsilon$  نشان می‌دهیم که فرض اینکه  $\sin(1/x)$  در  $x=0$  دارای حد  $L$  است به تناقض منجر می‌شود. فرض کنیم وقتی  $x \rightarrow 0$ ،  $f(x) \rightarrow L$ . در این صورت، با اختیار  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ، می‌توان  $\delta > 0$  را به قسمی یافت که هر وقت  $0 < |x| < \delta$

$$(9) \quad \left| \sin \frac{1}{x} - L \right| < \frac{1}{2}$$

فرض کنیم  $n$  عدد صحیحی باشد که قدر مطلقش آنقدر بزرگ است که هر دو نقطه  $x_1 = 1/(2n + \frac{1}{2})\pi$  و  $x_2 = 1/(2n - \frac{1}{2})\pi$  متعلق به همسایگی سفته  $\delta$   $0 < |x| < \delta$  می‌باشند. در این صورت،  $\sin(1/x_2) = \sin(2n - \frac{1}{2})\pi = 1$ ، حال آنکه  $\sin(1/x_1) = \sin(2n + \frac{1}{2})\pi = \sin \frac{1}{2}\pi = 1$  و  $\sin(-\frac{1}{2}\pi) = -1$ . از رابطه (۹) معلوم می‌شود که

$$\left| \sin \frac{1}{x_1} - L \right| = |1 - L| < \frac{1}{2}, \quad \left| \sin \frac{1}{x_2} - L \right| = |-1 - L| < \frac{1}{2}$$

این دو نامساوی ناسازگارند، زیرا اولی ایجاب می‌کند که  $L > \frac{1}{2}$  و دومی ایجاب می‌کند که  $L < -\frac{1}{2}$ . لذا، فرض حد داشتن  $\sin(1/x)$  در  $x=0$  به تناقض می‌رسد. بنابراین،  $\sin(1/x)$  در  $x=0$  حد ندارد.

### مسائل

ابتدا حد  $L$  تابع داده شده  $f$  را در نقطه  $a$  بیابید. سپس، به ازای  $\varepsilon$  داده شده،  $\delta > 0$  ای بیابید که هر وقت  $0 < |x - a| < \delta$ ،  $|f(x) - L| < \varepsilon$ ، و انتخاب خود را توضیح دهید. سعی کنید  $\delta$  حتی الامکان بزرگ باشد (در مسائل ۵ تا ۸ به ماشین حساب نیاز خواهید داشت).

۱.  $f(x) = 5x$ ،  $a$  دلخواه،  $\varepsilon > 0$  دلخواه.

۲.  $f(x) = mx + b$  ( $m \neq 0$ )،  $a$  دلخواه،  $\varepsilon > 0$  دلخواه.

۳.  $f(x) = \frac{3x^2 + 8x - 3}{x + 3}$ ،  $a = -3$ ،  $\varepsilon = 0.15$ .

۴.  $f(x) = \frac{2x^2 - 7x - 4}{x - 4}$ ،  $a = 4$ ،  $\varepsilon = 0.25$ .

۵.  $f(x) = x^2$ ،  $a = 2$ ،  $\varepsilon = 1$ .

۶.  $f(x) = x^2 \sin x$ ،  $a = 0$ ،  $\varepsilon = 0.5$ .

$$f(x) = x^3, a = -1, \varepsilon = 0.1 \quad \cdot 7 \checkmark$$

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}, a = 1, \varepsilon = 0.05 \quad \cdot 8 \checkmark$$

۹. فرض کنید تابع  $f$  در  $a$  دارای حد  $L$  بوده ولی در  $a$  تعریف نشده باشد. همچنین، به ازای هر  $x$  در همسایگی سفته‌ای از  $a$ ،  $f(x) = g(x)$ ، و در  $a$  پیوسته باشد. نشان دهید که  $L = g(a)$ .

۱۰. فرض کنید تابع  $f$  در  $a$  دارای حد  $L$  باشد، ولی در  $a$  تعریف نشده باشد یا در  $a$  مقداری غیر از  $L$  داشته باشد. در این صورت، همانطور که در صفحه ۱۱۳ دیدیم،  $f$  در  $a$  ناپیوسته است. نشان دهید این ناپیوستگی قابل رفع است به این معنی که می‌توان با تعریف (یا تعریف مجدد)  $f$  در  $a$  آن را رفع کرد. به‌طور دقیق‌تر، نشان دهید هرگاه، با تعریف مقدار  $f$  در  $a$  مساوی  $L$ ، تابع  $f$  را توسعه (یا تعدیل) کنیم، آنگاه تابع جدید به دست آمده در  $a$  پیوسته می‌باشد.

۱۱. فرض کنید  $f$  در نقطه  $a$  ناپیوسته باشد. چه وقت ناپیوستگی غیر قابل رفع است؟

۱۲. آیا ناپیوستگی تابع  $(\sin x)/x$  در  $x = 0$  قابل رفع است؟ ناپیوستگی  $|x|/x$  چگونه؟  $\sin(1/x)$  چگونه؟

۱۳. آیا ناپیوستگی تابع  $(x^2 - 1)/(x - 1)$  در  $x = 1$  قابل رفع است؟

۱۴. تابعی مثال بزنید که در هر همسایگی سفته نقطه  $a$  کراندار باشد ولی در  $a$  حد نداشته باشد.

حد داده شده را (در صورت وجود) محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x} \quad \cdot 16 \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos x \quad \cdot 15 \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} \quad \cdot 18 \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{x} \quad \cdot 17 \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cos x \quad \cdot 20 \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x} \quad \cdot 19 \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \tan x \quad \cdot 22 \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \sin \frac{1}{x} \quad \cdot 21 \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin^n x \quad \cdot 24 \quad (n \text{ عدد صحیح مثبت دلخواهی})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \tan x \quad \cdot 23 \checkmark$$

(است)

نشان دهید

۲۵. هرگاه  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  ، آنگاه  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|$

۲۶. هرگاه  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$  ، آنگاه  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

۲۷. هرگاه  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)|$  موجود و ناصفر باشد ، آنگاه  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  ممکن است موجود نباشد .

۲۸. نشان دهید هرگاه تابع  $f$  در  $a$  پیوسته باشد ، آنگاه  $|f|$  نیز چنین است . آیا عکس این مطلب نیز درست است ؟

فرض کنید  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$  . نشان دهید

۲۹. هرگاه  $L < M$  ، آنگاه در مجاورت  $a$  ( یعنی ، در همسایگی سفته‌ای از  $a$  ) ،  $f(x) < g(x)$  .

۳۰. هرگاه در مجاورت  $a$  ،  $f(x) \leq g(x)$  ، آنگاه  $L \leq M$  ، که در آن  $L = M$  حتی اگر

$f(x) < g(x)$  امکان‌پذیر باشد .

۳۱. به روش  $\epsilon, \delta$  نشان دهید هرگاه

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$  و  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

آنگاه  $L = M$  . به عبارت دیگر ، تحقیق کنید هرگاه حدتابع  $f$  در نقطه  $a$  موجود باشد ،

آنگاه این حد منحصر به فرد است . یعنی ، همانطور که در طول بحث تلویحا " فرض

کرده‌ایم ، فقط یک مقدار بیشتر ندارد .

## ۷.۱ اعمال جبری بر حدود

در کارهای آتی باید بتوان حدود عبارات جبری مستلزم دو یا چند تابع را محاسبه کرد . این محاسبات به وسیله این امر ، که اکنون ( در قضایای ۴ تا ۶ ) به اثباتش می‌پردازیم ، که حد مجموع دو تابع مجموع حدود توابع است ، و همچنین احکام حاصل از تعویض مجموع به تفاضل ، حاصل ضرب ، و خارج قسمت ، بسیار ساده خواهد شد . اثباتها ساده ولی تکنیکی‌اند ؛ و لذا ، اختیاری شده‌اند . در صورت حذف برهاسها ، مطمئن شوید که صورت قضایا را ، که آزادانه به کار می‌روند ، فهمیده‌اید . این نکته را در مورد قضایای ۹ و ۱۰ ، که در آخر بخش اثبات می‌شوند ، نیز رعایت نماید .

قضیه ۴ ( حد مجموع یا تفاضل دو تابع ) هرگاه وقتی  $x \rightarrow a$  ،  $f(x) \rightarrow L$  و  $g(x) \rightarrow M$

آنگاه، وقتی  $x \rightarrow a$ ،  $f(x) + g(x) \rightarrow L + M$  و  $f(x) - g(x) \rightarrow L - M$ .

برهان (اختیاری). استدلال کاملاً "شبه استدلالی" است که در اثبات قضیه ۳، صفحه ۱۲۵ به کار رفت. چون وقتی  $x \rightarrow a$ ،  $f(x) \rightarrow L$ ، به ازای هر  $\varepsilon > 0$ ، عددی مانند  $\delta_f > 0$  وجود دارد به طوری که هر وقت  $0 < |x - a| < \delta_f$ ،  $|f(x) - L| < \varepsilon/2$  (استفاده از جای  $\varepsilon/2$  به جای  $\varepsilon$  آخرین مرحله، برهان را بازگو می‌کند). همچنین، از آنجا که وقتی  $x \rightarrow a$ ،  $g(x) \rightarrow M$ ، عددی مانند  $\delta_g > 0$  وجود دارد به طوری که هر وقت  $0 < |x - a| < \delta_g$ ،  $|g(x) - M| < \varepsilon/2$ .

لذا، طبق نامساوی مثلثی (قضیه ۵، صفحه ۲۲)، هر وقت

$$0 < |x - a| < \delta = \min \{\delta_f, \delta_g\}$$

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| = |[f(x) - L] + [g(x) - M]|$$

$$\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

اما، به زبان  $\delta$ ،  $\varepsilon$ ، این یعنی وقتی  $x \rightarrow a$ ،  $f(x) + g(x) \rightarrow L + M$ . اثبات اینکه وقتی  $x \rightarrow a$ ،  $f(x) - g(x) \rightarrow L - M$  اساساً به همین صورت است.

نتیجه را می‌توان فوراً "به بیش از دو تابع تعمیم داد."

نتیجه ۱. هرگاه وقتی  $x \rightarrow a$ ،  $f_1(x) \rightarrow L_1, f_2(x) \rightarrow L_2, \dots, f_n(x) \rightarrow L_n$ ، آنگاه وقتی  $x \rightarrow a$

$$(1) \quad f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x) \rightarrow L_1 \pm L_2 \pm \dots \pm L_n$$

برهان. در اینجا می‌توان در هر علامت  $\pm$  یکی از  $+$  یا  $-$  را اختیار کرد، با این فرض که در جاهای نظیر در طرفین فرمول (۱) یک انتخاب صورت گیرد. برهان تکرار کاربرد قضیه ۴ است.

نتیجه ۲. وقتی  $x \rightarrow a$ ،  $f(x) \rightarrow L$ ، اگر و فقط اگر  $f(x) = L + e(x)$ ، که در آن وقتی  $x \rightarrow a$ ،  $e(x) \rightarrow 0$ .

برهان. فرض کنیم وقتی  $x \rightarrow a$ ،  $f(x) \rightarrow L$ ، و قرار می‌دهیم  $e(x) = f(x) - L$  در این

صورت ،

$$\lim_{x \rightarrow a} e(x) = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - L] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} L = L - L = 0,$$

زیرا حد ثابت مساوی خود ثابت است. به عکس، فرض کنیم  $f(x) = L + e(x)$ ، که در آن وقتی  $x \rightarrow a$ ،  $e(x) \rightarrow 0$ . در این صورت ،

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} [L + e(x)] = \lim_{x \rightarrow a} L + \lim_{x \rightarrow a} e(x) = L + 0 = L.$$

می توان  $e(x) = f(x) - L$  را " خطای " تقریب  $f(x) \approx L$  نزدیک  $a$  تصور کرد. نتیجه ۲ می گوید که وقتی  $x \rightarrow a$ ،  $f(x) \rightarrow L$ ، اگر و فقط اگر این خطا وقتی  $x \rightarrow a$ ، به ۰ نزدیک شود.

قضیه ۵ ( حد حاصل ضرب دو تابع ) . هرگاه وقتی  $x \rightarrow a$ ،  $f(x) \rightarrow L$  و  $g(x) \rightarrow M$  آنگاه وقتی  $x \rightarrow a$ ،  $f(x)g(x) \rightarrow LM$ .

برهان ( اختیاری ) . فرض کنیم  $e_f(x) = f(x) - L$  و  $e_g(x) = g(x) - M$  خطاهای دو تقریب  $f(x) \approx L$  و  $g(x) \approx M$  باشند. بنا بر نتیجه ۲، وقتی  $x \rightarrow a$ ،  $e_f(x) \rightarrow 0$  و  $e_g(x) \rightarrow 0$ . به علاوه، با محاسبه جبری ساده ای،

$$\begin{aligned} f(x)g(x) - LM &= [L + e_f(x)][M + e_g(x)] - LM \\ &= Me_f(x) + Le_g(x) + e_f(x)e_g(x). \end{aligned}$$

اما، طبق قضیه ۳، صفحه ۱۲۵، و نتیجه اش، هر یک از سه جمله سمت راست، وقتی  $x \rightarrow a$  به صفر نزدیک می شود ( هر تابع ثابت کراندار است )؛ و لذا، بنا بر نتیجه ۱ در بالا، تمام عبارت سمت راست چنین می کند. بنابراین، وقتی  $x \rightarrow a$ ،  $f(x)g(x) - LM \rightarrow 0$  یا معادلا "  $f(x)g(x) \rightarrow LM$  .

نتیجه ۱ . هرگاه وقتی  $x \rightarrow a$ ،  $f_1(x) \rightarrow L_1$ ،  $f_2(x) \rightarrow L_2$ ،  $\dots$ ،  $f_n(x) \rightarrow L_n$ ، آنگاه وقتی  $x \rightarrow a$

$$f_1(x)f_2(x) \cdots f_n(x) \rightarrow L_1L_2 \cdots L_n$$

برهان. قضیه ۵ را تکرار نمایید.

نتیجه ۲ . هرگاه  $c$  ثابت دلخواهی بوده و وقتی  $x \rightarrow a$ ،  $f(x) \rightarrow L$ ، آنگاه، وقتی  $x \rightarrow a$ ،

$$cf(x) \rightarrow cL$$

برهان. در قضیه ۵  $g(x) \equiv c$  را انتخاب کنید.

قضیه ۶ (حد خارج قسمت دو تابع). هرگاه وقتی  $x \rightarrow a$ ،  $f(x) \rightarrow L$  و  $g(x) \rightarrow M \neq 0$  و آنگاه، وقتی  $x \rightarrow a$ ،  $f(x)/g(x) \rightarrow L/M$ .

برهان (اختیاری). با نوشتن

$$(۲) \quad \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} = \frac{M - g(x)}{Mg(x)},$$

می بینیم که، طبق قضیه ۴،

$$\lim_{x \rightarrow a} [M - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} M - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M - M = 0,$$

بعلاوه، طبق نتیجه ۲ از قضیه ۵،

$$\lim_{x \rightarrow a} Mg(x) = M^2 \neq 0,$$

در نتیجه، بنابر قاعده (چهار)، صفحه ۱۲۵،  $1/Mg(x)$  در همسایگی سفته‌ای از  $a$  که انداز است. بنابراین، طبق قضیه ۳، صفحه ۱۲۵، طرف راست (۲) وقتی  $x \rightarrow a$ ، به صفر نزدیک می‌شود، یا معادلاً، وقتی  $x \rightarrow a$ ،  $1/g(x) \rightarrow 1/M$ . اما  $f(x)/g(x)$  حاصل ضرب  $f(x)$  در  $1/g(x)$ ، یعنی متقابل  $g(x)$ ، است؛ و در نتیجه، بنابر قضیه ۵، وقتی  $x \rightarrow a$ ،  $f(x)/g(x) = f(x)[1/g(x)] \rightarrow L(1/M) = L/M$ .

قصای ۴ تا ۶ به‌طور خلاصه می‌گویند هرگاه

$$(۳) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M,$$

آنگاه

$$(۴) \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M,$$

$$(۵) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = LM,$$

$$(۶) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \quad (M \neq 0).$$

حال موارد استعمال این فرمولها را نشان می دهیم .

مثال ۱ . با استفاده از (۴) و (۵) ، نشان دهید که

$$\lim_{x \rightarrow -4} \left( x^2 + \frac{3}{2}x \right) = 10.$$

حل . ما از قبل می دانیم که

$$\lim_{x \rightarrow -4} x = -4, \quad \lim_{x \rightarrow -4} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

لذا ، با دو بار استفاده از فرمول (۵) ،

$$\lim_{x \rightarrow -4} x^2 = \lim_{x \rightarrow -4} x \cdot \lim_{x \rightarrow -4} x = (-4)(-4) = 16,$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{3}{2}x = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{3}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow -4} x = \frac{3}{2}(-4) = -6.$$

پس ، با استفاده از (۴) ، خواهیم داشت

$$\lim_{x \rightarrow -4} \left( x^2 + \frac{3}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow -4} x^2 + \lim_{x \rightarrow -4} \frac{3}{2}x = 16 + (-6) = 10.$$

مثال ۲ . حد زیر را بیابید :

$$L = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15}.$$

حل . مخرج کسر ، وقتی  $x \rightarrow 3$  ، به صفر نزدیک می شود ، ولی این مشکل را می توان با حذف عامل مشترک  $x - 3$  از صورت و مخرج از بین برد :

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15} = \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-5)} = \frac{x-2}{x-5} \quad (x \neq 3, 5).$$

بقیه محاسبات سراسر است . با استفاده از (۶) و (۴) ، داریم

$$L = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{x-5} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x-2)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x-5)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x - \lim_{x \rightarrow 3} 2}{\lim_{x \rightarrow 3} x - \lim_{x \rightarrow 3} 5} = \frac{3-2}{3-5} = -\frac{1}{2}.$$

خارج قسمت دو چند جمله ای ، مانند  $(x^2 - 5x + 6)/(x^2 - 8x + 15)$  ، یک تابع

گویا نامیده می شود .

اعمال جبری بر توابع پیوسته . حال فرض کنیم  $f(x)$  و  $g(x)$  دو تابع باشند ، که هر دو در  $a$  پیوسته اند . در این صورت ، به جای (۳) داریم

$$(۳') \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a),$$

در نتیجه ، فرمولهای (۴) تا (۶) خواهند شد

$$(۴') \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = f(a) \pm g(a),$$

$$(۵') \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = f(a)g(a),$$

$$(۶') \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} \quad (g(a) \neq 0).$$

اما این دقیقا " یعنی توابع  $f(x) \pm g(x)$  ،  $f(x)g(x)$  و  $f(x)/g(x)$  در  $a$  پیوسته اند . لذا ، نتیجه اساسی زیر ثابت شده است .

قضیه ۷ ( پیوستگی ترکیب توابع ) هرگاه توابع  $f(x)$  و  $g(x)$  در  $a$  پیوسته باشند ، آنگاه مجموع  $f(x) + g(x)$  ، تفاضل  $f(x) - g(x)$  ، حاصل ضرب  $f(x)g(x)$  ، و خارج قسمت  $f(x)/g(x)$  نیز چنین اند ، مشروط بر اینکه در حالت اخیر  $g(a) \neq 0$  .

نتیجه . هرگاه توابع  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  در  $a$  پیوسته باشند ، آنگاه مجموع جبری  $f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x)$  و حاصل ضرب  $f_1(x)f_2(x) \dots f_n(x)$  نیز چنین اند .

برهان . طبق تعریف ، یک مجموع جبری مجموعی است که هر جمله اش می تواند یکی از دو علامت را داشته باشد . برای اثبات نتیجه ، قضیه ۷ را چند بار به کار می بریم .

پیوستگی چند جمله ایها ، توابع گویا ، و توابع مثلثاتی . دو قضیه زیر در صفحه ۱۱۵ پیش بینی شده بودند ، و قبلا " در حل مسائل حد به طور غیررسمی مفید واقع شدند .

قضیه ۸ ( پیوستگی چند جمله ایها و توابع گویا ) . چند جمله ای

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (a_n \neq 0)$$



به ازای هر  $x$  پیوسته است. تابع گویای

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_Nx^N} \quad (a_n \neq 0, b_N \neq 0)$$

در هر نقطه از قلمرو تعریفش، یعنی در هر نقطه که مخرجش ناصفر است، پیوسته می باشد.

برهان. هر جمله  $a_kx^k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) از چندجمله ای  $P(x)$  پیوسته است، زیرا مساوی حاصل ضرب  $k + 1$  تابع پیوسته، یعنی ثابت  $a_k$  و  $k$  عامل از  $x$ ، می باشد. پس  $P(x)$ ، که مجموع  $n + 1$  جمله از این نوع است، نیز پیوسته می باشد. چون چندجمله ایها پیوسته اند، خارج قسمت  $R(x) = P(x)/Q(x)$  دو چندجمله ای نیز، جز در نقاطی (در صورت وجود) که مخرج  $Q(x)$  مساوی صفر است، پیوسته می باشد.

حال که دانستیم چندجمله ایها پیوسته اند، محاسبات مثال ۱ را می توان به صورت زیر خلاصه کرد:

$$\lim_{x \rightarrow -4} \left( x^2 + \frac{3}{2}x \right) = (-4)^2 + \frac{3}{2}(-4) = 16 - 6 = 10.$$

همچنین، با استفاده از توابع گویا، می توان از چند مرحله در مثال ۲ گذشت (کدامها؟).

مثال ۳. تابع گویای  $1/(1+x^2)$  به ازای هر  $x$  پیوسته است، زیرا مخرجش هرگز صفر نمی شود.

مثال ۴. تابع گویای  $x/(1-x^2)$  همه جا جز در دو "نقطه ناپیوستگی"  $x = 1$  و  $x = -1$  که در آنها مخرجش ۰ است، پیوسته می باشد.

قضیه ۹ (پیوستگی توابع مثلثاتی). هر یک از توابع مثلثاتی  $\tan x$ ،  $\cos x$ ،  $\sin x$  و  $\csc x$ ،  $\sec x$ ،  $\cot x$  در هر نقطه از قلمرو تعریف خود پیوسته است.

نمودار توابع مثلثاتی قویا "پیشنهاد می کند که این تابعها پیوسته اند، زیرا نمودار هر شاخه یک منحنی "ناشکسته" است، ولی باید برهانی صوری برای آن آورد. این کار قدری تکنیکی است؛ و در نتیجه، در آخر بخش ارائه می شود.

مثال ۵. بنابر پیوستگی  $\cos x$  ،

$$\lim_{x \rightarrow \pi} (\cos^2 x + \cos x + 1) = \cos^2 \pi + \cos \pi + 1 = (-1)^2 + (-1) + 1 = 1.$$

قضیه ساندویچ. قضیه زیر ابزار مفید دیگری در محاسبه حدود است.

قضیه ۱۰. (قضیه ساندویچ) . هرگاه در همسایگی سفته‌ای از  $a$

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

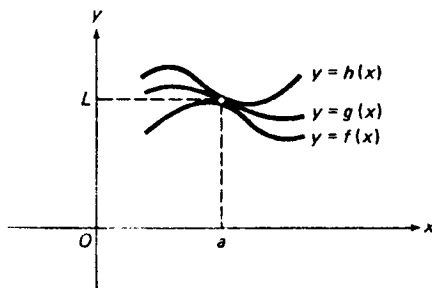
و نیز

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L,$$

آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L.$$

به عبارت دیگر، تابعی که بین دو تابع که هر دو حد  $L$  را دارند قرار داشته باشد، باید به  $L$  نزدیک شود. شکل ۴۲ برقراری این قضیه را قویاً تأیید می‌کند (  $g(x)$  ، وقتی



شکل ۴۲

$x \rightarrow a$  ، جز به سمت  $L$  کجا می‌تواند برود؟) ، ولی برهان دقیقی بعد از برهان قضیه ۹ داده شده است.

مثال ۶. به ازای عدد صحیح مثبت  $n$  ، نشان دهید که

$$(۷) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{1+x} = 1.$$

چون  $\sqrt[n]{1+0} = 1$  ، این می‌گوید که تابع  $\sqrt[n]{1+x}$  در  $x = 0$  پیوسته است.

حل. هرگاه  $|x| < 1$ ، آنگاه

$$1 - |x| \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + |x|.$$

( ذکر جزئیات، که مبتنی بر معنی  $|x|$  و مثال ۶، صفحه ۱۷، است، را به عنوان تمرین می‌گذاریم. ) حال چون

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 \pm |x|) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 \pm \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 1 \pm 0 = 1,$$

فرمول (۸) فوراً "از قضیه" ساندویچ نتیجه می‌شود.

مثال ۷. برای حد

$$(۸) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

که در مثال ۲، صفحه ۱۱۰، به‌طور غیرصوری حساب شد، برهان دقیق بیاورید.

حل. بنابر فرمول (۲)، صفحه ۱۰۶،

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad (0 < |x| < \pi/2),$$

که در آن وقتی  $x \rightarrow 0$ ،  $\cos x$  و ثابت ۱ هر دو به ۱ نزدیک می‌شوند. با اعمال قضیه ساندویچ، رابطه (۸) فوراً "به دست می‌آید".

برهان قضیه ۹ (دخواه). با قرار دادن  $\alpha = x$ ،  $\beta = a$  در فرمول (۱۵)، صفحه ۹۶ به دست می‌آوریم

$$\sin x - \sin a = 2 \cos \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2},$$

که نامساوی زیر را ایجاد می‌کند:

$$|\sin x - \sin a| = 2 \left| \cos \frac{x+a}{2} \right| \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x-a}{2} \right|,$$

یا معادلاً

$$(۹) \quad |\sin x - \sin a| \leq |x - a|,$$

که به ازای هر  $x$  و  $a$  معتبر است. ( در اینجا از  $|\cos(x+a)/2| \leq 1$ ، همراه با نامساوی

(۳)، صفحه ۱۰۷، استفاده می‌کنیم. ) همچنین، به خاطر (۹)،

$$|\cos x - \cos a| = \left| \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) \right|$$

$$\leq \left| \left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \left(a + \frac{\pi}{2}\right) \right| = |x - a|,$$

و نامساوی لنگه زیر را داریم:

$$(۹') \quad |\cos x - \cos a| \leq |x - a|,$$

که نیز به ازای هر  $x$  و  $a$  معتبر است. از روابط (۹) و (۹') فوراً نتیجه می شود که، هر وقت فاصله  $x$  تا  $a$  کمتر از  $\varepsilon = \delta$  باشد، هر دوی  $|\sin x - \sin a|$  و  $|\cos x - \cos a|$  از  $\varepsilon > 0$  کوچکترند. بنابراین،

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a, \quad \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a,$$

و پیوستگی  $\sin x$  و  $\cos x$  ثابت شده است. چون توابع  $\sin x$  و  $\cos x$  به ازای هر  $x$  پیوسته اند، متقابلهای  $\csc x = 1/\sin x$  و  $\sec x = 1/\cos x$  و خارج قسمتهای  $\tan x = \sin x/\cos x$ ،  $\cot x = \cos x/\sin x$  هر جا تعریف شده اند، یعنی هر جا مخرجهایشان ناصفرند، پیوسته می باشند.

برهان قضیه ۱۰. به ازای هر  $\varepsilon > 0$  می توان عددی مانند  $\delta_f > 0$  یافت به طوری که هر وقت  $0 < |x - a| < \delta_f$  یا  $|f(x) - L| < \varepsilon$  یا  $-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$ ، و عددی مانند  $\delta_h > 0$  به طوری که هر وقت  $0 < |x - a| < \delta_h$  یا  $|h(x) - L| < \varepsilon$  یا  $-\varepsilon < h(x) - L < \varepsilon$  این نامساویها همراه با  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  ایجاب می کنند که هر وقت  $0 < |x - a| < \delta = \min\{\delta_f, \delta_h\}$ ،  $-\varepsilon < f(x) - L \leq g(x) - L \leq h(x) - L < \varepsilon$ ، بنابراین، هر وقت  $0 < |x - a| < \delta$  یا  $-\varepsilon < g(x) - L < \varepsilon$  یا  $|g(x) - L| < \varepsilon$ ، در نتیجه، وقتی  $x \rightarrow a$ ،  $g(x) \rightarrow L$ .

### مسائل

حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x - 1} \quad ۳ \quad \lim_{x \rightarrow -0.3} \frac{100x^2 - 9}{10x + 3} \quad ۲ \quad \lim_{x \rightarrow 1.6} \frac{25x^2 - 64}{5x - 8} \quad ۱$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3} \quad ۶ \quad \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^3 + 64}{x + 4} \quad ۵ \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 11x + 5}{3x^2 - 14x - 5} \quad ۴$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)-1}{x} \cdot ۸ ✓$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^4 - 8x^2 + 16} \cdot ۷ ✓$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^{100} - 10x^{10} + 999}{x^{50} - 5x^5 + 99} \cdot ۱۰ ✓$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x} \cdot ۹ ✓$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+3x)^4 - (1+4x)^3}{x^2} \cdot ۱۲ ✓$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5} \cdot ۱۱ ✓$$

۱۳. حد  $L$  تابع  $f(x) = (x+1)/(x-2)$  در  $x=5$  را بیابید. سپس، به ازای  $\varepsilon > 0$  داده شده،  $\delta > 0$  ای بیابید به طوری که  $0 < |x-5| < \delta$  ایجاب کند که  $|f(x) - L| < \varepsilon$ .  
نقاطی را، در صورت وجود، بیابید که تابع داده شده در آنها ناپیوسته است.

$$101x^{11} - 1001x \cdot ۱۵ ✓$$

$$(x-1)^2 \cdot ۱۴ ✓$$

$$\frac{2x+3}{x^2+x+1} \cdot ۱۷ ✓$$

$$\frac{x^2}{x^2-49} \cdot ۱۶ ✓$$

$$\frac{x-2}{x^2-4} \cdot ۱۹ ✓$$

$$\frac{1}{2x^2+x-1} \cdot ۱۸ ✓$$

$$\frac{x^2-x+1}{x^3-6x^2+11x-6} \cdot ۲۱ ✓$$

$$\frac{3x-5}{x^2-3x+2} \cdot ۲۰ ✓$$

$$\frac{x^3+10}{x^5-2x^3+x} \cdot ۲۲ ✓$$

حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -1} (\cos^2 x + \sin^2 x) \cdot ۲۴ ✓$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot ۲۳ ✓$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} (\cos^3 x + \sin^3 x) \cdot ۲۵ ✓$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} \cdot ۲۷ ✓$$

$$\lim_{x \rightarrow -\pi/2} (\cos^4 x - \sin^5 x) \cdot ۲۶ ✓$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{1}{1 + \tan^2 x} \cdot ۲۹ ✓$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot ۲۸ ✓$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/3} (\cot x + \csc x) \cdot ۳۱ ✓$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} (2 \sec^4 x - 1) \cdot ۳۰ ✓$$

۳۲. در مثال ۸، صفحه ۱۲۶، نشان داده شد که

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

این مطلب را با استفاده از قضیه ساندویچ به صورتی دیگر ثابت کنید.

### ۸.۱ حد تابع مرکب

برای آنکه حدود را به آسانی حساب کنیم باید طرز پرداختن به حدود توابع مرکب، مانند  $\sqrt{2x+3}$  و  $\sin(\cos x)$ ، را بیاموزیم. قضیه زیر طرز کار را نشان می دهد.

قضیه ۱۱ (حد تابع مرکب). هرگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

و  $g$  در  $L$  پیوسته باشد، آنگاه

$$(۱) \quad \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(L).$$

برهان (اختیاری). فرض کنیم  $y = f(x)$ ، و  $\varepsilon > 0$  را اختیار می کنیم. چون  $g$  در  $L$  پیوسته است، می توان  $\delta_g > 0$  ای یافت به طوری که هر وقت  $|y - L| < \delta_g$ ،  $|g(y) - g(L)| < \varepsilon$ . به علاوه، چون  $f$  در  $a$  دارای حد  $L$  است، می توان  $\delta_f > 0$  نیز یافت به طوری که هر وقت  $0 < |x - a| < \delta_f$ ،  $|f(x) - L| = |y - L| < \delta_g$ . لذا،  $0 < |x - a| < \delta_f$  ایجاب می کند که  $|y - L| < \delta_g$ ، که به نوبه خود ایجاب می کند که  $|g(f(x)) - g(L)| = |g(y) - g(L)| < \varepsilon$ . لذا، هر وقت  $0 < |x - a| < \delta_f$ ،  $|g(f(x)) - g(L)| < \varepsilon$ ، و (۱) ثابت می شود.

نتیجه (پیوستگی تابع مرکب) هرگاه  $f$  در  $a$  و  $g$  در  $f(a)$  پیوسته باشد، آنگاه  $g(f(x))$  در  $a$  پیوسته می باشد.

برهان. از قضیه با فرض  $L = f(a)$  استفاده کنید.

نتیجه به طور غیر ضروری می گوید که هر تابع پیوسته از یک تابع پیوسته پیوسته است.

مثال ۱. به ازای عدد صحیح مثبت  $n$ ، نشان دهید

$$(۲) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[n]{x} = 1.$$

چون  $\sqrt[n]{1} = 1$ ، این می‌گوید که تابع ریشه  $n$ م  $\sqrt[n]{x}$  در نقطه  $x = 1$  پیوسته است.

حل. با اختیار  $g(x) = \sqrt[n]{1+x}$ ،  $f(x) = x - 1$ ، داریم  $g(f(x)) = \sqrt[n]{x}$ . به علاوه،

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0,$$

و، بنابر مثال ۶، صفحه ۱۳۷،  $g(x)$  در  $x = 0$  پیوسته است. پس از قضیه ۱۱ نتیجه می‌شود که

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{1+0} = 1.$$

مثال ۲. نشان دهید که تابع  $\sqrt[n]{x}$  در هر نقطه  $a > 0$  پیوسته است.

حل. داریم

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{a \cdot \frac{x}{a}} = \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{\frac{x}{a}} = \sqrt[n]{a} \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{\frac{x}{a}},$$

زیرا  $\sqrt[n]{a}$  ثابت است. با معرفی متغیر جدید  $t = x/a$  و توجه به این امر که  $x \rightarrow a$  ایجاب می‌کند که  $t \rightarrow 1$ ، پس از استفاده از فرمول (۲) با  $x$  به جای  $t$ ،

$$(۳) \quad \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a} \lim_{t \rightarrow 1} \sqrt[n]{t} = \sqrt[n]{a} \cdot 1 = \sqrt[n]{a}.$$

اما (۳) می‌گوید که  $\sqrt[n]{x}$  در  $x = a$  پیوسته است. (توجه کنید که معرفی متغیر جدید

$t = x/a$  معادل استفاده از قضیه ۱۱ به ازای  $f(x) = x/a$  و  $g(x) = \sqrt[n]{ax}$  است.)

دلیل گذاردن شرط  $a > 0$  این است که  $\sqrt[n]{x}$ ، وقتی  $n$  زوج است، به ازای  $x$  منفی

تعریف نشده است، ولی این شرط را می‌توان در صورت فرد بودن  $n$  حذف کرد. در واقع،

اگر  $n$  فرد باشد،  $\sqrt[n]{x}$  به ازای هر  $x$  تعریف شده است و استدلالی که هم‌اکنون داده شد

نشان می‌دهد که وقتی  $x \rightarrow a \neq 0$ ،  $\sqrt[n]{x} \rightarrow \sqrt[n]{a}$ ، ولی، بنابر استدلال مثال ۱ در بخش

بعد، وقتی  $x \rightarrow 0$ ،  $\sqrt[n]{x} \rightarrow \sqrt[n]{0} = 0$ .

مثال ۳. نشان دهید که  $\lim_{x \rightarrow 11} \sqrt{2x+3} = 5$ .

حل. توابع  $f(x) = 2x + 3$  و  $g(x) = \sqrt{x}$  هر دو پیوسته‌اند،  $f(x)$  چون یک چند - جمله‌ای است و  $g(x)$  بنابر مثال قبل. از اینرو، بنابر نتیجه، تابع  $g(f(x)) = \sqrt{2x + 3}$  نیز پیوسته می‌باشد. اما، در این صورت،

$$\lim_{x \rightarrow 11} \sqrt{2x + 3} = \sqrt{2(11) + 3} = \sqrt{25} = 5.$$

مثال ۴. حد  $\cos(\sin x)$  در نقطه  $x = 0$  را بیابید.

حل. چون  $\sin x$  و  $\cos x$  به ازای هر  $x$  پیوسته‌اند، تابع مرکب  $\cos(\sin x)$  نیز چنین است. بنابراین،

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(\sin x) = \cos(\sin 0) = \cos 0 = 1.$$

رفع ابهام. در مثالهای زیر از تمام تکنیکهای محاسبه حد مذکور در این فصل استفاده می‌کنیم. در هر حالت حد عبارتی در  $a$  حساب می‌شود که با گذاردن  $x = a$  در آن به صورت مبهم  $0/0$  درمی‌آید. روند محاسبه این حدود اغلب "رفع ابهام از  $0/0$ " نامیده می‌شود.

مثال ۵. حد  $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x}$  را محاسبه کنید.

حل. تابع  $(1 - \sqrt{x+1})/x$  به ازای  $x = 0$  تعریف نشده است. در واقع، جانشانی  $x = 0$  آن را به صورت مبهم  $0/0$  درمی‌آورد. سعی می‌کنیم  $x$  مزاحم در مخرج را با ضرب صورت و مخرج در عامل  $1 + \sqrt{x+1}$  حذف کنیم. این شیوه به طرز زیبایی کارساز است، زیرا به  $x$  در صورت منجر می‌شود که با  $x$  مخرج حذف خواهد شد. به طور مشروح،

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x} \cdot \frac{1 + \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (x+1)}{x(1 + \sqrt{x+1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x(1 + \sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{1 + \sqrt{x+1}}. \end{aligned}$$

پس نتیجه می‌شود که

$$L = \frac{-1}{\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sqrt{x+1})} = \frac{-1}{1 + \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+1}} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2},$$

که در آن از پیوستگی  $\sqrt{x+1}$  در  $x = 0$  استفاده می‌کنیم.



مثال ۶. حد  $L = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin c\theta}{\theta}$  را حساب کنید، که در آن  $c$  ثابت دلخواهی است.

حل. ابتدا می‌نویسیم

$$L = \lim_{\theta \rightarrow 0} c \frac{\sin c\theta}{c\theta} = c \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin c\theta}{c\theta}$$

در این صورت، با جانشانی  $t = c\theta$  و توجه به اینکه وقتی  $\theta \rightarrow 0$ ،  $t \rightarrow 0$  به دست می‌آوریم

$$L = c \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = c \cdot 1 = c.$$

مثال ۷. حد  $L = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^3 x}$  را محاسبه کنید.

حل. در اینجا با صورت مبهم  $0/0$  سروکار داریم، زیرا  $\sin^2 \pi = 0$ ،  $\cos \pi = -1$ ،  $1 + \cos^3 \pi = 0$ ، پس، بعد از حذف عامل مشترک  $1 + \cos x$ ، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos^3 x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{(1 + \cos x)(1 - \cos x + \cos^2 x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos x}{1 - \cos x + \cos^2 x}. \end{aligned}$$

عامل  $1 + \cos x$ ، که در  $x = \pi$  مساوی صفر است، ابهام اولیه را سبب می‌شد، ولی اینک از بین رفته است، و می‌توان، با استفاده از پیوستگی  $\cos x$ ،  $L$  را حساب کرد. بد عبارت دیگر، اکنون می‌توان جانشانی  $x = \pi$  را انجام داده، به دست آورد

$$L = \frac{1 - (-1)}{1 - (-1) + (-1)^2} = \frac{1 + 1}{1 + 1 + 1} = \frac{2}{3}$$

مثال ۸. حد  $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$  را حساب کنید.

حل. در اینجا باز با صورت مبهم  $0/0$  سروکار داریم. از ضرب صورت و مخرج در  $1 + \cos x$  به دست می‌آوریم

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)},$$

که در آن، برخلاف مثال قبل، مشکلی با عامل  $1 + \cos x$  نداریم، زیرا این عامل در  $x = 0$  صفر نیست. هنوز در مخرج  $x$  وجود دارد که جلو ما را می‌گیرد. اما آخرین حد را می‌توان با نوشتن آن به صورت حاصل‌ضربی از دو حد، که یکی از قبل معلوم است و دیگری را می‌توان با پیوستگی به دست آورد، به آسانی محاسبه نمود. به تفصیل، داریم

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 1 \cdot \frac{0}{1 + 1} = 0.$$

### مسائل

حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(\tan x) \quad \cdot ۲ \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(\cos x) \quad \cdot ۱ \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(\sin x) \cos x \quad \cdot ۴ \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(\cos x) \sin x \quad \cdot ۳ \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 2\pi/3} \sin^2(\cos x) \quad \cdot ۶ \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/6} \tan(\sin x) \quad \cdot ۵ \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{\frac{3-x}{8-x}} \quad \cdot ۸ \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(x \sin \frac{1}{x}\right) \quad \cdot ۷ \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-3}} \quad \cdot ۱۰ \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{1 + \sqrt{x+1}}{x} \quad \cdot ۹ \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt[3]{2x^3 - 3x^2 + x + 2} \quad \cdot ۱۲ \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt[3]{\frac{x^3 - 16}{x + 2}} \quad \cdot ۱۱ \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16} \quad \cdot ۱۳ \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \tan \sqrt{1+x^2} \quad \cdot ۱۵ \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \sqrt{\cos^2 x - \cos x + 1} \quad \cdot ۱۴ \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \pi x}{x} \quad \cdot ۱۷ \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow -\pi} \sin \sqrt{10 + \cos x} \quad \cdot ۱۶ \quad \checkmark$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta} \quad \cdot ۱۹ \quad \checkmark$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\sin \frac{1}{2}z} \quad \cdot ۱۸ \quad \checkmark$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\tan \beta}{\tan 3\beta} \quad \cdot ۲۱ \quad \checkmark$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\tan 2\alpha}{\alpha} \quad \cdot ۲۰ \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{4-x^2}{2-x}} \quad \cdot ۲۳ \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \sqrt[3]{4x^3 + x^2 - 3} \quad \cdot ۲۲ \quad \checkmark$$

فرمول:  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin a\theta}{\sin b\theta} = \frac{a}{b}$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x^2+4}} \cdot 25 \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x^2} \cdot 24 \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{x} \cdot 27 \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4} \cdot 26 \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\tan x)}{\tan x} \cdot 29$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\cos x)}{\cos x} \cdot 28$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan x} - 1} \cdot 31$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin(\sin x))}{\sin(\sin x)} \cdot 30$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x} \cos \frac{\pi x}{2} \cdot 33$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} \cdot 32$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(\cot x) \sin x \cdot 34$$

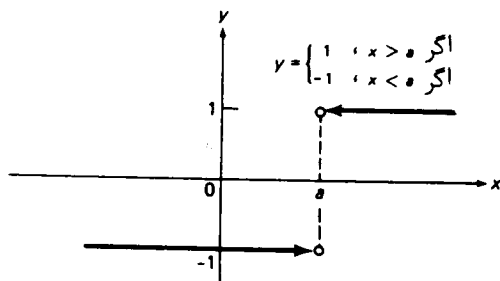
۳۵. ممکن است اغوا شده قضیه ۱ را این طور تعمیم دهیم. هرگاه وقتی  $x \rightarrow a$ ،  $f(x) \rightarrow L$  و وقتی  $x \rightarrow L$ ،  $g(x) \rightarrow M$ ، آنگاه وقتی  $x \rightarrow a$ ،  $g(f(x)) \rightarrow M$ . با مثال نشان دهید که این حکم نادرست است. شرطی تکمیلی بر رفتار  $f$  در محاورت  $a$  قایل شوید که حکم را برقرار سازد.

### ۹.۱. حدود یکطرفه و پیوستگی

نمودار تابع

$$(۱) \quad f(x) = \frac{|x-a|}{x-a} = \begin{cases} 1, & x > a \\ -1, & x < a \end{cases}$$

نموده شده در شکل ۴۳، وقتی شناسه  $x$  از چپ  $a$  به راست  $a$  می‌رود، از  $-1$  به  $1$  جهش دارد؛ و لذا،  $f$  در  $a$  حد ندارد. با اینحال، اگر  $x$  فقط از یک سو به  $a$  نزدیک شود،  $f$



شکل ۴۳

در  $a$  به مقداری حدی نزدیک خواهد شد. پس می‌توان رفتار  $f$  را در طرف دیگر  $a$  فراموش کرده،  $f$  را تابع ثابت  $f(x) \equiv 1$  در سمت راست  $a$ ، یا تابع ثابت  $f(x) \equiv -1$  در سمت چپ  $a$  در نظر گرفت. رفتار حدی  $f$ ، وقتی  $x$  از یک سو یا سوی دیگر به  $a$  نزدیک می‌شود، با دو سر سهم در شکل نموده شده است. یک سر سهم نظیر به حد از راست بوده و با خط  $x = a$  در نقطه‌ای به عرض 1 تماس می‌یابد، و دیگری نظیر به حد از چپ با خط  $x = a$  در نقطه‌ای به عرض -1 تماس دارد. (این نقاط را با نقطه‌های توخالی نمایش می‌دهیم، زیرا هیچیک از آنها به نمودار  $f$  تعلق ندارند؛ در واقع،  $f$  در  $a$  تعریف نشده است.) لذا تابع  $f$  در  $a$  حدود یکطرفه دارد، اگرچه حد معمولی  $f$  در  $a$  وجود ندارد.

اگر نقطه متغیر  $x$  از راست به نقطه ثابت  $a$  نزدیک شود، فقط مقادیر بزرگتر از  $a$  ( $x > a$ ) را بگیرد، می‌نویسیم  $x \rightarrow a^+$ ، حال آنکه اگر  $x$  از چپ به  $a$  نزدیک شود، فقط مقادیر کوچکتر از  $a$  ( $x < a$ ) را بگیرد، می‌نویسیم  $x \rightarrow a^-$ . مثلاً، هم اکنون در مورد تابع (۱) دیدیم که وقتی  $x \rightarrow a^+$ ،  $f(x) \rightarrow 1$  و وقتی  $x \rightarrow a^-$ ،  $f(x) \rightarrow -1$ ، یا معادلاً

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -1.$$

اولین حد یکطرفه حد راست  $f$  در  $a$ ، دومین حد یکطرفه حد چپ  $f$  در  $a$  نام دارد. به آسانی می‌توان برای حدود یکطرفه تعریف  $\delta, \varepsilon$  آورد. فرض کنیم  $f$  در نقطه  $a$  حد معمولی (دوطرفه) داشته باشد. این به زبان  $\delta, \varepsilon$  یعنی به ازای هر  $\varepsilon > 0$ ، می‌توان  $\delta > 0$  ای یافت به طوری که هر وقت  $0 < |x - a| < \delta$ ، یعنی هر وقت

$$a < x < a + \delta \quad (2)$$

یا

$$a - \delta < x < a \quad (2')$$

داشته باشیم  $|f(x) - L| < \varepsilon$ . البته، نقاط  $x$  صادق در (۲) سمت راست  $a$ ، و نقاط صادق در (۲') سمت چپ  $a$  واقعند. لذا، برای رفتن به حدود یکطرفه، کافی است (۲) را نگهداشته (۲') را حذف کنیم یا (۲') را نگهداشته (۲) را حذف کنیم. به طور دقیقتر، وقتی  $x \rightarrow a^+$ ،  $f(x) \rightarrow L$ ، یعنی به ازای هر  $\varepsilon > 0$ ، می‌توان  $\delta > 0$  ای یافت به طوری که هر وقت  $a < x < a + \delta$ ،  $|f(x) - L| < \varepsilon$ ، حال آنکه وقتی  $x \rightarrow a^-$ ،  $f(x) \rightarrow L$ ، یعنی هر وقت  $a - \delta < x < a$ ،  $|f(x) - L| < \varepsilon$ .

حدود یکطرفه در مقابل حدود معمولی. جدول زیر تشابهات و اختلافات بین حد معمولی و

حدود یکطرفه را توضیح می دهد .

حد معمولی	حد یکطرفه
یک همسایگی سفته 'a	یک بازه ' باز یا نقطه ' انتهایی چپ 'a
فرض کنیم f در	یک بازه ' باز یا نقطه ' انتهایی راست 'a
گوئیم f دارای	a تعریف شده باشد
و می نویسیم	حد چپ L در a است
	$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$
	حد راست L در a
	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$
اگر به ازای هر	
$\epsilon > 0$ ، بتوان	
$\delta > 0$ ای یافت	
به طوری که	
$ f(x) - L  < \epsilon$	
به ازای	
$0 <  x - a  < \delta$	$a - \delta < x < a$ برقرار باشد
$a < x < a + \delta$	

در اینجا با ستونهای اول و دوم جدول تعریف حد معمولی ، ستونهای اول و سوم تعریف حد راست ، و ستونهای اول و آخر تعریف حد چپ به دست می آید . از توازی این تعاریف آشکار است که هر حکم مذکور برای حد معمولی مشابهی برای حدود یکطرفه دارد . بخصوص این امر در مورد قضایای ۴ تا ۶ بخش ۷۰۱ درست است . در نتیجه ، اعمال جبری وارد بر حدود یکطرفه از همان قواعد اعمال جبری حدود معمولی تبعیت می کنند . مثلاً ، هرگاه توابع f و g در a حد راست داشته باشند ، آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a^+} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow a^+} g(x),$$

هرگاه f و g در a حد چپ داشته باشند ، آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a^-} g(x),$$

و از این قبیل

قضیه " زیر تقریباً " واضح است ، اما آنقدر مهم هست که بیان صوری داشته باشد .

قضیه ۱۲ ( شرایط وجود حد ) . حد

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

وجود دارد اگر و فقط اگر حدود یکطرفه

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

هر دو موجود و مساوی باشند . هرگاه چنین باشد ، آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x),$$

یعنی، حد  $f$  در  $a$  مساوی مقدار مشترک حدود راست و چپ  $f$  در  $a$  است.

برهان. اثبات را به عنوان تمرین می‌گذاریم. به جدول مراجعه کنید.

مثال ۱. نشان دهید که

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[n]{x} = 0.$$

حل. به ازای  $\varepsilon > 0$ ، باید  $\delta > 0$  ای بیابیم به طوری که هر وقت  $0 < x < \delta$ ،

$$|\sqrt[n]{x} - 0| = |\sqrt[n]{x}| = \sqrt[n]{x} < \varepsilon$$

یک انتخاب مناسب  $\delta = \varepsilon^n$  است، زیرا

$$0 < x < \varepsilon^n$$

ایجاب می‌کند که

$$0 < \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{\varepsilon^n} = \varepsilon$$

(ر.ک. مثال ۶، صفحه ۱۷) اگر  $n$  زوج باشد،  $\sqrt[n]{x}$  به ازای  $x$  منفی تعریف نشده است، و صحبت از حد  $\sqrt[n]{x}$  وقتی  $x \rightarrow 0^-$  معنی ندارد. اما، اگر  $n$  فرد باشد،  $\sqrt[n]{x}$  به ازای  $x$  منفی تعریف شده است، و اساساً همان استدلال نشان می‌دهد که

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[n]{x} = 0.$$

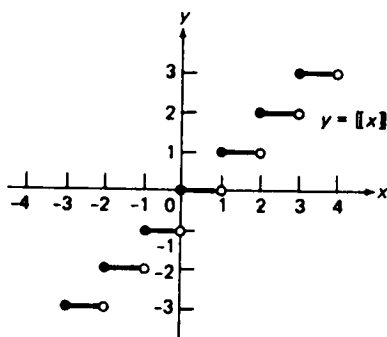
لذا. اگر  $n$  فرد باشد، از قضیه ۱۲ معلوم می‌شود که

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{x} = 0.$$

مثال ۲. اگر  $x$  عددی باشد، بزرگترین عدد صحیح نا بیشتر از  $x$  با  $[x]$  نموده می‌شود. به عبارت دیگر،  $[x]$  عدد صحیح منحصر به فرد  $n$  است که  $n \leq x < n+1$ . بنابراین،

$$[\frac{1}{2}] = 0, \quad [0] = 0, \quad [\sqrt{2}] = 1, \quad [-\frac{3}{2}] = -2,$$

و از این قبیل. در شکل ۴۴ تابع  $y = [x]$ ، که تابع بزرگترین عدد صحیح نام دارد، رسم شده است ( $[x]$  قسمت صحیح  $x$  نیز نامیده می‌شود). طبق معمول، نقاط توپر تعلق به نمودار دارد، ولی نقاط توخالی چنین نیستند. از نمودار واضح است که  $[x]$  همه جا جز



شکل ۴۴

در نقاط صحیح

$$x = n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

حد دوطرفه معمولی دارد.  $[x]$  در یک چنین نقطه حد راست

$$(۳) \quad \lim_{x \rightarrow n^+} [x] = n$$

و حد چپ

$$(۳') \quad \lim_{x \rightarrow n^-} [x] = n - 1$$

داشته ولی حد معمولی ندارد، زیرا این حدود یکطرفه نامساویند.

پیوستگی یکطرفه. نوعی پیوستگی نیز وجود دارد که مستلزم حدود یکطرفه است. اگر

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a),$$

گوییم تابع  $f$  از راست در  $a$  پیوسته است، اما اگر

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a),$$

گوییم  $f$  از چپ در  $a$  پیوسته می باشد (در اینجا باید فرض کرد که  $f$  در  $a$  تعریف شده است). از قضیه ۱۲ فوراً نتیجه می شود که تابع  $f$  در نقطه  $a$  پیوسته است اگر و فقط اگر هم از راست و هم از چپ در  $a$  پیوسته باشد. در واقع، طبق این قضیه،

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

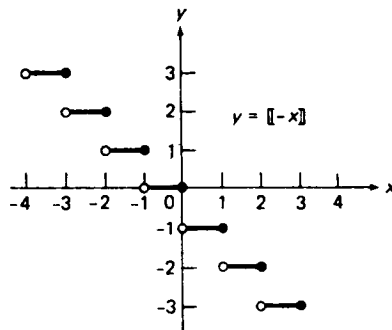
اگر و فقط اگر

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a).$$

مثال ۳. هرگاه  $n$  عددی صحیح باشد، آنگاه  $[n] = n$ . از فرمولهای (۳) و (۳') نتیجه می شود که تابع بزرگترین عدد صحیح  $[x]$  در هر نقطه، صحیح  $x = n$  از راست پیوسته است ولی از چپ پیوسته نیست. این نیز از بررسی شکل ۴۴ واضح است. تابع  $[x]$  در هر نقطه دیگر به معنی معمولی پیوسته است.

پیوستگی بر یک بازه. گوییم تابع  $f$  بر بازه  $I$  پیوسته است اگر در هر نقطه  $I$  پیوسته باشد، با این فرض که در نقاط انتهایی  $I$  (که متعلق به  $I$  اند) پیوستگی یکطرفه است. لذا، پیوستگی  $f$  بر بازه  $(a, b)$  باز  $(a, b)$  یعنی  $f$  در هر نقطه از  $(a, b)$  پیوسته است، ولی پیوستگی  $f$  بر بازه بسته  $[a, b]$  یعنی  $f$  در هر نقطه  $(a, b)$ ، از راست در نقطه انتهایی چپ  $a$ ، و از چپ در نقطه انتهایی راست  $b$  پیوسته می باشد. این معنی دارد، زیرا  $x$  نمی تواند بدون خارج شدن از بازه  $[a, b]$ ، از چپ به  $a$  یا از راست به  $b$  نزدیک شود، و ما می خواهیم پیوستگی را برای تابعی که قلمرو تعریفش بازه بسته ای است نیز تعریف کنیم. به همین نحو،  $f$  در بازه نیم باز  $[a, b)$  پیوسته است اگر  $f$  بر  $(a, b)$  و از راست در  $a$  پیوسته باشد،  $f$  بر  $(-\infty, b]$  پیوسته است اگر  $f$  بر  $(-\infty, b)$  و از چپ در  $b$  پیوسته باشد، و از این قبیل.

مثال ۴. فرض کنیم  $n$  عدد صحیحی باشد. در این صورت، تابع بزرگترین عدد صحیح  $[x]$  بر بازه  $[n, n+1)$  پیوسته است ولی بر بازه  $(n, n+1)$  چنین نیست. با توجه به منعکس نمودار  $[x]$  نسبت به محور  $y$  (ر.ک. شکل ۴۵)، درمی یابیم که تابع  $[-x]$  بر  $[n, n+1)$  پیوسته است ولی بر  $(n, n+1)$  چنین نیست.



شکل ۴۵



مسائل

مقادیر زیر را بیابید .

$$1. \quad [-\pi] \quad 2. \quad [\pi^2] \quad 3. \quad [\sqrt{2} - \sqrt{3}]$$

$$4. \quad [(3)^4] \quad 5. \quad [(1.1)^{10}] \quad 6. \quad [(-\frac{7}{11})^{13}]$$

حد داده شده را ( در صورت وجود ) بیابید .

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x-1} \quad 8. \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1}$$

$$9. \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt[3]{x-1} \quad 10. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}$$

$$11. \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} x \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} \quad 12. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{\sqrt{x}}$$

$$13. \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[x]}{x} \quad 14. \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[x]}{x}$$

$$15. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x]}{x} \quad 16. \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{x}$$

$$17. \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{[x]}{x} \quad 18. \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{[x]}{x}$$

۱۹. حدود یکطرفه تابع

$$f(x) = \frac{x + x^2}{|x|} \quad (x \neq 0)$$

در  $x = 0$  را بیابید .

۲۰. حدود یکطرفه تابع

$$f(x) = \begin{cases} x & , x < 2 \\ 1.1x & , x \geq 2 \end{cases} \quad \text{اگر}$$

در  $x = 2$  را بیابید .

۲۱. به فرض آنکه

$$f(x) = \begin{cases} 3x & , 0 \leq x < 1 \\ 2-x & , 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad \text{اگر}$$

دو بازه با نقاط انتهایی ۰ و ۱ بیابید که  $f$  بر آنها پیوسته باشد . نشان دهید که  $f$  بر هر بازه با نقاط انتهایی ۱ و ۲ پیوسته است .

۲۲. فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} -|x+1|, & x < 0 \\ |x-1|, & x > 0 \end{cases}$$

که در آن  $f(0)$  تعریف نشده است.  $f(0)$  چگونه تعریف شود که  $f$  از راست در  $x=0$

پیوسته شود؟ از چپ در  $x=0$  پیوسته شود؟

فرض کنید حدود راست و چپ تابعی در نقطه  $a$  موجود و نامساوی باشند. در این صورت کمیت

$$J = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

جهش  $f$  در  $a$  نام دارد، و گویند  $f$  در  $a$  ناپیوستگی جهشی دارد. مثلاً، هر ناپیوستگی تابع بزرگترین عدد صحیح  $[x]$ ، که در شکل ۴۴ رسم شده، یک ناپیوستگی جهشی است، و جهش در هر نقطه ناپیوستگی  $x=0, \pm 1, \pm 2, \dots$  دارای مقدار یکسان ۱ می باشد.

۲۳. جهش تابع

$$f(x) = \frac{J}{2} \frac{|x-a|}{x-a}$$

چیست و در چه نقطه‌ای رخ می دهد؟

۲۴. نشان دهید که ناپیوستگی جهشی نمی تواند قابل رفع باشد (ر.ک. مسئله ۱۰، صفحه ۱۲۹).

۲۵. ناپیوستگیهای تابع  $f(x) = [x] + [-x]$  را بیابید. آیا اینها ناپیوستگی جهشی اند؟

آیا قابل رفع اند؟

۲۶. جهشهای تابع

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ x, & 1 < x < 3 \\ 4, & x \geq 3 \end{cases}$$

را بیابید.

۲۷. به فرض آنکه

$$f(x) = \begin{cases} -2 \sin x, & x < -\pi/2 \\ a \sin x + b, & -\pi/2 \leq x \leq \pi/2 \\ \cos x, & x > \pi/2 \end{cases}$$

چه  $a$  و  $b$  ای تابع  $f$  را همه جا پیوسته می سازند؟

۲۸. نشان دهید که کوچکترین عدد صحیح ناکمتر از  $x$  مساوی  $[-x]$  است.

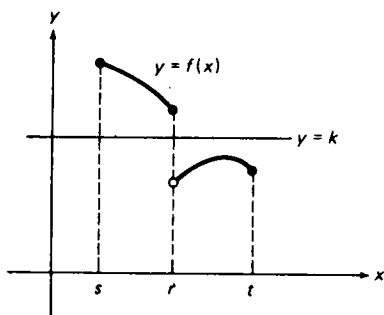
## ۱۰.۱ خواص توابع پیوسته

حال خواصی از تابع  $f$  را بررسی می‌کنیم که صرفاً "نتیجه" پیوستگی آن بر یک بازه می‌باشند.

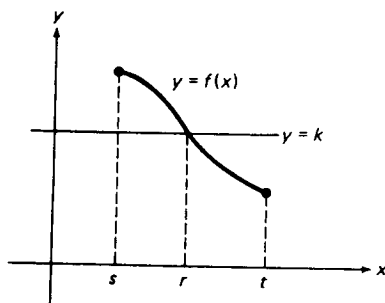
## قضیه مقدار میانی

قضیه ۱۳ (قضیه مقدار میانی). هرگاه  $f$  بر بازه  $I$  پیوسته بوده و  $f$  مقادیر مختلف  $f(s)$  و  $f(t)$  را در دو نقطه  $s$  و  $t$  از  $I$  بگیرد، آنگاه  $f$  هر مقدار میانی  $k$  را خواهد گرفت؛ یعنی، هر مقدار  $k$  بین  $f(s)$  و  $f(t)$ ، در نقطه‌ای مانند  $r$  بین  $s$  و  $t$ .

برهان را حذف کرده‌ایم، زیرا مستلزم مفهومی است (تمامیت دستگاه اعداد حقیقی) که از حوصله نخستین درس در حساب دیفرانسیل و انتگرال خارج است. اما معنی هندسی قضیه کاملاً واضح می‌باشد. همانطور که شکل ۴۶ (آ) نشان داده، نمودار تابع پیوسته  $f$  نمی‌تواند از یک طرف خط افقی  $y = k$  به طرف دیگر رود بی‌آنکه خط را قطع نماید. پیوستگی  $f$  برای صحت قضیه لازم است، زیرا، همانطور که شکل ۴۶ (ب) نشان داده، نمودار یک تابع ناپیوسته می‌تواند از روی خط  $y = k$  بی‌آنکه آن را قطع کند بپرد.



(ب)



(آ)

شکل ۴۶

روش تنصیف. اولین مثال ما طرز استفاده از قضیه مقدار میانی برای حل یک معادله مشکل با هر دقت مطلوب را نشان می‌دهد.

مثال ۱. نشان دهید که معادله

(۱)

$$2x^5 + 2x^2 + x - 3 = 0$$

ریشه‌ای بین 0 و 1 دارد. این ریشه را با تقریب  $\frac{1}{8}$  بیابید.

حل. منظور از ریشه (یا جواب) معادله (۱) یعنی مقداری مانند  $x$  که در معادله صدق کند. تابع

$$f(x) = 2x^5 + 2x^2 + x - 3$$

را معرفی می‌کنیم که پیوسته است ( زیرا یک چندجمله‌ای است ). می‌بینیم که  $f(0) = -3$  و  $f(1) = 2$ . چون  $-3 < 0 < 2$ ، از قضیه مقدار میانی معلوم می‌شود که به ازای  $x$ ی بین 0 و 1،  $f(x) = 0$ ، لذا، معادله (۱) ریشه‌ای مانند  $r$  بین 0 و 1، یعنی در بازه  $(0, 1)$ ، دارد. <sup>۱</sup> برای آنکه جای  $r$  دقیقتر معین شود، روند زیر را به کار می‌بریم که روش تنصیف نام دارد.

ابتدا مقدار  $f$  را در نقطه میانی  $\frac{1}{2}$  از بازه  $(0, 1)$  حساب می‌کنیم:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^5 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - 3 = -\frac{31}{16} < 0.$$

اما  $f(1) > 0$ ؛ و در نتیجه، باز طبق قضیه مقدار میانی،  $f(x)$  باید به ازای  $x$ ی بین  $\frac{1}{2}$  و 1 مساوی 0 باشد. بنابراین،  $\frac{1}{2} < r < 1$ ، و  $r$ ی را جستجو می‌کنیم که در بازه کوچکتر  $(\frac{1}{2}, 1)$  به طول  $\frac{1}{2}$  باشد. با تنصیف دیگر، مقدار  $f$  را در نقطه میانی  $\frac{3}{4}$  از بازه  $(\frac{1}{2}, 1)$  محاسبه می‌کنیم:

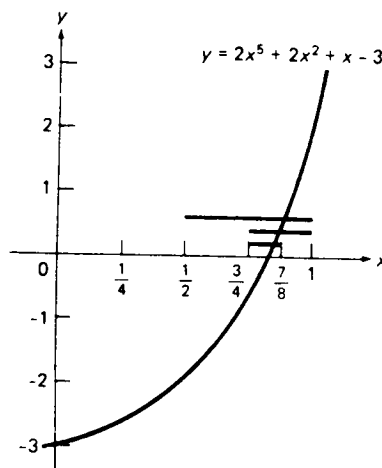
$$f\left(\frac{3}{4}\right) = 2\left(\frac{3}{4}\right)^5 + 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} - 3 = -\frac{333}{512} < 0.$$

چون  $f(\frac{3}{4}) < 0$  و  $f(1) > 0$ ، تابع  $f$  در نقاط  $\frac{3}{4}$  و 1 مقادیری با علامت مختلف می‌گیرد؛ و لذا، به ازای  $x$ ی بین  $\frac{3}{4}$  و 1،  $f(x) = 0$ ؛ در نتیجه،  $r$  در بازه  $(\frac{3}{4}, 1)$  به طول  $\frac{1}{4}$  قرار دارد. این هنوز برای تعیین  $r$  با دقت مطلوب کافی نیست؛ در نتیجه، تنصیف سوم را انجام داده و در می‌یابیم که  $f(\frac{7}{8}) > 0$  ( محاسبه به عنوان تمرین گذارده می‌شود ). چون  $f(\frac{3}{4}) < 0$  و  $f(\frac{7}{8}) > 0$ ، می‌توان مطمئن بود که  $r$  در بازه  $(\frac{3}{4}, \frac{7}{8})$  به طول  $\frac{1}{8}$  قرار دارد. اما نقطه میانی  $\frac{1}{2}(\frac{3}{4} + \frac{7}{8}) = \frac{13}{16}$  این بازه در فاصله حداکثر  $\frac{1}{16}$  از هر نقطه درونی خود قرار دارد؛ و در نتیجه، همانطور که مطلوب است، در فاصله حداکثر  $\frac{1}{16}$  از ریشه  $r$  واقع

۱. در واقع، می‌توان به کمک آزمونی که بعداً می‌آید نشان داد که  $f$  بر  $(0, 1)$  صعودی است؛ در نتیجه،  $r$  تنها ریشه معادله (۱) بین 0 و 1 می‌باشد (ر.ک. مثال ۴، صفحه

خواهد بود.

لذا، تقریب  $r \approx \frac{13}{16} = 0.8125$  به اندازه  $\frac{1}{16}$  دقیق است. محاسباتی دقیقتر نشان می‌دهد که، تا چهار رقم اعشار،  $r = 0.8305$ ؛ در نتیجه، خطای تقریب ما به  $r$ ، مبتنی بر سه تنصیف، حدوداً  $0.8305 - 0.8125 = 0.0180$  می‌باشد. چون  $\frac{1}{16} = 0.0625$  این خطا عملاً از میزان انتظار ما کوچکتر است (ر.ک. مسئله ۳). در شکل ۴۷، تعبیر هندسی سه تنصیف متوالی با سه پاره خط افقی نموده شده است، که در آن کوتاهترین پاره خط نقاط  $\frac{3}{4}$  و  $\frac{7}{8}$  محور  $x$  را به هم وصل می‌کند.



شکل ۴۷

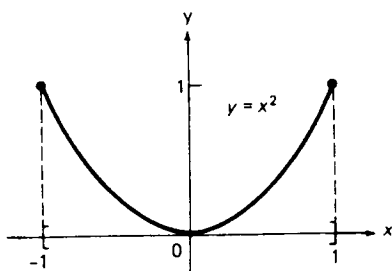
مقادیر اکستريم. فرض کنیم تابع  $f$  بر بازه  $I$  تعريف شده باشد (ولی نه لزوماً پیوسته)، و نقطه‌ای مانند  $q$  در  $I$  موجود باشد به طوری که به ازای هر  $x$  در  $I$ ،  $f(q) \geq f(x)$ . در این صورت، عدد  $f(q) = M$  مقدار ماکزیمم، یا فقط ماکزیمم،  $f$  بر  $I$  نامیده می‌شود. به عبارت دیگر،  $M$  بزرگترین مقداری است که  $f$  در نقطه‌ای از  $I$  می‌گیرد. به همین نحو، فرض کنیم نقطه‌ای مانند  $p$  در  $I$  وجود دارد به طوری که به ازای هر نقطه  $x$  در  $I$ ،  $f(p) \leq f(x)$ . در این صورت، عدد  $f(p) = m$  مقدار مینیمم، یا فقط مینیمم،  $f$  بر  $I$  نام دارد و کوچکترین مقداری است که  $f$  در نقاط  $I$  می‌گیرد. چیزی مانع اینکه  $f$  ماکزیمم یا مینیمم خود را در چند نقطه از  $I$  بگیرد نیست، ولی ماکزیمم یا مینیمم در صورت وجود باید منحصر به فرد باشد (چرا؟). اصطلاح مقدار اکستريم، یا فقط اکستريم، اشاره به ماکزیمم یا مینیمم دارد.

مثال ۲. فرض کنیم  $f(x) \equiv k$  تابع ثابتی باشد که بر بازه  $I$  تعريف شده است.  $f$  در هر

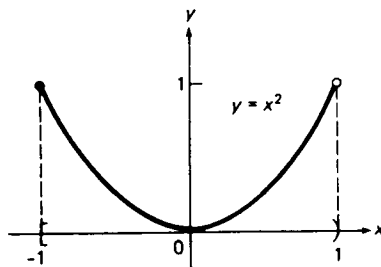
نقطه  $I$  ماکزیمم و مینیمم دارد، که هر دو مساوی  $k$  می باشند. به عکس، هرگاه  $f$  بر بازه ای چون  $I$  دارای ماکزیمم  $M$  و مینیمم  $m$  بوده، و  $M$  و  $m$  مساوی با مقدار مشترک  $k$  باشند، آنگاه  
 $f(x) \equiv k, I$  بر.

مثال ۳. فرض کنیم  $f(x) = x^2$  و  $I$  بازه نیم باز  $[-1, 1)$ ، مثل شکل ۴۸ (ب)، باشد. واضح است که  $f$  بر  $I$  دارای ماکزیمم  $M = 1$  و  $m = 0$  است. در واقع،  $f$  ماکزیمم خود را در  $x = -1$ ، یعنی طول نقطه اوج نمودار  $f$ ، و مینیمم خود را در  $x = 0$ ، یعنی طول نقطه خضیی نمودار، می گیرد. هرگاه  $I$  بازه بسته  $[-1, 1]$  باشد، آنگاه  $f$  همان اکستریمها را دارد، ولی در اینجا ماکزیمم  $M$  در  $x = 1$  و نیز در  $x = -1$  گرفته می شود [ر. ک. شکل ۴۸ (ب)].

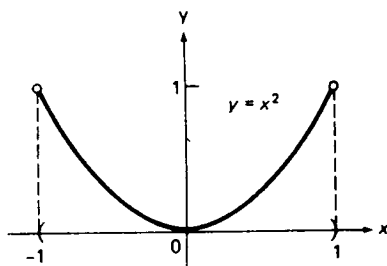
مثال ۴. مجدداً فرض کنیم  $f(x) = x^2$ ، ولی این بار  $I$  را بازه باز  $(-1, 1)$  می گیریم. از شکل ۴۸ (پ) واضح است که  $f$ ، مثل مثال قبل، دارای مینیمم  $m = 0$  در  $x = 0$  است.



(ب)



(ب)



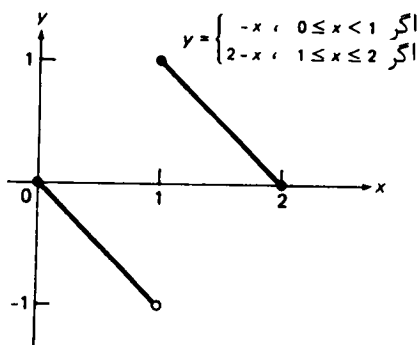
(پ)

اما  $f$  بر  $I$  دیگر ماکزیمم ندارد، زیرا  $f$ ، بی آنکه خود مقدار ۱ را بگیرد، مقادیر بدخواه نزدیک ۱ را خواهد گرفت (بزرگترین عدد کوچکتر از ۱ وجود ندارد).

مثال ۵. فرض کنیم  $I$  بازه بسته  $[0, 2]$  بوده، و  $f$  تابع پیوسته

$$f(x) = \begin{cases} -x, & 0 \leq x < 1 \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

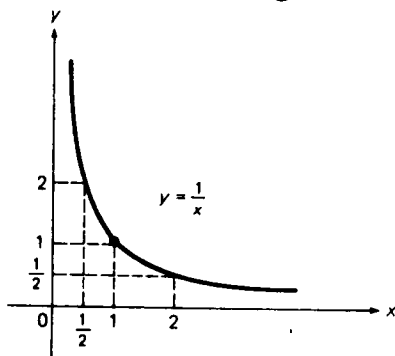
باشد که در شکل ۴۹ رسم شده است. واضح است که  $f$  بر  $I$  دارای ماکزیمم  $M = 1$  است



شکل ۴۹

که در  $x = 1$  (طول نقطه اوج نمودار) گرفته می شود، ولی بر  $I$  مینیمم ندارد، زیرا  $f$  بی آنکه مقدار  $-1$  را بگیرد، مقادیر بدخواه نزدیک به  $-1$  را خواهد گرفت (کوچکترین عدد بزرگتر از  $-1$  وجود ندارد).

مثال ۶. فرض کنیم  $I$  بازه بسته بی کران  $[1, \infty)$  بوده، و  $f(x) = 1/x$ . از شکل ۵۰ واضح



شکل ۵۰

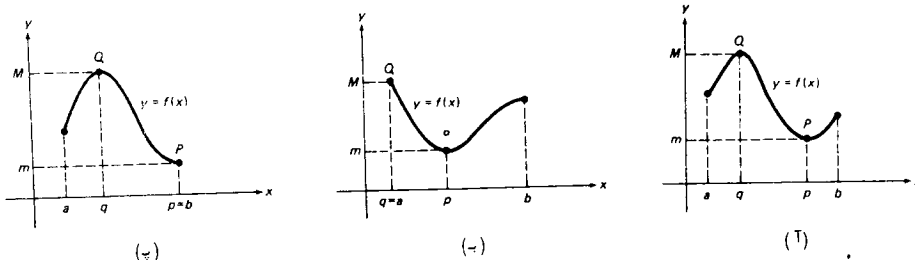
است که  $f$  بر  $I$  دارای ماکزیمم  $M$  است، که در  $x = 1$  گرفته می‌شود، ولی مینیمم ندارد، چون  $f$ ، بی‌آنکه مقدار ۰ را بگیرد، مقادیر بدخواه نزدیک به ۰ را خواهد گرفت (کوچکترین عدد مثبت وجود ندارد).

قضیه مقدار اکستریم. همانطور که امثله فوق نشان می‌دهند، هیچ حکم کلی درباره وجود مقادیر اکستریم تابع دلخواه  $f$  بر بازه دلخواه  $I$  وجود ندارد. اما، درحالتی که  $f$  بر  $I$  پیوسته بوده، و  $I$  کراندار و بسته باشد، وجود مقادیر اکستریم را می‌توان تضمین کرد:

قضیه ۱۴ (قضیه مقدار اکستریم). هرگاه  $f$  بر بازه بسته کراندار  $I = [a, b]$  پیوسته باشد، آنگاه  $f$  بر  $I$  کراندار است، و  $f$  بر  $I$  ماکزیمم  $M$  و مینیمم  $m$  را دارد. یعنی، نقاطی مانند  $p$  و  $q$  در  $I$  وجود دارند به طوری که، به ازای هر  $x$  در  $I$ ،

$$m = f(p) \leq f(x) \leq f(q) = M$$

برهان حذف شده است، زیرا مثل برهان قضیه مقدار میانی شامل نکاتی فنی است. با اینحال، اینکه صحت قضیه مقدار اکستریم به پیوستگی  $f$  وابسته است در مثال ۵، و اینکه این صحت به بسته و کراندار بودن  $I$  وابسته است در مثالهای ۴ و ۶ نموده شده است. تعبیر هندسی قضیه این است که نمودار یک تابع پیوسته بر بازه کراندار بسته  $I$  باید دارای نقطه اوج  $Q = (q, M)$  و نقطه حقیض  $P = (p, m)$  باشد. نقطه  $q$  می‌تواند یک نقطه درونی یا یک نقطه انتهایی  $I$  باشد، و همین امر در مورد  $P$  نیز درست است. چند حالت ممکن در شکل ۵۱ نموده شده است.

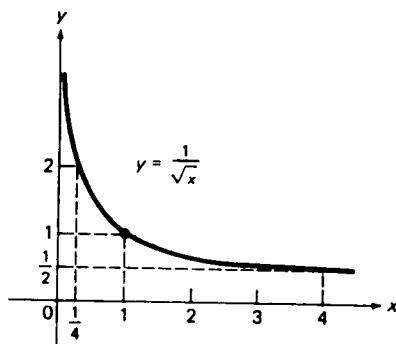


شکل ۵۱

مثال ۷. تابع  $f(x) = 1/\sqrt{x}$  بر بازه کراندار بسته  $I = [1, 4]$  پیوسته است و، در رابطه با قضیه ۱۴،  $f$  بر  $[1, 4]$  کراندار است با ماکزیمم  $M = f(1) = 1$  و مینیمم  $m = f(4) = \frac{1}{2}$  (توجه کنید که  $f$  نزولی است). تابع  $f$  بر بازه  $(0, 1)$  پیوسته است، ولی از شکل ۵۲



معلوم می شود که  $f$  بر  $(0, 1)$  ماکزیم ندارد؛ و در واقع، بر  $(0, 1)$  بی کران می باشد. این امر با قضیه ۱۴ سازگار است، زیرا بازه  $(0, 1)$  باز می باشد.



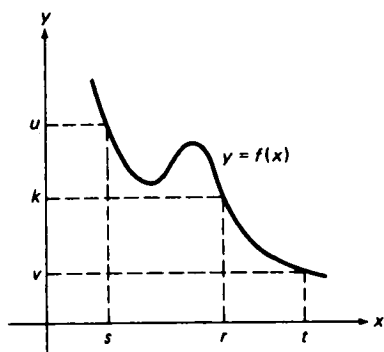
شکل ۵۲

رفتار بازه ها تحت نگاشتهای پیوسته. بحث خواص توابع پیوسته را با قضیه مفیدی در رفتار بازه ها تحت نگاشتهای پیوسته پایان می دهیم. فرض کنیم تابع  $f$  بر مجموعه  $X$  تعریف شده باشد، و  $Y$  مجموعه  $\{y: y = f(x), x \in X\}$  باشد؛ یعنی، مجموعه تمام مقادیری که  $f$  با تغییر متغیر مستقل  $x$  در مجموعه  $X$  می گیرد. گوییم  $f$ ،  $X$  را به روی  $Y$  می نگارد، و همانطور که  $y$  نقش  $x$  تحت  $f$  نامیده می شود،  $Y$  نقش  $X$  تحت  $f$  خوانده می شود.

قضیه ۱۵ (قضیه نگاشت بازه). فرض کنیم  $f$  بر بازه  $I$  از هر نوع پیوسته بوده، و  $J$  نقش  $I$  تحت  $f$  باشد. در این صورت،  
(یک)  $J$  نیز یک بازه می باشد؛  
(دو) اگر  $I$  بازه بسته گراننداری باشد،  $J$  نیز چنین می باشد.

برهان (دلخواه). برای اثبات (یک)، فرض کنیم  $u$  و  $v$  نقاط متمایزی در  $J$  باشند. در این صورت، نقاط متمایزی چون  $s$  و  $t$  در  $I$  وجود دارند به طوری که  $f(s) = u$  و  $f(t) = v$  (ر.ک. شکل ۵۳). فرض کنیم  $k$  نقطه ای بین  $u$  و  $v$  باشد. بنا بر قضیه مقدارمائی، نقطه ای مانند  $r$  بین  $s$  و  $t$  وجود دارد به طوری که  $f(r) = k$ . بنابراین،  $k$  متعلق به  $J$  می باشد. لذا، هر وقت مجموعه  $J$  شامل دو نقطه متمایز  $u$  و  $v$  باشد، شامل هر نقطه  $k$  بین  $u$  و  $v$  نیز هست. لذا، طبق تبصره صفحه ۳۰،  $J$  یک بازه می باشد.

برای اثبات (دو)، فرض کنیم  $I$  گراندار و پیوسته بوده، و  $M$  و  $m$  ماکزیم و مینیمم

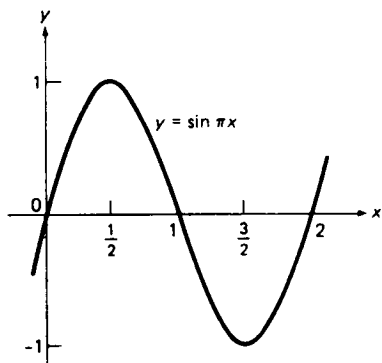


شکل ۵۳

$f$  بر  $I$  باشند که وجودشان را قضیه مقدار اکستریم تضمین می‌کند. در این صورت، مجموعه  $J$ ، که به خاطر قسمت (یک) بازه است، فقط می‌تواند بازه کراندار بسته  $[m, M]$  باشد. اگر  $f$  تابع ثابت باشد،  $J$  به مجموعه‌ای شامل فقط یک نقطه تحویل می‌شود. برای احتساب این حالت، از حالا به بعد مجموعه‌ای که فقط شامل یک نقطه، مثلاً  $k$ ، باشد را به صورت بازه بسته  $[k, k]$ ، که نقاط انتهایی‌اش یکی هستند، در نظر می‌گیریم.

قضیه ۱۵ به زبان ساده می‌گوید که هر تابع پیوسته بازه‌ها را به روی بازه‌ها و بازه‌های بسته کراندار را به روی بازه‌های بسته کراندار می‌نگارد. نقش پیوسته یک بازه که کراندار و بسته نباشد ممکن است بازه‌ای از هر نوع باشد. مثلاً، به ازای تابع مثال ۷، نقش بازه کراندار  $(0, 1)$  بازه بی‌کران  $(1, \infty)$  می‌باشد.

مثال ۸. فرض کنیم  $f(x) = \sin \pi x$ . با توجه به شکل ۵۴ معلوم می‌شود که اگر  $\delta > 0$ ،



شکل ۵۴

تابع پیوسته  $f$  بازه  $(\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2} + \delta)$  را به روی بازه بسته  $[-1, 1]$  می نگارد.

### مسائل

۱. هرگاه  $f(x) = 1/x$ ، آنگاه  $f(-1) = -1$  و  $f(1) = 1$ ، ولی  $f$  مقدار صفر را بین  $x = -1$

و  $x = 1$  نمی گیرد. چرا این با قضیه مقدار میانی تعارضی ندارد؟

۲. نشان دهید که معادله  $8x^3 - 12x^2 - 2x + 3 = 0$  ریشه‌ای مانند  $r_1$  بین  $-1$  و  $0$ ، ریشه‌ای

مانند  $r_2$  بین  $0$  و  $1$ ، و ریشه‌ای مانند  $r_3$  بین  $1$  و  $2$  دارد. با جانشانی  $x = \frac{1}{2}$ ، مقادیر

دقیق این ریشه‌ها را بیابید. آیا ریشه‌های دیگری نیز وجود دارند؟

۳. در مثال ۱ سه تنصیف تقریب  $\frac{1}{2} \approx r$  را می دهد، که خطایی حدوداً " مساوی 0.0180

دارد. چند تنصیف دیگر یک چنین خطای کوچکی را تضمین می کنند؟

۴. نشان دهید که معادله  $x^6 + 2x - 2 = 0$  ریشه‌ای مانند  $r_1$  بین  $-2$  و  $-1$ ، و ریشه‌ای

دیگری چون  $r_2$  بین  $0$  و  $1$  دارد. نشان دهید که ریشه دیگری وجود ندارد. با استفاده

از روش تنصیف،  $r_1$  و  $r_2$  را به میزان  $\frac{1}{16}$  تقریب کنید.

راهنمایی. خط  $y = 2 - 2x$  منحنی  $y = x^6$  را درست در دو نقطه قطع می کند.

۵. نشان دهید که معادله  $\cos \pi x = x$  یک و فقط یک ریشه مانند  $r$  بین  $0$  و  $\frac{1}{2}$  دارد. با

استفاده از روش تنصیف،  $r$  را به میزان  $\frac{1}{2}$  تقریب کنید.

۶. نشان دهید که معادله  $\sin \pi x = x$  ریشه‌ای چون  $r_1$  بین  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{3}{4}$ ، و ریشه دیگری مانند

$r_2$  بین  $\frac{3}{4}$  و  $\frac{1}{2}$  دارد. رابطه بین  $r_1$  و  $r_2$  چیست؟ آیا معادله ریشه‌های دیگری

غیر از  $x = 0$  دارد؟ با استفاده از روش تنصیف،  $r_1$  و  $r_2$  را به میزان  $\frac{1}{16}$  تقریب نماید.

۷. فرض کنید  $f$  بر بازه  $[a, b]$  پیوسته بوده و، به ازای هر  $x$  در  $[a, b]$ ،  $a \leq f(x) \leq b$ ،

نشان دهید که نقطه‌ای مانند  $c$  در  $[a, b]$ ، به نام نقطه ثابت  $f$ ، وجود دارد که

$$f(c) = c.$$

۸. آسانسوری از یک عمارت رفیع ظرف 5 دقیقه بالا رفته، در طبقات مختلف برای پیاده

یا سوار کردن توقف می کند. سپس در 3 دقیقه پایین می آید. نشان دهید که، صرف نظر

از جزئیات حرکت، جایی (عموماً بین طبقات) وجود دارد که آسانسور درست دو

بار به فاصله 4 دقیقه از آن رد می شود.

برای تابع  $f$  و بازه  $I$  داده شده، ماکزیمم  $M$  و مینیمم  $m$  تابع  $f$  بر  $I$  را یافته، و نقاطی

از  $I$  را تعیین کنید که در آنها  $M$  و  $m$  گرفته می شوند (هر اکسترممی را که وجود ندارد مشخص

کنید). همچنین، بازه  $J$  را طوری بیابید که نقش  $I$  تحت  $f$  باشد.

$$f(x) = x^2 - 2x - 2, I = (0, 3] \quad ۹ \quad \checkmark$$

$$f(x) = 1 + x - x^2, I = [-1, 2] \quad ۱۰ \quad \checkmark$$

$$f(x) = x^3 + 1, I = [-1, 1] \quad ۱۱ \quad \checkmark$$

$$f(x) = x^2 + 2x + 3, I = [-2, 1] \quad ۱۲ \quad \checkmark$$

$$f(x) = 1/(x-1), I = (1, \infty) \quad ۱۳ \quad \checkmark$$

$$f(x) = |x| + |x+1|, I = [-3, 1] \quad ۱۴ \quad \checkmark$$

$$f(x) = 1/(x^2 + 1), I = (-\infty, 0] \quad ۱۵ \quad \checkmark$$

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, I = (-1, 1) \quad ۱۶ \quad \checkmark$$

$$f(x) = \sqrt[3]{1-x}, I = [1, 9] \quad ۱۷ \quad \checkmark$$

$$f(x) = \sqrt[3]{1+x}, I = [0, 15] \quad ۱۸ \quad \checkmark$$

$$f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x, I = [0, \pi] \quad ۱۹ \quad \checkmark$$

$$f(x) = |\sin x|, I = [0, 2\pi] \quad ۲۰ \quad \checkmark$$

۲۱. فرض کنید تابع  $f$  دارای ماکزیمم  $M$  و مینیمم  $m$  بر بازه  $I$  باشد. نشان دهید  $f -$

نیز بر  $I$  مقادیر اکستریم دارد. این مقادیر چه هستند، و کجاها گرفته می‌شوند؟

۲۲. نشان دهید که تابع صعودی  $f$  همواره بر بازه کراندار بسته  $I = [a, b]$  دارای

ماکزیمم  $M$  و مینیمم  $m$  است، حتی اگر  $f$  در نقاطی از  $I$  ناپیوسته باشد.  $f$  کجاها مقادیر

اکستریم خود را می‌گیرد؟ درحالتی که  $f$  نزولی است بحث کنید.

### اصطلاحات و مباحث کلیدی

تعریف تابع، متغیرهای مستقل و وابسته

قلمرو و برد تابع، قلمرو طبیعی

شناسه و مقادیر تابع

اعمال حبری بر توابع، تساوی تابعها

تساوی همانی و اتحادها

توابع مرکب و عمل ترکیب

نمودار تابع و خاصیت خط قائم

توابع زوج و فرد، توابع صعودی و نزولی

انتقال نمودار یک تابع

توابع مثلثاتی و نمودار آنها

رادیان در مقابل درجه

طول قوس مستدیر ، مساحت قطاع مستدیر

قانون کسینوسها ، قوانین جمع برای سینوس و کسینوس

زاویه بین دوخط

توابع متناوب ، دوره تناوب اساسی

توابع کراندار و بی کران

حد تابع  $f(x)$  وقتی  $x \rightarrow a$

پیوستگی و دلایل ناپیوستگی

تعریف  $\delta, \epsilon$  حد و تعبیر هندسی آن

اعمال جبری بر حدود و توابع پیوسته

قضیه ساندویچ

حدود راست و چپ

پیوستگی از راست و از چپ ، پیوستگی بر بازه

قضیه مقدار میانی ، روش تنصیف

مقادیر اکستریم تابع ، قضیه مقدار اکستریم

قضیه نگاشت بازه

مقادیری از توابع مثلثاتی که مکرر به کار می روند

$\theta$	یا $0^\circ$	یا $30^\circ$	یا $45^\circ$	یا $60^\circ$	یا $90^\circ$
تابع	۰ رادیان	$\frac{\pi}{6}$ رادیان	$\frac{\pi}{4}$ رادیان	$\frac{\pi}{3}$ رادیان	$\frac{\pi}{2}$ رادیان
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—

مسائل تکمیلی

فرض کنید  $f(x) = (2x + 1)/(3x^2 - 1)$  . مقادیر زیر را بیابید .

۱ .  $f(-1)$       ۲ .  $f(0)$       ۳ .  $f(\frac{1}{2})$

۴ .  $f(1/\sqrt{2})$       ۵ .  $f(1/\sqrt{3})$       ۶ .  $f(-3)$

فرض کنید  $f(x) = x^2 - 2x + 3$  . تمام جوابهای معادله داده شده را بیابید .

$$f(x) = 0 \quad ۰۸$$

$$f(x) = 6 \quad ۰۷$$

$$f(x) = 11 \quad ۰۱۰$$

$$f(x) = 2 \quad ۰۹$$

۱۱. آیا محیط یک مثلث متساوی الاضلاع تابعی از مساحت آن است؟

۱۲. فرض کنید  $d$  تعداد اعداد صحیح مثبتی باشد که (دقیقا) مقسوم علیه های عدد

صحیح مثبت  $n$  اند. مثلا، "،  $d = 6$  اگر  $n = 12$ ، زیرا 12 دارای مقسوم علیه های 1،

2، 3، 4، 6، و 12 است. آیا  $n$  تابعی از  $d$  است؟

فرض کنید  $f(t) = 2^t$  و  $g(t) = t^2$ . مقادیر زیر را حساب کنید.

$$(fg)(-1) \quad ۰۱۵$$

$$(f + \frac{1}{2}g)(1) \quad ۰۱۴$$

$$(2f - g)(0) \quad ۰۱۳$$

$$(f^2 - g^2)(4) \quad ۰۱۸$$

$$(f/g)(-2) \quad ۰۱۷$$

$$(1 + g^2)(2) \quad ۰۱۶$$

هرگاه

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } x > 0 \\ 1 & \text{اگر } x \leq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x > 0 \\ 0 & \text{اگر } x \leq 0 \end{cases}$$

تابع مرکب داده شده را بیابید.

$$f(g(x)) \quad ۰۲۰$$

$$f(f(x)) \quad ۰۱۹$$

$$g(g(x)) \quad ۰۲۲$$

$$g(f(x)) \quad ۰۲۱$$

۲۳. تابع غیر ثابت  $f$  را طوری بیابید که  $f \circ f = f$ .

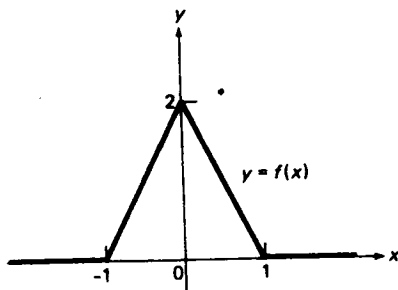
۲۴. نشان دهید که  $fg \equiv 0$  با  $f \not\equiv 0, g \not\equiv 0$  سازگار است. به عبارت دیگر، نشان دهید

که حاصل ضرب دو تابع ناصفر می تواند صفر باشد. یعنی وضع توابع با اعداد فرق دارد.

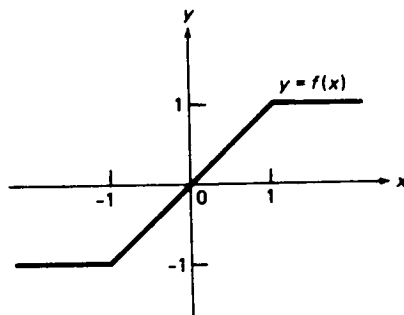
برای نمودار توابع  $f$  زیر فرمول ساده ای بر حسب قدر مطلق بیابید.

۲۶. شکل ۵۶

۲۵. شکل ۵۵



شکل ۵۶



شکل ۵۵

زوج یا فرد (یا هیچکدام) بودن تابع داده شده را مشخص کنید.

$$f(x) = \cos(\sin x) \quad . ۲۸$$

$$f(x) = \sin(\sin x) \quad . ۲۷$$

$$f(x) = [x] \quad . ۳۰$$

$$f(x) = \tan(\sec x) \quad . ۲۹$$

۳۱. چه تابع  $f$  ی هم زوج و هم فرد است؟

۳۲. نشان دهید که نمودار تابع ناصغر  $f$  نمی تواند نسبت به محور  $x$  متقارن باشد.

۳۳. دو خط ماربر مبداء بیابید که با خط  $3x - 2y + 6 = 0$  زاویه  $45^\circ$  بسازند.

۳۴. نشان دهید که هر یک از معادلات  $\sin x = \cos x$ ،  $\tan x = \cot x$  و  $\sec x = \csc x$  بی نهایت جواب دارد.

۳۵. دوره تناوب اساسی تابع  $|\sin x| + |\cos x|$  را تعیین کنید.

۳۶. نشان دهید که تابع  $f(x) = x - [x]$  متناوب، با دوره تناوب اساسی ۱، است، و نمودار آن را رسم کنید. ناپیوستگیهای  $f$  را بیابید.

۳۷. اگر  $f + g$  و  $f$  در  $a$  حد داشته باشند، آیا  $g$  نیز چنین است؟ اگر  $f + g$  در  $a$  حد داشته باشد، آیا  $f$  و  $g$  نیز چنین اند؟

۳۸. اگر  $fg$  و  $f$  در  $a$  حد داشته باشند، آیا  $g$  نیز چنین است؟ اگر  $fg$  در  $a$  حد داشته باشد، آیا  $f$  و  $g$  نیز چنین اند؟

(0)  $f$  چه باید باشد تا تابع داده شده در  $x = 0$  پیوسته گردد؟

$$f(x) = \frac{5x^2 - 3x}{2x} \quad . ۴۰$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x} \quad . ۳۹$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases} \quad . ۴۱$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2}, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases} \quad . ۴۲$$

مقادیر زیر را بیابید.

$$[(2.05)^4] \quad . ۴۴$$

$$[n - \frac{1}{2}] \quad (n \text{ یک عدد صحیح}) \quad . ۴۳$$

$$[(-0.9)^{90}] \quad . ۴۶$$

$$[\pi - \sqrt{10}] \quad . ۴۵$$

۴۷. آیا درست است که  $||x| \equiv |[x]|$ ؟

به فرض آنکه

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

تمام ناپیوستگیهای توابع مرکب  $f \circ g$  و  $g \circ f$  را در صورتی بیابید که

$$g(x) = 1 + x^2 \quad \cdot ۴۸$$

$$g(x) = x(1 - x^2) \quad \cdot ۴۹$$

$$g(x) = x - [x] \quad \cdot ۵۰$$

حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^{99} + x^{49} + 1) \quad \cdot ۵۲$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^{100} + x^{50} + 1) \quad \cdot ۵۱$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x^2 + 10x - 39}{x - 3}} \quad \cdot ۵۴$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^3 + 4x + 12}{x^4 - 3x + 4} \quad \cdot ۵۳$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}} \quad \cdot ۵۶$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)^{10}}{(x^2 - 2x + 1)^5} \quad \cdot ۵۵$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^5 - 2x - 1} \quad \cdot ۵۸$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} \quad \cdot ۵۷$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt[3]{x}} \quad \cdot ۵۹$$

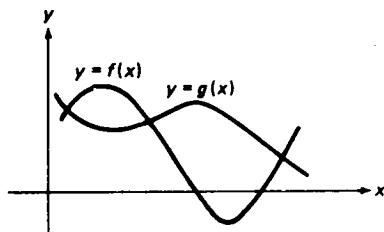
$$(m, n \text{ اعداد صحیح مثبت}) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} \quad \cdot ۶۰$$

راهنمایی. بنابر قضیه عاملی (ثابت شده در صفحه ۶۴۰)، چندجمله‌ای  $Q(x)$  بر عامل خطی  $x - c$  بخشپذیر است اگر و فقط اگر  $Q(c) = 0$ . این مطلب در حل مسائل ۵۶ تا ۵۸ مفید خواهد بود.

۶۱. نشان دهید هرگاه توابع  $f$  و  $g$  همه‌جا پیوسته باشند، آنگاه توابع  $M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$  و

$m(x) = \min\{f(x), g(x)\}$  نیز چنین‌اند. [شکلهای ۵۷ (ب) و ۵۷ (پ)  $M(x)$  و  $m(x)$ ]

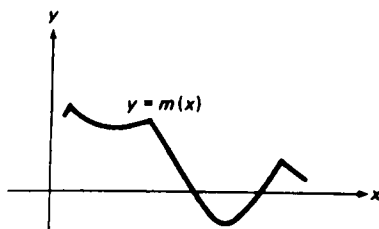
توابع  $f$  و  $g$  شکل ۵۷ (ت) را نشان می‌دهند. ]



دو تابع

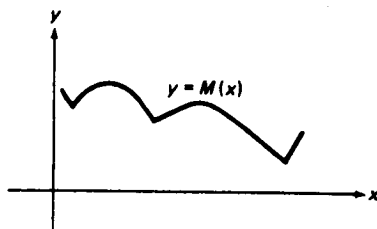
(ت)





مینیم آنها

(پ)



ماکزیم آنها

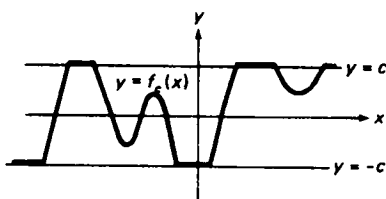
(ب)

شکل ۵۷

۶۲. با استفاده از مسئله قبل، نشان دهید هرگاه تابع  $f$  همه جا پیوسته باشد، آنگاه تابع "سنجاق شده"

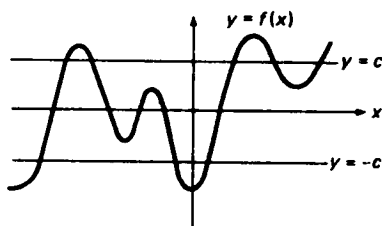
$$f_c(x) = \begin{cases} c & , f(x) > c \text{ اگر} \\ f(x) & , |f(x)| \leq c \text{ اگر} \\ -c & , f(x) < -c \text{ اگر} \end{cases}$$

نیز به ازای هر  $c > 0$  چنین است. [ شکل ۵۸ (ب) شکل سنجاق شده تابع  $f$  را که نمودارش در شکل ۵۸ (آ) رسم شده است نشان می دهد. ]



بعد از "سنجاق شدن"

(ب)



پیش از "سنجاق شدن"

(آ)

شکل ۵۸

۶۳. نشان دهید که همواره بین هر دو عدد حقیقی متمایز می توان عددی گویا و عددی گنگ یافت؛ و در واقع، بی نهایت از این اعداد وجود دارند.

۶۴. با استفاده از مسئله قبل نشان دهید که تابع

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \text{ گویاست} \\ 0 & , x \text{ گنگ است} \end{cases}$$

در هر نقطه،  $a$  حد ندارد؛ و در نتیجه، همه جا ناپیوسته است.

فرض کنید  $f(x)$  همان تابع مسئله ۶۴ باشد. در رفتار حدی تابع زیر (در هر نقطه) بحث کنید.

$$x f(x) \quad ۰۶۵ \quad |x| f(x) \quad ۰۶۶$$

$$\frac{|x|}{x} f(x) \quad ۰۶۷ \quad f(x) \sin x \quad ۰۶۸$$

۶۹. اعداد دلخواه  $a$ ،  $b$ ، و  $c$  داده شده اند و  $a \neq 0$ ، نشان دهید که معادله  $ax + b \sin x = c$  همیشه جواب دارد.

۷۰. نشان دهید که معادله  $\cot \pi x = x$  در هر بازه  $I_n = (n, n+1)$ ، که در آن  $n$  صحیح و دلخواه است، درست یک ریشه مانند  $r_n$  دارد. با استفاده از روش تنصیف،  $r_0$ ،  $r_1$ ، و  $r_2$  را به میزان  $\frac{1}{32}$  تخمین بزنید.

## مشتقات<sup>۲</sup>

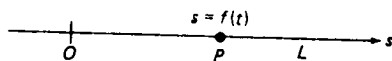
مفهوم میزان تغییر یک متغیر نسبت به متغیر دیگر در علوم طبیعی و در علوم اجتماعی کمی راه یافته است. مفهوم ریاضی نظیر میزان تغییر نوع خاصی حد است که مشتق نام دارد. حال به بررسی مشروح مشتقات پرداخته، نظریهٔ اساسی را با کاربردهای متنوعی به هم می‌آمیزیم. از جمله کاربردهای مهم استفاده از مشتق در تعریف سرعت لحظه‌ای ذره‌ای است که حرکت مستقیم الخط دارد (ر.ک. بخش ۱.۲)، و استفاده از مشتق دریافتن خط مماس بر یک منحنی به شکل کلی می‌باشد (ر.ک. بخش ۲.۲).

### ۱.۲ سرعت و میزانهای تغییر؛ مفهوم مشتق

منظور از ذره یعنی جسمی که اندازه‌اش در یک مسئله قابل اغماض است؛ و لذا، می‌توان آن را یک نقطه تصور کرد. مثلاً، یک الکترون، یک اتومبیل، یا یک سیاره را می‌توان، بسته به موقعیت، یک ذره گرفت. حرکت ذره،  $P$  در امتداد خط مستقیم  $L$  را در نظر گرفته، فرض می‌کنیم  $s$  موضع آن، یعنی مختص آن بر  $L$ ، باشد. (فرض است که خط  $L$ ، که می‌توان آن را محور  $s$  گرفت، دارای مبدأ  $O$ ، جهت مثبت، و واحد طول می‌باشد.) فرض کنیم موضع ذره در لحظه  $t$  با تابع موضع

$$s = f(t)$$

مشخص شود (ر.ک. شکل ۱) شهوداً واضح است که ذره در هر لحظه  $t$  دارای سرعت



شکل ۱

$v = v(t)$  است، که خود تابعی از  $t$  می‌باشد. اما این سرعت چطور باید تعریف شود؟

سرعت متوسط. برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا سرعت متوسط  $v_{av}$  ی ذره بین دو لحظه  $t$  و  $u$  را به صورت خارج قسمت

$$(1) \quad v_{av} = \frac{f(u) - f(t)}{u - t}$$

تعریف می‌کنیم. مخرج (۱) تغییر زمانی متغیر مستقل ضمن رفتن از مقدار "قدیم"  $t$  به مقدار "جدید"  $u$  است، و صورت  $f(u) - f(t)$  تغییر نظیر در موضع ذره، یعنی متغیر وابسته، ضمن رفتن از مقدار قدیم  $f(t)$  به مقدار جدید  $f(u)$  می‌باشد. شایسته است نمادهای خاصی برای این تغییرات یا تفاضلات وضع شود. مثلاً، می‌نویسیم

$$\Delta t = u - t, \quad \Delta s = f(u) - f(t),$$

که در آن باید عبارت  $\Delta t$  و  $\Delta s$  را، که "دلتای  $t$ " و "دلتای  $s$ " خوانده می‌شوند، موجودات واحدی تلقی کرد تا حاصل ضربهایی از علائم  $\Delta$  و  $t$ ، یا  $\Delta$  و  $s$ . همچنین،  $\Delta t$  را نمو  $t$  و  $\Delta s$  را نمو  $s$  می‌نامیم. توجه کنید که

$$u = t + \Delta t, \quad f(u) = f(t + \Delta t),$$

و لذا،

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t).$$

عبارت سرعت متوسط (۱) نسبت به نموهای  $\Delta t$  و  $\Delta s$  شکل زیر را به خود می‌گیرد:

$$v_{av} = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

یا، معادلاً،

$$(2) \quad v_{av} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

سرعت لحظه‌ای. تا اینجا خوب پیش رفته‌ایم. ولی هنوز پای بند آنیم که عبارت (۲) به  $\Delta t$  وابسته است؛ و در نتیجه، با ایده شهودی ما از سرعت لحظه‌ای در زمان  $t$ ، یعنی کمیتی که می‌خواهیم دقیقاً تعریف کنیم، متفاوت است. درک شهودی می‌گوید که سرعت لحظه‌ای  $v(t)$  نتیجه محاسبه سرعت متوسط  $v_{av}$  در "زمان متوسط" به قدر کافی کوچک  $|\Delta t|$  است. در فرمول سرعت متوسط (۲) نمی‌توان  $\Delta t$  را ۰ گرفت، زیرا با این کار فرمول (۲) به صورت مبهم  $0/0$  درمی‌آید. اما می‌توان  $\Delta t$  را به ۰ نزدیک کرد. لذا، برای یک ذره با تابع موضع  $s = f(t)$ ، به تعریف سرعت متوسط (یا فقط سرعت) در لحظه  $t$  به صورت حد

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{av} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

می‌رسیم؛ یعنی،

$$(۳) \quad v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

همچنین، (۳) را می‌توان به شکل معادل زیر نوشت:

$$(۳') \quad v(t) = \lim_{u \rightarrow t} \frac{f(u) - f(t)}{u - t}.$$

هر یک از حدود (۳) و (۳') طریقه‌ای برای بیان میزان تغییر تابع  $f$  نسبت به  $t$  است. لذا، می‌توان این بحث را خلاصه کرد و گفت که سرعت یک ذره متحرک میزان تغییر موضع ذره نسبت به زمان است.

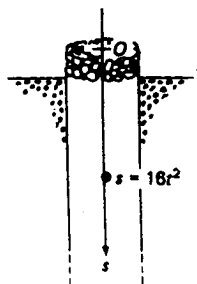
تبصره. سرعت کمیتی علامتدار است، و اغلب قدرمطلق آن را تنـسـیدی می‌نامند. طبق یک داستان جعلی، راننده‌ای که در جهت مخالف یک خیابان یکطرفه می‌رفته به خاطر "نقض سرعت" توقیف شده است. دلایلش را توضیح دهید.

مثال ۱. سنگی را در چاه عمیقی می‌اندازیم. سرعتش  $t$  ثانیه پس از افتادن چیست؟ سه دوم ثانیه پس از افتادن چیست؟

حل. همانند مثال ۶، صفحه ۶۹، موضع سنگ در لحظه  $t$  عبارت است از

$$s = 16t^2,$$

که در آن  $t$  به ثانیه و  $s$  به فوت و به طور قائم از سر چاه به پایین است (ر.ک. شکل ۲).



شکل ۲

لذا، طبق رابطه (۳) به ازای  $f(t) = 16t^2$ ، سرعت لحظه‌ای سنگ در زمان  $t$  عبارت است از

$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{16(t + \Delta t)^2 - 16t^2}{\Delta t} = 16 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} \\ &= 16 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2t\Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t} = 16 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (2t + \Delta t) = 16(2t) = 32t. \end{aligned}$$

بخصوص، 1.5 ثانیه پس از رها شدن، سرعت سنگ عبارت است از 48 فوت بر ثانیه  $= 32(1.5)$  (و به طور فشرده‌تر، 48 ft/sec). به صورت دیگر، بنابر (۳)،

$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{u \rightarrow t} \frac{16u^2 - 16t^2}{u - t} = 16 \lim_{u \rightarrow t} \frac{(u + t)(u - t)}{u - t} \\ &= 16 \lim_{u \rightarrow t} (u + t) = 16(2t) = 32t. \end{aligned}$$

شتاب. فرض کنید بخواهیم میزان تغییر تابع سرعت  $v(t)$  را، که خود یک میزان تغییر است، نسبت به زمان حساب کنیم. با این کار تابع جدید

$$(۴) \quad a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t},$$

به نام شتاب، به دست می‌آید. شتاب منفی را اغلب با شتاب می‌نامند.

مثال ۲. از فرمول (۴) و مثال قبل معلوم می‌شود که شتاب یک سنگ افتان عبارت است از

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{32(t + \Delta t) - 32t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{32\Delta t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 32 = 32,$$

یعنی، شتاب در این حالت دارای مقدار ثابت 32 فوت بر ثانیه بر ثانیه (به طور فشرده‌تر،  $32 \text{ ft/sec}^2$ ) است. شتاب یک شیء افتان، که با  $g$  نموده می‌شود، ناشی از جاذبهٔ ثقلی زمین است. در واقع،  $g$  با موقعیت جغرافیایی تغییر می‌کند، ولی  $g \approx 32 \text{ ft/sec}^2$  تقریب مناسبی می‌باشد. در دستگاه متری،  $g \approx 9.8 \text{ meters/sec}^2$ .

چگالی متوسط و دقیق. مسئلهٔ فیزیکی کاملاً "متفاوت دیگری وجود دارد که در آن ایدهٔ میزان تغییر ظاهر می‌شود. این بار، به جای موضع یا سرعت نسبت به زمان، جرم نسبت به فاصله تغییر می‌کند. میلهٔ فلزی غیرهمگن و نازک  $AB$  را در نظر می‌گیریم، و آن را در

امتداد محور  $x$  مثبت به مبدا در  $A$  قرار می‌دهیم (ر.ک. شکل ۳). فرض کنیم جرم  $m$



شکل ۳

قطعه‌ای از میله که بین  $A$  و نقطه  $x$  است با تابع جرم

$$m = f(x)$$

داده شده باشد. شهوداً واضح است که میله در هر نقطه  $x$  دارای چگالی  $d(x)$  است، که خود تابعی از  $x$  می‌باشد. اما این چگالی را چطور تعریف کنیم؟

برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا چگالی متوسط  $d_{av}$  قطعه‌ای از میله با نقاط انتهایی  $x$  و  $x + \Delta x$  را خارج قسمت جرم  $\Delta m$  این قطعه بر طولش تعریف می‌کنیم:

$$d_{av} = \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

(چرا این فرمول در صورت  $\Delta x < 0$  نیز کار می‌کند؟) درک شهودی می‌گوید که چگالی دقیق  $d(x)$  حاصل محاسبه چگالی متوسط  $d_{av}$  به ازای "طول متوسط" بدخواه کوچک  $|\Delta x|$  است. با آنکه در فرمول  $d_{av}$  نمی‌توان  $\Delta x = 0$  قرار داد، زیرا صورت مبهم  $0/0$  حاصل می‌شود، می‌توان  $\Delta x$  را به 0 نزدیک ساخت. لذا، به تعریف چگالی دقیق، یا فقط چگالی، میله در نقطه  $x$  به صورت حد

$$d(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} d_{av} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta x}$$

می‌رسیم؛ یعنی،

$$d(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

با جانشانی  $u = x + \Delta x$ ، می‌توان  $d(x)$  را به شکل معادل زیر نوشت:

$$d(x) = \lim_{u \rightarrow x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x}.$$

تشابه بین این فرمولها برای چگالی  $d(x)$  و فرمولهای (۳) و (۳') برای سرعت  $v(t)$  کامل است، اگرچه سرعت و چگالی از دیدگاه فیزیک مفاهیم کاملاً متفاوتی می‌باشند. آنچه در آن سهیمند این است که هر دو به نوع خاصی از حد مسخر می‌شوند که در حساب دیفرانسیل و انتگرال به مشتق معروف است. این ما را به بررسی مشتق وامی‌دارد، کاری که هم اکنون بدان خواهیم پرداخت.

تعریف مشتق. فرض کنیم تابع  $f$  در همسایگی نقطه  $x$  تعریف شده باشد. منظور از مشتق  $f$  در  $x$ ، که با  $f'(x)$  نموده می‌شود، یعنی حد

$$(۵) \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

مشروط بر آنکه موجود باشد، یا معادلاً

$$(۵') \quad f'(x) = \lim_{u \rightarrow x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x}$$

(قرار می‌دهیم  $u = x + \Delta x$ ). اگر  $f$  در  $x$  مشتق داشته باشد، نیز گوئیم  $f$  در  $x$  مشتقپذیر است.

باید به یاد داشت که در محاسبه حد (۵) یا (۵')  $x$  را ثابت می‌گیریم؛ در نتیجه، در (۵) فقط  $\Delta x$  و در (۵') فقط  $u$  تغییر می‌کند. لذا، مشتق به ازای هر مقدار ثابت  $x$  یک عدد است که با  $f'(x)$  نموده می‌شود. با اینحال، همانطور که از نماد برمی‌آید، طبیعی است که عدد  $f'(x)$  را مقدار تابع جدید  $f'$  (که به جای مشتق  $f$  در  $x$  فقط مشتق  $f$  نام دارد) در نظر بگیریم. همواره از قراین روشن است که مشتق به چه مفهومی گرفته شده است، یک عدد با  $x$  ثابت یا تابعی با  $x$  متغیر.

عمل مشتقگیری. عملی که ما را از تابع  $f$  به مشتقش  $f'$  می‌رساند مشتقگیری نسبت به متغیر مستقل نام دارد. این عمل را با علامت  $D$  نشان می‌دهیم که جلو تابع مشتقگیری شده نوشته می‌شود و متغیر مستقل به عنوان زیرنویس  $D$  می‌آید. لذا،  $D_x$  مشتقگیری نسبت به  $x$ ،  $D_t$  مشتقگیری نسبت به  $t$ ، و از این قبیل را نشان می‌دهد. عبارت

$$(۶) \quad \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

یا، معادلاً،

$$(۶') \quad \frac{f(u) - f(x)}{u - x},$$

که  $f'(x)$  حد آن وقتی  $\Delta x \rightarrow 0$  یا وقتی  $u \rightarrow x$  است، خارج قسمت تفاضلی نام دارد. صورت (۶) یا (۶') نمو تابع  $f$  در نقطه  $x$  نام دارد و با  $\Delta f(x)$  نموده می‌شود. لذا،

$$(۷) \quad \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = f(u) - f(x),$$

که در آن، مثل همیشه در نموها،  $\Delta f$  موجود واحدی تلفی شده (و خوانده می‌شود "دلتای



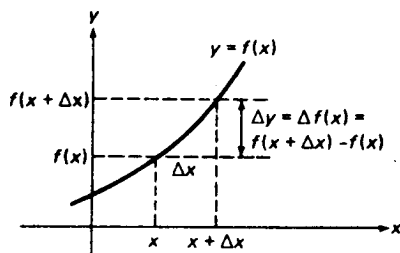
" $f$ " نه به صورت حاصل ضربی از عوامل جداگانه  $\Delta$  و  $f$ .  $\Delta f(x)$  طبعاً نه فقط تابع نقطه  $x$  است بلکه تابع  $\Delta x$ ، یعنی نمو متغیر مستقل، یا تابع  $u$ ، یعنی مقدار جدید متغیر مستقل، نیز هست ولی ما این نکته را صریحاً ذکر نمی‌کنیم.

خواهید دید که خارج قسمت تفاضلی (۶) یا (۶') به ازای  $\Delta x = 0$  یا  $u = x$  به صورت مبهم  $0/0$  درمی‌آید. لذا، مسئله حل صور مبهم به شکل  $0/0$ ، جدا از اینکه صرفاً یک مسئله تکنیکی است، در قلب حساب دیفرانسیل جا دارد!

اغلب شایسته است یک متغیر وابسته معرفی شود. اگر مثلاً " $y = f(x)$ "، می‌توان مشتق  $D_x f(x)$  یا  $f'(x)$  را با  $D_x y$  یا فقط  $y'$  نشان داد. با این نماد،

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

که در آن  $\Delta y$ ، یعنی نمو  $y$ ، نام دیگری است برای کمیت (۷). تعبیر هندسی  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$  در شکل ۴ نموده شده است.



شکل ۴

مثال ۳. نمو  $\Delta y$  و خارج قسمت تفاضلی  $\Delta y / \Delta x$  را برای تابع  $y = f(x) = x^5$  در صورتی بیاید که  $x = 2$  و  $\Delta x = 0.1$ .

حل. به ازای مقادیر داده شده  $x$  و  $\Delta x$ ، داریم

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = f(2.1) - f(2) \\ &= (2.1)^5 - 2^5 = 40.84101 - 32 = 8.84101, \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{8.84101}{0.1} = 88.4101. \end{aligned}$$

قواعد مشتقگیری. حال برای محاسبه مشتق چند قاعده ساده به دست می‌آوریم. این ما

را به پویش و امی دارد ، و در بخشهای بعد قواعد دیگری عرضه خواهند شد .  
( یک ) مشتق تابع ثابت  $f(x) \equiv c$  صفر است . در واقع ،

$$D_x f(x) = D_x c = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0,$$

یا ، به صورت دیگر ،

$$D_x c = \lim_{u \rightarrow x} \frac{c - c}{u - x} = \lim_{u \rightarrow x} \frac{0}{u - x} = 0,$$

در نتیجه ،

$$D_x c = 0.$$

( دو ) هرگاه  $c$  ثابت دلخواهی باشد ، آنگاه

$$D_x cf(x) = c D_x f(x).$$

به عبارت دیگر ، مشتق حاصل ضرب یک ثابت در یک تابع مساوی حاصل ضرب آن ثابت در مشتق آن تابع است . برهان فورا " نتیجه می شود .

$$\begin{aligned} D_x cf(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{cf(x + \Delta x) - cf(x)}{\Delta x} \\ &= c \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = c D_x f(x). \end{aligned}$$

به بیان دیگر ،

$$D_x cf(x) = \lim_{u \rightarrow x} \frac{cf(u) - cf(x)}{u - x} = c \lim_{u \rightarrow x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} = c D_x f(x).$$

( سه ) مشتق  $x$  متحد 1 است . در واقع ،

$$D_x x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1,$$

یا ، به صورت دیگر ،

$$D_x x = \lim_{u \rightarrow x} \frac{u - x}{u - x} = \lim_{u \rightarrow x} 1 = 1,$$

در نتیجه ،

$$D_x x = 1.$$

( چهار ) توابع  $x^2$  و  $x^3$  به ترتیب دارای مشتقات  $2x$  و  $3x^2$  اند . برای تحقیق این امر ،

محاسبات سراسر زیر را انجام می‌دهیم:

$$D_x x^2 = \lim_{u \rightarrow x} \frac{u^2 - x^2}{u - x} = \lim_{u \rightarrow x} (u + x) = x + x = 2x,$$

$$D_x x^3 = \lim_{u \rightarrow x} \frac{u^3 - x^3}{u - x} = \lim_{u \rightarrow x} (u^2 + ux + x^2) = x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2.$$

( به یاد داشته باشید که  $x$  در محاسبه این حدود ثابت است. ) لذا ،

$$D_x x^2 = 2x,$$

$$D_x x^3 = 3x^2.$$

( پنج ) به طور کلی ، مشتق تابع  $x^n$  ، که در آن  $n$  عدد صحیح مثبتی است ، از فرمول زیر به دست می‌آید :

$$(۸) \quad D_x x^n = nx^{n-1}$$

توجه کنید که اگر به نوبت قرار دهیم  $n = 1, 2, 3$  ، فرمول (۸) به قواعد (سه) و (چهار) تحویل می‌شود . برای اثبات فرمول (۸) به ازای عدد صحیح مثبت دلخواه  $n$  ، ملاحظه می‌کنیم که ، به کمک قضیه دوجمله‌ای (ر.ک. مثال ۵ ، صفحه ۳۶۴ ، یا هر کتاب جبر) ،

$$\begin{aligned} D_x x^n &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[ x^n + nx^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n - x^n \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1} \right]. \end{aligned}$$

بنابراین ،

$$D_x x^n = nx^{n-1} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1} \right],$$

که در آن جملات ذکر نشده‌ای که با نقطه نموده شده‌اند همه شامل  $\Delta x$  به توانی بزرگتر از ۱ هستند . از اینرو ، آخرین حد مساوی ۰ است و (۸) ثابت می‌شود . به بیان دیگر ، اگر طرز تقسیم  $u^n - x^n$  بر  $u - x$  را به یاد آورید ،

$$D_x x^n = \lim_{u \rightarrow x} \frac{u^n - x^n}{u - x} = \lim_{u \rightarrow x} \underbrace{(u^{n-1} + u^{n-2}x + \cdots + ux^{n-2} + x^{n-1})}_{\text{جمله } n},$$

که فوراً " (۸) را ایجاب می‌کند ، زیرا هر یک از  $n$  جمله وقتی  $u \rightarrow x$  به حد  $x^{n-1}$  نزدیک

می شود .

(شش) مشتق تابع  $\sqrt{x}$  از فرمول زیر به دست می آید :

$$D_x \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

این فرمول از محاسبات زیر به دست می آید :

$$D_x \sqrt{x} = \lim_{u \rightarrow x} \frac{\sqrt{u} - \sqrt{x}}{u - x} = \lim_{u \rightarrow x} \frac{\sqrt{u} - \sqrt{x}}{(\sqrt{u} + \sqrt{x})(\sqrt{u} - \sqrt{x})} = \lim_{u \rightarrow x} \frac{1}{\sqrt{u} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

که در آن از پیوستگی  $\sqrt{x}$  ، که در مثال ۲ صفحه ۱۴۲ ثابت شد ، استفاده می کنیم .

(هفت) مشتق توابع  $\sin x$  و  $\cos x$  از فرمولهای زیر به دست می آیند :

$$(۹) \quad D_x \sin x = \cos x$$

و

$$(۹') \quad D_x \cos x = -\sin x.$$

برای اثبات (۹) ، در فرمول (۱۵) صفحه ۹۶ قرار می دهیم  $\alpha = u, \beta = x$  ، خواهیم داشت

$$(۱۰) \quad \sin u - \sin x = 2 \cos \frac{u+x}{2} \sin \frac{u-x}{2}.$$

بنابراین ،

$$\begin{aligned} D_x \sin x &= \lim_{u \rightarrow x} \frac{\sin u - \sin x}{u - x} = \lim_{u \rightarrow x} \cos \frac{u+x}{2} \lim_{u \rightarrow x} \frac{\sin \frac{u-x}{2}}{\frac{u-x}{2}} \\ &= \lim_{u \rightarrow x} \cos \frac{u+x}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}, \end{aligned}$$

که در آن  $t = (u-x)/2$  . پس نتیجه می شود که

$$D_x \sin x = \left( \cos \frac{x+x}{2} \right) \cdot 1 = \cos x,$$

که در آن از پیوستگی تابع کسینوس و اینکه وقتی  $t \rightarrow 0$  ،  $(\sin t)/t \rightarrow 1$  استفاده می کنیم .

برای اثبات (۹') ، در فرمول (۱۰) را با  $u + (\pi/2)$  و  $x + (\pi/2)$  عوض می کنیم . خواهیم داشت

$$\sin \left( u + \frac{\pi}{2} \right) - \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right) = 2 \cos \left( \frac{u+x}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \sin \frac{u-x}{2},$$

یا، معادلاً،

$$\cos u - \cos x = -2 \sin \frac{u+x}{2} \sin \frac{u-x}{2},$$

در نتیجه،

$$D_x \cos x = \lim_{u \rightarrow x} \frac{\cos u - \cos x}{u - x} = -\lim_{u \rightarrow x} \sin \frac{u+x}{2} \lim_{u \rightarrow x} \frac{\sin \frac{u-x}{2}}{\frac{u-x}{2}} = -\sin x.$$

لازم است همه این قواعد و نیز قضیه زیر را یاد بگیرید، که می‌گوید مشتق مجموع دو تابع را می‌توان با مشتقگیری جمله به جمله از مجموع حساب کرد.

قضیه ۱ (مشتق مجموع دو تابع). هرگاه  $f$  و  $g$  در  $x$  مشتق‌پذیر باشند، آنگاه مجموع  $f + g$  نیز چنین است و

$$(11) \quad D_x(f + g) = D_x f + D_x g.$$

برهان. برای ساده بودن نمادها، در فرمول (۱۱) شناسه‌های  $f$  و  $g$  حذف شده‌اند. برهان نتیجه فوری این امر است که حد مجموع حدود جملات می‌باشد:

$$\begin{aligned} D_x(f + g) &= \lim_{u \rightarrow x} \frac{f(u) + g(u) - [f(x) + g(x)]}{u - x} \\ &= \lim_{u \rightarrow x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} + \lim_{u \rightarrow x} \frac{g(u) - g(x)}{u - x} = D_x f + D_x g. \end{aligned}$$

نتیجه. هرگاه  $f_1, f_2, \dots, f_n$  در  $x$  مشتق‌پذیر باشند، آنگاه مجموع جبری  $f_1 \pm f_2 \pm \dots \pm f_n$  نیز چنین است و

$$(11) \quad D_x(f_1 \pm f_2 \pm \dots \pm f_n) = D_x f_1 \pm D_x f_2 \pm \dots \pm D_x f_n.$$

برهان. قضیه را چندبار به کار می‌بریم. برای سامان دادن علائم منها، از  $D_x(-f) = -D_x f$  استفاده می‌کنیم، که از قاعده (دو) به ازای  $c = -1$  نتیجه می‌شود.

مثالهای زیر کاربرد قضیه ۱ و قواعد (یک) تا (هفت) می‌باشد.

مثال ۴. از  $7x^3 + 3x^2 - 5x + 8$  مشتق بگیرید.

حل. بنا بر نتیجه قضیه ۱ و قواعد (یک) تا (چهار)، داریم

$$\begin{aligned} D_x(7x^3 + 3x^2 - 5x + 8) &= D_x(7x^3) + D_x(3x^2) - D_x(5x) + D_x 8 \\ &= 7D_x x^3 + 3D_x x^2 - 5D_x x + 0 \\ &= 7(3x^2) + 3(2x) - 5(1) = 21x^2 + 6x - 5. \end{aligned}$$

پس از تسلط بر قواعد مشتگیری، نوشتن تمام مراحل محاسبات از این نوع لازم نیست.

مثال ۵. از  $2\sqrt{x} - \frac{1}{3} \sin x$  مشتق بگیرید.

حل. بنا بر قواعد (شش) و (هفت)،

$$D_x\left(2\sqrt{x} - \frac{1}{3} \sin x\right) = 2D_x \sqrt{x} - \frac{1}{3} D_x \sin x = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{3} \cos x.$$

از چه قواعد دیگر استفاده شده است؟

مثال ۶. از تابع چندجمله‌ای کلی

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n,$$

که در آن  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  ثابت‌اند، مشتق بگیرید.

حل. فرض کنیم  $a_n \neq 0$ ؛ در نتیجه،  $P(x)$  از درجه  $n$  است. اگر  $n = 0$ ،  $P(x)$  مساوی ثابت  $a_0$  است و مشتق  $P(x)$  متحد صفر می‌باشد. هرگاه  $n \geq 1$ ، آنگاه، با چند بار استفاده از فرمول (۸) در قاعده (پنج)،

$$\begin{aligned} P'(x) &= D_x P(x) = D_x a_0 + a_1 D_x x + a_2 D_x x^2 + a_3 D_x x^3 + \cdots + a_n D_x x^n \\ &= 0 + a_1(1) + a_2(2x) + a_3(3x^2) + \cdots + a_n(nx^{n-1}) \\ &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1}, \end{aligned}$$

که یک چندجمله‌ای از درجه  $n-1$  است، زیرا  $na_n \neq 0$ .

مثال ۷. موضع یک ذره متحرک در امتداد خطی مستقیم در لحظه  $t \geq 0$  عبارت است از  $s = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t$ . سرعت و شتاب ذره را در لحظه  $t$  بیابید. چه وقت جهت حرکت ذره تغییر می‌کند؟ چه وقت ذره به موضع اولیه خود باز می‌گردد؟

حل. سرعت ذره عبارت است از

$$v = D_t s = D_t \left( \frac{1}{3} t^3 - 2t^2 + 3t \right) = \frac{1}{3} D_t t^3 - 2D_t t^2 + 3D_t t$$

$$= \frac{1}{3} (3t^2) - 2(2t) + 3 = t^2 - 4t + 3,$$

و شتاب خواهد بود

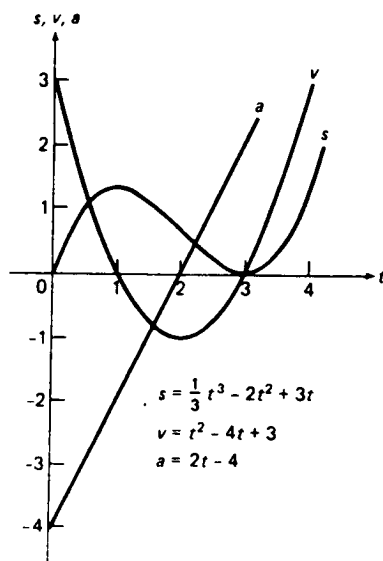
$$a = D_t v = D_t (t^2 - 4t + 3) = D_t t^2 - 4D_t t + D_t 3 = 2t - 4.$$

جهت حرکت ذره وقتی سرعتش  $v$  تغییر علامت می‌دهد تغییر می‌کند، و این زمانی صورت می‌گیرد که سرعت صفر است؛ یعنی، وقتی  $t = 1$  یا  $t = 3$ . در واقع، چون  $v = t^2 - 4t + 3 = (t-1)(t-3)$ ، به ازای  $0 \leq t < 1$  مثبت، به ازای  $t = 0$  صفر، به ازای  $1 < t < 3$  منفی، به ازای  $t = 3$  صفر، و محدداً "به ازای  $t > 3$  مثبت می‌باشد.

موضع اولیه ذره، یعنی موضع آن در  $t = 0$ ،  $s = 0$  است. چون

$$s = \frac{1}{3} t^3 - 2t^2 + 3t = \frac{1}{3} t(t^2 - 6t + 9) = \frac{1}{3} t(t-3)^2,$$

ذره در لحظه  $t = 3$  به موضع اولیه خود باز می‌گردد. شکل ۵ موضع، سرعت، و شتاب



شکل ۵

ذره را به صورت توابعی از زمان نشان داده، و تصویر مشروحی از حرکت ذره را می‌نمایاند.

مثال ۸. میزان تغییر بار الکتریکی نسبت به زمان شدت جریان نام دارد. فرض کنید در

زمان  $t$  ثانیه  $q = 2t^2 - 3t + 1$  کولن بار در یک سیم هادی جریان یابد. شدت جریان حاصل  $i$  را پس از 3 sec به آمپر (کولن برثانیه) بیابید. چه وقت جریان برمی گردد؟ اگر یک فیوز 15-amp در مدار باشد، چقدر کار خواهد کرد؟

حل. چون

$$i = D_t q = D_t(2t^2 - 3t + 1) = 4t - 3,$$

شدت جریان پس از 3 sec مساوی  $4(3) - 3 = 9$  amp است. جریان زمانی برمی گردد که  $i$  تغییر علامت دهد، و این وقتی رخ می دهد که  $i = 0$ ؛ یعنی، وقتی  $t = \frac{3}{4} = 0.75$  sec در واقع، چون  $i = 4(t - \frac{3}{4})$ ،  $i$  به ازای  $0 \leq t < \frac{3}{4}$  منفی، به ازای  $t = \frac{3}{4}$  صفر، و به ازای  $t > \frac{3}{4}$  مثبت است. فیوز وقتی می سوزد که  $i = 4t - 3 = 15$ ؛ یعنی، وقتی  $t = \frac{18}{4} = 4.5$  sec.

### مسائل

۱. موضع یک ذره متحرک در امتداد خطی مستقیم در لحظه  $t$  عبارت است از  $s = 10t + 5t^2$ ، که در آن  $s$  به فوت و  $t$  به ثانیه است. فرض کنید  $v_{av}(\Delta t)$  سرعت متوسط ذره بین لحظات  $t = 20$  و  $t = 20 + \Delta t$  باشد.  $v_{av}(\Delta t)$  را به ازای  $\Delta t = 1$ ،  $0.001$ ،  $0.01$ ،  $0.1$  حساب کنید. سرعت لحظه ای  $v$  ذره در لحظه  $t = 20$  چیست؟
  ۲. در حل مثالهای ۱ و ۲ در واقع دو مشتق حساب شده اند. آنها را مشخص کنید.
- نمو  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$  و خارج قسمت تفاضلی  $\Delta y / \Delta x$  را برای تابع  $f(x)$ ، نقطه  $x$ ، و نمو  $\Delta x$  پیدا نمایید.

۳.  $y = x^2$ ,  $x = 3$ ,  $\Delta x = 0.1$  ✓

۴.  $y = x^3$ ,  $x = -1$ ,  $\Delta x = -0.1$  ✓

۵.  $y = x^4$ ,  $x = 0$ ,  $\Delta x = -0.2$  ✓

۶.  $y = 1/x$ ,  $x = 2$ ,  $\Delta x = 2$  ✓

۷.  $y = 1/x^2$ ,  $x = 1$ ,  $\Delta x = -3$  ✓

۸.  $y = 1/x^3$ ,  $x = -2$ ,  $\Delta x = 1$  ✓

۹.  $y = \sqrt{x}$ ,  $x = 16$ ,  $\Delta x = -7$  ✓

۱۰.  $y = \sin x$ ,  $x = 0$ ,  $\Delta x = \pi/6$  ✓

۱۱.  $y = \cos x$ ,  $x = \pi/2$ ,  $\Delta x = \pi/4$  ✓

۱۲.  $y = \tan x$ ,  $x = \pi/4$ ,  $\Delta x = -\pi/2$  ✓



از توابع زیر مشتق بگیرید .

$$x^3 + x^2 + x + 1 \quad . ۱۳ ✓$$

$$2s^3 - 4s^2 + 8s - 16 \quad . ۱۴ ✓$$

$$-t^3 + 9t^2 + 5t \quad . ۱۵ ✓$$

$$4u^3 - 3u^2 - u + \pi \quad . ۱۶ ✓$$

$$(x+1)(x^2-x+1) \quad . ۱۷ ✓$$

$$(x-2)(x^2+2x+4) \quad . ۱۸ ✓$$

$$(x^2-4)(x+4) \quad . ۱۹ ✓$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x \quad . ۲۰ ✓$$

$$x^4 + 3x^2 - 6 \quad . ۲۱ ✓$$

$$x^5 - 2\sqrt{x} \quad . ۲۲ ✓$$

$$x^9 + x^6 + x^3 + 1 \quad . ۲۳ ✓$$

$$2x^{10} - 3x^7 + 5x^3 + 20 \quad . ۲۴ ✓$$

$$x^{100} - 2x^{50} + 25x \quad . ۲۵ ✓$$

$$3 \sin x - 4 \cos x \quad . ۲۶ ✓$$

$$s^4 - s^3 + 3s^2 + 8 \quad . ۲۷ ✓$$

$$10t^5 - 100t^4 + 1000t \quad . ۲۸ ✓$$

$$5u^7 - 7u^6 + 9u^5 - 11 \quad . ۲۹ ✓$$

$$8w^3 - 4\sqrt{w} + \cos w \quad . ۳۰ ✓$$

$$(x^2+3)(x^2-3) \quad . ۳۱ ✓$$

$$(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1) \quad . ۳۲ ✓$$

$$\text{حد} \quad . ۳۳ ✓$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}$$

را به صورت مشتق تعبیر کرده ، و آن را محاسبه نمایید .

۳۴ . موضع یک ذره متحرک در امتداد خطی مستقیم در لحظه  $t \geq 0$  با  $s = t^4 - 4t^3 + 4t^2$

داده شده است . سرعت  $v$  و شتاب  $a$  ذره در لحظه  $t$  را بیابید . جهت حرکت

ذره چه وقت تغییر می کند ؟ ذره چه وقت به موضع اولیه اش باز می گردد ؟

۳۵ . ارتفاع بالای موضع اولیه سنگی که با سرعت اولیه  $v_0 = 96 \text{ ft/sec}$  به طور قائم به بالا

پرتاب شده عبارت است از  $s = v_0 t - 16t^2$  ، که در آن  $s$  به فوت و  $t$  به ثانیه است

( این در مثال ۳، صفحه ۴۲۸، نموده شده است ) . فرض کنید  $v_0 = 96 \text{ ft/sec}$

چه وقت سنگ صعودش متوقف شده و شروع به نزول می‌کند؟ ارتفاع ماکزیمم سنگ

چقدر است؟ شتاب آن چقدر است؟

۳۶. یک سنگ توسط شخصی که در لبه بام به فاصله 48 ft از زمین ایستاده با سرعت

اولیه  $32 \text{ ft/sec}$  به طور قائم به بالا پرتاب شده است. اگر سنگ هنگام فرود به بام

نخورد، چه وقت به زمین می‌خورد؟ سرعتش هنگام برخورد چقدر است؟

۳۷. در مسئله قبل، ارتفاع بام چقدر باشد تا سنگ چهار ثانیه بعد؛ پنج ثانیه بعد به

زمین بخورد؟

۳۸. موضع اتومبیلی  $t$  ثانیه پس از شروع حرکت  $s = \frac{1}{2}kt^2$  است، که در آن  $s$  به فوت

و  $t$  به ثانیه است. ثابت  $k$  را تعبیر کرده، و مقدارش را در صورتی بیابید که در 10

ثانیه به سرعت 60 mph (میل بر ساعت) برسد. آیا فرمول  $s = \frac{1}{2}kt^2$  حرکت

اتومبیل را به ازای  $t$  ی بزرگ توصیف می‌کند؟

۳۹. فرض کنید  $q = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + t$  کولن بار در  $t$  ثانیه در یک سیم هادی شارش یابد.

شدت جریان  $i$  را 4 sec بعد بیابید. آیا جریان برمی‌گردد؟ اگر یک فیوز 25-amp

در مسیر جریان باشد، چقدر عمر خواهد کرد؟

۴۰. میله فلزی غیرهمگن نازک  $AB$  به طول 6 متر است. جرم 2 متر اول میله با شروع از

$A$  مساوی 1 کیلوگرم است. فرض کنید جرم قطعه  $AP$  از میله با مکعب فاصله  $A$  تا

$P$  متناسب باشد. چگالی میله در نقطه میانی چقدر است؟ چگالی متوسط تمام میله

چقدر است؟ چگالی متوسط یکسوم میانی میله چقدر است؟

۴۱. نشان دهید که

$$\lim_{u \rightarrow x} \frac{uf(x) - xf(u)}{u - x} = f(x) - xf'(x).$$

۴۲. فرض کنید  $f(x) = (x-a)g(x)$ ، که در آن تابع  $g$  در  $f$  پیوسته است. نشان دهید مشتق

$f$  در  $a$  مساوی  $g(a)$  است.

مشتق تابع داده شده را با محاسبه مستقیم حد معرف مشتق پیدا کنید.

$$f(x) = 1/x^2 \quad . 44$$

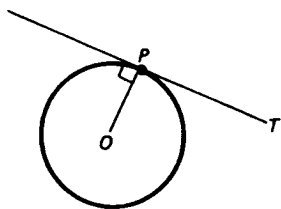
$$f(x) = 1/x \quad . 43$$

$$f(x) = 1/(x^2 + 1) \quad . 45$$

## ۲۰۲ خط مماس بر منحنی

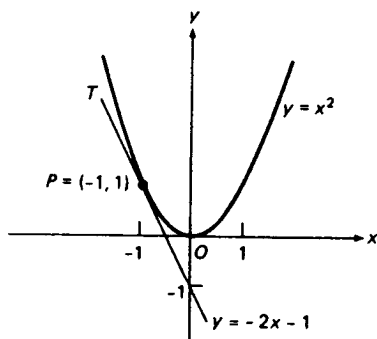
حال، با استفاده از مشتق، مسئله هندسی مهم یافتن خط مماس، یا فقط مماس، بر یک

منحنی به شکل کلی را حل می‌کنیم. مسئله یافتن مماس بر یک منحنی از مسئله تعریف مماس جدا نیست. فرض کنیم منحنی  $C$  یک دایره بوده، و  $P$  نقطه‌ای از  $C$  باشد. بنا بر هندسه مقدماتی، مماس بر  $C$  در  $P$  عبارت است از (یک) خطی که  $C$  را در نقطه  $P$  و فقط این نقطه قطع می‌کند، یا (دو) خط ماربر  $P$  و عمود بر شعاعی از  $C$  که از  $P$  می‌گذرد. این خط  $T$  است که در شکل ۶ نموده شده است. تعریف (دو)، مستلزم شعاع، همتایی در



شکل ۶

منحنیهای دلخواه ندارد، و تعریف (یک) نیز مستعد تعمیم نیست. مثلاً، در منحنی  $y = x^2$  با شکل ۷ (یک سهمی)، دو خط، یعنی محور  $x$  و محور  $y$ ، وجود دارند که



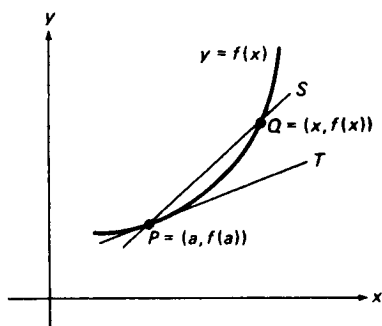
شکل ۷

منحنی را فقط در مبدأ  $O$  قطع می‌کنند. اما عقل سلیم مماس بودن محور  $y$  بر منحنی در  $O$  را رد می‌کند، و در عین حال محور  $x$  را به عنوان مماس در  $O$  می‌پذیرد. از این نکات چنین برمی‌آید که خاصیت کلیدی مماس این است که در مجاورت نقطه تماس خیلی به منحنی "چسبیده است". مثلاً، این امر برای خط  $T$  در شکل ۷ درست است که، همانطور که در مثال ۲ نشان خواهیم داد، بر سهمی  $y = x^2$  در نقطه  $P = (-1, 1)$  مماس است.

خط مماس به عنوان موضع حدی خط قاطع . برای آنکه به این ایده شهودی معنی دقیق ریاضی بدهیم ، به صورت زیر استدلال می‌کنیم . فرض کنیم  $P = (a, b)$  نقطه‌ای ثابت و  $Q = (x, y)$  نقطه‌ای متغیر از منحنی  $y = f(x)$  باشد ، که در آن  $f$  بر بازه‌ای شامل  $a$  و  $x$  پیوسته است . فرض کنیم  $S$  خط مستقیمی ماربر نقاط  $P$  و  $Q$  باشد ؛ یک چنین خط یک خط قاطع ، یا فقط قاطع ، منحنی نام دارد . اگر  $S$  مایل باشد ، همانطور که شکل ۸ نشان داده ، شیب  $S$  مساوی است با

$$(۱) \quad m_S = \frac{y - b}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

حال نقطه  $Q$  را در امتداد منحنی تغییر داده آن را به نقطه ثابت  $P$  نزدیک می‌کنیم (موضع متوالی  $Q$  لازم نیست یک طرف  $P$  باشند) . در این صورت ،  $x$  به  $a$  نزدیک می‌شود و درعین

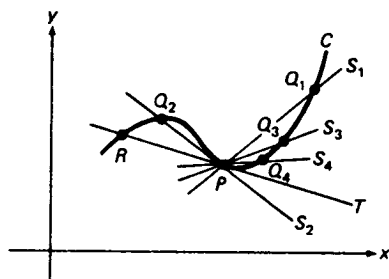


شکل ۸

حال شیب خط قاطع ماربر  $P$  و  $Q$  تغییر می‌نماید . فرض کنیم حد

$$(۲) \quad m = \lim_{x \rightarrow a} m_S$$

موجود باشد . در این صورت ، مماس بر منحنی  $y = f(x)$  در نقطه  $P$  خط مستقیم ماربر  $P$  به شیب  $m$  تعریف می‌شود . می‌توان گفت که مماس در  $P$  دارای شیب حدی قاطع  $S$  ماربر  $P$  و  $Q$  است وقتی نقطه متغیر  $Q$  به نقطه ثابت  $P$  نزدیک می‌شود . این رفتار در شکل ۹ مجسم شده است ، که در آن وقتی نقطه متغیر با گرفتن مواضع متوالی  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, \dots$  به  $P$  نزدیک می‌شود ، قاطع با گرفتن مواضع  $S_1, S_2, S_3, S_4, \dots$  به موضع خط مماس  $T$  نزدیک می‌گردد . شکل همچنین نشان می‌دهد که ، برخلاف دایره ، مماس بر منحنی کلی  $C$  ممکن است  $C$  را در نقاطی غیر از نقطه تماس قطع کند ( در اینجا  $T$  منحنی  $C$  را در  $R$  و  $P$  قطع می‌کند ) .



شکل ۹

تعریف و معادله خط مماس. حال آنچه باقی مانده گذاردن (۱) در (۲) است. این کار نتیجه می دهد که

$$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

که فوراً "تشخیص می دهید که مساوی حد معرف  $f'(a)$ ، یعنی مشتق  $f$  در  $a$ ، است. پس منحنی  $y = f(x)$  دارای خط مماس مایل  $T$  در نقطه  $P = (a, f(a))$  است اگر و فقط اگر  $f$  در  $a$  مشتق پذیر باشد، و در این صورت، شیب  $T$  مساوی  $f'(a)$  می باشد. این شیب شیب خود منحنی در  $P$  نیز نام دارد. لذا، شیب منحنی در  $P$  را می توان میزان تغییر مختص  $y$  منحنی  $y = f(x)$  نسبت به مختص  $x$  آن گرفت که در  $x = a$  محاسبه شده است. چون معادله خط مستقیم به شیب  $m$  و ماربر نقطه  $(a, b)$  مساوی  $y = m(x - a) + b$  است، معادله خط مماس بر منحنی  $y = f(x)$  در نقطه  $(a, f(a))$  عبارت است از

$$y = f'(a)(x - a) + f(a). \quad (3)$$

توجه کنید که اگر  $f'(a) = 0$ ، مماس خط افقی  $y = f(a)$  است.

مثال ۱. نشان دهید، همانطور که انتظار می رود، مماس بر خط  $y = f(x) = mx + b$  در هر نقطه از آن چیزی جز خود آن نیست.

حل. چون  $f'(x) = m$ ،  $f'(a) = m$  و  $f(a) = ma + b$ ، در این حالت معادله (۳) به  $y = m(x - a) + (ma + b) = mx + b$  تحویل می شود.

مثال ۲. معادله مماس  $T$  بر سهمی  $y = x^2$  در نقطه  $P = (-1, 1)$  را بیابید.

حل. در اینجا  $f(x) = x^2$ ؛ در نتیجه،  $f'(x) = 2x$ . با گذاردن  $a = -1$ ،  $f(-1) = (-1)^2 = 1$ ، و  $f'(-1) = 2(-1) = -2$  در معادله (۳)، درمی یابیم که معادله مماس  $T$  عبارت است از

$$y = -2(x + 1) + 1 = -2x - 1$$

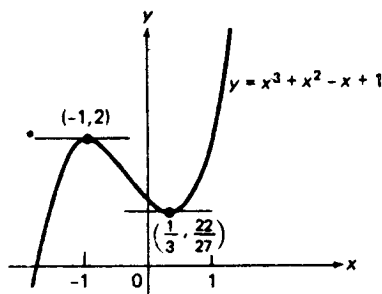
( $T$  در شکل ۷ نموده شده است).

مثال ۳. مماس بر منحنی  $y = f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$  کجا افقی است؟

حل. شیب مماس در نقطه  $(x, f(x))$  مساوی است با

$$f'(x) = D_x(x^3 + x^2 - x + 1) = 3x^2 + 2x - 1 = (3x - 1)(x + 1).$$

چون  $f'(x) = 0$  اگر و فقط اگر  $x = \frac{1}{3}$  یا  $x = -1$ ، مماس فقط در دو نقطه از منحنی افقی است. یعنی، در  $(\frac{1}{3}, f(\frac{1}{3})) = (\frac{1}{3}, \frac{22}{27})$  و  $(-1, f(-1)) = (-1, 2)$ ، و این در شکل ۱۰ نموده شده است.



شکل ۱۰

مثال ۴. نشان دهید که منحنی  $y = f(x) = x^4$  دو مماس دارد که از نقطه  $(\frac{3}{4}, 0)$  محور  $x$  می گذرد.

حل. نقطه  $(\frac{3}{4}, 0)$  خود روی منحنی  $y = x^4$  قرار ندارد (ر. ک. شکل ۱۱).

با اینحال، بنابر فرمول (۳) به ازای  $f(x) = x^4$  و  $f'(x) = 4x^3$ ، معادله مماس بر منحنی  $y = x^4$  در نقطه  $(a, a^4)$  عبارت است از

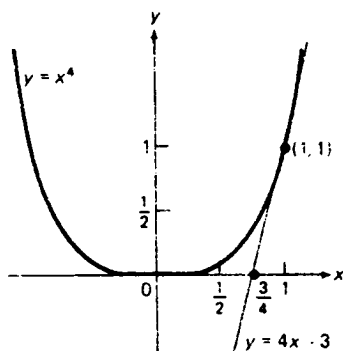
$$(۴) \quad y = 4a^3(x - a) + a^4 = 4a^3x - 3a^4,$$

و اگر مماس بخواهد از نقطه  $(\frac{3}{4}, 0)$  بگذرد، (۴) باید دارای جواب  $x = \frac{3}{4}$ ،  $y = 0$  باشد.

با گذاردن  $x = \frac{3}{4}$ ,  $y = 0$  در (۴)، به دست می‌آوریم

$$4a^3\left(\frac{3}{4}\right) - 3a^4 = 0,$$

یا معادلاً " $a^3 - a^4 = a^3(1 - a) = 0$ ". این معادله دارای دو جواب  $a = 0$  و  $a = 1$  است. با گذاردن این مقادیر  $a$  در (۴)، در می‌یابیم که دو مماس وجود دارند که در شرایط مسئله صدق می‌کنند، یکی به معادله " $y = 0$ " (محور  $x$ ) و دیگری به معادله " $y = 4x - 3$ " و این امر در شکل نموده شده است.



شکل ۱۱

مثال ۵. موضع یک ذره متحرک در امتداد یک خط مستقیم در لحظه " $t$ " با تابع  $s = f(t)$  داده شده است. سرعت لحظه‌ای  $v$  ذره را به عنوان شیب یک منحنی تعبیر نمایید.

حل. نمودار منحنی  $s = f(t)$  را با  $t$  به عنوان طول و  $s$  به عنوان عرض رسم می‌کنیم. در این صورت، سرعت  $v$  چیزی جز شیب منحنی  $s = f(t)$  نیست، زیرا  $v = D_t s = f'(t)$ .  
 بخصوص، هر وقت منحنی مماس افقی داشته باشد،  $v$  مساوی صفر است. برای تابع موضع شکل ۵، صفحه ۱۸۲، این وقتی رخ می‌دهد که  $t = 1$  و  $t = 3$ ؛ و در نتیجه، سرعت  $v$  دقیقاً "در این لحظات مساوی صفر است".

مثال ۶. نشان دهید که نمودار  $y = |x|$  در مبدأ دارای مماس نیست.

حل. فرض کنیم  $f(x) = |x|$ . در این صورت، طبق مثال ۳ صفحه ۱۱۲، حد

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

معرف مشتق  $f$  در  $x = 0$  وجود ندارد. از اینرو، نمودار  $y = |x|$  در مبدأ مماس ندارد.

از آن سو، نمودار  $y = |x|$  در هیچ نقطه غیر از مبدأ مماس ندارد. در واقع، اگر  $P$  سمت راست مبدأ باشد، مماس در  $P$  خط  $y = x$  است که در شکل ۱۲ (آ) (نموده شده است، ولی اگر  $P$  سمت چپ مبدأ باشد، مماس در  $P$  خط  $y = -x$  است که در شکل ۱۲ (ب) دیده می شود (در این باب، ر.ک. مثال ۰.۱)

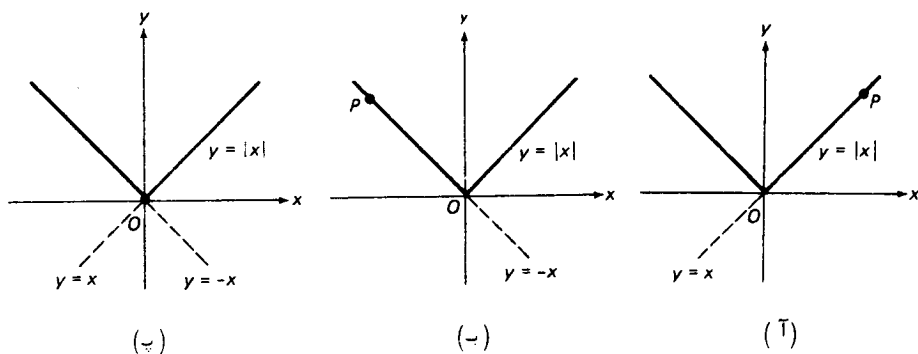
مشتقات یکطرفه و مماسها. در مورد تابع  $f(x) = |x|$ ، مشتق "راست"

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1,$$

و مشتق "چپ"

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

هر دو در  $x = 0$  موجود ولی نابرابرند و یک گوشه تیز در مبدأ به وجود می آورند. چون مشتقات یکطرفه  $f'_+(0)$  و  $f'_-(0)$  نابرابرند، مشتق معمولی (دوطرفه)  $f'(0)$  وجود ندارد (ر.ک. قضیه ۱۲، صفحه ۱۴۸). و لذا، مماس معمولی (دوطرفه) در مبدأ  $O$  وجود ندارد. با اینحال، می توان مماس راست در  $O$  به شیب  $f'_+(0)$ ، و مماس چپ در  $O$  به شیب  $f'_-(0)$  تعریف کرد. البته، این مماسها خطوط  $y = x$  و  $y = -x$  بوده، و متمایز بودن این خطوط مجدداً نشان می دهد که خط مماس به معنی معمولی در  $O$  وجود ندارد [ر.ک. شکل ۱۲ (پ)].



شکل ۱۲



به طور کلی، حد

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

مشتق راست تابع  $f$  در نقطه  $a$  است، و حد

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

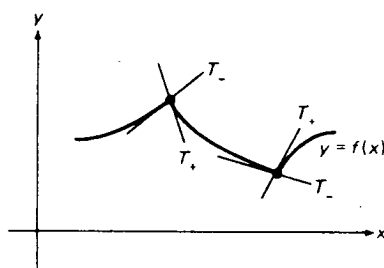
مشتق چپ  $f$  در  $a$  نام دارد. از قضیه ۱۲، صفحه ۱۴۸، معلوم می شود که مشتق معمولی  $f'(a)$  موجود است اگر و فقط اگر  $f'_+(a)$  و  $f'_-(a)$  هر دو موجود و مساوی باشند، که در این حالت  $f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a)$ . اگر  $f'_+(a)$  و  $f'_-(a)$  هر دو موجود ولی نابرابر باشند، گوییم منحنی  $y = f(x)$  در نقطه  $P = (a, f(a))$  دارای گوشه است. در این حالت مماس راست  $T_+$  در  $P$  به معادله

$$y = f'_+(a)(x - a) + f(a),$$

و مماس چپ  $T_-$  در  $P$  به معادله

$$y = f'_-(a)(x - a) + f(a)$$

وجود دارد ولی مماس معمولی در  $P$  وجود ندارد. شکل ۱۳ یک منحنی با دو گوشه همراه با مماسهای راست و چپ  $T_+$  و  $T_-$  نظیر را نشان می دهد. حالاتی هستند که در آنها نمودار یک تابع پیوسته نه فقط در نقطه ای مانند  $P$  مماس ندارد بلکه در  $P$  مماس یکطرفه نیز ندارد (ر. ک. مسئله ۲۳).



یک منحنی با دو گوشه

شکل ۱۳

با آنکه تابع  $y = |x|$  در  $x = 0$  مشتق ندارد، همانطور که در مثال ۶ دیدیم، در  $x = 0$  پیوسته است. به بیان کوتاه، این نشان می دهد که پیوستگی مشتق پذیری را ایجاب نمی کند. از آن سو، همانطور که اینک ثابت می شود، مشتق پذیری پیوستگی را ایجاب می کند؛

یعنی، یک تابع باید در هر نقطه که مشتق دارد پیوسته باشد.

قضیه ۲ ( مشتقپذیری پیوستگی را ایجاب می کند ). هرگاه  $f$  در  $a$  مشتقپذیر باشد، آنگاه  $f$  در  $a$  پیوسته است.

برهان. فرض کنیم  $f$  در  $a$  مشتقپذیر باشد. در این صورت، حد

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

وجود دارد. پس نتیجه می شود که

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

یا، معادلاً،

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

یعنی،  $f$  در  $a$  پیوسته می باشد.

خط قائم به یک منحنی. فرض کنیم منحنی  $y = f(x)$  در نقطه  $P = (a, f(a))$  دارای مماس  $T$  باشد. خط  $N$  مار بر  $P$  و عمود بر  $T$  خط قائم، یا فقط قائم، به منحنی در نقطه  $P$  نام دارد. چون شیب  $T$  مساوی  $f'(a)$  است، از شرط تعامد ( قضیه ۹، صفحه ۵۳ ) معلوم می شود که شیب  $N$  مساوی  $-1/f'(a)$  است مشروط براینکه  $f'(a) \neq 0$ . ولی اگر  $f'(a) = 0$ ، مماس  $T$  خط افقی  $y = f(a)$  مار بر  $P$  است، و در این صورت قائم خط قائم  $x = a$  مار بر  $P$  می باشد. لذا، معادله قائم به منحنی  $y = f(x)$  در نقطه  $P = (a, f(a))$  مساوی است با

$$(5) \quad y = -\frac{1}{f'(a)}(x - a) + f(a)$$

اگر  $f'(a) \neq 0$  و

$$(5') \quad x = a$$

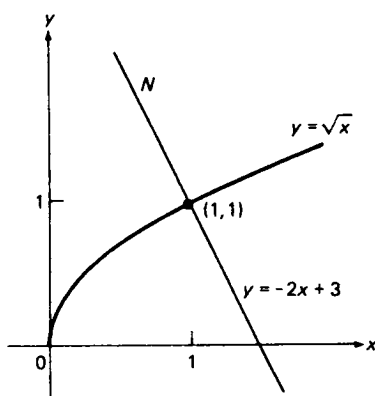
اگر  $f'(a) = 0$ . حالت مماس قائم و خط قائم افقی مستلزم مفهوم مشتق نامتناهی است و در بخش ۵.۳ در نظر گرفته خواهد شد.

مثال ۷. قائم  $N$  به منحنی  $y = \sqrt{x}$  در نقطه  $(1, 1)$  را بیابید.

حل. در اینجا  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $a = 1$ ؛ در نتیجه،

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}.$$

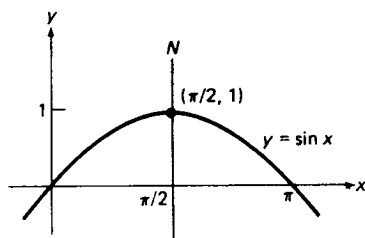
لذا، طبق (۵)، قائم  $N$  خط  $y = -2(x - 1) + 1$  یا  $y = -2x + 3$  است، که در شکل ۱۴ نموده شده است.



شکل ۱۴

مثال ۸. قائم  $N$  به منحنی  $y = \sin x$  در نقطه  $(\pi/2, 1)$  را بیابید.

حل. این بار  $f(x) = \sin x$ ,  $a = \pi/2$ ؛ در نتیجه،  $f'(x) = \cos x$ ,  $f'(a) = \cos(\pi/2) = 0$ . پس  $N$  خط قائم  $x = \pi/2$  است که در شکل ۱۵ نموده شده است.



شکل ۱۵

### مسائل

معادله مماس بر منحنی داده شده را بیابید.

۱.  $y = x^2 + 2x + 3$  در  $(-1, 2)$  ✓

۲.  $y = 2 - x - x^2$  در  $(2, -4)$  ✓

۳.  $y = \frac{1}{3}x^3 - 1$  در  $(-1, -\frac{4}{3})$  ✓

۴.  $y = 2x^4$  در  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$  ✓

۵.  $y = \sqrt{x}$  در  $(4, 2)$  ✓

۶.  $y = \sin x$  در  $(\pi, 0)$  ✓

۷.  $y = \cos x$  در  $(\pi/2, 0)$  ✓

۸.  $y = \sin x + \cos x$  در  $(\pi/4, \sqrt{2})$  ✓

مماس (یا مماسهای) منحنی داده شده که از نقطه  $P$  می‌گذرد را بیابید. (در هر حالت

$P$  بر منحنی قرار ندارد.)

۹.  $y = x^2, P = (3, 8)$  ✓

۱۰.  $y = x^3, P = (0, 2)$  ✓

۱۱.  $y = x^4, P = (0, -3)$  ✓

آیا منحنی داده شده دو مماس موازی متمایز دارد؟

۱۲.  $y = x^2$  ✓

۱۳.  $y = x^3$  ✓

۱۴.  $y = \sin x$  ✓

آیا منحنی داده شده دو مماس عمود برهم دارد؟

۱۵.  $y = x^3$

۱۶.  $y = x^2$

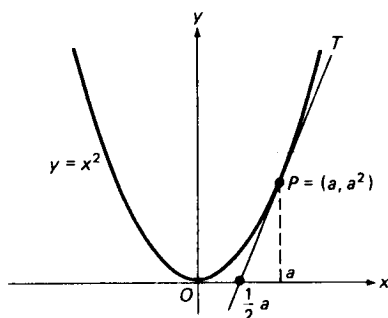
۱۷.  $y = \cos x$

۱۸. در چه نقطه از منحنی  $y = x^2$  مماس موازی قاطع ماربر نقاط منحنی به طولهای ۱ و ۳

است؟

۱۹. در چه نقطه از منحنی  $y = x^2 - 2x + 5$  مماس بر خط  $y = x$  عمود است؟  $m_1 = m_2$

۲۰. فرض کنید  $T$  بر سهمی  $y = x^2$  در نقطه  $P = (a, a^2)$  جز مبدأ  $O$  مماس باشد. همانطور



شکل ۱۶

شکل ۱۶ نشان می‌دهد،  $T$  خطی است که از  $P$  و نقطه  $(\frac{1}{2}a, 0)$  از محور  $x$  می‌گذرد. چرا چنین است؟

برای تابع داده شده  $f$ ، مشتقات یکطرفه  $f'_+(0)$  و  $f'_-(0)$  را در صورت وجود حساب کنید.

$$f(x) = |x| \quad ۲۱ \checkmark$$

$$f(x) = |x - x^2| \quad ۲۲ \checkmark$$

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} \quad ۲۳ \checkmark$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & , x \leq 0 \\ \cos x & , x > 0 \end{cases} \quad ۲۴ \checkmark$$

۲۵  $\checkmark$  به ازای چه مقادیری از  $m$  و  $b$ ، تابع

$$f(x) = \begin{cases} mx + b & , x < a \\ x^2 & , x \geq a \end{cases} \quad \text{اگر}$$

در  $a$  مشتقپذیر است؟

۲۶ تابع  $y = |x| + |x - 1|$  را رسم کنید. مماسهای یکطرفه در گوشه‌های نمودار را بیابید.

۲۷ به ازای چه مقادیری از عدد صحیح مثبت  $n$ ، منحنی

$$y = f(x) = \begin{cases} b & , x < a \\ b + (x - a)^n & , x \geq a \end{cases} \quad \text{اگر}$$

در نقطه  $(a, b)$  گوشه دارد؟

۲۸ نشان دهید هرگاه منحنی  $y = f(x)$  در  $(a, f(a))$  گوشه داشته باشد، آنگاه  $f$  در  $a$  پیوسته است.

معادله قائم به منحنی داده شده را بیابید.

$$y = x^2 + 1 \quad \text{در } (0, 1) \quad ۲۹ \checkmark$$

$$y = 1 - x^3 \quad \text{در } (-1, 2) \quad ۳۰ \checkmark$$

$$y = x^4 - 6x^2 + 2 \quad \text{در } (2, -6) \quad ۳۱ \checkmark$$

$$y = 2 \sin x + 3 \cos x \quad \text{در } (\pi/2, 2) \quad ۳۲ \checkmark$$

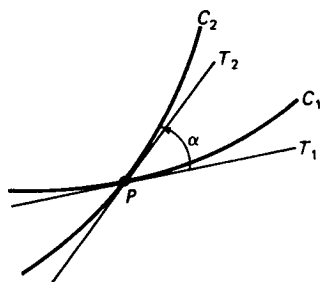
قائم (یا قائمهای) به منحنی  $y = x^2$  را بیابید که از نقطه داده شده  $P$  که بر منحنی واقع نیست بگذرد.

$$P = (0, \frac{2}{3}) \quad ۳۴ \checkmark$$

$$P = (3, 0) \quad ۳۳ \checkmark$$

همانند در شکل ۱۷، زاویه  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha < \pi$ ) بین دو منحنی متقاطع  $C_1$  و  $C_2$  راویه بین

مماسهای  $T_1$  و  $T_2$  آنها در نقطه اشتراک  $P$  تعریف می شود که از  $T_1$  به  $T_2$  در جهت خلاف عقربه های ساعت سنجیده می شود. به کمک فرمول (۱۷)، صفحه ۹۸، زاویه  $\alpha$  بین جفت



زاویه بین منحنیهای  $C_1$  و  $C_2$  در  $P$  مساوی  $\alpha$  است.

شکل ۱۷

منحنیهای داده شده را در صورتی بیابید که از منحنی اول به منحنی دوم سنجیده می شود.

۳۵ ✓  $y = x^2$  و  $y = x^3$  در  $(0, 0)$  و  $(1, 1)$

۳۶ ✓  $y = \sqrt{x}$  و  $y = x^2$  در  $(1, 1)$

۳۷ ✓  $y = \frac{1}{2}x^2$  و  $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$  در  $(\pm 1, \frac{1}{2})$

۳۸ ✓  $y = \sin x$  و  $y = \cos x$  در  $(\pi/4, 1/\sqrt{2})$

۳۹. چه انتخابی از ثابت  $c$  منحنیهای  $y = 1/x$  و  $y = cx^3$  را متعامد می سازد؛ یعنی،

یکدیگر را در هر دو نقطه اشتراک در زوایای قائمه قطع می کنند؟

۴۰. چه انتخابی از  $c$  منحنیهای  $y = x^2$  و  $y = 1 - cx^2$  را متعامد می سازد؟

### ۳.۲ تقریب خط مماس و دیفرانسیلها

روشی برای تقریب توابع وجود دارد که با مفهوم مماس بر یک منحنی رابطه ای نزدیک دارد.

فرض کنیم منحنی  $y = f(x)$  در نقطه  $P = (a, f(a))$  دارای خط مماس  $T$  باشد. بنابر

فرمول (۳)، صفحه ۱۸۸،  $T$  نمودار تابع  $y = t(x)$  است، که در آن

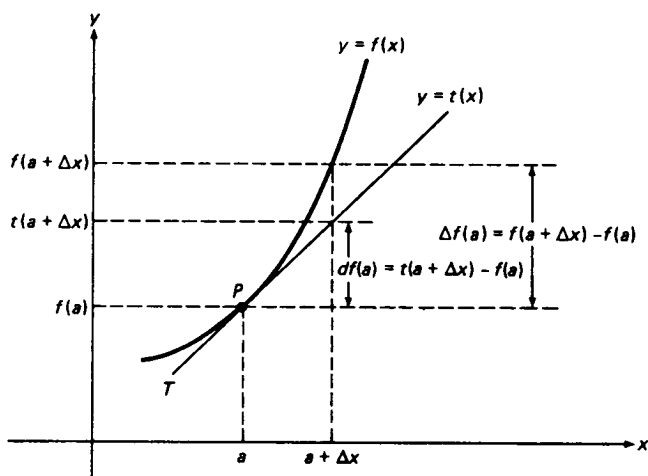
$$(۱) \quad t(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

توجه کنید که  $t(a) = f(a)$ ، زیرا، همانطور که شکل ۱۸ نشان داده، نقطه  $P$  متعلق به

منحنی  $y = f(x)$  و خط  $y = t(x)$  می باشد.

از شکل برمی آید که خط مماس  $y = t(x)$  (دست کم در مجاورت  $P$ ) تقریب مناسبی

به منحنی  $y = f(x)$  است، و این در حالت کلی نیز درست است (ر.ک. مسئله ۲۹). لذا،



تعبیر هندسی تقریب خط مماس و دیفرانسیل

شکل ۱۸

اگر  $|x - a|$  کوچک ولی ناصفر باشد، داریم  $f(x) \approx t(x)$ ، یعنی،

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a).$$

این تقریب، که تقریب خط مماس نام دارد، برحسب نمو  $\Delta x = x - a$  به شکل زیر درمی آید:

$$(۲) \quad f(a + \Delta x) \approx f(a) + f'(a) \Delta x$$

این را می توان به صورت بسیار فشرده

$$(۲') \quad \Delta f(a) \approx f'(a) \Delta x$$

نیز نوشت، که در آن

$$(۳) \quad \Delta f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$$

نمو تابع  $f$  در  $a$  می باشد.

تعریف دیفرانسیل، فرمولهای (۲) و (۲') شامل عبارت  $f'(a) \Delta x$  می باشند، که با  $df(a)$  نموده و دیفرانسیل تابع  $f$  در  $a$  نامیده می شود. در اینجا  $df$  موجود واحدی تلقی شده، و حاصل ضرب عوامل  $d$  و  $f$  نمی باشد. لذا، طبق تعریف،

$$df(a) = f'(a) \Delta x.$$

با گذاردن  $\Delta x = x - a$  در فرمول (۱)، معلوم می شود که

$$t(a + \Delta x) = f(a) + f'(a) \Delta x.$$

لذا، دیفرانسیل  $f$  در  $a$  از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$df(a) = t(a + \Delta x) - f(a),$$

که باید با فرمول (۳) مربوط به نمو  $\Delta f(a)$  تابع  $f$  در  $a$  مقایسه شود (فرض است که  $df(a)$  و  $\Delta f(a)$  هر دو، علاوه بر  $a$ ، تابع  $\Delta x$  نیز هستند). لذا، دیفرانسیل  $df(a)$  تغییر عرض (مختص  $y$ ) خط مماس  $y = t(x)$  است وقتی  $x$  از  $a$  تا  $a + \Delta x$  تغییر نماید، حال آنکه نمو  $\Delta f(a)$  تغییر نظیر عرض خود منحنی  $y = f(x)$  می‌باشد (ر.ک. شکل ۱۸).

حال  $a$  را با  $x$  عوض می‌کنیم، زیرا دیگر لازم نیست  $x$  مختص  $x$  یک نقطه متغیر منحنی  $y = f(x)$  یا خط مماس  $y = t(x)$  را نشان دهد. در نتیجه، فرمول  $df(a) = f'(a) \Delta x$  خواهد شد

$$df(x) = f'(x) \Delta x. \quad (۴)$$

فرض کنید  $f(x) = x$  را اختیار کرده باشیم، که در مورد آن داریم  $df(x) = dx$  و  $f'(x) = 1$  در این صورت، (۴) به شکل زیر درمی‌آید:

$$dx = \Delta x,$$

یعنی، دیفرانسیل و نمو متغیر مستقل باهم مساویند. به کمک این می‌توان به جای (۴) نوشت

$$df(x) = f'(x) dx, \quad (۴')$$

از تقسیم طرفین (۴') بر  $dx$  فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x).$$

لذا، می‌توان مشتق  $f'(x)$  را خارج قسمت دیفرانسیل‌های  $df(x)$  و  $dx$  تعبیر نمود. مثلاً، با این نماد، فرمول مشتق توان  $x^n$  به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}, \quad (۵)$$

قاعده مشتگیری از مجموع دو تابع  $f$  و  $g$  (اگر شناسه‌ها را حذف کنیم) خواهد شد

$$\frac{d(f+g)}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} \quad (۶)$$

و از این قبیل. همانطور که از این فرمول‌ها برمی‌آید، می‌توان از عبارت "خالی"  $d/dx$  برای نمایش عمل مشتگیری نسبت به  $x$ ، که تاکنون با  $D_x$  نموده شده، نیز استفاده کرد. مثلاً، فرمول

$$D_x(x^4 + \sin x) = 4x^3 + \cos x$$



را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\frac{d}{dx}(x^4 + \sin x) = 4x^3 + \cos x.$$

نماد لایب‌نیتز. نماد  $df(x)/dx$ ، که در ۱۶۸۴ توسط لایب‌نیتز عرضه شد، به‌خاطر سادگی و قابلیت انعطاف بیشتر توجه ما را جلب کرده است، اگرچه طرق دیگری برای نوشتن مشتق  $f$  در  $x$ ، یعنی  $f'(x)$  و  $D_x f(x)$ ، نیز وجود دارند که با ارزش‌بوده و به کارخواهندرفت. لازم است با همه این نمادهای معادل کاملاً آشنا شوید. علی‌رغم تعبیر  $df(x)/dx$  به صورت خارج قسمت دیفرانسیلها، معمولاً "بهتر است  $df(x)/dx$  را فقط نماد دیگری برای مشتق  $f$  در  $x$  بگیریم.

چون

$$df(x) = f'(x) dx = \frac{df(x)}{dx} dx,$$

هر فرمول محاسبه مشتق فرمول مشابهی برای محاسبه دیفرانسیل به دست می‌دهد. لذا، با ضرب طرفین (۵) در  $dx$ ، فرمول

$$d(x^n) = nx^{n-1} dx$$

برای دیفرانسیل  $x^n$  به دست می‌آید. به همین نحو، از ضرب طرفین (۶) در  $dx$  خواهیم داشت

$$d(f + g) = df + dg,$$

که همان قاعده مشتقگیری از مجموع است منتها در مورد دیفرانسیلها. به همین نحو، اگر  $c$  ثابت باشد،

$$dc = 0, \quad d(cf) = c df$$

(اینها مشابه قواعد (یک) و (دو)، صفحه ۱۷۷، برای دیفرانسیلها می‌باشند).

مثال ۱.  $d(x^5 + 3 \cos x)$  را محاسبه کنید.

حل. چون

$$\frac{d}{dx}(x^5 + 3 \cos x) = \frac{d}{dx} x^5 + 3 \frac{d}{dx} \cos x = 5x^4 - 3 \sin x,$$

داریم

$$d(x^5 + 3 \cos x) = (5x^4 - 3 \sin x) dx.$$

مثال ۲.  $d(9 - 2\sqrt{x})$  را محاسبه کنید.

حل. این بار مستقیماً "از چند قاعده" حاکم بر دیفرانسیلها استفاده می‌کنیم:

$$d(9 - 2\sqrt{x}) = d9 - 2d\sqrt{x} = 0 - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = -\frac{1}{\sqrt{x}} dx = -\frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

توجه کنید که چگونه با آوردن  $dx$  در صورت می‌توان جواب را به‌طور فشرده‌تر نوشت.

مثال ۳.  $d(t^3 + t)$  را حساب کنید.

حل. در اینجا متغیر مستقل  $t$  است؛ و در نتیجه،

$$d(t^3 + t) = \frac{d(t^3 + t)}{dt} dt = (3t^2 + 1) dt.$$

همانطور که قبلاً گفتیم، تقریب (۲) یعنی تعویض منحنی  $y = f(x)$  در مجاورت

نقطه  $P = (a, f(a))$  با خط مماس آن در  $P$ . تقریب معادل عبارت است از  $\Delta f(a) \approx df(a)$ . یعنی، تقریب نمو  $\Delta f(a)$  با دیفرانسیل  $df(a)$ . همانطور که مثالهای زیر نشان می‌دهند، این تقریبات به ازای  $|\Delta x|$  کوچک کاملاً دقیق‌اند.

مثال ۴.  $\sqrt{98}$  را تخمین بزنید.

حل. ملاحظه می‌کنیم که ۹۸ به عدد ۱۰۰ که ریشه دومش دقیقاً ۱۰ است نزدیک می‌باشد. لذا، در فرمول (۲) اختیار می‌کنیم  $\Delta x = -2$ ،  $a = 100$ ،  $f(x) = \sqrt{x}$ ، چون  $f'(x) = 1/2\sqrt{x}$ ، این نتیجه می‌دهد که

$$\sqrt{a + \Delta x} \approx \sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}} \Delta x,$$

که از مقایسه با مقدار دقیق ۹.۸۹۹۵ تا چهار رقم اعشار،

$$\sqrt{98} = \sqrt{100 - 2} \approx \sqrt{100} + \frac{1}{2\sqrt{100}}(-2) = 10 - \frac{1}{10} = 9.9.$$

مثال ۵.  $\sin 46^\circ$  را تخمین بزنید.

حل . این بار از نزدیک بودن  $46^\circ$  به زاویه  $45^\circ$  استفاده می‌کنیم که سینوس و کسینوس آن  $1/\sqrt{2}$  است . لذا ، در فرمول (۲) اختیار می‌کنیم  $\Delta x = \pi/4$  ،  $a = 45^\circ = \pi/4$  ،  $f(x) = \sin x$  ، چون  $f'(x) = \cos x$  ( اگر  $x$  به رادیان باشد ) ، نتیجه عبارت است از

$$\sin(a + \Delta x) \approx \sin a + \Delta x \cos a,$$

لذا ، تا پنج رقم اعشار ،

$$\sin 46^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) \approx \sin \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{\pi}{180}\right) = 0.71945$$

این با مقدار دقیق 0.71934 با همین تعداد اعشار نزدیک است .

تبصره . در بخش ۸.۰۹ ، وقتی تخمین دقت تقریب از قبل مطرح می‌شود ، از تقریب خط مماس استفاده خواهیم کرد .

مثال ۶ . اگر شعاع کره زمین به اندازه 1 فوت زیاد شود ، مساحت سطح آن چقدر زیاد می‌شود ؟

حل . مساحت سطح یک کره به شعاع  $R$  عبارت است از  $S = 4\pi R^2$  ، و شعاع زمین تقریباً 3960 میل است . اگر نمو  $\Delta S$  مساحت سطح آن را با دیفرانسیل  $dS$  در  $R = 3960$  تخمین بزنیم ، به دست می‌آوریم

$$\Delta S \approx dS = d(4\pi R^2) = 8\pi R \Delta R = 8\pi(3960) \cdot \frac{1}{5280} \text{ میل مربع}$$

زیرا هر میل 5280 فوت است . با محاسبه درمی‌یابیم که  $\Delta S \approx 18.85 \text{ sq mi}$  . برای مقایسه ، مساحت جزیره مانهاتان تقریباً  $22 \text{ sq mi}$  است .

در مثال ۶ می‌توان دقت تقریب  $\Delta S \approx dS$  را فوراً تعیین کرد ، زیرا محاسبه دقیق  $\Delta S$  بسیار آسان است . در واقع ،

$$\Delta S = 4\pi(R + \Delta R)^2 - 4\pi R^2 = 8\pi R \Delta R + 4\pi(\Delta R)^2,$$

در نتیجه ،

$$\Delta S - dS = 4\pi(\Delta R)^2 = 4\pi\left(\frac{1}{5280}\right)^2 < \frac{1}{2} \times 10^{-6} \text{ sq mi}.$$

مثال ۷. اگر شعاع کره زمین ۱ اینچ کم شود، حجم آن چقدر کاهش می یابد؟

حل. حجم یک توپ کروی به شعاع  $R$  مساوی است با  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ . اگر نمو  $\Delta V$  حجم را با دیفرانسیل  $dV$  تخمین بزنیم، درمی یابیم که

$$\Delta V \approx dV = d\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = 4\pi R^2 \Delta R$$

$$= -4\pi(3960)^2 \cdot \frac{1}{12(5280)} \approx -3110 \text{ میل مکعب}$$

( $1\frac{1}{2}$  فوت = ۱ اینچ). میزان کاهش این حجم تقریباً "یک میلیونیم حجم فعلی زمین است، زیرا

$$\frac{4\pi R^2 |\Delta R|}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3|\Delta R|}{R} = \frac{3}{3960(12)(5280)} \approx 1.2 \times 10^{-8}$$

### مسائل

دیفرانسیلهای زیر را بیابید.

- |                               |                        |
|-------------------------------|------------------------|
| ۲. $2x^2 - 3x + 5$ ✓          | ۱. $7x - 11$ ✓         |
| ۴. $t^4 - 3t^3 + 2t^2 - 10$ ✓ | ۳. $x^5 + 6x^3 + x$ ✓  |
| ۶. $4\sqrt{v} + 5 \sin v$ ✓   | ۵. $5u^6 - \cos u$ ✓   |
| ۸. $10x^9 - 9x^{10}$ ✓        | ۷. $\cos x - \sin x$ ✓ |

دیفرانسیل  $df(a) = f'(a)\Delta x$  تابع داده شده را به ازای مقادیر  $a$  و  $\Delta x$  بیابید. در هر حالت  $df(a)$  را با نمو  $\Delta f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$  تا ارقام اعشاری مناسبی مقایسه نمایید.

۹.  $f(x) = 2x + 1, a = 3, \Delta x = 0.001$  ✓

۱۰.  $f(x) = x^2, a = -\frac{1}{4}, \Delta x = 1$  ✓

۱۱.  $f(x) = x^3 - 1, a = -1, \Delta x = 0.01$  ✓

۱۲.  $f(x) = x^4 + 3x^2, a = 2, \Delta x = -0.02$  ✓

۱۳.  $f(x) = \sqrt{x}, a = 4, \Delta x = -0.1$  ✓

۱۴.  $f(x) = \sin x + \cos x, a = \Delta x = \pi/6$

با استفاده از تقریب خط مماس (۲) کمیت داده شده را تخمین زده، و نتیجه را با جواب دقیق تا تعداد اعشاری مناسبی مقایسه نمایید.

۱۶.  $\sqrt{35}$

۱۵.  $(3.1)^2 + (3.1)^3 + (3.1)^4$

$$\begin{array}{ll} \sqrt{611} \cdot 0.18 \checkmark & \sqrt{49.6} \cdot 0.17 \checkmark \\ \cos 121^\circ \cdot 0.20 & \sin 28^\circ \cdot 0.19 \checkmark \end{array}$$

تقریب داده شده را به ازای  $|x|$  کوچک توجیه کنید .

$$\cos x \approx 1 \quad 0.22 \qquad \sin x \approx x \quad 0.21$$

۲۳ . اگر شعاع یک قرص مستدیر به اندازه ۵٪ زیاد شود ، درصد افزایش مساحت آن را

تخمین بزنید . اگر محیط به اندازه ۳٪ زیاد شود چگونه ؟

۲۴ . فرض کنید محیط کره زمین ۱ فوت افزایش یابد . فاصله بین سطح زمین " جدید " و سطح زمین " قدیم " را تخمین بزنید .

افزایش شعاع زمین را در صورتی تخمین بزنید که افزایش مساحت زیر را داشته باشیم .

۲۵ .  $(\approx 1215 \text{ sq. mi})$  جزیره رود

۲۶ .  $(\approx 41,220 \text{ sq. mi})$  اوهایو

۲۷ .  $(\approx 267,340 \text{ sq. mi})$  تکزاس

۲۸ .  $(\approx 5,500,000 \text{ sq. mi})$  آنتارکتیکا

۲۹ . فرض کنید  $e(\Delta x)$  خطای تقریب خط مماس (۲) باشد . یعنی ،  $e(\Delta x) = f(a + \Delta x) - f(a)$  ،  $f'(a)\Delta x$  نشان دهید که

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} e(\Delta x) = 0, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e(\Delta x)}{\Delta x} = 0.$$

لذا ، وقتی  $\Delta x \rightarrow 0$  ، خطای  $e(\Delta x)$  نه تنها به صفر نزدیک می شود بلکه از  $\Delta x$  " سریعتر " به صفر نزدیک خواهد شد .

۳۰ . نشان دهید که تقریب خط مماس (۲) بهترین تقریب خطی به  $f(a + \Delta x)$  نزدیک  $a$

به معنی زیر است : هرگاه  $e(\Delta x)$  خطای تقریب خط مماس بوده و  $E(\Delta x)$  خطای حاصل

از تقریب  $f(a + \Delta x)$  به وسیله خط  $L$  ماربر نقطه  $(a, f(a))$  غیر از خط مماس نزدیک

$a$  باشد ، آنگاه ، به ازای هر  $\Delta x \neq 0$  با قدر مطلق به قدر کافی کوچک ، یعنی به ازای

هر  $\Delta x$  در یک همسایگی سفته صفر ،  $|e(\Delta x)| < |E(\Delta x)|$  .

۳۱ . فرض کنید  $\bar{q}$  تقریبی به یک کمیت با مقدار دقیق  $q$  باشد . در این صورت ، خطای  $q - \bar{q}$

تقریب  $\bar{q} \approx q$  را اغلب خطای مطلق می نامند تا از خطای نسبی تعریف شده با

$|q - \bar{q}|/|q|$  متمایز باشد . ( خطای نسبی اغلب به صورت درصد بیان می شود . مثلاً ،

خطای نسبی ۰.۰۵ خطای نسبی ۵٪ نیز نامیده می شود . ) بنابر مسئله ۲۹ ، خطای

مطلق تقریب خط مماس ، وقتی  $\Delta x \rightarrow 0$  ، سریعتر از  $\Delta x$  به صفر نزدیک می شود . مثالی

بزنید که خطای نسبی تقریب خطای مماس ، بدون توجه به اندازه  $\Delta x$  ، ۱۰۰٪ باشد .

## ۴.۲ قواعد حاصل ضرب و خارج قسمت

حال تکنیک مشتقگیری را از سر گرفته، محاسبه مشتق حاصل ضرب، متقابل، و خارج قسمت توابع را محاسبه می‌کنیم. مطلب را با حاصل ضرب آغاز می‌کنیم. ممکن است شباهت با حدود ما را گمراه کرده مشتق حاصل ضرب دو تابع را حاصل ضرب مشتقات عوامل بنویسیم، اما این را می‌توان با توجه به عدم تساوی  $D_x(1 \cdot x) = D_x x = 1$  با  $(D_x 1)(D_x x) = 0 \cdot 1 = 0$  رد کرد. قضیه زیر راه صحیح محاسبه مشتق حاصل ضرب را به ما می‌دهد.

قضیه ۳ (قاعده حاصل ضرب). هرگاه توابع  $f$  و  $g$  در  $x$  مشتقپذیر باشند، آنگاه حاصل ضرب  $fg$  نیز چنین است، و

$$(1) \quad \frac{d}{dx}(fg) = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx} = f'g + fg'.$$

برهان. در اینجا پریم مشتقگیری نسبت به  $x$  را نشان می‌دهد، و گاهی به خاطر اختصار شناسه توابع را حذف می‌کنیم (این کار معمول است). طبق تعریف،

$$\frac{d}{dx}(fg) = \lim_{u \rightarrow x} \frac{f(u)g(u) - f(x)g(x)}{u - x},$$

که در آن  $x$  ثابت گرفته می‌شود. صورت  $f(u)g(u) - f(x)g(x)$  را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$f(u)g(u) - f(x)g(u) + f(x)g(u) - f(x)g(x),$$

که در آن جمله  $f(x)g(u)$  کم و زیاد شده است! با این کار می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(fg) &= \lim_{u \rightarrow x} \left[ \frac{f(u)g(u) - f(x)g(u)}{u - x} + \frac{f(x)g(u) - f(x)g(x)}{u - x} \right] \\ &= \lim_{u \rightarrow x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} g(u) + \lim_{u \rightarrow x} f(x) \frac{g(u) - g(x)}{u - x}, \end{aligned}$$

که طبق خواسته ما در آخرین مرحله خارج قسمت‌های تفاضلی  $f$  و  $g$  ظاهر شده‌اند. با ادامه محاسبات به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} (2) \quad \frac{d}{dx}(fg) &= \lim_{u \rightarrow x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} \lim_{u \rightarrow x} g(u) + \lim_{u \rightarrow x} f(x) \lim_{u \rightarrow x} \frac{g(u) - g(x)}{u - x} \\ &= f'(x) \lim_{u \rightarrow x} g(u) + f(x)g'(x), \end{aligned}$$

که در آن از تعاریف  $f'(x)$  و  $g'(x)$  و ثابت بودن  $f(x)$  استفاده می‌کنیم. اما  $g$  طبق فرض

در  $x$  مشتقپذیر است؛ و لذا، طبق قضیه ۲، صفحه ۱۹۳، در  $x$  پیوسته می باشد. در نتیجه،

$$(۳) \quad \lim_{u \rightarrow x} g(u) = g(x).$$

لا گذاردن (۳) در (۲) نتیجه مطلوب (۱) به دست می آید.

لذا، مشتق حاصل ضرب دو تابع مشتقپذیر مشتق تابع اول در تابع دوم به علاوه تابع اول در مشتق تابع دوم می باشد.

نتیجه، هرگاه توابع  $f_1, f_2, \dots, f_n$  همه در  $x$  مشتقپذیر باشند، آنگاه حاصل ضرب  $f_1 f_2 \dots f_n$

نیز چنین است و

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f_1 f_2 \dots f_n) &= \frac{df_1}{dx} f_2 \dots f_n + f_1 \frac{df_2}{dx} f_3 \dots f_n + \dots + f_1 f_2 \dots f_{n-1} \frac{df_n}{dx} \\ &= f_1' f_2 \dots f_n + f_1 f_2' f_3 \dots f_n + \dots + f_1 f_2 \dots f_{n-1} f_n'. \end{aligned}$$

برهان. قضیه را چند بار به کار می بریم. مثلاً،

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(fgh) &= \frac{d(fg)}{dx} h + fg \frac{dh}{dx} = \left( \frac{df}{dx} g + f \frac{dg}{dx} \right) h + fg \frac{dh}{dx} \\ &= \frac{df}{dx} gh + f \frac{dg}{dx} h + fg \frac{dh}{dx}, \end{aligned}$$

یا، معادلاً،

$$(fgh)' = (fg)'h + (fg)h' = (f'g + fg')h + fgh' = f'gh + fg'h + fgh'.$$

مثال ۱. از  $(2x-1)(x^2-6x+3)$  مشتق بگیرید.

حل. بنابر قاعده حاصل ضرب،

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [(2x-1)(x^2-6x+3)] &= \frac{d(2x-1)}{dx} (x^2-6x+3) + (2x-1) \frac{d(x^2-6x+3)}{dx} \\ &= 2(x^2-6x+3) + (2x-1)(2x-6) = 6x^2 - 26x + 12. \end{aligned}$$

راه دیگر این است که ابتدا ضرب کرده سپس مشتق بگیریم:

$$\frac{d}{dx} [(2x-1)(x^2-6x+3)] = \frac{d}{dx} (2x^3 - 13x^2 + 12x - 3) = 6x^2 - 26x + 12.$$

مثال ۲. از  $x^2 \sin x$  مشتق بگیرید.

حل. هیچ راهی جز قاعده حاصل ضرب وجود ندارد:

$$\frac{d}{dx}(x^2 \sin x) = \frac{d(x^2)}{dx} \sin x + x^2 \frac{d \sin x}{dx} = 2x \sin x + x^2 \cos x.$$

مثال ۳. از  $\sqrt{x} \sin x \cos x$  مشتق بگیرید.

حل. با استفاده از نتیجه، داریم

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\sqrt{x} \sin x \cos x) &= \frac{d\sqrt{x}}{dx} \sin x \cos x + \sqrt{x} \frac{d \sin x}{dx} \cos x + \sqrt{x} \sin x \frac{d \cos x}{dx} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x \cos x + \sqrt{x} \cos^2 x - \sqrt{x} \sin^2 x. \end{aligned}$$

توجه کنید که این را می‌توان به کمک فرمولهای (۱۴) و (۱۴')، صفحه ۹۶، به صورت ساده‌تر زیر نوشت:

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x} \sin x \cos x) = \frac{\sin 2x}{4\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cos 2x,$$

قضیه ۴ (مشتق متقابل یک‌تابع). هرگاه تابع  $g$  در  $x$  مشتق‌پذیر باشد، آنگاه متقابل  $g$  نیز چنین است و

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{g} = -\frac{1}{g^2} \frac{dg}{dx} = -\frac{g'}{g^2},$$

مشروط بر اینکه  $g(x) \neq 0$ .

برهان. به کمک فرمول (۳) داریم

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{1}{g} &= \lim_{u \rightarrow x} \frac{\frac{1}{g(u)} - \frac{1}{g(x)}}{u - x} = \lim_{u \rightarrow x} \frac{g(x) - g(u)}{g(u)g(x)(u - x)} \\ &= -\lim_{u \rightarrow x} \frac{1}{g(u)g(x)} \frac{g(u) - g(x)}{u - x} \\ &= -\frac{1}{g(x)} \lim_{u \rightarrow x} \frac{1}{g(u)} \lim_{u \rightarrow x} \frac{g(u) - g(x)}{u - x} = -\frac{1}{g^2(x)} g'(x), \end{aligned}$$



چون طبق فرض  $g(x) \neq 0$ ، لازم نیست از صفر بودن  $g(u)$  در هیچ مخرجی نگران باشیم (قاعدهٔ دو)، صفحهٔ ۱۲۴، را به یاد آورید).

مثال ۴. از  $1/(x^2 + 1)$  را مشتق بگیرید.

حل. بنابر قضیهٔ ۴،

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x^2 + 1} = -\frac{1}{(x^2 + 1)^2} \frac{d}{dx} (x^2 + 1) = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

مثال ۵. از  $1/(\sin x + \cos x)$  مشتق بگیرید.

حل. بنابر همان قضیه،

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{1}{\sin x + \cos x} &= -\frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} \frac{d}{dx} (\sin x + \cos x) \\ &= -\frac{\cos x - \sin x}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)^2}. \end{aligned}$$

مشتقگیری از توانهای منفی. حال می‌توانیم از متقابل  $x^n$ ، که در آن  $n$  عدد صحیح مثبتی است، مشتق بگیریم. مجدداً، طبق قضیهٔ ۴،

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x^n} = -\frac{1}{x^{2n}} \frac{d}{dx} x^n = -\frac{1}{x^{2n}} nx^{n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}},$$

مشروط بر اینکه  $x \neq 0$ . این رابطه را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$(۴) \quad \frac{d}{dx} x^{-n} = -nx^{-n-1}$$

اما (۴) از تعویض  $n$  با  $-n$  در فرمول

$$(۵) \quad \frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1},$$

که از قبل بر ما معلوم است، به دست می‌آید. در واقع، ما فقط از (۵) به ازای  $n > 0$  برای اثبات (۴) استفاده کرده‌ایم؛ لذا، می‌بینیم که فرمول مشتقگیری اساسی (۵) برای اعداد صحیح منفی نیز برقرار است. این فرمول، دست کم به‌طور صوری، به ازای  $n = 0$  نیز برقرار است، زیرا هرگاه  $x \neq 0$ ، آنگاه  $x^0 \equiv 1$ . در نتیجه،  $D_x x^0 = D_x 1 = 0$ .

حال آنکه فرمول (۵) نتیجه می دهد که  $D_x x^0 = 0x^{-1} = 0$  . لذا ، فرمول (۵) به ازای هر عدد صحیح ، مثبت ، منفی ، یا صفر ، برقرار است .

مثال ۶. با دو بار استفاده از فرمول (۵) ، داریم

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \right) = \frac{d}{dx} (x^{-1} + x^{-3}) = -1x^{-2} - 3x^{-4} = -\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^4}$$

قضیه ۵ ( قاعده خارج قسمت ) . هرگاه توابع  $f$  و  $g$  در  $x$  مشتقپذیر باشند ، آنگاه خارج قسمت  $f/g$  نیز چنین است و

$$\frac{d}{dx} \frac{f}{g} = \frac{\frac{df}{dx} g - f \frac{dg}{dx}}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2},$$

مشروط بر اینکه  $g(x) \neq 0$  .

برهان . ابتدا از قاعده حاصل ضرب و سپس قاعده مشتقگیری از متقابل یک تابع استفاده می کنیم ، داریم

$$\frac{d}{dx} \frac{f}{g} = \frac{d}{dx} \left( f \cdot \frac{1}{g} \right) = f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \frac{-g'}{g^2} = \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

مثال ۷. از  $2x/(1-x^2)$  مشتق بگیرید .

حل . بنابر قاعده خارج قسمت ،

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{2x}{1-x^2} &= \frac{\frac{d(2x)}{dx} (1-x^2) - 2x \frac{d(1-x^2)}{dx}}{(1-x^2)^2} \\ &= \frac{2(1-x^2) - 2x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}, \end{aligned}$$

مشروط بر اینکه  $x \neq \pm 1$  .

مثال ۸. از  $(x^3+1)/(x^2-x-2)$  مشتق بگیرید .

حل. پیش از مشتقگیری فکر می‌کنیم شاید تابع را بتوان ساده کرد. می‌بینیم که صورت و مخرج عامل مشترک  $x + 1$  دارند. در واقع،

$$\frac{x^3 + 1}{x^2 - x - 2} = \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{x^2 - x + 1}{x - 2} = x + 1 + \frac{3}{x - 2},$$

که در آخرین مرحله، با استفاده از تقسیم متوالی،  $x^2 - x + 1$  را بر  $x - 2$  تقسیم می‌کنیم (جزئیات را شرح دهید). حال با مشتقگیری خواهیم داشت

$$\frac{d}{dx} \frac{x^3 + 1}{x^2 - x - 2} = \frac{d}{dx} (x + 1) + \frac{d}{dx} \frac{3}{x - 2} = 1 - \frac{3}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 1}{(x - 2)^2}.$$

در اینجا فرض کرده‌ایم  $x \neq -1, 2$ . اگر این حذف مقدماتی صورت‌نگیرد، به جواب بسیار پیچیده‌تری می‌رسیم که در آن  $(x + 1)^2$  عامل مشترک غیرقابل تشخیص صورت و مخرج می‌باشد.

مشتقگیری از توابع مثلثاتی. در قاعده (هفت)، صفحه ۱۷۹، نشان دادیم که

$$(۶) \quad \frac{d}{dx} \sin x = \cos x, \quad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x.$$

حال برای مشتق چهار تابع مثلثاتی دیگر فرمول به دست می‌آوریم. مشتق  $\tan x$  با استفاده از قاعده خارج قسمت، و مشتقات  $\cot x$ ،  $\sec x$ ، و  $\csc x$  با استفاده از قاعده مشتقگیری از متقابل یک تابع (قضیه ۴) به دست می‌آیند. محاسبات سراسر است بوده و به صورت زیر جریان می‌یابند.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \tan x &= \frac{d}{dx} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{d \sin x}{dx} \cos x - \sin x \frac{d \cos x}{dx}}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x, \\ \frac{d}{dx} \cot x &= \frac{d}{dx} \frac{1}{\tan x} = -\frac{1}{\tan^2 x} \frac{d}{dx} \tan x = -\frac{1}{\tan^2 x} \sec^2 x \\ &= -\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \sec x &= \frac{d}{dx} \frac{1}{\cos x} = -\frac{1}{\cos^2 x} \frac{d}{dx} \cos x = -\frac{1}{\cos^2 x} (-\sin x) \\ &= \frac{1}{\cos x} \frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \tan x,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \csc x &= \frac{d}{dx} \frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{\sin^2 x} \frac{d}{dx} \sin x = -\frac{1}{\sin^2 x} \cos x \\ &= -\frac{1}{\sin x} \frac{\cos x}{\sin x} = -\csc x \cot x.\end{aligned}$$

لذا، داریم

$$(۷) \quad \frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x, \quad \frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x,$$

و

$$(۸) \quad \frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x, \quad \frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x.$$

فرمولهای (۷) و (۸) از فرمولهای (۶) پیچیده‌ترند، ولی اینها را نیز باید حفظ کرد.

مثال ۹. از  $(\tan x)/x$  مشتق بگیرید.

حل. بنابر قاعدهء خارج قسمت و فرمول (۷)،

$$\frac{d}{dx} \frac{\tan x}{x} = \frac{\frac{d \tan x}{dx} x - \tan x \frac{dx}{dx}}{x^2} = \frac{x \sec^2 x - \tan x}{x^2}.$$

مثال ۱۰. از  $\sec^2 x$  مشتق بگیرید.

حل. بنابر قاعدهء خارج قسمت و فرمول (۸)،

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \sec^2 x &= \frac{d}{dx} (\sec x \sec x) = \frac{d \sec x}{dx} \sec x + \sec x \frac{d \sec x}{dx} \\ &= 2 \sec x \frac{d \sec x}{dx} = 2 \sec^2 x \tan x.\end{aligned}$$

مسائل

از عبارات زیر مشتق بگیرید.

۱.  $3x^{-2} - 5x^{-3}$  ✓
۲.  $6x^{-4} + 5x^{-5} + 4x^{-6}$  ✓
۳.  $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$  ✓
۴.  $\frac{1}{x^{10}} + \frac{1}{x^5} + 100$  ✓
۵.  $(1+x^2)(2-x^2)$  ✓
۶.  $(1+4x^2)(1+2x^2)$  ✓
۷.  $(1-x^2)(1+x^3)$  ✓
۸.  $(x-1)(x^2+x+1)$  ✓
۹.  $(x+1)(x^2-x+1)$  ✓
۱۰.  $(1-x^{99})(1+x^{99})$  ✓
۱۱.  $(2-x^3)(1+x^{-2})$  ✓
۱۲.  $(2+x^2)(1-x^{-3})$  ✓
۱۳.  $(1-x^{-5})^2$  ✓
۱۴.  $(1+x+x^{-1})(1+x-x^{-1})$  ✓
۱۵.  $(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)$  ✓
۱۶.  $(1-x)(1+x+x^2)(1+x^3)$  ✓
۱۷.  $\frac{1}{1+x}$  ✓
۱۸.  $\frac{1-x}{1+x}$  ✓
۱۹.  $\frac{x^2}{1+x^2}$  ✓
۲۰.  $\frac{x^3+1}{x^2-1}$  ✓
۲۱.  $\frac{x^3-1}{x^3+1}$  ✓
۲۲.  $\frac{x^2+5x}{x^3-3}$  ✓
۲۳.  $\frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$  ✓
۲۴.  $\frac{x^3-1}{x^2+2x-3}$  ✓
۲۵.  $\frac{t^4-1}{t^2-3t+2}$  ✓
۲۶.  $\frac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}$  ✓
۲۷.  $\frac{1-\sqrt{u}}{1+\sqrt{u}}$  ✓
۲۸.  $u^2 \cos u$  ✓
۲۹.  $\frac{\sin v}{v}$  ✓
۳۰.  $\frac{\tan v}{\sqrt{v}}$  ✓
۳۱.  $\sqrt{w} \cot w$  ✓
۳۲.  $w^3 \sec w$  ✓
۳۳.  $2x \csc x$  ✓
۳۴.  $x^2 \sin^2 x$  ✓
۳۵.  $x \sin x \tan x$  ✓
۳۶.  $\frac{1}{1+\sin x}$  ✓
۳۷.  $\frac{1}{1-\cos x}$  ✓
۳۸.  $\frac{1-\sin x}{1+\cos x}$  ✓

$$\frac{\sin^2 x}{\cos x} \cdot ۴۵✓$$

$$\frac{\sin x - x \cos x}{\cos \cdot x + x \sin x} \cdot ۴۲✓$$

$$\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} \cdot ۳۹✓$$

$$\frac{\cos x}{\sin^2 x} \cdot ۴۷✓$$

دیفرانسیل عبارات زیر را بیابید .

$$\frac{1}{1-x} \cdot ۴۳✓$$

$$x^{-2} + x^{-1} + 7 \cdot ۴۳✓$$

$$x \tan x \cdot ۴۶✓$$

$$\frac{x}{1+x} \cdot ۴۵✓$$

$$\frac{x}{\sin x} \cdot ۴۸✓$$

$$\sqrt{x} \sin x \cdot ۴۷✓$$

$$\csc^2 x \cdot ۵۰✓$$

$$\frac{x}{\cos x} \cdot ۴۹✓$$

۵۱. با کمی تلاش نشان دهید که

$$\frac{d}{dx} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = 1.$$

۵۲. قواعد حاصل ضرب و خارج قسمت زیر برای دیفرانسیلها را که شبیه قواعد مشتقها هستند اثبات نمایید :

$$d(fg) = g df + f dg, \quad d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g df - f dg}{g^2}$$

## ۵.۲ قاعده زنجیره‌ای

هیچیک از قواعد مشتگیری که تاکنون ثابت شده‌اند طرز مشتگیری از توابع مرکب نظیر  $\sqrt{x^2 + 1}$  یا  $\sin(\sin x)$  را به ما نمی‌گوید. لذا، اینک به اثبات قاعده دیگری می‌پردازیم که مشتق تابع مرکب را برحسب مشتقات توابع مؤلفه آن بیان می‌کند. قاعده، که به قاعده زنجیره‌ای موسوم است، به قدر کافی ساده است ولی اثباتش کمی پیچیده می‌باشد. فرض کنیم  $f$  و  $g$  دو تابع باشند به طوری که  $f$  در  $x$  و  $g$  در  $f(x)$ ، یعنی مقدار  $f$  در  $x$ ، مشتقپذیر باشد. بزودی نشان می‌دهیم که تابع مرکب  $g(f(x))$  نیز در  $x$  مشتقپذیر بوده و دارای مشتق

$$(۱) \quad \frac{d}{dx} g(f(x)) = g'(f(x))f'(x)$$

می‌باشد، که در آن پریم مشتق نسبت به شناسه تابع را نشان می‌دهد. مثلاً، هرگاه

$f(x) = x^2 + 1$  و  $g(x) = \sqrt{x}$ ، آنگاه  $g(f(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$ . به علاوه،  $f$  به ازای هر  $x$  مشتقپذیر است حال آنکه  $g$  به ازای هر  $x > 0$  و در نتیجه به ازای هر مقدار از  $f$  زیرا  $x^2 + 1 \geq 1$  مشتقپذیر می باشد. در این حالت  $g'(x) = 1/2\sqrt{x}$  و  $f'(x) = 2x$ ، در نتیجه، قاعده زنجیره‌ای (۱) شکل زیر را به خود می گیرد:

$$(۲) \quad \frac{d}{dx} \sqrt{x^2 + 1} = \left( \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \right) 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}},$$

و به ازای هر  $x$  معتبر است.

اگر دو متغیر مستقل  $y = f(x)$  و  $z = g(y) = g(f(x))$  را وارد کار کنیم، ساختار فرمول (۱) روشنتر می شود، زیرا در این صورت (۱) را می توان به شکل ساده زیر نوشت:

$$(۳) \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}.$$

به عنوان مثال، هرگاه  $y = x^2 + 1$  و  $z = \sqrt{y}$ ، آنگاه  $z = \sqrt{y} = \sqrt{x^2 + 1}$  و رابطه (۳) می گوید که

$$\frac{d}{dx} \sqrt{x^2 + 1} = \frac{d\sqrt{y}}{dy} \frac{d(x^2 + 1)}{dx} = \left( \frac{1}{2\sqrt{y}} \right) 2x = \frac{x}{\sqrt{y}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}},$$

که با رابطه (۲) سازگار است. فرمول (۳)، با وجود شکل الهام بخش خود، قضیه‌ای در حساب دیفرانسیل است که نیاز به برهان داشته و یک اتحاد جبری بدیهی نیست. به عبارت دیگر، حذف  $dy$  ها در طرف راست (۳) نتیجه‌ای است از قضیه زیر تا راهی برای اثبات آن.

قضیه ۶ (قاعده زنجیره‌ای). فرض کنیم  $f$  در  $x$  و  $g$  در  $f(x)$  مشتقپذیر باشد. در این صورت، تابع مرکب  $g \circ f$  در  $x$  مشتقپذیر است و مشتقش از رابطه زیر به دست می آید:

$$(۱') \quad \frac{d}{dx} (g \circ f)(x) = g'(f(x))f'(x).$$

برهان (اختیاری). چون  $g$  در  $y = f(x)$  مشتقپذیر است، داریم

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y} = g'(y),$$

یا، معادلاً،

$$(۴) \quad \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y} = g'(y) + \varepsilon(\Delta y),$$

که در آن

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta y) = 0$$

( نتیجه ۲، صفحه ۱۳۱، را به یاد آورید ) . با ضرب (۴) در  $\Delta y$ ، درمی یابیم که

$$(۴') \quad g(y + \Delta y) - g(y) = [g'(y) + \varepsilon(\Delta y)] \Delta y.$$

مهم است توجه کنیم که اگرچه (۴) با فرض  $\Delta y \neq 0$  نوشته شده است، فرمول (۴') حاصل از (۴) به ازای  $\Delta y \neq 0$  حتی در صورت  $\Delta y = 0$  نیز درست است، زیرا نمو  $g(y + \Delta y) - g(y)$  صرف نظر از انتخاب  $\varepsilon(0)$ ، به ازای  $\Delta y = 0$  صفر است. تا بحال  $\varepsilon(\Delta y)$  فقط به ازای  $\Delta y \neq 0$  تعریف شده است، ولی اکنون قلمرو  $\varepsilon(\Delta y)$  را با فرض  $\varepsilon(0) = 0$  وسیع ساخته  $\varepsilon(\Delta y)$  را در  $\Delta y = 0$  پیوسته می سازیم.

حال (۴') را بر  $\Delta x$ ، یعنی نمو متغیر مستقل، تقسیم کرده و حد آن را وقتی  $\Delta x \rightarrow 0$  می گیریم. این کار نتیجه می دهد که

$$(۵) \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [g'(y) + \varepsilon(\Delta y)] \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

که در آن

$$(۶) \quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

نمو متغیر مستقل  $y$  است. به علاوه، چون  $f$  در  $x$  مشتق پذیر است و لذا در  $x$  پیوسته است ( قضیه ۲، صفحه ۱۹۳، را به یاد آورید )،  $\Delta x \rightarrow 0$  ایجاب می کند که  $\Delta y \rightarrow 0$ ، در نتیجه،

$$(۷) \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta y) = 0.$$

این امر که  $\varepsilon(0) = 0$  و در نتیجه  $\varepsilon(\Delta y)$  در  $\Delta y = 0$  پیوسته است در این نتیجه گیری اهمیت دارد، زیرا برقراری  $\Delta y \neq 0$  را نمی توان تضمین کرد ( به یاد آورید که  $\Delta y$  دلخواه نیست بلکه با مقدار  $\Delta x$  معین می شود ). از روابط (۵) تا (۷) نتیجه می شود که

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta x} = g'(y)f'(x) = g'(f(x))f'(x),$$

یا، معادلاً،

$$(۸) \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(f(x + \Delta x)) - g(f(x))}{\Delta x} = g'(f(x))f'(x),$$

زیرا  $y = f(x)$  و  $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ . حال برهان قاعده زنجیره ای (۱) یا (۱') کامل است، زیرا حد (۸) چیزی جز مشتق تابع مرکب  $g(f(x)) = (g \circ f)(x)$  نیست.



بحث غیر صوری قاعده زنجیره‌ای. برهان قاعده زنجیره‌ای فقط به یک دلیل پیچیده است. باید فکرمان حول این امر دور بزند که  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$  ممکن است حتی اگر  $\Delta x \neq 0$  مساوی صفر باشد که مشکل مخرجهای صفر را خواهیم داشت. اگر این نمی‌بود "مشکل  $\Delta y = 0$ "، برهان قاعده زنجیره‌ای کاملاً ساده بود. در واقع، می‌توانستیم بنویسیم

$$\Delta z = g(y + \Delta y) - g(y)$$

و به صورت زیر استدلال می‌کردیم. تابع  $f$  در  $x$  مشتق‌پذیر، و در نتیجه در  $x$  پیوسته، است لذا،  $\Delta x \rightarrow 0$  ایجاب می‌کند که  $\Delta y \rightarrow 0$ ؛ در نتیجه،

$$\begin{aligned} (9) \quad \frac{dz}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}, \end{aligned}$$

که قاعده زنجیره‌ای به شکل (۳) است. این استدلال بصیرتی از برهان قضیه ۶ به ما می‌دهد، ولی "مشکل  $\Delta y = 0$ " را حل نمی‌کند.

تبصره. برهان سریع (۹) قاعده زنجیره‌ای با آنکه از نظر تکنیکی نقص دارد ولی برای مقاصد عملی کافی است. نکته آن است که یک تابع بندرت آنقدر مغشوش است که "مشکل  $\Delta y = 0$ " (مثال داده شده در مسئله ۶۵) را عملاً پدید آورد.

مثال ۱. فرض کنیم یک میله فلزی به طول  $L$  به ازای هر درجه افزایش دمای سلسیوس  $T$  خود ۲ میلیمتر افزایش یابد؛ در نتیجه،

$$\frac{dL}{dT} = 2 \text{ mm}/^\circ\text{C}.$$

میله را در کوره گذارده و طوری حرارت می‌دهیم که دمایش به میزان  $3^\circ$  بر دقیقه افزایش یابد؛ یعنی،

$$\frac{dT}{dt} = 3^\circ/\text{min},$$

که در آن  $t$  زمان است. سرعت افزایش طول میله چقدر است؟

حل. عقل سلیم به ما می‌گوید که چون  $T$  هر دقیقه  $3^\circ$  افزایش دارد و نیز  $L$  به ازای هر

درجهء افزایش  $T$  به اندازه  $2\text{mm}$  زیاد می شود، پس  $L$  باید به میزان  $3 \cdot 2 = 6\text{mm}$  بر دقیقه افزایش داشته باشد. قاعدهء زنجیره ای همین را به طور فشرده تر بیان می کند:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dL}{dT} \frac{dT}{dt} = 2 \cdot 3 = 6\text{mm/min.}$$

فرض کنیم  $c$  یک ثابت باشد. طبق قاعدهء زنجیره ای،

$$\frac{d}{dx} f(cx) = f'(cx) \frac{d}{dx} cx,$$

که بی درنگ فرمول مشتقگیری مهم زیر را نتیجه می دهد:

$$(۱۰) \quad \frac{d}{dx} f(cx) = cf'(cx).$$

دقت کنید (۱۰) با فرمول

$$\frac{d}{dx} cf(x) = cf'(x),$$

که در آن تابع به جای شناسه اش در  $c$  ضرب شده، اشتباه نشود.

مثال ۲. از  $\sin 2x$  مشتق بگیرید.

حل. بنابر فرمول (۱۰) به ازای  $f(x) = \sin x$ ،  $f'(x) = \cos x$ ،  $c = 2$ ،

$$\frac{d}{dx} \sin 2x = 2 \cos 2x.$$

به طور معادل، می توان قاعدهء زنجیره ای را مستقیماً، به ازای  $2x$  به عنوان تابع "داخلی"، به کار برد.

مثال ۳. از  $(1 + 5x)^{10}$  مشتق بگیرید.

حل. می نویسیم  $y = 1 + 5x$  و  $z = y^{10}$  و از قاعدهء زنجیره ای به شکل (۳) استفاده می کنیم. این نتیجه می دهد که

$$\frac{d}{dx} (1 + 5x)^{10} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = 10y^9 \cdot 5 = 50(1 + 5x)^9.$$

به توان ده رسانیدن  $1 + 5x$  و مشتقگیری از چند جمله ای نتیجه هیچگاه سرگرم کننده

نخواهد بود .

مثال ۰۴ . از  $1/(x^2 + 2)^3$  مشتق بگیرید .

حل . این بار اختیار می‌کنیم  $y = x^2 + 2$  و  $z = y^{-3}$  . در این صورت ،

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{(x^2 + 2)^3} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = (-3y^{-4})(2x) = -\frac{6x}{(x^2 + 2)^4}.$$

مثال ۰۵ . از  $(x + \sqrt{x})^2$  مشتق بگیرید .

حل . بنابر قاعدهٔ زنجیره‌ای ،

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (x + \sqrt{x})^2 &= 2(x + \sqrt{x}) \frac{d}{dx} (x + \sqrt{x}) = 2(x + \sqrt{x}) \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \\ &= 2x + 3\sqrt{x} + 1, \end{aligned}$$

که در آن مشتق تابع " داخلی "  $(\dots)^2$  را در  $x + \sqrt{x}$  حساب کرده و سپس نتیجه را در مشتق تابع " داخلی "  $x + \sqrt{x}$  ضرب می‌کنیم . البته ، از متغیرهای " میانی " ( مانند  $y$  و  $z$  در دو مثال پیش ) نیز می‌توان استفاده کرد ، ولی همینکه بر قاعدهٔ زنجیره‌ای مسلط شدید این کار زائد است یا اینکه می‌توان آن را ذهنی انجام داد .

مثال ۰۶ . از  $\cos(2x^3 - 1)$  مشتق بگیرید .

حل . با اعمال قاعدهٔ زنجیره‌ای ، داریم

$$\frac{d}{dx} \cos(2x^3 - 1) = -\sin(2x^3 - 1) \frac{d}{dx} (2x^3 - 1) = -6x^2 \sin(2x^3 - 1).$$

مثال ۰۷ . از  $\sin(\sin x)$  مشتق بگیرید .

حل . قاعدهٔ زنجیره‌ای نتیجه می‌دهد که

$$\frac{d}{dx} \sin(\sin x) = \cos(\sin x) \frac{d}{dx} \sin x = \cos(\sin x) \cos x.$$

فرض کنیم  $h(g(f(x))) = (h \circ g \circ f)(x)$  ترکیب سه تابع  $f$ ،  $g$ ، و  $h$  باشد. در این صورت، با فرض مشتق‌پذیری لازم و اعمال دوبار قاعده زنجیره‌ای متوالی، خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dx} h(g(f(x))) = h'(g(f(x))) \frac{d}{dx} g(f(x)) = h'(g(f(x))) g'(f(x)) f'(x).$$

به بیان نادقیق، پرانتزها را در هر لحظه از خارج به داخل "برمی‌داریم" و از هر تابع مشتق می‌گیریم.

مثال ۸. از  $(1 + \tan \sqrt{x})^2$  مشتق بگیرید.

حل. تابع  $(1 + \tan \sqrt{x})^2$  به شکل  $h(g(f(x)))$  است که در آن  $f(x) = \sqrt{x}$ ،  $g(x) = 1 + \tan x$ ، و  $h(x) = x^2$ . با دوبار استفاده از قاعده زنجیره‌ای، داریم

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (1 + \tan \sqrt{x})^2 &= 2(1 + \tan \sqrt{x}) \frac{d}{dx} (1 + \tan \sqrt{x}) \\ &= 2(1 + \tan \sqrt{x}) \sec^2 \sqrt{x} \frac{d}{dx} \sqrt{x} \\ &= 2(1 + \tan \sqrt{x}) \sec^2 \sqrt{x} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{(1 + \tan \sqrt{x}) \sec^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

مثال ۹. به ازای تابع  $y = f(x)$ ، مشتق  $y^n$  را در صورتی بیابید که  $n$  عددی صحیح باشد.

حل. بنابر قاعده زنجیره‌ای،

$$\frac{d(y^n)}{dx} = \frac{d(y^n)}{dy} \frac{dy}{dx} = ny^{n-1} \frac{dy}{dx},$$

یا، معادلاً،

$$\frac{d}{dx} y^n = ny^{n-1} y',$$

که در آن  $y'$  مشتق  $y$  نسبت به  $x$  است. برای آنکه مطمئن شوید این فرمول بسیار فشرده را فهمیده‌اید، آن را به طور کامل بنویسید:

$$\frac{d}{dx} [f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1} f'(x).$$

مشتفگی از توانهای گویا. قبلاً " نشان دادیم که فرمول

$$(11) \quad \frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

به ازای هر عدد صحیح  $n$  معتبر است. حال به کمک قاعدهٔ زنجیره‌ای نشان می‌دهیم که (۱۱) در صورتی که  $n$  عدد گویای دلخواهی باشد برقرار است. مطلب را با محاسبهٔ مشتق  $\sqrt[n]{x}$ ، که در آن  $n$  عدد صحیح مثبتی است، مستقیماً از تعریف آغاز می‌کنیم:

$$\frac{d}{dx} \sqrt[n]{x} = \lim_{u \rightarrow x} \frac{\sqrt[n]{u} - \sqrt[n]{x}}{u - x}.$$

این را می‌توان با فرض  $y = \sqrt[n]{x}$  و  $v = \sqrt[n]{u}$  به آسانی حساب کرد. در این صورت، بنابر پیوستگی  $\sqrt[n]{x}$ ،  $u \rightarrow x$  ایجاب می‌کند که  $v \rightarrow y$ ؛ و در نتیجه،

$$\frac{d}{dx} \sqrt[n]{x} = \lim_{v \rightarrow y} \frac{v - y}{v^n - y^n} = \lim_{v \rightarrow y} \frac{1}{\frac{v^n - y^n}{v - y}} = \frac{1}{\lim_{v \rightarrow y} \frac{v^n - y^n}{v - y}}.$$

اما حد موجود در مخرج چیزی جز مشتق  $y^n$  نسبت به  $y$  نیست. بنابراین،

$$(12) \quad \frac{dy}{dx} \sqrt[n]{x} = \frac{1}{\frac{d}{dy} y^n} = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{y}{ny^n},$$

یا، معادلاً،

$$(12') \quad \frac{d}{dx} \sqrt[n]{x} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}.$$

اگر  $n$  زوج باشد، فرمول (۱۲') فقط به ازای  $x > 0$  معتبر است، ولی اگر  $n$  فرد باشد، به ازای هر  $x \neq 0$  برقرار خواهد بود (چرا؟).

حال فرض کنیم  $r$  عددی گویا باشد؛ در نتیجه،  $r = m/n$ ، که در آن  $m$  و  $n$  صحیح‌اند. می‌توان فرض کرد  $n > 0$  و  $m/n$  به صورت تحویل‌ناپذیر باشد. با نوشتن

$$z = x^r = x^{m/n} = (\sqrt[n]{x})^m = y^m$$

و اعمال قاعدهٔ زنجیره‌ای، به کمک (۱۲) به دست می‌آوریم

$$\frac{d}{dx} x^r = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = my^{m-1} \frac{y}{ny^n} = \frac{m}{n} \frac{y^m}{y^n},$$

بنابراین،

$$\frac{d}{dx} x^r = \frac{m}{n} \frac{(\sqrt[n]{x})^m}{(\sqrt[n]{x})^n} = \frac{m}{n} \frac{x^{m/n}}{x} = \frac{m}{n} x^{(m/n)-1},$$

در نتیجه، مالا داریم

$$(۱۳) \quad \frac{d}{dx} x^r = rx^{r-1}.$$

این تعمیم مطلوب فرمول (۱۱) به نمای گویای دلخواه است. اگر  $x > 0$ ، فرمول (۱۳) همواره برقرار است، ولی به ازای مقادیری از  $r$ ، این فرمول برای  $x < 0$  یا  $x \leq 0$  نیز برقرار می‌باشد (بیشتر توضیح دهید).

مثال ۱۰. از  $x^{2/3} + x^{3/4}$  مشتق بگیرید.

حل. از فرمول (۱۳) داریم

$$\frac{d}{dx} (x^{2/3} + x^{3/4}) = \frac{2}{3} x^{(2/3)-1} + \frac{3}{4} x^{(3/4)-1} = \frac{2}{3} x^{-1/3} + \frac{3}{4} x^{-1/4}.$$

مثال ۱۱. از  $(1 - x^2)^{-1/5}$  مشتق بگیرید.

حل. بنابر قاعده زنجیره‌ای و فرمول (۱۳)،

$$\frac{d}{dx} (1 - x^2)^{-1/5} = -\frac{1}{5} (1 - x^2)^{-6/5} \frac{d}{dx} (1 - x^2) = \frac{2}{5} x (1 - x^2)^{-6/5}$$

### مسائل

از عبارات زیر مشتق بگیرید.

- |   |  |
|---|--|
| $(x^2 + 1)^3$ . ۲ ✓                           | $(x^2 - 2x + 1)^2$ . ۷ ✓               |
| $(x^3 + 1)^5$ . ۴ ✓                           | $(2x + 3)^4$ . ۳ ✓                     |
| $(x^2 + x - 1)^7$ . ۶ ✓                       | $(1 - 3x^2)^6$ . ۵ ✓                   |
| $(1 - x)(1 - x^2)^2$ . ۸ ✓                    | $(x + 1)^3(x - 1)^4$ . ۹ ✓             |
| $\frac{x^2}{(x + 1)^2}$ . ۱۰ ✓                | $(x + 1)(x + 2)^2(x + 3)^3$ . ۹ ✓      |
| $\left(\frac{1 - 2x}{1 + 2x}\right)^2$ . ۱۳ ✓ | $\frac{(1 - x)^2}{(1 + x)^3}$ . ۱۱ ✓   |
| $\frac{x}{(1 - x)^2(1 + x)^2}$ . ۱۴ ✓         | $\frac{(x^2 + 1)^2}{(x - 1)^2}$ . ۱۳ ✓ |

$$x\sqrt{1+x^2} \cdot ۱۶✓$$

$$\sqrt{x+\sqrt{x}} \cdot ۱۸✓$$

$$9x^{10/9} - 10x^{9/10} \cdot ۲۹✓$$

$$(s^2 + s + 2)^{7/11} \cdot ۲۲✓$$

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{\sqrt{u}} + \frac{1}{\sqrt[3]{u}} \cdot ۲۴✓$$

$$\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} \cdot ۲۶✓$$

$$\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}} \cdot ۲۸✓$$

$$\sin^3 x + \cos^3 x \cdot ۳۰✓$$

$$\frac{1}{3}\tan^3 x + \cot 3x \cdot ۳۲✓$$

$$(2 - \cos x)^{-2} \cdot ۳۴✓$$

$$x^2 \cos(1/x) \cdot ۳۶✓$$

$$\sqrt{\frac{1+\cos v}{1-\sin v}} \cdot ۳۸✓$$

$$(1 + \tan x)^{2/3} \cdot ۴۰✓$$

$$\sin(\tan x) \cdot ۴۲✓$$

$$\sin(\cos x^2) \cdot ۴۴✓$$

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{10} \cdot ۱۵۷✓$$

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot ۱۷✓$$

$$x^{3/2} - x^{4/3} + 1 \cdot ۱۹✓$$

$$x^{0.99} + x^{-0.99} \cdot ۲۱✓$$

$$\sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{t} \cdot ۲۳✓$$

$$\sqrt[3]{v^2} - \frac{3}{\sqrt{v}} \cdot ۲۵✓$$

$$\sqrt{1+\sqrt[3]{x}} \cdot ۲۷✓$$

$$\sin^2 x + \tan^2 x \cdot ۲۹✓$$

$$(1 + \sin 2x)^3 \cdot ۳۱✓$$

$$3 \cos 2x + 2 \sec 3x \cdot ۳۳✓$$

$$x \sin(1/x) \cdot ۳۵✓$$

$$\sqrt{1+\sin u} \cdot ۳۷✓$$

$$\cos w^3 \cdot ۳۹✓$$

$$\cos(\cos x) \cdot ۴۱✓$$

$$\sin(\sin(\sin x)) \cdot ۴۳✓$$

دیفرانسیل عبارات زیر را بیابید.

$$\sqrt{1-x^2} \cdot ۴۶✓$$

$$\sin(1/x^2) \cdot ۴۸✓$$

$$\sin(\cos x) \cdot ۵۰✓$$

$$\tan(\cot v) \cdot ۵۲✓$$

$$(x^4 - 2)^3 \cdot ۴۵✓$$

$$x^{3/5} + x^{5/3} \cdot ۴۷✓$$

$$\cos \sqrt{x} \cdot ۴۹✓$$

$$\tan u^2 \cdot ۵۱✓$$

$$(\sec w)^{2/3} \cdot ۵۳✓$$

۵۴ ✓  $f'(0)$  را در صورتی بیابید که  $f(x) = (2x + 3)^{100}$ .

۵۵ ✓  $f'(1)$  را در صورتی بیابید که  $f(x) = (1 + x^{-2})^{50}$ .

۵۶ - هر یک از فرمولهای زاویه مضاعف  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ ,  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$  را از دیگری با مشتگیری نتیجه بگیرید.

۵۷ با استفاده از قاعده زنجیره‌ای، فرمول  $D_x(1/g) = -g'/g^2$  برای مشتق متقابل تابع  $g$  را ثابت کنید (قضیه ۴، صفحه ۲۵۷).

۵۸ نشان دهید مشتگیری حقیقی را تغییر می‌دهد؛ یعنی، مشتق یک تابع زوج فرد و مشتق یک تابع فرد زوج است.

۵۹ نشان دهید که مشتگیری تناوب را حفظ می‌کند؛ یعنی، مشتق یک تابع متناوب متناوب با همان دوره تناوب است.

ماس بر منحنی داده شده را بیابید.

۶۱  $y = \sqrt{x+1}$  در  $(7, 2)$

۶۰  $y = \sqrt{x^2+1}$  در  $(1, \sqrt{2})$

۶۲  $y = \cos(\sin x)$  در  $((n + \frac{1}{2})\pi, \cos 1)$ ، که در آن  $n$  صحیح و دلخواه است. قائم به منحنی داده شده را بیابید.

۶۴  $y = x^{1/2}$  در  $(4, 8)$

۶۳  $y = \sqrt{x^3+1}$  در  $(0, 1)$

۶۵ فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} \quad \text{اگر}$$

تحقیق کنید که مشتق  $f'(0)$  موجود است. نشان دهید که  $f$  در  $x = 0$  دارای "مشکل  $\Delta y = 0$ " است. به عبارت دیگر، نشان دهید که هر همسایگی  $x = 0$  شامل نقاطی چون  $x \neq 0$  است که به ازای آنها نمو  $\Delta y = f(x) - f(0)$  صفر می‌باشد.

۶۶ نشان دهید که عبارت دیفرانسیل یک تابع، چه شناسه‌اش متغیر مستقل باشد یا نه، یکی است. به طور دقیقتر، نشان دهید هرگاه  $z = g(y)$  که در آن  $y = f(x)$ ، آنگاه، حتی اگر  $y$  متغیری وابسته باشد،  $dz = g'(y)dy$ .

## ۶.۲ مشتقات مراتب بالاتر

گوییم تابع  $f(x)$  بر بازه  $I$  مشتق‌پذیر است اگر در هر نقطه  $I$  دارای مشتق  $f'(x)$  باشد. فرض کنیم  $f(x)$  بر بازه  $I$  مشتق‌پذیر بوده و  $f'(x)$  خود بر  $I$  مشتق‌پذیر با مشتق

$$D_x f'(x)$$



باشد. در این صورت، تابع  $D_x f'(x)$  مشتق دوم  $f(x)$  نام دارد، و با  $f''(x)$  نموده و خوانده می شود. "اف زگوند  $x$ " یا با  $f^{(2)}(x)$  نشان داده می شود. به همین نحو، اگر  $f''(x)$  بر  $I$  مشتق پذیر با مشتق

$$D_x f''(x)$$

باشد،  $D_x f''(x)$  مشتق سوم  $f(x)$  نامیده و با  $f'''(x)$  یا  $f^{(3)}(x)$  نموده می شود. پس از  $n$  بار مشتقگیری از تابع اصلی  $f(x)$ ، مشتق مرتبه  $n$  تابع  $f(x)$ ، یا مشتق  $n$  م  $f(x)$ ، به دست می آید که با  $f^{(n)}(x)$  نموده شده و به طور بازگشتی با

$$(1) \quad f^{(n)}(x) = D_x f^{(n-1)}(x) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

تعریف می شود، که در آن فرض است که  $f^{(n-1)}(x)$  از مرتبه  $n-1$  موجود و بر  $I$  مشتق پذیر است. برای آنکه فرمول به ازای  $n=1$  نیز برقرار باشد، طبق تعریف می نویسیم

$$f^{(0)}(x) = f(x),$$

یعنی، "مشتق صفرم" یک تابع خود تابع است. در نوشتن مشتقات استفاده بیشتر از سه پریم مرسوم نیست.

مثال ۱. تابع

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

بر هر بازه  $I$  که شامل نقطه  $x=0$  نیست مشتق پذیر است. مشتق

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

نیز بر  $I$  مشتق پذیر است؛ و در نتیجه،  $f(x)$  بر  $I$  دارای مشتق دوم

$$f''(x) = D_x f'(x) = D_x \left( -\frac{1}{x^2} \right) = \frac{2}{x^3}$$

می باشد. چون  $f''(x)$  خود بر  $I$  مشتق پذیر است،  $f(x)$  بر  $I$  دارای مشتق سوم

$$f'''(x) = D_x f''(x) = D_x \left( \frac{2}{x^3} \right) = -\frac{6}{x^4}$$

است، و به همین ترتیب تا آخر (ر.ک. مسئله ۱۰).

$f^{(n)}(x)$  برحسب نماد  $d$  به صورت زیر نوشته می شود:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{d^n}{dx^n} f(x).$$

در صورت نمای  $n$  به علامت  $d$  وصل شده است ولی در مخرج به متغیر مستقل  $x$  متصل شده است. عبارت  $d^n/dx^n$  را باید موجودی واحد تلقی کرد و مشتگیری  $n$  گانه (یعنی،  $n$  بار مشتگیری) تابع نوشته شده بعد از آن نامید. به همین نحو،  $d^n f(x)/dx^n$  را باید طریقه دیگری برای نوشتن مشتق  $n$  م  $f^{(n)}(x)$  گرفت بی آنکه به علایم مختلف عبارت معانی جداگانه داد. مشتقات مراتب بالاتر متغیر وابسته به نحو طبیعی تعریف می شوند. لذا، اگر  $y = f(x)$  داریم

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x), \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x), \dots, \quad y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x).$$

گاهی از علامت  $D_x^n$  به معنی  $d^n/dx^n$  استفاده خواهد شد.

مثال ۲. هرگاه  $y = x^4$ ، آنگاه

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} 4x^3 = 12x^2, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx} 12x^2 = 24x,$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d}{dx} 24x = 24, \quad \frac{d^5y}{dx^5} = \frac{d}{dx} 24 = 0,$$

و تمام مشتقات از مرتبه  $n > 5$  نیز صفرند. توجه کنید که مشتق چهارم  $x^4$  مساوی  $24 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$  است. به طور کلی، فرض کنیم  $y = x^n$  در این صورت،

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}, \dots,$$

$$\frac{d^ky}{dx^k} = n(n-1) \cdots (n-k+1)x^{n-k}, \dots, \quad \frac{d^ny}{dx^n} = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!,$$

که در آن  $n!$  نمایش  $n$  فاکتوریل است یعنی حاصل ضرب  $n$  عدد صحیح مثبت اولیه  $(1! = 1, 2! = 2 \cdot 1 = 2, 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6, 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24, \dots)$ . لذا، هر یک از  $n$  مشتگیری اول درجه  $n$  را یکی پایین می آورد تا آنکه ثابت  $n!$  به دست آید، و تمام مشتقات مراتب بالاتر از  $n$  متحد صفر می باشند.

مثال ۳. از مثال قبل معلوم می شود که مشتق  $n$  م چند جمله ای

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \quad (a_n \neq 0)$$

از درجه  $n$  مساوی است با

$$P^{(n)}(x) = n!a_n,$$

$$P^{(n+1)}(x) \equiv P^{(n+2)}(x) \equiv \dots \equiv 0$$

مثال ۴. مشتقات مراتب دوم و سوم  $f(x)g(x)$  را بیابید.

حل. بنابر قاعده حاصل ضرب،

$$(fg)' = f'g + fg'$$

که در آن شناسه‌ها به‌خاطر سادگی حذف شده‌اند. لذا، اگر دوبار دیگر از قاعده حاصل ضرب استفاده کنیم،

$$\begin{aligned} (2) \quad (fg)'' &= \frac{d}{dx}(f'g + fg') = \frac{d}{dx}f'g + \frac{d}{dx}fg' \\ &= (f''g + f'g') + (f'g' + fg'') = f''g + 2f'g' + fg''. \end{aligned}$$

به همین نحو،

$$\begin{aligned} (3) \quad (fg)''' &= \frac{d}{dx}(f''g + 2f'g' + fg'') = \frac{d}{dx}f''g + 2\frac{d}{dx}f'g' + \frac{d}{dx}fg'' \\ &= (f'''g + f''g') + 2(f''g' + f'g'') + (f'g'' + fg''') \\ &= f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''. \end{aligned}$$

تبصره. فرمول کلی برای مشتق  $n$  حاصل ضرب  $f(x)g(x)$  در مسئله ۳۵، صفحه ۳۶۶، داده شده است. این فرمول توضیح می‌دهد که چرا ضرایب ۱، ۲، ۱ در فرمول (۲) و ضرایب ۱، ۳، ۳، ۱ در فرمول (۳) همان ضرایب در فرمولهای جبری آشنای  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  و  $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$  می‌باشند.

قانون دوم حرکت نیوتن. ذره‌ای به جرم  $m$  درنظر می‌گیریم که در امتداد خطی مستقیم حرکت می‌کند، و فرض کنیم موضع ذره در لحظه  $t$ ، که از مبدأ مناسبی سنجیده می‌شود،  $s = s(t)$  باشد. در اینجا از علامت  $s$  برای نمایش تابع و متغیر وابسته استفاده می‌کنیم که معمولاً برای احتراز از نماد اضافی صورت می‌گیرد. فرض کنیم نیروی  $F$  که عموماً "متغیر" است بر ذره وارد شود. در این صورت، قانون دوم حرکت نیوتن می‌گوید

$$(4) \quad F = ma,$$

که در آن  $a = a(t)$  شتاب ذره می‌باشد. همانند در صفحه ۱۷۳،  $a$  مشتق سرعت  $v = v(t)$  ذره نسبت به زمان است:

$$a = \frac{dv}{dt}.$$

اما  $t$  خود مشتق موضع  $s = s(t)$  ذره نسبت به زمان تعریف شده است:

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

بنابراین،

$$(۵) \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2},$$

یعنی، شتاب مشتق دوم موضع ذره نسبت به زمان است. با گذاردن (۵) در (۴)، به دست می‌آوریم

$$(۶) \quad m \frac{d^2s}{dt^2} = F.$$

معادلات دیفرانسیل. هر معادله مانند (۶)، شامل دست کم یک مشتق از یک تابع واحتمالا "خود تابع"، یک معادله دیفرانسیل نام دارد. منظور از مرتبه یک معادله دیفرانسیل یعنی مرتبه بالاترین مشتق آمده در معادله. لذا، قانون دوم نیوتن  $F = ma$  در واقع یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با نتایج فیزیکی سیارات است. البته، شکل دقیق معادله به ماهیت نیروی  $F$  وابسته است. مثلاً، "اگر  $F = 0$  اگر ذره "آزاد" باشد به این معنی که نیرویی بر آن اثر نکند،  $F = -ks$  ( $k > 0$ ) اگر بر ذره نیروی جاذبی متناسب با فاصله‌اش تا مبدا اثر کند، و از این قبیل. این مطلب مهم در بخش ۷.۴ دنبال خواهد شد.

مثال ۵. تحقیق کنید که تابع  $y = \sin x$  در معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

$$(۷) \quad y'' + y = 0$$

صدق می‌کند.

حل. برقراری معادله (۷) به ازای  $y = \sin x$  فوراً از  $y' = \cos x$  و  $y'' = -\sin x$  نتیجه می‌شود. به عنوان تمرین، نشان دهید که (۷) به وسیله  $y = \cos x$  و هر تابع به شکل  $y = a \sin x + b \cos x$ ، که در آن  $a$  و  $b$  ثابتهای دلخواهی هستند، نیز برقرار است.

مثال ۶. تحقیق کنید که تابع  $y = (x-1)/(x+1)$  در معادله دیفرانسیل مرتبه دوم  $2y'^2 = (y-1)y''$  صدق می‌کند.

حل. با تقسیم صورت  $x-1$  بر مخرج  $x+1$ ، به دست می‌آوریم

$$y = 1 - \frac{2}{x+1}.$$

سپس، با دوبار مشتقگیری از  $y$  به کمک قاعدهٔ زنجیره‌ای، خواهیم داشت

$$y' = \frac{(-2)(-1)}{(x+1)^2} \frac{d}{dx}(x+1) = \frac{2}{(x+1)^2},$$

$$y'' = \frac{2(-2)}{(x+1)^3} \frac{d}{dx}(x+1) = -\frac{4}{(x+1)^3}$$

(فرض کنیم  $x \neq -1$ ). بنابراین،

$$\begin{aligned} (y-1)y'' &= \left[-\frac{2}{x+1}\right] \left[-\frac{4}{(x+1)^3}\right] = \frac{8}{(x+1)^4} \\ &= 2 \left[\frac{2}{(x+1)^2}\right]^2 = 2y'^2, \end{aligned}$$

که همان مطلوب ما می‌باشد.

### مسائل

مشتقات دوم و سوم  $y''$  و  $y'''$  را در صورتی بیابید که

$$y = (1+x^2)^3 \quad . ۲ \quad \checkmark$$

$$y = 5x^{10} + 10x^5 + 1 \quad . ۱ \quad \checkmark$$

$$y = (1+x^{1/2})^2 \quad . ۴ \quad \checkmark$$

$$y = x/(1+x) \quad . ۳ \quad \checkmark$$

$$y = x^2 \cos x \quad . ۶ \quad \checkmark$$

$$y = x \sin x \quad . ۵ \quad \checkmark$$

$$y = \tan x \quad . ۸ \quad \checkmark$$

$$y = \sin x^2 \quad . ۷ \quad \checkmark$$

$$y = \sec x \quad . ۹ \quad \checkmark$$

۱۰. نشان دهید که به‌ازای هر  $n = 1, 2, \dots$

$$\frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{x} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} \quad (x \neq 0)$$

فرض کنید  $y = x(2x-1)^2(x+3)^3$ . با کمترین سعی، کمیات زیر را بیابید.

$$y^{(7)} \quad . ۱۲ \quad \checkmark$$

$$y^{(6)} \quad . ۸۸۰ \quad \checkmark$$

نشان دهید که

$$\frac{d^6}{dx^6} \sin^2 x = 32 \cos 2x \quad . ۱۴ \quad \checkmark$$

$$\frac{d^8}{dx^8} \frac{x^2}{x-1} = \frac{8!}{(x-1)^9} \quad . ۱۳ \quad \checkmark$$

$$\frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{x(1-x)} = n! \left[ \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} + \frac{1}{(1-x)^{n+1}} \right] \quad (n = 1, 2, \dots) \quad . ۱۵$$

۱۶. فرض کنید  $y = \sin x$ . نشان دهید به ازای هر  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} y^{(4n)} &= \sin x, & y^{(4n+1)} &= \cos x, \\ y^{(4n+2)} &= -\sin x, & y^{(4n+3)} &= -\cos x \end{aligned}$$

۱۷. به ازای چه ثابتهای  $a, b, c$  تابع

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & , x \leq 1 \\ ax^2 + bx + c & , x > 1 \end{cases}$$

در  $x = 1$  مشتق دوم دارد؟

۱۸. فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ x^4 & , x > 0 \end{cases}$$

$f'(x)$ ,  $f''(x)$  و  $f'''(x)$  را بیابید. نشان دهید که  $f^{(4)}(0)$  وجود ندارد.

۱۹. نشان دهید تابع

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

بر  $(-\infty, \infty)$  مشتقپذیر است ولی در  $x = 0$  مشتق دوم ندارد.

۲۰. تحقیق کنید که تابع  $y = \sqrt{1-x^2}$  در معادلهٔ دیفرانسیل  $yy' + x = 0$  صدق می‌کند.

۲۱. تحقیق کنید که تابع  $y = \sqrt{2x-x^2}$  در معادلهٔ دیفرانسیل  $y^3 y'' + 1 = 0$  صدق می‌کند.

۲۲. فرض کنید  $y = (x + \sqrt{x^2 + 1})^n$ ، که در آن  $n$  عدد صحیح دلخواهی است.

تحقیق کنید که  $y$  در معادلهٔ دیفرانسیل

$$(x^2 + 1)y'' + xy' - n^2 y = 0$$

صدق می‌کند.

## ۷.۲ مشتقگیری ضمنی

معادلات بی شماری وجود دارند شامل دو متغیر  $x$  و  $y$  که بعضی از آنها به آسانی نسبت به

$y$  و برحسب متغیر  $x$  حل می‌شوند. به عنوان مثال، اگر

$$(1) \quad x^2 + y^2 = 1,$$

می‌توان دو جواب یافت که  $y$  را به صورت تابع پیوسته‌ای از  $x$  بیان می‌کنند؛ یعنی،

$$(2) \quad y = \sqrt{1-x^2}$$

و

$$(۲') \quad y = -\sqrt{1-x^2}.$$

با اینحال، در مورد معادله

$$x^2 - xy + y^3 = 1,$$

یافتن فرمول صریحی که  $y$  را برحسب  $x$  بیان کند آسان نیست (باید معادله مکعبی را نسبت به  $y$  حل کنیم)، و در معادله

$$xy + \sin y + x^2 = 1$$

این امر ناممکن است. معبذا، برای هریک از دو معادله اخیر تابعی چون  $y = f(x)$  وجود دارد که در معادله داده شده، دست کم به ازای مقادیری از  $x$ ، صدق می کند (این را می توان به کمک قضیه مقدار میانی نشان داد)، اگرچه نمی توان فرمول صریحی برای تابع یافت یا اینکه ترجیح می دهیم این کار صورت نگیرد.

توابع ضمنی. تابع  $y = f(x)$  تعریف شده به این صورت، یعنی با معادله ای از دو متغیر  $x$  و  $y$ ، یک تابع ضمنی نام دارد. شرایط وجود توابع ضمنی در آخر بخش ۵.۱۳ داده شده است. در اینجا فرض است که اغلب از معادله ای از  $x$  و  $y$  برای تعریف  $y$  به عنوان تابعی از  $x$  استفاده می کنیم حتی وقتی نتوان معادله را نسبت به  $y$  به صورت عبارت صریحی از  $x$  حل کرد. عجب آنکه همواره می توان مشتق  $y' = dy/dx$  را به طور ضمنی، یعنی بدون حل نسبت به  $y$  و برحسب  $x$ ، حساب کرد (با اینحال، ر.ک. نکات مذکور پس از مثال ۱). چرا که اگر از معادله داده شده نسبت به  $x$  مشتق بگیریم (صرفاً  $y$  را تابعی از  $x$  تصور کنیم)، همواره معادله حاصل را می توان به آسانی نسبت به  $y'$  حل کرد. این طرز یافتن  $y'$  مشتقگیری ضمنی نام دارد. توجه می کنیم که، به خاطر قاعده زنجیره ای، مشتقگیری از تابع  $y$  نسبت به  $x$  همواره عامل  $y'$  را حاصل می دهد. لذا، مثل مثال ۹، صفحه ۲۱۹،

$$(۳) \quad \frac{d}{dx} y^n = \frac{d(y^n)}{dy} \frac{dy}{dx} = ny^{n-1}y',$$

$$\frac{d}{dx} \sin y = \frac{d \sin y}{dy} \frac{dy}{dx} = \cos y \frac{dy}{dx} = y' \cos y,$$

و غیره.

مثال ۱. نشان دهید که مشتقگیری ضمنی از معادله (۱) همان عبارت برای  $y'$  به دست می آید که مشتقگیری (صریح) معمولی از فرمول (۲) یا (۲') حاصل می دهد.

حل . با مشتگیری از طرفین (۱) به دست می‌آوریم

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx} 1,$$

یا ، به کمک (۳) ،

$$2x + 2yy' = 0.$$

این معادله به آسانی نسبت به  $y'$  حل شده و نتیجه می‌دهد

$$(۴) \quad y' = -\frac{x}{y}.$$

در اینجا می‌توان توقف کرد ، یا با گذاردن (۲) و (۳) در (۴) به دست آورد

$$(۵) \quad y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

و

$$(۵') \quad y' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

از آن سو ، مشتگیری صریح از (۲) و (۳) به کمک قاعده زنجیره‌ای نتیجه می‌دهد

$$\frac{d}{dx} \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \frac{d}{dx} (1-x^2) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

که با (۵) سازگار است ، و

$$\frac{d}{dx} (-\sqrt{1-x^2}) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \frac{d}{dx} (1-x^2) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

که با (۵') سازگار می‌باشد .

روش مشتگیری ضمنی را نمی‌توان کورکورانه به کار برد ، زیرا حتی در حالاتی که  $y$

به عنوان تابعی از  $x$  موجود نیست جوابی صوری برای  $y'$  به ما می‌دهد . مثلاً "بی‌توجه به مقدار  $x$  ،

مقداری از  $y$  که در معادله  $x^2 + y^2 = -1$  صدق کند وجود ندارد ، ولی مشتگیری ضمنی

از این معادله همان جواب (۴) مثل حالت معادله  $x^2 + y^2 = 1$  را به ما می‌دهد . همچنین ،

توجه کنید که وقتی پس از مشتگیری ضمنی از معادله‌ای شامل  $x$  و  $y$  حاصل را نسبت به  $y'$

حل می‌کنیم ، جواب عموماً " عبارتتی شامل هر دو متغیر  $x$  و  $y$  است .

مثال ۲ . مشتق (۴) را در نقطه  $x = \frac{1}{2}$  حساب کنید .



حل . با گذاردن  $x = \frac{1}{2}$  در (۱) ، معادله

$$y^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

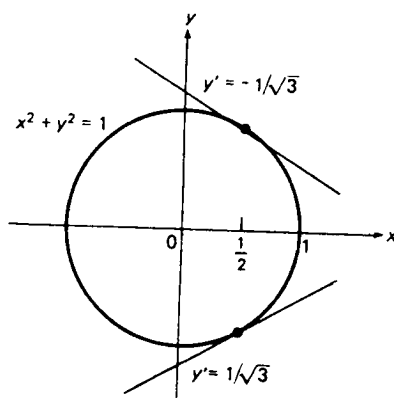
به دست می‌آید که دارای دو جواب  $y = \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$  است . با استفاده از (۴) ، درمی‌یابیم که مقادیر نظیر  $y'$  عبارتند از

$$y'|_{x=\frac{1}{2}, y=-\frac{1}{2}\sqrt{3}} = -\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

و

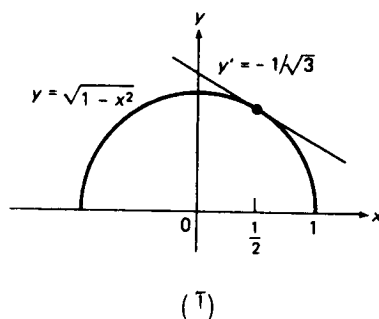
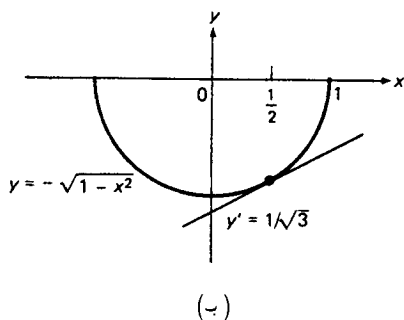
$$y'|_{x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}\sqrt{3}} = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

در اینجا  $y'|_{x=x_0, y=y_0}$  مقدار  $y'$  نظیر به  $x = x_0, y = y_0$  است ( ما اغلب این نوع خط قائم را مفید خواهیم یافت ) . چرا در اینجا دو مقدار مختلف  $y'$  را یافته‌ایم ؟ فقط به این خاطر که نمودار (۱) ، یعنی دایره به شعاع ۱ و مرکز مبدأ ، دو نقطه متفاوت با مختص  $x$  یکسان  $\frac{1}{2}$  دارد ، و همانطور که شکل ۱۹ نشان داده ، شیب مماسهای دایره در این نقاط



شکل ۱۹

متفاوتند . به عبارت دیگر ، یک مقدار از شیب  $y'$  مربوط به نیمدایره بالایی (۲) است که نمودارش در شکل ۲۰ (آ) رسم شده است ، و مقدار دیگر  $y'$  مربوط به نیمدایره پایینی (۲') است که نمودارش در شکل ۲۰ (ب) نموده شده است . طبیعی است که اگر در (۵) و (۵') قرار دهیم  $x = \frac{1}{2}$  ، همین دو مقدار برای  $y'$  به دست می‌آیند .



شکل ۲۰

مثال ۳. به فرض آنکه

$$(۶) \quad x^2 - xy + y^3 = 1,$$

$y'$  را در  $x = 1$  حساب کنید.

حل. با مشتقگیری ضمنی داریم

$$\frac{d}{dx}(x^2 - xy + y^3) = \frac{d}{dx} 1,$$

یا، به کمک (۳)،

$$2x - y - xy' + 3y^2y' = 0,$$

توجه کنید که، بنا بر قاعدهٔ حاصل ضرب،  $(xy)' = y + xy'$ . با حل این نسبت به  $y'$ ، معلوم می شود که

$$(۷) \quad y' = \frac{2x - y}{x - 3y^2},$$

و، با گذاردن  $x = 1$  در (۶)، معادلهٔ

$$1 - y + y^3 = 1,$$

یا

$$y^3 = y$$

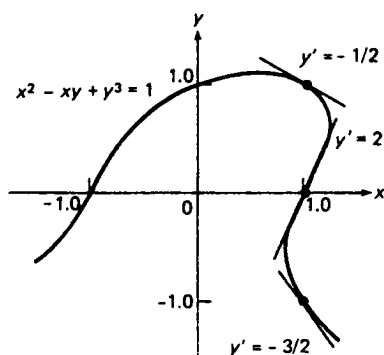
به دست می آید، که دارای سه جواب  $y = 0$  و  $y = \pm 1$  می باشد. مقادیر نظیر  $y'$  حاصل از (۷) عبارتند از

$$y'|_{x=1, y=0} = \frac{2(1) - 0}{1 - 3(0)^2} = 2,$$

$$y'|_{x=1, y=1} = \frac{2(1) - 1}{1 - 3(1)^2} = -\frac{1}{2},$$

$$y'|_{x=1, y=-1} = \frac{2(1) + 1}{1 - 3(-1)^2} = -\frac{3}{2}.$$

شکل ۲۱ معنی هندسی این سه مقدار  $y'$  را نشان می دهد .



شکل ۲۱

مثال ۴ . با استفاده از مشتقگیری ضمنی نشان دهید

$$(۸) \quad \frac{d}{dx} x^r = r x^{r-1},$$

که در آن  $r$  عددی گویا است .

حل . ما قبلاً " (۸) را در بخش ۶.۲ به روشی دیگر ثابت کردیم . فرض کنیم  $y = x^{m/n}$  در این صورت ،

$$y^n = (x^{m/n})^n = x^m,$$

و ، با مشتقگیری نسبت به  $x$  و استفاده از (۳) ، به دست می آوریم

$$n y^{n-1} y' = m x^{m-1}.$$

پس نتیجه می شود

$$y' = \frac{m x^{m-1}}{n y^{n-1}} = \frac{m}{n} \frac{x^{m-1}}{(x^{m/n})^{n-1}} = \frac{m}{n} \frac{x^{m-1}}{x^{m-(m/n)}} = \frac{m}{n} x^{(m/n)-1},$$

که با (۸) معادل است . در اینجا روش مشتقگیری ضمنی نتایج زیادی به بار می آورد .

همانطور که مثال بعد نشان می‌دهد، مشتقگیری ضمنی اغلب کار یافتن مشتقات مراتب بالاتر را ساده می‌کند.

مثال ۵. به فرض آنکه

$$(9) \quad x^2 + y^2 = 25,$$

مقادیر  $y''$  و  $y'''$  را در نقطه  $(3, 4)$  بیابید.

حل. با مشتقگیری ضمنی از (۹) نسبت به  $x$  خواهیم داشت

$$(10) \quad 2x + 2yy' = 0,$$

و لذا، مثل مثال ۱،

$$y' = -\frac{x}{y},$$

در نتیجه، بخصوص،

$$(11) \quad y'|_{x=3, y=4} = -\frac{3}{4}.$$

اگر رابطه (۱۰) را بر ۲ تقسیم کرده و مجدداً مشتق بگیریم، به دست می‌آوریم

$$(12) \quad \frac{d}{dx}(x + yy') = 1 + y'^2 + yy'' = 0,$$

یا

$$y'' = -\frac{1 + y'^2}{y}.$$

لذا، به کمک (۱۱) داریم

$$(13) \quad y''|_{x=3, y=4} = -\frac{1 + \frac{9}{16}}{4} = -\frac{25}{64}.$$

مشتقگیری ضمنی دیگر، این بار از معادله (۱۲)، نتیجه می‌دهد که

$$\frac{d}{dx}(1 + y'^2 + yy'') = 2y'y'' + y'y''' + yy''' = 3y'y'' + yy''' = 0,$$

یا

$$y''' = -\frac{3y'y''}{y}.$$

اگر از (۱۱) و (۱۳) برای محاسبه  $y'''$  در نقطه  $(3, 4)$  استفاده کنیم، درمی یابیم که

$$y'''|_{x=3, y=4} = -\frac{3(-\frac{3}{4})(-\frac{25}{64})}{4} = -\frac{225}{1024}.$$

سعی کنید این مشتقات مراتب بالاتر را با مشتقگیری صریح از  $y = \sqrt{25 - x^2}$  حساب کنید و ببینید چقدر بیشتر کار می برد.

### مسائل

با استفاده از مشتقگیری ضمنی،  $y'$  را در صورتی بیابید که  $x$  و  $y$  در معادله داده شده صدق کنند.

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = -1 \quad \cdot ۲ \quad \checkmark$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \cdot ۱ \quad \checkmark$$

$$x^3 + y^3 = 3xy \quad \cdot ۴ \quad \checkmark$$

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1 \quad \cdot ۳ \quad \checkmark$$

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 1 \quad \cdot ۶ \quad \checkmark$$

$$(xy)^3 = 3(x + y) \quad \cdot ۵ \quad \checkmark$$

$$y^2 = \frac{1}{x + y} \quad \cdot ۸ \quad \checkmark$$

$$x^{2/3} + y^{-2/3} = 8 \quad \cdot ۷ \quad \checkmark$$

$$\frac{1 + xy}{x + y} = 10 \quad \cdot ۱۰ \quad \checkmark$$

$$\frac{1}{x + y} - \frac{1}{x - y} = 2 \quad \cdot ۹ \quad \checkmark$$

$$y = \sin(x + y) \quad \cdot ۱۲ \quad \checkmark$$

$$\sin x + \cos y = 0 \quad \cdot ۱۱ \quad \checkmark$$

$$y \tan y = x^2 \quad \cdot ۱۴ \quad \checkmark$$

$$\cos xy = x \quad \cdot ۱۳ \quad \checkmark$$

۱۵. در معادله  $x^2 + y^2 = r^2$  فرض کنید  $x$  تابعی از  $y$  گرفته شود. با استفاده از مشتقگیری ضمنی،  $dx/dy$  (نه  $dy/dx$ ) را محاسبه نمایید. سپس نشان دهید که مماس بر دایره  $x^2 + y^2 = r^2$  در نقاط  $(\pm r, 0)$  قائم است.

۱۶. با استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال، نشان دهید که مماس در هر نقطه  $P$  از دایره  $x^2 + y^2 = r^2$  بر شعاع و اصل از مبدأ به  $P$  عمود است.

۱۷. معادله  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$  را رسم کنید.  $y'$  را با مشتقگیری ضمنی بیابید. معادله را نسبت به  $y$  به عنوان تابعی از  $x$  حل کرده، سپس  $y'$  را با مشتقگیری معمولی بیابید.  $y'|_{x=4}$  را به هر دو روش حساب کنید.

مماس بر نمودار معادلات زیر را بیابید.

$$y^2 + xy - 5 = 0 \quad \cdot ۱۸ \quad \checkmark \quad \text{در } (4, -5)$$

✓ ۱۹.  $0 = x^2 - 4x + y^2 - y^3$  در  $(2, 2)$

✓ ۲۰.  $0 = y^4 - 2x^2y^3 - 27$  در  $(-1, 3)$

فرض کنید  $x^2 - xy + y^2 = 1$ . با استفاده از مشتقگیری ضمنی، سه مشتق اول  $y', y'', y'''$  را در هر نقطه<sup>۴</sup> زیر حساب کنید.

✓ ۲۳.  $x = -1$

✓ ۲۲.  $x = 1$

✓ ۲۱.  $x = 0$

نقاطی از نمودار معادله<sup>۴</sup>

$$x^2 - xy + y^2 = 1$$

را بیابید که مماس در آنها به شیب داده شده<sup>۴</sup> زیر باشد.

۲۷.  $135^\circ$

۲۶.  $45^\circ$

۲۵.  $90^\circ$

۲۴.  $0^\circ$

۲۸. تغییر  $x$  به  $-x$  در معادله<sup>۴</sup> (۶) معادله<sup>۴</sup>  $x^2 + xy + y^3 = 1$  را به دست می دهد، که نمودارش انعکاس نمودار شکل ۲۱ نسبت به محور  $y$  است. با استفاده از مشتقگیری

ضمنی، چهار مشتق اول  $y', y'', y''', y^{(4)}$  در  $x = 1$  را حساب کنید.

۲۹. استفاده<sup>۴</sup> کورکورانه از مشتقگیری ضمنی در معادله<sup>۴</sup>  $x^4 + y^4 = x^2y^2$  به فرمول

$$y' = \frac{2x^3 - xy^2}{x^2y - 2y^3}$$

منجر می شود. چرا این نتیجه بی معنی است؟

## ۸.۲ میزانهای مرتبط

رده<sup>۴</sup> مهمی از مسائل وجود دارد که در آنها میزان تغییر کمیتی، که معمولاً "نسبت به زمان است، داده شده و از ما میزان تغییر کمیت مرتبط دیگری خواسته می شود. روش حل مسائل میزانهای مرتبط شباهت زیادی به تکنیک مشتقگیری ضمنی دارد، ولی در اینجا دو متغیر وابسته وجود دارند.

مثال ۱. یک بالون کروی به میزان یکدهم فوت مکعب بر ثانیه (به طور فشرده تر،  $0.1 \text{ ft}^3/\text{sec}$ ) هوا از دست می دهد. سرعت کاهش شعاع بالون وقتی قطرش 6 ft است چقدر می باشد؟

حل. فرض کنیم  $R$  شعاع و  $V$  حجم بالون باشد. در این صورت،

(۱) 
$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

چون اندازه<sup>۴</sup> بالون تغییر می کند،  $V$  و  $R$  هر دو تابع زمان  $t$  هستند. این امر را می توان

با نوشتن  $V = V(t)$ ,  $R = R(t)$  بیان کرد، ولی بهتر است فقط به یاد داشته باشیم که  $V$  و  $R$  تابع زمانند. با مشتقگیری از طرفین (۱) نسبت به  $t$  به دست می‌آوریم

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi \left( 3R^2 \frac{dR}{dt} \right) = 4\pi R^2 \frac{dR}{dt}.$$

حال این معادله را نسبت به  $dR/dt$  حل کرده، به دست می‌آوریم

$$(۲) \quad \frac{dR}{dt} = \frac{1}{4\pi R^2} \frac{dV}{dt}.$$

این مرحله یک مرحله کلیدی است، زیرا  $dR/dt$ ، یعنی میزان تغییر مجهول شعاع بالون، را برحسب  $dV/dt$ ، یعنی میزان تغییر معلوم حجم آن، بیان کرده‌ایم. در واقع، فرض است که حجم بالون به میزان  $0.1 \text{ ft}^3/\text{sec}$  کاهش می‌یابد (هوا از دست می‌دهد)، بدین معنی که  $dV/dt$  دارای مقدار ثابت  $-0.1 \text{ ft}^3/\text{sec}$  می‌باشد. با گذاردن این  $dV/dt$  در (۲)، معلوم می‌شود که

$$(۳) \quad \frac{dR}{dt} = -\frac{0.1}{4\pi R^2}.$$

وقتی قطر بالون 6 ft است، شعاع آن 3 ft می‌باشد. در این لحظه فرمول (۳) نتیجه می‌دهد که

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{0.1}{4\pi(3)^2} = -\frac{1}{360\pi} \approx -0.00088 \text{ ft/sec}.$$

چون این عدد خیلی کوچک است، آن را به اینج بر دقیقه تبدیل می‌کنیم، خواهیم داشت

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{1}{360\pi} \frac{\text{ft}}{\text{sec}} \frac{12 \text{ in}}{\text{ft}} \frac{60 \text{ sec}}{\text{min}} = -\frac{12(60)}{360\pi} \frac{\text{in}}{\text{min}},$$

که در آن واحدهای سنجش را به طریقی که در فیزیک مقدماتی آموخته‌ایم حذف می‌کنیم. بنابراین،

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{2}{\pi} \approx -0.64 \text{ in/min},$$

یعنی، شعاع  $R$  به میزانی تقریباً  $0.64 \text{ in/min}$  کاهش می‌یابد، که برای این بالون بزرگ نشتی جزئی می‌باشد. توجه کنید که  $dR/dt$  خود تابعی از شعاع است. در واقع، همانطور که رابطه ۳ نشان می‌دهد، هر قدر بالون کوچکتر باشد  $|dR/dt|$  بزرگتر است.

مثال ۲. در مثال قبل، سرعت کاهش مساحت بالون وقتی شعاعش 4 ft باشد چقدر است؟

حل. مساحت یک کره به شعاع  $R$  مساوی است با

$$S = 4\pi R^2.$$

بنابراین، پس از مشتقگیری نسبت به زمان،

$$(۴) \quad \frac{dS}{dt} = 4\pi \left( 2R \frac{dR}{dt} \right) = 8\pi R \frac{dR}{dt}.$$

این میزان تغییر مساحت بالون برحسب میزان تغییر شعاعش را بیان می‌کند، ولی این همان چیزی که می‌خواهیم نیست. با اینحال، رابطه مطلوب بین  $dS/dt$  و کمیت داده شده  $dV/dt = -0.1 \text{ ft}^3/\text{sec}$  را می‌توان به آسانی با گذاردن (۲) در (۴) به دست آورد:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{8\pi R}{4\pi R^2} \frac{dV}{dt} = \frac{2}{R} \frac{dV}{dt} = -\frac{0.2}{R}.$$

از این رابطه وقتی شعاع بالون 4 ft است نتیجه می‌شود که

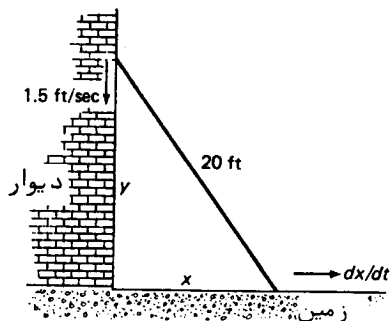
$$\frac{dS}{dt} = -\frac{0.2}{4} = -0.05 \text{ ft}^2/\text{sec},$$

یا، معادلاً،

$$\frac{dS}{dt} = -0.05(12)^2 = -7.2 \text{ in}^2/\text{sec},$$

یعنی، مساحت بالون به میزان 7.2 اینچ مربع برثانیه کاهش می‌یابد.

مثال ۳. نردبانی به طول 20 ft به دیوار تکیه دارد. فرض کنید سر نردبان به میزان ثابت 1.5 ft/sec به پایین سر بخورد. سرعت حرکت پای نردبان وقتی سرش در فاصله 16 ft از زمین است چقدر است؟



شکل ۲۲



حل. نردبان را پاره خط مستقیمی تجسم کرده، مختصات قائم را مثل شکل ۲۲ معرفی می‌کنیم، که در آن  $x$  فاصله بین دیوار و پای نردبان بوده و  $y$  ارتفاع سر نردبان می‌باشد. بنا بر قضیه فیثاغورس،

$$(5) \quad x^2 + y^2 = 20^2 = 400.$$

چون موضع نردبان تغییر می‌کند، هر دوی  $x$  و  $y$  توابعی از زمان  $t$  اند، مطلبی که می‌توان با نوشتن  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  بر آن تأکید کرد. برای یافتن  $dx/dt$ ، از طرفین (۵) نسبت به  $t$  مشتق گرفته معادله

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = 0$$

را به دست می‌آوریم، که می‌توان آن را نسبت به  $dx/dt$  حل کرد. نتیجه عبارت است از

$$(6) \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{y}{x} \frac{dy}{dt}.$$

بنابر صورت مسئله، سر نردبان به میزان ثابت 1.5 ft/sec به پایین سر می‌خورد. لذا، مختص  $y$  به میزان 1.5 ft/sec کاهش می‌یابد، بدین معنی که  $dy/dt$  مساوی 1.5 ft/sec - می‌باشد. با گذاردن این مقدار  $dy/dt$  در (۶)، به دست می‌آوریم

$$(7) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1.5y}{x}.$$

با حل (۵) نسبت به  $x$  و برحسب  $y$ ، داریم  $x = \sqrt{400 - y^2}$ . لذا، وقتی  $y = 16$ ، یعنی وقتی سر نردبان در فاصله 16 ft از زمین است،  $x = \sqrt{400 - 16^2} = \sqrt{400 - 256} = \sqrt{144} = 12$ ؛ در نتیجه، پای نردبان در فاصله 12 ft از دیوار می‌باشد. با گذاردن این مقادیر  $x$  و  $y$  در (۷)، معلوم می‌شود که

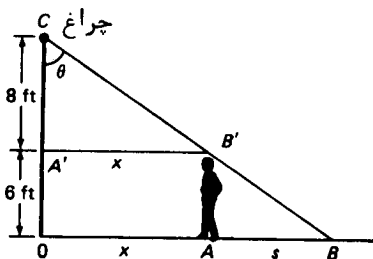
$$\frac{dx}{dt} = \frac{(1.5)(16)}{12} = 2 \text{ ft/sec}.$$

لذا، در لحظه‌ای که سر نردبان در فاصله 16 ft از زمین است، پای نردبان به میزان 2 ft/sec از دیوار دور می‌شود.

مثال ۴. مردی با قد 6 ft و با تندى 4 ft/sec به سوى يك چراغ خيابان كه در 14 ft بالای زمین نصب شده است حرکت می‌کند. سرعت کاهش طول سایه مرد چقدر است؟

حل. فرض کنیم  $x$  فاصله مرد تا پای تیر بوده و  $s$  طول سایه آن مثل شکل ۲۳ باشد (در

مثال بعدی، زاویه  $\theta$  نقشی ایفا خواهد کرد. مثلشهای  $ABB'$  و  $A'B'C$  زوایای مساوی دارند؛



شکل ۲۳

و در نتیجه، باهم مشابه‌اند. از اینرو، نسبتهای اضلاع نظیر مساویند. بخصوص،

$$\frac{|AB|}{|AB'|} = \frac{|A'B'|}{|A'C|},$$

یعنی،

$$\frac{s}{6} = \frac{x}{8},$$

یا، معادلاً،

$$(۸) \quad s = \frac{3}{4}x.$$

معادله (۸) طول سایهٔ مرد را برحسب فاصله‌اش تا تیر بیان می‌کند، که همان مطلوب ما می‌باشد.

حال از طرفین (۸) نسبت به زمان  $t$  مشتق می‌گیریم، داریم

$$(۹) \quad \frac{ds}{dt} = \frac{3}{4} \frac{dx}{dt}.$$

بنابر صورت مسئله، مرد با تندی  $4 \text{ ft/sec}$  به سوی تیر قدم می‌زند؛ یعنی،  $dx/dt = -4 \text{ ft/sec}$  با گذاردن این مقدار در (۹)، به دست می‌آوریم

$$\frac{ds}{dt} = \frac{3}{4}(-4) = -3 \text{ ft/sec}.$$

لذا، طول سایهٔ مرد به میزان ثابت  $3 \text{ ft/sec}$ ، بی‌توجه به فاصله‌اش تا تیر، کاهش می‌یابد.

مثال ۵. در مسئلهٔ قبل، فرض کنیم  $\theta$  زاویهٔ بین سایهٔ مرد در سرش باشد؛ این زاویهٔ

بین تیر چراغ برق و یک شعاع نورانی از چراغ به سروی نیز می باشد. سرعت تغییر  $\theta$  وقتی مرد در فاصله ۱۲ ft از تیر است چقدر است؟

حل. با توجه به شکل ۲۳، می بینیم که

$$x = 8 \tan \theta.$$

با مشتگیری از طرفین این معادله نسبت به زمان  $t$ ، به دست می آوریم

$$(۱۰) \quad \frac{dx}{dt} = 8 \frac{d \tan \theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = 8 \sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt}.$$

با حل معادله (۱۰) نسبت به  $d\theta/dt$ ، یعنی کمیتی که سعی می کنیم آن را بر حسب داده های مسئله بیان کنیم، به دست می آوریم

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\cos^2 \theta}{8} \frac{dx}{dt}.$$

به علاوه، از شکل واضح است که

$$\cos \theta = \frac{|A'C|}{|B'C|} = \frac{8}{\sqrt{8^2 + x^2}}.$$

از تلفیق دو معادله اخیر خواهیم داشت

$$(۱۱) \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{8}{64 + x^2} \frac{dx}{dt},$$

در نتیجه، توانستیم  $d\theta/dt$  را کاملاً "بر حسب داده ها، یعنی  $dx/dt = -4$  ft/sec و  $x = 12$ ، بیان داریم. با گذاردن این مقادیر در (۱۱)، درمی یابیم که

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{8(4)}{64 + 12^2} = -\frac{2}{13} \approx -0.154 \text{ rad/sec}.$$

جواب به رادیان بر ثانیه است، زیرا ضمن استفاده از فرمول  $D_\theta \tan \theta = \sec^2 \theta$  برای مشتگیری از  $\tan \theta$  تلویحاً "فرض کرده ایم  $\theta$  به رادیان است. البته، به محض یافتن جواب می توان آن را به درجه تبدیل کرد. در واقع،

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{2}{13} \frac{180}{\pi} \approx -8.8^\circ/\text{sec},$$

یعنی، زاویه سایه مرد در سرش به میزان تقریبی ۸.۸ درجه بر ثانیه کاهش می یابد. از فرمول (۱۱) معلوم می شود که در این مسئله، برخلاف مسئله قبل، جواب به فاصله مرد تا تیر چراغ برق بستگی دارد.

چگونه مسائل میزانهای مرتبط را حل کنیم. روند گام به گام زیر شما را در حل مسائل

میزانهای مرتبط یاری خواهد کرد.

۱. متغیرهای مرتبط را نامگذاری کرده، حروفی را اختیار می‌کنیم که معنی واقعی متغیرها را بدهد. حروف اول انتخاب شایسته‌ای است، مانند  $V$  برای حجم،  $L$  برای طول، و  $T$  برای دما ( $t$  به زمان اختصاص داده شده است).

۲. معادله‌ای شامل متغیرهای مرتبط می‌نویسیم. این مرحله را اغلب می‌توان با رسم شکلی مناسب ساده کرد، و شما باید در رسم اشکال "به قدر کافی" مناسب، یعنی اشکالی که ویژگیهای اساسی یک مسئله را بدون پیرایه زیاد نشان دهد، مهارت کسب کنید.

۳. از طرفین معادله نسبت به متغیر مستقل مشتق می‌گیریم. این متغیر که نوعاً "ولی نه همیشه" زمان  $t$  است، یکی از متغیرهای مرتبط نیست؛ و لذا، می‌توان انتظار داشت که قاعده زنجیره‌ای لازم باشد.

۴. معادله دیفرانسیل میزان تغییر مطلوب را حل کرده، سپس (ولی نه قبلاً!) حل را با جانشانی داده‌های عددی آمده در صورت مسئله، به انضمام میزان تغییر معلوم و مقادیر داده یا محاسبه شده متغیرها، کامل می‌کنیم.

## مسائل

۱. نقطه  $P = (x, y)$  در ربع اول از مبدأ در امتداد منحنی  $y = x^3/48$  طوری حرکت می‌کند که  $dx/dt$  ثابت است. چه مختص،  $x$  یا  $y$ ، سریعتر افزایش می‌یابد؟ (جواب به اندازه  $x$  بستگی دارد.)

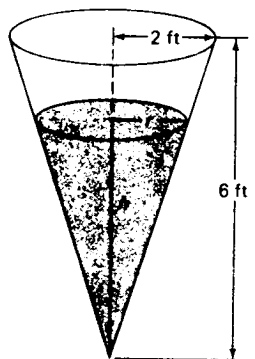
۲. شعاع موج مستدیر حاصل از انداختن سنگی در یک استخر به میزان (متر بر ثانیه)  $3 \text{ m/sec}$  پخش می‌شود. وقتی موج به قطر  $10 \text{ m}$  است، سرعت افزایش مساحت محصور به موج چقدر است؟

۳. طول یک مستطیل به میزان (سانتیمتر بر ثانیه)  $3 \text{ cm/sec}$  کاهش یافته و عرض به میزان  $2 \text{ cm/sec}$  افزایش می‌یابد. در لحظه‌ای معین مستطیل به طول  $50 \text{ cm}$  و عرض  $20 \text{ cm}$  است. آیا مساحت مستطیل صعودی است یا نزولی و سرعت آن چقدر است؟

۴. هوا به میزان  $10 \text{ ft}^3/\text{min}$  به داخل یک بالون کروی بزرگ وارد می‌شود. سرعت افزایش شعاع بالون وقتی قطرش  $4 \text{ ft}$  باشد چقدر است؟ سرعت افزایش مساحت آن در همین لحظه چقدر است؟

۵. حجم یک بالون در لحظه‌ای که مساحتش به میزان  $5 \text{ ft}^2/\text{sec}$  در حال افزایش است به میزان  $15 \text{ ft}^3/\text{sec}$  زیاد می‌شود. شعاع آن چقدر است؟ سرعت افزایش شعاع آن در این لحظه چقدر است؟

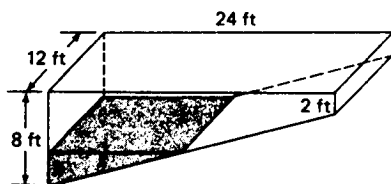
۶. حجم یک گلوله نفتالین در حال تبخیر به میزانی متناسب با مساحتش کاهش می یابد. نشان دهید این ایجاب می کند که شعاع گلوله به میزان ثابت کاهش یابد.
۷. دو کشتی  $A$  و  $B$  از نقطه  $P$  در امتداد مسیرهایی عمود برهم از یکدیگر دور می شوند. کشتی  $A$  با تندی ۱۵ گره و کشتی  $B$  با تندی ۲۰ گره حرکت می کند. فرض کنید در یک لحظه  $A$  در فاصله ۵ گره دریایی از  $P$  و  $B$  در فاصله ۱۰ گره دریایی از  $P$  باشد. یک ساعت بعد سرعت دور شدن کشتیها از هم چقدر است؟ (یک گره دریایی بر ساعت = یک گره)
۸. مایعی به میزان  $8 \text{ cm}^3/\text{sec}$  در یک ظرف استوانه ای به شعاع  $2 \text{ cm}$  ریخته می شود. با چه سرعتی سطح مایع بالا می آید؟
۹. یک سر طنابی به یک قاشق  $3 \text{ ft}$  پایین اسکله بسته شده است. سر دیگر که به چرخ چاهی در کنار اسکله وصل شده به میزان  $1 \text{ ft/sec}$  کشیده می شود. سرعت نزدیک شدن قایق به اسکله در فاصله  $4 \text{ ft}$  از آن چقدر است؟ سرعت تغییر زاویه بین طناب و سطح آب در این لحظه چقدر است؟
۱۰. اتومبیلی در یک جاده با سرعت  $60 \text{ mph}$  مستقیماً از زیر یک بالون که با سرعت  $10 \text{ mph}$  بالا می رود می گذرد. فرض کنید در لحظه عبور اتومبیل بالون در ارتفاع ۱ میلی باشد. ۱ دقیقه بعد، سرعت افزایش فاصله بین اتومبیل و بالون چقدر است؟ سرعت تغییر زاویه بین جاده و خط واصل بین اتومبیل و بالون در این لحظه چقدر است؟
۱۱. آب به میزان  $720 \text{ in}^3/\text{min}$  وارد یک مخزن به شکل مخروط مستدیر قائم وارون به ارتفاع ۶ ft و شعاع ۲ ft در بالا می شود (ر.ک. شکل ۲۴، که در آن بشکه تا عمق  $h$  پر شده و سطح مایع به شعاع  $r$  می باشد). سرعت بالا آمدن سطح آب وقتی یک هشتم بشکه پر



شکل ۲۴

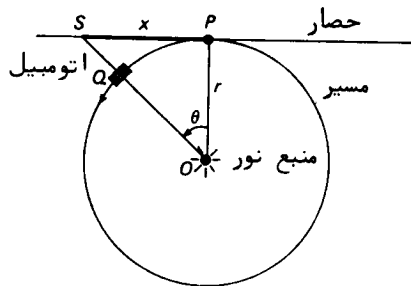
شده، یکدوم آن پر شده چقدر است؟ چقدر طول می کشد تا بشکه پر شود؟ آیا پاسخ آخرین سؤال نیاز به حساب دیفرانسیل و انتگرال دارد؟ (حجم یک مخروط مستدیر قائم به ارتفاع  $h$  و شعاع قاعده  $r$  عبارت است از  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ).

۱۲. یک استخر به عرض ۱۲ ft، طول ۲۴ ft، عمق ۲ ft در انتهای کم عمق، و عمق ۸ ft در انتهای گود به میزان  $16 \text{ ft}^3/\text{min}$  از آب پر می شود (ر.ک. شکل ۲۵)، که در آن استخر تا عمق  $h$  پر شده است). سرعت بالا آمدن آب وقتی آب در انتهای کم عمق به عمق ۱ ft باشد چقدر است؟ وقتی عمق آب در انتهای گود ۲ ft باشد چقدر است؟ نیم ساعت پس از شروع به پر شدن چقدر است؟



شکل ۲۵

۱۳. یک اتومبیل مسابقه با سرعت (کیلومتر بر ساعت)  $150 \text{ km/hr}$  حول یک مسیر مستدیر در حرکت است. فرض کنید منبع نوری در مرکز  $O$  مسیر و یک حصار مماس بر مسیر در نقطه  $P$  وجود داشته باشند (ر.ک. شکل ۲۶)، که در آن مسیر به شعاع  $r$  بوده و

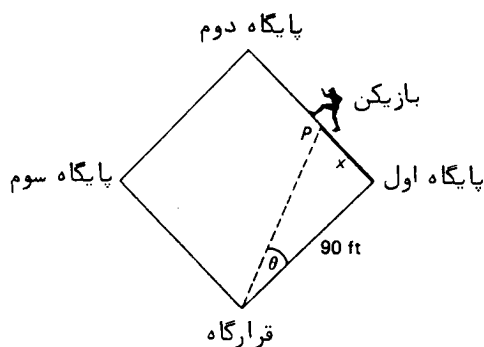


شکل ۲۶

اتومبیل، در نقطه  $Q$ ، در جهت خلاف عقربه های ساعت حرکت می کند). سرعت حرکت سایه اتومبیل (نقطه  $S$  در شکل) روی حصار وقتی یکهشتم دور از  $P$  را پیموده چقدر است؟

۱۴. عکاسی از یک مسابقه فیلمبرداری می کند. فرض کنید فاصله عمودی وی از مسیر در

- خط پایان 40 ft بوده، و دوربین برای آنکه روی برنده وقتی در فاصله 30 ft از خط پایان است ثابت بماند باید به میزان 18 درجه بر ثانیه بچرخد. سرعت برنده در این لحظه چقدر است؟ (فرض کنید مسیر خط راست باشد).
۱۵. یک بازیکن بیس بال در مدت 3.6 ثانیه از پایگاه اول به پایگاه دوم می دود (ر. ک. شکل ۲۷، که در آن بازیکن در فاصله  $x$  از پایگاه اول است).

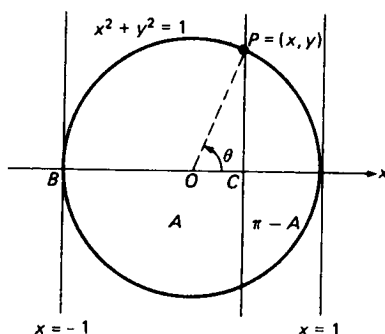


شکل ۲۷

- سرعت تغییر زاویه بین خط پایگاه اول و خط قرارگاه تا بازیکن وقتی در نیمه راه بین پایگاه اول و دوم است چقدر است؟ (فرض کنید تندی بازیکن ثابت باشد).
۱۶. سربیک نردبان که به دیواری تکیه دارد با سرعت 3 in/sec پایین می آید. وقتی پای نردبان در فاصله 6 ft از دیوار است، سرعت دور شدن آن از دیوار 4 in/sec می باشد. طول نردبان چقدر است؟
- در مسئله نردبان مثال ۳،
۱۷. سرعت پای نردبان وقتی در فاصله 10 ft از دیوار است چقدر می باشد؟
۱۸. سرعت تغییر زاویه بین نردبان و زمین وقتی پای نردبان در فاصله 8 ft از دیوار است چقدر است؟
۱۹. شتاب پای نردبان در لحظه ای که سرش در فاصله 12 ft از زمین است چقدر می باشد؟ چه وقت سر نردبان به زمین می رسد؟
۲۰. از یک ماده میله ای به طول  $L$  و مکعبی به حجم  $V$  ساخته می شود. ضریب انبساط خطی ماده  $\alpha$  است، بدین معنی که وقتی میله گرم شود، طولش طبق فرمول  $\alpha = (1/L)(dL/dT)$  تغییر می کند، که در آن  $T$  دماست. ضریب انبساط حجمی ماده  $\beta$  است، بدین معنی که وقتی مکعب گرم می شود، حجمش طبق فرمول  $\beta = (1/V)(dV/dT)$  تغییر می کند.

نشان دهید که  $\beta = 3\alpha$ .

۲۱. خط مستقیمی که موازی محور  $y$  از وضع  $x = -1$  به وضع  $x = 1$  با سرعت ثابت  $v$  حرکت می‌کند، دایره  $x^2 + y^2 = 1$  یکه  $x^2 + y^2 = 1$  را قطع کرده و آن را به قطعه  $A$  چپ به مساحت  $A$  و قطعه  $A$  راست به مساحت  $\pi - A$  تقسیم می‌کند (ر.ک. شکل ۲۸). سرعت افزایش  $A$  وقتی خط در وضع  $x = \frac{1}{2}$  است چقدر می‌باشد؟



شکل ۲۸

راهنمایی.  $A$  را بر حسب زاویه  $\theta$  شکل بیان کنید.

### اصطلاحات و مباحث کلیدی

سرعت و شتاب متوسط و لحظه‌ای

چگالی متوسط و دقیق

تعریف مشتق

مشتقگیری و مشتقپذیری

خارج قسمت تفاضلی و نموها

خطوط مماس و قائم بر یک منحنی

مشتقات یکطرفه و مماسها

پیوستگی یک تابع مشتقپذیر

تقریب خط مماس و دیفرانسیلها

نماد لایب‌نیتز برای مشتقات

قواعد حاصل ضرب و خارج قسمت

قاعده زنجیره‌ای



مشتقات مراتب بالاتر

مشتقگیری ضمنی

میزانهای مرتبط

قواعد و فرمولهای اساسی مشتقگیری

مشتق

تابع

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (\text{تعریف})$$

$f$

$$f'(x) = \lim_{u \rightarrow x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} \quad (\text{تعریف معادل})$$

$f$

$$0$$

$c$  (ثابت)

$$cf'$$

$cf$

$$1$$

$x$

$$2x$$

$x^2$

$$3x^2$$

$x^3$

$$nx^{n-1}$$

$x^n$  ( $n$  صحیح)

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$\sqrt{x}$

$rx^{r-1}$  (این قاعده شامل پنج قاعده فوق است)

$x^r$  ( $r$  گویا)

$$f' + g'$$

$f + g$

$$f' - g'$$

$f - g$

$$f'g + fg' \quad (\text{قاعده حاصل ضرب})$$

$fg$

$$\frac{f'g - fg'}{g^2} \quad (\text{قاعده خارج قسمت})$$

$\frac{f}{g}$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} \quad (\text{قاعده زنجیره ای})$$

$z = z(y)$ ، که در آن  $y = y(x)$

$$\cos x$$

$\sin x$

$$-\sin x$$

$\cos x$

$$\sec^2 x$$

$\tan x$

$$-\csc^2 x$$

$\cot x$

$$\sec x \tan x$$

$$-\csc x \cot x$$

$$\sec x$$

$$\csc x$$

### مسائل تکمیلی

۱. شخصی که در بالای یک صخره ایستاده هفت تیر می‌کشد و شلیک می‌کند. گلوله با سرعت فرار  $v_0 = 480$  به پایین شلیک شده و درست نیم ثانیه بعد به زمین می‌خورد. ارتفاع صخره چقدر است؟
۲. اتومبیلی که با سرعت  $v_0$  mph در حرکت است ناگاه ترمز می‌کند. فرض کنید حرکت بعدی آن طبق  $s = v_0 t - \frac{1}{2} k t^2$  ( $k > 0$ ) صورت گیرد. ثابت  $k$  را تعبیر کرده و مقدار آن را در صورتی بیابید که  $v_0 = 60$  mph و اتومبیل پس از 5.5 sec توقف کامل کند. اتومبیل چه مسافتی را پیش از توقف می‌پیماید؟ نشان دهید که فاصله پیموده شده پس از ترمز با مربع تندی  $v_0$  آن متناسب است.
- فرض کنید  $a$ ،  $b$ ،  $c$ ، و  $d$  ثابتهای دلخواهی باشند. از عبارات زیر مشتق بگیرید.

$$ax + \frac{b}{x} \quad ۳.$$

$$(x-a)(x-b) \quad ۴.$$

$$x(x-a)(x-b) \quad ۵.$$

$$(x-a)(x-b)(x-c) \quad ۶.$$

$$\frac{x-a}{x+b} \quad ۷.$$

$$\frac{x-a}{x+b} \quad ۸.$$

$$\frac{ax+b}{cx+d} \quad ۹.$$

$$\frac{ax+b}{cx+d} \quad ۱۰.$$

$$\frac{x^2-a}{x^2-b} \quad ۱۱.$$

$$\frac{x^2+ax+b}{x^2+cx+d} \quad ۱۲.$$

$$\sqrt{x^2+a^2} \quad ۱۳.$$

$$\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad ۱۴.$$

$$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \quad ۱۵.$$

$$\sin^2(ax+b) \quad ۱۶.$$

$$\cos(ax^2+bx+c) \quad ۱۷.$$

- در صفحه ۱۸۶ دو تعریف "فارغ از حساب دیفرانسیل و انتگرال" (و در نتیجه، ناسازگار) از خط مماس بر یک دایره در نقطه  $P$  داده شده است.
۱۸. یک منحنی غیر از دایره بیابید که برای آن تعریف (دو) درست و تعریف (یک)

نادرست باشد.

۱۹. یک منحنی غیر از دایره بیابید که برای آن تعریف (یک) درست باشد.

معادله مماس بر منحنیهای زیر را بیابید.

$$20. \quad y = 1/x \text{ در } (2, \frac{1}{2}) \quad 21. \quad y = 1/x \text{ در } (-1, -1)$$

$$22. \quad y = 1/x^2 \text{ در } (-\frac{1}{2}, 4) \quad 23. \quad y = \tan x \text{ در } (0, 0)$$

$$24. \quad y = \csc x \text{ در } (\pi/4, \sqrt{2}) \quad 25. \quad y = 8/(x^2 + 4) \text{ در } (2, 1)$$

معادله قائم به منحنیهای زیر را بیابید.

$$26. \quad y = 1/x \text{ در } (-\frac{1}{2}, -2) \quad 27. \quad y = 1/x^2 \text{ در } (2, \frac{1}{4})$$

$$28. \quad y = \cot x \text{ در } (\pi/2, 0) \quad 29. \quad y = \sec x \text{ در } (-\pi/4, \sqrt{2})$$

۳۰. منحنی  $y = 1/x$  مماسی دارد که از  $(0, 1)$  می‌گذرد. آن را بیابید.

۳۱. زاویه بین منحنیهای  $y = 1/x$  و  $y = 1/x^2$  در نقطه  $(1, 1)$  را بیابید.

۳۲. نشان دهید که قطعه‌ای از مماس بر منحنی  $y = 1/x$  که توسط محورهای مختصات جدا می‌شود در نقطه تماس نصف می‌شود.

۳۳. نمودار منحنی  $y = |x - 1| + |x| + |x + 1|$  را رسم کنید. مماسهای یکطرفه در گوشه‌های منحنی را بیابید.

۳۴. آیا تابع  $|x|^2$  در  $x = 0$  مشتقپذیر است؟

۳۵. آیا مشتق یک تابع گویا همیشه تابعی گویاست؟

دیفرانسیل  $df(a) = f'(a)\Delta x$  تابع داده شده را به ازای مقادیر  $a$  و  $\Delta x$  ذکر شده بیابید. در هر حالت  $df(a)$  را با نمو  $df(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$  تا تعداد ارقام اعشاری مناسبی مقایسه نمایید.

$$36. \quad f(x) = 1/x, a = 5, \Delta x = -0.1$$

$$37. \quad f(x) = (1 + x)/(1 - x), a = 0, \Delta x = 0.1$$

$$38. \quad f(x) = 1/\sqrt{x}, a = 9, \Delta x = 0.5$$

$$39. \quad f(x) = \sec x, a = \pi/3, \Delta x = \pi/60$$

۴۰. با استفاده از تقریب خط مماس، نشان دهید که به ازای  $|x|$  کوچک،

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$\sqrt[n]{1 + x} \approx 1 + \frac{x}{n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

با استفاده از تقریب خط مماس، کمیت داده شده را تخمین زده و نتیجه را با جواب دقیق تا تعداد ارقام اعشاری مناسب مقایسه نمایید.

$$\begin{array}{lll}
 (8.6)^{2/3} \cdot 43 & \sqrt[3]{26} \cdot 42 & (2.9)^{-2} \cdot 41 \\
 1/\sqrt{4.1} \cdot 46 & \tan 63^\circ \cdot 45 & \csc 32^\circ \cdot 44 \\
 \sqrt[3]{17} \cdot 49 & (82)^{-1/4} \cdot 48 & \sec 1^\circ \cdot 47 \\
 (0.9)^{0.9} \cdot 52 & (7.8)^{-1/3} \cdot 51 & \cot 43^\circ \cdot 50
 \end{array}$$

۵۳.  $f(x) = (x-4)(x-3)^2(x-2)^3$  را به ازای  $x = 4.001$  تخمین بزنید.

۵۴. با استفاده از قاعده حاصل ضرب، برهان دیگری برای فرمول  $D_x x^n = nx^{n-1}$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) بیاورید.

تابع  $y = f(x)$  را چنان بیابید که

$$\begin{array}{ll}
 y' = x(x^2 + 1)^3 \cdot 56 & y' = (x + 1)^3 \cdot 55 \\
 y' = x^2(x^3 + 1)^2 \cdot 58 & y' = x^3(x^4 + 1)^3 \cdot 57
 \end{array}$$

راهنمایی. قاعده زنجیره‌ای را به یاد آورید.

تابع  $y = f(x)$  را طوری بیابید که

$$\begin{array}{lll}
 y'' = x^3 \cdot 61 & y'' = x^2 \cdot 60 & y'' = x \cdot 59 \\
 y''' = x^2 \cdot 64 & y''' = x \cdot 63 & y''' = 1 \cdot 62
 \end{array}$$

راهنمایی. به یاد داشته باشید که هر مشتگیری از یک توان  $x$  نما را یکی پایین می‌آورد. از عبارات زیر مشتق بگیرید.

$$\tan(\sec x^2) \cdot 66 \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})} \cdot 65$$

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot 68 \qquad \sqrt{\sin(\tan \sqrt{x})} \cdot 67$$

$$\sin(\cos(\tan(\cot x))) \cdot 70 \qquad \sin(\cos(\sin x^2)) \cdot 69$$

۷۱. فرض کنید  $p(x) = f(x)g(x)$  و  $f'(x)g'(x) = c$ ، که در آن  $c$  ثابت بوده و مشتقات سوم  $f'''$  و  $g'''$  وجود دارند. نشان دهید که

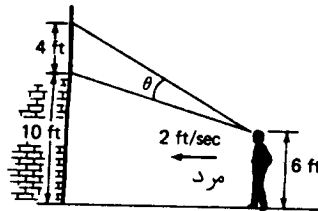
$$\frac{p'''(x)}{p(x)} = \frac{f'''(x)}{f(x)} + \frac{g'''(x)}{g(x)}.$$

۷۲. مماس و قائم به نمودار معادله  $y^6 + y^5 - xy + 2 = 0$  در نقطه  $(4, 1)$  را بیابید.

مردی به قد 6 ft با تندی 2 ft/sec به جانب یک ساختمان روان است و چشم از یک پنجره به طول 4 ft که در 10 ft ی زمین است بر نمی‌دارد. فرض کنید  $\theta$  زاویه دید مرد از پنجره باشد (ر.ک. شکل ۲۹). از اندازه سر مرد صرف نظر می‌شود.

۷۳. سرعت تغییر  $\theta$  وقتی فاصله مرد تا ساختمان 16 ft، 8 ft، یا 4 ft می‌باشد چقدر

است ؟



شکل ۲۹

۷۴. در چه فاصله از ساختمان زاویه  $\theta$  ، که ابتدا صعودی است ، شروع به نزول می کند ؟
۷۵. نشان دهید که منحنی  $y = \sin x$  دارای بی نهایت مماس متمایز ماربر مبدأ است .
- نشان دهید که نقاط تماس و نقاط تقاطع خط  $y = x$  و نمودار  $y = \tan x$  مختص  $x$  یکسان دارند .

## کاربردهای دیگر مشتقگیری<sup>۳</sup>

در سه بخش اول این فصل چند تکنیک قویتر حساب دیفرانسیل را عرضه می‌کنیم که به ما توان تحلیل رفتار توابع و رسم نمودار آنها را می‌دهد. در سه بخش بعد حدودی را بررسی می‌کنیم که مستلزم "نزدیک شدن به بی‌نهایت" اند و روش مؤثر قاعده هسپیتال<sup>۱</sup> را برای محاسبه حدود به کمک مشتقگیری معرفی خواهیم کرد. در بخش ۷.۳ از حساب دیفرانسیل و انتگرال برای حل مسائل عملی بسیاری از بهینه‌سازی استفاده کرده، و در بخش ۸.۳، که اختیاری است، توان حساب دیفرانسیل و انتگرال را در مسائل تجارت و اقتصاد نشان خواهیم داد.

### ۱.۳ قضیه مقدار میانگین

فرض کنیم  $f$  تابع پیوسته‌ای بر بازه بسته<sup>۲</sup>  $I = [a, b]$  بوده، و تفاضل  $f(b) - f(a)$  بین مقادیر  $f$  در نقاط انتهایی  $I$  را در نظر می‌گیریم. اگر  $f'(a)$  موجود باشد، می‌توان با استفاده از  $f'(a)$  تفاضل  $f(b) - f(a)$  را با نوشتن

$$(1) \quad f(b) - f(a) \approx f'(a)(b - a)$$

تخمین زد، که در آن تقریب در صورتی مناسب است که  $b - a$  کوچک باشد. در واقع، این همان تقریب خط مماس (۲)، صفحه ۱۹۸، است که در آن  $\Delta x$  با  $b - a$  عوض شده است. در واقع، همانطور که لحظه‌ای دیگر نشان می‌دهیم، تقریب (۱) را می‌توان با فرمول دقیق

$$(1') \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

عوض کرد، که در آن  $f'$  در نقطه مناسب  $c$  بین  $a$  و  $b$  به جای نقطه انتهایی  $a$  حساب

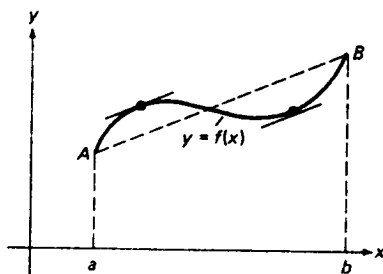
می‌شود. (در اینجا فرض می‌کنیم  $f$  در هر نقطه بین  $a$  و  $b$  مشتق‌پذیر بوده، و انتخاب  $c$  به تابع  $f$  بستگی داشته باشد.) این نتیجه، که به قضیه مقدار میانگین معروف است، کاربردهای زیادی در حساب دیفرانسیل و انتگرال دارد. برای تعبیر هندسی قضیه مقدار میانگین، معادله (۱) را به شکل

$$(2) \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

نوشته، و می‌بینیم که طرف راست (۲) شیب وتر واصل بین نقاط انتهایی  $A = (a, f(a))$  و  $B = (b, f(b))$  منحنی

$$(3) \quad y = f(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

است. لذا، قضیه مقدار میانگین می‌گوید که مماس بر منحنی (۳) در نقطه‌ای از منحنی غیر از نقاط انتهایی موازی وتر  $AB$  است. این امر در شکل ۱ نشان داده شده است، که در آن منحنی دو مماس موازی  $AB$  دارد.



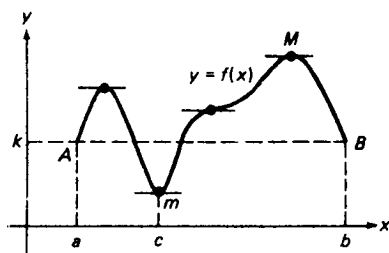
تعبیر هندسی قضیه مقدار میانگین

شکل ۱

قضیه رل. اگر  $f(a) = f(b)$ ، نقاط انتهایی منحنی (۳) مختص  $y$  یکسان داشته و وتر  $AB$  واصل بین نقاط انتهایی افقی است. در این حالت قضیه مقدار میانگین به قضیه رل تحویل می‌شود<sup>۱</sup>، که می‌گوید مماس بر منحنی در نقطه‌ای غیر از نقاط انتهایی افقی است، یا معادلاً،  $f'$  در نقطه‌ای مانند  $c$  بین  $a$  و  $b$  مساوی ۰ است. این وضع نسبتاً ساده‌تر

۱. به افتخار میشل رل (1652-1719) Michel Rolle عضو فرهنگستان فرانسه که ابتدا از مخالفین حساب دیفرانسیل و انتگرال بود و بالاخره به کوشش یکی از همکارانش اعتبار آن را پذیرفت.

در شکل ۲ نموده شده است، که در آن منحنی در چهار نقطه مماس افقی دارد. این امر که مختصات  $y$  دو نقطه از این چهار نقطه مساوی ماکزیم  $M$  و مینیم  $m$  تابع  $f$  بر بازه  $[a, b]$  اند تصادفی نیست (ر.ک. برهان قضیه ۱).



تعبیر هندسی قضیه رل

شکل ۲

ابتدا قضیه رل را ثابت کرده، و سپس قضیه مقدار میانگین را ثابت خواهیم کرد.

قضیه ۱ (قضیه رل). فرض کنیم تابع  $f$  بر بازه بسته  $I = [a, b]$  پیوسته و بر بازه باز  $(a, b)$ ، یعنی در هر نقطه درونی  $I$ ، مشتقپذیر باشد. همچنین،  $f(a) = f(b) = k$ . در این صورت، نقطه‌ای مانند  $c$  در  $(a, b)$  هست به طوری که  $f'(c) = 0$ .

برهان. بنابر قضیه مقدار اکستریم (ر.ک. صفحه ۱۵۹)،  $f$  دارای ماکزیم  $M$  و مینیم  $m$  بر  $I$  است. واضح است که  $m \leq k \leq M$ ، زیرا  $k$  مقداری است که  $f$  بر  $I$  (در نقاط  $a$  و  $b$ ) می‌گیرد. هرگاه  $m = k = M$ ، آنگاه  $f$  به تابع ثابت  $f(x) \equiv k$  تحویل می‌شود که مشتقش در هر نقطه  $(a, b)$  مساوی ۰ است، و قضیه به اثبات می‌رسد. در غیر این صورت، داریم  $m < k$  یا  $k < M$  (یا هر دو)، ولی در هر حالت  $f$  در هر نقطه درونی  $I$ ، یعنی در نقطه‌ای مانند  $c$  از  $(a, b)$ ، دست کم یکی از مقادیر اکستریم خود را می‌گیرد. طبق فرض،

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

در  $c$  وجود دارد. همچنین، این حد همان مقدار  $f'(c)$  وقتی  $x \rightarrow c^+$  و  $x \rightarrow c^-$  را داراست (قضیه ۱۲، صفحه ۱۴۸). به طور صریح، فرض کنیم  $f(c) = m$ . در نتیجه، به ازای هر  $x$  در  $I$ ،  $f(c) \leq f(x)$  یا معادلاً  $f(x) - f(c) \geq 0$ . در این صورت، خارج قسمت تفاضلی

$$(۴) \quad \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$



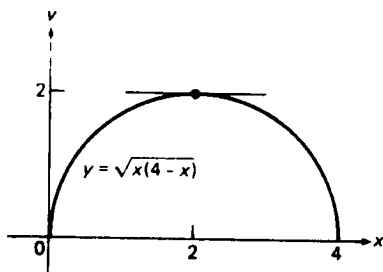
به ازای  $x > c$  (که  $x - c > 0$ ) نامنفی و به ازای  $x < c$  (که  $x - c < 0$ ) نامثبت است. از اینرو بنابر قاعدهٔ (سه)، صفحهٔ ۱۲۴ (که در مورد حدود یکطرفه نیز به کار می‌رود)، حد خارج قسمت (۴) وقتی  $x \rightarrow c^+$  نمی‌تواند منفی باشد، و همچنین حد (۴) وقتی  $x \rightarrow c^-$  نمی‌تواند مثبت باشد. پس نتیجه می‌شود که  $f'(c)$  نمی‌تواند مثبت یا منفی باشد. تنهایی ماند حالتی که  $f'(c) = 0$ . حالت  $f(c) = M$  اصولاً "به همین نحو بررسی می‌شود".

تبصره. واضح است که مثبت یا منفی نبودن  $f'(c)$ ، که  $f'(c) = 0$  را ایجاب می‌کند، به برقراری  $f(c) \leq f(x)$  به ازای هر  $x$  در بازهٔ  $I$  بستگی نداشته بلکه فقط به برقراری آن به ازای هر  $x$  در یک همسایگی نقطهٔ  $c$  وابسته است.

مثال ۱. تابع

$$f(x) = \sqrt{x(4-x)},$$

که در شکل ۳ رسم شده، فقط بر بازهٔ بستهٔ  $[0, 4]$  تعریف شده است، زیرا عبارت زیر رادیکال خارج این بازه منفی است. چون  $f$  در تمام یک همسایگی نقطهٔ انتهایی  $x = 0$



شکل ۳

یا  $x = 4$  تعریف نشده است، در هیچیک از این نقاط مشتق‌پذیر نیست. در واقع، حتی مشتقات یکطرفهٔ  $f'_+(0)$  و  $f'_-(4)$  وجود ندارند (چرا؟). با اینحال،  $f$  از راست در  $x = 0$  و از چپ در  $x = 4$  پیوسته بوده، و در هر نقطهٔ درونی  $[0, 4]$  دارای مشتق

$$(۵) \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x(4-x)}} \frac{d}{dx} [x(4-x)] = \frac{2-x}{\sqrt{x(4-x)}}$$

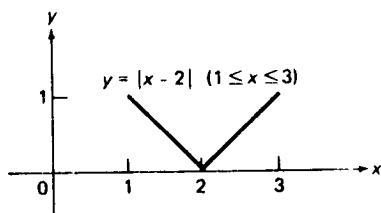
است. در نتیجه،  $f$  بر بازهٔ بستهٔ  $[0, 4]$  پیوسته و بر بازهٔ باز  $(0, 4)$  مشتق‌پذیر است. به علاوه،  $f$  مقدار ۰ را در نقاط انتهایی  $x = 0$  و  $x = 4$  می‌گیرد. لذا، طبق قضیهٔ رل،  $f'$  باید در نقطه‌ای بین  $x = 0$  و  $x = 4$  مساوی ۰ باشد. از رابطهٔ (۵) و نمودار  $f$ ، که در

واقع نیمدایره‌ای به شعاع ۲ و مرکز  $(2, 0)$  است، معلوم می‌شود که این در  $x = 2$  صورت می‌گیرد.

مثال ۲. تابع

$$f(x) = |x - 2| \quad (1 \leq x \leq 3)$$

که در شکل ۴ رسم شده، بر  $[1, 3]$  پیوسته است، و در  $x = 1$  و  $x = 3$  مقدار ۱ را می‌گیرد. با اینحال نقطه‌ای مانند  $c$  در  $(1, 3)$  وجود دارد که  $f'(c) = 0$  این قضیه رل رانقض نمی‌کند،



شکل ۴

چون یکی از شرایط قضیه برقرار نیست. در واقع،  $f$  در  $x = 2$  مشتقپذیر نیست، زیرا نمودار  $f$  در نقطه  $(2, 0)$  گوشه دارد.

مثال ۳. نشان دهید که معادله مکعبی

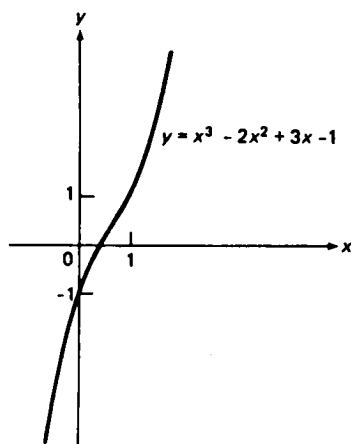
$$x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = 0 \quad (۶)$$

ریشه‌ای حقیقی دارد ولی نه بیش از یکی.

حل. با نوشتن  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$  داریم  $f(1) = 1$ ،  $f(0) = -1$ . لذا، طبق قضیه مقدار میانی (ر.ک. صفحه ۱۵۴)،  $f$  مقدار ۰ را در نقطه  $r_1$  بین ۰ و ۱ می‌گیرد (در واقع،  $r_1 \approx 0.43$ ). این یک ریشه معادله (۶) است. هرگاه ریشه دیگر  $r_2$  وجود می‌داشت، آنگاه  $f(r_1) = f(r_2) = 0$ . در نتیجه، به خاطر قضیه رل،  $f'$  مقدار ۰ را در نقطه‌ای بین  $r_1$  و  $r_2$  می‌گرفت. اما این غیرممکن است، زیرا به ازای هر  $x$ ،

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 3 = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{3} \geq \frac{5}{3}$$

در نتیجه،  $f'$  هرگز مساوی ۰ نیست. لذا، تنها ریشه معادله (۶) می‌باشد. این از روی شکل یعنی منحنی  $y = f(x)$  رسم شده در شکل ۵ فقط قطع  $x$  است. در واقع، می‌توان



شکل ۵

با استفاده از آزمونی ( قضیه ۷، صفحه ۲۶۹ ) که در بخش بعد ثابت شده نشان داد که  $f$  بر  $(-\infty, \infty)$  صعودی است.

برهان قضیه مقدار میانگین. حال که قضیه رل در دست است، قضیه مقدار میانگین به آسانی ثابت می شود.

قضیه ۲ ( قضیه مقدار میانگین ) . فرض کنیم تابع  $f$  بر بازه بسته  $[a, b]$  پیوسته بوده و بر بازه باز  $(a, b)$  مشتقپذیر باشد. در این صورت، نقطه‌ای مانند  $c$  در  $(a, b)$  هست به طوری که

$$(۷) \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

برهان. تابع جدید

$$g(x) = f(x) - kx$$

را معرفی می کنیم، که در آن  $k$  ثابت است.  $k$  را طوری می گیریم که  $g$  در نقاط انتهایی بازه  $[a, b]$  مقدار یکسان بگیرد. به عبارت دیگر، شرط می کنیم که  $k$  در معادله

$$g(a) = f(a) - ka = f(b) - kb = g(b)$$

صدق نماید. با حل آن نسبت به  $k$ ، به دست می آوریم

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

با این  $k$ ، تابع  $g$  در تمام شرایط قضیه، رل صدق می‌کند؛ و در نتیجه، نقطه‌ای مانند  $c$  در  $(a, b)$  هست به طوری که

$$g'(c) = f'(c) - k = 0.$$

پس نتیجه می‌شود که

$$f'(c) = k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

که با (۷) معادل است.

فرض کنیم به جای  $a < b$  که در قضیه ۲ و فرمول (۷) تلویحا "فرض شده داشته باشیم

$b < a$ ، و نیز  $f$  بر  $[b, a]$  پیوسته و بر  $(b, a)$  مشتقپذیر باشد. در این صورت، به جای (۷) داریم

$$(۷') \quad f(a) - f(b) = f'(c)(a - b)$$

که در آن  $c$  نقطه‌ای از  $(b, a)$  است. با ضرب طرفین (۷') در  $-1$  به (۷) باز می‌گردیم. لذا، اگر بگوییم  $c$  بین  $a$  و  $b$  قرار دارد، قضیه مقدار میانگین را همیشه می‌توان به شکل (۷) به کار برد، زیرا این نوع بیان شرط بر  $c$  در هر دو حالت  $a < b$  و  $b < a$  قابل اعمال است.

برای تعبیر هندسی تابع  $g(x)$  معرفی شده در برهان قضیه مقدار میانگین، فرض کنیم

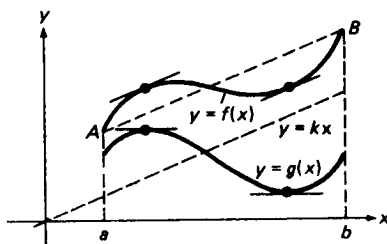
منحنی

$$y = f(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

بالای نمودار

$$y = kx = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x$$

واقع باشد، که خطی است ماربر مبدأ و موازی وتر  $AB$  واصل بین نقاط انتهایی منحنی. اگر  $kx$  مثبت باشد، هر نقطه  $(x, g(x))$  از نمودار  $g$  به فاصله  $kx$  زیر نقطه نظیر  $(x, f(x))$  از منحنی  $f$  قرار دارد. مثلاً، در شکل ۶، منحنی بالایی نمودار تابع  $f$  در شکل ۱ بوده،



شکل ۶

و منحنی پایینی نمودار تابع  $g$  نظیر این تابع  $f$  می باشد. توجه کنید که هر وقت مماس بر نمودار  $f$  موازی  $AB$  باشد، مماس بر نمودار  $g$  در نقطه‌ای با همان مختص  $x$  موازی است.

مثال ۴. نقطه  $c$  صادق در قضیه مقدار میانگین برای تابع  $f(x) = x^2$  را پیدا کنید.

حل. در اینجا  $f'(x) = 2x$  و فرمول (۷) به صورت زیر درمی آید:

$$b^2 - a^2 = 2c(b - a).$$

با حل آن نسبت به  $c$ ، به دست می آوریم

$$c = \frac{b^2 - a^2}{2(b - a)} = \frac{b + a}{2}.$$

لذا، در این حالت خاص،  $c$  نقطه میانی بازه با نقاط انتهایی  $a$  و  $b$ ، بی توجه به انتخاب  $a$  و  $b$ ، است.

مثال ۵. نقطه  $c$  صادق در قضیه مقدار میانگین برای تابع  $f(x) = 1/x$  در صورت  $a = 4$  و  $b = 9$  و نیز در صورت  $a = -1$  و  $b = -4$  را بیابید.

حل. این بار  $f'(x) = -1/x^2$  و فرمول (۷) به صورت زیر درمی آید:

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = -\frac{b - a}{c^2}.$$

با حل آن نسبت به  $c$  به دست می آوریم  $c^2 = ab$  یا معادلاً  $c = \pm\sqrt{ab}$  که برای واقع بودن  $c$  بین  $a$  و  $b$  علامت به علاوه را در صورت مثبت بودن  $a$  و  $b$  و علامت منها را در صورت منفی بودن  $a$  و  $b$  اختیار می کنیم. لذا،  $c = \sqrt{4(9)} = 6$  اگر  $a = 4$  و  $b = 9$  ولی  $c = -\sqrt{(-1)(-4)} = -2$  اگر  $a = -1$  و  $b = -4$ . توجه کنید که قضیه مقدار میانگین در صورت مختلف علامه بودن  $a$  و  $b$  به کار نمی رود، زیرا در این صورت نقطه  $x = 0$  که  $f(x) = 1/x$  در آن تعریف نشده بین  $a$  و  $b$  قرار دارد.

ما از قبل می دانیم که مشتق تابع ثابت متحد صفر است؛ یعنی، هرگاه ثابت  $f(x) \equiv$ ، آنگاه  $f'(x) \equiv 0$  حال، به عنوان کاربردی از قضیه مقدار میانگین، عکس مطلب را ثابت می کنیم؛ یعنی، ثابت می کنیم  $f'(x) \equiv 0$  ایجاب می کند که ثابت  $f(x) \equiv$  اگر و فقط اگر قلمرو  $f$  بازه باشد.

قضیه ۳ ( ثابت بودن یک تابع با مشتق صفر ) . فرض کنیم تابع  $f$  بر بازه  $I$  مشتقپذیر بوده و  $f'$  در هر نقطه از  $I$  صفر باشد . در این صورت ،  $f$  بر  $I$  ثابت است . یعنی ،  $f$  در تمام نقاط  $I$  مقدار یکسان می گیرد .

برهان . نقطه  $a$  از  $I$  را ثابت گرفته ، و فرض کنیم  $x$  نقطه دیگری از  $I$  باشد . در این صورت ، بسته به اینکه  $x > a$  یا  $x < a$  ،  $[a, x]$  یا  $[x, a]$  زیر بازه‌ای از  $I$  است ، و  $f$  بر این زیر بازه مشتقپذیر ( و در نتیجه ، پیوسته ) می باشد . لذا ، طبق قضیه مقدار میانگین ،

$$(۸) \quad f(x) - f(a) = f'(c)(x - a),$$

که در آن  $c$  بین  $a$  و  $x$  قرار دارد . اما  $f'(c) = 0$  ، زیرا  $c$  متعلق به  $I$  است ؛ و لذا ،  $f(x) - f(a) = 0$  یا معادلاً  $f(x) = f(a)$  . چون  $x$  نقطه دلخواهی از  $I$  است ، نتیجه می شود که به ازای هر  $x$  در  $I$  ،  $f(x) = f(a)$  ، یعنی ،  $f$  بر  $I$  ثابت می باشد .

مثال ۶ . تابع

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

ثابت نیست ، ولی مشتقش در هر نقطه که  $f$  تعریف شده باشد صفر است . این امر قضیه ۳ را نقض نمی کند ، زیرا قلمرو  $f$  بازه نبوده بلکه جفت بازه از هم جدای  $(0, \infty)$  و  $(-\infty, 0)$  می باشد . در این حالت ، فقط می توان فرمول (۸) را به کار برد که نقاط  $a$  و  $x$  متعلق به یکی از بازه‌های  $(0, \infty)$  یا  $(-\infty, 0)$  باشند . پس نتیجه می شود که  $f$  بر هر بازه جداگانه ثابت است ، ولو اینکه  $f$  بر  $(0, \infty)$  مقدار ۱ را می گیرد که با مقدار  $f$  بر  $(-\infty, 0)$  که  $-1$  است متفاوت می باشد .

قضیه مقدار میانگین کشی (اختیاری) . بالاخره یک گام جلورفته و قضیه مقدار میانگین مفیدی را که مستلزم دو تابع است ثابت می کنیم که به ریاضیدان بزرگ فرانسوی ، آگوستن کشی<sup>۱</sup> (۱۸۵۷ - ۱۷۸۹) ، منسوب می باشد . برای کاربردهای قضیه مقدار میانگین کشی ، ر.ک. بخشهای ۶۰۳ و ۸۰۹ .

قضیه ۴ ( قضیه مقدار میانگین کشی ) . فرض کنیم توابع  $f$  و  $g$  بر بازه بسته  $[a, b]$

پیوسته بوده و بر بازه  $(a, b)$  مشتق داشته باشند. همچنین،  $g'$  در هر نقطه  $(a, b)$  ناصفر باشد. در این صورت، نقطه‌ای مانند  $c$  در  $(a, b)$  هست به طوری که

$$(9) \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

برهان. هرگاه  $g(a) = g(b)$ ، آنگاه، طبق قضیه‌ی رل، به ازای  $c$  ای در  $(a, b)$ ،  $g'(c) = 0$  که با فرض متناقض است. بنابراین،  $g(a) \neq g(b)$ ؛ در نتیجه، طرف چپ (۹) تعریف شده است. بقیه برهان به موازات برهان قضیه مقدار میانگین، که قضیه ۴ به ازای  $g(x) = x$  به آن تحویل می‌شود، پیش می‌رود. تابع جدید

$$h(x) = f(x) - kg(x)$$

که در آن  $k$  ثابت است را معرفی کرده،  $k$  را طوری می‌گیریم که  $h$  در هر دو نقطه انتهایی بازه  $[a, b]$  مقدار یکسان بگیرد. به عبارت دیگر، شرط می‌کنیم  $k$  در معادله زیر صدق نماید:

$$h(a) = f(a) - kg(a) = f(b) - kg(b) = h(b).$$

با حل نسبت به  $k$  به دست می‌آوریم

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

با این  $k$ ، تابع  $h$  در تمام شرایط قضیه رل صدق می‌کند؛ و در نتیجه، نقطه‌ای مانند  $c$  در  $(a, b)$  هست به طوری که

$$h'(c) = f'(c) - kg'(c) = 0.$$

پس نتیجه می‌شود

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)},$$

که با (۹) معادل است.

مثال ۷. نقطه  $c$  صادق در قضیه مقدار میانگین کشی برای توابع  $f(x) = \cos x$  و  $g(x) = \sin x$  را در صورتی بیابید که  $a = 0$  و  $b = \pi/2$ .

حل. در اینجا  $f'(x) = -\sin x$  و  $g'(x) = \cos x$ ؛ در نتیجه، بخصوص  $g'$  در هر نقطه از  $(0, \pi/2)$  ناصفر است. طرف چپ (۹) مساوی است با

$$\frac{\cos(\pi/2) - \cos 0}{\sin(\pi/2) - \sin 0} = \frac{0 - 1}{1 - 0} = -1,$$

و طرف راست برابر است با

$$\frac{-\sin c}{\cos c} = -\tan c.$$

لذا، فرمول (۹) به صورت  $\tan c = 1$  درمی‌آید. با حل آن نسبت به  $c$  و تحت شرط  $0 < c < \pi/2$ ، فوراً معلوم می‌شود که  $c = \pi/4$ .

### مسائل

نقطه  $c$  صادق در قضیه رل (در نتیجه،  $f'(c) = 0$ ) را در صورتی بیابید که

۱.  $f(x) = x^2 - 3x + 5, a = 1, b = 2$  ✓

۲.  $f(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 5, a = -1, b = 1$  ✓

۳.  $f(x) = 1/(x^2 + 1), a = -2, b = 2$  ✓

۴.  $f(x) = x^{1/2} + (1 - x)^{1/2}, a = 0, b = 1$  ✓

۵.  $f(x) = x^{1/2}(2 - x)^{1/3}, a = 0, b = 2$  ✓

۶.  $f(x) = (3 - x)^{4/3}, a = 2, b = 4$  ✓

۷.  $f(x) = \sin 2x, a = \pi, b = 3\pi/2$  ✓

۸.  $f(x) = \sec x, a = -1.5, b = 1.5$  ✓

۹. تابع  $f(x) = 1 - x^{2/3}$  بر  $[-1, 1]$  پیوسته بوده و در  $x = \pm 1$  مساوی ۰ است نشان دهید ✓

که نقطه‌ای مانند  $c$  در  $(-1, 1)$  وجود دارد که  $f'(c) = 0$ . چرا این قضیه رل را نقض نمی‌کند؟ تابع را رسم کنید.

۱۰. قضیه رل را برای تابع  $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$  تحقیق کنید. به عبارت دیگر، نشان دهید که  $f'$  در نقطه‌ای از بازه  $(1, 2)$  و در نقطه‌ای از بازه  $(2, 3)$  مساوی ۰ است.

با استفاده از قضیه رل نشان دهید که

۱۱. معادله  $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$  ریشه حقیقی منحصر به فرد دارد.

۱۲. معادله  $x^8 + x - 1 = 0$  فقط دو ریشه حقیقی دارد.

۱۳. معادله  $x^5 - 5x + 1 = 0$  فقط سه ریشه حقیقی دارد.

نقطه  $c$  صادق در قضیه مقدار میانگین (۷) را در صورتی بیابید که

۱۴.  $f(x) = x^2 + x + 1, a = 1, b = 2$  ✓



$$f(x) = x^3 - 1, a = 0, b = 3 \quad . ۱۵ \checkmark$$

$$f(x) = \frac{1}{2-x}, a = 1, b = 0 \quad . ۱۶ \checkmark$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}, a = 2, b = 3 \quad . ۱۷ \checkmark$$

$$f(x) = \sqrt{x}, a = 9, b = 25 \quad . ۱۸ \checkmark$$

$$f(x) = x^{1/3}, a = 8, b = 0 \quad . ۱۹ \checkmark$$

$$f(x) = x^{4/3}, a = -8, b = -1 \quad . ۲۰ \checkmark$$

$$f(x) = \sin x, a = 0, b = \pi/2 \quad . ۲۱ \checkmark$$

۲۲. تعبیر " سینماتیک " زیرا از قضیه مقدار میانگین را توجیه کنید: هرگاه ترنی فاصله

بین دو ایستگاه را با سرعت متوسط  $v_{av}$  طی کند، آنگاه لحظه‌ای وجود دارد که سرعت لحظه‌ای آن درست مساوی  $v_{av}$  است.

۲۳. نشان دهید که نامساوی  $|a - b| \leq |\sin a - \sin b|$  به ازای اعداد دلخواه  $a$  و  $b$  برقرار است.

۲۴. نشان دهید که نامساوی  $|\tan a - \tan b| \leq 4|a - b|$  به ازای اعداد دلخواه  $a$  و  $b$  در بازه  $[-\pi/3, \pi/3]$  برقرار است.

۲۵. تابع  $f$  با بی‌نهایت مقدار مختلف را طوری مثال بزنید که مشتقش بر قلمرو  $f$  متحد صفر باشد.

۲۶. اشتباه " برهان " زیر از قضیه مقدار میانگین کشی را بیابید: با دو بار به کار بردن قضیه مقدار میانگین معمولی، داریم

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), \quad g(b) - g(a) = g'(c)(b - a).$$

لذا، از تقسیم معادله اول بر معادله دوم به دست می‌آوریم

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

نقطه  $c$  صادق در قضیه مقدار میانگین کشی (۹) را در صورتی بیابید که

$$f(x) = x^3, g(x) = x^2 + 2x, a = -1, b = 2 \quad . ۲۷ \checkmark$$

$$f(x) = x^2, g(x) = 1/x, a = -2, b = -1 \quad . ۲۸ \checkmark$$

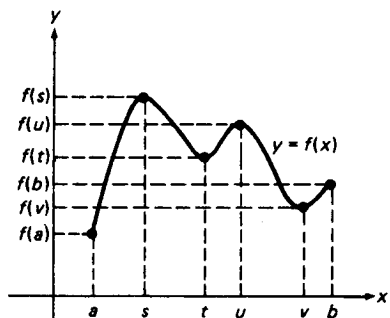
$$f(x) = 1/x, g(x) = 1/x^2, a = 1, b = 2 \quad . ۲۹ \checkmark$$

$$f(x) = \sin x, g(x) = \tan x, a = 0, b = \pi/4 \quad . ۳۰ \checkmark$$

۲.۳ اکسترمهای موضعی و توابع یکنوا

شکل ۷ منحنی را نشان می‌دهد که نمودار تابع پیوسته‌ای بر بازه  $[a, b]$  بسته است. واضح

است که  $f$  بر  $[a, b]$  ماکزیممی مساوی  $f(s)$  در نقطهٔ اوج منحنی، یعنی  $(s, f(s))$ ، و مینیممی بر  $[a, b]$  برابر  $f(a)$  در نقطهٔ حوضیض منحنی، یعنی  $(a, f(a))$  که در اینجا یک نقطهٔ انتهایی منحنی است، می‌گیرد. اما نکته‌ای در رفتار منحنی در نقاط  $(t, f(t))$ ،  $(u, f(u))$  و  $(v, f(v))$  نیز وجود دارد. در واقع، گرچه  $(u, f(u))$  از  $(s, f(s))$  بالاتر نیست، از تمام نقاط "مجاور" منحنی بالاتر است، به علاوه، گرچه  $(t, f(t))$  از  $(a, f(a))$  پایین‌تر نیست، از تمام نقاط مجاور منحنی پایین‌تر است، و همین امر در مورد نقطهٔ  $(v, f(v))$  صادق است.



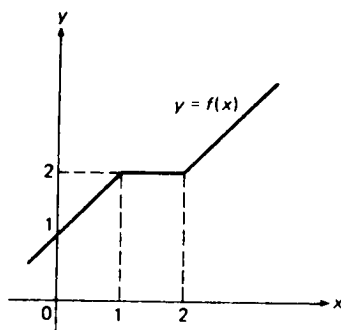
شکل ۷

لذا، منحنی شکل ۷ شش نقطهٔ خاص دارد، "نقاط اوج"  $(s, f(s))$  و  $(u, f(u))$ ، "نقاط حوضیض"  $(t, f(t))$  و  $(v, f(v))$ ، و نقاط انتهایی  $(a, f(a))$  و  $(b, f(b))$ . (نقاط انتهایی همواره به توجه خاص نیاز دارند.)

تعریف اکسترممهای موضعی. حال این مفاهیم کیفی را دقیقتر می‌سازیم. به ازای تابع  $f$  و عدد  $c$  که می‌توان آن را نقطه‌ای بر خط حقیقی گرفت، فرض می‌کنیم به ازای هر  $x$  به قدر کافی نزدیک  $c$ ، یعنی به ازای هر  $x$  در همسایگی از  $c$ ،  $f(c) \geq f(x)$  (فرض است که  $f$  در هر نقطهٔ این همسایگی تعریف شده است). در این صورت گوئیم  $f$  در  $c$  ماکزیمم موضعی دارد و مساوی عدد  $f(c)$  است. ماکزیمم موضعی را اکید نامیم اگر به ازای تمام  $x$  های به قدر کافی نزدیک  $c$  ولی مخالف آن، یعنی به ازای جمیع  $x$  های واقع در همسایگی سفته‌ای از  $c$ ،  $f(c) > f(x)$  (با  $>$  به جای  $\geq$ ). به همین نحو، هرگاه به ازای جمیع  $x$  های واقع در یک همسایگی  $c$ ،  $f(c) \leq f(x)$ ، آنگاه گوئیم  $f$  در  $c$  مینیمم موضعی دارد و مساوی عدد  $f(c)$  است، و مینیمم موضعی را اکید نامیم اگر به ازای جمیع  $x$  های واقع در همسایگی سفته‌ای از  $c$ ،  $f(c) < f(x)$  (با  $<$  به جای  $\leq$ ). واژهٔ اکسترمم موضعی یعنی ماکزیمم یا مینیمم موضعی. در بعضی کتب اکسترممهای موضعی را اکسترممهای "نسبی" نامیده‌اند.

مثال ۱. تابع  $f$  با نمودار شکل ۷ دارای چهار اکسترم موضعی است، ماکزیممهای موضعی اکید  $f(s)$  و  $f(u)$  در نقاط  $s$  و  $u$ ، و مینیممهای موضعی اکید  $f(t)$  و  $f(v)$  در نقاط  $t$  و  $v$ . این تابع در نقاط انتهایی  $a$  و  $b$  بازه تعریف  $I = [a, b]$  اکسترم موضعی ندارد، صرفاً به این دلیل که تعریف اکسترم موضعی مستلزم مقایسه مقدار  $f$  در نقطه  $c$  با مقادیر  $f$  برطرفین  $c$  است و یک چنین مقایسه فقط در یک نقطه درونی مانند  $c$  از  $I$  امکان پذیر است.

مثال ۲. تابع قطعه قطعه خطی  $f$  با نمودار شکل ۸ دارای ماکزیمم موضعی در  $x = 1$  و مینیمم موضعی در  $x = 2$  بوده، و در هر نقطه بازه  $(1, 2)$  که بر آن  $f$  ثابت است ماکزیمم و مینیمم موضعی دارد. تمام این اکسترمهای موضعی مساوی ۲ اند و هیچیک اکید نمی باشند.



شکل ۸

اکسترمهای موضعی در برابر اکسترمهای مطلق. مطمئن شوید که تمایز بین اکسترمهای موضعی که هم اکنون تعریف شد و اکسترمهای یک تابع بر یک بازه که در صفحه ۱۵۶ تعریف شده را فهمیده اید. از حالا به بعد هر وقت امکان ابهام برود، مفهوم دوم اکسترم مطلق نامیده خواهد شد. مثلاً، "مینیمم مطلق تابع  $f$  بر بازه  $I$ ، که در نقطه  $c$  در  $I$  گرفته شده، عدد  $m = f(c)$  است که باید از مقادیر  $f$  در تمام نقاط  $I$  نابیشتر باشد، و برای آنکه  $m$  مینیمم موضعی باشد کافی است از مقادیر  $f$  در تمام نقاط یک همسایگی از  $c$ ، مهم نیست چقدر کوچک، نابیشتر باشد.

هرگاه  $f$  تابعی با قلمرو بازه  $I$  باشد، آنگاه اکسترم مطلق  $f$  که در یک نقطه درونی گرفته شده خود بخود یک اکسترم موضعی  $f$  است. (ما قبلاً دیدیم که  $f$  نمی تواند در یک نقطه انتهایی  $I$  اکسترم موضعی داشته باشد.) مثلاً، "فرض کنیم  $f$  بر  $I$  در نقطه درونی  $c$ ، ماکزیمم مطلق داشته باشد. در این صورت، به ازای هر  $x$  در  $I$ ،  $f(c) \geq f(x)$ ، و لذا، مسلماً "به ازای هر  $x$  در هر همسایگی  $c$  آنقدر کوچک که مشمول  $I$  است،  $f(c) \geq f(x)$ ،

بنابر قضیه مقدار اکستريم ( ر.ک. صفحه ۱۵۹ )، تابع پیوسته  $f$  بر بازه بسته کراندار اکسترمهای مطلق دارد. حال قاعده مفیدی برای یافتن این اکسترمها عرضه می‌کنیم.

قضیه ۵ (آزمون برای اکسترمهای مطلق). فرض کنیم  $f$  بر بازه بسته و کراندار  $[a, b]$  پیوسته بوده و  $f$  در نقاط  $c_1, c_2, \dots, c_n$  از بازه باز  $(a, b)$  و فقط در این نقاط اکسترمهای موضعی داشته باشد. در این صورت، ماکزیمم اعداد

$$f(a), f(c_1), f(c_2), \dots, f(c_n), f(b)$$

ماکزیمم مطلق  $f$  بر  $[a, b]$ ، و مینیمم این اعداد مینیمم مطلق  $f$  بر  $[a, b]$  می‌باشد.

برهان. اگر اکسترم مطلق  $f$  در یک نقطه درونی  $[a, b]$  رخ دهد، آن را می‌توان بین اکسترمهای موضعی  $f(c_1), f(c_2), \dots, f(c_n)$  یافت. اما ممکن است در یک نقطه انتهایی  $[a, b]$  رخ دهد؛ و در نتیجه، این  $n$  مقدار  $f$  باید با  $f(a)$  و  $f(b)$  مقایسه شوند.

مثال ۳. همانطور که قبلاً در مثال ۱ گفته شد، تابع  $f$  با نمودار شکل ۷ در نقاط  $s, t, u$  و  $v$  اکسترم موضعی دارد. از شکل معلوم می‌شود که ماکزیمم اعداد

$$f(a), f(s), f(t), f(u), f(v), f(b)$$

مساوی  $f(s)$  و مینیمم آنها  $f(a)$  است. از اینرو، ماکزیمم (مطلق)  $f$  بر  $[a, b]$  مساوی  $M = f(s)$  است، که در نقطه درونی  $s$  گرفته می‌شود، و مینیمم (مطلق)  $f$  بر  $[a, b]$  مساوی  $m = f(a)$  است، که در نقطه انتهایی  $a$  گرفته شده است. چون می‌گوییم "بر  $[a, b]$ "، واژه "مطلق" در اینجا زاید است؛ و لذا، در پرانتز گذارده شده است.

حال به روشی اصولی برای یافتن اکسترمهای موضعی تابع داده شده  $f$  نیاز داریم. فرض می‌کنیم  $f$  بر بازه  $I$  پیوسته و مشتق‌پذیر باشد احتمالاً "به استثنای چند نقطه که  $f$  در آنها پیوسته ولی مشتق ناپذیر است. هرگاه  $f$  در  $c$  اکسترم موضعی داشته باشد، آنگاه هم اکنون نشان می‌دهیم که این در رفتار مشتق  $f$  در  $c$  منعکس شده است.

قضیه ۶ (شرط لازم برای اکسترم موضعی). هرگاه  $f$  در نقطه  $c$  اکسترم موضعی داشته باشد، آنگاه  $f'(c)$  وجود ندارد یا موجود و مساوی صفر است.

برهان. برای مشخص بودن وضع، فرض کنیم  $f$  در  $c$  مینیمم موضعی داشته باشد؛ در نتیجه

به ازای هر  $x$  در همسایگی  $c$ ،  $f(c) \leq f(x)$ ؛ یعنی، به ازای  $\delta > 0$  ای،

$$(۱) \quad f(x) - f(c) \geq 0 \quad (|x - c| < \delta)$$

یا  $f'(c)$  موجود نیست، که در این صورت چیزی برای اثبات وجود ندارد، یا

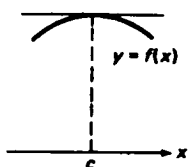
$$(۲) \quad f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

موجود است. اما، به خاطر (۱)، خارج قسمت تفاضلی

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

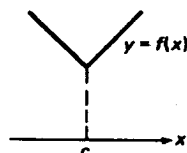
نامنفی است اگر  $c < x < c + \delta$  و نامثبت است اگر  $c - \delta < x < c$ . لذا، بنا بر برهان قضیه رل (ر.ک. تبصره، صفحه ۲۵۶) حد (۲)، یعنی  $f'(c)$ ، نمی تواند منفی یا مثبت باشد. تنها حالتی که مانده  $f'(c) = 0$  است. حالتی که  $f$  در  $c$  ماکزیم موضعی دارد به همین نحو سامان خواهد یافت.

قضیه ۶ در تعبیر هندسی می گوید هرگاه تابع  $f$  در نقطه  $c$  اکسترم موضعی داشته باشد، آنگاه، در صورت عدم وجود  $f'(c)$ ، نمودار  $f$  در نقطه  $P = (c, f(c))$  مماس ندارد یا، در صورت  $f'(c) = 0$ ، نمودار  $f$  در  $P$  مماس افقی دارد. این دو حالت در شکلهای ۹ (آ) و ۹ (ب) نموده شده اند، که دو تابع هر یک با اکسترم موضعی (اکید) در  $c$  را نشان می دهند.



ماکزیم موضعی:  
 $f'(c) = 0$

(ب)



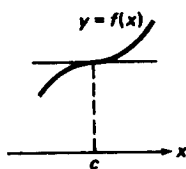
مینیم موضعی:  
 $f'(c)$  وجود ندارد.

(آ)

شکل ۹

نقاط بحرانی. نقطه  $c$  در قلمرو تابع  $f$  یک نقطه بحرانی  $f$  نام دارد اگر  $f'(c)$  موجود نباشد یا مساوی صفر باشد. بنا بر قضیه ۶، هرگاه  $f$  در  $c$  اکسترم موضعی داشته باشد، آنگاه  $c$  یک نقطه بحرانی  $f$  است. از آن سو، و این برای درک نظریه اکسترمها است، اگر  $c$  یک نقطه بحرانی  $f$  باشد، تابع  $f$  ممکن است در  $c$  اکسترم موضعی نداشته باشد. این امر در شکلهای ۱۰ (آ) و ۱۰ (ب) نموده شده است، که دو تابع را نشان می دهند که

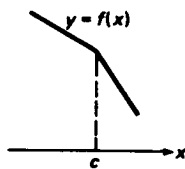
نقطه بحرانی آنها بوده ولی هیچیک در  $c$  اکسترم موضعی ندارد.



بدون اکسترم:

$$f'(c) = 0$$

(ب)



بدون اکسترم:

$f'(c)$  وجود ندارد

(آ)

شکل ۱۰

آزمون یکنوایی. لذا، آنچه واقعا "می‌خواهیم شرایطی بر  $f$  است که آن را واجد داشتن اکسترم موضعی در نقطه  $c$  نماید. به زبان منطق، اینها شرایط کافی برای اکسترم موضعی، در مقابل شرط لازم داده شده در قضیه ۶، می‌باشند. این شرایط به شکل دو آزمون برای اکسترم موضعی عرضه می‌شوند (قضایای ۸ و ۹ زیر). به عنوان ابزاری برای اثبات این آزمونها، ابتدا قضیه زیر را، که در جای خود اهمیت بسیار دارد، ثابت می‌کنیم که شرایط یکنوایی یک تابع را به ما می‌دهد. گوییم تابع  $f$  بر بازه  $I$  یکنواست اگر  $f$  بر  $I$  صعودی یا نزولی باشد، و یکنوایی خاصیت یکنوا بودن می‌باشد.

قضیه ۷ (آزمون یکنوایی). فرض کنیم  $f$  بر بازه  $I$  پیوسته بوده، و  $f'$  در هر نقطه درونی  $I$  موجود و دارای یک علامت باشد. در این صورت، (یک)  $f$  بر  $I$  صعودی است اگر  $f'$  در هر نقطه درونی  $I$  مثبت باشد؛ (دو)  $f$  بر  $I$  نزولی است اگر  $f'$  در هر نقطه درونی  $I$  منفی باشد.

برهان. فرض کنیم  $f'$  در هر نقطه درونی  $I$  مثبت بوده، و  $a$  و  $b$  دو نقطه دلخواه از  $I$  باشند به طوری که  $a < b$ . بنا بر قضیه مقدار میانگین، به ازای نقطه‌ای مانند  $c$  بین  $a$  و  $b$

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

واضح است که  $c$  یک نقطه درونی  $I$  است؛ در نتیجه،  $f'(c) > 0$ . لذا،  $f'(c)(b - a)$  که حاصل ضرب دو عدد مثبت است مثبت می‌باشد. اما در این صورت  $f(b) - f(a)$  نیز مثبت است. به عبارت دیگر، به ازای هر جفت نقطه مانند  $a$  و  $b$  در  $I$  که  $a < b$ ،  $f(a) < f(b)$ . لذا،  $f$  بر  $I$  صعودی است، و قسمت (یک) ثابت می‌شود. برهان (دو) اساساً همین است

و به عنوان تمرین گذارده می شود.

نتایج قضیه ۷ نسبت به رفتار  $f'$  در نقاط انتهایی  $I$  ( در صورتی که  $I$  شامل یک یا هر دو نقطه انتهایی خود باشد) بی اعتنا نیست، و در واقع ممکن است  $f'$  در یک نقطه انتهایی  $I$  مقدار ۰ را بگیرد، یا حتی موجود نباشد. همچنین، اگر  $I$  باز باشد، هر نقطه  $I$  یک نقطه درونی است، و کلمه " درونی " را می توان در سه جای صورت قضیه حذف کرد.

مثال ۴. در مثال ۱، صفحه ۱۵۵، حکم شد که تابع

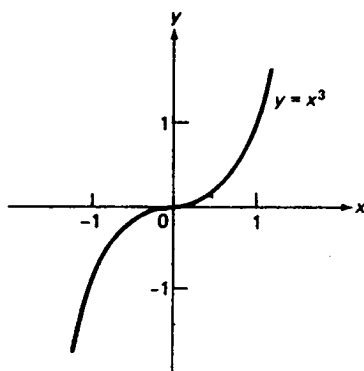
$$f(x) = 2x^5 + 2x^2 + x - 3$$

بر  $(0, 1)$  صعودی است. حال با استفاده از آزمون یکنوایی، می بینیم که این فورا " از مثبت بودن

$$f'(x) = 10x^4 + 4x + 1$$

بر  $(0, 1)$  نتیجه می شود.

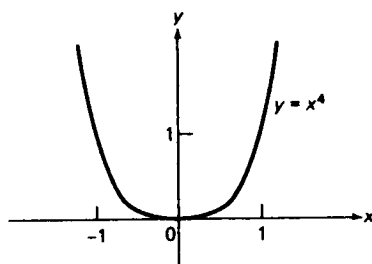
مثال ۵. به ازای تابع  $f(x) = x^3$  داریم  $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ ، که در آن تساوی فقط وقتی برقرار است که  $x = 0$ . لذا،  $f'$  در هر نقطه درونی بازه های  $(-\infty, 0]$  و  $[0, \infty)$  مثبت است. پس از آزمون یکنوایی نتیجه می شود که  $f$  بر هر دو بازه صعودی است؛ و در نتیجه، همانطور که از نمودار  $f$  در شکل ۱۱ واضح است،  $f$  بر تمام خط حقیقی  $(-\infty, \infty)$  صعودی است.



شکل ۱۱

مثال ۶. به ازای تابع  $f(x) = x^4$  داریم  $f'(x) = 4x^3$ . در نتیجه،  $f'(x) > 0$  اگر  $x > 0$  و

$f'(x) < 0$  اگر  $x < 0$  ، حال آنکه  $f'(0) = 0$  . لذا ،  $f'$  در هر نقطهٔ درونی بازهٔ  $[0, \infty)$  مثبت و در هر نقطهٔ درونی بازهٔ  $(-\infty, 0]$  منفی است . این بار آزمون یکنوایی به ما می‌گوید که  $f$  بر  $[0, \infty)$  صعودی و بر  $(-\infty, 0]$  نزولی است ، و این از نمودار  $f$  در شکل ۱۲ واضح می‌باشد .



شکل ۱۲

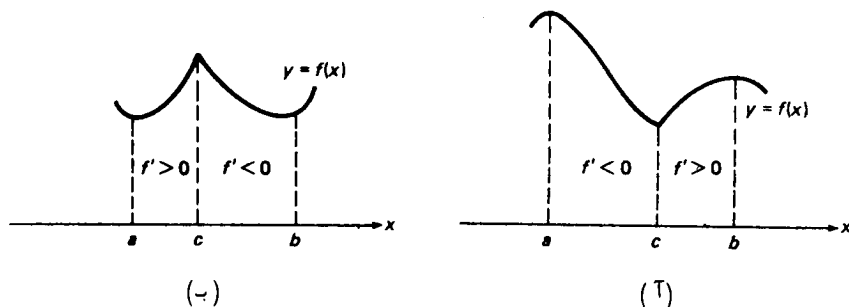
آزمونهای مشتق اول و دوم . حال در وضعی هستیم که می‌توانیم آزمونهای اکسترم موضعی که قول داده بودیم را ثابت کنیم .

قضیهٔ ۸ ( آزمون مشتق اول برای اکسترم موضعی ) . فرض کنیم  $c$  یک نقطهٔ بحرانی  $f$  بوده ، و  $f'$  در  $c$  تغییر علامت دهد . یعنی ،  $f'$  بر بازهٔ  $(a, c)$  چپ  $c$  یک علامت و بر بازهٔ  $(c, b)$  راست  $c$  علامتی دیگر داشته باشد . در این صورت ،  $f$  در  $c$  اکسترم موضعی اکید خواهد داشت . اکسترم مینیمم است اگر  $f'$  از منها به به‌علاوه تغییر علامت دهد ، و ماکزیمم است اگر  $f$  از به‌علاوه به منها تغییر علامت دهد .

برهان . چیزی در باب مشتقپذیری  $f$  در خود نقطهٔ  $c$  گفته نشده است ، و  $f'(c)$  ممکن است ( با آنکه همواره  $f$  در  $c$  پیوسته گرفته می‌شود ) موجود نباشد . فرض کنیم  $f'$  در  $c$  از منها به به‌علاوه تغییر علامت یابد . در این صورت ،  $f'$  بر بازه‌ای چون  $(a, c)$  منفی و بر بازه‌ای چون  $(c, b)$  مثبت است . از آزمون یکنوایی معلوم می‌شود که  $f$  بر  $[a, c]$  نزولی و بر  $[c, b]$  صعودی است ، که در اینجا می‌توان نقطهٔ انتهایی  $c$  را در هر دو بازه گنجانید . پس در این صورت  $f$  در  $c$  مینیمم موضعی اکید دارد ، زیرا به ازای هر نقطه در همسایگی سفتهٔ  $c$  ،  $f(c) < f(x)$  [ ر.ک. شکل ۱۳ (آ) ] . به همین نحو ، هرگاه  $f'$  در  $c$  از به‌علاوه به منها تغییر علامت دهد ، آنگاه  $f$  بر  $[a, c]$  صعودی و بر  $[c, b]$  نزولی است . در نتیجه ،  $f$  در  $c$  ماکزیمم موضعی اکید دارد [ ر.ک. شکل ۱۳ (ب) ] . در هر دو شکل در نقطهٔ  $(c, f(c))$  گوشه



کشیده‌ایم تا مجدداً "بر امکان عدم وجود  $f'(c)$  تأکید کرده باشیم.



شکل ۱۳

قضیه ۹ (آزمون مشتق دوم برای یک اکسترمم موضعی). فرض کنیم  $c$  یک نقطه بحرانی  $f$  بوده، و  $f''(c)$  موجود و ناصفر باشد. در این صورت،  $f$  در  $c$  اکسترمم موضعی اکید دارد. اکسترمم مینیمم است اگر  $f''(c) > 0$  و ماکزیمم است اگر  $f''(c) < 0$ .

برهان. طبق تعریف،

$$(۳) \quad f''(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c},$$

در نتیجه،  $f''(c)$  فقط وقتی می‌تواند موجود باشد که مشتق اول، یعنی  $f'(x)$ ، در همسایگی  $c$  وجود داشته باشد. بخصوص،  $f'(c)$  موجود و مساوی ۰ است، زیرا  $c$  یک نقطه بحرانی است. لذا، (۳) به

$$f''(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{x - c}$$

تحویل می‌گردد. اگر  $f''(c) > 0$ ، همسایگی سفته‌ای از  $c$  وجود دارد که در آن  $f'(x)/(x - c)$  مثبت است، و در این همسایگی سفته علامت  $f'(x)$  همان علامت  $x - c$  می‌باشد. لذا،  $f'$  در  $c$  از منهای به علاوه تغییر علامت می‌دهد. در نتیجه، بنا بر آزمون مشتق اول (قضیه ۸)،  $f$  در  $c$  مینیمم موضعی اکید دارد. حالت  $f''(c) < 0$  به همین نحو بحث شده، و به ماکزیمم موضعی اکید منجر می‌شود.

اگر در نقطه بحرانی  $c$ ،  $f''(c) = 0$ ، آزمون مشتق دوم بی‌حاصل است. در واقع،

فرض کنیم

$$f(x) = x^3, \quad g(x) = x^4.$$

در این صورت، با محاسبه مشتقات دوم، به دست می‌آوریم

$$f''(x) = 6x, \quad g''(x) = 12x^2,$$

در نتیجه،

$$f''(0) = 0, \quad g''(0) = 0.$$

اما  $f$  در  $x = 0$  اکسترم ندارد، زیرا، همانطور که در مثال ۵ نشان دادیم،  $f$  بر  $(-\infty, \infty)$  صعودی است، در حالی که  $g$  در  $x = 0$  مینیم موضعی (و مطلق) اکید دارد، زیرا  $g(0) = 0$  و، به ازای هر  $x \neq 0$ ،  $g(x) = x^4 > 0$ . لذا، این امر که مشتق دوم یک تابع در نقطه بحرانی  $c$  مساوی صفر است به ما اجازه تصمیم‌گیری در اینکه در  $c$  اکسترم موضعی دارد نمی‌دهد.

مثال ۷. اکسترمهای موضعی تابع

$$(۴) \quad f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5$$

را بیابید.

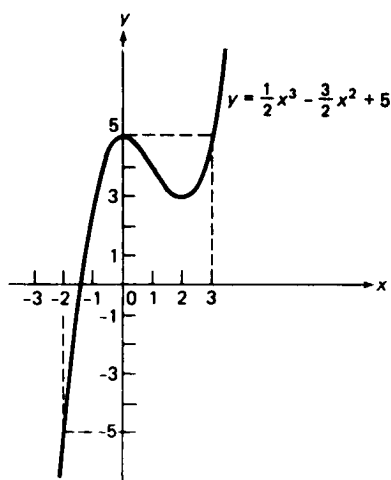
حل. در اینجا  $f$  به ازای هر  $x$  مشتقپذیر است، و تنها نقاط بحرانی  $f$  نقاطی هستند که در آنها

$$(۴') \quad f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x = \frac{3}{2}x(x - 2)$$

مساوی صفر است. یعنی، نقاط  $x = 0$  و  $x = 2$  مشتقگیری دیگر نتیجه می‌دهد  $f''(x) = 3x - 3$  در نتیجه،  $f''(0) = -3 < 0$  و  $f''(2) = 3 > 0$  لذا، طبق آزمون مشتق دوم،  $f$  در  $x = 0$  ماکزیم موضعی اکیدی مساوی  $f(0) = 5$ ، و مینیم موضعی اکیدی در  $x = 2$  برابر  $f(2) = 3$  دارد. آزمون مشتق اول به همین نتیجه ختم می‌شود، زیرا (۴) نشان می‌دهد که  $f'$  در  $x = 0$  از به علاوه به منها و در  $x = 2$  از منها به به علاوه تغییر علامت می‌دهد. همچنین، بنابر آزمون یکنوایی،  $f$  بر بازه‌های  $(-\infty, 0]$  و  $[2, \infty)$  صعودی و بر بازه  $[0, 2]$  نزولی می‌باشد. حال می‌توان با استفاده از این اطلاعات، و به کمک ماشین حساب، نمودار تابع  $f$  را رسم کرد (ر.ک. شکل ۱۴).

مثال ۸. اکسترمهای مطلق تابع (۴) بر بازه  $I = [-2, 3]$  را بیابید.

حل. بنابر آزمون اکسترمهای مطلق (تضیه ۵)، کافی است اعداد



شکل ۱۴

$$f(-2) = -5, \quad f(0) = 5, \quad f(2) = 3, \quad f(3) = 5,$$

یعنی اکسترممهای موضعی  $f$  در نقاط درونی  $I$  و مقادیر  $f$  در نقاط انتهایی  $I$ ، را با هم مقایسه کنیم. بزرگترین این اعداد، یعنی ۵، ماکزیمم مطلق  $f$  بر  $I$  است که در نقطه درونی  $x = 0$  و نقطه انتهایی راست  $x = 3$  گرفته می شود، حال آنکه کوچکترین آنها، یعنی -۵، مینیمم مطلق است که در نقطه انتهایی چپ  $x = -2$  گرفته می شود ( شکل ۱۴ را مجدداً بررسی کنید ).

مثال ۹. اکسترممهای موضعی تابع  $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$  را بیابید.

حل. مجدداً،  $f$  به ازای هر  $x$  مشتقپذیر است، و تنها نقاط بحرانی  $f$  نقاطی هستند که در آنها

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \sin^3 x \cos x - 4 \cos^3 x \sin x \\ &= 4(\sin^2 x - \cos^2 x) \sin x \cos x = -4 \cos 2x \sin x \cos x \end{aligned}$$

مساوی صفر است. اینها عبارتند از  $x = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$  و نقاط  $\sin x = 0$  که در آنها  $x = \pm\pi/4, \pm3\pi/4, \dots$  و نقاط  $\cos x = 0$  که در آنها  $x = \pm\pi/2, \pm3\pi/2, \dots$  در آنها  $\cos 2x = 0$ . مشتقگیری دیگر نتیجه می دهد که

$$\begin{aligned} f''(x) &= 12 \sin^2 x \cos^2 x - 4 \sin^4 x + 12 \cos^2 x \sin^2 x - 4 \cos^4 x \\ &= 24 \sin^2 x \cos^2 x - 4 \sin^4 x - 4 \cos^4 x, \end{aligned}$$

لذا،

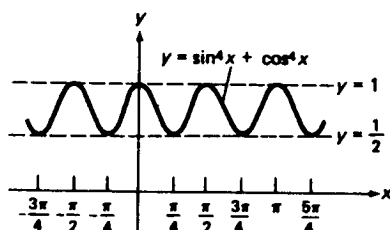
$$f''(x) = 24(0) - 4(0) - 4(1) = -4 \quad , \quad x = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots \text{ اگر}$$

$$f''(x) = 24(0) - 4(1) - 4(0) = -4 \quad , \quad x = \pm\pi/2, \pm3\pi/2, \dots \text{ اگر}$$

و

$$f''(x) = 24\left(\frac{1}{4}\right) - 4\left(\frac{1}{4}\right) - 4\left(\frac{1}{4}\right) = 4 \quad , \quad x = \pm\pi/4, \pm3\pi/4, \dots \text{ اگر}$$

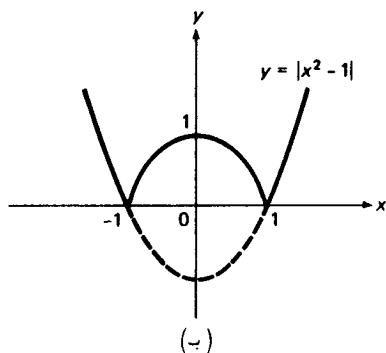
پس، طبق آزمون مشتق دوم،  $f$  در نقاط  $x = 0, \pm\pi/2, \pm\pi, \pm3\pi/2, \pm2\pi, \dots$  ماکزیم موضعی اکید و در نقاط  $x = \pm\pi/4, \pm3\pi/4, \dots$  مینیم موضعی اکید دارد. تحقیق کنید که ماکزیمها همه مساوی ۱ هستند و مینیمها همه مساوی  $\frac{1}{2}$  . نمودار  $f$ ، که بخشی از آن در شکل ۱۵ نموده شده، متناوب با دوره تناوب  $\pi/2$  است. توجه کنید که بی نهایت اکسترم وجود دارند، و این به خاطر تناوب انتظارش می رفت.



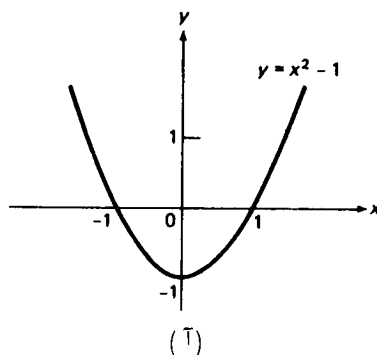
شکل ۱۵

مثال ۱۰. اکسترمهای موضعی تابع  $f(x) = |x^2 - 1|$  را بیابید.

حل. اگر تابع  $1 - x^2$  داخل علامت قدرمطلق را رسم کنیم، سهمی شکل ۱۶ (آ) به دست می آید. با قدرمطلق گرفتن از  $1 - x^2$  تابع  $f$  به دست می آید، و منعکس قسمتی از سهمی را



(ب)



(آ)

شکل ۱۶

موجب می‌شود که زیر محور  $x$  است [منحنی منقطع در شکل ۱۶ (ب)]. لذا، نمودار  $f$  منحنی توپر شکل ۱۶ (ب) است. این منحنی، به‌خاطر انعکاس، در نقاط  $(1, 0)$  و  $(-1, 0)$  گوشه دارد. لذا،  $f$  در  $x = 1$  و  $x = -1$  مشتق‌پذیر است؛ و در نتیجه، در  $x = 1$  و  $x = -1$  نقاط بحرانی دارد. چون  $f$  به ازای هر  $x \neq \pm 1$  مشتق‌پذیر است، نقاط بحرانی دیگر  $f$  فقط به ازای مقادیری از  $x$  رخ می‌دهند که  $f'$  مقدار ۰ بگیرد. به آسانی معلوم می‌شود که این فقط در  $x = 0$  رخ می‌دهد. در واقع،

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1 \\ 1 - x^2, & -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x > 1 \text{ یا } x < -1 \\ -2x, & -1 < x < 1 \end{cases}$$

در نتیجه،  $f'(x) = 0$  اگر و فقط اگر  $x = 0$ . به‌علاوه،  $f'$  در  $x = 0$  از به‌علاوه به منها تغییر علامت می‌دهد، زیرا  $f'(x) > 0$  اگر  $-1 < x < 0$  و  $f'(x) < 0$  اگر  $0 < x < 1$ . لذا، طبق آزمون مشتق اول،  $f$  در  $x = 0$  ماکزیم موضعی اکیدی مساوی  $f(0) = 1$  دارد. آزمون مشتق دوم به همین نتیجه منجر می‌شود، زیرا  $f''(0) = -2$ . در نقاط بحرانی دیگر  $x = 1$  و  $x = -1$ ،  $f$  مینیمهای موضعی اکیدی مساوی  $f(\pm 1) = 0$  دارد و این فوراً از اینکه  $f(\pm 1) = 0$  و  $f(x) > 0$  به ازای  $x \neq \pm 1$  نتیجه می‌شود. به عنوان تمرین، نشان دهید که این مینیمها را می‌توان با آزمون مشتق اول نیز به‌دست‌آورد. آیا تابع  $f$  بر  $(-\infty, \infty)$  اکسترمم مطلق دارد؟ و اگر چنین است، کجا؟

### مسائل

با بررسی تمام نقاط بحرانی، اکسترمهای موضعی تابع داده شده را بیابید. تابع بر چه بازه‌هایی صعودی است؟ نزولی است؟ تابع را رسم کنید.

$$f(x) = x^2 - 2x \quad ۲ \checkmark$$

$$f(x) = |x + 1| - 1 \quad ۱$$

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x \quad ۴ \checkmark$$

$$f(x) = 3x - x^3 \quad ۳ \checkmark$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad ۶ \checkmark$$

$$f(x) = x^4 - 4x^2 + 4 \quad ۵ \checkmark$$

$$f(x) = \frac{6x}{x^2 + 1} \quad ۸$$

$$f(x) = \frac{8}{x^2 + x + 2} \quad ۷$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} \quad ۱۰$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x + 1} \quad ۹$$

$$f(x) = x + \sin x \quad ۱۲$$

$$f(x) = \cos x + \sin x \quad ۱۱$$

اکسترممهای مطلق تابع داده شده بر بازه ذکر شده را بیابید .

۱۳.  $f(x) = x^2 - 4x + 6$  بر  $[-3, 10]$

۱۴.  $f(x) = x^3 - 2x + 1$  بر  $[0, 1]$

۱۵.  $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$  بر  $[-10, 10]$

۱۶.  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$  بر  $[0, 2]$

۱۷.  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  بر  $[0.01, 100]$

۱۸.  $f(x) = \sqrt{5 - 4x}$  بر  $[-1, 1]$

۱۹.  $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$  بر  $[-1, 0]$

۲۰.  $f(x) = \sqrt{2 - x - x^2}$  بر  $[-2, 1]$

۲۱.  $f(x) = 4 \sin x + 2 \cos 2x$  بر  $[0, \pi]$

۲۲.  $f(x) = \cos^2 x + 2 \sin^2 x$  بر  $[\pi/4, 3\pi/4]$

۲۳.  $f(x) = \sin x^2$  بر  $[1, 2]$

۲۴.  $f(x) = \sin(\sin x)$  بر  $[0, 2\pi]$

۲۵. نشان دهید هرگاه  $f(x)$  تابع زوجی یا ماکزیمم (مینیمم) موضعی در  $x = c$  باشد،

آنگاه  $f(x)$  در  $x = -c$  نیز ماکزیمم (مینیمم) موضعی دارد. این نتیجه در کدام

مسئله ۱ تا ۱۲ به کار می‌رود؟

۲۶. نشان دهید هرگاه  $f(x)$  تابع فردی یا ماکزیمم (مینیمم) موضعی در  $x = c$  باشد،

آنگاه  $f(x)$  در نقطه  $x = -c$  مینیمم (ماکزیمم) موضعی می‌باشد. این نتیجه در

کدام مسئله ۱ تا ۱۲ به کار می‌رود؟

۲۷. چه مقداری از  $c$  ماکزیمم تابع  $f(x) = |x^2 + c|$  بر بازه  $[-1, 1]$  را مینیمم می‌کند؟

۲۸. فرض کنید  $f$  بر بازه  $I$  پیوسته بوده، و  $f$  در دو نقطه  $s$  و  $t$  از  $I$  ماکزیمم موضعی

اکید داشته باشد. نشان دهید  $f$  باید در نقطه‌ای بین  $s$  و  $t$  مینیمم موضعی (نه

لروما" اکید) داشته باشد.

### ۳۰۳. تقریر و نقاط عطف

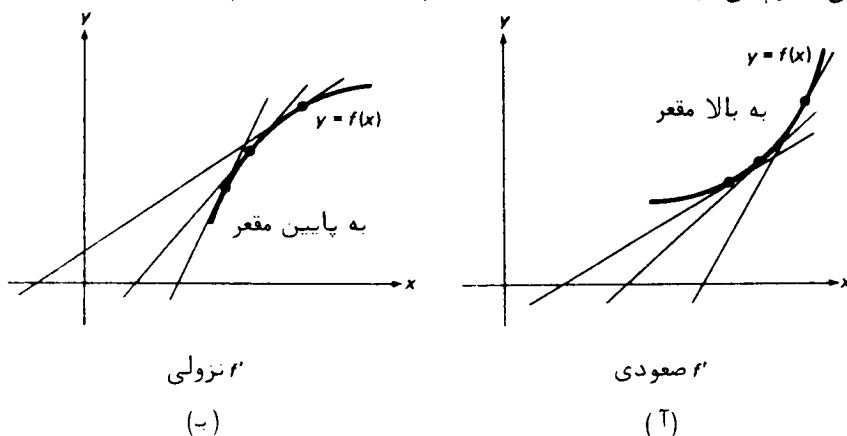
توابع مقعر. فرض کنیم تابع  $f$  بر بازه  $I$  مشتقپذیر بوده، و مشتق  $f'$  بر  $I$  یکنوا باشد.

گوییم  $f$  بر  $I$  به بالا مقعر است اگر  $f'$  بر  $I$  صعودی باشد، و بر  $I$  به پایین مقعر است اگر

$f'$  بر  $I$  نزولی باشد. مفهوم تقریر تعبیر هندسی ساده دارد. چون  $f'(x)$  شیب منحنی

$y = f(x)$  در نقطه متغیر  $P = (x, f(x))$  است، یعنی شیب خط مماس بر منحنی در  $P$ ،

منحنی روی  $I$  به بالا خم می‌شود [ر.ک. شکل ۱۷ (آ)] اگر  $f'$  بر  $I$  صعودی باشد، و به پایین خم می‌شود [ر.ک. شکل ۱۷ (ب)] اگر  $f'$  بر  $I$  نزولی باشد. لذا، می‌توان گفت که بخشی از منحنی که روی  $I$  است "آب را نگه می‌دارد" اگر  $f$  به بالا مقعر باشد، ولی "آب را می‌ریزد" اگر  $f$  روی  $I$  به پایین مقعر باشد. همچنین، از شکلهای چنین برمی‌آید که بخشی از منحنی که روی  $I$  واقع است بالای هر خط مماس خود قرار دارد اگر  $f$  بر  $I$  به بالا مقعر باشد، و پایین هر خط مماس خود قرار دارد اگر  $f$  بر  $I$  به پایین مقعر باشد، و به آسانی معلوم می‌شود که این امر صحت دارد (ر.ک. مسئله ۲۵).



شکل ۱۷

با استفاده از آزمون یکنوایی (قضیه ۷)، شرایطی برای به بالا یا به پایین مقعر بودن یک تابع به دست می‌آوریم.

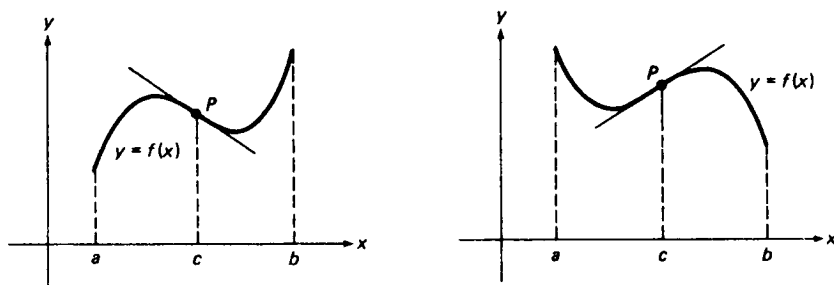
قضیه ۱۰ (آزمون تقعر). فرض کنیم  $f$  دارای مشتق پیوسته  $f'$  بر بازه  $I$  بوده، و  $f''$  در هر نقطه درونی  $I$  موجود و متحدالعلامه باشد. در این صورت، (یک)  $f$  بر  $I$  به بالا مقعر است اگر  $f''$  در هر نقطه درونی  $I$  مثبت باشد؛ (دو)  $f$  بر  $I$  به پایین مقعر است اگر  $f''$  در هر نقطه درونی  $I$  منفی باشد.

برهان. ضمن توجه به تعریف تقعر به بالا و پایین، قضیه ۷ را در مورد مشتق  $f'$  به جای خود تابع  $f$  به کار ببرید.

قضیه ۱۰ از رفتار  $f''$  در نقاط انتهایی  $I$  (اگر بازه  $I$  شامل یکی یا هر دو نقطه

انتهایی خود باشد) چیزی نمی‌گوید. و در واقع، " $f$  ممکن است مقدار ۰ را گرفته یا حتی در یک نقطه انتهایی  $I$  وجود نداشته باشد. همچنین، اگر  $I$  باز باشد، هر نقطه از  $I$  یک نقطه درونی  $I$  است، و لغت " درونی " را می‌توان، درست مثل قضیه ۷، در سه جای صورت قضیه حذف کرد.

**تعریف نقطه عطف.** گوئیم تابع  $f$  در  $c$  نقطه عطف دارد اگر  $f$  در  $c$  تقعر خود را تغییر دهد. این یعنی بازه‌های مانند  $L = (a, c]$  در چپ  $c$  و بازه‌های چون  $R = [c, b)$  در راست  $c$  وجود دارند به طوری که  $f$  بر  $L$  به بالا مقعر است و بر  $R$  به پایین مقعر [ر. ک. شکل ۱۸ (آ)]، یا بر  $L$  به پایین مقعر است و بر  $R$  به بالا مقعر [ر. ک. شکل ۱۸ (ب)] در اینجا فرض است که  $f'(c)$  وجود دارد. همچنین، ممکن است  $f'(c)$  موجود نباشد، مثل



هر منحنی در  $P$  نقطه عطف دارد.

(ب)

(آ)

شکل ۱۸

مثال ۳ زیر. در این حالت  $L$  و  $R$  را بازه‌های باز  $(a, c)$  و  $(c, b)$ ، با حذف نقطه انتهایی  $c$ ، گرفته و فرض می‌کنیم مثل همیشه  $f$  در  $c$  پیوسته باشد. لذا،  $f$  در  $c$  نقطه عطف دارد اگر و فقط اگر  $f'$  بر  $L$  صعودی و بر  $R$  نزولی باشد، یا بر  $L$  نزولی و بر  $R$  صعودی باشد. فوراً معلوم می‌شود که هرگاه  $f$  در  $c$  نقطه عطف داشته و  $f'(c)$  موجود باشد، آنگاه  $f'$  در  $c$  اکسترمم موضعی اکید دارد. در واقع،  $f'$  در  $c$  ماکزیمم موضعی اکید دارد اگر  $f'$  بر  $L$  صعودی و بر  $R$  نزولی باشد، و در  $c$  مینیمم موضعی اکید دارد اگر  $f'$  بر  $L$  نزولی و بر  $R$  صعودی باشد.

اگر تابع  $f$  در  $c$  نقطه عطف داشته باشد، گوئیم منحنی  $y = f(x)$  نیز یک نقطه عطف در  $P = (c, f(c))$  دارد. هرگاه منحنی در  $P$  مماس داشته باشد، آنگاه، همانطور که



شکل ۱۸ (آ) و ۱۸ (ب) نشان داده‌اند، منحنی از یک طرف مماس به طرف دیگر در  $P$  می‌رود (ر.ک. شکل ۲۵). گاهی مماس در یک نقطه عطف را مماس عطفی می‌نامند.

مثال ۱. در تابع  $f(x) = x^3$ ، که در شکل ۱۱، صفحه ۲۷۰، رسم شده، داریم  $f'(x) = 3x^2$  و  $f''(x) = 6x$ . بنابراین،  $f''(x) < 0$  اگر  $x < 0$  و  $f''(x) > 0$  اگر  $x > 0$ . لذا، طبق آزمون تقعر،  $f$  بر  $[0, \infty)$  به بالا مقعر و بر  $(-\infty, 0]$  به پایین مقعر بوده و در  $x = 0$  یک نقطه عطف دارد.

مثال ۲. در تابع  $f(x) = x^4$ ، که در شکل ۱۲، صفحه ۲۷۱، رسم شده، داریم  $f'(x) = 4x^3$  و  $f''(x) = 12x^2$ . لذا، به ازای هر  $x$ ،  $f''(x) \geq 0$ ، که در آن تساوی برقرار است اگر و فقط اگر  $x = 0$ . این بار تقعر به ما می‌گوید که  $f$  بر هر دو بازه  $(-\infty, 0]$  و  $[0, \infty)$ ، و در نتیجه بر تمام خط حقیقی  $(-\infty, \infty)$ ، به بالا مقعر است. چون تقعر  $f$  هرگز تغییر نمی‌کند،  $f$  نقطه عطف ندارد.

مثال ۳. هرگاه  $f(x) = x^{1/3}$ ، به ازای هر  $x \neq 0$ ،  $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$  و  $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$  ولی  $f'(0)$  و  $f''(0)$  وجود ندارند. در واقع، حد معرف  $f'(0)$ ، یعنی

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{1/3} - 0^{1/3}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{-2/3}$$

وجود ندارد، زیرا  $x^{-2/3}$  در هر همسایگی سفته نقطه  $x = 0$  بی‌کران است، و عدم وجود مشتق اول  $f'(0)$  عدم وجود مشتق دوم

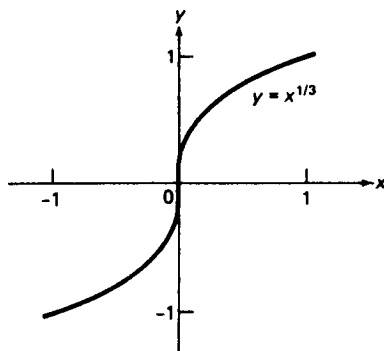
$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0}$$

را ایجاب می‌کند. با بررسی علامت  $f''(x)$  به ازای  $x \neq 0$ ، درمی‌یابیم که  $f''(x) > 0$  اگر  $x < 0$  و  $f''(x) < 0$  اگر  $x > 0$ . در اینجا از این استفاده می‌کنیم که

$$x^{-5/3} = \frac{1}{(x^{1/3})^5} \quad (x \neq 0)$$

همان علامت  $x^{1/3}$  را دارد که این خود با  $x$  هم‌علامت است. پس از آزمون تقعر نتیجه می‌شود که  $f$  بر  $(-\infty, 0)$  به بالا و بر  $(0, \infty)$  به پایین مقعر است و در  $x = 0$  نقطه عطف دارد، و این از نمودار  $f$  در شکل ۱۹ مشهود می‌باشد. ظاهراً "نمودار در مبدأ مماس قائم دارد، و در صفحه ۳۰۸ خواهیم دید چرا این مطلب درست است نوحه کنید که نمی‌توان نقطه انتهایی

$x = 0$  را در بازه‌های تقعر  $(-\infty, 0)$  و  $(0, \infty)$  گنجانند، زیرا  $f'(0)$  وجود ندارد.

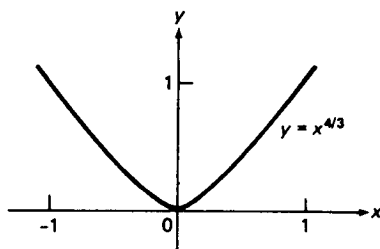


شکل ۱۹

مثال ۴. هرگاه  $f(x) = x^{4/3}$ ، آنگاه به ازای هر  $x$ ،  $f'(x) = \frac{4}{3}x^{1/3}$  و به ازای هر  $x \neq 0$ ،  $f''(x) = \frac{4}{3}x^{-2/3}$  ولی  $f''(0)$  وجود ندارد، زیرا در اینجا حد

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{3}x^{1/3} - 0^{1/3}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{3}x^{-2/3}$$

معرف  $f''(0)$  در هر همسایگی سفته  $x = 0$  بی‌کران است. با بررسی علامت مشتق دوم در می‌یابیم که به ازای هر  $x \neq 0$ ،  $f''(x) > 0$ ، لذا، همانطور که شکل ۲۰ نشان می‌دهد، طبق آزمون تقعر،  $f$  بر هر دو بازه  $[-\infty, 0]$  و  $[0, \infty)$ ، و در نتیجه بر تمام خط حقیقی  $(-\infty, \infty)$ ، به بالا مقعر است. علی‌رغم عدم وجود  $f''(0)$ ، چرا در اینجا نمی‌توان نقطه انتهایی  $x = 0$  را در بازه‌های تقعر  $(-\infty, 0)$  و  $[0, \infty)$  گنجانید؟



شکل ۲۰

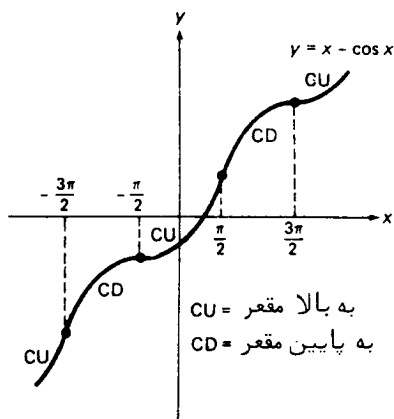
مثال ۵. هرگاه  $f(x) = x - \cos x$ ، آنگاه به ازای هر  $x$ ،  $f'(x) = 1 + \sin x \geq 0$ ، که در آن  $f'(x) = 0$  اگر و فقط اگر

$$x = (2n - \frac{1}{2})\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

لذا، طبق آزمون یکنوایی،  $f$  بر هر بازه  $[(2n - \frac{1}{2})\pi, (2n + \frac{1}{2})\pi]$ ، و در نتیجه بر تمام خط حقیقی  $(-\infty, \infty)$ ، صعودی است؛ بخصوص،  $f$  دارای اکسترمم موضعی است. با بررسی مشتق دوم  $f''(x) = \cos x$ ، درمی یابیم که  $f''$  در نقاط

$$(1) \quad x = (n + \frac{1}{2})\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

مقدار صفر داشته و در هر یک از این نقاط تغییر علامت می دهد، از به علاوه به منها اگر  $n$  زوج باشد و از منها به به علاوه اگر  $n$  فرد باشد. از آزمون تغییر نتیجه می شود که  $f$  بر هر بازه  $[(n - \frac{1}{2})\pi, (n + \frac{1}{2})\pi]$  با  $n$  زوج به بالا مقعر و بر هر چنین بازه با  $n$  فرد به پایین مقعر است و هر نقطه (۱) یک نقطه عطف می باشد. تمام این نکات از نمودار  $f$  که در شکل ۲۱ رسم شده مشهود است.



شکل ۲۱

آزمونهایی برای نقاط عطف. همانطور که قواعد زیر نشان می دهند، نظریه توابع مقعر و نقاط عطف کاملاً "شبه نظریه" توابع یکنوا و اکسترممهای موضعی است.

(یک) هرگاه  $f$  در  $c$  نقطه عطف داشته باشد،  $f''(c)$  وجود ندارد یا موجود و مساوی صفر است؛ یعنی،  $c$  نقطه بحرانی  $f'$  است. این شرط کافی برای نقطه عطف نتیجه فوری شرط لازم برای اکسترمم موضعی است (قضیه ۶، صفحه ۲۶۷)، که دقیقاً "مشابه آن" می باشد. در واقع، هرگاه  $f$  در  $c$  نقطه عطف داشته و  $f''(c)$  موجود باشد، آنگاه  $f'$  در  $c$  اکسترمم موضعی دارد (ر.ک. صفحه ۲۷۹). در نتیجه،  $f''(c)$  وجود ندارد یا  $f''(c) = 0$ ، حال آنکه هرگاه  $f''(c)$  موجود نباشد، آنگاه  $f''(c)$  نیز وجود ندارد، زیرا حد

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c}$$

معرف  $f''(c)$  مستلزم  $f'(c)$  می باشد.

(دو) هرگاه  $c$  نقطه بحرانی  $f'$  بوده و  $f''$  در  $c$  تغییر علامت دهد، آنگاه  $f$  در  $c$  نقطه عطف دارد. در اینجا وجود  $f''$  دست کم در همسایگی سفته‌ای از  $c$  فرض است. آزمون مشتق دوم برای نقطه عطف مشابه دقیق آزمون مشتق اول برای اکسترم موضعی است (قضیه ۸، صفحه ۲۷۱)، و فوراً از آزمون تفکر نتیجه می شود. در واقع، ما قبلاً از این آزمون مشتق دوم در حل مثالهای ۱، ۳، و ۵ به طور تلویحی استفاده کرده ایم. (سه) هرگاه  $f''(c) = 0$  و  $f'''(c)$  موجود و ناصفر باشد، آنگاه  $f$  در  $c$  نقطه عطف دارد. این آزمون مشتق سوم برای نقطه عطف دقیقاً شبیه آزمون مشتق دوم برای اکسترم موضعی (قضیه ۹، صفحه ۲۷۲) بوده و اساساً به همان نحو ثابت می شود، به صورت زیر.

اختیاری. چون مشتق سوم

$$f'''(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f''(x) - f''(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f''(x)}{x - c}$$

موجود است،  $f''(x)$  در همسایگی  $c$  باید وجود داشته باشد. اگر  $f'''(c) > 0$ ، همسایگی سفته‌ای از  $c$  وجود دارد که در آن  $f''(x)$  با  $x - c$  همعلامت است، ولی اگر  $f'''(c) < 0$ ، همسایگی سفته‌ای از  $c$  وجود دارد که در آن  $f''(x)$  با  $x - c$  مختلف‌العلامه می باشد. در هر حالت  $f''$  در  $c$  تغییر علامت می دهد، و لذا، طبق آزمون مشتق دوم،  $f$  در  $c$  نقطه عطف دارد.

باید تأکید کنیم که فقط نقاط بحرانی  $f'$  نامزد نقاط بحرانی  $f$  اند، همانطور که فقط نقاط بحرانی تابع  $f$  نامزد اکسترم موضعی  $f$  می باشند، و ممکن است  $f$  در یک نقطه بحرانی  $f'$  نقطه عطف نداشته باشد.

مثال ۶. در مثال ۱،  $f''(x) = 6x$  صفر است اگر و فقط اگر  $x = 0$ . لذا، طبق قاعده (یک)،  $x = 0$  تنها نامزد برای نقطه عطف بودن  $f$  می باشد. چون  $f'''(x) = 6 \neq 0$ ، از آزمون مشتق سوم (سه) نتیجه می شود که  $x = 0$  یک نقطه عطف  $f$  است، و این قبلاً با استدلالی معادل آزمون مشتق دوم (دو) نشان داده شده است.

مثال ۷. در مثال ۳ مشتق دوم  $f'$  جز در  $x = 0$ ، که وجود ندارد، ناصفر است. لذا، طبق قاعده (یک)،  $x = 0$  تنها نامزد نقطه عطف  $f$  می باشد. نقطه عطف  $f$  بودن  $x = 0$

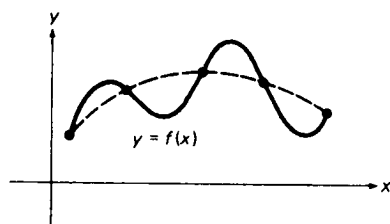
نتیجه‌ای است از آزمون مشتق دوم، زیرا همانطور که قبلاً گفتیم،  $f''$  در  $x = 0$  تغییر علامت می‌دهد.

مثال ۰.۸. در مثال ۵،  $f''(x) = \cos x$  در نقاط  $x = (n + \frac{1}{2})\pi$  ( $n$  عدد صحیح دلخواهی است) صفر و در سایر نقاط ناصفر است. از اینرو، باز طبق قاعده (یک)، این نقاط تنها نامزدهای نقاط عطف  $f$  اند، و در واقع آزمون مشتق سوم نشان می‌دهد که واقعاً "نقاط عطف‌اند زیرا، به ازای هر عدد صحیح  $n$ ،

$$f'''((n + \frac{1}{2})\pi) = -\sin((n + \frac{1}{2})\pi) = (-1)^{n+1} \neq 0$$

البته، ما قبلاً با استدلالی که در آن از آزمون مشتق دوم مکرر استفاده می‌شد به این نتیجه رسیده‌ایم.

رسم منحنی. تا بحال باید روشن شده باشد که اطلاعات در باب چند مشتق اول تابع  $f$  ارزش زیادی در رسم نمودار  $f$ ، یعنی در رسم منحنی  $y = f(x)$ ، دارد. مسلم است که هیچ ایده روشنی از رفتار یک تابع بدون (دست کم) تعیین تمام نقاط اکسترمم و عطف حاصل نمی‌شود. شکل ۲۲ نشان می‌دهد که اگر بخواهیم نمودار  $f$  را بدون این کار رسم کنیم، چه



خطر "اتصال نقاط به یکدیگر"

شکل ۲۲

مشکلی پیش می‌آید. منحنی توپر نمودار واقعی  $f$  است، و منحنی منقطع نتیجه گمراه‌کننده، رسم یک منحنی هموار مار بر نقاط "بد انتخاب شده" ای از نمودار  $f$  می‌باشد. در جدول زیر تمام تکنیکهای رسم منحنی که اینک در اختیار ماست ذکر شده‌اند. درایه اول در هر سطر خاصیتی است از تابع پیوسته  $f$  یا مشتقاتش، و درایه دوم نتیجه‌ای از این خاصیت می‌باشد.

هرگاه:	آنگاه:
$f$ در $c$ اکسترم موضعی داشته باشد	$f$ در $c$ نقطه بحرانی دارد؛ یعنی، $f'(c)$ وجود ندارد یا $f'(c) = 0$ (شرط لازم برای اکسترم موضعی)
$f$ بر بازه $I$ پیوسته و $f'$ در هر نقطه درونی $I$ مثبت (منفی) باشد	$f$ بر $I$ صعودی (نزولی) است (آزمون یکنوایی)
$f$ در $c$ نقطه بحرانی داشته و $f'$ در $c$ از منهای به علاوه تغییر علامت دهد یا $f''(c) > 0$	$f$ در $c$ به پایین (پایین) مفرع است (تعریف)
$f$ در $c$ نقطه بحرانی داشته و $f'$ در $c$ از به علاوه به منهای تغییر علامت دهد یا $f''(c) < 0$	$f$ در $c$ به بالا (پایین) مفرع است (تعریف)
$f$ بر بازه $I$ پیوسته بوده و $f'$ در هر نقطه درونی مثبت (منفی) باشد	$f$ در $c$ نقطه عطف دارد (تعریف)
$f$ در $c$ نقطه عطف داشته باشد	$f$ در $c$ نقطه بحرانی دارد؛ یعنی، $f'(c)$ وجود ندارد یا $f'(c) = 0$ (شرط لازم برای نقطه عطف در $c$ )
$f$ در $c$ نقطه بحرانی داشته و $f''(c) \neq 0$	$f$ در $c$ نقطه عطف دارد (آزمونهای مشتق دوم و سوم برای نقطه عطف)

در رسم منحنی  $y = f(x)$ ،  $y$  تقارنهای ممکن را جستجو کنید (ممکن است تقارنی در کار نباشد). اگر  $f$  تابع زوجی باشد، منحنی نسبت به محور  $y$  متقارن است، حال آنکه اگر  $f$  فرد باشد، منحنی نسبت به مبدأ متقارن است، ولی همانطور که مثال زیر نشان می دهد، حالات دیگری نیز وجود دارند. همچنین، سعی کنید قطعه های  $x$  منحنی را (در صورت وجود) بیابید؛ یعنی، مختصات  $x$  نقاطی که منحنی در آنها محور  $x$  را قطع می کند. تعیین دقیق قطعه های  $x$  ممکن است مشکل باشد، زیرا مستلزم حل معادله  $f(x) = 0$  است، و ممکن است یک تکنیک تقریبی مانند روش تنصیف (ر.ک. صفحه ۱۵۴) به کار آید.

مثال ۹. با استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال، تابع

$$f(x) = 2x^4 - 8x^3 + 8x^2 \quad (2)$$

را بررسی کرده و نمودار آن را رسم نمایید.

حل. با تجزیه ۲ به دست می آوریم

$$f(x) = 2x^4 - 8x^3 + 8x^2 = 2x^2(x^2 - 4x + 4) = 2x^2(x - 2)^2,$$

و این نشان می دهد که منحنی  $y = f(x)$  دارای دو قطع  $x$ ، ۰ و ۲ است. تابع  $f$  نه زوج است نه فرد؛ در نتیجه، منحنی تقارنی نسبت به محور  $y$  یا مبدأ ندارد، ولی نوع دیگری

تقارن دارد که لحظه‌ای دیگر معلوم می‌شود. با سه بار مشتگیری از  $f$  به دست می‌آید

$$f'(x) = 8x^3 - 24x^2 + 16x = 8x(x^2 - 3x + 2) = 8x(x-1)(x-2),$$

$$f''(x) = 24x^2 - 48x + 16 = 24\left(x^2 - 2x + \frac{2}{3}\right),$$

$$f'''(x) = 48x - 48.$$

اگر  $f'(x)$  را مساوی صفر قرار دهیم، درمی‌یابیم که  $f$  سه نقطه بحرانی  $x = 0, 1, 2$  دارد. با محاسبه  $f''$  در این نقاط، معلوم می‌شود که  $f''(0) = 16 > 0$ ،  $f''(1) = -8 < 0$ ،  $f''(2) = 16 > 0$ . لذا،  $f$  در  $x = 0$  و  $x = 2$  مینیمم موضعی اکیدی مساوی  $f(0) = f(2) = 0$  (دومینیم مساویند)، و در  $x = 1$  ماکزیمم موضعی اکیدی مساوی  $f(1) = 2$  دارد. با مساوی صفر قرار دادن  $f''(x)$ ، معادله درجه دوم

$$x^2 - 2x + \frac{2}{3} = (x-1)^2 - \frac{1}{3} = 0$$

با جوابهای

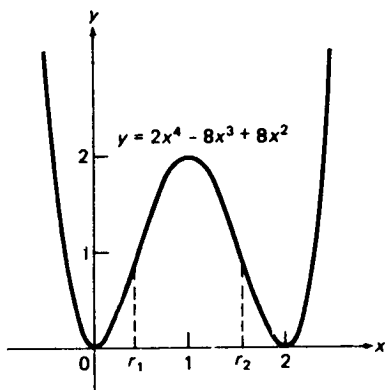
$$r_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.42, \quad r_2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 1.58$$

به دست می‌آید. نقاط  $r_1$  و  $r_2$  نامزد نقاط عطف  $f$  اند؛ و درواقع، نقاط عطف می‌باشند، زیرا  $f''(r_1) = -16\sqrt{3} \neq 0$  و  $f''(r_2) = 16\sqrt{3} \neq 0$ .

با نگاه دقیقتری به مشتقات اول و دوم  $f'$  و  $f''$  باید نکات بیشتری در باب  $f$  آموخت. از فرمول  $f'(x) = 8x(x-1)(x-2)$  معلوم می‌شود که اگر  $f'(x) < 0$ ،  $x < 0$ ، اگر  $f'(x) > 0$ ،  $0 < x < 1$ ، اگر  $f'(x) < 0$ ،  $1 < x < 2$ ، اگر  $f'(x) > 0$ ،  $x > 2$ . لذا،  $f$  بر بازه‌های  $[0, 1]$  و  $[2, \infty)$  صعودی و بر بازه‌های  $(-\infty, 0]$  و  $[1, 2]$  نزولی است. همچنین، با نوشتن  $f''(x) = 24(x-r_1)(x-r_2)$ ، معلوم می‌شود که اگر  $f''(x) > 0$ ،  $x < r_1$ ، اگر  $f''(x) < 0$ ،  $r_1 < x < r_2$ ، اگر  $f''(x) > 0$ ،  $x > r_2$ . لذا،  $f$  بر بازه‌های  $(-\infty, r_1]$  و  $[r_2, \infty)$  به بالا مقعر، و بر بازه  $[r_1, r_2]$  به پایین مقعر می‌باشد.

حالا، با استفاده از این اطلاعات، می‌توان تابع (۲) را رسم کرد. منحنی حاصل در شکل ۳۳ نموده شده است. با استفاده از ماشین حساب، چند نقطه از منحنی رسم شده‌اند، ولی فقط به کمک حساب دیفرانسیل و انتگرال است که می‌توان مطمئن شد که نقاط درست به هم وصل شده‌اند و هیچ ویژگی مهمی از منحنی  $y = f(x)$  نادیده گرفته نشده است. مخصوصاً، این بدان خاطر است که مطمئن شده باشیم که نقاط منحنی نظیر به نقاط اکسترمم و عطف تابع  $f$  رسم شده‌اند. از نمودار معلوم می‌شود که منحنی نسبت به خط قائم  $x = 1$

متقارن است. اگر توجه می‌کردیم که تابع  $f(x) = 2x^2(2-x)^2$  در اتحاد  $f(1-x) \equiv f(1+x)$  که به آسانی تحقیق می‌شود صدق می‌کند، این امر را می‌شد پیش‌بینی کرد.



شکل ۲۳

### مسائل

تمام نقاط عطف تابع داده شده را بیابید.

۲.  $f(x) = \cos x$  ✓

۱.  $f(x) = \sin x$  ✓

۴.  $f(x) = \tan x$  ✓

۳.  $f(x) = \cot x$  ✓

۶.  $f(x) = \csc x$  ✓

۵.  $f(x) = \sec x$  ✓

۸.  $f(x) = x + \sin x$  ✓

۷.  $f(x) = \tan x + \cot x$  ✓

۹. نشان دهید که آزمون مشتق سوم برای نقطه عطف در صورت صفر بودن مشتق سوم بی‌حاصل است.

تمام اکسترممهای موضعی و نقاط عطف تابع داده شده را بیابید. تابع بر چه بازه‌هایی صعودی است؟ نزولی است؟ به بالا مقعر است؟ به پایین مقعر است؟ تابع را رسم کنید.

۱۱.  $f(x) = x^{5/3}$  ✓

۱۰.  $f(x) = x^{2/3}$  ✓

۱۳.  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$  ✓

۱۲.  $f(x) = 2 + x - x^2$  ✓

۱۴.  $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 1$  ✓

۱.  $f(x) = 3x^5 - 5x^3$  ✓

۱۵.  $f(x) = 4x^2 - 2x^4$  ✓

۱۸.  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$  ✓

۱۷.  $f(x) = \frac{3x^2}{x^2+3}$  ✓

۱۹. نشان دهید که تابع  $f(x) = x^2 + ax + b$ ، بی‌توجه به مقادیر  $a$  و  $b$ ، نقطه عطف



- ندارد. آیا این مطلب در مورد تابع  $g(x) = x^4 + ax + b$  نیز درست است؟
۲۰. نشان دهید که تابع  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ، بی‌توجه به مقادیر  $a$ ،  $b$  و  $c$ ، همواره نقطهٔ عطف دارد.  $f$  به ازای چه مقداری از  $a$  در  $x = 1$  نقطهٔ عطف دارد؟
۲۱. نشان دهید که تابع  $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، بی‌توجه به مقادیر  $c$  و  $d$ ، نقطهٔ عطف ندارد اگر  $3a^2 \leq 8b$  و دو نقطهٔ عطف دارد اگر  $3a^2 > 8b$ .
۲۲. نقطهٔ عطف تابع  $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$  کجاست؟
۲۳. به ازای چه مقادیری از  $a$  و  $b$ ، نقطهٔ  $(1, 3)$  نقطهٔ عطف منحنی  $y = ax^3 + bx^2$  است؟
۲۴. نشان دهید که سه نقطهٔ عطف نمودار تابع مسئلهٔ ۱۸ بر خط واحدی قرار دارند. این خط چیست؟
۲۵. فرض کنید  $f$  بر بازهٔ  $I = (a, b)$  مشتقپذیر بوده، و  $c$  نقطه‌ای از  $I$  باشد. در این صورت، مماس بر منحنی  $y = f(x)$  در  $P = (c, f(c))$  خط  $y = t(x) = f'(c)(x - c) + f(c)$  بوده، و تفاضل بین مختص  $y$  منحنی  $y = f(x)$  و مختص  $y$  خط  $y = t(x)$ ، به‌عنوان تابعی از  $x$ ، مساوی است با
- $$g(x) = f(x) - t(x) = f(x) - f(c) - f'(c)(x - c).$$
- نشان دهید هرگاه  $f$  بر  $I$  به بالا (پایین) مقعر باشد، آنگاه  $g$  بر  $I$  مثبت (منفی) است جز در  $c$  که در آن  $g$  دارای مقدار ۰ است. در نتیجه، منحنی  $y = f(x)$  بالای (پایین) مماسش در دو طرف نقطهٔ  $P$  قرار دارد. نشان دهید هرگاه منحنی در  $P$  مماس‌عطفی داشته باشد، آنگاه  $g$  در  $c$  تغییر علامت می‌دهد؛ در نتیجه، منحنی از یک طرف مماس خود به طرف دیگر در  $P$  می‌رود.

### ۴.۳ حدود مستلزم‌بی‌نهایت؛ صور مبهم

نمودار تابع

$$y = f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

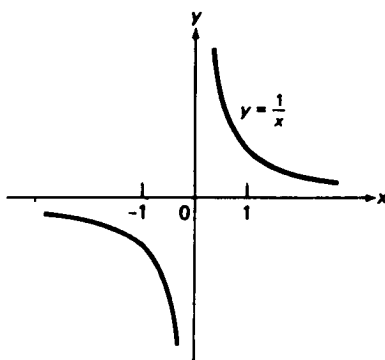
در شکل ۲۴ نموده شده است. با بررسی نمودار معلوم می‌شود که  $f$  از خواص حدی جالبی برخوردار است که هنوز مورد بحث قرار نگرفته‌اند:

(یک) وقتی  $x$  مقادیر کوچک (مثبت یا منفی) اختیار کند،  $y$  مقادیر بزرگ با همان علامت خواهد گرفت؛

(دو) وقتی  $x$  مقادیر بزرگ (مثبت یا منفی) اختیار کند،  $y$  مقادیر کوچک (با همان

علامت) خواهد گرفت.

البتد، در اینجا منظور از عدد منفی کوچک یا بزرگ عددی است منفی با قدر مطلق کوچک یا بزرگ.



شکل ۲۴

این خواص  $f$  رفتار حدی خاصی را بیان می‌کنند که در آن بزرگی و کوچکی نقشی بر عهده دارد. چطور زبان حدود را تعدیل کنیم که حالاتی از این نوع را دربرگیرد؟ خیلی ساده است. اگر متغیری، مثلاً " $x$ "، مقادیر مثبت بزرگ اختیار کند، گوییم  $x$  به (به علاوه) بی‌نهایت نزدیک می‌شود و می‌نویسیم  $x \rightarrow \infty$ ، حال آنکه اگر  $x$  مقادیر منفی بزرگ اختیار کند، گوییم  $x$  به منهای بی‌نهایت نزدیک می‌شود و می‌نویسیم  $x \rightarrow -\infty$ . این با استفاده از علائم  $\infty$  و  $-\infty$  در نوشتن بازه‌های نامتناهی سازگار است. بار دیگر تأکید می‌کنیم که  $\infty$  و  $-\infty$  عدد نیستند.

حدود نامتناهی در مقابل حدود در بی‌نهایت. حال می‌توان خواص (یک) و (دو) تابع  $y = 1/x$  را فشرده‌تر بیان کرده، حدود (یک) را به صورت

$$(۱) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty,$$

و حدود (دو) را به صورت

$$(۲) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

یا، حتی فشرده‌تر، به صورت

$$(۲') \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{x} = 0$$

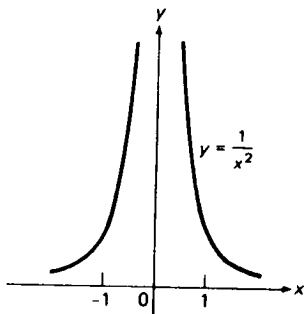
نوشته . در (۱) حدود نامتناهی و در (۲) حدود در بی نهایت داریم . این با محدودی که تا بحال در نظر گرفته ایم ، که همه متناهی اند ، یعنی

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L,$$

که در آنها  $a$  و  $L$  عددند و علایم  $\infty$  و  $-\infty$  نیستند فرق دارد .  
حدود (۱) یکطرفه اند ، ولی حدود نامتناهی می توانند دوطرفه نیز باشند . مثلاً ،

شکل ۲۵ نشان می دهد که

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$



شکل ۲۵

واضح است که وقتی  $x \rightarrow a$  ،  $f(x) \rightarrow \infty$  اگر فقط اگر وقتی  $x \rightarrow a^+$  و  $x \rightarrow a^-$  ،  $f(x) \rightarrow \infty$  و همین امر در صورت تعویض  $\infty$  با  $-\infty$  درست است . همچنین ، می توان حدود نامتناهی در بی نهایت داشت . مثلاً ، از شکل های ۱۹ و ۲۰ ، صفحه ۲۸۱ ، معلوم می شود که

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/3} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{1/3} = -\infty$$

و

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} x^{4/3} = \infty.$$

این نکات را می توان با تعدیل زبان  $\epsilon, \delta$  که در آن علایمی غیر از  $\epsilon$  و  $\delta$  ، یعنی  $C$  و  $A$  ، برای اعدادی که نوعاً "بزرگ هستند به کار رود دقیق ساخت ؛ با این کار از کوچکی مربوط به  $\epsilon$  و  $\delta$  پرهیز می شود . مثلاً ، وقتی  $x \rightarrow a^+$  ،  $f(x) \rightarrow x$  یعنی به ارای هر  $C > 0$  ( مهم نیست چقدر بزرگ ) ، می توان  $\delta > 0$  ای ( به قدر کافی کوچک ) یافت به طوری که هر وقت  $a + \delta > x > a$  ،  $f(x) > C$  . به همین نحو ، وقتی  $f(x) \rightarrow -\infty$  ،  $x \rightarrow \infty$  ، یعنی به ارای هر  $C > 0$  ( مهم نیست چقدر بزرگ ) ، می توان  $A > 0$  ای ( به قدر کافی

بزرگ) یافت به طوری که هر وقت  $x > A$ ،  $f(x) < -C$ ؛ در اینجا فرض است که  $f$  بر بازه‌ای نامتناهی از نوع  $(c, \infty)$  تعریف شده است. یا، به عنوان مثالی دیگر، وقتی  $x \rightarrow -\infty$ ،  $f(x) \rightarrow L$  یعنی به ازای هر  $\varepsilon > 0$  (مهم نیست چقدر کوچک)، می‌توان  $A > 0$  ای (به قدر کافی بزرگ) یافت به طوری که هر وقت  $x < -A$ ،  $|f(x) - L| < \varepsilon$ ، که در اینجا فرض است که  $f$  بر بازه‌ای نامتناهی از نوع  $(-\infty, c)$  تعریف شده است. وقتی با این تعاریف خو گرفتید، می‌توانید عبارت داخل پرانتزها را حذف کنید.

مثال ۱. فرمولهای حدی (۱) را دقیقاً ثابت کنید.

حل. به ازای  $C > 0$  داده شده، قرار می‌دهیم  $\delta = 1/C$ . اگر  $0 < x < \delta$ ، داریم

$$\frac{1}{x} > \frac{1}{\delta} = C,$$

حال آنکه اگر  $-\delta < x < 0$ ، بنا بر قاعدهٔ تقابل در نامساویها (قضیه ۴، صفحه ۱۳)،

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{-\delta} = -C,$$

اما این با (۱) به "زبان  $C, \delta$ " معادل است.

مثال ۲. فرض کنید  $n$  عدد صحیح مثبتی باشد. نشان دهید که

$$(۳) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} \infty & \text{اگر } n \text{ زوج باشد,} \\ -\infty & \text{اگر } n \text{ فرد باشد,} \end{cases}$$

حل. به ازای  $C > 0$  دلخواه، قرار می‌دهیم  $\delta = \sqrt[n]{1/C}$  و ابتدا فرض می‌کنیم  $0 < x < \delta$  پس  $0 < x^n < \delta^n$ ؛ و لذا،

$$(۴) \quad \frac{1}{x^n} > \frac{1}{\delta^n} = C.$$

حال فرض کنیم  $-\delta < x < 0$ . پس اگر  $n$  زوج باشد،  $0 < x^n < \delta^n$ ، و مجدداً نامساوی (۴) به دست می‌آید، حال آنکه اگر  $n$  فرد باشد،  $-\delta^n < x^n < 0$ ، و در عوض خواهیم داشت

$$(۴') \quad \frac{1}{x^n} < \frac{1}{-\delta^n} = -C$$

و بدین وسیله برهان (۳) در زبان  $\delta, C$  کامل می شود. توجه کنید که اگر  $n = 1$ ، (۳) به (۱) تحویل خواهد شد.

مثال ۳. نشان دهید

$$(۵) \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0,$$

که در آن  $n$  عدد صحیح مثبتی است.

حل. به ازای هر  $\varepsilon > 0$ ، فرض کنید  $A = \sqrt[n]{1/\varepsilon}$ . پس اگر  $x > A$  یا  $x < -A$ ، یعنی  $|x| > A$ ، داریم

$$\left| \frac{1}{x^n} - 0 \right| = \frac{1}{|x|^n} < \frac{1}{A^n} = \varepsilon,$$

و حد (۵) را این بار به "زبان  $A, \varepsilon$ " ثابت کرده ایم. توجه کنید که اگر  $n = 1$ ، (۵) به (۲') تحویل می شود.

مثال ۴. فرض کنید  $m$  و  $n$  اعداد صحیح مثبتی باشند. نشان دهید که

$$(۶) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{m/n} = \infty.$$

حل. برای آنکه  $x^{m/n}$  از  $C > 0$  داده شده تجاوز کند،  $x > A = C^{n/m}$  را اختیار می کنیم، زیرا در این صورت  $x^{m/n} > A^{m/n} = C$ . این حد (۶) را به "زبان  $C, A$ " ثابت می کند.

مثال ۵. فرض کنید  $m$  و  $n$  اعداد صحیح مثبتی باشند به طوری که  $n$  فرد و  $m/n$  تحویل ناپذیر باشد. نشان دهید که

$$(۶') \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{m/n} = \begin{cases} \infty & \text{اگر } m \text{ زوج باشد،} \\ -\infty & \text{اگر } m \text{ فرد باشد،} \end{cases}$$

حل. یک برهان غیرصوری کفایت می کند. چون  $n$  فرد است،  $x^{m/n} = (\sqrt[n]{x})^m$  به ازای  $x$  منفی تعریف شده است. اگر  $x$  مقادیر منفی بدلخواه بزرگ بگیرد،  $\sqrt[n]{x}$  نیز چنین می کند. لذا،  $x^{m/n} = (\sqrt[n]{x})^m$  به ازای  $m$  زوج مقادیر مثبت بدلخواه بزرگ می گیرد و، به ازای  $m$  فرد،

مقادیر منفی بدخواه بزرگ خواهد گرفت .

مثلاً " ، به کمک فرمولهای (۶) و (۶') ،

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{3/6} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{3/7} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{4/7} = \infty,$$

ولی

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{3/6}$$

بی معنی است .

اعمال بر حدود در بی نهایت . قضایای حاکم بر اعمال جبری حدود معمولی ، که در صفحه ۱۳۰ خلاصه شده اند ، برای حدود در بی نهایت برقرار می مانند . لذا ، هرگاه

$$(۷) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = M,$$

آنگاه

$$(۸) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M,$$

$$(۹) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)g(x) = LM,$$

$$(۱۰) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \quad (M \neq 0),$$

و همین فرمولها در صورت تعویض  $\infty$  با  $-\infty$  برقرارند . برهانها اساساً همان برهانهای حدود معمولی اند .

اختیاری . مثلاً " ، برهان (۸) مشابه دقیق برهان قضیه ۴ ، صفحه ۱۳۱ ، است و به صورت زیر پیش می رود . به خاطر (۷) ، به ازای هر  $\varepsilon > 0$  می توان عددی مانند  $A_f > 0$  یافت به طوری که هر وقت  $x > A_f$  ،  $|f(x) - L| < \varepsilon/2$  و عددی چون  $A_g > 0$  یافت به طوری که هر وقت  $x > A_g$  ،  $|g(x) - M| < \varepsilon/2$  . لذا ، طبق نامساوی مثلثی ، هر وقت  $x > A = \max \{A_f, A_g\}$  یعنی هر وقت  $x$  از  $A_f$  و  $A_g$  تجاوز کند ،

$$|f(x) \pm g(x) - (L \pm M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ولی این دقیقاً " یعنی (۸) به زبان  $\varepsilon, A$  .

مثال ۶ .  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(x+4)(2x^2+1)}$  را حساب کنید .

حل. ابتدا صورت و مخرج را بر  $x^3$  تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{x^3}{(x+4)(2x^2+1)} = \frac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{x+4}{x} \frac{2x^2+1}{x^2}} = \frac{1}{\left(1+\frac{4}{x}\right)\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}.$$

این کمک بزرگی است، چون عبارت طرف راست شامل توابع  $1/x$  و  $1/x^2$  است که قبلاً در مثال ۳ دیدیم که هر دو وقتی  $x \rightarrow \infty$  به ۰ نزدیک می‌شوند. حال با استفاده از فرمولهای (۸) تا (۱۰)، حد وقتی  $x \rightarrow \infty$  می‌گیریم. نتیجه عبارت است از

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(x+4)(2x^2+1)} &= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{4}{x}\right) \left(2 + \frac{1}{x^2}\right) \right]} \\ &= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

زیرا

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + 4 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 1 + 4 \cdot 0 = 1, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{x^2}\right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} 2 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 2 + 0 = 2. \end{aligned}$$

پس نشان داده‌ایم که

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(x+4)(2x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2x^3 + 8x^2 + x + 4} = \frac{1}{2}.$$

همین نتیجه را می‌توان با استدلال صورتی‌تر زیر به دست آورد: از چهار جمله، موجود در مخرج  $2x^3 + 8x^2 + x + 4$ ، جمله  $2x^3$  در صورت بزرگ‌بودن  $x$  بیشترین سهم را دارد. بنابراین، می‌توان نوشت

$$\frac{x^3}{2x^3 + 8x^2 + x + 4} \approx \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2},$$

که در آن تقریب با بزرگ شدن  $x$  بهتر می‌شود.

اعمال بر حدود نامتناهی. قواعد محاسبه با حدود نامتناهی، به‌خلاف حدود در بی‌نهایت،

از نوع متفاوتی هستند. مثلاً، "هرگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty,$$

آنگاه

$$(11) \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \infty.$$

به طور غیر ضروری، فرض کنیم وقتی  $x \rightarrow a$ ،  $f(x)$  به حدی نزدیک شود. در این صورت، اگر وقتی  $x \rightarrow a$ ،  $g(x)$  مقادیر مثبت بدخواه بزرگ اختیار کند،  $f(x) + g(x)$  نیز چنین می کند. این مسلماً درست است، زیرا مجموع یک عدد مثبت بسیار بزرگ و عددی نزدیک عدد  $L$  باید عدد مثبت بسیار بزرگی باشد.

اختیاری. اگر برهان دقیقی لازم باشد به صورت زیر است. چون وقتی  $x \rightarrow a$ ،  $f(x) \rightarrow L$ ، عددی مانند  $k$  (نه لزوماً مثبت) و عدد مثبتی چون  $\delta_f$  وجود دارند به طوری که هر وقت  $0 < |x - a| < \delta_f$ ،  $f(x) > k$ . همچنین، از اینکه وقتی  $x \rightarrow a$ ،  $g(x) \rightarrow \infty$  معلوم می شود که به ازای هر  $C > 0$  عدد مثبتی مانند  $\delta_g$  وجود دارد به طوری که هر وقت  $0 < |x - a| < \delta_g$ ،  $g(x) > C - k$ . در این صورت، هر وقت  $0 < |x - a| < \delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$ ،  $f(x) + g(x) > k + (C - k) = C$ ، به زبان  $C, \delta$  ثابت شده است. (۱۱)

با نماد اختصاری، هم اکنون نشان دادیم که هرگاه  $f(x) \rightarrow L$  و  $g(x) \rightarrow \infty$ ، آنگاه  $f(x) + g(x) \rightarrow \infty$  (عبارت "وقتی  $x \rightarrow a$ " در سه جا حذف شده است). به همین نحو به آسانی معلوم می شود که هرگاه  $f(x) \rightarrow L$  و  $g(x) \rightarrow -\infty$ ، آنگاه  $f(x) + g(x) \rightarrow -\infty$  در واقع، می توان این قاعده و قاعده قبل را در یک قاعده آورد:

(یک) هرگاه  $f(x) \rightarrow L$  و  $g(x) \rightarrow \pm\infty$ ، آنگاه  $f(x) + g(x) \rightarrow \pm\infty$ ، با این فرض که در دو مورد  $\pm$  فقط یک علامت، به علاوه یا منها، باید اختیار شود (به طور کلی، اگر علامت  $\pm$  یا  $\mp$  در دو یا چند جا ظاهر شوند، می پذیریم که در همه جا علامت بالا یا علامت پایین را اختیار کنیم). یک قاعده مربوطه عبارت است از

(یک) هرگاه  $f(x) \rightarrow \pm\infty$  و  $g(x) \rightarrow \pm\infty$ ، آنگاه  $f(x) + g(x) \rightarrow \pm\infty$ ، که آن را می توان به طور غیر ضروری به این نحو ثابت کرد که مجموع دو عدد مثبت بدخواه بزرگ عدد مثبت بدخواه بزرگی است، ولی مجموع دو عدد منفی بدخواه بزرگ عدد منفی بدخواه بزرگی می باشد.

حال با ادامه این کار می توان قواعد دیگری برای حدود نامتناهی به دست آورد.



در قواعد (چهار) و (چهار') نماد  $g(x) \rightarrow 0^+$  یعنی وقتی  $x \rightarrow a$ ،  $g(x) \rightarrow 0$  و  $g(x)$  به ازای هر  $x$  در همسایگی سفته‌ای از  $a$  مثبت است، حال آنکه  $g(x) \rightarrow 0^-$  یعنی وقتی  $x \rightarrow a$   $g(x) \rightarrow 0$  و  $g(x)$  به ازای جمیع  $x$  های همسایگی سفته‌ای از  $a$  منفی می‌باشد.

(دو) هرگاه  $f(x) \rightarrow L \neq 0$  و  $g(x) \rightarrow \pm\infty$ ، آنگاه  $f(x)g(x) \rightarrow \pm\infty$  اگر  $L > 0$ ، در حالی که  $f(x)g(x) \rightarrow \mp\infty$  اگر  $L < 0$ ؛

(دو') هرگاه  $f(x) \rightarrow \pm\infty$  و  $g(x) \rightarrow \pm\infty$ ، آنگاه  $f(x)g(x) \rightarrow \pm\infty$  اگر  $f(x) \rightarrow \infty$  در حالی که  $f(x)g(x) \rightarrow \mp\infty$  اگر  $f(x) \rightarrow -\infty$ ؛

(سه) هرگاه  $f(x) \rightarrow L$  و  $g(x) \rightarrow \pm\infty$ ، آنگاه  $f(x)/g(x) \rightarrow 0$ ؛

(چهار) هرگاه  $f(x) \rightarrow L \neq 0$  و  $g(x) \rightarrow 0^\pm$ ، آنگاه  $f(x)/g(x) \rightarrow \pm\infty$  اگر  $L > 0$  در حالی که  $f(x)/g(x) \rightarrow \mp\infty$  اگر  $L < 0$ ؛

(چهار') هرگاه  $f(x) \rightarrow \pm\infty$  و  $g(x) \rightarrow 0^\pm$ ، آنگاه  $f(x)/g(x) \rightarrow \pm\infty$  اگر  $f(x) \rightarrow \infty$  در حالی که  $f(x)/g(x) \rightarrow \mp\infty$  اگر  $f(x) \rightarrow -\infty$ .

مثلاً"، جان مطلب در قاعده (چهار) این است که حاصل تقسیم یک عدد ناصفر بر یک عدد کوچک همعلامت با آن عدد مثبت بزرگی است، ولی حاصل تقسیم هر عدد ناصفر بر یک عدد کوچک مختلف‌العلامه با آن عدد منفی بزرگی می‌باشد. مطمئن شوید کسه درک شهودی مشابهی از این قواعد به دست آورده‌اید.

در قواعد فوق فرض است که وقتی  $x \rightarrow a$ ، توابع  $f(x)$  و  $g(x)$  به حدودشان، متناهی یا نامتناهی، نزدیک می‌شوند، ولی تمام قواعد در صورتی که  $x \rightarrow a^+$  یا  $x \rightarrow a^-$  یا حتی  $x \rightarrow \infty$  یا  $x \rightarrow -\infty$  برقرار می‌مانند. در یک حد وقتی  $x \rightarrow a^+$ ، نماد  $g(x) \rightarrow 0^+$  یعنی  $g(x) \rightarrow 0$  و  $g(x)$  به ازای جمیع  $x$  های بازه‌ای چون  $(a, a + \delta)$  مثبت است، و در یک حد وقتی  $x \rightarrow \infty$ ، نماد  $g(x) \rightarrow 0^-$  یعنی  $g(x) \rightarrow 0$  و  $g(x)$  در بازه‌ای چون  $(c, \infty)$  منفی می‌باشد، و از این قبیل.

مثال ۷. چون وقتی  $x \rightarrow 0^+$ ،  $\cos x \rightarrow 1$  و  $1/x \rightarrow \infty$ ، اعمال قاعده (یک) نتیجه می‌دهد که

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \cos x + \frac{1}{x} \right) = \infty.$$

مثال ۸. چون طبق مثال ۴ وقتی  $x \rightarrow \infty$ ،  $x^{2/3} \rightarrow \infty$  و  $x^{5/3} \rightarrow \infty$ ، از قاعده (یک) نتیجه می‌شود که

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^{2/3} + x^{5/3}) = \infty,$$

و سپس از قاعده<sup>۵</sup> (سه) داریم

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{2/3} + x^{5/3}} = 0.$$

مثال ۹. چون وقتی  $x \rightarrow 0^-$ ،  $(\sin x)/x \rightarrow 1$  و  $1/x \rightarrow -\infty$ ، قاعده<sup>۶</sup> (دو) نتیجه می دهد که

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x^2} = -\infty.$$

چگونه قاعده<sup>۶</sup> (چهار) همین نتیجه را فوراً<sup>۷</sup> می دهد؟

صور مبهم  $0/0$ ،  $0 \cdot \infty$ ،  $\infty/\infty$ ، و  $\infty - \infty$ . با آنکه قواعد (یک) تا (چهار) مطالب زیادی از رفتار حدود نامتناهی به ما می گویند، هنوز چندحالتی وجود دارند که چیزی در باب آنها گفته نشده است. به طور مشخص، قاعده<sup>۶</sup> (یک) شامل  $f(x) \rightarrow \infty$  و  $g(x) \rightarrow -\infty$  (یا  $f(x) \rightarrow -\infty$  و  $g(x) \rightarrow \infty$ ) نمی شود، قاعده<sup>۶</sup> (دو) شامل  $f(x) \rightarrow 0$  و  $g(x) \rightarrow \pm\infty$  نمی شود، قاعده<sup>۶</sup> (سه) شامل  $f(x) \rightarrow \infty$  و  $g(x) \rightarrow \pm\infty$  (یا  $f(x) \rightarrow -\infty$  و  $g(x) \rightarrow \pm\infty$ ) نمی شود، و قاعده<sup>۶</sup> (چهار) شامل  $f(x) \rightarrow 0$  و  $g(x) \rightarrow 0^\pm$  نخواهد شد. این چهار حالت را به ترتیب با صور مبهم  $\infty - \infty$ ،  $0 \cdot \infty$ ،  $\infty/\infty$ ، و  $0/0$  نشان می دهیم<sup>۸</sup>. هر صورت مبهم اختصاری است برای حدی که هر مقدار (به انضمام  $\infty$  یا  $-\infty$ ) دارد یا حتی وجود ندارد. واژه<sup>۹</sup> مبهم همان معنی صورت مبهم را داشته، و منظور از رفع ابهام یعنی یافتن حد نظیر به ابهام (در صورت وجود) می باشد.

صورت مبهم  $0/0$  اختصاری است برای

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

که در آن وقتی  $x \rightarrow a$  (به جای  $x \rightarrow a$  ممکن است  $x \rightarrow a^+$ ،  $x \rightarrow a^-$ ،  $x \rightarrow \infty$ ، یا  $x \rightarrow -\infty$  داشته باشیم)،  $f(x) \rightarrow 0$  و  $g(x) \rightarrow 0$ . ما قبلاً<sup>۱۰</sup> حدود بسیاری از این نوع را بررسی کرده ایم، و بخصوص محاسبه<sup>۱۱</sup> هر مشتق

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

۱. عبارات  $0^0$ ،  $\infty^0$ ، و  $1^\infty$  نیز صور مبهم اند، و در بخش ۵.۶ در نظر گرفته خواهند شد.

یعنی رفع ابهام  $0/0$ ، زیرا صورت و مخرج خارج قسمت تفاضلی سمت راست هر دو با  $x \rightarrow a$  به  $0$  نزدیک می‌شوند و، در واقع، به ازای  $x = a$  برابر  $0$  اند. با انتخاب  $f(x) = Lx$  و  $g(x) = x$  داریم

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} L = L,$$

درحالی که انتخاب  $f(x) = \pm x$  و  $g(x) = x^3$  نتیجه می‌دهد

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pm 1}{x^2} = \pm \infty.$$

به علاوه، هرگاه  $f(x) = x \sin(1/x)$  و  $g(x) = x$ ، آنگاه، بنابر مثال ۱۰، صفحه ۱۲۷،

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

وجود ندارد. اما در هر سه حالت وقتی  $x \rightarrow a$ ،  $f(x) \rightarrow 0$  و  $g(x) \rightarrow 0$ . لذا، حد نظیر به ابهام  $0/0$  را می‌توان هر عدد، از جمله  $\infty$  یا  $-\infty$ ، گرفت یا حتی ممکن است موجود نباشد. همین امر در مورد ابهامهای  $0 \cdot \infty$  و  $\infty/\infty$  درست است، زیرا عبارت  $f(x)/g(x)$ ، که وقتی  $x \rightarrow a$  به  $0/0$  تحویل می‌شود، را می‌توان به شکل زیر نیز نوشت:

$$f(x) \frac{1}{g(x)}$$

که به  $0 \cdot \infty$  تحویل می‌شود، یا به شکل

$$\frac{1/g(x)}{1/f(x)}$$

نوشت که به  $\infty/\infty$  تحویل می‌شود (بنابر قاعدهٔ (چهار)، اگر تابعی به صفر نزدیک شود، متقابلش به بی نهایت نزدیک خواهد شد). مثلاً، از

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\pi x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \pi x \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{1/\pi x} = \pi$$

معلوم می‌شود که  $\pi$  مقدار ممکن از حد نظیر به هر صورت مبهم  $0/0$ ،  $0 \cdot \infty$  و  $\infty/\infty$  است.

صورت مبهم  $\infty - \infty$  اختصاری است برای

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)],$$

که در آن وقتی  $x \rightarrow a$ ،  $f(x) \rightarrow \infty$  و  $g(x) \rightarrow \infty$ . با اختیار  $f(x) = L + (1/x^2)$  و

$g(x) = 1/x^2$  ، داریم

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} L = L,$$

حال آنکه انتخاب  $f(x) = 2/x^2$  و  $g(x) = 1/x^2$  نتیجه می دهد

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

( به همین نحو، اگر  $f(x) = 1/x^2$  و  $g(x) = 2/x^2$  ، وقتی  $x \rightarrow 0$  خواهیم داشت  $f(x) - g(x) \rightarrow -\infty$  . به علاوه، هرگاه  $f(x) = \sin(1/x) + 1/x^2$  و  $g(x) = 1/x^2$ ، آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

وجود ندارد. اما در هر سه حالت وقتی  $x \rightarrow 0$ ،  $f(x) \rightarrow \infty$  و  $g(x) \rightarrow \infty$ . لذا، حد نظیر به ابهام  $\infty - \infty$  می تواند هر مقدار از جمله  $\infty$  یا  $-\infty$  را بگیرد یا حتی وجود نداشته باشد.

مثال ۱۰.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x})$  را حساب کنید.

حل. به آسانی معلوم می شود که وقتی  $x \rightarrow \infty$ ،  $\sqrt{x^2 + 2x} \rightarrow \infty$  و  $\sqrt{x^2 - 2x} \rightarrow \infty$ . لذا، در محاسبه این حد، از صورت  $\infty - \infty$  رفع ابهام می کنیم. برای خلاص شدن از اختلاف بین ریشه های دوم، عبارت داده شده را در مجموع ریشه های دوم ضرب و بر آن تقسیم می کنیم. به طور مفصل،

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x} &= \frac{(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x})(\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 2x})}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 2x}} \\ &= \frac{x^2 + 2x - (x^2 - 2x)}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 2x}} \\ &= \frac{4x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x}\right)} + \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{2}{x}\right)}} \\ &= \frac{4x}{x \sqrt{1 + \frac{2}{x}} + x \sqrt{1 - \frac{2}{x}}} = \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}} \end{aligned}$$

که در مرحله پیش از آخرین مرحله می توان  $x$  را مثبت گرفت ( زیرا  $x \rightarrow \infty$  )؛ در نتیجه،  
 $\sqrt{x^2} = x$  . بنابراین ،

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}} = \frac{4}{1 + 1} = 2.$$

به عنوان تمرین ، با استفاده از این امر که اگر  $x < 0$  ،  $\sqrt{x^2} = -x$  ، نشان دهید که اگر  
 به جای  $x \rightarrow \infty$  داشته باشیم  $x \rightarrow -\infty$  ، حد به جای ۲ مساوی ۲- خواهد بود .

### مسائل

حد داده شده را حساب کنید ( ممکن است مساوی  $\infty$  یا  $-\infty$  باشد ) .

۱.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{11/7}$  ✓

۲.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-3/4}$  ✓

۳.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{5/3}$  ✓

۴.  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+3}{x^2-9}$  ✓

۵.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2}{x^2-4}$  ✓

۶.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^{-7/11}$  ✓

۷.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x+1}{x^3-1}$  ✓

۸.  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{6}{x^3+1}$  ✓

۹.  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2+9}{x^2-9}$  ✓

۱۰.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2+1}{x^{2/3}}$  ✓

۱۱.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10}{x^3+2}$  ✓

۱۲.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-4}{\sqrt{x}}$  ✓

۱۳.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x}{x^{1.1}}$  ✓

۱۴.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x^2}$  ✓

۱۵.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x^2}$  ✓

۱۶.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x^2}{1+x}$  ✓

۱۷.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1-x^2}$  ✓

۱۸.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-x}{2+x}$  ✓

۱۹.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}}{2x+1}$  ✓

۲۰.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+2}$  ✓

۲۱.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+1}{x^2-2}$  ✓

۲۲. هرگاه  $f(x) = (x-1)/(x+2)$  ، آنگاه وقتی  $x \rightarrow \pm\infty$  ،  $f(x) \rightarrow 1$  . تمام  $x$  هایی را  
 بیابید که  $|f(x) - 1| < 0.01$  .

۲۳. هرگاه  $f(x) = x/(x-3)$  ، آنگاه وقتی  $x \rightarrow 3^+$  ،  $f(x) \rightarrow \infty$  ، و نیز وقتی  $x \rightarrow 3^-$  ،  $f(x) \rightarrow -\infty$  .  
 تمام  $x$  هایی را بیابید که  $f(x) > 1000$  و نیز تمام  $x$  هایی را بیابید که  $f(x) < -1000$  .

حد داده شده را محاسبه کنید ، هر یک به صورت مبهم  $0 \cdot \infty$  است .

۲۴.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-2/3}(1-x^{2/3})$  ✓

۲۵.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1/2}(x^{1/4}-1)$  ✓

کاربردهای دیگر مشتقگیری ۳۰۱

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x^{1/3}(4 + x^{-2/3}) \cdot ۲۷ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/2}(1 + x^{-3/4}) \cdot ۲۶ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sqrt{\csc x} \cdot ۳۰ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \csc x \cdot ۲۹ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cot x \cdot ۲۸ \checkmark$$

۳۱. هر تابع کراندار بر بازه‌ای از نوع  $(c, \infty)$  را نزدیک  $\infty$  کراندار می‌نامیم، و هر تابع

کراندار بر بازه‌ای از نوع  $(-\infty, c)$  را نزدیک  $-\infty$  کراندار می‌نامیم. نشان دهید هرگاه

$f(x)$  نزدیک  $\infty$  کراندار بوده و وقتی  $x \rightarrow \infty$ ،  $g(x) \rightarrow 0$ ، آنگاه وقتی  $x \rightarrow \infty$ ،

$f(x)g(x) \rightarrow 0$ ، و همین امر در صورت تعویض  $\infty$  با  $-\infty$  درست است.

حد داده شده را (در صورت وجود) به کمک مسئله ۳۱ حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \cdot ۳۴ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\sin x}{x} \cdot ۳۳ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \sin x \cdot ۳۲ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \cdot ۳۷ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x^2}{x} \cdot ۳۶ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x + \cos x}{x^{1/3}} \cdot ۳۵ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\tan x}{x} \cdot ۴۴ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\cos x}}{x} \cdot ۳۹ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \frac{1}{x} \cdot ۳۸ \checkmark$$

حد داده شده را حساب کنید، هرکدام به صورت مبهم  $\infty - \infty$  می‌باشد.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - x + 1}) \cdot ۴۱ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x) \cdot ۴۲ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 4x}) \cdot ۴۳ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot ۴۴ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x\sqrt{x^2 + 1} - x^2) \cdot ۴۵ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)} - x) \cdot ۴۶ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x}) \cdot ۴۷ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}) \cdot ۴۸ \checkmark$$

### ۵.۳. مجانبهای و مماسهای قائم

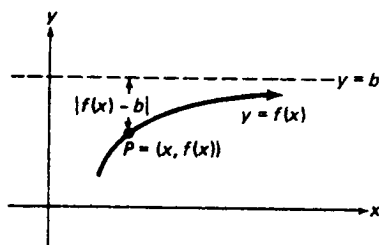
مجانبهای افقی. فرض کنیم  $f$  تابع پیوسته‌ای بوده و

$$(۱) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b,$$

که در آن  $b$  متناهی است. با نوشتن (۱) به شکل معادل

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x) - b| = 0,$$

معلوم می‌شود که  $|f(x) - b|$  فاصله خط افقی  $y = b$  و نقطه متغیر  $P = (x, f(x))$  بر نمودار تابع  $f$  است (ر.ک. شکل ۲۶). لذا، وقتی  $x \rightarrow \infty$ ، نقطه  $P$  به خط  $y = b$  نزدیک



خط  $y = b$  یک مجانب افقی است.

شکل ۲۶

می‌شود. به طور کلی، اگر وقتی فاصله  $P = (x, f(x))$  تا مبدأ به بی‌نهایت نزدیک می‌شود نقطه  $P$  به خط مستقیم  $L$  نزدیک گردد، گوییم  $L$  یک مجانب  $f$  است، یا نمودار  $f$  به طور مجانبی به  $L$  نزدیک می‌شود. (برای به کار بردن این تعریف باید نمودار  $f$  دست کم در یک جهت "به بی‌نهایت برود"، که البته همیشه این‌طور نیست). لذا، هم‌اکنون نشان داده‌ایم که اگر (۱) برقرار باشد،  $f$  خط  $y = b$  را به عنوان مجانب افقی دارد.

اساساً "همین استدلال نشان می‌دهد که هرگاه

$$(۱') \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c,$$

که در آن  $c$  متناهی است، آنگاه  $f$  خط  $y = c$  را به عنوان مجانب افقی دارد. توجه کنید که در حالتی که هر دوی (۱) و (۱') برقرار باشند،  $f$  در صورت  $b \neq c$  دو مجانب افقی متمایز و در صورت  $b = c$  فقط یک مجانب افقی خواهد داشت. تابع  $f$  نمی‌تواند بیش از دو مجانب افقی داشته باشد، زیرا وقتی نقطه  $P = (x, f(x))$  از مبدأ دور شود، نمی‌تواند بدخواه به بیش از دو خط افقی نزدیک شود، یکی وقتی به راست حرکت می‌کند ( $x \rightarrow \infty$ )

و دیگری وقتی به چپ حرکت می کند ( $x \rightarrow -\infty$ ). همچنین، اگر  $f$  مجانب افقی داشته باشد، دست کم یکی از فرمولهای (۱) و (۱') باید برقرار باشد. لذا، در جستجوی مجانب افقی تابع  $f$  (در صورت وجود)، کافی است رفتار حدی  $f$  را وقتی  $x \rightarrow \pm\infty$  بررسی کنیم.

مثال ۱. هرگاه

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|},$$

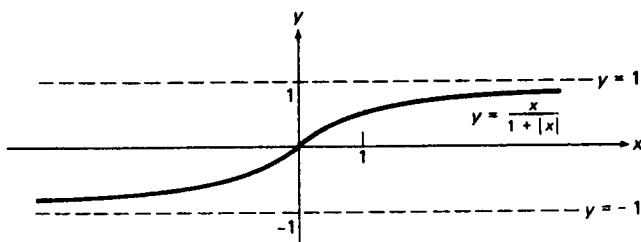
آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + |x|} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x} + 1} = 1,$$

زیرا  $|x| = x$  اگر  $x > 0$ ، درحالی که

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1 + |x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} - 1} = -1,$$

زیرا  $|x| = -x$  اگر  $x < 0$ . لذا،  $f$  هر دو خط  $y = 1$  و  $y = -1$  را به عنوان مجانب افقی دارد. این، همراه با فرد و صعودی بودن  $f$  بر  $(-\infty, \infty)$  که به آسانی تحقیق می شود، نمودار "S" شکل  $f$  را به دست می دهد که در شکل ۲۷ نموده شده است.



شکل ۲۷

مثال ۲. هرگاه

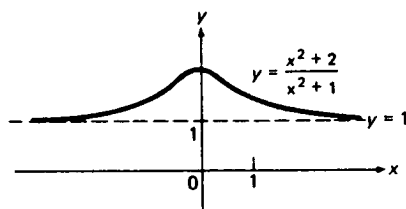
$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1},$$

آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1.$$



لذا، در این حالت،  $f$  فقط یک مجانب افقی دارد، یعنی خط  $y = 1$ ، و این در شکل ۲۸  
نموده شده است.



شکل ۲۸

مجانبهای قائم. حال فرض کنیم  $f$  تابع پیوسته‌ای باشد به طوری که

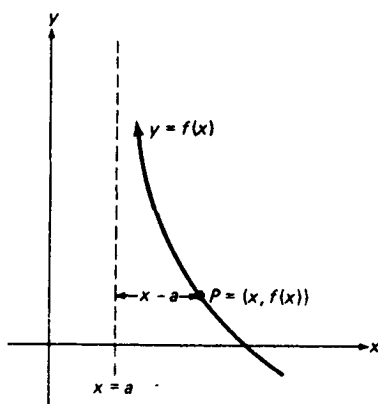
$$\lim_{x \rightarrow a+0^+} f(x) = \infty \text{ (یا } -\infty \text{)}$$

(۲)

با نوشتن (۲) به شکل معادل

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty \text{ (یا } -\infty \text{),}$$

معلوم می‌شود که  $x - a$  فاصله بین خط قائم  $x = a$  و نقطه متغیر  $P = (x, f(x))$  واقع بر نمودار  $f$  است (ر.ک. شکل ۲۹). از اینرو، وقتی  $x \rightarrow a^+$ ، نقطه  $P$  به خط  $x = a$



خط  $x = a$  یک مجانب قائم است.

شکل ۲۹

نزدیک و از مبدأ در جهت رو به بالا یا رو به پایین دور می‌شود. لذا، اگر (۲) برقرار باشد، تابع  $f$  خط  $x = a$  را به عنوان مجانب قائم دارد، و نمودار  $f$  به این مجانب از

راست نزدیک می شود. اساساً همین استدلال نشان می دهد که هرگاه

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty \text{ (یا } -\infty \text{)}, \quad (۲')$$

آنگاه  $f$  مجدداً "خط  $x = a$  را به عنوان مجانب قائم دارد، ولی اکنون نمودار  $f$  از چپ به مجانب نزدیک می شود. با آنکه تابع  $f$  می تواند حداکثر دو مجانب افقی داشته باشد، می تواند هر تعداد مجانب قائم داشته باشد (ر.ک. مثال ۴ و مسئله ۱). همچنین، هرگاه  $f$  مجانب قائمی با قطع  $x = a$  داشته باشد، آنگاه دست کم یکی از فرمولهای (۲) و (۲') باید برقرار باشد، و اگر هر دو برقرار باشند، نمودار  $f$  از دو طرف به مجانب نزدیک می شود. لذا، در جستجوی مجانبهای قائم، می توان توجه را به نقاطی (در صورت وجود) داد که در آنها  $f$  به بی نهایت ( $\infty$  یا  $-\infty$ ) نزدیک می شود.

مثال ۳. هرگاه

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1},$$

آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x + 1} \cdot \frac{1}{x - 1}.$$

اما

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x + 1} = \frac{1}{2},$$

و، به کمک جانشانی  $t = x - 1$ ،

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x - 1} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} = +\infty,$$

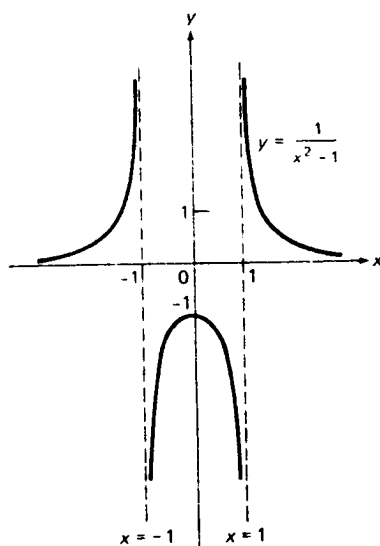
لذا، طبق قاعده (دو)، صفحه ۲۹۶،

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty,$$

و اساساً به همین طریق می توان نشان داد که

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = \infty$$

(جزئیات را شرح دهید). لذا،  $f$  خطوط  $x = 1$  و  $x = -1$  را به عنوان مجانبهای قائم دارد و، همانطور که شکل ۳۰ نشان داده، نمودار  $f$  از دو طرف به این مجانبها نزدیک



شکل ۳۰

می‌شود. مجانب قائم دیگری وجود ندارد، زیرا ۱ و -۱ تنها نقاطی هستند که  $f$  در آنها به بی‌نهایت نزدیک می‌شود. بهر حال، خط  $y = 0$  (محور  $x$ ) یک محانب افقی  $f$  است. این فوراً از

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2 - 1} = 0$$

نتیجه می‌شود.

همانطور که مثال آخر نشان می‌دهد، یک تابع گویا (از حیث قدر مطلق) درست در نقاطی به بی‌نهایت نزدیک می‌شود که مخرجش را صفر می‌کنند. در اینجا فرض است که تابع تحویل‌ناپذیر است، بدین معنی که صورت و مخرج عامل مشترکی ندارند. مثلاً، تابع  $(x+1)/(x^2-1)$  وقتی  $x \rightarrow 1^+$  به  $\infty$  و وقتی  $x \rightarrow 1^-$  به  $-\infty$  نزدیک می‌شود، ولی وقتی  $x \rightarrow -1^+$  و  $x \rightarrow -1^-$  حدهای متناهی خواهد داشت، زیرا

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}.$$

مثال ۴. با بررسی نمودار توابع  $\tan x$  و  $\cot x$  (ر.ک. شکل ۲۴، صفحه ۱۰۴)، معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \cot x &= \infty, & \lim_{x \rightarrow 0^-} \cot x &= -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi^+} \tan x &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi^-} \tan x &= \infty. \end{aligned}$$

به طور کلی، به ازای هر عدد صحیح  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow n\pi^+} \cot x &= \infty, & \lim_{x \rightarrow n\pi^-} \cot x &= -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow (n+\frac{1}{2})\pi^+} \tan x &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow (n+\frac{1}{2})\pi^-} \tan x &= \infty \end{aligned}$$

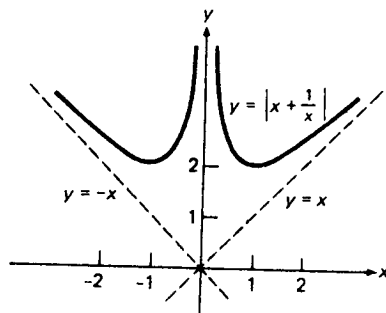
لذا، هر خط  $x = n\pi$  یک مجانب قائم  $\cot x$  است، ولی هر خط  $x = (n + \frac{1}{2})\pi$  یک مجانب قائم  $\tan x$  می باشد. لذا، هر تابع  $\tan x$  و  $\cot x$  بی نهایت مجانب قائم خواهد داشت.

همچنین، ممکن است یک تابع مجانب مایل داشته باشد؛ یعنی، مجانبی که نه افقی باشد نه قائم.

مثال ۵. تابع

$$f(x) = \left| x + \frac{1}{x} \right|,$$

که در شکل ۳۱ رسم شده، هر دو خط  $y = \pm x$  را به عنوان مجانب مایل دارد. این مطلب



خطوط  $y = \pm x$  مجانبهای مایل اند.

شکل ۳۱

از این امر که وقتی  $x \rightarrow \pm \infty$ ،  $f(x) - |x|$  کوچک می شود واضح است، زیرا وقتی  $x \rightarrow \pm \infty$ ،  $1/x \rightarrow 0$ ، اما آن را می توان به طور صوری نیز ثابت کرد (ر.ک. مسئله ۱۳). توجه کنید که  $f$  محور  $y$  را نیز به عنوان مجانب قائم دارد، زیرا وقتی  $x \rightarrow 0$ ،  $f(x) \rightarrow \infty$ .

مشتقات نامتناهی و مماسهای قائم. بالاخره، فرض کنیم مشتق تابع  $f$  در  $a$  نامتناهی باشد، بدین معنی که

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty$$

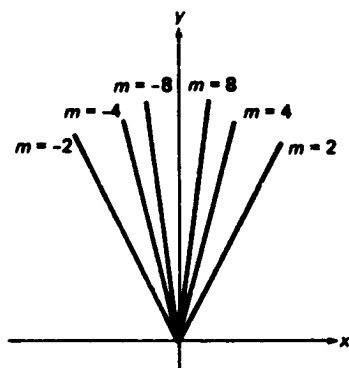
یا

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty.$$

در این صورت، تابع

$$m(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

وقتی  $x \rightarrow a$ ، به  $\infty$  یا  $-\infty$  نزدیک می شود. اما  $m(x)$  شیب خط قاطع ماربر نقطه ثابت  $P = (a, f(a))$  و نقطه متغیر  $Q = (x, f(x))$  منحنی  $y = f(x)$  است، و وقتی شیب یک خط مقادیر بزرگ مثبت یا منفی بگیرد، خط به وضعیت قائم نزدیک می شود (ر.ک. شکل ۳۲).



خطوط با شیب  $m$  بزرگ

شکل ۳۲

باتوجه به این نکات، در حالت  $f'(a) = \infty$  یا  $f'(a) = -\infty$ ، خط قائم  $x = a$  (خط مماس پر منحنی  $y = f(x)$  در نقطه  $P$  تعریف می کنیم. در نوشتن دو فرمول اخیر نمی گوئیم  $\infty$  و  $-\infty$  عددند، که نیستند، بلکه فقط می گوئیم وقتی  $x \rightarrow a$ ،  $m(x)$  به بی نهایت (به علاوه یا منها) نزدیک می شود.

بر حسب مشتقات یکطرفه،  $f'(a) = \infty$  معادل  $f'_+(a) = f'_-(a) = \infty$  و  $f'(a) = -\infty$  معادل  $f'_+(a) = f'_-(a) = -\infty$  است. همچنین، ممکن است مشتقات یکطرفه نامتناهی ولی

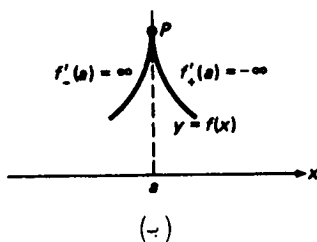
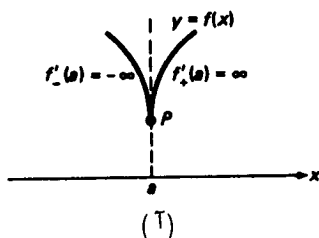
نامساوی باشند، بدین معنی که

$$(۳) \quad f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} m(x) = \infty, \quad f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} m(x) = -\infty,$$

یا

$$(۳') \quad f'_+(a) = -\infty, \quad f'_-(a) = \infty.$$

در این صورت، مماس در  $P$  را خط قائم  $x = a$  تعریف می‌کنیم، ولی، همانطور که شکل ۳۳ (ا) برای حالت (۳) و شکل ۳۳ (ب) برای حالت (۳') نشان می‌دهد، منحنی  $y = f(x)$



شکل ۳۳

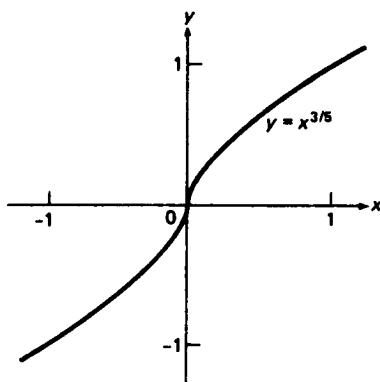
در  $P$  نقطه تیز یا نقطه بازگشت دارد.

مثال ۶. رفتار منحنی  $y = f(x) = x^{3/5}$  را در مبدا مورد بررسی قرار دهید.

حل. با استفاده از قاعده (چهار)، صفحه ۲۹۶، و اینکه وقتی  $x \rightarrow 0^+$ ،  $x^{2/5} \rightarrow 0^+$ ، مشتق  $f$  در  $x = 0$  را حساب می‌کنیم:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{3/5} - 0^{3/5}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2/5}} = \infty.$$

لذا،  $f'_+(0) = f'_-(0) = \infty$ ، و منحنی  $y = x^{3/5}$  در مبدا مماس قائم ولی بدون نقطه بازگشت دارد (ر.ک. شکل ۳۴).



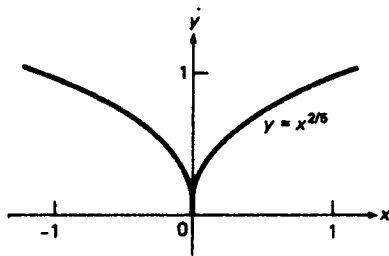
شکل ۳۴

مثال ۷. رفتار منحنی  $y = f(x) = x^{2/5}$  را در مبدأ بررسی کنید.

حل. با استفاده از همان قاعده و اینکه وقتی  $x \rightarrow 0^\pm$ ،  $x^{3/5} \rightarrow 0^\pm$ ، مشتقات یکطرفه  $f$  در  $x = 0$  را حساب می‌کنیم:

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{2/5} - 0^{2/5}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{3/5}} = \infty, \quad f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{3/5}} = -\infty.$$

چون  $f'_+(0)$  و  $f'_-(0)$  نامتناهی و نامساویند، منحنی  $y = x^{2/5}$  در مبدأ مماس قائم و نقطه بازگشت خواهد داشت (ر.ک. شکل ۳۵).



شکل ۳۵

تشابه نزدیکی بین نقاط بازگشت و گوشه وجود دارد، نقاط گوشه نظیر حالتی هستند که  $f'_+(a)$  و  $f'_-(a)$  متناهی ولی نامساویند (ر.ک. صفحه ۱۹۱)، یا وقتی که یکی از مشتقات  $f'_+(a)$  و  $f'_-(a)$  نامتناهی و دیگری متناهی است. اما، با آنکه یک منحنی در نقطه بازگشت مماس قائم دارد، در گوشه مماس ندارد. این تفاوت را چطور توضیح می‌دهید؟

هرگاه منحنی  $y = f(x)$  در نقطه  $P = (a, f(a))$  دارای مماس قائم  $T$  باشد ،  
 آنگاه قائم  $N$  به منحنی در  $P$  ، که خط ماربر  $P$  عمود بر  $T$  تعریف می شود ، خط افقی  $y = f(a)$  می باشد .

مثال ۸ . مماس  $T$  و قائم  $N$  به منحنی

$$y = f(x) = (x - 1)^{1/3} + 2$$

در نقطه  $P = (1, 2)$  را بیابید .

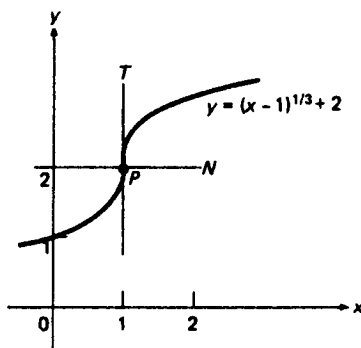
حل . مشتق  $f$  را در  $x = 1$  حساب می کنیم ، داریم

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[(x - 1)^{1/3} + 2] - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^{1/3}}{x - 1},$$

در نتیجه ، پس از جانشانی  $t = x - 1$  و توجه به این امر که وقتی  $t \rightarrow 0$  ،  $t^{2/3} \rightarrow 0^+$  ،

$$f'(1) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^{1/3}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^{2/3}} = \infty$$

از اینرو ، همانطور که شکل ۳۶ نشان داده ، مماس  $T$  بر منحنی  $y = f(x)$  در نقطه  $P$  خط قائم  $x = 1$  بوده ( نقطه بازگشت وجود ندارد ) ، و قائم  $N$  در  $P$  خط افقی  $y = f(1) = 2$  می باشد .



شکل ۳۶

به یاد آورید که گفتیم تابع  $f$  در نقطه  $x$  مشتقپذیر است اگر  $f$  در  $x$  دارای مشتق  $f'(x)$  باشد . این تعریف در صفحه ۱۷۵ ، پیش از آنکه مفهوم مشتق نامتناهی وارد کار شود ، ارائه شد . حال تأکید می کنیم که در تعریف مشتقپذیری  $f'(x)$  باید متناهی باشد . لذا ، مشتقات نامتناهی در تعریف پیشین " وجود " ندارند . بخصوص ، هرگاه تابع  $f$  در  $c$  مشتق



نامتناهی داشته باشد، آنگاه  $c$  یک نقطه بحرانی  $c$  است (ر.ک. صفحه ۲۶۸).

### مسائل

۱. تابع  $f$  را طوری مثال بزنید که دقیقاً " $n$  جانب قائم داشته باشد. تمام جانبهای (افقی و قائم) تابع داده شده را یافته، و نمودار آن را رسم نمایید.

$$f(x) = \frac{x-4}{2x+4} \quad ۳ \quad \checkmark$$

$$f(x) = \frac{2}{x-1} \quad ۲ \quad \checkmark$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-4} \quad ۵ \quad \checkmark$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1} \quad ۴ \quad \checkmark$$

$$f(x) = \frac{4-x^2}{4+x^2} \quad ۷ \quad \checkmark$$

$$f(x) = \frac{1+|x|}{x} \quad ۶ \quad \checkmark$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \quad ۹ \quad \checkmark$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad ۸ \quad \checkmark$$

$$f(x) = \frac{3 \cos x}{x+1} \quad ۱۰ \quad \checkmark$$

$$۱۱ \quad \checkmark \quad \text{تابع}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^7 + 128}$$

درست دو جانب دارد. این جانبها چیستند؟

$$۱۲ \quad \checkmark \quad \text{تابع}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^8 - 256}$$

درست سه جانب دارد. این جانبها چیستند؟

۱۳. نشان دهید که خط

$$y = mx + b \quad (m \neq 0)$$

مجانب مایل تابع  $y = f(x)$  است اگر و فقط اگر دستکم یکی از شرایط

(یک)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx - b] = 0$$

یا

(دو)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx - b] = 0$$

برقرار باشد. نشان دهید که (یک) با

(یک')

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx],$$

معادل است، درحالی که (دو) با

$$(دو) \quad m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx]$$

معادل می‌باشد. ماکزیم تعداد مجانبهای مایلی که یک تابع می‌تواند داشته باشد چقدر است؟

به کمک مسئله ۱۳، تمام مجانبهای (مایل، افقی، و قائم) تابع داده شده را یافته، و نمودار آن را رسم نمایید.

$$f(x) = \frac{4-x^3}{x^2} \quad . ۱۵ \quad \checkmark$$

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1+x} \quad . ۱۴ \quad \checkmark$$

$$f(x) = \frac{2x^2}{1+|x|} \quad . ۱۷ \quad \checkmark$$

$$f(x) = \frac{x^3}{4-x^2} \quad . ۱۶ \quad \checkmark$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2+1} \quad . ۱۹ \quad \checkmark$$

$$f(x) = \sqrt{x^2+x+1} \quad . ۱۸ \quad \checkmark$$

نشان دهید که

۲۵. چند جمله‌ای  $P(x)$  با درجه بزرگتر از ۱ مجانب ندارد.

۲۱. تابع  $f(x) = x + \sin x$  مجانب ندارد.

۲۲. اگر  $r$  عدد گویای مثبتی باشد، تابع  $f(x) = x^r$  مجانب ندارد مگر  $r = 1$ .

ماس  $T$  و قائم  $N$  به منحنی داده شده در نقطه  $P$  را بیابید. آیا در  $P$  نقطه بازگشت وجود دارد؟

$$y = (x-1)^{3/5}, P = (1, 0) \quad . ۲۳$$

$$y = (x+1)^{2/3} + 1, P = (-1, 1) \quad . ۲۴$$

$$y = \sqrt{|x-3|} - 1, P = (3, -1) \quad . ۲۵$$

$$y = \sqrt[3]{x^2-2x+3}, P = (2, 3) \quad . ۲۶$$

۲۷. در چه نقاطی منحنی  $y = \sqrt{\cos x}$  ماس قائم دارد؟ آیا این نقاط نقطه بازگشت اند؟

### ۶.۳ قاعده هوییتال

حال، با استفاده از مشتقگیری، تکنیک توانایی برای رفع ابهام به دست می‌آوریم که اغلب با آن می‌توان محاسبات عادی را به کار برد. با صورت مبهم  $0/0$  شروع می‌کنیم، ولی بعداً "حدود نامتناهی را وارد کرده به صورت مبهم  $\infty/\infty$ ،  $0 \cdot \infty$ ، و  $\infty - \infty$  نیز می‌پردازیم.

قضیه ۱۱ (قاعده هوییتال برای  $0/0$ )<sup>۱</sup> . هرگاه

(یک)  $f$  و  $g$  بر  $(a, b)$  مشتقپذیر باشند ،

(دو) در هر نقطه  $(a, b)$  ناصفر باشد ،

(سه)  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$

و نیز

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

برهان (اختیاری) . هرگاه  $f$  و  $g$  از راست در  $a$  پیوسته باشند ، آنگاه به خاطر (سه)

$f(a) = g(a) = 0$  ، اما در غیر این صورت ، طبق تعریف قرار می دهیم  $f(a) = g(a) = 0$

پس  $f$  و  $g$  بر هر بازه  $[a, x]$  که  $a < x < b$  پیوسته اند (چرا؟) . بنابر قضیه ۴ ، صفحه

۲۶۱ (قضیه مقدار میانگین کشی) ،

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

که در آن  $a < c < x$  . اما  $x \rightarrow a^+$  ایجاب می کند که  $c \rightarrow a^+$  ؛ و در نتیجه ،

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = L.$$

به خاطر سادگی ، قاعده هوییتال را برای حالت  $x \rightarrow a^+$  ثابت کردیم ، ولی اساساً

همین استدلال نشان می دهد که برای  $x \rightarrow a^-$  و بازه  $(b, a)$  ،  $b < a$  ، به جای  $(a, b)$

برقرار است . قاعده هوییتال برای  $x \rightarrow a$  ، در صورت تغییر مختصری در مفروضات ، نیز

برقرار است . به طور مشخص ، هرگاه

(یک)  $f$  و  $g$  در همسایگی سفته  $D$  از نقطه  $a$  مشتقپذیر باشند ،

۱ . در واقع ، توسط جان برنولی (John Bernoulli 1667-1748) کشف و در عوض حقوق به مارکی

هوییتال (Marquis de l'Hospital 1661-1704) ، مؤلف اولین کتاب حساب دیفرانسیل و

انTEGRال ، داده شد .

(دو) 'g در هر نقطه D ناصفر باشد ،

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ (سه)}$$

و نیز

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

البته ، این صورت قاعده هوییتال نتیجه فوری قضیه ۱۱ و قضیه همتا برای  $x \rightarrow a^-$  است .

مثال ۱.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x}{\sqrt{x}}$  را حساب کنید .

حل . بنابر قاعده هوییتال ، داریم

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x}{\sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{d}{dx} \tan x}{\frac{d}{dx} \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sec^2 x}{1/(2\sqrt{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{\cos^2 x} = \frac{2\sqrt{0}}{\cos^2 0} = 0. \end{aligned}$$

مثال ۲ . نشان دهید که

$$(۱) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

حل . بنابر قاعده هوییتال ،

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx} (1 - \cos x)}{\frac{d}{dx} x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}.$$

تبصره . ممکن است اغوا شده و بخواهید خود حد

$$(۲) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

را، به جای معلوم بودن، به کمک قاعده هویپیتال حساب کنید، به این ترتیب که، بنا بر پیوستگی  $\cos x$ ،

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx} \sin x}{\frac{d}{dx} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

اما این استدلال دوری است، زیرا اگر به عقب نگاه کنید، می بینید که از فرمول (۲) برای اثبات فرمول مشتقگیری  $D_x \sin x = \cos x$  استفاده شد!

مثال ۳.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$  را حساب کنید.

حل. بنا بر قاعده هویپیتال،

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx} (x - \sin x)}{\frac{d}{dx} x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{6}.$$

که در آخرین مرحله از فرمول (۱) استفاده می کنیم که خود با قاعده هویپیتال ثابت شد. این نشان می دهد که ممکن است برای محاسبه یک حد چند کاربرد متوالی قاعده هویپیتال نیاز باشد.

مثال ۴. تضمینی وجود ندارد که قاعده هویپیتال در رفع ابهام کمکی نماید. درواقع، ممکن است حد

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

موجود نباشد، حتی اگر حد

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

موجود بوده و بتوان آن را با روشی دیگر به آسانی به دست آورد.

مثلاً، هرگاه

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}, \quad g(x) = x,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

(ر.ک. مثال ۸، صفحه ۱۲۶)، حال آنکه حد

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right)$$

وجود ندارد (چرا؟).

قاعده‌ای شبیه قضیه ۱۱ برای استفاده از مشتقگیری در رفع ابهام از صورت  $\infty/\infty$  وجود دارد. به‌خاطر سادگی، آن را برای حالت  $x \rightarrow a^+$  بیان می‌کنیم، ولی این قاعده با همان تغییرات مختصر در مفروضات که قبلاً در رابطه با قضیه ۱۱ ذکر شد برای  $x \rightarrow a^-$  و  $x \rightarrow a$  نیز برقرار است. برهان کاملاً تکنیکی است و از اینرو حذف می‌شود. این برهان را می‌توان در هر کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته یافت.

قضیه ۱۱' (قاعده هویتال برای  $\infty/\infty$ ). هرگاه

(یک)  $f$  و  $g$  بر  $(a, b)$  مشتق‌پذیر باشند،

(دو)  $g'$  در هر نقطه از  $(a, b)$  ناصفر باشد،

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \infty$$

و نیز

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

می‌توان نشان داد که اگر شرط (سه) با

$$\lim_{x \rightarrow a^+} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow a^+} |g(x)| = \infty$$

عوض شود، قضیه ۱۱' برقرار می‌ماند، و اگر  $L$  با  $\infty$  یا  $-\infty$  عوض شود، هر دو قضیه ۱۱ و ۱۱' برقرار خواهند ماند. همچنین، قضایای ۱۱ و ۱۱' را می‌توان به حالت  $x \rightarrow \infty$  تعمیم

داد به این صورت که جانشانی  $x = 1/t$  را انجام داده و ملاحظه می‌کنیم که

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(-1/t^2)f'(1/t)}{(-1/t^2)g'(1/t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},\end{aligned}$$

و نتیجه مشابهی برای  $x \rightarrow -\infty$  نیز برقرار است. در اینجا فرض است که قاعده هوییتال را می‌توان در دومین مرحله محاسبه به کار برد، و شرایط (یک) و (دو) قضایای ۱۱ و ۱۱' بر یک بازه نامتناهی از نوع  $(c, \infty)$  یا  $(-\infty, c)$  برقرارند.

مثال ۵.  $L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 2}{6x^2 - 5x + 8}$  را حساب کنید.

حل. حد  $L$  ابهامی به صورت  $\infty/\infty$  است. با دوبار استفاده از قضیه ۱۱، یعنی دومتغیری متوالی از صورت و مخرج، داریم

$$\begin{aligned}L &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx}(3x^2 + 4x - 2)}{\frac{d}{dx}(6x^2 - 5x + 8)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x + 4}{12x - 5} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx}(6x + 4)}{\frac{d}{dx}(12x - 5)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

به عنوان تمرین،  $L$  را به روش بخش ۴.۳ حساب کنید.

مثال ۶.  $L = \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \tan \frac{\pi x}{2}$  را حساب کنید.

حل. این حد نظیر صورت مبهم  $0 \cdot \infty$  است، ولی می‌توان آن را به شکل زیر نوشت:

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{\cot \frac{\pi x}{2}},$$

که نظیر صورت مبهم  $0/0$  است. راه قدیم محاسبه  $L$  جانشانی  $t = 1 - x$  است. در این صورت، پس از تلاشی قابل توجه،

$$\begin{aligned}
 L &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi t}{2}\right)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\tan \frac{\pi t}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cos \frac{\pi t}{2}}{\sin \frac{\pi t}{2}} \\
 &= \frac{2}{\pi} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi t}{2}}{\sin \frac{\pi t}{2}} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \cos \frac{\pi t}{2} = \frac{2}{\pi} \cdot 1 \cdot \cos 0 = \frac{2}{\pi}.
 \end{aligned}$$

راه جدید، مبتنی بر قاعده هوییتال، خیلی آسانتر است:

$$\begin{aligned}
 L &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{d}{dx}(1-x)}{\frac{d}{dx} \cot \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{-\frac{\pi}{2} \csc^2 \frac{\pi x}{2}} \\
 &= \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \sin^2 \frac{\pi x}{2} = \frac{2}{\pi} \sin^2 \frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi}.
 \end{aligned}$$

به علاوه، جانشانی مقدماتی دیگر لازم نیست، و چیزی جز اتلاف وقت نمی باشد.

مثال ۷.  $L = \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\tan x - \sec x)$  را حساب کنید.

حل. این یک صورت مبهم  $\infty - \infty$  است، که می توان با توجه به

$$L = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin x - 1}{\cos x}$$

آن را به صورت  $0/0$  درآورد. از قاعده هوییتال فوراً به دست می آید

$$L = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\frac{d}{dx}(\sin x - 1)}{\frac{d}{dx} \cos x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{-\sin x} = \frac{0}{-1} = 0.$$

یافتن  $L$  بدون استفاده از قاعده هوییتال نیاز به کار بیشتر و مهارتی قابل توجه دارد

$$\begin{aligned}
 L &= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left( \frac{\sin x - 1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x + 1}{\sin x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin^2 x - 1}{(\sin x + 1) \cos x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{-\cos^2 x}{(\sin x + 1) \cos x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{-\cos x}{\sin x + 1} = \frac{-0}{1+1} = 0.
 \end{aligned}$$



وقتی از قاعده هویپیتال استفاده نمی‌شود. قاعده هویپیتال مسلماً "ابزاری بسیار قوی در محاسبه حدود است. با اینحال، همانطور که مثالهای زیر نشان می‌دهند، حالات زیادی وجود دارند که قاعده هویپیتال به دلیلی قابل اعمال نیست.

مثال ۸.  $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x + 2}$  را محاسبه کنید.

حل. بنابر پیوستگی، فوراً "می‌بینیم که

$$L = \frac{\cos 0}{0 + 2} = \frac{1}{2}.$$

کاربرد کورکورانه قاعده هویپیتال نتیجه می‌دهد

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx} \cos x}{\frac{d}{dx} (x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{1} = -\sin 0 = 0,$$

که نادرست است. اما قاعده هویپیتال در اینجا به کار نمی‌رود. در واقع،

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (x + 2) = 2,$$

در نتیجه، ما حتی با صورت مبهم سروکار نداریم!

مثال ۹.  $L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x}$  را حساب کنید.

حل. این بار صورت مبهم  $\infty/\infty$  داریم، و حد را می‌توان فوراً "محاسبه نمود:

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{\sin x}{x} \right) = 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(ر. ک. مسئله ۳۱، صفحه ۳۰۱). با استفاده از قاعده هویپیتال به محاسبه  $L$  می‌پردازیم، خواهیم داشت

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx} (x - \sin x)}{\frac{d}{dx} x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \cos x).$$

اما حد سمت راست وجود ندارد (چرا؟). و در نتیجه، در اینجا نیز قاعده هویپیتال به کار نمی‌رود.

مثال ۱۰. حد

$$(۳) \quad L = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\tan x}{\sec x}$$

را محاسبه کنید .

حل . در اینجا صورت مبهم  $\infty/\infty$  داریم که می توان آن را بدون زحمت حساب کرد ، زیرا

$$(۴) \quad L = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin x}{\cos x} \cos x = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \sin x = 1.$$

$L$  را با قاعده هوییتال حساب می کنیم ، خواهیم داشت

$$L = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\frac{d}{dx} \tan x}{\frac{d}{dx} \sec x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sec^2 x}{\sec x \tan x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sec x}{\tan x},$$

که باز به شکل  $\infty/\infty$  است . کاربرد دیگری از قاعده هوییتال نتیجه می دهد

$$L = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\frac{d}{dx} \sec x}{\frac{d}{dx} \tan x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sec x \tan x}{\sec^2 x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\tan x}{\sec x},$$

و ما به همان جایی برگشته ایم که شروع کرده بودیم ، بن بست کامل! هرگاه (۳) را به شکل

$$(۳') \quad L = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{\cot x}$$

بنویسیم ، که یک صورت مبهم  $0/0$  است ، آنگاه قاعده هوییتال جواب را می دهد ، زیرا

$$L = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\frac{d}{dx} \cos x}{\frac{d}{dx} \cot x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{-\sin x}{-\csc^2 x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \sin^3 x = 1.$$

اما ، به خاطر (۴) ، این راه سختی خواهد بود .

به عنوان تمرین ، به عقب برگشته و ، با استفاده از قاعده هوییتال ، حدود آمده در مثالها و مسائل قبل ( از بخش ۵۰۱ تاکنون ) را هر قدر می توانید حساب کنید . خواهید دید که استفاده از این قاعده اغلب محاسبات سخت را به یک تمرین عادی برمی گرداند .

مسائل

ابهام مربوط به حد داده شده را توصیف کنید. سپس، با استفاده از قاعده هوییتال، حد را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^3 + 3x^2 + x + 1}{x^2 - 1} \quad . ۲ ✓$$

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 15x + 56}{x^2 - 3x - 28} \quad . ۱ ✓$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{3 - \sqrt{2x + 1}} \quad . ۴ ✓$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{1/3} - x^{1/2}}{x^{1/4} - x^{1/5}} \quad . ۳ ✓$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sqrt{x}}{2x + 1} \quad . ۶ ✓$$

$$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}} \quad . ۵ ✓$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sin x} \quad . ۸ ✓$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} \quad . ۷ ✓$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 - \cos x} \quad . ۱۰ ✓$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} \quad . ۹ ✓$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \tan x} \quad . ۱۲ ✓$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cot 2x \quad . ۱۱ ✓$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \cot x - \frac{1}{x} \right) \quad . ۱۴ ✓$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sec x - 1}{x^3} \quad . ۱۳ ✓$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{\sin \left( x - \frac{\pi}{3} \right)}{1 - 2 \cos x} \quad . ۱۶ ✓$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \csc x - \frac{1}{x} \right) \quad . ۱۵ ✓$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \left( \frac{\pi}{4} - x \right) \csc \left( \frac{3\pi}{4} + x \right) \quad . ۱۸ ✓$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sqrt{2} \cos x - 1}{1 - \tan^2 x} \quad . ۱۷ ✓$$

۱۹. فرض کنیم  $F$  در همسایگی  $a$  مشتقپذیر بوده، و  $\lim_{x \rightarrow a} F'(x)$  موجود و متناهی باشد. با

استفاده از قاعده هوییتال، نشان دهید که  $F'(a) = \lim_{x \rightarrow a} F'(x)$ .

۲۰. بدون استفاده از قضیه مقدار میانگین کشی، صورت ساده شده قاعده هوییتال برای

$0/0$  که اغلب مفید است را ثابت کنید. فرض کنید

(یک)  $f$  و  $g$  در  $a$  مشتقپذیر بوده و  $g'(a) \neq 0$ ؛

(دو)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ .

در این صورت،

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

صورت مبهمی از  $0/0$  مثال بزنید که به این روش رفع نشود.

حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\tan 2x}{\cot\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}$$

۲۳✓

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \cot^2 x - \frac{1}{x^2} \right)$$

۲۱✓

۲۳. از مسئله ۱۹ (اشتباه‌ها!) این برداشت می‌شود که  $F'(a)$  همواره مساوی  $\lim_{x \rightarrow a} F'(x)$

است. تابع  $F$  را طوری مثال بزنید که  $F'$  در همسایگی  $a$  تعریف شده باشد ولی

$F'(a) \neq \lim_{x \rightarrow a} F'(x)$ . این را با مسئله ۱۹ آشتی دهید.

۲۴. با فرض وجود حد در مثال ۳، آن را بدون قاعده هوییتال حساب کنید.

راهنمایی. از فرمول  $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$  استفاده کنید.

### ۷.۳ مسائل بهینه‌سازی

مسائل عملی بسیاری وجود دارند که درگیر تعیین بزرگترین اندازه، کمترین بها، کوتاهترین زمان، بیشترین درآمد، و غیره می‌باشند. در این نوع مسائل "بهترین" مقدار کمیت متغیری خواسته می‌شود؛ و در نتیجه، آنها را مسائل بهینه‌سازی می‌نامند. بسیاری از آنها را می‌توان به کمک ابزارهای ذکر شده در چند بخش اخیر حل کرد، ولی سایرین به تکنیکهای پیشرفته‌تری نیاز دارند (که بعضی از آنها در بخشهای ۸.۱۳ و ۹.۱۳ معرفی می‌شوند). مسائل این بخش از خاصیت مشترک زیر برخوردارند:

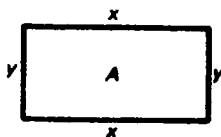
کمیتی که باید بهینه شود را می‌توان به صورت تابعی از یک متغیر بیان کرد که بر بازه‌ای چون  $I$  تعریف شده، و مقدار بهینه کمیت را می‌توان مقدار اکسترمیمی از تابع بر  $I$  گرفت. مثل همه مسائل به شکل نقلی، در ترجمه از زبان عرف به ریاضی دقت زیادی لازم است، و پنهالتی ترجمه نامناسب این است که تمام محاسبات چیزی جز اتلاف وقت نخواهد بود. به عبارت دیگر، به قول متخصصین کامپیوتر "زباله وارد و زباله خارج کرده‌ایم".

مثالهای زیر ایده خوبی از طرز حل مسائل بهینه‌سازی به شما می‌دهد. اغلب آنها ماهیت هندسی داشته یا در رابطه با علوم طبیعی‌اند. بهینه‌سازی در تجارت و اقتصاد خود مبحثی است که در بخش بعد به آن خواهیم پرداخت.

مثال ۱. مزرعه‌داری ۸۰۰ فوت حصار دارد که می‌خواهد دور یک مزرعه مستطیلی بکشد. بیشترین مساحتی که می‌تواند حصار بکشد چقدر است؟

حل. فرض کنیم  $x$ ،  $y$ ، و  $A$  طول، عرض، و مساحت مزرعه باشند، مثل شکل ۳۷، و  $L$  را

طول حصار می‌گیریم. در این صورت،  $L = 2x + 2y$  و  $A = xy$ ، و اینکه ۸۰۰ فوت حصار



شکل ۳۷

داریم را با شرط

$$L = 2(x + y) = 800.$$

بیان می‌کنیم. با حل نسبت به  $y$  و برحسب  $x$ ، به دست می‌آوریم  $y = 400 - x$ . با این می‌توان مساحت مزرعه را به صورت تابعی فقط از  $x$  بیان کرد. در واقع،

$$(1) \quad A = xy = x(400 - x) = 400x - x^2.$$

چون مساحت نامنفی است، مقادیر مجاز  $x$  از ۰ تا ۴۰۰ تغییر می‌کنند. لذا، مسئله تعیین مقداری از  $x$  است که تابع مساحت (۱) ماکزیمم (مطلق) خود بر بازه  $I = [0, 400]$  را در آن بگیرد. این ماکزیمم، که وجودش توسط قضیه مقدار اکستريم تضمین می‌شود (ر. ک. صفحه ۱۵۹)، باید در یک نقطه درونی  $I$  گرفته شود، زیرا  $A > 0$  اگر  $0 < x < 400$  و  $A|_{x=0} = A|_{x=400} = 0$ . (نماد  $A|_{x=a}$  اختصاری است برای مقدار تابع  $A = A(x)$  در  $x = a$ ). از اینرو، ماکزیمم موضعی بوده و فقط می‌تواند در یک نقطه بحرانی  $A$  رخ دهد. چون  $A$  به ازای هر  $x$  مشتقپذیر است با مشتق

$$\frac{dA}{dx} = 400 - 2x,$$

تنها نقطه بحرانی  $A$  نقطه  $x = 200$  است که در آن  $dA/dx$  مساوی صفر می‌باشد، و ماکزیمم مساحت  $A$  بر بازه  $I$  باید در این نقطه صورت گیرد. به علاوه،

$$y|_{x=200} = (400 - x)|_{x=200} = 200.$$

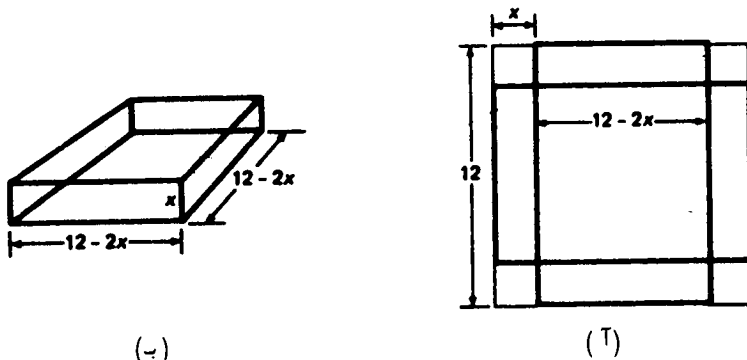
لذا، مزرعه مستطیلی با بیشترین مساحت محصور به ۸۰۰ فوت حصار مربعی است به طول ضلع ۲۰۰ فوت، و مساحتش مساوی است با

$$A|_{x=200} = (200)^2 = \text{فوت مربع } 40,000$$

به عنوان تمرین، از آزمون مشتق اول و دوم استفاده کرده تحقیق کنید  $A$  در  $x = 200$  ماکزیمم موضعی اکید دارد.

مثال ۲. یک جعبه مربعی بدون سراز بریدن مربعات کوچکی از چهار گوشه یک مربع فلزی

به ضلع ۱۲ اینج، مطابق شکل ۳۸ (ت)، و سپس تا کردن لبه‌ها، مثل شکل ۳۸ (ب)، ساخته شده است.



شکل ۳۸

ماکزیم حجم جعبه‌ای که به این طریق ساخته می‌شود چقدر است؟

حل. فرض کنیم  $x$  طول ضلع هر مربع کوچک باشد. از شکل واضح است که حجم جعبه مساوی است با

$$(۲) \quad V = x(12 - 2x)^2 = 4x(6 - x)^2.$$

مقادیر مجاز  $x$  از ۰ تا ۶ تغییر می‌کنند، زیرا حجم نامنفی بوده و نمی‌توان مربعهای روی هم افتاده را برید. لذا، مسئله یافتن  $x$ ی است که تابع حجم (۲) ماکزیم (مطلق) خود بر بازه  $I = [0, 6]$  را در آن بگیرد. این ماکزیم باید در یک نقطه درونی  $I$  رخ دهد، زیرا  $V > 0$  اگر  $0 < x < 6$  و  $V|_{x=0} = V|_{x=6} = 0$ . لذا، ماکزیم موضعی است، و فقط می‌تواند در یک نقطه بحرانی  $V$  رخ دهد. چون  $V$  به ازای هر  $x$  مشتقپذیر است، نقاط بحرانی  $V$  نقاط  $x = 2$  و  $x = 6$  اند که در آنها

$$\frac{dV}{dx} = 4(6 - x)^2 - 8x(6 - x) = 12(6 - x)(2 - x)$$

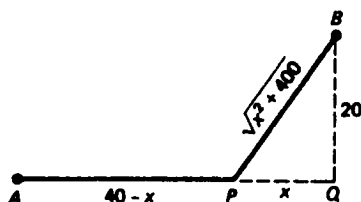
مساوی صفر است. از این دو نقطه فقط  $x = 2$  نقطه درونی  $I$  است؛ در نتیجه، ماکزیم حجم  $V$  بر بازه  $I$  باید در  $x = 2$  گرفته شود. لذا، جعبه با بیشترین حجم در صورتی به دست می‌آید که مربعهای بریده شده از ورقه فلزی به طول ۲ اینج باشند، و حجم آن خواهد بود

$$V|_{x=2} = 4(2)(6 - 2)^2 = 128 \text{ اینج مکعب}$$

به عنوان تمرین، از آزمون مشتق اول یا دوم استفاده کرده تحقیق کنید که  $V$  در  $x = 2$

ماکزیم موضعی اکید دارد.

مثال ۳. اداره خدمات اجتماعی می‌خواهد جاده جدیدی از شهر  $A$  به شهر  $B$  احداث کند. شهر  $A$  در امتداد یک جاده شرقی غربی متروکه قرار دارد، در حالی که شهر  $B$  در ۲۰ میلی شمال این جاده و ۴۰ میلی شهر  $A$  واقع است (ر.ک. شکل ۳۹). می‌خواهیم جاده جدید از بخشی از جاده قدیم همراه با بخش کاملاً جدیدی تشکیل شود که جاده قدیم



شکل ۳۹

را در نقطه‌ای که باید تعیین شود ترک و مستقیماً به شهر  $B$  برود. اگر هزینه ساختن بخش اول \$300,000 بر میل و هزینه ساختن بخش دوم \$600,000 بر میل باشد، چقدر از جاده قدیم باید تعمیر شود تا هزینه جاده دوبخشی جدید مینیم باشد؟

حل. همانند در شکل، فرض کنیم  $P$  نقطه‌ای باشد که جاده قدیم تا آن اختیار می‌شود،  $Q$  نقطه‌ای باشد که جاده قدیم جنوب شهر  $B$  است، و  $|PQ| = x$ . در این صورت، هزینه جاده جدید به میلیون دلار عبارت است از

$$C(x) = 0.3|AP| + 0.6|PB| = 0.3(40 - x) + 0.6\sqrt{x^2 + 400}.$$

می‌خواهیم مینیم (مطلق) تابع هزینه  $C(x)$  بر بازه  $I = [0, 40]$  را بیابیم، تنها نقطه بحرانی  $C(x)$  نقطه  $x$  است که در آن

$$\frac{dC(x)}{dx} = -0.3 + 0.6 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 400}} = 0,$$

یا معادلاً

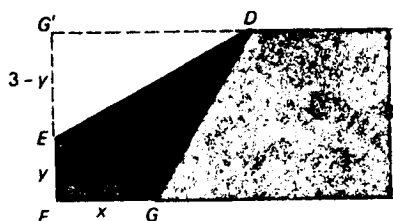
$$\sqrt{x^2 + 400} = 2x,$$

یعنی،  $x = 20/\sqrt{3} \approx 11.55$ . از مقایسه  $C(20/\sqrt{3})$  با مقادیر تابع هزینه در نقاط انتهایی بازه  $I$  معلوم می‌شود که

$$C(0) = 24, \quad C(20/\sqrt{3}) = 12 + 6\sqrt{3} \approx 22.39, \quad C(40) = 12\sqrt{5} \approx 26.83.$$

مینیم این اعداد، یعنی  $C(20/\sqrt{3})$ ، مینیم  $C(x)$  بر  $I$  است (قضیه ۵، صفحه ۲۶۷، را به یاد آورید). لذا، می‌بینیم که پیش از رفتن به شهر  $B$  باید  $40 - 11.55 \approx 28.45$  از جاده قدیم اختیار شود. بدین ترتیب، اداره خدمات اجتماعی با اختیار جاده  $L$  مانند  $AQB$  حدود ۱.۶۱ میلیون دلار و با انتخاب راه مستقیم  $AB$  حدود ۴.۴۴ میلیون دلار صرفه‌جویی خواهد کرد.

مثال ۴. فرض کنید گوشه‌ای از یک نوار مستطیلی کاغذ به عرض ۳ اینچ آنقدر برگردانده شود که به ضلع مقابل برسد؛ و بدین ترتیب، مثلث  $EFG$  به مساحت  $A$  مثل شکل ۴۰ پدید آید. ماکزیم مقدار  $A$  چقدر است؟



شکل ۴۰

حل. فرض کنیم، مثل شکل،  $x$  و  $y$  طول اضلاع مثلث قائم الزاویه  $EFG$  باشند. بنا بر هندسه مقدماتی،

$$(۳) \quad A = \frac{1}{2}xy,$$

و ما باید به نوعی از ماهیت خاص مسئله استفاده کنیم، یعنی اینکه  $EFG$  مثلث دلخواهی نبوده بلکه از برگرداندن نوار کاغذ به صورت توصیف شده به دست آمده است، تا یکی از دو متغیر  $x$  و  $y$  را برحسب دیگری بیان کنیم. این قسمت مشکل مسئله است؛ اگر "راه حل" شما را به مقصد نرسانده ناامید نشوید. تسلیم نشوید، زیرا شهوداً واضح است که معرفتی از  $x$ ،  $y$  را به‌طور منحصر به فرد معین می‌کند (یک صفحه کاغذ را تا کنید و ببینید). نکته اصلی این است که وقتی مثلث  $DEG$  تا می‌خورد، فضای خالی مثلث هم‌بُشت  $DEG'$  است. به‌علاوه، ضلع  $EG'$  مثلث اخیر، که به آسانی معلوم می‌شود که به طول  $3 - y$  است (به یاد آورید که عرض نوار ۳ است)، وتر  $EG$  مثلث  $EFG$  پس از تازدن است. لذا، طبق قضیه فیثاغورس،

$$x^2 + y^2 = |EG|^2 = (3 - y)^2 = 9 - 6y + y^2.$$



با حذف  $y^2$  و حل نسبت به  $y$ ، فرمول زیر به دست می‌آید:

$$(۴) \quad y = \frac{9 - x^2}{6},$$

که  $y$  را به عنوان تابعی از  $x$  بیان می‌کند.

بقیه کار سراسر است. با گذاردن (۴) در (۳) به دست می‌آوریم

$$A = \frac{9x - x^3}{12},$$

و مسئله به یافتن ماکزیمم (مطلق) مساحت  $A$  بر بازه  $I = [0, 3]$  تحویل می‌شود. (چرا این بازه؟) ماکزیمم باید در یک نقطه درونی  $I$  صورت گیرد، زیرا  $A > 0$  اگر  $0 < x < 3$  و  $A|_{x=0} = A|_{x=3} = 0$ . از اینرو، مقدار  $x$  که  $A$  را ماکزیمم می‌کند یک نقطه بحرانی  $A$  است. چون  $A$  به ازای هر  $x$  مشتقپذیر است، نقاط بحرانی  $A$  نقاط  $x = \sqrt{3}$  و  $x = -\sqrt{3}$  می‌باشند که در آنها

$$\frac{dA}{dx} = \frac{9 - 3x^2}{12} = \frac{3 - x^2}{4}$$

مساوی صفر است، ولی فقط  $x = \sqrt{3}$  یک نقطه درونی  $I$  می‌باشد. لذا، مقدار ماکزیمم  $A$  عبارت است از

$$A|_{x=\sqrt{3}} = \frac{9x - x^3}{12} \Big|_{x=\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3} - 3\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ اینج مربع}$$

به عنوان تعرین، نشان دهید که اگر  $x = \sqrt{3}$ ، قسمت تا خورده  $DEG$  و مثلث  $EFG$  مثلشهای قائم‌الزاویه‌ای هستند با زوایای حاده  $30^\circ$  و  $60^\circ$ .

یک ابزار مفید برای بهینه‌سازی. پیش از چند مثال، قضیه‌ای ثابت می‌کنیم که اغلب در حل مسائل بهینه‌سازی مفید واقع می‌شود.

قضیه ۱۲ (قضیه مقدار اکستريم برای توابعی که به بی‌نهایت نزدیک می‌شوند). فرض کنیم  $f$  تابع پیوسته‌ای بر بازه  $I = (a, b)$  باشد که  $a = -\infty$  و  $b = \infty$  نیز مجاز است. در این صورت،  $f$  بر  $I$  مینیمم دارد اگر

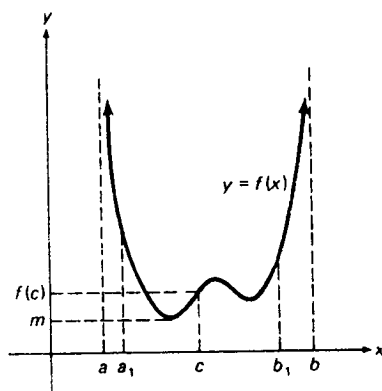
$$(۵) \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty,$$

و بر  $I$  ماکزیمم دارد اگر

$$(۵) \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$$

( اگر  $a = -\infty$  ،  $x \rightarrow a^+$  به  $x \rightarrow -\infty$  و اگر  $b = \infty$  ،  $x \rightarrow b^-$  به  $x \rightarrow \infty$  تغییر دهید ) .

برهان ( اختیاری ) . فقط (۵) را ثابت می‌کنیم ، زیرا حالات دیگر به همین نحو ثابت می‌شوند . فرض کنیم  $c$  نقطه‌ای در  $(a, b)$  باشد . در این صورت ، به‌خاطر (۵) ، نقاطی مانند  $a_1$  و  $b_1$  وجود دارند به‌طوری‌که  $a < a_1 < c < b_1 < b$  و هر وقت  $a < x < a_1$  و  $b_1 < x < b$  ،  $f(x) > f(c)$  ( ر.ک. شکل ۴۱) . فرض کنیم  $m$  مینیمم  $f$  بر بازه بسته



شکل ۴۱

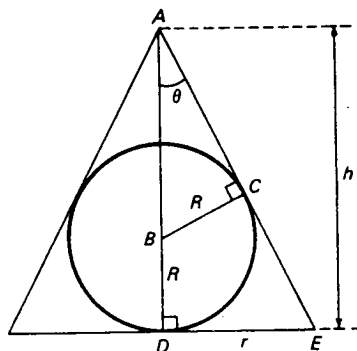
کراندار  $[a_1, b_1]$  باشد ؛ وجود  $m$  توسط قضیه ۱۵ ، صفحه ۱۶۵ ، تضمین می‌شود ( قضیه مقدار اکستریم معمولی ) . پس  $m$  مینیمم  $f$  بر  $(a, b)$  نیز هست . در واقع ، بنابر معنی  $m$  ، به ازای هر  $x$  در  $[a_1, b_1]$  ،  $f(x) \geq m$  ، حال آنکه بنابر انتخاب  $a_1$  و  $a_2$  ، به ازای هر  $x$  در  $(a, a_1)$  و  $(b_1, b)$  ،  $f(x) > f(c) \geq m$  .

طبیعی است که اگر (۵) برقرار باشد ،  $f$  ماکزیمم ندارد و اگر (۵') برقرار باشد ، مینیمم ندارد . قضیه ۱۲ نقشی در حل امثله زیر دارد .

مثال ۵ . حجم کوچکترین مخروط مستدیر قائم محیط بر یک کره به شعاع  $R$  را بیابید .

حل . یک مخروط مستدیر قائم به شعاع قاعده  $r$  و ارتفاع  $h$  دارای حجم  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$  است و

ما ابتدا باید یکی از دو متغیر  $r$  و  $h$  را بر حسب دیگری بیان کنیم. چون مخروط بر کره محیط است، شکل ۴۲ را خواهیم داشت، که در آن مثلثهای قائم الزاویه  $ADE$  و  $ACB$  در زاویه



شکل ۴۲

$\theta$  که مساوی نصف زاویه رأس مخروط است مشترکند. پس نتیجه می شود که

$$(۶) \quad \tan \theta = \frac{|DE|}{|AD|} = \frac{r}{h}, \quad \sin \theta = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{R}{h - R}.$$

ولی

$$(۷) \quad \tan^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta},$$

و از تلفیق (۶) و (۷) خواهیم داشت

$$\frac{r^2}{h^2} = \frac{R^2/(h - R)^2}{1 - [R^2/(h - R)^2]} = \frac{R^2}{(h - R)^2 - R^2} = \frac{R^2}{h^2 - 2Rh},$$

یا معادلاً

$$r^2 = \frac{R^2 h^2}{h^2 - 2Rh} = \frac{R^2 h}{h - 2R},$$

که  $r^2$  را به صورت تابعی از  $h$  بیان می کند. بنابراین،

$$(۸) \quad V = V(h) = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi R^2 \frac{h^2}{h - 2R},$$

که در آن  $2R < h < \infty$  (چرا این بازه؟)

حال مسئله به یافتن مینیم (مطلق)  $V$  بر بازه نامتناهی باز  $I = (2R, \infty)$  تحویل

می شود. از (۸) نتیجه می شود که

$$\lim_{h \rightarrow 2R^+} V(h) = \infty, \quad \lim_{h \rightarrow \infty} V(h) = \infty.$$

کاربردهای دیگر مشتقگیری ۳۳۱

لذا، طبق قضیه ۱۲، مینیم وجود دارد، و در یک نقطه بحرانی  $V$  صورت می گیرد، زیرا یک مینیم موضعی است (هر نقطه از بازه  $I$  بازه یک نقطه درونی است). چون  $V$  بر  $I$  مشتقپذیر است، با مشتق

$$\frac{dV}{dh} = \frac{1}{3} \pi R^2 \frac{2h(h-2R) - h^2}{(h-2R)^2} = \frac{1}{3} \pi R^2 \frac{h(h-4R)}{(h-2R)^2},$$

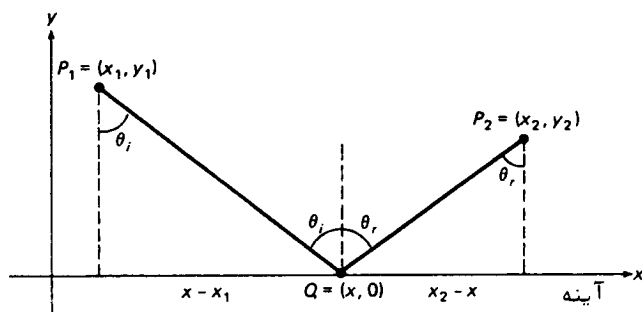
تنها نقطه بحرانی  $V$  نقطه  $h = 4R$  است که در آن  $dV/dh = 0$ . در نتیجه، مینیم حجم  $V$  بر بازه  $I$  باید در  $h = 4R$  صورت گیرد. لذا، کوچکترین حجم یک مخروط که قابل محیط شدن بر یک کره به شعاع  $R$  است مساوی است با

$$V|_{h=4R} = \frac{1}{3} \pi R^2 \frac{16R^2}{4R-2R} = \frac{8}{3} \pi R^3.$$

با تعجب می بینیم که این درست دوبرابر حجم کره محاطی است.

مثال ۶. فرض کنیم  $P_1$  و  $P_2$  دو نقطه در یک طرف آینه<sup>۱</sup> مسطحی بوده، و تمام مسیرهای  $P_1QP_2$  ای را در نظر می گیریم که از دو پاره خط  $P_1Q$  و  $QP_2$  تشکیل شده اند که  $Q$  یک نقطه دلخواه از آینه می باشد. بنابر قانون نور معروف به اصل فرما<sup>۱</sup>، مسیر یک شعاع نورانی صادر شده از  $P_1$  و منعکس شده به وسیله آینه تا نقطه  $P_2$  مسیری است که در کمترین زمان پیموده می شود. این مسیر را پیدا کنید.

حل. یک دستگاه مختصات دکارتی اختیار می کنیم که محور  $x$  در امتداد آینه است. نقاط  $P_1$ ،  $Q$ ، و  $P_2$  را طبق شکل ۴۳ مختص دار می کنیم. فرض کنیم  $v$  سرعت نور در هوا باشد.



شکل ۴۳

۱. Fermat

در این صورت، زمان لازم برای آنکه شعاع نور مسیر  $P_1QP_2$  را بپیماید مساوی است با  $T = L/v$ ، که در آن  $L$  طول کل  $P_1QP_2$  است. لذا، اصل فرما خواستار مینیم سازی تابع

$$(9) \quad T = T(x) = \frac{1}{v} (|P_1Q| + |QP_2|) = \frac{1}{v} [\sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2} + \sqrt{(x-x_2)^2 + y_2^2}]$$

می شود، که در آن  $x$  طول نقطه  $Q$  است. با مشتگیری از  $T$  نسبت به  $x$  و مساوی صفر قرار دادن نتیجه، به دست می آید

$$\frac{dT}{dx} = \frac{x-x_1}{v\sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2}} + \frac{x-x_2}{v\sqrt{(x-x_2)^2 + y_2^2}} = 0,$$

که ایجاب می کند که

$$(10) \quad \frac{x-x_1}{|P_1Q|} = \frac{x_2-x}{|QP_2|}.$$

این امر که  $T$  عملاً "مینیم خود را بر  $(-\infty, \infty)$  در نقطه  $x$  معین شده به وسیله (۱۰) می گیرد نتیجه ای است از قضیه ۱۲، زیرا  $T$  فقط یک نقطه بحرانی دارد و وقتی  $x \rightarrow \pm\infty$ ،  $T \rightarrow \infty$ . توجه کنید که، به خاطر ثابت بودن سرعت  $v$ ، مینیم سازی زمان  $T$  معادل مینیم سازی طول  $L$  است.

حال فرض کنیم  $\theta_i$  زاویه تابش، یعنی زاویه بین شعاع تابش  $P_1Q$  و عمود برآینه، بوده، و  $\theta_r$  زاویه انعکاس، یعنی زاویه بین شعاع منعکس شده  $QP_2$  و عمود برآینه، باشد. از شکل واضح است که (۱۰) معادل

$$\sin \theta_i = \sin \theta_r$$

بوده که به نوبه خود ایجاب می کند که

$$\theta_i = \theta_r,$$

نتیجه ای که به قانون انعکاس معروف است. با الفاظ، زاویه تابش مساوی زاویه انعکاس است.

مثال ۷. فرض کنیم  $P_1$  و  $P_2$  دو نقطه در دو طرف یک سطح مسطح بین دو محیط، مثلاً "هوا و آب، باشند. با استفاده از اصل فرما، مسیری را بیابید که شعاع نور خارج شده از  $P_1$  پس از انعکاس از سطح مشترک تا  $P_2$  می رود.

حل. به موازات حل مثال ۶، مختصات شکل ۴۴ را اختیار می کنیم.

فرض کنیم سرعت نور در محیط اول  $v_1$  و در محیط دوم  $v_2$  باشد. در این صورت، به جای

(۹) داریم

۳۳۳ کاربرد های دیگر مشتق گیری

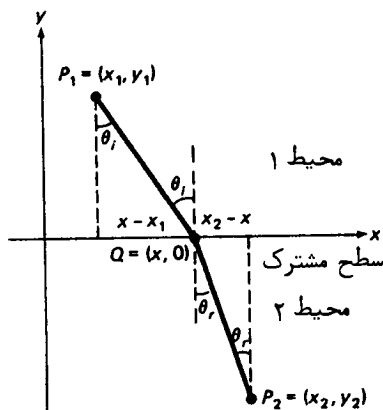
$$(۹) \quad T = T(x) = \frac{|P_1 Q|}{v_1} + \frac{|QP_2|}{v_2} = \frac{\sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x-x_2)^2 + y_2^2}}{v_2}.$$

با مساوی صفر قرار دادن  $dT/dx$  فوراً " به شرط

$$(۱۰) \quad \frac{x-x_1}{v_1|P_1 Q|} = \frac{x_2-x}{v_2|QP_2|}$$

می‌رسیم که به خاطر عوامل  $v_1$  و  $v_2$  در مخرج با (۱۰) فرق دارد. با توجه به شکل، می‌بینیم که (۱۰) معادل است با

$$(۱۱) \quad \frac{\sin \theta_i}{v_1} = \frac{\sin \theta_r}{v_2},$$



شکل ۴۴

که در آن  $\theta_i$  باز زاویه تابش است ولی  $\theta_r$  زاویه تفرق، یعنی زاویه بین شعاع تفرق و عمود بر سطح مشترک، می‌باشد. فرمول (۱۱) قانون مشهور تفرق، که به قانون اسنل<sup>۱</sup> نیز معروف است، در نور از اهمیت زیادی برخوردار است. این قانون اغلب به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{v_1}{v_2} = \text{ثابت}$$

تبصره. در دو مثال پیش تلویحا " فرض شده است که نقاط  $P_1$ ،  $Q$ ، و  $P_2$  در یک

1. Snell

صفحه‌اند، و صریحا " فرض شده‌است که مسیرهای جزئی  $P_1Q$  و  $QP_2$  مستقیم الخط می‌باشند. این فرضها توجیه شده‌اند، زیرا در غیراین صورت نور برای رفتن از  $P_1$  تا  $P_2$  زمان طولانی‌تری می‌خواهد ( چرا؟ ).

مثال ۸. کوتاهترین فاصله بین نقطه  $P = (2, 0)$  و منحنی  $y = \sqrt{x}$  را بیابید.

حل. فرض کنیم  $L = |PQ|$  فاصله  $P$  تا نقطه متغیر  $Q = (x, \sqrt{x})$  از منحنی  $y = \sqrt{x}$  باشد. در این صورت،  $L = L(x)$  تابعی از  $x$  است، و

$$L^2 = |PQ|^2 = (x - 2)^2 + (\sqrt{x} - 0)^2 = x^2 - 3x + 4.$$

چون  $L$  مثبت است،  $L$  در نقطه  $c$  مینیمم دارد اگر و فقط اگر  $L^2$  در  $c$  مینیمم داشته باشد ( بیشتر توضیح دهید ). تنها نقطه بحرانی  $L^2$  در نقطه  $x = \frac{3}{2}$  است که در آن

$$\frac{d}{dx} L^2 = \frac{d}{dx} (x^2 - 3x + 4) = 2x - 3 = 0.$$

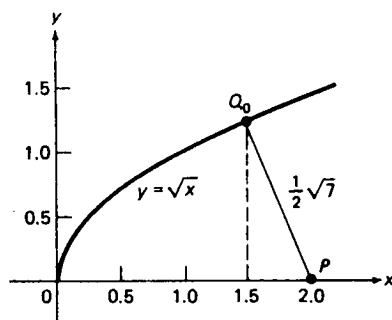
همچنین، از اینکه  $d^2(L^2)/dx^2 \equiv 2 > 0$ ، از آزمون مشتق دوم نتیجه می‌شود که  $L^2$  در  $x = \frac{3}{2}$  مینیمم موضعی اکید دارد. بنابراین،  $L$  در  $x = \frac{3}{2}$  نیز مینیمم موضعی اکیدی مساوی

$$L\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right) + 4} = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{7} \approx 1.32$$

خواهد داشت. ما در جستجوی مینیمم (مطلق)  $L$  بر  $I = [0, \infty)$  هستیم، بازه‌ای که منحنی  $y = \sqrt{x}$  بر آن تعریف شده است. چون  $L(0) = 2 > L(\frac{3}{2})$  و وقتی  $x \rightarrow \infty$ ،  $L \rightarrow \infty$ ، ( بنا بر استدلالی که در اثبات قضیه ۱۲ به کار رفت ) این مینیمم وجود دارد و در یک نقطه درونی  $I$  گرفته می‌شود. از اینرو، مینیمم  $L$  بر  $I$  با مینیمم موضعی  $L$  در  $x = \frac{3}{2}$  یکی است، و کوتاهترین فاصله بین  $P$  و منحنی  $y = \sqrt{x}$  مساوی  $L(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{7}$  می‌باشد. این فاصله بین  $P$  و  $Q_0$  (یعنی، نقطه‌ای از منحنی با مختص  $x = \frac{3}{2}$ ) می‌باشد (ر.ک. شکل ۴۵). به عنوان تمرین، نشان دهید که پاره خط  $PQ_0$  بر مماس بر منحنی در  $Q_0$  عمود است.

طرز حل مسائل بهینه‌سازی. روند گام به گام زیر شما را در حل مسائل بهینه‌سازی یاری می‌دهد.

۱. کمیتی را که باید ماکزیم یا مینیمم شود شناسایی کرده و آن را با حرف مناسبی، که بهتر است یادآور معنی آن باشد، نشان دهید. این متغیر وابسته است، و هدف شما



شکل ۴۵

- این است که مآلاً "آن را به صورت تابعی از یک متغیر مستقل بیان کنید .
۲. کمیات دیگری که در مسئله نقش دارند شناسایی کرده و آنها را نیز با حروف مناسبی نمایش دهید. یافتن این کمیات مستلزم آزمایشهایی است، و باید انتظار اشتباهاتی را داشته باشید، زیرا هر کس اشتباه می کند .
۳. فرمولهایی را جستجو کنید که کمیات کمکی انتخاب شده در مرحله ۲ را به هم و به متغیر وابسته اختیار شده در مرحله ۱ ربط دهد. کشف این گونه فرمولها معمولاً "با رسم شکل ساده می شود .
۴. یکی از کمیات کمکی را به عنوان متغیر مستقل انتخاب و دیگران را حذف کنید. حال باید فرمولی داشته باشید که کمیتی که باید بهینه شود را به صورت تابعی چون  $f$  از متغیر مستقل بیان کند که بر بازه‌ای چون  $I$  تعریف شده است. بازه  $I$  ممکن است شامل نقاط انتهایی باشد یا نباشد، و  $I$  ممکن است به خاطر محدودیتهای ناشی از مفهوم واقعی مسئله از قلمرو طبیعی  $f$  کوچکتر باشد .
۵. قسمت مشکل مسئله پشت سر گذارده شده است، و بقیه آن نسبتاً آسان است. شما در جستجوی ماکزیمم یا مینیمم تابع  $f$  بر بازه‌ای چون  $I$  هستید، و این اکسترمم مطلق را می توان به کمک نظریه مذکور در بخش ۲.۳ به دست آورد. بخصوص، از مشتقگیری استفاده کرده نقاط بحرانی  $f$ ، یعنی نقاطی که در آن  $f'$  صفر است یا وجود ندارد، را بیابید، زیرا  $f$  ممکن است در این نقاط اکسترمم موضعی داشته باشد. ممکن است بخواهید با استفاده از آزمون اول یا دوم ثابت کنید  $f$  در یک نقطه بحرانی عملاً "اکسترمم دارد، و مشخص کنید که اکسترمم ماکزیمم یا مینیمم است. ممکن است مقایسه مقادیر تابع  $f$  در نقاط بحرانی با مقادیر  $f$  در نقاط انتهایی  $f$  به صورت توصیف شده در قضیه ۵، صفحه ۲۶۷، لازم باشد. اگر  $f$  در



- نقاط انتهایی  $I$  به بی‌نهایت نزدیک شود، استفاده از قضیه ۱۲، صفحه ۳۲۸، ممکن است مفید باشد.
۶. یادتان باشد که در پاسخ به سئوالات مطرح شده در صورت مسئله، جواب‌نهایی خود را از ریاضی به فارسی برگردانید.

### مسائل

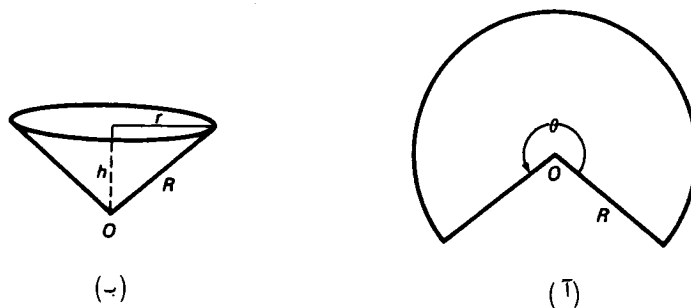
۱. مثل مثال ۱، مزرعه‌داری 800 ft حصار دارد که دور یک مزرعه مستطیلی بکشد، ولی این بار یک طرف مزرعه امتداد مستقیم ساحل رودخانه‌ای است. با این فرض که ساحل رودخانه حصار نمی‌خواهد، بیشترین مساحتی که مزرعه‌دار می‌تواند حصار بکشد چقدر است؟
۲. مزرعه‌داری 600 ft حصار دارد که می‌خواهد دور پنج قطعه مستطیلی مساوی مانند شکل ۴۶ را حصار بکشد. به ازای چه ابعادی مساحت کل محصور شده ماکزیمم است؟



شکل ۴۶

- اگر یکی از خطوط مرزی مشترک در تمام قطعات در امتداد ساحل مستقیم رودخانه‌ای قرار داشته و به حصار برای آن نیاز نباشد، جواب چه تغییری خواهد کرد؟
۳. مستطیلی به مساحت  $A$  بیابید که کوچکترین محیط را داشته باشد.
۴. ماکزیمم مجموع دو عدد (نه لزوماً مثبت) که حاصل ضربشان عدد معلوم  $c$  است چقدر است؟ مینیمم آنها چقدر است؟
۵. ماکزیمم حاصل ضرب دو عدد که مجموعشان عدد داده شده  $c$  است چقدر است؟ مینیمم آنها چقدر است؟
۶. ماکزیمم حاصل ضرب دو عدد که تفاضل آنها عدد داده شده  $c$  است چقدر است؟ مینیمم آنها چقدر است؟
۷. یک صورت غذا به مساحت کل 100 sq in با حاشیه 2-in در بالا و پایین و 1-in در طرفین چاپ شده است. این صورت با چه ابعادی بیشترین مساحت را دارد؟
۸. بیشترین حجم یک جعبه مستطیلی بدون در را بیابید که از بریدن مربعات کوچک از چهار گوشه یک ورقه فلزی مستطیلی 8 in. x 15 in. و تا کردن لبه‌ها ساخته می‌شود.

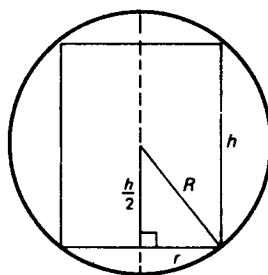
- بزرگترین مساحت مستطیل محاط شده در هر یک از اشکال زیر را بیابید .
۹. یک دایره به شعاع  $R$
  ۱۰. یک نیمدایره به شعاع  $R$  که یک ضلع مستطیل روی قطر آن است .
  ۱۱. یک مثلث متساوی الساقین به قاعده  $b$  و ساق به طول  $s$  که یک ضلع مستطیل بر قاعده  $b$  مثلث قرار دارد .
  ۱۲. مقاومت یک تیر با مقطع عرضی مستطیلی با حاصل ضرب عرض در مربع ارتفاعش متناسب است . فرض کنید یک تیر چوبی از یک الوار مستدیر بریده شده باشد . به ازای چه نسبتی از ارتفاع به عرض مقاومت آن ماکزیمم است ؟
  ۱۳. بیشترین مساحت یک دوزنقه که سه ضلع ناموازی آن به طول  $s$  اند چقدر است ؟ طول ضلع چهارم وقتی مساحت ماکزیمم است چیست ؟
  ۱۴. در بین تمام مثلثهای قائم الزاویه‌ای که مجموع طول وتر و یک ضلعشان عدد ثابت معلوم  $c$  است کدام بیشترین مساحت را دارد ؟
  ۱۵. فرض کنید  $BPC$  یک مثلث محاطی در یک دایره بوده ، و ضلع  $BC$  با مماس بر دایره در  $P$  ، یعنی رأس مقابل به  $BC$  ، موازی باشد . به ازای چه  $BC$  ای مساحت  $BPC$  ماکزیمم است ؟
  ۱۶. به ازای چه نسبتی از ارتفاع به شعاع یک چلیک روغن استوانه‌ای با حجم معلوم ، مساحت کل چلیک مینیمم است ؟
  ۱۷. حجم ماکزیمم یک فنجان با مساحت معلوم  $S$  به شکل یک استوانه  $\pi$  مستدیر قائم بدون سر چقدر است ؟
  - مینیمم مساحت آن به ازای حجم معلوم  $V$  چقدر است ؟ رابطه بین این دو مسئله را بیابید .
  ۱۸. بیشترین حجم یک مخروط مستدیر قائم با ارتفاع مایل  $s$  را بیابید .
  ۱۹. در بین تمام استوانه‌های مستدیر قائم حاصل از دوران یک مستطیل با محیط  $P$  حول یکی از اضلاعش استوانه با حجم ماکزیمم را بیابید .
  ۲۰. چه مثلث متساوی الساقینی با محیط  $P$  در دوران حول قاعده‌اش بیشترین حجم را تولید می‌کند ؟
  ۲۱. یک فنجان مخروطی با بریدن یک قطاع مستدیر مرکزی به زاویه  $\theta$  از یک قرص کاغذی (ر.ک. شکل ۴۷ (آ) ، که در آن قرص به شعاع  $R$  است ) و چسباندن لبه‌های مستقیم قطاع به هم (ر.ک. شکل ۴۷ (ب) ، که در آن فنجان به ارتفاع  $h$  بوده و سرش به شعاع  $r$  می‌باشد ) ساخته شده است . فنجان به ازای چه مقداری از  $\theta$  بیشترین حجم



شکل ۴۷

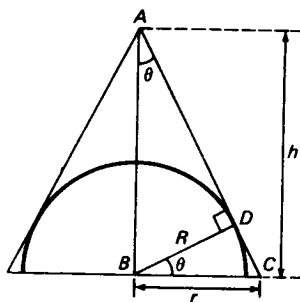
را دارد؟

۲۲. بیشترین حجم یک استوانهء مستدیر قائم محاط در یک کره به شعاع  $R$  را بیابید (ر).  
 ک. (شکل ۴۸).



شکل ۴۸

۲۳. کوچکترین حجم یک مخروط مستدیر قائم محیط بر یک نیمکره به شعاع  $R$  را بیابید (ر).  
 ک. (شکل ۴۹).



شکل ۴۹

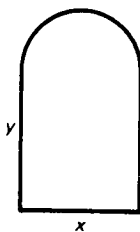
۲۴. کوتاهترین فاصله بین نقطه  $(4, 1)$  و سهمی  $y = \frac{1}{2}x^2$  را بیابید.
۲۵. بزرگترین فاصله قائم بین منحنیهای  $y = \sqrt{x}$  و  $y = \sqrt[3]{x}$  بر بازه  $0 \leq x \leq 1$  را بیابید.
۲۶. فرض کنید تابع  $f$  بر  $(-\infty, \infty)$  مشتقپذیر باشد. نشان دهید که کوتاهترین فاصله تا منحنی  $y = f(x)$  از نقطه ثابت  $P = (a, b)$  غیرواقع بر منحنی در امتداد خط قائم به منحنی می باشد. این نتیجه را در مسئله ۲۴ تحقیق کنید.
۲۷. در مثال ۳ فرض کنید هزینه ساختن بخش دوم جاده \$500,000 بر میل باشد. حال چه مقدار از جاده قدیم باید اختیار شود؟
۲۸. در مثال ۳ هزینه ساختن تمام جاده جدید چقدر باید پایین باشد تا اداره خدمات اجتماعی طرح ساختن یک جاده دو بخشی را لغو کرده و جاده مستقیم  $AB$  را ترجیح دهد؟ آیا ساختن جاده  $L$  شکل  $AQB$  معنی دارد؟
۲۹. دو کشتی  $A$  و  $B$  در مسیرهای متعامدی به سمت نقطه  $P$  روانند. کشتی  $A$  به سرعت 12 گره بوده و در آغاز در فاصله 25 میل دریایی از  $P$  قرار دارد، حال آنکه کشتی  $B$  به سرعت 16 گره بوده و در آغاز در فاصله 20 میل دریایی از  $P$  واقع است. چه وقت کشتیها بیش از همه به هم نزدیکند؟ نزدیکترین فاصله چقدر است؟
۳۰. دو نقطه  $P_1 = (0, 3)$  و  $P_2 = (4, 5)$  داده شده اند. نقطه  $Q$  بر محور  $x$  را طوری بیابید که مجموع فواصل  $|P_1Q|$  و  $|QP_2|$  مینیمم باشد. این را به مثال ۶ ربط دهید.
- جزیره ای در 4 میلی یک ساحل مستقیم قرار دارد. در پایین جاده و در 5 میلی نقطه ای از ساحل که به جزیره نزدیکترین است مغازه ای وجود دارد. یک ساکن جزیره به طور منظم به مغازه سر می زند و در این راه از یک قایق پارودار استفاده کرده و بقیه راه را پیاده می رود. سرعت راه رفتن این شخص 5 mph بوده و با سرعت متوسط 3 mph پارو می زند.
۳۱. در چه نقطه از ساحل پیاده شود تا در کمترین زمان به مغازه برسد؟
۳۲. فرض کنید دریا آرام باشد به طوری که بتواند با سرعت 4 mph پارو بزند. این مسیری را چگونه تغییر می دهد؟
۳۳. فرض کنید هدفش به جای مینیم ساختن زمان رسیدن به مغازه، مینیم سازی انرژی مصرف شده باشد، و فرض کنید انرژی صرف شده در دریا برای طی مسافتی دوبرابر انرژی مصرف شده در خشکی برای طی همان فاصله باشد. در چه فاصله از مغازه باید از قایق پیاده شود؟
۳۴. مماس بر منحنی  $y = x^2 - 1$  را طوری بیابید که از ربع چهارم مثلثی با کمترین مساحت جدا کند. مساحت مینیم چقدر است؟
۳۵. نقطه  $P = (a, b)$  در ربع اول داده شده است. خطی ماربر  $P$  بیابید که از ربع اول

مثلی به مساحت مینیمم جدا کند. این مساحت مینیمم چقدر است؟

۳۶. روشنایی یک منبع نور با قدرت منبع نسبت مستقیم و با مربع فاصله بین منبع و جسم روشن شده نسبت عکس دارد. روشنایی را در نقطه متغیری از خط واصل بین دو منبع نور به فاصله  $d$  از هم، که یکی  $k$  برابر از دیگری قویتر است، در نظر بگیرید. نشان دهید که در نقطه با ضعیفترین روشنایی، منبع قویتر  $\sqrt{k}$  برابر بیشتر از منبع ضعیفتر روشنایی تولید می کند.

۳۷. سیمی به طول  $L$  به دو قطعه بریده شده است. سپس یک قطعه به دایره‌ای به شعاع  $r$  و دیگری به مربعی به طول ضلع  $s$  تبدیل شده است. کوچکترین مساحت کل محصور به دو قطعه چقدر است؟ این مساحت چطور به دست می آید؟

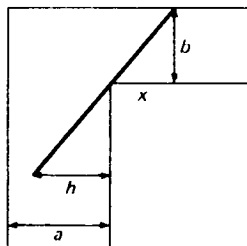
۳۸. پنجره‌ای به شکل مستطیلی است به قاعده  $x$  و ارتفاع  $y$  که در بالای آن نیمدایره‌ای به قطر  $x$  قرار گرفته است (ر. ک. شکل ۵۰).



شکل ۵۰

اگر محیط پنجره  $p$  باشد، ابعاد پنجره‌ای را بیابید که بیشترین نور از آن بگذرد.

۳۹. یک تیر سخت به طول  $L$  روی غلطکی در یک راهرو به عرض  $a$  به راهرو دیگری به عرض  $b$  و عمود بر اولی حرکت می کند (ر. ک. شکل ۵۱). طول بلندترین تیری که می تواند بدون اشکال



شکل ۵۱

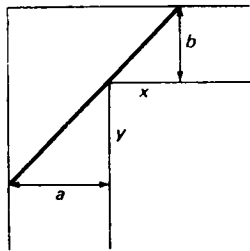
از زاویه قاعده عبور کند را بیابید. از عرض تیر صرف نظر کرده و فرض کنید تیر

کاربردهای دیگر مشتقگیری ۳۴۱

همواره افقی باشد.

راهنمایی. فرض کنید  $x$  و  $h$  فواصل نموده شده در شکل باشند.  $h$  را به صورت تابعی از  $x$  بیان کرده، و نشان دهید که ماکزیمم  $h$  مساوی  $(L^{2/3} - b^{2/3})^{3/2}$  است.

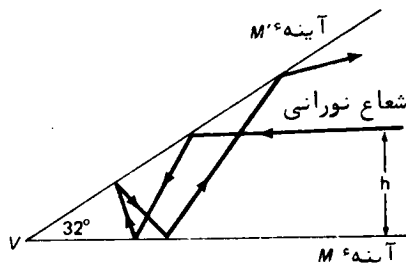
۴۵. در مسئله ۳۹ نشان دهید که طولترین تیری که می‌تواند بپیچد کوتاهترین تیری است که با هر دو دیوار خارجی و نقطه مشترک دیوارهای داخلی راهروها (به شکل ۵۲) تماس می‌یابد. با معلوم گرفتن این امر، مسئله را به صورت دیگر حل کنید.



شکل ۵۲

۴۱. ساختن زیر برای یافتن شعاع انعکاس  $QP_2$  و نقطه انعکاس  $Q$  در مثال ۶ را توجیه کنید. فرض کنید  $P'_2$  نقش نقطه  $P_2$  در آینه، یعنی منعکس  $P_2$  نسبت به محور  $x$ ، بوده و پاره خط  $P_1P'_2$  را رسم کنید. در این صورت،  $Q$  نقطه‌ای است که در آن  $P_1P'_2$  محور  $x$  را قطع می‌کند، و  $QP_2$  منعکس پاره خط  $QP'_2$  نسبت به محور  $x$  است.

۴۲. فرض کنید یک شعاع نورانی موازی آینهء مسطح  $M$  و در فاصله  $h$  از  $M$  وارد یک گوه به زاویه رأس ۳۲ می‌شود که از  $M$  و آینهء مسطح دیگر  $M'$  که در لبه‌ای با  $M$  مشترک است تشکیل شده است (ر.ک. شکل ۵۳).



شکل ۵۳

نشان دهید که  $h$  نزدیکترین فاصله شعاع چندبار انعکاس تا رأس  $\nu$  گوه، یعنی لبه

مشترک آینه‌ها، است. آیا این نتیجه به اندازه زاویه رأس بستگی دارد؟ شعاع وقتی به  $\nu$  از همیشه نزدیکتر است چند بار منعکس شده است؟ تعداد کل انعکاسهای شعاع چندبار انعکاس قبل از ترک گوه چند است؟ راهنمایی. از قانون انعکاس چندبار استفاده کنید.

### ۸.۳ کاربردها در تجارت و اقتصاد (اختیاری)

مفهوم حاشیه. لغت "حاشیه" مکرر در تجارت و اقتصاد، و در عباراتی چون هزینه حاشیه‌ای، درآمد حاشیه‌ای، سود حاشیه‌ای، و غیره ظاهر می‌شود. لغت اول در هر عبارت همیشه یک تابع است، و کلمه حاشیه گرفتن میزان تغییر تابع داده شده نسبت به شناسه‌اش را می‌طلبد. لذا، برای یافتن یک کمیت حاشیه‌ای باید عمل ریاضی مشتگیری را انجام داد. واژه "متوسط"، که در نظریه اقتصاد به کار می‌رود، نیز یک عمل ریاضی را می‌طلبد و آن تقسیم تابع پیش از واژه به متغیر مستقل می‌باشد، اما این را می‌توان بدون اطلاع از حساب دیفرانسیل و انتگرال انجام داد.

مثلاً، هزینه کل تولید کمیت  $q$  از یک کالا تابعی است از  $q$  به نام تابع هزینه (کل) که با  $C(q)$  نموده می‌شود. مشتق این تابع، یعنی

$$(۱) \quad C'(q) = \frac{dC(q)}{dq},$$

هزینه حاشیه‌ای نام دارد و با  $MC(q)$  نموده می‌شود. در اینجا از قرارداد متعارفی در نظریه اقتصاد پیروی کرده و بعضی از توابع را با حروفی مانند  $MC$  برای هزینه حاشیه‌ای،  $AR$  برای درآمد متوسط، و غیره نشان می‌دهیم. این جفت حروف را حاصل ضرب نگیرید! با این نماد، (۱) به شکل زیر درمی‌آید:

$$(۱') \quad AC(q) = \frac{C(q)}{q}.$$

به همین نحو، هزینه متوسط تولید کمیت  $q$  از کالای مورد نظر عبارت است از

$$MC(q) = \frac{dC(q)}{dq}.$$

در نوشتن  $C(q)$  تلویحاً فرض می‌کنیم  $C(q)$  به ازای جميع اعداد حقیقی  $q \geq 0$  تعریف شده است (خروجی ذاتاً "نامنفی است")، و این فقط به ازای اعداد صحیح  $q = 0, 1, 2, \dots$  نیست. مسلماً این فرض برای روغن یا نمک مناسب است، ولی برای کالاهایی که "در هر لحظه یکی می‌آید" اگر خروجی زیاد بوده و ما زیاد وسواس نداشته باشیم نیز معنی دارد.

لذا، اگر جواب یک مسئله تولید " ساختن 31.5 TV در روز " باشد، می توان 63 دستگاه را در 2 روز ساخت، یا اینکه 31 یا 32 دستگاه در روز بسازیم.

تحت این شرایط، تصور هزینه حاشیه‌ای، در سطح تولید معلوم  $q$ ، به عنوان هزینه اضافی تولید یک واحد بیشتر، درآمد حاشیه‌ای به عنوان درآمد اضافی حاصل از فروش یک واحد بیشتر، و غیره تعاریف مناسبی خواهند بود. لذا، مثلاً، از تقریب مشتق آمده در (۱') با خارج قسمت تفاضلی خواهیم داشت

$$(۲) \quad MC(q) = C'(q) \approx \frac{C(q + \Delta q) - C(q)}{\Delta q},$$

که در آن تقریب در صورتی مناسب است که  $\Delta q$  به قدر کافی کوچک باشد. طبق رسم این میحث، فرض می کنیم  $\Delta q = 1$  به قدر کافی کوچک منظور شود. در این صورت، اگر در (۲) قرار دهیم  $\Delta q = 1$ ، با تقریب مناسبی خواهیم داشت

$$(۲') \quad MC(q) = C(q + 1) - C(q).$$

به عبارت دیگر، هزینه حاشیه‌ای در هر سطح تولید هزینه اضافی تولید واحد بعدی خروجی می باشد.

مثال ۱. کمپانی روز بارانی در می یابد که برای تولید  $q$  کیت از مجموعه بازی "سگ و گربه" که هر کیت شامل 100 بازی است

$$(۳) \quad C(q) = 9720 + 500q - 1.5q^2 + 0.005q^3$$

دلار هزینه برمی دارد. هزینه‌های حاشیه‌ای و متوسط نظیر را بیابید. جمله ثابت در عبارت  $C(q)$  را تعبیر کنید. رفتار هزینه حاشیه‌ای را به عنوان تابعی از خروجی  $q$  تحلیل نمایید.

حل. شکل ۵۴ نمودار تابع هزینه  $C(q)$  را نشان می دهد. برای هزینه حاشیه‌ای داریم

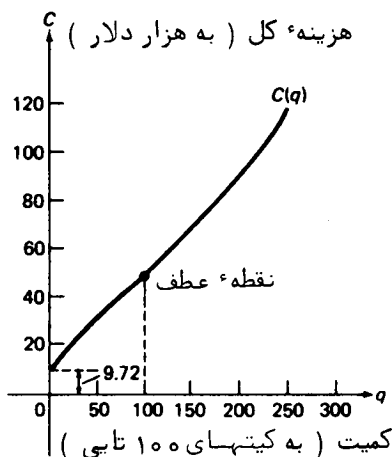
$$(۴) \quad MC(q) = \frac{dC(q)}{dq} = 500 - 3q + 0.015q^2,$$

و برای هزینه متوسط

$$(۵) \quad AC(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{9720}{q} + 500 - 1.5q + 0.005q^2.$$

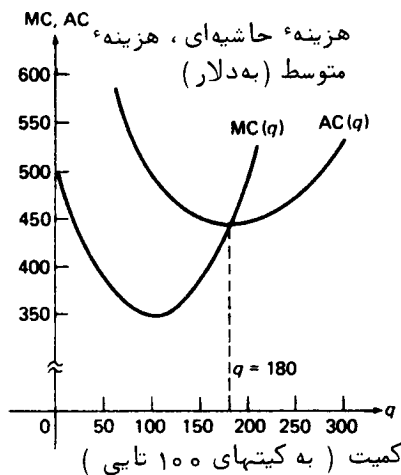
این دو تابع باهم در شکل ۵۵ رسم شده اند. جمله ثابت 9720 در فرمول (۳) برای هزینه کل میزان سرانه یعنی هزینه‌های ثابت تولید (کارخانه، وسایل، بیمه، و غیره)، را نمایش می دهد. این هزینه‌ها حتی در غیاب تولید نیز وجود دارند؛ و لذا، سرانه





شکل ۵۴

مساوی است با  $C(0)$ . چون مشتق یک ثابت صفر است، هزینه حاشیه‌ای از سرانه مستقل می‌باشد. همانطور که از فرمول (۵) دیده می‌شود، این در مورد هزینه متوسط درست نیست.



شکل ۵۵

با نوشتن عبارت (۴) برای هزینه حاشیه‌ای به شکل

$$(۴) \quad MC(q) = 0.015(q - 100)^2 + 350,$$

معلوم می‌شود که  $MC(q)$  به ازای هر  $q \geq 0$  مثبت است؛ و در واقع، مقدار مینیمم خود 350

را در  $q = 100$  می‌گیرد. اگر  $MC(q) > 0$  را نمی‌داشتیم، مدل ما دارای نقص می‌شد، زیرا معنی اقتصادی هزینه حاشیه‌ای آن را ذاتاً "مثبت می‌کند. همچنین، ملاحظه می‌شود که

$$\frac{d}{dq} MC(q) = 0.03(q - 100),$$

در نتیجه، اگر  $q < 100$ ،  $D_q MC(q) < 0$ ، حال آنکه اگر  $q > 100$ ،  $D_q MC(q) > 0$  پس نتیجه می‌شود که  $MC(q)$  تابعی نزولی از خروجی برای سطوح تولید متوسط است ( $q < 100$ ). اما مآلاً "برای سطوح تولید بالاتر ( $q > 100$ ) تابعی صعودی خواهد شد. این یک پدیده نوعی است، زیرا تولید بالا ابتدا ذخیره می‌دهد ("اقتصاد مقیاس")، ولی مآلاً، همین طور که برای سطوح بالاتر فشاری می‌آید، به وسیله عوامل دیگر (مثلاً، ظرفیت ناکافی کارخانه) کاهش می‌یابد. چون  $MC(q) > 0$ ، هزینه کل  $C(q)$  تابعی صعودی می‌شود، حال آنکه تغییر علامت  $D_q MC(q)$  در  $q = 100$  به نقطه عطف  $C(q)$  در  $q = 100$  منجر می‌شود (ر.ک. شکل ۵۴).

مثال ۲. مینیم هزینه متوسط تولید کیت بازی در مثال پیش را بیابید. نشان دهید که منحنیهای هزینه حاشیه‌ای و متوسط در نقطه نظیر به مینیم هزینه متوسط متقاطع اند. آیا این یک تصادف است؟

حل. با مساوی صفر گرفتن مشتق تابع (۵) به دست می‌آوریم

$$\frac{d}{dq} AC(q) = -\frac{9720}{q^2} - 1.5 + 0.01q = 0,$$

یا معادلاً

$$(۶) \quad q^3 - 150q^2 = (q - 150)q^2 = 972,000 = 30(180)^2.$$

پس نتیجه می‌شود که  $q = 180$  ریشه معادله مکعبی (۶) است. در واقع،  $q = 180$  تنها ریشه حقیقی است، زیرا (۶) با

$$q^3 - 150q^2 - 972,000 = (q - 180)(q^2 + 30q + 5400) = 0$$

معادل است، و عامل درجه دوم همواره مثبت می‌باشد (چرا؟). با محاسبه مشتق دوم  $AC(q)$  معلوم می‌شود که

$$\frac{d^2}{dq^2} AC(q) = \frac{19,440}{q^3} + 0.01 > 0 \quad (q > 0).$$

بنابراین،  $AC(q)$  در  $q = 180$  مینیم موضعی اکید دارد، و به علاوه منحنی هزینه متوسط

به بالا مقعر است. چون وقتی  $q \rightarrow 0^+$ ، و  $q \rightarrow \infty$ ،  $AC(q) \rightarrow \infty$ ، این مینیم موضعی مینیم مطلق  $AC(q)$  بر  $(0, \infty)$  نیز هست. باگذاردن  $q = 180$  در (۴) و (۵) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} MC(180) &= 500 - 3(180) + 0.015(180)^2 \\ &= 500 - 540 + 486 = 446, \\ AC(180) &= \frac{9720}{180} + 500 - 1.5(180) + 0.005(180)^2 \\ &= 54 + 500 - 270 + 162 = 446. \end{aligned}$$

لذا، مینیم هزینه متوسط تولید کیت بازی \$446 بر کیت 100 بازی یا \$4.46 بر بازی است. برقراری  $MC(180) = AC(180)$ ، که منحنیهای هزینه حاشیه‌ای و متوسط را در نقطه نظیر به مینیم هزینه متوسط متقاطع می‌سازد (ر.ک. شکل ۵۵)، تصادفی نیست. در واقع،

$$\frac{d}{dq} AC(q) = \frac{d}{dq} \frac{C(q)}{q} = \frac{C'(q)q - C(q)}{q^2},$$

و چون مینیم هزینه متوسط یک نقطه بحرانی  $AC(q)$  است، باید ریشه‌ای از معادله  $C'(q)q - C(q) = 0$  باشد، که با

$$MC(q) = C'(q) = \frac{C(q)}{q} = AC(q)$$

معادل است.

در دو مثال پیش، فعالیت اقتصادی کمپانی روزبارانی را از دیدگاه هزینه تولید کیت بازی جدیدش "سگ و گربه" تحلیل کردیم. در مثالهای زیر مصرف‌کننده (خریدار) تولید را وارد صحنه می‌کنیم.

مثال ۳. از تحلیل بازاری شرکت روزبارانی معلوم می‌شود که تعداد کیتهای "سگ و گربه" ای که عمده فروشان وقتی بهای بازی  $p$  دلار بر کیت بوده سفارش داده‌اند از فرمول

$$q = 600 - 0.4p \quad (۷)$$

به دست می‌آید. درآمدهای کل، حاشیه‌ای، و متوسط شرکت را بیابید. درآمد کل ماکزیمم چقدر است، و در چه سطح تولید و بها صورت می‌گیرد؟

حل. معنی اقتصادی تابع تقاضای خطی (۷) این است که در بهای  $p = \$1500$  بر کیت (15\$ بر بازی) هیچ بازاری سفارش داده نمی‌شود، ولی به ازای هر \$100 کاهش در بهای یک کیت،

40 کیت بیشتر سفارش داده می‌شود. درآمد کل کمپانی، یعنی  $R(q)$ ، مساوی است با

$$R(q) = pq,$$

که در آن  $p$  بها و  $q$  میزان فروخته شده در این بها است. برای بیان  $R(q)$  به عنوان فقط تابعی از  $q$ ، ابتدا (۷) را نسبت به  $p$  و برحسب  $q$  حل کرده به دست می‌آوریم

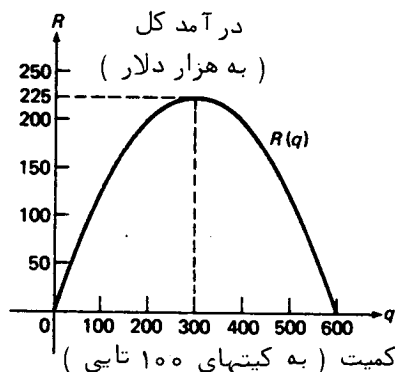
$$(۷) \quad p = 1500 - 2.5q.$$

در این صورت، داریم

$$(۸) \quad R(q) = pq = (1500 - 2.5q)q = 1500q - 2.5q^2.$$

نمودار این تابع در شکل ۵۶ نموده شده است. توجه کنید که  $R(q)$  نامنفی است؛ و در نتیجه از نظر اقتصادی فقط پر بازه  $[0, 600]$  معنی دارد. برای درآمد حاشیه‌ای داریم

$$MR(q) = \frac{dR(q)}{dq} = 1500 - 5q,$$



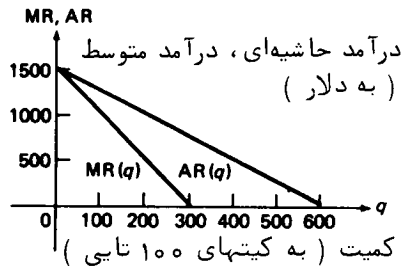
شکل ۵۶

و برای درآمد متوسط داریم

$$AR(q) = \frac{R(q)}{q} = 1500 - 2.5q.$$

این دو تابع در شکل ۵۷ رسم شده‌اند. توجه کنید که منحنی درآمد متوسط (خطی مستقیم) با منحنی  $(۷)$  یکی است. این بدان خاطر است که  $R(q) = pq$  با  $R(q)/q = p$  معادل است. منحنی درآمد حاشیه‌ای خط مستقیمی است که شیبش دو برابر قرینه‌اش منحنی درآمد متوسط بوده و همان نقطه اشتراک  $(0, 1500)$  را با محور قائم دارد. با کامل کردن مربع در (۸) معلوم می‌شود که

$$R(q) = -2.5(q - 300)^2 + 225,000,$$



شکل ۵۷

که از آن فوراً می‌بینیم که ماکزیمم  $R(q)$  برپازه  $[0, 600]$  در نقطه  $q = 300$  صورت می‌گیرد (ر.ک. شکل ۵۶). درآمد کل ماکزیمم نظیر عبارت است از  $R(300) = \$225,000$  و با فروش 300 کیت "سگ و گربه" به بهای  $1500 - 2.5(300) = \$750$  بر کیت ( $\$7.50$  بر بازی) به دست می‌آید.

حال برای ادامهء تحلیل آغاز شده در مثالهای ۱ تا ۳ گام اصلی را برداشته و فرض می‌کنیم کمپانی روزبارانی، مانند هر کسب و کار خوب، طوری عمل می‌کند که سود (کل) خود را ماکزیمم سازد. البته، سود کمپانی، یعنی  $P(q)$ ، تفاضل بین درآمد کل و هزینهء کل آن است؛ یعنی،

$$(۹) \quad P(q) = R(q) - C(q).$$

مثال ۴. سود ماکزیمی که کمپانی روزبارانی می‌تواند از فروش بازی "سگ و گربه" به دست آورد چقدر است و در چه سطح تولیدی صورت می‌گیرد؟

حل. با گذاردن (۳) و (۸) در (۹)، تابع زیر به دست می‌آید:

$$(۱۰) \quad \begin{aligned} P(q) &= (1500q - 2.5q^2) - (9720 + 500q - 1.5q^2 + 0.005q^3) \\ &= -9720 + 1000q - q^2 - 0.005q^3, \end{aligned}$$

که مشتقش مساوی است با

$$\frac{dP(q)}{dq} = 1000 - 2q - 0.015q^2.$$

اگر  $dP(q)/dq$  را مساوی صفر قرار دهیم، می‌بینیم که نقاط بحرانی  $P(q)$  در معادلهء درجهء دوم

$$0.015q^2 + 2q - 1000 = 0$$

صدق می‌کند. ریشه‌های این معادله عبارتند از

$$q = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4(0.015)(1000)}}{2(0.015)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 15}}{0.015}$$

(ر.ک. مسئله ۴۹، صفحه ۴۳). چون ریشه منفی معنی اقتصادی ندارد، آن را حذف کرده به دست می‌آوریم

$$q = \frac{-1 + 4}{0.015} = \frac{3}{0.015} = 200.$$

سود نظیر به این مقدار  $q$  عبارت است از

$$\begin{aligned} P(200) &= -9720 + 1000(200) - (200)^2 - 0.005(200)^3 \\ &= -9720 + 200,000 - 40,000 - 40,000 = \$110,280. \end{aligned}$$

این باید ماکزیم مطلق  $P(q)$  بر بازه  $[0, \infty)$  باشد، زیرا  $P(0) = -9720 < 0$  و وقتی  $q \rightarrow \infty$ ،  $P(q) \rightarrow -\infty$  (بیشتر توضیح دهید). لذا، سیاست سودسازی ماکزیم کمپانی تولید 200 کیت (20,000 بازی "سگ و گربه" است که هر کیت به بهای  $\$1000$   $p = 1500 - 2.5(200) = \$1000$  (بر بازی) فروخته شود. توجه کنید که خروجی که سود را ماکزیم می‌کند ( $q = 200$ ) با آنکه هزینه متوسط را مینیم می‌کند ( $q = 180$ ) یا آنکه درآمد کل را ماکزیم می‌کند ( $q = 300$ ) فرق دارد. در واقع، کمپانی در سطح تولیدی که هزینه متوسط را مینیم می‌کند سود کمتری می‌برد ( $\$108,720$ )، و در سطحی که درآمد کل را ماکزیم می‌سازد سود بسیار کمتری را خواهد برد ( $\$65,280$ ).

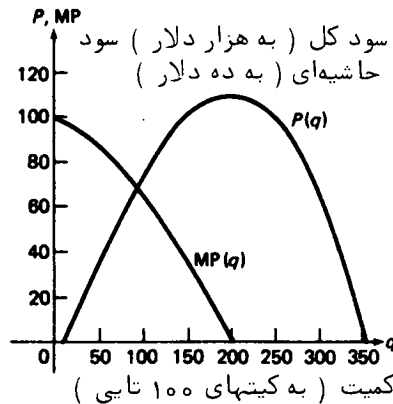
خلاصه کنیم، در سطحی که سود ماکزیم است ( $q = 200$ ) کمپانی روزی 200 کیت  $C(200) = \$89,720$  برای تولید 20,000 بازی "سگ و گربه" صرف می‌کند، که هر یک را به بهای  $\$10$  می‌فروشد تا درآمد کل  $\$200,000$  به دست آورد و سود جالب  $\$110,280$  را ببرد. "شمای سوددهی" در هر سطح تولید در نمودار تابع  $P(q)$  متجلی است که در شکل ۵۸ نمونه شده است.

سطح تولید  $q_0$  که سود کل را ماکزیم می‌کند یک نقطه بحرانی  $P(q)$  است؛ در نتیجه، سود حاشیه‌ای

$$(11) \quad MP(q) = \frac{dP(q)}{dq} = \frac{dR(q)}{dq} - \frac{dC(q)}{dq} = MR(q) - MC(q)$$

در  $q = q_0$  مساوی 0 است. این معقول است، زیرا اگر سود حاصل از فروش یک واحد بیشتر صفر باشد، تولید بیشتر کالا مفهومی نخواهد داشت. چون  $MP(q_0) = 0$ ، از (11) معلوم می‌شود که  $MR(q_0) = MC(q_0)$ . این نیز معقول است، زیرا اگر فروش یک واحد دیگر کالا

پولی بیشتر از هزینهء صرف شده برای آن به ما ندهد، امکان سود بیشتر وجود نخواهد داشت! با اینحال، تنها شرط  $MR(q_0) = MC(q_0)$  نمی‌تواند تضمین کند که تولید  $q_0$  سود را ماکزیمم سازد (ر.ک. مسئله ۱۹).



شکل ۵۸

مثال ۵. برای سود کل (۱۰) سود حاشیه‌ای زیر را داریم:

$$MP(q) = 1000 - 2q - 0.015q^2,$$

که قبلاً در طول حل مثال ۴ محاسبه شد. شکل ۵۸ نمودار این تابع را همراه با تابع سود کلی  $P(q)$  که مشتق آن است نشان می‌دهد. از شکل واضح است که ماکزیمم  $P(q)$  در  $q = 200$  است؛ و در نتیجه،  $MP(200) = 0$ .

مفهوم الاستیسیته. در خاتمه، مفهوم الاستیسیته را معرفی می‌کنیم که در تجارت و اقتصاد دارای اهمیت است. البته، منظور از مشتق تابع  $y = f(x)$  نسبت به  $x$  یعنی کمیت

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{تغییر در } y}{\text{تغییر در } x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

فرض کنید تغییرات  $\Delta x$  و  $\Delta y$  را با تغییرات نسبی  $\Delta x/x$  و  $\Delta y/y$  عوض کرده باشیم. در این صورت، کمیت مشابه زیر به دست می‌آید:

$$e_{yx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{تغییر نسبی در } y}{\text{تغییر نسبی در } x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx},$$

به نام الاستیسیتهء تابع  $y = f(x)$  در نقطهء  $x$ . الاستیسیته، به عنوان سنحشی از "تغییر

$y$  ناشی از تغییر  $x$ ، دارای این ویژگی است که از واحدهای سنجش  $x$  و  $y$  مستقل است. در واقع، در تشکیل نسبت‌های  $\Delta x/x$  و  $\Delta y/y$  واحدها حذف شده و بدین وسیله الاستیسیته را (برخلاف خود مشتق) کمیتی "بدون بعد" می‌سازد. این در بعضی از مسائل تجارت که در آنها مثلاً " $y$  مقدار یک کالای مورد تقاضا به بهای  $x$  است بسیار مناسب می‌باشد. در این صورت، تغییر واحدهای سنجش  $x$  مثلاً "از دلار به پیروز، یا واحدهای سنجش  $y$  از یکی به دیگری، مقدار الاستیسیته  $e_{yx}$  را بلا تغییر می‌گذارد.

فرض کنیم تقاضا برای کالای تولید شده توسط یک شرکت انحصارگرا با تابع  $q = q(p)$  توصیف شود، که در آن  $q$  کمیت مورد تقاضا به بهای  $p$  است. مثلاً، "طبق فرمول (۷)، تقاضا برای بازی "سگ و گربه" تولید شده به وسیله کمپانی روزبارانی (مثالهای ۱ تا ۵) تابع خطی  $q = 600 - 0.4p$  می‌باشد. در این صورت، کمیت

$$(13) \quad e_D = -\frac{p}{q} \frac{dq}{dp}$$

الاستیسیته تقاضا به بهای  $p$  نام دارد. علامت منها در (۱۳) نباید شما را نگران کند. تنها هدف آن مثبت ساختن الاستیسیته تقاضاست تا با رسم اقتصادی سازگار بوده و این امر را پیش‌بینی کند که یک منحنی تقاضا دارای شیب منفی می‌باشد (بهای بالاتر، تقاضا کمتر). گوییم تقاضا الاستیک است اگر  $e_D > 1$  و غیر الاستیک است اگر  $e_D < 1$ .

مثال ۶. فرض کنیم تابع تقاضا مثل مثال ۳ عبارت باشد از  $q = 600 - 0.4p$ .  $e_D$  را پیدا نمایید. تقاضا در چه بهایی الاستیک است؟ غیرالاستیک است؟

حل. با استفاده از (۱۳)، الاستیسیته تقاضا را حساب می‌کنیم، خواهیم داشت

$$e_D = -\frac{p}{q} \frac{dq}{dp} = \frac{0.4p}{600 - 0.4p} = \frac{p}{1500 - p}.$$

لذا،  $e_D > 1$  و تقاضا الاستیک است اگر  $p > 750$ ، حال آنکه  $e_D < 1$  و تقاضا غیرالاستیک است اگر  $p < 750$ . (شرایط  $p < 1500$  و  $p \geq 0$  نیز باید برقرار باشند). ماقبل "در مثال ۳ دیدیم که درآمد کل به ازای  $p = 750$  ماکزیمم می‌شود. لذا، می‌بینیم که برای ماکزیمم کردن درآمد، اگر تقاضا الاستیک باشد بها باید کم و اگر غیرالاستیک باشد بها باید زیاد

۱. یک شرکت در میدان رقابت نمی‌تواند تقاضا را با تعدیل بها اداره کند، بلکه باید محصول خود را به بهای تقریباً "متداول وارد بازار نماید.



شود. به علاوه، درآمد اگر بها  $p = 750$  باشد ماکزیمم است که به ازای آن الاستیسیته درست مساوی 1 می باشد. این نتایج برای هر تابع تقاضای نزولی، خطی یا غیرخطی، برقرارند (ر.ک. مسئله ۶۲۳).

معنی اقتصادی همه اینها روشن است: هرگاه تقاضا در بهای داده شده‌ای الاستیک باشد، آنگاه کاهش بها به افزایش نسبتاً "زیادی در فروش منجر می شود؛ در نتیجه، درآمد کل که حاصل ضرب بها و کمیت است، افزایش می یابد. از آن سو، هرگاه تقاضا غیرالاستیک باشد، افزایش بها به کاهش نسبتاً "کمی در فروش منجر می شود؛ در نتیجه، درآمد باز افزایش خواهد یافت.

## مسائل

۱. فرض کنید تابع هزینه خطی باشد؛ در نتیجه  $C(q) = a + bq$ ، که در آن  $a$  و  $b$  ثابتهای مثبتی هستند. هزینه‌های حاشیه‌ای و متوسط نظیر را بیابید. آیا هزینه متوسط مینیمم وجود دارد؟

۲. آیا تابع هزینه  $C(q) = 1000 + 100q - 0.5q^2$  به ازای  $q = 50$ ، به ازای  $q = 150$  معتبر است؟ جواب خود را توضیح دهید.

۳. فرض کنید هزینه کل شرکتی که  $q$  واحد از کالایی را تولید می کند  $C(q) = 490 + 20q + 0.1q^2$  دلار باشد. هزینه‌های حاشیه‌ای و متوسط نظیر را بیابید. هزینه متوسط مینیمم و سطح تولیدی که در آن صورت می گیرد را بیابید. تحقیق کنید که در این سطح تولید  $MC(q) = AC(q)$ . نشان دهید که در نوشتن  $MC(q) = C(q) - C(q+1)$  به ازای هر سطح تولید 10٪ خطا صورت می گیرد. چرا این خطا بی اهمیت است؟

۴. فرض کنید هزینه کل یک شرکت در تولید  $q$  واحد از کالایی  $C(q) = 3380 + 18q - 0.001q^3 + 0.06q^2$  دلار باشد. هزینه‌های حاشیه‌ای و متوسط نظیر را بیابید. هزینه متوسط مینیمم و سطح تولیدی که در آن صورت می گیرد را بیابید. هزینه حاشیه‌ای را با هزینه تولید واحد بعدی در این سطح مقایسه نمایید. راهنمایی. توجه کنید که

$$q^3 - 30q^2 - 1,690,000 = (q - 130)(q^2 + 100q + 13,000).$$

۵. هزینه متغیر  $VC(q)$  مساوی هزینه کل  $C(q)$  منهای هزینه ثابت (سرانه) تعریف می شود. برای تابع هزینه مسئله قبل هزینه متغیر متوسط را بیابید. هزینه متغیر متوسط مینیمم و سطح تولیدی را که در آن صورت می گیرد بیابید. تحقیق کنید که در

- این سطح تولید  $MC(q) = AVC(q)$  . چرا این باید در حالت کلی درست باشد ؟
۶. برای تابع هزینه<sup>۲</sup> (۳) کمپانی روزیاری هزینه<sup>۲</sup> متغیر متوسط مینیمم و سطح تولیدی را که در آن صورت می گیرد بیابید .
۷. فرض کنید شرکتی دارای تابع هزینه<sup>۲</sup> کل مکعبی  $C(q) = a + bq + cq^2 + dq^3$  باشد ، که در آن  $a, b, c, d$  ثابت اند ، و نیز وقتی مثل مثال ۱ تولید افزایش یابد ، هزینه<sup>۲</sup> حاشیه ای ابتدا کاهش و سپس افزایش می یابد . نشان دهید که  $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0, c^2 < 3bd$  . نشان دهید که  $C(q)$  در  $q_0 = -c/3d$  نقطه<sup>۲</sup> عطف دارد .
۸. اگر خطی از مبدا<sup>۲</sup> به منحنی هزینه<sup>۲</sup> کل مماس کنیم ، طول نقطه<sup>۲</sup> تماس سطح تولیدی است که هزینه<sup>۲</sup> متوسط را مینیمم می کند . چرا ؟
۹. در مثال ۳ ، با بیان درآمد به صورت تابعی از بها ( به جای کمیت ) ، بها و کمیتی که درآمد کل را مینیمم می کنند بیابید .
۱۰. یک شرکت با سرانه<sup>۲</sup>  $C_0$  ،  $q$  واحد از کالایی را تولید می کند که به بهای ثابت واحدی  $p$  دلار می فروشد . فرض کنید  $k$  دلار صرف تولید هر واحد اضافی شود که  $k < p$  . شرکت در چه سطح تولیدی مساوی می کند ، و تعبیر نموداری این نقطه<sup>۲</sup> تساوی چیست ؟
۱۱. فرض کنید تولید یک نوار کاست که ( بدون واسطه )  $\$6.00$  فروش می رود  $\$3.50$  هزینه بر دارد . اگر سرانه<sup>۲</sup>  $\$10,000$  باشد ، چند نوار باید فروش رود تا مساوی کرده باشیم ؟
۱۲. بلیت قایق تفریحی شبانه روی رودخانه که توسط شرکتی اداره می شود  $\$12.50$  است ، ولی شرکت برای جلب مسافر بیشتر به ازای هر مسافر بیش از ۱۰۰ تا به هریک  $\$5$  پس می دهد . قایق گنجایش ۲۰۰ مسافر را دارد . ماکزیمم درآمدی که شرکت انتظار دارد چقدر است ؟ اگر تعداد متوسط افرادی که با بلیت کامل سوار قایق می شوند از عدد معینی تجاوز کند ، شرکت باید تخفیف خود را حذف کند . این عدد چقدر است ؟
۱۳. یک دوره گرد درمی یابد که می تواند ۲۰۰ نوشابه را روزانه به بهای هر یک  $\$0.50$  بفروشد ، ولی به ازای هر  $\$5$  ی که از بهای هر نوشابه بکاهد می تواند ۵۰ تا بیشتر بفروشد . چه بهایی درآمد کل وی را ماکزیمم می کند ؟ فرض کنید تولیدکننده هر نوشابه را به  $\$20$  به وی بفروشد . چه بهایی سود کل وی را ماکزیمم می سازد ؟ اگر به جای ماکزیمم سازی سود به اشتباه درآمدش را ماکزیمم کند ، چقدر پول از دست می دهد ؟
- بهای ماکزیمم ساز درآمد کل را در صورتی بیابید که تابع تقاضا به صورت زیر باشد .

$$q = 1600 - 5p \quad . ۱۵$$

$$q = 1200 - 1.5p \quad . ۱۴$$

$$q = \sqrt{1800 - p^2} \quad . ۱۷$$

$$q = 675 - p^2 \quad . ۱۶$$

$$q = 2500 - p^{3/2} \quad . ۱۸$$

- در هر حالت بازه تقاضای الاستیک ( $e_D > 1$ ) و بازه تقاضای غیرالاستیک ( $e_D < 1$ ) را بیابید .
۱۹. چرا شرط  $MR(q_0) = MC(q_0)$  نمی‌تواند تضمین کند که سطح تولید  $q_0$  سود را ماکزیم می‌کند؟ نشان دهید که اگر در این سطح درآمد حاشیه‌ای آهسته‌تر از هزینه حاشیه‌ای افزایش یابد،  $q_0$  سود را ماکزیم خواهد کرد .
۲۰. نشان دهید که تعریف

$$e_{yx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{درصد تغییر در } y}{\text{درصد تغییر در } x}$$

- الاستیسیتۀ تابع  $y = f(x)$  با (۱۲) معادل است .
۲۱. نشان دهید هرگاه  $y = f(x)$  دارای الاستیسیتۀ  $e_{yx}$  باشد، آنگاه  $xf(x)$  دارای الاستیسیتۀ  $1 + e_{yx}$  است .
۲۲. تحقیق کنید که  $e_{zx} = e_{zy}e_{yx}$  ( قانون زنجیره‌ای برای الاستیسیتۀ ) .
۲۳. منحنی تقاضای  $q = q(p)$  داده شده است، که در آن  $q(p)$  یک تابع نزولی است . نشان دهید که درآمد کل  $R(p) = pq$  در بهایی که تقاضای  $e_D$  مساوی ۱ است ماکزیم می‌شود . نشان دهید که اگر تقاضا در بهای معلومی الاستیک باشد ( $e_D > 1$ )، کاهش بها درآمد را افزایش می‌دهد، حال آنکه اگر تقاضا غیرالاستیک باشد ( $e_D < 1$ )، افزایش بها درآمد را افزایش خواهد داد .
- اگر شرایط به صورت زیر تعدیل شوند، سود ماکزیم کمپانی روزبارانی مطرح شده در مثالهای ۱ تا ۶ حاصل از فروش بازی "سگ و گربه" و سطح تولیدی که در آن صورت می‌گیرد را بیابید .
۲۴. تابع هزینه به جای (۳) عبارت است از  $C(q) = 9720 + 500q$
۲۵. تابع هزینه به جای (۳) عبارت است از  $C(q) = 9720 + 500q + 1.5q^2$
۲۶. تابع تقاضا به جای (۷) عبارت است از  $q = 775 - 0.4p$
۲۷. تابع تقاضا به جای (۷) عبارت است از  $q = 900 - p$
۲۸. رقابت کمپانی را وادار به فروش بازیها به بهای هر یک \$6.50 می‌کند .
۲۹. یک شرکت در هر هفته  $q$  گالن مایع خاص به بهای  $C(q) = 2000 + 5q + 0.001q^2$  دلار تولید و به بهای گالنی \$15 می‌فروشد . دولت می‌خواهد بر هر گالن مایع  $r$  دلار مالیات ببندد، ضمن اینکه می‌داند شرکت این مالیات را به هزینه‌هایش افزوده و تولید را طوری تعدیل می‌کند که پس از مالیات بندی سود ماکزیم بدهد . بیشترین مالیات بر درآمد  $T = rq$  دولت چقدر است، و در چه میزان مالیاتی  $r$  صورت می‌گیرد؟ ماکزیم سود شرکت پس از مالیات بندی چقدر است و در چه سطح تولیدی صورت می‌گیرد؟
۳۰. در مسئله ۲۹ فرض کنید شرکت بتواند دولت را متقاعد کند که میزان مالیات بر درآمد

زیاد است، و دولت بپذیرد که میزان مالیات را گالنی \$1.50 کاهش دهد. نشان دهید که این مالیات بر درآمد را به اندازه 10% کاهش می‌دهد ولی در عین حال سود شرکت را دوبرابر می‌کند.

۳۱. در مسئله ۲۹ فرض کنید شرکت به دولت بقبولاند که مایع مربوطه را بدون مالیات تولید کند و در عوض سالانه \$750,000 جهت پروانه کار بپردازد. نشان دهید که این درآمد سالانه دولت را \$100,000 افزایش می‌دهد، ولی در عین حال سود شرکت را بیش از دوبرابر می‌کند.

#### اصطلاحات و مباحث کلیدی

قضیه مقدار میانگین و قضیه رل

قضیه مقدار میانگین کشی

ماکزیممها و منیممهای یک تابع

اکسترممهای موضعی در مقابل اکسترممهای مطلق

آزمون برای اکسترممهای مطلق

شرط لازم برای اکسترم موضعی

نقاط بحرانی

توابع یکنوا و آزمون یکنوایی

آزمونهای مشتق اول و دوم برای اکسترم موضعی

توابع مقعر و آزمون تقعر

نقاط عطف

آزمونهای دوم و سوم برای یک نقطه عطف

تکنیکهای رسم منحنی

حدود نامتناهی و حدود در بی‌نهایت

صور مبهم  $0/0$ ،  $0 \cdot \infty$ ،  $\infty/\infty$ ، و  $\infty - \infty$

مجانبهای افقی، قائم، و مایل

مشتقات نامتناهی و مماسهای قائم

قاعده هوییتال و صور مختلف آن

مسائل بهینه‌سازی

حاشیه و الاستیسیت در تجارت و اقتصاد

## مسائل تکمیلی

۱. نشان دهید هرگاه تابع  $f$  بر بازه  $I$  شامل نقاط  $a$  و  $a + \Delta x$  مشتقپذیر باشد، آنگاه نمودار  $f$  در  $a$  را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\Delta f(a) = f(a + \Delta x) - f(a) = f'(a + t \Delta x) \Delta x, \quad (\text{یک})$$

که در آن  $0 < t < 1$ .

نقطه  $t$  صادق در فرمول (یک) را در صورتی بیابید که

$$f(x) = x^2 + x + 1, a = 2, \Delta x = 0.1 \quad ۰.۲$$

$$f(x) = 1/x, a = 1, \Delta x = -0.1 \quad ۰.۳$$

$$f(x) = \sqrt{x}, a = 9, \Delta x = -5 \quad ۰.۴$$

$$f(x) = \sin x, a = 0, \Delta x = 1 \quad ۰.۵$$

۰.۶ به فرض آنکه

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x^2, & x \leq 1 \\ \frac{2}{x}, & x > 1 \end{cases}$$

دو نقطه  $t$  صادق در فرمول (یک) را در صورتی بیابید که  $a = 0, \Delta x = 2$ .

۰.۷ نشان دهید که قضیه ۴، صفحه ۲۶۱ (قضیه مقدار میانگین کشی)، که می‌گوید

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (a < c < b), \quad (\text{دو})$$

در صورت تعویض شرط ناصفر بودن  $g'$  در هر نقطه  $(a, b)$  با شرط صفر نبودن همزمان

$f'$  و  $g'$  در هر نقطه  $(a, b)$  و  $g(a) \neq g(b)$  برقرار می‌ماند.

نقطه  $c$  صادق در فرمول (دو) را در صورتی بیابید که

$$f(x) = 2x^3, g(x) = x^2 + 2x, a = -2, b = 2 \quad ۰.۸$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2, g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x, a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2} \quad ۰.۹$$

$$f(x) = \cos x, g(x) = \sin x, a = 0, b = 3\pi/2 \quad ۰.۱۰$$

توجه کنید که مسئله ۷ در اینجا نقش دارد، زیرا در هر حالت  $g'$  در نقطه‌ای از  $(a, b)$  صفر می‌باشد.

۱۱. قضیه تعمیم یافته رل را ثابت کنید: فرض کنید  $f$  بر بازه بسته  $[a, b]$  پیوسته بوده،

و  $f$  در هر نقطه از بازه  $(a, b)$  مشتق  $n$  مرتبه  $f^{(n)}(x)$  داشته باشد. همچنین،  $n - 1$

نقطه مانند  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  وجود داشته باشند که  $a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$

و  $f(a) = f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_{n-1}) = f(b)$  در این صورت، نقطه‌ای مانند  $c$  در

$(a, b)$  هست به طوری که  $f^{(n)}(c) = 0$ .

نقطه  $c$  صادق در قضیه تعمیم یافته رل را در صورتی بیابید که

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 14, n = 2, a = 2, x_1 = 3, b = 4. \quad ۱۲$$

$$f(x) = \sin x + \cos x, n = 3, a = -5\pi/4, x_1 = -\pi/4, x_2 = 3\pi/4, b = 7\pi/4. \quad ۱۳$$

$$f(x) = x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x - 5, n = 4, a = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, \quad ۱۴$$

$$h = 4$$

$$f(x) = x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 29, n = 5, a = -3, x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = 2, \quad ۱۵$$

$$b = 3$$

۱۶. اکسترممهای مطلق تابع مکعبی  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6$  بر بازه  $[-1, 1]$  را بیابید.  
همین کار را بر  $[0, 2]$  و  $[1, 3]$  نیز انجام دهید.  
۱۷. تابع

$$f(x) = \frac{ax + b}{(x - 1)(x - 4)}$$

به ازای چه ثابتهای  $a$  و  $b$  ماکزیم موضعی اکیدی مساوی  $-1$  در  $x = 2$  دارد؟

۱۸. با استفاده از اکسترممها نشان دهید که اگر  $|x| \leq 2$ ،  $|3x - x^3| \leq 2$ .

۱۹. فرض کنید  $f(x) = x^r + (1 - x)^r$ . با استفاده از اکسترممها نشان دهید که به ازای

$$0 < r < 1, 1 \leq f(x) \leq 2^{1-r}, \text{ حال آنکه به ازای } r \geq 1, 2^{1-r} \leq f(x) \leq 1.$$

۲۰. اکسترممهای موضعی تابع  $f(x) = x^m(1 - x)^n$  را در صورتی بیابید که  $m$  و  $n$  اعداد صحیح مثبت دلخواهی باشند.

۲۱. مینیمم تابع  $f(x) = \max\{2|x|, |1 + x|\}$  چقدر است؟

۲۲. تابع  $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$  در بازه  $[0, 2\pi]$  شش نقطه عطف دارد. آنها را پیدا کنید.

تمام اکسترممهای موضعی و نقاط عطف تابع داده شده را بیابید. تابع بر چه بازه‌هایی صعودی است؟ نزولی است؟ به بالا مقعر است؟ به پایین مقعر است؟ اکسترممهای فراگیر، مجانبها، مماسهای قائم و نقاط بازگشت را بیابید، و تابع را رسم نمایید.

$$f(x) = 3x(x - 2)^{2/3}. \quad ۲۴$$

$$f(x) = 2(x - 3)x^{1/2}. \quad ۲۳$$

$$f(x) = 4(x - 1)x^{4/3}. \quad ۲۶$$

$$f(x) = (1 - x)x^{2/3}. \quad ۲۵$$

$$f(x) = x^{1/3}(1 - x)^{2/3}. \quad ۲۸$$

$$f(x) = x^{1/2}(2 - x)^{3/2}. \quad ۲۷$$

حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5)}{(5x - 1)^5}. \quad ۲۹$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}} \cdot ۳۰$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{4 \sin^2 (x/2)} \right) \cdot ۳۱$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} + \sqrt{x} - \sqrt{x}) \cdot ۳۲$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x} - \sqrt{x}) \cdot ۳۳$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x} - \sqrt{x} + \sqrt{x}) \cdot ۳۴$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+100}} \cdot ۳۵$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}) \cdot ۳۶$$

حد داده شده را در صورتی حساب کنید که  $m$  و  $n$  اعداد صحیح مثبت دلخواهی باشند

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} \cdot ۳۷$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1} \cdot ۳۸$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2} \cdot ۳۹$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} \cdot ۴۰$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right) \cdot ۴۱$$

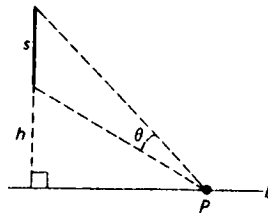
$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^m + 1}{x^n + 1} \cdot ۴۲$$

راهنمایی. از قاعده هوییتال هر جا شد استفاده کنید.

۴۳. مساحت ماکزیمم یک مستطیل به محیط  $p$  را بیابید.

۴۴. مساحت ماکزیمم یک مثلث متساوی الساقین به طول ساق  $s$  را بیابید.
۴۵. مخروط مستدیر قائم با بیشترین حجم و محاط شده در کره چه کسری از حجم کره را دربر دارد؟
۴۶. نتیجه  $n$  سنجش از کمیت مجهول  $x$  عبارت است از  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . چه مقداری از  $x$  تخمین کمترین مربعات  $x$  است، به این معنی که عبارت  $(x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \dots + (x - x_n)^2$  را مینیمم می سازد؟
- چه کسری از ارتفاع به شعاع هزینه ساخت یک قوطی استوانه‌ای با حجم معلوم را مینیمم می کند مشروط بر اینکه قوطی از ماده زیر ساخته شده باشد:
۴۷. سه برابر از ماده به کار رفته در سر و ته قوطی گرانتر باشد؟
۴۸. نصف ماده به کار رفته در سر و ته قوطی قیمت داشته باشد؟
- مساحت ماکزیمم مستطیل محاط شده در اشکال زیر را بیابید:
۴۹. یک مثلث قائم الزاویه به طول اضلاع  $a$  و  $b$  که دو ضلع مستطیل بر اضلاع مثلث واقعند.
۵۰. ناحیه محدود به محور  $x$  و سهمی  $y = 3 - x^2$  که یک ضلع مستطیل بر محور  $x$  قرار دارد.
- فرض کنید یک بسته را فقط وقتی می توان با پست فرستاد که مجموع طول و دور ( محیط یک مقطع عرضی ) آن از ۹۶ اینچ تجاوز نکند. حجم بزرگترین بسته قابل پستی را بیابید که مقطع عرضی اش به یکی از صور زیر باشد:
۵۱. یک مربع
۵۲. یک مستطیل که نسبت اضلاعش ۳:۲ است
۵۳. یک شش ضلعی منتظم
۵۴. یک دایره
۵۵. در مسائل ۵۱ تا ۵۴ طول بزرگترین بسته قابل پست در هر حالت ( و در نتیجه، دور آن ) یکی است. این امر را توضیح دهید.
۵۶. نقطه  $P$  داخل یک زاویه حاده داده شده است. فرض کنید  $L$  خط مستقیمی ماربر  $P$  باشد که زاویه را در مثلثی با کمترین مساحت قطع می کند. نشان دهید  $P$  نقطه میانی قسمتی از  $L$  است که داخل زاویه قرار دارد. نشان دهید که این خاصیت نقطه  $P$  در مسئله ۳۵، صفحه ۳۳۹، را نیز مشخص می نماید.
۵۷. پای یک پاره خط به طول  $s$  در فاصله  $h$  تا خط مستقیم  $L$  قرار دارد که بر راستای پاره خط عمود است (ر.ک. شکل ۵۹). به ازای چه نقطه  $P$  از خط، زاویه  $\theta$  روبرو

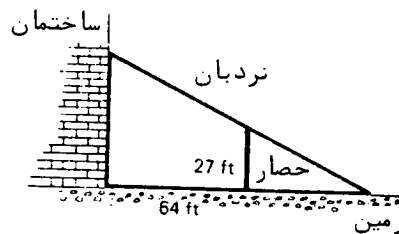




شکل ۵۹

به پاره خط در  $P$  ماکزیمم است؟

۵۸. با استفاده از مسئله قبل، جواب دیگری به مسئله ۷۴، صفحه ۲۵۲، بدهید.
۵۹. یک حصار ایمنی به موازات ساختمان بلند اداره‌ای کشیده شده است. فرض کنید حصار ۲۷ ft ارتفاع و ۶۴ ft از ساختمان فاصله داشته باشد (ر.ک. شکل ۶۰). مردان آتش‌نشانی می‌خواهند با نردبانی که پایش روی حصار قرار دارد خود را به ساختمان



شکل ۶۰

برسانند. کوتاهترین نردبان چقدر باید باشد که آنها را به ساختمان برساند؟

۶۰. اگر  $C = C(q)$  تابع هزینه کل شرکتی باشد، کمیت

$$e_c = \frac{q}{C} \frac{dC}{dq}$$

الاستیسیتۀ هزینه به ازای تولید  $q$  نام دارد. نشان دهید هرگاه در سطح تولید معلومی  $e_c > 1$ ، آنگاه هزینه حاشیه‌ای (MC) از هزینه متوسط (AC) بیشتر بوده و وقتی تولید افزایش یابد، AC افزایش می‌یابد، حال آنکه اگر  $e_c < 1$ ، MC از AC کمتر است و AC با افزایش تولید کاهش خواهد یافت.

## انتگرالها<sup>۴</sup>

وقتی به ایده<sup>۴</sup> شهودی میزان تغییر معنی دقیق می‌دادیم به مفهوم مشتق تابع رسیدیم، و دو فصل اخیر به حساب دیفرانسیل، یعنی بررسی مشتقات و کاربرد آنها، اختصاص داشتند. مفهوم اساسی دیگر حساب دیفرانسیل و انتگرال **انتگرال** یک تابع است که در تلاش برای معنی دقیق دادن به ایده<sup>۴</sup> مساحت یک منحنی با یک یا چند لبه<sup>۴</sup> خمیده به وجود می‌آید. مطالعه<sup>۴</sup> انتگرالها و کاربرد آنها، که اینک بدان می‌پردازیم، حساب **انتگرال** نام دارد. نتیجه<sup>۴</sup> کلیدی این فصل قضیه<sup>۴</sup> اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال است (ر.ک. بخش ۵.۴)، که رابطه<sup>۴</sup> عمیق حساب دیفرانسیل را با حساب انتگرال نشان می‌دهد. در واقع، معلوم می‌شود که **انتگرال** تابع  $f$  را می‌توان از دو مقدار تابع دیگر  $F$  که  $f$  مشتق آن است به دست آورد. در بخشهای ۶.۴ و ۷.۴ مسائل فیزیکی مستلزم حرکت در امتداد خطی مستقیم را با استفاده از انتگرالها حل خواهیم کرد.

### ۱.۴ نماد سیگما

مطالعه<sup>۴</sup> انتگرالگیری با معرفی نماد فشرده‌ای برای مجموعه‌ها خیلی ساده می‌شود. فرض کنیم  $f$  تابعی باشد که قلمروش شامل اعداد صحیح مثبت است. در این صورت،

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n f(i)$$

اختصاری است برای

$$(2) \quad f(1) + f(2) + \cdots + f(n).$$

عملی که ما را از  $f$  به مجموع (۱) یا (۲) می‌رساند عمل جمع‌بندی نام دارد، و علامت  $\sum$  (سیگمای بزرگ یونانی) علامت جمع‌بندی نامیده می‌شود. اعداد ۱ و  $n$  به ترتیب حدود پایینی و بالایی جمع‌بندی نام دارند. در اینجا "حد" معنی محاوره‌ای "مرز" را دارد

تا معنی تکنیکی که تا آن حد فرا رفته است. سه نقطه در (۲) یعنی "و غیره تا"، اما اگر  $n = 1, 2, 3$ ، صرفاً "داریم"

$$\sum_{i=1}^1 f(i) = f(1), \quad \sum_{i=1}^2 f(i) = f(1) + f(2), \quad \sum_{i=1}^3 f(i) = f(1) + f(2) + f(3).$$

علامت  $i$  آمده در (۱) اندیس جمع‌بندی نام دارد، و یک "اندیس ظاهری" می‌باشد، بدین معنی که هر علامت دیگر به همین خوبی می‌باشد. لذا،

$$\sum_{i=1}^n f(i) = \sum_{j=1}^n f(j) = \sum_{k=1}^n f(k) = \sum_{p=1}^n f(p),$$

و غیره.

مثال ۱.۱.  $\sum_{i=1}^5 \frac{1}{i}$  را حساب کنید.

حل. با بسط مجموع، یعنی نوشتن آن به‌طور کامل، خواهیم داشت

$$\sum_{i=1}^5 \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{137}{60}.$$

گاهی یک مجموع با "جمله صفرم" شروع می‌شود. مثلاً،

$$\sum_{i=0}^n f(i)$$

اختصاری است برای

$$f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$$

(در اینجا فرض است که قلمرو  $f$  علاوه بر اعداد صحیح مثبت شامل ۰ است). به همین نحو، اگر  $m$  از  $n$  کمتر باشد،

$$(۳) \quad \sum_{i=m}^n f(i)$$

یعنی

$$f(m) + f(m+1) + \cdots + f(n),$$

که در آن تعداد کل جملات مساوی است با  $n - m + 1$ . اگر  $m = n$ ، مجموع (۳) به تنها جمله  $f(m)$  تحویل می‌شود، و اگر  $m > n$  تعریف نشده است.

مثال ۲.  $\sum_{i=0}^5 2^i$  را حساب کنید.

حل. با بسط دادن مجموع خواهیم داشت

$$\sum_{i=0}^5 2^i = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63.$$

مثال ۳.  $\sum_{n=3}^6 n!$  را حساب کنید.

حل. مثل صفحه ۲۲۵، علامت  $n!$  (فاکتوریل) عبارت است از حاصل ضرب  $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$  یعنی  $n$  عدد صحیح مثبت اولیه. بنابراین،

$$\sum_{n=3}^6 n! = 3! + 4! + 5! + 6! = 6 + 24 + 120 + 720 = 870.$$

فرض کنیم

$$(3') \quad \sum_{i=m}^n g(i)$$

مجموع دیگری به شکل (۳)، شامل تابع دیگر  $g$ ، باشد. به آسانی معلوم می شود که

$$(4) \quad \sum_{i=m}^n [af(i) + bg(i)] = a \sum_{i=m}^n f(i) + b \sum_{i=m}^n g(i),$$

که در آن  $a$  و  $b$  ثابتهای دلخواهی هستند. اثبات مشروح (۴) را به عنوان تمرین می گذاریم (مجموعها را بسط، ضربها را انجام، و جملات را تجدید آرایش دهید).

مثال ۴. اگر  $S = \sum_{i=1}^7 3^i$  و  $T = \sum_{i=1}^7 (6 - 3^{i+1})$  را حساب کنید.

حل. به کمک فرمول (۴) که از رانست به چپ خوانده می شود، خواهیم داشت

$$S + \frac{1}{3} T = \sum_{i=1}^7 \left[ 3^i + \frac{1}{3} (6 - 3^{i+1}) \right] = \sum_{i=1}^7 [3^i + (2 - 3^i)] = \sum_{i=1}^7 2 = 14.$$

آخرین مرحله از این نتیجه می شود که هرگاه  $c$  ثابت باشد، آنگاه

$$\sum_{i=1}^n c = \underbrace{c + c + \dots + c}_{n \text{ جمله}} = nc.$$

قضیه دو جمله ای. آخرین مثال ما نشان می دهد که استفاده از نماد سیگما چقدر کار را ساده می کند.

مثال ۵. قضیه مشهوری از جبر به نام قضیه دوجمله‌ای می‌گوید هرگاه  $n$  عدد صحیح مثبتی باشد، آنگاه توان  $n$  م  $a + b$  از بسط زیر برخوردار است:

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n \\ (5) \quad &= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + nab^{n-1} + b^n. \end{aligned}$$

در اینجا اعداد  $\binom{n}{k}$ ، به نام ضرایب دوجمله‌ای، با

$$(6) \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (k = 1, \dots, n-1)$$

تعریف می‌شوند. با استفاده از نماد سیگما می‌توان (۵) را به صورت بسیار فشرده

$$(5') \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

نوشت با این فرض که

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

این نظیر است به استفاده از فرمول (۶) به ازای  $k = 0, 1, \dots, n$  پس از تعریف  $0! = 1$ . قضیه دوجمله‌ای را می‌توان به کمک روشی به نام استقرای ریاضی ثابت کرد. جزئیات در مثال ۳ ضمیمه داده شده است (ر.ک. صفحه ۵۸۰ ض).

برای محاسبه ضرایب دوجمله‌ای، می‌بینیم که

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n,$$

و

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)(n-k)(n-k-1) \cdots 2 \cdot 1}{k!(n-k)(n-k-1) \cdots 2 \cdot 1} \\ &= \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}. \end{aligned}$$

لذا، مثلاً،

$$\binom{8}{3} = \binom{8}{5} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56,$$

$$\binom{100}{98} = \binom{100}{2} = \frac{100 \cdot 99}{2 \cdot 1} = 50 \cdot 99 = 4950.$$

مسائل

مجموع داده شده را حساب کنید .

$$\sum_{j=1}^6 2^{-j} \quad . ۲ ✓$$

$$\sum_{i=3}^7 i^2 \quad . ۷ ✓$$

$$\sum_{m=0}^8 (m^2 - 1) \quad . ۴ ✓$$

$$\sum_{k=0}^5 (-1)^k 3^k \quad . ۳ ✓$$

$$\sum_{i=0}^{10} (2i - 1) \quad . ۶ ✓$$

$$\sum_{n=2}^5 n^{n-1} \quad . ۵ ✓$$

$$\sum_{k=2}^7 \frac{k+1}{k-1} \quad . ۸ ✓$$

$$\sum_{j=0}^6 \frac{j-1}{j+2} \quad . ۷ ✓$$

$$\sum_{n=1}^9 \cos \frac{n\pi}{4} \quad . ۱۰$$

$$\sum_{m=0}^5 \sin \frac{m\pi}{3} \quad . ۹ ✓$$

۱۱. نشان دهید که

$$\sum_{i=m}^n [f(i+1) - f(i)] = f(n+1) - f(m).$$

هر مجموع شبیه این، که اغلب جملاتش یکدیگر را حذف می‌کنند، توی هم‌رو نام دارد.

با استفاده از مسئله قبل، مجموع داده شده را حساب کنید.

$$\sum_{j=2}^{15} \left( \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} \right) \quad . ۱۳ ✓$$

$$\sum_{i=0}^9 (2^{i+1} - 2^i) \quad . ۱۲ ✓$$

$$\sum_{k=1}^{35} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \quad . ۱۴ ✓$$

مجموع داده شده را با نماد سیگما بنویسید.

$$\sum_{i=1}^{11} (5i - 1)$$

$$2 + 5 + 8 + \dots + 32 \quad . ۱۵ ✓$$

$$5 - 9 + 13 - 17 + \dots + 45 \quad . ۱۶ ✓$$

$$3 + 2 + \frac{5}{3} + \frac{6}{4} + \frac{7}{5} + \frac{8}{6} + \frac{9}{7} + \frac{10}{8} \quad . ۱۷ ✓$$

$$\frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{5}{7} - \dots - \frac{51}{53} \quad . ۱۸ ✓$$

آیا فرمول داده شده درست است یا نادرست؟

$$\sum_{i=1}^{50} 1 = 49 \quad \checkmark$$

$$\sum_{n=3}^7 n = \sum_{m=4}^8 (m-1) \quad \checkmark$$

$$\sum_{j=1}^{11} (-1)^{j-1} = 1 \quad \checkmark$$

$$\sum_{k=1}^n (1+2k) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n k \quad \checkmark$$

ضریب دوجمله‌ای داده شده را حساب کنید.

$$\binom{19}{4} \cdot 25 \quad \checkmark$$

$$\binom{14}{5} \cdot 24 \quad \checkmark$$

$$\binom{12}{6} \cdot 23 \quad \checkmark$$

$$\binom{101}{3} \cdot 28$$

$$\binom{31}{29} \cdot 27 \quad \checkmark$$

$$\binom{20}{11} \cdot 26 \quad \checkmark$$

عبارات زیر را با استفاده از قضیه دوجمله‌ای بسط دهید.

$$(a+b)^6 \cdot 30 \quad \checkmark$$

$$(1+\sqrt{2})^5 \cdot 29 \quad \checkmark$$

$$(1+x)^8 - (1-x)^8 \cdot 32 \quad \checkmark$$

$$(a-b)^7 \cdot 31 \quad \checkmark$$

نشان دهید که

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n \quad \checkmark$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0 \quad \checkmark$$

۳۵. قاعده لایب‌نیتز

$$\frac{d^n}{dx^n} [f(x)g(x)] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$$

برای مشتق  $n$  حاصل ضرب دو تابع را با استفاده از قضیه دوجمله‌ای ثابت کنید

با استفاده از قاعده لایب‌نیتز کمیات زیر را حساب کنید.

$$36. \text{ مشتق هشتم } x^3 \cos x$$

$$37. \text{ مشتق دهم } x^4 \sin x$$

۳۸. اعداد  $a_0, a_1, \dots, a_n$  و  $b_0, b_1, \dots, b_n$  داده شده‌اند. نشان دهید که

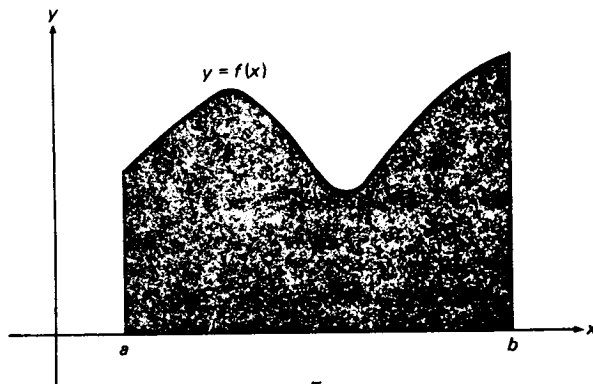
$$\sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1})b_{i-1} = (a_n b_n - a_0 b_0) - \sum_{i=1}^n a_i (b_i - b_{i-1}).$$

این نتیجه به فرمول جمع‌بندی جزء به جزء معروف است.

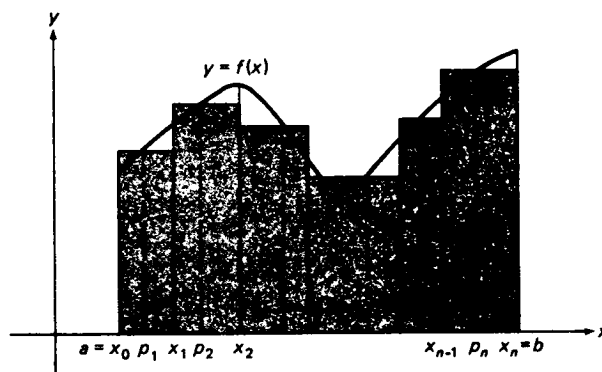
## ۲.۴ مساحت تحت یک منحنی و انتگرال معین

نوع حدی که به مفهوم انتگرال معین منجر می شود گهگاه در مسائل مربوط به جمع بندی تعداد بسیار زیادی از جملات کوچک ظاهر می شود. نمونه تمام این گونه مسائل یافتن مساحت تحت یک منحنی است که اینک بدان می پردازیم.

فرض کنیم تابع  $f$  بر بازه بسته کراندار  $[a, b]$  پیوسته و نامنفی باشد. منظور از مساحت تحت منحنی  $y = f(x)$  از  $x = a$  تا  $x = b$  یعنی مساحت ناحیه  $A$  مسطح  $R$  محدود به خطوط قائم  $x = a$  و  $x = b$ ، محور  $x$ ، و منحنی  $y = f(x)$  مثل شکل ۱ (آ). ناحیه  $R$  دست کم یک طرف مستقیم دارد (در صورت مثبت بودن  $f$ ، سه طرف)، ولی بالای آن خمیده است. لذا، در حین محاسبه مساحت  $A$  باید ابتدا منظور ما از  $A$  روشن شود. این همان فلسفه یافتن، پس از تعریف کردن، مماس بر یک منحنی کلی را دارد (ر.ک. صفحه ۱۸۵)، و مثل مسئله مماس که به مفهوم مشتق منجر شد، مسئله مساحت به مفهوم انتگرال ختم می شود.



(آ)



(ب)

شکل ۱



با دیدی از تعریف مساحت  $A$ ، بازه  $[a, b]$  را به وسیله نقاط تقسیم

$$(1) \quad a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$$

صادق در نامساویهای

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

به تعداد زیادی زیر بازه کوچکتر تقسیم می‌کنیم. در اینجا، برای یکنواخت بودن نماد، نقاط تقسیم  $a$  و  $b$  بازه اصلی  $[a, b]$  را نقاط تقسیم گرفته و آنها را باعلام  $x_0$  و  $x_n$  نشان می‌دهیم. نقاط (۱)، که می‌گوییم یک افراز بازه  $[a, b]$  را تشکیل می‌دهند،  $[a, b]$  را درست به  $n$  زیر بازه

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

تقسیم می‌کنند. فرض کنیم

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

طول زیر بازه  $i$ ام  $[x_{i-1}, x_i]$  بوده، و  $\mu$  (موی یونانی کوچک) ماکزیم طول تمام زیر بازه‌ها باشد؛ در نتیجه،

$$\mu = \max \{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \max \{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}.$$

عدد  $\mu$  اندازه‌اش (یا نرم) افراز (۱) نام دارد؛ این عدد "تناسب" افراز را می‌سنجد به این معنی که هر قدر اندازه‌اش  $\mu$  کوچکتر باشد، تعداد نقاط تقسیم بیشتر است و این نقاط به هم نزدیکتر می‌باشند (ر.ک. مسئله ۲۵). لذا، کوچکی  $\mu$  بزرگی  $n$  را تضمین می‌کند، ولی عکس آن درست نیست. مثلاً، "نقاط

$$\frac{1}{2^{n-1}}, \dots, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$$

بازه یکه  $[0, 1]$  را به  $n$  زیر بازه تقسیم می‌کند، ولی اندازه‌اش  $\mu$ ، صرف نظر از بزرگی  $n$ ، همواره مساوی  $\frac{1}{2}$  است یعنی طول بزرگترین زیر بازه  $[\frac{1}{2}, 1]$ .

حال خطوط قائم  $x = x_0, x = x_1, x = x_2, \dots, x = x_{n-1}, x = x_n$  را رسم می‌کنیم. این خطوط ناحیه  $R$  را به  $n$  نوار باریک مثل شکل ۱ (ب) تقسیم می‌کنند. تابع  $f$  پیوسته است؛ و در نتیجه، اگر  $\Delta x_i$  به قدر کافی کوچک باشد، مقدارش بر زیر بازه  $[x_{i-1}, x_i]$  فقط کمی تغییر می‌کند. لذا، اگر فرض کنیم  $f$  بر  $[x_{i-1}, x_i]$  مقدار ثابت  $f(p_i)$  داشته باشد که  $p_i$  یک نقطه دلخواه  $[x_{i-1}, x_i]$  است، تقریب خوبی به دست خواهد آمد. دلخواه بودن  $p_i$  به شما اجازه می‌دهد، زیرا گویی بعضی از  $p_i$  ها از دیگران بهترند، ولی تفاوت بین  $p_i$  های مختلف بزودی "در حد از بین می‌رود"، زیرا ما  $\mu$  را به صفر نزدیک خواهیم کرد! تعویض  $f(x)$  با  $f(p_i)$  بر هر زیر بازه  $[x_{i-1}, x_i]$  معادل تعویض نوارها با بالا‌های

خمیده به وسیله مستطیلهای سایه دار شکل است. مجموع مساحات این مستطیلهای عبارت است از

$$(۲) \quad \sum_{i=1}^n f(p_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta x_i,$$

که در آن از نماد سیگمای معرفی شده در بخش ۱.۴ استفاده می‌کنیم. معقول است که (۲) را تقریب مناسبی از مساحت  $A$  ی ناحیه  $R$  بگیریم، که این تقریب وقتی عرض هر مستطیل کوچک شود، یعنی عدد  $\mu$  که مساوی ماکزیمم عرضهای مستطیلهاست کوچک شود، بهتر خواهد شد. این نکات انگیزه تعریف  $A$  به صورت حد

$$(۳) \quad A = \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(p_i)(x_i - x_{i-1}) = \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta x_i$$

خواهد بود.

تعریف انتگرال  $\int_a^b f(x) dx$ . این نکات طبعاً ما را به تعریف زیر می‌رساند. فرض کنیم  $f$  بر بازه بسته  $[a, b]$  کراندار باشد. افراز دلخواهی بر  $[a, b]$  در نظر می‌گیریم؛ یعنی، مجموعه  $a = x_0 < x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$  از نقاط که در نامساویهای  $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  صدق می‌کنند. در هر زیربازه  $[x_{i-1}, x_i]$  به طول  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  نقطه دلخواه  $p_i$  را اختیار کرده و مجموع

$$(۴) \quad S = \sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta x_i$$

را تشکیل می‌دهیم. فرض کنیم وقتی اندازه  $\mu = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$  به صفر نزدیک شود، مجموع  $S$ ، صرف نظر از انتخاب نقاط تقسیم  $x_i$  و نقاط "میانی"  $p_i$ ، به حدی متناهی مانند  $I$  نزدیک گردد. (در واقع،  $\mu$  فقط از راست به صفر نزدیک می‌شود زیرا  $\mu$  ذاتاً مثبت است.) در این صورت، حد  $I$  را انتگرال معین، یا فقط انتگرال،  $f$  از  $a$  تا  $b$  نامند و به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\int_a^b f(x) dx,$$

وگویم تابع  $f$  بر  $[a, b]$ ، یا روی  $[a, b]$ ، انتگرالپذیر است. مجموع (۴) به افتخار ریاضیدان برجسته آلمانی، جی. اف. برنارد ریمان<sup>۱</sup> (۱۸۶۶ - ۱۸۲۶)، به مجموع ریمان

معروف است. انتگرال معین اغلب *انتگرال ریمان* نام دارد تا از انواع دیگر انتگرالها که در ریاضیات عالی با آنها مواجه می‌شویم متمایز باشد.

مساحت تحت منحنی به عنوان انتگرال. فرمول (۳) برای مساحت تحت منحنی  $y = f(x)$  از  $x = a$  تا  $x = b$  را می‌توان برحسب انتگرال به صورت فشرده‌تر

$$(۵) \quad A = \int_a^b f(x) dx$$

نوشت. با آنکه تعریف انتگرال از مسئله مساحت ناشی شده بود، در این فصل و فصول آینده معلوم خواهد شد که انتگرال کاربردهای گسترده در مسائل مختلفی دارد که هیچ ارتباطی با مساحت ندارند.

انتگرال  $\int_a^b f(x) dx$  یک عدد است، و عملی که ما را از  $f$  به این عدد می‌رساند *انتگرالگیری* نام دارد. علامت  $\int$ ، که قرن‌ها قبل توسط لایبنیتز معرفی شده است، علامت *انتگرال* نام دارد؛ از نظر تاریخی، همان حرف S برای مجموع است مبین آنکه انتگرالگیری دست کم در حد، با جمع‌بندی ارتباط دارد. اعداد  $a$  و  $b$  را به ترتیب حدود پایینی و بالایی می‌نامند. در اینجا، مثل حدود جمع‌بندی، واژه "حد" معنی محاوره‌ای "مرز" را دارد تا معنی تکنیکی معمولی آن. بازه  $[a, b]$ ، که  $a$  و  $b$  نقاط انتهایی آنند. بازه *انتگرالگیری* نام دارد. تابع  $f$  را *انتگرالده* انتگرال  $\int_a^b f(x) dx$  می‌نامند. شناسه  $f$ ، در این حالت  $x$ ، *متغیر انتگرالگیری* نام دارد، و یک "متغیر ظاهری" است بدین معنی که هر علامت دیگر به خوبی آن است. مثلاً،

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(s) ds = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(z) dz,$$

و غیره. وضع دقیقاً همانند اندیس ظاهری جمع‌بندی می‌باشد (ر.ک. صفحه ۳۶۲). عبارت  $\int_a^b f(x) dx$  برای انتگرال تابع  $f$  از  $a$  تا  $b$  شامل دیفرانسیل  $dx$  متغیر انتگرالگیری است. دیفرانسیل  $dx$  با نم  $\Delta x_i$  در مجموع ریمان  $\sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta x_i$  "متناسب" است، که انتگرال حد آن است وقتی اندازه  $\mu$  به صفر نزدیک شود. در واقع، وقتی  $\mu \rightarrow 0$ ، علامت جمع‌بندی  $\sum$  و نم  $\Delta x_i$  با علامت انتگرال  $\int$  و دیفرانسیل  $dx$  تعویض می‌شوند، و حدود جمع‌بندی با حدود انتگرالگیری عوض خواهند شد. با آنکه این خیلی الهام بخش است، می‌توانیم متغیر انتگرالگیری و دیفرانسیل آن را حذف کرده فقط بنویسیم  $\int_a^b f$ ، و ما گهگاه این کار را خواهیم کرد. بالاخره، انتگرالگیری عملی است که ما را از یک تابع به عددی می‌رساند که آن را انتگرال روی یک بازه می‌نامیم؛ و لذا، کافی است فقط تابع و

نقاط انتهایی بازه را تصریح کنیم. با اینحال، معمولاً "از نماد کامل  $\int_a^b f(x) dx$  (در حالتی که  $x$  متغیر انتگرالگیری است) استفاده می‌کنیم. مزیت این نماد بعدها روشن خواهد شد (ر.ک. صفحه ۵۹۲).

تبصره. مجموع ریمان  $S = \sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta x_i$  و اندازه  $\mu = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$  آمده در تعریف انتگرال  $I = \int_a^b f(x) dx$  به افراز بازه انتگرالگیری  $[a, b]$  بستگی دارد. این را می‌توان با نوشتن  $S = S(X)$  و  $\mu = \mu(X)$  تصریح کرد، که در آن‌ها  $X$  مجموعه نقاط تقسیم "میانی"  $p_1, p_2, \dots, p_n$ ، یکی در هر زیربازه  $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ ،  $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$  می‌باشد. به یاد داشته باشید که  $S$  به نقاط بستگی دارد. لذا، اینکه می‌گوییم وقتی  $\mu \rightarrow 0$ ،  $S \rightarrow I$  نزدیک می‌شود یعنی تفاضل  $S(X) - I$  به ازای هر  $X$  که  $\mu(X)$  به قدر کافی کوچک باشد، صرف نظر از انتخاب نقاط  $p_i$  مربوط به  $X$ ، بدخواه نزدیک صفر خواهد بود. یا، به زبان  $\varepsilon, \delta$ ، یعنی به ازای هر  $\varepsilon > 0$  می‌توان  $\delta > 0$  ای یافت به طوری که هر وقت  $0 < \mu(X) < \delta$ ، به ازای هر  $p_i$  مربوط به  $X$ ،

$$|S(X) - I| = \left| S(X) - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon$$

انتگرالپذیری توابع پیوسته. در تعریف انتگرال  $\int_a^b f(x) dx$  چیزی راجع به پیوستگی  $f$  گفته نشد، و یک تابع ناپیوسته ممکن است انتگرالپذیر باشد یا نباشد (ر.ک. مسائل ۲۹ و ۳۱). از آن سو، هر تابع پیوسته انتگرالپذیر است. بخصوص، این تقریبهایی را که در تعریف مساحت تحت نمودار یک تابع پیوسته به کار رفتند توجیه کرده، و وجود مساحت را تضمین می‌نماید.

قضیه ۱ (پیوستگی انتگرالپذیری را ایجاب می‌کند). هرگاه تابع  $f$  بر بازه  $[a, b]$  پیوسته باشد، آنگاه  $f$  بر  $[a, b]$  انتگرالپذیر است.

قضیه ۱ سند دیگری است بر اهمیت پیوستگی در حساب دیفرانسیل و انتگرال. برهان قضیه مستلزم مفهومی است (پیوستگی یکنواخت) که از حوصله این کتاب خارج است. خواننده علاقه‌مند را به کتب حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته ارجاع می‌دهیم. حال، با استفاده مستقیم از تعریف انتگرال به عنوان حد یک مجموع ریمان، چند انتگرال ساده را محاسبه می‌کنیم.

مثال ۱. انتگرال  $\int_a^b 1 \, dx$ ، که معمولاً "به صورت  $\int_a^b dx$  نشان داده می‌شود، را حساب کنید.

حل. در اینجا از تابع ثابت  $f(x) \equiv 1$  انتگرال می‌گیریم. بنابراین،

$$\int_a^b dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta x_i,$$

زیرا به ازای هر  $p_i$ ،  $f(p_i) = 1$ . با بسط مجموع به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \Delta x_i &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \\ &= (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (x_n - x_{n-1}) \\ &= -x_0 + (x_1 - x_1) + (x_2 - x_2) + \cdots + (x_{n-1} - x_{n-1}) + x_n. \end{aligned}$$

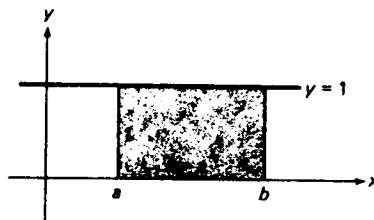
چون تمام جملات مجموع سمت راست جز اول و آخر ۰ اند، مجموع "توی هم رفته" و به صورت ساده زیر درمی‌آید:

$$\sum_{i=1}^n \Delta x_i = x_n - x_0 = b - a.$$

این را می‌شد پیش‌بینی کرد، زیرا مجموع طولهای زیر بازه‌های  $[x_{i-1}, x_i]$  باید مساوی طول بازه  $[a, b]$  باشد. لذا،  $\int_a^b dx$  حد ثابت  $b - a$  است وقتی  $\mu \rightarrow 0$ . در نتیجه،

$$(۶) \quad \int_a^b dx = b - a.$$

به‌طور هندسی، انتگرال (۶) مساحت تحت خط  $y = 1$  از  $x = a$  تا  $x = b$  است؛ یعنی، مساحت مستطیل سایه‌دار شکل ۲ به طول  $b - a$  و عرض ۱. البته، مساحت این مستطیل،



شکل ۲

یا معادلاً "طول بازه  $[a, b]$ ، مساوی  $b - a$  است که با (۶) داده می‌شود.

در محاسبه انتگرال مثال ۱ وجود نیز ثابت شد. وجود انتگرال از قضیه ۱ و پیوستگی

## ۳۷۳ انتگرالها

انتگرالده  $f(x) \equiv 1$  نیز نتیجه می شود. در دو مثال زیر، ابتدا از پیوستگی انتگرالده استفاده کرده وجود انتگرال را نتیجه می گیریم، و سپس با استفاده از وجود انتگرال و دلخواه بودن نقاط  $p_i$  در مجموع (۴)، انتگرال را حساب می کنیم.

مثال ۲. انتگرال  $\int_a^b x dx$  را حساب کنید.

حل. بنا بر قضیه ۱، انتگرالده  $f(x) = x$  پیوسته و در نتیجه انتگرال پذیر است. لذا،

$$\int_a^b x dx = \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta x_i = \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n p_i (x_i - x_{i-1}),$$

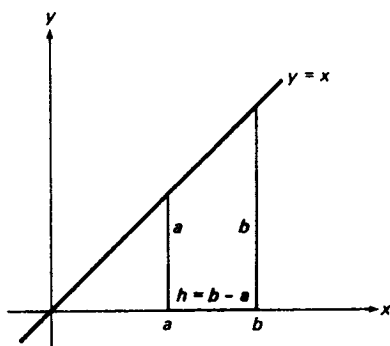
که در آن حد موجود بوده و به ازای هر انتخاب نقاط  $p_i$  در زیر بازه های  $[x_{i-1}, x_i]$ ،  $i = 1, \dots, n$ ، یکسان است. فرض کنیم  $p_i$  نقطهء میانی  $[x_{i-1}, x_i]$  باشد؛ در نتیجه،  $p_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$  در این صورت،

$$\begin{aligned} \int_a^b x dx &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{2} \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - x_{i-1}^2) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\mu \rightarrow 0} (x_n^2 - x_0^2) = \frac{1}{2} \lim_{\mu \rightarrow 0} (b^2 - a^2), \end{aligned}$$

زیرا انتخاب ما از  $p_i$  ها به مجموع توی هم رو دیگری منجر می شود؛ و لذا،

$$(۷) \quad \int_a^b x dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

به طور هندسی، انتگرال (۷) مساحت تحت خط  $y = x$  از  $x = a$  تا  $x = b$  است؛ یعنی مساحت دوزنقهء سایه دار شکل ۳. چون مساحت یک دوزنقه با اضلاع موازی به طولهای  $a$  و  $b$  و به



شکل ۳

فاصله  $h$  از هم مساوی  $\frac{1}{2}(a+b)h$  است، مساحت دوزنقه در شکل مساوی است با

$$\frac{1}{2}(b+a)(b-a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2),$$

که با فرمول (۷) سازگار است.

مثال ۳. انتگرال  $\int_a^b x^2 dx$  را حساب کنید.

حل. مجدداً "انتگرالده پیوسته و در نتیجه انتگرالپذیر است". لذا،

$$\int_a^b x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n p_i^2 (x_i - x_{i-1}),$$

که در آن حد موجود و به ازای هر انتخاب نقاط  $p_i$  در زیربازه‌های  $[x_{i-1}, x_i]$ ،  $i = 1, \dots, n$ ، یکسان است. برای تسهیل در محاسبات، فرض می‌کنیم  $a \geq 0$  (می‌توان نشان داد که جواب به این فرض بستگی ندارد). در این صورت، به ازای هر  $i$ ،  $0 \leq x_{i-1} < x_i$  و لذا،

$$x_{i-1}^2 < \frac{1}{3}(x_{i-1}^2 + x_{i-1}x_i + x_i^2) < x_i^2,$$

در نتیجه، نقطه

$$p_i = \sqrt{\frac{1}{3}(x_{i-1}^2 + x_{i-1}x_i + x_i^2)}$$

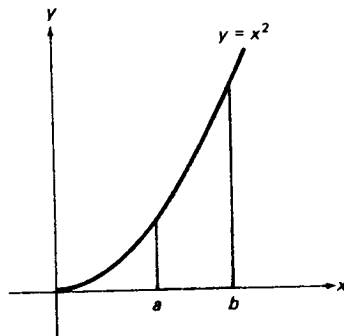
به زیربازه  $[x_{i-1}, x_i]$  تعلق دارد. این انتخاب  $p_i$  "از قبل طرح شده بود"، زیرا با آن محاسبه انتگرال به مجموع توی هم رو دیگر منجر می‌شود. به تفصیل و به کمک اتحاد جبری  $(u^2 + uv + v^2)(u - v) = u^3 - v^3$  داریم

$$\begin{aligned} \int_a^b x^2 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n (x_i^2 + x_i x_{i-1} + x_{i-1}^2)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (x_i^3 - x_{i-1}^3) = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^3 - x_0^3) = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} (b^3 - a^3), \end{aligned}$$

پس نتیجه می‌شود که

$$(۸) \quad \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3).$$

این بار انتگرال مساحت ناحیه‌ای است از نوعی که در هندسه مقدماتی با آن آشنا شده‌ایم؛ یعنی، ناحیه سایه‌دار شکل ۴ که به خطوط قائم  $x = a$  و  $x = b$ ، محور  $x$  و سهمی  $y = x^2$



شکل ۴

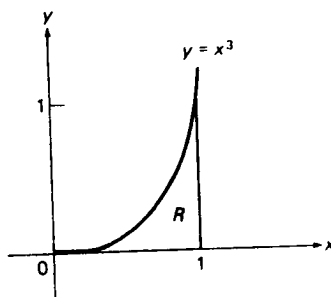
محدود شده است.

در بخش ۵.۴ روشی کلی برای محاسبه انتگرالهای معین به دست می‌آوریم که در آن از محاسبه صریح مجموعه‌های ریمان و حدود آنها کاملاً پرهیز می‌شود. در این صورت، دیگر نیازی به استفاده از ترفندهای خاص از نوع به کار رفته در دو مثال قبل نخواهیم داشت. این جای خوشوقتی است، زیرا در غیر این صورت، حتی در محاسبه انتگرالهای نسبتاً ساده نیز عاجز خواهیم ماند! در واقع، معلوم می‌شود که فرمولهای (۶) و (۸) همه حالات خاصی از فرمول کلی

$$(9) \quad \int_a^b x^n dx = \frac{1}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1}) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

می‌باشند که در صفحه ۴۱۱ ثابت خواهد شد. فعلاً "فرمول (۹) را دانسته گرفته و آن را آزادانه به کار می‌بریم.

مثال ۴. مساحت ناحیه  $R$  محدود به منحنی  $y = x^3$ ، محور  $x$ ، و خط  $x = 1$  را بیابید (ر.ک. شکل ۵).



شکل ۵



حل. چون

$$A = \int_0^1 x^3 dx,$$

به کمک فرمول (۹) به ازای  $n = 3$  معلوم می‌شود که

$$A = \frac{1}{4} (1^4 - 0^4) = \frac{1}{4}.$$

قواعد انتگرالگیری. حال به اثبات چند قاعده<sup>۱</sup> مهم که بر انتگرالها حاکمند می‌پردازیم. (یک) هرگاه  $f$  بر  $[a, b]$  انتگرالپذیر بوده و  $c$  ثابت باشد، آنگاه  $cf$  نیز بر  $[a, b]$  انتگرال پذیر است، و

$$(۱۰) \quad \int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx.$$

در واقع، هرگاه  $S = \sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta x_i$  یک مجموع ریمان برای  $f$  باشد، آنگاه

$$cS = c \sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n cf(p_i) \Delta x_i$$

یک مجموع ریمان برای  $cf$  می‌باشد. اما

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} cS = c \lim_{\mu \rightarrow 0} S$$

(بنابر تشابه برای مجموعه‌های ریمان نتیجه<sup>۲</sup>، صفحه ۱۳۱). و در نتیجه،

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n cf(p_i) \Delta x_i = c \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta x_i.$$

که با (۱۰) معادل می‌باشد. لذا، در یک انتگرال معین، هر ثابت ضربدر انتگرالده را می‌توان خارج کرده و جلو علامت انتگرال قرار داد.

(دو) هرگاه  $f$  و  $g$  هر دو بر  $[a, b]$  انتگرالپذیر باشند، آنگاه مجموع  $f + g$  نیز بر  $[a, b]$  انتگرالپذیر است، و

$$(۱۱) \quad \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

برای اثبات این امر، ملاحظه می‌کنیم که هرگاه  $S_h = \sum_{i=1}^n h(p_i) \Delta x_i$  یک مجموع ریمان برای

$h = f + g$  باشد، آنگاه  $S_f = \sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta x_i$  و  $S_g = \sum_{i=1}^n g(p_i) \Delta x_i$  مجموع‌های ریمانی برای

$f$  و  $g$  ( مبتنی بر نقاط یکسان  $p_i$  و  $x_i$  ) می باشند . اما

$$S_h = \sum_{i=1}^n h(p_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n [f(p_i) + g(p_i)] \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n g(p_i) \Delta x_i.$$

و لذا ، بنابر تشابه برای مجموعه‌های ریمان قضیه ۴ ، صفحه ۱۳۰ ،

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} S_h = \lim_{\mu \rightarrow 0} (S_f + S_g) = \lim_{\mu \rightarrow 0} S_f + \lim_{\mu \rightarrow 0} S_g.$$

که با (۱۱) معادل می باشد . لذا ، انتگرال مجموع دو تابع مجموع انتگرالهای تک تک توابع می باشد .

(سه) هرگاه  $f_1, f_2, \dots, f_n$  بر  $[a, b]$  انتگرالپذیر بوده و  $c_1, c_2, \dots, c_n$  ثابت باشند ، آنگاه " ترکیب خطی "  $c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n$  نیز بر  $[a, b]$  انتگرالپذیر بوده و

$$(۱۲) \quad \int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n) = c_1 \int_a^b f_1 + c_2 \int_a^b f_2 + \dots + c_n \int_a^b f_n$$

( در اینجا از نماد اختصاری مطرح شده در صفحه ۳۷۰ استفاده می کنیم ) . اثبات (۱۲) ناشی از کاربرد مکرر فرمولهای (۱۰) و (۱۱) است . لذا ، انتگرال یک ترکیب خطی از توابع ترکیبی خطی از انتگرالهای تک تک توابع با همان ضرایب می باشد . (چهار) هرگاه  $f$  بر  $[a, b]$  انتگرالپذیر بوده و  $f(x) \geq 0$  ، آنگاه

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

در واقع ، مجموع ریمان  $S = \sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta x_i$  همواره نامنفی است ، زیرا به ازای هر انتخاب از نقاط  $p_i$  ،  $f(p_i) \geq 0$  . بنابراین ،

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\mu \rightarrow 0} S \geq 0,$$

چرا که اگر  $\lim_{\mu \rightarrow 0} S < 0$  ، می توان افزایش از  $[a, b]$  و نقاطی چون  $p_i$  یافت که یک مجموع ریمان منفی به دست دهند که امری ناممکن است . لذا ، انتگرال یک تابع نامنفی خود نامنفی می باشد .

(پنج) هرگاه  $f$  و  $g$  بر  $[a, b]$  انتگرالپذیر بوده و  $f(x) \geq g(x)$  ، آنگاه

$$(۱۳) \quad \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

برای مشاهده این امر ، توجه می کنیم که  $f(x) - g(x) \geq 0$  ؛ و در نتیجه ، طبق قواعد (سه)

و (چهار)،

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \geq 0,$$

که با (۱۳) معادل می باشد.

(شش) هرگاه  $f$  بر  $[a, b]$  انتگرالپذیر بوده و  $c \leq f(x) \leq C$ ، که  $c$  و  $C$  ثابت هستند، آنگاه

$$(۱۴) \quad c(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq C(b-a).$$

در واقع، هر ثابت انتگرالپذیر است؛ و در نتیجه، بنا بر قاعدهء (پنج)،

$$\int_a^b c dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b C dx,$$

که با (۱۴) معادل است، زیرا

$$\int_a^b c dx = c \int_a^b dx = c(b-a), \quad \int_a^b C dx = C \int_a^b dx = C(b-a).$$

از حالا به بعد، از تمام این مقادیر آزادانه استفاده خواهیم کرد.

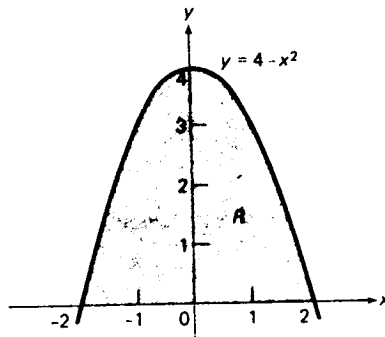
مثال ۵. انتگرال  $\int_2^4 \left( \frac{3}{8}x^2 + 5x - 6 \right) dx$  را حساب کنید.

حل. به کمک قاعدهء (سه) و فرمولهای (۶) تا (۸)، داریم

$$\begin{aligned} \int_2^4 \left( \frac{3}{8}x^2 + 5x - 6 \right) dx &= \frac{3}{8} \int_2^4 x^2 dx + 5 \int_2^4 x dx - 6 \int_2^4 dx \\ &= \frac{3}{8} \left( \frac{1}{3} \right) (4^3 - 2^3) + 5 \left( \frac{1}{2} \right) (4^2 - 2^2) - 6(4 - 2) \\ &= \frac{1}{8} (56) + \frac{5}{2} (12) - 6(2) = 25. \end{aligned}$$

مثال ۶. مساحت بین منحنی  $y = 4 - x^2$  و محور  $x$  را بیابید.

حل. مساحت  $A$  ناحیهء سایه دار  $R$  در شکل ۶ را جستجو می کنیم که مساحت تحت منحنی  $y = 4 - x^2$  (سهمی) از  $x = -2$  تا  $x = 2$ ، یعنی قطعه های  $x$  منحنی، می باشد.



شکل ۶

بنابراین،

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = 4 \int_{-2}^2 dx - \int_{-2}^2 x^2 dx \\ &= 4[2 - (-2)] - \frac{1}{3} [2^3 - (-2)^3] \\ &= 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

### مسائل

۱. چرا تابع  $\sin x$  بر هر بازه بسته  $[a, b]$  انتگرالپذیر است؟
۲. چرا تابع  $\cot x$  بر هر بازه بسته  $[a, b]$  که شامل نقاط  $x = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$  نیست انتگرالپذیر است؟
۳. مساحت  $A$  تحت خط  $y = (b/a)x$  از  $x = 0$  تا  $x = a$  را یافته، و نتیجه را تعبیرهندسی کنید.

انتگرالهای زیر را به کمک فرمولهای (۹) و (۱۲) حساب کنید.

$$\begin{array}{ll} \int_{-1}^0 \frac{1}{2} x^4 dx \quad .5 \checkmark & \int_1^2 2x^3 dx \quad .4 \checkmark \\ \int_2^3 |x^2 - 4x| dx \quad .7 \checkmark & \int_0^1 8x^7 dx \quad .6 \checkmark \\ \int_0^{\sqrt{2}} (t^2 + \frac{3}{4}t - \frac{2}{3}) dt \quad .9 \checkmark & \int_{-3}^0 |x^2 - 4x| dx \quad .8 \checkmark \\ \int_{-1}^1 (3u^5 - 5u^3) du \quad .1 \checkmark & \int_{-2}^1 (t^3 - t^2 + t - 1) dt \quad .10 \checkmark \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{5}v - \frac{1}{27}v^3 \right) dv &\cdot ۱۳ \checkmark & \int_0^1 (2u^{99} - u^{49} + \pi) du &\cdot ۱۲ \checkmark \\ \int_4^5 (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1) dx &\cdot ۱۵ \checkmark & \int_{1/2}^1 \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{3}v + \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{3}v^3 \right) dv &\cdot ۱۴ \checkmark \\ \int_2^8 \frac{x^3 - 1}{x - 1} dx &\cdot ۱۷ \checkmark & \int_{-4}^6 (x - 1)(x^2 + x + 1) dx &\cdot ۱۶ \checkmark \\ \int_{-1}^2 \frac{x^3 + 8}{x + 2} dx &\cdot ۱۸ \checkmark \end{aligned}$$

مساحت  $A$  ناحیه  $R$  زیر را بیابید.

۱۹. تحت منحنی  $y = x^2 - 1$  از  $x = 1.2$  تا  $x = 1.8$

۲۰. تحت منحنی  $y = x^2 + x + 1$  از  $x = -1$  تا  $x = 1$

۲۱. بین منحنی  $y = 2 + x - x^2$  و محور  $x$

۲۲. بین منحنی  $y = 2x - x^2$  و محور  $x$

۲۳. تحت منحنی  $y = 2x^3 - 2x$  از  $x = -1$  تا  $x = 0$

۲۴. بین منحنی  $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2$  و محور  $x$

در هر حالت ناحیه  $R$  را رسم نمایید.

۲۵. فرض کنید بازه  $[a, b]$  به وسیله  $a$  افزاز  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$  به اندازه

مش  $\mu$  به  $n$  زیربازه  $[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, b]$  تقسیم شده باشد. کوچکترین مقدار ممکن  $n$  به ازای اندازه  $\mu$  چقدر است؟ نشان دهید که وقتی  $\mu \rightarrow 0$ ، این کوچکترین مقدار به بی‌نهایت نزدیک می‌شود.

۲۶. بازه  $[0, 10]$  با افزازی به اندازه  $\mu = \sqrt{2}$  به  $n$  زیربازه تقسیم شده است. کوچکترین مقدار ممکن  $n$  چقدر است؟

۲۷. بازه  $[0, 10]$  با افزاز  $0 = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{99}, x_{100} = 10$  به ۱۰۰ زیربازه تقسیم شده است. کوچکترین مقدار ممکن اندازه  $\mu$  چقدر است؟ بزرگترین مقدار ممکن  $\mu$  چقدر است؟

۲۸. نشان دهید هرگاه انتگرال به صورت تعریف شده در صفحه ۳۷۰ موجود باشد، آنگاه منحصر به فرد است، بدین معنی که فقط یک مقدار دارد.

۲۹. تابع  $f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$  اگر

در  $x = 0$  ناپیوسته بوده؛ و در نتیجه، بر هیچ بازه‌ای چون  $[a, b]$  شامل نقطه  $x = 0$

# انتگرالها ۳۸۱

پیوسته نمی باشد. نشان دهید با اینحال  $f$  بر  $[a, b]$  انتگرالپذیر با انتگرالی مساوی ۰ می باشد.

۳۰. بدون آنکه قادر به محاسبه انتگرال باشیم، از کجا بدانیم که

$$0 \leq \int_0^1 x^{10} \sqrt{1+x^2} dx \leq \sqrt{2}$$

۳۱. فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x \text{ گویا باشد} \\ 0 & \text{اگر } x \text{ گنگ باشد} \end{cases}$$

نشان دهید  $f$  بر هر بازه  $[a, b]$  انتگرال ناپذیر است.

۳۲. تابعی مثال بزنید که بر بازه  $[a, b]$  کراندار بوده ولی انتگرالپذیر نباشد.

۳۳. نشان دهید هرگاه  $f$  بر  $[a, b]$  انتگرالپذیر باشد، آنگاه  $f$  باید بر  $[a, b]$  کراندار باشد.

۳۴. فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

آیا  $f$  بر  $[-1, 1]$  انتگرالپذیر است؟

۳۵. نشان دهید هرگاه  $f$  بر  $[a, b]$  پیوسته باشد، آنگاه

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

این مشابه نامساوی مثلثی مجموعها برای انتگرالها می باشد.

۳۰۴ نکات دیگر در باب مساحت؛ قضیه مقدار میانگین برای انتگرالها

تا اینجا در نوشتن انتگرال

$$\int_a^b f(x) dx$$

فرض کرده ایم  $a < b$ . اکنون حالت  $a \geq b$  را نیز پذیرفته، طبق تعریف، قرار می دهیم

$$(1) \quad \int_a^a f(x) dx = - \int_a^a f(x) dx.$$

فرض کنیم در (۱)  $a = b$ . در این صورت،

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx,$$

که ما را به تعریف

$$(۲) \quad \int_a^a f(x) dx = 0$$

می‌رساند. این تعریف معنی دارد، زیرا "مساحت یک ناحیه به عرض صفر" مساوی صفر می‌باشد.

مثال ۱. انتگرال  $\int_2^1 (x^2 - x) dx$  را حساب کنید.

حل. به کمک (۱) داریم

$$\begin{aligned} \int_2^1 (x^2 - x) dx &= -\int_1^2 (x^2 - x) dx = \int_1^2 (x - x^2) dx = \int_1^2 x dx - \int_1^2 x^2 dx \\ &= \frac{1}{2}(2^2 - 1^2) - \frac{1}{3}(2^3 - 1^3) = \frac{3}{2} - \frac{7}{3} = -\frac{5}{6}. \end{aligned}$$

انتگرالگیری بر بازه‌های مجاور. حال ببینیم وقتی بازه انتگرالگیری "تجزیه می‌شود" چه رخ می‌دهد.

قضیه ۲ (جمعپذیری انتگرال بر بازه‌های مجاور). هرگاه  $f$  بر  $[a, b]$  پیوسته بوده و  $c$  یک نقطه درونی  $[a, b]$  باشد، آنگاه

$$(۳) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (a < c < b).$$

برهان. همانند تعریف انتگرال، بازه  $[a, b]$  را با معرفی نقاط تقسیم به تعداد زیادی زیر بازه کوچک تقسیم می‌کنیم، ولی این بار تأکید می‌کنیم که یکی از نقاط تقسیم نقطه ثابت  $c$  باشد. به عبارت دیگر، نقاط تقسیم  $x$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) را طوری اختیار می‌کنیم که

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = c < x_{m+1} < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

که در آن البته زیرنویس  $m$  به تعداد نقاط  $x_i$  سمت چپ  $c$  بستگی دارد. در این صورت، افراز حاصل از نقاط  $x_0, x_1, \dots, x_n$  برای  $[a, b]$  خود افرازی از  $[a, c]$  متشکل از نقاط  $x_0, x_1, \dots, x_m$  و نیز افرازی از  $[c, b]$  متشکل از نقاط  $x_m, x_{m+1}, \dots, x_n$  به دست می‌دهد. بنابراین، مجموع ریمان

$$S = \sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta x_i,$$

به کار رفته در تعریف انتگرال  $f$  از  $a$  تا  $b$ ، به مجموع

$$S = S' + S''$$

تجزیه می شود، که در آن

$$S' = \sum_{i=1}^m f(p_i) \Delta x_i, \quad S'' = \sum_{i=m+1}^n f(p_i) \Delta x_i$$

( $\Delta x_i$  و  $p_i$  همان معانی داشته در صفحه ۳۶۸ را دارند)  $S'$  و  $S''$  را همان مجموعه های ریمانی می بینید که در تعریف انتگرال  $f$  از  $a$  تا  $c$  و انتگرال  $f$  از  $c$  تا  $b$  به کار رفته اند. فرض کنید  $\mu$ ،  $\mu'$ ، و  $\mu''$  به ترتیب اندازه های مش افرازه های  $[a, b]$ ،  $[a, c]$ ، و  $[c, b]$  باشند؛ یعنی،

$$\mu = \max \{\Delta x_1, \dots, \Delta x_n\}, \quad \mu' = \max \{\Delta x_1, \dots, \Delta x_m\}, \\ \mu'' = \max \{\Delta x_{m+1}, \dots, \Delta x_n\}.$$

در این صورت، واضح است که  $\mu \rightarrow 0$  ایجاب می کند که  $\mu' \rightarrow 0$  و  $\mu'' \rightarrow 0$ ؛ در نتیجه،

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\mu \rightarrow 0} S = \lim_{\mu \rightarrow 0} (S' + S'') = \lim_{\mu \rightarrow 0} S' + \lim_{\mu \rightarrow 0} S'' \\ = \lim_{\mu' \rightarrow 0} S' + \lim_{\mu'' \rightarrow 0} S'' = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

که در آن وجود هر سه انتگرال از فرض پیوسته بودن  $f$  بر  $[a, b]$ ، و لذا بر  $[a, c]$  و  $[c, b]$ ، نتیجه می شود.

همانطور که اینک نشان می دهیم، نقاط  $a$ ،  $b$ ، و  $c$  در فرمول (۳) لازم نیست در شرط  $a < c < b$  صدق کنند؛ و در واقع، می توانند دلخواه باشند.

نتیجه. هرگاه  $f$  بر بازه ای شامل نقاط  $a$ ،  $b$ ، و  $c$  پیوسته باشد، آنگاه

$$(۴) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (a, b, c \text{ دلخواه})$$

برهان. اگر دو نقطه از سه نقطه  $a$ ،  $b$ ، و  $c$  یکی باشند، فرمول (۴) فوراً از (۱) و (۲) نتیجه می شود. به علاوه، اگر  $a < c < b$ ، فرمول (۴) به (۳) تحویل می یابد. حالات دیگر را می توان با استفاده از (۱) همراه با (۳) سامان داد. مثلاً، "هرگاه  $c < b < a$ ، آنگاه، بنابر (۳)، با  $a$ ،  $b$ ،  $c$  به جای  $a$ ،  $c$ ،  $b$ ،

$$\int_c^a f(x) dx = \int_c^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx.$$



از اینرو، با دو بار به کار بردن (۱)،

$$-\int_a^c f(x) dx = \int_c^b f(x) dx - \int_a^b f(x) dx,$$

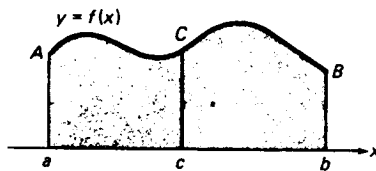
که ایجاب می‌کند که

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

سایر حالات  $a < b < c$ ,  $b < a < c$ ,  $b < c < a$ ,  $c < a < b$  به همین نحو ثابت می‌شوند

لذا، اعتبار خاصیت جمعیت بازه‌های (۴) به ترتیب  $a$ ,  $b$ , و  $c$  بستگی ندارد. این امر شاهدهی است بر تناسب تعریف (۱) که در برهان نتیجه نقشی کلیدی خواهد داشت. قضیه ۲ در حالت نامنفی بودن  $f$  بر  $[a, b]$  تعبیر هندسی ساده‌ای دارد. در این صورت،  $\int_a^b f(x) dx$  مساحت تحت منحنی  $y = f(x)$  از  $x = a$  تا  $x = b$  است، حال آنکه  $\int_a^c f(x) dx$  مساحت تحت منحنی از  $x = a$  تا  $x = c$  و  $\int_c^b f(x) dx$  مساحت تحت منحنی از  $x = c$  تا  $x = b$  می‌باشد. اینها مساحت نواحی  $abBA$ ،  $acCA$ ، و  $cbBC$  در شکل ۷ بوده، و معادله (۳) می‌گوید که

$$abBA \text{ مساحت} = (acCA \text{ مساحت}) + (cbBC \text{ مساحت})$$



شکل ۷

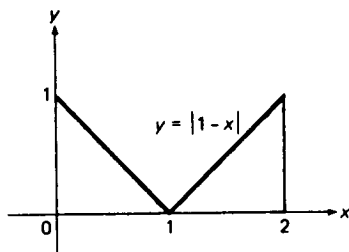
مطلبی که از نظر هندسی واضح است، زیرا نواحی  $acCA$  و  $cbBC$  نقاط مشترکی غیر از پاره خط  $cC$ ، یعنی مرز مشترکشان، ندارند. شکل در حالتی رسم شده است که  $f$  بر  $[a, b]$  مثبت است، ولی به آسانی معلوم می‌شود که این جمعیت بودن سطحهای جدا از هم حتی وقتی  $f$  در یک یا چند نقطه از  $[a, b]$  صفر است نیز برقرار می‌باشد.

مثال ۲. انتگرال  $\int_0^2 |1 - x| dx$  را حساب کنید.

حل. محاسبه انتگرال معادل یافتن مساحت تحت منحنی  $y = |1 - x|$  از  $x = 0$  تا  $x = 2$

## انتگرالها ۳۸۵

است. از شکل ۸ واضح است که این مساحت مساوی ۱ است، زیرا هر مثلث سایه‌دار یک



شکل ۸

مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین به طول ساقهای ۱ و مساحت  $\frac{1}{2}$  می‌باشد. به صورت دیگر، انتگرال را می‌توان به کمک قضیه ۲ حساب کرد:

$$\begin{aligned}\int_0^2 |1-x| dx &= \int_0^1 |1-x| dx + \int_1^2 |1-x| dx \\ &= \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^2 (x-1) dx\end{aligned}$$

(تجزیه بازه  $[0, 2]$  به این صورت ناشی از تغییر علامت  $1-x$  در  $x=1$  است). بنابراین، همانطور که قبلاً "به طور هندسی نشان داده‌ایم،

$$\begin{aligned}\int_0^2 |1-x| dx &= \int_0^1 dx - \int_0^1 x dx + \int_1^2 x dx - \int_1^2 dx \\ &= 1 - \frac{1}{2}(1^2 - 0^2) + \frac{1}{2}(2^2 - 1^2) - 1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 1 = 1\end{aligned}$$

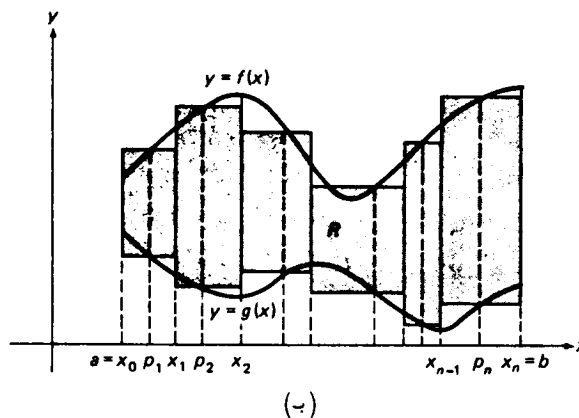
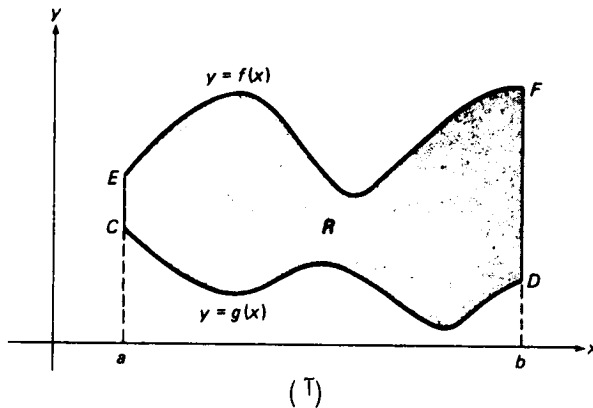
لازم است در انتگرالهای شامل قدر مطلق احتیاط نمایید.

مساحت بین دو منحنی. ما قبلاً "شایستگی استفاده از انتگرال  $\int_a^b f(x) dx$  به عنوان تعریف مساحت تحت منحنی  $y = f(x)$  از  $x=a$  تا  $x=b$ ، یعنی مساحت ناحیه مسطح محدود به خطوط قائم  $x=a$  و  $x=b$ ، محور  $x$ ، و منحنی  $y=f(x)$  که  $f(x) \geq 0$  را نشان داده‌ایم. حال مسئله کلیتر یافتن مساحت بین دو منحنی  $y=f(x)$  و  $y=g(x)$  از  $x=a$  تا  $x=b$  را در نظر می‌گیریم که در آنها توابع  $f$  و  $g$  هر دو پیوسته بوده و  $f(x) \geq g(x)$ . این مساحت ناحیه مسطح  $R$  در شکل ۹ (آ) است که به خطوط قائم  $x=a$  و  $x=b$  و منحنیهای  $y=f(x)$  و  $y=g(x)$  محدود شده است و منحنی  $y=f(x)$  مرز بالا و منحنی  $y=g(x)$  مرز پایین آن

می‌باشد ( برای سادگی فرض کرده‌ایم  $f(x) > g(x) > 0$  ). ناحیه  $R$  معمولاً " دو سمت خمیده دارد (  $EF$  و  $CD$  در شکل ) ، و این نواحی در هندسه "مقدماتی مطرح نمی‌شوند . لذا ، در محاسبه "مساحت  $A$  ی ناحیه  $R$  باید مجدداً " به تعریف مناسبی از  $A$  بپردازیم . برای این کار ، به موازات ساختن صفحات ۳۶۷ تا ۳۶۹ پیش رفته ،  $A$  را با مجموعی به شکل

$$(۵) \quad \sum_{i=1}^n [f(p_i) - g(p_i)] \Delta x_i,$$

میتنی بر افرازی از بازه  $[a, b]$  به  $n$  زیربازه  $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$  به طولهای  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$  که نقطه دلخواهی در  $[x_{i-1}, x_i]$  است تقریب می‌کنیم . این تقریب متناظر است با تعویض نوارها با بالا و پایین خمیده در شکل ۹ (ب) به وسیله مستطیلهای سایه‌دار نموده شده . در این صورت ،  $A$  را حد مجموع (۵) تعریف می‌کنیم



شکل ۹

وقتی اندازه  $\mu = \max \{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$  به صفر نزدیک شود:

$$A = \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(p_i) - g(p_i)] \Delta x_i.$$

همانطور که اینک می‌دانیم، حد مورد نظر انتگرال

$$(۶) \quad A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

است که وجودش از پیوستگی تابع  $f - g$  نتیجه می‌شود. این فرمول مطلوب برای مساحت  $A$  بین دو منحنی  $y = f(x)$  و  $y = g(x)$  است. نامنفی بودن  $A$ ، که معنی هندسی‌اش آن را لازم دارد، نتیجه‌ای است از نامساوی  $f(x) - g(x) \geq 0$  و قاعده (چهار)، صفحه ۳۷۷. شهوداً واضح است که  $A > 0$  مگر آنکه منحنیهای  $y = f(x)$  و  $y = g(x)$  یکی باشند، و این مطلب نتیجه این امر است که انتگرال یک تابع نامنفی پیوسته مثبت است مگر آنکه تابع متحد صفر باشد (ر.ک. مثال ۸). اگر  $g(x) \equiv 0$ ، همانطور که انتظار می‌رود، رابطه (۶) به فرمول

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

برای مساحت تحت منحنی  $y = f(x)$  تحویل می‌شود.

به صورت دیگر، فرمول (۶) را می‌توان با استدلال زیر به دست آورد. بی‌آنکه به کلیت خللی وارد آید می‌توان فرض کرد که  $f$  و  $g$  هر دو نامنفی‌اند، زیرا در غیر این صورت می‌توان با انتقال منحنیهای  $y = f(x)$  و  $y = g(x)$  به بالا، که در اثر آن تابع  $f - g$  یا مساحت  $A$  بین منحنیها تغییر نمی‌کند، به این وضع درآورد. در این صورت، مانند شکل ۹ (T)،

$$A = R \text{ (مساحت } abFE) - (abDC \text{ مساحت)}$$

زیرا نواحی  $abFE$  و  $abDC$  نقطه مشترکی جز مرز مشترک خود  $CD$  ندارند. اما

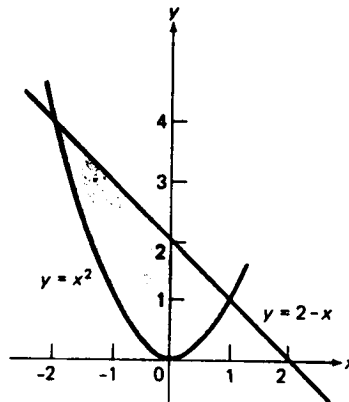
$$\text{مساحت } abFE = \int_a^b f(x) dx, \quad \text{مساحت } abDC = \int_a^b g(x) dx,$$

$$A = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

مثال ۳. مساحت  $A$  بین خط  $y = 2 - x$  و سهمی  $y = x^2$  را بیابید.

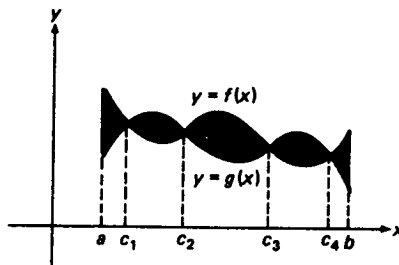
حل. برای یافتن مختصات  $x$  نقاط اشتراک خط و سهمی، معادله درجه دوم  $2 - x = x^2$  را حل کرده دو ریشه  $x = -2$  و  $x = 1$  را به دست می‌آوریم. بازه  $[-2, 1]$  خط منحنی بالایی و سهمی پایینی است (ر.ک. شکل ۱۰). بنابراین، طبق (۶)،

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^1 (2 - x - x^2) dx = 2 \int_{-2}^1 dx - \int_{-2}^1 x dx - \int_{-2}^1 x^2 dx \\ &= 2[1 - (-2)] - \frac{1}{2}[1^2 - (-2)^2] - \frac{1}{3}[1^3 - (-2)^3] \\ &= 2(3) - \frac{1}{2}(-3) - \frac{1}{3}(9) = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$



شکل ۱۰

فرض کنیم  $y = f(x)$  و  $y = g(x)$  دو منحنی به هم بافته شکل ۱۱ باشند. در این صورت،  $y = f(x)$  منحنی بالایی و  $y = g(x)$  منحنی پایینی بر بازه‌های  $[a, c_1]$ ،  $[c_2, c_3]$ ، و  $[c_4, b]$  است، ولی نقش دو منحنی بر بازه‌های  $[c_1, c_2]$  و  $[c_3, c_4]$  عوض شده،  $y = f(x)$



شکل ۱۱

منحنی پایینی و  $y = g(x)$  منحنی بالایی می‌شود. لذا، سهم بازه‌های  $[a, c_1]$ ،  $[c_2, c_3]$ ،

و  $[c_4, b]$  در انتگرال (۶) مثبت است ولی سهم  $[c_1, c_2]$  و  $[c_3, c_4]$  منفی می باشد. همانطور که در شکل علایم نشان می دهند، به کمک قضیه ۲،

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \sum_{n=1}^5 I_n,$$

که در آن

$$I_n = \int_{c_{n-1}}^{c_n} [f(x) - g(x)] dx \quad (c_0 = a, c_5 = b),$$

و  $I_1, I_3, I_5$  مثبت ولی  $I_2$  و  $I_4$  منفی می باشند. لذا، (۶) مساحت بین دو منحنی مورد بحث را نمی دهد بلکه مجموع مساحت سه ناحیه با علامت به علاوه منهای مجموع مساحت دو ناحیه با علامت منها را می دهد.

تعریف مناسب برای مساحت  $A$  بین دو منحنی بافته شده  $y = f(x)$  و  $y = g(x)$  مساوی است با

$$(۶') \quad A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx,$$

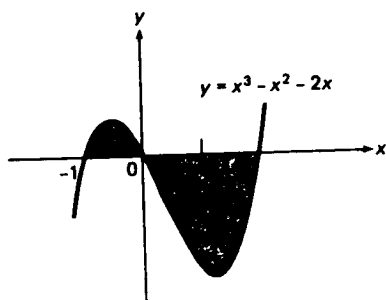
شامل قدر مطلق تفاضل  $f(x) - g(x)$ . با این تعریف، مساحت بین دو منحنی شکل ۱۱ مجموع مساحت تمام پنج ناحیه سایه دار بی توجه به علامت می باشد. توجه کنید که اگر  $f(x) \geq g(x)$ ، فرمول (۶') به فرمول (۶) قبلی تحویل می گردد.

فرض کنیم  $f(x)$  بتواند هر دو مقدار مثبت و منفی را بگیرد. با اختیار  $g(x) \equiv 0$  در (۶') معلوم می شود که  $\int_a^b |f(x)| dx$  مساحت  $A$  ی بین منحنی  $y = f(x)$  و محور  $x$  است. به آسانی معلوم می شود که  $\int_a^b f(x) dx = A_+ - A_-$ ، که در آن  $A_+$  قسمت واقع از  $A$  در بالای محور  $x$  و  $A_-$  قسمت واقع از  $A$  در زیر محور  $x$  می باشد.

مثال ۴. مساحت  $A$  ی بین منحنی  $y = x^3 - x^2 - 2x$  و محور  $x$  را بیابید. این مجموع مساحت دو ناحیه سایه دار شکل ۱۲ می باشد.

حل. با حل معادله مکعبی  $x^3 - x^2 - 2x = x(x+1)(x-2) = 0$ ، معلوم می شود که منحنی  $y = x^3 - x^2 - 2x$  دارای سه قطع  $x$  است،  $x = -1$ ،  $x = 0$ ، و  $x = 2$ . به علاوه، همانطور که شکل نشان می دهد، منحنی بالای محور  $x$  بین  $x = -1$  و  $x = 0$  و زیر محور  $x$  بین  $x = 0$  و  $x = 2$  قرار دارد. بنابراین،

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-1}^2 |x^3 - x^2 - 2x| dx = \int_{-1}^0 (x^3 - x^2 - 2x) dx - \int_0^2 (x^3 - x^2 - 2x) dx \\
 &= \int_{-1}^0 x^3 dx - \int_{-1}^0 x^2 dx - 2 \int_{-1}^0 x dx - \int_0^2 x^3 dx + \int_0^2 x^2 dx + 2 \int_0^2 x dx \\
 &= \frac{1}{4} [0^4 - (-1)^4] - \frac{1}{3} [0^3 - (-1)^3] - 2 \left( \frac{1}{2} \right) [0^2 - (-1)^2] \\
 &\quad - \frac{1}{4} (2^4 - 0^4) + \frac{1}{3} (2^3 - 0^3) + 2 \left( \frac{1}{2} \right) (2^2 - 0^2) \\
 &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 - 4 + \frac{8}{3} + 4 = \frac{7}{3} + \frac{3}{4} = \frac{37}{12}.
 \end{aligned}$$



شکل ۱۲

مقدار میانگین یک تابع  $f$  فرض کنیم تابع انتگرالپذیری بر بازه  $[a, b]$  باشد. عدد

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

مقدار میانگین (یا متوسط)  $f$  بر  $[a, b]$  یا روی  $[a, b]$  نام دارد. هرگاه، علاوه بر این،  $f$  بر  $[a, b]$  پیوسته باشد، آنگاه، همانطور که لحظه‌ای بعد نشان می‌دهیم (ر.ک. قضیه ۳۶)، همواره دست کم یک نقطه مانند  $c$  در  $[a, b]$  هست به طوری که  $f(c)$  مساوی مقدار میانگین  $f$  بر  $[a, b]$  می‌باشد.

مثال ۵. انتگرال تابع  $f(x) = x^2 + 1$  بر بازه  $[-2, 1]$  مساوی است با

$$\begin{aligned}
 \int_{-2}^1 (x^2 + 1) dx &= \int_{-2}^1 x^2 dx + \int_{-2}^1 1 dx \\
 &= \frac{1}{3} [1^3 - (-2)^3] + [1 - (-2)] = 3 + 3 = 6.
 \end{aligned}$$

از اینرو، مقدار میانگین  $f$  بر  $[-2, 1]$  مساوی است با

$$\frac{1}{1 - (-2)} \int_{-2}^1 (x^2 + 1) dx = \frac{1}{3} (6) = 2.$$

توجه کنید که  $f$  این مقدار را در دو نقطه  $1$  و  $-1$  که هر دو بازه  $[-2, 1]$  اند می گیرد.

مثال ۶. مقدار میانگین تابع  $f(x) = 1 - x^3$  بر بازه  $[0, 4]$  مساوی است با

$$\begin{aligned} \frac{1}{4 - 0} \int_0^4 (1 - x^3) dx &= \frac{1}{4} \int_0^4 dx - \frac{1}{4} \int_0^4 x^3 dx \\ &= \frac{1}{4} (4 - 0) - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{4} \right) (4^4 - 0^4) = 1 - 16 = -15, \end{aligned}$$

و  $f$  این مقدار را در نقطه  $\sqrt[3]{16} \approx 2.52$  که متعلق به  $[0, 4]$  است می گیرد.

قضیه ۳ ( قضیه مقدار میانگین برای انتگرالها ). اگر  $f$  بر  $[a, b]$  پیوسته باشد، نقطه ای مانند  $c$  در  $[a, b]$  هست به طوری که

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx = f(c),$$

یا معادلا

$$(۷) \quad \int_a^b f(x) dx = (b - a)f(c).$$

برهان. بنابر قضیه مقدار اکستريم (ر.ک. صفحه ۱۵۹)،  $f$  بر  $[a, b]$  دارای مینیم  $m$  و ماکزیم  $M$  است که در نقاط  $p$  و  $q$  بازه  $[a, b]$  گرفته می شوند. چون  $m \leq f(x) \leq M$ ، به کمک قاعده (شش)، صفحه ۳۷۸، داریم

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a),$$

یا معادلا

$$m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

لذا، مقدار میانگین  $f$  بر  $[a, b]$ ، که با  $h$  نموده می شود، متعلق به بازه  $[m, M]$  می باشد. هرگاه  $h = m$  یا  $h = M$ ، آنگاه  $h = f(p)$  یا  $h = f(q)$ ، و قضیه به ازای  $c = p$



یا  $c = q$  ثابت می‌شود. در غیر این صورت،  $m < h < M$ ، و از قضیه مقدار میانی (ر.ک. صفحه ۱۵۴) معلوم می‌شود که نقطه‌ای مانند  $c$  بین  $p$  و  $q$ ، و لذا مسلماً در  $[a, b]$ ، وجود دارد که  $h = f(c)$ .

قضیه ۳ تعبیر هندسی ساده‌ای دارد. فرض کنیم  $f$  بر  $[a, b]$  پیوسته و نامنفی باشد. در این صورت، فرمول (۷) می‌گوید که مستطیلی به طول  $b - a$  و به ارتفاعی مساوی مقدار  $f$  در نقطه  $c$  در  $[a, b]$  وجود دارد که مساحتش مساحت تحت منحنی  $y = f(x)$  از  $x = a$  تا  $x = b$  است. به صورت دیگر، با نوشتن (۷) به شکل معادل

$$(۷') \quad \int_a^b [f(x) - f(c)] dx = 0,$$

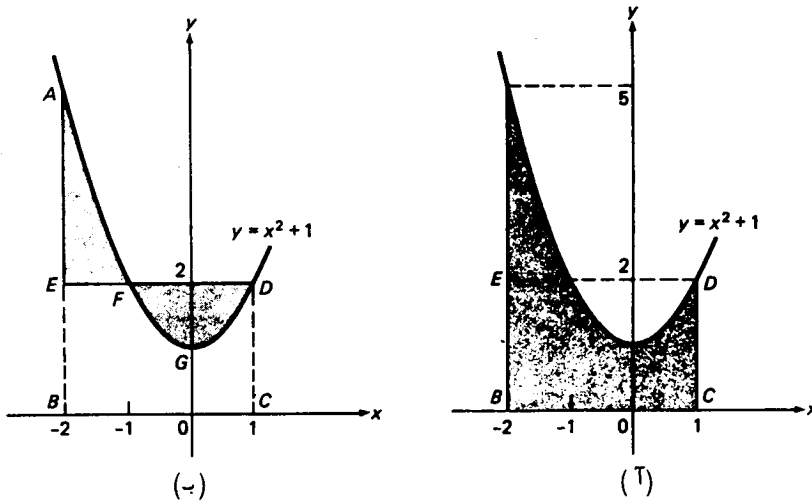
می‌بینیم که خطی افقی مانند  $y = f(c)$  وجود دارد، که  $c$  نقطه‌ای در  $[a, b]$  است، به طوری که مساحت تحت منحنی  $y = f(x)$  و بالای خط، از  $x = a$  تا  $x = b$ ، درست مساوی مساحت زیر خط و بالای منحنی است (در اینجا الزاماً باید  $f$  را نامنفی گرفت).

مثال ۷. قضیه ۳ را با اعمال بر تابع  $y = f(x) = x^2 + 1$  روی بازه  $[-2, 1]$  تعبیر هندسی کنید.

حل. همانطور که در مثال ۵ نشان دادیم، مقدار میانگین  $f$  بر  $[-2, 1]$  مساوی ۲ است. بنابراین، مساحت تحت سهمی  $y = x^2 + 1$  از  $x = -2$  تا  $x = 1$ ، یعنی مساحت ناحیه سایه‌دار شکل ۱۳ (آ)، مساوی مساحت مستطیل  $BCDE$  به طول ۳ و ارتفاع ۲ است (هر دو مساحت مساوی ۶ می‌باشند)، و ارتفاع مستطیل مساوی مقدار  $f$  در دو نقطه ۱ و ۱- بازه  $[-2, 1]$  می‌باشد. به صورت دیگر، مساحت ناحیه سایه‌دار  $AEF$  شکل ۱۳ (ب) زیر سهمی  $y = x^2 + 1$  و بالای خط  $y = 2$  مساوی مساحت ناحیه سایه‌دار  $FGD$  زیر خط و بالای سهمی است. در واقع، هر دو مساحت مساوی است با  $\frac{4}{3}$  (تحقیق کنید).

مثال ۸. به کمک قضیه ۳ نشان دهید هرگاه  $f$  بر  $[a, b]$  پیوسته و نامنفی بوده و دست کم به ازای یک نقطه مانند  $c$  در  $[a, b]$ ،  $f(c) \neq 0$ ، آنگاه

$$(۸) \quad \int_a^b f(x) dx > 0.$$



شکل ۱۳

حل. واضح است که  $f(c) > 0$ ، زیرا  $f$  بر  $[a, b]$  نامنفی است. هرگاه  $a < c < b$ ، آنگاه، بنا بر قاعده<sup>۲</sup> (دو)، صفحه<sup>۱۲۴</sup>، زیربازه‌های مانند  $[c - \delta, c + \delta]$  از بازه<sup>۳</sup>  $[a, b]$  وجود دارد که  $f$  بر آن مثبت است، زیرا  $f$  در  $c$  دارای مقدار مثبت می‌باشد. همچنین، طبق قضیه<sup>۲</sup>،

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{c-\delta} f(x) dx + \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x) dx + \int_{c+\delta}^b f(x) dx,$$

که در آن انتگرالهای اول و سوم آمده در مجموع نامنفی‌اند (چرا؟). اما، بنا بر قضیه<sup>۳</sup>، انتگرال دوم مجموع به ازای  $p$  ای در  $[c - \delta, c + \delta]$  مساوی  $2\delta f(p)$  است؛ و در نتیجه، چون  $f(p) > 0$ ، مثبت می‌باشد. لذا، نامساوی (۸) برقرار می‌باشد. برهان اساساً "مانند حالت  $c = a$  یا  $c = b$  است (این بار  $[a, b]$  را فقط به دو زیربازه تقسیم کنید). شرح جزئیات را به عنوان تمرین می‌گذاریم.

بخصوص، از مثال ۸ معلوم می‌شود که هرگاه  $f$  بر  $[a, b]$  پیوسته و نامنفی بوده و

$$\int_a^b f(x) dx = 0,$$

آنگاه  $f$  بر  $[a, b]$  متحد صفر می‌باشد.

تبصره. اگر همانطور که در قضیه<sup>۳</sup> و فرمول (۷) تلویحاً فرض شده است، به جای  $a < b$

داشته باشیم  $b < a$ ، و نیز  $f$  بر  $[b, a]$  پیوسته باشد، به جای (۷) داریم

$$\int_b^a f(x) dx = (a - b)f(c),$$

که در آن  $c$  نقطه‌ای در  $[b, a]$  می‌باشد. با ضرب طرفین این فرمول در  $-1$  به فرمول (۷) باز می‌گردیم. لذا، همواره می‌توان قضیه مقدار میانگین برای انتگرالها را به شکل (۷) به کار برد، که در آن  $c$  نقطه‌ای در بازه با نقاط انتهایی  $a$  و  $b$  است. در واقع، معلوم می‌شود (ر.ک. مسئله ۳۹) که، مثل قضیه مقدار میانگین برای مشتقات، همیشه می‌توان  $c$  را نقطه‌ای بین  $a$  و  $b$  گرفت.

## مسائل

۱. بنا بر فرمول (۹)، صفحه ۳۷۵،

$$\int_a^b x^n dx = \frac{1}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1}) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

که در آن تلویحا "فرض شده است که  $a < b$ ". نشان دهید که فرمول به ازای  $a > b$  برقرار می‌ماند.

انتگرالهای زیر را حساب کنید.

$$\int_1^{-1} (x^2 - x) dx \quad ۳ \checkmark$$

$$\int_{11}^7 x dx \quad ۲ \checkmark$$

$$\int_{-1}^3 |x^2 - 2x| dx \quad ۵ \checkmark$$

$$\int_{-2}^2 |x + 1| dx \quad ۴ \checkmark$$

$$\int_0^1 u^{10} du - \int_1^0 u^{10} du \quad ۷ \checkmark$$

$$\int_0^1 t^{10} dt + \int_1^0 t^{10} dt \quad ۶ \checkmark$$

$$\int_0^1 v^2 dv + \int_1^3 (v^2 - 1) dv + \int_3^2 (v^2 + 1) dv \quad ۸ \checkmark$$

فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x < 1 \\ x^3, & x \geq 1 \end{cases}$$

انتگرالهای زیر را محاسبه نمایید.

$$\int_2^{-1} f(x) dx \quad ۱۰ \checkmark$$

$$\int_{-2}^3 f(x) dx \quad ۹ \checkmark$$

$$\int_1^2 [f(x) - f(x-1)] dx \quad ۱۲$$

$$\int_0^2 f(x+1) dx \quad ۱۱ \checkmark$$

مساحت  $A$  ی ناحیه  $R$  بین منحنیهای زیر را بیابید .

۱۳ ✓  $y = 1 - x^2$  و  $y = x^2 - 1$

۱۴ ✓  $y = 2x - x^2$  و  $y = x^2 - 4$

۱۵ ✓  $y = x^3$  و  $y = x^2$

۱۶ ✓  $y = |x| + |x - 1|$  و  $y = x + 1$

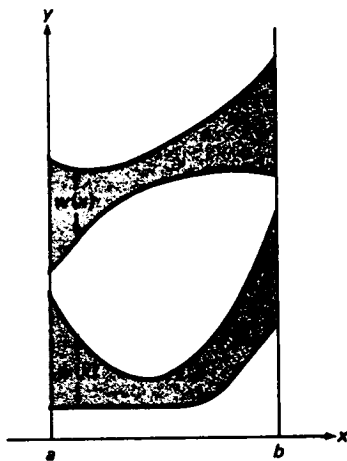
۱۷ ✓  $y = 2 - x^2$  و  $y = |x|$

۱۸ ✓  $y = 4 - x^2$  و  $y = |2x - 1|$

در هر حالت ناحیه  $R$  را رسم نمایید .

۱۹ . مساحت  $A$  ی بین منحنی  $y = x^3 - x^2 - 2x$  (ر. ک. شکل ۱۲) و خط  $y = 4x$  را بیابید .

۲۰ . فرض کنید  $R$  ناحیه محدود به خطوط قائم  $x = a$  و  $x = b$  ، منحنی بالایی  $y = f(x)$  و منحنی پایینی  $y = g(x) \leq f(x)$  باشد . گوئیم  $R$  به عرض  $w(x) = f(x) - g(x)$  است که در آن تابع  $w(x)$  بر  $[a, b]$  تعریف شده است . اصل گاولیری<sup>۱</sup> برای مساحت را ثابت کنید که می گوید دوناچه از این نوع به عرض یکسان  $w(x)$  ، مانند دو ناحیه سایه دار شکل ۱۴ ، بی توجه به انتخاب منحنیهای بالایی و پایینی ، دارای مساحت  $A$  می باشند .



شکل ۱۴

۲۱ . تعبیر هندسی متوسط تابع  $x$  روی بازه  $[a, b]$  چیست ؟

۲۲. نشان دهید که متوسط تابع  $x^2$  روی بازه  $[a, b]$  مساوی است با  $\frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)$ .

به ازای تابع  $f$  و نقاط  $a$  و  $b$  داده شده، مقدار میانگین  $f$  بر  $[a, b]$  را بیابید.

$$f(x) = 1 - x - x^2, a = 0, b = 4 \quad ۲۳ \checkmark$$

$$f(x) = x^3 - 2x + 1, a = -2, b = 3 \quad ۲۴ \checkmark$$

$$f(x) = |1 - x|, a = -1, b = 2 \quad ۲۵ \checkmark$$

$$f(x) = x^4 + 5x^2 - 10, a = -3, b = -1 \quad ۲۶ \checkmark$$

نقطه  $c$  صادق در فرمول مقدار میانگین (۷) را در صورتی بیابید که

$$f(x) = x, a = 1, b = 7 \quad ۲۷ \checkmark$$

$$f(x) = 2x + 3, a = -1, b = 3 \quad ۲۸ \checkmark$$

$$f(x) = x^2, a = 2, b = 0 \quad ۲۹ \checkmark$$

$$f(x) = 3x^2 + 1, a = 4, b = 1 \quad ۳۰ \checkmark$$

$$f(x) = |x^2 - 1|, a = -2, b = 2 \quad ۳۱ \checkmark$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{اگر } x < 0 \\ x & \text{اگر } x \geq 0 \end{cases} \quad a = -1, b = 2 \quad ۳۲$$

۳۳. فرض کنید  $f$  و  $g$  بر  $[a, b]$  پیوسته بوده، و  $f(x) \geq g(x)$  با دست کم یک نقطه  $c$  در

$[a, b]$  که  $f(c) \neq g(c)$  نشان دهید که

$$\int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx.$$

۳۴. تحقیق کنید که

$$\frac{1}{6} < \int_0^2 \frac{1}{10+x} dx < \frac{1}{5}.$$

بدون سعی در محاسبه انتگرالها، معین کنید کدام انتگرال بزرگتر است.

$$\int_0^1 x^2 dx \quad \text{یا} \quad \int_0^1 x dx \quad ۳۵ \checkmark$$

$$\int_1^2 x^2 dx \quad \text{یا} \quad \int_1^2 x dx \quad ۳۶ \checkmark$$

$$\int_0^{\pi/2} x dx \quad \text{یا} \quad \int_0^{\pi/2} \sin x dx \quad ۳۷ \checkmark$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{10} x dx \quad \text{یا} \quad \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx \quad ۳۸ \checkmark$$

۳۹. نشان دهید که نقطه  $c$  قضیه ۳ را همیشه می‌توان یک نقطه درونی بازه  $[a, b]$

گرفت.

۴۰. فرض کنید  $f$  بر  $[1, 4]$  پیوسته بوده و  $f(3) \neq 0$ . چه عدد بزرگتر است،

$$I_1 = \int_1^4 f(x) dx + \int_4^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx + \int_3^1 f(x) dx$$

یا

$$I_2 = \int_{\sqrt{3}}^{\pi} f^2(x) dx?$$

## ۴۰۴ پاد مشتقات و انتگرال نامعین

مفاهیم مطرح شده در این بخش نقشی کلیدی در بررسی بیشتر حساب انتگرال خواهند داشت. بزودی به کمک آنها قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال (قضیه ۶۰۶، صفحه ۴۰۹) را ثابت می‌کنیم، که با آن می‌توان انتگرالهای معین را بدون توسل به محاسبه صریح مجموعه‌های ریمان حساب کرد.

تعریف پادمشتق. فرض کنیم تابع  $f(x)$  بر بازه  $I$  تعریف شده باشد، و  $F(x)$  تابع دیگری باشد که بر  $I$  تعریف شده و مشتق مساوی  $f(x)$  باشد؛ در نتیجه، به ازای هر  $x$  در  $I$ ،

$$\frac{dF(x)}{dx} = F'(x) = f(x)$$

در این صورت، گوییم  $F(x)$  یک پاد مشتق  $f(x)$  بر بازه  $I$  است. در اینجا از حرف  $x$  برای متغیر مستقل استفاده می‌کنیم، ولی هر حرف دیگر به همین خوبی می‌باشد.

مثال ۱. تابع  $\frac{1}{2}x^2$  یک پاد مشتق  $x$  بر  $(-\infty, \infty)$  است، زیرا به ازای هر  $x$ ،

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{2} x^2 = \frac{1}{2} (2x) = x$$

مثال ۲. تابع  $\frac{2}{3}t^{3/2}$  یک پاد مشتق  $t^{1/2}$  بر  $(0, \infty)$  است، زیرا به ازای هر  $t$  مثبت،

$$\frac{d}{dt} \frac{2}{3} t^{3/2} = \frac{2}{3} \left( \frac{3}{2} t^{1/2} \right) = t^{1/2}$$

مثال ۳. تابع  $\tan u$  یک پاد مشتق  $\sec^2 u$  بر هر بازه‌ای است که شامل نقاط  $u = \pm \frac{1}{2}\pi, \pm \frac{3}{2}\pi, \dots$  نیست. در واقع، جز در این نقاط که هر دوی  $\tan u$  و  $\sec u$  تعریف نشده‌اند،

$$\frac{d}{du} \tan u = \sec^2 u$$

پاد مشتق کلی. هرگاه  $F(x)$  پاد مشتق  $f(x)$  بر بازه  $I$  باشد، آنگاه  $G(x) = F(x) + C$  نیز چنین است، که در آن  $C$  ثابت دلخواهی می باشد، زیرا

$$\frac{dG(x)}{dx} = \frac{d}{dx} [F(x) + C] = \frac{dF(x)}{dx} + \frac{dC}{dx} = F'(x) = f(x).$$

همانطور که اینک نشان می دهیم،  $G(x)$  پاد مشتق کلی  $f(x)$  بر  $I$  است. بدین معنی که هر پاد مشتق  $f(x)$  بر  $I$  به شکل  $G(x)$  است.

قضیه ۴ ( شکل پاد مشتق کلی ) . فرض کنیم  $F(x)$  پاد مشتقی از  $f(x)$  بر بازه  $I$  باشد. در این صورت، هر پاد مشتق دیگر  $f(x)$  بر  $I$  به شکل  $F(x) + C$  است، که در آن  $C$  ثابت می باشد.

برهان. فرض کنیم  $G(x)$  پاد مشتق دیگری از  $f(x)$  بر  $I$  بوده، و  $H(x) = G(x) - F(x)$  در این صورت، به ازای هر  $x$  در  $I$ ،

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0;$$

یعنی،  $H'(x)$  در هر نقطه از  $I$  مساوی صفر است. از قضیه ۳، صفحه ۲۶۱، معلوم می شود که  $H(x)$  در هر نقطه از  $I$  مقدار ثابتی مثلا " $C$ " دارد. بنابراین،

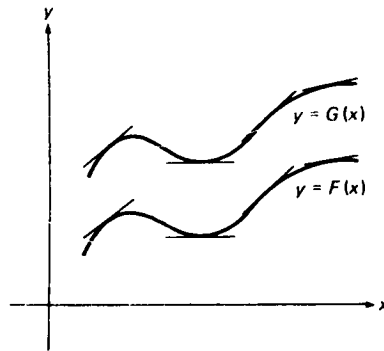
$$H(x) = G(x) - F(x) \equiv C,$$

یا معادلا " $G(x) \equiv F(x) + C$ ".

لذا، دو تابع که بر بازه ای مشتق یکسان داشته باشد فقط می توانند در یک ثابت فرق داشته باشند. به طور هندسی، این یعنی هرگاه دو منحنی روی یک بازه در هر جفت نقطه با طول یکسان شیب یکسانی داشته باشند، آنگاه هر منحنی را می توان از دیگری با انتقال قائم مناسی به دست آورد، و این امر در شکل ۱۵ با دو منحنی  $y = F(x)$  و  $y = G(x)$  نموده شده است.

مثال ۴. از

$$\frac{d}{dx} (4 - \cos x) = \sin x, \quad \frac{d}{dx} \left( 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right) = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \sin x$$



شکل ۱۵

نتیجه می شود که

$$4 - \cos x \equiv 2 \sin^2 \frac{x}{2} + C$$

و با اختیار  $x = 0$  معلوم می شود که  $C = 3$ . این اتحاد مثلثاتی را به عنوان تمرین ثابت کنید.

تعریف انتگرال نامعین. هم اکنون نشان دادیم که هرگاه  $F(x)$  یک پاد مشتق  $f(x)$  بر  $I$  باشد، آنگاه پاد مشتق کلی  $f(x)$  بر  $I$  با  $F(x) + C$  داده می شود، که در آن  $C$  ثابت دلخواهی است. عبارت  $F(x) + C$  انتگرال نامعین  $f(x)$  نام دارد و با  $\int f(x) dx$  نموده می شود. لذا، طبق تعریف،

$$(1) \quad \int f(x) dx = F(x) + C,$$

در نتیجه، انتگرال نامعین فقط با تقریب یک "ثابت جمعی" دلخواه تعریف شده است. در اینجا نماد همان نماد انتگرال معین است، جز آنکه حدود انتگرالگیری وجود ندارند. عدم وجود حدود انتگرالگیری به ما می گوید که انتگرال نامعین  $\int f(x) dx$ ، به خلاف انتگرال معین  $\int_a^b f(x) dx$  که عدد است، تابعی (به علاوه یک ثابت دلخواه) می باشد. مثل قبل، تابع  $f(x)$  انتگرالده، شناسه اش (در این حالت  $x$ ) متغیر انتگرالگیری، و عملی که ما را از  $f(x)$  به عبارت (۱) می رساند انتگرالگیری (نامعین) نام دارد. ثابت  $C$  در (۱) ثابت انتگرالگیری نامیده می شود.

در نوشتن (۱) تلویحا "فرض شده است که فرمول به ازای هر  $x$  در بازه  $I$  زمینه  $I$  که بر آن  $f$  و  $F$  تعریف شده اند یک اتحاد است؛ با اینحال،  $I$  معمولا "نامشخص رهامی" شود.



با مشتگیری از (۱) به دست می‌آوریم

$$\frac{d}{dx} \int f(x) dx = \frac{d}{dx} [F(x) + C] = F'(x),$$

در نتیجه ،

$$(۲) \quad \frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x).$$

چون این یک پاد مشتق است ، انتگرال نامعین باید همان شناسهء انتگرالده را داشته باشد. مثلاً ،

$$\int x dx = \frac{1}{2} x^2 + C, \quad \int t dt = \frac{1}{2} t^2 + C,$$

و در این حالت

$$\int x dx \neq \int t dt.$$

در اینجا ، به‌خلاف انتگرال معین ، متغیر انتگرالگیری یک متغیر ظاهری نیست .

چون هر تابع مشتقپذیر  $f(x)$  پاد مشتقی از مشتق خود  $f'(x)$  است ، داریم

$$(۳) \quad \int f'(x) dx = f(x) + C.$$

این فرمول را می‌توان برای به دست آوردن یک فرمول انتگرالگیری از هر فرمول مشتقگیری به کار برد . مثلاً ، هرگاه  $r$  یک عدد گویا و مخالف ۱- باشد ، آنگاه

$$\frac{d}{dx} \frac{x^{r+1}}{r+1} = \frac{(r+1)x^r}{r+1} = x^r,$$

و کاربرد (۳) نتیجه می‌دهد که

$$(۴) \quad \int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad (r \neq -1).$$

اگر  $r = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{2}$  به نوبت اختیار شوند ، به دست می‌آوریم

$$\int x dx = \frac{1}{2} x^2 + C,$$

$$\int x^{1/2} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + C,$$

$$\int x^{1/3} dx = \frac{3}{4} x^{4/3} + C,$$

$$\int dx = x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$$

دو فرمول اول در مثالهای ۱ و ۲ پیش‌بینی شده بودند. در آخرین فرمول، از رسم معمول استفاده کرده

$$\int \frac{1}{f(x)} dx \quad \text{را به صورت} \quad \int \frac{dx}{f(x)}$$

می‌نویسیم.

به همین نحو، فرمولهای مشتق توابع مثلثاتی (ر. ک. صفحه ۲۱۱) ما را به فرمولهای انتگرالگیری زیر می‌رسانند:

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C,$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C,$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C,$$

$$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C,$$

$$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C,$$

$$\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C.$$

قواعد برای انتگرالگیری نامعین. حال چند قاعده به دست می‌آوریم که انتگرالهای نامعین تحت تبعیت آنها می‌باشند.

(یک) هرگاه  $f$  انتگرال نامعین (پاد مشتق) داشته و  $c$  ثابت دلخواهی باشد، آنگاه

$$(۵) \quad \int cf(x) \, dx = c \int f(x) \, dx.$$

در واقع، عبارت سمت راست پاد مشتقی از  $cf(x)$  است، زیرا به کمک فرمول (۲)

$$\frac{d}{dx} \left( c \int f(x) \, dx \right) = c \frac{d}{dx} \int f(x) \, dx = cf(x),$$

به علاوه،  $\int f(x) \, dx$  فقط با تقریب یک ثابت جمعی دلخواه تعریف شده است؛ و در نتیجه،

همین امر در مورد  $\int f(x) dx = c$  صادق است. لذا، در یک انتگرال نامعین، هر ثابت ضربدر انتگرالده را می‌توان، درست مثل انتگرال معین، خارج کرده جلو علامت انتگرال قرار داد.

(دو) هرگاه  $f$  و  $g$  بر بازه<sup>۶</sup> یکسانی انتگرال نامعین (پاد مشتق) داشته باشند، آنگاه

$$(۶) \quad \int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

برای اثبات این امر، ملاحظه می‌کنیم که مجموع انتگرالهای سمت راست یک پاد مشتق  $f + g$  است، زیرا

$$\frac{d}{dx} \left( \int f(x) dx + \int g(x) dx \right) = \frac{d}{dx} \int f(x) dx + \frac{d}{dx} \int g(x) dx = f(x) + g(x).$$

به علاوه، هر انتگرال  $\int f(x) dx$  و  $\int g(x) dx$  فقط با تقریب یک ثابت جمعی دلخواه تعریف شده است؛ و در نتیجه، همین امر برای مجموع آنها نیز درست است. لذا، انتگرال نامعین مجموع دو تابع مجموع انتگرالهای نامعین تک تک توابع می‌باشد. این مشابه قاعده<sup>۶</sup> انتگرالهای نامعین (دو)، صفحه<sup>۶</sup> ۳۷۶، می‌باشد.

(سه) هرگاه  $f_1, f_2, \dots, f_n$  بر بازه<sup>۶</sup> واحدی انتگرال نامعین داشته و  $c_1, c_2, \dots, c_n$  ثابتهای دلخواهی باشند، آنگاه، درست مثل انتگرالهای معین (ر.ک. صفحه<sup>۶</sup> ۳۷۷)،

$$(۷) \quad \begin{aligned} & \int [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x)] dx \\ &= c_1 \int f_1(x) dx + c_2 \int f_2(x) dx + \dots + c_n \int f_n(x) dx, \end{aligned}$$

فرمول ۷ با کاربرد مکرر فرمولهای (۵) و (۶) ثابت می‌شود. لذا، انتگرال نامعین هر ترکیب خطی از توابع ترکیبی خطی، با همان ضرایب، از انتگرالهای نامعین تک تک توابع می‌باشد. (چهار) هرگاه  $f$  دارای پاد مشتق  $F$  باشد، در نتیجه  $\int f(x) dx = F(x) + C$ ، آنگاه به ازای ثابتهای دلخواه  $a \neq 0$  و  $b$ ،

$$(۸) \quad \int f(ax + b) dx = \frac{F(ax + b)}{a} + C$$

در واقع، چون  $F'(x) = f(x)$ ، به کمک قاعده<sup>۶</sup> زنجیره‌ای داریم

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{F(ax + b)}{a} &= \frac{1}{a} \frac{d}{dx} F(ax + b) = \frac{1}{a} F'(ax + b) \frac{d}{dx} (ax + b) \\ &= \frac{a}{a} F'(ax + b) = f(ax + b), \end{aligned}$$

### انتگرالها ۴۰۳

لذا ،  $(1/a)F(ax + b)$  یک پادمشتق  $f(ax + b)$  است ، که (۸) را ثابت خواهد کرد .

حال در وضعی هستیم که چند انتگرال نامعین را حساب کنیم . همین طور که حساب انتگرال را پی می گیریم ، تکنیکهای دیگر انتگرالگیری وارد کار خواهند شد . بخصوص ، قاعده (چهار) حالت خاص مهمی است از یک روش کلی به نام انتگرالگیری با جانشانی ( ر . ک . بخش ۱۰۷ ) .

مثال ۰۵  $\int (5x^4 - 6x^2 + \frac{2}{x^2}) dx$  را حساب کنید .

حل . بنابر قاعده (سه) ، پس از آنکه فرمول (۴) سه بار ( به ازای  $r = 4, 2, -2$  ) به کار رفت ، داریم

$$\begin{aligned} \int (5x^4 - 6x^2 + \frac{2}{x^2}) dx &= 5 \int x^4 dx - 6 \int x^2 dx + 2 \int x^{-2} dx \\ &= 5 \left( \frac{x^5}{5} \right) - 6 \left( \frac{x^3}{3} \right) + 2 \left( \frac{x^{-1}}{-1} \right) + C \\ &= x^5 - 2x^3 - \frac{2}{x} + C. \end{aligned}$$

توجه کنید که ثابتهای دلخواه انتگرالگیری ناشی از سه انتگرال جداگانه باهم تلفیق وثابت انتگرالگیری  $C$  را به وجود آورده اند .

مثال ۰۶ . انتگرال نامعین چند جمله ای دلخواه

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

که در آن  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  ثابت اند ، را محاسبه کنید .

حل . فرض کنیم  $a_n \neq 0$  ؛ در نتیجه ،  $P(x)$  از درجه  $n$  است . بنابر قاعده (سه) و کاربرد مکرر فرمول (۴) ، داریم

$$\begin{aligned} \int P(x) dx &= a_0 \int dx + a_1 \int x dx + a_2 \int x^2 dx + \dots + a_n \int x^n dx \\ &= a_0x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \dots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + C, \end{aligned}$$

که چندجمله‌ای دیگری است، در واقع یک چندجمله‌ای از درجه  $n+1$  است، زیرا ضریب  $x^{n+1}$  ناصفر می‌باشد. باید توجه داشت که مشتگیری از این چندجمله‌ای جدید فوراً "ما را به چندجمله‌ای اصلی  $P(x)$  برمی‌گرداند، و نشان می‌دهد که محاسبات درست انجام شده است.

مثال ۷.  $\int \cos 2x \, dx$  را حساب کنید.

حل. بنابر قاعده<sup>۴</sup> (چهار) به ازای  $a = 2$ ،  $b = 0$ ،  $f(x) = \cos x$ ، و  $F(x) = \sin x$ ،

$$\int \cos 2x \, dx = \frac{\sin 2x}{2} + C.$$

مثال ۸.  $\int \cos^2 x \, dx$  را حساب کنید.

حل. چون

$$1 + \cos 2x = 1 + \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x,$$

به کمک مثال ۷ داریم

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \, dx &= \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C. \end{aligned}$$

می‌توان  $C$  را نصف مجموع ثابت‌های دلخواه انتگرالگیری ناشی از انتگرالهای  $\int dx$  و  $\int \cos 2x \, dx$  گرفت، یا در آخر محاسبات یک ثابت دلخواه وارد کرد.

مثال ۹.  $\int (1-u)(1+u+u^2) \, du$  را حساب کنید.

حل. در اینجا متغیر انتگرالگیری به جای  $x$ ،  $u$  است. با انجام ضرب در انتگرالده در می‌یابیم که، بنابر قاعده<sup>۴</sup> (سه) و فرمول (۴) یا تشخیص اینکه  $u - \frac{1}{4}u^4$  یک پاد مشتق  $1 - u^3$  است،

$$\int (1-u)(1+u+u^2) \, du = \int (1-u^3) \, du = u - \frac{1}{4}u^4 + C,$$

## انتگرالها ۴۰۵

وجود پادمشتقهای توابع پیوسته. ما از قبل می دانیم که هر تابع پیوسته انتگرال معین دارد (ر.ک. قضیه ۱، صفحه ۳۷۱). حال نشان می دهیم که هر تابع پیوسته پاد مشتق، و در نتیجه، انتگرال نامعین دارد.

قضیه ۵ (پیوستگی وجود پاد مشتق را ایجاب می کند). فرض کنیم  $f$  بر بازه  $I$  پیوسته بوده، و

$$(9) \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

که در آن  $a$  نقطه ثابتی از  $I$  و  $x$  نقطه متغیری از  $I$  باشد. در این صورت،  $F$  یک پاد مشتق  $f$  بر  $I$  است. یعنی، به ازای هر  $x$  در  $I$ ،  $F'(x) = f(x)$ .

برهان. پیش از شروع به اثبات، متذکر می شویم که انتگرال معین (۹)، که وجودش را پیوستگی  $f$  تضمین می کند، تابعی است از حد بالایی انتگرالگیری متغیر  $x$ . در واقع، وجود  $x$  در حد بالایی ما را به استفاده از حرف دیگر (در اینجا  $t$ ) برای متغیر انتگرالگیری مجبور می سازد.

حال فرض کنیم  $x$  و  $x + \Delta x$  هر دو متعلق به بازه  $I$  باشند. بنابراین نتیجه صفحه ۳۸۳

$$F(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt,$$

یا معادلا

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt.$$

اگر قضیه مقدار میانگین برای انتگرالها را در مورد انتگرال سمت راست که از نقطه ثابت  $a$  مستقل است اعمال کنیم، به دست می آوریم

$$F(x + \Delta x) - F(x) = (x + \Delta x - x)f(c) = f(c)\Delta x,$$

که در آن بسته به اینکه  $\Delta x$  مثبت یا منفی باشد،  $x \leq c \leq x + \Delta x$  یا  $x + \Delta x \leq c \leq x$ . بنابراین، طبق پیوستگی نقطه  $c$  وابسته به  $\Delta x$  است، و بخصوص وقتی  $\Delta x \rightarrow 0$ ،  $c \rightarrow x$ . بنابراین، وقتی  $\Delta x \rightarrow 0$ ،  $f(c) \rightarrow f(x)$ . لذا، مشتق  $F$  در هر نقطه  $x$  از  $I$  مساوی است

۱۱

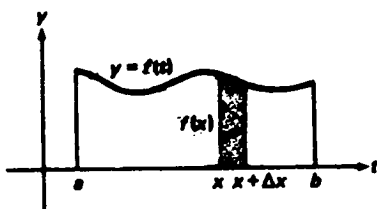
$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c) \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) = f(x),$$

در نتیجه،  $F$  یک پادمشتق  $f$  بر  $I$  می باشد.

مشتقگیری از یک انتگرال با حد بالایی متغیر. البته، تابع  $F$  بر  $I$  پیوسته است، زیرا بر  $I$  مشتقپذیر می باشد. قضیه ۵ را می توان به طور فشرده چنین نوشت:

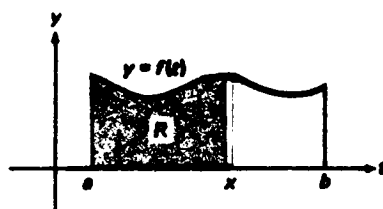
$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x),$$

و این تعبیر هندسی ساده‌ای دارد. فرض کنیم  $I = [a, b]$  و  $f(t) \geq 0$ . همانطور که شکل ۱۶ (ت) نشان می دهد،  $F(x)$  مساحت ناحیه سایه دار  $R$  تحت منحنی  $y = f(t)$  از  $t = a$  تا  $t = x$  است، و قضیه می گوید که وقتی  $x$  افزایش یابد،  $F(x)$  به میزانی مساوی ارتفاع  $f(x)$  ناحیه  $R$  در گوشه راست بالایی آن افزایش خواهد یافت. این معنی دارد، زیرا افزایش  $x$  به  $x + \Delta x$  سبب افزایش مساحت  $R$  به اندازه  $\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x)$  می شود، که مساحت نوار تقریباً "مستطیلی باریک تحت منحنی  $y = f(t)$  از  $t = x$  تا  $t = x + \Delta x$  است، و مساحت این نوار که در شکل ۱۶ (ب) نموده شده تقریباً "مساوی  $f(x) \Delta x$  است با خطایی نسبی که وقتی  $\Delta x \rightarrow 0$  به صفر می رود.



مساحت سایه دار دقیقاً "مساوی  $F(x + \Delta x) - F(x)$  و تقریباً "مساوی  $f(x) \Delta x$  است.

(ب)



مساحت سایه دار مساوی است

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

(ت)

شکل ۱۶

۱. اگر  $x$  نقطه انتهایی چپ یا راست  $I$  باشد، در عوض فرض می کنیم  $\Delta x \rightarrow 0^+$  یا  $\Delta x \rightarrow 0^-$ .  $F(x)$  را مشتق راست یا چپ تعبیر می کنیم. در این صورت، لازم نیست  $f$  خارج  $I$  تعریف شده باشد. اگر بازه  $I$  باز باشد، این بحث مطرح نخواهد بود.

## انتگرالها ۴۰۷

از قضیه ۵ فوراً نتیجه می‌شود که هرگاه  $f$  بر بازه  $I$  پیوسته باشد، آنگاه  $f$  بر  $I$  انتگرال نامعین دارد. درواقع، چون تابع (۹) یک پادمشتق  $f$  بر  $I$  است، انتگرال نامعین  $f$  مساوی است با

$$\int f(x) dx = \int^x f(t) dt + C,$$

که در آن  $C$  یک ثابت دلخواه است.

مثال ۱۰. اگر  $r = -1$ ، نمی‌توان فرمول انتگرالگیری اساسی

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$$

را به کار برد. درواقع،  $r = -1$  مخرج سمت راست را صفر می‌کند. از آن سو، تابع  $1/x$  بر هر بازه‌ای که شامل نقطه  $x = 0$  نباشد پیوسته است؛ ولذا، طبق قضیه ۵، بر هر چنین بازه پادمشتق دارد. به عبارت دیگر، انتگرال نامعین

$$\int \frac{dx}{x}$$

موجود است، اگر چه هنوز نام این تابع را نمی‌دانیم. در بخش ۱۰.۶ این تابع را، که لگاریتم طبیعی  $x$  بوده و با  $\ln x$  نموده می‌شود، بررسی خواهیم کرد.

## مسائل

پادمشتق کلی تابع داده شده را بیابید.

- |   |  |
|---|--|
| $x(x-1)(x-2)$ . ۲ ✓                             | $x^2 + x + 2$ . ۱ ✓  |
| $\frac{3}{2}x^{3/2} + \frac{3}{2}x^{2/3}$ . ۴ ✓ | $x^{49} - 5x^{24} + 20x^9 - 10$ . ۳ ✓                      |
| $(1+x+x^2)/x^4$ . ۶ ✓                           | $x^{-3/4} - x^{-4/3}$ . ۵ ✓                                |
| $5 \sec^2 x + 4 \csc^2 x$ . ۸ ✓                 | $2 \sin x - 3 \cos x$ . ۷ ✓                                |
| $(3+2u)(9-6u+4u^2)$ . ۱۰ ✓                      | $(1-t)(1+t)(1+t^2)$ . ۹ ✓                                  |
|   | $(2-3v)(4+6v+9v^2)$ . ۱۱ ✓                                 |
|   | $\frac{1}{2}w^4 - \frac{1}{2}w^2 + 8 \sec w \tan w$ . ۱۲ ✓ |

۱۳. نشان دهید. هرگاه  $F(x)$  پادمشتقی از  $f(x)$  باشد، آنگاه  $F(-x) - F(x)$  پادمشتقی از  $f(-x)$  است.

۱۴. با استفاده از مشتقگیری، نشان دهید  $\sin^2 x = C - \frac{1}{2} \cos 2x$ ، که در آن  $C$  ثابت است.



و سپس C را پیدا کنید .

۱۵. در باب تابع  $f(x)$  که مشتق  $n$  می  $f^{(n)}(x)$  متحد صفر است چه می توان گفت ؟  
انتگرالهای زیر را حساب کنید .

$$\int (x+5)(x-6) dx \cdot 16 \checkmark$$

$$\int (x^4 - 3x^2 + 2x - 4) dx \cdot 17 \checkmark$$

$$\int x(1+x)(1-x) dx \cdot 18 \checkmark$$

$$\int \left( x^3 - x + \frac{1}{x^2} - \sin 3x \right) dx \cdot 19 \checkmark$$

$$\int t^2(5-t)^4 dt \cdot 20 \checkmark$$

$$\int (1-u)(1-2u)(1-3u) du \cdot 21 \checkmark$$

$$\int \frac{v+1}{\sqrt{v}} dv \cdot 22 \checkmark$$

$$\int \tan^2 x dx \cdot 24 \checkmark$$

$$\int \sin^2 x dx \cdot 23 \checkmark$$

$$\int \sin x \cos x dx \cdot 25 \checkmark$$

$$\int \cot^2 x dx \cdot 25 \checkmark$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} \cdot 28 \checkmark$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx \cdot 27 \checkmark$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx \cdot 30 \checkmark$$

$$\int \frac{\sin 2x}{\sin x} dx \cdot 29 \checkmark$$

$$\int \frac{\sin 3v}{\sin v} dv \cdot 32 \checkmark$$

$$\int \frac{\cos 3u}{\cos u} du \cdot 31 \checkmark$$

$$\int \frac{z^4 - 16}{z + 2} dz \cdot 34 \checkmark$$

$$\int \frac{w^4 - 1}{w - 1} dw \cdot 33 \checkmark$$

$$\int \frac{1 + \cos^3 x}{1 + \cos x} dx \cdot 36 \checkmark$$

$$\int \frac{1 - \sin^3 x}{1 - \sin x} dx \cdot 35 \checkmark$$

$$\frac{d}{da} \int_a^b f(x) dx \cdot 38$$

$$\frac{d}{dx} \int_a^b f(x) dx \cdot 37 \checkmark$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^x t^{50}(1-t)^{50} dt \cdot ۴۰$$

$$\frac{d}{db} \int_a^b f(x) dx \cdot ۳۹$$

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 (2 + \tan t)^{99} dt \cdot ۴۲$$

$$\frac{d}{dt} \int_1^t (1 + \sin x)^{25} dx \cdot ۴۱$$

۴۳. نشان دهید که قضیه ۵ را می‌توان بدون استفاده از قضیه مقدار میانگین برای انتگرالها ثابت کرد. سپس نشان دهید که می‌توان قضیه مقدار میانگین برای انتگرالها را از قضیه مقدار میانگین برای مشتقات نتیجه گرفت (قضیه ۲، صفحه ۲۵۸).

#### ۵.۴ قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

قضیه اساسی زیر ارتباط نزدیک بین حساب دیفرانسیل و حساب انتگرال را آشکار خواهد ساخت. در عین حال، ابزار توانایی برای محاسبه انتگرالهای معین به ما می‌دهد.

قضیه ۶ (قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال). هرگاه  $f$  بر  $[a, b]$  پیوسته باشد،  
نگاه

$$(۱) \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

که در آن  $F$  یک پادمشتق  $f$  بر  $[a, b]$  است.

برهان. بنابر قضیه ۵، صفحه ۴۰۵،

$$F_0(x) = \int_a^x f(t) dt$$

یک پادمشتق  $f$  بر  $[a, b]$  است. در اینجا به  $F$  زیرنویس صفر داده‌ایم تا بزرگ پادمشتق خاص  $f$ ، به جای پادمشتق دلخواه  $f$ ، تأکید کرده باشیم. فرض کنیم  $F$  پادمشتق دیگری از  $f$  بر  $[a, b]$  باشد. بنابر قضیه ۴، صفحه ۳۹۸،

$$(۲) \quad F_0(x) = F(x) + C,$$

که در آن  $C$  ثابت می‌باشد. برای تعیین  $C$ ، ملاحظه می‌کنیم

$$F(a) + C = F_0(a) = \int_a^a f(t) dt = 0,$$

که  $C = -F(a)$  را ایجاب می‌کند. با گذاردن این مقدار  $C$  در (۲)، به دست می‌آوریم

$$F_0(x) = F(x) - F(a).$$

بالاخره، با فرض  $x = b$  و تغییر متغیر ظاهری انتگرالگیری از  $t$  به  $x$  خواهیم داشت

$$F_0(b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

و برهان تمام خواهد بود.

در بعضی از کتب، قضایای ۵ و ۶ در یک قضیه دوقسمتی تلفیق شده و قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال نام یافته است. همچنین، برهانی از قضیه ۶ وجود دارد که، به جای قضیه ۵، بر قضیه مقدار میانگین برای مشتقات، استوار است (ر. ک. مسئله ۴۱). این امر که طرف راست فرمول (۱) به انتخاب پادمشتق  $f$  بستگی ندارد را می توان به آسانی با محاسبه مستقیم تحقیق کرد: فرض کنیم  $G$  پادمشتق دیگری از  $f$  بر  $[a, b]$  باشد. در این صورت،  $G = F + C$ ، که در آن  $C$  ثابت است؛ و لذا،

$$G(b) - G(a) = [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a),$$

یعنی،  $C$  در تشکیل تفاضل بین مقادیر پادمشتق در  $a$  و  $b$  حذف می شود. همچنین، باید توجه داشت که فرمول (۱) به ازای  $b < a$  برقرار می ماند مشروط بر اینکه  $f$  بر  $[a, b]$  پیوسته باشد، زیرا در این صورت داریم

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx = -[F(a) - F(b)] = F(b) - F(a).$$

در اینجا نمادگذاری دیگری مفید است. به ازای تابع  $F(x)$  تعریف شده به ازای  $x = a$

و  $x = b$

$$F(x) \Big|_a^b \quad \text{یا} \quad \left[ F(x) \right]_a^b$$

تفاضل  $F(b) - F(a)$  را نشان می دهد. با این نماد می توان (۱) را فشرده تر به صورت زیر نوشت:

$$(1') \quad \int_a^b f(x) dx = \left[ F(x) \right]_a^b.$$

به علاوه، چون

$$\left[ F(x) \right]_a^b = \left[ F(x) + C \right]_a^b = \left[ \int f(x) dx \right]_a^b,$$

می توان (۱') را به صورت زیر نوشت:

$$\int_a^b f(x) dx = \left[ \int f(x) dx \right]_a^b.$$

این صورت اخیر قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال رابطه بین انتگرالهای معین و نامعین  $f$  را خیلی صریح نشان می دهد.

## انتگرالها ۴۱۱

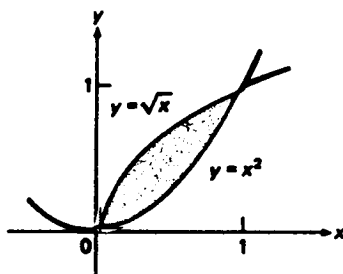
از فرمول (۱') و فرمول (۴)، صفحه ۴۰۰، معلوم می‌شود که اگر  $r$  عدد گویایی مخالف ۱- باشد،

$$\int_a^b x^r dx = \left[ \frac{x^{r+1}}{r+1} \right]_a^b = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r+1}$$

اگر  $r$  را عدد صحیح مثبتی چون  $n$  بگیریم، فوراً "فرمول (۹)"، صفحه ۳۷۵، به دست می‌آید که مدتی است آزادانه به کار برده می‌شود. اگر  $r$  منفی باشد، بازه  $[a, b]$  یا  $[b, a]$  اگر  $b < a$  نباید شامل نقطه  $x = 0$  باشد، زیرا در غیر این صورت  $x^r$  بر  $[a, b]$  پیوسته نبوده و قضیه ۶ به کار نخواهد رفت.

مثال ۱. مساحت بین منحنیهای  $y = \sqrt{x}$  و  $y = x^2$  را بیابید.

حل. ما در پی مساحت  $A$  ناحیه سایه‌دار شکل ۱۷ هستیم. برای یافتن مختصات  $x$  نقاط



شکل ۱۷

تقاطع منحنیها، معادله  $\sqrt{x} = x^2$  را حل کرده دو ریشه  $x = 0$  و  $x = 1$  را به دست می‌آوریم. بنابراین،

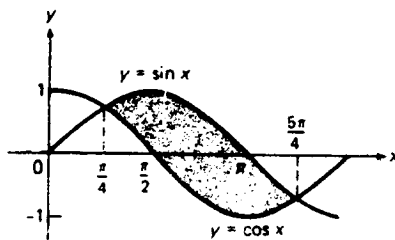
$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx,$$

زیرا  $y = \sqrt{x}$  منحنی بالایی و  $y = x^2$  منحنی پایینی بر بازه  $[0, 1]$  می‌باشد. انتگرال را با استفاده از قضیه ۶ حساب می‌کنیم، خواهیم داشت

$$A = \left[ \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

مثال ۲. مساحت بین منحنیهای  $y = \cos x$  و  $y = \sin x$  را از  $x = \pi/4$  تا  $x = 5\pi/4$  بیابید.

حل. این بار مساحت  $A$  ی ناحیه سایه دار شکل ۱۸ را می‌خواهیم. چون  $y = \sin x$  منحنی



شکل ۱۸

بالایی و  $y = \cos x$  منحنی پایینی بر بازه  $[\pi/4, 5\pi/4]$  است، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} A &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x) dx = \left[ -\cos x - \sin x \right]_{\pi/4}^{5\pi/4} \\ &= -\cos \frac{5\pi}{4} - \sin \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

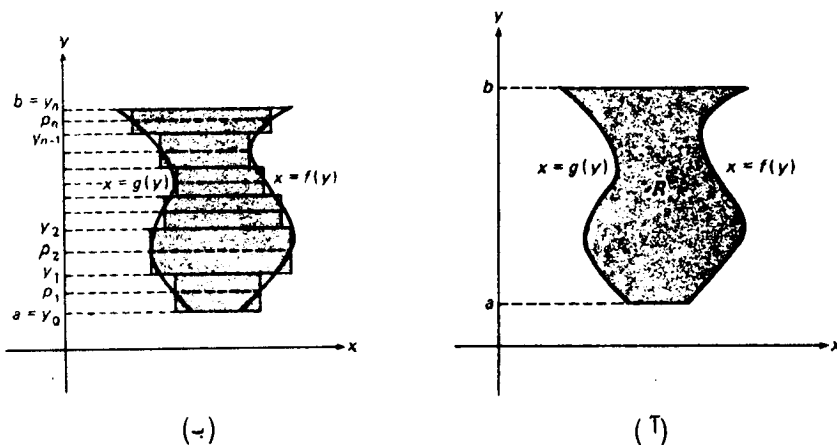
نکات دیگر راجع به مساحت بین دو منحنی. در مشخص کردن منحنیها اغلب شایسته است عرض  $y$  را متغیر مستقل و طول  $x$  را متغیر وابسته بگیریم؛ این عکس کاری است که تا بحال شده است. فرض کنیم  $f(y)$  و  $g(y)$  دو تابع پیوسته بر بازه  $a \leq y \leq b$  بوده، و  $f(y) \geq g(y)$  در این صورت، خطوط افقی  $y = a$  و  $y = b$  و منحنیهای  $x = f(y)$  و  $x = g(y)$  مرز  $R$  را مثل شکل ۱۹ (آ) می‌سازند. با همان استدلال بخش ۳.۴. انتها در مورد نوارهای افقی به جای قائم، درمی‌یابیم که مساحت  $A$  ی ناحیه  $R$  از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$(۳) \quad A = \int_a^b [f(y) - g(y)] dy.$$

به‌طور مشروح،  $A$  را با مجموعی به شکل

$$(۴) \quad \sum_{i=1}^n [f(p_i) - g(p_i)] \Delta y_i$$

تقریب می‌کنیم که مبتنی بر افراز بازه  $[a, b]$  به  $n$  زیر بازه  $[y_{i-1}, y_i]$ ،  $i = 1, 2, \dots, n$  است با  $y_0 = a$ ،  $y_n = b$  که  $[y_{i-1}, y_i]$  به طول  $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$  بوده و  $p_i$  نقطه دلخواهی در  $[y_{i-1}, y_i]$  می‌باشد. این تقریب نظیر تعویض نوارها به اضلاع خمیده شکل ۱۹ (ب) با مستطیل‌های سایه دار است. در این صورت،  $A$  را حد مجموع (۴) می‌گیریم وقتی اندازه مش



شکل ۱۹

$\mu = \max \{\Delta y_1, \Delta y_2, \dots, \Delta y_n\}$  به صفر نزدیک شود:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [f(p_i) - g(p_i)] \Delta y_i = \int_a^b [f(y) - g(y)] dy.$$

البته، فرمول (۳) با فرمول

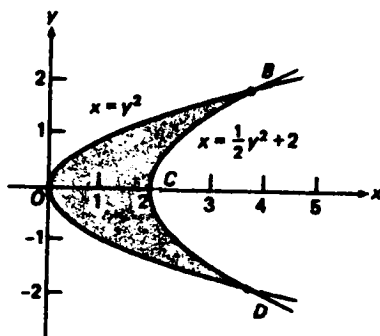
$$(۳') \quad A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

برای مساحت ناحیهء محدود به خطوط قائم  $x = a$  و  $x = b$  و منحنیهای  $y = f(x)$  و  $y = g(x)$  که  $f(x) \geq g(x)$  کاملاً" مشابه است، و برای به دست آوردن یکی از آنها از دیگری فقط کافی است  $x$  را با  $y$  یا  $y$  را با  $x$  عوض نماییم.

مثال ۳. مساحت بین منحنیهای  $x = y^2$  و  $x = \frac{1}{2}y^2 + 2$  را بیابید.

حل. ما در پی مساحت  $A$  ی ناحیهء سایه دار در شکل ۲۰ هستیم که به منحنیهای داده شده که سهمیهای مقارنی نسبت به محور  $x$  هستند محدود است. مختصات  $y$  نقاط اشتراک سهمیها عبارتند از ریشه های  $y = 2$  و  $y = -2$  معادله  $y^2 = \frac{1}{2}y^2 + 2$ . بنابراین، طبق فرمول (۳)،

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^2 \left( \frac{1}{2}y^2 + 2 - y^2 \right) dy = \int_{-2}^2 \left( 2 - \frac{1}{2}y^2 \right) dy = \left[ 2y - \frac{1}{6}y^3 \right]_{-2}^2 \\ &= 2(2) - \frac{1}{6}(2)^3 - 2(-2) + \frac{1}{6}(-2)^3 = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$



شکل ۲۰

چون ناحیه سایه‌دار  $OBD$  نسبت به محور  $x$  متقارن است، دوزیر ناحیه  $OBC$  و  $ODC$  مساحت یکسان خواهند داشت. لذا، محاسبات را می‌توان از ابتدا با نوشتن

$$\begin{aligned}
 A &= 2 \int_0^2 \left( 2 - \frac{1}{2} y^2 \right) dy = 2 \left[ 2y - \frac{1}{6} y^3 \right]_0^2 \\
 (5) \quad &= 2 \left[ 2(2) - \frac{1}{6} (2)^3 \right] = \frac{16}{3}
 \end{aligned}$$

ساده نمود.

اگر  $x$  را متغیر مستقل و  $y$  را متغیر وابسته بگیریم، محاسبات پیچیده می‌شوند. حال باید بین چهار تابع، یعنی  $y = \pm \sqrt{x}$  که از حل  $x = y^2$  نسبت به  $y$  به دست می‌آید و  $y = \pm \sqrt{2x-4}$  که از حل  $x = \frac{1}{2}y^2 + 2$  نسبت به  $y$  حاصل می‌شود فرق بگذاریم. مجدداً، می‌توان با محاسبه مساحت  $OBC$  و مضاعف کردن جواب زحمت کار را کم کرد. ولی مشکل جدیدی پیش می‌آید، زیرا با آنکه  $y = \sqrt{x}$  منحنی بالایی بر تمام بازه  $0 \leq x \leq 4$  است، محور  $x$  منحنی پایینی بر زیربازه  $0 \leq x \leq 2$  و  $y = \sqrt{2x-4}$  منحنی پایینی بر زیربازه  $2 \leq x \leq 4$  می‌باشد. با احتساب همه اینها، داریم

$$\begin{aligned}
 A &= 2 \int_0^2 \sqrt{x} dx + 2 \int_2^4 (\sqrt{x} - \sqrt{2x-4}) dx \\
 &= 2 \left[ \frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^2 + 2 \left[ \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} (2x-4)^{3/2} \right]_2^4 \\
 &= \frac{4}{3} (2)^{3/2} + \frac{4}{3} (4)^{3/2} - \frac{2}{3} (4)^{3/2} - \frac{4}{3} (2)^{3/2} = \frac{2}{3} (4)^{3/2} = \frac{2}{3} (8) = \frac{16}{3}.
 \end{aligned}$$

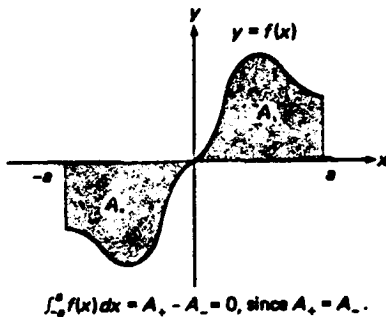
عامل  $\frac{1}{2}$  جلو  $(2x-4)^{3/2}$  از کاربرد فرمول (۸)، صفحه ۴۰۲، ناشی شده است. طبیعی

انتگرالها ۴۱۵

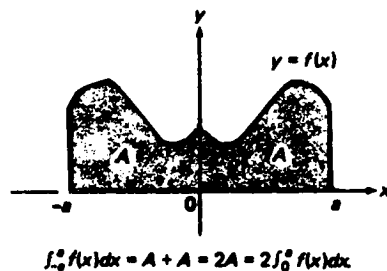
است که همان جواب قبل برای  $A$  به دست می آید، ولی این در مقایسه (۵) مسلماً "محاسباتی طولانی و دوری می باشد"

مسائل

۱. با استفاده از قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال و مسئله ۱۳، صفحه ۴۰۷، نشان دهید که اگر  $f$  زوج باشد،  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ ، که معنی هندسی آن در شکل ۲۱ (آ) نموده شده است. همچنین، نشان دهید که اگر  $f$  فرد باشد،  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ ، که معنی هندسی آن در شکل ۲۱ (ب) نموده شده است. فرض کنید  $f$  بر  $[-a, a]$  پیوسته باشد.



(ب)



(آ)

شکل ۲۱

۲.  $[F(x)G(x)]'$  و  $[F(x) + G(x)]'$  را بر حسب  $[F(x)]'$  و  $[G(x)]'$  بیان نمایید. انتگرالهای زیر را حساب کنید.

۳.  $\int_0^2 (x^3 - 2x^2 + 3x - 4) dx$  ✓

۴.  $\int_{-1}^1 (x^9 + 5x^8 + 10x^7) dx$  ✓

۵.  $\int_2^1 \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} \right) dx$  ✓

۶.  $\int_1^2 \left( 3s^3 - \frac{5}{s^4} \right) ds$  ✓

۷.  $\int_1^9 (1 + \sqrt{s}) ds$  ✓

۹.  $\int_4^{16} \frac{1-t}{\sqrt{t}} dt$  ✓

۸.  $\int_0^3 \frac{dt}{(2t+1)^2}$  ✓



$$\int_1^{27} u^{-2/3} du \cdot 11 \checkmark$$

$$\int_{-1}^1 \frac{du}{(2-u)^3} \cdot 10 \checkmark$$

$$\int_1^4 (v^{3/2} - v^{1/2}) dv \cdot 13 \checkmark$$

$$\int_{-8}^1 (1 + v^{2/3}) dv \cdot 12 \checkmark$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2 \cos x - 1) dx \cdot 15 \checkmark$$

$$\int_0^{\pi} (2 + 3 \sin x) dx \cdot 14 \checkmark$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx \cdot 17 \checkmark$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx \cdot 16 \checkmark$$

$$\int_0^{\pi/3} \frac{dt}{\cos^2 t} \cdot 19 \checkmark$$

$$\int_0^{2\pi} \sin x \cos x dx \cdot 18 \checkmark$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dv}{\sin^2 v \cos^2 v} \cdot 21 \checkmark$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{du}{\sin^2 u} \cdot 20 \checkmark$$

$$\int_{-1}^1 \sin^4 x \tan x dx \cdot 23 \checkmark$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^5 x dx \cdot 22 \checkmark$$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{\cos x} dx \cdot 25 \checkmark$$

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\cot x}{\sin x} dx \cdot 24 \checkmark$$

مساحت  $A$  ی ناحیه  $R$  بین منحنیهای زیر را بیابید .

$$y = \sqrt[3]{x} \text{ و } y = \sqrt{x} \cdot 26 \checkmark$$

$$y = \sqrt[3]{x} \text{ (} x \geq 0 \text{)} \text{ و } y = x^3 \cdot 27 \checkmark$$

$$y = x^{3/2} \text{ و } y = x^{2/3} \cdot 28 \checkmark$$

$$x = 2y^2 \text{ و } x = 3y + 2 \cdot 29 \checkmark$$

$$x = 4 - 2y^2 \text{ و } x = -y^2 \cdot 30 \checkmark$$

$$x = y^2 + 2y \text{ و } x = 4 - y^2 \cdot 31 \checkmark$$

در هر حالت ناحیه  $R$  را رسم کرده، و مسئله را به دو طریق حل کنید یکی با انتگرالگیری نسبت به  $x$  و دیگری با انتگرالگیری نسبت به  $y$ . (در مسائل ۲۹ تا ۳۱ انتگرالگیری نسبت به  $y$  مشکلی ندارد، ولی انتگرالگیری نسبت به  $x$  پیچیده است.)

۳۲. از برخورد منحنیهای  $y = \sin x$  و  $y = \sin 2x$  بر بازه  $[0, 2\pi]$  چهار ناحیه پدید می‌آیند. منحنیها را رسم کرده و مساحت  $A$  ی هر ناحیه را مشخص نمایید.

۳۳. از برخورد منحنیهای  $y = \cos x$  و  $y = \cos 2x$  بر بازه  $[0, 2\pi]$  سه ناحیه پدید می‌آیند. منحنیها را رسم کرده و مساحت  $A$  ی هر ناحیه را مشخص نمایید.

مقدار میانگین تابع داده شده را بیابید .

۳۴ ✓  $f(x) = \sqrt{x}$  بر  $[0, 4]$

۳۵ ✓  $f(x) = 1/x^2$  بر  $[-3, -1]$

۳۶ ✓  $f(x) = \sin x$  بر  $[0, \pi]$

۳۷ ✓  $f(x) = \cos x$  بر  $[0, 2\pi]$

۳۸ ✓  $f(x) = \sin^2 x$  بر  $[0, 2\pi]$

۳۹ ✓  $f(x) = \sec^2 x$  بر  $[-\pi/4, \pi/4]$

۴۰ ✓  $f(x) = \sec x \tan x$  بر  $[0, \pi/3]$

۴۱. فرض کنید  $F$  پادمشتق  $f$  بر  $[a, b]$  بوده، و  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

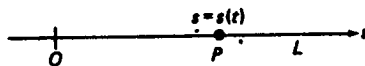
در این صورت،

(یک) 
$$\sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] = F(b) - F(a),$$

زیرا مجموع سمت چپ توی هم رواست. با استفاده از فرمول (یک) و قضیه مقدار میانگین برای مشتقات (قضیه ۲، صفحه ۲۵۸)، قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال را مستقیماً ثابت کنید.

۶.۴ انتگرالگیری از تابع سرعت؛ معادلات دیفرانسیل

فرض کنیم  $s = s(t)$  موضع ذره  $P$  در لحظه  $t$  باشد که در امتداد خط مستقیم  $L$  حرکت می‌کند (ر.ک. شکل ۲۲)، که مثل همیشه فرض می‌کنیم  $L$  دارای مبدا  $O$ ، جهت مثبت،



شکل ۲۲

و واحد طول است. در این صورت، سرعت (لحظهای)  $v = v(t)$  ذره در لحظه  $t$  بامشتق زیر داده می‌شود:

(۱) 
$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

لذا، تابع سرعت ذره با مشتقگیری از تابع موضع آن به دست می‌آید. بهعکس، همانطور که مثالهای زیر نشان می‌دهند، تابع موضع ذره را می‌توان با انتگرالگیری از تابع سرعت آن به دست آورد.

مثال ۱. سرعت یک ذره متحرک در لحظه  $t$  در امتداد خطی مستقیم مساوی است با

$$v = v(t) = 3t^2 - 2t + 4.$$

فاصله بین مواضع ذره در لحظات  $t = 2$  و  $t = 5$  را بیابید. سرعت متوسط ذره بین این دو لحظه چقدر است؟

حل. با انتگرالگیری از طرفین معادله (۱) روی بازه  $[2, 5]$ ، معلوم می‌شود که

$$\int_2^5 v(t) dt = \int_2^5 \frac{ds(t)}{dt} dt = \left[ s(t) \right]_2^5 = s(5) - s(2),$$

که در آن قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال در مرحله دوم به کار رفته است. بنابراین،  $s(5) - s(2)$ ، یعنی فاصله بین مواضع ذره در لحظات  $t = 2$  و  $t = 5$ ، مساوی است با

$$\begin{aligned} \int_2^5 v(t) dt &= \int_2^5 (3t^2 - 2t + 4) dt = \left[ t^3 - t^2 + 4t \right]_2^5 \\ &= (125 - 25 + 20) - (8 - 4 + 8) = 120 - 12 = 108. \end{aligned}$$

سرعت متوسط ذره بین این دو لحظه مساوی است با

$$\frac{s(5) - s(2)}{5 - 2} = \frac{108}{3} = 36.$$

مثال ۲. تابع مواضع  $s = s(t)$  یک ذره با همان تابع سرعت مثال ۱ را در صورتی بیابید که  $s(0) = 6$ ؛ یعنی، اگر مختص مواضع ذره در لحظه  $t = 0$  مساوی ۶ باشد.

حل. از (۱) معلوم می‌شود که  $s(t)$  پادمشتق  $v(t)$  است؛ و لذا،

$$s(t) = \int v(t) dt = \int (3t^2 - 2t + 4) dt.$$

با محاسبه انتگرال خواهیم داشت

$$(۲) \quad s(t) = t^3 - t^2 + 4t + C,$$

که در آن برای تعیین ثابت انتگرالگیری  $C$  به اطلاعات بیشتر نیاز داریم. این اطلاعات با شرط  $s(0) = 6$  داده شده است. در واقع، با فرض  $t = 0$  در (۲) نتیجه می‌شود که  $s(0) = C$ ؛ در نتیجه،  $C = 6$ . با این  $C$ ، تابع مواضع (۲) ذره به صورت زیر درمی‌آید:

$$s(t) = t^3 - t^2 + 4t + 6.$$

به طور کلی، همواره می توان ثابت  $C$  را طوری اختیار کرد که در هر شرط  $s(t_0) = s_0$  صدق نماید. با نوشتن (۱) به شکل

$$(۳) \quad \frac{ds}{dt} = v(t),$$

می توان مسئله تعیین تابع موضع با تابع سرعت معلوم را مسئله یافتن تابع  $s = s(t)$  گرفت که در معادله (۳) و شرط اولیه

$$(۳') \quad s(t_0) = s_0$$

صدق کند. استفاده از واژه "اولیه" ناشی از این است که  $t_0$  معمولاً، ولی نه همیشه، زمانی است که حرکت در آن شروع می شود.

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول. معادله (۳) یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول است (صفحه ۲۲۷ را به یاد آورید). این معادله از نوع ساده ای است که در آن طرف راست تابعی از متغیر مستقل است ولی از متغیر وابسته نیست. برای حل معادله (۳)، یعنی یافتن تابعی چون  $s = s(t)$  که آن را به اتحاد بدل کند، از طرفین آن انتگرال می گیریم از این نتیجه می شود که

$$(۴) \quad s = \int \frac{ds}{dt} dt = \int v(t) dt = V(t) + C,$$

که در آن  $V(t)$  پادمشتق  $v(t)$  و  $C$  یک ثابت انتگرالگیری دلخواه است. ما (۴) را جواب عمومی معادله دیفرانسیل (۳) می نامیم، زیرا هر جواب به ازای انتخابی از  $C$  به صورت (۴) است؛ این ناشی از آن است که  $V(t) + C$  پادمشتق کلی  $v(t)$  می باشد. همچنین، جواب عمومی را به شکل

$$s = \int v(t) dt + C$$

می نویسیم با این فرض که در اینجا  $\int v(t) dt$  یک پادمشتق ثابت  $v(t)$  است. ما این قرارداد را در مسائلی که مستلزم معادلات دیفرانسیل اند رعایت خواهیم کرد. جوابهای معادله دیفرانسیل (۳) را که به ازای مقادیر مختلف  $C$  به دست می آیند جوابهای خصوصی می نامند.  $C$  نوعاً طوری اختیار می شود که  $s$  در شرط اولیه ای چون (۳') صدق کند.

همین اصطلاحات و روش حل، بی توجه به معنی ملموس علمی متغیرهای مستقل و وابسته یا در غیاب هر چنین معانی، به کار می روند. لذا، معادله دیفرانسیل

$$(۵) \quad y' = \frac{dy}{dx} = f(x),$$

شامل تابع مجهول  $y = y(x)$  و تابع معلوم  $f(x)$  را در نظر می‌گیریم. برای حل (۵) تحت شرط

$$y(x_0) = y_0$$

(که هنوز هم شرط اولیه نام دارد)، دقیقاً "به همان روش عمل می‌کنیم. با مشتگیری از (۵) به دست می‌آوریم

$$(۶) \quad y = \int \frac{dy}{dx} dx = \int f(x) dx + C = F(x) + C,$$

که در آن  $F(x) = \int f(x) dx$  یک پادمشتق ثابت  $f(x)$  بوده و  $C$  یک ثابت انتگرالگیری دلخواه می‌باشد. این جواب عمومی (۵) است، و جوابی خصوصی می‌خواهیم که در (۵') صدق نماید. به آسانی معلوم می‌شود که این جواب با انتخاب  $C = y_0 - F(x_0)$  به دست می‌آید.

مثال ۳. جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

$$(۷) \quad y' = \frac{dy}{dx} = x,$$

صادق در شرط اولیه

$$(۷') \quad y(1) = 2$$

را پیدا کنید.

حل. ابتدا با انتگرالگیری جواب عمومی (۷) را می‌یابیم:

$$y = \int \frac{dy}{dx} dx = \int x dx + C = \frac{1}{2} x^2 + C.$$

حال برای تعیین ثابت انتگرالگیری  $C$  شرط (۷') را اعمال کرده، در جواب عمومی  $x = 1, y = 2$  قرار می‌دهیم  $y = \frac{1}{2} x^2 + C$  از این نتیجه می‌شود که

$$2 = \frac{1}{2} + C,$$

در نتیجه،  $C = \frac{3}{2}$  با انتخاب این مقدار  $C$  در جواب عمومی، جواب خصوصی مطلوب (۷) به دست می‌آید:

$$y = \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{2}.$$

صدق کردن این جواب در (۷) و (۷') را می‌توان با محاسبه‌ای مستقیم به آسانی تحقیق

کرد.

معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم. ساده‌ترین معادله دیفرانسیل مرتبه دوم عبارت است از

$$(۸) \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f(x).$$

با انتگرالگیری از (۸) به دست می‌آوریم

$$(۹) \quad y' = \frac{dy}{dx} = \int \frac{d^2y}{dx^2} dx = \int f(x) dx + C_1 = F(x) + C_1,$$

که در آن  $F(x) = \int f(x) dx$  پادمشتق ثابتی از  $f(x)$  بوده و  $C_1$  ثابت انتگرالگیری دلخواهی است. ملاحظه می‌کنید که (۹) یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول است و در واقع به شکل (۵) می‌باشد. با انتگرالگیری از (۹) به دست می‌آوریم

$$y = \int \frac{dy}{dx} dx = \int [F(x) + C_1] dx + C_2 = \int F(x) dx + C_1 x + C_2,$$

که در آن  $C_2$  ثابت انتگرالگیری دیگری می‌باشد. لذا، جواب عمومی معادله دیفرانسیل (۸) شامل دو ثابت دلخواه است، و این ویژگی مشخص جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم است. از اینرو، برای جداکردن یک جواب خصوصی (۸) باید دو شرط اولیه اعمال کنیم، زیرا با این کار دو معادله جبری به دست می‌آیند که می‌توان آنها را نسبت به ثابتهای  $C_1$  و  $C_2$  حل کرد.

مثال ۴. جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

$$(۱۰) \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = x$$

صادق در شرایط اولیه

$$(۱۰') \quad y(1) = \frac{1}{2}, \quad y'(1) = -\frac{1}{2}$$

را بیابید.

حل. توجه کنید که یک شرط اولیه مستلزم تابع  $y = y(x)$  است، حال آنکه دیگری مستلزم مشتق  $y'$  می‌باشد. با دوبار انتگرالگیری از (۱۰) نسبت به  $x$ ، ابتدا به دست می‌آوریم

$$(۱۱) \quad y' = \frac{dy}{dx} = \int x dx + C_1 = \frac{1}{2} x^2 + C_1,$$

و سپس به دست می‌آوریم

$$(۱۲) \quad y = \int \frac{1}{2} x^2 dx + \int C_1 dx + C_2 = \frac{1}{6} x^3 + C_1 x + C_2.$$

و با اعمال شرایط اولیه<sup>(۱۰')</sup>، یعنی فرض  $x = 1, y = -\frac{1}{2}$  در (۱۱) و  $x = 1, y = \frac{1}{2}$  در (۱۲)، درمی‌یابیم که

$$\frac{1}{2} + C_1 = -\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{6} + C_1 + C_2 = \frac{1}{2}.$$

سپس، با حل نسبت به  $C_1$  و  $C_2$  خواهیم داشت

$$C_1 = -1, \quad C_2 = \frac{4}{3}.$$

بالاخره، با گذاردن این  $C_1$  و  $C_2$  در (۱۲)، جواب خصوصی مطلوب (۱۰) صادق در شرایط اولیه<sup>(۱۰')</sup> به دست می‌آید:

$$y = \frac{1}{6} x^3 - x + \frac{4}{3}$$

(این را با محاسبه مستقیم امتحان کنید).

مسئله یافتن جواب یک معادله دیفرانسیل صادق در شرایط اولیه مشخصی مثل مثالهای

۲ تا ۴ را یک مسئله مقدار اولیه می‌نامند.

مثال ۵. جواب خصوصی معادله دیفرانسیل (۱۰) صادق در شرایط

(۱۰'')

$$y(0) = 1, \quad y(1) = 2,$$

به جای شرایط اولیه<sup>(۱۰')</sup> را بیابید.

حل. توجه کنید که به جای گذاردن یک شرط بر تابع  $y$  و شرطی دیگر بر مشتقش  $y'$  در همان نقطه، دو شرط در دو نقطه مختلف بر  $y$  می‌گذاریم. در نتیجه، شرایط (۱۰'') شرایط مرزی نام دارند، و ما اکنون به جای مسئله مقدار اولیه یک مسئله مقدار مرزی را حل می‌کنیم. برای اعمال شرایط مرزی (۱۰'')، ابتدا در جواب عمومی (۱۲) قرار می‌دهیم  $x = 0, y = 1$  و سپس قرار می‌دهیم  $x = 1, y = 2$ . با این کار دو معادله به دست

می‌آیند که ثابتهای انتگرالگیری  $C_1$  و  $C_2$  در آن صدق می‌کنند:

$$C_2 = 1,$$

$$\frac{1}{6} + C_1 + C_2 = 2.$$

با حل نسبت به  $C_1$  و  $C_2$  معلوم می‌شود که

$$C_1 = \frac{5}{6}, \quad C_2 = 1,$$

و، با گذاردن این  $C_1$  و  $C_2$  در (۱۲)، جواب خصوصی مطلوب (۱۰) صادق در شرایط مرزی ("۱۰" به دست می‌آید:

$$y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{6}x + 1.$$

#### مسائل

۱. فرض کنید  $s = s(t)$  تابع موضع و  $v = v(t)$  تابع سرعت یک ذره متحرک در امتداد خطی مستقیم باشد. در این صورت، سرعت متوسط روی بازه  $[a, b]$  مساوی است با

$$v_{av} = \frac{1}{b-a} \int_a^b v(t) dt$$

اگر از تعریف متوسط در صفحه ۳۹۰ استفاده شود، و

$$v_{av} = \frac{s(b) - s(a)}{b - a}$$

اگر از تعریف قبلی در صفحه ۱۷۱ استفاده کنیم. نشان دهید که این دو تعریف معادلند.

با شروع در لحظه  $t = 0$ ، یک ذره در امتداد خطی مستقیم با سرعت

$$v(t) = 20 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{t+1}} \right) \text{ cm/sec}$$

در حرکت است.

۲. ذره در  $15 \text{ sec}$  اول چه مسافتی می‌پیماید، و سرعت متوسط آن روی این بازه چقدر است؟

۳. ذره در  $2 \text{ min}$  اول چه مسافتی می‌پیماید، و سرعت متوسط آن روی این بازه چقدر است؟

۴. فرض کنید  $v_{av}(T)$  سرعت متوسط ذره روی بازه  $[0, T]$  باشد. چرا تقریب  $v_{av}(T) \approx v(T)$



به ازای  $T$  بزرگ مناسب است؟  $v_{av}(T)$  را با  $v(T)$  به ازای  $T = 15 \text{ min}$  مقایسه کنید .  
اتومبیلی از حال سکون شروع به حرکت کرده و ظرف  $t$  ثانیه به

$$v(t) = 75 \left( 1 - \frac{100}{(t + 10)^2} \right) \text{ mph}$$

می‌رسد .

۵. اتومبیل در  $30 \text{ sec}$  اول چه مسافتی می‌پیماید ، و سرعت متوسط آن در این بازه چقدر است ؟

۶. اتومبیل در  $90 \text{ sec}$  اول چه مسافتی می‌پیماید ، و سرعت متوسط آن در این بازه چقدر است ؟

۷. فرض کنید  $v_{av}(T)$  سرعت متوسط اتومبیل در بازه  $[0, T]$  باشد . چرا تقریب  $v_{av}(T) \approx v(T)$  به ازای  $T$  بزرگ مناسب است ؟  $v_{av}(T)$  را با  $v(T)$  به ازای  $T = 10 \text{ min}$  مقایسه کنید .

۸. نشان دهید که جواب خصوصی معادله دیفرانسیل  $y' = f(x)$  صادق در شرط اولیه  $y(x_0) = y_0$  را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$y = \int_{x_0}^x f(t) dt + y_0.$$

جواب خصوصی معادله دیفرانسیل مرتبه اول داده شده که در شرط اولیه ذکر شده صدق کند را بیابید .

$$x^2 y' = 1, y(1) = 2 \quad ۱۰. \quad y' = 2x, y(2) = 1 \quad ۹.$$

$$y' = \sqrt{x}, y(0) = 3 \quad ۱۲. \quad y' = x(x - 1), y(3) = \frac{1}{2} \quad ۱۱.$$

$$y' = 3x^2 + \cos x, y(\pi) = 2 \quad ۱۳.$$

$$y' = 2 \cos^2 x + \sin 2x, y(0) = -2 \quad ۱۴.$$

جواب خصوصی معادله دیفرانسیل مرتبه دوم داده شده که در شرایط اولیه یا شرایط مرزی ذکر شده صدق کند را بیابید .

$$y'' = x(x + 1), y(1) = 0, y'(1) = 1 \quad ۱۵.$$

$$(x + 1)^3 y'' = 1, y(0) = 1, y'(0) = -1 \quad ۱۶.$$

$$\sqrt{x} y'' = 1, y(4) = 2, y'(4) = 0 \quad ۱۷.$$

$$y'' = \sin x, y(0) = -1, y'(0) = 3 \quad ۱۸.$$

$$x^3 y'' = 3, y(2) = -1, y(3) = 1 \quad ۱۹.$$

$$y'' = x^2 + x + 1, y(-1) = 0, y(1) = 3 \quad ۲۰.$$

۲۱. جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$$

صادق در شرط اولیه  $y(\pi/2) = 0$  را بیابید .

#### ۷.۴ مکانیک نیوتنی؛ انرژی جنبشی و کار

حال به کمک انتگرالگیری از ایده‌های فیزیکی سیر اسحق نیوتن استفاده کرده و حرکت در امتداد یک خط مستقیم ( حرکت مستقیم الخط ) را به تفصیل بررسی می‌کنیم . مانند بخش پیش، فرض کنیم  $s = s(t)$  موضع یک ذره متحرک به جرم  $m$  در لحظه  $t$  در امتداد خط  $L$  باشد . همانطور که می‌دانیم، سرعت  $v = v(t)$  و شتاب  $a = a(t)$  ذره با مشتقات زیر داده شده‌اند:

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

فرض کنیم نیروی  $F$  در امتداد  $L$  بر ذره وارد شود . در این صورت، قانون دوم حرکت نیوتن، که در صفحه ۲۲۶ به صورت مقدماتی مطرح شد، به ما می‌گوید که

$$(1) \quad m \frac{d^2s}{dt^2} = F$$

( جرم ضربدر شتاب مساوی نیروی اعمال شده است ) . لذا، با معلوم بودن  $F$ ، موضع ذره به عنوان تابعی از زمان را می‌توان با حل معادله دیفرانسیل مرتبه دوم (۱) تحت شرایط اولیه مناسب تعیین کرد . مثالهای زیر طرز انجام این کار را نشان می‌دهند .

مثال ۱. حرکت آزاد یک ذره، یعنی حرکت در غیاب نیروی خارجی، را بیابید .

حل. در این حالت نیرویی وجود ندارد؛ در نتیجه، در (۱)  $F \equiv 0$  . بنابراین، پس از حذف جرم که نقشی در اینجا ندارد،

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = 0.$$

اگر از این معادله دیفرانسیل دوبار انتگرال بگیریم، ابتدا داریم

$$(2) \quad v = \int \frac{dv}{dt} dt = \int a dt = \int 0 dt = C_1,$$

و سپس خواهیم داشت

$$(2') \quad s = \int \frac{ds}{dt} dt = \int v dt = \int C_1 dt + C_2 = C_1 t + C_2.$$

برای تعیین ثابتهای انتگرالگیری  $C_1$  و  $C_2$ ، شرایط اولیه<sup>۱</sup>

$$s(0) = s_0, \quad v(0) = v_0$$

را اعمال می‌کنیم که در آنها  $s_0$  و  $v_0$  موضع و سرعت ذره در لحظه<sup>۲</sup> اولیه است که برای راحتی  $t = 0$  گرفته می‌شود. با گذاردن  $t = 0, v = v_0$  در (۲) و  $t = 0, s = s_0$  در (۲)، معلوم می‌شود که  $C_1 = v_0, C_2 = s_0$ . از اینرو، (۲) و (۲') به صورت

$$v = v_0$$

و

$$s = v_0 t + s_0$$

درمی‌آیند، که در آن می‌بینید که اگر  $v_0 = 0$ ،  $s$  مقدار ثابت  $s_0$  را خواهد داشت. لذا، اگر نیروی خارجی وارد نشود، یک جسم در حالت سکون ( $v_0 = 0$ ) ساکن می‌ماند، و یک جسم متحرک ( $v_0 \neq 0$ ) با سرعت ثابت به حرکت ادامه می‌دهد. این صورت یک بعدی قانون اول حرکت نیوتن است که در مسئله<sup>۳</sup> ۳۱، صفحه<sup>۴</sup> ۱۱۹۵، بیشتر مورد بحث قرار می‌گیرد.

مثال ۲. سنگی به جرم  $m$  از یک برج بلند یا به داخل یک چاه عمیق خشک افتاده است. حرکت سنگ را پیدا کنید.

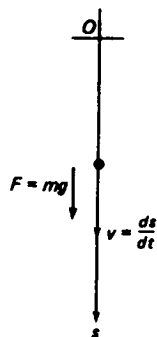
حل. سنگ را یک ذره گرفته و از اندازه‌اش صرف‌نظر می‌کنیم. فرض کنیم  $s = s(t)$  موضع سنگ باشد که در امتداد یک محور قائم سنجیده می‌شود که جهت مثبتش به پایین بوده و مبدأ<sup>۵</sup>  $O$  در موضع اولیه<sup>۶</sup> سنگ است (ر.ک. شکل ۲۳). همانطور که در فیزیک دیده‌ایم، نیروی وارد بر سنگ وزن آن است که مساوی است با

$$F = mg,$$

که در آن  $g$  شتاب جاذبه (تقریباً  $32 \text{ ft/sec}^2$  یا  $9.8 \text{ m/sec}^2$ ) بوده<sup>۱</sup>، و از مقاومت هوا صرف‌نظر می‌شود. با این  $F$ ، قانون دوم نیوتن (۱) به صورت زیر درمی‌آید:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = mg,$$

۱. لذا، برای به دست آوردن جرم یک جسم از وزن آن، باید وزن بر  $g$  تقسیم شود. واحد انگلیسی جرم پوند، که نیروست، نیست بلکه اسلاگ است و آن جرم جسمی است که وقتی نیروی ۱ پوند بر آن وارد می‌شود شتاب  $1 \text{ ft/sec}^2$  می‌یابد. بنابراین، وزن ۱ پوند جرمی حدود  $\frac{1}{32}$  اسلاگ داشته، و جرم ۱ اسلاگ وزنی حدود ۳۲ پوند خواهد داشت.



شکل ۲۳

یا، پس از تقسیم بر  $m$ ،

$$(۳) \quad a = \frac{d^2s}{dt^2} = g,$$

معادله دیفرانسیل (۳) می‌گوید که شتاب  $a$  دارای مقدار ثابت  $g$  است. اگر از (۳) دوبار انتگرال بگیریم، ابتدا به دست می‌آوریم

$$(۴) \quad v = \int \frac{dv}{dt} dt = \int a dt = \int g dt + C_1 = gt + C_1,$$

و سپس

$$(۴') \quad s = \int \frac{ds}{dt} dt = \int v dt = \int (gt + C_1) dt + C_2 = \frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2.$$

این بار شرایط اولیه عبارتند از

$$s(0) = 0, \quad v(0) = 0,$$

زیرا سنگ از مبدأ افتاده است (یعنی، با سرعت اولیه صفرها شده است). با قرار دادن  $t = 0, v = 0$  در (۴) و  $t = 0, s = 0$  در (۴')، فوراً معلوم می‌شود که  $C_1 = C_2 = 0$  بنابراین،

$$(۵) \quad v = gt$$

و

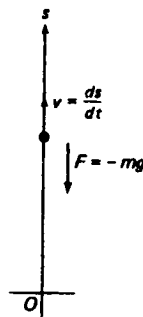
$$(۵') \quad s = \frac{1}{2}gt^2,$$

دست کم تا وقتی سنگ به زمین یا ته چاه بخورد. هرگاه  $s$  به فوت و  $t$  به ثانیه باشد، آنگاه همانطور که در مثال ۶، صفحه ۶۹، پیش‌بینی شد،  $s \approx 16t^2$ .

مثال ۳. حرکت سنگی را بیابید که با سرعت اولیه  $v_0$  به طور قائم به بالا پرتاب شده است.

حل. در اینجا طبیعی‌تر است که موضع  $s$  سنگ را در امتداد محور قائمی بسنجیم که جهت مثبتش به بالا باشد (و مبداء در موضع اولیه سنگ باشد)، زیرا در این صورت، مثل مثال قبل،  $s$  مجدداً نامنفی است. این جهت مثبت موجب تغییر  $g$  به  $-g$  در (۴) و (۴') می‌شود، زیرا نیروی ثقل روبه پایین می‌باشد (ر. ک. شکل ۲۴). حال شرایط اولیه به صورت زیر درمی‌آیند:

$$s(0) = 0, \quad v(0) = v_0.$$



شکل ۲۴

با قراردادن  $v = v_0$  در  $t = 0$  و  $s = 0$  در (۴')، معلوم می‌شود که  $C_1 = v_0$  و  $C_2 = 0$ . لذا، (۴) و (۴') در این حالت پس از تعویض  $g$  به  $-g$  به صورت

$$(۶) \quad v = v_0 - gt$$

و

$$(۶') \quad s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

تحویل می‌شوند.

تعریف انرژی جنبشی و کار. حال نشان می‌دهیم که چگونه مفاهیم انرژی جنبشی و کار در مکانیک نیوتنی ظاهر می‌شوند. فرض کنیم ذره‌ای به جرم  $m$  که در خطی مستقیم حرکت می‌کند تحت اثر نیروی (خالص)  $F = F(s)$  که تابع پیوسته‌ای از موضع  $s$  آن است قرار گیرد

در این صورت، طبق قانون دوم نیوتن،

$$ma = m \frac{dv}{dt} = F(s),$$

یا، اگر سرعت  $v$  را تابعی از  $s$  به جای  $t$  بگیریم (در اینجا فرض است که  $v$  علامت ثابت دارد؛ در نتیجه، ذره فقط در یک جهت حرکت می‌کند)، بنابراین قاعدهٔ زنجیره‌ای،

$$(۷) \quad m \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = mv \frac{dv}{ds} = F(s),$$

فرض کنیم

$$v_0 = v(s_0), \quad v_1 = v(s_1)$$

سرعت ذره در دو موضع مختلف  $s_0$  و  $s_1$  باشد. در این صورت، با انتگرالگیری از (۷) نسبت به  $s$  از  $s_0$  تا  $s_1$ ، به دست می‌آوریم

$$\int_{s_0}^{s_1} mv \frac{dv}{ds} ds = \int_{s_0}^{s_1} \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{2} mv^2 \right) ds = \int_{s_0}^{s_1} F(s) ds,$$

ولذا،

$$(۸) \quad \left[ \frac{1}{2} mv^2 \right]_{s_0}^{s_1} = \frac{1}{2} mv_1^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \int_{s_0}^{s_1} F(s) ds.$$

به عبارت دیگر، بر اثر نیرو، کمیت

$$K = \frac{1}{2} mv^2,$$

که انرژی جنبشی ذره متحرک نام دارد، به اندازهٔ

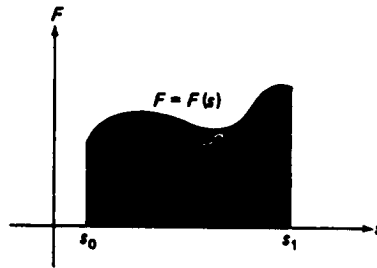
$$(۹) \quad W = \int_{s_0}^{s_1} F(s) ds$$

تغییر می‌کند. کمیت (۹) کار انجام شده توسط نیرو بر ذره در حرکت از موضع  $s = s_0$  تا موضع  $s = s_1$  است. واضح است که  $W$  چیزی جز مساحت تحت منحنی  $F = F(s)$  از  $s = s_0$  تا  $s = s_1$  نیست (ر.ک. شکل ۲۵).

مثال ۴. در غیاب نیرو داریم  $F \equiv 0$  و کار (۹) مساوی صفر می‌باشد. در این صورت، (۸) به

$$(۱۰) \quad \frac{1}{2} mv_1^2 = \frac{1}{2} mv_0^2$$

تحویل می‌شود؛ در نتیجه، انرژی جنبشی تغییر نمی‌کند یا، به زبان فیزیک، حفظ می‌شود. این اصلاً "تعجب‌آور نیست، زیرا قبلاً" از مثال ۱ می‌دانیم که اگر  $F \equiv 0$ ،  $v_1 = v_0$ .



شکل ۲۵

مثال ۵. اگر  $F(s)$  دارای مقدار ثابت  $F$  باشد، فرمول (۹) به صورت زیر درمی‌آید:

$$(11) \quad W = \int_{s_0}^{s_1} F(s) ds = F \int_{s_0}^{s_1} ds = F \cdot (s_1 - s_0).$$

لذا، کار در این حالت مساوی حاصل‌ضرب نیروی  $F$  در "تغییر مکان"  $s_1 - s_0$  است. گاهی فرض می‌شود که کار انجام شده توسط یک نیروی ثابت مساوی حاصل‌ضرب نیرو در تغییر مکان است. در این صورت، تعریف طبیعی کار انجام شده توسط نیروی متغیر  $F(s)$  مساوی انتگرال (۹) می‌شود. لازم نیست برای این دلیل بیاوریم، که اساساً "همان دلیل آمده در بخش ۲.۴ برای تعریف مساحت تحت یک منحنی است."

مثال ۶. اگر  $F = mg$ ،  $s_0 = 0$ ،  $v_0 = 0$ ، مثل مثال ۲، مسئله سنگ افتان را داریم. در این صورت، از (۱۱) نتیجه می‌شود که  $W = mgs_1$  و (۸)، پس از حذف ۱ دوبار، به صورت زیر تحویل می‌شود:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgs.$$

با حل این معادله نسبت به  $v$ ، به دست می‌آوریم

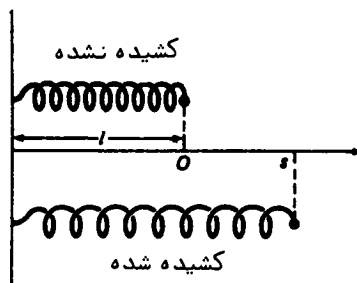
$$(12) \quad v = \sqrt{2gs}.$$

همین نتیجه را می‌توان با حذف  $t$  از فرمولهای (۵) و (۵') به دست آورد، ولی در اینجا از مفاهیم کار و انرژی جنبشی برای یافتن رابطه بین سرعت سنگ و موضعش، بدون یافتن

یکی برحسب زمان، استفاده شده است. مثلاً، با صرف نظر کردن از مقاومت هوا و انتخاب  $g = 32 \text{ ft/sec}^2$ ، از (۱۲) نتیجه می شود که سرعت سنگی که 400 ft سقوط کرده مساوی است با

$$v = \sqrt{2(32)(400)} = 160 \text{ ft/sec.}$$

قانون هوک<sup>۱</sup>. فرض کنیم یک فنر "طبیعی" (یعنی، کشیده نشده) به طول  $l$  از یک طرف بسته شده باشد. در این صورت، طبق قانون هوک، برای افزایش طول فنر از  $l$  به  $l + s$  باید نیروی  $F = ks$  را بر انتهای آزاد آن اعمال کرد. در اینجا  $k$  ثابت مثبتی است که سفتی یا ثابت فنر نام دارد. قانون هوک به ازای  $s$  های منفی، نظیر انقباض به جای انبساط فنر، نیز کار می کند. با اینحال، دقت قانون هوک به ازای  $|s|$  های خیلی بزرگ از بین می رود. فرض کنیم  $P$  انتهای آزاد فنر بوده، و مبدأ  $O$  جهت مثبت محور  $s$  را طبق شکل ۲۶ اختیار می کنیم؛ در نتیجه، اگر فنر کشیده نشده باشد،  $P$  در  $O$  می باشد. این یک



شکل ۲۶

انتخاب منطقی است، زیرا انبساط طولی  $s$  را مساوی مختص  $P$  می سازد. در این صورت، نیروی "خارجی"  $F = ks$  لازم است تا  $P$  را در نقطه  $s$  نگهدارد، و بنابر (۹)، کار انجام شده توسط این نیرو بر  $P$  در حرکت از  $s = s_0$  تا  $s = s_1$  مساوی است با

$$(۱۳) \quad W = \int_{s_0}^{s_1} F ds = \int_{s_0}^{s_1} ks ds = \frac{1}{2} k(s_1^2 - s_0^2)$$

( $P$  را یک ذره تصور کنید). در عین حال، کاربرد نیروی خارجی  $F$  یک نیروی بازگردان الاستیک مساوی و مخالف  $-F = -ks$  در فنر ایجاد می کند، و کار این نیرو بر  $P$  چیزی جز



قرینه<sup>۱۳</sup> نیست.

مثال ۷. فرض کنیم برای کشیدن یک فنر به اندازه 6 in بیش از طول طبیعی اش 2 ft نیروی برابر 10 lb لازم باشد. کار W انجام شده در کشیدن فنر از طول 3 ft به طول 4 ft را در صورتی بیابید که قانون هوک برای انبساطهای طولی در این حد معتبر باشد.

حل. چون نیروی 10 lb به اندازه 0.5 ft به طول طبیعی فنر می افزاید، داریم  $0.5k = 10$ ؛ و لذا،  $k = 20 \text{ lb/ft}$ . انبساط طولی وقتی طول فنر 3 ft باشد  $3 - 2 = 1$  و وقتی طولش 4 ft باشد  $4 - 2 = 2$  می باشد؛ در نتیجه،  $s_0 = 1, s_1 = 2$ . پس از (۱۳) نتیجه می شود که

$$W = \frac{1}{2} k(s_1^2 - s_0^2) = \frac{1}{2} (20)(2^2 - 1^2) = 30 \text{ فوت - پوند}$$

ثقل و سرعت فرار. در مثال زیر از مفاهیم کار و انرژی جنبشی برای حل مسئله مهم پرواز فضایی استفاده می کنیم.

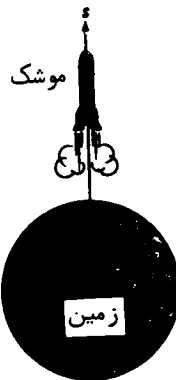
مثال ۸. با چه سرعت  $v_0$  باید موشکی به طور قائم به بالا پرتاب شود تا کاملاً "از جاذبه" ثقلی زمین فرار نماید؟

حل. بنابر قانون ثقلی نیوتن، نیرویی که موشک را به زمین جذب می کند از قانون عکس مجذور

$$(14) \quad F = F(s) = -\frac{GMm}{s^2}$$

به دست می آید، که در آن  $G$  یک ثابت مثبت به نام ثابت ثقلی عمومی بوده،  $M$  جرم زمین  $m$  جرم موشک، و  $s$  فاصله بین موشک (به عنوان یک ذره) و مرکز زمین است. انتخاب محور  $s$  که مبدأ آن مرکز زمین است در شکل ۲۷ نموده شده است. البته، "به طور قائم به بالا" می تواند به معنی دور شدن از زمین در امتداد هر خط دیگر ماربر مرکز زمین نیز باشد. علامت منها در (۱۴) مبین آن است که نیروی ثقل جاذب بوده و موشک را به زمین باز می خواند.

کار انجام شده توسط نیروی زمین بر موشک پس از آنکه موشک سطح زمین را ترک کرده



شکل ۲۷

و مسافتی را می‌پیماید با انتگرال زیر داده می‌شود:

$$W = \int_{s_0}^{s_1} F(s) ds = - \int_{s_0}^{s_1} \frac{GMm}{s^2} ds = \left[ \frac{GMm}{s} \right]_{s_0}^{s_1} = \frac{GMm}{s_1} - \frac{GMm}{s_0},$$

که در آن  $s_0$  مساوی  $R$ ، یعنی شعاع زمین، بوده و  $s_1$  عدد بسیار بزرگی می‌باشد. بنابراین، پس از حذف عدد کوچک قابل چشم‌پوشی  $GMm/s_1$ ،

$$(۱۵) \quad W = -\frac{GMm}{R}.$$

کار  $W$  مساوی تغییر

$$(۱۶) \quad \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

در انرژی جنبشی موشک است در پیمودن از سطح زمین تا نقطه دور (  $v_0$  سرعت اولیه و  $v_1$  سرعت نهایی موشک می‌باشد ). چون طالب کوچکترین مقداری از  $v_0$  هستیم که به موشک اجازه فرار از ثقل زمین را بدهد،  $v_1$  را مساوی صفر می‌گیریم؛ در نتیجه، موشک وقتی به نقطه دور می‌رسد انرژی اولیه خود را کاملاً "مصرف کرده است". با متحد گرفتن (۱۵) و (۱۶) به ازای  $v_1 = 0$ ، به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{GMm}{R}.$$

لذا،  $v_0$  از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$(۱۷) \quad v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}},$$

که مستقل از جرم موشک است.

برای محاسبه<sup>۶</sup> (۱۷)، ملاحظه می‌کنیم که، بنابر (۱۴)، نیروی وارد بر موشک در سطح زمین مساوی  $GMm/R^2$  است و برحسب ثابت  $g$ ، یعنی شتاب ثقل که در مسائل مربوط به ثقل در یا مجاور سطح زمین نقش دارد، مساوی  $mg$  می‌باشد. بنابراین:

$$GMm/R^2 = -mg.$$

یا، معادلاً،

$$(18) \quad \frac{GM}{R} = gR.$$

به کمک این فرمول می‌توان  $v_0$  را بدون اطلاع از جرم زمین یا موشک حساب کرد. در واقع، با گذاردن (۱۸) در (۱۷)، به دست می‌آوریم

$$(19) \quad v_0 = \sqrt{2gR}.$$

چون با تقریب مناسب  $g = 32 \text{ ft/sec}^2$  و  $R = 3960 \text{ miles}$  بالاخره خواهیم داشت

$$v_0 = \sqrt{\frac{2(32)(3960)}{5280}} \approx 6.9 \text{ mi/sec}$$

کمیت  $v_0$  را معمولاً "سرعت فرار برای زمین می‌نامند، اگرچه دقیقتر آن است که بگوییم این تندی فرار از سطح زمین است<sup>۱</sup>. موشکی که با تندی کمتر از  $v_0$  به بالا پرتاب شود مآلاً "باید به زمین برگردد مگر آنکه جسم سماوی دیگری آن را جذب نماید.

#### مسائل

۱. حرکت ذره‌ای به جرم  $m$  را در صورتی بیابید که نیروی ثابت  $F$  بر آن اثر کرده و ذره در ابتدا در نقطه<sup>۶</sup>  $s = 0$  در حال سکون باشد.
۲. ذره‌ای به جرم  $m$  تحت اثر نیروی ثابت  $F$  حرکت می‌کند. فرض کنید موضع ذره در لحظه<sup>۶</sup>  $t = t_0$  مساوی  $s = s_0$  باشد. ذره در لحظه<sup>۶</sup>  $t = t_0$  چه سرعت  $v_0$  ی باید داشته باشد تا در لحظه<sup>۶</sup>  $t = t_1$  به نقطه<sup>۶</sup>  $s = s_1$  برسد؟
۳. حرکت ذره‌ای به جرم  $m$  را بیابید که تحت اثر نیروی  $F = kt$  است که با زمان سپری شده از لحظه<sup>۶</sup> شروع متناسب بوده و ذره با سرعت اولیه<sup>۶</sup>  $v_0$  از نقطه<sup>۶</sup>  $s = 0$  شروع به

---

۱. این عدم دقت در تمایز بین سرعت و تندی (قدر مطلق سرعت) در مطالعه حرکت در امتداد خط، که دو کمیت جداگتر در علامت فرق دارند، کلیت دارد. در حرکت در ابعاد دو و سه این تمایز باید بدقت مراعات گردد (ر.ک. فصلهای ۱۱ و ۱۲).

حرکت کرده باشد.

۴. کدام انرژی جنبشی بیشتری دارد، یک گلوله  $1$  اونسی که با سرعت  $500 \text{ mph}$  حرکت می‌کند یا یک کامیون  $10$  تنی که سرعتش  $1 \text{ mph}$  است؟ اگر سرعت گلوله  $600 \text{ mph}$  باشد، جواب چیست؟

۵. دو ذره از حال سکون شروع به حرکت کرده و یکی دوبرابر دیگری سرعت دارد. اگر کار انجام شده بر هر دو یکی باشد، در باب جرمهای آنها چه می‌شود گفت؟

۶. کدام کار بیشتری علیه ثقل انجام می‌دهند، زنی که یک وزنه  $2.5$  پوندی را مدت  $1$  دقیقه با دست نگهداشته یا مردی که از پله‌ها بالا می‌رود؟

۷. بر ذره‌ای به جرم  $m$  که ابتدا در حال سکون است نیروی  $F = 5 \cos 2t$  وارد می‌شود. ماکزیم انرژی جنبشی ذره چیست؟

۸. فرض کنید نیروی  $15 \text{ lb}$  یک فنر را به اندازه  $2 \text{ in}$  بیشتر از طول طبیعی‌اش که  $8 \text{ in}$  است بکشد. با فرض برقراری قانون هوک، چقدر کار لازم است تا طول طبیعی فنر دوبرابر شود؟ در انبساط طول از  $10 \text{ in}$  تا طول  $14 \text{ in}$  چقدر؟ در انقباض آن از طول طبیعی تا طول  $6 \text{ in}$  چقدر؟

۹. سنگی با سرعت اولیه  $v_0$  به طور قائم به بالا پرتاب می‌شود. ارتفاع ماکزیم  $h$  آن چقدر است؟ اگر  $v_0$  دوبرابر شود،  $h$  چقدر خواهد شد؟  $v_0$  را در صورتی بیابید که  $h = 100 \text{ ft}$ .

۱۰. فرض کنید سنگی که به طور قائم به بالا پرتاب شده  $8 \text{ sec}$  بعد به زمین باز می‌گردد. سرعت اولیه سنگ چقدر است؟ سرعت نهایی آن چقدر است؟ ارتفاع ماکزیم سنگ چقدر است؟ نشان دهید که ارتفاع سنگ در لحظه  $t = 8$  مساوی ارتفاع در لحظه  $t = 0$  است. نشان دهید که سرعت سنگ در لحظه  $t = 8$  قرینه سرعتش در لحظه  $t$  می‌باشد.

۱۱. جسم  $A$  از یک پنجره به ارتفاع  $260 \text{ ft}$  به بیرون پرتاب شده است، و درست  $1 \text{ sec}$  بعد جسم  $B$  از یک پنجره به ارتفاع  $200 \text{ ft}$  به بیرون پرتاب می‌شود. آیا  $A$  به  $B$  می‌رسد، و اگر چنین است کی؟

۱۲. یک ذره با نیرویی متناسب با فاصله به دو نقطه  $A$  و  $B$  جذب می‌شود. در حرکت ذره از  $A$  تا  $B$  در امتداد  $AB$  چقدر کار انجام می‌شود؟ فرض کنید ثابت تناسب  $k$  برای هر دوی  $A$  و  $B$  یکی باشد.

۱۳. موشکی از سطح زمین به طور قائم به بالا پرتاب شده و به ارتفاع ماکزیم  $h$  می‌رسد. نشان دهید که سرعت اولیه موشک مساوی است با

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gRh}{R+h}}, \quad (\text{یک})$$

که در آن  $g$  شتاب ثقل و  $R$  شعاع زمین می باشد. چگونه می توان سرعت فرار برای زمین را از این فرمول نتیجه گرفت؟

۱۴. موشکی از سطح زمین به طور قائم به بالا پرتاب شده و به ارتفاع ماکزیمی مساوی شعاع زمین می رسد. سرعت اولیه موشک چقدر است؟

۱۵. اگر یک موشک با سرعت  $1 \text{ mi/sec}$  یا سرعت  $2 \text{ mi/sec}$  به طور قائم به بالا پرتاب شود، به چه ارتفاعی خواهد رسید؟

۱۶. فرض کنید ماه به شعاع تقریبی  $\frac{1}{4}$  شعاع زمین و به جرم تقریبی  $\frac{1}{80}$  جرم زمین باشد. سرعت فرار برای ماه را تخمین بزنید.

۱۷. فرض کنید یک فضاپرونده در لباس فضایی خود بتواند روی زمین  $2.5 \text{ ft}$  بپرد. روی ماه چقدر می تواند بپرد؟ از داده های مسئله قبل استفاده کنید.

۱۸. جرم خورشید تقریباً  $2 \times 10^{30} \text{ kg}$  و شعاعش تقریباً  $7 \times 10^5 \text{ km}$  است. به فرض آنکه ثابت ثقلی عمومی  $G$  تقریباً  $6.67 \times 10^{-20} \text{ km}^3/\text{kg sec}^2$  باشد، سرعت فرار برای خورشید را تخمین بزنید.

۱۹. سرعت فرار برای یک کوتوله سفید را تخمین بزنید، این یک نوع ستاره است که در آن جرمی حدود جرم خورشید به حجمی تقریباً مساوی حجم زمین متراکم شده است (شعاع زمین تقریباً  $6400 \text{ km}$  است).

۲۰. سرعت فرار برای ستاره نوترون را تخمین بزنید، این یک نوع ستاره است که در آن جرمی حدود جرم خورشید به گره ای به شعاع  $10 \text{ km}$  متراکم شده است.

۲۱. فرض کنید جرم  $M$  به صورت گره ای درآمده که شعاع  $R$  آن مثل یک ستاره " در حال مرگ " منقبض می شود. بازای مقداری از  $R$ ، به نام شعاع ثقلی که با  $R_0$  نموده می شود، سرعت فرار از جرم منقبض شده دقیقاً مساوی سرعت نور است:  $c \approx 300,000 \text{ km/sec}$ . بر طبق این مدل ساده شده رفتار نور در یک میدان ثقلی قوی، وقتی  $R = R_0$ ، نور دیگر نمی تواند از کره خارج شود، که در این صورت یک سیاهچاله نامرئی خواهیم داشت. نشان دهید که

$$R_0 = \frac{2GM}{c^2} \quad (\text{دو})$$

تذکار. چون ذرات نور یا فوتونها جرم ندارند، مدل سرعت فرار در اینجا به کار نمی رود. اما مسئله را می توان به کمک نظریه عمومی نسبیت اینشتین به دقت حل کرد، که با کمال

تعجب وجود سیاهچاله‌ها را نیز پیش‌بینی کرده و به همان مقدار  $R_0$  رسیده است .  
شعاع ثقلی اجرام زیر را بیابید .

۲۲. خورشید ۰.۲۳ زمین ۰.۲۴ ماه

( جرم زمین تقریباً  $6 \times 10^{24}$  kg است . )

۲۵. بنا بر یک مدل ستاره‌شناسی پذیرفته شده ، جهان در ۱۵ تا ۲۰ میلیارد سال قبل در انفجاری به نام " صدای بزرگ " به وجود آمده است . از آن زمان جهان طوری منبسط شده است که سرعت  $v$  یک کهکشان در فاصله  $R$  تا کهکشان ما ( راه شیری ) از قانون هابل  $v = HR$  به دست می‌آید ، که در آن  $H$  ثابت هابل است که تقریباً " مساوی  $15 \text{ km/sec}$  بر میلیون سال نوری است . ( یک سال نوری فاصله‌ای است که نور در یک سال طی می‌کند ، که حدوداً  $9.5 \times 10^{12} \text{ km}$  است . ) معلوم نیست این انبساط جهان تا ابد ادامه خواهد یافت یا نه . اگر جهان به اندازه کافی ماده داشته باشد ، نیروهای ثقلی وارد از این مواد بر خودش مآلاً " انبساط را پایان داده ، سپس دوره انقباض خواهیم داشت که به یک برخورد ثقلی کامل به نام " انهدام بزرگ " ختم می‌شود ، که با آن جهانی که می‌شناسیم منهدم خواهد شد . نشان دهید که اگر چگالی ( جرم بر واحد حجم ) ماده در جهان در حال حاضر از چگالی بحرانی<sup>۲</sup>

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

تجاوز نکند ، جهان تا ابد به انبساط خود ادامه می‌دهد .  $\rho_c$  را تخمین بزنید .

۲۶. سرعت گریز یک گلوله  $\frac{1}{4}$  اونسی که از یک تفنگ بدون پس‌زن شلیک شده  $1200 \text{ mph}$  است . لوله تفنگ به طول  $2 \text{ ft}$  است . وقتی گلوله در لوله است ، نیروی وارد بر آن به فرض ثابت بودن چقدر است ؟ گلوله چه مدت در لوله می‌ماند ؟

۲۷. منظور از اندازه حرکت یک ذره یعنی حاصل ضرب  $p = mv$  جرم  $m$  آن در سرعتش  $v = v(t)$  . فرض کنید بر ذره نیروی  $F = F(t)$  وارد می‌شود که تابع پیوسته‌ای از زمان  $t$  است . فرض کنید  $\Delta p$  تغییر اندازه حرکت ذره در بازه زمانی  $[t_0, t_1]$  باشد . در این صورت ،

$$\Delta p = mv \Big|_{t_0}^{t_1} = mv_1 - mv_0,$$

که در آن  $v_0 = v(t_0)$  و  $v_1 = v(t_1)$  . نشان دهید که

$$\Delta p = \int_{t_0}^{t_1} F(t) dt,$$

- که در آن انتگرال سمت راست ضربه نیرو در طول بازه<sup>۶</sup>  $[t_0, t_1]$  نام دارد .
- ۲۸ . یک پرتاب کننده در بیسبال یک توپ سریع را با سرعت 90-mph به سوی یک توپ زن پرتاب می کند و وی با یک ضربه<sup>۶</sup> پایین آن را به سوی پرتاب کننده برمی گرداند که خوشبختانه به موقع آن را با شیرجه می گیرد! فرض کنید توپ چوبدستی را با تندی 102 mph ترک کند . اگر زمان تماس بین چوبدستی و توپ 0.01 sec باشد ، نیروی متوسط وارد بر چوبدستی چقدر است ؟ ( یک توپ بیسبال معمولاً 5 oz است . ) راهنمایی . ابتدا تغییراندازه حرکت توپ در اثر برخورد با چوبدستی را بیابید .
- ۲۹ . فرض کنید بر ذره ای به جرم  $m$  و سرعت  $v = v(t)$  نیروی وابسته به زمان  $F = F(t)$  ، مثل مسئله<sup>۶</sup> ۲۷ ، وارد شده باشد . در این صورت ، انرژی جنبشی ذره در بازه زمانی  $[t_0, t]$  به اندازه<sup>۶</sup>

$$\frac{1}{2} mv^2 \Big|_{t_0}^t = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2$$

- تغییر می کند ، که در آن  $v_0 = v(t_0)$  . با تعدیل جزئی زبان در صفحه<sup>۶</sup> ۴۲۹ ، این تغییر انرژی جنبشی کار انجام شده توسط نیرو بر ذره در بازه<sup>۶</sup>  $[t_0, t]$  نام دارد و با  $W = W(t)$  نموده می شود . به علاوه ، مشتق  $W$  نسبت به زمان توان نام دارد و با  $P = P(t)$  نموده می شود . نشان دهید که

$$W = \int_{t_0}^t F(u)v(u) du, \quad P = \frac{dW}{dt} = Fv. \quad (\text{سه})$$

- ۳۰ . مردی می خواهد دوستش را که در طبقه<sup>۶</sup> چهارم سکونت دارد ملاقات نماید . وزن او 165 lb بوده و در 1 min به اندازه<sup>۶</sup> 50 ft بالا می رود . توان متوسطی که مرد در بالا رفتن صرف کرده به اسب بخار پیدا نمایید . این توان به وات چقدر است ؟
- ( 746 وات = 550 ft-lb/sec = 1 اسب بخار . )

### اصطلاحات و مباحث کلیدی

- جمع بندی ، حدود جمع بندی ، اندیس جمع بندی  
قضیه دو جمله ای ، ضرایب دو جمله ای  
افرازهای یک بازه ، اندازه مش یک بازه  
تعریف انتگرال و انتگرال پذیری ، مجموعه ای ریمان  
مساحت تحت یک منحنی به عنوان انتگرال معین

انتگرالگیری، حدود انتگرالگیری، متغیر انتگرالگیری  
 انتگرالپذیری توابع پیوسته  
 انتگرالگیری بر بازه‌های مجاور، مساحت بین دو منحنی  
 قضیه مقدار میانگین برای انتگرالها  
 پادمشتقها، شکل پادمشتق کلی  
 انتگرال نامعین  
 وجود پادمشتقهای توابع پیوسته  
 مشتقگیری از انتگرال با حد بالایی متغیر  
 قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال  
 تابع موضع به عنوان انتگرال تابع سرعت  
 معادلات دیفرانسیل  $y' = f(x)$  و  $y'' = f(x)$   
 جوابهای عمومی و جوابهای خصوصی  
 شرایط اولیه و شرایط مرزی  
 مسائل مقدار اولیه و مقدار مرزی  
 حرکت مستقیم الخط و قانون دوم نیوتن  
 انرژی جنبشی و کار، قانون هوک  
 ثقل و سرعت فرار

#### مسائل تکمیلی

عبارات زیر را حساب کنید.

$$\sum_{n=3}^8 (n^2 - 2n) \quad \cdot 2$$

$$\sum_{n=2}^6 |1 - 3n| \quad \cdot 1$$

$$\sum_{n=1}^7 \tan \frac{(2n-1)\pi}{4} \quad \cdot 4$$

$$\sum_{n=0}^4 \frac{1-n^2}{1+n^2} \quad \cdot 3$$

مجموع داده شده را با کمترین زحمت حساب کنید.

$$\sum_{n=1}^{49} (3n^2 + 3n + 1) \quad \cdot 6$$

$$\sum_{n=10}^{99} \frac{1}{n(n+1)} \quad \cdot 5$$

راهنمایی. توجه کنید که

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \quad 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3 - n^3$$



۷. دو تابع

$$F(x) = \begin{cases} x^2 & , x > 0 \\ x^2 + 1 & , x < 0 \end{cases} \quad G(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , x > 0 \\ x^2 & , x < 0 \end{cases}$$

دارای مشتق یکسان  $2x$  اند ، ولی تفاوت آنها ثابت نیست . چرا این قضیه ۴ ، صفحه ۳۹۸ ، را نقض نمی‌کند ؟

۸. با استفاده از مشتگیری ، نشان دهید که بر هر بازه غیر شامل نقاط  $x = \pm \frac{1}{2}\pi, \pm \frac{3}{2}\pi, \dots$  داریم  $\tan^2 x = \sec^2 x + C$  سپس ثابت  $C$  را بیابید .  
انتگرالهای زیر را حساب کنید .

$$\int \frac{(x+2)^2}{x^4} dx \cdot ۱۰$$

$$\int \left( 3x^2 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) dx \cdot ۹$$

$$\int (1 + \sec^2 3t) dt \cdot ۱۲$$

$$\int \cos(\pi x + \sqrt{2}) dx \cdot ۱۱$$

$$\int \frac{(\sqrt{v} + 1)^3}{\sqrt{v}} dv \cdot ۱۴$$

$$\int \frac{\cos 2u}{\cos^2 u \sin^2 u} du \cdot ۱۳$$

$$\int_{-1}^1 (1 - \sqrt{x})^3 dx \cdot ۱۶$$

$$\int_1^2 \left( x - \frac{4}{x} \right)^2 dx \cdot ۱۵$$

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^2 t dt \cdot ۱۸$$

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan x dx \cdot ۱۷$$

$$\int_{-1}^1 \cos^2 v \tan v dv \cdot ۲۰$$

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cot^2 u du \cdot ۱۹$$

۲۱. به ازای عدد صحیح  $n \geq 0$  ، نشان دهید که

$$\frac{n+1}{2} \int_{-1}^1 x^n dx = \begin{cases} 1 & , \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ 0 & , \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

مقدار میانگین تابع زیر را بیابید .

$$f(x) = (1-x)^3 \text{ بر } [-2, 2] \cdot ۲۲$$

$$f(x) = (x+1)^{2/3} \text{ بر } [-1, 7] \cdot ۲۳$$

$$f(x) = 2 \cos x - 3 \sin x \text{ بر } [0, \pi/2] \cdot ۲۴$$

$$f(x) = (\cos x - x)^2 \text{ بر } [-\pi, \pi] \cdot ۲۵$$

۲۶. از فرمول

$$\int_0^1 (x^2 - x + 1) dx = \frac{5}{6}$$

## انتگرالها ۴۴۱

نتیجه بگیرید که معادله درجه دوم  $6x^2 - 6x + 1$  ریشه‌ای بین 0 و 1 دارد. این را مستقیماً "تحقیق کنید".

راهنمایی. از قضیه مقدار میانگین برای انتگرالها استفاده کنید.

۲۷. قضیه مقدار میانگین تعمیم یافته برای انتگرالها را ثابت کنید: فرض کنید  $f$  و  $g$  بر

$[a, b]$  پیوسته بوده، و  $g$  بر  $[a, b]$  تغییر علامت ندهد. در این صورت، نقطه‌ای مانند

$c$  در  $[a, b]$  هست به طوری که

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx. \quad (\text{یک})$$

(اگر  $g(x) \equiv 1$ )، این قضیه به قضیه مقدار میانگین معمولی برای انتگرالها تحویل

می‌شود.

نقطه  $c$  صادق در فرمول (یک) را در صورتی بیابید که

$$f(x) = x^2, g(x) = x, a = 0, b = 2. \quad ۲۸$$

$$f(x) = x, g(x) = x^2 - 1, a = -1, b = 0. \quad ۲۹$$

$$f(x) = \cos x, g(x) = \sin x, a = \pi, b = 3\pi/2. \quad ۳۰$$

$$f(x) = \sin x, g(x) = \cos x, a = 0, b = \pi/2. \quad ۳۱$$

مساحت  $A$  ی ناحیه  $R$  را بیابید.

$$y = \sqrt{2} \cos(\pi x/4) \text{ و } y = |x| \text{ بین منحنیهای} \quad ۳۲$$

$$y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{7}{8}x^2 \text{ و } y = 1/x^2 \text{ بین منحنیهای} \quad ۳۳$$

$$\text{محدود به محور } x, \text{ سهمی } x = y^2 + 1, \text{ و مماس بر سهمی در نقطه } (2, 1) \quad ۳۴$$

$$y^2 = x(x-1)^2 \text{ منحنی} \quad ۳۵$$

در هر حالت ناحیه  $R$  را رسم کنید.

$$\text{۳۶. نشان دهید که به ازای هر عدد گویای مثبت } r,$$

$$\int_0^1 x^r dx + \int_0^1 x^{1/r} dx = 1$$

این رابطه را تعبیر هندسی کنید.

$$\text{۳۷. اگر } 0 < a < 1, \int_0^1 f(x)dx \text{ را بیابید که در آن}$$

$$f(x) = \begin{cases} x & , 0 \leq x \leq a \\ a \frac{1-x}{1-a} & , a < x \leq 1 \end{cases} \text{ اگر}$$

$$\text{۳۸. نشان دهید هرگاه } f'' \text{ بر } [a, b] \text{ پیوسته باشد، آنگاه}$$

$$\int_a^b xf''(x)dx = bf'(b) - af'(a) + f(a) - f(b).$$

جواب خصوصی معادله دیفرانسیل مرتبه اول صادق در شرط اولیه داده شده را بیابید .

$$y' = \tan^2 x, y(\pi/4) = 0 \quad ۰.۴۰ \quad y' = x^5 - x^3, y(0) = 4 \quad ۰.۳۹$$

$$y' \cdot \cos^2 x = \sin x, y(0) = 7 \quad ۰.۴۱$$

$$y' \sin^2 x = \cos x, y(\pi/2) = -1 \quad ۰.۴۲$$

جواب خصوصی معادله دیفرانسیل مرتبه دوم صادق در شرایط اولیه یا شرایط مرزی داده شده را بیابید .

$$y'' = -\sqrt{x}, y(1) = 2, y'(1) = 1 \quad ۰.۴۳$$

$$y'' = \sin^2 x, y(0) = -1, y'(0) = 1 \quad ۰.۴۴$$

$$y'' = 7x^{1/3}, y(-1) = -2, y(1) = 0 \quad ۰.۴۵$$

$$y'' = \cos^2 x, y(0) = 1, y(\pi) = 1 \quad ۰.۴۶$$

۴۷. هزینه حاشیه‌ای یک شرکت در تولید کالایی  $MC(q) = 3q^2 - 90q + 1200$  دلار در سطح

تولید  $q$  است. تابع هزینه کل  $C(q)$  را در صورتی بیابید که سرانه \$7200 باشد.

هزینه ( جدا از سرانه ) تولید دومین دوجین از کالا را به صورت انتگرال بیان کرده، و آن را حساب کنید. هزینه متوسط بر واحد (همراه با سرانه) تولید سه دوجین اول را بیابید.

۴۸. اتومبیلی زمان ترمز 90 mph سرعت دارد. اگر نیروی مقاومت ترمز در برابر حرکت

نصف وزن اتومبیل باشد، چند ثانیه تا توقف کامل طول خواهد کشید؟ اتومبیل چه

مسافتی را پس از ترمز طی می‌کند؟ فرض کنید  $g = 32 \text{ ft/sec}^2$ .

۴۹. اتومبیلی به وزن 2700 lb از حال سکون شتاب یکنواخت گرفته و ظرف 15 ثانیه به

تندی 75 mph می‌رسد. توان لحظه‌ای موتور اتومبیل را به عنوان تابعی از زمان بیابید

توان متوسط موتور روی بازه شتاب چقدر است؟

۵۰. ذره‌ای از نقطه ثابت  $O$  با نیرویی متناسب با عکس مجذور فاصله دفع می‌شود. فرض

کنید نیروی وارد بر ذره وقتی در فاصله 1 cm از  $O$  است مساوی 100 دین باشد. چقدر

باید کار انجام داد تا ذره را از فاصله دور به نقطه 0.001 cm از  $O$  آورد؟ ( نیروی 1 دین

به جرم 1 گرم شتاب  $1 \text{ cm/sec}^2$  می‌دهد، و  $1 \text{ dyne-cm}$  را یک ارگ می‌نامند.)

۵۱. کارگری یک آچار را به داخل محوطه عبور آسانسور انداخته و درست 3 sec بعد صدای

برخورد آن را به آینه محوطه می‌شنود. عمق محوطه چقدر است؟ ( $g$  را مساوی  $32 \text{ ft/sec}^2$

و سرعت صوت در هوای گرم را  $1156 \text{ ft/sec}$  بگیرید.)

۵۲. در چه فاصله از ماه جاذبه ثقیلی زمین مساوی جاذبه ماه است؟ (جرم زمین حدوداً

81 برابر جرم ماه است، و فاصله بین زمین و ماه حدوداً  $240,000 \text{ mi}$  می‌باشد.)

۵۳. قانون دوم حرکت نیوتن  $m(dv/dt) = F$  برحسب اندازه حرکت  $p = mv$  یک ذره به جرم  $m$  و سرعت  $v$  به شکل  $d(mv)/dt = dp/dt = F$  درآمده، و حتی اگر  $m$  ثابت نباشد، که تابعال فرض شده است، برقرار می ماند. فرض کنید یک قطره باران کروی از درون جوی سقوط می کند که از بخار آب اشباع شده است. در اثر تراکم، جرم قطره به میزانی متناسب با مساحت سطح و با ثابت تناسب  $k$  افزایش می یابد. نشان دهید که سقوط قطره باران با شتاب ثابت  $a = \frac{1}{2}g \approx 8 \text{ ft/sec}^2$  صورت می گیرد البته با این فرض که اندازه اولیه قابل چشم پوشی بوده و سرعت اولیه آن صفر باشد.

۵۴. بنابر نظریه خصوصی نسبیت اینشتن<sup>۱</sup>، قانون حرکت نیوتن  $d(mv)/dt = F$  را باید با

$$\frac{d}{dt} \frac{mv}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = F \quad (\text{دو})$$

تعویض کرد، که در آن  $c$  سرعت نور است ( $\approx 300,000 \text{ km/sec}$ ). اگر  $v$  در مقایسه با  $c$  کوچک باشد (که در تمام مسائل عادی مهندسی مکانیک چنین است) قانون نیوتن تقریبی عالی به قانون اینشتن می باشد. اما اگر  $v$  کسر محسوسی از  $c$  باشد (که در ذرات زیر اتمی با انرژی بسیار زیاد چنین است)، قانون حرکت اینشتن (دو) به "اثرات نسبی" منجر می شود که قانون نیوتن آنها را پیش بینی نکرده است. مثلاً، نشان دهید که، بر طبق قانون اینشتن، یک ذره به جرم ناصفر تحت اثر نیروی ثابت  $F$  هر قدر اثر نیرو طول بکشد نمی تواند به سرعت نور برسد. قانون نیوتن در این باب چه می گوید؟

راهنمایی. اگر ذره از حال سکون شروع به حرکت کند، انتگرالگیری از (دو) نتیجه می دهد که  $v/\sqrt{1 - (v/c)^2} = Ft/m$ .

مسائل ۵۵ تا ۶۴ به انتگرالگیری از توابعی می پردازند که فقط بر بخشهایی از بازه های انتگرالگیری خود پیوسته اند. به طور مشخص، گوئیم تابع  $f$  بر بازه  $[a, b]$  قطعه قطعه پیوسته است اگر افزای مانند  $a = c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_{n-1} < c_n = b$  از  $[a, b]$  وجود داشته باشد به طوری که (۱) در  $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$  ناپیوسته باشد، (۲)  $f$  بر بازه های باز  $(c_0, c_1), (c_1, c_2), \dots, (c_{n-1}, c_n)$  پیوسته باشد، و (۳) حدود یکطرفه

$$f(c_0^+), f(c_1^-), f(c_1^+), \dots, f(c_{n-1}^-), f(c_{n-1}^+), f(c_n^-)$$

همه موجود و متناهی باشند، که در آن برای اختصار می نویسیم

$$f(c_i^+) = \lim_{x \rightarrow c_i^+} f(x), \quad f(c_i^-) = \lim_{x \rightarrow c_i^-} f(x).$$

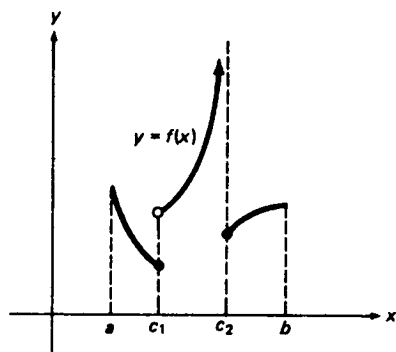
مقادیر  $f$  در نقاط  $c_i$  می‌توانند دلخواه (یا حتی تعریف نشده) باشند. توجه کنید هرگاه  $n = 1$  و  $f(c_1^+) = f(a)$ ,  $f(c_1^-) = f(b)$ ، آنگاه  $f$  بر  $[a, b]$  پیوسته است؛ در نتیجه، ردهٔ توابع قطعه‌قطعه پیوسته شامل تمام توابع پیوسته است. همچنین، توجه کنید که ناپیوستگیهای  $f$  در نقاط  $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$  (اگر  $n = 1$ )، این گونه نقاط وجود ندارند (باید ناپیوستگیهای جهشی به صورت تعریف شده در صفحه ۱۵۳ باشند). با یک استدلال تکنیکی که آن را حذف کرده‌ایم می‌توان نشان داد هرگاه  $f$  بر  $[a, b]$  قطعه‌قطعه پیوسته باشد، آنگاه  $f$  بر  $[a, b]$  انتگرالپذیر است با انتگرال

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{c_1} f_1(x) dx + \int_{c_1}^{c_2} f_2(x) dx + \dots + \int_{c_{n-1}}^b f_n(x) dx, \quad (\text{سه})$$

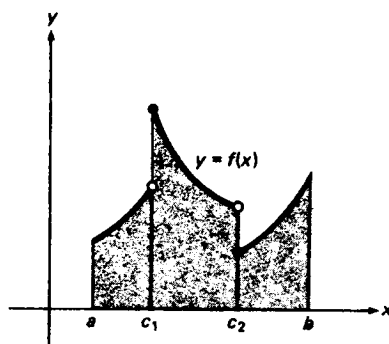
که در آن  $f_i$  تابع پیوسته بر  $[c_{i-1}, c_i]$  است که با  $f$  بر  $(c_{i-1}, c_i)$  یکی است؛ یعنی،

$$f_i(x) = \begin{cases} f(c_{i-1}^+) & , x = c_{i-1} \text{ اگر} \\ f(x) & , c_{i-1} < x < c_i \text{ اگر} \\ f(c_i^-) & , x = c_i \text{ اگر} \end{cases}$$

این بر حسب تعبیر مساحتی انتگرال کاملاً "موجه" است. مثلاً، "تابع  $f$  رسم شده در شکل ۲۸ (آ) بر  $[a, b]$  قطعه قطعه پیوسته است با ناپیوستگیهایی در  $c_1$  و  $c_2$ ، و انتگرال آن مجموع مساحت سه ناحیهٔ سایه‌دار است. یک مثال مهم از توابع قطعه قطعه پیوسته تابع بزرگترین عدد صحیح  $[x]$  است، که بر هر بازهٔ  $[a, b]$  قطعه قطعه پیوسته است. از آن سو، تابع  $f$  رسم شده در شکل ۲۸ (ب) قطعه قطعه پیوسته نیست، زیرا  $f(c_2^-) = \lim_{x \rightarrow c_2^-} f(x) = \infty$ ؛



(ب)



(آ)

شکل ۲۸

و در واقع،  $f$  بر  $[a, b]$  بی‌کران و لذا انتگرال ناپذیر است (ر.ک. مسئله ۳۳، صفحه ۳۸۱).

انتگرالها ۴۴۵

با استفاده از فرمول (سه)، انتگرال داده شده را حساب کنید (در هر حالت، انتگرالده قطعه قطعه پیوسته است).

$$\int_{-2}^1 [x] dx \cdot ۵۶ \quad \int_{-1}^2 [x] dx \cdot ۵۵$$

$$\int_0^2 [2x + 1] dx \cdot ۵۸ \quad \int_{\sqrt{2}}^{\pi} [x] dx \cdot ۵۷$$

$$\int_0^3 f(x) dx \cdot ۵۹, \text{ که در آن}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2-x, & 0 \leq x \leq 2 \text{ اگر} \\ -1, & 2 < x < 3 \text{ اگر} \\ 10, & x = 3 \text{ اگر} \\ x^2, & 3 < x \leq 5 \text{ اگر} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx \cdot ۶۰, \text{ که در آن}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x < \pi/2 \text{ اگر} \\ \cos x, & \pi/2 \leq x < \pi \text{ اگر} \\ \sin x, & \pi \leq x < 3\pi/2 \text{ اگر} \\ \cos x, & 3\pi/2 \leq x \leq 2\pi \text{ اگر} \end{cases}$$

$$\int_{-2}^8 f(x) dx \cdot ۶۱, \text{ که در آن}$$

$$f(x) = \begin{cases} 6, & -2 < x < 1 \text{ اگر} \\ -4, & 1 < x < 3 \text{ اگر} \\ 5, & 3 < x < 8 \text{ اگر} \end{cases}$$

۶۲. فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} a_1, & 0 \leq x < 1 \text{ اگر} \\ a_2, & 1 \leq x < 2 \text{ اگر} \\ \dots & \dots \\ a_n, & n-1 \leq x \leq n \text{ اگر} \end{cases}$$

نشان دهید که مقدار میانگین یا متوسط تابع  $f$  بر بازه  $[0, n]$  مساوی است با

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n \text{ یعنی میانگین یا متوسط حسابی } n \text{ عدد } a_1, a_2, \dots, a_n.$$

۶۳. مقدار میانگین  $[x]$  را بر بازه  $[0, n]$  بیابید، که در آن  $n$  عدد صحیح مثبتی است.

۶۴. مقدار میانگین  $[x]$  را بر بازه  $[-a, a]$  به ازای  $a > 0$  دلخواه بیابید.

## توابع معکوس<sup>۵</sup>

هر تابع  $y = f(x)$  دارای این خاصیت است که مقدار متغیر وابسته  $y$  منحصرًا به وسیله مقدار متغیر مستقل  $x$  معین می‌شود، ولی بعضی از توابع این خاصیت اضافی را دارند که مقدار  $x$  نیز منحصرًا به وسیله  $y$  معین می‌شود. توابع از این نوع خاص را توابع یک به یک می‌نامند. به هر چنین تابع  $y = f(x)$  می‌توان یک تابع معکوس  $x = f^{-1}(y)$  مربوط کرد که مقادیر  $y$  را به مقادیر  $x$  برمی‌گرداند. به علاوه، همانطور که بخشهای ۱۰۵ و ۲۰۵ نشان داده‌اند، اگر  $f$  پیوسته باشد،  $f^{-1}$  پیوسته است، و اگر  $f$  دارای مشتق ناصفر باشد،  $f^{-1}$  نیز چنین می‌باشد. گاهی معکوس یک تابع یک به یک آشنا تابع جدیدی است که خود ارزش مطالعه دارد. این در مورد توابع مثلثاتی معکوس، که در بخش ۳۰۵ معرفی شده‌اند، و تعدادی تابع دیگر که در فصل بعد مطرح می‌شوند صحت دارد.

### ۱۰۵ معکوس تابع یک به یک

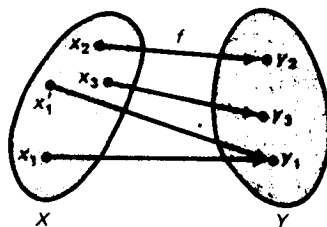
فرض کنیم  $f$  تابعی باشد که بر مجموعه  $X$  تعریف شده است، و  $Y$  نقش  $X$  تحت  $f$  باشد؛ یعنی، مجموعه تمام مقادیر  $y = f(x)$  که  $f$  با تغییر  $x$  روی مجموعه  $X$  می‌گیرد؛ با نماد نظریه مجموعه‌ها،  $Y = \{y: y = f(x), x \in X\}$ . در این صورت، اینکه  $x$  منحصرًا  $y$  را معین می‌کند بدین معنی است که به ازای هر نقطه  $x$  در  $X$  یک و فقط یک نقطه مانند  $y$  در  $Y$  هست به طوری که  $y = f(x)$ . در واقع، این یکتایی جوهر مفهوم تابع است. البته،  $f$  ممکن است بیش از یک نقطه از  $X$  را به نقطه واحدی از  $Y$  بنگارد، و این عموماً "رخ خواهد داد. مثلاً"، هرگاه  $y = f(x) = |x|$ ، آنگاه  $f$  هر دو نقطه  $x = 3$  و  $x = -3$  را به نقطه واحد  $y = 3$  می‌نگارد.

با اینحال، فرض کنیم  $f$  بیش از یک نقطه  $X$  را به نقطه واحدی از  $Y$  ننگارد. در این صورت، به ازای هر نقطه  $y$  در  $Y$ ، یک و فقط یک نقطه مانند  $x$  در  $X$  هست به طوری

که  $f(x) = y$ ، و می‌گوییم  $f$  یک تابع یک به یک، یا  $f$  یک به یک بر  $X$  است. به عبارت دیگر، اگر  $f$  بر  $X$  یک به یک بوده و  $x$  و  $x'$  نقاطی از  $X$  باشند، تساوی  $f(x) = f(x')$  فقط وقتی ممکن است که  $x = x'$ . به بیان دقیق، تابع یک به یک  $f$  نقاط متمایز  $X$  را به نقاط متمایز  $Y$  می‌نگارد.

توابع معکوس. در تابع یک به یک، و فقط در این مورد، می‌توان تابع دیگری تعریف کرد که با  $f^{-1}$  نموده و تابع معکوس (یا فقط معکوس) تابع اصلی  $f$  نامیده می‌شود. تابع معکوس بر  $Y$  تعریف شده و هر  $y$  در  $Y$  را به نقطه منحصر به فرد  $x$  در  $X$  می‌نگارد که  $f(x) = y$ . واضح است که  $X$  نقش  $Y$  تحت  $f^{-1}$  است درست همانطور که  $Y$  نقش  $X$  تحت  $f$  است. هرگاه  $X$  بزرگترین مجموعه‌ای باشد که  $f$  بر آن تعریف شده است، آنگاه  $X$  قلمرو  $f$  و برد  $f$  است، درحالی که  $Y$  برد  $f$  و قلمرو  $f^{-1}$  می‌باشد. به آسانی معلوم می‌شود که  $f^{-1}$  خود یک تابع یک به یک بوده و  $f$  معکوس آن می‌باشد؛ درنتیجه،  $f = (f^{-1})^{-1}$ .

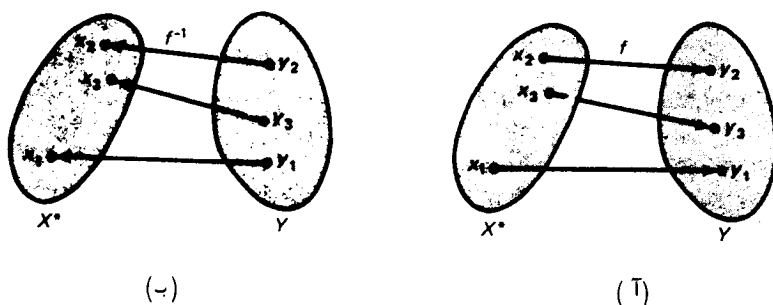
مثال ۱. تابع  $f$  را که با "نمودار" شکل ۱ مشخص می‌شود در نظر می‌گیریم. اشکالی که  $X$  و  $Y$  نامیده شده اند نمایش قلمرو و برد  $f$  اند، و مقادیر متغیر مستقل  $x$  و متغیر وابسته  $y$  با نقاط نموده شده اند. هر مقدار  $x$  با یک سهم به مقدار  $y$  که توسط  $f$  بدان نگاشته شده مربوط



شکل ۱

می‌شود، و جهت سهم جهت نگاشت (از  $X$  به  $Y$ ) را نشان می‌دهد. تابع  $f$  بر تمام قلمرو  $X$  یک به یک نیست، زیرا دو سهم به نقطه  $y_1$  ختم می‌شوند. اما، همانطور که از شکل ۲ (آ) واضح است،  $f$  بر مجموعه  $X^*$  که با حذف  $x'_1$  از  $X$  به دست می‌آید یک به یک است، و تابع معکوس نظیر  $f^{-1}$ ، که در شکل ۲ (ب) رسم شده، با عکس کردن جهت سهمها که از نقاط  $Y$  به نقاط  $X^*$  بروند به دست می‌آید. توجه کنید که  $f$  یک به یک است و درنتیجه بر هر زیر مجموعه  $X^*$  که شامل  $x_1$  و  $x'_1$  نباشد معکوس دارد.





شکل ۲

مثال ۲. نشان دهید که تابع

$$(۱) \quad y = \frac{1+x}{1-x} \quad (x \neq 1)$$

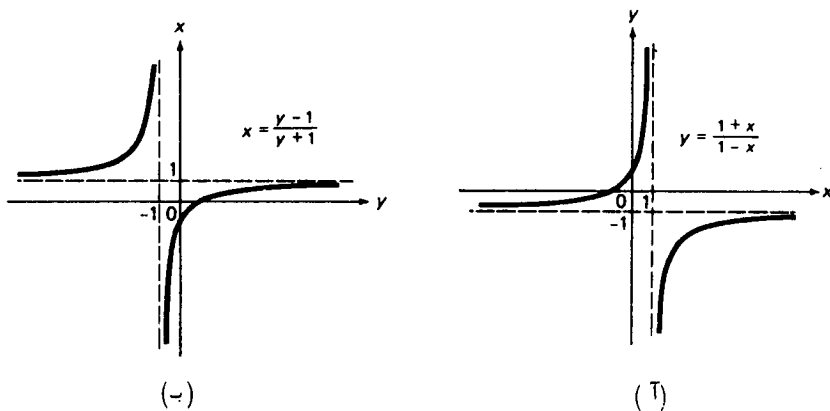
یک به یک است، و معکوس آن را بیابید.

حل. از (۱) معلوم می‌شود که  $1+x = y-xy$ ، یا معادلاً " $x+xy = y-1$ ". بنابراین،

$$(۲) \quad x = \frac{y-1}{y+1} \quad (y \neq -1),$$

و به آسانی می‌توان (۱) را نسبت به  $x$  و بر حسب  $y$  حل کرد. به علاوه، فرمول (۲) مسلماً به هر  $y \neq -1$  مقدار منحصر به فردی از  $x$  را نسبت می‌دهد. از اینرو، (۱) تابع یک به یکی مانند  $y = f(x)$  است، و (۲) تابع معکوس آن  $x = f^{-1}(y)$  می‌باشد. فرض کنیم  $X$  مجموعه تمام  $x \neq 1$  ها بوده و  $Y$  مجموعه تمام  $y \neq -1$  های باشد. در این صورت،  $f$  دارای قلمرو  $X$  و برد  $Y$  است، در حالی که  $f^{-1}$  دارای قلمرو  $Y$  و برد  $X$  می‌باشد. نمودار این توابع در شکلهای ۳(آ) و ۳(ب) نموده شده‌اند. توجه کنید که در شکل ۳(ب) عرض  $x$  و طول  $y$  می‌باشد.

مثال ۳. تابع  $y = f(x) = x^2$  بر بازه  $(-\infty, \infty)$  یک به یک نیست، زیرا به ازای هر  $y > 0$  دو نقطه در  $(-\infty, \infty)$ ، یعنی  $x = \sqrt{y}$  و  $x = -\sqrt{y}$ ، وجود دارند که  $f(x) = y$ . (مثلاً همیشه  $\sqrt{y}$  ریشه دوم مثبت  $y$  می‌باشد.) اما  $f$  بر بازه  $[0, \infty)$  یک به یک است، زیرا درست یک نقطه در  $[0, \infty)$ ، یعنی  $x = \sqrt{y}$ ، وجود دارد که به ازای آن  $f(x) = y$  به عبارت



شکل ۳

دیگر، تابع

$$y = f(x) = x^2 \quad (0 \leq x < \infty)$$

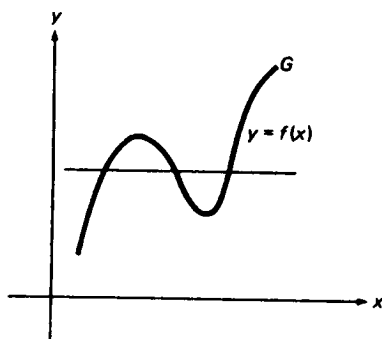
یک تابع یک به یک است با معکوس

$$(۳) \quad x = f^{-1}(y) = \sqrt{y} \quad (0 \leq y < \infty).$$

به علاوه، به آسانی معلوم می شود که  $f$  بر هر بازه که در آن  $x$  علامت ثابت دارد یک به یک است، ولی بر هیچ بازه‌ای که  $x$  در آن تغییر علامت می دهد چنین نیست.

خاصیت خط افقی. از صفحه ۷۶ به یاد می آوریم که نمودار هر تابع  $y = f(x)$  دارای این خاصیت است که هیچ خط قائم، یعنی هیچ خط موازی محور  $y$ ، نمی تواند نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند. نمودار یک تابع یک به یک دارای این خاصیت اضافی است که هیچ خط افقی، یعنی هیچ خط موازی محور  $x$ ، نمی تواند نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند زیرا هرگاه خط افقی  $y = c$  نمودار  $y = f(x)$  را در دو یا چند نقطه قطع کند، آنگاه دو یا چند مقدار از  $x$ ، یعنی طول این نقاط، وجود دارند که نظیر یک مقدار از  $y$ ، یعنی  $c$ ، می باشند، و این تعریف تابع یک به یک را نقض می کند.

مثال ۴. بررسی شکل ۳ (آ) نشان می دهد که هیچ خط افقی نمودار تابع (۱) را در بیش از یک نقطه قطع نمی کند. بنابراین، همانطور که از قبل می دانیم، (۱) یک تابع یک به یک است. از آن سو، تابع  $y = f(x)$  با نمودار  $G$  شکل ۴ نمی تواند یک به یک باشد، زیرا. خطوطی افقی وجود دارند که  $G$  را در بیش از یک نقطه قطع می کنند (یک چنین خط در شکل نشان



شکل ۴

داده شده است .

فرض کنیم  $y = f(x)$  تابع یک به یکی با معکوس  $x = f^{-1}(y)$  باشد . با گذاردن  $y = f(x)$  در  $x = f^{-1}(y)$  و نیز گذاردن  $x = f^{-1}(y)$  در  $y = f(x)$  جفت اتحاد مهم زیر را به دست می آوریم :

$$f^{-1}(f(x)) \equiv x, \quad f(f^{-1}(y)) \equiv y,$$

یا معادلاً

$$(۴) \quad f^{-1}(f(x)) \equiv x, \quad f(f^{-1}(x)) \equiv x,$$

که در آن به خاطر هماهنگ بودن نمادها  $y$  در اتحاد دوم به  $x$  تغییر یافته است . بنابر رابطه (۴) ، هر یک از توابع  $f$  و  $f^{-1}$  عمل دیگری را خنثی می کند . به عبارت دیگر ، حاصل اعمال توابع  $f$  و  $f^{-1}$  با هر ترتیب مقدار  $x$  را تغییر نمی دهد . فرمولهای (۴) را می توان به طور فشرده تر نوشت :

$$(۵) \quad f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = I,$$

که در آن  $I$  تابع همانی است ؛ یعنی ، تابع هر عدد  $x$  را به خودش می نگارد . معادله (۵) نشان می دهد که  $f^{-1}$  متقابل  $f$  نسبت به عمل ترکیب است .  $f^{-1}$  را با متقابل  $f$  نسبت به عمل ضرب ، که با  $1/f$  نموده می شود ، خلط نکنید . تابع  $1/f$  با فرمول

$$\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$$

۱ . به طور دقیقتر ، به ازای هر  $x$  در قلمرو  $f$  ،  $f^{-1} \circ f = I$  ، حال آنکه به ازای هر  $x$  در برد  $f$  ( قلمرو  $f^{-1}$  ) ،  $f \circ f^{-1} = I$  .

تعریف می شود مشروط براینکه  $f(x) \neq 0$ .

مثال ۵. با استفاده از فرمول  $f(f^{-1}(x)) \equiv x$ ، معکوس تابع (۱) مثال ۲ را به دست آورید.

حل. با نوشتن  $y = f(x)$  در (۱)، داریم

$$(۱') \quad f(x) = \frac{1+x}{1-x} \quad (x \neq 1).$$

سپس، با اعمال فرمول ذکر شده، نتیجه می شود که

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{1+f^{-1}(x)}{1-f^{-1}(x)} = x.$$

بنابراین،

$$1 + f^{-1}(x) = x - x f^{-1}(x),$$

و با حل نسبت به  $f^{-1}(x)$  به دست می آوریم

$$(۲') \quad f^{-1}(x) = \frac{x-1}{x+1} \quad (x \neq -1).$$

تفاوتها ظاهری اند؛ فرمولهای (۲) و (۲') در واقع دو طریق معادل برای نوشتن تابع واحدی است. در واقع، برای تبدیل (۲) به (۲')، کافی است متغیرهای  $x$  و  $y$  را باهم عوض کرده، و سپس قرار دهیم  $y = f^{-1}(x)$ . چگونه (۲') به (۲) تبدیل می شود؟

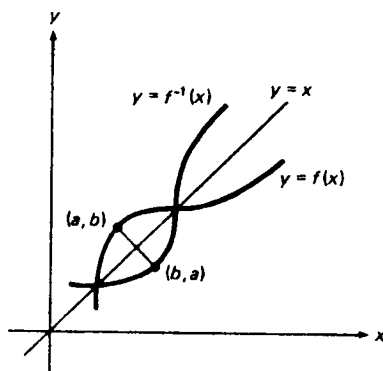
رابطه بین نمودارهای  $f$  و  $f^{-1}$ . فرض کنیم  $y = f(x)$  یک تابع یک به یک با تابع معکوس  $f^{-1}$  باشد. در این صورت، نمودار  $f^{-1}$  منعکس نمودار  $f$  نسبت به خط  $y = x$  (خط ماربر مبداء به شیب ۱) است. برای مشاهده این امر، فرض کنیم  $a$  نقطه ای در قلمرو  $f$  باشد. هرگاه  $b = f(a)$ ، آنگاه  $a = f^{-1}(b)$ . بنابراین، اگر نقطه  $(a, b)$  متعلق به نمودار  $f$  باشد، نقطه  $(b, a)$  متعلق به نمودار  $f^{-1}$  است (ر. ک. شکل ۵). اما این دو نقطه نسبت به خط  $y = x$  متقارن اند؛ یعنی، خط  $y = x$  عمود منصف پاره خط واصل بین نقاط  $(a, b)$  و  $(b, a)$  می باشد. در واقع، خط ماربر نقاط  $(a, b)$  و  $(b, a)$  به شیب

$$\frac{a-b}{b-a} = -1$$

است؛ و در نتیجه، بر خط  $y = x$  عمود است، ولی نقطه میانی پاره خط واصل بین نقاط  $(a, b)$  و  $(b, a)$  مساوی

$$\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$$

بوده؛ و در نتیجه، برخط  $y = x$  قرار دارد. توجه کنید که برای رسم نمودار تابع  $f$  و معکوسش  $f^{-1}$  در یک دستگاه مختصات قائم، باید مثل شکل ۵ از یک علامت برای شناسه‌های هردو تابع استفاده کنیم.



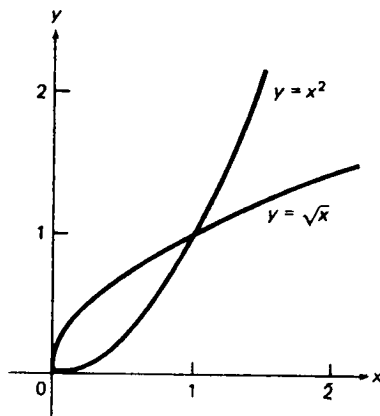
شکل ۵

مثال ۶. در شکل ۶ تابع

$$y = f(x) = x^2 \quad (0 \leq x < \infty)$$

و معکوسش

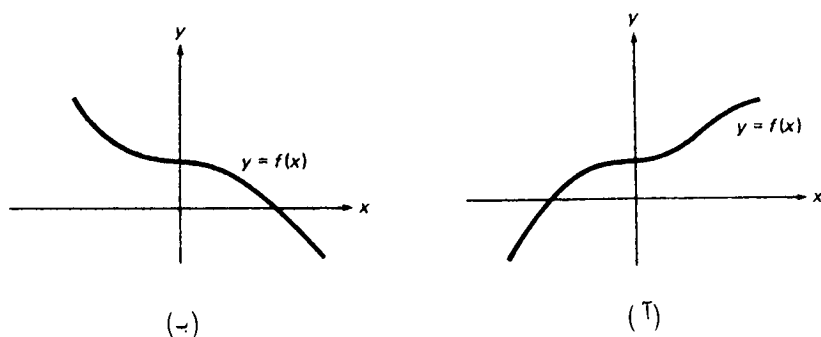
$$y = f^{-1}(x) = \sqrt{x} \quad (0 \leq x < \infty)$$



شکل ۶

در یک دستگاه مختصات قائم رسم شده است. ( عبارت مربوط به  $f^{-1}(x)$  را می‌توان از فرمول (۳) به وسیله تعویض متغیرهای  $x$  و  $y$  باهم به دست آورد. ) توجه کنید که هر نمودار نیمی از سهمی است، و انعکاس نسبت به خط  $y = x$  هر یک از این نمودارها را به دیگری تبدیل می‌کند. چطور می‌توان با یک نگاه گفت که توابع  $f$  و  $f^{-1}$  یک به یک‌اند؟

معکوس تابع یکنوا. همانطور که احتمالاً حدس زده‌اید، هر تابع یکنوا ( یعنی، هر تابع صعودی یا نزولی ) خود بخود یک به یک بوده؛ و در نتیجه، دارای معکوس می‌باشد. زیرا، هرگاه نمودار  $f$  مثل شکل  $\gamma$  (آ) بالا رود یا مثل شکل  $\gamma$  (ب) پایین بیاید، آنگاه هیچ خط



شکل  $\gamma$

افقی نمی‌تواند نمودار  $f$  را در بیش از یک نقطه قطع کند. به علاوه، همانطور که اینک نشان می‌دهیم، معکوس یک تابع یکنوا خود تابعی یکنواست.

قضیه ۱ ( معکوس یک تابع یکنوا ). هر تابع صعودی یک به یک و دارای معکوسی صعودی است. هر تابع نزولی یک به یک با معکوسی نزولی می‌باشد.

برهان. فرض کنیم  $f$  ( بر مجموعه‌ای ) صعودی بوده و  $x' \neq x$ . در این صورت، یا  $x' < x$  یا  $x' > x$ . در حالت اول  $y' < y$ ، که در آن  $y' = f(x')$ ،  $y = f(x)$ ، و در حالت دوم  $y' > y$ ، ولسی در هر حالت  $y' \neq y$ . بنابراین،  $f$  در نقاط مختلف مقادیر متفاوت می‌گیرد؛ یعنی،  $f$  یک به یک است؛ و در نتیجه، دارای تابع معکوس  $f^{-1}$  می‌باشد. فرض کنیم  $y' < y$ ، و قرار می‌دهیم  $x' = f^{-1}(y')$ ،  $x = f^{-1}(y)$ . در این صورت،  $x' < x$ ، زیرا  $x = x'$  ایجاب می‌کند که  $y = y'$  (  $f$  تابع است )، حال آنکه  $x' > x$  ایجاب می‌کند که  $y' > y$  (  $f$  صعودی است ). بنابراین،  $f^{-1}$  نیز ( بر  $Y$ ، یعنی نقش  $X$  تحت  $f$  ) صعودی

است. اثبات نزولی بودن  $f$  اساساً "همین است".

مثال ۷. فرض کنیم

$$y = f(x) = x^n \quad (0 \leq x < \infty),$$

که در آن  $n$  عدد صحیح مثبتی است. بنا بر آزمون یکنوایی (قضیه ۷، صفحه ۲۶۹)،  $f$  بر قلمرو  $[0, \infty)$  صعودی است، زیرا  $f'(x) = nx^{n-1}$  بر  $(0, \infty)$  صعودی است. از قضیه ۱ نتیجه می‌شود که  $f$  یک به یک است با تابع معکوس

$$x = f^{-1}(y) = y^{1/n},$$

یا، پس از تعویض متغیرهای  $x$  و  $y$ ،

$$(۶) \quad y = f^{-1}(x) = x^{1/n},$$

و  $f^{-1}$  بر  $J$ ، یعنی نقش  $I$  تحت  $f$ ، صعودی است. مجموعه  $J$  باید بازه باشد، چون  $f$  بر  $I$  پیوسته است (قضیه ۱۵، صفحه ۱۶۰، را به یاد آورید). درواقع،  $J$  بازه  $[0, \infty)$  است، زیرا  $f(0) = 0$ ،  $f$  بر  $[0, \infty)$  نامنفی است، و

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \infty.$$

چون  $J = [0, \infty)$  قلمرو تابع معکوس (۶) است، این ثابت می‌گردد که ریشه  $n$ م  $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$  به ازای هر  $x$  نامنفی موجود و منحصر به فرد است، و این در طول راه تلویحاً "فرض شده بود".

مثال ۸. نشان دهید که تابع

$$(۷) \quad f(x) = x^{11} + 3x^7 + 2x + \sin 2x - 13$$

یک به یک است.

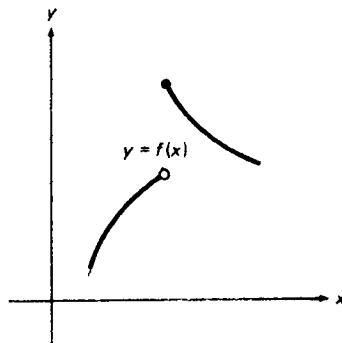
حل. با مشتگیری از (۷)، تابع

$$f'(x) = 11x^{10} + 21x^6 + 2(1 + \cos 2x)$$

به دست می‌آید، که به ازای هر  $x$  مثبت است (چرا؟).

از آزمون یکنوایی نتیجه می‌شود که  $f$  بر  $(-\infty, \infty)$  صعودی است. لذا، طبق قضیه ۱،  $f$  بر قلمرو خود  $(-\infty, \infty)$  یک به یک است. به علاوه، با آنکه نمی‌توان فرمول صریحی برای تابع معکوس  $f^{-1}$  به دست آورد، قضیه به ما می‌گوید که  $f^{-1}$  یک تابع صعودی است. به عنوان تمرین، نشان دهید که برد  $f$ ، و در نتیجه قلمرو  $f^{-1}$ ، مجدداً "بازه"  $(-\infty, \infty)$  می‌باشد.

توابع یک به یک پیوسته. بنابر قضیه ۱، هر تابع یکنوا باید یک به یک باشد. عکس این درست نیست؛ یعنی، توابع یک به یکی وجود دارند که یکنوا نیستند. نمودار یک چنین تابع  $f$  در شکل ۸ نموده شده است. ناپیوسته بودن این تابع تصادفی نیست، زیرا همانطور که اینک نشان می‌دهیم، هر تابع یک به یک پیوسته باید یکنوا باشد.



شکل ۸

قضیه ۲ (توابع یک به یک پیوسته یکنوا نیستند). هرگاه  $f$  بر بازه  $I$  پیوسته و یک به یک باشد، آنگاه  $f$  بر  $I$  صعودی است یا نزولی.

برهان. می‌توان فرض کرد که  $f$  غیر ثابت باشد، زیرا یک تابع ثابت مسلماً "یک به یک نیست". فرض کنیم  $f$  بر  $I$  پیوسته و یک به یک بوده ولی بر  $I$  نه صعودی باشد نه نزولی. در این صورت، سه نقطه  $a, b, c$  در  $I$  وجود دارند به طوری که  $a < b < c$  و

$$(۸) \quad f(a) < f(b), \quad f(c) < f(b),$$

یا

$$(۸') \quad f(a) > f(b), \quad f(c) > f(b).$$

فرض کنیم (۸) برقرار باشد، و  $k$  را طوری می‌گیریم که در نامساویهای

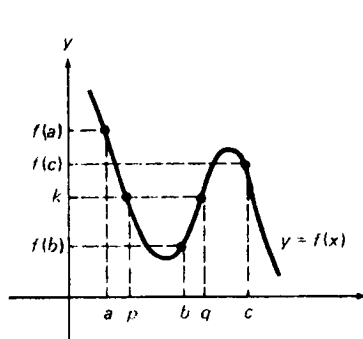
$$f(a) < k < f(b), \quad f(c) < k < f(b)$$

صدق کند. [ر.ک. شکل ۹ (آ)]. بنابر قضیه مقدار میانگین، نقطه‌ای مانند  $p$  در بازه  $(a, b)$  هست به طوری که  $f(p) = k$  و نقطه‌ای مانند  $q$  در بازه  $(b, c)$  هست به طوری که  $f(q) = k$ . اما در این صورت  $f(p) = f(q)$ ، که با فرض یک به یک بودن  $f$  بر  $I$  تعارض دارد. با انتخاب

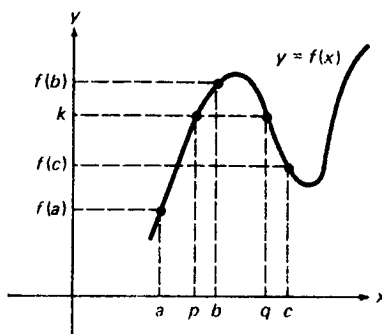
$$f(a) > k > f(b), \quad f(c) > k > f(b)$$



می‌توان به تناقض مشابهی رسید [ر.ک. شکل ۹ (ب)].



(ب)



(ا)

شکل ۹

شهوداً واضح است که معکوس یک تابع پیوسته خود پیوسته می‌باشد، چرا که اگر نمودار  $f$  یک تکه باشد، پس از انعکاس نسبت به خط  $y = x$  (عملی که نمودار  $f^{-1}$  را می‌دهد) یک تکه می‌ماند. این قضیه زیر را به ما می‌دهد که از برهان آن (که در آخرین بخش داده شده) به‌خاطر ماهیت تکنیکی‌اش چشم پوشیده‌ایم.

قضیه ۳ (پیوستگی تابع معکوس). فرض کنیم  $f$  بر بازه  $I$  پیوسته و یک به یک بوده، و  $J$  نقش  $I$  تحت  $f$  باشد (بنابر پیوستگی  $f$ ،  $J$  بازه است). در این صورت،  $f^{-1}$  بر  $J$  پیوسته می‌باشد.

مثال ۹. تابع  $f(x) = x^n$  ( $n$  یک عدد صحیح مثبت است) بر  $(-\infty, \infty)$ ، و بخصوص بر  $[0, \infty)$ ، پیوسته است. به‌علاوه،  $f$  بر  $[0, \infty)$  صعودی، و در نتیجه یک به یک، با معکوس  $f^{-1}(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$  می‌باشد (ر.ک. مثال ۰.۷). چون نقش بازه  $[0, \infty)$  تحت  $f$  مجدداً "بازه"  $[0, \infty)$  است، از قضیه ۳ نتیجه می‌شود که  $\sqrt[n]{x}$  بر  $[0, \infty)$  پیوسته می‌باشد. در بخشهای ۸.۱ و ۹.۱، پیوستگی  $\sqrt{x}$  به‌روش کاملاً متفاوتی ثابت شده است.

مثال ۱۰. تابع یک به یک

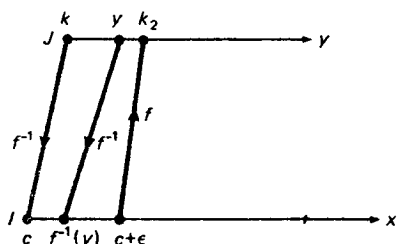
$$f(x) = \frac{1+x}{1-x}$$

مثالهای ۲ و ۵ بر  $I_1 = (-\infty, 1)$  و  $I_2 = (1, \infty)$  پیوسته است. لذا، معکوش

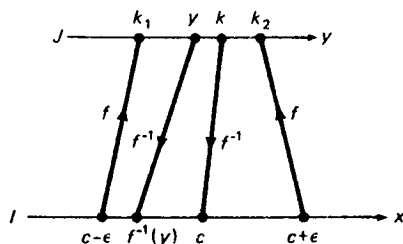
$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

بر نقشهای این دو بازه تحت  $f$ ، یعنی بازه‌های  $J_1 = (-1, \infty)$  و  $J_2 = (-\infty, -1)$ ، پیوسته می‌باشد.

برهان قضیه ۳ (اختیاری). بنابر قضیه ۲،  $f$  بر  $I$  صعودی یا نزولی است. فرض کنیم  $f$  بر  $I$  صعودی باشد. در این صورت، طبق قضیه ۱،  $f^{-1}$  بر  $J$  صعودی می‌باشد. فرض کنیم  $k$  یک نقطه درونی  $J$  بوده، و  $c = f^{-1}(k)$  در این صورت،  $c$  یک نقطه درونی  $I$  است (چرا؟). برای اثبات پیوسته بودن  $f^{-1}$  در  $k$ ، به صورت زیر عمل می‌کنیم. فرض کنیم  $\varepsilon$  عدد مثبت به قدر کافی کوچکی باشد که هر دو نقطه  $c \pm \varepsilon$  به  $I$  داشته باشند، و قرار می‌دهیم  $k_1 = f(c - \varepsilon)$ ،  $k_2 = f(c + \varepsilon)$ ، که همانطور که شکل ۱۰ (آ) نشان داده، ایجاب می‌کند که  $c - \varepsilon = f^{-1}(k_1)$ ،  $c + \varepsilon = f^{-1}(k_2)$  در این صورت،  $k_1 < k < k_2$ ، زیرا  $f$  صعودی است. هرگاه  $y$  متعلق به بازه  $(k_1, k_2)$  باشد، یعنی  $k_1 < y < k_2$ ، آنگاه  $f^{-1}(k_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(k_2)$ ، زیرا  $f^{-1}$  صعودی است، یا معادلاً  $c - \varepsilon < f^{-1}(y) < c + \varepsilon$  به عبارت دیگر، می‌توان  $f^{-1}(y)$  را هر قدر بخواهیم به  $c = f^{-1}(k)$  نزدیک کرد؛ یعنی با انتخاب  $y$  به قدر کافی نزدیک  $k$ ، یعنی در بازه  $(k_1, k_2)$ ، در فاصله  $\varepsilon$  از  $c$ . بنابراین، وقتی  $y \rightarrow k$ ،  $f^{-1}(y) \rightarrow f^{-1}(k)$ ؛ در نتیجه،  $f^{-1}$  در  $k$  پیوسته است، که  $k$  یک نقطه درونی دلخواه  $J$  می‌باشد. اگر  $k$  یک نقطه انتهایی  $J$  و متعلق به  $J$  باشد، تعدیل (و ساده سازی) مختصر استدلال فوق، که در شکل ۱۰ (ب) نموده شده، ثابت می‌کند که اگر  $k$



(ب)



(آ)

شکل ۱۰

یک نقطه انتهایی چپ (راست)  $J$  باشد،  $f^{-1}$  از راست (چپ) پیوسته می‌باشد. دوحکم اخیر باهم نشان می‌دهند که  $f^{-1}$  بر بازه  $J$  پیوسته است. اگر جهت افزایش  $y$  را عکس کرده،

و این را به حساب بیاوریم که با این کار در شکل ۱۰ (ب) داریم  $k_2 < k < k_1$  یا در شکل ۱۰ (ا) داریم  $k_2 < k$  ، برهان نزولی بودن  $f$  به همین ترتیب جریان خواهد یافت .

### مسائل

۱. چه شرطی بر ثابت  $a$  تابع خطی  $f(x) = ax + b$  را یک به یک می‌سازد؟ تابع معکوس نظیر  $f^{-1}$  را بیابید . چه شرط اضافی بر  $a$  باعث تقاطع نمودار  $f$  و نمودار  $f^{-1}$  در تنها یک نقطه می‌شود؟ این نقطه را بیابید .
۲. نشان دهید که تابع زوج  $f$  نمی‌تواند بر هیچ بازه ( یا مجموعه ) که نسبت به مبدأ متقارن است یک به یک باشد .
۳. نشان دهید هرگاه  $f$  یک به یک و فرد باشد ، آنگاه  $f^{-1}$  نیز فرد می‌باشد .
۴. نشان دهید هرگاه  $f$  و  $g$  یک به یک باشند ، آنگاه  $f \circ g$  نیز یک به یک بوده و  $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$  .

آیا تابع داده شده بر بازه ذکر شده یک به یک است؟ جواب خود را در هر حالت توضیح دهید .

۵.  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$  بر  $(-\infty, 1]$  ✓
۶.  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$  بر  $[2, 4]$  ✓
۷.  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$  بر  $[-1, 1]$  ✓
۸.  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$  بر  $[1, \infty)$  ✓
۹.  $f(x) = \sqrt{x(4-x)}$  بر  $[1, 3]$  ✓
۱۰.  $f(x) = \sqrt{x(4-x)}$  بر  $[0, 2]$  ✓
۱۱.  $f(x) = x^{3/5}$  بر  $(-\infty, \infty)$
۱۲.  $f(x) = x^{8/3}$  بر  $(-\infty, \infty)$
۱۳.  $f(x) = x^{-2/5}$  بر  $(-\infty, 0)$
۱۴.  $f(x) = x^{-5/4}$  بر  $(0, \infty)$
۱۵.  $f(x) = \sin x$  بر  $[\pi/4, 3\pi/4]$  ✓
۱۶.  $f(x) = \cos x$  بر  $[0, \pi]$  ✓
۱۷.  $f(x) = \tan x$  بر  $(-\pi/2, \pi/2)$  ✓
۱۸.  $f(x) = \sec x$  بر  $(-\pi/2, \pi/2)$  ✓
۱۹.  $f(x) = \cos x + \sin x$  بر  $[0, \pi]$  ✓
۲۰.  $f(x) = x + \cos x$  بر  $(-\infty, \infty)$  ✓

تمام بازه‌ها به طول  $\pi$  را بیاپید که بر آنها

۲۱.  $\sin x$  یک به یک باشد. ۲۲.  $\cos x$  یک به یک باشد.

با حل نسبت به  $x$  به عنوان تابعی از  $y$ ، معکوس تابع یک به یک داده شده را بیاپید.

$$y = -x \quad ۲۳ \checkmark \quad y = 2x + 1 \quad ۲۴ \checkmark$$

$$y = \frac{1}{x} \quad ۲۵ \checkmark \quad y = \frac{1}{1-x} \quad ۲۶ \checkmark$$

$$y = \frac{x}{x+1} \quad ۲۷ \checkmark \quad y = \frac{3x-1}{3x+1} \quad ۲۸ \checkmark$$

$$y = x^3 - 2 \quad ۲۹ \checkmark \quad y = \sqrt{x-1} \quad ۳۰ \checkmark$$

$$y = \sqrt{x(8-x)} \quad (0 \leq x \leq 4) \quad ۳۱$$

$$y = \sqrt{x(8-x)} \quad (4 \leq x \leq 8) \quad ۳۲$$

با استفاده از فرمول  $f(f^{-1}(x)) \equiv x$ ، مثل مثال ۵، معکوس تابع یک به یک داده شده را بیاپید.

$$f(x) = 1 - 3x \quad ۳۳ \checkmark \quad f(x) = \frac{1}{x} - 1 \quad ۳۴ \checkmark$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad (0 \leq x < \infty) \quad ۳۵ \checkmark$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad (-\infty < x \leq 0) \quad ۳۶ \checkmark$$

$$f(x) = 2 - \sqrt{x-3} \quad ۳۷ \checkmark$$

$$f(x) = (x^3 + 1)^{1/3} \quad ۳۸ \checkmark$$

$$f(x) = x^2 - 2x + 5 \quad (-\infty < x \leq 1) \quad ۳۹ \checkmark$$

$$f(x) = x^2 - 2x + 5 \quad (1 \leq x < \infty) \quad ۴۰$$

۴۱. نمودار تابع  $y = f(x)$  که معکوس خودش است را توصیف کنید.

نشان دهید که هر یک از توابع زیر معکوس خودش است.

$$f(x) = 2 - x \quad ۴۲ \checkmark \quad f(x) = \frac{1-x}{1+x} \quad ۴۳ \checkmark$$

$$f(x) = \frac{x-2}{x-1} \quad ۴۴ \checkmark \quad f(x) = \frac{3x+5}{4x-3} \quad ۴۵ \checkmark$$

$$f(x) = \sqrt{9-x^2} \quad (0 \leq x \leq 3) \quad ۴۶ \checkmark$$

۴۷. با استفاده از قضیه ۳، نشان دهید اگر  $n$  فرد باشد،  $\sqrt[n]{x}$  بر  $(-\infty, \infty)$  پیوسته است.
۴۸. در تعریف جفت مرتبی یک تابع (ر.ک. مسئله ۵۸، صفحه ۷۲)، دو جفت مرتب  $f$  با عنصر اول یکسان نمی‌توانند وجود داشته باشند. چه شرط اضافی  $f$  را یک به یک می‌سازد؟ اگر  $f$  یک به یک باشد، تابع معکوس  $f^{-1}$  چگونه به دست می‌آید؟
۴۹. نشان دهید که معکوس تابع (۷) بر  $(-\infty, \infty)$  پیوسته است.

### ۲۰۵ مشتق یک تابع معکوس

همانطور که اینک نشان می‌دهیم، رابطه ساده‌ای بین مشتق  $f^{-1}$ ، معکوس تابع یک به یک  $f$ ، و مشتق خود  $f$  وجود دارد.

قضیه ۴ (مشتق تابع معکوس). فرض کنیم  $f$  در همسایگی نقطه  $x$  پیوسته و یک به یک بوده، و  $f$  در  $x$  مشتق ناصفر متناهی داشته باشد. در این صورت،  $f^{-1}$  در نقطه  $y = f(x)$  مشتقی مساوی

$$(1) \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

دارد، که در آن  $x = f^{-1}(y)$

برهان. فرض کنیم  $I$  همسایگی  $x$  بوده، و  $J$  نقش  $I$  تحت  $f$  باشد. در این صورت،  $f^{-1}$  بر  $J$ ، بخصوص در نقطه  $y = f(x)$  که یک نقطه درونی  $J$  است، پیوسته می‌باشد (این احکام از قضایای ۲ و ۳، صفحات ۴۵۵ و ۴۵۶ نتیجه می‌شوند). فرض کنیم  $y$  بوده، و  $u = f^{-1}(y)$ . در این صورت،

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(y) &= \lim_{v \rightarrow y} \frac{f^{-1}(v) - f^{-1}(y)}{v - y} \\ &= \lim_{v \rightarrow y} \frac{u - x}{f(u) - f(x)} = \lim_{v \rightarrow y} \frac{1}{\frac{f(u) - f(x)}{u - x}} \end{aligned}$$

(چرا مخرج صفر وجود ندارد؟). اما  $f^{-1}$  در  $y$  پیوسته است؛ و در نتیجه،  $v \rightarrow y$  ایجاب می‌کند که  $f^{-1}(v) \rightarrow f^{-1}(y)$ ، یا معادلاً  $u \rightarrow x$ . پس نتیجه می‌شود که

$$(f^{-1})'(y) = \lim_{u \rightarrow x} \frac{1}{\frac{f(u) - f(x)}{u - x}} = \frac{1}{\lim_{u \rightarrow x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x}} = \frac{1}{f'(x)}.$$

این روش اثبات در صفحه ۲۲۰ در اثبات  $rx^{r-1} = D_x x^r$  به ازای عدد گویای دلخواه  $r$  پیش‌بینی شد، با نماد  $d$ ، (۱) شکل زیر را به خود می‌گیرد:

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{\frac{df(x)}{dx}}.$$

به‌طور فشرده، داریم

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}},$$

یا معادلاً

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}, \quad \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dy} = 1.$$

سه فرمول اخیر شبیه اتحادهای جبری‌اند، ولی البته برهانی برای قضیه به ما نمی‌دهند. اما گواه دیگری هستند بر شایستگی نماد  $d$ .

مثال ۱. تابع

$$(۲) \quad y = f(x) = \frac{1+x}{1-x} \quad (x \neq 1)$$

پیوسته، مشتق‌پذیر، و یک به یک است با معکوس

$$(۳) \quad x = f^{-1}(y) = \frac{y-1}{y+1} \quad (y \neq -1)$$

(ر.ک. مثال ۲، صفحه ۴۴۸). از اینرو، طبق قضیه ۴،

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{f'(x)} \quad (y \neq -1),$$

مشروط بر اینکه  $f'(x) \neq 0$ . با مشتق‌گیری از (۲) نسبت به  $x$ ، به دست می‌آوریم

$$f'(x) = \frac{2}{(1-x)^2} \quad (x \neq 1),$$

که هرگز صفر نیست. بنابراین، به ازای هر  $x \neq 1$ ،  $y \neq -1$

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{\frac{2}{(1-x)^2}} = \frac{(1-x)^2}{2}$$

با گذاردن (۳) در این فرمول، خواهیم داشت

$$(۴) \quad \frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{\left(1 - \frac{y-1}{y+1}\right)^2}{2} = \frac{2}{(y+1)^2},$$

یا معادلاً"، اگر  $x$  را متغیر مستقل بگیریم،

$$\frac{df^{-1}(x)}{dx} = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

به عنوان تمرین، اعتبار (۴) را با مشتقگیری مستقیم از (۳) نسبت به  $y$  تحقیق کنید

مثال ۲. هرگاه  $y = \sqrt{x}$ ، آنگاه  $x = y^2$ . بنابراین، همانطور که از قبل می‌دانیم،

$$\frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0).$$

مثال ۳. به فرض آنکه

$$f(x) = x^8 + 3x^4 + 2x^2 + 1 \quad (0 \leq x < \infty),$$

(۷)  $(f^{-1})'$  را بیابید.

حل. چون به ازای  $x > 0$ ،  $f'(x) = 8x^7 + 12x^3 + 4x > 0$ ، می‌دانیم که  $f$  بر  $[0, \infty)$  صعودی است. بنابراین،  $f$  بر  $[0, \infty)$  یک به یک با تابع معکوس  $f^{-1}$  می‌باشد. به آسانی معلوم می‌شود که  $f(1) = 7$ ،  $f'(1) = 24$ . از اینرو، طبق قضیه ۴،

$$(f^{-1})'(7) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{24}.$$

توجه کنید که قضیه ۴ به ما توان محاسبه مقدار مشتق  $f^{-1}$  را حتی در حالاتی که یافتن فرمول صریح برای  $f^{-1}$  ناممکن است می‌بخشد. این وضع یادآور تکنیک مشتقگیری ضمنی است، و این امری تصادفی نیست (ر.ک. مسئله ۱).

مثال ۴. به فرض آنکه

$$f(x) = 2x + \sin^3 x,$$

(۸)  $(f^{-1})'(0)$  را بیابید.

حل. داریم

$$f'(x) = 2 + 3 \sin^2 x \cos x = 2 + \frac{3}{2} \sin x \sin 2x,$$

که در آن

$$|\sin x \sin 2x| = |\sin x| |\sin 2x| \leq 1.$$

لذا، به ازای هر  $x$ ،  $f'(x) \geq \frac{1}{2} > 0$ ، و  $f$  بر  $(-\infty, \infty)$  صعودی است. پس نتیجه می‌شود که  $f$  بر  $(-\infty, \infty)$  یک به یک با تابع معکوس  $f^{-1}$  می‌باشد. به علاوه،  $f(0) = 0$ ،  $f'(0) = 2$ ، و در نتیجه، طبق قضیه ۴،

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}.$$

این حالت دیگری است که در آن یافتن فرمول صریح برای معکوس  $f^{-1}$  ممکن نیست.

### مسائل

۱. به فرض مشتقپذیر بودن  $f$  و  $f^{-1}$ ، فرمول (۱) را به کمک مشتقگیری ضمنی ثابت کنید.

۲. فرض کنید  $y = f(x) = x^2 + 2x + 1$ ، که در آن  $x \geq -1$ .  $(f^{-1})'(9)$  را با استفاده از قضیه ۴ حساب کنید. سپس جواب را ابتدا با حل نسبت به  $x$  به عنوان تابعی از  $y$  امتحان نمایید.

با استفاده از قضیه ۴،  $(f^{-1})'(c)$  را در صورتی حساب کنید که

$$f(x) = 4x^2 - 5x + 1, c = 10 \quad ۳.$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4, c = -16 \quad ۴.$$

$$f(x) = \frac{1}{8}x^5 + \frac{1}{2}x^3 - 1, c = 7 \quad ۵.$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}, c = 5 \quad ۶.$$

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+2}, c = -3 \quad ۷.$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}, c = \frac{1}{2} \quad ۸.$$

$$f(x) = \sqrt{25-x^2}, c = 4 \quad ۹.$$

$$f(x) = x^{21} + 2x^{11} + 5x^7, c = -8 \quad ۱۰.$$

$$f(x) = x + \cos x, c = \pi - 1 \quad ۱۱.$$



$$f(x) = x^3 + x + \sin x, c = 0 \cdot ۱۲$$

$$f(x) = \tan x, c = -\sqrt{3} \cdot ۱۳$$

$$f(x) = \cot^3 x, c = 1 \cdot ۱۴$$

در هر حالت تحقیق کنید که  $f$  بر بازه مناسبی یک به یک است.

در مسائل ۱۵ تا ۲۰ هر تابع  $f$  یک به یک یا معکوس  $f^{-1}$  است. مماس بر منحنی  $y = f^{-1}(x)$  در نقطه داده شده  $P$  را بیابید.

$$f(x) = \frac{x}{x-4}, P = (-3, 3) \cdot ۱۵$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-5}, P = (2, 11) \cdot ۱۶$$

$$f(x) = x^3 + x, P = (-10, -2) \cdot ۱۷$$

$$f(x) = x + \sin x, P = \left(\frac{\pi}{2}, 1, \frac{\pi}{2}\right) \cdot ۱۸$$

$$f(x) = \sqrt{169 - x^2} \quad (0 \leq x \leq 13), P = (12, 5) \cdot ۱۹$$

$$f(x) = \sqrt{169 - x^2} \quad (-13 \leq x \leq 0), P = (5, -12) \cdot ۲۰$$

۲۱. فرض کنید  $f(x) = \int_1^x \sqrt{2 + \sin^{11} t} dt$ . نشان دهید که  $f$  بر  $(-\infty, \infty)$  یک به یک است. قرارداد دهید  $a = f(\pi), b = f(3\pi/2)$ ، با آنکه قادر به محاسبه این اعداد نیستیم.

$(f^{-1})'(a)$  و  $(f^{-1})'(b)$  را بیابید. همچنین،  $(f^{-1})'(0)$  را پیدا نمایید.

فرض کنید  $f(x) = \int_0^x \sqrt{1+u^6} du$ .  $(f^{-1})'(c)$  را در صورتی حساب کنید که

$$c = f(\sqrt{2}) \cdot ۲۴$$

$$c = f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot ۲۳$$

$$c = 0 \cdot ۲۲$$

۲۵. فرض کنید  $f$  در همان شرایط قضیه ۴ صدق کرده، و نیز  $f$  در نقطه  $x$  مشتق دوم

متناهی داشته باشد. نشان دهید که  $f^{-1}$  در نقطه  $y = f(x)$  مشتق دومی مساوی

$$(f^{-1})''(y) = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3} \quad (\text{یک})$$

دارد

در مسائل ۲۶ تا ۳۱، هر یک از توابع یک به یک یا معکوس  $f^{-1}$  می باشد. با استفاده از

(یک)،  $(f^{-1})'(c)$  را در صورتی حساب کنید که

$$f(x) = x^{3/2}, c = 8 \cdot ۲۶$$

$$f(x) = \frac{3x+1}{3x-1}, c = 2 \cdot ۲۷$$

$$f(x) = \frac{1}{x^3 + 2}, c = 1 \cdot 28$$

$$f(x) = x + \sin x, c = 0 \cdot 29$$

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{1+v^2} dv, c = f(1) \cdot 30$$

$$f(x) = \tan^3 x \quad (-\pi/2 < x < \pi/2), c = -1 \cdot 31$$

۳۲. فرض کنید  $f$  هر بازه  $I$  مشتقپذیر با مشتق  $f'$  بوده، و  $f'$  بر  $I$  ناصفر باشد. در این صورت،  $f$  بر  $I$  یکنوا و یک به یک با معکوس  $f^{-1}$  است. فرض کنید بازه  $J$  نقش  $I$  تحت  $f$  باشد. نشان دهید هرگاه  $f$  بر  $I$  به بالا (پایین) مقرر باشد، آنگاه  $f^{-1}$  در حالت نزولی بودن  $f$  بر  $J$  به بالا (پایین) مقرر و در حالت صعودی بودن  $f$  بر  $J$  به پایین (بالا) مقرر است. نشان دهید هرگاه  $f$  در نقطه  $c$  درونی  $I$  از نقطه  $c$  عطف داشته باشد، آنگاه  $f^{-1}$  در  $f(c)$  نقطه  $c$  عطف دارد.

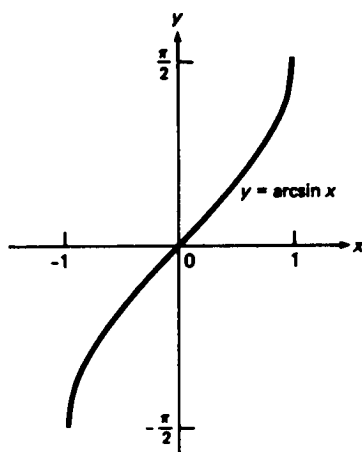
### ۳.۵ توابع مثلثاتی معکوس

حال به یافتن توابع معکوس مناسبی برای توابع مثلثاتی  $\sin x$ ،  $\cos x$ ،  $\tan x$ ،  $\cot x$ ،  $\sec x$  و  $\csc x$  می پردازیم. هر یک از این شش تابع متناوب است؛ و در نتیجه، نمی تواند بر قلمرو تعریف طبیعی خود یک به یک باشد. مثلاً،  $\sin x$  بر  $(-\infty, \infty)$  متناوب با دوره تناوب اساسی  $2\pi$  است، و شرط تناوب  $\sin(x + 2\pi) \equiv \sin x$  خود  $\sin x$  را از یک به یک بودن و می دارد، زیرا این شرط می گوید که سینوس در نقاط متمایز  $x$  و  $x + 2\pi$  مقدار یکسان می گیرد. برای آنکه تابع  $\sin x$  یک به یک شود که بتواند تابع معکوس داشته باشد، باید قلمرو آن را به طرز شایسته ای، بدون آنکه بی جهت خیلی کوچک شود، محدود کنیم. انتخاب متعارف  $X$  بازه  $[-\pi/2, \pi/2]$  است، که بر آن  $\sin x$  صعودی و در نتیجه یک به یک است. (به آسانی معلوم می شود که  $\sin x$  بر هر بازه به طول بزرگتر از  $\pi$  یک به یک نیست.) پس برد  $\sin x$  بازه  $Y = [-1, 1]$  است، که همان برد  $\sin x$  است وقتی بر تمام بازه  $(-\infty, \infty)$  تعریف شده باشد.

سینوس معکوس. حال که قلمرو  $\sin x$  به بازه  $X = [-\pi/2, \pi/2]$  محدود شده است، می توان معکوس  $\sin x$  را گرفته تابعی به نام سینوس معکوس به دست آوریم. به طور مشخص، سینوس معکوس  $y$ ، که با  $\arcsin y$  نموده می شود، عدد منحصر به فرد  $x$  در بازه  $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$  است به طوری که  $y = \sin x$ . نماد دیگر  $y \sin^{-1}$  است، ولی در استفاده از این نماد باید مواظب خلط با متقابل  $\sin y$  بود که با  $1/\sin y$  یا  $(\sin y)^{-1}$  نموده می شود؛ این تذکر را

در مورد توابع مثلثاتی معکوس دیگر نیز می‌دهیم. هر دو نماد مرسوم است. "نماد قوس" کمتر مبهم است، ولی "نماد  $-1$ " جای کمتری را می‌گیرد؛ و در نتیجه، برای مهره‌های ماشینهای حساب علمی جیبی ارجح است. توجه کنید که تابع  $\arcsin y$  دارای قلمرو  $Y = [-1, 1]$  و برد  $X = [-\pi/2, \pi/2]$  می‌باشد.

پیش از رسم تابع سینوس معکوس،  $\arcsin y$  را با  $\arcsin x$  عوض کرده  $x$  را متغیر مستقل می‌گیریم. نمودار  $\arcsin x$  در شکل ۱۱ نموده شده است، و منعکس بخشی از نمودار  $\sin x$ ،



شکل ۱۱

یعنی بخشی که بین خطوط  $x = \pm \pi/2$  است، نسبت به خط  $y = x$  می‌باشد. خواهید دید که  $\arcsin x$  بر  $[-1, 1]$  صعودی است که با قضیه ۱ سازگار است، و بر  $[-1, 1]$  پیوسته است که با قضیه ۳ سازگار می‌باشد. همچنین، توجه کنید که طبق انتظار ما  $\arcsin x$  بر  $[-1, 1]$  فرد است (ر. ک. مسئله ۳، صفحه ۴۵۸).

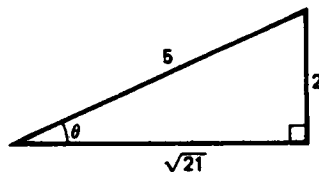
مثال ۱.  $\sin(\arcsin 1)$  و  $\arcsin(\sin \pi)$  را حساب کنید.

حل. سینوس زاویه‌ای که سینوس آن ۱ است باید ۱ باشد؛ و در نتیجه،  $\sin(\arcsin 1) = 1$ . این حالت خاصی از فرمول  $f(f^{-1}(x)) = x$  است که برای هر تابع یک به یک  $f$  و معکوس  $f^{-1}$  درست است. به خاطر فرمول  $f^{-1}(f(x)) = x$  ممکن است اغوا شده و بنویسیم  $\arcsin(\sin \pi) = \pi$ ، ولی این رابطه درست نیست؛ در واقع،  $\pi$  مقداری از تابع سینوس معکوس، که بردش  $[-\pi/2, \pi/2]$  است، نیست. از آن سو،  $\sin \pi = 0$  و زاویه منحصربه‌فردی

در  $[-\pi/2, \pi/2]$ ، یعنی زاویه  $0$ ، هست که سینوس آن  $0$  می باشد. پس نتیجه می شود که  $\arcsin(\sin \pi) = 0$ .

مثال ۲.  $\tan(\arcsin \frac{2}{5})$  را حساب کنید.

حل. منظور از  $\arcsin \frac{2}{5}$  یعنی زاویه  $\theta$  بین  $-\pi/2$  و  $\pi/2$  که سینوس آن  $\frac{2}{5}$  است. شکل ۱۲ مثلث قائم الزاویه ای با زاویه حاده  $\theta$  را نشان می دهد که طول ضلع مقابل  $\theta$  مساوی ۲ بوده



شکل ۱۲

و طول وتر برابر ۵ می باشد. بنابر قضیه فیثاغورس، طول ضلع دیگر مساوی است با  $\sqrt{25-4} = \sqrt{21}$ . از اینرو،  $\tan \theta$ ، یعنی نسبت طول ضلع مقابل  $\theta$  به ضلع مجاور  $\theta$ ، مساوی است با  $2/\sqrt{21}$ ؛ و لذا،  $\tan(\arcsin \frac{2}{5}) = 2/\sqrt{21}$ .

برای مشتقگیری از سینوس معکوس، قرار می دهیم  $y = \arcsin x$ ،  $x = \sin y$  و قضیه ۴، صفحه ۴۶۵، را به کار می بریم. در نتیجه، خواهیم داشت

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}(\sin y)} = \frac{1}{\cos y},$$

مشروط براینکه  $\cos y \neq 0$ . توجه کنید که این فرمول فقط بر بازه  $-\pi/2 < y < \pi/2$  برقرار است که  $\cos y > 0$  و

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}.$$

از تلفیق دو فرمول اخیر معلوم می شود که

$$(1) \quad \frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

مشروط براینکه  $-1 < x < 1$  . از (۱) فوراً نتیجه می شود که

$$(۲) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \quad (|x| < 1).$$

به علاوه ، با استفاده از قاعده زنجیره ای از  $\arcsin(x/a)$  که  $a > 0$  مشتق می گیریم ، به دست می آید

$$\frac{d}{dx} \arcsin \frac{x}{a} = \frac{1/a}{\sqrt{1-(x/a)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

پس نتیجه می شود که

$$(۲') \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0, |x| < a),$$

که تعمیم (۲) می باشد .

مثال ۳ . انتگرال  $I = \int_0^{\sqrt{2}/3} \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$  را حساب کنید .

حل . چون

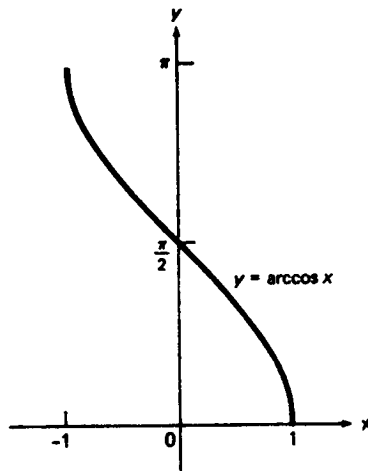
$$I = \int_0^{\sqrt{2}/3} \frac{dx}{\sqrt{9(\frac{4}{9}-x^2)}} = \frac{1}{3} \int_0^{\sqrt{2}/3} \frac{dx}{\sqrt{\frac{4}{9}-x^2}},$$

از فرمول (۲') به ازای  $a = \frac{2}{3}$  نتیجه می شود که

$$I = \frac{1}{3} \left[ \arcsin \frac{3x}{2} \right]_0^{\sqrt{2}/3} = \frac{1}{3} \left( \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} - \arcsin 0 \right) = \frac{1}{3} \left( \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{12}.$$

به بیان دیگر ، چون  $\sqrt{4-9x^2} = \sqrt{4-(3x)^2}$  ، همین جواب را می توان با استفاده از قاعده (چهار) ، صفحه ۴۰۲ ، و فرمول (۲') به ازای  $a = 2$  به دست آورد .

کسینوس معکوس . برای تعریف کسینوس معکوس ، که با  $\arccos x$  یا  $\cos^{-1} x$  نموده می شود ، به همین نحو عمل می کنیم . از آغازنقشهای  $x$  و  $y$  را باهم عوض کرده ، می نویسیم  $x = \cos y$  ؛ در نتیجه ، وقتی تابع معکوس را تشکیل می دهیم ،  $x$  متغیر مستقل و  $y$  متغیر وابسته می باشد . سپس قلمرو  $\cos y$  را به بازه  $[0, \pi]$  محدود می کنیم . تابع  $\cos y$  بر این بازه نزولی و در نتیجه یک به یک است که این بازه را به روی بازه  $[-1, 1]$  می نگارد . تابع معکوس نظیر  $y = \arccos x$  بر  $[-1, 1]$  نزولی و پیوسته است ، و نمودارش در شکل ۱۳ نموده شده است .



شکل ۱۳

مقایسه اشکال ۱۱ و ۱۳ باهم نشان می‌دهد که نمودار  $\arccos x$  را می‌توان از  $\arcsin x$  با انعکاس نسبت به محور  $y$  و سپس انتقالی به اندازه  $\pi/2$  واحد به بالا به دست آورد. بنابراین، این،

$$\arccos x = \arcsin(-x) + \frac{\pi}{2},$$

یا، معادلاً،

$$(۲) \quad \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x,$$

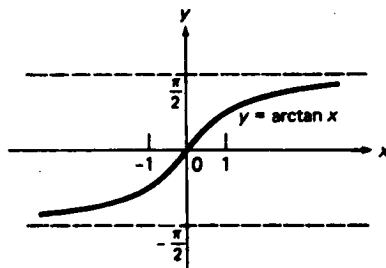
زیرا  $\arcsin x$  فرد است. با مشتگیری از (۳) معلوم می‌شود که

$$(۴) \quad \frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{d}{dx} \arcsin x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

مشروط بر اینکه  $-1 < x < 1$ .

تائزانت معکوس. حال به تائزانت معکوس می‌پردازیم که با  $\arctan x$  یا  $\tan^{-1} x$  نموده می‌شود. می‌نویسیم  $x = \tan y$ ، و یکی از بی‌نهایت شاخه  $\tan y$  را با تحدید قلمرو  $\tan y$  به بازه  $(-\pi/2, \pi/2)$  انتخاب می‌کنیم. تابع  $\tan y$  بر این بازه صعودی و در نتیجه یک به یک است، که این بازه را به روی بازه  $(-\infty, \infty)$  می‌نگارد. تابع معکوس نظیر  $y = \arctan x$  بر بازه  $(-\infty, \infty)$  صعودی و پیوسته است، که این بازه را به روی بازه  $(-\pi/2, \pi/2)$

می‌نگارد، و نمودارش در شکل ۱۴ نموده شده است. نمودار  $\arctan x$  منعکس شاخه معینی از  $\tan x$  نسبت به خط  $y = x$  است، و تحت این انعکاس، مجانبهای قائم  $x = \pm \pi/2$  از  $\tan x$  به مجانبهای افقی  $y = \pm \pi/2$  از  $\arctan x$  تبدیل می‌شوند. توجه کنید که  $\arctan x$  یک تابع فرد مانند  $\tan x$  است.



شکل ۱۴

برای مشتگیری از تانژانت معکوس، قرار می‌دهیم  $x = \tan y$ ،  $y = \arctan x$  و با اعمال قضیه ۴ به دست می‌آوریم

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy} \tan y} = \frac{1}{\sec^2 y}.$$

اما

$$\sec^2 y = \tan^2 y + 1 = x^2 + 1$$

(ر.ک. فرمول (۶)، صفحه ۸۸)؛ و لذا،

$$(۵) \quad \frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

از رابطه (۵) فوراً نتیجه می‌شود که

$$(۶) \quad \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \arctan x + C.$$

به علاوه، با استفاده از قاعده زنجیره‌ای، از  $\arctan(x/a)$  مشتق گرفته به دست می‌آوریم

$$\frac{d}{dx} \arctan \frac{x}{a} = \frac{1/a}{(x/a)^2 + 1} = \frac{a}{x^2 + a^2}.$$

پس نتیجه می‌شود که

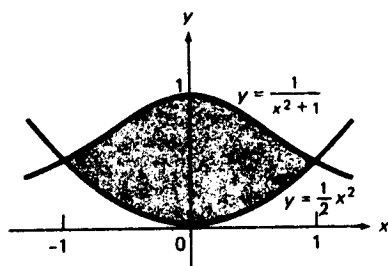
$$(۶') \quad \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0),$$

توابع معکوس ۴۷۱

که رابطه (۶) را تعمیم می دهد . در واقع ، فرض  $a > 0$  هیچ کلیتی را خدشه دار نمی کند .

مثال ۴ . مساحت بین منحنیهای  $y = \frac{1}{x^2 + 1}$  و  $y = \frac{1}{2}x^2$  را بیابید .

حل . مساحت  $A$  ی ناحیه سایه دار در شکل ۱۵ را جستجو می کنیم . برای یافتن مختصات  $x$  نقاطی که در آنها دو منحنی متقاطعند ، معادله  $\frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{2}x^2$  را حل می کنیم ، که



شکل ۱۵

معادل است با

$$(۷) \quad x^4 + x^2 - 2 = (x^2 + 2)(x^2 - 1) = 0.$$

چون عامل  $x^2 + 2$  هرگز صفر نیست ، معادله (۷) فقط دو ریشه  $x = -1$  و  $x = 1$  را دارد . بر بازه  $[-1, 1]$  ، منحنی " زنگدیس "  $y = 1/(x^2 + 1)$  منحنی بالایی و سهمی  $y = \frac{1}{2}x^2$  منحنی پایینی می باشد . به کمک (۶) نتیجه می شود که

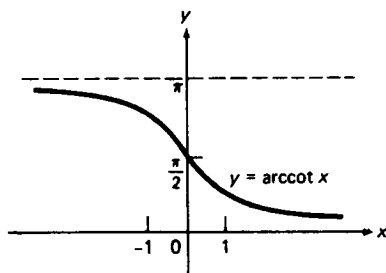
$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = 2 \int_0^1 \left( \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{2}x^2 \right) dx \\ &= 2 \left[ \arctan x - \frac{1}{6}x^3 \right]_0^1 = 2 \left( \arctan 1 - \frac{1}{6} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

زوج بودن انتگرالده در مرحله دوم به کار رفته است ( مسئله ۱ ، صفحه ۴۱۵ را به یاد آورید ) .

کتانژانت معکوس . برای تعریف کتانژانت معکوس که با  $\operatorname{arccot} x$  یا  $\cot^{-1} x$  نموده می شود می نویسیم  $x = \cot y$  و قلمرو  $y$  را به بازه  $(0, \pi)$  محدود می کنیم . تابع  $\cot y$  بر این بازه نزولی ، و در نتیجه یک به یک ، است ، که این بازه را به روی بازه  $(-\infty, \infty)$  می نگارد . تابع معکوس نظیر  $y = \operatorname{arccot} x$  بر بازه  $(-\infty, \infty)$  نزولی و پیوسته است ، که این بازه را به



روی بازه  $(0, \pi)$  می‌نگارد، و دارای نمودار شکل ۱۶ است. مقایسه اشکال ۱۴ و ۱۶ نشان می‌دهد که نمودار  $\operatorname{arccot} x$  را می‌توان از نمودار  $\arctan x$  با انعکاس نسبت به محور  $x$  و



شکل ۱۶

سپس انتقال به اندازه  $\pi/2$  واحد به بالا به دست آورد. بنابراین،

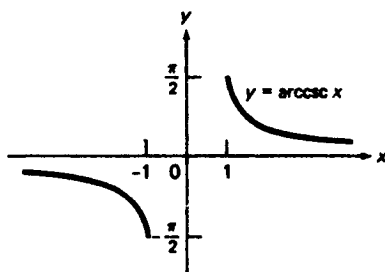
$$(۸) \quad \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x.$$

با مشتقگیری از (۸) معلوم می‌شود که

$$(۹) \quad \frac{d}{dx} \operatorname{arccot} x = -\frac{d}{dx} \arctan x = -\frac{1}{x^2 + 1}.$$

سکانت و کسکانت معکوس، دو تابع مثلثاتی معکوس با قیامند هسکانت معکوس است که با  $\operatorname{arcsec} x$  یا  $\sec^{-1} x$  نموده می‌شود، و کسکانت معکوس است که با  $\operatorname{arccsc} x$  یا  $\csc^{-1} x$  نموده می‌شود. مطلب را با  $\operatorname{arccsc} x$  شروع می‌کنیم، زیرا این تابع عملاً از دو تابع دیگر به خاطر فرد بودن ساده‌تر است. می‌نویسیم  $x = \csc y$  و قلمرو  $y$  را جفت بازه  $(-\pi/2, 0)$  و  $(0, \pi/2)$  اختیار می‌کنیم؛ نقطه ۰ باید مستثنی شود، زیرا ۰ تعریف نشده است. تابع  $\csc y$  بر هر یک از این دو بازه نزولی، و در نتیجه یک به یک، است. به علاوه، بر هر یک از بازه‌های  $(-\pi/2, 0)$  و  $(0, \pi/2)$  پیوسته است، که آنها را به ترتیب به روی بازه‌های  $(-\infty, -1]$  و  $[1, \infty)$  می‌نگارد. تمام این اطلاعات را می‌توان از شکل ۲۵، صفحه ۱۵۵، به دست آورد. تابع معکوس نظیر  $y = \operatorname{arccsc} x$  بر هر یک از بازه‌های  $(-\infty, -1]$  و  $[1, \infty)$  نزولی و پیوسته است، که این بازه‌ها را به ترتیب به روی  $(-\pi/2, 0)$  و  $(0, \pi/2)$  می‌نگارد، و لسی بر بازه  $(-1, 1)$  تعریف نشده است. نمودار  $\operatorname{arccsc} x$  در شکل ۱۷ نموده شده است، که از آن معلوم می‌شود که  $\operatorname{arccsc} x$  مانند  $\csc x$  یک تابع فرد است.

برای مشتقگیری از کسکانت معکوس، به شکل معمول عمل کرده، می‌نویسیم



شکل ۱۷

۴ را اعمال می‌کنیم. در نتیجه، به دست می‌آوریم

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arccsc} x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy} \csc y} = \frac{1}{-\csc y \cot y}.$$

اما

$$\cot^2 y = \csc^2 y - 1 = x^2 - 1$$

(ر.ک. فرمول (۶)، صفحه ۸۸)؛ و در نتیجه،

$$\cot y = \pm \sqrt{x^2 - 1}. \quad (۱۰)$$

در انتخاب علامت در (۱۰) باید خیلی محتاط بود. در واقع، چون  $\cot y$  وقتی  $0 < y < \pi/2$  مثبت و وقتی  $-\pi/2 < y < 0$  منفی است، باید وقتی  $0 < y < \pi/2$ ، یعنی  $x = \csc y > 1$ ، علامت به علاوه، و وقتی  $-\pi/2 < y < 0$ ، یعنی  $x = \csc y < -1$ ، علامت منها را برگزینیم. بنابراین،

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arccsc} x = \begin{cases} -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & \text{اگر } x > 1 \\ \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & \text{اگر } x < -1 \end{cases}$$

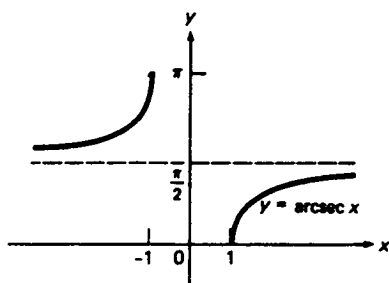
یا، به طور ساده،

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arccsc} x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad (۱۱)$$

مشروط براینکه  $|x| > 1$

بالاخره، برای تعریف  $\operatorname{arcsec} x$  می‌نویسیم  $x = \sec y$  و قلمرو  $\sec$  را جفت بازه  $[0, \pi/2]$  و  $(\pi/2, \pi]$  اختیار می‌کنیم؛ نقطه  $\pi/2$  باید مستثنی شود، زیرا  $\sec(\pi/2)$  تعریف

نشده است. تابع  $y = \sec x$  بر هر یک از این دو بازه صعودی، و در نتیجه یک به یک، است. به علاوه، بر هر یک از بازه‌های  $[0, \pi/2)$  و  $(\pi/2, \pi]$  پیوسته است، که این بازه‌ها را به ترتیب روی بازه‌های  $(1, \infty)$  و  $(-\infty, -1]$  می‌نگارد. تمام این اطلاعات را نیز می‌توان از شکل ۲۵، صفحه ۱۰۵، به دست آورد. تابع معکوس نظیر  $\operatorname{arcsec} x$  بر هر یک از بازه‌های  $(1, \infty)$  و  $(-\infty, -1]$  صعودی و پیوسته است، که آنها را به ترتیب روی بازه‌های  $[0, \pi/2)$  و  $(\pi/2, \pi]$  می‌نگارد، ولی بر بازه  $(-1, 1)$  تعریف نشده است. نمودار  $\operatorname{arcsec} x$  در شکل ۱۸ نموده شده است. مقایسه شکل‌های ۱۷ و ۱۸ باهم نشان می‌دهد که نمودار  $\operatorname{arcsec} x$  را می‌توان از



شکل ۱۸

نمودار  $\operatorname{arccsc} x$  به وسیله انعکاس نسبت به محور  $x$  و پس از آن انتقال به اندازه  $\pi/2$  واحد به بالا به دست آورد. بنابراین،

$$(12) \quad \operatorname{arcsec} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccsc} x.$$

با مشتقگیری از (۱۲) معلوم می‌شود که

$$(13) \quad \frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} x = -\frac{d}{dx} \operatorname{arccsc} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}},$$

مشروط بر اینکه  $|x| > 1$ .

مثال ۵. نشان دهید که

$$(14) \quad \operatorname{arcsec} x = \arccos \frac{1}{x},$$

$$(14') \quad \operatorname{arccsc} x = \arcsin \frac{1}{x},$$

مشروط بر اینکه  $|x| \geq 1$ .

حل. هرگاه  $y = \operatorname{arcsec} x$ ، آنگاه  $\sec y = x$  یا معادلاً " $\cos y = 1/x$ ". پس نتیجه می‌شود که  $y = \arccos(1/x)$ ، زیرا  $y$  عددی در بازه  $0 \leq y \leq \pi$  می‌باشد. از مقایسه دو عبارت مربوط به  $y$  رابطه (۱۴) به دست می‌آید. با استدلالی مشابه، که به عنوان تمرین گذارده می‌شود، فرمول (۱۴') ثابت خواهد شد.

با جمع‌آوری فرمولهای (۱)، (۴)، (۵)، (۹)، (۱۱)، و (۱۳) در یک جا، داریم

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \arcsin x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & \frac{d}{dx} \arccos x &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\ \frac{d}{dx} \arctan x &= \frac{1}{x^2+1}, & \frac{d}{dx} \operatorname{arccot} x &= -\frac{1}{x^2+1}, \\ \frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} x &= \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, & \frac{d}{dx} \operatorname{arccsc} x &= -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}. \end{aligned}$$

مثال ۶. با استفاده از این فرمولها و قاعده زنجیره‌ای، از

$$f(x) = \arctan \frac{1}{x}$$

مشتق گرفته به دست می‌آوریم

$$f'(x) = \frac{1}{(1/x)^2 + 1} \frac{d}{dx} \frac{1}{x} = \frac{-1/x^2}{(1/x)^2 + 1} = -\frac{1}{x^2 + 1},$$

که در آن باید فرض کنیم  $x \neq 0$ ، زیرا  $f(0)$ ، و در نتیجه  $f'(0)$ ، تعریف نشده است. بنابراین، این  $f(x)$  بر هر یک از بازه‌های  $(-\infty, 0)$  و  $(0, \infty)$  دارای همان مشتق  $-\arctan x$  است. پس نتیجه می‌شود که

$$(15) \quad \arctan \frac{1}{x} = -\arctan x + C_1 \quad (0 < x < \infty),$$

$$(15') \quad \arctan \frac{1}{x} = -\arctan x + C_2 \quad (-\infty < x < 0),$$

که در آنها  $C_1$  و  $C_2$  دو ثابت‌اند که لازم نیست یکی باشند. در واقع،  $C_1$  و  $C_2$  نامساوی‌اند زیرا، با گذاردن  $x = 1$  در (۱۵)، داریم

$$\arctan 1 = -\arctan 1 + C_1, \quad \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + C_1,$$

در نتیجه،  $C_1 = \pi/2$ ، و نیز با گذاردن  $x = -1$  در (۱۵') نتیجه می شود که

$$\arctan(-1) = -\arctan(-1) + C_2, \quad -\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + C_2,$$

در نتیجه،  $C_2 = -\pi/2$ . با این مقادیر  $C_1$  و  $C_2$  می توان (۱۵) و (۱۵') را به فرمول واحدی تلفیق کرد:

$$(۱۶) \quad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x > 0 \text{ اگر} \\ -\frac{\pi}{2}, & x < 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

### مسائل

کمیات زیر را بدون استفاده از جدول یا ماشین حساب محاسبه نمایید.

- |   |   |
|---|---|
| $\operatorname{arccot}(-1) \cdot ۲ \checkmark$            | $\arcsin \frac{1}{2} \cdot ۱۷ \checkmark$                 |
| $\operatorname{arcsec}(2/\sqrt{3}) \cdot ۴ \checkmark$    | $\operatorname{arcsec} \sqrt{2} \cdot ۳ \checkmark$       |
| $\arccos 1 \cdot ۶ \checkmark$                            | $\arctan(-1/\sqrt{3}) \cdot ۵ \checkmark$                 |
| $\operatorname{arcsec} 2 \cdot ۸ \checkmark$              | $\operatorname{arccot}(-\sqrt{3}) \cdot ۷ \checkmark$     |
| $\arctan \sqrt{3} \cdot ۱۰ \checkmark$                    | $\operatorname{arcsec}(-\sqrt{2}) \cdot ۹ \checkmark$     |
| $\arcsin(1/\sqrt{2}) \cdot ۱۲ \checkmark$                 | $\arccos(-\frac{1}{2}) \cdot ۱۱ \checkmark$               |
| $\sin(\arccos(-1/\sqrt{2})) \cdot ۱۴ \checkmark$          | $\arcsin(\sin(3\pi/2)) \cdot ۱۳ \checkmark$               |
| $\tan(\arccos \frac{1}{4}) \cdot (۱۶) \checkmark$         | $\cos(\arcsin \frac{1}{3}) \cdot ۱۵ \checkmark$           |
| $\operatorname{arccot}(\tan(4\pi/3)) \cdot ۱۸ \checkmark$ | $\operatorname{arcsec}(\sec(5\pi/4)) \cdot ۱۷ \checkmark$ |

۱۹. معکوس تابع  $\sin x$  در صورت محدود شدن قلمروش به بازه  $[\pi/2, 3\pi/2]$  چیست؟

عبارات زیر را بدون استفاده از توابع مثلثاتی یا مثلثاتی معکوس بیان کنید.

- |   |   |
|---|---|
| $\cos(\arctan x) \cdot ۲۱ \checkmark$   | $\sin(\operatorname{arcsec} x) \cdot ۲۰ \checkmark$ |
| $\sin(2 \arccos x) \cdot ۲۳ \checkmark$ | $\tan(\arcsin x) \cdot ۲۲ \checkmark$               |
| $\cos(2 \arcsin x) \cdot ۲۵ \checkmark$ | $\cos(2 \arccos x) \cdot ۲۴ \checkmark$             |

از عبارات زیر مشتق بگیرید.

- |  |   |
|--|---|
| $\operatorname{arcsec}(2x+1) \cdot ۲۷ \checkmark$            | $(\arccos x)^2 \cdot ۲۶ \checkmark$           |
| $\operatorname{arccot} \frac{2t}{1-t^2} \cdot ۲۹ \checkmark$ | $\arctan \frac{1-x}{1+x} \cdot ۲۸ \checkmark$ |
| $\operatorname{arcsec} \frac{1}{t} \cdot ۳۱ \checkmark$      | $\arcsin t^2 \cdot ۳۰ \checkmark$             |

توابع معکوس ۴۷۷

$$\arccos \frac{1-u}{\sqrt{2}} \cdot ۳۳ \checkmark$$

$$\arcsin \sqrt{1-u^2} \cdot ۳۳ \checkmark$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{3}}{v} \cdot ۳۵ \checkmark$$

$$\operatorname{arcsec} \sqrt{u^2-1} \cdot ۳۴ \checkmark$$

$$\arctan \frac{3 \sin v}{4+5 \cos v} \cdot ۳۷ \checkmark$$

$$\operatorname{arccsc} \sqrt{v} \cdot ۳۶ \checkmark$$

۳۸. با شروع از فرمولهای (۱۴) و (۱۴')، فرمولهایی برای مشتقات  $\operatorname{arccsc} x$  و  $\operatorname{arcsec} x$  به دست آورید.

۳۹. نشان دهید که

$$\operatorname{arccot} x + \operatorname{arccot} \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x > 0 \text{ اگر} \\ \frac{3\pi}{2}, & x < 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

۴۰. نشان دهید که

$$\arctan x + \arctan \frac{1-x}{1+x} = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & x > -1 \text{ اگر} \\ -\frac{3\pi}{4}, & x < -1 \text{ اگر} \end{cases}$$

۴۱. فرمول انتگرالگیری

$$(یک) \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec} |x| + C \quad (|x| > 1)$$

و، به طور کلی،

$$(یک') \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{|x|}{a} + C \quad (|x| > a > 0)$$

را تحقیق کنید.

انتگرالهای زیر را محاسبه نمایید.

$$\int \frac{dt}{t\sqrt{t^2-49}} \cdot ۴۴ \checkmark$$

$$\int \frac{dx}{x^2+121} \cdot ۴۳ \checkmark$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}} \cdot ۴۲ \checkmark$$

$$\int \frac{dr}{r\sqrt{121r^2-144}} \cdot ۴۷ \checkmark$$

$$\int \frac{du}{64u^2+36} \cdot ۴۶ \checkmark$$

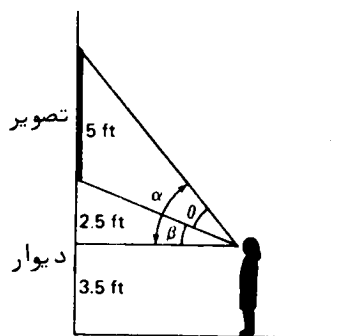
$$\int \frac{dt}{\sqrt{16-4t^2}} \cdot ۴۵ \checkmark$$

$$\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \cdot ۵۰ \checkmark$$

$$\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} \cdot ۴۹ \checkmark$$

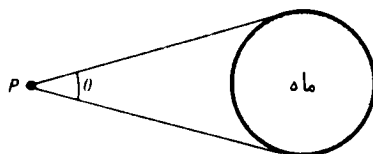
$$\int_{1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \cdot ۴۸ \checkmark$$

۵۱. یک تصویر به ارتفاع ۵ ft از دیواری آویزان است به طوری که پایین آن از کف اتاق ۶ ft فاصله دارد. یک بچه که سطح دید وی ۳.۵ ft بالای کف اتاق است می‌خواهد بهترین دید را از تصویر داشته باشد. با این فرض که بهترین دید وقتی به دست می‌آید که زاویه  $\theta$  ی تصویر در چشمان کودک (ر.ک. شکل ۱۹) ماکزیمم است، کودک در چه فاصله‌ای از دیوار باید بایستد؟



شکل ۱۹

۵۲. یک سفینه فضایی در فاصله ۲۰,۰۰۰ km تا سطح ماه بوده و با سرعت ۲ km/sec به آن نزدیک می‌شود. زاویه  $\theta$  ماه در موضع P سفینه با چه سرعتی افزایش می‌یابد؟ (این زاویه زاویه  $\theta$  در شکل ۲۰ است.) شعاع ماه ۱۷۳۸ km است.



شکل ۲۰

مساحت ناحیه  $R$  به

۵۳. ✓ محورها  $x$ ، خط  $x = 1$ ، و منحنی  $y = \arcsin x$

۵۴. ✓ محورها  $y$ ، خط  $y = \pi/2$ ، و منحنی  $y = \arcsin x$

۵۵. ✓ محوره‌های مختصات و منحنی  $y = \arccos x$

محدود است. در هر حالت ناحیه  $R$  را رسم نمایید. راهنمایی. نسبت به  $y$  انتگرال بگیرید.

۵۶. از شش تابع مثلثاتی معکوس چهارتا نقاط عطف دارند. اینها کدامند و نقاط عطف آنها کجا قرار دارند؟

۵۷. فرمولهای زیر را تحقیق کنید:

$$(دو) \quad \arcsin x + \arcsin y = \arcsin (x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}), \quad \checkmark$$

$$(سه) \quad \arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy},$$

که در (دو) فرض است که  $|\arcsin x + \arcsin y| \leq \pi/2$  و در (سه) فرض است که

$$|\arctan x + \arctan y| < \pi/2$$

نشان دهید که

$$\arcsin \frac{4}{5} - \arcsin \frac{3}{5} = \arcsin \frac{7}{25} \quad \cdot ۵۸ \checkmark$$

$$\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4} \quad \cdot ۵۹ \checkmark$$

$$\arctan \frac{1}{4} + \arctan \frac{3}{5} = \frac{\pi}{4} \quad \cdot ۶۰ \checkmark$$

$$\arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{4} + \arctan \frac{2}{9} = \frac{\pi}{4} \quad \cdot ۶۱$$

$$\cdot ۶۲ \checkmark \quad \text{فرمول}$$

$$\pi = 16 \arctan \frac{1}{5} - 4 \arctan \frac{1}{239}.$$

را تحقیق کنید.

در سال ۱۷۰۶ جان ماسن با استفاده از این فرمول اولین صد رقم اعشار  $\pi$  را محاسبه کرد. امروزه بیش از هشت میلیون رقم اعشاری  $\pi$  معلوم شده است.

### اصطلاحات و مباحث کلیدی

توابع یک به یک

معکوس تابع یک به یک

نمودار تابع یک به یک و خاصیت خط افقی

رابطه بین نمودار  $f^{-1}$  و نمودار  $f$

خواص توابع پیوسته یک به یک

مشتق تابع معکوس

سینوس و کسینوس معکوس



تانژانت و کتانژانت معکوس  
سکانت و کسکانت معکوس  
مشتقات توابع مثلثاتی معکوس

### مسائل تکمیلی

۱. نشان دهید هرگاه  $f$  بر  $[-a, a]$  زوج و بر  $[0, a]$  یک به یک باشد، آنگاه  $f$  بر  $[-a, 0]$

یک به یک است. آیا  $f$  بر  $[-a, a]$  یک به یک است؟

۲. نشان دهید هرگاه  $f$  بر  $[-a, a]$  فرد و بر  $[0, a]$  یک به یک باشد، آنگاه  $f$  بر  $[-a, 0]$

یک به یک است. آیا  $f$  بر  $[-a, a]$  یک به یک است؟

آیا تابع داده شده بر بازه مشخص شده یک به یک است؟

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} \quad \text{بر } (-\infty, 0] \quad (۳)$$

$$f(x) = \frac{x}{1 - x^2} \quad \text{بر } (-1, 1) \quad (۴)$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad \text{بر } (1, \infty) \quad (۵)$$

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2} \quad \text{بر } [0, \infty) \quad (۶)$$

معکوس تابع یک به یک داده شده را بیابید.

$$f(s) = s^2 + s + 1 \quad \left(-\frac{1}{2} \leq s < \infty\right) \quad ۷$$

$$g(t) = \frac{t^2}{t^2 + 1} \quad (0 \leq t < \infty) \quad ۸$$

$$h(u) = (u^3 + 1)^{1/5} \quad ۹$$

$$k(v) = (10 + v^{1/3})^5 \quad ۱۰$$

۱۱. تابع غیرثابتی چون  $f$  مثال بزنید که بر هر بازه، ولو خیلی کوچک، یک به یک نباشد.

۱۲. فرض کنید  $n$  عدد صحیح مثبتی باشد. نشان دهید که  $f(x) = x^n$  بر  $(-\infty, 0]$  یک به

یک است. معکوس  $f$  بر  $(-\infty, 0]$  چیست؟

نشان دهید که هر یک از توابع زیر معکوس خودش است.

$$f(x) = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} \quad (0 \leq x \leq a) \quad ۱۳$$

$$f(x) = \frac{9x + 11}{13x - 9} \quad ۱۴$$

$$f(x) = \sqrt[3]{27 - x^3} \cdot ۱۵$$

$$f(x) = \sqrt[3]{16 - x^4} \quad (0 \leq x \leq 2) \cdot ۱۶$$

$(f^{-1})'(c)$  را در صورتی حساب کنید که

$$f(x) = x^7 + x^3 + 2x, c = 4 \cdot ۱۷$$

$$f(x) = \frac{x-4}{3-x}, c = -2 \cdot ۱۸$$

$$f(x) = \frac{3x^2 - 1}{x^2 + 1} \quad (x \geq 0), c = 1 \cdot ۱۹$$

$$f(x) = \tan^3 x, c = 3\sqrt{3} \cdot ۲۰$$

در هر حالت، تحقیق کنید که  $f$  بر بازه مناسبی یک به یک است.

$(f^{-1})'(c)$  را در صورتی حساب کنید که

$$f(x) = \frac{1}{x^3 + 1}, c = \frac{1}{2} \cdot ۲۲$$

$$f(x) = \frac{x+5}{x-6}, c = 0 \cdot ۲۱$$

$$f(x) = \cot^3 x, c = -1 \cdot ۲۴$$

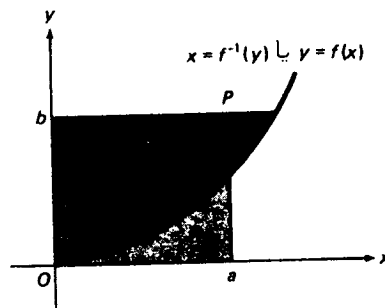
$$f(x) = 2x + \cos x, c = 1 \cdot ۲۳$$

۲۵. فرض کنید  $f$  بر  $[0, \infty)$  پیوسته و صعودی بوده و  $f(0) = 0$ . در این صورت،  $f$  یک

به یک با معکوس  $f^{-1}$  می باشد. با استفاده از شکل ۲۱، نامساوی یانگ<sup>۱</sup> را ثابت کنید:

$$\int_0^a f(x) dx + \int_0^b f^{-1}(x) dx \geq ab,$$

که در آن  $a$  و  $b$  اعداد مثبت دلخواهی هستند. چه وقت نامساوی به تساوی بدل می شود؟



شکل ۲۱

۲۶. فرض کنید  $a, b, c, d$  ثابتهایی باشند به طوری که  $c^2 + d^2 \neq 0$  و  $ad - bc \neq 0$ . نشان دهید که تبدیل خطی کسری

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

(که حالات بسیاری از آن قبلاً " مطرح شده اند ) بر قلمرو خود یک به یک است. این قلمرو چیست؟ اگر  $ad - bc = 0$  چه رخ می دهد؟ چه وقت تابع  $f$  معکوس خودش است؟  
 $(f^{-1})'(0)$  و  $(f^{-1})''(0)$  را حساب کنید.

کمیات زیر را بدون استفاده از جدول یا ماشین حساب محاسبه نمایید.

$$\arcsin(-\sqrt{3}/2) \cdot 28 \quad \operatorname{arcsec}(-2/\sqrt{3}) \cdot 27$$

$$\arccos(\sqrt{3}/2) \cdot 30 \quad \operatorname{arccot} 1 \cdot 29$$

$$\arctan(-1) \cdot 32 \quad \operatorname{arccsc}(-2) \cdot 31$$

$$\cot(\operatorname{arcsec}(-3)) \cdot 34 \quad \sec(\arctan 2) \cdot 33$$

$$\operatorname{arccsc}(\sec \pi) \cdot 36 \quad \arccos(\tan \pi) \cdot 35$$

$$\arctan(-\tan(5\pi/4)) \cdot 38 \quad \csc(\operatorname{arccot} \frac{2}{3}) \cdot 37$$

$$\cos(\arccos \frac{2}{3} + \arcsin \frac{3}{4}) \cdot 40 \quad \sin(\arcsin \frac{1}{2} - \arcsin \frac{1}{3}) \cdot 39$$

$$\cot(\arctan \sqrt{3} + \operatorname{arccot} 1) \cdot 42 \quad \tan(\arctan 5 - \arctan 4) \cdot 41$$

$$\frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{x}{a} \quad (a > 0) \cdot 43$$

$$x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x \cdot 44$$

$$\operatorname{arccot}\left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right) \cdot 46 \quad \arctan\left(\frac{x}{1 + \sqrt{1-x^2}}\right) \cdot 45$$

انتگرالهای زیر را حساب کنید.

$$\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2 + 2} \cdot 48 \quad \int_{-3/7}^0 \frac{dx}{\sqrt{36 - 49x^2}} \cdot 47$$

$$\int_{5\sqrt{2}/3}^{10/3} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2 - 25}} \cdot 49$$

۵۰. تابع  $f(x) = \arcsin(\sin x)$  را رسم کرده، و نشان دهید متناوب با دوره تناوب اساسی  $2\pi$  است.

با استفاده از قاعده هوییتال، حدود زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} \cdot 52 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} \cdot 51$$

توابع معکوس ۴۸۳

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x - \arcsin x} \quad . ۵۴$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - x}{x^3} \quad . ۵۳$$

۵۵. منحنیهای  $y = \arcsin x$  و  $y = \arccos x$  مستطیل محدود به خطوط  $x = 0$ ،  $x = 1$ ،  $y = 0$  و  $y = \pi/2$  را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند. منحنیها و مستطیل را رسم کرده، و مساحت  $A$  ی هر ناحیه را رویش بنویسید.

۵۶. نشان دهید که به ازای هر دو عدد دلخواه  $a$  و  $b$ ،  $|\arctan a - \arctan b| \leq |a - b|$ .

۵۷. معکوس تابع

$$f(x) = 4 \arcsin \sqrt{1 - x^2} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

را بیابید.

## لگاریتمها و نماییها

اهمیت توابع لگاریتمی و نمایی که در این فصل مطرح می‌شوند آنچنان است که به سختی می‌توان در آن مبالغه کرد. این توابع در ریاضیات محض و کاربردهای لازمیه بوده، و گهگاه در علوم فیزیک، زیست‌شناسی، و اجتماعی ظاهر می‌شوند. این توابع کلیدی را با تعریف لگاریتم (طبیعی) به صورت انتگرالی با حد انتگرالگیری بالایی متغیر آغاز می‌کنیم. پس از استنتاج خواص لگاریتم از این تعریف و بخصوص اثبات یک به یک بودن این تابع، نمایی را تابع معکوس لگاریتم تعریف می‌کنیم. نقطه اوج مطالعه ما در این توابع کلیدی در بخشهای ۶.۶ و ۷.۶ زمانی است که نماییها و لگاریتمها برای حل مسائل عملی مختلفی در رابطه با رشد و تحلیل به کار گرفته می‌شوند. در دو بخش آخر چند تابع مهم را بررسی می‌کنیم که با نمایی و لگاریتم رابطه نزدیک دارند و اینها عبارتند از توابع هذلولوی و هذلولوی معکوس.

### ۱۰.۶ لگاریتم طبیعی

فرض کنید از تمام توانهای صحیح نامنفی

$$(1) \quad x^0 = 1, x, x^2, x^3, \dots$$

و تمام توانهای صحیح منفی

$$(2) \quad x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, \dots$$

متغیر مستقل  $x$  مشتق گرفته باشیم. در این صورت، معلوم می‌شود که مشتقات توانهای (۱) عبارتند از

$$(1') \quad 0, 1, 2x, 3x^2, \dots,$$

ولی مشتقات توانهای (۲) عبارتند از

$$(2') \quad -x^{-2}, -2x^{-3}, -3x^{-4}, \dots$$

## لگاریتمها و نمایها ۴۸۵

با بررسی مشتقات (۱') و (۲') به نکته عجیبی دست می‌یابیم: هر توان صحیح ظاهر می‌شود  $x^{-1}$ ، یعنی متقابل  $x$ . اما مسلماً تابعی وجود دارد که مشتقش بر یک بازه غیرشامل  $x=0$  مساوی  $x^{-1}$  است. همانطور که اینک نشان می‌دهیم، این تابع وجود دارد، و خواهیم دید که این تابع رابطه نزدیکی با لگاریتم معمولی در ریاضیات دبیرستانی دارد!

تعریف لگاریتم به صورت انتگرال. حال، با توجه به این نکات، تابع جدید  $\ln x$ ، به نام لگاریتم طبیعی یا فقط لگاریتم، را معرفی و به ازای هر  $x$  مثبت با فرمول

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

تعریف می‌کنیم، که می‌توان آن را به صورت فشرده‌تر

$$(۳) \quad \ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

نوشت. این یک انتگرال معین است با حد بالایی انتگرالگیری متغیر. از تعریف ۳ و قضیه ۵، صفحه ۴۰۵، فوراً نتیجه می‌شود که  $\ln x$  یک پاد مشتق تابع  $1/x = x^{-1}$  بر بازه  $(0, \infty)$  است، چیزی که در مثال ۱۰، صفحه ۲۵۵، پیش‌بینی شد. لذا، فرمول اساسی

$$(۴) \quad \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

را داریم که به ازای هر  $x$  مثبت معتبر است. چون انتگرال معرف  $\ln x$  به ازای  $x=1$  به

$$\int_1^1 \frac{dt}{t} = 0$$

تحویل می‌شود، می‌بینیم که  $\ln x$  پاد مشتق  $1/x$  است که با شرط

$$(۵) \quad \ln 1 = 0$$

معین می‌شود. البته، لگاریتم بر  $(0, \infty)$  پیوسته است، زیرا بر  $(0, \infty)$  مشتق‌پذیر می‌باشد. همچنین، بنا بر آزمون یکنواپی (قضیه ۷، صفحه ۲۶۹)،  $\ln x$  بر  $(0, \infty)$  صعودی است، زیرا

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} > 0 \quad (0 < x < \infty).$$

پس نتیجه می‌شود که  $\ln x$  بر  $(0, \infty)$  یک به یک می‌باشد.

مثال ۱. از  $x \ln x$  مشتق بگیرید.

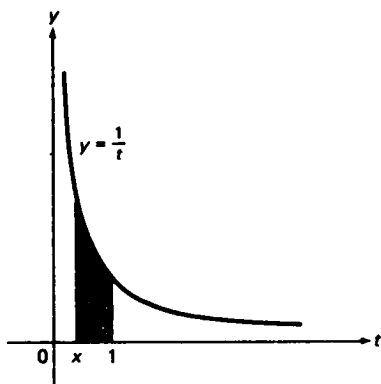
حل. بنا بر قاعده حاصل ضرب و فرمول (۴)،

$$\frac{d}{dx}(x \ln x) = \frac{dx}{dx} \ln x + x \frac{d \ln x}{dx} = \ln x + x \left( \frac{1}{x} \right) = \ln x + 1.$$

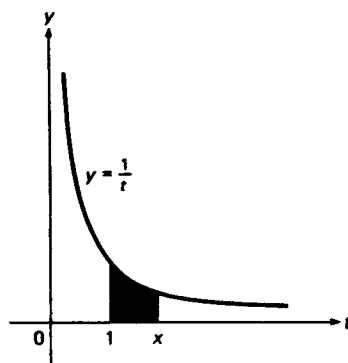
برای تعبیر هندسی لگاریتم، حالات  $x > 1$  و  $0 < x < 1$  را جداگانه در نظر می‌گیریم. هرگاه  $x > 1$ ، آنگاه  $\ln x$  مساحت ناحیه سایه‌دار شکل ۱ (آ) است؛ یعنی، مساحت تحت منحنی  $y = 1/t$  از  $t = 1$  تا  $t = x$  است. از آن سو، هرگاه  $0 < x < 1$ ، آنگاه چون

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = - \int_x^1 \frac{dt}{t},$$

$\ln x$  قرینه مساحت ناحیه سایه‌دار شکل ۱ (ب) است؛ یعنی، مساحت تحت منحنی



(ب)



(آ)

شکل ۱

$y = 1/t$  از  $t = x$  تا  $t = 1$ . لذا، اگر  $x > 1$ ، حال آنکه  $\ln x < 0$  اگر  $0 < x < 1$  تابع  $\ln x$  به ازای  $x \leq 0$  تعریف نشده است، زیرا انتگرالده  $1/t$  در (۱) بر هر بازه شامل نقطه  $t = 0$  بی‌کران است (ر.ک. مسئله ۳۳، صفحه ۳۸۱).

مثال ۲. تابع  $\ln(x^2 + x + 1)$  به ازای هر  $x$  تعریف شده است، زیرا به ازای هر  $x$ ،

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

اما تابع  $\ln(2x^2 - x - 1)$  فقط به ازای  $x > 1$  یا  $x < -\frac{1}{2}$  تعریف شده است، زیرا به ازای

$$, -\frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

$$2x^2 - x - 1 = (2x + 1)(x - 1) \leq 0$$

برای مشتگیری از این توابع ، فرمول (۴) و قاعدهء زنجیره‌ای را به کار می‌بریم :

$$\frac{d}{dx} \ln(x^2 + x + 1) = \frac{1}{x^2 + x + 1} \frac{d}{dx} (x^2 + x + 1) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1},$$

$$\frac{d}{dx} \ln(2x^2 - x - 1) = \frac{1}{2x^2 - x - 1} \frac{d}{dx} (2x^2 - x - 1) = \frac{4x - 1}{2x^2 - x - 1}.$$

فرمول (۴) برای مشتق لگاریتم را می‌توان تعمیم داده ، نتیجهء کلیتر زیر را به دست آورد :

$$(۴') \quad \frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0),$$

که به ازای هر  $x$  ناصفر معتبر است . در واقع ، اگر  $x$  مثبت باشد ،  $|x| = x$  و (۴') به (۴) تحویل می‌شود ، حال آنکه اگر  $x$  منفی باشد ،  $|x| = -x$  ؛ و لذا ،

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{d}{dx} \ln(-x) = \frac{1}{-x} \frac{d}{dx} (-x) = -\frac{1}{x} (-1) = \frac{1}{x}.$$

از (۴') فوراً " نتیجه می‌شود که

$$(۶) \quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

لازم است این فرمول انتگرالگیری مهم به خاطر سپرده شود .

لگاریتم حاصل ضرب . حال یک خاصیت اساسی لگاریتم را ثابت می‌کنیم .

قضیهء ۱ (لگاریتم حاصل ضرب) . هرگاه  $a$  و  $b$  مثبت باشند ، آنگاه

$$(۷) \quad \ln ab = \ln a + \ln b.$$

برهان . با مشتگیری از تابع  $\ln ax$  معلوم می‌شود که

$$\frac{d}{dx} \ln ax = \frac{1}{ax} \frac{d}{dx} ax = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}.$$

لذا ، هر دو تابع  $\ln x$  و  $\ln ax$  دارای مشتق  $1/x$  می‌باشند . به عبارت دیگر ،  $\ln x$  و  $\ln ax$



هر دو پادمشتق  $1/x$  بر بازه  $(0, \infty)$  می باشند. پس نتیجه می شود که

$$\ln ax = \ln x + C,$$

که در آن  $C$  ثابت می باشد. برای تعیین  $C$  قرار می دهیم  $x = 1$ ، به کمک (۵) خواهیم داشت

$$\ln a = \ln 1 + C = C,$$

در نتیجه،  $C = \ln a$ ، بنابراین،

$$\ln ax = \ln a + \ln x,$$

و با قرار دادن  $x = b$  در این فرمول، فرمول (۷) به دست خواهد آمد.

بنابر فرمول (۷)، لگاریتم حاصل ضرب دو عامل مجموع لگاریتمهای تک تک عوامل است. به طور معادل، با خواندن (۷) از راست به چپ، ملاحظه می کنیم که مجموع دو لگاریتم خود یک لگاریتم است که شناسه اش حاصل ضرب شناسه های لگاریتمهای داده شده است. لگاریتم معمولی که در دبیرستان می خوانند واجد همین خاصیت است؛ و در واقع، همانطور که در صفحه ۵۱۴ خواهیم دید، با لگاریتم طبیعی فقط در یک عامل ثابت تفاوت دارد.

فرمول (۷) فوراً "به دو فرمول مهم دیگر منجر می شود. چون

$$\ln a + \ln \frac{1}{a} = \ln \left( a \cdot \frac{1}{a} \right) = \ln 1 = 0,$$

داریم

$$\ln \frac{1}{a} = -\ln a,$$

و در این صورت، چون

$$\ln \frac{a}{b} = \ln \left( a \cdot \frac{1}{b} \right) = \ln a + \ln \frac{1}{b},$$

نیز خواهیم داشت

$$(۸) \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b.$$

قضیه زیر خاصیت اساسی دیگر لگاریتم را به ما می دهد.

قضیه ۲ (لگاریتم توان گویا). هرگاه  $x > 0$ ، آنگاه به ازای هر عدد گویای  $r$ ،

$$(۹) \quad \ln x^r = r \ln x$$

برهان. روش اثبات مشابه قضیه ۱ است. با مشتگیری از تابع  $\ln x^r$ ، که  $x > 0$  و  $r$  گویا است، معلوم می شود که

$$\frac{d}{dx} \ln x^r = \frac{1}{x^r} \frac{d}{dx} x^r = \frac{1}{x^r} r x^{r-1} = \frac{r}{x},$$

که همان مشتق تابع  $r \ln x$  است. بنابراین،  $\ln x^r$  و  $r \ln x$  هر دو پادمشتقهای  $r/x$  بر بازه  $(0, \infty)$  می باشند. از این نتیجه می شود که

$$(۹') \quad \ln x^r = r \ln x + C,$$

که در آن  $C$  ثابت می باشد. با فرض  $x = 1$  به دست می آوریم  $\ln 1 = r \ln 1 + C$ ؛ در نتیجه،  $C = 0$  و  $(۹')$  به  $(۹)$  تحویل خواهد شد.

در اثبات قضیه ۲ از فرمول مشتگیری  $D_x x^r = r x^{r-1}$  استفاده شد، که در صفحات ۲۲۰ و ۲۳۴ به ازای  $r$  گویا اثبات شده است. در بخش ۵.۶ نشان داده ایم که این فرمول، و در نتیجه قضیه ۲، برای هر  $r$  حقیقی (نه لزوماً "گویا") معتبر است.

مثال ۳.  $\ln 72$ ،  $\ln 6^{1/5}$  و  $\ln \sqrt[3]{27}$  را برحسب  $\ln 2$  و  $\ln 3$  بیان کنید.

حل. با استفاده آزاد از فرمولهای (۷) تا (۹)، داریم

$$\ln 72 = \ln (2^3 \cdot 3^2) = \ln 2^3 + \ln 3^2 = 3 \ln 2 + 2 \ln 3,$$

$$\ln 6^{1/5} = \frac{1}{5} \ln 6 = \frac{1}{5} \ln (2 \cdot 3) = \frac{1}{5} (\ln 2 + \ln 3),$$

$$\ln \sqrt{\frac{2}{27}} = \ln \left( \frac{2}{3^3} \right)^{1/2} = \ln \frac{2^{1/2}}{3^{3/2}} = \ln 2^{1/2} - \ln 3^{3/2} = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{3}{2} \ln 3.$$

حال رفتار  $\ln x$  وقتی  $x \rightarrow \infty$  را بررسی می کنیم. به ازای هر عدد مثبت  $C$ ، مهم نیست چقدر بزرگ، فرض می کنیم  $n$  عدد صحیحی بزرگتر از  $C/\ln 2$  باشد. برای بزرگتر کردن  $\ln x$  از  $C$  کافی است  $x > 2^n$  را اختیار کنیم. در واقع، چون  $\ln x$  تابعی صعودی است،  $x > 2^n$  ایجاب می کند که

$$\ln x > \ln 2^n = n \ln 2 > \frac{C}{\ln 2} (\ln 2) = C.$$

که در مرحله دوم از فرمول (۹) به ازای  $x = 2$  و  $r = n$  استفاده شده است (توجه کنید که  $\ln 2 > 0$ )، بنابراین،

$$(10) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty.$$

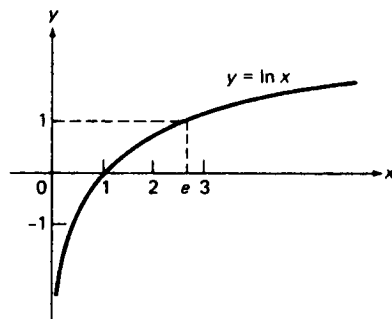
همچنین،

$$(11) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty,$$

زیرا، به کمک جانشانی  $x = 1/t$ ،

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \frac{1}{t} = -\lim_{t \rightarrow \infty} \ln t = -\infty,$$

بنابر (۱۰) و (۱۱)،  $\ln x$  مقادیر مثبت بدخواه بزرگ و مقادیر منفی بدخواه بزرگ می‌گیرد. این امر، همراه با قضیه مقدار میانی، ایجاب می‌کند که  $\ln x$  هر مقدار حقیقی را بگیرد. به عبارت دیگر، برد  $\ln x$  تمام خط حقیقی  $(-\infty, \infty)$  می‌باشد. شکل ۲ نمودار تابع  $\ln x$  را نشان می‌دهد. از این شکل معلوم می‌شود که  $\ln x$  بر



شکل ۲

$(0, \infty)$  صعودی است، برد  $(-\infty, \infty)$  را دارد، و در شرط  $\ln 1 = 0$  صدق می‌کند. همچنین، می‌بینید که  $\ln x$  بر  $(0, \infty)$  به پایین مقعر است. این امر فوراً "از آزمون تقعر (قضیه ۱۰۰، صفحه ۲۷۸) نتیجه می‌شود، زیرا

$$\frac{d^2}{dx^2} \ln x = \frac{d}{dx} \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad (0 < x < \infty).$$

به علاوه، به خاطر (۱۱)،  $\ln x$  محور  $y$  را به عنوان مجانب دارد.

عدد  $e$ . فرض کنیم  $e$  چنان عددی باشد که، مثل شکل ۲،

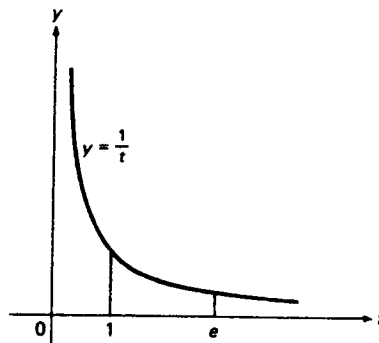
$$\ln e = 1,$$

یا معادلا"

$$\int_1^e \frac{dt}{t} = 1,$$

در نتیجه، مساحت تحت منحنی  $y = 1/t$  از  $t = 1$  تا  $t = e$  (مساحت سایه‌دار شکل ۳) درست مساوی ۱ است. از ساختن سه مستطیل  $R_1$ ،  $R_2$ ، و  $R_3$  در شکل ۴ هر یک به مساحت  $\frac{1}{2}$  معلوم می‌شود که

$$\ln 2 < (\text{مساحت } R_1) + (\text{مساحت } R_2) = 1 = (\text{مساحت } R_2) + (\text{مساحت } R_3) < \ln 4.$$

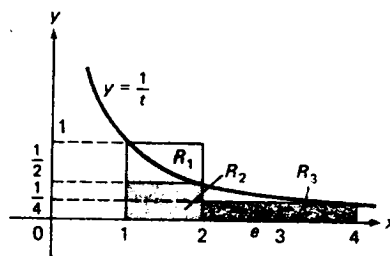


شکل ۳

بنابراین،  $e$  عددی است بین ۲ و ۴. این عدد، به نام پایه لگاریتم طبیعی، اهمیت زیادی در حساب دیفرانسیل و انتگرال و کاربردهایش دارد. خواهیم دید که  $e$  گنگ بوده

و

$$e = 2.718281828459045 \dots$$



شکل ۴

(این امر که ارقام ۱۸۲۸ دو بار متوالی تکرار می‌شوند تصادفی است ولی در به‌خاطر آوردن

عدد  $e$  موجب تسهیل می شود. <sup>۱</sup> همانطور که در بخش ۵.۶ پس از معنی کردن  $a^x$  به ازای  $x$  گنگ خواهیم دید، عدد  $e$  از فرمول

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

نیز به دست می آید.

مثال ۴. تابع  $\ln(\ln(\ln x))$  فقط وقتی تعریف شده است که  $\ln(\ln x) > 0$ ، یعنی وقتی  $\ln x > 1$  یا معادلاً " $x > e$ "، و مشتق آن عبارت است از

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln(\ln(\ln x)) &= \frac{1}{\ln(\ln x)} \frac{d}{dx} \ln(\ln x) \\ &= \frac{1}{\ln(\ln x)} \frac{1}{\ln x} \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x \ln x \cdot \ln(\ln x)}. \end{aligned}$$

بنابر فرمولهای (۱۰) و (۱۱)، وقتی  $x \rightarrow \infty$  یا  $x \rightarrow 0^+$ ، لگاریتم (به صورت قدر مطلق) به بی نهایت نزدیک می شود، ولی وقتی  $x \rightarrow \infty$ ، از  $x$  کندتر به بی نهایت میل می کند، و وقتی  $x \rightarrow 0^+$  از  $1/x$  کندتر به بی نهایت میل خواهد کرد. به طور دقیقتر،

$$(12) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0,$$

$$(13) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0.$$

این دو فرمول به آسانی با قاعده هوییتال<sup>۲</sup> ثابت می شوند. به طور مشروح،

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{D_x \ln x}{D_x x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{D_x \ln x}{D_x (1/x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0. \end{aligned}$$

باتوجه به

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{1}{t} = - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln t}{t} = 0,$$

۱. شش رقم بعدی 459045 نیز آسان به خاطر می آیند، زیرا یادآور زوایای یک مثلث

قائم الزاویه متساوی الساقین می باشند!

پس از جانشانی  $x = 1/t$  می‌توان (۱۳) را نیز از (۱۲) نتیجه گرفت.

مشتقگیری لگاریتمی. محاسبه مشتق تابع  $f(x)$  را اغلب می‌توان با تکنیک مشتقگیری لگاریتمی ساده کرد. در این راه ابتدا از فرمول (۴۰) و قاعده زنجیره‌ای استفاده کرده مشتق لگاریتمی را حساب می‌کنیم:

$$(14) \quad \frac{d}{dx} \ln |f(x)| = \frac{1}{f(x)} \frac{d}{dx} f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)},$$

و سپس، با ضرب (۱۴) در  $f(x)$ ، مشتق معمولی را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = f(x) \frac{d}{dx} \ln |f(x)|.$$

توجه کنید که این تکنیک فقط در نقاطی قابل اعمال است که  $f(x) \neq 0$ ، زیرا در غیر این صورت  $\ln |f(x)|$  تعریف نشده است.

مثال ۵. با استفاده از مشتقگیری لگاریتمی، مشتق تابع

$$f(x) = \frac{(6x + 1)^{7/3} \cos^9 x}{(x^2 - 4)^5}$$

را حساب کنید.

حل. چون

$$|f(x)| = \frac{|6x + 1|^{7/3} |\cos x|^9}{|x^2 - 4|^5},$$

به کمک فرمولهای (۷) تا (۹) معلوم می‌شود که

$$\ln |f(x)| = \frac{7}{3} \ln |6x + 1| + 9 \ln |\cos x| - 5 \ln |x^2 - 4|.$$

حال، با مشتقگیری از  $\ln |f(x)|$ ، مشتق لگاریتمی به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln |f(x)| &= \frac{7}{3(6x + 1)} \frac{d}{dx} (6x + 1) + \frac{9}{\cos x} \frac{d}{dx} \cos x - \frac{5}{x^2 - 4} \frac{d}{dx} (x^2 - 4) \\ &= \frac{14}{6x + 1} - \frac{9 \sin x}{\cos x} - \frac{10x}{x^2 - 4}. \end{aligned}$$

در این صورت، با ضرب در  $f(x)$  مشتق مطلوب به دست می‌آید:

$$f'(x) = \frac{(6x+1)^{7/3} \cos^9 x}{(x^2-4)^5} \left( \frac{14}{6x+1} - 9 \tan x - \frac{10x}{x^2-4} \right).$$

توضیح دهید چرا این فرمول به ازای  $x = \pm 2, -\frac{1}{6}$  یا  $x = (n + \frac{1}{2})\pi$  که در آن  $n$  عددی صحیح است، برقرار نیست.

## مسائل

۱. آیا توابع  $\ln x^2$  و  $2 \ln x$  مساویند؟

تمام  $x$  هایی را بیابید که تابع داده شده به ازای آنها تعریف شده است.

۳.  $\ln(\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x})$  ✓

۲.  $\ln(x^2 - 9)$  ✓

۵.  $\arcsin(\ln x)$  ✓

۴.  $\ln(\sin \pi x)$  ✓

۷.  $\sqrt{\ln(x-2)}$  ✓

۶.  $\ln(\ln(1-x^2))$  ✓

عبارات زیر را بر حسب  $\ln 2$ ،  $\ln 3$ ، و  $\ln 5$  بیان کنید.

۱۰.  $\ln(810)^{3/4}$  ✓

۹.  $\ln \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$  ✓

۸.  $\ln \frac{13}{36}$  ✓

۱۳.  $\ln(4.5 \times 10^4)$  ✓

۱۲.  $\ln \sqrt{0.005}$  ✓

۱۱.  $\ln(0.002)$  ✓

۱۴. ثابت کنید تابع  $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$  فرد است.

۱۵. متوسط تابع  $1/x$  را روی  $[a, b]$  در صورتی که  $a$  و  $b$  متحدالعلامه باشند بیابید.

از عبارات زیر مشتق بگیرید.

۱۷.  $\ln(x^3 - 2x + 5)$  ✓

۱۶.  $\ln(6 - x^2)$  ✓

۱۹.  $x^2 \ln x$  ✓

۱۸.  $(\ln x)^2$  ✓

۲۱.  $\frac{\ln x}{x^2 + 1}$  ✓

۲۰.  $\frac{\ln x}{x}$  ✓

۲۳.  $x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)]$  ✓

۲۲.  $\ln \tan \frac{x}{2}$  ✓

۲۵.  $\ln \frac{1+t}{1-t}$  ✓

۲۴.  $\ln(\arcsin x)$  ✓

۲۷.  $\ln(t + \sqrt{1+t^2})$  ✓

۲۶.  $\ln \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$  ✓

کمیات زیر را بیابید.

۲۸. مشتق چهارم  $x^2 \ln x$  ✓

۲۹. مشتق پنجم  $\frac{\ln x}{x}$  ✓

۳۰. از تمام خطوط مماس بر منحنی  $y = \ln x$  فقط یکی از مبدا می‌گذرد. این خط را پیدا کنید.

۳۱✓. تحقیق کنید که

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C.$$

۳۲. نشان دهید که تابع  $\ln x$  غیر از محور  $y$  مجانب ندارد.

مساحت  $A$  ی ناحیه  $R$  زیر را بیابید.

۳۳✓. محدود به محور  $x$ ، خط  $x = e$ ، و منحنی  $y = \ln x$

۳۴. تحت منحنی  $y = 2/(x+1)$  از  $x = 0$  تا  $x = 3$

۳۵. بین منحنیهای  $y = 2x - x^2$  و  $y = 1/x$

۳۶. بین منحنیهای  $y = 2/x$  و  $y = 10/(x^2 + 4)$

در هر حالت، ناحیه  $R$  را رسم کنید.

تمام اکستریمهای موضعی و نقاط عطف تابع داده شده را بیابید. تابع بر چه بازه‌ای صعودی

است؟ نزولی است؟ به بالا مقعر است؟ به پایین مقعر است؟ تمام اکستریمهای مطلق و

مجانبها را بیابید. تابع را رسم نمایید.

$$f(x) = (\ln x)^2 \quad ۳۸$$

$$f(x) = x \ln x \quad ۳۷$$

$$f(x) = \frac{1}{\ln x} \quad ۴۰$$

$$f(x) = \ln(1 + x^2) \quad ۳۹$$

۴۱. با استفاده از قضیه مقدار میانگین، نشان دهید که اگر  $0 < a < b$ ،

$$\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$$

۴۲. نشان دهید که به ازای هر  $x > 0$ ،  $x - \frac{1}{2}x^2 < \ln(1+x) < x$ .

مشق عبارات زیر را با استفاده از مشتقگیری لگاریتمی بیابید.

$$\frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4} \quad ۴۴$$

$$(2x^2 - 1)^{3/4}(x^3 + 1)^{4/3} \quad ۴۳$$

$$\frac{\sqrt{4x+1}}{(x+2)^7(\ln x)^3} \quad ۴۶$$

$$\sqrt{\frac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}} \quad ۴۵$$

$$\frac{(2 - \cot x)^3}{(3 + \sec x)^2} \quad ۴۸$$

$$\frac{(1 + \sin x)^5}{(1 - \cos x)^6} \quad ۴۷$$

حدود زیر را با استفاده از قاعده هوییتال حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln \sin x} \quad ۵۰$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} \quad ۴۹$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x} \cdot ۵۲$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x} \cdot ۵۱$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}\pi^+} \left[ \cos x \ln \left( x - \frac{\pi}{2} \right) \right] \cdot ۵۴$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) \cdot ۵۳$$

۲.۶. چند انتگرال که به لگاریتمها منجر می شوند همانطور که مثالهای زیر نشان می دهند، تابع لگاریتم توان ما را در محاسبه انتگرالها به طور قابل توجهی بالا می برد.

مثال ۱. انتگرال  $\int \frac{dx}{ax+b}$  را حساب کنید. ( $a \neq 0$ )

حل. تابع  $F(x) = \ln |x|$  یک پاد مشتق  $1/x$  است. بنابراین، طبق قاعده (چهار)، صفحه ۴۰۲.

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} F(ax+b) + C = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + C.$$

لذا،

$$\int \frac{dx}{5x+7} = \frac{1}{5} \ln |5x+7| + C,$$

$$\int \frac{dx}{1-2x} = \frac{1}{-2} \ln |1-2x| + C = -\frac{1}{2} \ln |2x-1| + C,$$

و غیره.

مثال ۲. انتگرال  $\int \frac{x+a}{x+b} dx$  را حساب کنید.

حل. با تقسیم  $x+b$  بر  $x+a$  معلوم می شود که

$$\frac{x+a}{x+b} = 1 + \frac{a-b}{x+b},$$

ولذا،

$$(۱) \quad \int \frac{x+a}{x+b} dx = \int \left( 1 + \frac{a-b}{x+b} \right) dx = x + (a-b) \ln |x+b| + C.$$

مثال ۳. انتگرال  $\int \frac{2x+3}{6x-1} dx$  را حساب کنید.

حل. چون

$$\int \frac{2x+3}{6x-1} dx = \int \frac{2(x+\frac{3}{2})}{6(x-\frac{1}{6})} dx = \frac{1}{3} \int \frac{x+\frac{3}{2}}{x-\frac{1}{6}} dx,$$

از فرمول (۱) به ازای  $a = \frac{3}{2}$ ,  $b = -\frac{1}{6}$  نتیجه می شود که

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+3}{6x-1} dx &= \frac{1}{3} \left[ x + \left( \frac{3}{2} + \frac{1}{6} \right) \ln \left| x - \frac{1}{6} \right| + k \right], \\ &= \frac{1}{3} x + \frac{5}{9} \ln \left| x - \frac{1}{6} \right| + C, \end{aligned}$$

که در آن  $k$  و  $C = \frac{1}{3}k$  ثابتهای دلخواهی هستند. چون

$$\frac{5}{9} \ln \left| x - \frac{1}{6} \right| = \frac{5}{9} \ln \left| \frac{6x-1}{6} \right| = \frac{5}{9} \ln |6x-1| - \frac{5}{9} \ln 6,$$

می توان پس از ادغام  $-\frac{5}{9} \ln 6$  در ثابت دلخواه انتگرالگیری  $C$  نیز نوشت

$$\int \frac{2x+3}{6x-1} dx = \frac{1}{3} x + \frac{5}{9} \ln |6x-1| + C.$$

انتگرالگیری از مشتق لگاریتمی. حال فرض کنیم  $f(x)$  تابع مشتقپذیری باشد که مقدار صفر را نمی گیرد. در این صورت، مثل صفحه ۴۹۳،  $f(x)$  دارای مشتق لگاریتمی

$$(۲) \quad \frac{d}{dx} \ln |f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

است، که در آن پریم یعنی مشتقگیری نسبت به  $x$ . پس نتیجه می شود که

$$(۳) \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C.$$

این فرمول ابزار مخصوصاً "مفیدی در محاسبه انتگرالهاست."

مثال ۴. انتگرال  $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+2} dx$  را حساب کنید.

حل. صورت انتگرالده مشتق مخرج است. لذا، طبق (۳)، بر هر بازه که شامل نقاط  $x = 1, 2$  که صفرهای مخرج انتگرالده اند نباشد داریم

$$\int \frac{2x-3}{x^2-3x+2} dx = \ln |x^2-3x+2| + C$$

مثال ۵. انتگرال  $\int \tan x dx$  را حساب کنید.

حل. چون

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{(\cos x)'}{\cos x},$$

به کمک (۳) معلوم می‌شود که

$$(۴) \quad \int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C.$$

به بیان دیگر،

$$\tan x = \frac{\sec x \tan x}{\sec x} = \frac{(\sec x)'}{\sec x},$$

که ایجاب می‌کند که

$$(۴') \quad \int \tan x dx = \ln |\sec x| + C.$$

فرمولهای (۴) و (۴') معادلند، زیرا

$$-\ln |\cos x| = \ln \left| \frac{1}{\cos x} \right| = \ln |\sec x|.$$

هر دو فرمول بر هر بازه‌ای که شامل صفرهای  $\cos x$  نباشد، یعنی نقاط  $x = (n + \frac{1}{2})\pi$  که در آنها  $n$  عدد صحیحی است، معتبرند.

فرض کنید در فرمول (۲) اختیار کنیم

$$f(x) = \frac{x+a}{x+b} \quad (a \neq b)$$

در این صورت،

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{d}{dx} \ln |f(x)| = \frac{d}{dx} (\ln |x+a| - \ln |x+b|) \\ &= \frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b} = \frac{b-a}{(x+a)(x+b)}, \end{aligned}$$

و (۳) به صورت زیر درمی آید:

$$\int \frac{b-a}{(x+a)(x+b)} dx = \ln \left| \frac{x+a}{x+b} \right| + C \quad (a \neq b),$$

یا معادلا"

$$(۵) \quad \int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{b-a} \ln \left| \frac{x+a}{x+b} \right| + C \quad (a \neq b).$$

با فرض  $a \neq 0$  و قرار دادن  $b = -a$ ، معلوم می شود که

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = -\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C \quad (a \neq 0),$$

یا معادلا"

$$(۶) \quad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad (a \neq 0).$$

این با فرمول

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0),$$

که در صفحه ۴۷۰ به دست آمد فرق دارد. در سه فرمول اخیر می توان  $a > 0$  را نیز اختیار کرد.

مثال ۶. انتگرال  $\int \frac{dx}{x^2 + x - 6}$  را محاسبه نمایید.

حل. چون

$$\frac{1}{x^2 + x - 6} = \frac{1}{(x-2)(x+3)},$$

از فرمول (۵) به ازای  $a = -2$ ،  $b = 3$  نتیجه می شود که

$$\int \frac{dx}{x^2 + x - 6} = \frac{1}{3 - (-2)} \ln \left| \frac{x-2}{x+3} \right| + C = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x-2}{x+3} \right| + C.$$

تحقیق کنید که با انتخاب  $a = 3$ ،  $b = -2$  نیز همین جواب به دست می آید.

مثال ۷. انتگرال  $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + x - 6}$  را حساب کنید.

حل. بنابر قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال و مثال پیش،

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + x - 6} &= \left[ \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x-2}{x+3} \right| \right]_0^1 = \frac{1}{5} \left( \ln \left| \frac{1-2}{1+3} \right| - \ln \left| \frac{0-2}{0+3} \right| \right) \\ &= \frac{1}{5} \left( \ln \frac{1}{4} - \ln \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{5} \ln \frac{3}{8} \approx -0.196.\end{aligned}$$

توجه کنید که اعتبار این محاسبات تابع آن است که بازهٔ انتگرالگیری شامل هیچ یک از نقاط  $x = 2, -3$  که صفرهای انتگرالدهاند نباشد.

مثال ۸. انتگرال  $\int \frac{dx}{3x^2 + 5x - 2}$  را حساب کنید.

حل. چون

$$\frac{1}{3x^2 + 5x - 2} = \frac{1}{(3x-1)(x+2)} = \frac{1}{3(x-\frac{1}{3})(x+2)},$$

از فرمول (۵) به ازای  $a = -\frac{1}{3}$ ،  $b = 2$  نتیجه می‌شود که

$$\int \frac{dx}{3x^2 + 5x - 2} = \frac{1}{3[2 - (-\frac{1}{3})]} \ln \left| \frac{x - \frac{1}{3}}{x + 2} \right| = \frac{1}{7} \ln \left| \frac{x - \frac{1}{3}}{x + 2} \right| + C.$$

به عنوان تمرین، نشان دهید که این را می‌توان به شکل زیر نیز نوشت:

$$\int \frac{dx}{3x^2 + 5x - 2} = \frac{1}{7} \ln \left| \frac{3x-1}{x+2} \right| + C$$

(ر.ک. استدلال آخر مثال ۳).

مثال ۹. انتگرال  $\int \frac{dx}{4x^2 - 9}$  را حساب کنید.

حل. بنابر قاعدهٔ (چهار)، صفحهٔ ۴۰۲، و فرمول (۶) به ازای  $a = 3$ ، داریم

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{4x^2 - 9} &= \int \frac{dx}{(2x)^2 - 3^2} = \frac{1}{2(2)(3)} \ln \left| \frac{2x-3}{2x+3} \right| + C \\ &= \frac{1}{12} \ln \left| \frac{2x-3}{2x+3} \right| + C.\end{aligned}$$

انتگرالده در تمام مثالهای فوق جز یکی تابع گویای ساده‌ای است. در بخش ۶.۷ تکنیک محاسبهٔ انتگرال یک تابع گویای دلخواه ذکر خواهد شد.

مسائل

انتگرالهای زیر را حساب کنید .

$$\int \frac{dx}{2x-9} \quad . ۲ ✓$$

$$\int \frac{dx}{15x+5} \quad . ۱ ✓$$

$$\int_1^7 \frac{dx}{20x+10} \quad . ۴ ✓$$

$$\int \frac{ds}{11-7s} \quad . ۳ ✓$$

$$\int_{-2}^2 \frac{du}{12u+25} \quad . ۶ ✓$$

$$\int_2^4 \frac{dt}{8-5t} \quad . ۵ ✓$$

انتگرالهای زیر را با استفاده از فرمول (۱) حساب کنید .

$$\int \frac{2x+1}{2x-1} dx \quad . ۸ ✓$$

$$\int \frac{x-2}{4x+3} dx \quad . ۷ ✓$$

$$\int_0^3 \frac{1-3x}{2+4x} dx \quad . ۱۰ ✓$$

$$\int \frac{6t+1}{5-t} dt \quad . ۹ ✓$$

$$\int_0^1 \frac{8w+4}{8-4w} dw \quad . ۱۲ ✓$$

$$\int_{-2}^4 \frac{v}{v+5} dv \quad . ۱۱ ✓$$

انتگرالهای زیر را با استفاده از فرمول (۳) حساب کنید .

$$\int \frac{x^3+x}{x^4+2x^2+3} dx \quad . ۱۴ ✓$$

$$\int \frac{x^2}{x^3-1} dx \quad . ۱۳ ✓$$

$$\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \quad . ۱۶ ✓$$

$$\int \frac{dx}{x \ln x} \quad . ۱۵ ✓$$

$$\int_{e^2}^{e^4} \frac{dx}{x \ln x \cdot \ln(\ln x)} \quad . ۱۸ ✓$$

$$\int_0^\pi \frac{\cos x}{2+\sin x} dx \quad . ۱۷ ✓$$

نشان دهید که

$$\int \cot x dx = \ln |\sin x| + C \quad . ۱۹ ✓$$

$$\int \sec x \csc x dx = \int \frac{dx}{\cos x \sin x} = \ln |\tan x| + C \quad . ۲۰ ✓$$

انتگرالهای زیر را با استفاده از فرمول (۵) یا (۶) حساب کنید .

$$\int \frac{dx}{4x^2+4x-3} \quad . ۲۳ ✓$$

$$\int \frac{dx}{x^2-4x-5} \quad . ۲۱ ✓$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} \cdot 24 \checkmark$$

$$\int \frac{dx}{9x^2 - 25} \cdot 23 \checkmark$$

$$\int_{-2}^1 \frac{dz}{16 - z^2} \cdot 26 \checkmark$$

$$\int_{-3}^0 \frac{dy}{y^2 + 3y - 4} \cdot 25 \checkmark$$

۳.۶ تابع نمایی؛ نماییها در هر پایه

نمایی به عنوان معکوس لگاریتم. تابع لگاریتم  $f(x) = \ln x$ ، که در بخش پیش تعریف شد، بر بازه  $(0, \infty)$  که به روی بازه  $(-\infty, \infty)$  نگاشته می شود صعودی و پیوسته است. لذا،  $f$  دارای تابع معکوس صعودی و پیوسته  $f^{-1}$  بر بازه  $(-\infty, \infty)$  است، و  $f^{-1}$  بازه  $(-\infty, \infty)$  را به روی بازه  $(0, \infty)$  می نگارد. تابع  $f^{-1}$  یکی از مهمترین توابع در ریاضیات است. این تابع را نمایی در پایه  $e$  یا فقط نمایی نامیده و با

$\exp x$

نمایش می دهند.

تابع  $\exp x$  به ازای هر  $x$  تعریف شده است، زیرا قلمروش برد  $\ln x$ ، یعنی بازه  $(-\infty, \infty)$ ، می باشد. به علاوه،  $\exp x$  به ازای هر  $x$  مثبت است، زیرا بردش قلمرو  $\ln x$  یعنی بازه  $(0, \infty)$ ، می باشد. چون هر یک از توابع  $\exp x$  و  $\ln x$  معکوس دیگری است، اتحادهای زیر را داریم:

$$(1) \quad \exp(\ln x) = x \quad (x > 0), \quad \ln(\exp x) = x \quad (\text{هر } x).$$

بخصوص، از اتحاد اول و فرمولهای

$$\ln 1 = 0, \quad \ln e = 1$$

نتیجه می شود که

$$(2) \quad \exp 0 = 1$$

و

$$(3) \quad \exp 1 = e.$$

مثل هر تابع یک به یک و معکوش، نمودار هر یک از توابع  $\exp x$  و  $\ln x$  منعکس دیگری نسبت به خط  $y = x$  است (ر.ک. شکل ۵).

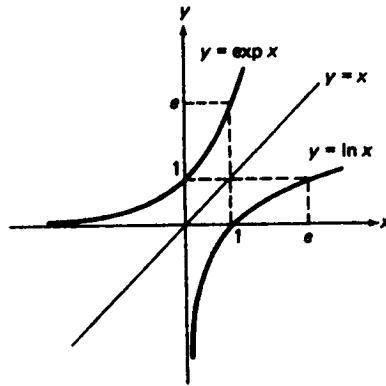
از شکل واضح است که  $\exp x$  بر  $(-\infty, \infty)$  مثبت و صعودی است، و در شرایط (۲) و (۳) صدق می کند. چون  $\exp x$  بر  $(-\infty, \infty)$  صعودی بوده و دارای برد  $(0, \infty)$  است، فوراً دیده می شود که

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \exp x = \infty,$$

### ۵۰۳ لگاریتمها و نماییها

$$(۵) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = 0,$$

و این رفتار از شکل نیز واضح می‌باشد. پس از (۵) معلوم می‌شود که  $\exp x$  محور  $x$  را به عنوان مجانب دارد.



شکل ۵

نمایی یک مجموع. حال خاصیت کلیدی نمایی را ثابت می‌کنیم که از فرمول لگاریتم حاصل ضرب "به ازت" رسیده است.

قضیه ۳ (نمایی مجموع). فرمول

$$(۶) \quad \exp(x + y) = (\exp x)(\exp y)$$

به ازای  $x$  و  $y$  دلخواه برقرار است.

برهان. فرض کنیم  $X = \exp x$ ,  $Y = \exp y$ . در نتیجه،  $x = \ln X$ ,  $y = \ln Y$ . پس،

طبق قضیه ۱، صفحه ۴۸۷،

$$x + y = \ln X + \ln Y = \ln XY,$$

ولذا،

$$\exp(x + y) = \exp(\ln(XY)) = XY = (\exp x)(\exp y).$$

بنابر رابطه (۶)، نمایی مجموع دوجمله حاصل ضرب نماییهای تک تک جملات است.

به بیان معادل، با خواندن (۶) از راست به چپ، می‌بینیم که حاصل ضرب دونمایی داده شده خود یک نمایی است که شناسه‌اش مجموع شناسه‌های نماییهای داده شده است.



فرض کنیم  $r$  عدد گویایی باشد. با انتخاب  $x = e$  در فرمول (۹)، صفحه ۴۸۹،  
درمی یابیم که

$$\ln e^r = r \ln e = r,$$

ولذا،

$$\exp r = e^r.$$

اما  $\exp x$  به ازای  $x$  گنگ نیز تعریف شده است، اگرچه هنوز به ازای چنین  $x$  به  $e^x$  معنی  
نداده ایم. حال با تعریف ساده<sup>۶</sup>

$$(۷) \quad e^x = \exp x$$

به ازای هر  $x$ ، گویا و گنگ، این کار را می کنیم. به علاوه، به دلیلی که در مسئله ۴۱ ذکر  
شد، اگر بخواهیم تابع  $e^x$  پیوسته باشد، این تنها تعریف ممکن  $e^x$  است. لذا، به توانهای  
گنگ  $e$ ، نظیر  $e^{\sqrt{2}}$  یا  $e^\pi$ ، معنی واحدی بخشیده ایم. برای درک این منظور، تعبیر

$$e^{\sqrt{2}} = (2.718281828459 \dots)^{1.414213562373 \dots}$$

را بدون کمکی از حساب دیفرانسیل و انتگرال در نظر می گیریم.

از حالا به بعد نماد  $e^x$  یعنی  $\exp x$ ، ولی نماد اخیر نیز گهگاه مفید واقع می شود.

اتحادهای (۱) برحسب  $e^x$  شکل فشرده<sup>۷</sup> زیر را به خود می گیرند:

$$e^{\ln x} = x \quad (x > 0), \quad \ln e^x = x \quad (\text{هر } x).$$

به همین نحو، فرمول (۶) را می توان (از راست به چپ) به صورت

$$(۸) \quad e^x e^y = e^{x+y}$$

نوشت. اعتبار (۸) به ازای  $x$  و  $y$  پیش از تعریف (۷) معلوم بود، ولی اکنون می بینیم که

(۸) به ازای اعداد حقیقی دلخواه، بخصوص اعداد گنگ، برقرار است. با فرض  $y = -x$

در (۸) به دست می آوریم

$$e^x e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1,$$

که فوراً "ایجاب می کند که

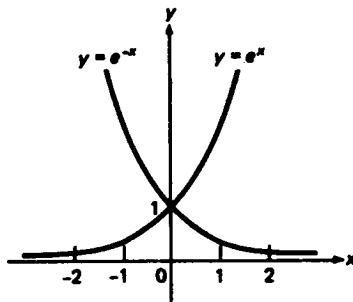
$$(۹) \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}.$$

تابع  $e^{-x}$  به خودی خود مهم است. شکل ۶ نمودارهای  $e^x$  و  $e^{-x}$  را در یک دستگاه مختصات

قائم نشان می دهد. توجه کنید که هر نمودار منعکس دیگری نسبت به محور  $y$  است.

فرمولهای (۴) و (۵) برحسب  $e^x$  به صورت زیر درمی آیند:

$$(۴) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$$



شکل ۶

و

$$(۵) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

توجه کنید که (۵') نتیجه فوری (۴') است، زیرا به کمک جانشانی  $x = -t$  و فرمول (۹)،

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^t} = 0.$$

همچنین، باید توجه داشت که

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^t = \infty,$$

و این از نمودار  $e^{-x}$  واضح خواهد بود.

مشتق و انتگرال  $e^x$ . برای مشتقگیری از تابع نمایی، از قضیه ۴، صفحه ۴۶۰، با توجه به اینکه شرایط قضیه برقرارند استفاده می‌کنیم. با نوشتن  $y = e^x$  و  $x = \ln y$ ، داریم

$$\frac{d}{dx} e^x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy} \ln y} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x,$$

در نتیجه،

$$(۱۰) \quad \frac{d}{dx} e^x = e^x.$$

همانطور که این فرمول اساسی نشان می‌دهد، تابع  $e^x$  دارای این خاصیت جالب توجه است که مشتق خودش می‌باشد؛ و لذا، با هر تعداد مشتقگیری تغییر نمی‌کند. لذا، به ازای هر

عدد صحیح مثبت  $n$ ،

$$\frac{d^n}{dx^n} e^x = e^x$$

پس از (۱۰) نتیجه می‌شود که

$$(11) \quad \int e^x dx = e^x + C.$$

همچنین، می‌بینیم که

$$\frac{d^2}{dx^2} e^x = e^x > 0,$$

در نتیجه، بنابر آزمون تقعر،  $e^x$  بر  $(-\infty, \infty)$  به بالا مقعر است.

مثال ۱. از  $xe^x$  مشتق بگیرید.

حل. بنابر قاعده حاصل ضرب،

$$\frac{d}{dx} (xe^x) = \frac{dx}{dx} e^x + x \frac{de^x}{dx} = e^x + xe^x.$$

مثال ۲. از  $\sqrt{1+e^x}$  مشتق بگیرید.

حل. بنابر قاعده زنجیره‌ای،

$$\frac{d}{dx} \sqrt{1+e^x} = \frac{1}{2\sqrt{1+e^x}} \frac{d}{dx} (1+e^x) = \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}.$$

مثال ۳. انتگرال  $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1} dx$  را حساب کنید.

حل. با تقسیم صورت بر مخرج به دست می‌آوریم

$$\frac{e^{3x}+1}{e^x+1} = \frac{(e^x)^3+1}{e^x+1} = (e^x)^2 - e^x + 1 = e^{2x} - e^x + 1.$$

بنابراین، به کمک (۱۱) داریم

$$\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1} dx = \int (e^{2x} - e^x + 1) dx = \frac{1}{2} e^{2x} - e^x + x + C$$

لگاریتمها و نماییها ۵۰۷

نمایی در پایه  $a$ . حال که به توانهای حقیقی دلخواه عدد  $e$  معنی بخشیده ایم، می خواهیم همین کار را برای هر عدد مثبت  $a$  انجام دهیم. آنچه لازم است تابع پیوسته ای چون  $\exp_a x$  است که وقتی  $x$  عددی گویا باشد مقدار  $a^x$  را بگیرد. انتخاب شایسته عبارت است از

$$\exp_a x = \exp(x \ln a) = e^{x \ln a}.$$

در واقع، چون به ازای  $r$  گویا

$$(12) \quad \ln a^r = r \ln a,$$

بنابر قضیه ۲، صفحه ۴۸۸، به ازای  $x = a$  معلوم می شود که طبق مطلوب

$$\exp_a r = \exp(r \ln a) = \exp(\ln a^r) = a^r,$$

و به علاوه  $\exp_a x$  پیوسته است، زیرا تابع پیوسته  $\exp x$  از تابع پیوسته  $x \ln a$  می باشد. تابع  $\exp_a x$  نمایی در پایه  $a$  است، و اگر  $a = e$  به  $e^x$  تحویل می شود. حال برای معنی بخشیدن به  $a^x$  به ازای  $x$  حقیقی دلخواه، بخصوص  $x$  گنگ، در تشابه کامل با (۷) تعریف می کنیم

$$(13) \quad a^x = \exp_a x = e^{x \ln a} \quad (a > 0).$$

تابع  $a^x$ ، به صورت تعریف شده با (۱۳)، خواصش را از خواص نظیر  $e^x$  به ارث می برد. مثلاً،

$$a^{-x} = e^{-x \ln a} = \frac{1}{e^{x \ln a}},$$

در نتیجه،

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

به علاوه،

$$a^x a^y = e^{x \ln a} e^{y \ln a} = e^{x \ln a + y \ln a} = e^{(x+y) \ln a},$$

و در نتیجه،

$$(14) \quad a^x a^y = a^{x+y}.$$

با گرفتن لگاریتم از طرفین (۱۳)، معلوم می شود که

$$\ln a^x = \ln(e^{x \ln a}).$$

پس نتیجه می شود

$$\ln a^x = x \ln a,$$

که فرمول (۱۲) را از حالتی که  $x$  عدد گویای  $r$  است به حالت  $x$  حقیقی دلخواه تعمیم

می‌دهیم.

خاصیت مهم دیگر  $a^x$  از فرمول

$$(a^x)^y = a^{xy} \quad (15)$$

به دست می‌آید که اعتبار آن به ازای  $x$  و  $y$  گویا از قبل معلوم است. برای اثبات (۱۵) به ازای  $x$  و  $y$  حقیقی، ابتدا از (۱۳) با  $e^x$  و  $y$  به جای  $a$  و  $x$  نتیجه می‌شود

$$(e^x)^y = e^{y \ln e^x} = e^{yx} = e^{xy},$$

که همان (۱۵) به ازای  $a = e$  است. اما، در این صورت،

$$(a^x)^y = (e^{x \ln a})^y = e^{xy \ln a} = a^{xy},$$

که همان (۱۵) به ازای  $a > 0$  کلی است. اعتبار فرمولهای (۱۴) و (۱۵) به ازای  $x$  و  $y$  حقیقی دلخواه شایستگی بیشتر تعریف (۱۳) را گواه خواهد بود. به علاوه،

$$\frac{a^x}{a^y} = a^x a^{-y},$$

ولذا،

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y},$$

ولی هرگاه  $b$  عدد مثبت دیگری باشد، آنگاه

$$a^x b^x = e^{x \ln a} e^{x \ln b} = e^{x(\ln a + \ln b)} = e^{x \ln ab},$$

که ایجاب می‌کند که

$$a^x b^x = (ab)^x.$$

لذا، به‌طور خلاصه، همان قوانین نماهای

$$a^x a^y = a^{x+y}, \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}, \quad (ab)^x = a^x b^x$$

مثل صفحه ۱۸۴ ثابت شده‌اند، ولی این بار نماهای  $x$  و  $y$  حقیقی و دلخواه می‌باشند؛ یعنی، برای نماهای  $x$  و  $y$  گویا و گنگ.

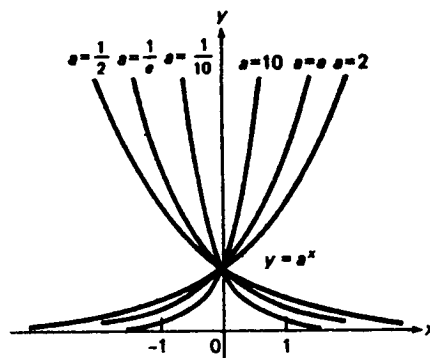
رفتار تابع  $a^x$  اساساً "به‌این وابسته است که عدد مثبت  $a$  از ۱ بزرگتر یا کوچکتر باشد (توجه کنید که اگر  $a = 1$ ،  $a^x \equiv 1$ ). فرض کنیم  $t = x \ln a$ . در نتیجه، (۱۳) شکل فشرده  $a^x = e^t$  را به خود می‌گیرد. هرگاه  $a > 1$ ، آنگاه  $\ln a > 0$ . بنابراین،  $t$  با  $x$  متحدالعلامه بوده، و

$$(16) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \lim_{t \rightarrow \infty} e^t = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 \quad (a > 1),$$

زیرا  $x \rightarrow \pm\infty$  ایجاب می‌کند که  $t \rightarrow \pm\infty$ . از آن سو، هرگاه  $0 < a < 1$ ، آنگاه  $\ln a < 0$ ؛ در نتیجه،  $t$  با  $x$  مختلف‌العلامه است، و به جای (۱۶) داریم

$$(۱۶') \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{t \rightarrow \infty} e^t = \infty \quad (0 < a < 1),$$

زیرا اکنون  $x \rightarrow \pm\infty$  ایجاب می‌کند که  $t \rightarrow \mp\infty$ . این تفاوت اساسی بین رفتار تابع  $a^x$  به ازای  $a > 1$  و رفتارش به ازای  $0 < a < 1$  در شکل ۷ نموده شده، که در آن نمودار  $a^x$  به ازای  $a = 2, e, 10, 1/2, 1/e, 1/10$  در یک دستگاه مختصات قائم رسم شده است. توجه



شکل ۷

کنید که هر جفت منحنی  $y = a^x$  و  $y = (1/a)^x$  منعکس دیگری نسبت به محور  $y$  است. این نتیجه فوری  $(1/a)^x = a^{-x}$  است. توضیح دهید چرا منحنیهای  $y = a^x$  همه از نقطه  $(0, 1)$  می‌گذرند، ولی نقطه مشترک دیگری ندارند.

مشتق و انتگرال  $a^x$ . مشتق تابع  $a^x$  به آسانی به دست می‌آید. در واقع، بنابر (۱۰) و قاعده زنجیره‌ای،

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} e^{x \ln a} = e^{x \ln a} \frac{d}{dx} (x \ln a),$$

و در نتیجه،

$$(۱۷) \quad \frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a.$$

از (۱۷) فوراً نتیجه می‌شود که

$$(۱۸) \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

مثال ۴. از  $x \left(\frac{1}{3}\right)^x$  مشتق بگیرید.

حل. بنابر قاعده حاصل ضرب و (۱۷)،

$$\frac{d}{dx} \left[ x \left(\frac{1}{3}\right)^x \right] = \left(\frac{1}{3}\right)^x + x \left(\frac{1}{3}\right)^x \ln \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^x (1 - x \ln 3).$$

مثال ۵. از  $2^{\sin x}$  مشتق بگیرید.

حل. بنابر (۱۷) و قاعده زنجیره‌ای،

$$\frac{d}{dx} 2^{\sin x} = 2^{\sin x} \ln 2 \frac{d}{dx} \sin x = 2^{\sin x} \cos x \ln 2.$$

مثال ۶. انتگرال  $\int_{-1}^1 10^x dx$  را حساب کنید.

حل. بنابر فرمول (۱۸)،

$$\int_{-1}^1 10^x dx = \frac{10^x}{\ln 10} \Big|_{-1}^1 = \frac{10^1 - 10^{-1}}{\ln 10} = \frac{9.9}{\ln 10} \approx 4.3.$$

مثال ۷. نشان دهید که  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ .

حل. این یک صورت مبهم  $0/0$  است که می‌توان آن را با قاعده هسپیتال رفع کرد:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{D_x(a^x - 1)}{D_x x} = \lim_{x \rightarrow 0} a^x \ln a = \ln a.$$

### مسائل

۱. تحقیق کنید که نمودار تابع  $ce^{cx}$  ( $c > 0$ ) را می‌توان از انتقال افقی نمودار  $e^x$  به دست آورد.

از عبارات زیر مشتق بگیرید.

۴.  $xe^{2x}$

۳.  $e^{-6x}$

۲.  $e^{4x+5}$

۷.  $e^{x^2}$  ✓

۶.  $\frac{e^x - 1}{e^x + 1}$  ✓

۵.  $x^2 e^x$  ✓

$\frac{e^x}{x} \cdot 10 \checkmark$	$e^{1/x} \cdot 9 \checkmark$	$e^x \ln x \cdot 8 \checkmark$
$e^{\tan x} \cdot 13 \checkmark$	$\cos(e^x) \cdot 12 \checkmark$	$e^{\sqrt{x}} \cdot 11 \checkmark$
$3^{-x} \cdot 16 \checkmark$	$x 10^x \cdot 15 \checkmark$	$\arcsin(e^{x/2}) \cdot 14 \checkmark$
$\exp_2(4^x) \cdot 19 \checkmark$	$x^{x^2-x} \cdot 18 \checkmark$	$5^{x^2} \cdot 17 \checkmark$
$\exp(e^x) \cdot 22 \checkmark$	$\frac{10^x - 1}{5^x} \cdot 21 \checkmark$	$\ln e^x - 1  \cdot 20 \checkmark$
	$\ln(\sqrt{e^x}) \cdot 24 \checkmark$	$\exp(\ln u - u) \cdot 23 \checkmark$

کمیات زیر را بیابید.

۲۵  $x e^{x^2}$  مشتق سوم  $\checkmark$

۲۶  $x^2 e^{x^2}$  مشتق چهارم  $\checkmark$

۲۷  $e^x \ln x$  مشتق پنجم  $\checkmark$

راهنمایی. در مسائل ۲۶ و ۲۷ بهتر است از قاعده لایب نیتز استفاده کنیم (مسئله ۳۵، صفحه ۳۶۶).

۲۸. نشان دهید که تابع  $e^x$  غیر از محور  $x$  مجانب ندارد.
- ۲۹  $\checkmark$  مشتق  $(2^x \ln x) / (2^x + 2^x)$  را با استفاده از مشتگیری لگاریتمی بیابید.
- ۳۰  $\checkmark$  متوسط تابع  $e^x$  را روی بازه  $[\ln a, \ln b]$ ، که  $0 < a < b$ ، پیدا کنید.
۳۱. تابع  $e^x$  دارای این خاصیت است که مشتق خود می باشد. نشان دهید که هر تابع دیگر  $y = f(x)$  با این خاصیت به شکل  $c e^x$  است، که در آن  $c$  ثابت می باشد.
- ۳۲  $\checkmark$  تحقیق کنید

$$\int x e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

مساحت  $A$  ی ناحیه  $R$  زیر را بیابید.

- ۳۳  $\checkmark$  محدود به خط  $x = 1$  و منحنیهای  $y = e^x$  و  $y = e^{-x}$
- ۳۴  $\checkmark$  محدود به خطوط  $x = 1$  و  $x = 2$  و منحنیهای  $y = \ln x$  و  $y = e^{x/2}$
- ۳۵  $\checkmark$  بین منحنیهای  $y = x e^{1-x}$  و  $y = 4x^2 - 3x$
- ۳۶  $\checkmark$  محدود به خط  $x = 1$  و منحنیهای  $y = 2^x$  و  $y = 4^x$

در هر حالت، ناحیه  $R$  را رسم نمایید.

تمام اکسترمهای موضعی و نقاط عطف تابع داده شده را بیابید. تابع بر چه بازه هایی صعودی است؟ نزولی است؟ به بالا مقعر است؟ به پایین مقعر است؟ تمام اکسترمهای مطلق و مجانبها را بیابید، و تابع را رسم کنید.



$$f(x) = 2^x + 2^{-x} \cdot ۳۸ \checkmark$$

$$f(x) = e^{-x^2/2} \cdot ۳۷ \checkmark$$

$$f(x) = \exp(-e^{-x}) \cdot ۴۰ \checkmark$$

$$f(x) = 4xe^{-2x} \cdot ۳۹ \checkmark$$

۴۱. فرض کنید  $h$  تابع پیوسته‌ای باشد که بر  $(-\infty, \infty)$  تعریف شده است، و به ازای هر  $x$

گویا،  $h(x) = 0$ ، نشان دهید که به ازای هر  $x$  گنگ نیز  $h(x) = 0$ ؛ در نتیجه  $h(x) \equiv 0$ .

با استفاده از این، نشان دهید که یک تابع پیوسته تعریف شده بر  $(-\infty, \infty)$  منحصر "با مقادیرش به ازای  $x$  گویا معین می‌شود".

راهنمایی. با توجه به  $h = f - g$ ، نشان دهید که هر دو تابع پیوسته  $f$  و  $g$  که به ازای تمام  $x$  های گویا منطبق باشند باهم مساوی خواهند بود.

۴۲. معادله  $2^x - 2x = 0$  را حل کنید.

۴۳. از تمام خطوط مماس بر منحنی  $y = e^x$  فقط یکی از مبدأ می‌گذرد. این خط را پیدا کنید.

بدون محاسبه انتگرالها معین کنید کدام انتگرال بزرگتر است.

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \text{ یا } \int_0^1 e^x dx \cdot ۴۴ \checkmark$$

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \text{ یا } \int_0^1 e^{-x} dx \cdot ۴۵ \checkmark$$

$$\int_{-2}^{-1} 3^x dx \text{ یا } \int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{3}\right)^x dx \cdot ۴۶ \checkmark$$

$$\int_1^e \ln x \sin x dx \text{ یا } \int_1^e \sqrt{\ln x} \sin x dx \cdot ۴۷ \checkmark$$

۴۸. نشان دهید که

$$2e^{-1/4} < \int_0^2 e^{x^2-x} dx < 2e^2.$$

۴۹. تحقیق کنید که تابع  $y = ae^{2x} + be^{3x}$  در معادله دیفرانسیل مرتبه دوم  $y'' - 5y' + 6y = 0$

به ازای ثابتهای دلخواه  $a$  و  $b$  صدق می‌کند.

انتگرالهای زیر را حساب کنید

$$\int x a^x dx \cdot ۵۱ \checkmark$$

$$\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx \cdot ۵۰ \checkmark$$

$$\int_0^1 (3^x + 3^{-x}) dx \cdot ۵۷ \checkmark$$

$$\int \frac{e^{4x} - 1}{e^x - 1} dx \cdot ۵۲ \checkmark$$

$$\int_{-1}^3 5^x dx \cdot ۵۵ \checkmark$$

$$\int_2^4 \frac{dx}{1 - e^{-x}} \cdot ۵۴ \checkmark$$

۵۱۳ لگاریتمها و نمایها

$$\int_0^1 4^u e^u du \cdot ۵۷ \checkmark$$

$$\int_0^4 2^{-t} 3^t dt \cdot ۵۶ \checkmark$$

$$\int_{-1}^1 v 2^v dv \cdot ۵۸$$

حدود زیر را با استفاده از قاعده هوییتال حساب کنید .

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1} \cdot ۶۰ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} \cdot ۵۹ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{1/x} - 1) \cdot ۶۲ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} \cdot ۶۱ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{\sqrt{1+x} - 1} \cdot ۶۴ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) \cdot ۶۳ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{e^{\sin x} - e}{\cos x} \cdot ۶۶ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{\tan x} - 1}{\sin x} \cdot ۶۵ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^{\sin x} - 1}{8^{\tan x} - 1} \cdot ۶۷ \checkmark$$

#### ۴.۶ لگاریتمها در هر پایه

در بخش پیش دیدیم که  $a^x$ ، یعنی نمایی در پایه  $a$  (که  $a > 0$ )، با فرمول

$$(۱) \quad a^x = e^{x \ln a}$$

داده می شود. معکوس تابع (۱) لگاریتم در پایه  $a$  نام دارد و با  $\log_a x$  نموده می شود. در اینجا  $a$  مثبت است، ولی باید حالت  $a = 1$  مستثنی شود، زیرا تابع  $1^x \equiv 1$  یک به یک نیست؛ و در نتیجه، معکوس ندارد. چون تابع  $a^x$  دارای قلمرو  $(-\infty, \infty)$  و برد  $(0, \infty)$  است، معکوسش، یعنی تابع  $\log_a x$ ، دارای قلمرو  $(0, \infty)$  و برد  $(-\infty, \infty)$  می باشد. لذا، به ازای هر  $x > 0$  داریم

$$(۲) \quad a^{\log_a x} = x,$$

یا معادلا

$$e^{\log_a x \cdot \ln a} = x.$$

از فرمول اخیر نتیجه می شود که

$$\log_a x \cdot \ln a = \ln x,$$

ولذا،

$$(۳) \quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

توجه کنید که اگر  $a = e$ ، رابطه (۳) به رابطه

$$\log_e x = \frac{\ln x}{\ln e} = \ln x$$

تحویل می‌شود؛ یعنی، لگاریتم در پایه  $e$  چیزی جز لگاریتم طبیعی نیست. از رابطه (۲) واضح است که  $\log_a x$  توانی است که  $a$  باید بدان برسد تا  $x$  به دست آید. همچنین، فرمول همتای

$$(۴) \quad \log_a a^x = x$$

را داریم که به‌ازای هر  $x$  معتبر است. البته فرمولهای (۲) و (۴) حالات خاصی از فرمولهای کلی  $f(f^{-1}(x)) \equiv x$  و  $f^{-1}(f(x)) \equiv x$  هستند که هر تابع یک به یک  $f$  و معکوش  $f^{-1}$  در آنها صدق می‌کنند.

خواص  $\log_a x$  شبیه خواص  $\ln x$  بوده، و نتیجه فوری تعریف (۳) می‌باشند. مثلاً،

$$\log_a 1 = \frac{\ln 1}{\ln a} = 0, \quad \log_a a = \frac{\ln a}{\ln a} = 1,$$

$$\log_a \frac{1}{x} = \frac{\ln (1/x)}{\ln a} = \frac{-\ln x}{\ln a} = -\log_a x,$$

$$\log_a xy = \frac{\ln xy}{\ln a} = \frac{\ln x + \ln y}{\ln a} = \log_a x + \log_a y,$$

و از این قبیل. فرمول

$$\log_a b^x = \frac{\ln b^x}{\ln a} = \frac{x \ln b}{\ln a} = x \log_a b \quad (b > 0)$$

را نیز باید متذکر شد. به‌ازای  $a = 10$  لگاریتم در پایه ۱۰ یا لگاریتم معمولی  $\log_{10} x$  در ریاضیات دبیرستانی را به دست می‌آوریم که اغلب با  $\log x$  بدون زیرنویس، ۱۰ نموده می‌شود. ارتباط بین لگاریتم معمولی و لگاریتم طبیعی از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10} \approx 0.43429 \ln x.$$

چون  $\ln a > 0$  اگر  $a > 1$ ، از فرمولهای (۱۰) و (۱۱)، صفحه ۴۹۰، و تعریف

$\log_a x$  معلوم می‌شود که

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty \quad (a > 1).$$

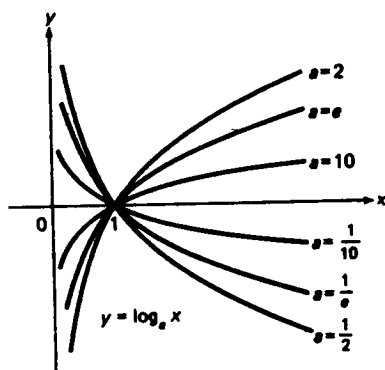
از آن سو، چون  $\ln a < 0$  اگر  $0 < a < 1$ ، داریم

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = \infty \quad (0 < a < 1).$$

در شکل ۸ تفاوت اساسی بین رفتار تابع  $\log_a x$  به ازای  $a > 1$  و رفتار آن به ازای  $0 < a < 1$  نموده شده است، که در این شکل  $\log_a x$  به ازای  $a = 2, e, 10, 1/2, 1/e, 1/10$  در یک دستگاه مختصات قائم رسم شده است. توجه کنید که هر یک از منحنیهای  $y = \log_a x$  و  $y = \log_{1/a} x$  منعکس دیگری نسبت به محور  $x$  است. این امر نتیجه فوری آن است که

$$\log_{1/a} x = \frac{\ln x}{\ln(1/a)} = \frac{\ln x}{-\ln a} = -\log_a x.$$

توضیح دهید چرا منحنیهای  $y = \log_a x$  همه از نقطه  $(1, 0)$  می‌گذرند ولی نقطه مشترک دیگری ندارند.



شکل ۸

از فرمولهای (۱۲) و (۱۳)، صفحه ۴۹۲، و تعریف  $\log_a x$  معلوم می‌شود که هم به ازای  $a > 1$  و هم به ازای  $0 < a < 1$ ،

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_a x}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \log_a x = 0.$$

هرگاه  $a$  و  $b$  دو عدد مثبت غیر از ۱ باشند، آنگاه

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{\ln b \ln x}{\ln a \ln b},$$

در نتیجه،

$$\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x.$$

بخصوص، با انتخاب  $x = a$  معلوم می‌شود که

$$1 = \log_a b \cdot \log_b a,$$

یا معادلا"

$$(۵) \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

این رابطه به ازای  $b = e$  به صورت زیر درمی‌آید:

$$(۵') \quad \log_a e = \frac{1}{\log_e a} = \frac{1}{\ln a}.$$

مثال ۱.  $\log_2 64$  و  $\log_{64} 2$  را بیابید.

حل. به کمک رابطه (۴) داریم

$$\log_2 64 = \log_2 2^6 = 6.$$

پس از (۵) نتیجه می‌شود که

$$\log_{64} 2 = \frac{1}{\log_2 64} = \frac{1}{6}.$$

در واقع، چون  $\log_a x$  توانی است که عدد  $a$  باید به آن برسد تا عدد  $x$  به دست آید، می‌توان  $\log_2 64$  و  $\log_{64} 2$  را فوراً "باتوجه به  $2^6 = 64$ ،  $64^{1/6} = 2$ " ذهنی حساب کرد.

مشتق تابع  $\log_a x$  به آسانی به دست می‌آید. در واقع،

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{d}{dx} \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{x \ln a},$$

یا معادلا"، به کمک (۵')،

$$(۶) \quad \frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x} \log_a e,$$

مثال ۲. از  $\log_3 (\sin x)$  مشتق بگیرید.

حل. از رابطه (۶) و قاعده زنجیره‌ای داریم

$$\frac{d}{dx} \log_3 (\sin x) = \frac{1}{\sin x} \log_3 e \frac{d}{dx} \sin x = \frac{\cos x}{\sin x} \log_3 e = \cot x \log_3 e.$$

مثال ۳، از  $\log_x a$  مشتق بگیرید.

حل. این بار متغیر مستقل  $x$  پایه لگاریتم است. بنابر (۳) و قاعده زنجیره‌ای،

$$\frac{d}{dx} \log_x a = \frac{d}{dx} \frac{\ln a}{\ln x} = -\frac{\ln a}{(\ln x)^2} \frac{d}{dx} \ln x = -\frac{\ln a}{x(\ln x)^2}.$$

مثال ۴. نشان دهید که

$$(۷) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_e(1+x)}{x} = \log_e e.$$

حل. این یک صورت مبهم  $0/0$  است که آن را با قاعده هسپیتال رفع ابهام می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_e(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{D_x \log_e(1+x)}{D_x x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_e e}{1+x} = \log_e e.$$

اگر  $a = e$ ، فرمول (۷) به صورت زیر درمی‌آید:

$$(۸) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \log_e e = 1.$$

به بیان دیگر، چون

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x},$$

معلوم می‌شود که حد (۸) در واقع مشتق  $\ln x$  در نقطه  $x = 1$  است؛ درنتیجه،

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{d \ln x}{dx} \Big|_{x=1} = \frac{1}{x} \Big|_{x=1} = 1.$$

به عنوان تمرین، فرمول (۷) را به همین نحو ثابت کنید.

### مسائل

عبارات زیر را ساده کنید.

$$\log_{10} (0.001) \quad \cdot ۲✓$$

$$\log_2 1024 \quad \cdot ۱۰✓$$

$$\log_{81} 3 \quad \cdot ۴✓$$

$$\log_3 \frac{1}{81} \quad \cdot ۳✓$$

$$\log_4 (0.0625) \quad \cdot ۶✓$$

$$\log_{1/2} \sqrt{2} \quad \cdot ۵✓$$

$$\log_5 (2.5 \times 10^4) \quad \cdot ۸✓$$

$$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \quad \cdot ۷✓$$

$$\log_3 (\log_3 27) \cdot 10 \checkmark$$

$$\log_{0.1} (0.2) \cdot 9 \checkmark$$

$$\log_x \pi x^2 \quad (x > 0) \cdot 12 \checkmark$$

$$\log_x \pi x^2 \quad (x \neq 0) \cdot 11 \checkmark$$

$$\log_{\sqrt{e}} (\ln e^e) \cdot 14 \checkmark$$

$$\log_{\sqrt{3}} \sqrt{3} \cdot 13 \checkmark$$

$$\log_2 (\log_4 (\log_8 64)) \cdot 16 \checkmark$$

$$\log_2 (\log_2 (\log_2 16)) \cdot 15 \checkmark$$

$$\log_2 (3^{\ln 4}) \cdot 18 \checkmark$$

$$\log_2 (\log_3 (\log_4 64)) \cdot 17 \checkmark$$

۱۹. نشان دهید هرگاه  $1 < a < b$  یا  $0 < a < b < 1$ ، آنگاه  $\log_a x > \log_b x$ ، مشروط بر

اینکه  $x > 1$  یا این به ازای  $0 < x < 1$  نیز درست است؟

۲۰. نشان دهید هرگاه  $\log_a y$  تابع خطی غیرشایستی از  $x$  باشد، آنگاه  $y$  با یک تابع نمایی از  $x$  متناسب می‌باشد.

نشان دهید که اگر ثابت تناسب مثبت باشد، عکس مطلب نیز درست است.

۲۱. اگر  $\log_3 y = 1 - 2x$ ،  $y$  را به صورت تابعی از  $x$  بیان کنید. اگر  $y = \frac{1}{8}(2^x)$ ،  $\log_4 y$  را به صورت تابعی از  $x$  بیان نمایید.

تمام  $x$  هایی را بیابید که تابع داده شده به ازای آنها تعریف شده باشد.

$$\log_5 (x + 1) + \log_{0.5} (x + 2) \cdot 22 \checkmark$$

$$\sqrt{\log_x x} \cdot 23 \checkmark$$

$$\arcsin (1 - x) + \log_2 (\log_2 x) \cdot 24$$

$$\log_{10} (1 - \log_{10} (x^2 - 5x + 16)) \cdot 25$$

$$\log_2 (\log_3 (\log_4 x)) \cdot 26$$

$$\arcsin (\log_{10}(x/10)) \cdot 27$$

از عبارات زیر مشتق بگیرید.

$$x^2 \log_3 x \cdot 30 \checkmark$$

$$x \log_{10} x \cdot 29 \checkmark$$

$$\log_x |x| \cdot 28 \checkmark$$

$$5^{\log_5 x} \cdot 33 \checkmark$$

$$\frac{x}{\log_2 x} \cdot 32 \checkmark$$

$$\log_4 (2^{\ln x}) \cdot 31 \checkmark$$

۳۴. نشان دهید که مشتق  $\log_a (\log_b x)$  از انتخاب  $b$  مستقل است.

انتگرالهای زیر را حساب کنید.

$$\int_1^{10} \log_{10} x \, dx \cdot 36 \checkmark$$

$$\int \log_2 x \, dx \cdot 35 \checkmark$$

حدود زیر را با استفاده از قاعده هوییتال حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_x (1 + \sin x)}{\tan x} \cdot 38 \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_3 (1 + 2x)}{\log_2 (1 + 3x)} \cdot 37 \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(x^2 + 1)}{x \sin x} \quad . ۴۰ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_{10}(1+x)}{10^x - 1} \quad . ۳۹ \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log_4(\tan x)}{\log_5(\sin x)} \quad . ۴۲$$

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{\log_2(\ln x)}{x - e} \quad . ۴۱ \checkmark$$

۴۳. گوئیم عدد  $a$  از حیث اندازه  $k$  مرتبه از عدد  $b$  بزرگتر است اگر  $a \approx 10^k b$  ، و گوئیم  $b$  از حیث اندازه  $k$  مرتبه از  $a$  کوچکتر است. این زبان بخصوص در فیزیک و زیست شناسی مفید است. اگر  $a$  از حیث اندازه  $k$  مرتبه از  $b$  بزرگتر باشد، رابطه بین  $\log_{10} a$  و  $\log_{10} b$  چیست؟

۴۴. چگونه سرعت نور ( 186,000 میل بر ثانیه  $\approx$  ) از حیث اندازه با سرعت صوت ( 1150 فوت بر ثانیه  $\approx$  ) مقایسه می شود؟

۴۵. چگونه وزن یک موش ( 1 oz  $\approx$  ) از حیث اندازه با وزن یک مرد مقایسه می شود؟

۴۶. pH یک محلول آبکی با فرمول  $\text{pH} = -\log_{10} [\text{H}^+]$  تعریف می شود، که در آن  $[\text{H}^+]$  غلظت یونهای هیدروژن است که با مل برلیتر سنجیده می شود. pH آب خالص 7 است، محلولهای اسیدی pH کمتر از 7 دارند، و محلولهای قلیایی pH بیشتر از 7 خواهند داشت. کاغذ لیتموس، که رنگ طبیعی آن صورتی است، در محلولهای اسیدی قرمز و در محلولهای قلیایی آبی می شود. رنگ کاغذ لیتموس در محلولی که  $[\text{H}^+] = 4 \times 10^{-9}$  قرمز می شود یا آبی؟ در محلولی که  $[\text{H}^+] = 0.00002$  چطور؟

۴۷. شدت  $I$  یک موج صوتی میزان انتقال انرژی صوتی از سطح واحد عمود بر انتشار موج است. ضعیفترین صدای قابل شنیدن توسط گوش ما آستانه شنوایی است که شدتی حدود  $10^{-16} \text{ watt/cm}^2$  دارد، حال آنکه قویترین صدای قابل تحمل توسط گوش ما آستانه درد بوده و شدتی حدود  $10^{-4} \text{ watt/cm}^2$  خواهد داشت. لذا، گوش در مورد صداهایی واکنش دارد که شدتشان بتواند به اندازه عامل  $10^{12}$  ( یک تریلیون ) فرق کند. احساس بلند بودن، که با  $L$  نموده می شود، ظاهراً " با لگاریتم شدت  $I$  متناسب است، و معمولاً " با فرمول زیر تعریف می شود:

$$L = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}$$

که در آن  $I_0$  شدت ضعیفترین صدای قابل شنیدن است.  $L$  تعریف شده به این صورت با دسیبل سنجیده و با علامت اختصاری dB نموده می شود. 1-dB تغییر در بلند بودن صدا تقریباً " کمترین تغییری است که گوش انسان متوجه می شود. نشان دهید که اگر  $I$  در 10 ضرب شود،  $L$  درست 10 dB افزایش می یابد. چه درصد افزایش در  $I$  به



افزایش 1-dB در  $L$  منجر می شود؟

۴۸. نشان دهید که، با تقریبی عالی، افزایش 3-dB در بلند بودن یک صوت نظیر دو برابر شدن شدت آن می باشد.

۴۹. بلند بودن صدایی که 50,000 بار شدیدتر از ضعیفترین صدای قابل شنیدن است چند دسیبل می باشد؟ صدایی که 200 بار از صدای قابل تحمل شدیدتر است چطور؟

۵۰. شدت صدای خش خش برگها را با بلندی حدودا " 10 dB، و نیز یک خیابان شلوغ پر ترافیک با بلندی حدودا " 70 dB را تخمین بزنید.

۵۱. در زمانهای قدیم ستارگان قابل رویت با چشم غیر مسلح به شش گروه تقسیم می شدند. به ستارگان اندازه ۱ از ۱ تا ۶ نسبت می دادند که به نورانی ترین آنها اندازه ۱ و به کم نورترین آنها اندازه ۶ منتسب می کردند. امروزه این رده بندی تا حدود زیادی گسترش یافته، و از فرمول

$$m_2 - m_1 = 2.5 \log_{10} \frac{I_1}{I_2} \quad (\text{یک})$$

برای ارتباط اندازه های  $m_1, m_2$  با شدتهای  $I_1, I_2$  دو ستاره  $S_1, S_2$  استفاده می شود. یک ستاره با اندازه ۱ چند بار از یک ستاره با اندازه ۶ نورانی تر است؟ ضعیفترین ستارگانی که می توان از آنها با تلسکوپ 200 اینچی رصدخانه مونت پالومار در کالیفرنیا عکس گرفت دارای اندازه ای حدود 23.5 اند. این تلسکوپ چند برابر چشم غیر مسلح حساستر است؟

۵۲. نشان دهید که، با تقریبی عالی، کاهش ۱ واحد از اندازه یک ستاره نظیر به 2.5 برابر افزایش در شدت نور آن است.

۵۳. شعرای یمانی، نورانی ترین ستاره در آسمان، دارای اندازه ۱.4-، و ستاره سهیل دومین ستاره روشن پس از آن، دارای اندازه ۰.7- است. شعرای یمانی چند برابر (بر حسب شدت) سهیل روشنتر است؟

۵۴. سکه ای را چند بار پرتاب می کنیم. فرض کنید احتمال آنکه شیر بیاید  $p$  باشد، که  $p$  به خاطر احتمال بودن در بازه  $[0, 1]$  قرار دارد. در این صورت، احتمال خط آمدن  $q = 1 - p$  است، و  $q$  نیز در  $[0, 1]$  قرار دارد. اگر سکه سالم باشد، شیر و خط متساوی الی ممکن اند؛ یعنی،  $p = q = \frac{1}{2}$ . پس از قبل نمی دانیم حاصل پرتاب یک سکه چیست؛ در نتیجه، یک عدد دورقمی یا تکه لازم است تا نتیجه را به ما بگوید (مثلا " 1 برای شیرها و 0 برای خطها). هرگاه سکه کاملاً " معیوب باشد مثلاً "  $p = 1$ ، لذا حاصل هر پرتاب شیر باشد، آنگاه از قبل نتیجه پرتاب را می دانیم. لذا، اگر

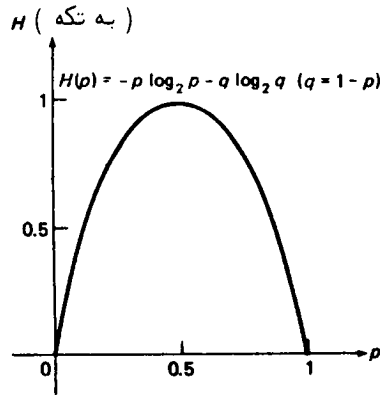
## ۵۲۱ لگاریتمها و نمایها

$p = \frac{1}{2}$  ، ۱ تکه اطلاعات برای رفع ابهام در باب نتیجه یک پرتاب لازم است، در حالی که اگر  $p = 1$  (یا  $q = 1$ ) ، به هیچ اطلاعی در این باب نیاز نداریم. به قول کلودشانون<sup>۱</sup>، پایه‌گذار نظریه اطلاعات، در حالت  $p$  دلخواه، عدم قطعیت یا آنتروپی پرتاب یک سکه باید مساوی

$$\begin{aligned} H(p) &= -p \log_2 p - q \log_2 q \\ &= -p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p) \end{aligned} \quad (\text{دو})$$

تکه تعریف شود، و این مقدار اطلاعات نقل شده توسط یک پیام است که نتیجه پرتاب را به ما می‌دهد. طبق قرارداد،  $0 \log_2 0 = 0$ ، که  $H(p)$  را بر  $[0, 1]$  پیوسته می‌سازد.

نشان دهید که تابع آنتروپی  $H(p)$  بر  $[0, 1]$  نامنفی است، ماکزیمم ۱ خود را در  $p = \frac{1}{2}$  و مینیمم ۰ خود را در  $p = 0$  یا  $p = 1$  می‌گیرد. نشان دهید که  $H(p)$  بر  $[0, 1]$  به پایین مقعر است و نسبت به خط  $p = \frac{1}{2}$  متقارن می‌باشد. نمودار  $H(p)$  در شکل ۹ نموده شده است، و تمام این ویژگیها را نشان می‌دهد.



شکل ۹

۵۵. فرض کنید در پرتاب یک سکه معیوب احتمال آمدن شیر دو برابر خط باشد. چقدر اطلاعات به شما داده شده است؟

۵۶. در نظریه اطلاعات نشان داده شده که در یک پیام که حاصل یک آزمایش تصادفی با  $N$  نتیجه متساوی‌الاحتمال را بازگو می‌کند  $\log_2 N$  تکه اطلاعات وجود دارند. فرض

کنید به شما روز تولد یک شخص کاملاً "بیگانه" گفته شده باشد. چقدر اطلاعات به شما داده شده است؟ (از سالهای کیسه صرف نظر کنید.)

۵.۶ تابع توانی کلی؛ مطالب دیگر در باب صور مبهم  
ما از قبل معنی  $x^m$  به ازای  $a$  ی گویا را می دانیم. در واقع، هرگاه  $a = m/n$  که در آن  $m$  و  $n > 0$  صحیح اند، آنگاه  $x^m$  یعنی

$$(1) \quad x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}.$$

حال می خواهیم به  $x^m$  درحالتی که  $a$  گنگ است معنی بدهیم. تعریف مناسب عبارت است از

$$(2) \quad x^m = e^{m \ln x} \quad (x > 0),$$

که در آن باید  $x$  را مثبت فرض کرد؛ درنتیجه،  $\ln x$  تعریف نشده است.  
فرمول (۲) از دیدگاه جبری چیزی جز فرمول (۱۳)، صفحه ۵۰۷، نیست که در آن نقشهای  $a$  و  $x$  باهم عوض شده اند، ولی رفتار  $x^m$ ، به عنوان تابعی از  $x$ ، کلاً "با رفتار  $a$  فرق دارد".  
تابع (۲)، به نام تابع توانی کلی، بر  $(0, \infty)$  پیوسته بوده و، وقتی  $a$  عدد گویای  $m/n$  باشد، مقدار  $\sqrt[n]{x^m}$  را می گیرد. برای مشاهده این امر،  $a = m/n$  را در (۲) گذارده به دست می آوریم

$$x^{m/n} = e^{(m/n) \ln x} = e^{m \ln x / n}.$$

پس نتیجه می شود که

$$(x^{m/n})^n = (e^{m \ln x / n})^n = e^{m \ln x} = x^m = (e^{\ln x})^m,$$

ولذا،

$$(x^{m/n})^n = x^m,$$

که با فرمول (۱) معادل می باشد. اما اگر  $a$  گنگ باشد، نمی توان  $a$  را به صورت نسبت دو عدد صحیح مانند  $m/n$  نمایش داد؛ و درنتیجه، فرمول (۲) تنها راه تعریف  $x^m$  می باشد.

تبصره. فرض کنیم  $a = m/n$  عدد گویای تحویل ناپذیری بوده و  $n > 0$  فرد باشد. دراین صورت، فرمول (۱) از فرمول (۲)، که به ازای  $n$  های مثبت با آن یکی است، فراتر می رود، زیرا  $x^{m/n}$  را به ازای  $x$  منفی و  $x = 0$  (در این حالت  $0^{m/n} = 0$ ) اگر  $m > 0$  نیز تعریف می کند. در واقع، هرگاه  $n$  فرد باشد، آنگاه  $x^{m/n}$  همان جفتی  $m$  را دارد؛ یعنی،  $x^{m/n}$  یک تابع زوج است اگر  $m$  زوج باشد و یک تابع فرد است اگر  $m$  فرد باشد. اما فرمول (۱)

۵۲۳ لگاریتمها و نمایها

$x^{m/n}$  را به ازای  $x$  منفی و  $n$  زوج تعریف نمی‌کند، زیرا در این صورت  $m$  فرد است (به یا آورید که  $m/n$  تحویل ناپذیر است). و در نتیجه، اگر  $x$  منفی باشد،  $x^m$  نیز منفی بوده  $\sqrt[n]{x^m}$  یعنی ریشه  $n$  زوج گرفتن از عددی منفی که غیرممکن می‌باشد.

لذا، به توانهای گنگ  $x$  مانند  $x^{\sqrt{2}}$  و  $x^e$  معنی بخشیده‌ایم. از (۲) نتیجه می‌شود که

$$x^{-a} = e^{-a \ln x} = \frac{1}{x^a},$$

ولذا،

$$(۳) \quad x^{-a} = \frac{1}{x^a}.$$

به‌علاوه، هرگاه  $a$  و  $b$  اعداد حقیقی دلخواهی باشند، آنگاه

$$(x^a)^b = (e^{a \ln x})^b = e^{ab \ln x},$$

یعنی،

$$(۴) \quad (x^a)^b = x^{ab}.$$

به همین نحو،

$$x^a x^b = e^{a \ln x} e^{b \ln x} = e^{a \ln x + b \ln x} = e^{(a+b) \ln x},$$

در نتیجه،

$$(۵) \quad x^a x^b = x^{a+b}.$$

همچنین، بنابر (۳)،

$$\frac{x^a}{x^b} = x^a x^{-b},$$

ولذا، به کمک (۵) داریم

$$(۶) \quad \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}.$$

فرمولهای (۴) تا (۶) چیزی جز صورتهایی از قوانین نماها در صفحه ۵۰۷ نیستند.

رفتار  $x^a$  به علامت نمای  $a$  بستگی اساسی دارد (حالت  $a = 0$  استثنایی است، زیرا  $x^0 \equiv 1$ ). فرض کنیم  $t = a \ln x$ . در نتیجه، (۲) شکل فشرده  $e^t = x^a$  را به خود می‌گیرد. هرگاه  $a > 0$ ، آنگاه  $t$  با  $\ln x$  هم‌علامت بوده، و

$$(۷) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^a = \lim_{t \rightarrow \infty} e^t = \infty \quad (a > 0),$$

زیرا  $x \rightarrow 0^+$  ایجاب می‌کند که  $t \rightarrow -\infty$ ، حال آنکه  $x \rightarrow \infty$  ایجاب می‌کند که  $t \rightarrow \infty$ .  
از اولین فرمول واضح است که هرگاه تعریف کنیم

$$0^a = 0 \quad (a > 0),$$

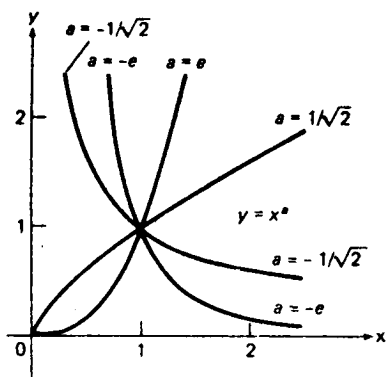
آنگاه تابع  $x^a$ ، که ابتدا فقط بر بازه  $(0, \infty)$  تعریف شده است، بر بازه بسته  $[0, \infty)$  پیوسته می‌باشد. بنابراین، به ازای  $a$  مثبت، تعریف تعمیم یافته زیر را می‌پذیریم:

$$x^a = \begin{cases} e^{a \ln x}, & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (a > 0).$$

از آن سو، هرگاه  $a < 0$ ، آنگاه  $t = a \ln x$  با  $\ln x$  مختلف‌العلامه است، و

$$(7') \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a = \lim_{t \rightarrow \infty} e^t = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^a = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 \quad (a < 0),$$

زیرا در اینجا  $x \rightarrow 0^+$  ایجاب می‌کند که  $t \rightarrow \infty$ ، حال آنکه  $x \rightarrow \infty$  ایجاب می‌کند که  $t \rightarrow -\infty$ . این تفاوت اساسی رفتار تابع  $x^a$  به ازای  $a > 0$  و رفتار به ازای  $a < 0$  در شکل ۱۰ نموده شده است، که در آن  $x^a$  به ازای  $a = \pm 1/\sqrt{2}$  رسم شده است. ما برای  $a$  مقادیر گنگ اختیار کرده‌ایم که برای آنها استفاده از  $x^a = e^{a \ln x}$  لازم است. این امر که تمام منحنیهای  $y = x^a$  از نقطه  $(1, 1)$  می‌گذرند و نقطه مشترک دیگری ندارند را چطور به حساب می‌آورید؟



شکل ۱۰

برای مشتقگیری از تابع  $x^a$ ، از تعریف و قاعده زنجیره‌ای استفاده می‌کنیم. این نتیجه می‌دهد که اگر  $x > 0$ ،

$$\frac{d}{dx} x^a = \frac{d}{dx} e^{a \ln x} = e^{a \ln x} \frac{d}{dx} (a \ln x) = x^a \frac{a}{x} = a \frac{x^a}{x}$$

۵۲۵ لگاریتمها و نمایها

که، پس از استفاده از (۶) به ازای  $b = 1$ ، به صورت ساده‌زیر درمی‌آید:

$$(۸) \quad \frac{d}{dx} x^a = ax^{a-1},$$

ما از فرمول (۸) در حالت  $a$  ی گویا استفاده کرده‌ایم، و حال می‌بینیم به ازای  $a$  ی گنگ نیز درست است. مثلاً،

$$\frac{d}{dx} x^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1},$$

$$\frac{d}{dx} x^e = ex^{e-1},$$

و غیره. از (۸) فوراً نتیجه می‌شود که به ازای مقادیر گویا و گنگ  $x$ ،

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1)$$

مثلاً،

$$\int x^{\pi} dx = \frac{x^{\pi+1}}{\pi+1} + C.$$

حالت  $a = -1$  زحمتی ندارد، زیرا

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C.$$

پس می‌توان از هر توان حقیقی  $x$  مشتق و انتگرال گرفت.

مثال ۱. از  $x^x$  مشتق بگیرید.

حل. داریم

$$\frac{d}{dx} x^x = \frac{d}{dx} e^{x \ln x} = e^{x \ln x} \frac{d}{dx} (x \ln x) = x^x (\ln x + 1).$$

به‌طور معادل، با مشتقگیری لگاریتمی داریم

$$\frac{d}{dx} x^x = x^x \frac{d}{dx} \ln x^x = x^x \frac{d}{dx} (x \ln x) = x^x (\ln x + 1).$$

مثال ۲. نشان دهید که به ازای  $a$  ی دلخواه

$$(۹) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^a - 1}{x - 1} = a$$

حل. این یک صورت مبهم  $0/0$  است که می‌توان آن را با قاعده هوییتال و فرمول (۸) رفع ابهام کرد:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^a - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{D_x(x^a - 1)}{D_x(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} ax^{a-1} = a.$$

قبلا" در صفحه ۴۹۲ نشان دادیم که

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0.$$

دو مثال بعدی نشان می‌دهد که این فرمولها در صورت تعویض  $x$  با هر توان مثبتی از  $x$  برقرار می‌مانند.

مثال ۳. نشان دهید که به ازای هر  $a > 0$ ,

$$(۱۰) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$$

حل. این یک صورت مبهم  $\infty/\infty$  است که می‌توان آن را با قاعده هوییتال و استفاده از (۸) و فرمول دوم (۷) رفع ابهام کرد:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^a} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{D_x \ln x}{D_x x^a} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{ax^{a-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{ax^a} = 0.$$

بنابر (10)، وقتی  $x \rightarrow \infty$ ،  $\ln x$  از هر توان مثبتی از  $x$ ، ولو کوچک، کندتر رشد می‌کند. به عنوان مثال،

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^{0.001}} = 0.$$

مثال ۴. نشان دهید که به ازای هر  $a > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \ln x = 0$$

حل. این بار صورت مبهم  $0 \cdot \infty$  داریم که آن را به کمک مثال قبل و جانشانی  $x = 1/t$  رفع ابهام می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \ln x = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t}\right)^a \ln \frac{1}{t} = - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln t}{t^a} = 0.$$

صور مبهم  $0^0$ ،  $\infty^0$ ، و  $1^\infty$ . در صفحه ۲۹۷ گفتیم که  $0^0$ ،  $\infty^0$ ، و  $1^\infty$  صور مبهمی می باشند. حال در وضعی هستیم که این ابهامات را بررسی نماییم. فرض کنیم  $F$  و  $G$  توابع پیوسته‌ای باشند که  $F$  مثبت نیز بوده و حد عبارت  $[F(x)]^{G(x)}$  را وقتی  $x \rightarrow a$  در نظر می گیریم. (طبق معمول، در صور مبهم فقط برای راحتی می نویسیم  $x \rightarrow a$ ، و موارد دیگر عبارتند از  $x \rightarrow a^+$ ،  $x \rightarrow a^-$ ،  $x \rightarrow \infty$ ، و  $x \rightarrow -\infty$ ) در این صورت،

$$(11) \quad \lim_{x \rightarrow a} [F(x)]^{G(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{G(x) \ln F(x)} = e^L,$$

که در آن

$$(12) \quad L = \lim_{x \rightarrow a} [G(x) \ln F(x)],$$

مشروط بر اینکه حد  $L$  موجود و متناهی باشد. این نتیجه فوری قضیه ۱۱، صفحه ۱۴۱، به ازای  $f(x) = G(x) \ln F(x)$  و  $g(x) = e^x$  می باشد. (به آسانی معلوم می شود که حد (۱۱) در صورت  $L = \infty$  مساوی  $\infty$  و در صورت  $L = -\infty$  مساوی ۰ است.) اما (۱۲)، و در نتیجه (۱۱)، در صورتی که یکی از  $\ln F(x)$  یا  $G(x)$  به صفر و دیگری به بی نهایت نزدیک شود، مبهم است. این می تواند به سه طریق رخ دهد؛ یعنی،  
 (یک)  $F(x) \rightarrow 0^+$ ، یا معادلاً  $\ln F(x) \rightarrow -\infty$ ، و  $G(x) \rightarrow 0$ ؛  
 (دو)  $F(x) \rightarrow \infty$ ، یا معادلاً  $\ln F(x) \rightarrow \infty$ ، و  $G(x) \rightarrow 0$ ؛  
 (سه)  $F(x) \rightarrow 1$ ، یا معادلاً  $\ln F(x) \rightarrow 0$ ، و  $G(x) \rightarrow \infty$ ؛  
 که به ترتیب نظیر به صور مبهم  $0^0$ ،  $\infty^0$ ، و  $1^\infty$  می باشند. لذا، محاسبه این صور به رفع ابهام از  $0 \cdot \infty$  تحویل می شود.

مثال ۵.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$  را حساب کنید.

حل. برای رفع ابهام از صورت  $0^0$  ملاحظه می کنیم که

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^L,$$

که در آن



$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x.$$

اما از قبل می‌دانیم که  $L = 0$ ؛ و در نتیجه،

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = e^0 = 1.$$

مثال ۶.  $\lim_{x \rightarrow x} x^{1/x}$  را حساب کنید.

حل. این بار صورت مبهم  $\infty^0$  را داریم. با توجه به اینکه

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{(1/x) \ln x} = e^L,$$

که در آن

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x},$$

فورا "خواهیم داشت

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x} = e^0 = 1,$$

زیرا همانطور که از قبل می‌دانیم  $L = 0$ .

مثال ۷.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}$  را حساب کنید.

حل. حال صورت مبهم  $1^\infty$  را داریم. چون

$$(1+x)^{1/x} = e^{(1/x) \ln(1+x)},$$

می‌بینیم که

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e^L,$$

که در آن

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

اما، بنابر مثال ۴، صفحه ۵۱۷،  $L = 1$ ؛ و در نتیجه،

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e^1 = e.$$

مثال ۸.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  را حساب کنید.

حل. این مجدداً "یک صورت مبهم  $1^\infty$  است؛ و در واقع، صورت دیگری است از حد مطرح شده در مثال قبل. با جانشانی  $t = 1/x$  معلوم می شود که

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t \rightarrow 0^+} (1+t)^{1/t},$$

و لذا، به کمک (۱۳)،

$$(14) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

اگر مقادیر  $x$  را به اعداد صحیح مثبت محدود کنیم، فرمول مهم زیر به دست می آید:

$$(14') \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

که  $e$  را به صورت حد یک "دنباله نامتناهی" بیان می کند. در مثال ۱۱، صفحه ۷۹۲، در معنی این فرمول بیشتر سخن خواهیم گفت.

مثال ۹.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$  را در صورتی حساب کنید که  $a$  عدد دلخواهی باشد.

حل. برای رفع ابهام از این صورت  $1^\infty$ ، جانشانی  $t = a/x$  را انجام داده به دست می آوریم

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \lim_{t \rightarrow 0^+} (1+t)^{a/t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{(a/t) \ln(1+t)} = e^L,$$

که در آن

$$L = \lim_{t \rightarrow 0^+} a \frac{\ln(1+t)}{t} = a \cdot 1 = a.$$

پس نتیجه می شود که

$$(15) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a.$$

به ازای  $a = 1$ ، این رابطه به فرمول (۱۴) تحویل می شود.

تبصره. فرمول (۱۳) در صورت تعویض  $x \rightarrow \infty$  با  $x \rightarrow -\infty$  برقرار می ماند. در واقع،

با جانشانی  $x = -t$  خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{t}\right)^{-t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{a}{t}\right)^t} \\ &= \frac{1}{\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{t}\right)^t} = \frac{1}{e^{-a}},\end{aligned}$$

و در نتیجه،

$$(15) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a.$$

سود مرکب. همانطور که اینک نشان می‌دهیم، فرمول (۱۵) کاربرد مالی مهمی دارد. فرض کنیم پول با نرخ سود سالانه  $r$ ، یا معادلاً  $100r$  درصد،  $n$  بار در سال مرکب شود. فرض کنیم  $A_t$  پول موجود در بانک در آخر دوره سوددهی  $t$  م بوده، و هیچ پولی بعد از پس‌انداز اولیه برداشت نشده باشد. در این صورت،

$$(16) \quad A_{t+1} = A_t + A_t \frac{r}{n} = A_t \left(1 + \frac{r}{n}\right),$$

زیرا سود روی مقدار موجود و با نرخ  $r$ ، یعنی نرخ اسمی، تقسیم بر  $n$ ، یعنی تعداد ترکیب سود در سال، محاسبه می‌شود. البته مقدار اولیه  $A_0$  سرمایه  $P$  است. پول موجود در بانک پس از  $t$  سال پول موجود پس از  $nt$  دوره سوددهی است. برای محاسبه این پول، که آن را با  $A$  نشان می‌دهیم، از فرمول (۱۶) مکرر استفاده کرده، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}A &= A_n = A_{n-1} \left(1 + \frac{r}{n}\right) = A_{n-2} \left(1 + \frac{r}{n}\right) \left(1 + \frac{r}{n}\right) = A_{n-2} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^2 \\ &= \cdots = A_1 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n-1} = A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n.\end{aligned}$$

بنابراین،

$$(17) \quad A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n,$$

زیرا  $A_0 = P$ .

حال فرض کنیم سود به طور پیوسته مرکب شود؛ یعنی، تعداد دفعاتی که سود مرکب در سال حساب می‌شود بزرگتر و بزرگتر شود؛ در نتیجه، زمان بین محاسبه سود مرکب کمتر

و کمتر گردد. در این صورت، مقدار موجودی پس از  $t$  سال عبارت است از

$$A = P \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{r}{n} \right)^n,$$

یا معادلاً، پس از قرار دادن  $x = nt$ ،

$$A = P \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{rt}{x} \right)^x.$$

اما حد سمت راست چیزی جز حد (۱۵) به ازای  $a = rt$  نیست. بنابراین،

$$(18) \quad A = Pe^{rt}.$$

با این می‌توان عدد  $e$  را به زبان مالی تعبیر کرد؛ فرض کنیم  $P = \$1$  با سود  $100\%$  و به طور پیوسته مرکب سپرده بگذاریم. در این صورت،  $P = \$1$ ،  $r = 1$ ، و موجودی پس از ۱ سال درست  $e$  دلار می‌شود؛ یعنی، با نزدیکترین سنت،  $\$2.72$ .

مثال ۱۰. فرض کنیم  $P = \$1000$ ،  $r = 0.06$  (۶٪)، و ۱ سال  $t = 1$ . مقادیر  $A$  داده شده با فرمول (۱۷) را به‌ازای مقادیر مختلف  $n$  (تعداد ترکیبها در سال) با مقدار  $A$  داده شده با فرمول (۱۸) برای ترکیب پیوسته مقایسه نمایید.

حل. نتایج در جدول زیر برای سال، شش ماه، چهار ماه، ماهانه، روزانه، و ترکیب پیوسته (آخری با  $\infty$  نموده شده است) ذکر شده‌اند:

$n$	1	2	4	12	365	$\infty$
$A$	\$1060.00	\$1060.90	\$1061.36	\$1061.68	\$1061.83	\$1061.84

واضح است که تمایز بین ترکیب روزانه (که بعضی از بانکها انجام می‌دهند) و ترکیب پیوسته اهمیت پولی چندانی ندارد.

مثال ۱۱. چقدر پول را اکنون به سپرده بگذاریم تا ۴ سال بعد  $\$10,000$  پس انداز داشته باشیم مشروط براینکه نرخ سالانه سود ۵٪ و به طور پیوسته مرکب شود؟

حل. با حل معادله (۱۸) نسبت به  $P$ ، معلوم می‌شود که

$$(18') \quad P = \frac{A}{e^{rt}} = Ae^{-rt}.$$

با قرار دادن  $A = \$10,000$ ،  $r = 0.05$ ، و  $t = 4$  در این فرمول، با نزدیکترین سنت به

دست می‌آوریم

$$P = \$10,000e^{-0.2} = \$8187.31$$

به زبان مالی،  $P$  مقدار فعلی (یا مقدار تخفیف یافته)  $\$10,000$  در ۴ سال با نرخ به‌طور پیوسته مرکب شده ۵٪ نامیده می‌شود.

### مسائل

از عبارات زیر مشتق بگیرید.

$$x^a a^x \quad 0.3 \quad \checkmark$$

$$x^{\sqrt{x}} \quad 0.6 \quad \checkmark$$

$$x^{\tan x} \quad 0.9 \quad \checkmark$$

$$x^{x^2} \quad 0.12 \quad \checkmark$$

$$x^{4x} \quad 0.15$$

$$x^m e^x \quad 0.2 \quad \checkmark$$

$$x^{1/x} \quad 0.5 \quad \checkmark$$

$$x^{\ln x} \quad 0.8 \quad \checkmark$$

$$(\sin x)^{\cos x} \quad 0.11 \quad \checkmark$$

$$x^{e^x} \quad 0.14 \quad \checkmark$$

$$x^m \ln x \quad 0.1 \quad \checkmark$$

$$x^{\pi 5^x} \quad 0.4 \quad \checkmark$$

$$(\ln x)^x \quad 0.7 \quad \checkmark$$

$$(\ln x)^{\ln x} \quad 0.10 \quad \checkmark$$

$$e^{x^x} \quad 0.13 \quad \checkmark$$

$$x^{x^x} \quad 0.16 \quad \checkmark$$

$$0.17 \quad \checkmark \quad \text{تحقیق کنید که}$$

$$\int x^{a-1} \ln x \, dx = \frac{x^a \ln x}{a} - \frac{x^a}{a^2} + C \quad (a \neq 0).$$

انتگرالهای زیر را حساب کنید.

$$\int \sqrt{x} \ln x \, dx \quad 0.19 \quad \checkmark$$

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx \quad 0.18 \quad \checkmark$$

۲۰. نشان دهید هرگاه  $\log_m y$  یک تابع خطی غیر ثابت از  $\log_m x$  باشد، آنگاه  $y$  با یک تابع توانی از  $x$  متناسب است. نشان دهید که عکس مطلب در صورتی درست است که ثابت تناسب مثبت باشد.

۲۱. اگر  $\log_2 y = \pi \log_2 x - 1$ ،  $y$  را به صورت تابعی از  $x$  بیان کنید. اگر  $y = 9x^{\pi^2}$ ،  $\log_3 y$  را به صورت تابعی از  $\log_3 x$  بیان نمایید.

۲۲. نشان دهید که معادله  $x^a = a^x$  ( $a > 0$ ) جواب غیربیدیهی دارد، یعنی جوابی غیر از  $x = a$  دارد، اگر و فقط اگر  $1 < a < e$  یا  $a > e$ . جواب به ازای  $a = 2$  چیست؟

۲۳. فرض کنید  $a$  عدد حقیقی دلخواهی باشد. نشان دهید که

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^a} = \infty, \quad (\text{یک})$$

یا معادلاً

۵۳۳ لگاریتمها و نمایها

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{e^x} = 0.$$

(لذا،  $e^x$  از هر توان  $x$ ، ولو بزرگ، سریعتر رشد می کند.)

۲۴. نشان دهید که  $0^\infty$  و  $\infty^\infty$  مبهم نیستند.

ابهام نظریه حد داده شده را توصیف کنید. سپس حد را به کمک قاعده هسپیتال یا فرمول (۱۵) محاسبه نمایید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\sqrt{x}} - 1}{x} \cdot 26 \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^e - 1}{x^e - 1} \cdot 25 \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sqrt{x}} \cdot 28 \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^{101}} \cdot 27 \checkmark$$

$$(a > 0) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^a}{x} \cdot 30 \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x \cdot 29 \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{x \ln x} \cdot 32 \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (2^{\cot x})^x \cdot 31 \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{e}{x}\right)^x \cdot 33 \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \pi x)^{1/x} \cdot 32 \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right)^x \cdot 36 \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x \cdot 35 \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{1/x} \cdot 38 \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1}\right)^{\ln x} \cdot 37 \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^x \cdot 40 \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x^{x/(1-x)} \cdot 39 \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\csc x)^x \cdot 42 \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{1/x})^{\tan x} \cdot 41 \checkmark$$

۴۳. سپرده اولیه \$1000 ظرف 5 سال اگر هر چهار ماه با نرخ سود سالانه 8% ترکیب

شود؛ اگر به طور پیوسته مرکب شود چقدر خواهد شد؟

۴۴. یک سپرده اولیه با ترکیب پیوسته ظرف 10 سال دو برابر می شود. نرخ سود سالانه

چقدر است؟

۴۵. چقدر طول می کشد تا \$15,000 با ترکیب پیوسته و نرخ سود سالانه 7% تا \$25,000؛

تا \$35,000 رشد نماید؟

۴۶. مقدار فعلی \$60,000 در 5 سال با نرخ سود سالانه 9% و ترکیب پیوسته چقدر است؟  
با همان نرخ ولی ترکیب ماهانه چقدر است؟

۴۷. ارزش  $V$  نوشابه‌ای با زمان و طبق فرمول  $V = V_0 e^{rt/12}$  (t به سال) افزایش می‌یابد.  
نوشابه همین طور که فروخته می‌شود صاحب آن پولش را در بانکی که نرخ سالانه‌اش ۲ درصد و با ترکیب پیوسته است سپرده می‌گذارد. ظرف چند سال باید نوشابه فروش رود تا سپرده ماکزیمم گردد؟

۴۸. اگر  $n$  تعداد ترکیبها در سال باشد،

$$(دو) \quad r_E = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n - 1$$

نرخ سود (سالانه) مؤثر، در مقابل نرخ سود (سالانه) اسمی  $r$ ، را توجیه نمایید.  
نرخ سود مؤثر نظیر به نرخ اسمی داده شده را بیابید:

۴۹. 8% با ترکیب شش ماهه

۵۰. 7.2% با ترکیب ماهانه

۵۱. 6.5% با ترکیب پیوسته

۵۲. اگر ترکیب چهار ماهه، ماهانه، پیوسته باشد، چه نرخ سود اسمی نرخ مؤثر 8% را "سالانه" می‌سازد؟

۶.۶ معادلات دیفرانسیل جدایی پذیر؛ رشد و تحلیل نمایی

برای آماده شدن بیشتر جهت بررسی تابع نمایی و کاربردهای آن، کمی منحرف شده معادلات دیفرانسیل مرتبه اول به شکل

$$(۱) \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \quad (g(y) \neq 0)$$

را بررسی می‌کنیم. در اینجا  $f(x)$  و  $g(y)$  دو تابع پیوسته معلوم بوده، و  $y = y(x)$  تابع مجهولی است که مشتق‌پذیر فرض می‌شود. ویژگی اصلی معادله (۱) این است که  $g(y)$  تابعی از متغیر وابسته  $y$  می‌باشد. گوییم هر معادله به شکل (۱) متغیرهای از هم جدا شده دارد، و معادله‌ای را که بتوان به این شکل درآورد جدایی‌پذیر می‌نامیم. مثلاً، معادله  $y' = y^3 \sin x$  جدایی‌پذیر است، و این را می‌توان فوراً با اختیار  $f(x) = \sin x$  و  $g(y) = 1/y^3$  مشاهده کرد، ولی معادله  $y' = \sin xy$  جدایی‌پذیر نمی‌باشد.

برای حل (۱) ابتدا طرفین معادله را در  $g(y)$  ضرب می‌کنیم. از این نتیجه می‌شود

که

$$(۲) \quad g(y) \frac{dy}{dx} = f(x).$$

سپس می‌بینیم که طرف چپ (۲) چیزی جز مشتق  $G(y) = G(y(x))$  نسبت به  $x$  نیست، که در آن  $G(y)$  یک پادمشتق  $g(y)$  می‌باشد. در واقع، به کمک قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم

$$\frac{dG(y)}{dx} = \frac{dG(y)}{dy} \frac{dy}{dx} = g(y) \frac{dy}{dx}.$$

لذا، (۲) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$(۳) \quad \frac{dG(y)}{dx} = f(x).$$

حال، با انتگرالگیری از طرفین (۳) نسبت به  $x$ ، خواهیم داشت

$$(۴) \quad G(y) = \int f(x) dx + C = F(x) + C,$$

که در آن  $F(x) = \int f(x) dx$  یک پادمشتق ثابت  $f(x)$  بوده، و  $C$  ثابت دلخواه انتگرالگیری است. توجه کنید که اگر  $g(y) \equiv 1$ ، می‌توان  $G(y) = y$  را اختیار کرد. در این صورت، معادلهٔ دیفرانسیل (۱) به  $y' = f(x)$ ، و معادلهٔ (۴) به فرمول (۶)، صفحهٔ ۴۲۰، برای جواب عمومی  $y' = f(x)$  تحویل می‌شود.

جداسازی متغیرها. به صورت دیگر، با ضرب طرفین (۱) در  $g(y) dx$  و تعبیر  $dy/dx$  به صورت خارج قسمت دیفرانسیلها، معادلهٔ زیر به دست می‌آید:

$$(۱') \quad g(y) dy = f(x) dx,$$

که در آن طرف چپ فقط شامل متغیر  $y$  و طرف راست فقط شامل متغیر  $x$  می‌باشد. بدین هنی است که متغیرها هم در (۱') و هم در معادلهٔ دیفرانسیل اصلی (۱) از هم جدا شده‌اند، و فرایندی که ما را از (۱) به (۱') می‌برد جداسازی متغیرها نام دارد. حال اگر از طرفین (۱') انتگرال بگیریم، به دست می‌آوریم

$$\int g(y) dy = \int f(x) dx + C,$$

که چیزی جز نوشتن (۴) به صورتی دیگر نیست. در نگاه اول به نظر می‌رسد که در این استدلال از قاعدهٔ زنجیره‌ای دوری می‌شود، ولی واقعا "این طور نیست، زیرا  $y = y(x)$  متغیر وابسته بوده و دیفرانسیل آن  $dy = y'(x) dx$  می‌باشد.

توجه کنید که معادلهٔ (۴) به صورتی که هست تابع  $y = y(x)$  را به طور ضمنی تعریف می‌کند، ولی در بسیاری از حالات می‌توان به آسانی (۴) را نسبت به  $y$  و به صورت تابع صریحی از  $x$  حل کرد. در هر حالت، معادلهٔ (۴)، یا معادلهٔ حاصل از (۴) با حل



نسبت به  $y$  ، جواب عمومی معادله دیفرانسیل (۱) نامیده می شود . جواب عمومی شامل ثابت دلخواه انتگرالگیری  $C$  بوده ، و برای یافتن جواب خصوصی (۱) صادق در شرط اولیه

$$(۵) \quad y(x_0) = y_0$$

باید ثابت  $C$  را تعیین کنیم . با گذاردن  $x = x_0, y = y_0$  در (۴) و حل معادله حاصل نسبت به  $C$  ، فوراً معلوم می شود که

$$C = G(y_0) - F(x_0).$$

این جواب خصوصی منحصر به فرد است . در واقع ، هرگاه  $y$  در معادله دیفرانسیل (۱) و شرط اولیه (۵) صدق کند ، آنگاه ، همانطور که با جانشانی  $C$  در (۴) دیدیم ،  $G(y) = F(x) + G(y_0) - F(x_0)$  . اما ، طبق فرض :  $dG(y)/dy = g(y)$  . در نتیجه ،  $G(y)$  یکنوا لذا یک به یک است . پس فقط یک جواب از (۱) وجود دارد که در (۵) صدق می کند و آن عبارت است از  $y = G^{-1}(F(x) + G(y_0) - F(x_0))$  ، که در آن  $G^{-1}$  تابع معکوس  $G$  می باشد .

مثال ۱ . جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

$$(۶) \quad \frac{dy}{dx} = 2xy$$

صادق در شرط اولیه

$$(۶') \quad y(0) = 3$$

را بیابید .

حل . با این فرض که  $y$  هیچگاه صفر نیست ، طرفین (۶) را در  $dx/y$  ضرب می کنیم . از این معادله

$$\frac{dy}{y} = 2x dx$$

نتیجه می شود ، که در آن متغیرها از هم جدا شده اند . سپس با انتگرالگیری به دست می آوریم

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x dx + k,$$

در نتیجه ،

$$\ln |y| = x^2 + k.$$

در اینجا ثابت دلخواه انتگرالگیری را با  $k$  نشان می دهیم و  $C$  را برای کارهای بعدی ذخیره

می‌کنیم. با گرفتن نمایی از طرفین معادلهٔ اخیر، معلوم می‌شود که

$$(۷) \quad |y| = e^{x^2+k} = e^k e^{x^2} = C e^{x^2},$$

که در اینجا  $C = e^k$  ثابت مثبت دلخواه است (چرا؟). تابع  $y = y(x)$  پیوسته است (زیرا مشتق‌پذیر است) و هرگز صفر نیست. بنابراین،  $y$  به‌ازای جمیع  $x$  هامتحدالعلامه است، که اگر باید (۶) برقرار باشد، مثبت می‌باشد. لذا،  $|y| = y$  و (۷) به صورت

$$y = C e^{x^2}$$

در می‌آید. با گذاردن  $x = 0$  و  $y = 3$  در این فرمول فوراً خواهیم داشت  $C = 3$ . از اینرو جواب خصوصی مطلوب معادلهٔ (۶) خواهد بود  $y = 3e^{x^2}$ .

تبصره. فرمول  $y = C e^{x^2}$  در صورتی جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل (۶) است که شرط مثبت بودن  $C$  را لغو کرده و اجازه دهیم  $C$  هر مقدار، مثبت، منفی، یا صفر، به خود بگیرد. در واقع، چون  $e^{-x^2}$  ناصفر بوده و

$$\frac{d}{dx}(y e^{-x^2}) = \left(\frac{dy}{dx} - 2xy\right)e^{-x^2},$$

رابطهٔ (۶) برقرار است اگر و فقط اگر مشتق  $y e^{-x^2}$  صفر باشد؛ یعنی، اگر و فقط اگر  $y e^{-x^2} = C$ ، یا معادلاً " $y = C e^{x^2}$ " که در آن  $C$  یک ثابت دلخواه است.

رشد و تحلیل نمایی. حال آماده‌ایم مسائل رشد و تحلیل نمایی را حل کنیم. فرض کنیم بستگی یک متغیر، مثلاً " $y$ "، به متغیر دیگر، مثلاً " $t$ " (نوعاً زمان)، با فرمول

$$(۸) \quad y = y_0 e^{rt}$$

داده شده باشد، که در آن  $y_0 > 0$  و  $r$  ثابت باشند. در این صورت، میزان تغییر  $y = y(t)$  نسبت به زمان  $t$  عبارت است از مشتق

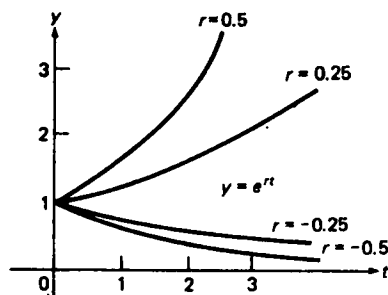
$$\frac{dy}{dt} = y_0 r e^{rt}.$$

لذا،  $y$  در معادلهٔ دیفرانسیل سادهٔ

$$(۹) \quad \frac{dy}{dt} = ry$$

صدق می‌کند؛ یعنی، میزان تغییر متغیر  $y$  با مقدار  $y$  متناسب می‌باشد. اگر  $r$  مثبت باشد، تابع (۸) یک تابع صعودی از  $t$  است، زیرا در این صورت به‌ازای هر  $t$ ،  $dy/dt = y_0 r e^{rt} > 0$ .

و گوییم  $y$  به طور نمایی با  $t$  رشد می‌کند، یا  $y$  یک تابع به طور نمایی صعودی از  $t$  است. از آن سو، اگر  $r$  منفی باشد، رابطه (۸) یک تابع نزولی از  $t$  است، زیرا در این صورت به ازای هر  $t$ ،  $dy/dt = y_0 r e^{rt} < 0$ ، و گوییم  $y$  به طور نمایی با  $t$  به تحلیل می‌رود (یا افت می‌کند) یا  $y$  یک تابع به طور نمایی نزولی از  $t$  است. در شکل ۱۱ این تفاوت اساسی بین رفتار توابع به طور نمایی صعودی و به طور نمایی نزولی نموده شده است، که در آن



شکل ۱۱

نمودار تابع  $e^{rt}$  به ازای  $r = \pm 0.25, \pm 0.5$  بر بازه  $0 \leq t < \infty$  در یک دستگاه مختصات قائم رسم شده است. اگر  $r = 0$  چه رخ می‌دهد؟

با قرار دادن  $t = 0$  در "قانون نمایی" (۸) معلوم می‌شود که

$$(9') \quad y(0) = y_0 \quad (y_0 > 0).$$

لذا، ثابت  $y_0$  چیزی جز مقدار اولیه  $y$ ، یعنی مقدار  $y$  در  $t = 0$ ، نیست و می‌بینیم (۸) جواب خصوصی معادله دیفرانسیل (۹) است که در شرط اولیه (۹') صدق می‌کند. این را می‌توان مستقیماً با جداسازی متغیرها نیز نشان داد. (این کار را با استفاده از همان دلایل مثال ۱ ولی با (۹) به جای (۶) و  $\int r dt = rt$  به جای  $\int 2x dx = x^2$  به عنوان تمرین انجام دهید.)

از (۹) نتیجه می‌شود که

$$(10) \quad r = \frac{1}{y} \frac{dy}{dt},$$

یا معادلاً

$$(10') \quad r = \frac{d}{dt} \ln y,$$

یعنی،  $r$  مشتق لگاریتمی  $y$  می‌باشد. لذا،  $r$  میزان تغییر  $y$  نبوده، بلکه میزان تغییر  $y$

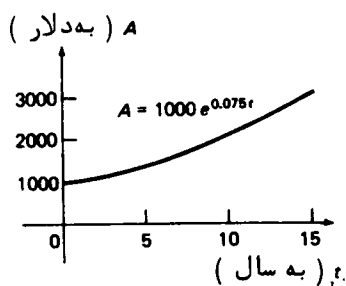
## ۵۳۹ لگاریتمها و نمایها

بخش بر مقدار " جاری "  $y$  می باشد. به عبارت دیگر،  $r$  به جای آنکه میزان رشد " مطلق "  $dy/dt$  باشد، میزان رشد نسبی یا گسری (۱۰) می باشد. علی رغم این تمایز مهم، در مسائلی که ابهام ایجاد نشود،  $r$  را اغلب میزان رشد (یا فقط میزان) می نامند.

مثال ۲. همانطور که در صفحه ۵۳۰ دیدیم، هرگاه سپرده اولیه  $P$  دلار به نرخ سود سالانه  $r$  به طور پیوسته مرکب شود، آنگاه پول موجود پس از  $t$  سال در بانک مساوی است با

$$(11) \quad A = Pe^{rt}$$

دلار. لذا،  $A$  به طور نمایی با زمان رشد می کند، و میزان رشد (نسبی) چیزی جز نرخ سود  $r$  نیست. در شکل ۱۲ نمودار (۱۳) در طی سالهای بسیار به ازای سپرده اولیه  $\$1000$  و نرخ سود  $7.5\%$  رسم شده است.



شکل ۱۲

رشد جمعیت. نظریه رشد نمایی کاربردهای مهمی در مبحث زیست شناسی جمعیتی دارد. فرض کنیم  $N = N(t)$  اندازه جمعیتی از ارگانیسمهای زنده (باکتریها، حشرات مردم، و غیره) در لحظه  $t$  باشد. اگرچه  $N$  را تابع پیوسته ای می گیریم، ولی مقادیر  $N$  فقط می توانند اعداد صحیح باشند. چون  $N$  نوعا " بسیار بزرگ است، خطای حاصل از این تقریب قابل چشم پوشی است. فرض کنیم جمعیت به میزان رشد نسبی  $r$  به طور نمایی رشد نماید. در این صورت،

$$(12) \quad N = N(t) = N_0 e^{rt},$$

که در آن  $N_0$  اندازه جمعیت در لحظه  $t = 0$  است. البته، تابع  $N$  چیزی جز جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

$$(13) \quad \frac{dN}{dt} = rN$$

صادق در شرط اولیه

$$(۱۳) \quad N(0) = N_0$$

نیست.

معادله دیفرانسیل (۱۳) می‌گوید که میزان تغییر اندازه جمعیت در هر لحظه با اندازه جمعیت در آن لحظه متناسب است. این دست کم در شرایط عادی و برای دوره‌های محدودی از زمان موجه است. در واقع، از یک سو داریم

$$(۱۴) \quad \frac{dN}{dt} = B - D,$$

که در آن  $B$  و  $D$  به ترتیب میزانهای تولد و مرگ (مطلق) می‌باشند. از آن سو، هر دوی  $B$  و  $D$  اغلب با اندازه جمعیت متناسباند (تعداد زایشگاهها و قبرستانها در شهرهای بزرگ بیشتر از شهرهای کوچک می‌باشد)، و در این صورت  $B - D$  نیز با  $N$  متناسب است. از مقایسه (۱۳) و (۱۴) معلوم می‌شود که

$$r = \frac{B - D}{N}.$$

به عبارت دیگر، میزان نسبی رشد جمعیت مساوی مازاد سرانه میزان تولد بر میزان مرگ است.

زمان مضاعف سازی، یک جمعیت که دارای رشد نمایی به میزان  $r$  است اندازه‌اش در هر دوره از زمان به طول

$$(۱۵) \quad T = \frac{\ln 2}{r}$$

دوبرابر می‌شود ( $\ln 2 \approx 0.6931$ )، و به این دلیل  $T$  را زمان مضاعف سازی جمعیت می‌نامیم. در واقع، از (۱۲) نتیجه می‌شود که

$$N(t + T) = N_0 e^{r(t+T)} = N_0 e^{rt} e^{rT} = e^{rT} N(t).$$

لذا، به ازای هر  $t \geq 0$ ، اگر  $N(t + T) = 2N(t)$ ، اگر و فقط اگر

$$e^{rT} = 2,$$

که با (۱۵) معادل است.

در مسائل میزانهای رشد سالانه،  $r$  معمولاً "به صورت درصد در سال بیان می‌شود. در این صورت، فرمول (۱۵) به تقریب

$$(۱۵') \quad T = \frac{100 \ln 2}{r} \approx \text{سال } \frac{69}{r}$$

برای زمان مضاعف سازی میل می کند. مثلاً، اگر میزان رشد سالانه ثابت و برابر 3% باشد، جمعیت یک کشور حدوداً  $23 = 69/3$  سال دوبرابر می شود، پول موجود در بانک با نرخ سود سالانه 7.5% و به طور پیوسته مرکب حدوداً  $9.2 = 69/7.5$  سال دوبرابر می شود (ر.ک. شکل ۱۲)، و از این قبیل.

مثال ۳. یک نوع باکتری که زیاد روی آن مطالعه شده و معمولاً در جهاز هاضمه انسان زندگی می کند یک ارگانیسم تک سلولی است به نام *شریچیا کولی*<sup>۱</sup> (مختصراً "ای کولی"). تحت شرایط ایده آل، یک سلول ای کولی به جرم تقریباً  $5 \times 10^{-13}$  گرم، حدود 20 دقیقه پس از "تولد" تحت انشقاق دویی، یعنی تقسیم به دو سلول، به طور غیرجنسی تکثیر می شود. چقدر طول می کشد تا یکی از این باکتریها کشتی به جرم 3 گرم تولید کند مشروط بر اینکه تکثیر با همین میزان ادامه یابد.

حل. در اینجا طبیعی است به جای تعداد سلولها در کشت از جرم کشت صحبت کنیم. پس از  $t$  دقیقه رشد، جرم کشت به گرم عبارت است از

$$m = m(t) = m_0 e^{rt},$$

که در آن  $m_0$  جرم اولیه آن است، که مساوی  $5 \times 10^{-13}$  g است، و  $r$  میزان رشد می باشد. فرض کنیم  $t_1$  زمان لازم برای رسیدن وزن کشت به 3 g باشد. در این صورت،

$$m_0 e^{rt_1} = 3,$$

یا معادلاً

$$t_1 = \frac{1}{r} \ln \frac{3}{m_0}.$$

بعلاوه، چون  $T = 20 \text{ min}$ ، فرمول (۱۵) ایجاب می کند که

$$r = \frac{\ln 2}{20}.$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{20}{\ln 2} \ln \frac{3}{m_0} = \frac{20}{\ln 2} \ln \frac{3}{5 \times 10^{-13}} = \frac{20}{\ln 2} \ln (6 \times 10^{12}) \\ &= 20 \frac{\ln 6 + 12 \ln 10}{\ln 2} \approx 849 \text{ min} = 14.15 \text{ hr.} \end{aligned}$$

تحلیل رادیواکتیو. حال به مسائل تحلیل نمایی می پردازیم ، که تحلیل رادیواکتیو نمونه بارز آن است. فرض کنیم  $m = m(t)$  جرم یک ماده رادیواکتیو، مانند رادیم، در لحظه  $t$  باشد. در این صورت، وقتی ماده به خاطر ناپایداری هسته اتمهای سازای آن تجزیه شود، میزان از بین رفتن جرم آن در هر لحظه با جرم باقیمانده ماده متناسب است. لذا،  $m$ ، در معادله دیفرانسیل زیر صدق می کند:

$$\frac{dm}{dt} = rm,$$

که در آن  $r$  ثابت است. چون  $r$  منفی است (جرم ناپدید می شود)، می نویسیم  $r = -k$  که در آن  $k$  عدد مثبتی است به نام ثابت تحلیل. بنابراین، برای یافتن تابع  $m = m(t)$  باید معادله دیفرانسیل

$$\frac{dm}{dt} = -km,$$

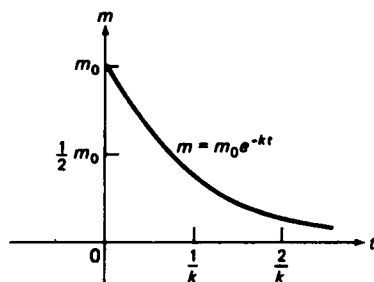
را با شرط اولیه

$$m(0) = m_0$$

حل کنیم، که در آن  $m_0$  جرم ماده در لحظه  $t = 0$  است. با جداسازی متغیرها (یا صرفاً "با امتحان") معلوم می شود که

$$m = m(t) = m_0 e^{-kt} \quad (۱۶)$$

جواب این مسئله مقدار اولیه است. لذا، جرم ماده رادیواکتیو به طور نمایی و به میزانی که با ثابت  $k$  تعیین می شود به تحلیل می رود (هر قدر  $k$  بزرگتر باشد، تحلیل سریعتر است). در شکل ۱۳ تابع (۱۶) رسم شده است، که در آن  $t$  با واحدهای  $1/k$  سنجیده می شود.



شکل ۱۳

نیمه عمر. یک ماده رادیواکتیو، با ثابت تحلیل  $k$ ، نصف جرم خود را در هر دوره از

زمان به طول

$$(۱۷) \quad T = \frac{\ln 2}{k}$$

از دست می‌دهد، و به این دلیل  $T$  (که اغلب به صورت  $T_{1/2}$  نوشته می‌شود) نیمه عمر ماده نام دارد. در واقع، از (۱۶) نتیجه می‌شود که

$$m(t + T) = m_0 e^{-k(t+T)} = m_0 e^{-kt} e^{-kT} = e^{-kT} m(t).$$

لذا، به ازای هر  $t \geq 0$ ،  $m(t + T) = \frac{1}{2} m(t)$  اگر و فقط اگر

$$e^{-kT} = \frac{1}{2},$$

که با (۱۷) معادل است. به تشابه کامل بین فرمول (۱۷) برای نیمه عمر و فرمول (۱۵) برای زمان مضاعف سازی توجه نمایید.

مثال ۴. چقدر طول می‌کشد تا ۹۹٪ از نمونه‌ای از استرونتیوم ۹۰ ناپدید شود؟ نیمه عمر استرونتیوم ۹۰، که مادهٔ رادیواکتیو خطرناکی است، ۲۸.۱ سال می‌باشد.

حل. ناپدید شدن ۹۹٪ از نمونه یعنی جرم اولیهٔ  $m_0$  به  $\frac{1}{100} m_0$  تحلیل رفته است. بنابراین، اگر  $t_1$  زمان لازم برای تحلیل ۹۹٪ از نمونه باشد، داریم

$$m_0 e^{-kt_1} = \frac{1}{100} m_0,$$

یا معادلاً

$$t_1 = \frac{\ln 100}{k}.$$

اما، طبق فرمول (۱۷)،

$$k = \frac{\ln 2}{28.1},$$

و در نتیجه،

$$t_1 = 28.1 \frac{\ln 100}{\ln 2} \approx 186.7 \text{ سال}$$

مسائل

مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده شده را با جداسازی متغیرها حل کنید.



$$x \frac{dy}{dx} + y = 0, y(2) = 1 \quad . 1$$

$$x \frac{dy}{dx} = y^2 + 1, y(-1) = 1 \quad . 2$$

$$2xy \frac{dy}{dx} + y^2 + 1 = 0, y(1) = 2 \quad . 3$$

$$x^3 \frac{dy}{dx} = 2y, y(\sqrt{\log_2 e}) = 3 \quad . 4$$

$$(x^2 + x) \frac{dy}{dx} = 2y + 1, y(1) = 0 \quad . 5$$

$$(e^x + 1)y \frac{dy}{dx} = e^x, y(0) = 1 \quad . 6$$

$$(x^2 + 1) \frac{dy}{dx} + y^2 + 1 = 0, y(3) = 2 \quad . 7$$

$$x \frac{dy}{dx} + y \ln y = 0, y(1) = e \quad . 8$$

۹. یک منحنی از نقطه  $(0, 2)$  گذشته و دارای این خاصیت است که شیب آن در هر نقطه

$P$  سه برابر عرض  $P$  است. این منحنی چیست؟

۱۰. یک منحنی دارای این خاصیت است که قائم به آن در هر نقطه از نقطه ثابت  $A$

می‌گذرد. نشان دهید که منحنی دایره‌ای به مرکز  $A$  (یا قوسی از این دایره) است.

۱۱. فرض کنید شعاع  $R$  یک بالون به میزان  $2.5\%$  بر دقیقه به طور نمایی افزایش یابد. مساحت

سطح  $S$  بالون چه رفتاری دارد؟

۱۲. یک جمعیت که رشد نمایی دارد اندازه‌اش در ۵۰ سال دو برابر می‌شود. میزان رشد

سالانه آن چقدر است؟

۱۳. نشان دهید هرگاه  $T$  زمان مضاعف‌سازی یک جمعیت با رشد نمایی و اندازه  $N$  باشد، آنگاه

$$N = N_0 2^{t/T}$$

که در آن  $N_0$  اندازه اولیه جمعیت است.

۱۴. یک جمعیت با رشد نمایی ظرف ۵ سال  $20\%$  افزایش می‌یابد. زمان مضاعف‌سازی چقدر

است؟

۱۵. جمعیت جهان که در سال ۱۹۸۰، ۴.۵ بلیون بوده به میزانی حدود  $1.8\%$  در سال

به طور نمایی رشد می‌کند. اگر رشد با همین میزان ادامه یابد، جمعیت جهان را در

سال 2010 تخمین بزنید .

۱۶. فرض کنید مصرف کل به میزان ۴٪ در سال به طور نمایی رشد داشته باشد ، در حالی که جمعیت به میزان ۵٪ در سال به طور نمایی رشد می کند . مصرف سرانه چه رفتاری دارد ؟

۱۷. تعداد باکتریهای یک کشت در هر ۱۵ دقیقه دو برابر می شود . چقدر طول می کشد تا 500 باکتری یک میلیون شود ؟

۱۸. تعداد باکتریهای یک کشت در لحظه  $t$  مساوی است با  $N = 1500(2^{2.5t})$  ، که در آن  $t$  به ساعت است . زمان بین انشقاقهای متوالی باکتریها چقدر است ؟

۱۹. یک کشت شامل دو نوع باکتری است ، نوع  $A$  و نوع  $B$  . باکتریهای نوع  $A$  (با انشقاق دویی ) در هر ساعت تکثیر می شوند ، حال آنکه باکتریهای نوع  $B$  هر ۲ ساعت تکثیر می گردند . پس از ۲ ساعت کشت شامل 3.5 برابر تعداد اولیه باکتریهاست . ترکیب اولیه کشت را بیابید . کشت پس از ۴ ساعت چه رشدی یافته است ؟

۲۰. قدرت خرید دلار را پس از ده سال تورم به میزان ۸٪ در سال بیابید . با ۱۲٪ در سال چقدر است ؟ ( تورم را نمایی بگیرید . )

۲۱. بهای نان در سال ۱۹۳۶ دانه ای ۱۰¢ و در ۱۹۸۶ دانه ای \$1.35 بوده است . میزان تورم سالان را در این دوره ۵۰ سال تخمین بزنید .

۲۲. چقدر طول می کشد تا یک نمونه از پلوتونیم 239 ، ۹۰٪ رادیواکتیو خود را از دست بدهد ؟ ( نیمه عمر پلوتونیم 239 تولید شده در راکتورهای هسته ای از نوع "تکثیرکن" 24,360 سال است . )

۲۳. یکدهم یک ماده رادیواکتیو طی ۲۰ سال ناپدید می شود . نیمه عمر ماده چقدر است ؟

۲۴. اگر ۳۰٪ یک ماده رادیواکتیو ظرف ۱۰ روز ناپدید شود ، چقدر طول می کشد تا ۶۰٪ آن ناپدید گردد ؟

۲۵. فرض کنید  $C = C(t)$  غلظت یک داروی خوردنی در خون باشد . همین طور که بدن اثر دارو را از بین می برد ،  $C$  به میزانی متناسب با مقدار آن در هر لحظه کاهش می یابد . یعنی ،

$$\frac{dC}{dt} = -kC \quad (k > 0),$$

که در آن عدد  $k$  به ثابت حذف دارو معروف است . اگر غلظت اولیه  $C_0$  باشد ، غلظت آن در لحظه  $t$  چقدر است ؟ اگر حذف نیمی از دارو ۳۶ ساعت طول بکشد ، چقدر طول می کشد تا بدن ۹۵٪ دارو را حذف نماید ؟

۲۶. داروهای رادیواکتیو اغلب به عنوان "ردیاب" در تشخیصهای طبی به کار می‌روند. فرض کنید به بیماری یک خوراک ردیاب رادیواکتیو با نیمه عمر 8 روز داده باشیم، و نصف دارو طی 2 روز توسط متابولیسم بدن حذف شود (متابولیسم مستلزم فرایندهای بیوشیمی بوده و ربطی به رادیواکتیو که در رابطه با فرایندهای هسته‌ای است ندارد). چقدر طول می‌کشد تا رادیواکتیو بدن بیمار تا 1% مقدار اولیه افت کند؟ این کار در صورت عدم حذف توسط متابولیسم چقدر طول خواهد کشید؟

۲۷. مقدار متوسط رادیم پوسته زمین تقریباً 1 اتم در  $10^{12}$  است. آیا این فرض که رادیم فعلی از رادیم بیشتری در گذشته به جا مانده معقول است؟ جواب خود را توضیح دهید. (نیمه عمر رادیم 1620 سال است.)

کربن 14 رادیواکتیو (رادیو کربن) با نیمه عمر 5730 سال به وسیله عمل اشعه کیهانی روی ازت در طبقات بالای جو مرتب تولید می‌شود. رادیو کربن، در ترکیب با دی اکسید کربن، با طبقات پایین جو مخلوط شده و ابتدا توسط گیاهان در طول فتوسنتز و سپس توسط جانورانی که گیاهان را می‌خورند جذب می‌شود. گیاهان و جانوران تا وقتی زنده‌اند رادیو کربن تازه دریافت می‌کنند، ولی وقتی مردند فرایند متوقف شده و رادیو کربن موجود در نسوج آنها به کندی تجزیه شده و طی 5730 به نصف مقدار اصلی می‌رسد. این امر ما را به روشی به نام تاریخ‌گذاری رادیو کربن می‌رساند که در باستان‌شناسی برای تخمین سن اشیاء عتیقه بسیار مهم است. مثلاً، سن یک نقره از دوران مومیایی را می‌توان از مقایسه مقدار رادیواکتیو نقره با رادیواکتیو موجود در یک قطعه چوب تازه از همان نوع و اندازه مقایسه کرد. با همین روش بود که سن طومارهای دریای مرده حدود 2000 سال تخمین زده شد.

۲۸. فرض کنید یک شمارشگر گایگر<sup>۱</sup> از یک نمونه کربن‌دار به سن مجهول  $x$  در یک دوره از زمان  $m$  تحلیل را نشان دهد، و در همین دوره از زمان در یک نمونه فعلی مشابه  $n$  تحلیل را نشان دهد ( $n > m$ ). نشان دهید که

$$(یک) \quad \alpha = \frac{5730}{\ln 2} \ln \frac{n}{m} \text{ سال}$$

۲۹. مغز یک درخت عظیم کاج حدوداً 75% رادیواکتیو چوب خارجی جوانتر را دارد. سن درخت را تخمین بزنید.

۳۰. ذغال چوب و استخوان جانوران به دست آمده از یک خرابه ماقبل تاریخ دارای 55%

۵۴۷ لگاریتمها و نمایها

رادیواکتیو نمونه‌های معاصر مشابه است. سن خرابه را تخمین بزنید.  
فرض کنیم در تحلیل هر اتم ماده<sup>۱</sup> رادیواکتیو A با ثابت تحلیل a یک اتم از ماده<sup>۲</sup> رادیو اکتیو جدید B با ثابت تحلیل b (b ≠ a) تولید می‌شود. همچنین، m<sub>A</sub> = m<sub>A</sub>(t) جرم ماده<sup>۱</sup> A و m<sub>B</sub> = m<sub>B</sub>(t) جرم ماده<sup>۲</sup> B در لحظه t باشد. در این صورت، چون از بین رفتن A به ایجاد B منجر می‌شود، این فرایند تحلیل با دو معادله<sup>۳</sup> دیفرانسیل زیر توصیف می‌شود:

$$\frac{dm_A}{dt} = -am_A,$$

$$\frac{dm_B}{dt} = am_A - bm_B.$$

۳۱. معادله<sup>۴</sup> اول را تحت شرط اولیه<sup>۵</sup> m<sub>A</sub>(0) = m<sub>0</sub> نسبت به m<sub>A</sub> حل کنید، که m<sub>0</sub> جرم اولیه<sup>۶</sup> ماده<sup>۱</sup> A است، و m<sub>A</sub> را از معادله<sup>۷</sup> دوم حذف نمایید. سپس معادله<sup>۸</sup> دیفرانسیل حاصل نسبت به m<sub>B</sub> را در m<sub>B</sub> ضرب و آن را تحت شرط اولیه<sup>۹</sup> m<sub>B</sub>(0) = 0 حل کنید (هیچ B ای در آغاز وجود ندارد).

۳۲. نشان دهید که بزرگترین مقدار m<sub>B</sub> مساوی m<sub>0</sub>(b/a)<sup>b/(a-b)</sup> است که در لحظه<sup>۱۰</sup>

$$t = \frac{1}{a-b} \ln \frac{a}{b}$$

گرفته می‌شود.

۳۳. اگر نیمه‌عمر A مساوی 100 سال و نیمه‌عمر B مساوی 150 سال بوده و نمونه‌ای که ابتدا تمام A بوده اینک شامل A و B به میزان مساوی باشد، نمونه چند سال سن دارد؟ بزرگترین مقدار m<sub>B</sub> چقدر است و چه وقت رخ می‌دهد؟

۳۴. نشان دهید هرگاه نیمه‌عمر A از نیمه‌عمر B کمتر باشد، آنگاه وقتی t → ∞، m<sub>B</sub>/m<sub>A</sub> → ∞؛ در نتیجه، نمونه‌ای که ابتدا تمام A است بالاخره تقریباً<sup>۱۱</sup> تمام B می‌شود. اگر نیمه عمر A بیشتر از نیمه‌عمر B باشد، چه رخ می‌دهد؟

۷.۶ چند کاربرد دیگر نمایها

رشد لژیستیک (اختیاری). در بخش اخیر دیدیم که معادله<sup>۱۲</sup> دیفرانسیل

$$(1) \quad \frac{dN}{dt} = rN$$

(r > 0) تحت شرط اولیه<sup>۱۳</sup>

$$(1') \quad N(0) = N_0$$

منجر به رشد جمعیت طبق قانون نمایی

$$(2) \quad N = N(t) = N_0 e^{rt}$$

می‌شود. فرمول (۲) به "انفجار جمعیت" منجر می‌شود، که در آن جمعیت در زمان بسیار کوتاهی به هر سطحی که بخواهیم می‌رسد. مثلاً، "میزان رشد سالانه ۳٪ جمعیت یک کشور پس از ۴۰ سال مضاعف‌سازی، یعنی ۹۲ سال  $4(23)$ ، ۱۶ برابر می‌شود. البته، رشد جمعیت به‌خاطر کمبود غذا، شیوع بیماری‌های واگیردار، عدم باروری به جهت جمعیت بیش از حد، جنگ برای منابع بتدریج کاهش یافته، و غیره، باید کند شود. خواهیم دید که این اثرات "جمعیت بیش از حد" را می‌توان در بسیاری از حالات با معرفی جمله اضافی  $-sN^2$  در طرف راست معادله (۱) به طرز جالبی توصیف کرد، که در آن  $s$  (مانند  $r$ ) ثابت مثبتی می‌باشد. (برای توضیح نحوه پیدایش این جمله، ر.ک. مسئله ۰.۸) در این صورت، معادله دیفرانسیل حاکم بر رشد به جای (۱) خواهد بود

$$(3) \quad \frac{dN}{dt} = rN - sN^2,$$

و تحت همان شرط اولیه (۱') می‌باشد.

برای حل معادله دیفرانسیل (۳)، متغیرها را جدا کرده و انتگرال می‌گیریم. این نتیجه می‌دهد که

$$(4) \quad \int \frac{dN}{rN - sN^2} = \int dt + c = t + c.$$

که در آن  $c$  ثابت انتگرالگیری است. محاسبه انتگرال سمت چپ آسان است. با فرض

$$(5) \quad N_1 = \frac{r}{s},$$

داریم

$$\int \frac{dN}{rN - sN^2} = -\frac{1}{s} \int \frac{dN}{N^2 - \frac{r}{s}N} = -\frac{1}{s} \int \frac{dN}{N(N - N_1)}.$$

پس فرمول (۵)، صفحه ۴۹۹، قابل اعمال است (به ازای  $a = 0, b = -N_1$ )، و به رابطه زیر منجر می‌شود:

$$\int \frac{dN}{rN - sN^2} = \frac{1}{sN_1} \ln \left| \frac{N}{N - N_1} \right| = \frac{1}{r} \ln \left| \frac{N}{N - N_1} \right|.$$

لذا، (۴) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\ln \left| \frac{N}{N - N_1} \right| = rt + k,$$

که در آن  $k = rc$ ، یا

$$\left| \frac{N}{N - N_1} \right| = Ce^{rt},$$

که در آن  $C = e^k$ . با اعمال شرط اولیه  $N(0) = N_0$ ، به دست می‌آوریم

$$C = \left| \frac{N_0}{N_0 - N_1} \right|,$$

در نتیجه،

$$\left| \frac{N}{N - N_1} \right| = \left| \frac{N_0}{N_0 - N_1} \right| e^{rt}.$$

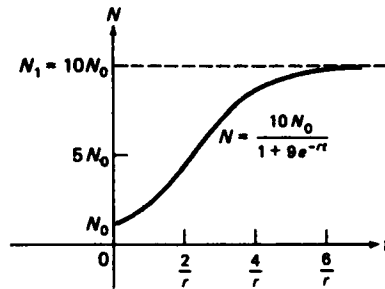
حال می‌توان علایم قدرمطلق را حذف کرد، زیرا  $N$  و  $N_0$  هر دو مثبت بوده و  $N - N_1$  و  $N_0 - N_1 = N(0) - N_1$  متحدالعلامه می‌باشند (در محاسبه انتگرال تلویحا "فرض شده بود که به ازای هر  $t \geq 0$ ،  $N - N_1 \neq 0$ ). با این کار و حل نسبت به  $N$ ، پس از چند عمل سراسرست معلوم می‌شود که

$$N = \frac{N_1 e^{rt}}{e^{rt} + \left( \frac{N_1}{N_0} - 1 \right)},$$

یا معادلا

$$(۶) \quad N = \frac{N_1}{1 + \left( \frac{N_1}{N_0} - 1 \right) e^{-rt}}.$$

با فرض  $N_1 > N_0$  (حالات دیگر در مسائل ۹ و ۱۰ بحث شده‌اند)، می‌بینیم که مخرج تابع  $N = N(t)$  تعریف شده با (۶) مشتق منفی دارد؛ و در نتیجه، یک تابع نزولی است. پس نتیجه می‌شود که  $N$  یک تابع صعودی می‌باشد. با رسم این تابع، منحنی  $S$ -شکل آمده در شکل ۱۴ را در حالت  $N_1 = 10N_0$  به دست می‌آوریم. اکنون رشد جمعیت محدود شده است، زیرا وقتی  $t \rightarrow \infty$ ، نمایی  $e^{-rt}$  به صفر نزدیک می‌شود؛ در نتیجه، (۶) به اندازه حدی یا پایدار جمعیت  $N_1$  نزدیک می‌شود که از فرمول (۵) به دست می‌آید.



شکل ۱۴

توجه کنید که  $N_1$  از اندازه اولیه جمعیت  $N_0$  مستقل است. در واقع،  $N_1$  اندازه جمعیتی است که در آن طرف راست معادله دیفرانسیل (۳) مساوی صفر است؛ یعنی، در آن میزان مرگ با میزان تولد یکی است. اعتبار قانون رشد لژیستیک (۶) با آزمایشات بسیار نه فقط با جمعیت‌های بشری، بلکه با جمعیت‌های آزمایشی از قارچها، تک یاخته‌ها، و مگسها، تأیید شده است. همچنین، از این قانون برای توصیف رشد ارگانیسمهای چندسلولی استفاده شده است.

مثال ۱. یک جمعیت از قانون رشد لژیستیک (۶)، با  $N_1 > 2N_0$ ، تبعیت می‌کند. چه وقت میزان رشد جمعیت ماکزیمم است؟

حل. میزان رشد جمعیت مشتق  $dN/dt$  است که با معادله دیفرانسیل (۳) داده می‌شود. به خاطر (۵) می‌توان (۳) را به شکل

$$(۳') \quad \frac{dN}{dt} = s(NN_1 - N^2) = sP(N)$$

نوشت، که برحسب چندجمله‌ای درجه دوم

$$P(N) = NN_1 - N^2$$

می‌باشد. چون  $s > 0$ ، میزان رشد  $dN/dt$  وقتی ماکزیمم است که  $P(N)$  ماکزیمم باشد. با مشتقگیری از  $P(N)$  نسبت به  $N$ ، معلوم می‌شود که

$$P'(N) = \frac{d}{dN} (NN_1 - N^2) = N_1 - 2N.$$

بنابراین،  $P'(N)$  مثبت است اگر  $N_1/2 < N \leq N_0$ ، صفر است اگر  $N = N_1/2$ ، و منفی

## ۲۵۱) لگاریتمها و نمایها

است اگر  $\frac{1}{2}N_1 < N < N_1$  ( $N$  هرگز به مقدار  $N_1$  نمی‌رسد). از آزمون مشتق اول معلوم می‌شود که  $P(N)$  در  $N = \frac{1}{2}N_1$  ماکزیم موضعی (و مطلق) اکیدی مساوی

$$P\left(\frac{1}{2}N_1\right) = \frac{1}{2}N_1^2 - \frac{1}{4}N_1^2 = \frac{1}{4}N_1^2$$

دارد. اما  $dN/dt = sP(N)$ ؛ و در نتیجه،  $dN/dt$  به عنوان تابعی از  $N$  نیز در  $N = \frac{1}{2}N_1$  ماکزیمی مساوی

$$\left.\frac{dN}{dt}\right|_{N=\frac{1}{2}N_1} = sP\left(\frac{1}{2}N_1\right) = \frac{1}{4}sN_1^2 = \frac{1}{4}rN_1$$

دارد. این ماکزیم در لحظه  $t_1$  که  $N = \frac{1}{2}N_1$  به دست می‌آید، همچنین، بنا بر آزمون یکنوایی،  $P(N)$  بر  $[N_0, \frac{1}{2}N_1]$  صعودی و بر  $(\frac{1}{2}N_1, N_1]$  نزولی است؛ و در نتیجه، همین امر در مورد  $dN/dt$ ، به عنوان تابعی از  $N$ ، درست است. برای یافتن زمان  $t_1$  که در آن  $N = \frac{1}{2}N_1$ ، ملاحظه می‌کنیم که در لحظه  $t_1$  مخرج فرمول (۶) برای  $N$  مساوی ۲ است. بنابراین،

$$1 + \left(\frac{N_1}{N_0} - 1\right)e^{-rt_1} = 2,$$

یا معادلاً"

$$(۷) \quad e^{rt_1} = \frac{N_1}{N_0} - 1.$$

با حل نسبت به  $t_1$  به دست می‌آوریم

$$(۸) \quad t_1 = \frac{1}{r} \ln \left( \frac{N_1}{N_0} - 1 \right).$$

به ازای تابع لژیستیک شکل ۱۴، نظیر به حالت  $N_1 = 10N_0$ ، در می‌یابیم که

$$t_1 = \frac{\ln 9}{r} \approx \frac{2.2}{r}.$$

در این لحظه  $N = 5N_0$  و  $dN/dt$  مقدار ماکزیم خود را دارد، که مساوی  $2.5rN_0$  است.

از رابطه (۷) معلوم می‌شود که (۶) را می‌توان به شکل دیگر نوشت:

$$(۶') \quad N = \frac{N_1}{1 + e^{-r(t-t_1)}}.$$

تابع  $N = N(t)$  دارای نقطه عطف در  $t = t_1$  است (مشروط بر اینکه  $N_1 > 2N_0$ ). در



واقع، همانطور که مثال ۱ نشان داده،  $dN/dt$ ، به عنوان تابع  $N$ ، بر  $[N_0, \frac{1}{2}N_1]$  صعودی و بر  $(\frac{1}{2}N_1, N_1)$  نزولی است. اما  $N$  یک تابع صعودی از  $t$  بر  $[0, \infty)$  بوده، و  $N(t_1) = \frac{1}{2}N_1$  پس نتیجه می شود که  $dN/dt$ ، به عنوان تابعی از  $t$ ، بر  $[0, t_1]$  صعودی و بر  $(t_1, \infty)$  نزولی است. بنابراین، همانطور که شکل ۱۴ در حالت  $N_1 = 10N_0$  نشان می دهد،  $N$  بر  $[0, t_1]$  به بالا و بر  $(t_1, \infty)$  به پایین مقعر بوده و در  $t = t_1$  نقطه عطف دارد.

مثال ۲. مثال ۳، صفحه ۵۴۱، را از دیدگاه واقعی تری بررسی کرده، فرض می کنیم رشد کشت باکتریها به جای نمایی لژیستیک بوده و جرم حدی 3 گرم باشد. چقدر طول می کشد تا جرم کشت کسر  $q$  ( $0 < q < 1$ ) از جرم حدی خود را دارا شود؟

حل. فرض کنیم  $m = m(t)$  جرم کشت پس  $t$  دقیقه از رشد لژیستیک باشد. در این صورت بنابر مشابه فرمول (۶) برای جرم،

$$m = m(t) = \frac{m_1}{1 + \left(\frac{m_1}{m_0} - 1\right)e^{-rt}}$$

که در آن  $m_0 = 5 \times 10^{-13}$  g جرم یک سلول ای کولی بوده و  $m_1 = 3$  g جرم حدی است. هنوز داریم

$$r = \frac{\ln 2}{20},$$

زیرا این میزان رشد نسبی در غیاب هر نوع اثر جمعیت بیش از حد است ( $s = 0$ ). فرض کنیم  $T_q$  زمانی باشد که کشت جرم  $qm_1$  را دارد. در این صورت،

$$m(T_q) = \frac{m_1}{1 + \left(\frac{m_1}{m_0} - 1\right)e^{-rT_q}} = qm_1,$$

در نتیجه،

$$\frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_0}e^{-rT_q}} = q.$$

در اینجا  $1 - (m_1/m_0)$  را با  $m_1/m_0$  عوض کرده ایم بی آنکه حتی آن را یک تقریب بنامیم، زیرا  $m_1/m_0$  بی اندازه بزرگ است ( $6 \times 10^{12}$ ). پس نتیجه می شود که

$$\frac{m_1}{m_0} e^{-rT_q} = \frac{1}{q} - 1,$$

که ایجاب می‌کند که

$$(9) \quad T_q = \frac{1}{r} \ln \left( \frac{m_1}{m_0} \frac{q}{1-q} \right) = \frac{1}{r} \ln \frac{m_1}{m_0} + \frac{1}{r} \ln \frac{q}{1-q}.$$

اولین جمله سمت راست زمان  $t_1$  است که یک کشت با رشد نمایی لازم دارد تا به جرم  $m_1$  برسد، که در صفحه ۵۴۱ معلوم شد که تقریباً  $849 \text{ min}$  است. یک کشت بارش دلزیستیک هرگز نمی‌تواند کاملاً به جرم  $m_1$  برسد. در واقع، در لحظه  $t_1$ ، جرم این کشت صرفاً مساوی است با  $g = 1.5 \text{ g}$ ، و این را می‌توان با فرض  $q = \frac{1}{2}$  در (9)، که  $T_{1/2} = t_1$  را نتیجه می‌دهد، مشاهده کرد. مقادیر نوعی  $T_q$  که از (9) حساب می‌شوند در جدول زیر آمده‌اند. توجه کنید که چگونه به ازای  $q$  ی کوچک، جرم کشت تقریباً در هر 20 دقیقه دو

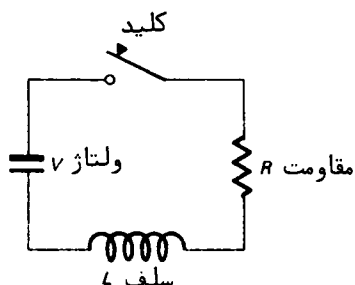
$q$	$T_q$	$q$	$T_q$
0.0005	629.7	0.25	817.3
0.0010	649.7	0.50	849.0
0.0025	676.2	0.75	880.7
0.005	696.2	0.90	912.4
0.010	716.4	0.95	933.9
0.025	743.3	0.99	981.5
0.05	764.0	0.999	1048.2
0.10	785.6	0.9999	1114.7

برابر می‌شود، حال آنکه به ازای  $q$  های بزرگ، جرم کشت در 20 دقیقه تغییر مختصری خواهد داشت.

چند کاربرد فیزیکی نمایها. توابع نمایی در مسائل فیزیکی بسیاری غیر از رادیواکتیویته ظاهر می‌شوند. بخصوص، در مطالعه مدارهای الکتریکی نقش مهمی دارند.

مثال ۳. بارده شدن کلید، منبعی (مثلاً، یک باتری) ولتاژ ثابت  $V$  را در مدار الکتریکی شکل ۱۵ تولید می‌کند، که مرکب است از یک مقاومت به میزان  $R$  اهم که به یک سلف با ضریب القای  $L$  هانری به طور سری وصل شده است. شدت جریان  $i = i(t)$  مدار را بیابید. (با این واحدها،  $i$  به آمپر می‌باشد.)

حل. بنابر نظریه مدارهای الکتریکی، ولتاژ دو سر مقاومت مساوی است با  $Ri$  (قانون اهم)



شکل ۱۵

و ولتاژ دوسر سلف  $L \frac{di}{dt}$  است. به علاوه، مجموع این دو ولتاژ باید مساوی  $V$  باشد. بنابراین، شدت جریان در معادله دیفرانسیل

$$(10) \quad Ri + L \frac{di}{dt} = V,$$

یا معادلا"

$$(11) \quad \frac{di}{dt} = \frac{R}{L} \left( \frac{V}{R} - i \right),$$

تحت شرط اولیه

$$(11') \quad i(0) = 0$$

صدق می‌کند (قبل از زده شدن کلید در لحظه  $t = 0$  جریانی در مدار وجود ندارد). با جداسازی متغیرها در (۱۱) و انتگرالگیری، به دست می‌آوریم

$$\int \frac{di}{(V/R) - i} = \int \frac{R}{L} dt + c,$$

که در آن  $c$  ثابت انتگرالگیری است. پس نتیجه می‌شود که

$$-\ln \left| \frac{V}{R} - i \right| = \frac{R}{L} t + c.$$

چون  $(V/R) - i > 0$  (چرا؟)، می‌توان علامت قدرمطلق را حذف کرده به دست آورد

$$\ln \left( \frac{V}{R} - i \right) = -\frac{R}{L} t - c.$$

بنابراین،

$$\frac{V}{R} - i = ke^{-Rt/L},$$

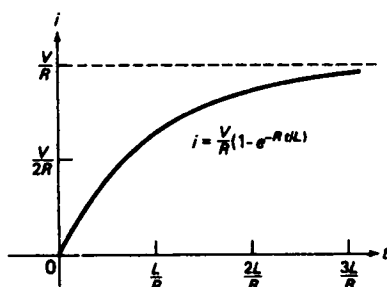
که در آن  $k = e^{-\epsilon}$ ؛ یعنی،

$$i = \frac{V}{R} - ke^{-Rt/L}.$$

با اعمال شرط اولیه (۱۱) فوراً به دست می‌آید  $k = V/R$ . لذا، مآلاً "خواهیم داشت

$$i = \frac{V}{R}(1 - e^{-Rt/L}).$$

در شکل ۱۶ رفتار  $i$  به صورت تابعی از  $t$  نموده شده است. توجه کنید که  $i$  تفاضل



شکل ۱۶

بین دو جمله است، شدت جریان ثابت حالت پایدار

$$i_0 = \frac{V}{R},$$

که جواب (۱۵) در غیاب سلفاست، و شدت جریان گذرای تحلیل به‌طور نمایی

$$i_{tr} = \frac{V}{R} e^{-Rt/L},$$

که به سرعت مستهلک می‌شود. در واقع، در زمان  $T = L/R$ ، به نام ثابت زمانی مدار، تا ۳۷٪ مقدار اولیه‌اش  $\approx 100/e$  افت می‌کند.  $i$  در تمام مقاصد عملی در مدتی تقریباً مساوی  $5T$  به مقدار حالت پایدار می‌رسد (توجه کنید که  $0.993 \approx 1 - e^{-5}$ ).

مثال زیر طرز ظاهر شدن نمایها در مسائل مکانیک را توضیح می‌دهد.

مثال ۴: گلوله‌ای با سرعت اولیه  $v_0$  در محیطی شلیک شده است که با نیرویی متناسب با مجذور سرعت از حرکت آن جلوگیری می‌کند. سرعت  $v$  گلوله را پس از آنکه مسافت  $s$  را در محیط پیمود پیدا کنید.

حل. فرض کنیم  $m$  جرم گلوله باشد. بنابراین قانون دوم حرکت نیوتن،

$$m \frac{dv}{dt} = F,$$

که در آن  $F$  نیروی مقاومت محیط در برابر گلوله است. چون  $F$  با  $v^2$  متناسب است و در جهت مخالف سرعت  $v$  عمل می‌کند، خواهیم داشت  $F = -bv^2$ ، که در آن  $b$  یک ثابت مثبت می‌باشد. بنابراین،

$$m \frac{dv}{dt} = -bv^2,$$

در نتیجه،

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m} v^2 = -kv^2,$$

که در آن  $k = b/m > 0$ . برای بیان  $v$  به عنوان تابعی از  $s$ ، یعنی فاصله نفوذ گلوله در محیط، از قاعده زنجیره‌ای به همان صورت صفحه ۴۲۹ استفاده کرده، می‌نویسیم

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds}.$$

پس از دو معادله اخیر نتیجه می‌شود که

$$v \frac{dv}{ds} = -kv^2,$$

یا معادلا

$$(12) \quad \frac{dv}{ds} = -kv.$$

شرط اولیه مناسب عبارت است از

$$(12') \quad v|_{s=0} = v_0,$$

زیرا گلوله با سرعت  $v_0$  وارد محیط می‌شود. جواب (۱۲) صادق در (۱۲') مساوی است با

$$v = v_0 e^{-ks},$$

که با امتحان یا جداسازی متغیرها به دست آمده است. لذا، سرعت گلوله به‌طور نمایی با فاصله نفوذ  $s$  افت می‌کند. به تشابه کامل ریاضی موجود بین این مسئله و مسئله فیزیکی تحلیل رادیواکتیو توجه نمایید.

### مسائل

- یک جمعیت از حشرات به‌طور لژیستیک و با اندازه اولیه 100 و اندازه حدى 10,100 رشد می‌کند. فرض کنید جمعیت پس از 20 روز رشد به اندازه 5050 برسد.
۱. اندازه جمعیت پس از 25 روز چقدر است؟
  ۲. اندازه جمعیت پس از 30 روز چقدر است؟
  ۳. چقدر طول می‌کشد تا جمعیت به اندازه 10,000 برسد؟
  ۴. زمان مضاعف سازی جمعیت در مراحل اولیه رشد چقدر است؟
- یک کشت باکتری به‌طور لژیستیک با جرم اولیه  $g \cdot 10^{-6}$  و جرم حدى  $m_1$  رشد می‌کند. کشت در 10 ساعت به جرم  $\frac{1}{2}m_1$  و در 12 ساعت به جرم  $\frac{1}{4}m_1$  می‌رسد.
۵. جرم حدى  $m_1$  چقدر است؟
  ۶. چه وقت کشت به 99% جرم حدى خود می‌رسد؟
  ۷. چقدر طول می‌کشد تا یک باکتری انشقاق دویی خود را انجام دهد؟
  ۸. فرض کنید در یک جمعیت  $N$  نفره در حال رشد، هر فرد با ریختن مواد زاید متابولیک یا مواد آلوده‌ساز دیگر در محیط آن را زهرآگین سازد. نشان دهید که اثر ترکیبی این زهر ممکن است میزان رشد  $dN/dt$  را به اندازه‌ای متناسب با  $N^2$ ، یعنی مجذور اندازه جمعیت، کاهش دهد.
- راهنمایی. تعویض  $r$  با  $r - sN$  در معادله (۱) را توجیه کنید.
۹. فرض کنید اندازه اولیه  $N_0$  یک جمعیت تحت تسلط معادله دیفرانسیل (۳) از  $N_1 = r/s$  تجاوز نماید. نشان دهید که اندازه جمعیت تابعی نزولی است که وقتی  $t \rightarrow \infty$ ، به مقدار حدى  $N_1$  نزدیک می‌شود. در اینجا  $N_1$  ظرفیت قابل حمل محیط نام دارد.
  ۱۰. تابع لژیستیک (۶) را به ازای چهار مقدار  $N_1, \frac{1}{2}N_1, \frac{1}{4}N_1, N_0$  در یک دستگاه مختصات رسم کنید. چهار منحنی حاصل چه تفاوتی باهم دارند؟
  ۱۱. معادله دیفرانسیل

$$(یک) \quad \frac{dN}{dt} = sN^2 - rN,$$

که با معادله (۳) در علامت طرف راست فرق دارد، به عنوان مدلی برای مطالعه رشد جمعیت نمونه‌های به خطر افتاده به کار می‌رود. دلایل این است که میزان تولد با تعداد برخوردهای بین نر و ماده‌ها در نمونه‌ها متناسب است، که این خود در صورتی که برخوردها تصادفی بوده و اندازه‌های جمعیت نر و ماده مساوی باشند با  $N^2$

- متناسب است. این با جمله  $sN^2$  حساب می‌شود، و جمله  $-rN$  - نظیر ثابت سرانه میزان مرگ (در غیاب اثرات جمعیت بیش از حد) می‌باشد. نشان دهید که جمعیت با اندازه  $N$  تحت تسلط (یک)، اگر اندازه اولیه  $N_0$  کوچکتر از اندازه جمعیت بحرانی  $N_1 = r/s$  باشد، محکوم به فناست. اگر  $N_0 > N_1$  چه رخ می‌دهد؟
۱۲. معادله (یک) را برای حالت  $N_0 = \frac{1}{2}N_1$  حل کرده، و جواب را رسم نمایید.
۱۳. مسئله مقدار اولیه

$$\frac{dN}{dt} = rN - s, \quad N(0) = N_0 \quad (\text{دو})$$

- ( $r > 0, s > 0$ ) را حل کنید، که در رابطه با رشد نمایی جمعیت با میزان مهاجرت ثابت  $s$  است. چه شرطی بر  $s$  به "انفجار جمعیت" منجر می‌شود؟ جمعیت را در اندازه ثابت نگه می‌دارد؟ به "نابودی جمعیت" منجر می‌شود؟
۱۴. جذب نور توسط آب دریا با قانون نمایی  $I = I_0 e^{-kx}$  توصیف می‌شود، که در آن  $I_0$  شدت نور در سطح دریایوده و  $I = I(x)$  شدت آن در عمق  $x$  است.  $I$  جواب چه مسئله مقدار اولیه است؟ ضریب  $k$ ، به نام ضریب جذب، را در صورتی بیابید که شدت نور در عمق ۵ متر یک‌هزارم شدت نور در سطح دریا باشد. در چه عمقی شدت نور یک‌صد هزارم شدت نور در سطح دریاست؟
۱۵. بنابر قانون تبرید نیوتن، یک جسم در دمای  $T$  به میزانی متناسب با تفاضل بین  $T$  و دمای  $T_1$  هوای اطراف سرد می‌شود؛ یعنی،

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_1) \quad (k > 0).$$

- جواب این معادله دیفرانسیل صادق در شرط اولیه  $T = T_0$  در لحظه  $t = 0$  را بیابید.
۱۶. فرض کنید دمای هوا  $20^\circ$  (سلسیوس<sup>۱</sup>) بوده، و یک جسم گرم شده ظرف ۱۰ دقیقه از  $140^\circ$  به  $80^\circ$  سرد شده است. چه مدت بعد جسم به  $35^\circ$  می‌رسد؟
۱۷. یک دماسنج از اتاقی که دمای  $72^\circ$  (فارنهایت<sup>۲</sup>) دارد به خارج برده شده است. یک دقیقه بعد دماسنج  $56^\circ$  را نشان می‌دهد، و پس از یک دقیقه دیگر  $44^\circ$  را نشان می‌دهد. خارج اتاق چقدر سرد است؟ دماسنج ۵ دقیقه بعد چه درجه‌ای را نشان می‌دهد.

1. Celsius

2. Fahrenheit

۱۸. بشکهای از آب نمک ابتدا شامل 50 lb نمک حل شده در 240 گالن آب است. برای تمیز کردن بشکه آب به میزان 6 گالن بر دقیقه وارد آن شده و محلول با همان میزان خارج می شود و ضمن این محتویات بشکه را مدام هم می زنیم تا محلول یکنواخت داشته باشیم. چقدر طول می کشد تا نمک بشکه به 1 oz برسد؟

۱۹. حرکت یک کشتی در اثر مقاومت آب که با نیرویی متناسب با سرعت کشتی از حرکت ممانعت می کند می شود. فرض کنید سرعت اولیه کشتی (در  $t = 0$ )  $12 \text{ ft/sec}$  بوده، و سرعتش در  $t = 10 \text{ sec}$  مساوی  $8 \text{ ft/sec}$  باشد. چه وقت سرعت کشتی به  $1 \text{ ft/sec}$  افت می کند؟

۲۰. گلوله ای با سرعت  $v_0 \text{ ft/sec}$  یک تخته به ضخامت  $h$  فوت را سوراخ کرده و از آن با سرعت  $v_1 \text{ ft/sec}$  خارج می شود. فرض کنید تخته در مقابل گلوله با نیرویی متناسب با مجذور سرعت گلوله مقاومت کند. نشان دهید که

$$T = \frac{h(v_0 - v_1)}{v_0 v_1 \ln(v_0/v_1)}$$

ثانیه طول می کشد تا گلوله تخته را طی کند.  $T$  را در صورتی بیابید که  $v_0 = 600 \text{ ft/sec}$ ،  $h = 6 \text{ in}$  و  $v_1 = 200 \text{ ft/sec}$ .

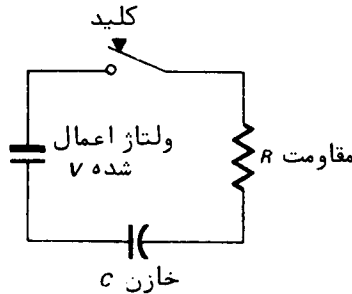
۲۱. حجم، و در نتیجه جرم، یک گلوله نفتالین به میزانی متناسب با مساحت سطح آن کاهش می یابد. فرض کنید یک گلوله نفتالین 8 گرمی در روز اول 1 گرم جرم خود را از دست می دهد. چند روز طول می کشد تا گلوله نصف جرم خود را از دست بدهد؟ به جرم 1 گرم برسد؟ آیا گلوله هرگز ناپدید می شود؟ آیا این مسئله مستلزم نمایه است؟

۲۲. یک باتری 12 ولتی ناگهان به یک مقاومت 20 اهمی و یک سلف 5 هانری به طور سری وصل می شود. چقدر طول می کشد تا شدت جریان به 99% مقدار حالت پایدار خود برسد؟ آیا جواب با کهنه شدن باتری و از دست دادن ولتاژ خود تغییر می کند؟

۲۳. با زدن کلید ولتاژ ثابت  $V$  در مدار الکتریکی شکل ۱۷ برقرار می شود، که مرکب است از یک مقاومت به میزان  $R$  اهم که به طور سری به یک خازن به ظرفیت  $C$  فاراد وصل شده است. بار  $q = q(t)$  روی خازن و شدت جریان  $i = i(t)$  مدار را بیابید. (با این واحدها  $q$  به کولن و  $i$  به آمپر است.) با این مطلب شروع کنید که ولتاژ دوسر خازن  $q/C$  است.

۲۴. یک خازن 5 میکروفاراد را با وصل یک مقاومت 2 مگ اوهم به دوسر آن خالی می کنیم چقدر طول می کشد تا به 10% مقدار اولیه اش افت نماید؟ آیا جواب به بار اولیه





شکل ۱۷

خازن بستگی دارد؟ ( $10^{-6}$  فاراد = ۱ میکروفاراد،  $10^6$  اهم = ۱ مگاوم.)

۲۵. فرض کنید هر عضو جمعیتی متعلق به یکی از دو رده  $A$  و  $B$  بوده، و اعضای رده  $A$  بتوانند اعضای رده  $B$  را "بیمار سازند". مثلاً،  $A$  ممکن است مرکب از افرادی باشد که بیماری خاصی دارند و  $B$  مرکب از افرادی باشد که این بیماری را ندارند، یا  $A$  ممکن است مرکب از افرادی باشد که شایعه‌ای را شنیده‌اند و  $B$  مرکب از افرادی باشد که این شایعه را شنیده‌اند. فرض کنید  $N_A$  اندازه رده  $A$ ،  $N_B$  اندازه رده  $B$ ، و  $N$  اندازه کل جمعیت باشد؛ در نتیجه،  $N_A + N_B = N$ . پس  $N_A$  در اثر تماس بین اعضای دو رده افزایش می‌یابد، و می‌توان انتظار داشت که میزان تغییر  $N_A$  با تعداد این تماس‌ها متناسب است، که این خود با حاصل ضرب  $N_A N_B = N_A(N - N_A)$  متناسب می‌باشد. این امر ما را به معادله دیفرانسیل

$$\frac{dN_A}{dt} = kN_A(N - N_A)$$

می‌رساند، که در آن  $k$  یک ثابت مثبت است، یا معادلاً

$$\frac{dy}{dt} = ky(1 - y),$$

که در آن  $y = N_A/N$  کسری از جمعیت کل است که به رده  $A$  تعلق دارد. این معادله را با شرط اولیه  $y = y_0 < 1$  در لحظه  $t = 0$  حل کرده، و نشان دهید که بیماری یا شایعه مآلاً "به تمام جمعیت گسترش خواهد یافت. زمان  $T$  لازم برای آنکه نیمی از جمعیت بیمار شوند و یا شایعه را بشنوند را با این فرض که  $y_0 < \frac{1}{2}$  بیابید. نقص این مدل در رابطه با مثلاً "شیوع بیماری چیست؟

۲۶. مقدار خاکروبه یا آشغال  $L$  (ماده اورگانیک مرده) در یک واحد فاعله از معادله

دیفرانسیل زیر تبعیت می‌کند:

$$\frac{dL}{dt} = I - kL,$$

که در آن  $I$  میزان ورودی به چینه آشفال بوده و  $k$  میزان ثابت تجزیه آشفال می‌باشد. نشان دهید که، حتی اگر تولید آشفال کم باشد، در صورت کوچک بودن  $k$  مقادیر زیادی آشفال جمع خواهد شد. (مثلاً، در جنگلهای کاج  $k \approx 0.02$ ، که در آنها دماهای پایین از تجزیه متابولیسم جلوگیری کرده و انباشتگی برگهای سوزنی کاج را اجازه می‌دهد.)

#### ۸.۶ توابع هذلولوی

کسینوس و سینوس هذلولوی. حال چند تابع مربوط به نمایی را در نظر می‌گیریم که شایسته نام خاص و مطالعه جداگانه‌اند، زیرا در مسائل مربوط به محاسبه انتگرالها و حل معادلات دیفرانسیل مکرر ظاهر می‌شوند.<sup>۱</sup> دو تا از مهمترین این توابع عبارتند از کسینوس هذلولوی

$$(1) \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

و سینوس هذلولوی

$$(2) \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

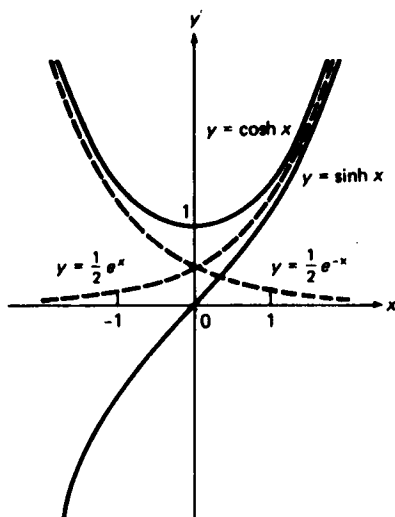
(علامت  $\sinh$  معمولاً "سینه" تلفظ می‌شود). هر دو تابع  $e^x$  و  $e^{-x}$  بر  $(-\infty, \infty)$  پیوسته و مشتقپذیر اند.<sup>۱</sup> و در نتیجه، توابع  $\cosh x$  و  $\sinh x$  نیز چنین‌اند. در شکل ۱۸ نمودار  $\cosh x$  و  $\sinh x$  همراه با نمودارهای  $\frac{1}{2}e^x$  و  $\frac{1}{2}e^{-x}$  برای مقایسه رسم شده‌اند. با افزودن و سپس کاستن مختصات  $y$  منحنیهای  $y = \frac{1}{2}e^x$  و  $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ ، ملاحظه می‌کنیم که  $\cosh x$  به ازای هر  $x$  مثبت است، حال آنکه  $\sinh x$  به ازای  $x > 0$  مثبت و به ازای  $x < 0$  منفی است. به علاوه، با قرار دادن  $x = 0$  در فرمولهای (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که

$$\cosh 0 = 1, \quad \sinh 0 = 0.$$

همچنین، توجه کنید که  $\cosh x$  زوج است، زیرا

---

۱. مثلاً، ر.ک. مثال ۷، صفحه ۱۱۱۳، که در آن با استفاده از این توابع شکل زنجیر آویزان از دو نقطه آویزان به دست می‌آید.



شکل ۱۸

$$\cosh(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x,$$

حال آنکه  $\sinh x$  فرد است، زیرا

$$\sinh(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^x) = -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -\sinh x.$$

مشتقات  $\cosh x$  و  $\sinh x$  به آسانی به دست می‌آیند. در واقع،

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}),$$

یعنی،

$$(۳) \quad \frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x,$$

حال آنکه

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}),$$

یعنی،

$$(۴) \quad \frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x.$$

از (۳) و (۴) نتیجه می شود که

$$(۳) \quad \int \sinh x \, dx = \cosh x + C$$

و

$$(۴) \quad \int \cosh x \, dx = \sinh x + C.$$

چون  $D_x \cosh x = \sinh x$  به ازای  $x > 0$  مثبت، به ازای  $x = 0$  صفر، و به ازای  $x < 0$  منفی است، از آزمون یکنواایی معلوم می شود که  $\cosh x$  بر  $[0, \infty)$  صعودی و بر  $(-\infty, 0]$  نزولی است. از اینرو، تابع  $\cosh x$  ماکزیم ندارد، و مینیمم مطلق خود، که مساوی ۱ است، را در  $x = 0$  می گیرد. به همین نحو، چون به ازای هر  $x$ ،  $D_x \sinh x = \cosh x > 0$ ،  $\sinh x$  بر تمام بازه  $(-\infty, \infty)$  صعودی و بدون اکسترمم می باشد. این خواص  $\sinh x$  و  $\cosh x$  از شکل ۱۸ واضح اند، که شکل همچنین نشان می دهد که

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \cosh x = \infty,$$

حال آنکه

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sinh x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh x = -\infty.$$

لذا، برد  $\cosh x$  مساوی  $[1, \infty)$  است، حال آنکه برد  $\sinh x$  مساوی  $(-\infty, \infty)$  می باشد. لازم است برقراری این فرمولهای حدی با نتیجه گیری مستقیم آنها از تعاریف (۱) و (۲) تحقیق شود.

مثال ۱. از  $\sinh(\cosh x)$  مشتق بگیرید.

حل. با استفاده از (۳) و (۴)، و به کمک قاعده زنجیره ای، داریم

$$\frac{d}{dx} \sinh(\cosh x) = \cosh(\cosh x) \frac{d}{dx} \cosh x = \cosh(\cosh x) \sinh x,$$

مثال ۲.  $\int_0^{\ln 2} \cosh x \, dx$  را محاسبه کنید.

حل. با استفاده از (۴)، معلوم می شود که

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2} \cosh x \, dx &= \sinh(\ln 2) - \sinh 0 = \sinh(\ln 2) \\ &= \frac{1}{2}(e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}) = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

مثال ۳. تقریر  $\cosh x$  و  $\sinh x$  را بررسی کنید.

حل. چون به ازای هر  $x$ ،

$$\frac{d^2}{dx^2} \cosh x = \frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x > 0$$

از آزمون تقریر نتیجه می‌شود که  $\cosh x$  بر  $(-\infty, \infty)$  به بالا مقعر است. به همین نحو، چون

$$\frac{d^2}{dx^2} \sinh x = \frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$$

به ازای  $x > 0$  مثبت، به ازای  $x = 0$  صفر، و به ازای  $x < 0$  منفی است، پس  $\sinh x$  بر  $[0, \infty)$  به بالا مقعر و بر  $(-\infty, 0]$  به پایین مقعر است، و یک نقطهٔ عطف در  $x = 0$  دارد (ر.ک. شکل ۱۸).

اتحادهای هذلولوی. توابع هذلولوی در چند فرمول صدق می‌کنند که با فرمولهای برقرار به وسیلهٔ توابع مثلثاتی تشابه نزدیکی دارند. مهمترین آنها عبارتند از

$$(۵) \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

و

$$(۶) \quad \sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$$

$$(۷) \quad \cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y.$$

این فرمولها را می‌توان با مراجعه به تعاریف (۱) و (۲) به آسانی ثابت کرد. مثلاً،

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \sinh^2 x &= \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 \\ &= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}) = \frac{1}{4}(4) = 1,\end{aligned}$$

که فرمول (۵) را ثابت می‌کند. به همین نحو،

$$\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y}) + \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y}) \\ &= \frac{1}{4}(e^{x+y} - e^{-x+y} + e^{x-y} - e^{-x-y} + e^{x+y} + e^{-x+y} - e^{x-y} - e^{-x-y}) \\ &= \frac{1}{2}(e^{x+y} - e^{-x-y}) = \sinh(x+y), \end{aligned}$$

که (۶) را ثابت می‌کند. برهان (۷) به همین سراسازی است، و آن را به عنوان تمرین می‌گذاریم.

اگر در (۶) و (۷)  $y$  را با  $-y$  عوض کرده، و از زوج بودن کسینوس هذلولوی و فرد بودن سینوس هذلولوی استفاده کنیم، درمی‌یابیم که

$$(۶') \quad \sinh(x-y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y,$$

$$(۷') \quad \cosh(x-y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y.$$

همچنین، از تعویض  $y$  با  $x$  در (۶) و (۷) فرمولهای زیر به دست می‌آیند:

$$(۸) \quad \sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x, \quad \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x.$$

تشابه بین (۶) و فرمول مثلثاتی نظیر

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

کامل است؛ برای تغییر این فرمول به (۶) کافی است  $\sin$  را به  $\sinh$  و  $\cos$  را به  $\cosh$  تغییر دهیم. از آن سو، برای به دست آوردن (۵) و (۷) از فرمولهای مثلثاتی نظیر

$$(۹) \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

و

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

باید علایم جملات شامل حاصل ضربهای سینوسها را تغییر داده و نیز  $\sin$  و  $\cos$  را با  $\sinh$  و  $\cosh$  عوض نماییم. تغییرات مشابه فرمولهای زاویه مضاعف مثلثاتی

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

را به مشابههای هذلولوی (۸) تبدیل می‌کنند.

توابع هذلولوی از جنبه‌ای دیگر نیز شبیه توابع مثلثاتی‌اند. از فرمول (۹) معلوم

می‌شود که نقطه  $P = (\cos \theta, \sin \theta)$  بر دایره  $x^2 + y^2 = 1$

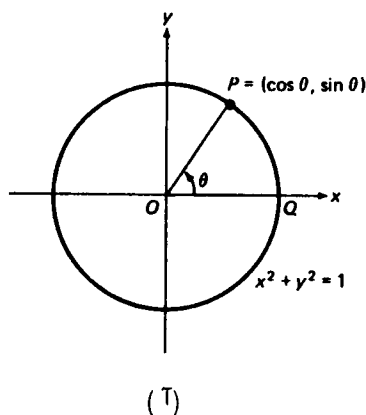
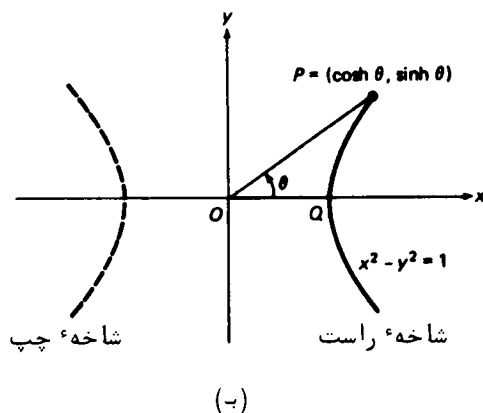
$$x^2 + y^2 = 1$$

قرار دارد [ر.ک. شکل ۱۹ (آ)]. و در واقع،  $\theta$  زاویه بین شعاع  $OP$  و محور  $x$  مثبت است.

هرگاه  $\theta$  بهرادیان بوده و  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ، آنگاه  $\theta$  دو برابر مساحت قطاع مستدیر  $POQ$  است که به شعاع  $OP$ ، محور  $x$ ، و دایره<sup>۱</sup> یکه محدود است (ر.ک. فرمول (۸)، صفحه ۹۰). به همین نحو، از فرمول (۵) معلوم می‌شود که نقطه<sup>۲</sup>  $P = (\cosh \theta, \sinh \theta)$  بر منحنی

$$x^2 - y^2 = 1$$

قرار دارد. این منحنی، که هذلولی<sup>۳</sup> یکه نام دارد، دارای دو قسمت مجزا یا شاخه می‌باشد (ر.ک. شکل ۱۹ (ب))، ولی به‌خاطر شرط  $\cosh \theta > 0$  می‌توان به شاخه<sup>۴</sup> راست محدود



شکل ۱۹

شد. حال طبیعی است که  $\theta$  را در این حالت تعبیر هندسی کنیم، و با کمال تعجب معلوم می‌شود (ر.ک. مسئله ۳۷، صفحه ۶۳۷) که  $\theta$  درست دوبرابر مساحت سایه‌دار<sup>۵</sup> قطاع هذلولوی<sup>۶</sup>  $POQ$  است که به پاره‌خط  $OP$ ، محور  $x$ ، و هذلولی<sup>۷</sup> یکه محدود شده است. این توضیح می‌دهد که چرا  $\sinh x$ ،  $\cosh x$ ، و غیره را توابع هذلولوی می‌نامیم (و ضمناً<sup>۸</sup> چرا  $\sin x$ ،  $\cos x$ ، و غیره گاهی به جای توابع مثلثاتی توابع مستدیر نامیده می‌شوند).

تبصره. البته، تا اینجا فقط تشابه بین توابع مثلثاتی و توابع هذلولوی ذکر شده است. مثلاً<sup>۹</sup>،  $\cosh x$  و  $\sinh x$ ، برخلاف  $\cos x$  و  $\sin x$ ، نه کراندارند نه متناوب.

حال به معرفی چهار تابع دیگر هذلولوی می‌پردازیم؛ یعنی، تانژانت هذلولوی

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

کاتانژانت هذلولوی

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

سگانت هذلولوی

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}},$$

و کسگانت هذلولوی

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}.$$

به تشابه بین این تعاریف و تعاریف نظیر برای توابع مثلثاتی توجه نمایید.

تانژانت هذلولوی. توابع  $\sinh x$  و  $\cosh x$  هر دو بر  $(-\infty, \infty)$  پیوسته و مشتقپذیرند، و  $\cosh x$  هرگز صفر نیست. لذا،  $\tanh x$ ، یعنی خارج قسمت  $\sinh x$  و  $\cosh x$ ، نیز بر  $(-\infty, \infty)$  پیوسته و مشتقپذیر است. همچنین، قبلاً گفتیم که  $\sinh x$  به ازای  $x > 0$  مثبت، به ازای  $x = 0$  صفر، و به ازای  $x < 0$  منفی است؛ و لذا، همین امر برای  $\tanh x$  درست است، زیرا  $\cosh x$  همواره مثبت می‌باشد. مشتق  $\tanh x$  را می‌توان با استفاده از قاعده خارج قسمت به آسانی محاسبه نمود. در واقع، به کمک (۳)، (۴)، و (۵)، داریم

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \tanh x &= \frac{\frac{d}{dx} \sinh x}{\cosh x} = \frac{\frac{d \sinh x}{dx} \cosh x - \sinh x \frac{d \cosh x}{dx}}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}, \end{aligned}$$

در نتیجه،

$$(10) \quad \frac{d}{dx} \tanh x = \operatorname{sech}^2 x.$$

چون  $\operatorname{sech}^2 x$  به ازای هر  $x$  مثبت است، از رابطه (۱۰) معلوم می‌شود که  $\tanh x$  بر  $(-\infty, \infty)$  صعودی است، و بخصوص اکسترم ندارد. به علاوه،

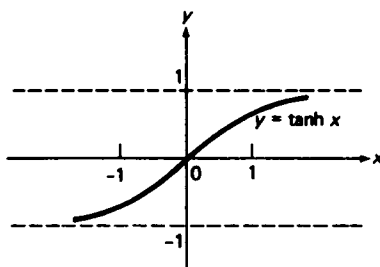
$$\tanh(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = \frac{-\sinh x}{\cosh x} = -\tanh x,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1,$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh x = \lim_{t \rightarrow \infty} \tanh(-t) = -\lim_{t \rightarrow \infty} \tanh t = -1$$

(وقتی  $x \rightarrow \infty$ ،  $e^{-2x} \rightarrow 0$ ) . بنابراین،  $\tanh x$  یک تابع فرد با برد  $(-1, 1)$  است که خطوط  $y = \pm 1$  مجانبهای افقی آن می‌باشند. نمودار  $\tanh x$  در شکل ۲۰ نموده و این ویژگیها مجسم شده است.



شکل ۲۰

مثال ۴.  $\int \tanh x \, dx$  را حساب کنید.

حل. باتوجه به اینکه

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{(\cosh x)'}{\cosh x},$$

فرمول (۳)، صفحه ۴۹۷، را به کار برده و به دست می‌آوریم

$$\int \tanh x \, dx = \ln \cosh x + C.$$

مثال ۵.  $\int_0^{1/2} \operatorname{sech}^2 x \, dx$  را حساب کنید.

حل. از رابطه ۱۰ معلوم می‌شود که  $\tanh x$  یک پادمشتق  $\operatorname{sech}^2 x$  است. بنابراین،

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \operatorname{sech}^2 x \, dx &= \tanh \frac{1}{2} - \tanh 0 = \tanh \frac{1}{2} \\ &= \frac{e^{1/2} - e^{-1/2}}{e^{1/2} + e^{-1/2}} = \frac{e - 1}{e + 1} \approx 0.46. \end{aligned}$$

فرمولهای مشتق توابع هذلولوی عبارتند از

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x,$$

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x,$$

$$\frac{d}{dx} \tanh x = \operatorname{sech}^2 x,$$

$$\frac{d}{dx} \coth x = -\operatorname{csch}^2 x,$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x,$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x.$$

(تشابهات و تفاوت‌های بین این فرمولها و فرمولهای نظیر برای مشتق توابع مثلثاتی را توصیف نمایید.) سه فرمول اول قبلاً ثابت شده‌اند، و برای اثبات سه فرمول دیگر، از قاعدهٔ مشتقگیری از متقابل یک تابع چند بار استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \coth x &= \frac{d}{dx} \frac{1}{\tanh x} = -\frac{1}{\tanh^2 x} \frac{d}{dx} \tanh x = -\frac{1}{\tanh^2 x} \operatorname{sech}^2 x \\ &= -\frac{\cosh^2 x}{\sinh^2 x} \frac{1}{\cosh^2 x} = -\frac{1}{\sinh^2 x} = -\operatorname{csch}^2 x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \operatorname{sech} x &= \frac{d}{dx} \frac{1}{\cosh x} = -\frac{1}{\cosh^2 x} \frac{d}{dx} \cosh x = -\frac{1}{\cosh^2 x} \sinh x \\ &= -\frac{1}{\cosh x} \frac{\sinh x}{\cosh x} = -\operatorname{sech} x \tanh x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \operatorname{csch} x &= \frac{d}{dx} \frac{1}{\sinh x} = -\frac{1}{\sinh^2 x} \frac{d}{dx} \sinh x = -\frac{1}{\sinh^2 x} \cosh x \\ &= -\frac{1}{\sinh x} \frac{\cosh x}{\sinh x} = -\operatorname{csch} x \coth x. \end{aligned}$$

مثال ۶. تفعر  $\tanh x$  را مورد بررسی قرار دهید.

حل. مشتق دوم

$$\frac{d^2}{dx^2} \tanh x = \frac{d}{dx} \operatorname{sech}^2 x = 2 \operatorname{sech} x \frac{d}{dx} \operatorname{sech} x = -2 \operatorname{sech}^2 x \tanh x$$

به ازای  $x < 0$  مثبت، به ازای  $x = 0$  صفر، و به ازای  $x > 0$  منفی است. لذا، طبق آزمون تقعر،  $\tanh x$  بر  $(-\infty, 0]$  به بالا مقعر و بر  $[0, \infty)$  به پایین مقعر است، و در  $x = 0$  نقطه عطف دارد (ر.ک. شکل ۲۰).

توابع  $\coth x$ ،  $\operatorname{sech} x$ ، و  $\operatorname{csch} x$  در مقایسه با  $\sinh x$ ،  $\cosh x$  و  $\tanh x$  از اهمیت کمتری برخوردارند. لذا، بررسی این توابع به مسائل ۳۰ تا ۳۲ محول شده است.

### مسائل

عبارات زیر را بدون استفاده از توابع هذلولوی بیان کنید.

- |   |                                  |
|---|----------------------------------|
| $\cosh x - \sinh x$ . ۲ ✓               | $\cosh x + \sinh x$ . ۱ ✓        |
| $\tanh(\ln 2x)$ . ۴ ✓                   | $\cosh(\ln x)$ . ۳ ✓             |
| $\cosh^2(\ln x) + \sinh^2(\ln x)$ . ۶ ✓ | $\sinh(\frac{1}{2} \ln x)$ . ۵ ✓ |
- نشان دهید که

$$\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2} \quad . ۸ ✓ \qquad \cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2} \quad . ۷ ✓$$

$$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x \quad . ۹ ✓$$

$$1 - \coth^2 x = -\operatorname{csch}^2 x \quad . ۱۰ ✓$$

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y} \quad . ۱۱ ✓$$

مقادیر پنج تابع دیگر هذلولوی را در نقطه  $c$  در صورتی بیابید که

$$\tanh c = \frac{1}{2} \quad . ۱۴ \qquad \sinh c = -1 \quad . ۱۳ \qquad \cosh c = 2 \quad . ۱۲$$

از عبارات زیر مشتق بگیرید.

- |                          |                                       |
|--------------------------|---------------------------------------|
| $\cosh^3 x$ . ۱۶ ✓       | $\sinh^2 x + \cosh^2 x$ . ۱۵ ✓        |
| $\tanh x^2$ . ۱۸ ✓       | $\sqrt{\cosh 2x}$ . ۱۷ ✓              |
| $\coth(\tan x)$ . ۲۰ ✓   | $\ln(\operatorname{sech} x)$ . ۱۹ ✓   |
| $\sinh e^x$ . ۲۲ ✓       | $\operatorname{csch} \sqrt{x}$ . ۲۱ ✓ |
| $\log_2(\cosh x)$ . ۲۴ ✓ | $\tanh(\ln x)$ . ۲۳ ✓                 |
| $3^{\sinh x}$ . ۲۶ ✓     | $e^{\coth x}$ . ۲۵ ✓                  |

۲۷. یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم ساده بیابید که تابع  $y = a \sinh cx + b \cosh cx$

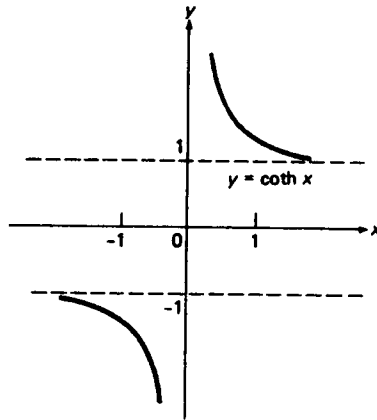
لگاریتمها و نماییها ۵۷۱

به ازای ثابتهای دلخواه  $a$ ،  $b$ ، و  $c$ ، در آن صدق کند. همین کار را برای تابع  $y = a \sin cx + b \cos cx$  انجام دهید.

۲۸. مساحت  $A$  تحت منحنی  $y = \cosh x$  از  $x = \ln 3$  تا  $x = \ln 4$  را بیابید.

۲۹. آیا توابع  $\cosh x$  یا  $\sinh x$  مجانب دارند؟ جواب خود را توضیح دهید.

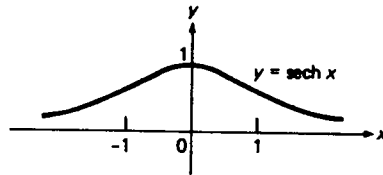
۳۰. نشان دهید که کتانژانت هذلولوی  $\coth x$ ، که در شکل ۲۱ رسم شده است، بر  $(0, \infty)$



شکل ۲۱

مثبت، نزولی، و به بالا مقعر است، و بر  $(-\infty, 0)$  منفی، نزولی، و به پایین مقعر است. نشان دهید که  $\coth x$  یک تابع فرد است با مجانبهای افقی  $y = \pm 1$  و مجانب قائم محور  $y$ . آیا  $\coth x$  اکسترم یا نقطه عطف دارد؟

۳۱. نشان دهید که سکانت هذلولوی  $\operatorname{sech} x$ ، که در شکل ۲۲ نموده شده است، یک تابع



شکل ۲۲

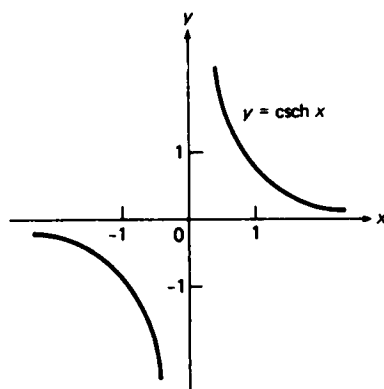
زوج مثبت است که محور  $x$  مجانب افقی آن می باشد. نشان دهید که  $\operatorname{sech} x$  بر

$(-\infty, 0]$  صعودی و بر  $[0, \infty)$  نزولی است، و ماکزیمم مطلق مساوی 1 در  $x = 0$

داشته و مینیمم ندارد. تقعر  $\operatorname{sech} x$  را بررسی کنید. نقاط عطف  $\operatorname{sech} x$  چه هستند؟

۳۲. نشان دهید که کسکانت هذلولوی  $\operatorname{csch} x$ ، که در شکل ۲۳ نموده شده است، بر

$(0, \infty)$  مثبت، نزولی، و به بالا مقعر است، و بر  $(-\infty, 0)$  منفی، نزولی، و به پایین مقعر است. نشان دهید که  $\operatorname{csch} x$  یک تابع فرد است که محور  $x$  مجانب افقی و محور  $y$  مجانب قائم آن است. آیا  $\operatorname{csch} x$  اکسترمم یا نقطه عطف دارد؟



شکل ۲۳

انتگرالهای زیر را حساب کنید.

$$\int \sinh^2 x \, dx \quad .34 \checkmark$$

$$\int \cosh^2 x \, dx \quad .33 \checkmark$$

$$\int \frac{dx}{\sinh x \cosh x} \quad .36 \checkmark$$

$$\int \coth x \, dx \quad .35 \checkmark$$

$$\int \frac{\sinh x}{3 \cosh x + 2} \, dx \quad .38 \checkmark$$

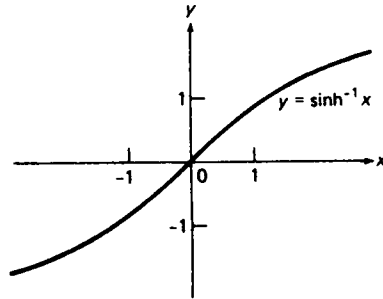
$$\int \operatorname{sech}(\ln x) \, dx \quad .37 \checkmark$$

## ۹.۶ توابع هذلولوی معکوس

حال دو تابع از شش تابع هذلولوی معکوس را بررسی می‌کنیم که بیش از همه با آنها مواجه می‌شویم و این دو عبارتند از سینوس هذلولوی معکوس و تانژانت هذلولوی معکوس. چهار تابع هذلولوی معکوس دیگر در مسائل ۱۱ و ۱۳ تا ۱۵ مطرح خواهند شد.

سینوس هذلولوی معکوس. برای تعریف سینوس هذلولوی معکوس، از روندی استفاده می‌کنیم که قبلاً "در حالت توابع مثلثاتی معکوس به کار بردیم (ر.ک. بخش ۳.۵)". فرض کنیم  $x = \sinh y$ . تابع پیوسته  $\sinh y$  بر بازه  $(-\infty, \infty)$  صعودی و در نتیجه یک به یک است، و این بازه را به‌روزی خودش  $(-\infty, \infty)$  می‌نگارد. بنابراین،  $x = \sinh y$  دارای تابع

معکوس  $y = \sinh^{-1} x$  است، به نام سینوس هذلولوی معکوس، که بر  $(-\infty, \infty)$  پیوسته و صعودی می باشد. نمودار این تابع، که در شکل ۲۴ نموده شده، را می توان از انعکاس نمودار  $\sinh x$  نسبت به خط  $y = x$  به دست آورد.



شکل ۲۴

برای مشتقگیری از سینوس هذلولوی معکوس، می نویسیم  $x = \sinh y$ ،  $y = \sinh^{-1} x$  و قضیه ۴، صفحه ۴۶۰، را به کار برده به دست می آوریم

$$\frac{d}{dx} \sinh^{-1} x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cosh y}.$$

ولی، طبق فرمول (۵)، صفحه ۵۶۴،

$$\cosh y = \pm \sqrt{\sinh^2 y + 1} = \pm \sqrt{x^2 + 1},$$

که در آن باید علامت به علاوه اختیار شود زیرا  $\cosh y$  مثبت است. بنابراین،

$$(1) \quad \frac{d}{dx} \sinh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

حال فوراً از (۱) نتیجه می شود که

$$(2) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \sinh^{-1} x + C.$$

به علاوه، با استفاده از قاعده زنجیره ای برای مشتقگیری از  $\sinh^{-1}(x/a)$ ، که  $a > 0$ ، داریم

$$\frac{d}{dx} \sinh^{-1} \frac{x}{a} = \frac{1/a}{\sqrt{(x/a)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

پس نتیجه می شود که

$$(۲') \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sinh^{-1} \frac{x}{a} + C,$$

که تعمیمی از رابطه (۲) می باشد.

مثال ۱.  $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 + 4}}$  را حساب کنید.

حل. بنابر فرمول (۲') به ازای  $a = \frac{2}{3}$ ,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 + 4}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \frac{4}{9}}} = \frac{1}{3} \sinh^{-1} \frac{3x}{2} + C.$$

بین سینوس هذلولوی معکوس و لگاریتم رابطه ساده‌ای وجود دارد. فرض کنیم

$x = \sinh y$ . در این صورت، چون

$$\begin{aligned} e^y &= \frac{e^y - e^{-y}}{2} + \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \sinh y + \cosh y \\ &= \sinh y + \sqrt{\sinh^2 y + 1} = x + \sqrt{x^2 + 1}, \end{aligned}$$

پس نتیجه می شود که

$$(۳) \quad y = \sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

بنابراین، اگر  $a > 0$ ,

$$(۳') \quad \sinh^{-1} \frac{x}{a} = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \ln a,$$

و حال می توان (۲') را، پس از جذب  $-\ln a$  در ثابت انتگرالگیری  $C$ ، به شکل مفیدتری نوشت:

$$(۴) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C.$$

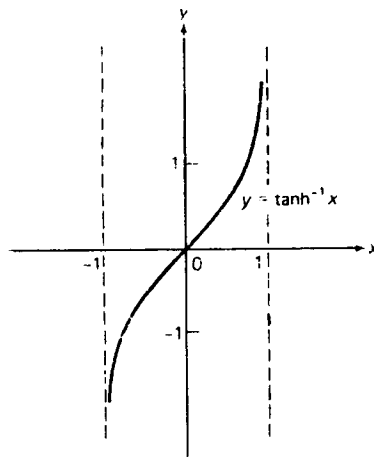
لازم است اعتبار (۴) را با مشتقگیری از عبارت سمت راست تحقیق نمایید.

مثال ۲.  $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2}}$  را حساب کنید.

حل. بنابر فرمول (۴) به ازای  $a = \sqrt{2}$ ,

$$\begin{aligned}\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} &= \left[ \ln(x + \sqrt{x^2+2}) \right]_0^3 = \ln(3 + \sqrt{11}) - \ln \sqrt{2} \\ &= \ln \frac{3 + \sqrt{11}}{\sqrt{2}} \approx 1.5\end{aligned}$$

تانژانت هذلولوی معکوس. برای تعریف تانژانت هذلولوی معکوس، فرض کنیم  $x = \tanh y$ . تابع پیوسته  $\tanh y$  بر بازه  $(-\infty, \infty)$  صعودی و در نتیجه یک به یک است، که آن را به روی بازه  $(-1, 1)$  می نگارد. لذا،  $x = \tanh y$  دارای تابع معکوس  $y = \tanh^{-1} x$ ، به نام تانژانت هذلولوی معکوس، است که بر  $(-1, 1)$  پیوسته و صعودی است. نمودار این تابع، که در شکل ۲۵ نموده شده، را می توان از انعکاس نمودار  $\tanh x$  نسبت به خط  $y = x$  به دست آورد.



شکل ۲۵

مثل حالت  $\sinh^{-1} x$ ، رابطه ساده ای بین تابع  $\tanh^{-1} x$  و لگاریتم وجود دارد. با نوشتن  $x = \tanh y$ ، داریم

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}.$$

بنابراین،

$$(e^y + e^{-y})x = e^y - e^{-y},$$

یا معادلاً

$$(e^{2y} + 1)x = e^{2y} - 1.$$



این یک معادله خطی نسبت به  $e^{2y}$  با جواب

$$e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$

است. پس نتیجه می‌شود که

$$(5) \quad y = \tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (-1 < x < 1).$$

بخصوص،

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \tanh^{-1} x &= \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \ln \frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} [\ln(1+x) - \ln(1-x)] \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{(1+x)(1-x)}, \end{aligned}$$

و در نتیجه،

$$(6) \quad \frac{d}{dx} \tanh^{-1} x = \frac{1}{1-x^2} \quad (-1 < x < 1).$$

مثال ۳. از  $\tanh^{-1}(\sin x)$  مشتق بگیرید.

حل. با استفاده از (۶) معلوم می‌شود که

$$\frac{d}{dx} \tanh^{-1}(\sin x) = \frac{1}{1-\sin^2 x} \frac{d}{dx} \sin x = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x.$$

مثال ۴.  $\int_0^{\pi/6} \sec x \, dx$  را حساب کنید.

حل. بنابر مثال قبل،  $\tanh^{-1}(\sin x)$  یک پادمشتق  $\sec x$  است. بنابراین، به کمک (۵) داریم

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/6} \sec x \, dx &= \tanh^{-1} \left( \sin \frac{\pi}{6} \right) - \tanh^{-1}(\sin 0) \\ &= \tanh^{-1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln 3 \approx 0.55 \end{aligned}$$

مسائل

از عبارات زیر مشتق بگیرید .

$$\sin(\sinh^{-1} x) \quad ۰.۲ \checkmark$$

$$x \sinh^{-1} x \quad ۰.۱ \checkmark$$

$$x^2 \tanh^{-1} x \quad ۰.۴ \checkmark$$

$$\sinh^{-1}(\cos x) \quad ۰.۳ \checkmark$$

$$\sinh^{-1}(\tanh^{-1} x) \quad ۰.۶ \checkmark$$

$$\tanh^{-1}(\ln x) \quad ۰.۵ \checkmark$$

$$۰.۷ \checkmark \quad \text{فرمول (۱) را به کمک فرمول (۳) تحقیق کنید .}$$

$$۰.۸ \checkmark \quad \text{فرمول (۶) را به کمک قضیه ۴، صفحه ۴۶۰، تحقیق کنید .}$$

$$۰.۹ \quad \text{کوچکترین مقداری که تابع } \sinh x + 2 \cosh x \text{ می گیرد چیست؟}$$

$$۰.۱۰ \quad \text{آیا تابع } 2 \sinh x + \cosh x \text{ دارای کوچکترین مقدار است؟}$$

$$۰.۱۱ \quad \text{معکوس تابع } x = \cosh y \quad (0 \leq y < \infty), \text{ که کسینوس هذلولوی معکوس نام دارد، با}$$

$$y = \cosh^{-1} x \text{ نموده شده و نمودارش در شکل ۲۶ رسم شده است. نشان دهید که}$$

$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (x \geq 1),$$

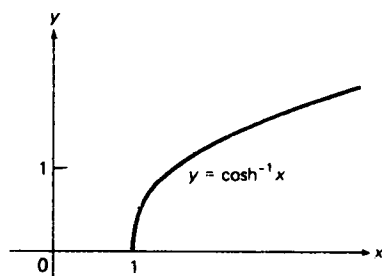
$$\frac{d}{dx} \cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (x > 1),$$

و

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \cosh^{-1} \frac{x}{a} + C$$

(یک)

$$= \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C \quad (x > a > 0).$$



شکل ۲۶

۰.۱۲. نشان دهید که

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{x}{a} + C$$

(دو)

$$= \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} + C \quad (|x| < a),$$

که صورت دیگری است از فرمول (۶)، صفحه ۴۹۹.

۱۳. معکوس تابع  $x = \coth y$  گتانژانت هذلولوی معکوس نام دارد و با  $y = \coth^{-1} x$  نموده می شود، و دارای نمودار به شکل ۲۷ می باشد. نشان دهید که

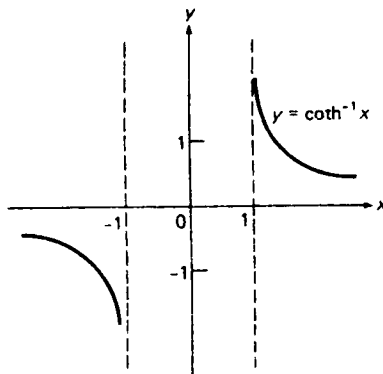
$$\coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} = \tanh^{-1} \frac{1}{x} \quad (|x| > 1),$$

$$\frac{d}{dx} \coth^{-1} x = \frac{1}{1-x^2} \quad (|x| > 1),$$

و

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{a^2 - x^2} &= \frac{1}{a} \coth^{-1} \frac{x}{a} + C \\ &= \frac{1}{2a} \ln \frac{x+a}{x-a} + C \quad (|x| > a > 0), \end{aligned}$$

(سه)



شکل ۲۷

که در آن (سه) صورت دیگری است از فرمول (۶)، صفحه ۴۹۹.

۱۴. معکوس تابع  $x = \operatorname{sech} y$  ( $0 \leq y < \infty$ ) سکانت هذلولوی معکوس نام دارد و با  $y = \operatorname{sech}^{-1} x$  نموده می شود و نمودارش به شکل ۲۸ می باشد. نشان دهید که

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} = \cosh^{-1} \frac{1}{x} \quad (0 < x \leq 1),$$

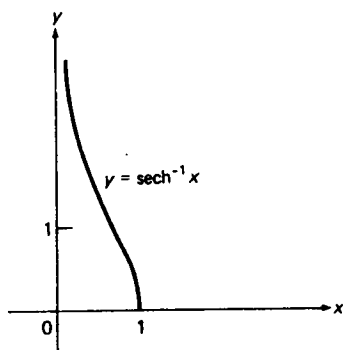
$$\frac{d}{dx} \operatorname{sech}^{-1} x = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \quad (0 < x < 1),$$

و

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a} \operatorname{sech}^{-1} \frac{|x|}{a} + C$$

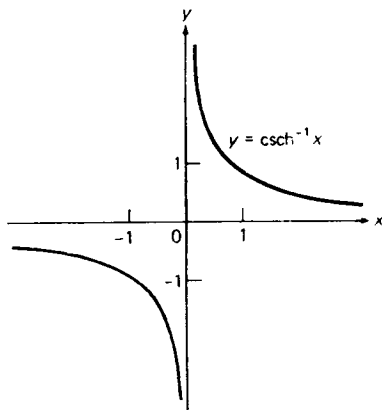
$$= -\frac{1}{a} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{|x|} + C \quad (0 < |x| < a).$$

(چهار)



شکل ۲۸

۱۵. معکوس تابع  $y = \operatorname{csch}^{-1} x$  کسکانت هذلولوی معکوس نامیده و با  $y = \operatorname{csch}^{-1} x$  نموده می‌شود و نمودارش در شکل ۲۹ رسم شده است. نشان دهید که



شکل ۲۹

$$\operatorname{csch}^{-1} x = \ln \left( \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 + x^2}}{|x|} \right) = \sinh^{-1} \frac{1}{x} \quad (x \neq 0).$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{csch}^{-1} x = -\frac{1}{|x|\sqrt{1 + x^2}} \quad (x \neq 0).$$

و

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 + x^2}} = -\frac{1}{a} \operatorname{csch}^{-1} \frac{|x|}{a} + C$$

$$= -\frac{1}{a} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + x^2}}{|x|} + C \quad (a > 0, x \neq 0).$$

(پنج)

از عبارات زیر مشتق بگیرید.

$$\begin{array}{lll} \ln(\coth^{-1} x) & \cdot ۱۸ \checkmark & \cosh^{-1}(\cos x) \cdot ۱۷ \checkmark \\ \operatorname{csch}^{-1}(\ln x) & \cdot ۲۱ \checkmark & \operatorname{sech}^{-1}(e^{-x}) \cdot ۲۰ \checkmark \\ \frac{\cosh^{-1} x}{x} & \cdot ۱۶ \checkmark & \coth^{-1} \sqrt{x} \cdot ۱۹ \checkmark \end{array}$$

انتگرالهای زیر را حساب کنید.

$$\begin{array}{ll} \int \frac{\sinh 2}{\sinh 1} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} & \cdot ۲۳ \checkmark \\ \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}} & \cdot ۲۲ \checkmark \\ \int_{2/3}^1 \frac{dx}{\sqrt{9x^2 - 1}} & \cdot ۲۵ \checkmark \\ \int_2^4 \frac{dx}{9 - x^2} & \cdot ۲۷ \checkmark \\ \int_2^4 \frac{dx}{x\sqrt{1 + x^2}} & \cdot ۲۹ \checkmark \\ \int_2^4 \frac{dx}{x\sqrt{4 + x^2}} & \cdot ۳۰ \checkmark \\ \int_0^2 \frac{dx}{9 - x^2} & \cdot ۲۶ \checkmark \\ \int_{1/4}^{1/2} \frac{dx}{x\sqrt{1 - x^2}} & \cdot ۲۸ \checkmark \end{array}$$

۳۱. سه تا از شش تابع هذلولوی معکوس نقطهٔ عطف دارند. اینها کدامها هستند، و نقاط عطف آنها کجاست؟

### اصطلاحات و مباحث کلیدی

تعریف لگاریتم طبیعی به عنوان انتگرال

لگاریتم حاصل ضرب و توان

تعریف عدد  $e$

مشتقگیری لگاریتمی، انتگرالگیری از مشتق لگاریتمی

تعریف نمایی به عنوان معکوس لگاریتم

نمایی یک مجموع  
 قوانین نمایها برای نماهای حقیقی دلخواه  
 نمایها و لگاریتمها در پایه  $a$   
 تابع توانی کلی  $x^a$   
 صور مبهم  $0^0$ ،  $\infty^0$ ، و  $1^\infty$   
 ریاضیات سود مرکب، ترکیب پیوسته  
 معادلات دیفرانسیل جدایی پذیر، جداسازی متغیرها  
 رشد و تحلیل نمایی  
 رشد جمعیت، تحلیل رادیواکتیو  
 زمان مضاعف سازی، نیمه عمر  
 رشد لژیستیک  
 توابع هذلولوی و مشتقات آنها  
 توابع هذلولوی معکوس

فرمولهای مشتقگیری در رابطه با لگاریتمها و نمایها

مشتق	تابع
$\frac{1}{x} \quad (x > 0)$	$\ln x$
$\frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$	$\ln  x $
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln \{f(x)\}$
$\frac{1}{x} \log_a x \quad (a > 0)$	$\log_a x$
$e^x$	$e^x$
$a^x \ln a \quad (a > 0)$	$a^x$
$ax^{a-1} \quad (x > 0)$	$x^a$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$

فرمولهای کلیدی دیگر

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \quad (x > 0), \quad \ln 1 = 0, \quad \ln e = 1$$

$$e^{\ln x} = x \quad (x > 0), \quad \ln e^x = x \quad (\text{all } x)$$

$$\ln xy = \ln x + \ln y, \quad e^x e^y = e^{x+y}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$a^x = e^{x \ln a} \quad (a > 0), \quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad (a > 0)$$

$$x^a = e^{a \ln x} \quad (x > 0), \quad \ln x^a = a \ln x$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

مسائل تکمیلی

معادلات زیر را نسبت به  $x$  حل کنید.

$$\ln x = \frac{1}{2}(\ln 4 + \ln 9) \quad \cdot ۱$$

$$\ln x^3 - \ln x = \ln 32 - \ln 8 \quad \cdot ۲$$

$$\log_2 x = \log_2 4 + \log_4 8 + \log_{16} 64 \quad \cdot ۳$$

$$\log_{100} x + \log_{0.1} x = 1 \quad \cdot ۴$$

$$\cdot ۵ \quad \text{آیا تابع } \log_a \frac{1-x}{1+x} \text{ زوج است یا فرد؟}$$

$$\cdot ۶ \quad \text{بدون محاسبات عددی، نشان دهید که } \pi^e < e^{\pi} \text{ و } \sqrt{10}^{\pi} < \pi^{\sqrt{10}}$$

راهنمایی. ابتدا نشان دهید که  $(\ln x)/x$  بر  $[e, \infty)$  نزولی است.

انتگرالهای زیر را حساب کنید.

$$\int_0^{\pi/4} \tan s \, ds \quad \cdot ۷$$

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cot t \, dt \quad \cdot ۸$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{du}{\sin u \cos u} \quad \cdot ۹$$

۱۰. نشان دهید که

$$\sum_{n=10}^{29} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = \ln 3.$$

از عبارات زیر مشتق بگیرید.

۱۳.  $2^{3x}$

۱۲.  $\pi^{\ln x}$

۱۱.  $e^{\cosh x}$

۱۶.  $[\ln(\ln x)]^x$

۱۵.  $x^{\sinh x}$

۱۴.  $\ln(\tanh^{-1} x)$

اکسترمهای موضعی تابع داده شده را بیابید.

۱۷.  $f(x) = (x+1)^{10} e^{-x}$

۱۸.  $f(x) = ae^{cx} + be^{-cx} \quad (a^2 + b^2 \neq 0, c \neq 0)$

۱۹.  $f(x) = x^e 2^{-x}$

۲۰. نشان دهید که تابع  $f(x) = e^x + cx^3$  به ازای  $-e/6 \leq c \leq 0$  نقطه عطف ندارد، به

ازای  $c > 0$  یک نقطه عطف دارد، و به ازای  $c < -e/6$  دو نقطه عطف دارد.

آیا تابع داده شده نقطه عطف دارد، و اگر دارد کجاست؟

۲۲.  $f(x) = x^4 + x^2 + e^x$

۲۱.  $f(x) = x^2 + \ln x$

۲۴.  $f(x) = e^{\arctan x}$

۲۳.  $f(x) = x^x$

۲۵.  $f(x) = e^{x^{1/3}}$

حدود زیر را با استفاده از قاعده هوییتال حساب کنید.

۲۷.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \arctan x}{\ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)}$

۲۶.  $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$

۲۹.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{\sin x}$

۲۸.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\tan x}}{x}$

۳۱.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x [\ln(x + \pi) - \ln x]$

۳۰.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$

۳۳.  $\lim_{x \rightarrow (1/4)\pi} (\tan x)^{\tan 2x}$

۳۲.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 - \frac{4}{x} \right)^{x-1}$

مسئله مقدار اولیه داده شده را با جداسازی متغیرها حل کنید.

۳۴.  $\frac{dy}{dx} \cot x = y \ln y, y(0) = e$



$$\sqrt{x^2 + 1} \frac{dy}{dx} = y, y(0) = 1 \quad \cdot ۳۵$$

$$\sqrt{1 - x^2} \frac{dy}{dx} = y^2 + 1, y(0) = 0 \quad \cdot ۳۶$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x+y}, y(0) = 0 \quad \cdot ۳۷$$

$$(x + \sqrt{x}) \frac{dy}{dx} + y = 0, y(1) = \left(\frac{1}{4}\right) \quad \cdot ۳۸$$

$$(1 - x^2) \frac{dy}{dx} + y = 0, y\left(\frac{2}{3}\right) = 2 \quad \cdot ۳۹$$

۴۰. ابتدا جانشانی  $z = 2x - y - 1$  را انجام داده و سپس، با جداسازی متغیرها، مسئله مقدار اولیه  $\frac{dy}{dx} = 2x - y - 1, y(0) = 1$  را حل کنید.

۴۱. یک منحنی دارای این خاصیت است که شیبش در هر نقطه  $P$ ،  $n$  برابر شیب خط واصل بین مبدأ و  $P$  است. این منحنی چیست؟

۴۲. چقدر طول می‌کشد تا پول با نرخ سود سالانه ۱۰٪ و به طور پیوسته مرکب سه برابر شود؟

۴۳. کمترین پولی که می‌توان با نرخ سود سالانه ۹٪ و به طور پیوسته مرکب سرمایه‌گذاری کرد به طوری که بتوان مدام (یعنی، برای همیشه) سالانه ۱۰,۰۰۰ دلار برداشت کرد چقدر است؟

۴۴. ۵۰,۰۰۰ دلار با نرخ سالانه ۶٪ که در ماه مرکب می‌شود به بانک سپرده‌ایم. چه وقت این پول از ۷۵,۰۰۰ دلار بیشتر می‌شود؟

۴۵. سپرده اولیه به طور پیوسته مرکب ۱۲۵۰ دلار طی ۵ سال به ۲۰۰۰ دلار می‌شود. نرخ سود سالانه چقدر است؟

۴۶. مقدار فعلی ۲۵,۰۰۰ دلار که ۶ سال با نرخ سود سالانه ۷.۵٪ و به طور پیوسته مرکب در پس‌انداز بوده چقدر است؟ با همان نرخ ولی ترکیب ماهانه چقدر است؟

۴۷. شخصی هر ۳ ماه ۱۲۵ دلار در بانک می‌گذارد که نرخ سود سالانه‌اش ۸٪ و هر سه ماه مرکب می‌شود. مقدار سپرده را درست پیش از بیست یکمین بار سپردن یعنی پس از ۵ سال پیدا کنید.

۴۸. جمعیت یک شهر طی ۱۵ سال از ۱۲۵,۰۰۰ تا ۱۸۰,۰۰۰ افزایش می‌یابد. میزان رشد سالانه جمعیت چقدر است؟

## ۵۸۵ لگاریتمها و نمایها

۴۹. یک کشت باکتری با رشد نمایی ظرف 4 ساعت از  $2 \times 10^5$  سلول به  $8 \times 10^7$  سلول می‌رسد. زمان بین انشقاقهای دویی متوالی (تقسیم سلولی) را بیابید.

۵۰. در یک کشت 1024 سلولی با رشد نمایی و زمان مضاعف سازی 1 ساعت دگرگونی رخ می‌دهد. سلولهای شورشی دارای زمان مضاعف سازی 30 دقیقه‌اند، چه وقت جمعیت سلولهای شورشی مساوی جمعیت سلولهای اولیه است؟ چه وقت به ازای هر سلول از نوع اولیه 16 سلول شورشی وجود دارد؟

۵۱. آزمایش نشان می‌دهد که وقتی باکتریها در یک محیط کشت رشد می‌کنند، میزان بازده غذایی، یعنی میزان تغییر غلظت  $C$  غذا در باکتریها، با  $C_1 - C$  متناسب است، که در آن  $C_1$  غلظت نهایی غذا است (معلوم شده که  $C_1$  خیلی از غلظت در خود محیط بزرگتر است). بنابراین،

$$\frac{dC}{dt} = k(C_1 - C).$$

این معادله دیفرانسیل را با شرط اولیه  $C = 0$  در لحظه  $t = 0$  حل کنید.

۵۲. یک کشت باکتری به طور لژیستیک و با اندازه اولیه  $N_0 = 4000$  و اندازه حدی  $N_1$  رشد می‌کند. کشت در 12 ساعت به  $\frac{1}{2}N_1$  و در 15 ساعت به  $\frac{9}{16}N_1$  می‌رسد. اندازه حدی  $N_1$  چقدر است؟

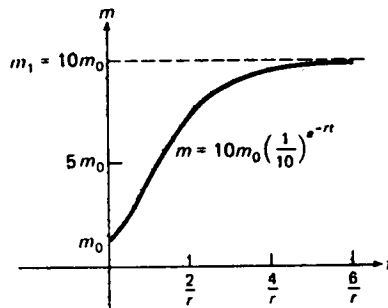
۵۳. رشد تومورهای جامد دقیقاً "با معادله دیفرانسیل

$$\frac{dm}{dt} = rm \ln \frac{m_1}{m} \quad (\text{یک})$$

توصیف می‌شود، که در آن  $r$  و  $m_1$  ثابتهای مثبتی بوده، و  $m = m(t)$  جرم تومور در لحظه  $t$  است. نشان دهید جواب (یک) که در شرط اولیه  $m(0) = m_0$  ( $m_0 < m_1$ ) صدق می‌کند از تابع

$$m = m_1 \exp \left( e^{-rt} \ln \frac{m_0}{m_1} \right) = m_1 \left( \frac{m_0}{m_1} \right)^{e^{-rt}} \quad (\text{دو})$$

به نام قانون رشد گومپرتز<sup>۱</sup>، به دست می‌آید. تحقیق کنید که (دو) یک تابع صعودی از  $t$  بوده و وقتی  $t \rightarrow \infty$ ،  $m \rightarrow m_1$ ؛ در نتیجه،  $m_1$  جرم حدی تومور می‌باشد. شکل ۳۰ قانون گومپرتز (دو) را در حالت  $m_1 = 10m_0$  نشان می‌دهد. توجه کنید که منحنی به شکل S بوده و با منحنی لژیستیک شکل ۱۴، صفحه ۵۵۰، شباهت نزدیکی دارد.



شکل ۳۰

۵۴. نشان دهید که اگر  $m_1 > em_0$ ، قانون گومپرتز (دو) یک نقطه عطف در  $t = t_1$  دارد، که در آن  $t_1$  زمانی است که  $m$  در آن مساوی  $m_1/e$  می باشد.
۵۵. برای توضیح اینکه قانون گومپرتز چگونه در کار می آید، مسئله رشد نمایی ناشی از معادله دیفرانسیل  $dm/dt = km$  و شرط اولیه  $m(0) = m_0$  را حل می کنیم، که در آن میزان رشد نسبی  $k$ ، به جای ثابت بودن، یک تابع به طور نمایی نزولی  $k_0 e^{-rt}$  است. نشان دهید که جواب این مسئله عبارت است از

$$(دو) \quad m = m_0 \exp \left[ \frac{k_0}{r} (1 - e^{-rt}) \right],$$

که در آن وقتی  $t \rightarrow \infty$ ،  $m \rightarrow m_0 e^{k_0/r}$ . نشان دهید که اگر  $m_1 = m_0 e^{k_0/r}$ ، (دو) و (دو) یکی هستند.

۵۶. یکچهارم ماده رادیواکتیو طی ۱۵ سال ناپدید می شود. نیمه عمر ماده چقدر است؟
۵۷. اورانیوم طبیعی از دو ایزوتوپ رادیواکتیو تشکیل شده است، یکی اورانیوم ۲۳۸ با نیمه عمر تقریبی  $4.5 \times 10^9$  سال و دیگری اورانیوم ۲۳۵ با نیمه عمر تقریبی  $7 \times 10^8$  سال. در نمونه های فعلی، اورانیوم ۲۳۸ تقریباً "۱۳۷.۸ برابر از اورانیوم ۲۳۵ بیشتر است. با این فرض که در زمان خلق اورانیوم، احتمالاً "در نتیجه انفجار ستاره سوپر نو، دو ایزوتوپ به یک مقدار موجود بوده اند، سن اورانیوم چقدر است؟
۵۸. یک نوترون در هسته اتم پایدار است، ولی پس از آزاد شدن با نیمه عمر ۱۲.۸ دقیقه به یک پروتون، یک الکترون، و یک آنتی نوترینو تجزیه می شود. فرض کنید شعاعی از نوترونها با سرعت ۲۵ km/sec به فضا فرستاده شود. شعاع در زمان تحلیل یکدم نوترونها چه مسافتی را طی خواهد کرد؟
۵۹. فرض کنید  $N$  تعداد نوترونهای آزاد در یک کره جامد از اورانیوم ۲۳۵ به شعاع  $R$

باشد. در این صورت،  $N$  در معادله دیفرانسیل

$$\frac{dN}{dt} = aN - \frac{bN}{R}, \quad (\text{سه})$$

با ثابتهای  $a \approx 2 \times 10^8/\text{sec}$  و  $b \approx 17 \times 10^8 \text{ cm/sec}$  صدق می‌کند. جمله  $aN$  "تکثیر" نوترون‌ها که ناشی از انشقاق هسته است را توصیف می‌کند (اکثر هسته‌های اورانیوم که با نوترون برخورد می‌کنند تجزیه شده و هریک دو یا سه نوترون "جدید" آزاد می‌سازند)، حال آنکه جمله  $bN/R$  - نوترونهایی را که از سطح کره فرار می‌کنند توصیف می‌نماید (نسبت سطح به حجم کره با  $1/R$  متناسب است). نشان دهید وقتی شعاع  $R$  به مقدار معینی چون  $R_{cr}$ ، به نام شعاع بحرانی، برسد یا معادلاً "وقتی جرم کره به مقدار معینی مانند  $m_{cr}$ ، به نام جرم بحرانی برسد،  $N$  افزایش زیادی خواهد داشت.  $R_{cr}$  و  $m_{cr}$  را در صورتی بیابید که چگالی اورانیوم ۲۳۵ مساوی  $18.7 \text{ g/cm}^3$  باشد. این یک مدل ساده شده "واکنش زنجیره‌ای" است که در بمب اتم رخ می‌دهد.

۶۰. یک واکنش شیمیایی در نظر بگیرید که در آن یک مولکول ماده  $A$  با یک مولکول ماده  $B$  ترکیب شده و یک مولکول از ماده  $C$  را تولید می‌کنند. فرض کنید  $a$  و  $b$  غلظت‌های اولیه  $A$  و  $B$  بوده، و  $y = y(t)$  غلظت  $C$  در لحظه  $t$  باشد. در این صورت غلظت‌های  $A$  و  $B$  در لحظه  $t$  به ترتیب عبارتند از  $a - y$  و  $b - y$ ، و میزان واکنش با حاصل ضرب این غلظتها متناسب است. این ما را به معادله زیر می‌رساند:

$$\frac{dy}{dt} = k(a - y)(b - y)$$

( $k > 0$ )، که به قانون میزان واکنش معروف می‌باشد. به فرض آنکه  $y(0) = 0$ ،  $y$  را به صورت تابعی از  $t$  بیابید. نشان دهید که اگر  $a \neq b$ ، وقتی  $t \rightarrow \infty$ ،  $y \rightarrow \min\{a, b\}$ . در حالت  $a = b$  چه رخ می‌دهد؟ فرض کنید  $T$  زمانی باشد که ۹۹٪ واکنش کامل شده است.  $T$  را در حالت  $a = b$  و در حالت  $a = \frac{1}{2}b$  حساب کنید. کدام زمان بیشتر است و چرا؟

۶۱. جسمی به جرم  $m$  که ابتدا در حالت سکون است در محیطی سقوط می‌کند که بانیروی متناسب با مجذور سرعتش  $v = v(t)$  در برابر حرکت مقاومت دارد. لذا، طبق قانون دوم نیوتن،

$$m \frac{dv}{dt} = mg - bv^2,$$

که در آن  $g$  شتاب ثقل بوده و  $b$  ثابت مثبتی می‌باشد. نشان دهید که جسم دارای

سرعت حدی یا نهایی  $v_1$  است که به آن نزدیک می شود ولی هرگز از آن رد نمی شود. نشان دهید که  $v_1$  با جذر جرم جسم متناسب است. موضع جسم را به صورت تابعی از زمان بیابید.

۶۲. سنگی به جرم  $m$  با سرعت اولیه  $v_0$  به بالا پرتاب می شود. فرض کنید حرکت سنگ با مقاومت هوا که با مجذور سرعت سنگ متناسب، با ثابت تناسب  $b$ ، است و بر و باشد. نشان دهید که سرعت (بی علامت) سنگ در بازگشت به موضع اولیه مساوی است با

$$v_1 = v_0 \sqrt{\frac{mg}{mg + bv_0^2}}.$$

۶۳. جسمی به جرم  $m$  که ابتدا در حال سکون است در محیطی سقوط می کند که با نیرویی متناسب با سرعت  $v = v(t)$ ، به جای مجذور سرعت مثل مسئله ۶۱، در برابر حرکت مقاومت دارد. (این برای یک شیء به قدر کافی کوچک مانند قطره باران یا یک محیط به قدر کافی چسبنده مانند روغن سنگین رخ می دهد.) نشان دهید که، درست مثل قانون مجذور مقاومت، جسم دارای سرعت حدی یا نهایی  $v_1$  است که به آن نزدیک می شود ولی هرگز از آن رد نمی شود. نشان دهید که  $v_1$  با جرم جسم متناسب است. موضع  $s$  جسم را به صورت تابعی از زمان بیابید.

۶۴. با استفاده از قاعده لایب نیتز (مسئله ۳۵، صفحه ۳۶۶)، مشتق  $\sinh x$  را بیابید.

نشان دهید که

$$\cosh x - \cosh y = 2 \sinh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2} \quad . ۶۵$$

$$\sinh x - \sinh y = 2 \cosh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2} \quad . ۶۶$$

$$\sinh^2 x - \sinh^2 y = \sinh(x+y) \sinh(x-y) \quad . ۶۷$$

$$(\cosh x + \sinh x)^a = \cosh ax + \sinh ax \quad . ۶۸$$

( $a$  دلخواه)

$$\sinh 3x = 3 \sinh x + 4 \sinh^3 x \quad . ۶۹$$

$$\cosh 4x = 8 \cosh^4 x - 8 \cosh^2 x + 1 \quad . ۷۰$$

حدود زیر را با استفاده از قاعده هوییتال حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tanh x}{x} \quad . ۷۲$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} \quad . ۷۱$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tanh x - x}{x^3} \quad . ۷۴$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cosh x}{x^2} \quad . ۷۳$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tanh^{-1} x}{\sinh^{-1} x} \quad \cdot ۷۶$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sinh^{-1} x}{x^3} \quad \cdot ۷۵$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\tanh x)^{\tanh x} \quad \cdot ۷۸$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sinh x} \quad \cdot ۷۷$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sinh x)^{\operatorname{csch} x} \quad \cdot ۷۹$$

فرض کنید تابع  $y = f(x)$  به ازای هر  $x$  در قلمرو خود در معادله‌ای به شکل

$$P_0(x) + P_1(x)y + P_2(x)y^2 + \cdots + P_n(x)y^n = 0 \quad (\text{چهار})$$

صدق کند، که در آن  $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x) \neq 0$  همه چندجمله‌ایهایی از  $x$  اند. در

این صورت، گوئیم تابع  $f$  جبری است. نشان دهید که

۸۰. توابع گویا جبری اند.

۸۱. تابع  $y = \sqrt{x - 2\sqrt{x}}$  جبری است.

۸۲. معکوس یک تابع جبری یک به یک خود جبری است.

تذکار. تابعی که جبری نباشد متعالی نام دارد. می‌دانیم که توابع نمایی، مثلثاتی، و

هذلولوی متعالی اند. از مسئله ۸۲ معلوم می‌شود که این امر برای توابع لگاریتمی، توابع

مثلثاتی معکوس، و توابع هذلولوی معکوس نیز درست است.

انتگرالهای زیر را حساب کنید.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-4x^2}} \quad \cdot ۸۴$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-16}} \quad \cdot ۸۳$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{9+49x^2}} \quad \cdot ۸۵$$

۸۶. شناسه هذلولوی یا گودرمانیان تابعی است مانند  $y = \operatorname{gd} x$  که با فرمول زیر تعریف

می‌شود:

$$y = \operatorname{gd} x = \int_0^x \frac{dt}{\cosh t}.$$

نشان دهید که

$$\operatorname{gd} x = \arctan(\sinh x) = 2 \arctan(e^x) - \frac{\pi}{2},$$

$$\sinh x = \tan(\operatorname{gd} x), \quad \cosh x = \sec(\operatorname{gd} x), \\ \tanh x = \sin(\operatorname{gd} x).$$

همچنین، نشان دهید که  $y = g \circ d \circ x$  یک تابع یک به یک است با معکوس

$$x = g \circ d^{-1} \circ y = \int_0^y \sec t \, dt.$$



**درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات**

**دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی**

**نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور**

**دانلود نرم افزارهای ریاضیات**

**و...**

**سایت ویژه ریاضیات** [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)