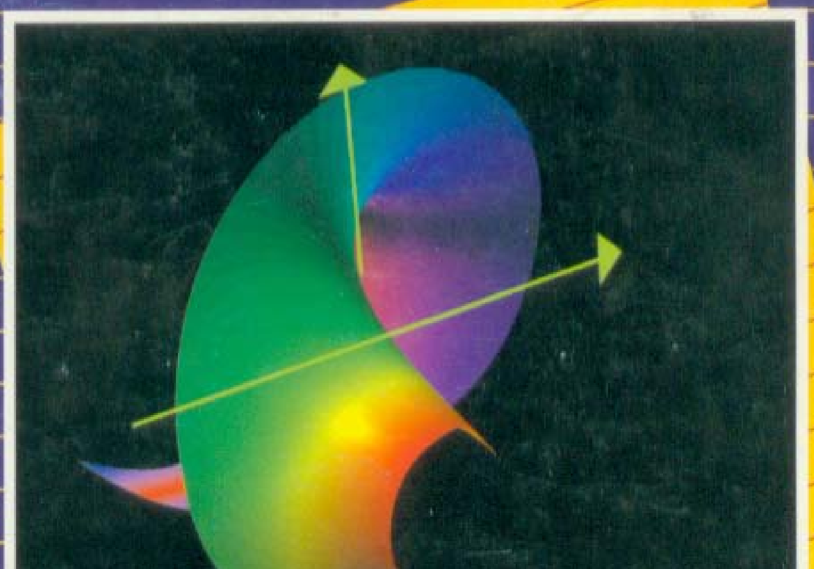
حساب دیفرانسیل و انتگرال با هندسهٔ تحلیلی

۳

«کتاب عام»

نوشتهٔ ریچارد ا. سیلورمن

ترجمهٔ دکتر علی اکبر عالم زاده



جلد سوم

مشتقگیری جزئی[۱۳]

بخش اعظمی از حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی در رابطه با کمیات اسکالر یا برداری است که توابعی از یک متغیرند؛ و لذا، به محض دانستن فقط یک عدد، یعنی مقدار متغیر مستقل، کاملاً مشخص خواهند شد. لیکن بسیاری از کمیات جالب در ریاضیات و کاربردهایش توابعی از دو یا چند متغیر، یعنی مقادیر این متغیرها، می‌باشند. در زندگی واقعی متغیرهای زیادی وجود دارند. مثلاً، سود سالانهٔ یک سوپرمارکت به نیروی کار و هزینهٔ نگهداری، اجاره و هزینهٔ حمل کالا، و فروش کالاهای مختلف بستگی دارد.

توصیف توابع چند متغیره، دست کم در اصول، نسبتاً آسان است. مشکل واقعی ساختن تعمیمهای چندگانهٔ مناسبی از مشتق و انتگرال است. در این فصل نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان ایده‌های حساب *دیفرانسیل* را آنقدر پیش برد تا از عهدهٔ توابع چند متغیره برآیند. در فصلهای ۱۴ و ۱۵، تعمیم مفاهیم حساب *انتگرال* به توابع دو و سه متغیره سامان خواهد یافت.

۱.۱۳ توابع چندمتغیره

تعریف تابع دو یا سه‌متغیره. فرض کنیم D مجموعهٔ نقاط (x, y) در صفحه باشد. منظور از *تابع f* از دو متغیر x و y یعنی قاعده یا روندی که به هر نقطهٔ (x, y) در D عدد حقیقی منحصر به فردی را، که با $f(x, y)$ نموده می‌شود، منتسب می‌سازد. مجموعهٔ D **قلمرو** f، عدد $f(x, y)$ *مقدار* f در (x, y)، و مختصات x و y نقطهٔ (x, y) **متغیرهای مستقل** (یا *شناسه‌های* f) نام دارند. *تابع f* از سه متغیر x، y، و z به همین نحو تعریف می‌شود جز آنکه D یک مجموعهٔ نقاط (x, y, z) در فضاست و مقدار f در (x, y, z) با $f(x, y, z)$ نموده می‌شود. منظور از "تابع $f(x, y)$" البته یعنی تابع f که مقدارش در (x, y) مساوی $f(x, y)$ است، و این نوع زبان اختصاری معمول می‌باشد. مجموعهٔ تمام مقادیری که f در نقاط D می‌گیرد **برد** f نام دارد، و آن را می‌توان مجموعهٔ تمام مقادیر یک متغیر *وابسته* گرفت؛ مثلاً، برد $f(x, y, z)$ مجموعهٔ تمام مقادیر متغیر وابستهٔ $u = f(x, y, z)$ است وقتی (x, y, z)

روی مجموعهٔ D تغییر کند. طبعاً، در انتخاب علایمی برای نمایش خود تابع و متغیرهای مستقل و وابسته آزادی زیادی داریم. همهٔ اینها تعمیم ایده‌های نظیر برای توابع یک‌متغیره می‌باشند.

توابع چند متغیره در هر وضعی که مقادیر دو یا چندمتغیر مستقل مقدار متغیر دیگر، یعنی متغیر وابسته، را به طور منحصر به فرد معین کنند ظاهر می‌شوند.

مثال ۱. فرض‌کنیم A مساحت مستطیلی به‌طول l و عرض w باشد. در این صورت، A تابعی از l و w است، و اگر این تابع را با f نشان‌دهیم، طبق فرمول معروفی از هندسهٔ مقدماتی،

$$A = f(l, w) = lw. \tag{۱}$$

در اینجا l و w متغیرهایی مستقل‌اند که می‌توانند مقادیر مثبت دلخواه بگیرند، و A متغیر وابسته می‌باشد. اما به‌آسانی می‌توان A را یکی از متغیرهای مستقل و l یا w را متغیروابسته ساخت. در واقع، با حل (۱) نسبت به l داریم

$$l = g(A, w) = \frac{A}{w},$$

که l را به صورت تابعی دیگر (که در اینجا با g نموده می‌شود) از دو متغیر A و w بیان می‌کند. به همین نحو، فرمول

$$w = g(A, l) = \frac{A}{l}$$

w را به صورت تابعی از متغیرهای A و l، بیان می‌کند. چرا مجدداً از g برای نمایش‌تابع این فرمول استفاده کرده‌ایم؟

مثال ۲. فرض کنیم

$$f(x, y, z) = \frac{x - y}{y - z}. \tag{۲}$$

در این صورت،

$$f(1, 4, 0) = \frac{1 - 4}{4 - 0} = -\frac{3}{4}$$

و

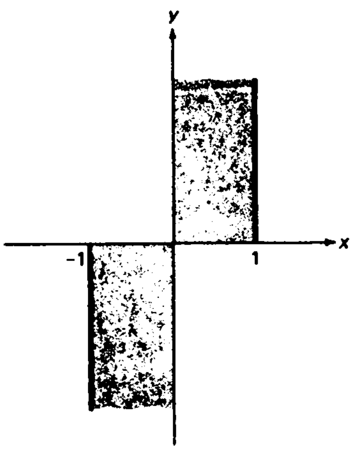
$$f(2, 3, 4) = \frac{2 - 3}{3 - 4} = 1,$$

ولی $f(3, 1, 1)$ وجود ندارد ، زیرا محاسبهٔ این کمیت منجر به مخرج صفر می‌شود . هر وقت تابعی با یک فرمول صریح مانند (۲) ، بدون اطلاعاتی در باب مقادیر متغیرهای مستقل ، داده شده باشد ، فرض است که قلمرو تابع وسیعترین مجموعهٔ نقاطی است که به ازای آنها فرمول معنی دارد؛ این مجموعه **قلمرو طبیعی** تابع نامیده می‌شود . لذا ، قلمروطبیعی تابع (۲) مجموعهٔ تمام نقاط (x, y, z) در فضاست جز آنهایی که در صفحهٔ $y - z = 0$ موازی محور x قرار دارند . به عنوان تمرین ، نشان دهید که برد (۲) تمام خط حقیقی است .

مثال ۳ . قلمرو طبیعی تابع

$$f(x, y) = \arcsin x + \sqrt{xy} \tag{۳}$$

بزرگترین مجموعه از نقاط (x, y) در صفحه‌است که تابع به ازای آنها تعریف شده است . چون $\arcsin x$ تعریف شده است اگر و فقط اگر $-1 \le x \le 1$ ، ولی $\sqrt{xy}$ تعریف شده است اگر و فقط اگر $xy \ge 0$ ،قلمرو طبیعی (۳) جفت نوار سایه‌دار " نیمه نامتناهی " شکل ۱ می‌باشد .



شکل ۱

نوارها بسته‌اند به این معنی که شامل مرزهای خود می‌باشند .

اعمال جبری بر توابع چندمتغیره همانند توابع یک متغیره تعریف می‌شوند . لذا ،

$$(f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y),$$
$$(fg)(x, y, z) = f(x, y, z)g(x, y, z),$$

و غیره ، ترکیب توابع چند متغیره در مثالهای زیر شرح داده شده است .

مثال ۴ . فرض کنیم

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}, \qquad g(t) = t^2, \qquad h(t) = \sqrt{t}.$$

در این صورت ،

$$f(g(t), h(t)) = \frac{1}{g^2(t) + h^2(t)} = \frac{1}{t^4 + t}$$

تابعی است از متغیر t ، و باید شرط کنیم که $t > 0$ (چرا ؟) .

مثال ۵ . فرض کنیم

$$f(u, v) = \frac{uv}{u + v}, \qquad g(x, y) = x + y, \qquad h(x, y) = x - y.$$

در این صورت ،

$$f(g(x, y), h(x, y)) = \frac{g(x, y)h(x, y)}{g(x, y) + h(x, y)} = \frac{x^2 - y^2}{2x}$$

تابعی از دو متغیر x و y می‌باشد .

تبصره . به‌یاد می‌آورید که علاوه‌بر توابع **عددی** از یک متغیر ، که‌مقادیرشان اعداد حقیقی‌اند ، توابع *برداری* از یک متغیر (که توابع برداری از یک شناسهٔ اسکالر نیز نام دارند) را نیز در نظر گرفته‌ایم . همچنین ، می‌توان توابع برداری از چند متغیر ، یا معادلاً "توابع برداری از یک نقطهٔ متغیر در صفحه یا فضا ، نیز درنظر گرفت . این توابع را *میدانهای برداری* نامیده و در فصل ۱۵ مطرح خواهیم کرد .

فضای n بعدی و توابع n متغیره . می‌توان گامی فراتر رفت و توابع (عددی) با بیش‌از سه متغیر را بر مجموعه‌ای از نقاط در فضا با بعد بیشتر از سه تعریف نمود . با آنکه تجسمش مشکل است ، *فضای n بعدی* یا R^n چیزی جز مجموعهٔ تمام " نقاط " $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ که در آن اعداد حقیقی $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *مختصات* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ اند نیست. نماد $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ که گاهی یک " *n تایی مرتب* " خوانده می‌شود ، به ما می‌گوید که نقطهٔ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ دارای x_1 به عنوان مختص اول ، x_2 به عنوان مختص دوم ، . . . ، و x_n به عنوان مختص n م

است . ما قبلا " با معنی R^n به ازای $n = 1, 2, 3$ آشنا شده‌ایم . در واقع ، $R^1 = R$ خط حقیقی ، R^2 صفحه (فضای 2 بعدی) ، و R^3 فضای سه‌بعدی معمولی (فضای 3 بعدی)است. فرض کنیم D زیرمجموعه‌ای از R^n باشد . منظور از یک **تابع** n **متغیره**ٔ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ یعنی قاعده یا روندی مانند f که به هر نقطهٔ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ در D عدد حقیقی منحصر به فردی ، که با $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ نموده می‌شود ، منتسب می‌نماید . مثل همیشه ، D **قلمرو** f نام دارد ، و عدد $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **مقدار** f در $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ نامیده می‌شود .

مثال ۶ . توابع n متغیره‌در آمار فراوانند . مثلا " ، به‌ازای n عدد داده شدهٔ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (در اینجا به نام **مقادیر نمونه**) ، **متوسط** یا **میانگین** $\bar{x}$ آنها تابع

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

و **پراش** آنها s^2 تابع

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

می‌باشد .

فرض کنیم $z = f(x, y)$ یک تابع از دو متغیر x و y باشد . منظور از **نمودار** f یعنی نمودار معادلهٔ

$$z = f(x, y)$$

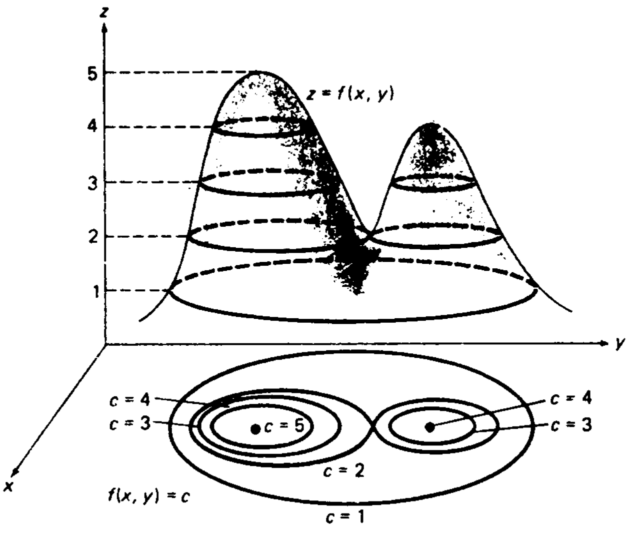
یعنی ، مجموعهٔ تمام نقاط (x, y, z) در R^3 که مختصات (قائم) آنها در این معادله صدق می‌کنند . اما رسم نمودار یک تابع سه‌متغیره یا بیشتر ممکن نیست ، زیرا در فضای 3 بعدی برای نمودار یک معادله به شکل $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ با $n \geq 3$ ، که دست‌کم چهار متغیر $x_1, x_2, \ldots, x_n, u$ دارد ، " جا به‌قدر کافی " موجود نیست .

منحنیهای تراز . منظور از **منحنی تراز** تابع دو متغیرهٔ $f(x, y)$ یعنی تصویر منحنی (یا مجموعهٔ) فصل مشترک نمودار f با صفحهٔ افقی $z = c$ روی صفحهٔ xy ، که درآن c ثابتی در برد f می‌باشد . لذا ، منحنی تراز نظیر به c ، به عنوان یک منحنی در صفحهٔ xy ، دارای معادلهٔ

$$f(x, y) = c \qquad (۴)$$

می‌باشد . توجه کنید که اشتراک نمودار f با صفحهٔ $z = c$ درصورتی بر منحنی تراز (۴)

منطبق است که $c = 0$ ، و الا بالا یا پایین آن و در فاصلهٔ قائم $|c|$ قرار دارد. با رسم تعدادی از منحنیهای تراز تابع f و نشان دادن هر منحنی با مقدار مناسب c ، می‌توان ایدهٔ خوبی از شکل نمودار f به دست آورد. مثلاً ، در شکل ۲ سطحی رسم شده است شبیه کوهی که دو قله دارد ،که ما آن را نمودار تابعی چون $f(x, y)$ می‌گیریم ،وقسمت‌پایینی شکل چند منحنی تراز $f(x, y) = c$ نظیر به این تابع نموده شده‌اند. منحنی تراز به ازای $c = 5$ به یک نقطه تباه می‌شود ، و هر منحنی تراز به ازای $2 < c < 4$ از دو حلقهٔ مجزا تشکیل شده است (چرا؟).



شکل ۲.

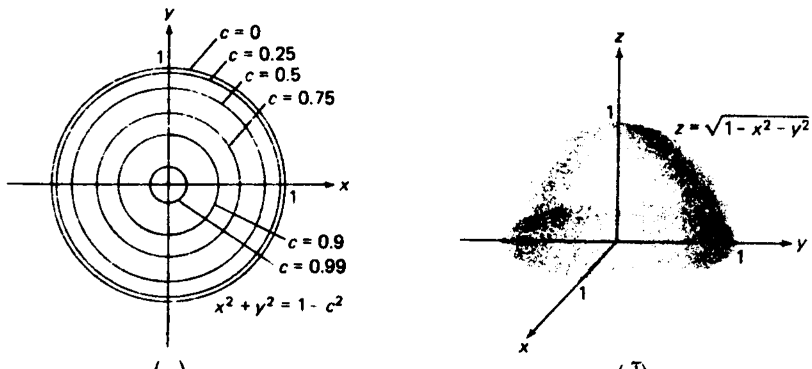
مثال ۷. نمودار تابع

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \qquad (۵)$$

نیمکرهٔ شکل ۳ (آ) است [نیمهٔ بالایی کرهٔ یکهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$] ، ولی نمودارتابع به نوعی متفاوت

$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (0 \le x^2 + y^2 \le 1) \qquad (۶)$$

مخروط مستدیرقائم شکل ۴ (آ) می‌باشد [بخشی از پارچهٔ پایین مخروط $x^2+y^2+(z-1)^2=0$] نیمکره و مخروط هر دومنحنیهای تراز مستدیر دارند. در واقع ، با گذاردن $z = c$ در (۵)



(ب) (آ)

شکل ۳

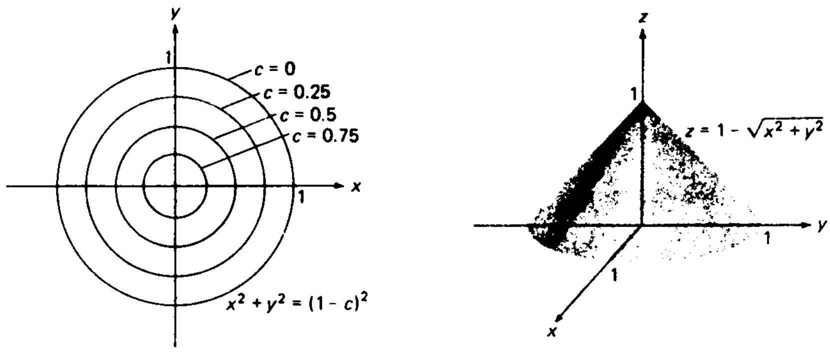
و (۶) ، معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$x^2 + y^2 = 1 - c^2 \qquad (۵')$$

و

$$x^2 + y^2 = (1 - c)^2, \qquad (۶')$$

که نمودار هر دو به ازای $0 \le c < 1$ دایره، و به ازای $c = 1$ نقطهٔ $x = y = 0$ می‌باشد.



(ب) (آ)

شکل ۴

ولی از مقایسهٔ مشروح دو مجموعهٔ منحنیهای تراز، داده شده در شکلهای ۳ (ب) و ۴ (ب)، تفاوت مهمی در رفتارشان آشکار می‌شود. درنیمکره، منحنیهای ترازبا c های کوچک شعاعهای نزدیک به 1 دارند، زیرا در صعود از یک گنبد نیمکره‌ای ابتدا خیلی شیب است؛ همچنین منحنیهای ترازی وجوددارند که مقادیر c آنها نزدیک 1 بوده‌و شعاعهایی که به‌طور ملموس

با 0 متفاوتند ، زیرا پیش از رسیدن به قله قسمت بالای گنبد نسبتا "تخت است .از آن سو ، منحنیهای تراز مخروط " توزیع متقارنی " دارند (افزایشهای مساوی در c به کاهشهای مساوی در شعاع منحنیها منجر می‌شود) . به این دلیل است که صعود از مخروط ،ازقاعده تا رأس، همیشه تحت زاویهٔ یکسان $45°$ با افق صورت می‌گیرد .

در نقشه برداری از منحنیهای‌تراز به‌طور گسترده برای نمایش ارتفاع استفاده‌می‌شود. همچنین ، آنها را در نقشه‌های هوا به کار می‌برند ، که در آنها منحنیها با فشار ثابت **همفشار** و منحنیها با دمای ثابت را **همدما** نامیده می‌شوند .

سطوح تراز . منظور از **سطح تراز** تابع $f(x, y, z)$ از سه متغیر یعنی نمودار معادلهٔ

$$f(x, y, z) = c, \tag{۷}$$

که در آن c ثابتی در برد f است .توجه‌کنید که معادلهٔ (۷) را می‌توان در فضای سه‌بعدی رسم کرد ،ولواینکه‌خود f میسر نباشداا‌ین بدان‌خاطر است‌که (۷) ازمعادلهٔ $u = f(x, y, z)$ با دادن مقدار ثابتی به‌متغیر وابستهٔ u به دست آمده است .

مثال ۸ . مجموعهٔ سطوح تراز تابع

$$f(x, y, z) = x - 2y + 3z$$

مجموعهٔ صفحات موازی

$$x - 2y + 3z = c \qquad (-\infty < c < \infty),$$

یا ، معادلا" ، مجموعهٔ تمام صفحات با $\mathbf{n} = (1, -2, 3)$ به عنوان یک بردار قائم است .

نمودارهای کامپیوتری . کامپیوتر الکترونیک جدید ، درصورتی که صحیح برنامه‌ریزی شود ، قادر است سطوح مشروح و دقیقی متناظر نمودارهای توابع دومتغیره رسم کند . در صفحهٔ بعد چند نمونه از اشکال رسم شده توسط‌کامپیوتر دیده می‌شوند . منحنیهای هر سطح با انتساب مقادیر ثابت از$1.5-$ تا 1.5 به x یا y به دست آمده‌اند ، و هر سطح از بالای ربع چهارم صفحهٔ xy نظاره شده است .

مسائل

مقدار تابع $f(x, y) = \dfrac{2x - y}{x - 2y}$ را در هر نقطهٔ زیر بیابید .

۱ . $(0, 1)$ ۲ . $(1, 0)$ ۳ . $(-4, 5)$

۴. $(11, -7)$ ۵. $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ۶. $(\pi, -\pi)$

مقدار تابع $g(x, y) = \dfrac{\sin x}{\cos y}$ را در هر نقطهٔ زیر بیابید .

۷. $(\pi/3, \pi/3)$ ۸. $(\pi/4, 3\pi/4)$

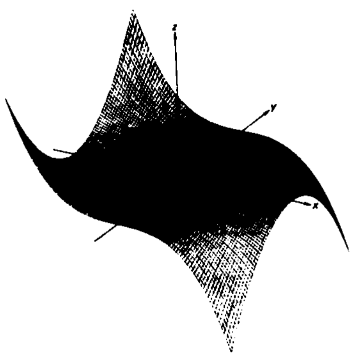
۹. $(\pi, 2\pi)$ ۱۰. $(5\pi/6, -\pi/6)$

۱۱. $(\arctan 2, \arctan 3)$ ۱۲. $(1, -1)$

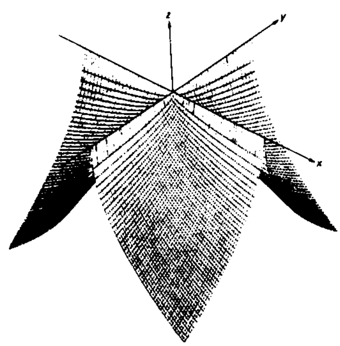
مقدار تابع $f(x, y, z) = \ln xyz$ را در هر نقطهٔ زیر بیابید .

۱۳. $(e, 1, 1)$ ۱۴. $(-1, 1, -1)$

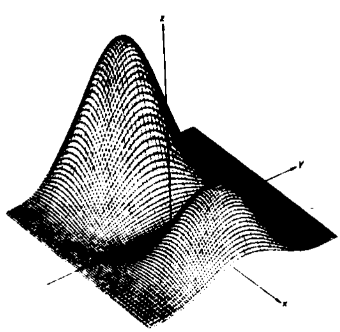
۱۵. (e, e^2, e^3) ۱۶. $(\sqrt{e}, \sqrt{e}, \sqrt{e})$



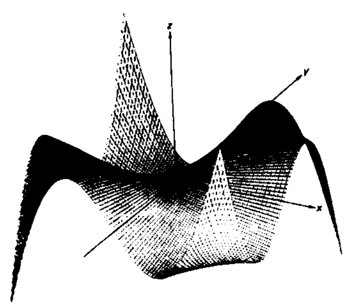
$z = -10x^3y^2$



$z = -10\sqrt{|xy|}$



$z = \left(1.5 - \frac{x}{2}\right)\left(2.25 - y^2\right)^4 \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$



$z = xy\cos(xy)$

ترسیمات کامپیوتری فوق توسط نورتون استار از کالج امهرست طراحی شده است ، و ما با اجازهٔ وی به چاپ آنها مبادرت کرده‌ایم .

مقدار تابع $g(x, y, z) = 2^{xy/z}$ را در هر نقطهٔ زیر بیابید .

۱۷. $(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ ✓　　　۱۸. $(5, -1, 10)$

۱۹. $(\log_2 \pi, 1, \frac{1}{2})$ ✓　　　۲۰. $(9, 4, 12)$ ✓

مقدار تابع

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

را در هر نقطهٔ زیر بیابید .

۲۱. $(1, 1, \ldots, 1)$ ✓　　　۲۲. $(a, a, \ldots, a)$

۲۳. $(1/n, 1/n, \ldots, 1/n)$ ✓　　　۲۴. $(1, 2, \ldots, n)$

۲۵. فرض کنید $f(x, y) = \ln(x/y)$ ، $g(t) = e^t$ ، و $h(t) = 1/t$. $f(g(t), h(t))$ را بیابید .

۲۶. $f(x, y)$ را درصورتی بیابید که $f(x + y, x - y) = 2xy + y^2$.

۲۷. فرض کنید $w(x, y) = 1/xy^2$. $f(x, y, z) = x \cos yz,\ u(x, y) = 2 \sin(x/y),\ v(x, y) = x^2y$. $f(u(x, y), v(x, y), w(x, y))$ را پیدا نمایید .

۲۸. فرض کنید $F(x, y, z) = e^{xyz}$ ، $f(t) = \ln t$ ، $g(t) = t^2$ ، و $h(t) = 1/t^3$. $F(f(t), g(t), h(t))$ را پیدا نمایید .

۲۹. تابع $f(s, s^3, \ldots, s^{2n-1})$ را درصورتی بیابید که $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \ln(x_1 x_2 \cdots x_n)$.

۳۰. $\phi(u(1, -1, 1), v(1, -1, 1), w(1, -1, 1))$ را درصورتی بیابید که $\phi(u, v, w) = 2^u 3^v 4^w$ ، $u(x, y, z) = xyz$ ، $v(x, y, z) = x + y + z$ ، و $w(x, y, z) = xy + xz + yz$.

قلمرو (طبیعی) تابع داده شده از چند متغیر را توصیف کنید .

۳۱. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$　　　۳۲. $z = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$

۳۳. $z = x^2 - y^2$　　　۳۴. $z = \dfrac{xy}{x - y}$

۳۵. $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$　　　۳۶. $z = \dfrac{1}{x^2 - y}$

۳۷. $z = \ln(x + y)$　　　۳۸. $z = \ln(xy)$

۳۹. $z = y + \arccos x$　　　۴۰. $u = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$

۴۱. $u = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$　　　۴۲. $u = \sqrt{16 - x^2 - y^2 - z^2}$

۴۳. $u = e^{xy/z}$ ۴۴. $u = \arcsin x + \arcsin y + \arcsin z$

نمودار تابع داده شده از دو متغیر را توصیف نمایید.

۴۵. $z = 2x + 3y$ ۴۶. $z = 1 - x^2 - y^2$

۴۷. $z = -\sqrt{16 - x^2 - y^2}$ ۴۸. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

۴۹. $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ ۵۰. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

منحنیهای تراز $f(x, y) = c$ تابع داده شده از دو متغیر را به ازای مقادیر مشخص شده از c رسم نمایید.

۵۱. $f(x, y) = x - 2y, c = 0, \pm 1, \pm 2$

۵۲. $f(x, y) = 1 - |x| - |y|, c = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$

۵۳. $f(x, y) = x^2 + 4y^2, c = 0, 1, 2, 3, 4$

۵۴. $f(x, y) = y/x^2 \ (f(0, 0) = 0), c = 0, \pm 1, \pm 2$

۵۵. $f(x, y) = xy, c = 0, \pm 1, \pm 2$

۵۶. $f(x, y) = y - \cos x, c = 0, \pm 1, \pm 2$

سطوح تراز $f(x, y, z) = c$ تابع داده شده از سه متغیر را توصیف نمایید.

۵۷. $f(x, y, z) = x + y + z \quad (-\infty < c < \infty)$

۵۸. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad (0 \le c < \infty)$

۵۹. $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 \quad (0 \le c < \infty)$

۶۰. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 \quad (-\infty < c < \infty)$

۲.۱۳ حدود و پیوستگی

حال حدود و پیوستگی را برای توابع چندمتغیره مطرح می‌کنیم. بحث را با تعمیم مفهوم همسایگی به فضای دو یا چندبعدی آغاز می‌کنیم. فرض کنیم $P_0 = (a, b)$ نقطهٔ ثابتی در صفحه، δ عددی مثبت، و N مجموعهٔ تمام نقاطی چون $P = (x, y)$ با خاصیت

$$|P_0P| < \delta \tag{1}$$

باشد که در آن $|P_0P|$ فاصلهٔ بین P_0 و P است. برحسب مختصات، N مجموعهٔ تمام نقاط (x, y) ی است که

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta, \tag{1'}$$

یعنی، درون دایرهٔ

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = \delta^2$$

به شعاع δ و مرکز (a, b). هر ناحیه از این نوع یک **همسایگی** از نقطهٔ $P_0 = (a, b)$ نام‌دارد.

واضح است که N تعمیم دوبعدی همسایگی یک بعدی $\{x: |x-a| < \delta\}$ می‌باشد .

جوهر نامساوی (۱) ، به خلاف (۱′) ، آن است که n ، یعنی تعداد متغیرهای مستقل را نامشخص می‌گذارد . اگر $n = 3$ ، می‌نویسیم $P_0 = (a, b, c)$ و $P = (x, y, z)$ ، و دراین صورت مجموعهٔ N تعریف شده با (۱) درون کرهٔ

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = \delta^2$$

به شعاع δ و مرکز (a, b, c) است . ما مجددا" N را یک همسایگی می‌نامیم ، این بار نقطهٔ $P_0 = (a, b, c)$ در فضای 3 بعدی است . به‌طورکلی ، فرض کنیم فاصلهٔ بین نقطهٔ ثابت $P_0 = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ و نقطهٔ متغیر $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ در فضای n بعدی به‌صورت‌زیر تعریف شود :

$$|P_0P| = \sqrt{(x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 + \cdots + (x_n-a_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2},$$

که این فرمول به ازای $n = 1, 2, 3$ به فرمولهایی بدل می‌شود که قبلا" برای فاصله‌برخط ، در صفحه ، و در فضای 3 بعدی داشتیم . منظور از همسایگی P_0 هنوز یعنی مجموعهٔ تمام نقاطی چون P که در نامساوی (۱) صدق می‌کنند ، و می‌توان آن را درون "کرهٔ n بعدی "

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 = \delta^2$$

به شعاع δ و مرکز $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ تصور کرد . باید گفت که نمی‌توان کرهٔ n بعدی‌را به‌ازای $n > 3$ کشید ، ولی این ارزش مفهومی چنین ایده‌ای را پایین نخواهد آورد .

منظور از **همسایگی سفتهٔ** نقطهٔ P_0 در فضای n بعدی یعنی همسایگیی از P_0 که نقطهٔ P_0 از آن حذف شده باشد . به عبارت دیگر ، اگر N همسایگی P_0 باشد که با نامساوی (۱) تعریف شده باشد ،همسایگی سفتهٔ نظیر P_0 مجموعهٔ تعریف‌شده‌با نامساوی مضاعف $0 < |P_0P| < \delta$ می‌باشد .

حد تابع چندمتغیره. برای تعریف حد تابع چندمتغیره ، فقط کافی است تعریف حد تابع یک متغیره را ، که در صفحهٔ ۱۱۸ داده شد ، کمی تعدیل کنیم . طرز کار به صورت زیر است. فرض کنیم $f(P)$ یک تابع چندمتغیره باشد که در همسایگی سفته‌ای از P_0 تعریف شده است . همانطور که برحسب مختصات $P_0 = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ و $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ، $f(P)$ اختصاری است برای $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. در این صورت ، گوییم وقتی P به P_0 نزدیک شود ، $f(P)$ *به حد L نزدیک می‌شود (یا در P_0 دارای حد L است) اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ بتوان $\delta > 0$ ای یافت به طوری که هر وقت $0 < |P_0P| < \delta$* ، $|f(P) - L| < \varepsilon$. این

مطلب را به صورت

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = L \tag{۲}$$

یا

$$f(P) \to L \quad \text{،} \quad P \to P_0 \quad \text{وقتی} \tag{۲'}$$

بیان می‌کنیم . همچنین ، وقتی گوییم $f(P)$ در P_0 حد دارد یعنی عددی مانند L موجود است به طوری که وقتی $P \to P_0$ ، $f(P) \to L$.

فرض کنیم $f(P) = f(x, y)$ یک تابع دومتغیره با حد L در نقطهٔ $P_0 = (a, b)$ بوده و $P = (x, y)$ در امتداد منحنی C مار بر P_0 به P_0 نزدیک شود . در این صورت ، "حدجزئی "

$$\lim_{P \to P_0,\ P \in C} f(P) \tag{۳}$$

به دست می‌آید که شبیه حد یکطرفه در تابع یک متغیره می‌باشد . به طور دقیقتر ، هرگاه C به معادلات پارامتری

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \qquad (\alpha \le t \le \beta)$$

باشد که به ازای t_0 ی در (α, β) ، $x(t_0) = a,\ y(t_0) = b$ ، آنگاه (۳) به معنی

$$\lim_{t \to t_0} f(x(t), y(t))$$

می‌باشد . از تعریف حد فورا" نتیجه می‌شود که (۳) ، صرف‌نظر از C ، موجود و مساوی L می‌باشد . بالاخره ، تعریف چیزی راجع به نحوهٔ نزدیک شدن P به P_0 نمی‌گوید . بخصوص، P می‌تواند در امتداد خط افقی $y = b$ یا خط قائم $x = a$ به P_0 نزدیک شود . ازاین‌راه دو حد

$$\lim_{x \to a} f(x, b) \tag{۴}$$

و

$$\lim_{y \to b} f(a, y) \tag{۴'}$$

به دست می‌آیند ،که هر یک حد یک تابع یک متغیره است . این حدود باید مساوی‌حد (۲) باشند ، که آن را به‌طور صریحتر زیر نشان می‌دهیم :

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y). \tag{۵}$$

لذا ، اگر حدود (۴) و (۴') موجود نباشند ، یا وجود داشته ولی مساوی نباشند ،حد (۵) تابع $f(x, y)$ از دو متغیر وجود ندارد .

مثال ۱. تابع

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \qquad (x^2 + y^2 \neq 0)$$

در مبداء $(0, 0)$ حد ندارد. درواقع، اگر (x, y) ابتدا در امتداد محور x و سپس‌درامتداد محور y به مبداء نزدیک شود، خواهیم داشت

$$\lim_{x \to 0} f(x, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1,$$

$$\lim_{y \to 0} f(0, y) = \lim_{y \to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1.$$

چون این دو حد نابرابرند، حد

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

وجود نخواهد داشت.

مثال ۲. هرگاه

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \qquad (x^2 + y^2 \neq 0),$$

آنگاه

$$\lim_{x \to 0} f(x, 0) = \lim_{x \to 0} 0 = 0,$$

$$\lim_{y \to 0} f(0, y) = \lim_{y \to 0} 0 = 0,$$

درنتیجه، وقتی $P = (x, y)$ درامتدادمحور x به $(0, 0)$، و نیز در امتداد محور y به $(0, 0)$ نزدیک شود، $f(x, y) \to 0$. آیا از این می‌توان نتیجه گرفت که

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} \qquad (۶)$$

موجود و مساوی 0 است؟ خیر، نمی‌توان ا زیرا فرض کنیم P در امتداد خط $y = mx$ به‌شیب m به مبداء نزدیک شود. در این صورت، حد جزئی نظیر مساوی است با

$$\lim_{x \to 0} f(x, mx) = \lim_{x \to 0} \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1 + m^2},$$

که مقدارش با m تغییر می‌کند و بخصوص اگر $m \neq 0$ ناصفر است. لذا، حد (۶) موجود

نیست.

پیوستگی یک تابع چند متغیره. پیوستگی توابع چندمتغیره درست مثل توابع یک متغیره تعریف می‌شود. لذا، اگر $f(P)$ یک تابع چند متغیره باشد که در همسایگی نقطهٔ P_0 تعریف شده است، گوییم $f(P)$ در P_0 پیوسته است اگر $f(P)$ در P_0 حد داشته و این حد مساوی $f(P)$ در P_0 باشد؛ درنتیجه،

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0).$$

به زبان ε, δ، گوییم $f(P)$ در P_0 پیوسته است اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ ای موجود باشد به طوری که هر وقت $|P_0P| < \delta$، $|f(P) - f(P_0)| < \varepsilon$ (بحث مربوطه در صفحات ۱۱۸ تا ۱۱۹ را به یاد آورید).

مثال ۳. فرض کنیم $f(x, y)$ مستقل از y باشد، درنتیجه $f(x, y) = g(x)$، و نیز $g(x)$ در a پیوسته باشد. در این صورت، به ازای b دلخواه، $f(x, y)$ در (a, b) پیوسته است. درواقع به‌ازای $\varepsilon > 0$ داده‌شده، $\delta > 0$ ای‌هست‌به‌طوری‌که‌هروقت $|x - a| < \delta$، $|g(x) - g(a)| < \varepsilon$ در این صورت، به ازای همین ε و δ،

$$|P_0P| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$$

نامساوی $|x - a| < \delta$ را ایجاب می‌کند، که خود نتیجه می‌دهد که

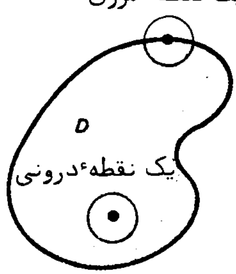
$$|f(x, y) - f(a, b)| = |g(x) - g(a)| < \varepsilon,$$

نشانگر آنکه $f(x, y)$ در (a, b) پیوسته است. به همین نحو، هرگاه $f(x, y)$ مستقل‌از x باشد، درنتیجه $f(x, y) = h(y)$، و $h(y)$ در b پیوسته باشد، آنگاه، به ازای a ی دلخواه، $f(x, y)$ در (a, b) پیوسته می‌باشد.

مثال ۴. فرض‌کنیم $f(x, y)$ و $g(x, y)$ در (a, b) پیوسته‌باشند. دراین‌صورت، $f(x, y) \pm g(x, y)$، $f(x, y)g(x, y)$، و $f(x, y)/g(x, y)$ نیز چنین‌اند مشروط‌براینکه در آخرین‌حالت $g(a, b) \neq 0$. این امر از مشابه قضیهٔ ۷، صفحهٔ ۱۳۵، برای توابع چندمتغیره نتیجه می‌شود. لذا، تابع $(2x^3 - 3y)/(x^2 + xy^2 - 1)$ در نقاط تعریف شده پیوسته می‌باشد. همین امر در مورد تابع $\tan(e^{xy})$ درست است، و این به خاطر تعمیم زیراز نتیجهٔ صفحهٔ ۱۴۱ است که به آسانی ثابت می‌شود: هرگاه $g(x, y)$ در (a, b) و $f(t)$ در $g(a, b)$ پیوسته باشد، آنگاه $f(g(x, y))$ در (a, b) پیوسته می‌باشد. به دلیلی مشابه، می‌توان پیوستگی توابع سه متغیره‌ای چون

$\sin(xy + xz + yz)$ و $\cosh xyz$ را به ثبوت رسانید.

ردهبندی نقاط و مجموعهها در فضای n بعدی. اصطلاح زیر در بررسی توابع چند متغیره مفید است. فرض کنیم D مجموعهای از نقاط در فضای n بعدی باشد. در این صورت، نقطهٔ P یک **نقطهٔ درونی** D است اگر همسایگیی از P موجود باشد که فقط نقاط D را شامل شود. نقطهٔ P یک **نقطهٔ مرزی** D نام دارد اگر هر همسایگی P شامل نقاطی متعلق به D و نقاطی غیرمتعلق به D باشد. این تعاریف در شکل ۵ برای حالتی که D مجموعهای از نقاط در صفحه است شرح داده شدهاند. یک نقطهٔ درونی D باید نقطهای از D باشد (چرا؟)، ولی یک نقطهٔ مرزی D ممکن است نقطهای از D باشد یا نباشد. گوییم مجموعهٔ D *باز* است اگر تمام نقاطش نقطهٔ درونی باشند، و **بسته** است اگر شامل تمام نقاط مرزی خود باشد.



شکل ۵

مجموعهٔ تمام نقاط مرزی D **مرز** D نامیده میشود. لذا، یک مجموعهٔ بسته شامل مرز خودش است، ولی یک مجموعهٔ باز چنین نخواهد بود.

مثال ۵. مجموعهٔ نقاطی از صفحهٔ xy که با نامساویهای $0 < x < 1,\ 0 < y < 1$ تعریف شده باشد باز، و مجموعهٔ تعریف شده با $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$ بسته، و مجموعهٔ تعریف شده با $0 \le x \le 1,\ 0 < y < 1$ نه باز است نه بسته. هر سه مجموعه مرز یکسانی دارند، و آن عبارت است از مربع به رئوس $(0, 0)$، $(0, 1)$، $(1, 0)$، و $(1, 1)$.

پیوستگی بر یک مجموعه. گوییم تابع چندمتغیرهٔ f **بر مجموعهٔ** D (که لزوماً قلمرو f نیست) در فضای n بعدی **پیوسته** است اگر f در هر نقطهاز D پیوسته باشد؛ یعنی، بهازای هر نقطهٔ P_0 در D، وقتی $P \to P_0$، $f(P) \to f(P_0)$. تعریف قبلی ما از حد تابع در یک

نقطه فقط برای نقاط درونی D کارساز است ، ولی با تعدیلی مختصر برای نقاط مرزی‌نیز کارا می‌شود . به طور مشخص، فرض کنیم P_0 یک نقطهٔ مرزی D باشد . گوییم $f(P)$ در P_0 دارای حد L است اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ ای موجود باشد به‌طوری که هروقت P **متعلق به** D بوده و $0 < |P_0P| < \delta$ ، $|f(P) - L| < \varepsilon$. به عبارت دیگر، لازم نیست نامساوی $|f(P) - L| < \varepsilon$ به ازای جمیع نقاط **فضای n بعدی** به‌قدرکافی نزدیک P_0 برقرارباشد، بلکه فقط برای تمام نقاط **مجموعهٔ D** به قدرکافی نزدیک P_0 (غیراز خود P_0) کفایت می‌کند . توجه کنید که اگر P_0 یک نقطهٔ درونی D باشد ، این تعریف حد شامل تعریف قبلی می‌شود (چرا؟) . حال می‌توان راجع به پیوستگی f در نقطهٔ مرزی P_0 از D سخن گفت مشروط بر اینکه البته f در P_0 تعریف شده باشد . در صفحهٔ ۱۵۰ از همین روش برای تعریف پیوستگی تابع یک متغیره در نقاط انتهایی بازهٔ I استفاده شد .

مثال ۶. تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x^2 + y^2 \le 1 \text{ ،} \\ 0 & \text{در غیر این صورت،} \end{cases}$$

بر تمام صفحهٔ xy پیوسته نیست ، زیرا $f(x, y)$ در هیچ نقطه از دایرهٔ یکهٔ $x^2 + y^2 = 1$ حد ندارد (چرا ندارد؟) . اما $f(x, y)$ بر قرص یکهٔ بستهٔ تعریف شده به‌وسیلهٔ نامساوی $x^2 + y^2 \le 1$ ، که دایرهٔ یکه مرز آن است ، پیوسته می‌باشد . این امر فورا "تعریف تعدیل شدهٔ حد و اینکه f برقرص D مقدار ثابت 1 را دارد نتیجه می‌شود .

مسائل

حد داده شده را (در صورت وجود) حساب کنید .

۱) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} (3xy - 2x^2)$

۲) $\lim\limits_{(x,y)\to(\sqrt{3},-1)} \sqrt{x^2 - y^3}$

۳) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^2}$

۴) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

۵) $\lim\limits_{(x,y)\to(\pi,1/4)} x^2 \tan xy$

۶) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,5)} e^{x^2 - xy}$

۷) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4 + y^4}$

۸) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin xy}{x}$

۹) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,1)} \arctan \dfrac{x}{y}$

۱۰) $\lim\limits_{(x,y)\to(4,-\infty)} \tanh (x + y)$

۱۱. $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$

۱۲. $\lim_{(x,y,z)\to(1,-1,e)} \ln(xy^2z^3)$

۱۳. نشان دهید که تابع

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

با آنکه در امتداد هر خط مستقیم مار بر O به حد یکسانی نزدیک می‌شود، در مبداء حد ندارد.

۱۴. یک مجموعهٔ بسته در فضای 2 بعدی مثال بزنید که نقطهٔ درونی نداشته باشد.

آیا تابع داده شدهٔ f برمجموعهٔ مشخص‌شدهٔ D پیوسته است؟ جواب‌خود را توضیح‌دهید.

۱۵. $f(x, y) = \frac{1}{x^2-y^2}, D = \{(x, y): (x-1)^2 + y^2 < \frac{1}{2}\}$

۱۶. $f(x, y) = \cot \pi xy, D = \{(x, y): 0 < x < 1, 0 < y \leq 1\}$

۱۷. $f(x, y) = \frac{1}{\sin \pi x} + \frac{1}{\sin \pi y}, \quad D = \{(x, y): (x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}\}$

۱۸. $f(x, y) = \frac{1}{\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y}$ ، D مثل مسئلهٔ ۱۷

۱۹. $f(x, y, z) = \frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2-1}, \quad D = \{(x, y, z): x^2 + 4y^2 + 4z^2 \leq 1\}$

۲۰. $f(x, y, z) = \ln xyz, \quad D = \{(x, y, z): (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 < 1\}$

۳.۱۳ مشتقات جزئی

فرض‌کنیم f یک تابع n متغیره باشد که در همسایگی نقطهٔ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ تعریف شده است. منظور از مشتق جزئی f نسبت به x_i در $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ که با عبارت

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i} \qquad (1)$$

نموده می‌شود یعنی حد

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{\Delta x_i},$$

که در آن به x_i نمو Δx_i داده شده ولی *سایر متغیرها همه ثابت گرفته شده‌اند*، مشروط بر

اینکه این حد موجود و متناهی باشد. واضح است که می‌توان n مشتق جزئی درنظر گرفت، به ازای هر یک از n متغیر مستقل $x_1, x_2, \ldots, x_n$ یکی. تابع دو متغیرهٔ $f(x, y)$ دو مشتق جزئی دارد، که عبارتنداز

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

و

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y},$$

مشروط براینکه این حدود موجود و متناهی باشند.

اگر علامت $\partial/\partial x_i$ را موجود واحدی‌بگیریم‌که عملش تشکیل مشتق جزئی تابع آمده بعد از آن نسبت به x_i باشد، می‌توان (۱) را به صورت زیر نیز نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (۱')$$

علامت ∂ را می‌توان هنوز " دی " خواند ولواینکه دراینجا با " دی خمیده "سروکارداریم. شناسه‌ها اغلب حذف‌می‌شوند ،و لذا مشتق‌جزئی (۱)را می‌توان به صورت فشردهٔ $\partial f/\partial x_i$ نوشت. برای محاسبهٔ $\partial f/\partial x_i$ فقط‌کافی است تمام متغیرهای مستقل جز x_i راثابت‌بگیریم. لذا، برای محاسبهٔ مشتقات جزئی به تکنیک دیگری نیاز نداریم.

مثال ۱. فرض کنیم $f(x, y) = xe^{xy}$. در این صورت، طبق قاعدهٔ حاصل‌ضرب،

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(xe^{xy}) = e^{xy} + xye^{xy},$$

کـه در محاسبه y را ثابت و $\partial/\partial x$ را d/dx گرفته‌ایم، و

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(xe^{xy}) = x^2 e^{xy},$$

که در محاسبه x را ثابت و $\partial/\partial y$ را d/dy گرفته‌ایم. این مشتقات‌جزئی در هر نقطهٔ (x, y) از صفحه تعریف شده‌اند.

مثال ۲. هرگاه

$$f(x, y, z) = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}},$$

آنگاه ، در هر نقطهٔ (x, y, z) از فضا غیراز مبداء $(0, 0, 0)$ ،

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} - \frac{1}{2}\frac{2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

به آسانی می‌توان تحقیق کرد که دو مشتق جزئی دیگر f عبارتنداز

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

نمادهای دیگری نیز برای مشتقات جزئی وجود دارند. اگر متغیر وابستهٔ $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ را معرفی کنیم ، می‌توانیم به جای $\partial f/\partial x_i$ بنویسیم $\partial u/\partial x_i$. یک نماد متداول f_{x_i} و u_{x_i} به‌جای $\partial f/\partial x_i$ و $\partial u/\partial x_i$ است ، که‌درآنهازیرنویس x_i یعنی مشتقگیری (جزئی) نسبت به x_i می‌باشد. مثلا" ، هرگاه

$$u = f(x, y, z) = xy^2 \sin yz,$$

آنگاه

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_x(x, y, z) = y^2 \sin yz,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f_y(x, y, z) = 2xy \sin yz + xy^2z \cos yz,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = f_z(x, y, z) = xy^3 \cos yz.$$

مثال ۳ . بنابر **قانون گاز کامل** ، فشار p ، حجم V ، و دمای مطلق T یک مل گاز محبوس با فرمول

$$pV = RT$$

به هم مربوطند ، که در آن R ثابت تناسب است که به **ثابت عمومی گاز** معروف می‌باشد. چون

$$V = \frac{RT}{p}, \qquad p = \frac{RT}{V}, \qquad T = \frac{pV}{R},$$

داریم

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{R}{p}, \qquad \frac{\partial V}{\partial p} = -\frac{RT}{p^2},$$

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{R}{V}, \qquad \frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{RT}{V^2},$$

$$\frac{\partial T}{\partial p}=\frac{V}{R}, \qquad \frac{\partial T}{\partial V}=\frac{p}{R}.$$

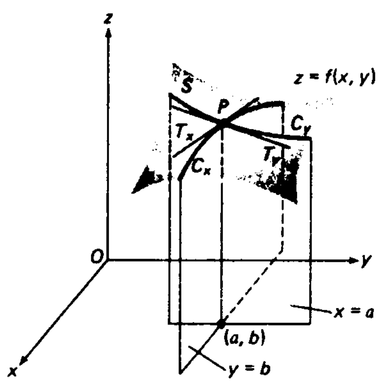
پس نتیجه می‌شود که

$$\frac{\partial p}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial p}=\left(-\frac{RT}{V^2}\right)\left(\frac{R}{p}\right)\left(\frac{V}{R}\right)=-\frac{RT}{pV}=-1.$$

این فرمول باید شما را متقاعد سازد که عبارت سمت چپ را نمی‌توان حاصل ضرب سه کسر تلقی کرد!

در مسائل کار بسته اغلب تصور مشتق جزئی به عنوان میزان تغییر یک متغیر وابسته نسبت به یک متغیر مستقل، در حالی که سایر متغیرهای مستقل ثابت گرفته شده‌اند، یاری دهنده است. لذا، در مثال قبل میزان تغییر حجم نسبت به دما در فشار ثابت $(\partial V/\partial T)$ و میزان تغییر دما نسبت به فشار در حجم ثابت $(\partial T/\partial p)$ را حساب کرده‌ایم. ما همچنین چهار میزان تغییر دیگر را نیز محاسبه کرده‌ایم (آنها را توصیف نمایید).

به آسانی می‌توان مشتقات جزئی تابع دومتغیرهٔ $z=f(x, y)$ را تعبیر هندسی کرد. فرض کنیم f در همسایگی نقطهٔ (a, b) از صفحهٔ xy تعریف شده باشد، و $P=(a, b, f(a, b))$ نقطهٔ نظیر نمودار f باشد که سطحی مانند S در فضاست. در این صورت، صفحهٔ $y=b$ سطح S را در منحنی C_x قطع می‌کند که از P می‌گذرد، و صفحهٔ $x=a$ سطح S را درمنحنی دیگر C_y قطع می‌کند که آن نیز از P می‌گذرد (ر.ک. شکل ۶). فرض کنیم تابع f دارای مشتقات جزئی $f_x(a, b)$ و $f_y(a, b)$ در نقطهٔ (a, b) باشد. در این صورت، C_x در P خط مماسی به شیب $f_x(a, b)$ دارد، و C_y نیز خط مماسی در P منتها با شیب $f_y(a, b)$ خواهد داشت. در



شکل ۶

شکل ، این دو خط مماس با T_x و T_y نموده شده‌اند .

مشتقات جزئی مراتب بالاتر . مشتقات‌جزئی که هم‌اکنون معرفی‌شدندمشتقات *اول* می‌باشند. مشتقات جزئی مراتب بالاتر به‌طور طبیعی تعریف می‌شوند . مثلاً ، فرض کنیم $f(x, y)$ یک تابع دومتغیره باشد که در هر نقطه از یک مجموعهٔ باز مشتقات جزئی (اول) $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ دارد . در این صورت ، f **چهار مشتق جزئی دوم** دارد که عبارتنداز

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

و مشتقات " مخلوط "

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

که فقط در ترتیب مشتقگیری متفاوتند (برای محاسبهٔ $\partial^2 f/\partial x\, \partial y$ ، ابتدا نسبت به y و سپس نسبت به x مشتق‌می‌گیریم ، حال‌آنکه $\partial^2 f/\partial y\partial x$ با مشتقگیری به ترتیب عکس محاسبه می‌شود) . با استفاده از نماد زیرنویس می‌توان این مشتقات جزئی دوم را به صورت زیر نیز نوشت :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = f_{yx}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = f_{xy}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}.$$

توجه کنید که در f_{yx} ابتدا نسبت‌به زیرنویس اول y و سپس نسبت‌به زیرنویس دوم x مشتق می‌گیریم . این عکس ترتیب متغیرهای x و y در مخرج عبارت $\partial^2 f/\partial x\, \partial y$ است ، ولی ترتیب مناسبی است زیرا f_{yx} باید به معنی $(f_y)_x$ ، یعنی مشتق f_y (که خود مشتق f نسبت به y است) نسبت به x ، باشد .

البته ، همهٔ اینها مبتنی بر این فرض است که حدود معرف این مشتقات جزئی دوم موجود و متناهی‌اند . یک نمونه از این‌گونه حد عبارت است از

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\, \partial y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_y(x + \Delta x, y) - f_y(x, y)}{\Delta x}.$$

اگر متغیر وابستهٔ $z = f(x, y)$ وجودداشته‌باشد ، می‌توان به‌جای $\partial^2 f/\partial x^2$ نوشت $\partial^2 z/\partial x^2$ یا z_{xx} ، به جای $\partial^2 f/\partial x\, \partial y$ نوشت $\partial^2 z/\partial x\, \partial y$ یا z_{yx} ، و غیره . مشتقات جزئی‌مراتب بالاتر از دو و مشتقات جزئی مراتب بالاتر توابع با بیش از دو متغیر به صورتی که‌انتظارمی‌رود تعریف می‌شوند . مثلاً ، هرگاه $u = f(x, y, z)$ ، آنگاه

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\right)=(u_{zy})_x=u_{zyx},$$
$$\frac{\partial^4 u}{\partial y\,\partial x\,\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial z^2}\right)=(u_{zzx})_y=u_{zzxy},$$

و غیره .

مثال ۴ . هرگاه

$$f(x, y, z)=xy\ln z \qquad (z>0),$$

آنگاه

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y\ln z, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=x\ln z, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{xy}{z},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(y\ln z)=0,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(x\ln z)=0,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{xy}{z}\right)=-\frac{xy}{z^2},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(x\ln z)=\ln z, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}(y\ln z)=\ln z,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy}{z}\right)=\frac{y}{z}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial z}(y\ln z)=\frac{y}{z}.$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy}{z}\right)=\frac{x}{z}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial z}(x\ln z)=\frac{x}{z},$$

توجه کنید که در مثال‌فوق *مقدار* هر *یک‌از* مشتقات جزئی مخلوط *از* ترتیب مشتقگیری مستقل *است* . به آسانی معلوم می‌شود که این درصورت پیوسته بودن مشتقات‌جزئی مخلوط همواره درست است ، ولی برهان آن در اینجا نخواهد آمد .

معادلات شامل مشتقات جزئی *معادلات دیفرانسیل* جزئی نام دارند ، در مقابل معادلات دیفرانسیل‌معمولی که تاکنون درنظرگرفته‌شده‌اند . یک‌مثال‌از معادلات دیفرانسیل جزئی معادلهٔ *لاپلاس* است :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \qquad (۲)$$

که در مسائل بسیار در ریاضیات محض و کار بسته ظاهر می‌شود. منظور از مرتبهٔ یک معادلهٔ دیفرانسیل جزئی یعنی مرتبهٔ بالاترین مشتق جزئی آمده در معادله. مثلاً، معادلهٔ لاپلاس از مرتبهٔ دو است، و همین‌طور

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t},$$

که معادلهٔ دیفرانسیل جزئی خاصی است که بر پخش یا هدایت گرمای یک‌بعدی حاکم است. جواب معادلهٔ لاپلاس (۲) را یک **تابع توافقی** می‌نامند.

مثال ۵. تابع $u = x^3 - 3xy^2$ توافقی است. در واقع، فوراً معلوم می‌شود که

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - 3y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(-6xy) = 6x - 6x = 0.$$

به عنوان تمرین، نشان دهید که تابع $3x^2y - y^3$ نیز توافقی است.

مسائل

تمام مشتقات جزئی اول تابع داده شده را بیابید.

۱. $f(x, y) = x^2y^3 - x^3y^4$ ✓

۲. $f(x, y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ ✓

۳. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ ✓

۴. $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ ✓

۵. $f(x, y) = \ln(x^3 - y^2)$ ✓

۶. $f(x, y) = e^{-x/y}$ ✓

۷. $f(x, y) = e^{\sin xy}$ ✓

۸. $f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$ ✓

۹. $f(s, t) = \arctan \dfrac{t}{s}$ ✓

۱۰. $g(u, v) = \tan(u^2 - v)$ ✓

۱۱. $h(x, y) = \ln(x + \ln y)$ ✓

۱۲. $k(x, y) = \cos\dfrac{x}{y}\sin\dfrac{y}{x}$ ✓

۱۳. $f(x, y) = x^y$ ✓

۱۴. $f(x, y) = 10^{xy}$ ✓

۱۵. $f(x, y, z) = xy + xz + yz$

۱۶. $f(x, y, z) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} - \dfrac{z}{x}$

۱۷. $f(x, y, z) = \ln xyz$

۱۸. $f(x, y, z) = \sinh xyz$

۱۹. $f(x, y, z) = x^{yz}$

۲۰. $f(x, y, z) = e^{xy/z}$

هرگاه مشتقات جزئی مخلوط f_{xy} و f_{yx} پیوسته باشند، آنگاه $f_{xy} = f_{yx}$. این مطلب‌را برای هر تابع داده شده مستقیما" تحقیق نمایید.

۲۱. $f(x, y) = x^2y^4 - 2x^3y^3 + 3x^6y - 10$

۲۲. $f(x, y) = x^2/y^2$

۲۳. $f(x, y) = y^x$

۲۴. $f(x, y, z) = e^{xyz}$

۲۵. فرض کنید به ازای $x^2 + y^2 \neq 0$ ،

$$f(x, y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

و $f(0, 0) = 0$. نشان دهید در مبداء $f_{xy} \neq f_{yx}$. این مطلب را با این امرکه‌مشتقات جزئی مخلوط در صورت پیوسته بودن مساویند آشتی دهید.

۲۶. فرض کنید $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ تبدیل از مختصات قطبی به مختصات قائم باشد. $\partial x/\partial r$ ، $\partial y/\partial r$ ، $\partial x/\partial\theta$ ، و $\partial y/\partial\theta$ را بیابید.

مشتقات جزئی دوم z_{xx} ، $z_{xy} = z_{yx}$ ، و z_{yy} تابع داده شده را بیابید.

۲۷. $z = x^4y^2 - 3x^2y^3 + 6xy$

۲۸. $z = x^3\sin y + y^3\cos x$

۲۹. $z = e^{x^2y}$

۳۰. $z = \ln(x^2 + y^2)$

۳۱. $z = \sin^2(3x - 4y)$

۳۲. $z = \arctan xy$

۳۳. u_{xxy} را به ازای $u = 2^{xy}$ بیابید.

۳۴. v_{xyx} را به ازای $v = \cos(x + \sin y)$ بیابید.

۳۵. $\dfrac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\,\partial y^n}$ را به ازای $u = x^my^n$ بیابید.

۳۶. $\dfrac{\partial^5 u}{\partial x^3\,\partial y^2}$ را به ازای $u = \sin^2 x\cos^2 y$ بیابید.

۳۷. $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}$ را به ازای $u = \sin xy + \cos xz + \tan yz$ بیابید.

۳۸. $\dfrac{\partial^4 w}{\partial z^2\,\partial x\,\partial y}$ را به ازای $w = \dfrac{x}{y+z}$ بیابید.

۳۹. تابع دومتغیرهٔ $f(x, y)$ چند مشتق جزئی مرتبهٔ n دارد؟ فرض کنید هر مشتق از ترتیب مشتقگیری مستقل باشد، فرضی که در صورت پیوسته بودن مشتقات جزئی مخلوط موجه است.

۴۰. عبارت زیر را حساب کنید:

$$\frac{\partial^3}{\partial x\, \partial y\, \partial z} f(x)g(y)h(z),$$

که در آن f ، g ، و h توابع مشتقپذیری از یک متغیرند.

زاویهٔ بین اضلاع مثلثی به طولهای x و y مساوی θ است. فرض کنید A مساحت مثلث بوده، و z طول ضلع سوم باشد.

۴۱. میزان تغییر A نسبت به θ را درصورتی بیابید که x و y ثابت باشند.

۴۲. میزان تغییر A نسبت به x را درصورتی بیابید که θ و y ثابت باشند.

۴۳. میزان تغییر z نسبت به y را درصورتی بیابید که θ و x ثابت باشند.

۴۴. میزان تغییر z نسبت به θ را درصورتی بیابید که x و y ثابت باشند.

۴۵. فصل مشترک صفحهٔ $x = 1$ با هذلولی‌گون دوار دو پارچهٔ $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ یک هذلولی است. معادلات پارامتری خط مماس براین هذلولی را در نقطهٔ $(1, 1, \sqrt{3})$ بنویسید.

۴۶. صفحهٔ $y = -1$ سهمی‌گون بیضوی $2x^2 + y^2 - z = 0$ را در یک سهمی قطع می‌کند. معادلات تقارنی خط مماس براین سهمی در نقطهٔ $(2, -1, 9)$ را بنویسید.

در *آنالیز مختلط*، که شاخهٔ مهمی از علوم کار بسته است، دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبهٔ اول

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

معروف به *معادلات کشی ــ ریمان*، نقشی اساسی دارد. نشان دهید که هر جفت از توابع u و v زیر در این معادلات صدق می‌کند.

۴۷. $u = x^4 - 6x^2y^2 + y^4, v = 4x^3y - 4xy^3$

۴۸. $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$

۴۹. $u = \cos x \cosh y, v = -\sin x \sinh y$

۵۰. نشان دهید که هر شش تابع مسائل ۴۷ تا ۴۹ توافقی‌اند. چرا انتظار این امر می‌رود؟

۵۱. نشان دهید که تابع

$$u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \qquad (x^2 + y^2 + z^2 \neq 0)$$

جواب صورت سه‌بعدی معادلهٔ لاپلاس است :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

۵۲. نشان دهید که تابع

$$u = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-x^2/4t} \qquad (t > 0)$$

جواب معادلهٔ دیفرانسیل جزئی $\partial u^2/\partial x^2 = \partial u/\partial t$ است. جوابی ساده‌تر بیابید که شامل نمایی باشد.

معادلهٔ دیفرانسیل جزئی مرتبهٔ دوم

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

که درآن c یک ثابت مثبت‌است، **معادلهٔ** موج نام دارد. نشان دهید که معادلهٔ‌دادهشده جواب معادلهٔ موج است.

۵۳. $u = x^2 + c^2t^2$

۵۴. $u = \sin x \sin ct$

۵۵. $u = e^x \cosh ct$

۵۶. فرض کنید f و g توابع دلخواهی از یک متغیر با مشتقات دوم f'' و g'' باشند. نشان دهید که تابع $u = f(x+ct) + g(x-ct)$ جواب معادلهٔ موج است. هر یک از توابع مسائل ۵۳ تا ۵۵ را به این شکل بیان کنید.

۴.۱۳ مشتقپذیری و دیفرانسیلها

گوییم تابع یک متغیرهٔ $f(x)$ در نقطهٔ a مشتقپذیر است اگر $f'(a)$ موجود باشد[1]. این نکات زیادی از رفتار f در مجاورت a را بازگو می‌کند؛ بخصوص، می‌گوید که f در مجاورت a تقریب خط مماس دارد (ر.ک. صفحهٔ ۱۹۸). در حالت تابع دومتغیرهٔ $f(x, y)$، مشتقات جزئی $f_x(a, b)$ و $f_y(a, b)$ در نقطهٔ $P = (a, b)$ اطلاعات نسبتا" کمی از رفتار f در مجاورت P به ما می‌دهند. در واقع، این مشتقات کاملا" به وسیلهٔ مقادیر f بر خطوط مار بر P موازی محورهای مختصات مشخص شده، و در صورت تغییر مقادیر f در سایر نقاط ثابت می‌مانند. این در شکل ۶، صفحهٔ ۱۲۳۶، به‌این معنی است که سطح S را می‌توان، تا جایی که صفحات

---

۱. کلمهٔ " موجود بودن " در مورد مشتق، معمولی یا جزئی، همواره به معنی " موجود و متناهی‌بودن " خواهد بود.

$y = b$ و $x = a$ سطح جدید را در همان منحنیهای C_x و C_y قطع کنند ، بدون تغییرمقادیر $f_x(a, b)$ و $f_y(a, b)$ به هر صورتی که بخواهیم تغییر شکل داد . لذا ، تعریف اینکه تابع $f(x, y)$ درصورتی مشتقپذیر است‌که‌فقط مشتقات‌جزئی $f_x = \partial f/\partial x$ و $f_y = \partial f/\partial y$ موجود باشند مناسب نخواهد بود . بخصوص،وجود مشتقات‌جزئی به‌تعمیم تقریب خط مماس، که ما واقعاً" طالب آنیم ، منجر نمی‌شود (در این خصوص، ر.ک. صفحهٔ ۱۲۶۹) . لذا ، می‌پرسیم چطور *باید* مشتقپذیری یک تابع دو یا چند متغیره تعریف شود ؟

جواب این سئوال از بررسی دقیقتر معنی مشتقپذیری تابع یک متغیرهٔ $f(x)$ ناشی می‌شود . نمو

$$\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) \tag{۱}$$

را درنظر می‌گیریم ،که تغییرمقدار f به‌ازای‌تغییر x از a به $a + \Delta x$ است . دراین‌صورت ، وجود $f'(a)$ به معنی

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(a),$$

یا معادلاً"

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(a) + \alpha(\Delta x),$$

است ، که در آن $\alpha(\Delta x)$ تابعی است از Δx به طوری که

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0 \tag{۲}$$

(نتیجهٔ ۲ ، صفحهٔ ۱۳۱، را به یاد آورید) . لذا ، اگر $f'(a)$ موجود باشد ، نمو (۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\Delta f = f'(a)\, \Delta x + \alpha(\Delta x)\, \Delta x,$$

که در آن $\alpha(\Delta x)$ در (۲) صدق می‌کند . به عبارت دیگر ، اگر $f(x)$ در a مشتقپذیر باشد ، ثابتی چون A موجود است به طوری که

$$\Delta f = A\, \Delta x + \alpha(\Delta x)\, \Delta x, \tag{۳}$$

که‌در آن وقتی $\Delta x \to 0$ ، $\alpha(\Delta x) \to 0$. البته ، $A = f'(a)$ ، ولی این‌امر به‌صورت (۳) بیان شده است ، زیرا تعریفی از مشتقپذیری را می‌خواهیم که در آن ذکری از مشتق نشده باشد!

در واقع ، مشتقپذیری تابع دومتغیرهٔ $f(x, y)$ را ، به‌جای استفاده از مشتقات جزئی f_x و f_y با تعمیم فرمول (۳) تعریف می‌کنیم .

تعریف مشتقپذیری . برای این کار ، فرض کنیم $f(x, y)$ یک تابع دومتغیرهٔ تعریف شده در همسایگی نقطهٔ (a, b) بوده ، و نمو

$$\Delta f = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) \tag{۴}$$

را درنظر می‌گیریم که تغییر مقدار f به‌ازای تغییر x از a تا $a + \Delta x$ و تغییر y از b تا $b + \Delta y$ می‌باشد .فرض کنیم به ازای هر نقطهٔ $(a + \Delta x, b + \Delta y)$ در همسایگی سفتهٔ (a, b) بتوان Δf را به شکل زیر

$$\Delta f = A\,\Delta x + B\,\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\,\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\,\Delta y, \tag{۵}$$

که مشابه (۳) است ، نمایش داد که در آن A و B ثابت بوده ،و $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ و $\beta(\Delta x, \Delta y)$ توابعی از Δx و Δy اند به طوری که

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \alpha(\Delta x, \Delta y) = 0, \qquad \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0. \tag{۶}$$

در این صورت ، گوییم f در (a, b) مشتقپذیر است ، و عبارت $A\,\Delta x + B\,\Delta y$ را **دیفرانسیل (کل)** f در (a, b) نامیده و با df نشان می‌دهیم ؛ درنتیجه ،

$$df = A\,\Delta x + B\,\Delta y. \tag{۷}$$

قضیهٔ زیر شایستگی این تعریف‌مشتقپذیری را برای تابع دومتغیرهٔ f تأیید می‌کند . این قضیه نشان‌می‌دهد که خواص‌توابع مشتقپذیر دومتغیره خیلی‌شبیه خواص توابع مشتقپذیر یک متغیره می‌باشند .

قضیهٔ ۱ (نتایج مشتقپذیری) . *فرض کنیم f یک تابع دومتغیره باشد که در (a, b) مشتقپذیر است . در این صورت ، f در (a, b) پیوسته بوده و دارای مشتقات جزئی f_x و f_y در (a, b) می‌باشد .*

برهان . از فرمولهای (۴) و (۶) فورا" نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \Delta f &= \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} [f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)] \\ &= \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} [A\,\Delta x + B\,\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\,\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\,\Delta y] = 0,\end{aligned}$$

و این طریقهٔ نمو بیان آن است که f در (a, b) پیوسته می‌باشد . با قرار دادن $\Delta y = 0$ در (۴) و (۵) ، به دست می‌آوریم

$$\Delta f = f(a + \Delta x, b) - f(a, b) = A\,\Delta x + \alpha(\Delta x, 0)\,\Delta x,$$

و درنتیجه ، به خاطر (۶) ،

$$f_x(a, b) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x, b) - f(a, b)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [A + \alpha(\Delta x, 0)] = A,$$

یعنی ، $f_x(a, b)$ موجود و مساوی A می‌باشد . به‌همین‌نحو ، $f_y(a, b)$ موجود ومساوی B می‌باشد .

نتیجه . *هرگاه f در (a, b) مشتقپذیر باشد ، آنگاه ، به ازای تمام $|\Delta x|$ و $|\Delta y|$ های به قدر کافی کوچک ،*

$$\Delta f = [f_x(a, b) + \alpha(\Delta x, \Delta y)]\,\Delta x + [f_y(a, b) + \beta(\Delta x, \Delta y)]\,\Delta y$$

که درآن وقتی $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ ، $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ و $\beta(\Delta x, \Delta y)$ هر دو به‌صفرنزدیک‌می‌شوند و به‌علاوه ،

$$df = f_x(a, b)\,\Delta x + f_y(a, b)\,\Delta y. \qquad (۸)$$

برهان . $A = f_x(a, b)$ و $B = f_y(a, b)$ را در فرمولهای (۵) و (۷) بگذارید .

مثال ۱ . هرگاه $f(x, y) = Ax + By$ و نقطهٔ (a, b) دلخواه باشد ، آنگاه

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)\\ &= A(a + \Delta x) + B(b + \Delta y) - (Aa + Bb)\\ &= A\,\Delta x + B\,\Delta y,\end{aligned}$$

که به شکل (۵) به ازای $\alpha(\Delta x, \Delta y) \equiv 0$ و $\beta(\Delta x, \Delta y) \equiv 0$. بنابراین ، f همه‌جا (یعنی ، در هر نقطه از صفحه) مشتقپذیر با دیفرانسیل $df = A\,\Delta x + B\,\Delta y$ است . توجه کنید که ، همانند درنتیجه ، $A = f_x, B = f_y$. هرگاه $A = 1$ و $B = 0$ ، آنگاه $f(x, y) = x$ و $df = dx = \Delta x$ ولی‌هرگاه $A = 0$ و $B = 1$ ، آنگاه $f(x, y) = y$ و $df = dy = \Delta y$. لذا ، **نموها و دیفرانسیلهای متغیرهای مستقل با هم مساویند .**

مثال ۲ . هرگاه $f(x, y) = 4x^2 - 3xy$ و (a, b) دلخواه باشد ، آنگاه

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)\\ &= 4(a + \Delta x)^2 - 3(a + \Delta x)(b + \Delta y) - (4a^2 - 3ab)\\ &= 8a\,\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 3b\,\Delta x - 3a\,\Delta y - 3\,\Delta x\,\Delta y\\ &= (8a - 3b)\,\Delta x - 3a\,\Delta y + 4(\Delta x)^2 - 3\,\Delta x\,\Delta y,\end{aligned}$$

که به شکل (۵) به ازای $A = 8a - 3b$ ، $B = -3a$ ، $\alpha = 4\,\Delta x$ ، و $\beta = -3\,\Delta x$. لذا ، چون وقتی $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ ، $\alpha \to 0$ و $\beta \to 0$ ، f همه جا مشتقپذیر است؛ دیفرانسیل

مساوی است با $df = (8a - 3b)\,\Delta x - 3a\,\Delta y$ ، که درآن $A = f_x(a, b)$ و $B = f_y(a, b)$. توجه کنید که در این‌حالت توابع α و β منحصر به فرد نیستند؛ و در واقع می‌توان $\alpha = 4\,\Delta x - 3\,\Delta y$ و $\beta = 0$ را اختیار کرد.

چون $\Delta x = dx$ و $\Delta y = dy$ ، همانطور که در مثال ۱ دیدیم، می‌توان به‌جای (۸) نوشت

$$df = f_x(a, b)\,dx + f_y(a, b)\,dy, \qquad (۸)$$

که به نوبهٔ خود قابل نوشتن به صورت فشرده‌تر زیر است:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy. \qquad (۹)$$

این فرمول دیفرانسیل کل df را به صورت مجموع " دیفرانسیلهای جزئی" $(\partial f/\partial x)\,dx$ و $(\partial f/\partial y)\,dy$ بیان‌می‌کند. تعمیم فرمول (۹) به تابع n متغیره $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ عبارت‌است از

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,dx_n. \qquad (۹')$$

برای اثبات (′۹)، ابتدا مشتقپذیری و دیفرانسیل تابع n متغیره به کمک فرمولهایی تعریف می‌شوند که تعمیم طبیعی فرمولهای (۵) تا (۷) می‌باشند. جزئیات را به عنوان تمرین می‌گذاریم.

مثال ۳. دیفرانسیل کل تابع $f(x, y, z) = xy \ln z$ ، که در مثال ۴، صفحهٔ ۱۲۳۸، درنظر گرفته شد، عبارت است از

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz = (y \ln z)\,dx + (x \ln z)\,dy + \frac{xy}{z}\,dz.$$

می‌توان مشتقپذیری f را در هر نقطهٔ (x, y, z) که $z > 0$ "مستقیما" ثابت کرد، ولی این امر از قضیهٔ ۲ زیر (که به توابع سه متغیره تعمیم یافته) آسانتر به دست می‌آید.

مثال ۴. تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x > 0 \text{ و } y > 0 \text{ ،} \\ 0 & \text{در غیر این صورت ،} \end{cases}$$

در مبداء $O = (0, 0)$ پیوسته نیست، زیرا هر همسایگی O شامل نقاطی است که در آنها f

مقدار 1 می‌گیرد و نیز حاوی نقاطی است که در آنها f مقدار 0 را دارد. پس از قضیهٔ ۱ نتیجه می‌شود که f در O مشتقپذیر نیست. اما هر دو مشتق جزئی f_x و f_y در O وجود دارند. در واقع، f بر هر دو محور مختصات مقدار ثابت 0 را دارد؛ و لذا،

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0,$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} 0 = 0.$$

مثال فوق نشان می‌دهد که ممکن است یک تابع دومتغیره حتی با داشتن مشتقات جزئی مشتقپذیر نباشد. از آن‌سو، همانطور که در قضیهٔ زیر ثابت شده است، یک تابع با مشتقات جزئی **پیوسته** باید مشتقپذیر باشد.

قضیهٔ ۲ (پیوستگی مشتقات جزئی مشتقپذیری را ایجاب می‌کند). *هرگاه f تابع دو متغیره‌ای با مشتقات جزئی f_x و f_y در همسایگی (a, b) بوده و این مشتقات در (a, b) پیوسته باشند، آنگاه f در (a, b) پیوسته خواهد بود.*

برهان (اختیاری). فرض کنیم $(a + \Delta x, b + \Delta y)$ نقطه‌ای در همسایگی داده شدهٔ N باشد. در این صورت،

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) \\ &= [f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b + \Delta y)] + [f(a, b + \Delta y) - f(a, b)] \\ &= [g(a + \Delta x) - g(a)] + [h(b + \Delta y) - h(b)], \end{aligned}$$

که در آن دو تابع کمکی یک متغیرهٔ

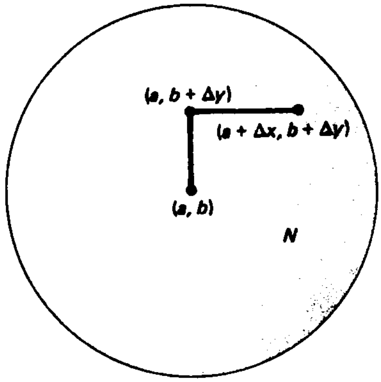
$$g(x) = f(x, b + \Delta y) \qquad (a \le x \le a + \Delta x)$$

(Δy در این بخش از برهان ثابت است) و

$$h(y) = f(a, y) \qquad (b \le y \le b + \Delta y)$$

آمده‌اند. توابع g و h هردو بر قلمروهایشان، که پاره‌خطهایی در همسایگی N اند، مشتقپذیر می‌باشند (ر.ک. شکل ۷). لذا، می‌توان قضیهٔ مقدار میانگین (ر.ک. صفحهٔ ۲۵۸) را بر هر دو تفاضل $g(a + \Delta x) - g(a)$ و $h(b + \Delta y) - h(b)$ اعمال کرد. درنتیجه، خواهیم داشت

$$\Delta f = \frac{dg(a + t\,\Delta x)}{dx}\,\Delta x + \frac{dh(b + u\,\Delta y)}{dy}\,\Delta y,$$



شکل ۷

که در آن t و u اعدادی بین 0 و 1 هستند؛ توجه کنید که $a + t\,\Delta x$ بین a و $a + \Delta x$، و $b + u\,\Delta y$ بین b و $b + \Delta y$ قرار دارند و این صرف‌نظر از علایم Δx و Δy است؛ درنتیجه، هر دو نقطهٔ $(a + t\,\Delta x, b + \Delta y)$ و $(a, b + u\,\Delta y)$ در N واقع می‌باشند. به‌علاوه،

$$\frac{dg(a + t\,\Delta x)}{dx} = f_x(a + t\,\Delta x, b + \Delta y),$$

$$\frac{dh(b + u\,\Delta y)}{dy} = f_y(a, b + u\,\Delta y),$$

و درنتیجه،

$$\Delta f = f_x(a + t\,\Delta x, b + \Delta y)\,\Delta x + f_y(a, b + u\,\Delta y)\,\Delta y. \tag{۱۰}$$

رابطهٔ (۱۰) را می‌توان برحسب توابع

$$\alpha(\Delta x, \Delta y) = f_x(a + t\,\Delta x, b + \Delta y) - f_x(a, b),$$
$$\beta(\Delta x, \Delta y) = f_y(a, b + u\,\Delta y) - f_y(a, b)$$

به شکل زیر نوشت:

$$\Delta f = f_x(a, b)\,\Delta x + f_y(a, b)\,\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\,\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\,\Delta y. \tag{۱۱}$$

اما، طبق فرض، f_x و f_y در (a, b) پیوسته‌اند، و $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ ایجاب می‌کند که $(a + t\,\Delta x, b + \Delta y) \to (a, b)$ و $(a, b + u\,\Delta y) \to (a, b)$. پس نتیجه می‌شود که وقتی $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$، $\alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$ و $\beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$، و این همراه با فرمول (۱۱) مشتقپذیری f در (a, b) را ثابت خواهد کرد.

تقریب به وسیلهٔ دیفرانسیلها. درست مثل حالت توابع یک متغیره، می‌توان به کمک دیفرانسیلها محاسبات تقریبی انجام داد، به این ترتیب که تقریب $\Delta f \approx df$ در صورتی مناسب است که قدرمطلق نمو متغیرهای مستقل کوچک باشند.

مثال ۵. $\sqrt{(2.98)^2 + (4.03)^2}$ را تخمین بزنید.

حل. فرض کنیم $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. پس

$$\sqrt{(2.98)^2 + (4.03)^2} = f(3 + \Delta x, 4 + \Delta y),$$

که در آن $\Delta x = -0.02$ و $\Delta y = 0.03$. اما

$$\Delta f = f(3 + \Delta x, 4 + \Delta y) - f(3, 4) \approx df = f_x(3, 4)\,\Delta x + f_y(3, 4)\,\Delta y,$$

یا معادلاً

$$f(3 + \Delta x, 4 + \Delta y) \approx f(3, 4) + f_x(3, 4)\,\Delta x + f_y(3, 4)\,\Delta y.$$

در اینجا

$$f(3, 4) = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

و

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

درنتیجه،

$$f_x(3, 4) = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5}, \qquad f_y(3, 4) = \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{4}{5}.$$

بنابراین، در مقایسه با مقدار دقیق 5.012115 تا شش رقم اعشار،

$$\sqrt{(2.98)^2 + (4.03)^2} \approx 5 + \frac{3}{5}(-0.02) + \frac{4}{5}(0.03) = 5.012.$$

مثال ۶. حجم یک ورقهٔ فلزی به ضخامت 1-mm برای ساختن یک جعبهٔ مکعب مستطیل بسته به طول 48 cm، عرض 36 cm، و ارتفاع 30 cm (ابعاد درونی) را تخمین بزنید.

حل. فرض کنیم x طول، y عرض، و z ارتفاع جعبه باشد. پس حجم جعبه مساوی است با $f(x, y, z) = xyz$، و حجم فلز لازم برای ساختن آن مساوی است با

$$\Delta f = f(48.2, 36.2, 30.2) - f(48, 36, 30)$$
$$\approx df = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z = yz\,\Delta x + xz\,\Delta y + xy\,\Delta z,$$

که در آن $x = 48$ ، $y = 36$ ، $z = 30$ ، و $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.2$. بنابراین ، درمقایسه با مقدار دقیق $\Delta f = 48.2(36.2)(30.2) - 48(36)(30) = 854.168\ \text{cm}^3$ ،

$$\Delta f \approx [36(30) + 48(30) + 48(36)](0.2) = 4248(0.2) = 849.6\ \text{cm}^3$$

با آنکه این تقریب به خوبی تقریب مثال قبل نیست ، خطای نسبی آن (ر.ک. مسئلهٔ ۳۱، صفحهٔ ۲۰۴) فقط $4.568/854.168 \approx 0.005$ می‌باشد .

مسائل

۱. نمو $\Delta f = f(a + \Delta x, y + \Delta y) - f(a, b)$ را در صورتی بیابید که $f(x, y) = \ln xy$ ، $(a, b) = (1, 1)$ ، و $\Delta x = -\frac{1}{2}, \Delta y = 3$.

۲. نمو

$$\Delta f = f(a + \Delta x, b + \Delta y, c + \Delta z) - f(a, b, c)$$

را درصورتی بیابید که $f(x, y, z) = 2xy - 3xz + yz$ ، $(a, b, c) = (2, 1, 4)$ ، و $\Delta x = 3$ ، $\Delta y = -1$ ، $\Delta z = 2$.

دیفرانسیل کل تابع داده شده را بیابید .

۳. $f(x, y) = x^2y - xy^3 + x^3y^2$

۴. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x - y}$

۵. $f(x, y) = \tanh^{-1}\dfrac{x}{y}$

۶. $f(x, y) = \operatorname{arccot}\dfrac{y}{x}$

۷. $g(s, t) = e^{st}$

۸. $h(u, v) = \ln\sqrt{u^2 + v^4}$

۹. $f(x, y, z) = 2^x3^y4^z$

۱۰. $f(x, y, z) = x^{yz^2}$

۱۱. $f(x, y, z) = \dfrac{x + y}{y + z}$

۱۲. $g(s, t, u, v) = s^2t^{-1}u^3v^{-4}$

۱۳. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1x_2\cdots x_n$

۱۴. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 10^{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}$

۱۵. با استفاده از دیفرانسیلها ، تغییر

$$f(x, y) = \arctan\frac{x}{y}$$

را به ازای تغییر (x, y) از $(1, 1)$ به $(0.96, 1.03)$ تخمین بزنید .

۱۶. با استفاده از دیفرانسیلها ، تغییر

$$f(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}}$$

را به ازای تغییر (x, y, z) از $(2, 3, 4)$ به $(2.01, 3.02, 3.97)$ تخمین بزنید .

کمیات زیر را با استفاده از دیفرانسیلها تخمین بزنید .

۱۷. $(1.002)(2.003)^2(3.004)^3$
۱۸. $\sqrt{(1.06)^2 + (1.97)^3}$

۱۹. $(0.98)^{1.05}$
۲۰. $\sin 31° \cos 58°$

۲۱. $\ln (\sqrt{1.04} + \sqrt[3]{1.08} - 1)$
۲۲. $\sqrt[4]{0.97 \sqrt[3]{(1.04)^2}}$

۲۳. تغییر طول یک‌قطر مستطیل به‌طول $x = 30$ cm و عرض $y = 16$ cm را درصورتی‌تخمین بزنید که x به اندازهٔ 3 mm افزایش و y به اندازهٔ 1 mm کاهش یابد .

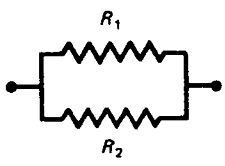
۲۴. حجم ورقهٔ فلز لازم به ضخامت 0.05-in برای ساختن یک قوطی بسته بـه شعاع 4 in و ارتفاع 12 in (ابعاد درونی) را تخمین بزنید .

۲۵. شعاع بالایی r_1 یک مخروط ناقص از 8 تا 8.3 cm افزایش یافته ، شعاع r_2 قاعده‌اش از 12 به 11.8 cm کاهش یافته ، و ارتفاع h آن از 10 cm به 10.1 cm افزایش می‌یابـد . تغییر حجم آن را تخمین بزنید .

۲۶. اگر دو مقاومت R_1 و R_2 به‌طور موازی ، مثل شکل ۸ ، به هم وصل شوند ، مقاومت معادل R آنها در فرمول زیر صدق می‌کند :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

فرض کنید $R_1 = 200$ اهم و $R_2 = 300$ اهم ، که خطا در سنجش آنها حداکثر 2 اهم است . خطای ماکزیمم در محاسبهٔ مقدار R را تخمین بزنید .



شکل ۸

مستقیما " از تعریف مشتقپذیری ثابت کنید تابع داده شده مشتقپذیر است ؛ یعنی ، اعداد A و B و توابع α و β را طوری بیابید که در فرمولهای (۵) و (۶) به ازای هر نقطهٔ (a, b) در

صفحهٔ xy صدق نمایند.

۲۷. $f(x, y) = x^2 + y^2$ ۲۸. $f(x, y) = (x + y)^2$

۲۹. $f(x, y) = x^2y - xy^2$ ۳۰. $f(x, y) = e^{xy}$

۳۱. نشان دهید تابع $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ در مبداء مشتقپذیر نیست.

۳۲. نشان دهید تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} x \text{ ، } & |x| \le |y| \text{ اگر} \\ -x \text{ ، } & |x| > |y| \text{ اگر} \end{cases}$$

در مبداء پیوسته بوده و مشتقات جزئی دارد، ولی درآن مشتقپذیر نیست. نشان دهید که این با قضیهٔ ۲ سازگار است.

۳۳. فرمول مشابه (۵) را برای تابع سه متغیرهٔ $f(x, y, z)$ بنویسید.

عبارت مربوط به Δf در صورت مسئلهٔ ۲ داده شده است.

۳۴. نشان دهید تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ ، } & x^2 + y^2 \neq 0 \text{ اگر} \\ 0 \text{ ، } & x = y = 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

علی‌رغم اینکه مشتقات جزئی‌اش در مبداء پیوسته نیستند، در این نقطه مشتقپذیر است. لذا، شرایط مشتقپذیری در قضیهٔ ۲ کافی‌اند، ولی لازم نیستند. (به بیان نادقیق، مشتقپذیری یک تابع چندمتغیره بیشتر از وجود مشتقات جزئی اول ولی کمتر از پیوستگی آنها را طالب است.)

۵.۱۳ قاعدهٔ زنجیره‌ای و مشتقگیری ضمنی

حال مشابه‌های چندمتغیرهٔ قاعدهٔ زنجیره‌ای

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt}$$

را ارائه می‌دهیم، که با آنها می‌توان از توابع مرکب چند متغیره مشتق گرفت. برای‌سادگی با تابع از دو متغیر x و y که هر یک تابعی از متغیر مستقل t است شروع می‌کنیم. حالت کلیتر یک تابع با بیش‌از دو شناسه که هر یک تابعی از چند متغیرمستقل است، بعداً مطرح خواهد شد.

قضیهٔ ۳ (قاعدهٔ زنجیره‌ای برای یک تابع دومتغیره). فرض کنیم $x = x(t)$ و $y = y(t)$

توابعی از یک متغیر بوده و هر دو در t مشتقپذیر باشند، و $f(x, y)$ تابعی از دومتغیرباشد که در $(x(t), y(t))$ مشتقپذیر است. دراین صورت، تابع مرکب $F(t)$، که با $F(t) = f(x(t), y(t))$ تعریف شده است، در t مشتقپذیر بوده و مشتقش از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$F'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t), \tag{۱}$$

که در آن پریم مشتقگیری نسبت به t را نشان می‌دهد.

برهان (اختیاری). توجه کنید که در این صورت از قاعدهٔ زنجیره‌ای، اگرچه $f(x, y)$ تابعی دومتغیره است، ولی $F(t)$ تابعی از یک متغیر می‌باشد. چون $f(x, y)$ در $(x(t), y(t))$ مشتقپذیر است، بنابر نتیجهٔ صفحهٔ ۱۲۴۵،

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)\\ &= [f_x(x, y) + \alpha(\Delta x, \Delta y)]\,\Delta x + [f_y(x, y) + \beta(\Delta x, \Delta y)]\,\Delta y,\end{aligned}$$

که در آن وقتی $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$، $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ و $\beta(\Delta x, \Delta y)$ هر دو به صفر نزدیک‌می‌شوند. تا بحال $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ و $\beta(\Delta x, \Delta y)$ فقط به ازای $(\Delta x, \Delta y) \neq (0, 0)$ تعریف شده بودند، ولی اینک قلمرو این توابع را با فرض $\alpha(0, 0) = 0$ و $\beta(0, 0) = 0$ وسعت بخشیده، بدین ترتیب‌هر دو تابع را در $(\Delta x, \Delta y) = (0, 0)$ پیوسته می‌سازیم.

حال Δf را بر نمو Δt متغیر مستقل تقسیم کرده، و با رفتن $\Delta t \to 0$ حد می‌گیریم. این کار نتیجه می‌دهد که

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta t}\\ &= \lim_{\Delta t \to 0} [f_x(x, y) + \alpha(\Delta x, \Delta y)] \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}\\ &\quad + \lim_{\Delta t \to 0} [f_y(x, y) + \beta(\Delta x, \Delta y)] \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t},\end{aligned} \tag{۲}$$

که در آن $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$ و $\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$ نمو متغیرهای وابستهٔ x و y می‌باشند. به‌علاوه، $x(t)$ و $y(t)$ در t مشتقپذیرند؛ و درنتیجه، در t پیوسته می‌باشند. بنا براین، $\Delta t \to 0$ ایجاب می‌کند که $\Delta x \to 0$ و $\Delta y \to 0$؛ درنتیجه،

$$\lim_{\Delta t \to 0} \alpha(\Delta x, \Delta y) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \alpha(\Delta x, \Delta y) = 0 \tag{۳}$$

و

$$\lim_{\Delta t \to 0} \beta(\Delta x, \Delta y) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0. \tag{۳'}$$

این امر که $\alpha(0, 0) = 0$ و $\beta(0, 0) = 0$، و درنتیجه $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ و $\beta(\Delta x, \Delta y)$ در $(\Delta x, \Delta y) = (0, 0)$ پیوسته‌اند، در این نتیجه‌گیری حیاتی است چرا که نمی‌توان $(\Delta x, \Delta y) \neq (0, 0)$ را تضمین نمود. (به یاد آورید که Δx و Δy دلخواه نیستند، و به وسیلهٔ مقدار Δt معین می‌شوند.) پس از (۲)، (۳)، و (۳′) معلوم می‌شود که

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta t} = f_x(x, y)x'(t) + f_y(x, y)y'(t),$$

یا معادلاً

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t)) - f(x(t), y(t))}{\Delta t} = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t), \tag{۴}$$

زیرا $x = x(t)$ و $y = y(t)$ و $x + \Delta x = x(t + \Delta t),\ y + \Delta y = y(t + \Delta t)$. حال برهان قاعدهٔ زنجیره‌ای (۱) کامل است، زیرا حد (۴) چیزی جز مشتق تابع مرکب $F(t) = f(x(t), y(t))$ در t نمی‌باشد.

فرمول (۱) را می‌توان به طور فشرده‌تر زیر نوشت:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt},$$

که در آن شناسه‌های توابع حذف شده‌اند. حتی این رابطه را می‌توان ساده‌تر نوشت:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{۵}$$

بالاخره، چون f یک تابع دو متغیره است، نوشتن مشتق معمولی df/dt در سمت چپ (۵) یعنی هر شناسهٔ f تابعی از یک متغیر، یعنی t، گرفته شده است. با این فرض، می‌توان بدون علامت اضافی F، که فقط برای ایجاد تمایز بین $f(x, y)$ و $f(x(t), y(t))$ وارد شده‌بود، کار کرد.

مثال ۱. dw/dt را درصورتی بیابید که $w = f(x, y) = x^2 + xy$، $x = e^t$، و $y = \sin t$.

حل. دراینجا متغیر وابستهٔ دیگر w را وارد می‌کنیم، که قاعدهٔ زنجیره‌ای (۵) نسبت به آن شکل زیر را به خود می‌گیرد:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{۵′}$$

چون $\partial w/\partial x = 2x + y, \partial w/\partial y = x, dx/dt = e^t, dy/dt = \cos t$ ، معلوم می‌شود که

$$\frac{dw}{dt} = (2x + y)e^t + x \cos t = 2e^{2t} + e^t \sin t + e^t \cos t.$$

همین جواب را می‌توان بدون کمک (۵′) به دست آورد به این ترتیب که ابتدا $x = e^t$ و $y = \sin t$ را در $w = x^2 + xy$ گذارده ، و سپس مشتقگیری می‌کنیم :

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d}{dt}(e^{2t} + e^t \sin t) = 2e^{2t} + e^t \sin t + e^t \cos t.$$

از قضیهٔ ۳ می‌توان قاعدهٔ زنجیره‌ای را برای حالت کلیتری که شناسه‌های $f(x, y)$ توابعی از چند متغیرند به‌آسانی به‌دست آورد . مثلا" ، فرض کنیم $x = x(t, u)$ و $y = y(t, u)$ که درآنها x و y توابع مشتقپذیری ازدو متغیر t و u می‌باشند . اگر u را ثابت بگیریم ، x و y به توابعی از متغیر t تحویل می‌شوند ، و می‌توان قضیه را به کار برده نتیجه گرفت که

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}, \qquad (۶)$$

که در آن هر سه مشتق معمولی (۵) مشتقات جزئی می‌باشند . به همین نحو ،اگر t راثابت بگیریم ، x و y به توابعی از متغیر u تحویل شده ، و به دست می‌آوریم

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}. \qquad (۶′)$$

در اینجا مجددا" می‌توان تابع مرکب F را وارد کرد که با $F(t, u) = f(x(t, u), y(t, u))$ تعریف می‌شود ، ولی ساده‌تر است که دو تابع $f(x, y)$ و $f(x(t, u), y(t, u))$ را یکی بگیریم که برحسب متغیرهای مختلف نوشته شده‌اند .

مثال ۲ . $\partial f/\partial t$ و $\partial f/\partial u$ را درصورتی بیابید که $f(x, y) = \ln (x^2 + y^2)$ ، $x = tu$ ، و $y = t/u$

حل . چون

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = u, \qquad \frac{\partial x}{\partial u} = t, \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{u}, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{t}{u^2},$$

از (۶) و (۶′) معلوم می‌شود که

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{2x}{x^2+y^2}u+\frac{2y}{x^2+y^2}\frac{1}{u}=\frac{2x^2}{t(x^2+y^2)}+\frac{2y^2}{t(x^2+y^2)}=\frac{2}{t},$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{2x}{x^2+y^2}t+\frac{2y}{x^2+y^2}\left(-\frac{t}{u^2}\right)=\frac{2}{t^2u^2+\dfrac{t^2}{u^2}}\left(t^2u-\frac{t^2}{u^3}\right)=\frac{2(u^4-1)}{u(u^4+1)}.$$

به عنوان تمرین، این مشتقات را به کمک (۶) و (۶′) به این ترتیب حساب کنید که ابتدا $x=tu$ و $y=t/u$ را در $f(x, y)=\ln(x^2+y^2)$ بگذارید.

تعمیم طبیعی فرمول (۵) به تابع $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ که n شناسه‌اش به متغیر t وابسته‌اند به صورت زیر است:

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}, \tag{۷}$$

و تقریباً" به همان صورت ثابت می‌شود (جزئیات را حذف می‌کنیم). به همین‌نحو، تعمیم (۶) و (۶′) به تابع $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ که n شناسه‌اش وابسته به m متغیر مستقل جدید $t_1, t_2, \ldots, t_m$ است خواهد بود:

$$\frac{\partial f}{\partial t_j}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_j}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_j}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_j}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t_j} \qquad (j=1, 2, \ldots, m). \tag{۸}$$

دو فرمول اخیر قواعد زنجیره‌ای " اصلی " اند که تمام صورتهای قبل به انضمام فرمول

$$\frac{df}{dt}=\frac{df}{dx}\frac{dx}{dt}$$

حالات خاصی از آنها می‌باشند. به ویژگیهای مشترک (۷) و (۸) توجه کنید:

(یک) طرف راست فرمول شامل n جمله است، به ازای هر متغیر " میانی" $x_1, x_2, \ldots, x_n$ یکی؛

(دو) هر یک از این جملات حاصل‌ضرب دو مشتق است که متغیر میانی در مخرج عامل اول و درصورت عامل دوم ظاهر شده است؛

(سه) در تمام n جمله صورت عامل اول و مخرج عامل دوم نظیر صورت و مخرج مشتقی است که حساب می‌شود.

مثال ۳. dw/dt را درصورتی بیابید که $w=xyz$، $x=t^2$، $y=\ln t$، و $z=\sinh t$.

حل. بنابر فرمول (۷) به ازای $n = 3$ و متغیر وابستهٔ w به جای f ، داریم

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$
$$= (yz)(2t) + (xz)\left(\frac{1}{t}\right) + (xy)(\cosh t)$$
$$= 2t \ln t \sinh t + t \sinh t + t^2 \ln t \cosh t.$$

مثال زیر طرز استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای برای توابع چند متغیره در حل مسائل میزانهای مرتبط‌را نشان می‌دهد.

مثال ۴. اگر شعاع r یک استوانهٔ مستدیر قائم 15 cm بوده و به میزان 2 cm/sec افزایش یابد و ارتفاعش h که 24 cm/sec بوده و به میزان 3 cm/sec کاهش یابد، حجم استوانه چگونه تغییر خواهد کرد؟ سرعت تغییر مساحت (به انضمام دو انتها) در همین لحظه چقدر است؟

حل. هرگاه V حجم و A مساحت استوانه باشد، آنگاه $V = \pi r^2 h$ و $A = 2\pi rh + 2\pi r^2$. بنا براین،

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h}\frac{dh}{dt} = 2\pi rh\frac{dr}{dt} + \pi r^2\frac{dh}{dt},$$
$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial A}{\partial h}\frac{dh}{dt} = (2\pi h + 4\pi r)\frac{dr}{dt} + 2\pi r\frac{dh}{dt}.$$

با گذاردن مقادیر $r = 15$ ، $h = 24$ ، $dr/dt = 2$ ، و $dh/dt = -3$ در این فرمولها، معلوم می‌شود که در لحظهٔ داده شده

$$\frac{dV}{dt} = (720\pi)(2) + (225\pi)(-3) = 765\pi \approx 2403.3 \text{ cm}^3/\text{sec},$$

$$\frac{dA}{dt} = (108\pi)(2) + (30\pi)(-3) = 126\pi \approx 395.8 \text{ cm}^2/\text{sec}.$$

مجددا " مشتقگیری ضمنی. کاربرد دیگر قاعدهٔ زنجیره‌ای محاسبهٔ مشتقات توابعی است که به‌طور ضمنی تعریف شده‌اند. مثلا" ، فرض کنیم $F(x, y)$ یک تابع دومتغیره بوده، و

$$F(x, y) = 0 \tag{۹}$$

y را به صورت تابعی ضمنی از x تعریف کرده باشد. این یعنی تابعی چون $y = y(x)$ وجود دارد به طوری که به ازای هر x در بازهٔ I،

$$F(x, y(x)) = 0$$

پس، با فرض مشتقپذیر بودن توابع $F(x, y)$ و $y(x)$، می‌توان قاعدهٔ زنجیره‌ای را به کار برده از (۹) نسبت به x مشتق گرفت:

$$\frac{dF(x, y)}{dx} = F_x(x, y)\frac{dx}{dx} + F_y(x, y)\frac{dy}{dx} = F_x(x, y) + F_y(x, y)\frac{dy}{dx} = 0.$$

با حل این معادله نسبت به dy/dx، به دست می‌آوریم

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}, \qquad (۱۰)$$

مشروط براینکه $F_y(x, y) \neq 0$. این صورت پیچیده‌تری از تکنیک مشتقگیری ضمنی است که در بخش ۷.۲ معرفی شد.

مثال ۵. معادلهٔ

$$x^2 - xy + y^3 = 1$$

را که در مثال ۳، صفحهٔ ۲۳۳، درنظر گرفته شد، می‌توان با قرار دادن

$$F(x, y) = x^2 - xy + y^3 - 1$$

به شکل (۹) درآورد. در این صورت،

$$F_x(x, y) = 2x - y, \qquad F_y(x, y) = -x + 3y^2,$$

درنتیجه، (۱۰) به صورت زیر درمی‌آید:

$$y' = \frac{2x - y}{x - 3y^2},$$

که همان فرمول (۷)، صفحهٔ ۲۳۳، می‌باشد.

از تکنیک مشتقگیری ضمنی می‌توان برای محاسبهٔ مشتقات جزئی استفاده کرد. مثلاً" اگر $F(x, y, z)$ یک تابع سه متغیره باشد، معادلهٔ

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (۱۱)$$

z را به صورت تابعی ضمنی‌از x و y تعریف‌می‌کند، به‌این معنی که تابعی چون $z = f(x, y)$ وجود دارد به طوری که بر مجموعهٔ بازی چون D،

$$F(x, y, z(x, y)) = 0$$

در این صورت ، با فرض مشتقپذیر بودن هر دو تابع $F(x, y, z)$ و $z(x, y)$ ، می‌توان‌ازقاعدهٔ زنجیره‌ای‌استفاده کرد و از (۱۱) نسبت به x و y مشتق گرفت (شناسه‌ها به خاطر سادگی حذف شده‌اند) :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F_x \frac{\partial x}{\partial x} + F_y \frac{\partial y}{\partial x} + F_z \frac{\partial z}{\partial x} = F_x + F_z \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \tag{۱۲}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = F_x \frac{\partial x}{\partial y} + F_y \frac{\partial y}{\partial y} + F_z \frac{\partial z}{\partial y} = F_y + F_z \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \tag{۱۲'}$$

در اینجا از این امر استفاده می‌کنیم که

$$\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial y} = 1, \qquad \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

با حل (۱۲) و (۱۲') نسبت به $\partial z/\partial x$ و $\partial z/\partial y$ ، به دست می‌آوریم

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}, \qquad z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}, \tag{۱۳}$$

مشروط براینکه $F_z(x, y, z) \neq 0$.

مثال ۶ . به فرض آنکه

$$e^{-xy} - 3z + e^z = 0,$$

$\partial z/\partial x$ و $\partial z/\partial y$ را بیابید .

حل . این معادله به شکل (۱۱) است که در آن $F(x, y, z) = e^{-xy} - 3z + e^z$. لذا ،

$$F_x(x, y, z) = -ye^{-xy}, \qquad F_y(x, y, z) = -xe^{-xy}, \qquad F_z(x, y, z) = -3 + e^z,$$

و از (۱۳) نتیجه می‌شود که

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{ye^{-xy}}{e^z - 3}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xe^{-xy}}{e^z - 3},$$

مشروط براینکه $z \neq \ln 3$. توجه کنید که این عبارات شامل خود تابع z اند که برایش فرمول صریحی وجود ندارد .

قضیهٔ تابع ضمنی . برای آنکه مطلب را پیش ببریم ، به شرایطی نیاز داریم که وجود و مشتقپذیری یک تابع ضمنی را تضمین نمایند . این شرایط در **قضیهٔ تابع ضمنی** ، که در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته ثابت شده است ، ذکر شده‌اند . این قضیه در حالتی

که تابع با معادله‌ای به شکل $F(x, y) = 0$ به‌طور ضمنی تعریف شده است چنین می‌گوید: فرض کنیم (x_0, y_0) چنان نقطه‌ای باشد که $F(x_0, y_0) = 0$، و $F(x, y)$ دارای مشتقات جزئی پیوسته $F_x(x, y)$ و $F_y(x, y)$ در همسایگی (x_0, y_0) باشد. همچنین، $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. دراین‌صورت، تابع ضمنی منحصر به فردی مانند $y = y(x)$ وجود دارد به طوری که $y(x_0) = y_0$ و به ازای هر x در بازه‌ای چون $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$، $F(x, y(x)) = 0$، و به‌علاوه $y(x)$ بر I به‌طور پیوسته مشتقپذیر است که مشتقش y' از فرمول (۱۰) به دست می‌آید.

در قضیهٔ تابع ضمنی می‌توان نقشهای x و y را باهم عوض کرد. به‌طور مشخص، هرگاه $F(x_0, y_0) = 0$ و $F(x, y)$ درهمسایگی (x_0, y_0) مشتق جزئی پیوسته داشته و $F_x(x_0, y_0) \neq 0$ آنگاه تابع ضمنی منحصر به فردی مانند $x = x(y)$ وجود دارد به طوری که $x(y_0) = x_0$ و به ازای هر y در بازه‌ای چون $J = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$، $F(x(y), y) = 0$، و در این حالت $x(y)$ به‌طور پیوسته بر J مشتقپذیر با مشتق

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{F_y(x, y)}{F_x(x, y)} \qquad (۱۰')$$

می‌باشد.

همچنین، مشابه قضیهٔ تابع ضمنی برای تابع دومتغیره‌ای که با معادلهٔ $F(x, y, z) = 0$ به‌طور ضمنی تعریف‌شده‌است وجوددارد. مثلاً، فرض کنیم $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ و $F(x, y, z)$ در همسایگی (x_0, y_0, z_0) مشتق پیوسته داشته باشد. دراین‌صورت، اگر $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ تابع ضمنی منحصر به فردی مانند $z = z(x, y)$ وجود دارد به طوری که $z(x_0, y_0) = z_0$ و به ازای هر (x, y) در همسایگی N از نقطهٔ (x_0, y_0)، $F(x, y, z(x, y)) = 0$، و $z(x, y)$ دارای مشتقات جزئی پیوستهٔ z_x و z_y بر N است که با فرمولهای (۱۳) بیان می‌شوند.

مسائل

dw/dt را با قاعدهٔ زنجیره‌ای درصورتی بیابید که

۱. $w = x^2 - xy + y^2,\ x = t^3,\ y = t^4$

۲. $w = x^3 - xy^2,\ x = e^{-t},\ y = \cos t$

۳. $w = y/x,\ x = \ln t,\ y = \tan t$

۴. $w = e^{xy} \ln (x + y),\ x = t^2,\ y = 2 - t^2$

۵. $w = \sqrt{r + s},\ r = \cos t,\ s = \sin t$

۶. $w = u/(u - v),\ u = \cosh t,\ v = \sinh t$

۷. $w = \sin (x + y - z),\ x = \sin t,\ y = e^{t^2},\ z = \ln t$

۸. $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ x = 1,\ y = t,\ z = t^2$

۹. $w = xy + xz + yz,\ x = e^t,\ y = e^{-t},\ z = \ln t$

۱۰. $w = \ln pqrs,\ p = \sin t,\ q = \cos t,\ r = e^t,\ s = e^{-t}$

در هر حالت، جواب را با بیان صریح w به صورت تابعی از t پیش از مشتقگیری امتحان نمایید.

با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای، $\partial w/\partial t$ و $\partial w/\partial u$ را درصورتی بیابید که

۱۱. $w = 1 - x^2 - y^2,\ x = t\cos u,\ y = t\sin u$

۱۲. $w = x/y,\ x = e^t\cos u,\ y = e^t\sin u$

۱۳. $w = e^{x/y},\ x = tu,\ y = 1/tu$

۱۴. $w = \tan xy,\ x = t^2 + u^2,\ y = t^2 - u^2$

۱۵. $w = \arctan(x/y),\ x = t^2 - u^2,\ y = 2tu$

۱۶. $w = x/(x + y),\ x = t\cosh u,\ y = t\sinh u$

۱۷. $w = xyz,\ x = t + u,\ y = t - u,\ z = t^2 + u^2$

۱۸. $w = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ x = t + u,\ y = t - u,\ z = 2\sqrt{tu}$

در هر حالت، جواب را با بیان صریح w به صورت تابعی از t و u پیش از مشتقگیری امتحان کنید.

با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای، $\partial u/\partial x$، $\partial u/\partial y$، و $\partial u/\partial z$ را درصورتی بیابید که

۱۹. $u = \sin rs,\ r = x^2 + yz,\ s = x^2 - yz$

۲۰. $u = \tanh^{-1}(r/s),\ r = x\sin yz,\ s = x\cos yz$

۲۱. $u = r^2 + s^2 + t^2,\ r = x + y + z,\ s = x - y + z,\ t = x - y - z$

۲۲. $u = \ln(r + s + t),\ r = xy,\ s = xz,\ t = yz$

در هر حالت، جواب را با بیان صریح u به صورت تابعی از x، y، و z پیش‌از مشتقگیری امتحان کنید.

۲۳. فرض کنید $u = u(r, s, t)$، که در آن $r = x - y,\ s = y - z,\ t = z - x$ و u یک تابع مشتق پذیر باشد. نشان دهید که

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

۲۴. فرض کنید $u = xf(x + y) + yg(x + y)$، که در آن f و g توابع دلخواهی از یک متغیر با مشتقات دوم f'' و g'' اند. نشان دهید که

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

فرض کنید $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ تبدیل از مختصات قطبی به‌قائم بوده، و $u = u(x, y)$ یک تابع دومتغیره با مشتقات جزئی دوم پیوسته باشد. نشان دهید که

۲۵. $$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta, \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r}$$

۲۶. $$\frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta, \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r}$$

۲۷. $$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$$

۲۸. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

۲۹. گوییم تابع دومتغیرهٔ $f(x, y)$ با قلمرو D **همگن از درجهٔ** n است اگر به ازای‌هر (x, y) در D و هر $t > 0$،

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y) \qquad \text{(یک)}$$

دراینجا n می‌تواند هر عدد حقیقی باشد، و فرض این است که هرگاه (x, y) متعلق به D باشد، آنگاه هر نقطهٔ (tx, ty) که $t > 0$ نیز چنین است. مثلاً، تابع $f(x, y) = x^2 \ln (x/y) - xy$ تعریف شده برربعهای اول وسوم، همگن ازدرجهٔ 2 است. نشان دهیدهرگاه $f(x, y)$ همگن ازدرجهٔ n و در هر نقطه از قلمرو خود مشتقپذیر باشد، آنگاه

$$xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = nf(x, y), \qquad \text{(دو)}$$

که به **قضیهٔ اویلر در باب توابع همگن** معروف است.

۳۰. تحقیق کنید که تابع $f(x, y) = x^2 \ln (x/y) - xy$ در قضیهٔ اویلر (دو) به ازای $n = 2$ صدق می‌کند.

۳۱. نشان دهید هرگاه تابع مشتقپذیر $f(x, y)$ همگن از درجهٔ n باشد، آنگاه مشتقات جزئی آن $f_x(x, y)$ و $f_y(x, y)$ همگن از درجهٔ $n - 1$ می‌باشند.

آیا تابع داده شده همگن است، و در صورت بودن درجه‌اش چیست؟

۳۲. $f(x, y) = \sqrt{x} - \sqrt{y}$

۳۳. $f(x, y) = 1/(x^2 + y^2)$

۳۴. $f(x, y) = 1 + \sin (x/y)$

۳۵. $f(x, y) = x^{5/3}y^{-2/3} + x^{2/3}y^{-5/3}$

اگر تابع همگن بود، صدق آن در قضیهٔ اویلر را تحقیق نمایید.

۳۶. با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای، نشان دهید که فرمول

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

برای دیفرانسیل کل تابع f از دو متغیر x و y ، حتی اگر x و y خود توابعی از متغیرهای مستقل جدید t و u باشند ، برقرار است .

۳۷ . دو کشتی A و B به بندر نزدیک می‌شوند . کشتی A با سرعت 25 گره به غرب و کشتی B با سرعت 20 گره به‌جنوب روان است . درلحظه‌ای معین ، A در فاصله 3 میل (دریایی) و B در فاصلهٔ 4 میل از بندر قرار دارند . سرعت کاهش فاصلهٔ بین دو کشتی در این لحظد چقدر است ؟

۳۸ . شعاع r یک مخروط مستدیر قائم 18 cm بوده و به میزان 1.5 cm/sec افزایش می‌یابد ، ولی ارتفاع h آن 30 cm بوده و به میزان 2 cm/sec کاهش می‌یابد . سرعت‌تغییرحجم آن چقدر است ؟

۳۹ . میزان افزایش فشار p یک مل از یک گاز کامل را درصورتی بیابید که حجمش V مساوی $150\ \mathrm{cm}^3$ بوده و به میزان $5\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{min}$ کاهش یابد ، حال آنکه دمای مطلق T آن $300°$ بوده و به میزان $2°/\mathrm{min}$ افزایش یابد . از قانون گاز کامل $pV = RT$ (ر .ک . مثال ۳ ، صفحهٔ ۱۲۳۵) به ازای $R = 82.07\ \mathrm{cm}^3\ \mathrm{atm}/°\mathrm{K}$ استفاده کنید ، فشار به آتمسفر (atm) و دما به درجهٔ کلوین (°K) است .

۴۰ . طول l یک جعبه مستطیلی شش‌وجهی 15 in بوده و به میزان 3 in/sec افزایش‌می‌یابد ، عرضش w برابر 10 in بوده و به میزان 0.5 in/sec کاهش می‌یابد ، و ارتفاع h آن مساوی 8 in بوده و به میزان 2 in/sec افزایش می‌یابد . میزان تغییر حجم جعبه‌چقدراست ؟ میزان تغییر مساحت جعبه در همین لحظه چقدر خواهد بود ؟

با استفاده از مشتقگیری ضمنی همانند در فرمول (۱۰) ، $y' = dy/dx$ را درصورتی بیابید که x و y در معادلهٔ داده شده صدق نمایند .

۴۱ . $x^4 + y^2 - 8x + 5y = 1$ ۴۲ . $x^2y - xy^2 + 2y^3 = 4$

۴۳ . $y^6 - y - x^3 = 0$ ۴۴ . $xe^{2y} - ye^{3x} = 0$

۴۵ . $x^2 + 2\sin xy + y^3 = 0$ ۴۶ . $\cos(x - y) = xy$

۴۷ . $xy - \tan y = 0$ ۴۸ . $x^y = y^x$

۴۹ . $xy^2 = e^y$ ۵۰ . $\ln(x + y) = y$

با استفاده از مشتقگیری ضمنی مثل فرمولهای (۱۳) ، $z_x = \partial z/\partial x$ و $z_y = \partial z/\partial y$ را درصورتی بیابید که x ، y ، و z در معادلهٔ داده شده صدق کنند .

۵۱ . $x^2 + z^2 + xz - x^3y = 2$ ۵۲ . $\sin xz + \cos yz = 0$

۵۳ . $e^z - xyz = 0$ ۵۴ . $\ln(xy + xz + yz) = 0$

۵۵ . فرض کنید $x^2 + y^2 + z^2 = 49$. z_x و z_y را در نقطهٔ $(2, -3, 6)$ با مشتقگیری صریح و

ضمنی حساب کنید.

۵۶. به فرض آنکه $2x^2+y^2+3z^2+xy-z-9=0$ ، $\partial^2z/\partial x^2$ ، $\partial^2z/\partial x\partial y$ ، $\partial^2z/\partial y^2$ را در نقطهٔ $(-2,1,1)$ بیابید.

۵۷. dz را درصورتی بیابید که $\sin^2x+\sin^2y+\sin^2z=1$.

۵۸. با فرض اینکه معادلهٔ $F(x,y,z)=0$ هر سه متغیر x ، y ، و z را به صورت‌تابعی‌ضمنی از دوتای دیگر تعریف می‌کند، نشان دهید در هر نقطه که مشتقات جزئی F_x ، F_y ، و F_z همه ناصفرند،

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=1,\qquad \frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=-1$$

این امر چه رابطه‌ای با مثال ۳، صفحهٔ ۱۲۳۵، دارد؟

۵۹. صورت دوبعدی قضیهٔ مقدار میانگین را ثابت کنید: فرض کنید $f(x,y)$ درهمسایگی N نقطهٔ $A=(a,b)$ مشتقپذیر بوده، و نقطهٔ $B=(a+\Delta x,b+\Delta y)$ متعلق به N باشد. در این صورت، نقطه‌ای مانند (α,β) از پاره‌خط‌واصل بین A و B (متمایزازنقاط انتهایی پاره‌خط) وجود دارد به طوری که

$$\Delta f=f(a+\Delta x,b+\Delta y)-f(a,b)=f_x(\alpha,\beta)\,\Delta x+f_y(\alpha,\beta)\,\Delta y. \qquad (\text{سه})$$

۶۰. نقطهٔ (α,β) صادق در (سه) را درصورتی بیابید که $f(x,y)=x^2+xy$ ، $(a,b)=(0,0)$ و $(\Delta x,\Delta y)=(2,3)$.

۶۱. دهید هرگاه تابع f بر $[a,b]$ پیوسته بوده و $a\le u(x)\le v(x)\le b$ ، آنگاه

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)}f(t)\,dt=f(v(x))\frac{dv(x)}{dx}-f(u(x))\frac{du(x)}{dx},$$

مشروط بر اینکه u و v توابع مشتقپذیری باشند.

۶۲. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{x^2}^{x^3}\ln t\,dt$ را مستقیما" و به کمک مسئلهٔ قبل حساب کنید.

۶۳. در مسئلهٔ ۵۱، صفحهٔ ۸۲۳، نشان داده‌ایم که اگر توابع $f(x,y)$ و $\partial f(x,y)/\partial x$ بر ناحیهٔ مستطیلی $\{(x,y)\colon a\le x\le b, c\le y\le d\}$ پیوسته باشند،

$$\frac{d}{dx}\int_c^d f(x,y)\,dy=\int_c^d\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dy\qquad (a\le x\le b).$$

با فرض برقراری این فرمول، نشان دهید که

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)}f(x,y)\,dy$$

$$= \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy + f(x, v(x)) \frac{dv}{dx} - f(x, u(x)) \frac{du}{dx},$$

که در آن u و v همان معانی داشته در مسئلهٔ ۶۱ را دارند.

۶۴. $\frac{d}{dx} \int_{x}^{x^2} \frac{\sin xy}{y} dy$ را بـــا استفاده از مسئلهٔ ۶۳ حساب کنید. چه چیز جلو محاسبهٔ مستقیم این مشتق‌را می‌گیرد؟

۶۵. فرض کنید $x = x(t, u)$ و $y = y(t, u)$ توابعی از دو متغیر باشند که هر دو در (t, u) مشتقپذیر، و $f(x, y)$ یک تابع دو متغیره باشـــد که در $(x(t, u), y(t, u))$ مشتقپذیـر است. در این صورت، همانطور که در بحث بعد از مثال ۱ دیدیم، تـــابـع مرکب $f(x(t, u), y(t, u))$ در (t, u) مشتقات جزئی دارد که بـــا فرمولـــهای (۶) و (۶) داده شده‌اند. قدمی فراتر رفته و نشان دهیـــد که $f(x(t, u), y(t, u))$ در واقـع در (t, u) **مشتقپذیر** است.

۶.۱۳ صفحهٔ مماس بر یک سطح

حال طرز تعریف صفحهٔ مماس بر سطح S را نشان می‌دهیم. فرض کنیم S نمودار معادلهٔ

$$F(x, y, z) = 0,$$

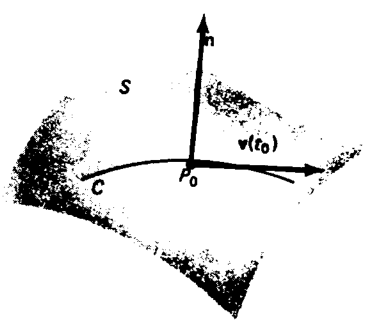
$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ نقطهٔ ثابتی از S، و منحنی C به معادلات پارامتری

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \qquad (\alpha < t < \beta)$$

یک منحنی بر S مار بر P_0 مطابق شکل ۹ باشد. فرض کنیم C *هموار* باشد، بدین معنی که توابع $x(t)$، $y(t)$، و $z(t)$ بر (α, β) به طور پیوسته مشتقپذیر بوده و در شرط

$$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2 \neq 0$$

صدق نمایند، که در آن طبق معمول پریم یعنی مشتقگیری نسبت به شناسهٔ t.



شکل ۹

فرض کنیم t_0 مقدار پارامتر t نظیر به نقطهٔ P_0 باشد، درنتیجه $P_0 = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ و $F(x, y, z)$ در P_0 مشتقپذیر با مشتقاتی جزئی باشد که همه باهم صفر نیستند. چون C بر S است، داریم

$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0. \tag{۱}$$

از (۱) بااستفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای نسبت به t مشتق گرفته و سپس قرار می‌دهیم $t = t_0$ تا به دست آید

$$F_x(x_0, y_0, z_0)x'(t_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)y'(t_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)z'(t_0) = 0.$$

این فرمول می‌گوید که حاصل‌ضرب نقطه‌ای بردارهای

$$x'(t_0)\mathbf{i} + y'(t_0)\mathbf{j} + z'(t_0)\mathbf{k} \tag{۲}$$

و

$$\mathbf{n} = F_x(x_0, y_0, z_0)\mathbf{i} + F_y(x_0, y_0, z_0)\mathbf{j} + F_z(x_0, y_0, z_0)\mathbf{k} \tag{۳}$$

مساوی صفر است؛ درنتیجه، این بردارها برهم عمودمی‌باشند. اما (۲) همان‌بردار سرعت $\mathbf{v}(t_0)$ در P_0 نقطهٔ متغیر P است‌که در امتداد منحنی C حرکت‌می‌کند و این بردار، همانطور که در صفحهٔ ۱۱۷۹ دیدیم، بر C در P_0 مماس است. لذا، به ازای هر منحنی (هموار) C بر S مار بر P_0، $\mathbf{n}$ بر $\mathbf{v}(t_0)$ عمود می‌باشد[۱]. پس نتیجه می‌شود که صفحهٔ مار بر P_0 باقائم $\mathbf{n}$ شامل خط مماس بر هر منحنی C بر S است که از P_0 می‌گذرد. این صفحه، که نمودارمعادلهٔ

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \tag{۴}$$

است، *صفحهٔ مماس* بر سطح S در نقطهٔ P_0 تعریف می‌شود.

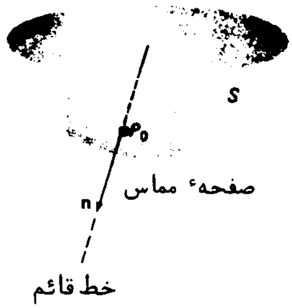
خط قائم بر یک سطح. بردار $\mathbf{n}$ تعریف شده با (۳) را *قائم* به سطح S در P_0 می‌نامیم. همچنین، خط مار بر P_0 و موازی $\mathbf{n}$، یعنی عمود بر صفحهٔ مماس بر S در P_0، را *خط قائم* به S در P_0 می‌خوانیم. لذا، خط قائم به سطح S در P_0 به معادلات تقارنی زیر می‌باشد:

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}. \tag{۵}$$

در شکل ۱۰، تعبیر هندسی صفحهٔ مماس و خط قائم به سطح S توضیح داده شده است.

---

۱. لازم به تذکر است که هر دو بردار $\mathbf{v}(t_0)$ و $\mathbf{n}$ ناصفرند، و این به خاطر فرضهایی است که در باب مشتقات x', y', z' و F_x, F_y, F_z شده است.



شکل ۱۰

مثال ۱ . صفحهٔ مماس و خط قائم به بیضی گون

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

در نقطهٔ $P_0=(x_0, y_0, z_0)$ را بیابید .

حل . در اینجا

$$F(x, y, z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$$

$$F_x(x, y, z)=\frac{2x}{a^2}, \qquad F_y(x, y, z)=\frac{2y}{b^2}, \qquad F_z(x, y, z)=\frac{2z}{c^2},$$

و درنتیجه ، طبق (۴) ، صفحهٔ مماس در P_0 به معادلهٔ

$$\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0$$

یا

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}$$

است ، که به معادلهٔ

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1$$

ساده می‌شود ، زیرا P_0 بر بیضی‌گون قرار دارد . این تعمیم سه‌بعدی معادلهٔ ($11'$) ، صفحهٔ

۹۵۱، است. به‌علاوه، طبق (۵)، خط قائم بیضی‌گون در P_0 به معادلات تقارنی

$$\frac{x-x_0}{x_0/a^2}=\frac{y-y_0}{y_0/b^2}=\frac{z-z_0}{z_0/c^2}$$

می‌باشد.

فرض کنیم سطح S نمودار تابع

$$z=f(x, y)$$

باشد، که در نقطهٔ (x_0, y_0) مشتقپذیر است. این معادله به شکل $F(x, y, z)=0$ است، که در آن

$$F(x, y, z)=f(x, y)-z,$$

درنتیجه،

$$F_x(x, y, z)=f_x(x, y),\qquad F_y(x, y, z)=f_y(x, y),\qquad F_z(x, y, z)=-1.$$

لذا، در حالت فعلی، معادلات (۴) و (۵) صفحهٔ مماس و خط قائم در $P_0=(x_0, y_0, z_0)$ به معادلات

$$f_x(x_0, y_0)(x-x_0)+f_y(x_0, y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0 \tag{۴'}$$

و

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0, y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0, y_0)}=\frac{z-z_0}{-1} \tag{۵'}$$

تحویل می‌شوند، که در آنها $z_0=f(x_0, y_0)$. توجه کنید که معادلهٔ (۴') را می‌توان به شکل زیر نیز نوشت:

$$z=f(x_0, y_0)+f_x(x_0, y_0)(x-x_0)+f_y(x_0, y_0)(y-y_0), \tag{۶}$$

که از آن معلوم می‌شود که نمودار $z=f(x, y)$ نمی‌تواند صفحهٔ مماسی موازی محور z داشته باشد (چرا نه؟).

مثال ۲. صفحهٔ مماس و خط قائم بر سطح $z=f(x, y)=xy$ در نقطهٔ $(2, -2, -4)$ را بیابید.

حل. چون $f_x(x, y)=y$ و $f_y(x, y)=x$، داریم $f_x(2, -2)=-2$ و $f_y(2, -2)=2$. پس از (۴') نتیجه می‌شود که صفحهٔ مماس در $(2, -2, -4)$ مساوی است با $-2(x-2)+2(y+2)-(z+4)=0$ یا معادلاً $2x-2y+z-4=0$، و از (۵') معلوم می‌شود که خط

قائم در $(2, -2, -4)$ به معادلات تقارنی زیر است:

$$\frac{x-2}{-2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+4}{-1}.$$

تقریب صفحهٔ مماس. حال که صفحهٔ مماس تعریف شده است، می‌توان مشتقپذیری تابع دو متغیرهٔ $z = f(x, y)$ را به طور ساده تعبیر هندسی کرد. از نتیجهٔ صفحهٔ ۱۲۴۵ به‌یاد آورید که هرگاه $f(x, y)$ در (x_0, y_0) مشتقپذیر باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)\\ &= f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\,\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\,\Delta y,\end{aligned}$$

که در آن $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ و $\beta(\Delta x, \Delta y)$ با رفتن $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ به صفر نزدیک می‌شوند. به بیان معادل، با نوشتن $\Delta x = x - x_0$ و $\Delta y = y - y_0$، داریم

$$\begin{aligned}f(x, y) &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)\\ &\quad + \alpha^*(x, y)(x - x_0) + \beta^*(x, y)(y - y_0),\end{aligned} \tag{۷}$$

که درآن $\alpha^*(x, y)=\alpha(x - x_0, y - y_0)$ و $\beta^*(x, y) = \beta(x-x_0, y-y_0)$ بارفتن $(x, y)\to(x_0, y_0)$ به صفر نزدیک‌می‌شوند. از مقایسهٔ معادلات (۶) و (۷) معلوم می‌شود که‌مشتقپذیری $f(x, y)$ در (x_0, y_0) یعنی نمودار $f(x, y)$ در (x_0, y_0) صفحهٔ مماس دارد و در مجاورت (x_0, y_0) بااین صفحهٔ مماس تقریب می‌شود و خطای حاصل عبارت است‌از $e(x, y) = \alpha^*(x, y)(x - x_0) + \beta^*(x, y)(y - y_0)$، که در آن $e(x, y)$ در نامساوی زیر صدق می‌کند:

$$\left|\frac{e(x, y)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\right| \le |\alpha^*(x, y)| + |\beta^*(x, y)|$$

(چرا؟)؛ و درنتیجه، وقتی $(x, y) \to (x_0, y_0)$، ازفاصلهٔ‌بین‌نقاط (x, y) و (x_0, y_0) "سریعتر" به صفر نزدیک می‌شود. همچنین، می‌توان نشان داد که تقریب نمودار $f(x, y)$ در مجاورت (x_0, y_0) به وسیلهٔ صفحهٔ مماس در (x_0, y_0) از هر صفحهٔ دیگر مار بر (x_0, y_0) بهتر است. به تشابه کامل بین این **تقریب صفحهٔ مماس** و تقریب‌خط مماس نظیر برای یک‌تابع مشتقپذیر از یک متغیر توجه نمایید؛ بخصوص، به مسائل ۲۹ و ۳۰، صفحهٔ ۲۰۴، مجدداً نگاه کنید.

در بخش ۴۰۱۳، از دیفرانسیلها برای‌تقریب‌نموهای توابع n متغیره استفاده‌کردیم. این در حالت $n = 2$ معادل استفاده از تقریب صفحهٔ مماس، و در حالت $n > 2$ معادل تعمیم به ابعاد بالاتر آن می‌باشد.

مسائل

معادلات صفحهٔ مماس و خط قائم نمودار معادلهٔ داده شده را در نقطهٔ ذکر شدهٔ P بنویسید.

۱. $y^2 = 4x,\ P = (1, 2, 6)$

۲. $z = 2x^2 + y^2,\ P = (1, -1, 3)$

۳. $z = 2x^2 - 3y^2,\ P = (-2, 1, 5)$

۴. $x^2 + y^2 - z^2 = -1,\ P = (2, -2, 3)$

۵. $x^2 - 3xy + y^2 + xz - z^2 = 3,\ P = (1, -1, -1)$

۶. $x^3 + y^3 + z^3 = 1,\ P = (-2, 1, 2)$

۷. $xyz = a^3,\ P = (x_0, y_0, z_0)$

۸. $z^2 = xy,\ P = (x_0, y_0, z_0)$

۹. $z = \ln(x^2 + y^2),\ P = (e, 0, 2)$

۱۰. $Ax + By + Cz + D = 0,\ P = (x_0, y_0, z_0)$

۱۱. $2^{x/z} + 2^{y/z} = 16,\ P = (3, 3, 1)$

۱۲. $z = 2 \sin x \cos y,\ P = (\pi/4, \pi/4, 1)$

۱۳. در چه نقطه از مخروط $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ صفحهٔ مماس و خط قائم تعریف نشده‌اند؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

۱۴. معادلات صفحهٔ مماس و خط قائم به سطح درجهٔ دو $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$ را در نقطهٔ $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ نوشته، و نشان دهید این معادلات نتایج مثال ۱ را در بر دارند.

۱۵. بیضی‌گون $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 66$ دو صفحهٔ مماس موازی صفحهٔ $x + y + z = 1$ دارد. این صفحات و نقاط تماس آنها را بیابید.

۱۶. نشان دهید که مجموع قطعهای (مختصات نقاط اشتراک با محورهای مختصات) هر صفحهٔ مماس بر سطح $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}\ (a > 0)$ مساوی a است.

۱۷. نشان دهید مجموع مربعات قطعهای هر صفحهٔ مماس بر سطح $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$ مساوی a^2 است.

۱۸. نشان دهید هر چهاروجهی محدود به صفحات مختصات و یک صفحهٔ مماس برسطح $xyz = a^3\ (a > 0)$ حجم ثابت $\frac{9}{2}a^3$ را دارد.

۱۹. نشان دهید که کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ و استوانهٔ هذلولوی $xy = 1$ با هم مماسند؛ یعنی، در نقطهٔ $(1, 1, 0)$ صفحهٔ مماس یکسانی دارند. این صفحهٔ مماس مشترک

چیست ؟

۲۰ . نشان دهید که سطوح $z = xy - y^2 + 8y - 5$ و $z = e^{2x+y+4}$ در نقطهٔ $(-3, 2, 1)$ بر هم مماسند . صفحهٔ مماس مشترک چیست ؟

۲۱ . صفحهٔ مار بر نقطهٔ $(0, 0, 1)$ مماس بر سطح $x^2 - y^2 + 3z = 0$ و موازی خط

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}$$

را بیابید .

۲۲ . از نظر هندسی واضح است که تمام خطوط قائم به سطح دوار $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ محور z را ، که محور دوران است ، قطع می‌کنند . این مطلب را به‌طور تحلیلی ثابت کنید .

برای صفحهٔ مماس و خط قائم در نقطهٔ (p_0, y_0, z_0) از نمودار تابع داده شده معادلاتی شبیه (۴′) و (۵′) بنویسید .

۲۳ . $x = g(y, z)$

۲۴ . $y = h(x, z)$

۲۵ . نظریهٔ مذکور در این بخش ، علاوه‌بر سطوح ، در مورد منحنیهای مسطح نیز به کار می‌رود : فرض‌کنید منحنی C نمودارمعادلهٔ $F(x, y) = 0$ بوده ، و $F(x, y)$ مشتقات جزئی پیوسته داشته باشد که هیچگاه همزمان صفر نباشند $(F_x^2 + F_y^2 \neq 0)$. نشان دهید که خط مماس بر C در $P_0 = (x_0, y_0)$ معادله‌ای به شکل زیر دارد :

$$F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0. \qquad \text{(یک)}$$

دراین‌صورت ، ازمسئلهٔ ۵۳ ، صفحهٔ ۱۰۷۲ ، معلوم می‌شودکه‌بردار $F_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + F_y(x_0, y_0)\mathbf{j}$ به این خط ، و درنتیجه به منحنی C در نقطهٔ P_0 ، قائم است .

۲۶ . فرض کنید منحنی C همان منحنی مسئلهٔ قبل باشد . نشان دهید که خط قائم به C در $P_0 = (x_0, y_0)$ معادله‌ای به شکل زیر دارد :

$$F_y(x_0, y_0)(x - x_0) - F_x(x_0, y_0)(y - y_0) = 0. \qquad \text{(دو)}$$

با استفاده از فرمولهای (یک) و (دو) ، خطوط مماس و قائم به نمودار معادلهٔ داده شده در نقطهٔ ذکر شدهٔ P را بیابید .

۲۷ . $x^3y - x^2y^2 + xy^3 = 6, P = (1, 2)$

۲۸ . $e^{x+y} - 2x^2 - xy = 0, P = (-1, 1)$

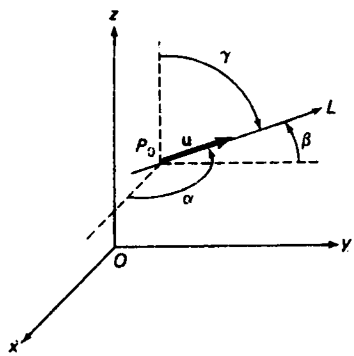
۲۹ . $\sin xy + \ln y = 0, P = (0, 1)$

۳۰ . $x^y = y^x, P = (1, 1)$

۷.۱۳ مشتق جهتی و گرادیان

مشتقات جزئی تابع $f(P) = f(x, y, z)$ میزانهای تغییر f در امتداد سه محور مختصات را به ما می‌دهند. حال میزان تغییر f را در امتداد خط دلخواهی در فضا حساب می‌کنیم. فرض کنیم f در همسایگی نقطهٔ $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ تعریف شده باشد، و L خط جهتداری مار بر P_0 با زوایای هادی α ، β ، و γ باشد (ر.ک. شکل ۱۱). در این صورت، جهت L همان جهت بردار یکهٔ $\mathbf{u} = (\cos\alpha)\mathbf{i} + (\cos\beta)\mathbf{j} + (\cos\gamma)\mathbf{k}$ بوده، و L به معادلات پارامتری

$$x = x_0 + t\cos\alpha, \qquad y = y_0 + t\cos\beta, \qquad z = z_0 + t\cos\gamma \tag{1}$$



شکل ۱۱

می‌باشد. منظور از مشتق جهتی f در P_0 در جهت L یا $\mathbf{u}$ ، که با

$$D_{\mathbf{u}}f(P_0) = D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0, z_0)$$

نموده می‌شود، یعنی حد

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, y_0 + t\cos\gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t}, \tag{2}$$

مشروط برآنکه این حد موجود و متناهی باشد. توجه کنید که هرگاه L محور x باشد، آنگاه $\alpha = 0, \beta = \gamma = \pi/2$ ، و (۲) به صورت زیر تحویل می‌شود:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0 + t, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{t},$$

که همان مشتق جزئی f نسبت به x در P_0 است. به همین نحو، اگر L محور y یا z باشد، (۲) به مشتق جزئی f نسبت به y یا z در P_0 تحویل می‌شود.

قضیهٔ زیر طرز بیان مشتق جهتی تابع f در هر جهت را برحسب مشتقات جزئی f نشان می‌دهد.

قضیهٔ ۴ (مشتق جهتی‌برحسب‌مشتقات جزئی) . هرگاه $f(P) = f(x, y, z)$ در $P_0=(x_0, y_0, z_0)$ مشتقپذیر بوده و خط جهتدار L یا بردار یکهٔ نظیر $\mathbf{u}$ دارای کسینوسهای هادی $\cos\alpha$ ، $\cos\beta$ ، و $\cos\gamma$ باشد ، آنگاه مشتق جهتی f در P_0 در جهت L یا $\mathbf{u}$ از فرمول زیر به دست می‌آید :

$$D_{\mathbf{u}}f(P_0) = \frac{\partial f(P_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(P_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f(P_0)}{\partial z}\cos\gamma. \qquad (۳)$$

برهان . فرض کنیم

$$F(t) = f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, y_0 + t\cos\gamma),$$

درنتیجه ، بخصوص $F(0) = f(x_0, y_0, z_0)$. پس $F(t)$ در $t = 0$ مشتقپذیر است ، و

$$D_{\mathbf{u}}f(P_0) = \lim_{t\to 0}\frac{F(t) - F(0)}{t} = \frac{dF(0)}{dt},$$

که در آن حد طریقهٔ فشردهٔ نوشتن (۲) می‌باشد . اما ، طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای ،

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

و لذا ، پس از مشتقگیری از فرمولهای (۱) نسبت به t ،

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma.$$

حال فرمول (۳) از محاسبهٔ dF/dt در $t = 0$ و مشتقات جزئی f در نقطهٔ نظیر $P = P_0$ به دست می‌آید .

بردار گرادیان . با معرفی بردار

$$\text{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k},$$

به نام ***گرادیان*** f ، که مولفه‌هایش مشتقات‌جزئی f اند ، می‌توان بصیرت بیشتری از ساختار فرمول (۳) به دست آورد . این بردار را با ∇f نیز نشان می‌دهند ، که در آن علامت ∇ ، یعنی وارون دلتای بزرگ ، " دل " تلفظ می‌شود . علامت ∇ (یا grad) خود عملگر

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

را نشان می‌دهد ، که گرادیان تابع مشتقپذیر سه متغیره‌ای که پس از آن می‌آید را به ما

می‌دهد. لذا،

$$\text{grad}\, f = \nabla f = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}.$$

حال‌فرمول (۳) مساوی‌حاصل‌ضرب‌نقطه‌ای‌گرادیان f و برداریکهٔ

$$\mathbf{u} = (\cos\alpha)\mathbf{i} + (\cos\beta)\mathbf{j} + (\cos\gamma)\mathbf{k}$$

می‌باشد:

$$D_{\mathbf{u}} f(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \mathbf{u}. \tag{۴}$$

اگر بردار ناصفر $\mathbf{a}$ یک بردار یکه نباشد، مشتق جهتی f در P_0 در جهت $\mathbf{a}$ مساوی مشتق جهتی در جهت بردار یکهٔ $\mathbf{u}$ با همان جهت $\mathbf{a}$ تعریف می‌شود؛ یعنی، به صورت

$$D_{\mathbf{a}} f(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|},$$

یا معادلاً

$$D_{\mathbf{a}} f(P_0) = \text{comp}_{\mathbf{a}}\, \nabla f(P_0),$$

که در آن $\text{comp}_{\mathbf{a}}\, \nabla f(P_0)$ مولفهٔ‌بردار گرادیان $\nabla f(P_0)$ درامتداد $\mathbf{a}$ می‌باشد (ر.ک. صفحهٔ ۱۱۴۴).

مثال ۱. مشتق جهتی تابع

$$f(P) = f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$$

را در نقطهٔ $P_0 = (1, 2, 3)$ و درجهت بردار $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ بیابید.

حل. با محاسبهٔ گرادیان f، به دست می‌آوریم

$$\nabla f(P) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k},$$

درنتیجه،

$$\nabla f(P_0) = \nabla f(1, 2, 3) = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k}.$$

لذا، مشتق جهتی f در P_0 در جهت $\mathbf{a}$ عبارت است از

$$\text{comp}_{\mathbf{a}}\, \nabla f(P_0) = (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k}) \cdot \frac{-2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{|-2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}|}$$

$$= \frac{2(-2) + 4(1) - 6(-2)}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{12}{\sqrt{9}} = 4.$$

حال از (۴) برای به‌دست‌آوردن چند خاصیت مهم مشتقات‌جهتی استفاده‌می‌کنیم :

(یک) هرگاه $\nabla f(P_0) = \mathbf{0}$ ، آنگاه به ازای هر بردار یکهٔ $\mathbf{u}$ ، $D_{\mathbf{u}} f(P_0) = \mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = 0$. لذا، مشتق جهتی f در P_0 در هر جهت صفر است اگر $\nabla f(P_0) = \mathbf{0}$.

(دو) هرگاه $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$ ، آنگاه

$$D_{\mathbf{u}} f(P_0) = |\nabla f(P_0)||\mathbf{u}| \cos\theta = |\nabla f(P_0)| \cos\theta, \qquad (۵)$$

که در آن θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ زاویهٔ بین بردارهای $\nabla f(P_0)$ و $\mathbf{u}$ است. ولی $\cos\theta$ بیشترین مقدارش 1 (به ازای $\theta = 0$) است. پس اگر $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$ ، مشتق جهتی در P_0 با بیشترین مقدار مشتق در جهت $\nabla f(P_0)$ است ، و این بیشترین مقدار $|\nabla f(P_0)|$ ، یعنی اندازهٔ بردار گرادیان $\nabla f(P_0)$ ، می‌باشد .

(سه) مجدداً فرض کنیم $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$. چون $\cos\theta$ کمترین مقدار خود -1 را به ازای $\theta = \pi$ می گیرد، از فرمول (۵) نتیجه می شود که اگر $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$ ، مشتق جهتی در P_0 با کمترین مقدار مشتق در جهت مخالف $\nabla f(P_0)$ بوده ، و این کمترین مقدار $-|\nabla f(P_0)|$ می‌باشد .

(چهار) اگر $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$ ، مشتق جهتی در جهت متعامد به $\nabla f(P_0)$ صفر است ، و این را می توان فوراً با اختیار $\theta = \pi/2$ در فرمول (۵) مشاهده کرد.

لذا ، بخصوص، جهت **افزایش ماکزیمم** تابع f در نقطهٔ P_0 در جهت بردار گرادیان $\nabla f(P_0)$ ، و جهت **کاهش ماکزیمم** f جهت مخالف آن ، یعنی جهت $-\nabla f(P_0)$ ، می‌باشد .

مثال ۲ . بیشترین و کمترین مقدار مشتق جهتی تابع $f(P) = f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ در نقطهٔ $P_0 = (1, 2, 3)$ را بیابید .

حل . مثل مثال ۱ ،

$$\nabla f(P_0) = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k}.$$

لذا ، طبق خاصیت (دو) ، بیشترین مقدار $D_{\mathbf{u}} f(P_0)$ عبارت است از

$$|\nabla f(P_0)| = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-6)^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

در جهت $\nabla f(P_0)$ ، و بنابر خاصیت (سه) ، کوچکترین مقدار $D_{\mathbf{u}} f(P_0)$ مساوی است با $-|\nabla f(P_0)| = -2\sqrt{14}$ در جهت مخالف $\nabla f(P_0)$.

همانند صفحهٔ ۱۲۲۳، نمودار معادلهٔ

$$f(P) = f(x, y, z) = c, \qquad (۶)$$

که در آن c ثابتی در برد f است ، یک **سطح تراز** f نام دارد . فرض کنیم S نمودار (۶)

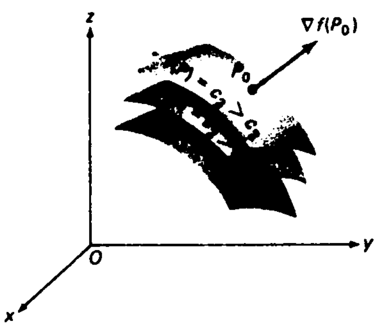
باشد . در این صورت ، قائم به S در نقطهٔ $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ همان قـائم در P_0 به‌نمودار $F(x, y, z) = 0$ است ، که در آن $F(x, y, z) = f(x, y, z) - c$. اما واضح‌است‌که $F(x, y, z)$ و $f(x, y, z)$ مشتقات جزئی یکسانی دارند . لذا ، بردار $\mathbf{n}$ در فرمول (۳) ، صفحهٔ ۱۲۶۶،که ناصفر و قائم به S در P_0 است ، را می‌توان به شکل

$$\mathbf{n} = f_x(x_0, y_0, z_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0, z_0)\mathbf{j} + f_z(x_0, y_0\ z_0)\mathbf{k},$$

یا به‌طور فشرده‌تر

$$\mathbf{n} = \frac{\partial f(P_0)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f(P_0)}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f(P_0)}{\partial z}\mathbf{k}$$

نوشت . اما این برداری‌است‌که دراینجا با $\nabla f(P_0)$ نموده‌و گرادیان f در P_0 نامیده‌می‌شود . لذا ، *هرگاه* $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$ ، *آنگاه* $\nabla f(P_0)$ *در* P_0 *به سطح تراز* f *مار بر* P_0 *عمود است* ، و این امر در شکل ۱۲ ، که در آن سه سطح تراز تابع f و بردار گرادیان در نقطهٔ P_0 روی یکی از آنها رسم شده‌اند ، توضیح داده شده است .



شکل ۱۲

حالت دوبعدی . نکات‌فوق همتاهای‌طبیعی در فضای‌دوبعدی (R^2) دارند .فرض‌کنیم $f(x, y)$ تابع مشتقپذیری‌از دومتغیر باشـد . دراین صوّرت ، گرادیان f به صورت زیرتعریف‌می‌شود :

$$\text{grad } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j},$$

و عملگر دل به

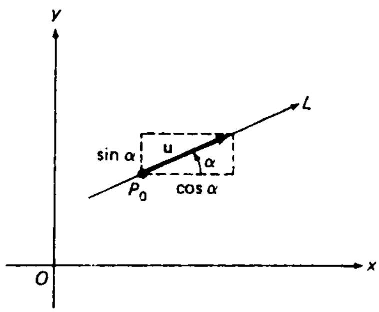
$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}$$

ساده خواهد شد . فرض کنیم L خط جهتداری در صفحهٔ xy باشد که با محور x مثبت‌زاویهٔ

α می‌سازد . در این صورت ، $\mathbf{u} = (\cos\alpha)\mathbf{i} + (\sin\alpha)\mathbf{j}$ بردار یکه درجهت L است (ر . ک . شکل ۱۳) ، و مشتق جهتی f در $P_0 = (x_0, y_0)$ در جهت L یا $\mathbf{u}$ مساوی است با

$$D_{\mathbf{u}} f(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial f(P_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(P_0)}{\partial y}\sin\alpha. \qquad (۷)$$

خواص (یک) تا (چهار) مشتق جهتی برای مشتق (۷) برقرارند ، و به همان صورت حالت سه‌بعدی ثابت می‌شوند . در اینجا به جای سطوح تراز منحنیهای تراز $f(x, y) = c$ داریم ، و ∇f بر منحنیهای تراز عمود است اگر $\nabla f \neq \mathbf{0}$ (مسئلهٔ ۲۵ ، صفحهٔ ۱۲۷۱، را به یادآورید) .



شکل ۱۳

به‌علاوه ، ∇f درجهت‌افزایش‌ماکزیمم f بوده ،و این جهت بیشترین شیب‌سطح $z = f(x, y)$ است که نمودار f می‌باشد . مثلا" ، در هر یک از اشکال ۳ (ب) و ۴ (ب) ، صفحهٔ ۱۲۲۲ ، بردار گرادیان در هر نقطه که $1 > x^2 + y^2 > 0$ به سوی مبداء اشاره دارد (این را تحقیق کنید) ، و کوهنوردی که بخواهد از تپهٔ نیمه‌کروی شکل ۳ (آ) یا تپهٔ مخروطی‌شکل ۴ (آ) حتی‌المقدور سریع بالا رود همواره باید مستقیما" به سوی قله برود که نقطه‌ای از تپه است که مستقیما" بالای مبداء صفحهٔ xy قرار دارد . در همین وضع یک اسکی‌باز که بخواهد از این تپه‌ها حتی‌المقدور سریع پایین بیاید همواره باید مسیری در جهت $-\nabla f$ داشته باشد؛ یعنی ، مسیری که تصویرش روی صفحهٔ xy شعـــاع دایرهٔ $x^2 + y^2 = 1$ است .

مثال ۳ . مشتق جهتی تابع

$$f(P) = f(x, y) = xy^3 + x^2y^2 - 2y$$

را در نقطهٔ $P_0 = (2, 1)$ و در جهت از P_0 تا نقطهٔ $P_1 = (4, 0)$ بیابید .

حل . گرادیان مساوی است با

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} = (y^3 + 2xy^2)\mathbf{i} + (3xy^2 + 2x^2y - 2)\mathbf{j}, \qquad (۸)$$

درنتیجه ،

$$\nabla f(P_0) = \nabla f(2, 1) = 5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}.$$

چون $\overrightarrow{P_0P_1} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ ، جهت از P_0 به P_1 جهت یکهٔ

$$\mathbf{u} = \frac{2\mathbf{i} - \mathbf{j}}{\sqrt{5}}$$

است و

$$D_{\mathbf{u}} f(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \mathbf{u} = (5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}) \cdot \frac{2\mathbf{i} - \mathbf{j}}{\sqrt{5}} = \frac{10 - 12}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

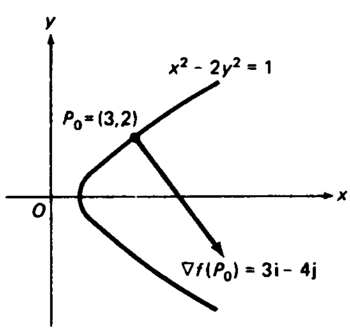
مثال ۴ . جهت شیب‌ترین نزول سطح $z = f(x, y) = xy^3 + x^2y^2 - 2y$ با شروع از نقطهٔ $(1, -2)$ را بیابید .

حل . از فرمول (۸) معلوم می‌شود که $\nabla f(1, -2) = 6\mathbf{j}$ ، و این جهت شیب‌ترین **صعود** در $(1, -2)$ است . لذا ، جهت شیب‌ترین **نزول** در $(1, -2)$ جهت $-\nabla f(1, -2) = -6\mathbf{j}$ ، یعنی سمت جنوب ، می‌باشد .

مثال ۵ . منحنی‌تراز تابع $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - y^2$ مار بر نقطهٔ $P_0 = (3, 2)$ رارسم‌کرده ،بردار گرادیان در P_0 را بکشید .

حل . منحنی تراز f مار بر P_0 عبارت است از $f(x, y) = f(3, 2)$ ، که هذلولی $\frac{1}{2}x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$ یا $x^2 - 2y^2 = 1$ می‌باشد (ر.ک. شکل ۱۴) . چون

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j},$$



شکل ۱۴

همانطور که شکل نشان داده ، گرادیان در $P_0 = (3, 2)$ مساوی است با $\nabla f(P_0) = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$.

گرادیان $\nabla f(P)$ در اولین مثال یک تابع برداری است که شناسه‌اش نقطهٔ P در صفحه یا در فضاست . یک چنین تابع را یک **میدان برداری** می‌نامند .همچنین ، می‌توان میدانهای برداری را توابعی برداری با شناسه‌های برداری گرفت . در واقع ، اگر $\mathbf{r}$ بردار موضع نقطهٔ متغیر P در صفحه یا در فضا باشد ، می‌توان به جای تابع دو یا سه متغیرهٔ $f(P)$ نوشت $f(\mathbf{r})$ ، و به جای گرادیان تابع $\nabla f(P)$ می‌نویسیم $\nabla f(\mathbf{r})$. لذا ، گرادیان را می‌توان تابعی تصور کرد که بردار متغیر $\mathbf{r}$ را به بردار دیگر $\nabla f(\mathbf{r})$ می‌نگارد .

مثال ۶ . با استفاده از گرادیان ، معادلهٔ صفحهٔ مماس بر سطح $F(x, y, z) = 0$ را در نقطهٔ $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ بنویسید .

حل . فرض کنید $\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$ بردار موضع P_0 بوده ، و $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ بردار موضع نقطهٔ متغیر $P = (x, y, z)$ باشد . در این صورت ، معادلهٔ (۴) ، صفحهٔ ۱۲۶۶ ،برای صفحهٔ مماس در P_0 معادل است با معادلهٔ برداری

$$\nabla F(\mathbf{r}_0) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0,$$

که در آن $\nabla F(\mathbf{r}_0) \neq \mathbf{0}$.

میدانهای برداری بخش مهمی از حساب دیفرانسیل و انتگرال چندمتغیره را تشکیل می‌دهند ، و مطالعهٔ آنها در فصل ۱۵ دنبال خواهد شد .

مسائل

گرادیان ∇f تابع f دو یا سه متغیرهٔ داده شده را یافته و ، با استفاده از ∇f ، مشتق جهتی f را در نقطهٔ داده شدهٔ P و در جهت بردار ذکر شدهٔ $\mathbf{a}$ حساب کنید .

۱. $f(x, y) = 4x - 3y,\ P = (2, 1),\ \mathbf{a} = 12\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

۲. $f(x, y) = x^3 - 2xy + y^2 + 8,\ P = (-1, 4),\ \mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

۳. $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2},\ P = (25, 7),\ \mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

۴. $f(x, y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x},\ P = (6, 6),\ \mathbf{a} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

۵. $f(x, y) = \sin(x + y),\ P = (2, -2),\ \mathbf{a} = 20\mathbf{i} - 21\mathbf{j}$

۶. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2),\ P = (1, 3),\ \mathbf{a} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$

۷. $f(x, y) = e^{x^2 y},\ P = (-1, 0),\ \mathbf{a} = 8\mathbf{i} + 15\mathbf{j}$

۸. $f(x, y) = \arctan(x/y),\ P = (3, 4),\ \mathbf{a} = -6\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$

۹. $f(x, y, z) = xyz,\ P = (1, 2, -3),\ \mathbf{a} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

۱۰. $f(x, y, z) = x^2y^2z^2,\ P = (-1, 3, 1),\ \mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

۱۱. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ P = (9, -6, 2),\ \mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

۱۲. $f(x, y, z) = (x + y)/z,\ P = (6, -3, 3),\ \mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

۱۳. $f(x, y, z) = z/xy,\ P = (-1, 1, 2),\ \mathbf{a} = -10\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

۱۴. $f(x, y, z) = e^{x-y+2z},\ P = (1, -3, -2),\ \mathbf{a} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$

۱۵. $f(x, y, z) = \cos(x - y + z),\ P = (2, 1, -1),\ \mathbf{a} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

۱۶. $f(x, y, z) = \sinh xyz,\ P = (0, 2, 4)\ \mathbf{a} = 12\mathbf{i} + 15\mathbf{j} - 16\mathbf{k}$

۱۷. فرض کنید $f(x, y) = x^4 + 2xy + y^3$. مشتق جهتی f را درنقطهٔ $(1, 2)$ ودرجهت شمال غربی که با محور x مثبت زاویهٔ $135°$ می‌سازد بیابید .

۱۸. مشتق جهتی $f(x, y) = \ln(e^x + e^y)$ در مبداء و در جهت شمال شرقی و منصف ربع اول را بیابید .

۱۹. مشتق جهتی $f(x, y) = (x + y)^2$ را در نقطهٔ $P_0 = (3, 2)$ و در جهت از P_0 تا $(6, 5)$ بیابید .

۲۰. فرض کنید $f(x, y) = x^2y^2 - xy^3 + 2y + 1$. مشتق جهتی f را در نقطهٔ $P_0 = (-2, 1)$ و در جهت از P_0 به مبداء بیابید .

۲۱. فرض کنید $f(x, y, z) = \ln(x + y + z)$. مشتق جهتی f را در نقطهٔ $(2, 3, -4)$ و در جهتی که با محورهای مثبت مختصات زوایای حادهٔ مساوی می‌سازد بیابید .

۲۲. فرض کنید $f(x, y, z) = xy^2 - xyz + z^3$. مشتق جهتی f را در نقطهٔ $(1, 2, 1)$ ودرجهت با زوایای هادی $60°$ ، $45°$ ، و $60°$ بیابید .

۲۳. به فرض آنکه $f(x, y) = xy$ ، بردار یکهٔ $\mathbf{u}$ را طوری بیابید که $D_{\mathbf{u}}f(3, 4) = 0$.

۲۴. نقاطی را بیابید که گرادیان تابع $f(x, y) = \ln(x^{-1} + y)$ درآنها مساوی $-\frac{16}{9}\mathbf{i} + \mathbf{j}$ باشد .

منحنی تراز تابع دادهشدهٔ مار برنقطهٔ ذکرشدهٔ P را رسم کنید . همچنین ، بردار گرادیان در P را رسم نمایید .

۲۵. $f(x, y) = -x + 2y,\ P = (2, 0)$

۲۶. $f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 + y^2,\ P = (1, \frac{1}{2}\sqrt{3})$

۲۷. $f(x\ y) = x - \frac{1}{4}y^2,\ P = (1, -2)$

۲۸. $f(x, y) = y^2 - x^2,\ P = (\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$

۲۹. ماکزیمم میزان صعود سطح $z = f(x, y) = x^y$ در نقطهٔ $(e, 1)$ و در جهتی که رخ می‌دهد چقدر است؟

۳۰. ماکزیمم میزان نزول سطح $z = f(x, y) = xy$ در نقطهٔ $(40, -9)$ و در جهتی‌که‌رخ‌می‌دهد چقدر است؟

۳۱. ماکزیمم میزان صعود تابع $f(x, y, z) = xy^2z^3$ در نقطهٔ $(2, 1, -1)$ و در جهتی که رخ می‌دهد چقدر است؟

۳۲. فرض کنید f و g توابع مشتقپذیری از دو یا سه متغیر باشند. نشان دهید که عملگر ∇ از همان قواعد

$$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g, \qquad \nabla(cf) = c\nabla f \quad (\text{ثابت } c)$$
$$\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g, \qquad \nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$$

عملگر مشتقگیری معمولی D تبعیت می‌کند.

۳۳. $\nabla(f^p)$ را درصورتی حساب‌کنید که f یک تابع دو یا سه متغیرهٔ مشتقپذیر و p عددی حقیقی باشد.

۳۴. فرض کنید $\mathbf{r}(t)$ در t مشتقپذیر بوده، و $f(\mathbf{r})$ در $\mathbf{r}$، یعنی در نقطه با بردار موضع $\mathbf{r}$، مشتقپذیر باشد. نشان دهید که

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t)) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$$

ارتفاع یک کوه از سطح دریا از فرمول $z = 1000 - 0.3x^2 - 0.2y^2$ متر به دست می‌آید، که در آن محور x مثبت به‌سمت‌مشرق و محور y مثبت به سمت شمال اشاره دارد. یک کوهنورد به نقطهٔ $(5, -10, 972.5)$ رسیده است.

۳۵. اگر کوهنورد به غرب برود، آیا صعود می‌کند یا نزول و با چه سرعتی؟

۳۶. اگر به جنوب شرقی برود، آیا صعود می‌کند یا نزول و با چه سرعتی؟

۳۷. در چه جهتی باید حرکت کند تا در ارتفاع ثابتی بماند؟

۳۸. دمای T در یک نقطه از یک کرهٔ فلزی توپر به مرکز مبداء با تابع $T = T_0e^{-(x^2+y^2+z^2)}$ داده شده است. گرمترین نقطهٔ گوی کجاست؟ نشان دهید که در هر نقطه ازگوی‌دما در جهتی بیشترین افزایش را دارد که به سمت مبداء باشد.

فرض کنید $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بردارهای ثابتی باشند. گرادیان تابع دادهٔ شده‌ٔ $f(\mathbf{r})$ بردار موضع $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ را بیابید.

۳۹. $f(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}$

۴۰. $f(\mathbf{r}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})$

۴۱. $f(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{r})$

۴۲. گرادیان تابع $f(\mathbf{r}) = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|$ را به‌ازای $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ و $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j}$ یافته‌و، بااستفاده از نتیجه، خاصیت انعکاسی بیضی را، که در بخش ۳.۱۰ بدون بردارها ثابت شد، اثبات نمایید.

۴۳. فرض کنید $f(x, y)$ درون یک دایره یا مستطیل مشتقپذیر بوده، و به ازای هر نقطه‌از D $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$. نشان دهید که $f(x, y)$ بر D ثابت است.

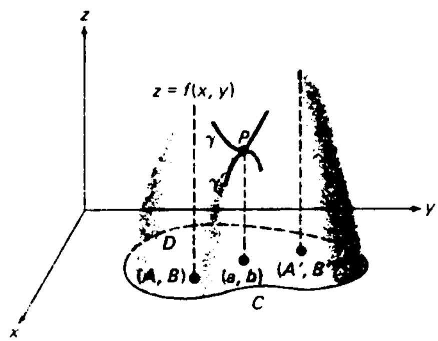
۱۳.۸ اکسترممهای توابع چندمتغیره

اکسترممهای مطلق در مقابل اکسترممهای موضعی. حال *اکسترممها* (یا *مقادیر اکسترمم*) توابع چند متغیره را درنظرگرفته، به‌توابع دومتغیره توجه می‌کنیم که می‌توان‌نمودارهایشان را رسم و از شهود هندسی آزادانه استفاده کرد. اکسترممهای مطلق و موضعی توابع دو متغیره همانند توابع یک متغیره تعریف می‌شوند. به‌طور مشخص، فرض کنیم $f(x, y)$ یک‌تابع دو متغیره باشد که بر مجموعهٔ D از نقاط در صفحهٔ xy تعریف شده است، و نقطه‌ای مانند (A, B) در D باشد به طوری که به ازای هر (x, y) در D، $f(A, B) \geq f(x, y)$. دراین‌صورت، عدد $f(A, B) = M$ **ماکزیمم f** بر D نامیده می‌شود. به همین نحو، اگر نقطه‌ای‌مانند (a, b) در D باشد به‌طوری که به ازای هر (x, y) در D، $f(a, b) \leq f(x, y)$، عدد $f(a, b) = m$ **مینیمم f** بر D نام دارد. این‌اکسترممها را اغلب‌اکسترممهای **مطلق**می‌نامند تابااکسترممهای موضعی f، که به صورت زیر تعریف می‌شوند، متمایز باشد.

فرض کنیم به ازای هر (x, y) به‌قدر کافی نزدیک به (a, b)، یعنی به ازای هر (x, y) در همسایگی از (a, b)، $f(a, b) \geq f(x, y)$. در این صورت، گوییم f در (a, b) **ماکزیمم موضعی** مساوی $f(a, b)$ دارد، و این ماکزیمم را **اکید** نامیم اگر به ازای هر (x, y) **در همسایگی سفته‌ای** از (a, b)، به جای $\geq$ داشته‌باشیم $>$ یعنی $f(a, b) > f(x, y)$. به همین نحو، هرگاه به‌ازای هر (x, y) درهمسایگی (a, b) داشته باشیم $f(a, b) \leq f(x, y)$، آنگاه گوییم f در (a, b) **مینیمم موضعی** مساوی $f(a, b)$ دارد، و این مینیمم را **اکید** نامیم اگر به ازای هر (x, y) در همسایگی سفته‌ای از (a, b)، به جای $\leq$ داشته باشیم $<$ یعنی $f(a, b) < f(x, y)$.

مثال ۱. شکل ۱۵ سطح S را نشان می‌دهد که نمودار تابع دومتغیرهٔ $f(x, y)$ است‌که‌قلمروش مجموعهٔ بستهٔ D در صفحهٔ xy است که به منحنی بستهٔ سادهٔ C که "لبهٔ" S نیز هست محدود می‌باشد. سطح S دوقله دارد که هر یک نظیر یک ماکزیمم موضعی اکید f است، یکی

در (A, B) و دیگری در (A', B') در نگاه اول ممکن است این‌طور به نظر برسد که f در (a, b) مینیمم موضعی اکید دارد، ولی از بررسی دقیقتر معلوم می‌شود که این درست نیست. و در واقع ، f در (a, b) **نقطهٔ زینی** یا **مینیماکس** دارد به این معنی که (قس. مثال ۶، صفحهٔ ۱۲۰۴) فرض کنیم P نقطه‌ای از S مستقیما" بالای (a, b) بوده ، و γ و γ' منحنیهای فصل مشترک صفحات $x = a$ و $y = b$ با S باشند (هر دو صفحه از P عبور می‌کنند) . در این صورت ، مورچه‌ای که در امتداد γ حرکت می‌کند P را **پایین‌ترین** نقطهٔ مسیر خود می‌یابد، ولی مورچه‌ای که در امتداد γ' در حرکت است P را ***بالاترین*** نقطهٔ مسیر خود می‌بیند ! بخصوص، تابع f در هر همسایگی (a, b) مقادیر بزرگتر از $f(a, b)$ و مقادیر کوچکتر از $f(a, b)$ را می‌گیرد ؛ درنتیجه ، f نمی‌تواند در (a, b) اکسترمم موضعی داشته باشد .



شکل ۱۵

ماکزیمم مطلق f بر D در (A', B') است ،و مساوی ارتفاع بیشتر دو قلهٔ سطح S می‌باشد. مینیمم مطلق f بر D مساوی 0 است ، و این مقدار در هر نقطه از منحنی C که مرز ناحیهٔ D است گرفته می‌شود .توجه‌کنید که f بر C مینیمم موضعی ندارد ،فقط به این خاطر که تعریف اکسترمم موضعی مستلزم مقایسهٔ مقدار f در نقطهٔ داده شدهٔ (a, b) با مقادیر f در تمام نقاط یک همسایگی از (a, b) است ، و این مقایسه فقط وقتی میسور است که (a, b) **نقطهٔ درونی** D باشد ، چرا که در این صورت همسایگیی از (a, b) وجود دارد که فقط از نقاط D تشکیل شده است .

هرگاه f تابعی با قلمرو D باشد ،آنگاه اکسترمم مطلق f در نقطهٔ درونی D خودبخود یک اکسترمم موضعی f است . (هم اکنون دیدیم f نمی‌تواند در یک نقطهٔ مرزی D اکسترمم موضعی داشته باشد .) مثلا" ، فرض‌کنیم f در نقطهٔ درونی (a, b) از D مینیمم موضعی داشته

باشد . در این صورت ، به ازای هر (x, y) در D ، $f(a, b) \le f(x, y)$ ؛ و درنتیجه ، به‌ازای‌هر (x, y) در همسایگی به‌قدر کافی کوچکی از (a, b) که فقط از نقاط D تشکیل شده است ، $f(a, b) \le f(x, y)$.

گوییم مجموعهٔ D از نقاط صفحهٔ xy *کراندار* است اگر دایرهٔ به‌قدر کافی‌بزرگی مانند $x^2 + y^2 = r^2$ وجود داشته باشد که همهٔ نقاط D را دربر گیرد . مثلاً ، درون هر بیضی (صرف‌نظر از موضع مرکزش) کراندار است ، ولی ربع اول چنین نیست . در اینجا مهم است درک شود که واژهٔ " کراندار " ارتباطی با واژهٔ "مرز" ندارد . مثلاً ، ربع اول ، با آنکه بی‌کران است ، مرز دارد و آن عبارت است از محورهای x و y نامنفی . گوییم تابع دومتغیرهٔ $f(x, y)$ بر مجموعهٔ D *کراندار* است اگر عددی مانند $C > 0$ موجود باشدبه‌طوری که به ازای هر (x, y) در D ، $|f(x, y)| \le C$. مثلاً ، تابع $\sin xy$ بر تمام صفحهٔxyکراندار است ، ولی تابع $1/(x^2 + y^2)$ بر هر مجموعه که مبداء یک نقطهٔ مرزی آن است بی‌کران می‌باشد (چرا ؟) .

قضیهٔ مقدار اکسترمم . یکی از قضایای کلیدی حساب دیفرانسیل و انتگرال **قضیهٔ** ***مقدار اکستریم*** است(ر.ک.صفحهٔ۱۵۹)که می‌گوید هر تابع پیوسته بر بازهٔ بسته I بر I کراندار بوده و براین بازه هم ماکزیمم و هم مینیمم دارد. نتیجه‌ای مشابه برای توابع دومتغیره برقرار است . ما برهان آن را که معمولاً در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته داده می‌شود ، همانند حالت یک متغیره ، حذف می‌کنیم .

قضیهٔ ۵ (قضیهٔ مقدار اکستریم برای یک تابع دومتغیره) . *فرض‌کنیم $f(x, y)$ یک‌تابع دو متغیره باشد که بر مجموعهٔ بسته و کراندار D پیوسته است . در این صورت ، f بر Dکراندار بوده و ماکزیمم M و مینیمم m خود را بر D می‌گیرد ؛ یعنی ، نقاطی مانند (A, B) و (a, b)در D هستند به طوری که به ازای هر (x, y)در D ،*

$$f(a, b) \le f(x, y) \le f(A, B)$$

لذا ، تابع پیوستهٔ $f(x, y)$ بر مجموعهٔ بستهٔ کراندار D همیشه اکسترمم مطلق دارد . این اکسترممها یا در بین اکسترممهای موضعی f (در نقاطی درونی از D) یافت می‌شوند یا در نقاط مرزی D می‌باشند . *لذا برای جستجوی اکسترممهای مطلق f بر D ، ابتدا باید اکسترممهای موضعی f را بیابیم تابتوانیم‌مقادیر آنهارا با مقادیر f روی‌مرز D مقایسه‌کنیم .* همواره فرض می‌شود که *تابع f* مورد نظر *پیوسته است ، ولی امکان دارد در بعضی نقاط*

مشتقپذیر نباشد. درست مثل توابع یک متغیره، آزمون سادهای مستلزم مشتقپذیری وجود دارد که اکسترممهای موضعی احتمالی f را مشخص می‌نمایید:

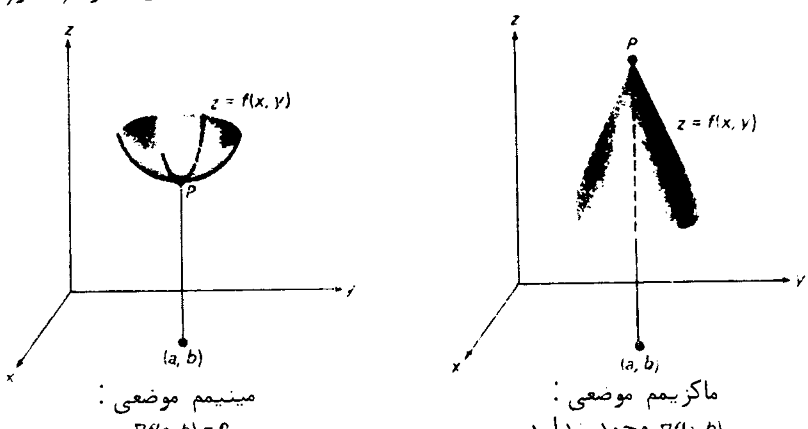
قضیهٔ ۶ (**شرط لازم برای اکسترمم موضعی یک تابع دومتغیره**) فرض کنیم $f(x, y)$ یک تابع دومتغیره باشد که در نقطهٔ (a, b) اکسترمم موضعی دارد. در این صورت، یا f در (a, b) مشتق‌ناپذیر است، یا در (a, b) مشتقپذیربوده‌و $\nabla f(a, b) = \mathbf{0}$، یعنی $f_x(a, b)=f_y(a, b) = 0$.

برهان. یا f در (a, b) مشتق‌ناپذیر است، و در این صورت چیزی برای اثبات وجود ندارد، یا f در (a, b) مشتقپذیر می‌باشد. در حالت دوم، مشتقات جزئی $f_x(a, b)$ و $f_y(a, b)$ هر دو وجود دارند. اما، در این صورت، توابع یک‌متغیره $f(x, b)$ و $f(a, y)$ هر دو مشتقپذیرند، اولی در $x = a$ و دومی در $y = b$، با مشتقات

$$\left.\frac{df(x, b)}{dx}\right|_{x=a} = f_x(a, b), \qquad \left.\frac{df(a, y)}{dy}\right|_{y=b} = f_y(a, b). \tag{1}$$

چون $f(x, y)$ در (a, b) اکسترمم موضعی‌دارد، $f(x, b)$ در a و $f(a, y)$ در b اکسترمم موضعی دارد (چرا؟) لذا، طبق قضیهٔ ۶، صفحهٔ ۲۶۷ (شرط لازم برای اکسترمم موضعی تابع یک متغیره)، طرفهای چپ فرمولهای (۱) صفرند؛ درنتیجه، $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ یا معادلاً $\nabla f(a, b) = f_x(a, b)\mathbf{i} + f_y(a, b)\mathbf{j} = \mathbf{0}$.

قضیهٔ ۶ در تعبیر هندسی می‌گوید هرگاه تابع $f(x, y)$ در نقطهٔ (a, b) اکسترمم موضعی داشته باشد، آنگاه یا نمودار f درنقطهٔ $P = (a, b, f(a, b))$ صفحهٔ مماس ندارد (اگر $\nabla f(a, b)$



مینیمم موضعی: $\nabla f(a, b) = 0$ (ب)

ماکزیمم موضعی: $\nabla f(a, b)$ وجود ندارد (آ)

شکل ۱۶

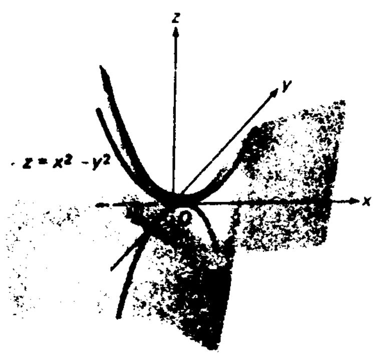
موجود نباشد) ، یا نمودار f در P صفحهٔ مماس *افقی* دارد (اگر $\nabla f(a, b) = \mathbf{0}$) (این امر از فرمول (۶) ، صفحهٔ ۱۲۶۸، به ازای $x_0 = a, y_0 = b$ نتیجه می‌شود) . در شکل ۱۶ (آ) و ۱۶ (ب) ، این دو حالت توضیح داده شده‌اند، که در آنها نمودار دو تابع ، هر یک با اکسترمم موضعی (اکید) در (a, b) ، رسم شده است .

نقاط بحرانی و نقاط زینی . منظور از یک *نقطهٔ بحرانی* تابع دو متغیرهٔ $f(x, y)$ یعنی نقطه‌ای مانند (a, b) که f در آن مشتقپذیر نیست؛ درنتیجه ، گرادیان $\nabla f(a, b)$ وجود ندارد ، یا $\nabla f(a, b)$ موجود و مساوی بردار صفر می‌باشد . بنابر قضیهٔ ۶، هرگاه f در (a, b) اکسترمم موضعی داشته باشد ، آنگاه (a, b) یک نقطهٔ بحرانی f است . از آن سو ، درست مثل توابع یک متغیره ، اگر (a, b) یک نقطهٔ بحرانی f باشد ، تابع f ممکن است در (a, b) اکسترمم موضعی نداشته باشد . اگر $\nabla f(a, b) = \mathbf{0}$ و هر همسایگی (a, b) شامل نقاطی چون (x, y) باشد که $f(x, y) > f(a, b)$ و نقاطی دیگر که $f(x, y) < f(a, b)$ ، گوییم f در (a, b) یک *نقطهٔ زینی* (یا *مینیماکس*) دارد .

مثال ۲ . تابع

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

را درنظر می‌گیریم که نمودارش سهمی‌گون هذلولوی شکل ۱۷ است .



شکل ۱۷

مشتقات جزئی

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

هر دو در مبداء $O = (0, 0)$ مساوی صفرند؛ درنتیجه، $\nabla f(0, 0) = \mathbf{0}$. بنابراین، O نقطهٔ بحرانی f می‌باشد. اما f در O اکسترمم موضعی ندارد. در واقع،

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2,$$

و در نتیجه، بنابر آزمون مشتق دوم برای تابع یک متغیره (قضیهٔ ۹، صفحهٔ ۲۷۲)، تابع $f(x, 0)$ در 0 مینیمم موضعی دارد، حال آنکه تابع $f(0, y)$ در 0 دارای ماکزیمم موضعی است، و این مانع آن می‌شود که $f(x, y)$ در $O = (0, 0)$ ماکزیمم موضعی یا مینیمم موضعی داشته باشد. در واقع، همانطور که از شکل برمی‌آید، مبداء O یک نقطهٔ زینی f است، زیرا $f(0, 0) = 0$ و f در هر همسایگی O مقادیر مثبت و منفی می‌گیرد.

لذا، چیزی که واقعاً" می‌خواهیم شرایطی بر تابع f است که f را مجبور به داشتن اکسترمم موضعی در نقطهٔ (a, b) سازد. برای تابع دومتغیره، این شرایط در تعمیم دوبعدی آزمون مشتق دوم زیر، که بدون برهان بیان می‌شود، ذکر شده است. گاهی برای اختصار از واژهٔ " جزئی " به عنوان مترادف " مشتق جزئی " استفاده خواهیم کرد.

آزمون جزئیهای دوم

قضیهٔ ۷ (آزمون جزئیهای دوم برای اکسترمم موضعی یک تابع دومتغیره). *فرض کنیم $f(x, y)$ در همسایگی نقطهٔ بحرانی (a, b) مشتقات جزئی دوم پیوسته داشته باشد، و*

$$A = f_{xx}(a, b), \qquad B = f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b),$$
$$C = f_{yy}(a, b), \qquad D = AC - B^2.$$

در این صورت،

(یک) f در (a, b) ماکزیمم موضعی اکید دارد اگر $D > 0$ و $A < 0$؛

(دو) f در (a, b) مینیمم موضعی اکید دارد اگر $D > 0$ و $A > 0$؛

(سه) f در (a, b) نقطهٔ زینی دارد اگر $D < 0$.

عبارت D مبین f در (a, b) نامیده شده و مساوی دترمینان زیر است:

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

که در (a, b) حساب شده است. اگر $D = 0$، *آزمون جزئیهای دوم بی‌حاصل است*. مثلاً"، هر

یک از توابع $f(x, y) = x^2 + y^4$ و $g(x, y) = x^2 + y^3$ در مبداء O نقطهٔ بحرانی دارد ، و در هر دو حالت مبین در O صفر است (این را تحقیق نمایید) . اما f در O مینیمم موضعی دارد ،زیرا $f(0, 0) = 0$ واگر $(x, y) \neq (0, 0)$ ، $f(x, y) > 0$ ، حال‌آنکه g در O اکسترمم ندارد ، زیرا $g(0, y) = y^3$ بر بازهٔ $-\infty < y < \infty$ صعودی می‌باشد .

مثال ۳ . رفتار تابع

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

در نقاط بحرانی‌اش را بررسی کنید .

حل . چون f همه جا مشتقپذیر است ،مختصات نقاط بحرانی را می‌توان با حل معادلات همزمان

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0$$

به دست آورد . معادلهٔ اول ایجاب می‌کند که $y = x^2$ ، که وقتی در معادلهٔ دوم گذارده شود ، $x = x^4$ ؛ درنتیجه ، $x = 0$ یا $x = 1$. بنابراین ، f درست دو نقطهٔ بحرانی‌دارد؛ یعنی ، $(0, 0)$ و $(1, 1)$. چون

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \qquad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = -3, \qquad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y,$$

در $(0, 0)$ داریم

$$A = 0, \qquad B = -3, \qquad C = 0, \qquad D = AC - B^2 = -9$$

و ، در $(1, 1)$ ،

$$A = 6, \qquad B = -3, \qquad C = 6, \qquad D = AC - B^2 = 27$$

از قضیهٔ ۷ معلوم می‌شود که f در $(0, 0)$ نقطهٔ زینی و در $(1, 1)$ مینیمم موضعی اکید دارد . مینیمم مساوی است با $f(1, 1) = -1$.

مثال ۴ . اکسترممهای موضعی تابع

$$f(x, y) = xy(3 - x - y) \qquad (۲)$$

را بیابید .

حل . این بار مختصات نقاط بحرانی در معادلات زیر صدق می‌کنند :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y(3 - 2x - y) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x(3 - x - 2y) = 0.$$

معادلهٔ اول می‌گوید که $y = 0$ یا $y = 3 - 2x$ ، ومعادلهٔ دوم می‌گوید که $x = 0$ یا $x = 3 - 2y$ که از این معلوم می‌شود (به‌طور مشروح تحقیق کنید) که درست چهار نقطهٔ بحرانی ، یعنی $(1, 1)$ ، $(0, 3)$ ، $(3, 0)$ ، $(0, 0)$ ، وجود دارند . با محاسبهٔ جزئیهای دوم ، خواهیم داشت

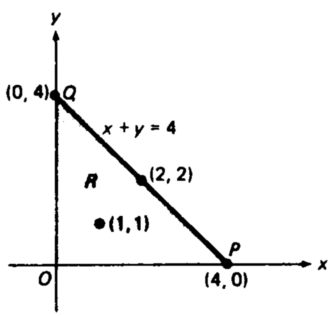
$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2y, \qquad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = 3 - 2x - 2y, \qquad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x,$$

و درنتیجه ،

$$D = AC - B^2 = 4xy - (3 - 2x - 2y)^2.$$

در هر یک از نقاط بحرانی $(0, 0)$ ، $(3, 0)$ ، و $(0, 3)$ داریم $D = -9$. لذا ، طبق آزمون جزئیهای دوم ، f در هیچیک از این نقاط ، که همه زینی‌اند ، اکسترمم موضعی ندارد . اما در $(1, 1)$ داریم $A = -2$ و $D = 3$ ؛ درنتیجه ، f در $(1, 1)$ ماکزیمم موضعی اکیدی مساوی $f(1, 1) = 1$ دارد .

مثال ۵ . اکسترممهای **مطلق** تابع (۲) را بر ناحیهٔ بستهٔ R بین محورهای نامنفی مختصات و خط $x + y = 4$ بیابید (ر.ک. شکل ۱۸) .



شکل ۱۸

حل . تابع (۲) پیوسته ، و ناحیهٔ R کراندار و بسته است . لذا ، طبق قضیهٔ ۵ ، f بر R اکسترمم مطلق دارد . این اکسترممها فقط می‌توانند روی مرز R یا در نقاط بحرانی f که نقاط درونی R اند رخ دهند (توضیح دهید) . اما از چهار نقطهٔ بحرانی f به دست آمده در مثال قبل فقط نقطهٔ $(1, 1)$ نقطهٔ درونی است . لذا ، ماکزیمم (مطلق) R بر f بیشترین

مقداری است که f در یک نقطهٔ مرزی R یا در $(1, 1)$ می‌گیرد، حال آنکه مینیمم f بر R کمترین مقداری است که f در یک نقطهٔ مرزی یا در $(1, 1)$ خواهد گرفت.

حال این مقادیر را باهم مقایسه می‌کنیم. مرز R از سه پاره‌خط، که در شکل OP، OQ و PQ است، تشکیل شده است. تابع f بر OP و OQ متحد صفر است، ولی بر PQ، که $x + y = 4$، می‌توان آن را تابعی از متغیر x مانند

$$g(x) = f(x, 4 - x) = x(x - 4) \qquad (0 \leq x \leq 4)$$

گرفت. با مشتقگیری از g نسبت به x، معلوم می‌شود که $g'(x) = 2x - 4$، درنتیجه، تنها نقطهٔ بحرانی g، $x = 2$ است که داریم $g'(2) = 0$ و $g(2) = -4$. همچنین، $g(0) = g(4) = 0$ درنتیجه، ماکزیمم g بر $0 \leq x \leq 4$ عبارت است از $\max\{g(0), g(2), g(4)\} = \max\{0, -4, 0\} = 0$ ولی مینیمم g بر $0 \leq x \leq 4$ عبارت است از $\min\{g(0), g(2), g(4)\} = \min\{0, -4, 0\} = -4$ اینها ماکزیمم و مینیمم $f(x, y)$ بر پاره‌خط PQ اند؛ و در واقع، ماکزیمم در نقاط انتهایی $P = (4, 0), Q = (0, 4)$ و مینیمم در نقطهٔ میانی $(2, 2)$ می‌باشد. لذا، اگر γ مرز R باشد، ماکزیمم f بر γ مساوی 0 است که روی پاره‌خطهای OP و OQ گرفته می‌شود، ولی مینیمم f بر γ مساوی -4 است که در نقطهٔ $(2, 2)$ گرفته خواهد شد. همچنین، f در نقطهٔ بحرانی درونی $(1, 1)$ دارای مقدار 1 می‌باشد. لذا، بالاخره، ماکزیمم f بر R مساوی $\max\{0, 1\} = 1$ است که در نقطهٔ درونی $(1, 1)$ گرفته می‌شود، ولی مینیمم f بر R مساوی -4 است که در نقطهٔ مرزی $(2, 2)$ گرفته خواهد شد.

مثال زیر یک نمونه از مسائل بهینه‌سازی کار بسته است که می‌توان آن را به کمک تکنیکهای این بخش حل کرد.

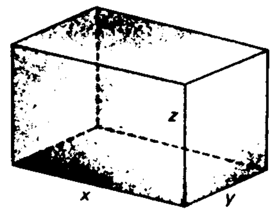
مثال ۶. کمترین مقدار تختهٔ لازم برای ساختن یک جعبهٔ مستطیلی بسته به حجم معلوم V را بیابید. از ضخامت تخته صرف‌نظر کرده، و فرض کنید هیچ مقداری از آن به‌هدر نرود.

حل. البته منظور از " مقدار " تخته یعنی مساحت کل S جعبه. فرض کنیم x طول، y عرض و z ارتفاع جعبه باشد (ر.ک. شکل ۱۹). در این صورت،

$$S = 2(xy + xz + yz), \tag{۳}$$

زیرا مساحت بالا و پایین جعبه xy بوده، و چهار طرف دارد که دو تا به مساحت xz و دوتا به مساحت yz می‌باشند. مسئله مینیمم ساختن S تحت این شرط است که حجم

$$V = xyz \tag{۴}$$



شکل ۱۹

جعبه ثابت است . برای تلفیق این شرط در مسئله ، معادلهٔ (۴) را نسبت به z حل کرده ، به دست می‌آوریم $z = V/xy$. سپس، با گذاردن $z = V/xy$ در (۳) ، این رابطه به تابع

$$S = S(x, y) = 2\left(xy + \frac{V}{y} + \frac{V}{x}\right) \qquad (۳')$$

از دو متغیر x و y تبدیل می‌شود که قلمرو تعریفش ربع اول Q صفحهٔ xy است (به‌یادداشته باشید که x و y ذاتا" مثبت‌اند) .

برای یافتن نقاط بحرانی S ، از $(۳')$ مشتق گرفته و جزئیهای اول

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 2\left(y - \frac{V}{x^2}\right), \qquad \frac{\partial S}{\partial y} = 2\left(x - \frac{V}{y^2}\right) = 0$$

را مساوی‌صفر قرار می‌دهیم . تنها جواب معادلات همزمان حاصل

$$y - \frac{V}{x^2} = 0, \qquad x - \frac{V}{y^2} = 0$$

در Q عبارت است از $x = V^{1/3}, y = V^{1/3}$ ؛ در نتیجه ، $(V^{1/3}, V^{1/3})$ تنها نقطهٔ بحرانی S در Q است (محاسبات را امتحان کنید) . در این نقطه x ، y ، و $z = V/xy$ همه مساوی $V^{1/3}$ اند؛ یعنی ، جعبه **مکعبی** است . اما از $(۳')$ واضح است که اگر $x \to 0^+$ یا $y \to 0^+$ ، و نیز اگر $x \to \infty$ یا $y \to \infty$ ، داریم $S \to \infty$. لذا ، طبق مشابه دوبعدی قضیهٔ ۱۲ ، صفحهٔ ۳۲۸ ، S بر Q در$(V^{1/3}, V^{1/3})$مینیمم مطلقی‌مساوی $S(V^{1/3}, V^{1/3}) = 6V^{2/3}$ دارد . مثلا" ، کمترین چوب لازم برای ساختن یک جعبهٔ به حجم 3375 cu. in. مساوی $6(3375)^{2/3} = 1350$ sq بوده ، و جعبه باید مکعبی به طول ضلع 15 in باشد .

تابع S بر Q ماکزیمم مطلق ندارد (چرا ندارد؟) ، ولی این قضیهٔ ۵ را نقض نمی‌کند ، زیرا مجموعهٔ Q نه کراندار است نه بسته . از محاسبهٔ جزئیهای دوم S معلوم

می‌شود که

$$A = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{4V}{x^3}, \qquad B = \frac{\partial^2 S}{\partial x\, \partial y} = 2, \qquad C = \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = \frac{4V}{y^3},$$

درنتیجه، در $P = (V^{1/3}, V^{1/3})$ ،

$$A = 4, \qquad B = 2, \qquad C = 4, \qquad D = AC - B^2 = 12$$

بنابراین، قضیهٔ ۷ به ما می‌گویدکه S در P مینیمم موضعی دارد، ولی ما قبلاً "بااستدلالی دیگر نشان داده‌ایم که S در P مینیمم مطلق دارد.

حالت بیش از دو متغیر. بالاخره، نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان نتایج این بخش را به توابع بیش از دو متغیر تعمیم داد. اکسترممهای مطلق و موضعی تابع n متغیرهٔ $f(x_1, \ldots, x_n)$ اساساً" مانند صفحهٔ ۱۲۸۲، با $(x_1, \ldots, x_n)$ به جای (x, y) و $(a_1, \ldots, a_n)$ به جای (a, b) ، تعریف می‌شوند. مثلاً"، اگر به ازای هر $(x_1, \ldots, x_n)$ در همسایگی چون

$$\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2} < \delta$$

از $(a_1, \ldots, a_n)$ داشته باشیم $f(a_1, \ldots, a_n) \geq f(x_1, \ldots, x_n)$، گوییم f در $(a_1, \ldots, a_n)$ ***ماکزیمم موضعی*** مساوی $f(a_1, \ldots, a_n)$ دارد. قضیهٔ ۵ فقط با کمی تعدیل به توابع n متغیره تعمیم می‌یابد. به‌طور مشخص، کرانداری مجموعهٔ D در فضای n بعدی(R^n)یعنی " کرهٔ n بعدی "

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = r^2$$

وجود دارد که تمام نقاط D را در بر می‌گیرد، و اگر قضیهٔ ۵ را در مورد تابع $f(x_1, \ldots, x_n)$ از n متغیر و مجموعهٔ بستهٔ کراندار D در R^n اعمال کنیم، معلوم می‌شود که " نقاطی مانند $(A_1, \ldots, A_n)$ و $(a_1, \ldots, a_n)$ در D وجود دارند به طوری که به ازای هر $(x_1, \ldots, x_n)$ در D،

$$f(a_1, \ldots, a_n) \leq f(x_1, \ldots, x_n) \leq f(A_1, \ldots, A_n)$$

تعمیم قضیهٔ ۶ نیز، اساساً" با همان برهان به ازای $n = 2$ ، فوراً" انجام می‌شود، و به قرار زیر است: *فرض‌کنیم $f(x_1, \ldots, x_n)$ تابعی n متغیره باشد که درنقطهٔ $(a_1, \ldots, a_n)$ اکسترمم موضعی دارد. در این صورت، یا f در $(a_1, \ldots, a_n)$ مشتق‌ناپذیر است، یا f در $(a_1, \ldots, a_n)$ مشتقپذیربوده‌و همهٔ مشتقات‌جزئی اول $f_{x_1}(a_1, \ldots, a_n), \ldots, f_{x_n}(a_1, \ldots, a_n)$ آن مساوی صفر می‌باشند.* مثل حالت دوبعدی، نقاط مشتق‌ناپذیری f یا نقاطی‌که در آنها $f_{x_1} = \cdots = f_{x_n} = 0$، را ***نقاط بحرانی*** f می‌نامند. به‌ازای $n = 3$، معمولاً "به‌جای $f(x_1, x_2, x_3)$ می‌نویسیم $f(x, y, z)$ و به جای (a_1, a_2, a_3) می‌نویسیم (a, b, c) . لذا، هرگاه $f(x, y, z)$ در (a, b, c) اکسترمم موضعی داشته باشد، آنگاه (a, b, c) یک نقطهٔ بحرانی f است؛ یعنی،

یا f در (a, b, c) مشتق‌ناپذیر است یا $\nabla f(a, b, c) = \mathbf{0}$. تعمیم قضیهٔ ۷ (آزمون جزئیهای دوم) پیچیده‌تر است، و در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته بررسی می‌شود.

مسائل

تمام نقاط بحرانی تابع داده شده را بیابید. سپس معین کنید که هر نقطهٔ بحرانی نظیر به ماکزیمم موضعی، مینیمم موضعی، یا نقطهٔ زینی است.

۱. $f(x, y) = 2x^2 + (y - 1)^2$

۲. $f(x, y) = (x + 1)^2 - 2y^2$

۳. $f(x, y) = -x^2 + xy - y^2 + 6x - 9y + 15$

۴. $f(x, y) = (x - y + 2)^2$

۵. $f(x, y) = 2x^2 + 3xy + y^2 - 2x - 4y + 8$

۶. $f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 108y$

۷. $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$

۸. $f(x, y) = xy + 20x^{-1} + 50y^{-1} \quad (x > 0, y > 0)$

۹. $f(x, y) = x\sqrt{y} - x^2 + 9x - y \quad (y > 0)$

۱۰. $f(x, y) = 8x^3 + y^3 - 12xy + 6$

۱۱. $f(x, y) = (2x - x^2)(2y - y^2)$

۱۲. $f(x, y) = x^2y^3(6 - x - y) \quad (x > 0, y > 0)$

۱۳. $g(u, v) = u \sin v$

۱۴. $h(u, v) = e^u \cos v$

۱۵. $f(x, y) = \sin x + \sin y \quad (0 < x < \pi, 0 < y < \pi)$

۱۶. $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin (x + y) \quad (0 < x < \pi, 0 < y < \pi)$

۱۷. $f(x, y) = (x^2 + 2x + y)e^y$

۱۸. $f(x, y) = e^{xy}$

۱۹. $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$

۲۰. $f(x, y) = (x - 1) \ln xy \quad (xy > 0)$

اکسترممهای مطلق تابع داده شدهٔ f بر ناحیهٔ ذکر شدهٔ R را بیابید.

۲۱. $f(x, y) = x^2 - y^2, R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 4\}$

۲۲. $f(x, y) = xy, R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 2\}$

۲۳. $f(x, y) = 2xy + y^2 + 8x - 4y, R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$

۲۴. $f(x, y) = (3x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}, R = \{(x, y): 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

۲۵. ماکزیمم حاصل ضرب سه عدد مثبتی را بیابید که مجموعشان 60 باشد.

۲۶. مینیمم مجموع سه عدد مثبت را بیابید که حاصل ضربشان 343 باشد.

۲۷. بیشترین حجم یک جعبهٔ مستطیلی بسته را بیابید که مساحتش 600 cm^3 باشد.

۲۸. مثال ۶ را در مورد جعبه‌ای که سر ندارد حل کنید.

۲۹. متوازی‌الاضلاعی با بیشترین مساحت بیابید که محیطش عدد معلوم p باشد.

۳۰. فرض کنید T مثلثی به رئوس $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ ، و $(0, 1)$ باشد. نقطهٔ P داخل T را طوری بیابید که مجموع مجذورات فواصل P تا رئوس T مینیمم باشد.

۳۱. در بیضی‌گون $(x^2/a^2)+(y^2/b^2)+(z^2/c^2) = 1$ یک جعبهٔ مکعب مستطیل محاط شده است که اضلاعش با محورهای مختصات موازی است. حجم ماکزیمم این جعبه‌چقدراست؟

۳۲. نقطهٔ $P = (a, b, c)$ در یکهشت اول داده شده است. صفحهٔ مار بر P را بیابید که از یکهشت اول چهاروجهیی با حجم مینیمم جدا کند. این حجم مینیمم چقدر است؟

۳۳. اکسترممهای مطلق تابع

$$f(x, y, z) = (ax + by + cz)e^{-(x^2+y^2+z^2)}$$

را بیابید.

۳۴. تابع دو متغیرهٔ $f(x, y)$ با مشتقات جزئی پیوسته داده شده است. فرض کنید $f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ و

$$f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) > 0.$$

نشان دهید که (x_0, y_0) یک *نقطهٔ تنهای* نمودار معادلهٔ $f(x, y) = 0$ است، بدین معنی که همسایگی از (x_0, y_0) وجود دارد که شامل هیچ نقطه‌ای از نمودار جز (x_0, y_0) نیست. نشان دهید که مبدأ یک نقطهٔ تنهای نمودار معادلهٔ $x^3 - y^3 + xy^2 - yx^2 + x^2 + y^2 = 0$ است، و نمودار را رسم نمایید.

راهنمایی. از آزمون جزئیهای دوم استفاده کنید.

۳۵. کمیتی که معمولاً برای سنجش نزدیکی خط $y = f(x) = mx + b$ با n نقطهٔ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ درصفحه به کار می‌رود مجموع زیر است:

$$S = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - y_i]^2 = \sum_{i=1}^{n} (mx_i + b - y_i)^2,$$

که مجموع *مجذورات* انحرافهای بین مقادیر معلوم y_i و عرضهای خط $y = mx + b$ نظیر به مقادیر معلوم x_i می‌باشد. این سنجش نزدیکی از مجموع $\sum [f(x_i) - y_i]$ خود

انحرافات بهتر است؛ در مجموع اخیر جملات مثبت و منفی می‌توانند یکدیگر را حذف کرده و نتیجهٔ مغلوطی به ما بدهند که نقاط نزدیک خط قرار دارند، حتی‌وقتی نقاط در مجاورت خط نیستند. **خط** $y = mx + b$ که S را مینیمم می‌سازد **خط بهترین برازش** به n نقطه، یا به زبان آمار، **خط برگشت** نام دارد. نشان دهید این خط به شیب

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2} \qquad \text{(یک)}$$

و قطع y

$$b = \bar{y} - m\bar{x} \qquad \text{(دو)}$$

است، که در آن

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

(مثال ۶، صفحهٔ ۱۲۲۰، را به یاد آورید).

راهنمایی. توجه کنید که S تابعی از m و b است.

به کمک فرمولهای (یک) و (دو)، خط برگشت مجموعه نقاط داده شده را بیابید.

۳۶. $(1, 0), (3, 2), (5, 4)$

۳۷. $(-1, 0), (0, 1), (1, 1), (2, -1)$

۳۸. $(0, 0), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (4, 3)$

در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته ثابت شده است که تابع سه متغیرهٔ $f(x, y, z)$ با مشتقات جزئی دوم پیوسته در نقطهٔ بحرانی (a, b, c) مینیمم موضعی دارد اگر سه کمیت

$$A = f_{xx}, \qquad D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}, \qquad E = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}$$

در (a, b, c) مثبت باشند، و در (a, b, c) ماکزیمم موضعی اکید دارد اگر در (a, b, c) داشته باشیم $A < 0, D > 0, E < 0$. با استفاده از این آزمون، اکسترممهای موضعی تابع داده شده را بیابید.

۳۹. $f(x, y, z) = xy + 3x - x^2 - y^2 - z^2$

۴۰. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + xy - 9x - 3y + 4z + 10$

آیا تابع داده شده در مبداء اکسترمم موضعی دارد؟

۴۱. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xyz$

۴۲. $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + xyz$

۹.۱۳ ضرایب لاگرانژ

ممکن است قبلاً متوجه شده باشید که برای حل بسیاری از مسائل بهینه‌سازی ذکر شده در بخش اخیر (و بخش ۷.۳) ، باید ماکزیمم یا مینیمم یک تابع دو یا سه متغیره را تحت *شرایط جانبی* یا **قیود** وارد بر متغیرها بیابیم .مثلاً ،در مثال ۱ ، صفحهٔ ۳۲۳ ، بیشترین مساحت یک مزرعهٔ مستطیلی‌محصور به حصاری به‌طول 800 ft، و در مثال ۶ ،صفحهٔ ۱۲۹۰، کمترین چوب لازم برای ساختن یک جعبهٔ مکعب مستطیل با حجم معلوم V را خواهانیم .

به بیان ریاضی ، اولین مسئله عبارت است از ماکزیمم‌سازی تابع

$$f(x, y) = xy \tag{۱}$$

تحت قید

$$2(x + y) = 800, \tag{۱'}$$

و دومین مسئله عبارت است از مینیمم‌سازی تابع

$$f(x, y, z) = 2(xy + xz + yz) \tag{۲}$$

تحت قید

$$xyz = V. \tag{۲'}$$

روش ما برای پرداختن به این مسائل در هر دو حالت یکی بود . ابتدا معادلهٔ‌قید‌را نسبت به یکی از متغیرها و برحسب متغیر یا متغیرهای دیگر حل کرده ، درحالت معادلهٔ (۱') به دست می‌آوردیم $y = 400 - x$ و در حالت معادلهٔ (۲') به‌دست آوردیم $z = V/xy$. بعد ،باگذاردن این عبارات در (۱) و (۲) ، رابطهٔ (۱) را به تابع

$$f(x, 400 - x) = 400x - x^2 \tag{۳}$$

از متغیر x ، و رابطهٔ (۲) را به تابع

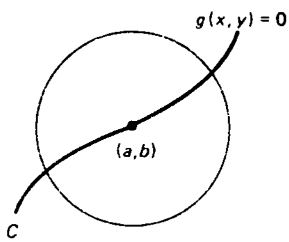
$$f\left(x, y, \frac{V}{xy}\right) = 2\left(xy + \frac{V}{y} + \frac{V}{x}\right) \tag{۴}$$

از دو متغیر x و y تحویل کردیم . سپس، از قضیهٔ اکسترممها برای ماکزیمم‌سازی (۳) بر بازهٔ $0 \le x \le 400$ و مینیمم‌سازی (۴) بر ربع اول استفاده نمودیم . جزئیات در مثالهای ذکر شده شرح داده شده است .

اکسترممهای مقید . حال راه دیگری برای یافتن ***اکسترممهای مقید*** (یعنی ، اکسترممهایی‌که تحت شرایط‌جانبی یا قیودند) ارائه می‌دهیم که توسط‌ریاضیدان بزرگ فرانسوی ، ژوزف

لوبی لاگرانژ(۱۸۱۳ – ۱۷۳۶) ، کشف شده است و به روش *ضرایب لاگرانژ* معروف است. این روش دارای دو مزیت است . اولا" ، در آن از پیچیدگیهای جبری در حل صریح معادلهٔ قید نسبت به یکی از متغیرها و برحسب سایرین دوری می‌شود . ثانیا" ، در آن همهٔ متغیرهای مسئله " یکسان " بوده و به هیچیک توجه خاصی نمی‌شود (مانند متغیر x در مثال اول یا متغیرهای x و y در مثال دوم فوق) .

با آنکه روش ضرایب لاگرانژ را می‌توان برای توابع با بیش از سه متغیر و توابع تحت بیش از یک قید به کار برد ، ما خود را به دو حالت که از همه ساده‌تر است ، یعنی یافتن اکسترممهای تابع دومتغیرهٔ $f(x, y)$ تحت قید $g(x, y) = 0$ و یافتن اکسترممهای تابع سه متغیره $f(x, y, z)$ تحت قید $g(x, y, z) = 0$ محدود می‌کنیم [1] . در حالت اول فرض می‌کنیم نمودار $g(x, y) = 0$ منحنی مانند C در صفحه بوده ،و در حالت دوم نمودار $g(x, y, z) = 0$ سطحی مانند S در فضا باشد . دراین‌صورت ، منظور از یک **اکسترمم موضعی مقید** $f(x, y)$ یا $f(x, y, z)$ در نقطهٔ (a, b) از C یا نقطهٔ (a, b, c) از S یعنی اکسترممی موضعی که درآن مقدار f در (a, b) یا (a, b, c) با **تمام** مقادیر f در نقاط مجاور مقایسه شده ، بلکه فقط با مقادیر f **بر** C **یا** S **واقعند** مقایسه گردد ؛ در اینجا فرض این است که (a, b) یک نقطهٔ انتهایی منحنی C نبوده و (a, b, c) به " لبه " سطح S تعلق ندارد . در شکل ۲۰ این فرض در حالت دومتغیره ، و در



$f(x, y)$ در (a, b) مینیمم موضعی مقید دارد اگر به ازای هر نقطهٔ (x, y) بر منحنی C داخل دایره‌ای به مرکز (a, b) ، $f(a, b) \leq f(x, y)$.

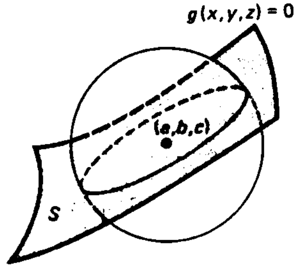
شکل ۲۰

شکل ۲۱ در حالت سه متغیره تعبیر هندسی شده است .

دو قضیهٔ بسیار نزدیک به هم زیر طرز استعمال ضرایب لاگرانژ را در دو حالتی که هم‌اکنون مطرح شد کنترل می‌کنند . در هر یک از آنها ضریب لاگرانژ عددی است‌که‌معمولا "

---

۱ . *با اینحال* ، ر.ک. مسائل ۳۱ و ۳۲ .



$f(x,y,z)$ در (a,b,c) ماکزیمم موضعی مقید دارد اگر به ازای هر نقطهٔ (x,y,z) بر سطح S داخل کره‌ای به مرکز (a,b,c)، $f(a,b,c) \geq f(x,y,z)$.

شکل ۲۱

با λ (لامبدای کوچک یونانی) نموده می‌شود.

قاعدهٔ ضرایب لاگرانژ: حالت دومتغیره

قضیهٔ ۸ (قاعدهٔ ضرایب لاگرانژ برای توابع دو متغیره) . فرض کنیم $f(x, y)$ و $g(x, y)$ بر مجموعهٔ *بازی شامل منحنی* C که نمودار معادلهٔ $g(x, y) = 0$ *است مشتقات جزئی اول پیوسته داشته باشند*. همچنین، بر C، $\nabla g(x, y) \neq \mathbf{0}$، و نیز $f(x, y)$ در نقطهٔ (a, b) از C اکسترمم موضعی مقید داشته باشد. در این صورت، عددی مانند λ هست به طوری که

$$\nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b), \qquad (5)$$

یعنی، گرادیانهای f و g در (a, b) موازی می‌باشند.

برهان (اختیاری) . چون بر C، $\nabla g(x, y) \neq \mathbf{0}$، $g_x(x, y)$ یا $g_y(x, y)$ در هر نقطهٔ از C ناصفر است؛ درنتیجه $g_x(a, b) \neq 0$ یا $g_y(a, b) \neq 0$. به‌طور مشخص، فرض‌کنیم $g_y(a, b) \neq 0$ پس، طبق قضیهٔ تابع ضمنی (صفحهٔ ۱۲۵۹) ، بخشی از منحنی C که در (a, b) ومجاور آن است نمودار تابع به‌طور پیوسته مشتقپذیری مانند $y = y(x)$ می‌باشد. باگذاردن $y = y(x)$ در $f(x, y)$ و این فرض که $f(x, y)$ در (a, b) اکسترمم موضعی مقید دارد، معلوم می‌شود که‌تابع مشتقپذیر $F(x) = f(x, y(x))$ یک متغیره باید در $x = a$ اکسترمم موضعی (به معنی عادی) داشته باشد. بنابراین، $F'(a) = 0$، که در آن پریم مشتقگیری نسبت به x است؛ درنتیجه با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای،

$$F'(a) = f_x(a, b) + f_y(a, b)y'(a) = 0,$$

لذا، $f_x(a, b) = 0$ اگر $f_y(a, b) = 0$، ولی

$$y'(a) = -\frac{f_x(a, b)}{f_y(a, b)} \qquad (۶)$$

اگر $f_y(a, b) \neq 0$. در حالت اول $\nabla f = f_x\mathbf{i} + f_y\mathbf{j} = \mathbf{0}$ ، و (۵) به ازای $\lambda = 0$ برقراراست. در حالت دوم ، با مشتقگیری از اتحاد $g(x, y(x)) \equiv 0$ ، که در همسایگی $x = a$ برقراراست به دست می‌آوریم

$$g_x(a, b) + g_y(a, b)y'(a) = 0,$$

و درنتیجه ،

$$y'(a) = -\frac{g_x(a, b)}{g_y(a, b)}. \qquad (۶')$$

حال از مقایسهٔ (۶) با (۶') نتیجه می‌شود که

$$f_x(a, b) = \frac{f_y(a, b)}{g_y(a, b)}\, g_x(a, b),$$

درنتیجه ، اگر $\lambda = f_y(a, b)/g_y(a, b)$ را اختیار کنیم ، انتخابی که معادل مساوی قرار دادن $f_y(a, b)$ با $\lambda g_y(a, b)$ است ، مجددا" (۵) برقرار می‌شود . برای تکمیل برهان ، ملاحظه می‌کنیم که اگر به جای $g_y(a, b) \neq 0$ فرض کنیم $g_x(a, b) \neq 0$ ، استدلال مشابهی قابل بیان‌است (با تعویض نقشهای x و y باهم ، جزئیات را شرح دهید) .

قاعدهٔ ضرایب لاگرانژ : حالت سه متغیره

قضیهٔ ۹ (قاعدهٔ ضرایب‌لاگرانژ برای توابع سه‌متغیره) . *فرض کنیم $f(x, y, z)$ و $g(x, y, z)$ بر مجموعهٔ بازی شامل سطح S که نمودار معادلهٔ $g(x, y, z) = 0$ است مشتقات جزئی‌اول پیوسته داشته باشد . همچنین ، بر C ، $\nabla g(x, y, z) \neq \mathbf{0}$ ، و نیز $f(x, y, z)$ درنقطهٔ (a, b, c) از S اکسترمم موضعی مقید داشته باشد . در این صورت ، عددی مانند λ هست به‌طوری که*

$$\nabla f(a, b, c) = \lambda \nabla g(a, b, c), \qquad (۷)$$

یعنی ، گرادیانهای f و g در (a, b, c) باهم موازیند .

برهان (اختیاری) . می‌توان برهانی مانند برهان قضیهٔ ۸ آورد ، ولی آموزنده‌تر آن است که به طور متفاوتی عمل کنیم . مثل صفحهٔ ۱۲۶۵، فرض کنیم C یک منحنی هموار بر S مار بر (a, b, c) به معادلات پارامتری

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \qquad (\alpha < t < \beta)$$

بوده ، و t_0 مقدار پارامتر t نظیر به نقطهٔ (a, b, c) باشد . همچنین ، $f(x, y, z)$ در (a, b, c)

اکسترمم موضعی مقید داشته باشد . در اینصورت ، تابع مشتقپذیر $F(t) = f(x(t), y(t), z(t))$ یک متغیره باید در $t = t_0$ اکسترمم موضعی داشته باشد . بنابراین ، $F'(t_0) = 0$ ، که در آن پریم مشتقگیری نسبت به t را نشان میدهد ؛ لذا ، با استفاده از قاعدهٔ زنجیرهای ،

$$F'(t_0) = f_x(a, b, c)x'(t_0) + f_y(a, b, c)y'(t_0) + f_z(a, b, c)z'(t_0) = 0, \tag{۸}$$

همچنین ، با مشتقگیری از اتحاد $g(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0$ ،

$$g_x(a, b, c)x'(t_0) + g_y(a, b, c)y'(t_0) + g_z(a, b, c)z'(t_0) = 0. \tag{۹}$$

فرض کنیم $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$. پس $\mathbf{r}'(t_0) = x'(t_0)\mathbf{i} + y'(t_0)\mathbf{j} + z'(t_0)\mathbf{k}$ ، که در آن $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$ ، زیرا منحنی C هموار میباشد (ر.ک. صفحهٔ ۱۲۶۵) . حال میتوان (۸) و (۹) را به صورت

$$\nabla f(a, b, c) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0 \tag{۸'}$$

و

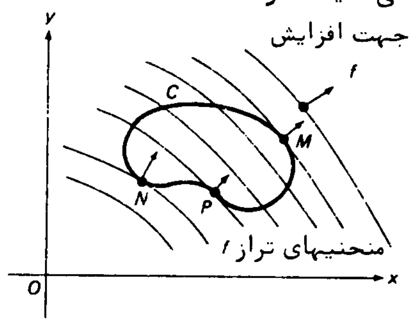
$$\nabla g(a, b, c) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0, \tag{۹'}$$

برحسب حاصلضربهای نقطهای بردار $\mathbf{r}'(t_0)$ در گرادیانهای $\nabla f(a, b, c)$ و $\nabla g(a, b, c)$ نوشت . چون $\mathbf{r}'(t_0)$ در (a, b, c) بر منحنی C مماس است ، $\nabla f(a, b, c)$ و $\nabla g(a, b, c)$ هر دو در (a, b, c) بر C عمودند . اما C یک منحنی هموار *دلخواه* بر S است که از (a, b, c) میگذرد ؛ و لذا ، $\nabla f(a, b, c)$ و $\nabla g(a, b, c)$ هر دو باید در امتداد خط قائم به S در (a, b, c) قرار گیرد . لذا ، بردارهای $\nabla f(a, b, c)$ و $\nabla g(a, b, c)$ در (a, b, c) موازیند ، و فرمول (۷) ثابت میشود .

قاعدهٔ ضرایب لاگرانژ (۷) تعبیر هندسی سادهای دارد . بردار گرادیان $\nabla f(a, b, c)$ به سطح تراز $f(x, y, z) = f(a, b, c)$ در نقطهٔ (a, b, c) ، و $\nabla g(a, b, c)$ به سطح قیدی $g(x, y, z) = 0$ در (a, b, c) عمود است ؛ در واقع ، سطح قیدی سطح تراز $g(x, y, z) = c$ نظیر به c است . لذا ، فرمول (۷) میگوید هرگاه $f(x, y, z)$ در (a, b, c) اکسترمم موضعی مقید داشته باشد ، آنگاه سطح تراز f مار بر (a, b, c) و سطح قیدی در (a, b, c) قائم مشترک ، و در نتیجه صفحهٔ مماس مشترک ، دارند . به همین نحو ، قاعدهٔ دوبعدی ضرایب لاگرانژ (۵) میگوید هرگاه $f(x, y)$ در نقطهٔ (a, b) اکسترمم موضعی مقید داشته باشد ، آنگاه منحنی تراز f مار بر (a, b) و منحنی قیدی $g(x, y) = 0$ در (a, b) قائم مشترک ، و درنتیجه خط مماس مشترک دارند .

نقاط (a, b) یا (a, b, c) واقع بر منحنی C یا سطح S که در آنها $\nabla f = \lambda \nabla g$ تنها **نامزد** نقاطی هستند که f در آنها اکسترمم موضعی مقید دارد ، و f ممکن است در چنین نقطهای اکسترمم موضعی مقید *نداشته باشد* ؛ به عبارت دیگر ، شرط $\nabla f = \lambda \nabla g$ برای اکسترمم موضعی

مقید لازم است ولی کافی نیست . این امر در شکل ۲۲ شرح داده شده ، که منحنیهای تراز تابع $f(x, y)$ را همراه با C که نمودار قید $g(x, y) = 0$ است نشان می‌دهد . توجه کنید که سه نقطهٔ M ، N ، و P وجود دارند که در آنها منحنی C و منحنی تراز نظیر f قائم مشترک دارند ، و اینها تنها نامزد نقاطی‌هستند که f درآنها اکسترمم موضعی مقید دارد . بامعاینهٔ شکل معلوم می‌شود که اگرچه تابع f در M ماکزیمم موضعی مقید و در N مینیمم موضعی مقید دارد ، در P اکسترمم موضعی مقید ندارد .



شکل ۲۲

لذا ، برای اثبات اکسترمم موضعی مقید داشتن f در نقطه‌ای از C که $\nabla f = \lambda \nabla g$ ، و نیز تعیین آنکه اکسترمم ماکزیمم یا مینیمم است ، به تحلیل بیشتری نیاز داریم[1] . در این باب لازم است نکات زیر را در خاطر داشته باشیم .

(یک) هرگاه C مجموعهٔ بستهٔ کرانداری بوده و f بر C پیوسته باشد ،آنگاه ،طبق قضیهٔ۵ ، صفحهٔ ۷۹۱ ، f ، C اکسترمم مطلق دارد .

(دو) اگر f بر C اکسترمم مطلق داشته و بر مجموعهٔ بازی شامل C مشتقپذیر باشد ، این اکسترممها یا اکسترممهای‌موضعی f اند ، که در این صورت می‌توان آنها را باقاعدهٔضرایب لاگرانژ $\nabla f = \lambda \nabla g$ (مشروط براینکه $\nabla g \neq 0$) به دست آورد ، یا در نقاط انتهایی C رخ می‌دهند .

(سه) در بسیاری از مسائل ، به کمک نکاتی هندسی یا فیزیکی می‌توان نتیجه گرفت که f در نقطه‌ای که $\nabla f = \lambda \nabla g$ اکسترمم دارد .

تبصره . اگر قید به شکل $g(x, y) = c$ یا $g(x, y, z) = c$ باشد که $c \neq 0$ ، باز می‌توان شرط لازم

---

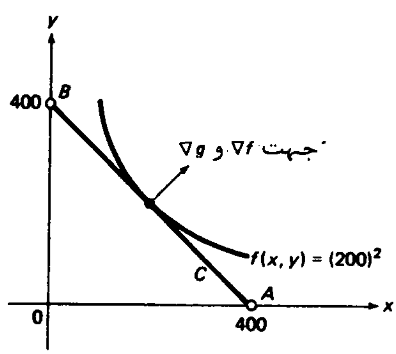
۱ . در اینجا برای سادگی از منحنی C و تابع دومتغیرهٔ f حرف می‌زنیم ولی نکات مشابهی برای سطح S و تابع سه متغیرهٔ f نیز قابل بیانند .

برای اکسترمم موضعی مقید را به‌صورت $\nabla f = \lambda \nabla g$ نوشت ،زیرا ∇g = $\nabla(g - c) = \nabla g - \nabla c$. حالاتی وجود دارند که در آنها ضریب لاگرانژ λ صفر است . در این صورت ، $\nabla f = \mathbf{0}$ ،ولی توازی ∇f و ∇g در (a, b) یا (a, b, c) برقرار می‌ماند ،زیرا بردار صفر را موازی‌هربردارگرفته‌ایم . همچنین ، ممکن است یک اکسترمم موضعی مقید در نقطه‌ای رخ دهد که $\nabla g = \mathbf{0}$، زیرا این حالت در قاعدهٔ ضرایب لاگرانژ منظور نشده است .

برای توضیح روش ضرایب لاگرانژ ، ابتدا راه‌حلهای دیگری از دو مسئلهٔ مطرح شده درآغاز بخش را نشان داده و سپس ، با استفاده از ضرایب لاگرانژ ، چند مسئلهٔ نوعی در رابطه با اکسترممهای مقید را حل می‌کنیم .

مثال ۱ . یک مزرعهٔ مستطیلی با بیشترین مساحت را بیابید که بتوان دور آن را با 800 ft حصار کشید .

حل . فرض‌کنیم x عرض و y طول مزرعه باشد . ما ماکزیمم مطلق تابع مساحت $f(x, y) = xy$ تحت قید $g(x, y) = 2(x + y) = 800$ را می‌خواهیم .دراینجامتغیرهای x و y ذاتا "نامنفی، و در واقع مثبت ، اند زیرا انتخاب $x = 0$ یا $y = 0$ بی‌معنی است (این یعنی حصار راروی خودش تاکنیم ، و برای مزرعه مساحت صفر حاصل می‌شود) . لذا ، قلمرو هر دو تابع f و g ربع اول Q ی صفحهٔ xy است .فرض‌کنیم C نمودارمعادلهٔقید $(x > 0, y > 0)$ $g(x, y) = 800$ باشد . همانطور که درشکل ۲۳ می‌بینیم، C پاره‌خطی‌است که نقاط $A = (400, 0)$ و $B = (0, 400)$ را به هم وصل می‌کند ولی شامل آنها نیست . از تعبیر هندسی معلوم می‌شود که f بـر C ماکزیمم مطلق دارد ، زیرا اگر x و y کوچک بوده و نیز اگر x یا y تقریبا "مساوی 400 باشد،



شکل ۲۳

مزرعه باریک و مساحتی کوچک دارد . گرادیانهای f و g عبارتنداز

$$\nabla f = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}, \qquad \nabla g = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} \neq \mathbf{0},$$

ودرنتیجه ، قاعدهٔ ضرایب لاگرانژ $\nabla f = \lambda \nabla g$ به صورت $y\mathbf{i} + x\mathbf{j} = \lambda(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$ یا معادلا "

$$y = 2\lambda, \qquad x = 2\lambda \tag{۱۰}$$

درمی‌آید ، که $y = x$ را ایجاب می‌کند . با گذاردن $y = x$ در قید $2(x + y) = 800$ معلوم می‌شود که $4x = 800$ یا $x = 200$. چون‌نقاط دیگری‌از C وجود ندارند که درآنها $\nabla f = \lambda \nabla g$ و C نقاط انتهایی ندارد ، می‌توان مطمئن بود که $(200, 200)$ نقطه‌ای است که f درآن ماکزیمم مطلق خود بر C را می‌گیرد . لذا ، مزرعهٔ مستطیلی به مساحت ماکزیمم محصور به‌حصاری‌به طول 800 ft یک مزرعهٔ مربع به ضلع 200 ft و مساحت $(200)^2 = 40{,}000$ sq. ft است ، که در مثال ۱ ، صفحهٔ ۳۲۳ ، به روشی دیگر به دست آمد . ما به این نتیجه بدون حل نسبت به خود ضریب λ ، که مستقیما " مورد توجه ما نیست ، رسیدیم . با اینحال ، از (۱۰) فورا " نتیجه می‌شود که $\lambda = x/2 = y/2 = 100$.

یک روش نسبتا " متفاوت برای حل مثال ۱ این است که فرض کنیم منحنی C نقاط انتهایی A و B خود را دربرداشته باشد ، اگرچه این از دیدگاه سازندهٔ حصار اهمیت عملی ندارد . در این صورت ، C یک مجموعهٔ بستهٔ کراندار است ؛ درنتیجه ، تابع پیوستهٔ f بر C هم ماکزیمم و هم مینیمم دارد . ماکزیمم f بر C در نقطهٔ $(200, 200)$ رخ می‌دهد که در آن قاعدهٔ ضرایب لاگرانژ $\nabla f = \lambda \nabla g$ برقرار است ، و مینیمم f بر C البته در نقاط انتهایی A و B است که f مقدار 0 را می‌گیرد . توجه کنید که مینیمم f بر C را نمی‌توان با قاعدهٔ ضرایب لاگرانژ کشف کرد زیرا ، همانطور که به آسانی معلوم می‌شود ، مقداری از λ وجود ندارد که در A یا B ، $\nabla f = \lambda \nabla g$ (در اینجا فرض می‌کنیم قلمرو f و g تمام صفحه باشد) . لذا ، در حالاتی که C نقاط انتهایی دارد ، باید رفتار f در نقاط انتهایی یک منحنی قیدی C جداگانه تحلیل گردد .

مثال ۲ . کمترین مقدار تختهٔ لازم جهت ساختن یک جعبه مکعب مستطیل بسته به حجم معلوم V را بیابید .

حل . فرض کنیم x طول ، y عرض ، و z ارتفاع جعبه باشد . در این صورت ، مینیمم مطلق تابع مساحت کل $f(x, y, z) = 2(xy + xz + yz)$ تحت قید $g(x, y, z) = xyz = V$ را می‌خواهیم چون متغیرهای x ، y ، و z ذاتا " مثبت‌اند (چرا ؟) ، قلمرو هر دو تابع f و g یکهشت

اول می‌باشند . با محاسبهٔ گرادیانهای f و g ، خواهیم داشت

$$\nabla f = 2(y+z)\mathbf{i} + 2(x+z)\mathbf{j} + 2(x+y)\mathbf{k}$$

و

$$\nabla g = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k},$$

که در آن باید توجه‌داشت‌که‌بر قلمرو g ، $\nabla g \neq \mathbf{0}$. لذا ، قاعدهٔ‌ضرایب‌لاگرانژ $\nabla f = \lambda \nabla g$ ایجاب می‌کند

$$2(y+z) = \lambda yz, \qquad 2(x+z) = \lambda xz, \qquad 2(x+y) = \lambda xy,$$

یا معادلا "

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{y} = \frac{\lambda}{2}, \qquad \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{\lambda}{2}, \qquad \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{\lambda}{2} \tag{۱۱}$$

(به یاد آورید که $x > 0, y > 0, z > 0$) .از (۱۱)فورا " نتیجه می‌شود که $x = y = z$ ، که نظیر به یک جعبهٔ **مکعبی** می‌باشد . این جعبه باید یک مینیمم مطلق مقید f بـه دست دهد ، زیرا جعبه‌های غیرمکعبی به حجم V وجود دارند که به مقدار چوب بدلخواه زیاد نیاز دارند (نشان‌دهید که وقتی متغیرهای x ، y ، و z تحت قید $xyz = V$ به0نزدیک شوند ، $f(x, y, z) \to \infty$) . به ازای $x = y = z$ ، قید به‌صورت $x^3 = V$ درمی‌آید ؛ درنتیجه ، $x = V^{1/3}$. لذا ، کمترین چوب لازم برای ساختن جعبه‌ای به حجم V مساوی است بـا $f(V^{1/3}, V^{1/3}, V^{1/3}) = 6V^{2/3}$ ، و این در مثال ۶ ، صفحهٔ۱۲۹۰، به روشی دیگر بـه‌دست آمد ، و جعبه باید مکعبی به ضلع $V^{1/3}$ باشد . مقدار λ که به ازای‌آن $\nabla f = \lambda \nabla g$ چقدراست ؟

مثال ۳ . اکسترممهای تابع $f(x, y) = x^2 y$ را بر بیضی $2x^2 + y^2 = 3$ بررسی نمایید .

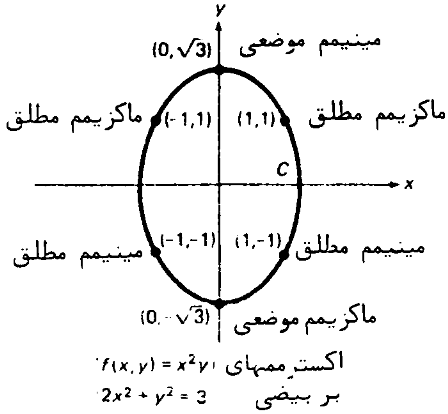
حل . در اینجا معادلهٔ قید عبارت است از $g(x, y) = 2x^2 + y^2 = 3$ ،وگـرادیانهای f و g عبارتنداز

$$\nabla f = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}, \qquad \nabla g = 4x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j},$$

که در آن بر بیضی $\nabla g \neq \mathbf{0}$. لذا ، قاعدهٔ ضرایب لاگرانژ $\nabla f = \lambda \Delta g$ نتیجه می‌دهد که

$$2xy = 4\lambda x, \qquad x^2 = 2\lambda y. \tag{۱۲}$$

معادلهٔ اول به ما می‌گوید که $x = 0$ یا $\lambda = \frac{1}{2}y$. اگر $x = 0$ ، قید به $y^2 = 3$ یا $y = \pm\sqrt{3}$ تحویل می‌شود . اگر $\lambda = \frac{1}{2}y$ ، معادلهٔ دوم (۱۲) به صورت $x^2 = y^2$ یا $y = \pm x$ ، وقید به صورت $3x^2 = 3$ یا $x = \pm 1$ درمی‌آید . لذا ، همانطور که شکل ۲۴ نشان می‌دهد ، درست شش نقطه از بیضی $2x^2 + y^2 = 3$ وجود دارند که در آنها $\nabla f = \lambda \nabla g$ ؛ یعنـــی ،



شکل ۲۴

نقاط $(0, \pm\sqrt{3})$ ، $(\pm 1, 1)$ ، و $(\pm 1, -1)$. بیضی ، که آن را با C نشان می‌دهیم ، یک مجموعهٔ بستهٔ کراندار بوده و f بر C پیوسته است . لذا ، f بر C اکسترمم مطلق دارد . چون $f(0, \pm\sqrt{3}) = 0$ ، $f(\pm 1, 1) = 1$ ، و $f(\pm 1, -1) = -1$ ، ماکزیمم مطلق f بر C مساوی 1 است که در $(\pm 1, 1)$ گرفته می‌شود ، و مینیمم مطلق f بر C مساوی -1 است که در $(\pm 1, -1)$ گرفته می‌شود . در مورد نقاط $(0, \pm\sqrt{3})$ ، f در $(0, \sqrt{3})$ مینیمم موضعی مقید و در $(0, -\sqrt{3})$ ماکزیمم موضعی مقید دارد . این مطلب از این نتیجه می‌شود که f صفر است اگر $x = 0$ ، ولی مثبت است اگر $x \neq 0, y > 0$ و منفی است اگر $x \neq 0, y < 0$. به آسانی معلوم می‌شود که $\lambda = 0$ مقدار λ است که در نقاط $(0, \pm\sqrt{3})$ ، $\nabla f = \lambda \nabla g$.

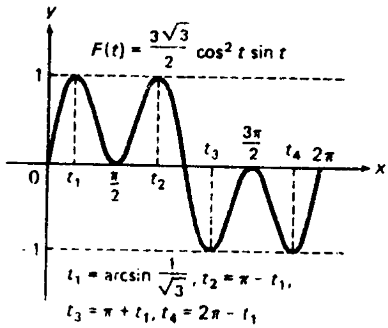
با معرفی معادلات پارامتری

$$x = \sqrt{\frac{3}{2}} \cos t, \qquad y = \sqrt{3} \sin t \qquad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

برای بیضی C که ، وقتی t از 0 تا 2π افزایش می‌یابد ، C یکبار در جهت خلاف‌عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود ، اطلاعات بیشتری از مسئلهٔ فوق به دست می‌آید . در این صورت ، مقدار $f(x, y) = x^2y$ در نقطه‌ای از C به پارامتر t از تابع زیر به دست می‌آید :

$$F(t) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cos^2 t \sin t.$$

نمودار $F(t)$ در شکل ۲۵ نموده شده است ، و با رفتار $f(x, y)$ به دست آمده به روش ضرایب لاگرانژ سازگاری کامل دارد .



شکل ۲۵

مثال ۴. نقطه‌ای از سهمی‌گون دوار $z=\frac{1}{4}(x^2+y^2)-2$ را بیابید که از همه به نقطهٔ $(0, 1, 0)$ نزدیکتر باشد.

حل. چون مجذور فاصلهٔ نقطهٔ $(0, 1, 0)$ تا نقطهٔ متغیر (x, y, z) از سهمی‌گون $x^2+(y-1)^2+z^2$ است، مینیمم مطلق تابع

$$f(x, y, z) = x^2 + (y-1)^2 + z^2$$

را تحت قید

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4z = 8$$

جستجو می‌کنیم (اگر مجذور فاصله مینیمم شود، خود فاصله نیز شده است). با گرفتن گرادیان، داریم

$$\nabla f = 2x\mathbf{i} + 2(y-1)\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}, \qquad \nabla g = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 4\mathbf{k} \neq 0,$$

درنتیجه، قاعدهٔ ضرایب لاگرانژ $\nabla f = \lambda \nabla g$ نتیجه می‌دهد که

$$2x = 2\lambda x, \qquad 2(y-1) = 2\lambda y, \qquad 2z = -4\lambda.$$

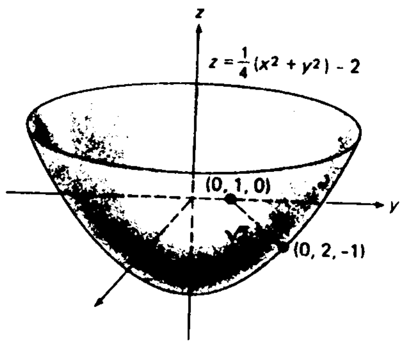
پس از معادلهٔ اول داریم $x = 0$ یا $\lambda = 1$. اما اگر $\lambda = 1$، معادلهٔ دوم به صورت $-2 = 0$ درمی‌آید که بی‌معنی است؛ و درنتیجه، $x = 0$ (توجه کنید که به همین دلیل $y \neq 0$). با حذف λ از معادلات دوم و سوم، به دست می‌آوریم

$$z = -\frac{2(y-1)}{y} \tag{۱۳}$$

با گذاردن $x = 0$ و فرمول (۱۳) در معادلهٔ قید، خواهیم داشت

$$y^2 - 4z = y^2 + \frac{8(y-1)}{y} = 8,$$

که $y = 2$ را ایجاب می‌کند، و در این صورت (۱۳) نتیجه می‌دهد که $z = -1$. بنابراین، $(0, 2, -1)$ تنها نقطهٔ صادق در شرط $\nabla f = \lambda \nabla g$ می‌باشد. از دید هندسه واضح است که f بر سهمی‌گون مینیمم دارد ولی ماکزیمم ندارد. لذا، مینیمم باید در $(0, 2, -1)$ باشد، و این نقطه‌ای از سهمی‌گون است که از همه به نقطهٔ $(0, 1, 0)$ نزدیکتر بوده و در فاصلهٔ $\sqrt{f(0, 2, -1)} = \sqrt{2}$ از آن قرار دارد (ر.ک. شکل ۲۶).



شکل ۲۶

مسائل

با استفاده از ضرایب لاگرانژ، اکسترممهای تابع f را تحت قید داده شده پیدا نمایید.

۱. $f(x, y) = 3x - 2y + 1, 9x^2 + 4y^2 = 18$

۲. $f(x, y) = xy, 3x + 2y - 36 = 0$

۳. $f(x, y) = x^2 - y^2, xy = 1$

۴. $f(x, y) = x^2 + y^2, x^4 + y^4 = 2$

۵. $f(x, y) = x^2 + 8y^2, \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

۶. $f(x, y) = x^2y^2, x^2 + y^2 = 1$

۷. $f(x, y) = x^2 + y^2, x^2 - y^2 = 1$

۸. $f(x, y) = x^2 + y^2, (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 8$

۹. $f(x, y, z) = 2x - 3y + z - 1, x^2 + y^2 + z^2 = 14$

۱۰. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, x - 2y + 2z = 6$

۱۱. $f(x, y, z) = \frac{1}{8}x + \frac{1}{27}y + \frac{1}{64}z, xyz = 1$ (x, y, z مثبت)

۱۲. $f(x, y, z) = x - y + z, 4x^2 + y^2 + 9z^2 = 49$

۱۳. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, 2x^2 + y^2 - z^2 = 2$

۱۴. $f(x, y, z) = xy + xz,\ x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 4$

با استفاده از ضرایب لاگرانژ، فاصلهٔ بین

۱۵. نقطهٔ $(-1, 4)$ و خط $12x - 5y + 71 = 0$

۱۶. نقطهٔ $(1, 1, 1)$ و صفحهٔ $2x + 6y - 9z + 12 = 0$

را بیابید.

۱۷. نقطه‌ای از سهمی $(y-1)^2 = 4x$ را بیابید که از همه به نقطهٔ $(2, 0)$ نزدیکتر باشد.

۱۸. نقاطی از هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ را بیابید که از همه به نقطهٔ $(0, 4)$ نزدیکتر باشند.

۱۹. نقطه‌ای از سهمی $y = \frac{1}{4}x^2$ را بیابید که از همه به خط $x - y - 4 = 0$ نزدیکتر باشد.

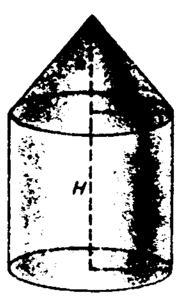
۲۰. نقاطی از بیضی $4x^2 + y^2 = 4$ را بیابید که از همه به خط $3x - 2y + 6 = 0$ نزدیکتر یا دورتر باشند.

۲۱. مینیمم تابع $f(x, y) = x^2 + (y+1)^2$ را تحت قید $g(x, y) = x^2 - y^3 = 0$ تعیین نمایید. آیا قاعدهٔ ضرایب لاگرانژ در این مسئله قابل اعمال است؟ جواب خود را توضیح دهید.

۲۲. با استفاده از قاعدهٔ ضرایب لاگرانژ، محورهای بیضی چرخیدهٔ $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2 = 0$ را بیابید. بیضی را رسم کنید.

راهنمایی. نقاطی از بیضی را بیابید که از مبداء دورترین و نزدیکترین باشند.

۲۳. چادری است به شکل یک استوانهٔ مستدیر قائم به ارتفاع H که رویش مخروطی به ارتفاع h با همان‌شعاع r قرار دارد (ر.ک. شکل ۲۷). حجم چادر قبلاً " تعیین شده است. چه رابطه‌ای باید بین ابعاد چادر وجود داشته باشد که مقدارپارچهٔ لازم برای ساختن آن مینیمم شود؟



شکل ۲۷

۲۴. چوب لازم برای ساختن وجوه یک جعبهٔ مکعب مستطیل بسته هر فوت مربع $1.00 قیمت دارد، حال‌آنکه قیمت بالا و پایین آن فوت مربعی $1.50 می‌باشد. حجم جعبه

12 فوت مکعب می‌باشد. ابعادی از جعبه را بیابید که هزینهٔ ساختن را مینیمم سازد، و هزینهٔ مینیمم چقدر است؟

با استفاده از ضرایب لاگرانژ،

۲۵. مثال ۸، صفحهٔ ۳۳۴ ۲۶. مسئلهٔ ۱، صفحه ۳۳۶

۲۷. مسئلهٔ ۳، صفحهٔ ۳۳۶ ۲۸. مسئلهٔ ۲۵، صفحهٔ ۱۲۹۴

۲۹. مسئلهٔ ۲۶، صفحهٔ ۱۲۹۴ ۳۰. مسئلهٔ ۲۷، صفحهٔ ۱۲۹۴

را حل نمایید.

۳۱. می‌توان نشان داد که هرگاه $f(x, y, z)$ در (a, b, c) تحت دو قید $g(x, y, z) = 0$ و $h(x, y, z) = 0$ اکسترمم موضعی داشته و گرادیانهای $\nabla g(a, b, c)$ و $\nabla h(a, b, c)$ ناصفر و ناموازی باشند، آنگاه دو عدد مانند λ و μ، به نام ضرایب لاگرانژ، وجود دارند به طوری که

$$\nabla f(a, b, c) = \lambda \nabla g(a, b, c) + \mu \nabla h(a, b, c)$$

(f، g، و h مشتقات جزئی اول پیوسته دارند). با استفاده از این تعمیم قضیهٔ ۹، اکسترممهای تابع $f(x, y, z) = 2x - y + 3z$ تحت قیود $x^2 + y^2 = 5$ و $y + z = 4$ را بیابید.

۳۲. با استفاده از روش مسئلهٔ قبل، فاصلهٔ بین مبداء و فصل مشترک صفحات $x + 2y - z - 5 = 0$ و $x - y + z - 3 = 0$ را بیابید. جواب را به روشی دیگر امتحان نمایید.

اصطلاحات و مباحث کلیدی

توابع چند متغیره

فضای R^n از نقاط $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

منحنیها و سطوح تراز

حدود و پیوستگی توابع n متغیره

نقاط درونی و نقاط مرزی

مجموعه‌های باز و بسته، پیوستگی بر یک مجموعه

مشتقات جزئی مرتبهٔ اول و بالاتر

مشتقپذیری از یک تابع دو یا چند متغیره

نتایج مشتقپذیری

تقریب به وسیلهٔ دیفرانسیلها

قاعدهٔ زنجیره‌ای برای توابع چندمتغیره

مشتقگیری ضمنی و قضیهٔ تابع ضمنی

صفحهٔ مماس و خط قائم به یک سطح

تقریب صفحهٔ مماس
مشتق جهتی و گرادیان
اکسترممهای مطلق و موضعی توابع چندمتغیره
نقاط بحرانی و نقاط زینی
آزمون جزئیهای دوم
اکسترممهای مقید و ضرایب لاگرانژ

مسائل تکمیلی

۱. تابع پیوستهٔ $f(x, y)$ تعریف شده بر تمام صفحهٔ xy را طوری بیابید که مقادیرش در 16 نقطهٔ (m, n) به مختصات صحیح $m, n = 0, 1, 2, 3$ مقادیر جدول زیر باشند:

$y \backslash x$	0	1	2	3
0	1	3	5	7
1	−2	0	2	4
2	−5	−3	−1	1
3	−8	−6	−4	−2

۲. مقدار تابع

$$f(x, y) = \frac{\arctan (x - y)}{\arctan (x + y)}$$

را در نقطهٔ $(\frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1), \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1))$ بیابید.

۳. مساحت A ی یک مثلث را به صورت تابعی از طول اضلاع x ، y ، و z بیان دارید.

۴. یک مثلث قائم‌الزاویه به طول اضلاع x و y در دایره‌ای به شعاع R محاط شده است. فرض کنید $A = f(x, y)$ مساحت مثلث باشد. قلمرو و برد f چیست؟

قلمرو (طبیعی) تابع داده شده را توصیف نمایید.

۵. $z = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{1 - y^2}$

۶. $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{9 - y^2}$

۷. $z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$

۸. $z = \arcsin (y/x)$

۹. $u = \dfrac{1}{\ln (1 - x^2 - y^2 - z^2)}$

۱۰. $u = \sqrt{x + y + z - 1}$

۱۱. فرض کنید

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{4x^2 + y^2} & \text{اگر } x < 0 \text{ ،} \\ |y| & \text{اگر } x \geq 0 \text{ ،} \end{cases}$$

منحنیهای تراز $f(x, y) = c$ را به ازای $c = 0, 2, 4$ رسم کنید.

۱۲. سطوح تراز تابع $f(x, y, z) = 10^{2x+3y-z}$ را توصیف کنید.

حدود زیر را محاسبه نمایید.

۱۳. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}$

۱۴. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}$

۱۵. $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \dfrac{2x + y}{x^2 + y^2}$

۱۶. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy \sin \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

۱۷. مجموعه‌ای مثال بزنید که هم باز و هم بسته باشد.

۱۸. مرز قلمرو طبیعی تابع $f(x, y) = \cot \pi(x^2 + y^2)$ چیست؟

تمام مشتقات جزئی اول تابع داده شده را بیابید.

۱۹. $f(x, y) = e^{x^2 + y^3}$

۲۰. $f(x, y) = e^{(x+y^2)^2}$

۲۱. $f(x, y) = x^{xy}$

۲۲. $f(x, y) = (1 + xy)^x$

۲۳. $f(x, y, z) = (x - y)(x - z)(y - z)$

۲۴. $f(x, y, z) = \arctan(xy/z)$

۲۵. $g(x, y, z) = x^{y^z}$

۲۶. $h(x, y, z) = xy^2z^3 \cosh xyz$

۲۷. f_{xyz} ، f_{xxy} ، و f_{yyx} را برای تابع مسئلهٔ ۲۳ بیابید.

۲۸. مستقیماً تحقیق کنید که اگر $z = \cos xy$ ، $z_{xxyy} = z_{yxyx}$.

۲۹. صفحهٔ $x = 2$ سطوح $z = \frac{1}{3}(x^2 + y^2)$ و $z = \frac{1}{6}x^2 + y^2$ را در یک جفت منحنی قطع می‌کند. این منحنیها در چه زاویهٔ حاده‌ای متقاطعند؟

۳۰. نشان دهید که تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{اگر } x^2 + y^2 \neq 0 \text{ ،} \\ 0 & \text{اگر } x = y = 0 \text{ ،} \end{cases}$$

در هر نقطه از صفحه مشتق جزئی دارد، ولی در مبداء ناپیوسته است.

۳۱. نشان دهید هرگاه $f(x, y)$ درهمسایگی نقطهٔ (a, b) مشتقات جزئی ***کراندار*** داشته باشد، آنگاه $f(x, y)$ در (a, b) پیوسته است. نشان دهید که این با مسئلهٔ قبل سازگار است.

۳۲. نشان دهید که تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{اگر } x^2 + y^2 \neq 0 \text{ ،} \\ 0 & \text{اگر } x = y = 0 \text{ ،} \end{cases}$$

در مبداء پیوسته بوده و مشتقات جزئی دارد، ولی در آن مشتقپذیر نیست. نشان دهید این با قضیهٔ ۲، صفحهٔ ۱۲۴۷، سازگار است.

۳۳. دیفرانسیل کل

$$f(x, y) = \arctan \frac{x - y}{x + y}$$

را بیابید.

۳۴. دو ضلع یک مثلث به طولهای $x = 10$ cm و $y = 20$ cm بوده، و زاویهٔ θ ی بین آنها $60°$ می‌باشد. تغییر مساحت مثلث را در صورتی تخمین بزنید که x و y هر دو به اندازهٔ 4 mm افزایش یافته و θ به اندازهٔ $1°$ کاهش یابد. همچنین، تغییر طول ضلع سوم مثلث را تخمین بزنید.

۳۵. $(3.01/11.98)^{0.49}$ را با استفاده از دیفرانسیلها تخمین بزنید.

۳۶. نشان دهید که معادلهٔ لاپلاس $u_{xx} + u_{yy} = 0$ به وسیلهٔ تابع $u = \arctan(y/x)$ برقرار است ولی به وسیلهٔ تابع $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ چنین نیست.

۳۷. فرض کنید $u = f(x^2 + y^2)$، که در آن f یک تابع مشتقپذیر با مشتق f' باشد. نشان دهید که

$$y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای، dw/dt را درصورتی بیابید که

۳۸. $w = x_1 x_2 \cdots x_n,\ x_1 = x_2 = \cdots = x_n = t$

۳۹. $w = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2},\ x_1 = x_2 = \cdots = x_n = t > 0$

۴۰. $w = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2,\ x_1 = t,\ x_2 = -t, \ldots, x_n = (-1)^{n-1} t$

۴۱. $\partial w/\partial x$ و $\partial w/\partial y$ را درصورتی بیابید که $w = \ln(rstu)$ و

$$r = x - y,\ s = x + y,\ t = x^2 + y^2,\ u = x^4 + y^4.$$

۴۲. قواعد حاصلضرب و خارج‌قسمت برای مشتقگیری معمولی را بااعمال قاعدهٔ زنجیره‌ای دو متغیره در مورد توابع $u(x, y) = xy$ و $v(x, y) = x/y$، که در آنها $x = x(t)$ و $y = y(t)$ اثبات نمایید.

۴۳. فرض کنید $u = (1/x)[f(x + y) + g(x - y)]$، که در آن f و g توابع دلخواهی از یک

متغیر با مشتقات دوم f'' و g'' می‌باشند. نشان دهید که

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \frac{\partial u}{\partial x}\right) = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

۴۴. تابع همگن $f(x, y)$ را طوری مثال بزنید که از درجهٔ π باشد (ر.ک. مسئلهٔ ۲۹، صفحهٔ ۱۲۶۲).

۴۵. نشان دهید هرگاه $f(x, y)$ همگن از درجهٔ n بوده و دارای مشتقات جزئی دوم پیوسته باشد، آنگاه

$$x^2 f_{xx}(x, y) + 2xy f_{xy}(x, y) + y^2 f_{yy}(x, y) = n(n-1) f(x, y). \qquad \text{(یک)}$$

۴۶. نشان دهید که $f(x, y) = x^2 y \arctan (x/y)$ همگن از درجهٔ 3 است، و تحقیق کنید که در فرمول (یک) صدق می‌کند.

۴۷. آیا مساحت یک مستطیل می‌تواند همزمان با کاهش طول قطر آن افزایش یابد؟

۴۸. دو ضلع مساوی یک مثلث متساوی‌الساقین در لحظهٔ t_0 به طول 50 cm بوده و طول l آنها به میزان 2.5 cm/sec افزایش می‌یابد، درحالی که زاویهٔ θ بین اضلاعش $45°$ است. سرعت کاهش θ در t_0 را درصورتی بیابید که میزان تغییر مساحت مثلث در t_0 صفر باشد.

۴۹. فرض کنید $u = u(x, y)$ و $v = v(x, y)$ در معادلات کشی ـ ریمان $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y,\ \ \partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$ صدق کنند (ر.ک. مسائل ۴۷ تا ۴۹، صفحهٔ ۱۲۴۱)، و $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ تبدیل از مختصات قطبی به قائم باشد. یک جفت معادله بیابید که $\partial u/\partial r$ ، $\partial u/\partial\theta$ ، $\partial v/\partial r$ ، و $\partial v/\partial\theta$ در آنها صدق نمایند.

۵۰. نشان دهید که تابع

$$u = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^m \qquad (m \neq 0, n > 2)$$

درصورت n بعدی معادلهٔ لاپلاس، یعنی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

صدق می‌کند اگر و فقط اگر $m = 1 - (n/2)$.

۵۱. بیضی گون $16x^2 + 9y^2 + z^2 = 144$ هشت صفحهٔ مماس دارد که در آنها هر سه قطع دارای قدرمطلق یکسانند. این صفحات را پیدا کنید.

۵۲. *زاویهٔ بین دو سطح* در نقطهٔ اشتراک P زاویهٔ بین صفحات مماس بر سطوح در P تعریف می‌شود. زاویهٔ بین استوانهٔ $x^2 + y^2 = 1$ و کرهٔ $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$ را در نقطهٔ $(1, 0, 1)$ و در نقطهٔ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}, 0)$ بیابید.

$u_x = \partial u/\partial x$ ، $u_y = \partial u/\partial y$ ، و $u_z = \partial u/\partial z$ را با مشتقگیری ضمنی از معادلهٔ داده شده حساب کنید.

۵۳. $x^2y^2 - 3xyzu + z^2u^2 = 2$

۵۴. $u^3 - u\cos xyz = 0$

۵۵. $e^{xyu} = zu$

۵۶. $\sinh(x + y + u) + \cosh(x + z - u) = 2$

۵۷. مشتق جهتی تابع $f(x, y) = e^{\sin(x-y)}$ را درنقطهٔ $(1, 1)$ و درجهت‌بردار $\mathbf{a} = 8\mathbf{i} - 15\mathbf{j}$ بیابید.

۵۸. مشتق جهتی تابع

$$f(x, y, z) = \cosh(x + y + z)$$

را در نقطهٔ $(\ln 2, 1, -1)$ و در جهت بردار $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ بیابید.

۵۹. زاویهٔ بین بردارهای گرادیان $\nabla f(3, 5)$ و $\nabla f(5, 13)$ را درصورتی بیابید که $f(x, y) = \arcsin(x/y)$

۶۰. نشان دهید که مشتق جهتی تابع $f(x, y) = x^2/y$ در هر نقطه از بیضی $x^2 + 2y^2 = 1$ و در جهت قائم به بیضی صفر است.

۶۱. میزان افزایش ماکزیمم تابع $f(x, y, z) = xy + xz + yz$ درنقطهٔ $(-3, 5, -1)$ چقدراست و در چه جهتی رخ می‌دهد؟

۶۲. نشان دهید که تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 \text{ ، اگر } y \le 0 \text{ یا } y \ge x^2 \\ 1 \text{ ، اگر } 0 < y < x^2 \end{cases}$$

در هر جهت در مبداء O مشتق جهتی دارد، ولی در O مشتقپذیر نیست.

تمام نقاط بحرانی تابع داده شده را بیابید. سپس تعیین کنید هر نقطهٔ بحرانی ماکزیمم موضعی، مینیمم موضعی، یا نقطهٔ زینی است.

۶۳. $f(x, y) = |x| + |y|$

۶۴. $f(x, y) = x\sqrt{1 + y} + y\sqrt{1 + x} \quad (x > -1, y > -1)$

۶۵. $f(x, y) = \sin x + \sin y + \cos(x + y) \; (0 < x < \pi/2, 0 < y < \pi/2)$

۶۶. $f(x, y) = (2x + y^2)e^x$

۶۷. $f(x, y) = e^{x^2} - 3y^2$

۶۸. اکسترممهای مطلق تابع $f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$ را بر ناحیهٔ مثلثی $R = \{(x, y): x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 2\pi\}$ پیدا نمایید.

۶۹. بیشترین حجم یک جعبهٔ مکعب مستطیل را بیابید که قطرش به طول $\sqrt{3}a$ باشد.

۷۰. بیشترین حجم یک جعبهٔ مکعب مستطیل را بیابید که مجموع طول اضلاعش $12a$ باشد.

۷۱. مثلثی با بیشترین مساحت بیابید که محیطش $2c$ باشد.

۷۲. مثلثی با بیشترین مساحت بیابید که قابل محاط در دایره‌ای به شعاع r باشد.

۷۳. نشان دهید هرگاه تابع $f(x, y)$ یا $f(x, y, z)$ اکسترممی موضعی تحت قید $g(x, y) = 0$ یا $g(x, y, z) = 0$ درنقطهٔ (a, b) یا (a, b, c) داشته‌باشد، آنگاه‌تابع $F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ از سه متغیر x، y، و λ یا تابع $F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$ ازچهار متغیر x، y، z، و λ یک اکسترمم موضعی **نامقید** در (a, b, λ) یا (a, b, c, λ) به‌ازای λای خواهد داشت. این راهی دیگر ولی کاملاً معادل با روش ضرایب لاگرانژ به ما می‌دهد.

۷۴. فرض کنید یک شرکت دو نوع کالای Q_1 و Q_2 تولید می‌کند. پس هزینهٔ کل تولید q_1 واحد از Q_1 و q_2 واحد از Q_2 تابعی از q_1 و q_2 است که **تابع هزینه** نام داشته و با $C(q_1, q_2)$ نموده‌می‌شود. دوهزینهٔ‌حاشیه‌ای‌نیزوجود دارند، $MC_1(q_1,q_2)=\partial C(q_1, q_2)/\partial q_1$ هزینهٔ حاشیه‌ای کالای اول Q_1، و $MC_2(q_1, q_2) = \partial C(q_1, q_2)/\partial q_2$ هزینهٔ حاشیه‌ای کالای دوم Q_2. (این چیزی جز تعمیم‌طبیعی نکات‌بخش ۳.۸ به‌یک شرکت دوکالایی نیست.) فرض کنید تابع هزینهٔ شرکت عبارت باشد از

$$C(q_1, q_2) = 3q_1^2 + 2q_1q_2 + 3q_2^2.$$

هزینه‌های حاشیه‌ای $MC_1(q_1, q_2)$ و $MC_2(q_1, q_2)$ رابیابید. همچنین، فرض کنید کالاهای Q_1 و Q_2 به ترتیب هر دانه $p_1 = \$480$ و $p_2 = \$720$ فروخته شوند. عبارتی‌برای سود $P(q_1, q_2)$ شرکت، که اینجا یک تابع دومتغیره است، بنویسید. چه سطح تولیدی از دو کالا سود را ماکزیمم می‌سازد و این سود ماکزیمم چقدر است؟

۷۵. در مسئلهٔ قبل فرض کنید سود تحت قید $q_1 + q_2 = 120$ ماکزیمم گردد. مثلاً، یک سازنده ممکن است بخواهد 120 صندلی دسته‌دار و کاناپه در مدتی معلوم بسازد. چه سطح تولیدی سود را در این حالت ماکزیمم می‌سازد، و این سود ماکزیمم‌چقدراست؟

۷۶. در نظریهٔ اقتصاد، میزان رضایت یا منفعت یک مشتری **سودمندی** نامیده می‌شود. فرض کنید $U(q_1, q_2)$ سودمندی یک مشتری در به دست آوردن q_1 واحد از کالای Q_1 و q_2 واحد از کالای دیگر Q_2 بوده، و مشتری M مقدار پول صرف خرید دو کالا نماید. در این صورت، خریدهای مشتری تحت **قید بودجهٔ** $p_1q_1 + p_2q_2 = M$ است، که در آن p_1 و p_2 بهای هر واحد از کالاهای Q_1 و Q_2 می‌باشند. به کمک ضریب لاگرانژ λ، نشان دهید که سودمندی مشتری در نقطهٔ (q_1, q_2) که

$$\frac{\partial U/\partial q_1}{p_1} = \frac{\partial U/\partial q_2}{p_2} = \lambda$$

ماکزیمم است ،که در آن مشتقات جزئی $\partial U/\partial q_1$ و $\partial U/\partial q_2$ به ترتیب **سودمندی حاشیه‌ای** کالاهای Q_1 و Q_2 نامیده می‌شوند . لذا ، شرط ماکزیمم‌سازی سودمندی این است که نسبت سودمندی حاشیه‌ای به بها برای هر دو کالا یکی باشد . با بررسی نحوهٔ بستگی مقدار ماکزیمم U به M ، ضریب لاگرانژ λ را تعبیر اقتصادی کنید . مقادیر q_1 و q_2 ای که سودمندی را ماکزیمم می‌سازند بیابید ، و نیز اگر $U(q_1, q_2) = q_1 q_2$ ، $p_1 = \$10$ ، $p_2 = \$5$ ، و $M = \$300$ ، مقدار نظیر λ را پیدا نمایید .

۷۷ . بیشترین حجم یک جعبهٔ مکعب مستطیل بسته به مساحت 16 sq. ft که مجموع اضلاعش 20 ft باشد چقدر است ؟

انتگرالگیری چندگانه ۱۴

در این فصل به حساب انتگرال توابع دو و چندمتغیره می‌پردازیم. برای احتراز از قلمرو حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته که در آن همین مباحث از دیدگاه دقیقتری بررسی می‌شوند، ما توجه خود را معطوف مسائل ملموسی از هندسه، فیزیک، و مهندسی می‌کنیم. در واقع، حل این‌گونه مسائل‌بود که پایه‌گذاران حساب دیفرانسیل و انتگرال را ملزم به طرح انتگرالهای چندگانه ساخت.

۱.۱۴ انتگرالهای مضاعف

در فصل ۴ مفهوم انتگرال معین یک تابع یک متغیره معرفی شد. مفهوم مشابه برای‌یک تابع چند متغیره ***انتگرال چندگانه*** است. بحث را با انتگرال یک تابع دومتغیره، به‌نام ***انتگرال مضاعف***، شروع می‌کنیم. در اینجا به‌جای تابع $f(x)$ تعریف شده بر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$، تابع $f(x, y)$ را درنظر می‌گیریم که بر ***ناحیهٔ انتگرالگیری*** مناسبی چون R تعریف شده‌است. ولی نواحی دوبعدی، به خلاف بازه‌های یک‌بعدی، می‌توانند مجموعه‌های بسیارپیچیده‌ای باشند. در واقع، مرز ناحیهٔ R ممکن است آنقدر نامنتظم باشد که نتوان به R مساحت تعریف شده‌ای نسبت داد؛ و درنتیجه، R نامزد مناسبی برای ناحیهٔ انتگرالگیری نیست. لذا، از اول خود را به ردهٔ خاصی از ناحیه‌ها، به نام ***نرمال*** (یعنی، فارغ از " عیب ") محدود می‌کنیم. این نواحی همه مساحت دارند، و به‌علاوه رده آنقدر وسیع است که تمام نواحی موجود در کاربردهای عملی حساب دیفرانسیل و انتگرال را دربر دارد. حال‌به‌چند تعریف مقتضی می‌پردازیم.

مجموعهٔ تمام نقاط (x, y) صادق در نامساویهای

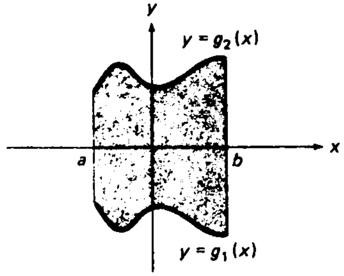
$$a \le x \le b, \qquad g_1(x) \le y \le g_2(x), \tag{۱}$$

را که در آن توابع g_1 و g_2 بر بازهٔ $[a, b]$ پیوسته‌اند، یک ***ناحیهٔ به‌طور قائم ساده*** می‌نامند،

ولی مجموعهٔ تمام نقاط (x, y) صادق در نامساویهای

$$c \le y \le d, \qquad h_1(y) \le x \le h_2(y), \tag{1'}$$

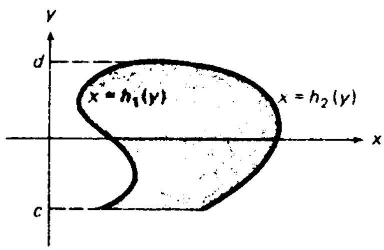
که در آنها توابع h_1 و h_2 بر بازهٔ $[c, d]$ پیوسته‌اند، یک *ناحیهٔ به طور افقی ساده* نام دارد. مثلاً، ناحیهٔ شکل ۱ به‌طور قائم ساده است، ولی ناحیهٔ شکل ۲ به‌طور افقی ساده‌است.



یک ناحیهٔ به‌طور قائم ساده

شکل ۱

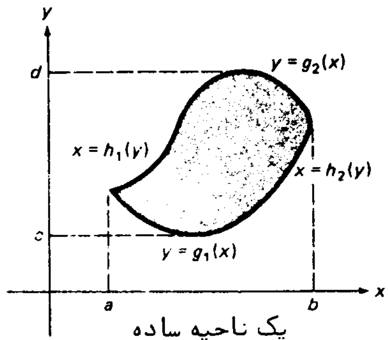
منظور از *ناحیهٔ ساده* یعنی ناحیه‌ای که هم به‌طور قائم ساده باشد هم به‌طور افقی. یک



یک ناحیهٔ به طور افقی ساده

شکل ۲

چنین ناحیه در شکل ۳ نموده شده است. بالاخره، منظور از *ناحیهٔ نرمال* یعنی یک‌ناحیهٔ

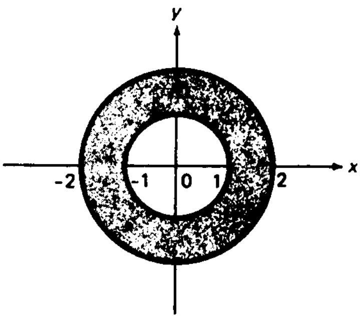


یک ناحیه ساده

شکل ۳ .

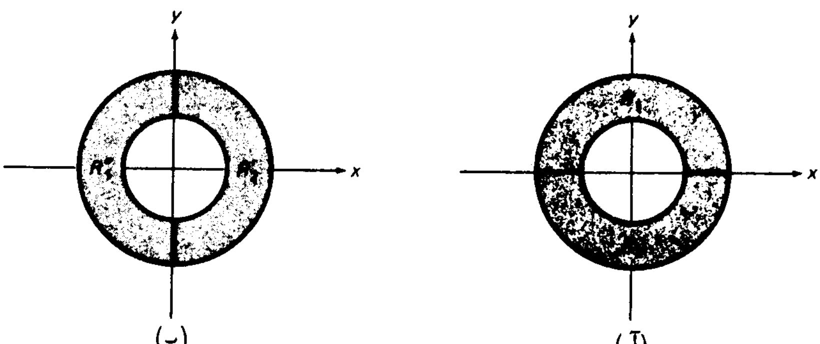
بستهٔ کراندار که بتوان آن را به وسیلهٔ رسم خطوط مناسبی موازی محورهای مختصات به تعدادی متناهی زیر ناحیه که هر یک به طور قائم یا افقی ساده‌اند (یا هر دو) تقسیم کرد (زیر ناحیه‌های مجاور مرزهای مشترک دارند) . طبیعی است که یک ناحیهٔ به‌طور قائم یا افقی ساده را نرمال می‌گیریم .

مثال ۱ . ناحیهٔ طوقی $R = \{(x, y): 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ شکل ۴ نه به‌طور افقی و نه به‌طور قائم ساده نیست . اما R نرمال است . درواقع ، محور x ، R را به زیرناحیه‌های به طورقائم سادهٔ



شکل ۴

R_1 و R_2 مثل شکل ۵ (آ) ، تقسیم می‌کند ، و نیز محور y ، R را به زیر ناحیه‌های به طور افقی سادهٔ R'_1 و R'_2 ، مثل شکل ۵ (ب) ، تقسیم خواهد کرد .



(ب) (آ)

شکل ۵

این نواحی همه مساحت دارند که به آسانی حساب می‌شود . مساحت ناحیهٔ به طور قائم سادهٔ تعریف شده با نامساویهای (۱) مساحت بین منحنی بالایی $y = g_2(x)$ و منحنی

پایینی $y = g_1(x)$ از a تا b است که، بنا بر صفحهٔ ۳۸۷، مساوی است با

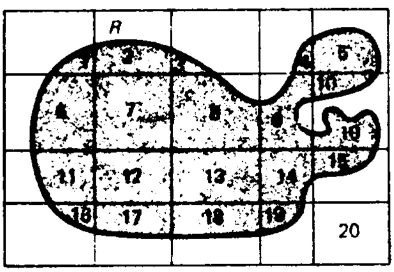
$$A = \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)]\, dx, \qquad (۲)$$

ولی مساحت ناحیهٔ به‌طور افقی سادهٔ تعریف شده با نامساویهای (۱′) مساحت بین منحنی سمت راست $x = h_2(y)$ و منحنی سمت چپ $x = h_1(y)$ از c تا d است که، بنابر صفحهٔ ۴۱۳، برابر است با

$$A = \int_c^d [h_2(y) - h_1(y)]\, dy, \qquad (۲′)$$

اگر ناحیه ساده باشد، مساحتش از هر یک از فرمولهای (۲) و (۲′) به دست می‌آید، زیرا هر دو به کار می‌روند. بالاخره، مساحت ناحیهٔ نرمال R به‌طور طبیعی و به صورت مجموع مساحات زیرنواحی به‌طور افقی یا قائمی تعریف می‌شود که R با رسم خطوط موازی محورهای مختصات به آنها تجزیه می‌گردد (ما عدم وابستگی مساحت R به طرز تجزیهٔ آن را از دید هندسه واضح می‌گیریم).

نه فقط هر ناحیهٔ نرمال مساحت تعریف شده دارد، بلکه اگر چنین ناحیهٔ R با خطوطی افقی و قائم موازی محورهای مختصات تجزیه شود، هر بخش از R که در سلولی از افراز (مستطیل) قرار دارد دارای مساحت است. این امر در شکل ۶ نموده شده است، که در آن ناحیهٔ نرمال R در یک زمینه مرکب از بیست سلول مستطیلی (ناشی از تقاطع پنج

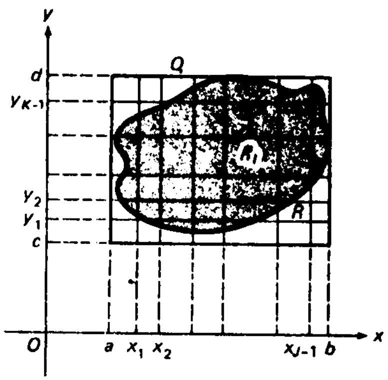


شکل ۶

خط افقی و شش خط قائم) رسم، و به نوزده زیر ناحیهٔ ناتهی افراز شده است (توجه کنید که سلول 20 نقطه‌ای از R را ندارد). زیرناحیه‌های 1 تا 8 و 11 تا 19 همه ساده‌اند؛ و درواقع، زیرناحیه‌های 7، 12، و 13 مستطیلی می‌باشند. زیرناحیهٔ 9 به‌طور افقی ساده‌است، ولی زیرناحیهٔ 10 از دو قطعهٔ ناهمبند تشکیل شده است. یکی ساده و دیگری نرمال، و البته مساحتش مجموع مساحات دو قطعه گرفته می‌شود. شکل آنقدر کلی هست که همهٔ حالات

(زیر ناحیه‌های ساده ، زیر ناحیه‌های نرمال ، و " زیرناحیه‌های " مرکب از چند قطعه)را نشان می‌دهد ، و در هر حالت ، دست کم در اصول ، انتساب مساحت به زیرناحیه‌ها آسان است .

تعریف انتگرال مضاعف . حال آماده‌ایم انتگرال مضاعف تابع دومتغیره $f(x, y)$ روی ناحیهٔ نرمال R را تعریف کنیم . فرض کنیم $Q = \{(x, y): a \le x \le b, c \le y \le d\}$ ناحیهٔ مستطیلی بسته‌ای باشد که اضلاعش موازی محورهای مختصات بوده و شامل R باشد (ر.ک. شکل۷) ، و نقاط $x_j\ (j = 0, 1, \dots, J)$ و $y_k\ (k = 0, 1, \dots, K)$ افرازهایی از بازه‌های $[a, b]$ و $[c, d]$



شکل ۷

به ترتیب با اندازهٔ مش μ_x و μ_y باشند که در صفحهٔ ۳۶۸ تعریف شده‌اند . این یعنی

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{J-1} < x_J = b,$$
$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{K-1} < y_K = d,$$

و

$$\mu_x = \max \{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_J - x_{J-1}\},$$
$$\mu_y = \max \{y_1 - y_0, y_2 - y_1, \dots, y_K - y_{K-1}\}.$$

در این صورت ، دو مجموعه از خطوط

$$x = a, \quad x = x_1, \quad x = x_2, \dots, \quad x = x_{J-1}, \quad x = b,$$
$$y = c, \quad y = y_1, \quad y = y_2, \dots, \quad y = y_{K-1}, \quad y = d, \tag{۳}$$

موازی محورهای مختصات *افرازی* از مستطیل Q تشکیل می‌دهند؛ این خطوط Qرا به JKزیر مستطیل و ناحیهٔ R را به n زیر ناحیهٔ بستهٔ ناتهی $R_1, R_2, \dots, R_n$ تقسیم می‌کنند که $n \le JK$ (معمولاً "$(n < JK)$ ؛ر.ک. شکل . به‌طورکلی ،بعضی‌از زیرناحیه‌ها غیرمستطیلی‌اند

که مرزهایشان از قسمتهایی‌از خطوط (۳)وقسمتهایی از مرز R تشکیل شده‌اند ،ولی همانطور که قبلا" توضیح دادیم ، چون R یک ناحیهٔ نرمال است ، هر زیرناحیهٔ R_i دارای مساحت تعریف شدهٔ ΔA_i می‌باشد . به ازای تابع دومتغیرهٔ $f(x, y)$ ، فرض کنیم (p_i, q_i) نقطهٔ دلخواهی در R_i باشد ، و مجموع ریمان

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(p_i, q_i)\,\Delta A_i$$

را تشکیل می‌دهیم . فرض‌کنیم وقتی کمیت

$$\mu = \max\,\{\mu_x, \mu_y\},$$

به نام اندازهٔمش افراز ، به صفر نزدیک شود ، کمیت S *بی‌توجه به انتخاب اعداد* x_j ، y_k ، p_i ، و q_i *صادق در شرایط داده‌شده* ، به‌حدی متناهی نزدیک گردد . در این صورت ، این حد *انتگرال (مضاعف)* f روی R نام داشته و با

$$\iint_R f(x, y)\,dA$$

نموده می‌شود ، و گوییم f بر R *انتگرالپذیر* است . لذا ،

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(p_i, q_i)\Delta A_i, \qquad (۴)$$

که درآن f *انتگرالده* و R *ناحیهٔ انتگرالگیری* انتگرال سمت چپ خوانده می‌شود .

مثال ۲ . هرگاه A مساحت R باشد ، آنگاه‌به ازای هر افراز ناحیهٔR به وسیلهٔ خطوط موازی محورهای مختصات ،

$$A = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i$$

لذا ، با اختیار $f(x, y) \equiv 1$ در فرمول (۴) ، خواهیم داشت

$$\iint_R 1\,dA = \iint_R dA = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = \lim_{\mu \to 0} A = A.$$

پس نتیجه می‌شود که

$$A = \iint_R dA. \qquad (۵)$$

با آنکه فرض کرده‌ایم مرز ناحیهٔ انتگرالگیری R از نمودارهای توابع پیوسته‌ای از x یا y تشکیل شده است، ما راجع به پیوستگی انتگرالده $f(x, y)$ انتگرال مضاعف فرضی نکرده‌ایم، و ممکن است توابع ناپیوسته نیز انتگرالپذیر باشند. ولی، همانطور که انتظار می‌رود، قضیهٔ ۱، صفحهٔ ۳۷۱، راجع به انتگرالپذیری توابع پیوسته به انتگرالهای مضاعف سرایت می‌کند.

قضیهٔ ۱ (پیوستگی انتگرالپذیری بر یک ناحیه را ایجاب می‌کند). *هرگاه تابع $f(x, y)$ بر ناحیهٔ نرمال R پیوسته باشد، آنگاه $f(x, y)$ بر R انتگرالپذیر می‌باشد.*

ما برهان را، که به حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته تعلق دارد، حذف می‌کنیم.

تعریف انتگرال مضاعف $\iint\limits_R f(x, y)\,dA$، جدا از نکات فنی مربوط به ماهیت ناحیهٔ انتگرالگیری R و طرز افراز آن، اساسا "همان" تعریف انتگرال معمولی یا "ساده" $\int_a^b f(x)\,dx$ است. لذا، انتگرالهای مضاعف و انتگرالهای ساده از قواعد مشابهی تبعیت می‌کنند. حال مهمترین قواعد از این نوع را ذکر کرده، برهان آنها را حذف می‌کنیم زیرا شبیه برهانهای نظیر برای انتگرالهای ساده می‌باشند. در هر حالت، R یک ناحیهٔ نرمال می‌باشد.

(یک) هرگاه f بر R انتگرالپذیر بوده و c یک ثابت باشد، آنگاه cf نیز بر R انتگرالپذیر است و

$$\iint\limits_R cf(x, y)\,dA = c\iint\limits_R f(x, y)\,dA.$$

(دو) هرگاه f و g هر دو بر R انتگرالپذیر باشند، آنگاه مجموع $f + g$ نیز بر R انتگرالپذیر بوده و

$$\iint\limits_R [f(x, y) + g(x, y)]\,dA = \iint\limits_R f(x, y)\,dA + \iint\limits_R g(x, y)\,dA.$$

(سه) هرگاه f بر R انتگرالپذیر بوده و $c \le f(x, y) \le C$، که در آن c و C ثابت‌اند، آنگاه

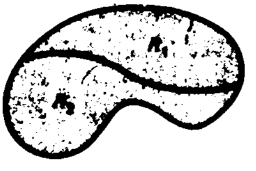
$$cA \le \iint\limits_R f(x, y)\,dA \le CA,$$

که در آن A مساحت R است. بخصوص، هرگاه $f(x, y) \ge 0$، آنگاه

$$\iint\limits_R f(x, y)\,dA \ge 0.$$

(چهار) هرگاه f بر R پیوسته بوده و R به دو زیر ناحیهٔ نرمال R_1 و R_2 بدون نقاط درونی مشترک (مثل شکل ۸) تجزیه شده باشد ، آنگاه

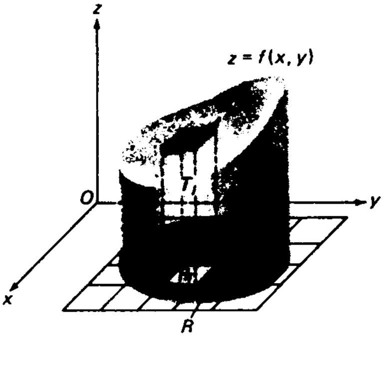
$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_{R_1} f(x, y)\, dA + \iint_{R_2} f(x, y)\, dA.$$



شکل ۸

این مشابه قضیهٔ ۲ ،صفحهٔ ۳۸۲ ،است و ما فرض پیوستگی f را طریقهٔ آسان تضمین وجود هر سه انتگرال میدانیم .

حجم زیر یک سطح به‌عنوان انتگرال مضاعف . حال ،به کمک انتگرال مضاعف ،عبارتی برای حجم زیر سطح S به دست می‌آوریم ، که در آن S نمودار یک تابع نامنفی پیوسته مانند $f(x, y)$ است که بر ناحیهٔ نرمال R تعریف شده است . این حجم ناحیهٔ توپر T مانند شکل ۹ است ، که در آن R قاعدهٔ آن و سطح S بالای آن بوده سطح جانبی‌اش از پاره‌خطهایی



شکل ۹

موازی محور z تشکیل شده است ؛ T را می‌توان یک " شبه استوانه " تصور کرد ، زیرا S در حالت‌کلی‌موازی R نیست .همانطورکه‌خطوط(۳) Rرابه n زیرناحیهٔدوبعدی $R_1, R_2, \ldots, R_n$

تقسیم می‌کنند، صفحات باهمان معادله (در فضای سه‌بعدی) T را به n زیرناحیهٔ سه‌بعدی $T_1, T_2, \ldots, T_n$ تقسیم می‌کنند. که هر یک ستون باریکی با بالای خمیده می‌باشد. تابع f پیوسته است؛ و درنتیجه، مقدارش بر زیر ناحیهٔ R_i ، دست‌کم وقتی R_i به‌قدر کافی کوچک باشد، فقط کمی تغییر می‌کند. لذا، اگر f را بر R_i با مقدار ثابت $f(p_i, q_i)$ بگیریم که (p_i, q_i) نقطهٔ *دلخواهی* در R_i است، تقریب مناسبی به دست می‌آوریم. این معادل است با اینکه ستون T_i با بالای خمیده را با یک استوانهٔ معمولی به ارتفاع $f(p_i, q_i)$ وبالای تخت موازی قاعده‌اش R_i عوض کنیم؛ این در شکل برای یک ستون " درونی " باقاعدهٔ مستطیلی نموده شده است، که در آن استوانه یک متوازی‌السطوح قائم است. بنابر مثال ۱، صفحهٔ ۶۹۹، این استوانه، چه قاعده‌اش مستطیلی باشد یا نه، به حجم $f(p_i, q_i)\Delta A_i$ است. بنابر این، اگر تمام ستونها را بااستوانه‌های تقریب‌ساز عوض کنیم، جسم جدیدی به‌دست می‌آید که از n استوانه تشکیل‌شده و حجمش مساوی است با

$$\sum_{i=1}^{n} f(p_i, q_i)\Delta A_i,$$

یعنی، مجموع احجام n استوانه. معقول است که این مجموع را تقریب مناسبی برای‌حجم V جسم T بگیریم، که این تقریب وقتی اندازهٔ هر زیر ناحیهٔ R_i کوچک شود، یعنی وقتی اندازهٔ مش μ افراز R به صفر نزدیک شود، بهتر می‌شود (توجه کنید که $\mu < \varepsilon$ ایجاب می‌کند که هر $\Delta A_i < \varepsilon^2$). حال، بااین‌انگیزه، V را مساوی حد زیر **تعریف**می‌کنیم:

$$V = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(p_i, q_i)\Delta A_i,$$

یعنی،

$$V = \iint_R f(x, y)\, dA,$$

که در آن وجود انتگرال مضاعف از قضیهٔ ۱ و فرض پیوستگی f نتیجه می‌شود.

به‌طورکلی، فرض کنیم S_1 و S_2 دو سطح باشند که تصاویرشان روی صفحهٔ xy ناحیهٔ نرمال R بوده، و S_1 و S_2 نمودار دو تابع پیوستهٔ $f_1(x,y)$ و $f_2(x, y)$ صادق در نامساوی $f_2(x, y) \geq f_1(x, y)$ باشند. در این صورت، بنابر همان نوع استدلال به کار رفته‌دربخش ۴.۳ برای به دست آوردن فرمولی جهت مساحت بین دو منحنی، حجم بین S_1 و S_2 مساوی است با

$$V = \iint_R [f_2(x, y) - f_1(x, y)]\, dA,$$

محاسبهٔ مستقیم انتگرال مضاعف $\iint_R f(x, y)\,dA$ با شروع از تعریفش به عنوان مقدار حدی یک مجموع ریمان ناممکن است مگر در ساده‌ترین حالات (ر.ک. مسئلهٔ ۲۳) .لذا، باید روش دیگری برای محاسبهٔ انتگرالهای مضاعف به دست آوریم . برای این کار ، چند انتگرال مختلف معرفی می‌کنیم که مستلزم محاسبهٔ دو انتگرال ساده اند .

انتگرالهای مکرر . فرض کنیم R یک ناحیهٔ به‌طور قائم ساده باشد که با نامساویهای $a \le x \le b \quad g_1(x) \le y \le g_2(x)$ تعریف شده است ، که در آنها g_1 و g_2 توابع پیوسته‌ای بر بازهٔ $[a, b]$ می‌باشند ، و $f(x, y)$ را یک تابع دومتغیره می‌گیریم که بر R تعریف شده است . در این صورت ، انتگرال

$$I_R = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\,dy\right]dx \tag{۶}$$

را *انتگرال مکرر* f روی R می‌نامیم . برای به دست آوردن I_R ، ابتدا با *ثابت‌گرفتن* x در انتگرالدهٔ $f(x, y)$ وحدود انتگرالگیری $g_1(x)$ و $g_2(x)$ ، از $f(x, y)$ نسبت به y انتگرال می‌گیریم[۱] . حاصل این انتگرالگیری به x بستگی دارد؛ و درنتیجه ، تابعی از x ، مثلاً $i(x)$ ، به دست می‌آید . سپس از $i(x)$ نسبت به x بین حدود ثابت a و b انتگرال گرفته ،عددی به‌دست می‌آوریم‌که در فرمول(۶) با I_R نموده شده‌است . به‌همین نحو ، اگر R یک‌ناحیهٔ به‌طور افقی‌ساده‌باشدکه‌بانامساویهای $c \le y \le d, h_1(y) \le x \le h_2(y)$ تعریف شده است ، که در آنها h_1 و h_2 توابع پیوسته‌ای بر بازهٔ $[c, d]$ اند ، انتگرال

$$J_R = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\,dx\right]dy \tag{۶'}$$

انتگرال مکرر f روی R نام دارد . اما ،برای به دست آوردن J_R ،ابتدا از $f(x, y)$ ،با *ثابت گرفتن* y در انتگرالده $f(x, y)$ و حدود انتگرالگیری $h_1(y)$ و $h_2(y)$ ، نسبت به x انتگرال‌گرفته تابعی از y ، مثلاً $j(y)$ ، به دست می‌آوریم و سپس از آن نسبت به y بین حدود ثابت c و d انتگرال می‌گیریم . توجه کنید که در هر مرحله از محاسبهٔ I_R و J_R ، انتگرال تابع یک متغیره‌ای را محاسبه می‌کنیم ؛ و لذا ،مجازیم از ابزار اصلی محاسبهٔ انتگرالها ،یعنی‌قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال ، استفاده کنیم .

---

۱. *این فرایند نوعی "انتگرالگیری جزئی" شبیه مشتقگیری جزئی است (برای محاسبهٔ* $\partial f(x, y)/\partial y$ ، x *را ثابت گرفته و نسبت به* y *مشتق می‌گیریم) .*

تبصره. در بحث فوق تلویحاً" فرض‌کرده‌ایم انتگرالهای (۶) و (۶') وجود دارند. می‌توان نشان داد که پیوستگی توابع f ، g_1 ، و g_2 پیوستگی انتگرال داخلی $i(x)$ در (۶)، و در نتیجه وجود (۶)، را تضمین می‌کند، ولی پیوستگی توابع f ، h_1 ، و h_2 پیوستگی انتگرال داخلی $j(y)$ در (۶')، و درنتیجه وجود (۶')، را تضمین خواهد کرد. یادآور می‌شویم که پیوستگی g_1 ، g_2 ، h_1 ، و h_2 از اول، در تعریف نواحی به‌طور قائم و به طور ساده، فرض شده است.

برای آنکه نمادها ساده باشند، معمولاً" کروشه‌های داخلی فرمولهای (۶) و (۷) را حذف می‌کنند. لذا، از این به بعد انتگرالهای مکرر I_R و J_R را به صورت

$$I_R = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx, \qquad J_R = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy,$$

یا

$$I_R = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy, \qquad J_R = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx$$

می‌نویسیم، که در آنها حذف کروشه‌ها به قیمت جداسازی دیفرانسیلهای dx و dy تمام شده است، به این‌صورت که dx فقط پشت علامت انتگرالی که حدود انتگرالگیریش تابع x اند ظاهر شده، و dy فقط پشت علامت انتگرالی آمده که حدود انتگرالگیریش تابع y می‌باشند.

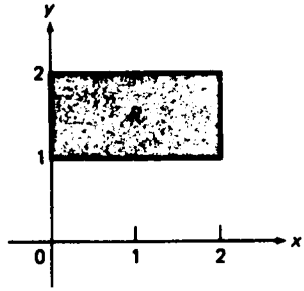
مثال ۳. دو انتگرال مکرر I_R و J_R تابع $f(x,y) = 3xy^2 - 2x^2y$ را روی مستطیل R محدودبه خطوط $x = 0$ ، $x = 2$ ، $y = 1$ ، و $y = 2$ حساب کنید.

حل. I_R و J_R هر دو وجود دارند، زیرا f پیوسته بوده و R بوضوح ساده است (ر.ک. شکل ۱۰). با محاسبهٔ I_R ، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} I_R &= \int_0^2 dx \int_1^2 (3xy^2 - 2x^2y)\, dy = \int_0^2 \left[xy^3 - x^2y^2 \right]_{y=1}^2 dx \\ &= \int_0^2 (7x - 3x^2)\, dx = \left[\frac{7}{2} x^2 - x^3 \right]_0^2 = 14 - 8 = 6, \end{aligned}$$

که در آن قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال دوبار به کار رفته است. به همین نحو، از محاسبهٔ J_R نتیجه می‌شود که

$$J_R = \int_1^2 dy \int_0^2 (3xy^2 - 2x^2y)\,dx = \int_1^2 \left[\frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{2}{3}x^3y\right]_{x=0}^2 dy$$
$$= \int_1^2 \left(6y^2 - \frac{16}{3}y\right)dy = \left[2y^3 - \frac{8}{3}y^2\right]_1^2 = \frac{16}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) = 6.$$



شکل ۱۰

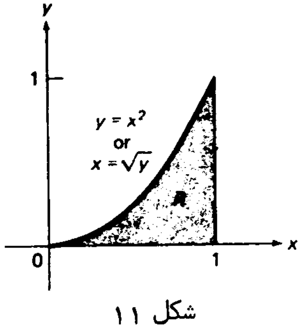
البته ،تساوی $I_R = J_R$ تصادفی نیست ،وبعدا "خواهیم دیدکه هردو با $\iint_R (3xy^2 - 2x^2y)dA$ یعنی انتگرال مضاعف f روی R ، مساویند .

مثال ۴ . انتگرال مکرر

$$I_R = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} (x+y)\,dy$$

را حساب کرده ، و سپس ترتیب انتگرالگیری را عکس نمایید .

حل . چون باانتگرالی‌از نوع I_R شروع کرده‌ایم ، فورا" معلوم می‌شود که ناحیه‌ٔانتگرالگیری R به‌طورقائم ساده‌است . درواقع ، R ناحیه‌ٔتعریف‌شده‌بانامساویهای $0 \le x \le 1, 0 \le y \le x^2$ است ؛یعنی ،ناحیه‌ٔ ۱۱ که به محور x ،خط $x = 1$ ، و سهمی $y = x^2$ محدودشده است .



شکل ۱۱

از محاسبهٔ I_R معلوم می‌شود که

$$I_R = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} (x+y)\,dy = \int_0^1 \left[xy + \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{x^2} dx$$
$$= \int_0^1 \left(x^3 + \frac{1}{2} x^4 \right) dx = \left[\frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{10} x^5 \right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{10} = \frac{7}{20}.$$

برای عکس‌کردن ترتیب انتگرالگیری، باید انتگرال مکرر دیگر J_R را تشکیل دهیم. در این کار R باید به طور افقی نیز ساده باشد. اما اگر خطی افقی از چپ به راست R را قطع کند، در نقطه‌ای از سهمی $y = x^2$ وارد R شده و R را در نقطه‌ای از خط $x = 1$ ترک می‌کند. لذا، چون $y = x^2$ معادل $x = \sqrt{y}$ به ازای $y \geq 0$ است، ناحیهٔ R را می‌توان با نامساویهای $\sqrt{y} \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$ نیز تعریف کرد؛ و درنتیجه، علاوه‌بر به طور قائم ساده‌بودن به طور افقی ساده می‌باشد. لذا، می‌توان ترتیب انتگرالگیری را عکس کرده، انتگرال مکرر دیگر را نوشت:

$$J_R = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 (x+y)\,dx.$$

از محاسبهٔ J_R نتیجه می‌شود که

$$J_R = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} x^2 + xy \right]_{\sqrt{y}}^1 dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + y - \frac{1}{2} y - y^{3/2} \right) dy$$
$$= \left[\frac{1}{2} y + \frac{1}{4} y^2 - \frac{2}{5} y^{5/2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{2}{5} = \frac{7}{20},$$

درنتیجه، مجدداً داریم $I_R = J_R$.

محاسبهٔ انتگرالهای مضاعف. حال طرز محاسبهٔ انتگرالهای مضاعف را برحسب انتگرالهای مکرر نشان داده و در عین حال علت تساوی $I_R = J_R$ در دو مثال اخیر را توضیح می‌دهیم.

قضیهٔ ۲ (محاسبهٔ انتگرال مضاعف روی یک ناحیهٔ به‌طور قائم ساده). *هرگاه $f(x, y)$ بر ناحیهٔ به‌طور قائم سادهٔ R تعریف شده با نامساویهای $a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$ تعریف شده باشد، آنگاه*

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\,dy\,dx. \qquad (۷)$$

برهان . همانطور که در بالا نشان داده‌ایم ، انتگرال مضاعف

$$V = \iint_R f(x, y)\, dA \tag{۸}$$

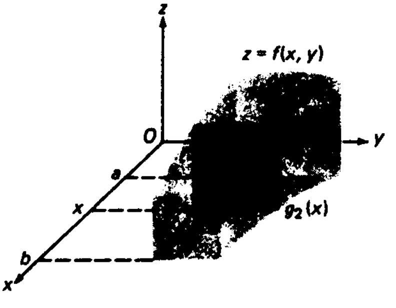
حجم V جسم شبه استوانه‌ای T است که بین سطح $z=f(x, y)$ و ناحیهٔ R قرار دارد (ر.ک . شکل ۱۲ ، که در آن f به خاطر سادگی نامنفی گرفته شده است) . انتگرال مکرر

$$I_R = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx \tag{۹}$$

را درنظر می‌گیریم . از شکل واضح است که اگر ثابت $= x$ ، انتگرال داخلی

$$i(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy$$

همان مساحت زیر منحنی $z = f(x, y)$ از $g_1(x)$ تا $g_2(x)$ در صفحهٔ ثابت $= x$ است . اما این خود مساحت مقطع عرضی جدا شده از T توسط صفحهٔ ثابت $= x$ عمود بر محور x است . به



شکل ۱۲

عبارت دیگر، $i(x)$ تابع مساحت مقطع عرضی پیوسته است که در بخش ۱۰۸ با $A(x)$ نموده شد . لذا ، طبق فرمول (۱) ، صفحهٔ ۶۹۷ ، حجم جسم T نیز مساوی است با

$$V = \int_a^b i(x)\, dx = I_R, \tag{۱۰}$$

و از مقایسهٔ فرمولهای (۸) و (۱۰) معلوم می‌شود که

$$\iint_R f(x, y)\, dA = I_R,$$

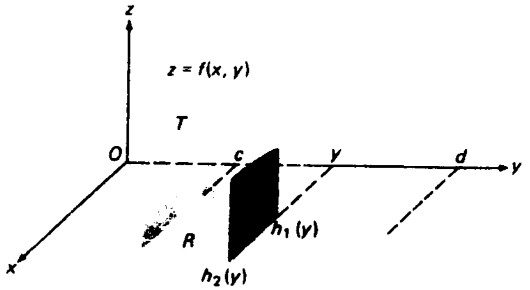
که با (۷) معادل می‌باشد.

همانطور که انتظار می‌رود، قضیهٔ مشابهی برای انتگرالهای مضاعف روی یک ناحیهٔ به‌طور *افقی* ساده وجود دارد.

قضیهٔ ۲' (محاسبهٔ انتگرال مضاعف روی یک ناحیهٔ به‌طور افقی ساده) . هرگاه $f(x, y)$ بر ناحیهٔ به‌طور افقی سادهٔ R با نامساویهای $h_1(y) \le x \le h_2(y),\ c \le y \le d$ تعریف شده باشد، آنگاه

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy. \tag{۷'}$$

برهان. برهان اساسا" همان برهان قضیهٔ ۲ است. فرض کنیم T جسم شبه استوانهٔ بین سطح $z = f(x, y)$ و ناحیهٔ R باشد (ر.ک. شکل ۱۳). مجددا"، حجم T از انتگرال مضاعف



شکل ۱۳

(۸) بــه دست می‌آید. انتگرال مکرر

$$J_R = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy \tag{۹'}$$

را درنظر می‌گیریم. از شکل واضح است که اگر $y =$ ثابت، انتگرال داخلی

$$j(y) = \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx$$

همان مساحت زیر منحنی $z = f(x, y)$ از $h_1(y)$ تا $h_2(y)$ در صفحهٔ $y =$ ثابت است. اما این خود مساحت مقطع عرضی جدا شده از T به وسیلهٔ صفحهٔ $y =$ ثابت عمود بر محور y است.

لذا ، طبق روش مقاطع عرضی ، حجم جسم T نیز مساوی است با

$$V = \int_c^d j(y)\,dy = J_R, \tag{۱۰'}$$

واز مقایسهٔ فرمولهای (۸) و (۱۰') باهم معلوم میشود که

$$\iint_R f(x, y)\,dA = J_R,$$

که با (۷') معادل است .

از تلفیق قضایای ۲ و ۲' و این فرض که ناحیهٔ R در سمت چپ دو فرمول (۷) و (۷') یکی اند ، نتیجهٔ اساسی دیگری فورا" به دست میآید .

قضیهٔ ۳ (محاسبهٔ انتگرال مضاعف روی یک ناحیهٔ ساده) . *فرض کنیم R ناحیهٔ سادهای باشد که با نامساویهای $a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)$ و با نامساویهای $c \le y \le d,\ h_1(y)$ $\le x \le h_2(y)$ تعریف شده است ، و $f(x, y)$ بر R پیوسته باشد . در این صورت ،*

$$\iint_R f(x, y)\,dA = I_R = J_R, \tag{۱۱}$$

که در آن I_R و J_R انتگرالهای مکرر (۹) و (۹') f روی R اند . بخصوص ،

$$I_R = J_R,$$

درنتیجه ، دو انتگرال مکرر f روی R مساویند .

تبصره . در اثبات قضایای ۲ و ۲' سادهلوحانه فرض کردهایم چیزی به نام "حجم" یک جسم وجود دارد ، که میتوان آن را به طرق رضایتمندانهای تعریف کرد که به عبارات مختلفی برای حجم منجر میشوند که میتوان آنها را بدون تناقض باهم مساوی گرفت (همین فرض بارها در فصل ۸ شدهاست) .بررسی عمیقتر معنی مساحت و حجم ، که در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته شــده است ،نشان میدهد که این روش شهودی ما را گمراه نکرده است ، و فرمولهای (۷) ، (۷') ، و (۱۱) کاملا" مناسباند مشروط بر اینکه انتگرالده f و ناحیهٔ انتگرالگیری R از شرایط بیان شده تبعیت میکنند .

حال مسئلهٔ محاسبهٔ عملی انتگرالهای مضاعف کامل شده است . در انتگرال مضاعف

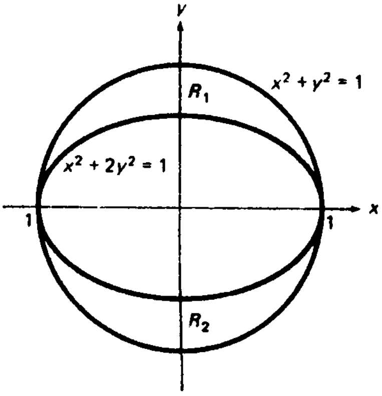
$\iint\limits_R f(x, y)\,dA$ که R یک ناحیهٔ نرمال بوده و f بر R پیوسته است، R را (درصورت‌لزوم) با رسم خطوط مناسبی موازی محورهای مختصات به زیر ناحیه‌های به طور قائم یاافقی‌سادهٔ $R_1, \ldots, R_n$ افراز می‌کنیم. این کار طبق تعریف ناحیهٔ نرمال شدنی‌است. در این‌صورت، طبق قاعدهٔ (چهار)، صفحهٔ ۱۳۲۴،

$$\iint\limits_R f(x, y)\,dA = \iint\limits_{R_1} f(x, y)\,dA + \cdots + \iint\limits_{R_n} f(x, y)\,dA.$$

اما هر یک از انتگرالهای سمت راست را می‌تــوان با انتگرال مکرری از نوع I_R یا J_R عوض کــرد، و محاسبهٔ یک انتگرال مکرر به دو انتگرالگیری متوالی از توابع یک متغیره تحویل می‌شود.

مثال ۵. انتگرال مضاعف $\iint\limits_R x^2\,dA$ را درصورتی حساب کنید که R ناحیهٔ بین دایرهٔ یکهٔ $x^2 + y^2 = 1$ و بیضی $x^2 + 2y^2 = 1$ باشد.

حل. محور x، R را به نواحی به طور قائم سادهٔ R_1 و R_2 مثل شکل ۱۴ تقسیم می‌کند.



شکل ۱۴

لذا، طبق قاعدهٔ (چهار) و قضیهٔ ۲،

$$\iint\limits_R x^2\,dA = \iint\limits_{R_1} x^2\,dA + \iint\limits_{R_2} x^2\,dA$$
$$= \int_{-1}^{1} dx \int_{\sqrt{(1-x^2)/2}}^{\sqrt{1-x^2}} x^2\,dy + \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{-\sqrt{(1-x^2)/2}} x^2\,dy$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\int_{-1}^{1} x^2\left(\sqrt{1-x^2}-\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}\right)dx \\
&= 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx \\
&= 4\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\int_{0}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx,
\end{aligned}
$$

که در آخرین مرحله از زوج‌بودن انتگرالده استفاده‌کرده‌ایم .برای محاسبهٔ آخرین‌انتگرال، جانشانی $x = \sin t$ را انجام می‌دهیم ؛ درنتیجه ، $dx = \cos t\, dt$ و

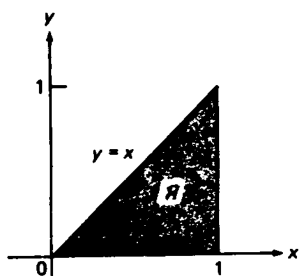
$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_0^{\pi/2} \sin^2 t\cos^2 t\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4t)\,dt = \frac{1}{8}\left[t-\frac{1}{4}\sin 4t\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{16}.
\end{aligned}
$$

پس نتیجه می‌شود که

$$
\iint_R x^2\,dA = 4\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\pi}{16} = \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\pi}{4} \approx 0.23.
$$

این ، از نظر هندسی ، حجم زیر استوانهٔ سهموی $z = x^2$ و روی ناحیهٔ R می‌باشد .

مثال ۶. انتگرال مضاعف $\iint_R e^{-x^2}\,dA$ روی ناحیهٔ R محدود به محور x ، خط $x = 1$ ،وخط $y = x$ را حساب کنید (ر.ک . شکل ۱۵) .



شکل ۱۵

حل . ناحیهٔ مثلثی R ساده است . لذا ، طبق قضیهٔ ۳ ،

$$\iint_R e^{-x^2}\,dA=\int_0^1 dx\int_0^x e^{-x^2}\,dy=\int_0^1 dy\int_y^1 e^{-x^2}\,dx$$

(حدود انتگرالگیری را توضیح دهید) . اگر به محاسبهٔ انتگرال مکرر دوم بپردازیم ، از ابتدا به مانع برمی‌خوریم ، زیرا تابع e^{-x^2} پادمشتق مقدماتی ندارد (ر.ک. صفحهٔ ۵۹۱) . اما انتگرال مکرر اول را می‌توان به آسانی حساب کرد :

$$\int_0^1 dx\int_0^x e^{-x^2}\,dy=\int_0^1 e^{-x^2}\,x\,dx=-\frac{1}{2}\int_0^1 d(e^{-x^2})$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)=\frac{e-1}{2e}.$$

لذا

$$\iint_R e^{-x^2}\,dA=\frac{e-1}{2e}.$$

محاسبهٔ مساحت و حجم . چون از قبل طرز محاسبهٔ مساحت یک ناحیهٔ به طور قائم یا به طور افقی ساده را به صورت مساحت بین دو منحنی می‌دانیم ، و نیز طرز محاسبهٔ احجام به روش مقاطع عرضی بر ما معلوم است ،استفاده‌از انتگرالهای‌مضاعف برای‌محاسبهٔ‌مساحات و احجام بیشتر به جهت راحتی است تا لزوم . ولی جنبهٔ راحتی آن عظیم است .نکته‌آن است که وقتی مساحت یا حجم به صورت انتگرال مضاعف بیان شد ، بقیهٔ محاسبات‌معمولاً ساده است . اگر ناحیهٔ انتگرالگیری به طور صریح داده شده باشد ، باید با کمی رسم آن را پیدا کنیم ، ولی یک تصویر خام که نکات اصلی مسئله را آشکار کند خواهد بود .

مثال ۷. مساحت A ی ناحیهٔ R در مثال ۵ را بیابید .

حل . بنابر فرمول (۵) ، A چیزی جز انتگرال‌مضاعف $\iint_R dA$ نیست .لذا ،ازتعویض‌انتگرالده x^2 با 1 در محاسبات مثال ۵ ، به دست می‌آوریم

$$A=\iint_R dA=4\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

انتگرالده سمت راست یکچهارم مساحت محصور به دایرهٔ یکه ، یعنی π ، است .پس نتیجه

می‌شود که

$$A = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\pi.$$

به عنوان تمرین ، این جواب را با تفریق مساحت محصور به بیضی $x^2 + 2y^2 = 1$ (ر.ک . مثال ۴ ، صفحهٔ ۹۴۸) از مساحت محصور به دایرهٔ یکه امتحان کنید .

مثال ۸ . حجم V زیر صفحهٔ $x + y - z = 0$ و روی R محدود به محور x ، خط $x = 1$ ، و سهمی $y = x^2$ را بیابید .

حل . صفحه نمودار تابع $z = x + y$ است ؛ درنتیجه ،

$$V = \iint_R (x + y)\, dA.$$

بنابر قضیهٔ ۲ ، این انتگرال مضاعف مساوی انتگرال مکرر

$$I_R = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} (x + y)\, dy$$

است . اما ، همانطور که قبلاً" در مثال ۴ نشان داده شد ، $I_R = \frac{7}{20}$ ؛ و لذا ، $V = \frac{7}{20}$.

بالاخره ، ملاحظه می‌کنیم که گاهی نوشتن انتگرال مضاعف $\iint_R f(x, y)\, dA$ به صورت

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy$$

شایسته است . این شکل دیگر از انتگرال مضاعف با اِنتگرال مکرر خلط نمی‌شود ،زیرا شامل علامت $\iint_R$ است که در آن دو علامت‌انتگرال حدود انتگرالگیری جداگانه‌ای حمل نمی‌کنند .

مسائل

انتگرال مکرر داده شده را حساب کنید .

۱ . $\int_0^2 dx \int_0^1 (2x + y^2)\, dy$ ✓

۲ . $\int_1^5 dy \int_2^3 \frac{dx}{(x + y)^2}$ ✓

۳ . $\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{y^2}{x^2 + 1}\, dx$ ✓

۴ . $\int_1^2 dx \int_{1/x}^x \frac{y^2}{x^2}\, dy$ ✓

۵. $\int_2^8 dx \int_0^{\ln x} e^y\, dy$

۶. $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\, dx$

۷. $\int_3^5 dy \int_y^{2y} \frac{x}{y}\, dx$

۸. $\int_{-1}^1 dx \int_{3-x}^2 (x+2y)\, dy$

۹. $\int_0^1 dx \int_x^{x^2} (3x-y)\, dy$

۱۰. $\int_0^\pi dy \int_0^{1+\cos y} x^2 \sin y\, dx$

۱۱. $\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\, dx$

۱۲. $\int_0^{\pi/2} dx \int_{\sin x}^1 y^3\, dy$

در انتگرال مکرر داده شده، پس از رسم ناحیهٔ انتگرالگیری R، ترتیب انتگرالگیری را عوض نمایید. (فرض کنید $f(x, y)$ پیوسته باشد.)

۱۳. $\int_1^2 dx \int_x^{2x} f(x, y)\, dy$

۱۴. $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)\, dy$

۱۵. $\int_0^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y)\, dx$

۱۶. $\int_1^e dy \int_0^{\ln y} f(x, y)\, dx$

۱۷. با تعویض ترتیب انتگرالگیری، مجموع

$$\int_0^3 dx \int_0^x f(x, y)\, dy + \int_3^6 dx \int_0^{6-x} f(x, y)\, dy$$

را به صورت انتگرال مکرر بنویسید.

۱۸. چرا انتگرال مکرر

$$\int_0^1 dy \int_y^1 \sin \pi x^2\, dx$$

را نمی‌توان به همین صورت حساب کرد؟ آن را با تعویض ترتیب انتگرالگیری حساب کنید.

اگر R ناحیهٔ محدود به شکل داده شده باشد، انتگرال مضاعف $\iint_R f(x, y)\, dA$ را برحسب انتگرالهای مکرر بیان نمایید.

۱۹. مثلث به رئوس $(1, 0), (2, 2), (0, 2)$

۲۰. ذوزنقه به رئوس $(1, 1), (5, 1), (4, 4), (2, 4)$

۲۱. متوازی‌الاضلاع به رئوس $(0, 0), (2, -2), (3, -1), (1, 1)$

۲۲. چندضلعی به رئوس $(0, 0), (2, 0), (1, 1), (2, 2), (0, 2)$

۲۳. فرض کنید R ناحیهٔ مستطیلی تعریف شده با نامساویهای $a \le x \le b,\ c \le y \le d$

باشد . انتگرال مضاعف $\iint_R xy\,dA$ را مستقیما " از تعریف (۴) حساب کنید .
راهنمایی . R را با خطوط افقی و قائم افراز کرده ، و مجموع ریمان مبتنی‌بر نقاط در مراکز زیر مستطیلهای حاصل را تشکیل دهید .

۲۴ . کدامیک از انتگرالهای مضاعف

$$\iint_R (x^4 + 6x^2y^2 + y^4)\,dA, \qquad \iint_R (4x^3y + 4xy^3)\,dA$$

بزرگتر است ؟

انتگرال مضاعف داده شده را حساب کنید .

۲۵ . $\iint_R \frac{x}{x^2+1}\,dA$ ، که در آن R ناحیهٔ مستطیلی محدود به خطوط $x=0$ ، $x=1$ ، $y=0$ ، و $y=1$ است .

۲۶ . $\iint_R xy^2e^{xy}\,dA$ ، که در آن R ناحیهٔ مستطیلی محدود به خطوط $x=0$ ، $x=1$ ، $y=0$ ، و $y=2$ است .

۲۷ . $\iint_R \sqrt{4x^2-y^2}\,dA$ ، که در آن R ناحیهٔ مثلثی محدود به خطوط $x=1$ ، $y=0$ ، و $y=x$ است .

۲۸ . $\iint_R y\,dA$ ، که در آن R ناحیهٔ کوچکتر محدود به دایرهٔ $(x-1)^2+y^2=1$ و خط واصل بین نقاط $(2,0)$ و $(0,2)$ است .

۲۹ . $\iint_R \cos(x-y)\,dA$ ، که در آن R ناحیهٔ مثلثی محدود به خطوط $x=0$ ، $y=\pi$ ، و $y=x$ است .

۳۰ . $\iint_R e^{y/x}\,dA$ ، که در آن R ناحیهٔ محدود به خطوط $x=1$ ، $y=0$ ، و سهمی $y=x^2$ است .

۳۱ . $\iint_R xy\,dA$ ، که در آن R ناحیهٔ محدود به محورهای مختصات و منحنی $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ است .

۳۲. $\iint_R x \ln y \, dA$ ،که درآن R ناحیهٔ محدود به‌خطوط $x = 2$ ، $y = 1$ ،ومنحنی $xy = 1$ است .

با استفاده از انتگرال مضاعف ، مساحت A ی ناحیهٔ R محدود به منحنیهای داده شده را بیابید .

۳۳. $xy = 1$ ، $y = x$ ، و $x = e$

۳۴. $y = \ln x$ ، $y = x - 1$ ، و $y = -2$

۳۵. $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ و $y = 2 - x$

۳۶. $x = y^2$ و $x = 4 - 3y^2$

۳۷. $x^2 + 2y^2 = 1$ و $2x^2 + y^2 = 1$

۳۸. $x^2 + y^2 = 4$ و $y^2 - 2x^2 = 1$ (R شامل مبداء است)

با استفاده از انتگرال مضاعف ، حجم V ناحیهٔ توپر داده شدهٔ T را بیابید .

۳۹. T به صفحات مختصات ، صفحهٔ $z = x + 2y + 1$ و صفحات $x = 1$ و $y = 2$ محدود است .

۴۰. T به صفحات مختصات و صفحهٔ $x + y + z = 3$ محدود است .

۴۱. T در یکهشت اول قرار داشته ، و به صفحات مختصات و صفحات $x + 2y = 2$ و $x + 4y + 2z = 8$ محدود است .

۴۲. T به‌پنج‌صفحهٔ $x = 0$ ، $z = 0$ ، $x + 3y = 6$ ، $2x + 3y = 12$ ،و $x + y + z = 6$ محدود است .

۴۳. T به سهمی‌گون بیضوی $z = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2$ ، صفحات مختصات ، و صفحات $x = -2$ و $y = 3$ محدود است .

۴۴. T بــه مخروط $z^2 = xy$ و صفحات $x = 2$ و $y = 2$ محدود است .

۴۵. T به مخروط $z^2 = xy$ و صفحهٔ $x + y = 4$ محدود است .

۴۶. T به استوانهٔ مستدیر $x^2 + y^2 = 1$ ، صفحهٔ $z = 0$ ، و صفحــهٔ $2x + 2y + 3z = 6$ محدود است .

۴۷. T در یکهشــت اول قرار داشته ، و به استوانهٔ بیضوی $4x^2 + z^2 = 1$ ، صفحهٔ $y = x$ و صفحات $y = 0$ و $z = 0$ محدود است .

۴۸. T در یکهشت اول قرار داشته ، و به سهمی‌گون هذلولوی $2z = xy$ ،استوانهٔ مستدیر $x^2 + y^2 = 2x$ و صفحهٔ $z = 0$ محدود است .

۴۹. فرض کنید R یک ناحیهٔ ساده باشد . با استفاده از قضیهٔ ۳ ، نشان دهید که هر دو

فرمول (۲) و (۲′) مقدار یکسانی برای مساحت R به ما می‌دهند.

۵۰. گوییم مجموعهٔ D **همبند** (قوسوار) است اگر هر جفت نقطهٔ P و Q در D را بتوان با منحنی پیوسته‌ای که کاملاً" در D است به‌هم وصل کرد؛ یعنی، منحنیی به‌معادلات پارامتری $x = x(t),\ y = y(t)\ (0 \le t \le 1)$ که در آنها $x(t)$ و $y(t)$ توابع پیوسته‌ای بوده، به ازای $0 \le t \le 1$، $(x(t), y(t)) \in D$، و $P = (x(0), y(0)), Q = (x(1), y(1))$. نشان دهید هرگاه $f(x, y)$ بر ناحیهٔ نرمال‌همبند R به‌مساحت A پیوسته‌باشد، آنگاه نقطه‌ای‌مانند (a, b)در R وجود دارد به طوری که

$$\iint_R f(x, y)\, dA = Af(a, b).$$

این *قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرالهای مضاعف* است.

راهنمایی. قضیهٔ مقدار میانی، صفحهٔ ۱۵۴، را بر تابع $F(t) = f(x(t), y(t))$ اعمال کنید.

۵۱. از قضیهٔ ۳ نتیجه بگیرید که

$$\frac{d}{dx}\int_c^d f(x, y)\, dy = \int_c^d \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\, dy \qquad (a \le x \le b),$$

که در آن $f(x, y)$ و $\partial f(x, y)/\partial x$ بر ناحیهٔ مستطیلی $\{(x, y): a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ پیوسته‌اند. این نتیجه در مسئلهٔ ۶۳، صفحهٔ ۱۲۶۴، پیش‌بینی شده بود.

۲.۱۴ انتگرالهای سه‌گانه

نکات بخش پیش را می‌توان فوراً" به *انتگرالهای سه‌گانه*، یعنی انتگرالها روی نواحی سه‌ـ بعدی یا توپر، تعمیم داد. گام بلند قبلاً" با رفتن از انتگرالهای سادهٔ معمولی به انتگرالهای مضاعف برداشته شده است، و انتقال از بعد دو به سه چیز اساساً" جدیدی را شامل نیست.

فرض‌کنیم R_{xy} یک ناحیهٔ نرمال در صفحهٔ xy باشد. در این صورت، مجموعهٔ تمام نقاطی چون (x, y, z) با خاصیت

$$(x, y) \in R_{xy}, \qquad g_1(x, y) \le z \le g_2(x, y), \tag{۱}$$

که در آن توابع g_1 و g_2 بر R_{xy} پیوسته‌اند (و $\in$ عضویت مجموعه را نشان می‌دهد)، یک *ناحیهٔ z-ساده* در فضا نام دارد. به همین نحو، مجموعهٔ تمام نقاط(x, y, z)باخاصیت

$$(x, z) \in R_{xz}, \qquad h_1(x, z) \le y \le h_2(x, z), \tag{۱′}$$

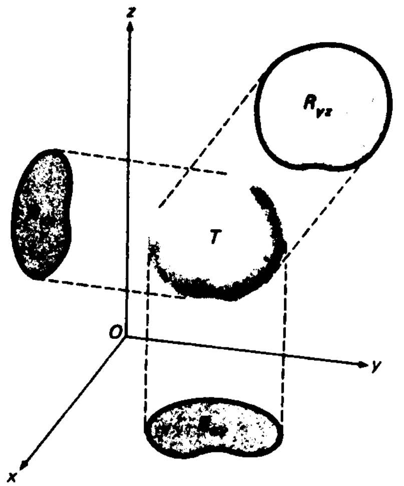
که درآن h_1 و h_2 بر ناحیهٔ نرمال R_{xz} در صفحهٔ xz پیوسته‌اند، یک *ناحیهٔ y-ساده* نامیده

می‌شود ، ولی مجموعهٔ تمام نقاط (x, y, z) با خاصیت

$$(y, z) \in R_{yz}, \qquad k_1(y, z) \le x \le k_2(y, z), \tag{۱"}$$

که درآن k_1 و k_2 بر ناحیهٔ نرمال R_{yz} در صفحهٔ yz پیوسته‌اند ، یک *ناحیهٔ xـساده* نام دارد . فرض کنیم با رسم صفحات مناسبی موازی صفحات مختصات بتوان ناحیهٔ توپر T را به تعدادی متناهی زیر ناحیه تجزیه کرد که هر یک نسبت به دست‌کم یکی از مختصات x ، y ، و z ساده باشد . در این صورت ، گوییم T *نرمال* است . طبیعی است که یک ناحیهٔ xـساده ، yـساده ، یا zـساده را نرمال می‌گیریم .

مثال ۱ . ناحیهٔ توپر T شکل ۱۶ xـساده ، yـساده ، و zـساده است . شکل همچنین نواحی R_{xy} ، R_{xz} ، و R_{yz} نظیر به T را ، که تصاویر T روی صفحات xy ، xz ، و yz اند ، نشان می‌دهند .



شکل ۱۶

این نواحی توپر همه حجم تعریف شده دارند . حجم ناحیهٔ zـسادهٔ تعریف شده با (۱) چیزی جز حجم بین سطح بالایی $z = g_2(x, y)$ و سطح پایینی $z = g_1(x, y)$ که روی ناحیهٔ R_{xy} در صفحهٔ xy تصویر می‌شود نیست ، و این حجم ، طبق استدلال صفحات ۱۳۲۴ تا ۱۳۲۵ ، مساوی انتگرال مضاعف

$$V = \iint_{R_{xy}} [g_2(x, y) - g_1(x, y)]\, dx\, dy$$

می‌باشد . به همین نحو ، حجم نواحی y-ساده و x-سادهٔ تعریف شده با (۱') و ("۱") از انتگرالهای مضاعف

$$V = \iint_{R_{xz}} [h_2(x, z) - h_1(x, z)]\, dx\, dz$$

و

$$V = \iint_{R_{yz}} [k_2(y, z) - k_2(y, z)]\, dy\, dz$$

به دست می‌آیند . اگر ناحیهٔ توپر T نرمال باشد ، حجمش مجموع احجام زیرناحیه‌هایی تعریف می‌شود که هر یک نسبت به دست‌کم یکی از مختصات x ، y ، و z ساده است و T را می‌توان با رسم صفحاتی موازی صفحات مختصات به آنها تجزیه کرد . درست مثل نواحی مسطح نرمال ، می‌توان نشان داد که اگر ناحیهٔ توپر نرمال T با رسم صفحاتی موازی صفحات مختصات افراز شده باشد ، بخشی از T که در هر سلول افراز (یک جعبهٔ مکعب مستطیل) قرار دارد دارای حجم است .

تعریف انتگرال سه‌گانه . حال انتگرال سه‌گانهٔ تابع سه‌متغیرهٔ $f(x, y, z)$ را روی ناحیهٔ سه بعدی نرمال T تعریف می‌کنیم . فرض کنیم[1]

$$Q = \{(x, y, z): a \le x \le b, c \le y \le d, A \le z \le B\}$$

جعبهٔ بسته‌ای (مکعب مستطیل) با وجوهی موازی صفحات مختصات باشد که شامل T است (ر.ک. شکل ۱۷) ، و نقاط x_j $(j = 0, 1, \dots, J)$ ، y_k $(k = 0, 1, \dots, K)$ ، و z_l $(l = 0, 1, \dots, L)$ افرازهایی از بازه‌های $[a, b]$ ، $[c, d]$ ، و $[A, B]$ با اندازه‌های مش μ_x ، μ_y ، و μ_z باشند . این بدان معنی است که

$$\begin{aligned}
a &= x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{J-1} < x_J = b,\\
c &= y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{K-1} < y_K = d,\\
A &= z_0 < z_1 < z_2 < \cdots < z_{L-1} < z_L = B,
\end{aligned}$$

و

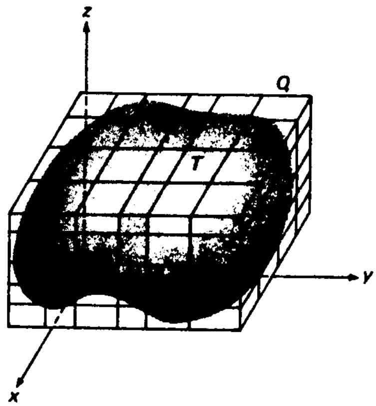
---

۱ . بهتر بود به جای $f \le z \le e$ می‌نوشتیم $A \le x \le B$ ، ولی e پایهٔ لگاریتمهای طبیعی را القا کرده و f از قبل برای انتگرالده $f(x, y, z)$ رزرو شده است .

$$\mu_x = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_J - x_{J-1}\},$$
$$\mu_y = \max\{y_1 - y_0, y_2 - y_1, \dots, y_K - y_{K-1}\},$$
$$\mu_z = \max\{z_1 - z_0, z_2 - z_1, \dots, z_L - z_{L-1}\}.$$

در این صورت، سه مجموعه از صفحات

$$\begin{aligned} &x = a, \quad x = x_1, \quad x = x_2, \dots, \quad x = x_{J-1}, \quad x = b, \\ &y = c, \quad y = y_1, \quad y = y_2, \dots, \quad y = y_{K-1}, \quad y = d, \\ &z = A, \quad z = z_1, \quad z = z_2, \dots, \quad z = z_{L-1}, \quad z = B, \end{aligned} \qquad (۲)$$



شکل ۱۷

موازی صفحات مختصات *افرازی* از جعبهٔ Q تشکیل می‌دهند؛ این صفحات Q را به JKL زیرجعبه و ناحیهٔ T را به n زیرناحیهٔ ناتهی $T_1, T_2, \dots, T_n$ که $n \le JKL$ مثل شکل تقسیم می‌کنند (معمولاً " $n < JKL$). در حالت کلی، بعضی از زیرناحیه‌ها غیرمستطیلی بوده و مرزهایشان از قسمتهایی از صفحات (۲) و قسمتهایی از مرز T تشکیل شده‌اند، ولی چون T یک ناحیهٔ نرمال است، هر زیرناحیهٔ T_i حجم تعریف شدهٔ ΔV_i دارد. به ازای هر تابع سه‌متغیرهٔ $f(x, y, z)$، فرض کنیم (p_i, q_i, r_i) نقطهٔ *دلخواهی* در T_i باشد، و مجموع ریمان

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(p_i, q_i, r_i)\,\Delta V_i$$

را تشکیل می‌دهیم. فرض کنیم وقتی کمیت

$$\mu = \max\{\mu_x, \mu_y, \mu_z\},$$

معروف به *اندازهٔ* مش افراز به صفر نزدیک شود، S صرف نظر از انتخاب اعداد x_j، y_k، z_l، p_i، q_i، و r_i صادق در شرایط مقرر به حدی متناهی نزدیک گردد. در این صورت،

این حد *انتگرال (سه‌گانهٔ) f* روی **R** نامیده و با

$$\iiint_T f(x, y, z)\,dV$$

نموده می‌شود، و گوییم تابع f بر T ، یا روی T ، *انتگرالپذیر* است. لذا،

$$\iiint_T f(x, y, z)\,dV = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(p_i, q_i, r_i)\,\Delta V_i, \qquad (۳)$$

که در آن f *انتگرالده* و T *ناحیهٔ انتگرالگیری* انتگرال سمت چپ نام دارد.

مثال ۲. هرگاه V حجم T باشد، آنگاه، به ازای هر افراز ناحیه با صفحات موازی صفحات مختصات،

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$$

لذا، با اختیار $f(x, y, z) \equiv 1$ در فرمول (۳)، به دست می‌آوریم

$$\iiint_T 1\,dV = \iiint_T dV = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \lim_{\mu \to 0} V = V.$$

پس نتیجه می‌شود که

$$V = \iiint_T dV. \qquad (۴)$$

همانطور که احتمالاً حدس زده‌اید، قضیهٔ ۱، صفحهٔ ۱۳۲۳، به انتگرالهای سه‌گانه سرایت دارد.

قضیهٔ ۴ (پیوستگی انتگرالپذیری بر یک ناحیهٔ توپر را ایجاب می‌کند). *هرگاه تابع $f(x, y, z)$ بر ناحیهٔ توپر نرمال T پیوسته باشد، آنگاه $f(x, y, z)$ بر T انتگرالپذیر است.*

انتگرالهای سه‌گانه از همان قواعد (یک) تا (چهار)، صفحات ۱۳۲۳ تا ۱۳۲۴ درمورد انتگرالهای مضاعف، با تغییرات مختصر مناسبی، پیروی می‌کنند.

(یک) هرگاه f بر T انتگرالپذیر بوده و c ثابت باشد، آنگاه cf نیز بر T انتگرالپذیر است، و

$$\iiint_T cf(x, y, z)\,dV = c \iiint_T f(x, y, z)\,dV.$$

(دو) هرگاه f و g هر دو بر T انتگرالپذیر باشند، آنگاه مجموع $f+g$ نیز بر T انتگرالپذیر بوده، و

$$\iiint_T [f(x, y, z) + g(x, y, z)]\, dV = \iiint_T f(x, y, z)\, dV + \iiint_T g(x, y, z)\, dV.$$

(سه) هرگاه f بر T انتگرالپذیر بوده و $c \le f(x, y, z) \le C$ ، که در آن c و C ثابت‌اند ، آنگاه

$$cV \le \iiint_T f(x, y, z)\, dV \le CV,$$

که در آن V حجم T است . بخصوص، هرگاه $f(x, y, z) \ge 0$ ، آنگاه

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dV \ge 0.$$

(چهار) هرگاه f بر T پیوسته بوده و T به دو زیرناحیهٔ نرمال T_1 و T_2 بدون نقطهٔ درونی مشترک تجزیه شده باشد، آنگاه

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dV = \iiint_T f(x, y z)\, dV + \iiint_{T_2} f(x, y, z)\, dV.$$

محاسبهٔ انتگرالهای سه‌گانه. برای محاسبهٔ انتگرالهای سه‌گانه، مشابه قضایای ۲ و ′۲ در بخش قبل مورد نیازند. آنها در رابطه با انتگرالهای مکرر هستند که انتگرالگیری اول بین حدود متغیر، که توابعی از یک متغیرند، و انتگرالگیری دوم بین حدود ثابت می‌باشد؛ در واقع، حدود ثابت نقاط انتهایی بازهٔ $[a, b]$ یا $[c, d]$ اند که از تصویر ناحیهٔ انتگرالگیری روی محور x یا محور y به دست می‌آیند. در قضایای مشابه برای انتگرالهای سه گانه، انتگرالگیری اول مجددا" بین حدود متغیر است، گه این بار توابعی از دو متغیر می‌باشند، و انتگرالگیری دوم محاسبهٔ یک انتگرال مضاعف روی ناحیهٔ حاصل از تصویر ناحیهٔ سه‌بعدی T روی یکی از صفحات مختصات می‌باشد.

قضیهٔ ۵ (محاسبهٔ انتگرال سه‌گانه روی یک ناحیهٔ z ـ ساده) . *هرگاه $f(x, y, z)$ بر ناحیهٔ z ـ سادهٔ T تعریف شده با $(x, y) \in R_{xy}, g_1(x, y) \le z \le g_2(x, y)$ پیوسته باشد، که در آن R_{xy} ناحیهٔ نرمالی در صفحهٔ xy است، آنگاه*

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dV = \iint_{R_{xy}} dA \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz. \tag{۵}$$

قضیهٔ '۵ (محاسبهٔ انتگرال سه‌گانه روی یک ناحیهٔ y ـ ساده) . هرگاه $f(x, y, z)$ برناحیهٔ y ـ سادهٔ T تعریف شده با $(x, z) \in R_{xz}, h_1(x, z) \le y \le h_2(x, z)$ پیوسته باشد ، که در آن R_{xz} یک‌ناحیهٔ نرمال در صفحهٔ xz است ، آنگاه

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dV = \iint_{R_{xz}} dA \int_{h_1(x,z)}^{h_2(x,z)} f(x, y, z)\, dy. \tag{۵'}$$

قضیهٔ "۵ (محاسبهٔ انتگرال‌سه‌گانه روی یک‌ناحیهٔ x ـ ساده) . هرگاه $f(x, y, z)$ برناحیهٔ x ـ سادهٔ T تعریف شده با $(y, z) \in R_{yz}, k_1(y, z) \le x \le k_2(y, z)$ پیوسته باشد ، که در آن R_{yz} یک ناحیهٔ نرمال در صفحهٔ yz است ، آنگاه

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dV = \iint_{R_{yz}} dA \int_{k_1(y,z)}^{k_2(y,z)} f(x, y, z)\, dx. \tag{۵"}$$

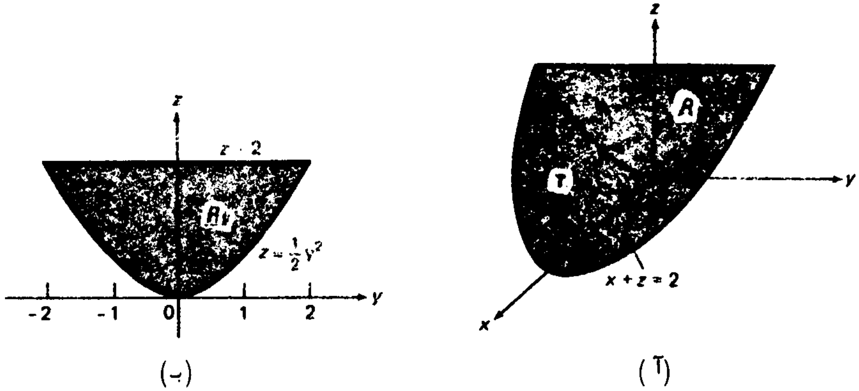
سعی کنید تفاوتها و تشابهات بین‌این‌قضایا را درک‌نمایید . ما برهان آنها را حذف کرده‌ایم .

فرض‌کنیم ناحیهٔ R_{xy} ساده باشد ؛ یعنی ، به طور قائم و به‌طور افقی ساده باشد . در این صورت ، انتگرال مضاعف (۵) را می‌توان به دو راه مختلف محاسبه نمود (قضیهٔ ۳ ، صفحهٔ ۱۳۳۲، را به یاد آورید) . همین امر در مورد انتگرال مضاعف ('۵) یا ("۵) درست است اگر R_{xz} یا R_{yz} (نسبت به هر دو مختص در صفحهٔ آن) ساده باشد . گاهی انتگرال سه‌گانهٔ $\iiint_T f(x, y, z)\, dV$ را به شکل $\iiint_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ می‌نویسیم . چه چیز به شما می‌گوید که این عبارت یک انتگرال مکرر نیست ؟

مثال ۳ . با استفاده از انتگرال سه‌گانه ، حجم ناحیهٔ توپر T محدود به استوانهٔ سهموی $z = \frac{1}{2}y^2$ ، صفحهٔ $x = 0$ ، و صفحهٔ $x + z = 2$ را بیابید [ر.ک. شکل ۱۸ (آ)] .

حل . چون T ، x ـ ساده ، y ـ ساده ، و z ـ ساده است ، V را می‌توان با استفاده از هر یک‌از فرمولهای (۵) ، ('۵) ، و ("۵) به دست آورد . از فرمول ("۵) استفاده می‌کنیم . تصویر T روی صفحهٔ yz ناحیهٔ R_{yz} است‌که در شکل ۱۸ (ب) نموده شده است و به سهمی $z = \frac{1}{2}y^2$

و خط $z = 2$ محدود می‌باشد. با بررسی شکل معلوم می‌شود که R_{yz} به طور قائم (و به‌طور افقی) ساده‌است، ومساوی مجموعهٔ نقاطی چون (y, z) است که $-2 \le y \le 2, \frac{1}{2}y^2 \le z \le 2$



شکل ۱۸

لذا، T مجموعهٔ نقاطی چون (x, y, z) است به‌طوری‌که $(y, z) \in R_{yz}, 0 \le x \le 2 - z$ ، زیرا x از مقدار 0 روی وجه عقبی T (ناحیهٔ R_{yz}) به مقدار $2 - z$ روی وجه جلوی T (بخشی از صفحهٔ $x + z = 2$) تغییر می‌کند. لذا، طبق فرمول (۴) و فرمول ("۵) بـه ازای $f(x, y, z) \equiv 1$ ، $k_1(y, z) \equiv 0$ ، و $k_2(y, z) = 2 - z$ معلوم می‌شود که

$$V = \iiint_T dV = \iint_{R_{yz}} dA \int_0^{2-z} dx = \iint_{R_{yz}} (2 - z)\, dA$$

$$= \int_{-2}^{2} dy \int_{y^2/2}^{2} (2 - z)\, dz = \int_{-2}^{2} \left[2z - \frac{1}{2} z^2\right]_{y^2/2}^{2} dy$$

$$= 2 \int_0^2 \left(2 - y^2 + \frac{1}{8} y^4\right) dy,$$

که در آن از زوج‌بودن انتگرالده استفاده کرده‌ایم. لذا، بالاخره داریم

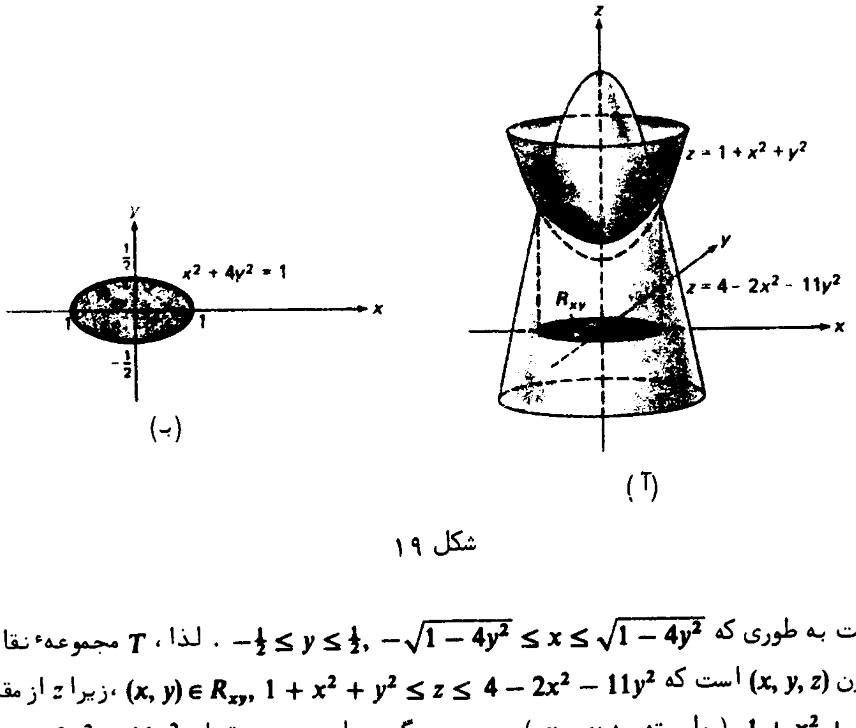
$$V = 2\left[2y - \frac{1}{3} y^3 + \frac{1}{40} y^5\right]_0^2 = 2\left(4 - \frac{8}{3} + \frac{32}{40}\right) = \frac{64}{15}.$$

مثال ۴. با استفاده از انتگرال سه‌گانه، حجم V ناحیهٔ توپر T محدود به سهمی‌گون دوار $z = 1 + x^2 + y^2$ و سهمی‌گون بیضوی $z = 4 - 2x^2 - 11y^2$ را بیابید [ر.ک. شکل ۱۹ (آ)].

حل. مجدداً " T ، x -ساده، y -ساده، و z-ساده است؛ درنتیجه، V را می‌توان با هر یک از فرمولهای (۵)، ('۵)، و ("۵) یافت. این بار از فرمول (۵) استفاده می‌کنیم. باحل معادلات سهمی‌گونها باهم، داریم $1 + x^2 + y^2 = 4 - 2x^2 - 11y^2$ یا معادلاً "

$$x^2 + 4y^2 = 1. \qquad (۶)$$

نمودار معادلهٔ (۶) در فضا یک استوانهٔ بیضوی با خطوط جاری موازی محور z است. چون سهمی‌گونها در یک منحنی واقع براین استوانه متقاطعند، ناحیهٔ R_{xy} ، یعنی تصویر T روی صفحهٔ xy ، به بیضی با همان معادله، طبق شکل ۱۹ (ب)، محدود می‌باشد. بابررسی شکل معلوم می‌شود که R_{xy} به طور افقی (و قائم) ساده است، و مجموعهٔ نقاطی چون (x, y)



شکل ۱۹

است به طوری که $-\frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2}, -\sqrt{1 - 4y^2} \le x \le \sqrt{1 - 4y^2}$. لذا، T مجموعهٔ نقاطی چون (x, y, z) است که $(x, y) \in R_{xy}, 1 + x^2 + y^2 \le z \le 4 - 2x^2 - 11y^2$ ، زیرا z از مقدار $1 + x^2 + y^2$ (وابسته به x و y) بر سهمی‌گون پایینی به مقدار $4 - 2x^2 - 11y^2$ بر سهمی‌گون بالایی تغییر می‌کند. لذا، طبق فرمول (۵) به ازای $f(x, y, z) \equiv 1$ ، $g_1(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ ، و $g_2(x, y) = 4 - 2x^2 - 11y^2$ ، پس از جانشانی $y = \frac{1}{2} \sin t$ ،

$$V = \iiint_T dV = \iint_{R_{xy}} dA \int_{1+x^2+y^2}^{4-2x^2-11y^2} dz = \iint_{R_{xy}} (3 - 3x^2 - 12y^2)\, dA$$

$$= 3 \int_{-1/2}^{1/2} dy \int_{-\sqrt{1-4y^2}}^{\sqrt{1-4y^2}} (1 - x^2 - 4y^2)\, dx$$

$$= 3\int_{-1/2}^{1/2}\left[(1-4y^2)x-\frac{1}{3}x^3\right]_{x=-\sqrt{1-4y^2}}^{\sqrt{1-4y^2}} dy$$
$$= 4\int_{-1/2}^{1/2}(1-4y^2)^{3/2}\,dy = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4 t\,dt = 4\int_0^{\pi/2}\cos^4 t\,dt,$$

لذا، به کمک مسائل ۱۳ و ۱۴، صفحهٔ ۶۱۴، بالاخره خواهیم داشت

$$V = 4\left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

مثال ۵. هرگاه تابع $f(x, y, z)$ *حاصلضرب* سه تابع یک متغیره مانند $X(x)Y(y)Z(z)$ بوده و ناحیهٔ انتگرالگیری T یک‌جعبه‌باشد، یعنی $T=\{(x, y, z): a \le x \le b, c \le y \le d, A \le z \le B\}$ آنگاه انتگرال سه‌گانهٔ f روی T به حاصل‌ضربی از سه انتگرال ساده تبدیل می‌شود. درواقع

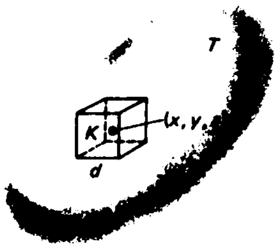
$$\iiint_T f(x, y, z)\,dV = \int_a^b dx\int_c^d dy\int_A^B X(x)Y(y)Z(z)\,dz$$
$$= \left(\int_a^b X(x)\,dx\right)\left(\int_c^d Y(y)\,dy\right)\left(\int_A^B Z(z)\,dz\right).$$

شرح جزئیات را به عنوان تمرین می‌گذاریم. صورت دوبعدی این فرمول چیست؟

محاسبهٔ جرم از چگالی. حال، با استفاده از انتگرالهای سه‌گانه، جرم کل جسم توپر T را با دانستن *تابع چگالی* آن $\rho(x, y, z)$ تعیین می‌کنیم. فرض کنیم K مکعبی به طول یال d و به مرکز نقطهٔ (x, y, z) از T بوده (ر.ک. شکل ۲۰)، و ΔV حجم و Δm جرم بخشی از T باشد که مشمول K است. در این صورت، طبق تعریف،

$$\rho(x, y, z) = \lim_{d\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta V}, \tag{۷}$$

که در آن $\rho(x, y, z) \ge 0$، زیرا جرم و چگالی جرم ذاتاً" نامنفی‌اند. در اینجا این امر که اجسام بزرگ از تعداد زیادی ذرات تشکیل شده‌اند و فضای خالی بین آنها وجود دارند را نادیده گرفته، و ماده را " پیوسته " می‌گیریم. دلیل مجاز بودن این است که d می‌تواند در مقایسه با اجسام بزرگ خیلی کوچک و در مقایسه با اندازهٔ اتم و مولکول بسیار بزرگ باشد. همچنین، از نظر فیزیکی واضح است که چگال (۷) را می‌توان در صورت تعویض مکعب K با ناحیهٔ کلیتری شامل (x, y, z) که قطرش (ماکزیمم فاصلهٔ بین نقاط K) به 0 نزدیک می‌شود نیز به دست آورد.



شکل ۲۰

حال ، همانند تعریف انتگرال سه‌گانه روی T ، فرض کنیم ناحیهٔ T (نرمال) با مجموعه‌ای از صفحات موازی محورهای مختصات به n زیرناحیهٔ $T_1, T_2, \ldots, T_n$ تقسیم شده باشد . همچنین ، ΔV_i و Δm_i حجم و جرم T_i بوده ، و T تابع چگالی پیوستهٔ $\rho(x, y, z)$ باشد . مقدار تابع ρ در زیرناحیهٔ T_i ، دست‌کم وقتی T_i به قدر کافی کوچک‌باشد ، مختصر تغییری می‌کند . لذا ، چون ρ نسبت حدی جرم به حجم است ، ظاهرا "

$$\Delta m_i \approx \rho(p_i, q_i, r_i)\,\Delta V_i,$$

که در آن (p_i, q_i, r_i) نقطهٔ **دلخواهی** در T_i است ، تقریب مناسبی می‌باشد . به‌علاوه ، هرگاه M جرم کل T باشد ، آنگاه

$$M = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i,$$

درنتیجه ، M با

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(p_i, q_i, r_i)\,\Delta V_i, \qquad (۸)$$

یعنی مجموع جرمهای تقریبی n زیرناحیه ، تقریب می‌شود . پس معقول است که (۸) ، یعنی مجموع ریمانی برای ρ بر T ، را تقریب مناسبی به M بگیریم ، که در آن وقتی اندازهٔ هر زیرناحیهٔ T_i کوچکتر شود ، یعنی اندازهٔ مش μ افراز T به صفر نزدیک شود ، تقریب بهتر خواهد شد. لذا ، M را مساوی حد

$$M = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(p_i, q_i, r_i)\,\Delta V_i$$

قرار می‌دهیم ؛ یعنی ،

$$M = \iiint_T \rho(x, y, z)\,dV, \qquad (۹)$$

که در آن وجود انتگرال سه‌گانه از قضیهٔ ۴ و فرض پیوستگی ρ نتیجه می‌شود .

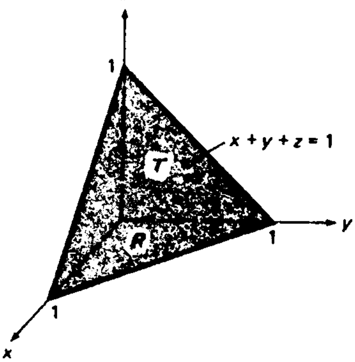
مثال ۶ . جرم کل M چهاروجهی T در یکهشت اول محدود به صفحهٔ $x + y + z = 1$ و صفحات مختصات را درصورتی بیابید که تابع چگالی

$$\rho(x, y, z) = \frac{16}{(1 + x + y + z)^3}$$

باشد .

حل . تصویر T روی صفحهٔ xy مثلث R در ربع اول است که به خط $x + y = 1$ و محورهای مثبت مختصات محدود شده است (ر.ک. شکل ۲۱) . لذا ، طبق فرمول (۹) و قضیهٔ ۵ ،

$$\begin{aligned}
M &= \iiint_T \frac{16}{(1 + x + y + z)^3}\, dV = 16 \iint_R dA \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1 + x + y + z)^3} \\
&= 16 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{(1 + x + y + z)^2}\right]_{z=0}^{1-x-y} dy \\
&= 8 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[\frac{1}{(1 + x + y)^2} - \frac{1}{4}\right] dy \\
&= 8 \int_0^1 \left[-\frac{1}{1 + x + y} - \frac{y}{4}\right]_{y=0}^{1-x} dx \\
&= 8 \int_0^1 \left(\frac{1}{x + 1} + \frac{x - 3}{4}\right) dx = 8\left[\ln (x + 1) + \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{4}x\right]_0^1 \\
&= 8 \ln 2 - 5 \approx 0.545. \qquad \square
\end{aligned}$$



شکل ۲۱

حالت دوبعدی . یک صفحهٔ نازک با ضخامت نامحسوس را **ورقه** می‌نامیم . با استفاده از انتگرال مضاعف می‌توان جرم کل یک ورقه را درصورت معلوم بودن چگالی جرم $\rho(x, y)$ آن به دست آورد . این یک چگالی **سطح** است که به جای چگالی **حجم** ، که با واحدی چون گرم بر سانتیمتر مکعب سنجیده می‌شود ، با واحدی مانند گرم بر سانتیمترمربع سنجیده خواهد شد . اساسا" همان استدلال برای به دست آوردن فرمول (۹) نشان می‌دهدکه‌جرم کل M ورقه عبارت است از

$$M = \iint_R \rho(x, y)\, dA. \qquad (9')$$

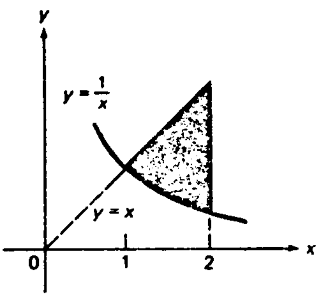
مثال ۷. یک ورقه به شکل ناحیهٔ R محدود به خطوط $x = 2$ ، $y = x$ ، و هذلولی $xy = 1$ است ، و تابع چگالی‌اش عبارت است از

$$\rho(x, y) = \frac{x^2}{y^2}.$$

جرم کل M ورقه را بیابید .

حل . ناحیهٔ R به طور قائم ساده است ، و با نامساویهای $1 \le x \le 2, 1/x \le y \le x$ تعریف می‌شود (ر.ک. شکل ۲۲) . لذا ، طبق فرمول (′۹) ،

$$M = \iint_R \frac{x^2}{y^2}\, dA = \int_1^2 dx \int_{1/x}^{x} \frac{x^2}{y^2}\, dy = \int_1^2 \left[-\frac{x^2}{y}\right]_{y=1/x}^{x} dx$$
$$= \int_1^2 (x^3 - x)\, dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_1^2 = \frac{9}{4}.$$



شکل ۲۲

مسائل

انتگرال مکرر داده شده را حساب کنید.

۱. $\int_0^3 \int_{-2}^0 \int_{-1}^1 dx\,dy\,dz$

۲. $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (xy + xz + yz)\,dx\,dy\,dz$

۳. $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} dz \int_0^z (x + y + z)\,dy$

۴. $\int_0^3 dy \int_0^y dx \int_1^e \frac{xy}{z}\,dz$

۵. $\int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_x^y xyz\,dz$

۶. $\int_{-1}^1 dz \int_0^z dx \int_0^{x+z} x^2yz^2\,dy$

۷. $\int_0^1 dy \int_0^1 dz \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 + x + y + z}}$

۸. $\int_0^\pi dz \int_0^{\pi/2} dy \int_1^2 x \cos y \sin z\,dx$

۹. $\int_1^2 dz \int_0^{\ln z} dy \int_0^{\ln y} e^{x+y}\,dx$

۱۰. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{dz}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}}$

انتگرال سه‌گانهٔ داده شده را حساب کنید.

۱۱. $\iiint_T (x^2 + y^2 + z^2)\,dV$ ، که در آن T جعبهٔ محدود به صفحات $x = 1$ ، $x = 2$ ، $y = 0$ ، $y = 3$ ، $z = -1$ ، و $z = 1$ است

۱۲. $\iiint_T xyz\,dV$ ، که در آن T جعبهٔ محدود به صفحات $x = 0$ ، $x = 2$ ، $y = -1$ ، $y = 3$ ، $z = 1$ ، و $z = 5$ است

۱۳. $\iiint_T x\,dV$ ، که در آن T منشور واقع در یکهشت اول و محدود به صفحات مختصات و صفحات $y = 5$ و $x + z = 2$ است

۱۴. $\iiint_T y\,dV$ ، که در آن T چهاروجهی واقع در یکهشت اول و محدود به صفحهٔ $x + y + z = 1$ و صفحات مختصات است

۱۵. $\iiint_T z^2\,dV$ ، که در آن T ناحیهٔ توپر محدود به کرات $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ است

۱۶. $\iiint_T \frac{xy}{\sqrt{z}}\,dV$ ، که در آن T ناحیهٔ توپر واقع در یکهشت اول و محدود به مخروط بیضوی $z^2 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2$ و صفحات $x = 0$ ، $y = 0$ ، و $z = 1$ است

۱۷. $\iiint_T \cos y\,dV$ ، که در آن T ناحیهٔ توپر واقع در یکهشت اول و محدود به‌سهمی‌گون هذلولوی $z = xy$ ، صفحهٔ $z = 0$ ، و صفحهٔ $x + y = \pi$ است

۱۸. $\iiint_T xe^{x+y+z}\,dV$ ، که در آن T جعبهٔ محدود به صفحات مختصات و صفحات $x = 1$ ، $y = \ln 2$ ، و $z = \ln 3$ است .

با استفاده از انتگرال سه‌گانه ، حجم V ناحیهٔ توپر ذکر شدهٔ T را بیابید .

۱۹. T به صفحهٔ $6x + 2y + 3z = 12$ و صفحات مختصات محدود است

۲۰. T به صفحهٔ $z = 10 - 2x - 5y$ و صفحات $x = 0$ ، $y = 1$ ، $y = x$ ، و $z = 0$ محدود است

۲۱. T به سهمی‌گونهای دوار $z = x^2 + y^2$ و $2z = 1 - x^2 - y^2$ محدود است

۲۲. T به سهمی‌گون دوار $2z = x^2 + y^2$ و کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ محدود است

۲۳. T به استوانه‌های سهموی $z = 4 - x^2$ و $z = 2 + x^2$ و صفحات $y = -2$ و $y = 3$ محدود است

۲۴. T به سهمی‌گونهای $z = x^2 + y^2$ و $z = 2x^2 + y^2$ و صفحات $x = y$ ، $x = 3y$ ، و $y = 1$ محدود است .

جرم کل مکعب T محدود به صفحات $x = \pm 1$ ، $y = \pm 1$ ، و $z = \pm 1$ را درصورتی بیابید که تابع چگالی به صورت زیر باشد .

۲۵. $\rho(x, y, z) = \cos(\pi x/2)\cos(\pi y/2)\cos(\pi z/2)$

۲۶. $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

مثل مثال ۶ ، فرض‌کنید T چهاروجهی‌واقع دریکهشت اول ومحدودبه‌صفحهٔ $x + y + z = 1$ و صفحات مختصات باشد . جرم کل T را درصورتی بیابید که تابع چگالی به صورت زیر باشد .

۲۷. $\rho(x, y, z) = x + y + z$

۲۸. $\rho(x, y, z) = xyz$.

۲۹. جرم کل یک ورقه به شکل ناحیهٔ بین سهمیهای $y = x^2$ و $x = y^2$ را درصورتی بیابید که تابع چگالی‌اش $\rho(x, y) = xy$ باشد .

۳۰. چگالی یک ورقهٔ مربع شکل به طول ضلع 1 ft در نقطهٔ متغیر P با مجذور فاصلهٔ P تا مرکز مربع (نقطهٔ برخورد اقطار) متناسب است. جرم کل ورقه را درصورتی بیابید که چگالی در گوشه‌های مربع 1 اونس بر اینچ مربع باشد.

۳۱. جسم T به شکل ناحیهٔ سه‌بعدی R دارای چگالی بار الکتریکی $\rho(x, y, z)$ است، برای Q، یعنی بار کل‌در T، فرمول‌بنویسید. Q را درصورتی‌بیابیدکه $\rho(x, y, z)=xy-2yz$ و T جعبهٔ محدود به صفحات $x=0$ ، $x=2$ ، $y=1$ ، $y=4$ ، $z=-1$ ، $z=2$ باشد. (توجه کنید که بار الکتریکی ،به‌خلاف جرم ، می‌تواند مقادیر منفی به‌خود بگیرد.)

۳۲. **مقدار میانگین** تابع $f(x, y, z)$ روی ناحیهٔ سه‌بعدی T به حجم V با

$$\frac{1}{V}\iiint_T f(x, y, z)\,dV$$

تعریف می‌شود (این تعمیم سه‌بعدی عبارت

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

برای‌مقدارمیانگین یک‌تابع یک‌متغیره‌است) .مقدار میانگین $f(x, y, z)=xy+xz+yz$ روی چهاروجهی T محدود به صفحهٔ $x+y+z=1$ و صفحات مختصات را بیابید. چگونه از قبل بدانیم که دست‌کم یک نقطه در T هست کـــه f در آن مقدار میانگین خود را روی T می‌گیرد؟ این نقطه را پیدا نمایید.

۳.۱۴ مرکز جرم و مرکز گون

با تعمیم ایده‌های مکانیک نیوتنی به دستگاهی مرکب از n ذرهٔ $P_1, P_2, \ldots, P_n$ در فضا آغاز می‌کنیم. فرض کنیم $\mathbf{r}_i=\overrightarrow{OP_i}$ بردار موضع P_i نسبت به نقطهٔ ثابت O بوده، و m_i جرم P_i باشد. همچنین، بر P_i نیروی خارجی $\mathbf{F}_i$ ، یعنی نیرویی خارج دستگاه n ذره‌ای، و نیروهایی از طرف $n-1$ ذرهٔ دیگر اثر نمایند؛ مثلاً"، ذرات برهم نیروهای ثقلی وارد آورند. فرض کنیم $\mathbf{F}_{ij}$ $(j \neq i)$ نیروی وارد بر P_i از سوی ذرهٔ P_j باشد. دراین‌صورت،طبق قانون دوم نیوتن، حرکت P_i تحت تسلط معادلهٔ دیفرانسیل برداری

$$m_i\frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2}=\mathbf{F}_i+\sum_{j=1}^{n}{}' \mathbf{F}_{ij} \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

است، که در آن t زمان‌بوده و علامت $\sum_{j=1}^{n}{}'$ ، با پریم، یعنی مجموع روی تمام‌زیرنویسهای j جز خود i (ذرهٔ P_i نیرویی بر خودش وارد نمی‌کند). به ازای هر ذرهٔ P_i یک معادله به شکل (۱) وجود دارد ،و برای به‌دست‌آوردن معادلهٔ‌دیفرانسیل حاکم بر حرکت دستگاه

ذرات $P_1, P_2, \ldots, P_n$ رویهم ، معادلات (۱) به ازای $i=1$ تا n را به‌هم می‌افزاییم . از این نتیجه می‌شود که

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i + \sum_{i,j=1}^{n}{}' \mathbf{F}_{ij}, \tag{۲}$$

که در آن علامت $\sum_{i,j=1}^{n}{}'$ ، با پریم ، یعنی مجموع روی تمام جفتهای i و j که $i \neq j$. لذا ، مثلاً ،

$$\sum_{i,j=1}^{3}{}' \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32}. \tag{۳}$$

معادلهٔ (۲) ظاهر پیچیده‌ای دارد ، ولی آن را می‌توان با استفاده از **قانون سوم نیوتن** ، که می‌گوید " عمل مساوی عکس‌العمل است " ، بی‌درنگ ساده کرد . به طور مشخص، نیروی وارد بر ذرهٔ j م از سوی ذرهٔ i م مساوی و مخالف نیروی وارد بر ذرهٔ i م از سوی ذرهٔ j م است ؛ یعنی ،

$$\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}.$$

پس نتیجه می‌شود که مجموع $\sum_{i,j=1}^{n}{}' \mathbf{F}_{ij}$ مساوی $\mathbf{0}$ است ، زیرا جملات دو به دو حذف می‌شوند؛ مثلاً ، از تجدید آرایش جملات (۳) معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{3}{}' \mathbf{F}_{ij} &= (\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21}) + (\mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{31}) + (\mathbf{F}_{23} + \mathbf{F}_{32}) \\ &= (\mathbf{F}_{12} - \mathbf{F}_{12}) + (\mathbf{F}_{13} - \mathbf{F}_{13}) + (\mathbf{F}_{23} - \mathbf{F}_{23}) = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

لذا ، معادلهٔ (۲) به

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i,$$

یا معادلاً

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \ . \tag{۴}$$

تحویل می‌شود . بردار زیر را معرفی می‌کنیم :

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}_i}{M}, \tag{۵}$$

که در آن

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i \tag{۵'}$$

جرم کل دستگاه، یعنی مجموع اجرام تمام ذرات است. در این صورت، $\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i = M\bar{\mathbf{r}}$، و معادلهٔ (۴) را می‌توان به شکل فشردهٔ زیر نوشت:

$$M\frac{d^2\bar{\mathbf{r}}}{dt^2} = \mathbf{F}, \tag{۶}$$

که در آن

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i$$

برآیند تمام نیروهای خارجی وارد بر تک تک ذرات $P_1, P_2, \ldots, P_n$ است. بنابر (۶)، و صرف نظر از حرکت ذرات نسبت به هم، دستگاه کلاً مانند ذرهٔ واحدی به جرم M وبردار موضع $\bar{\mathbf{r}}$ که بر آن نیروی $\mathbf{F}$ وارد است حرکت می‌کند. نقطه با بردار موضع $\bar{\mathbf{r}}$ **مرکز جرم** دستگاه n ذره‌ای نام دارد.

اگر نیروی خارجی $\mathbf{F}$ صفر باشد، می‌توان از معادلهٔ (۶) فوراً انتگرال گرفت و ابتدا

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{dt} = \mathbf{c}_1$$

و سپس

$$\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{c}_1 t + \mathbf{c}_2$$

را به دست آورد، که در آن $\mathbf{c}_1$ و $\mathbf{c}_2$ بردارهای ثابت انتگرالگیری می‌باشند. هرگاه مرکز جرم سرعت اولیهٔ صفر داشته باشد، آنگاه $\bar{\mathbf{v}}|_{t=0} = \mathbf{0}$؛ درنتیجه، $\mathbf{c}_1 = \mathbf{0}$ و $\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{c}_2$، که در این صورت مرکز جرم ثابت می‌ماند. حتی در این حالت نیز مرکز جرم مهم است. مثلاً، می‌توان نشان داد که دستگاه مرکب از n ذرهٔ وصل شده به یک صفحهٔ نازک فلز با وزن نامحسوس روی میلهٔ تیزی که در مرکز جرم دستگاه قرار دارد به حال تعادل درمی‌آید، ولی در هر نقطهٔ دیگر خواهد افتاد. در این وضع، نقطهٔ تعادل یک ورقه به شکل ناحیهٔ مسطحی به چگالی جرم $\rho(x, y)$ نیز مرکز جرمش (به صورت تعریف شده در زیر) می‌باشد. در کاربردهای مهندسی، نیروی وارد بر یک ساختار (مثلاً، پل یا ساختمان) اغلب نیروی ثقل است، و در این وضع مرکز جرم را معمولاً **مرکز ثقل** می‌نامند.

به آسانی می‌توان مختصات مرکز جرم یک دستگاه از ذرات را برحسب مختصات خود ذرات بیان کرد. دستگاه مختصات قائم x، y، و z با مبداء O را معرفی کرده، فرض

می‌کنیم $\bar{\mathbf{r}} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ و

$$\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i) \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

در این صورت ، اگر از طرفین (۵) مؤلفه گرفته و از ('۵) استفاده کنیم ، فورا" درخواهیم یافت که

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \qquad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \qquad \bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}. \tag{۷}$$

مثال ۱ . یک‌دستگاه ذرات از سه‌جرم $m_1 = 3$ ، $m_2 = 4$ ، و $m_3 = 2$ در نقاطی به‌بردارهای موضع $\mathbf{r}_1 = (2, -1, 3)$ ، $\mathbf{r}_2 = (5, 2, 4)$ ، و $\mathbf{r}_3 = (-2, 0, 1)$ تشکیل شده است . مرکز جرم آن را بیابید .

حل . در اینجا $x_1 = 2$ ، $x_2 = 5$ ، و $x_3 = -2$؛ لذا ، اولین فرمول (۷) نتیجه می‌دهد که

$$\bar{x} = \frac{3(2) + 4(5) + 2(-2)}{3 + 4 + 2} = \frac{22}{9}.$$

به همین نحو ،

$$\bar{y} = \frac{3(-1) + 4(2) + 2(0)}{3 + 4 + 2} = \frac{5}{9}$$

و

$$\bar{z} = \frac{3(3) + 4(4) + 2(1)}{3 + 4 + 2} = \frac{27}{9} = 3.$$

گشتاورهای یک دستگاه از ذرات . صورتهای عبارت (۷) برای مختصات $\bar{x}$ ، $\bar{y}$ ، و $\bar{z}$ مرکز جرم *گشتاورهای* دستگاه S مرکب از ذرات $P_1, P_2, \dots, P_n$ نامیده می‌شوند . به‌طور مشخص، چون اعداد x_i ، y_i ، و z_i صرف نظر از علامتشان فواصل بین P_i و صفحات yz ، xz ، و xy اند ، $\sum m_i x_i$ را *گشتاور* S نسبت به صفحهٔ yz ، $\sum m_i y_i$ را *گشتاور* S نسبت به صفحهٔ xz ، و $\sum m_i z_i$ را *گشتاور* S نسبت به صفحهٔ xy می‌نامیم .(برای اختصار ، حدود جمعبندی حذف شده‌اند) . هرگاه ذرات همه در یک صفحه باشند (آن را صفحهٔ xy می‌گیریم) ، آنگاه x_i و y_i ، صرف‌نظر از علامت، فواصل بین P_i و محورهای y و x اند ، و $\sum m_i x_i$ را *گشتاور* S نسبت

به محور y و $\sum m_i y_i$ را **گشتاور** S **نسبت به محور** x می‌نامیم . با تقسیم این گشتاورها برجرم کل $\sum m_i$ دستگاه S ، می‌توان به مختصات مرکز جرم ($\bar{x}$, $\bar{y}$ در صفحه ، $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ در فضا) بازگشت . گشتاورهای $\sum m_i x_i$ ، $\sum m_i y_i$ ، و $\sum m_i z_i$ را **گشتاورهای اول** نیز می‌نامند تا با **گشتاورهای دوم** یا **گشتاورهای ماند** که در بخش ۵.۱۴ معرفی شده‌اند خلط نشود .

یک جسم جامد را می‌توان ناحیه‌ای سه‌بعدی مانند T گرفت که بر آن چگالی جرم پیوستهٔ $\rho(x, y, z)$ تعریف شده است ، که اگر جسم همگن باشد ، ثابت $\rho(x, y, z) \equiv$. برای یافتن مرکز جرم T ، آن را با رسم سه مجموعه از صفحات موازی صفحات مختصات ، مثل صفحهٔ ۱۳۴۳ در تعریف انتگرال سه‌گانه ، به تعداد زیادی زیر ناحیه مانند $T_1, T_2, \ldots, T_n$ به حجمهای $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$ تقسیم می‌کنیم . فرض کنیم (x_i, y_i, z_i) نقطهٔ دلخواهی در T_i باشد . پس T_i را می‌توان ذره‌ای به جرم $\Delta m_i \approx \rho(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$ واقع در (x_i, y_i, z_i) گرفت. لذا ، مرکز جرم T با تقریبی مناسب همان مرکز جرم دستگاه n ذره‌ای $T_1, T_2, \ldots, T_n$ می‌باشد . فرض کنیم μ اندازهٔ مش افراز T باشد . در این صورت ، مرکز جرم T موضع حدی مرکز جرم این دستگاه ذرات ، وقتی $\mu \to 0$ ، تعریف می‌شود . لذا ، به کمک (۷) ، معلوم می‌شود که مختصات مرکز جرم T از فرمولهای زیر به دست می‌آیند :

$$\bar{x} = \frac{\lim\limits_{\mu \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \Delta m_i}{\lim\limits_{\mu \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta m_i} = \frac{\lim\limits_{\mu \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \rho(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i}{\lim\limits_{\mu \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i},$$

$$\bar{y} = \frac{\lim\limits_{\mu \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \Delta m_i}{\lim\limits_{\mu \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta m_i} = \frac{\lim\limits_{\mu \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \rho(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i}{\lim\limits_{\mu \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i},$$

$$\bar{z} = \frac{\lim\limits_{\mu \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} z_i \Delta m_i}{\lim\limits_{\mu \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta m_i} = \frac{\lim\limits_{\mu \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} z_i \rho(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i}{\lim\limits_{\mu \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i}.$$

اما هر مجموع شامل ρ یک مجموع ریمان است و ، وقتی $\mu \to 0$ ، به یک انتگرال‌سه‌گانه روی T نزدیک می‌شود (ناحیهٔ T نرمال فرض می‌شود) . در واقع ،

$$\lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i = \iiint\limits_T \rho(x, y, z)\, dV,$$

$$\lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} x_i \rho(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i = \iiint\limits_T x\rho(x, y, z)\, dV,$$

$$\lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n} y_i\rho(x_i, y_i, z_i)\,\Delta V_i = \iiint_T y\rho(x, y, z)\,dV,$$

$$\lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n} z_i\rho(x_i, y_i, z_i)\,\Delta V_i = \iiint_T z\rho(x, y, z)\,dV.$$

پس نتیجه می‌شود که

$$\bar{x} = \frac{\iiint_T x\rho\,dV}{\iiint_T \rho\,dV}, \quad \bar{y} = \frac{\iiint_T y\rho\,dV}{\iiint_T \rho\,dV}, \quad \bar{z} = \frac{\iiint_T z\rho\,dV}{\iiint_T \rho\,dV}, \tag{۸}$$

که در آن شناسه‌های تابع چگالی ρ به‌خاطر اختصار حذف شده‌اند. البته، انتگرال $\iiint_T \rho\,dV$ در هر سه مخرج همان جرم M جسم است (صفحهٔ ۱۳۵۰ را به یاد آورید). لذا، می‌توان فرمولهای (۸) را به صورت فشرده‌تر زیر نوشت:

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\iiint_T x\rho\,dV, \quad \bar{y} = \frac{1}{M}\iiint_T y\rho\,dV, \quad \bar{z} = \frac{1}{M}\iiint_T z\rho\,dV. \tag{۹}$$

اگر جسم همگن باشد، چگالی ρ مقدار ثابتی دارد. در این صورت، اولین فرمول (۸) به

$$\bar{x} = \frac{\rho\iiint_T x\,dV}{\rho\iiint_T dV} = \frac{\iiint_T x\,dV}{\iiint_T dV}$$

تحویل می‌شود، و به همین نحو داریم

$$\bar{y} = \frac{\iiint_T y\,dV}{\iiint_T dV}, \qquad \bar{z} = \frac{\iiint_T z\,dV}{\iiint_T dV}$$

اما $\iiint_T dV = V$ ، که در آن V حجم T است؛ و لذا ،

$$\bar{x} = \frac{1}{V}\iiint_T x\,dV,\quad \bar{y} = \frac{1}{V}\iiint_T y\,dV,\quad \bar{z} = \frac{1}{V}\iiint_T z\,dV \qquad (9')$$
(چگالی ثابت) .

در این حالت ، مرکز جرم مرکز گون ناحیهٔ توپر T نام دارد ، و صرفاً" یک مفهوم هندسی بوده و از ایدهٔ فیزیکی جرم کاملاً" مستقل است .

حالت دوبعدی . در یک‌صفحهٔ نازک یا ورقه ، به‌جای ناحیهٔ توپر T و تابع چگالی سدبعدی $\rho(x, y, z)$ یک ناحیهٔ مسطح R و تابع چگالی دوبعدی $\rho(x, y)$ داریم . پس همان استدلالها نشان می‌دهند که مرکز جرم ورقه به مختصات زیر است :

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\iint_R x\rho\,dA,\qquad \bar{y} = \frac{1}{M}\iint_R y\rho\,dA, \qquad (10)$$

که در آنها $M = \iint_R \rho\,dA$ جرم‌کل ورقه‌است .هرگاه ورقه همگن باشد ،آنگاه‌ثابت $\rho(x, y) \equiv$ و این فرمولها به صورت زیر درمی‌آیند :

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\iint_R x\,dA,\qquad \bar{y} = \frac{1}{A}\iint_A y\,dA \qquad (10')$$
(چگالی ثابت)

که در آن A مساحت R می‌باشد .دراین حالت مجدداً" مرکز جرم را **مرکز گون** ناحیهٔ‌مسطح R می‌نامند ، و این یک مفهوم کاملاً" هندسی می‌باشد .

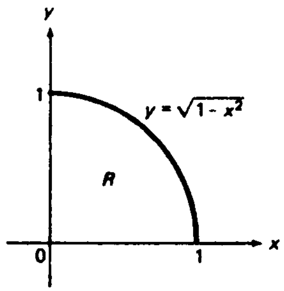
گشتاورهای یک توزیع جرم پیوسته . در جسم T یا ورقهٔ R ، مثل یک دستگاه از ذرات ، کمیات مختلفی به نام **گشتاور** داریم ، ولی به جای مجموع به صورت انتگرال می‌باشند . به طور مشخص، $M_{yz} = \iiint_T x\rho\,dV$ گشتاور T نسبت به صفحهٔ yz ، $M_{xz} = \iiint_T y\rho\,dV$ گشتاور T نسبت به صفحهٔ xz ، و $M_{xy} = \iiint_T z\rho\,dV$ گشتاور T نسبت به صفحهٔ xy است .همچنین ، $M_y = \iint_R x\rho\,dA$ گشتاور R نسبت به محور y و $M_x = \iint_R y\rho\,dA$ گشتاور R نسبت به محور x می‌باشد . فرمولهای (۹) و (۱۰) برحسب گشتاورها خواهند شد

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M},\qquad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M},\qquad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

و

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M}.$$

مثال ۲ . یک ورقه به شکل قطاع مستدیر R در ربع اول به محورهای مختصات و قـوسی از دایرهٔ یکهٔ $x^2 + y^2 = 1$ محدود است (ر.ک. شکل ۲۳) . مرکز جرم $(\bar{x}, \bar{y})$ ورقه‌را درصورتی بیابید که تابع چگالی $\rho(x, y) = x^2y$ باشد .



شکل ۲۳

حل . جرم کل ورقه عبارت است از

$$M = \iint_R \rho\, dA = \iint_R x^2y\, dA = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2y\, dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2y^2\right]_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} dy$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^2(1-x^2)\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{1}{15}.$$

گشتاور نسبت به محور x مساوی است با

$$M_x = \iint_R y\rho\, dA = \iint_R x^2y^2\, dA = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2y^2\, dy$$
$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{3}x^2y^3\right]_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{3}\int_0^1 x^2(1-x^2)^{3/2}\, dx$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^4 t\, dt = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{16}t - \frac{1}{64}\sin 4t + \frac{1}{48}\sin^3 2t\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{96},$$

و این با جانشانی $x = \sin t$ و مثال ۳ ، صفحهٔ ۶۱۷ ، به دست می‌آید . گشتاوردیگر ، نسبت به محور y ، مساوی است با

$$M_y = \iint_R x\rho\, dA = \iint_R x^3 y\, dA = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^3 y\, dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^3y^2\right]_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^3(1-x^2)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^6\right]_0^1 = \frac{1}{24}.$$

درنتیجه ،

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{15}} = \frac{5}{8} = 0.625, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\frac{1}{96}\pi}{\frac{1}{15}} = \frac{5\pi}{32} \approx 0.491,$$

لـــــذا ، $(\frac{5}{8}, \frac{5}{32}\pi)$ مرکز جرم ورقه بوده ، و ورقه روی یک میلهٔ قائم در این نقطه به صورت تعادل درمی‌آید . توجه کنید که ، حتی اگر ناحیهٔ R نسبت به خط $y = x$ متقارن باشـد ، $\bar{x} > \bar{y}$. این به خاطر آن است که جرم نزدیک محور x تا محور y بیشتر می‌باشد (چرا ؟).

مثال ۳ . فرض‌کنید R همان ناحیهٔ مثال ۲ باشد . مرکز گون R را پیدا نمایید .

حل . چون تابع چگالی ثابت است ، تقارن R نسبت به خط $y = x$ تضمین می‌کندکه $\bar{x} = \bar{y}$ (ر.ک . مسئلهٔ ۴) . بنابر فرمول اول (۱۰′) ،

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\iint_R x\,dA = \frac{4}{\pi}\iint_R x\, dA,$$

زیرا A ،یعنی مساحت‌ناحیهٔ R ، یکچهارم مساحت π محصور به‌دایرهٔ یکه‌است .بامحاسبهٔ انتگرال مضاعف ، خواهیم داشت

$$\iint_R x\, dA = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x\, dy = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, x\, dx = \left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

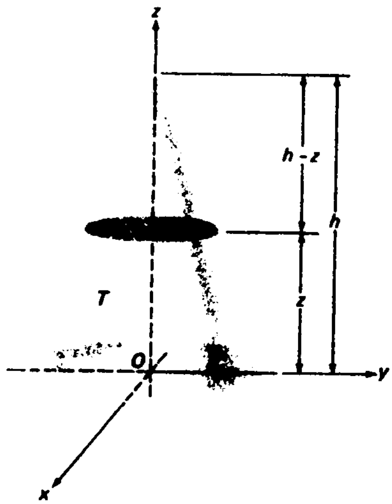
بنابراین ،

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{4}{3\pi} \approx 0.424,$$

و مرکز گون عبارت خواهد بود از $(4/3\pi, 4/3\pi)$.

مثال ۴ . مرکز جرم مخروط مستدیر قائم توپر T به ارتفاع h و شعاع قاعدهٔ a را در صورتی بیابید که چگالی در هر نقطه از T با فاصلهٔ آن تا قاعدهٔ T متناسب باشد .

حل. با اختیار محور z در امتداد محور T و قاعدهٔ T در صفحهٔ xy، مثل شکل ۲۴، داریم $\rho(x, y, z) = cz$، که درآن c یک‌ثابت مثبت است. چون مرکز جرم هر مقطع عرضی‌مخروط



شکل ۲۴

T با صفحه‌ای موازی صفحهٔ xy روی محور z است، همین امر در مورد خود T صادق می‌باشد (بیشتر توضیح دهید) . بنابراین، $\bar{x} = \bar{y} = 0$، و فقط باید

$$\bar{z} = \frac{\iiint\limits_T z\rho\, dV}{\iiint\limits_T \rho\, dV} = \frac{c\iiint\limits_T z^2\, dV}{c\iiint\limits_T z\, dV} = \frac{\iiint\limits_T z^2\, dV}{\iiint\limits_T z\, dV} \qquad (11)$$

را حساب کنیم (چون ثابت c حذف می‌شود، مقدارش اثری بر جواب ندارد) . ساده ترین راه برای محاسبهٔ انتگرال سه‌گانه استفاده از روش مقاطع عرضی است . به‌طور مشخص، فرض کنیم $A(z)$ مساحت مقطع عرضی T در z باشد؛ یعنی، مساحت قرص مستدیر به‌شعاع $r = r(z)$ که مقطع صفحهٔ مار بر نقطهٔ $(0, 0, z)$ و موازی با صفحهٔ xy با T است . بنابر تشابه‌مثلثها،

$$\frac{r}{a} = \frac{h - z}{h},$$

درنتیجه،

$$A(z) = \pi r^2 = \frac{\pi a^2}{h^2}(h - z)^2. \qquad (12)$$

در این صورت ، همانطور که روش مقاطع عرضی می‌گوید که حجم مخروط T مساوی است با

$$V = \iiint_T dV = \int_0^h A(z)\,dz$$

(تحقیق کنید که از این $V = \frac{1}{3}\pi a^2 h$ نتیجه می‌شود) ، همان روش به ما می‌گوید که انتگرال تابع $f(z)$ روی T که فقط به z وابسته است مساوی است با

$$\iiint_T f(z)\,dV = \int_0^h f(z)A(z)\,dz. \tag{۱۳}$$

برای اثبات صوریتر این ، ملاحظه می‌کنیم که T یک ناحیهٔ x-ساده‌است ؛ و درواقع ،

$$T = \{(x, y, z): (y, z) \in R_{yz}, k_1(y, z) \le x \le k_2(y, z)\},$$

که در آن $R_{yz} = \{(y, z): 0 \le z \le h, g_1(z) \le y \le g_2(z)\}$ ؛ توابع g_1 و g_2 بر $[0, h]$ پیوسته‌اند ، ولی k_1 و k_2 بر R_{yz} پیوسته می‌باشند (لازم نیست این توابع را مشخص کنیم ، ولی به‌خاطر تقارن داریم $g_1 = -g_2$ و $k_1 = -k_2$) . بنابراین ، طبق قضیهٔ ″۵ ، صفحهٔ ۱۳۲۶ ،

$$\begin{aligned} \iiint_T f(z)\,dV &= \iint_{R_{yz}} dA \int_{k_1(y,z)}^{k_2(y,z)} f(z)\,dx \\ &= \int_0^h f(z)\left(\int_{g_1(z)}^{g_2(z)} [k_2(y, z) - k_1(y, z)]\,dy\right)dz. \end{aligned} \tag{۱۴}$$

اما

$$\int_{g_1(z)}^{g_2(z)} [k_2(y, z) - k_1(y, z)]\,dy = A(z),$$

که در آن $A(z)$ مساحت مقطع عرضی T در z است ؛ و درنتیجه ، همانطور که پیش‌بینی شد ، (۱۴) به (۱۳) تحویل می‌شود .

حال ، به محاسبهٔ $\bar{z}$ بازگشته ، از (۱۲) و (۱۳) نتیجه می‌گیریم که

$$\iiint_T z\,dV = \frac{\pi a^2}{h^2}\int_0^h z(h - z)^2\,dz = \frac{\pi a^2}{h^2}\int_0^h (h^2 z - 2hz^2 + z^3)\,dz$$

$$= \frac{\pi a^2}{h^2}\left[\frac{1}{2}h^2 z^2 - \frac{2}{3}hz^3 + \frac{1}{4}z^4\right]_0^h = \frac{1}{12}\pi a^2 h^2,$$

$$\iiint_T z^2\,dV = \frac{\pi a^2}{h^2}\int_0^h z^2(h - z)^2\,dz = \frac{\pi a^2}{h^2}\int_0^h (h^2 z^2 - 2hz^3 + z^4)\,dz$$

$$= \frac{\pi a^2}{h^2}\left[\frac{1}{3}h^2z^3 - \frac{1}{2}hz^4 + \frac{1}{5}z^5\right]_0^h = \frac{1}{30}\pi a^2 h^3,$$

و در این صورت از (۱۱) نتیجه می‌شود که

$$\bar{z} = \frac{\frac{1}{30}\pi a^2 h^3}{\frac{1}{12}\pi a^2 h^2} = \frac{2}{5}h.$$

لذا، $(0, 0, \frac{2}{5}h)$ مرکز جرم مخروط T می‌باشد.

مثال ۵. فرض کنیم T همان مخروط توپر مثال ۴ ولی با چگالی ثابت باشد. مرکز گون T را پیدا نمایید.

حل. مثل قبل بنابر تقارن داریم $\bar{x} = \bar{y} = 0$، ولی، طبق فرمول سوم (۹′)،

$$\bar{z} = \frac{1}{V}\iiint_T z\,dV.$$

حجم T مساوی است با $V = \frac{1}{3}\pi a^2 h$ و، همانطور که اینک نشان دادیم،

$$\iiint_T z\,dV = \frac{1}{12}\pi a^2 h^2,$$

بنابراین،

$$\bar{z} = \frac{\frac{1}{12}\pi a^2 h^2}{\frac{1}{3}\pi a^2 h} = \frac{1}{4}h,$$

و مرکز گون مساوی $(0, 0, \frac{1}{4}h)$ می‌باشد. چرا مرکز گون از مرکز جرم به دست آمده در مثال ۴ پایین‌تر است؟

مسائل

۱. دستگاهی از چهار ذره به جرمهای $m_1 = 6$، $m_2 = 1$، $m_3 = 2$، و $m_4 = 5$ با بردارهای موضع $\mathbf{r}_1 = (0, 3, 4)$، $\mathbf{r}_2 = (-1, 0, 6)$، $\mathbf{r}_3 = (2, -1, 1)$، و $\mathbf{r}_4 = (5, 8, 0)$ تشکیل شده‌است. گشتاورهای M_{xy}، M_{xz}، و M_{yz} دستگاه را نسبت به صفحات مختصات و نیز مرکز جرم $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ آن را بیابید.

۲. فرض کنید $\bar{\mathbf{r}}_1$ و $\bar{\mathbf{r}}_2$ بردارهای موضع مراکز جرم دو دستگاه از ذرات S_1 و S_2 باشند. نشان دهید که بردار موضع دستگاه S حاصل از تلفیق S_1 و S_2 عبارت است از

$\bar{\mathbf{r}} = (M_1\mathbf{r}_1 + M_2\mathbf{r}_2)/M$ ، که در آن M_1 ، M_2 ، و M جرمهای کل دستگاههای S_1 ، S_2 ، و S می‌باشند.

۳. کودکی به وزن 50 lb از انتهای یک تختهٔ صاف به‌طول 12 ft و وزن 25 lb واقع روی یک حوض یخ‌زده به طرف دیگر می‌رود. برای تخته چه رخ می‌دهد؟ یخ لیز است، ولی بین کفشهای کودک و تخته کشش وجود دارد.

۴. نشان دهید هرگاه ناحیهٔ توپر T نسبت به صفحهٔ Π متقارن باشد، آنگاه مرکز گون T بر Π واقع است. نشان دهید هرگاه ناحیهٔ مسطح R نسبت به خط L متقارن باشد، آنگاه مرکز گون R بر L واقع می‌باشد.

۵. فرض کنید ناحیهٔ مسطح R به مساحت A به دو زیر ناحیهٔ R_1 و R_2 به مساحت A_1 و A_2 بدون نقطهٔ درونی مشترک مثل شکل ۸، صفحهٔ ۱۳۲۴، تجزیه شده باشد. نشان دهید هرگاه مرکز گونهای R ، R_1 ، و R_2 مساوی $(\bar{x}, \bar{y})$ ، $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ ، و $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ باشند، آنگاه

$$\bar{x} = \frac{1}{A}(A_1\bar{x}_1 + A_2\bar{x}_2), \qquad \bar{y} = \frac{1}{A}(A_1\bar{y}_1 + A_2\bar{y}_2).$$

نشان دهید که اگر R ورقه‌ای به چگالی متغیر باشد، مختصات مرکز جرم ورقه از همین فرمولها به وسیلهٔ تعویض A ، A_1 ، و A_2 با M ، M_1 ، و M_2 ، یعنی جرمهای R ، R_1 ، و R_2 به دست می‌آیند.

۶. مشابه مسئلهٔ ۵ را برای یک ناحیهٔ توپر و برای یک جسم توپر با چگالی متغیر بیان و اثبات نمایید.

۷. فرض کنید R ناحیهٔ مسطح محدود به خطوط $x=a$ و $x=b$ ، محور x ، و منحنی $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ باشد، که f بر $[a, b]$ پیوسته و نامنفی است. نشان دهید که مرکز گون R نقطه‌ای است به مختصات

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b xf(x)\,dx, \qquad \bar{y} = \frac{1}{2A}\int_a^b [f(x)]^2\,dx, \qquad \text{(یک)}$$

که در آنها $A = \int_a^b f(x)$ مساحت R می‌باشد.

۸. مثال ۲ را درصورتی حل کنید که تابع چگالی $\rho(x, y) = x^2 + y^2$ باشد.

مرکزگون ناحیهٔ مسطح R محدود به منحنیهای زیر را بیابید.

۹. سهمیهای $y = x^2$ و $x = y^2$

۱۰. منحنی $y = 1 - x^3$ و محورهای مختصات

۱۱. بیضی $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ و محورهای مثبت مختصات

۱۲. بخشی از منحنی $y = \cos x$ از $x = -\pi/2$ تا $x = \pi/2$ و محور x

۱۳. دوایر $x^2 + y^2 = 4$ و $(x-1)^2 + y^2 = 1$

۱۴. منحنی $y = \sin x$ و خط $y = 2x/\pi$

۱۵. منحنی $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ و محورهای مختصات

۱۶. منحنی $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ و محورهای مثبت مختصات

۱۷. مرکز گون ناحیهٔ بی‌کران R زیر منحنی $y = e^x$ در ربع دوم را با یک انتگرال مجازی پیدا کنید.

۱۸. گشتاور اول یک قرص مستدیر به شعاع a را نسبت به یکی از خطوط مماسش بیابید.

۱۹. یک جعبهٔ مکعب شکل به طول یال 2 ft سر ندارد. مرکز گون آن کجاست؟

۲۰. نشان دهید که نیروی F وارد بر یک صفحهٔ قائم شناور R عبارت است از $F = \delta A h$، که در آن δ چگالی وزن مایع، A مساحت R، و h عمق مرکز گون R زیر سطح مایع می‌باشد.

راهنمایی. بحث مربوطه در بخش ۷.۸ را به یاد آورید.

مرکز جرم جسم محدود به صفحات مختصات و صفحات $x = 1$، $y = 2$، و $y + z = 4$ را در صورتی بیابید که تابع چگالی به صورت زیر باشد.

۲۱. $\rho(x, y, z) \equiv 16$

۲۲. $\rho(x, y, z) = x$

۲۳. $\rho(x, y, z) = xy$

۲۴. $\rho(x, y, z) = xyz$

مرکز گون ناحیهٔ توپر T محدود به سطوح زیر را بیابید.

۲۵. استوانهٔ سهموی $z = \frac{1}{2}y^2$، صفحهٔ $x = 0$، و صفحهٔ $x + z = 2$ (ر.ک. مثال ۳، صفحهٔ ۱۳۴۶)

۲۶. صفحهٔ $x + y + z = 1$ و صفحات مختصات

۲۷. کرات $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ (ر.ک. مسئلهٔ ۱۵، صفحهٔ ۱۳۵۳)

۲۸. سهمی گون دوار $2z = x^2 + y^2$ و کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ (ر.ک. مسئلهٔ ۲۲، صفحهٔ ۱۳۵۴)

۲۹. بیضی گون $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) = 1$ و صفحات مختصات در یکهشت اول.

۳۰. سهمی گون هذلولوی $z = xy$ و صفحات $x = 2$ و $y = 3$ در یکهشت اول.

۳۱. مرکز جرم جسم T در مسئلهٔ ۲۷ اگر تابع چگالی $\rho(x, y, z) = z$ باشد.

۳۲. بشکه‌ای به شکل ناحیهٔ توپر T و یا حجم V از مایعی به چگالی ρ پر شده‌است. نشان دهید کار W لازم برای پمپاژ تمام مایع از سر بشکه مساوی کار لازم برای بالا بردن یک "ذرهٔ معادل" به جرم ρV از مرکز گون T به بالاترین نقطهٔ T است.

راهنمایی. مثال ۲، صفحهٔ ۷۶۰، را به یاد آورید.

۴.۱۴ مطالب دیگر در باب مرکز گون : قضایای پاپوس

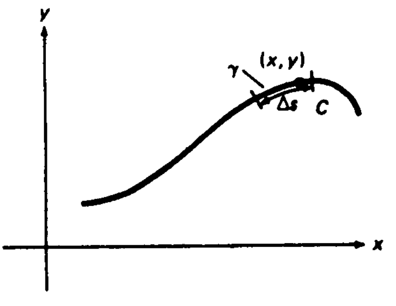
در بخش پیش طرز یافتن مرکز جرم یک جسم سه‌بعدی یا یک ورقهٔ مسطح را نشان دادیم. یک مسئلهٔ مربوط یافتن مرکز جرم سیمی به چگالی متغیر است. فرض‌کنیم سیم به شکل منحنی مسطح C به معادلات پارامتری زیر باشد:

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \qquad (a \le t \le b),$$

که در آن C بیش از تعدادی متناهی خودقطعی نداشته باشد. همچنین، C *هموار* باشد، بدین معنی که توابع $x(t)$ و $y(t)$ مشتقات پیوستهٔ $x'(t)$ و $y'(t)$ صادق در شرط $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \neq 0$ داشته‌باشند. در این صورت، C با طول متناهی بوده و طولش مساوی

$$L = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$$

است (ر.ک. صفحهٔ ۷۴۱)، و هر قوس C نیز با طول متناهی می‌باشد. فرض‌کنیم γ قوسی از C شامل نقطهٔ (x, y) از C بوده (ر.ک. شکل ۲۵)، و Δs را طول و Δm را جرم γ می‌گیریم.



شکل ۲۵

در این صورت، طبق تعریف،

$$\rho(x, y) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta s}$$

تابع چگالی C در (x, y) است که با واحدهایی چون گرم برسانتیمتر سنجیده می‌شود. هدف آن است که به کمک تابع $\rho(x, y)$، که پیوسته فرض شده، جرم کل سیم C و مرکز جرم آن‌را تعیین کنیم.

برای این کار، فرض‌کنیم نقاط $t_i\ (i = 0, 1, \ldots, n)$ افرازی از بازهٔ $[a, b]$ به‌اندازهٔ مش μ باشد؛ درنتیجه، $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ و $\mu = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots, \Delta t_n\}$، که در آن $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ طول زیربازهٔ i م $[t_{i-1}, t_i]$ است. در این صورت،

نقاط نظیر

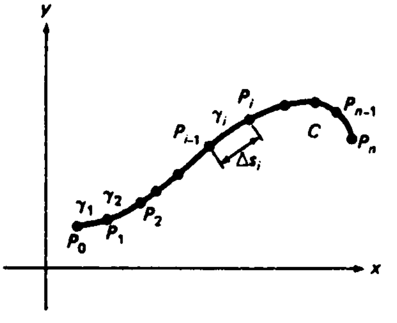
$$P_i = (x(t_i), y(t_i)) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

سیم C را به n قوس

$$\gamma_i = \widehat{P_{i-1}P_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

تقسیم می‌کنند (ر.ک. شکل ۲۶)، که در آن γ_i طول

$$\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$$



شکل ۲۶

می‌باشد. بنابر قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرالها (قضیهٔ ۳، صفحهٔ ۳۹۱)، نقطه‌ای مانند τ_i در $[t_{i-1}, t_i]$ وجود دارد به طوری که

$$\Delta s_i = \sqrt{[x'(\tau_i)]^2 + [y'(\tau_i)]^2}\, \Delta t_i.$$

فرض کنیم

$$Q_i = (x_i, y_i) = (x(\tau_i), y(\tau_i)) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

نقطهٔ نظیر به مقدار پارامتر τ_i باشد. در این صورت، قوس γ_i را می‌توان ذره‌ای به جرم

$$\Delta m_i \approx \rho(x(\tau_i), y(\tau_i))\, \Delta s_i = \rho(x(\tau_i), y(\tau_i))\sqrt{[x'(\tau_i)]^2 + [y'(\tau_i)]^2}\, \Delta t_i$$

گرفت که در نقطهٔ Q_i قرار دارد. لذا، مرکز جرم C، با تقریبی مناسب، مرکز جرم دستگاه ذرات $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ می‌باشد. بنابراین، مرکز جرم $(\bar{x}, \bar{y})$ از C را موضع حدی مرکز جرم این دستگاه ذرات، وقتی $\mu \to 0$، تعریف می‌کنیم؛ یعنی،

$$\bar{x} = \frac{\lim\limits_{\mu \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \Delta m_i}{\lim\limits_{\mu \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta m_i} = \frac{\lim\limits_{\mu \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} x(\tau_i)\rho(x(\tau_i), y(\tau_i))\sqrt{[x'(\tau_i)]^2 + [y'(\tau_i)]^2}\, \Delta t_i}{\lim\limits_{\mu \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \rho(x(\tau_i), y(\tau_i))\sqrt{[x'(\tau_i)]^2 + [y'(\tau_i)]^2}\, \Delta t_i},$$

$$\bar{y} = \frac{\lim\limits_{\mu\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\,\Delta m_i}{\lim\limits_{\mu\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta m_i} = \frac{\lim\limits_{\mu\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} y(\tau_i)\rho(x(\tau_i), y(\tau_i))\sqrt{[x'(\tau_i)]^2+[y'(\tau_i)]^2}\,\Delta t_i}{\lim\limits_{\mu\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} \rho(x(\tau_i), y(\tau_i))\sqrt{[x'(\tau_i)]^2+[y'(\tau_i)]^2}\,\Delta t_i}.$$

هر یک از مجموعهای شامل ρ یک مجموع ریمان است که ، وقتی $\mu \to 0$ ، بـه انتگرال معینی نزدیک می‌شود . در واقع ،

$$\lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n} \rho(x(\tau_i), y(\tau_i))\sqrt{[x'(\tau_i)]^2+[y'(\tau_i)]^2}\,\Delta t_i = \int_a^b \rho(x(t), y(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt,$$

$$\lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n} x(\tau_i)\rho(x(\tau_i), y(\tau_i))\sqrt{[x'(\tau_i)]^2+[y'(\tau_i)]^2}\,\Delta t_i = \int_a^b x(t)\rho(x(t), y(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt,$$

$$\lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n} y(\tau_i)\rho(x(\tau_i), y(\tau_i))\sqrt{[x'(\tau_i)]^2+[y'(\tau_i)]^2}\,\Delta t_i = \int_a^b y(t)\rho(x(t), y(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt.$$

این سه انتگرال را به صورت خلاصهٔ

$$\int_C \rho(x, y)\,ds, \qquad \int_C x\rho(x, y)\,ds, \qquad \int_C y\rho(x, y)\,ds$$

نشان داده ، و معمولا " *انتگرالهای خط* ، یا به‌طور دقیقتر ، انتگرالهای خـط در امتـداد منحنی C *نسبت به طول قوس* s می‌نامند[1] . برای درک نمادگذاری ، به یاد آورید که

$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$$

دیفرانسیل تابع طول قوس

$$s = s(t) = \int_a^t \sqrt{[x'(u)]^2+[y'(u)]^2}\,du$$

است ، که طول قوس C با نقطهٔ شروع ثابت $P(a) = (x(a), y(a))$ و نقطـهٔ پـایان متغیر

---

۱ . نام بهتر " *انتگرالهای منحنی‌الخط* " است ؛ یعنی ، انتگرالها در امتداد منحنیها . نوع دیگری انتگرال خط وجود دارد ، نسبت به مختصات x و y ، که در بخش ۱۵ . ۱۰ معرفی خواهد شد .

$P(t)=(x(t), y(t))$ را به ما می‌دهد. عبارات مربوط به مختصات $\bar{x}$ و $\bar{y}$ مرکز جرم سیم خمیدهٔ C با تابع چگالی $\rho=\rho(x, y)$ برحسب انتگرالهای خط به شکل فشردهٔ زیر درمی‌آیند:

$$\bar{x}=\frac{\int_C x\rho\, ds}{\int_C \rho\, ds}, \qquad \bar{y}=\frac{\int_C y\rho\, ds}{\int_C \rho\, ds}. \tag{۱}$$

البته، انتگرال $\int_C \rho\, ds$ در هر دو مخرج جرم کل M سیم است. لذا، می‌توان فرمولهای (۱) را به‌طور فشرده‌تر زیر نوشت:

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\int_C x\rho\, ds, \qquad \bar{y}=\frac{1}{M}\int_C y\rho\, ds.$$

اگر سیم همگن باشد، چگالی ρ ثابت است. در این صورت، فرمولهای (۱) فوراً به‌صورت زیر ساده می‌شوند:

$$\bar{x}=\frac{\int_C x\, ds}{\int_C ds}, \qquad \bar{y}=\frac{\int_C y\, ds}{\int_C ds}.$$

اما $\int_C ds=L$، که در آن L طول C است؛ و لذا،

$$\bar{x}=\frac{1}{L}\int_C x\, ds, \qquad \bar{y}=\frac{1}{L}\int_C y\, ds \qquad (\text{چگالی ثابت}) \tag{۲}$$

در این حالت مرکز جرم **مرکزگون** نام دارد، و صرفاً یک مفهوم هندسی است. لذا، از مرکزگون منحنی C صحبت می‌کنیم، که لازم نیست سیم جرمدار تصور شود.

مثال ۱. فرض کنید C منحنی زیر باشد:

$$x=\cos t, \qquad y=\sin t \qquad (0\le t\le \pi/2),$$

یعنی، قوسی از دایرهٔ یکه که در ربع اول قرار دارد. مرکز جرم یک سیم به شکل C را در صورتی بیابید که تابع چگالی آن $\rho(x, y)=x$ باشد.

حل. در اینجا داریم

$$ds=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\, dt=\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}\, dt=dt,$$

و درنتیجه، بنابر (۱)،

$$\bar{x} = \frac{\int_C x^2\,ds}{\int_C x\,ds} = \frac{\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt}{\int_0^{\pi/2} \cos t\,dt}, \qquad \bar{y} = \frac{\int_C yx\,ds}{\int_C x\,ds} = \frac{\int_0^{\pi/2} \sin t \cos t\,dt}{\int_0^{\pi/2} \cos t\,dt}.$$

با محاسبهٔ انتگرالها، معلوم می‌شود که

$$\int_0^{\pi/2} \cos t\,dt = \sin t\Big|_0^{\pi/2} = 1,$$

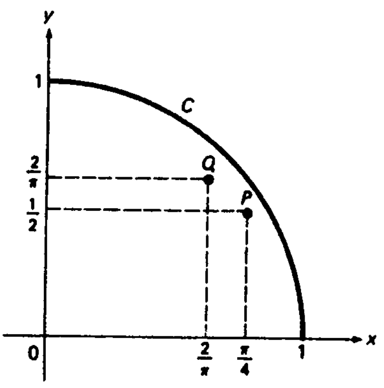
$$\int_0^{\pi/2} \sin t \cos t\,dt = \frac{1}{2}\sin^2 t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2},$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)\,dt = \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4},$$

و لذا،

$$\bar{x} = \frac{\pi}{4}, \qquad \bar{y} = \frac{1}{2}.$$

بنابراین، مرکز جرم سیم نقطهٔ $P = (\pi/4, 1/2)$ نموده شده در شکل ۲۷ است. توجه کنید که مرکز جرم روی‌سیم واقع نیست (بندرت واقع است). برای $\bar{x} > \bar{y}$ دلیل فیزیکی بیاورید.



شکل ۲۷

مثال ۲. فرض کنید C همان قوس مستدیر مثال قبل باشد. مرکز گون C را پیدا کنید.

حل. قوس به طول $\pi/2$ است؛ و لذا، طبق (۲)،

$$\bar{x} = \frac{1}{L}\int_C x\,ds = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos t\,dt = \frac{2}{\pi}\sin t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi},$$
$$\bar{y} = \frac{1}{L}\int_C y\,ds = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin t\,dt = -\frac{2}{\pi}\cos t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}.$$

پس مرکز گون قوس نقطهٔ $Q = (2/\pi, 2/\pi)$ شکل ۲۷ می‌باشد. چرا انتظار $\bar{y} = \bar{x}$ می‌رود ؟

اگر C یک منحنی فضایی به معادلات پارامتری

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t) \qquad (a \le t \le b)$$

باشد، فرمولهای (۱) و (۲) را می‌توان با $\rho = \rho(x, y, z)$ و

$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,dt$$

به کار برد، ولی در اینجا (به آسانی می‌توان ثابت کرد) فرمول اضافی

$$\bar{z} = \frac{\int_C z\rho\,ds}{\int_C \rho\,ds} = \frac{1}{M}\int_C z\rho\,ds$$

برای مختص z مرکز جرم وجود دارد، که در صورت ثابت بودن ρ به شکل

$$\bar{z} = \frac{1}{L}\int_C z\,ds$$

درمی‌آید.

مثال ۳. فرض کنید C منحنی

$$x = \cos t, \qquad y = \sin t, \qquad z = t \qquad (0 \le t \le \pi)$$

باشد؛ یعنی، نیمدور یک مارپیچ مستدیر به شعاع یک و پای 2π (ر.ک. مثال ۲، صفحهٔ ۱۱۷۵). مرکز گون C را پیدا کنید.

حل. چون

$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,dt = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1}\,dt = \sqrt{2}\,dt,$$

منحنی C به طول $L = \int_0^\pi \sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}\pi$ می‌باشد. لذا، مختصات مرکز گون عبارتند از

$$\bar{x} = \frac{1}{L}\int_0^\pi x\,ds = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos t\,dt = \frac{1}{\pi}\sin t\Big|_0^\pi = 0,$$

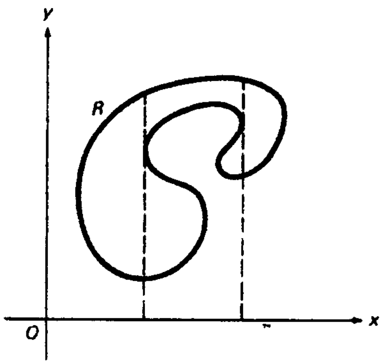
$$\bar{y} = \frac{1}{L}\int_0^{\pi} y\,ds = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t\,dt = -\frac{1}{\pi}\cos t\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi},$$
$$\bar{z} = \frac{1}{L}\int_0^{\pi} z\,ds = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\,dt = \frac{1}{2\pi}t^2\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

مقادیر $\bar{x}$ و $\bar{z}$ را می‌توان از تقارن C ، بدون محاسبه ، حدس زد (بیشترتوضیح دهید) .

قضایای پاپوس. بررسی مرکز گونها را ادامه داده ، یک جفت قضیهٔ مرتبط ثابت می‌کنیم که صورتهای جدید نتایجی هستند که از قدیم معلوم بوده‌اند . در واقع ، آنها را می‌توان در کتاب هفتم ریاضیدان بزرگ یونان ، پاپوس اسکندری ، که حوالی 320 بعداز میلاد نوشته‌شده است یافت .

قضیهٔ ۶ (قضیهٔ پاپوس برای یک جسم دوار) . *فرض‌کنیم T جسم حاصل از دوران ناحیهٔ مسطح R به مساحت A حول محوری در صفحهٔ آن بوده ، و محور از هیچ نقطهٔ درونی R نگذشته باشد . دراین صورت ، V ، یعنی حجم T ، مساوی‌است با حاصلضرب A در مسافت پیموده شده توسط مرکز گون C .*

برهان . بی‌آنکه به کلیت خللی وارد شود ، می‌توان فرض‌کرد R در نیمهٔ بالایی صفحهٔ xy واقع بوده و محور x محور دوران آن باشد . همچنین ، فرض‌کنیم (برای تمام نواحی آمده در مسائل عملی برقرار است) ناحیهٔ R به‌طور قائم ساده باشد یا آنکه بتوان آن‌را با رسم خطوطی موازی محور y ، مثل شکل ۲۸ ، به تعدادی متناهی ناحیهٔ به‌طور قائم ساده افراز کرد . فرض‌کنیم R به‌طور قائم ساده‌باشد ؛ درنتیجه ، $R = \{(x, y): a \le x \le b, g(x) \le y \le f(x)\}$



شکل ۲۸

که در آن توابع f و g بر $[a,b]$ پیوسته و نامنفی‌اند . در این صورت ، طبق فرمول (۲) ، صفحهٔ ۷۱۲ ، جسم T حاصل از دوران R حول محور x به حجم

$$V = \pi \int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}\, dx \tag{۳}$$

خواهد بود . ولی مختص y مرکزگون R عبارت است از

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \iint_R y\, dA = \frac{1}{A} \int_a^b dx \int_{g(x)}^{f(x)} y\, dy$$

$$= \frac{1}{A} \int_a^b \left[\frac{1}{2} y^2\right]_{g(x)}^{f(x)} dx = \frac{1}{2A} \int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}\, dx$$

(فرمول(۱۰′) ، صفحهٔ۱۳۶۱، را به یاد آورید) یا معادلاً

$$\int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}\, dx = 2A\bar{y}. \tag{۴}$$

حال با گذاردن (۴) در (۳) نتیجه می‌شود

$$V = A(2\pi\bar{y}), \tag{۵}$$

که در آن $2\pi\bar{y}$ مسافت پیموده شده توسط مرکز گون R در یک دوران حول محور x است . این قضیه را برای حالتی که R به‌طور ساده قائم است ثابت می‌کند .

اگر R به‌طور قائم ساده نباشد ،آن را با رسم خطوطی موازی محور y به زیرناحیه‌های به‌طور قائم سادهٔ $R_1, \ldots, R_n$ افرازمی‌کنیم که مرکز گونهایشان دارای مختصات y ی‌مساوی $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n$ باشند . فرض کنیم A_i مساحت R_i بوده ، و V_i حجم جسم حاصل از دوران R_i حول محور x باشد . در این صورت ، طبق فرمول (۵) ، که بر هر زیر ناحیهٔ R_i اعمال‌شود،

$$V = V_1 + \cdots + V_n = A_1(2\pi\bar{y}_1) + \cdots + A_n(2\pi\bar{y}_n).$$

ولی

$$\bar{y}_i = \frac{1}{A_i} \iint_{R_i} y\, dA \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

و لذا ، به کمک قاعدهٔ (چهار) ، صفحهٔ۱۳۲۳،

$$V = V_1 + \cdots + V_n = 2\pi \iint_{R_1} y\, dA + \cdots + 2\pi \iint_{R_n} y\, dA$$

$$= 2\pi \iint_R y\, dA = 2\pi A \cdot \frac{1}{A} \iint_R y\, dA = A(2\pi\bar{y}),$$

درنتیجه، فرمول (۵) برای تمام ناحیهٔ R برقرار است.

قضیهٔ ۷ (قضیهٔ پاپوس برای سطح دوار). فرض‌کنیم S سطح حاصل از دوران منحنی مسطح سادهٔ C به طول L حول محوری در صفحه‌اش بوده، و C از محور نگذرد. در این صورت، A، یعنی مساحت S، مساوی حاصل ضرب L در مسافت پیموده شده به وسیلهٔ مرکز گون C می‌باشد.

برهان. مجددا"، فرض قرار داشتن C در نیمهٔ بالایی صفحهٔ xy و گرفتن محور x به‌عنوان محور دوران خللی به کلیت وارد نمی‌سازد. فرض کنیم C به معادلات پارامتری‌زیر باشد:

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \qquad (a \le t \le b),$$

که در آنها $x(t)$ و $y(t)$ بر $[a, b]$ به‌طور پیوسته مشتقپذیرند. در این صورت، طبق فرمول (۱) صفحهٔ ۷۵۰،

$$A = 2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt,$$

که آن را می‌توان به طور فشرده‌تر

$$A = 2\pi \int_C y\, ds \tag{۶}$$

و برحسب انتگرال خط نسبت به طول قوس s نوشت. اما، طبق ۲، مختص y مرکز گون C مساوی است با

$$\bar{y} = \frac{1}{L}\int_C y\, ds,$$

یا معادلا"

$$\int_C y\, ds = L\bar{y}. \tag{۷}$$

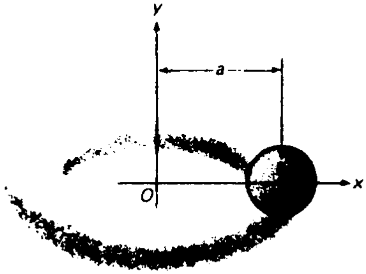
حال با گذاردن (۷) در (۶) نتیجه می‌شود

$$A = L(2\pi\bar{y}),$$

که در آن $2\pi\bar{y}$ فاصلهٔ پیموده شده توسط مرکز گون C است. (در اینجا C هموارفرض شده است، ولی اگر C "قطعه قطعه هموار"، به صورت تعریف شده در صفحهٔ۱۴۳۹، هم‌باشد، قضیه برقرار خواهد ماند).

مثالهای زیر موارد استعمال قضایای پاپوس را توضیح می‌دهند .

مثال ۴ . حجم V چنبرهٔ حاصل از دوران یک قرص مستدیر حول خطی در صفحهٔ آن که با قرص متقاطع نیست را بیابید (ر.ک. شکل ۲۹) .



شکل ۲۹

حل . فرض کنیم r شعاع قرص بوده ، و a فاصلهٔ عمودی مرکز قرص تا محور باشد . واضح‌است که مرکز گون قرص به‌خاطر تقارن مرکز آن بوده ، و مساحت قرص πr^2 است . لذا ، طبق قضیهٔ ۶ ،

$$V = \pi r^2(2\pi a) = 2\pi^2 r^2 a.$$

ما قبلاً ، با استفاده از روش واشرها ، همین جواب را در مثال ۴ ، صفحهٔ ۷۱۴ ، به دست آورده‌ایم .

مثال ۵ . مرکز گون $(\bar{x}, \bar{y})$ ناحیهٔ نیمه مستدیر $x^2 + y^2 \le r^2,\ y \ge 0$ به شعاع r را بیابید .

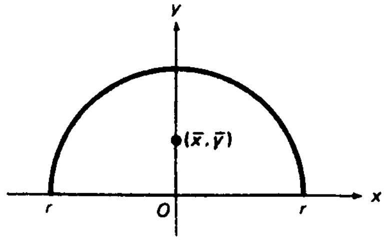
حل . بنابر تقارن ، $\bar{x} = 0$. برای یافتن $\bar{y}$ ، ملاحظه می‌کنیم که ناحیه به مساحت $\frac{1}{2}\pi r^2$ است ، و از دوران آن حول محور x کرهٔ توپری به حجم $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ تولید می‌شود . پس از قضیهٔ ۶ معلوم می‌شود که

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{2}\pi r^2(2\pi \bar{y}),$$

که ایجاب می‌کند که

$$\bar{y} = \frac{4r}{3\pi} \approx 0.42r.$$

در شکل ۳۰ ، جای مرکز گون $(\bar{x}, \bar{y})$ نموده شده است .



شکل ۳۰

مثال ۶. مساحت A ی چنبرهٔ مثال ۴ را بیابید.

حل. بنابر تقارن، مرکز گون دایرهٔ مولد سطح در مرکزش قرار دارد، و طول (محیط) دایره $2\pi r$ است. لذا، طبق قضیهٔ ۷،

$$A = 2\pi r(2\pi a) = 4\pi^2 ra,$$

که در آن a فاصلهٔ عمودی مرکز دایره تا محور دوران می‌باشد. همین جواب در مثال ۲، صفحهٔ ۷۵۳، با محاسبهٔ مستقیم به دست آمد.

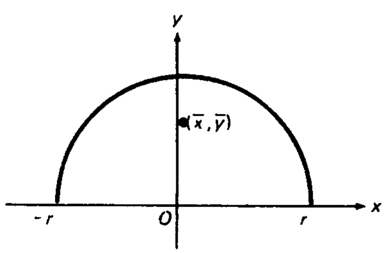
مثال ۷. مرکز گون قوس نیمه مستدیر $x^2 + y^2 = r^2,\ y \geq 0$ به شعاع r را بیابید.

حل. مثل مثال ۵، طبق تقارن داریم $\bar{x} = 0$، ولی در اینجا سروکارمان با منحنی است تا ناحیه. برای یافتن $\bar{y}$، ملاحظه می‌کنیم که از دوران نیمدایره به طول πr حول محور x کره‌ای به مساحت $A = 4\pi r^2$ تولید می‌شود. پس از قضیهٔ ۷ نتیجه می‌شود که

$$A = 4\pi r^2 = \pi r(2\pi \bar{y}),$$

ایجابگر آنکه

$$\bar{y} = \frac{2r}{\pi} \approx 0.64\ r.$$



شکل ۳۱

در شکل ۳۱ ، جای مرکز گون نشان داده شده است . چرا مرکز گون این قوس از مرکز گون ناحیهٔ شکل ۳۰ با قوسی که قسمتی از مرزش است بالاتر است .

مسائل

۱. مرکز گون منحنی

$$x = \cos t, \qquad y = \sin t \qquad (0 \le t \le \theta \le 2\pi)$$

را ، که قوس مستدیری به شعاع یک و زاویهٔ مرکزی θ است ، بیابید .

۲. جرم کل سیمی به شکل منحنی

$$y = \ln x \qquad (\tfrac{1}{2} \le x \le 2)$$

را درصورتی بیابید که تابع چگالی آن $\rho(x, y) = x^2$ باشد .

۳. جرم کل سیمی به شکل منحنی

$$x = 2\cos t, \qquad y = \sin t \qquad (0 \le t \le \pi/2)$$

(یک قوس بیضوی) را درصورتی بیابید که تابع چگالی‌اش $\rho(x, y) = y$ باشد .

۴. مرکز گون منحنی

$$y = \cosh x \qquad (0 \le x \le \ln 2)$$

را پیدا کنید .

جرم کل M و مرکز جرم $\bar{x}$ توزیع جرم روی محور x نامنفی با تابع چگالی داده شده را بیابید .

۵. $\rho(x) = 1/(x^2 + 1)$ ۶. $\rho(x) = e^{-x}$

۷. $\rho(x) = e^{-x^2}$ ۸. $\rho(x) = xe^{-x}$

راهنمایی . کمیات M و $\bar{x}$ به طور طبیعی با انتگرالهای مجازی

$$M = \int_0^{\infty} \rho(x)\,dx, \qquad \bar{x} = \frac{1}{M}\int_0^{\infty} x\rho(x)\,dx$$

تعریف شده‌اند .

۹. به کمک مثال ۵ ، صفحهٔ ۷۴۵ ، مرکز گون قوس ستاره‌گون $(a > 0)$ $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ در ربع اول را پیدا کنید .

۱۰. جرم کل سیمی به شکل منحنی

$$x = 3\cos t, \qquad y = 3\sin t, \qquad z = 4t \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

(یک‌دور ازمارپیچ‌مستدیر) رادرصورتی‌بیابیدکه‌تابع چگالی مساوی $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ باشد .

۱۱ . جرم کل سیمی به شکل منحنی

$$x = t, \quad y = \tfrac{1}{2}t^2, \quad z = \tfrac{1}{3}t^3 \quad (0 \le t \le 1)$$

(یک مکعبی پیچ خورده) را درصورتی بیابید که تابع چگالی‌اش $\rho(x, y, z) = \sqrt{2y}$ باشد .

۱۲ . با استفاده از انتگرالهای مجازی ، مرکز گون منحنی

$$x = e^{-t}\cos t, \quad y = e^{-t}\sin t, \quad z = e^{-t} \quad (0 \le t < \infty)$$

را پیدا کنید .

با استفاده از قضیهٔ ۶ ، حجم جسم حاصل از دوران هر یک از نواحی زیر را حول محور x پیدا نمایید .

۱۳ . ناحیهٔ مسئلهٔ ۹ ، صفحهٔ ۱۳۶۷.

۱۴ تا ۱۶ . نواحی مسائل ۱۴ تا ۱۶ ، صفحهٔ ۱۳۶۸.

۱۷ . حجم جسم حاصل از دوران یک ناحیهٔ مستطیلی به طول 4 و عرض 3 را حول محوری در صفحه‌اش که از رأس P ناحیه گذشته و بر قطر با نقطهٔ انتهایی P عمود است پیدا نمایید .

۱۸ . یک مربع حول محوری در صفحه‌اش که آن را فقط در یکی از رئوس قطع می‌کند دوران یافته است . مساحت سطح دوار حاصل به ازای چه موضعی از محور ماکزیمم است ؟

۱۹ . در مسئلهٔ ۱ ، صفحهٔ ۷۵۷ ، دیدیم که مساحت سطح حاصل از دوران منحنی

$$x = t^3, \quad y = \tfrac{3}{2}t^2 \quad (0 \le t \le 1)$$

حول محور x مساوی است با $A = \frac{6}{5}(\sqrt{2} + 1)\pi$. با استفاده از این و قضیهٔ ۷ ، $\bar{y}$ ، یعنی عرض مرکز گون منحنی ، را بیابید .

۲۰ . در مسئلهٔ ۱۵ ، صفحهٔ ۷۵۷ ، دیدیم که مساحت سطح حاصل از دوران منحنی

$$y = \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{2}x^{-1} \quad (1 \le x \le \sqrt{2})$$

حول محور x برابر است با $A = \frac{47}{72}\pi$. با استفاده از این و قضیهٔ ۷ ، $\bar{y}$ ،یعنی عرض مرکز گون منحنی ، را بیابید .

۲۱ . با دو بار استفاده‌از قضیهٔ ۶ ،مرکز گون ناحیهٔ مثلثی R محدود به‌محورهای‌مختصات و خط

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$$

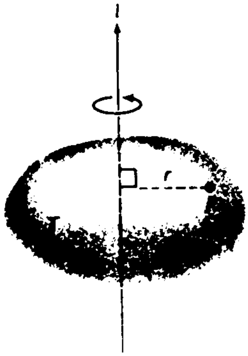
را بیابید .

۲۲ . ستاره‌گون $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ $(a > 0)$ حول‌محوری ماربر نقاط $(a, 0)$ و $(0, a)$ دوران‌می‌کند .

با استفاده از قضایای پاپوس، حجم V ناحیهٔ سه‌بعدی حاصل و مساحت A ی سطحش را بیابید.

۵.۱۴ گشتاورهای ماند

فرض کنیم جسم جامد T با تندی زاویه‌ای ω حول محور l ، و طبق شکل ۳۲، دوران کند.



شکل ۳۲

در این صورت، نقطهٔ P در T با تندی انتقالی $v = r\omega$ حرکت می‌کند، که در آن r فاصلهٔ P تا l است (ر.ک. صفحهٔ ۱۱۰۸). لذا، اگر P را ذره‌ای به جرم m بگیریم، انرژی جنبشی P مساوی است با

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mr^2\omega^2$$

(ر.ک. صفحهٔ ۴۲۹). به‌طورکلی، فرض کنیم $P_1, P_2, \ldots, P_n$ دستگاهی مرکب از n ذره در T به جرمهای $m_1, m_2, \ldots, m_n$ باشد. در این صورت، انرژی جنبشی کل K ی دستگاه، ناشی از دوران حول l ، مساوی است با

$$K = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2,$$

که در آن r_i فاصلهٔ P_i تا l می‌باشد. بنابراین،

$$K = \frac{1}{2} I_l \omega^2,$$

برحسب کمیت

$$I_l = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2, \qquad (1)$$

گشتاور ماند دستگاه **حــــول** l نام دارد. این کمیت در بررسی مسائل دینامیک مربوط به دوران اهمیتی اساسی دارد. اگر جرم به کیلوگرم (kg) و فاصله به متر (m) باشد، واحد فیزیکی گشتاورهای ماند $kg\text{-}m^2$ می‌باشد. مثلاً، گشتاور ماند زمین نسبت به محور قطبی خود تقریباً $8 \times 10^{37}\ kg\text{-}m^2$ است.

حال باید بتوانید طرز تعریف گشتاور ماند تمام جسم T، به عنوان یک ناحیهٔ سه بعدی (نرمال) که بر آن چگالی جرم پیوستهٔ $\rho = \rho(P) = \rho(x, y, z)$ تعریف شده است، را نسبت به l تعریف‌کنید. فرض‌کنیم T طبق معمول (با رسم صفحاتی موازی صفحات مختصات) به n زیر ناحیهٔ $T_1, T_2, \ldots, T_n$ افراز شده باشد، μ را اندازهٔ مش افراز گرفته، و P_i را نقطهٔ دلخواهی در T_i می‌گیریم. دراین‌صورت، T_i را می‌توان ذره‌ای به‌جرم $\Delta m \approx \rho(P_i)\,\Delta V_i$ گرفت که در P_i قرار دارد، و اگر μ کوچک باشد، گشتاور ماند T، با تقریبی مناسب، همان گشتاور ماند دستگاه مرکب از n ذرهٔ $T_1, T_2, \ldots, T_n$ می‌باشد. لذا، گشتاور ماند I_l از T حــــول l را حد گشتاور ماند این دستگاه از ذرات نسبت به l، وقتی $\mu \to 0$، تعــریف می‌کنیم؛ یعنی، به کمک (۱)، قرار می‌دهیم

$$I_l = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} r^2(P_i)\,\Delta m_i = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} r^2(P_i)\rho(P_i)\,\Delta V_i,$$

که در آن $r = r(P) = r(x, y, z)$ فاصلهٔ نقطهٔ P تا محور دوران l می‌باشد. چــون مجموع سمت راست یک مجموع ریمان تابع $r^2(P)\rho(P)$ بر T است، نتیجه می‌شود که

$$I_l = \iiint_T r^2(P)\rho(P)\,dV,$$

یا به‌طور فشرده‌تر،

$$I_l = \iiint_T r^2 \rho\, dV. \qquad (۲)$$

در ورقهٔ R درصفحهٔ xy به‌چگالی $\rho = \rho(x, y)$، البته تعریف مناسب I_l عبارت است از

$$I_l = \iint_R r^2 \rho\, dA, \qquad (۲')$$

که در آن انتگرال سه‌گانه در (۲) باانتگرال مضاعف عوض شده است. در اینجا $r = r(x, y)$ فاصلهٔ نقطهٔ متغیر (x, y) از R تا محور l است.

با انتخابهای متفاوتی از l گشتاورهای ماند مختلفی به‌دست می‌آیند. در مورد جسم

T ، داریم $r=\sqrt{y^2+z^2}$ اگر l محور x باشد ، $r=\sqrt{x^2+z^2}$ اگر l محور y باشد ، و $r=\sqrt{x^2+y^2}$ اگر l محور z باشد ؛ درنتیجه ،

$$I_x=\iiint_T (y^2+z^2)\rho\, dV,$$

$$I_y=\iiint_T (x^2+z^2)\rho\, dV, \tag{۳}$$

$$I_z=\iiint_T (x^2+y^2)\rho\, dV.$$

در مورد ورقهٔ R ، داریم $r=|y|$ اگر l محور x باشد ، $r=|x|$ اگر l محور y باشد ، و $r=\sqrt{x^2+y^2}$ اگر l محور z باشد ؛ درنتیجه ،

$$I_x=\iint_R y^2\rho\, dA,$$

$$I_y=\iint_R x^2\rho\, dA, \tag{۴}$$

$$I_z=\iint_R (x^2+y^2)\rho\, dA.$$

چون $\sqrt{x^2+y^2}$ فاصلهٔ P تا مبداء ، و نیز فاصلهٔ P تا محور z است ، I_z را اغلب با I_O نشان داده و آن را **گشتاور ماند قطبی** می‌نامند (این اصطلاح فقط در مورد ورقه‌ها به کار می‌رود) . توجه کنید که $I_O \doteq I_z=I_x+I_y$.

شعاع چرخش. طبق معمول ،

$$M=\iint_R \rho(x,y)\, dA$$

جرم کل ورقهٔ R بوده ، و

$$M=\iiint_T \rho(x,y,z)\, dV$$

جرم کل جسم T می‌باشد . می‌توان برحسب M نوشت

$$I_x=Mk_x^2,$$

که در آن

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{M}}.$$

لذا، گشتاورماند I_x از R یا T نسبت به محور x همان گشتاورماند "ذرهٔ معادل" به جرم M است که فاصله‌اش تا محور x مساوی k_x می‌باشد. کمیت k_x **شعاع چرخش** R یا T نسبت به محور x نام دارد. به همین نحو، شعاعهای چرخش یک ورقه یا جسم جامد نسبت به محورهای y و z عبارتند از

$$k_y = \sqrt{\frac{I_y}{M}}, \qquad k_z = \sqrt{\frac{I_z}{M}}.$$

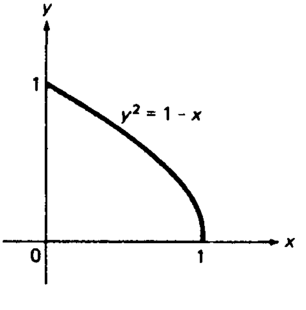
در مورد ورقه، فرمول اخیر صورت دیگر زیر را نیز دارد:

$$k_O = \sqrt{\frac{I_O}{M}},$$

که در آن $k_O = k_z$ **شعاع چرخش قطبی** نامیده می‌شود.

همچنین، می‌توان از گشتاور ماند یا شعاع چرخش یک صفحه یا **ناحیهٔ** جامد، به‌جای یک ورقهٔ مسطح یا جسمی جامد سخن گفت. منظور ما از این یعنی گشتاور ماند یا شعاع چرخش با تابع چگالی $\rho(x, y)$ یا $\rho(x, y, z)$ که متحد 1 بوده و واحد سنجش آن جرم بر واحد مساحت یا حجم می‌باشد.

مثال ۱. گشتاورهای ماند و شعاع چرخش یک صفحه به چگالی $\rho(x, y) = y$ به شکل ناحیهٔ R محدود به محورهای مثبت مختصات و سهمی $y^2 = 1 - x$ (ر.ک. شکل ۳۳) را حول محورهای x و y پیدا نمایید.



شکل ۳۳

حل . بنابر دو فرمول اول (۴) ،

$$I_x = \iint_R y^2 \rho \, dA = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x}} y^3 \, dy = \frac{1}{4} \int_0^1 (1-x)^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \left[x - x^2 + \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{12},$$

$$I_y = \iint_R x^2 \rho \, dA = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x}} x^2 y \, dy = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2(1-x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{24}.$$

چون جرم صفحه مساوی است با

$$M = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x}} y \, dy = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x) \, dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{4},$$

شعاعهای چرخش نظیر عبارتنداز

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{M}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{M}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

مثال ۲ . گشتاورهای ماند و شعاعهای چرخش ناحیهٔ R به مساحت πab محصور به بیضی $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ را حول محورهای x و y بیابید . همچنین ، گشتاور ماند قطبی و شعاع چرخش قطبی R را پیدا نمایید .

حل . در اینجا $\rho(x, y) \equiv 1$ ، و با استفاده از تقارن R ، داریم

$$I_x = \iint_R y^2 \, dA = 4 \int_0^a dx \int_0^{b\sqrt{a^2 - x^2}/a} y^2 \, dy = \frac{4b^3}{3a^3} \int_0^a (a^2 - x^2)^{3/2} \, dx,$$

$$I_y = \iint_R x^2 \, dA = 4 \int_0^a dx \int_0^{b\sqrt{a^2 - x^2}/a} x^2 \, dy = \frac{4b}{a} \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} \, dx.$$

با جانشانی $x = a \cos t$ ، به کمک مسئلهٔ ۱۳ ، صفحهٔ ۶۱۴ ، به دست می‌آوریم

$$I_x = \frac{4ab^3}{3} \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \, dt = \frac{4ab^3}{3} \frac{3\pi}{16} = \frac{\pi ab^3}{4},$$

و

$$I_y = 4a^3b\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\sin^2 t\,dt = 4a^3b\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{\pi a^3 b}{4}$$

(این انتگرال در حل مثال ۵، صفحهٔ ۱۳۳۳، محاسبه شد) . چون جرم ناحیه برابر است با $M = \pi ab$ ، شعاعهای چرخش نظیر عبارتنداز

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{M}} = \frac{b}{2}, \qquad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{M}} = \frac{a}{2}.$$

برای به دست آوردن گشتاور ماند قطبی I_O ، ملاحظه می‌کنیم که

$$I_O = I_z = I_x + I_y = \frac{\pi ab}{4}(a^2 + b^2).$$

لذا ، شعاع چرخش قطبی مساوی است با

$$k_O = \sqrt{\frac{I_O}{M}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

اگر $a = b$ ، بیضی به دایرهٔ $x^2 + y^2 = a^2$ به شعاع a تحویل یافته، و این فرمولها به

$$I_x = I_y = \frac{\pi a^4}{4}, \qquad I_O = \frac{\pi a^4}{2}$$

و

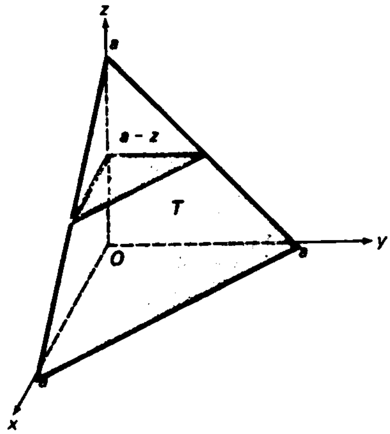
$$k_x = k_y = \frac{a}{2}, \qquad k_O = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

ساده می‌شوند .

مثال ۳ . گشتاورهای ماند و شعاعهای چرخش چهاروجهی T در یکهشت اول و محدود به صفحات مختصات و صفحهٔ $x + y + z = a$ که $a > 0$ (ر.ک. شکل ۳۴) را حول‌محورهای مختصات پیدا نمایید .

حل . با فرض $\rho(x, y, z) \equiv 1$ در (۳) ، معلوم می‌شود که گشتاورهای ماند عبارتنداز

$$I_x = \iiint_T (y^2 + z^2)\,dV, \qquad I_y = \iiint_T (x^2 + z^2)\,dV, \qquad I_z = \iiint_T (x^2 + y^2)\,dV,$$



شکل ۳۴

که در آن ، به دلیل تقارن T ،

$$\iiint_T x^2\,dV = \iiint_T y^2\,dV = \iiint_T z^2\,dV.$$

مقطع عرضی T در z ، یعنی فصل مشترک صفحهٔ مار بر نقطهٔ $(0, 0, z)$و موازی صفحهٔ xy با T ، یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین به طول ساق$a - z$و مساحت$A(z) = \frac{1}{2}(a-z)^2$ است . لذا ، طبق روش مقاطع عرضی ،

$$\iiint_T z^2\,dV = \int_0^a z^2 A(z)\,dz = \frac{1}{2}\int_0^a z^2(a-z)^2\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}a^2z^3 - \frac{1}{2}az^4 + \frac{1}{5}z^5\right]_0^a = \frac{1}{60}a^5.$$

پس نتیجه می‌شود که

$$I_x = I_y = I_z = \frac{1}{30}a^5.$$

جرم چهاروجهی عبارت است از

$$M = \frac{1}{2}\int_0^a (a-z)^2\,dz = \frac{1}{2}\left[a^2z - az^2 + \frac{1}{3}z^3\right]_0^a = \frac{1}{6}a^3,$$

و درنتیجه ، شعاعهای چرخش نظیر عبارتنداز

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{M}} = \frac{a}{\sqrt{5}}, \qquad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{M}} = \frac{a}{\sqrt{5}}, \qquad k_z = \sqrt{\frac{I_z}{M}} = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

به جای شعاع چرخش می‌توان گشتاور ماند را به صورت عبارتی نوشت که در آن جرم کل ورقه یا جسم جامد عاملی از آن باشد. مثلاً، گشتاور ماند قطبی بیضی مثال ۲ را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$I_O = \frac{1}{4} M(a^2 + b^2).$$

به همین نحو، در مثال ۳ می‌توان گشتاورهای ماند را به صورت زیر نوشت:

$$I_x = I_y = I_z = \frac{1}{5} Ma^2.$$

مسائل

۱. یک دستگاه از چهار ذره به جرمهای $m_1 = 4$ ، $m_2 = 3$ ، $m_3 = 1$ ، و $m_4 = 6$ در نقـــاط $P_1 = (-3, 2, 0)$ ، $P_2 = (1, 5, -2)$ ، $P_3 = (0, 4, -1)$ ، و $P_4 = (3, 0, 1)$ تشکیل شده است. گشتاورهای ماند I_x, I_y, I_z و شعاعهای چرخش k_x, k_y, k_z دستگاه را بیابید.

۲. گشتاورهای ماند I_x و I_y ناحیهٔ مثلثی R در ربع اول و محدود به‌محورهای مختصات و خط $3x + 2y = 6$ را بیابید.

۳. گشتاورهای ماند I_x و I_y ناحیهٔ مثلثی R به رئوس $(1, 1)$ ، $(2, 1)$ ، و $(3, 3)$ را بیابید.

۴. فرض کنید R ناحیهٔ محدود به خطوط $x = a$ و $x = b$ و محور x و منحنی

$$y = f(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

باشد، که در آن f بر $[a, b]$ پیوسته و نامنفی است. نشان دهید که گشتاورهای ماند R حول محورهای x و y از فرمولهای زیر به دست می‌آیند:

$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b [f(x)]^3\, dx, \qquad I_y = \int_a^b x^2 f(x)\, dx. \qquad \text{(یک)}$$

۵. گشتاورهای ماند I_x و I_y ورقهٔ مستطیلی R محدود به محورهای‌مختصات و خطوط $x = 1$ و $y = 2$ را درصورتی بیابید که تابع چگالی آن $\rho(x, y) = x^2 + y^2$ باشد.

فرض کنید R یک ورقهٔ مستطیلی به طول a و عرض b باشد. گشتاور ماند R را حول محوری عمود بر R و مار بر

۶. مرکز R

۷. رأس R

پیدا کنید.

۸ . گشتاور ماند ناحیهٔ نیم‌مستدیر $x^2 + y^2 \le a^2, y \ge 0$ را حول قطرش بیابید .

۹ تا ۱۲ . گشتاورهای ماند I_x و I_y هر یک از نواحی مسائل ۹ تا ۱۲ صفحه ۳۶۷۴ را پیدا کنید.

۱۳ . فرض کنید l خط مار بر مبداء با میل ϕ بوده ، و I_l گشتاور ماند ناحیهٔ مسطح l حول R باشد . نشان دهید که ، برحسب گشتاورهای ماند I_x, I_y و کمیت $J = \iint\limits_R xy\, dA$ به نام *حاصل ضرب ماند* ،

$$I_l = I_x \cos^2 \phi - 2J \sin \phi \cos \phi + I_y \sin^2 \phi$$

۱۴ . نشان دهید که مجموع گشتاورهای ماند ناحیهٔ R حول دو محور عمود برهم درصفحهٔ R و مار بر نقطهٔ ثابت O به ازای هر جهت از محورها یکسان است .

راهنمایی . از مسئلهٔ قبل استفاده کنید .

۱۵ . **قضیهٔ محور موازی** را ثابت کنید ، که می‌گوید هرگاه c محوری مار بر مرکـز جرم یک جسم یا ورقه به جرم M بوده و l یک محور موازی c باشد ، آنگاه $I_l = I_c + Md^2$ کـه در آن d فاصلهٔ بین محورها می‌باشد .

۱۶ . گشتاور ماند یک قرص مستدیر به شعاع a و چگالی واحد را حول یک خـط مماس آن بیابید .

راهنمایی . از قضیهٔ محور موازی استفاده کنید .

گشتاورهای ماند I_x ، I_y ، و I_z مکعب مستطیل T محدود به صفحات مختصات و صفحـات $x = a$ ، $y = b$ ، و $z = c$ (a, b, c مثبت اند) را درصورتی بیابید که تابع چگالی به‌صورت‌زیر باشد .

۱۷ . $\rho(x, y, z) \equiv 1$ ۱۸ . $\rho(x, y, z) = x$

۱۹ . $\rho(x, y, z) = xy$ ۲۰ . $\rho(x, y, z) = xyz$

هر جواب را به شکلی بنویسید که در آن جرم کل M به صورت عامل ظاهر شود .

۲۱ . گشتاور ماند ناحیهٔ جامد T محدود به هذلولی گون دوار $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ و صفحات $z = 0$ و $z = 1$ را حول محور z پیدا کنید .

۲۲ . گشتاورهای ماند I_x ، I_y ، و I_z جسمی با چگالی واحد و محدود به‌سهمی‌گون‌هذلولوی $z = xy$ و صفحات $x = 2$ و $y = 3$ در یکهشت اول را یافته ،و هر یک را به‌صورت مضربی از M ، یعنی جرم کل T ، بیان دارید .

فرض کنید T یک مخروط مستدیر قائم توپر با چگالی واحد ، ارتفاع h ، و شعاع قاعـدهٔ a باشد . گشتاور ماند مخروط T را

۲۳ . حول محورش

۲۴ . حول یکی از اقطار قاعده‌اش

بیابید .

۶.۱۴ انتگرالهای مضاعف در مختصات قطبی

از بخش ۱.۱۴ به یاد آورید که انتگرال مضاعف

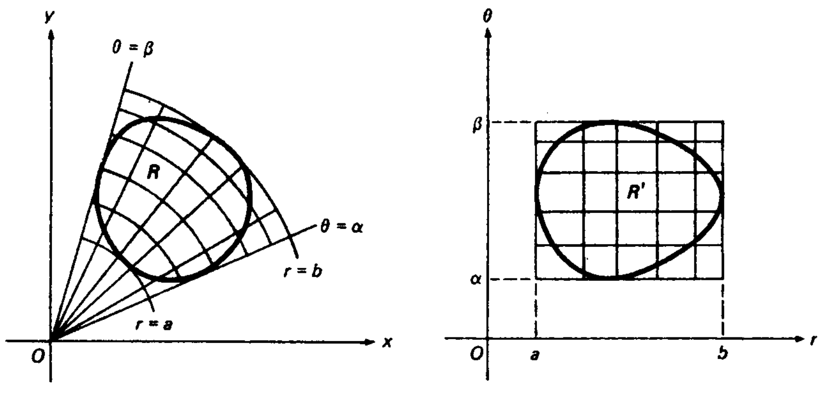
$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy, \tag{1}$$

که در آن R ناحیه‌ای نرمال و f بر R پیوسته است ، برحسب دستگاه مختصات قائم زمینهٔ x و y تعریف شد . اما ممکن‌است این مختصات بهترین مختصات در محاسبهٔ (۱) نباشند . مثلاً ، با انتخاب مبداء و محور x مثبت صفحهٔ xy به عنوان قطب و محور قطبی ، مختصات قطبی r و θ را نیز معرفی می‌کنیم . در این صورت ، توصیف R در مختصات قطبی آسانتراز مختصات قائم است ، نکته‌ای که پس‌از " تبدیل " (۱) به مختصات قطبی می‌تواند مورد بهره‌برداری قرار گیرد . این کار به صورت زیر انجام می‌شود .

فرض‌کنیم دستگاه مختصات قائم دیگری ، در صفحهٔ دیگر ، با طول r و عرض θ داشته باشیم . همانطور که شکل ۳۵ نشان می‌دهد ، R نقش تبدیل مختصات

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta \tag{2}$$

ناحیهٔ R' در صفحهٔ $r\theta$ است ، بدین معنی که هر نقطهٔ (x, y) در R با فرمولهای (۲) به‌نقطهٔ (r, θ) در R' مربوط است . فرض‌کنیم R' در نیمصفحهٔ راست $r \geq 0$ و نوار افقی $0 \leq \theta \leq 2\pi$ واقع باشد . در این صورت ، تناظر بین R' و R داده شده با (۲) جز احتمالاً بر مرز R' یک به یک است (نقاط $(r, 0)$ و $(r, 2\pi)$ صفحهٔ $r\theta$ هر دو به نقطهٔ $(r, 0)$ صفحهٔ xy و خط $r = 0$ کلاً به مبداء xy نگاشته می‌شود) . فرض‌کنیم هر دو ناحیهٔ R و R' نرمال باشند ، که R'



شکل ۳۵

مشمول مستطیل $a \le r \le b, \alpha \le \theta \le \beta$ در صفحهٔ $r\theta$ است . در این صورت ، R مشمول "قطاع طوقی" یا "مستطیل قطبی" واقع درصفحهٔ xy است که با همان نامساویهای $a \le r \le b, \alpha \le \theta \le \beta$ تعریف می‌شود (ر.ک. شکل) . حال قضیهٔ زیر را داریم که انتگرالهای مضاعف روی R را به انتگرالهای مضاعف روی R' ارتباط می‌دهد .

قضیهٔ ۸ (انتگرالهای مضاعف در مختصات قطبی) . هرگاه $f(x, y)$ بر R پیوسته باشد ، آنگاه

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{R'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,dr\,d\theta. \tag{۳}$$

برهان ناقص[۱] . فرض کنیم بازه‌های $[a, b]$ و $[\alpha, \beta]$ توسط نقاط $r_j (j = 0, 1, \ldots, J)$ و $\theta_k (k = 0, 1, \ldots, K)$ با اندازه‌های مش μ_r و μ_θ افراز شده باشند. این بدان معنی است که $a = r_0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_{J-1} < r_J = b$ ، $\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_{K-1} < \theta_K = \beta$ ، و

$$\mu_r = \max\{r_1 - r_0, r_2 - r_1, \ldots, r_J - r_{J-1}\},$$
$$\mu_\theta = \max\{\theta_1 - \theta_0, \theta_2 - \theta_1, \ldots, \theta_K - \theta_{K-1}\}.$$

در این صورت ، خطوط

$$r = r_j \qquad (j = 0, 1, \ldots, J)$$

و

$$\theta = \theta_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, K),$$

که موازی محورهای مختصات صفحهٔ $r\theta$ اند ، R' را به n زیرناحیهٔ بستهٔ $R'_1, R'_2, \ldots, R'_n$ که اغلب مستطیلی بوده و $n \le JK$ تقسیم می‌کنند (معمولاً " $n < JK$) . دوایر و شعاعهای واقع در صفحهٔ xy و با همان معادلات $r = r_j$ و $\theta = \theta_k$ ، R را به n زیر ناحیهٔ بستهٔ $R_1 R_2, \ldots, R_n$ تقسیم می‌کنند که اغلب قطاعهایی طوقی بوده و R_i نقش R'_i تحت تبدیل (۲) است که مختصات قطبی را به مختصات قائم می‌برد . فرض کنیم

$$\mu = \max\{\mu_r, \mu_\theta\},$$

---

۱ . چند نکتهٔ ظریف را ، که در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته ظاهر می‌شوند ، کاملاً " توضیح نداده‌ایم . مثلاً " ، قضیه در صورت یک به یک نبودن تبدیل (۲) برمرز R ، که اغلب چنین است ، نیز برقرار می‌باشد .

و ΔA_i و $\Delta A'_i$ مساحات R_i و R'_i باشند (وجود و ناصفر بودن ΔA_i و $\Delta A'_i$ فرض می‌باشد) . همچنین ، فرض کنیم $P'_i = (r'_i, \theta'_i)$ نقطهء دلخواهی از R_i باشد (هیچ رابطه‌ای بین r'_i, θ'_i و نقاط تقسیم r_j و θ_k وجود ندارد) ، و فرض کنیم $P_i = (p_i, q_i)$ نقش P'_i تحت تبدیل (۲) باشد . در این صورت ،

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(p_i, q_i)\,\Delta A_i \tag{۴}$$

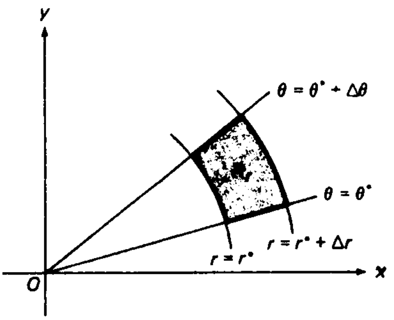
$$= \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(r'_i \cos \theta'_i, r'_i \sin \theta'_i)\,\frac{\Delta A_i}{\Delta A'_i}\,\Delta A'_i.$$

حال فرض کنیم R'_i ناحیهء مستطیلی

$$r^* \le r \le r^* + \Delta r, \qquad \theta^* \le \theta \le \theta^* + \Delta\theta$$

به مساحت $\Delta A'_i = \Delta r\,\Delta\theta$ باشد . در این صورت ، R_i قطاع طوقی شکل ۳۶ به مساحت

$$\Delta A_i = \frac{1}{2}\,[(r^* + \Delta r)^2 - r^{*2}]\,\Delta\theta = \frac{1}{2}\,[2r^*\,\Delta r + (\Delta r)^2]\,\Delta\theta = (r^* + \frac{1}{2}\,\Delta r)\,\Delta r\,\Delta\theta$$



یک قطاع طوقی یا مستطیل قطبی

شکل ۳۶

است ، زیرا ΔA_i تفاضل بین مساحات دو قطاع مستدیر با زاویهء مرکزی $\Delta\theta$ و شعاعهای متفاوت r^* و $r^* + \Delta r$ است . لذا ،

$$\Delta A_i = r_i^*\,\Delta A'_i, \tag{۵}$$

که در آن $r_i^* = r^* + \frac{1}{2}\Delta r$ متوسط شعاعهای r^* و $r^* + \Delta r$ می‌باشد (زیرنویس r_i^* نشان می‌دهد که در ارتباط با ناحیهء R_i است) . واضح است که نقاطی در R'_i به طول r_i^* وجـود دارند ، و چون $P'_i = (r'_i, \theta'_i)$ نقطهء دلخواهی از R'_i است ، می‌توان فرض کرد $r'_i = r_i^*$. دراین

صورت ، (۵) شکل $\Delta A_i = r'_i \Delta A'_i$ یا معادلاً

$$\frac{\Delta A_i}{\Delta A'_i} = r'_i \tag{۶}$$

را به خود می‌گیرد .اگر تمام نواحی R'_i مستطیلی‌باشند ،نواحی نظیر R_i قطاعهایی‌طوقی‌اند، و می‌توان با گذاردن (۶) در (۴) به دست آورد

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(r'_i \cos \theta'_i, r'_i \sin \theta'_i) r'_i \Delta A'_i. \tag{۷}$$

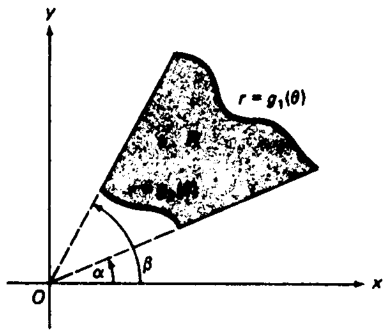
اما مجموع سمت راست یک مجموع ریمان برای تابع پیوستهٔ $f(r \cos \theta, r \sin \theta) r$ بر ناحیهٔ R' از صفحهٔ $r\theta$ است ، که در آن r و θ مختصات قائم می‌باشند . لذا ، طبق قضیهٔ ۱، صفحه ۱۳۲۳، وقتی $\mu \to 0$ ، این مجموع به انتگرال مضاعف $\iint_{R'} f(r \cos \theta, r \sin \theta)\, r\, dA$ نزدیک می‌شود ، که به صورت $\iint_{R'} f(r \cos \theta, r \sin \theta)\, r\, dr\, d\theta$ نیز نوشته شده و فرمول (۳) ثابت می‌گردد . این امر که بعضی‌از نواحی R'_i در حالت‌کلی غیرمستطیلی‌اند اهمیتی ندارد ، زیرا می‌توان نشان داد که اگر جملات نظیر به نواحی غیرمستطیلی را حذف کنیم ، مجموع (۷) به همان حد نزدیک خواهدشد .

چگونه فرمول (۳) را به یاد آوریم . اصل مطلب در برهان قضیهٔ ۸ این است‌که ناحیهٔ R_i شکل ۳۶ ، در صورت کوچک بودن هر دوی Δr و $\Delta\theta$ ، تقریباً "مستطیلی‌بوده و اضلاع مستقیمش به طول Δr و اضلاع خمیده‌اش به طول تقریبی $r\,\Delta\theta$ است، که در آن r مختص شعاعی یک نقطه در R_i است . لذا ، مساحت R_i تقریباً " مساوی است با $r\,\Delta r\,\Delta\theta$. این توضیح خامی است از اینکه چرا وقتی $\mu \to 0$ ، $r\, dr\, d\theta$ در طرف راست‌فرمول (۳) ظاهر می‌شود . این راه خوبی برای به یاد آوردن فرمول نیز هست .

برای محاسبهٔ انتگرال مضاعف

$$\iint_{R'} f(r \cos \theta, r \sin \theta)\, r\, dr\, d\theta,$$

طبعاً " به انتگرالهای مکرر به طور معمول توسل می‌جوییم . مثلاً " ، هرگاه R ناحیهٔ "به‌طور شعاعی سادهٔ " شکل ۳۷ باشد که به دو شعاع $\theta = \alpha, \theta = \beta$ و نمودارهای دو تابع $r = g_1(\theta), r = g_2(\theta)$ محدود شده باشد ، که در آنها $g_1(\theta)$ و $g_2(\theta)$ بر $[\alpha, \beta]$ پیوسته بوده‌و $g_2(\theta) \geq g_1(\theta) \geq 0$ ، آنگاه R' یک ناحیهٔ به‌طور قائم ساده است و

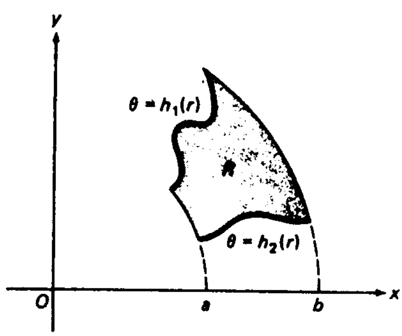


یک ناحیهٔ به‌طور شعاعی ساده

شکل ۳۷

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{R'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$
$$= \int_\alpha^\beta d\theta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr.$$

به همین نحو ، هرگاه R ناحیهٔ " به‌طور زاویه‌ای ساده‌ء " شکل ۳۸ باشد که به دو دایرهٔ $r = a, r = b$ و نمودارهای دو تابع $\theta = h_1(r), \theta = h_2(r)$ محدود است ، که درآنها $h_1(r)$



یک ناحیهٔ به‌طور زاویه‌ای ساده

شکل ۳۸

و $h_2(r)$ بر $[a, b]$ پیوسته بوده و $h_2(r) \ge h_1(r) \ge 0$ ، آنگاه R' یک ناحیهٔ به طور افقی ساده است و

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{R'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$
$$= \int_a^b dr \int_{h_1(r)}^{h_2(r)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,d\theta.$$

با انتخاب $f \equiv 1$ در فرمول (۳)، معلوم می‌شود که مساحت A ی ناحیهٔ به طور شعاعی ساده در شکل ۳۷ مساوی است با

$$A = \iint_{R'} r\,dr\,d\theta = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} r\,dr = \int_\alpha^\beta \left[\frac{1}{2}r^2\right]_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \{[g_2(\theta)]^2 - [g_1(\theta)]^2\}\,d\theta.$$

این با فرمول مربوط به A که در بخش ۱۰.۱۰ به‌دست آمد سازگاری کامل دارد (ر.ک. فرمول (۳)، صفحهٔ ۱۰۲۵، که در آن f و g به جای g_2 و g_1 به کار رفته‌اند). به عنوان تمرین، نشان دهید که مساحت ناحیهٔ به‌طور زاویه‌ای ساده در شکل ۳۸ مساوی است با

$$A = \int_a^b [h_2(r) - h_1(r)]\,r\,dr.$$

مثال ۱. با استفاده از مختصات قطبی، انتگرال

$$I = \iint_R \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

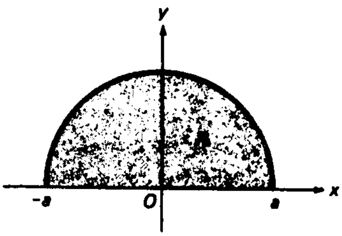
را درصورتی حساب کنید که R ناحیهٔ نیمه‌مستدیر $x^2+y^2 \le a^2, y \ge 0$ به شعاع a باشد (ر.ک. شکل ۳۹).

حل. بنابر قضیهٔ ۸،

$$I = \iint_{R'} \sqrt{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2}\;r\,dr\,d\theta = \iint_{R'} r^2\,dr\,d\theta,$$

که در آن R' مستطیل $0 \le r \le a, 0 \le \theta \le \pi$ در صفحهٔ $r\theta$ است. بنابراین،

$$I = \int_0^\pi \int_0^a r^2\,dr\,d\theta = \left(\int_0^\pi d\theta\right)\left(\int_0^a r^2\,dr\right) = \frac{\pi a^3}{3}.$$

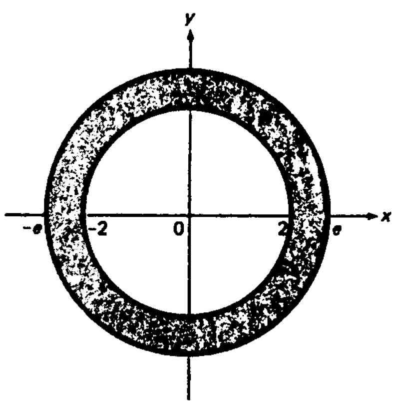


شکل ۳۹

مثال ۲. انتگرال

$$I = \iint_R \ln (x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

را درصورتی حساب کنیدکه R ناحیهٔ طوقی محدود به دوایر $x^2 + y^2 = 4$ و $x^2 + y^2 = e^2$ باشد (ر.ک. شکل ۴۰).



شکل ۴۰

حل. بنابر قضیهٔ ۸،

$$I = \iint_{R'} \ln (r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta) r\, dr\, d\theta = \iint_{R'} (\ln r^2) r\, dr\, d\theta,$$

که در آن R' مستطیل $2 \le r \le e, 0 \le \theta \le 2\pi$ در صفحهٔ $r\theta$ است. بنابراین، باانتگرالگیری جزء به جزء داریم

$$I = \int_0^{2\pi}\int_2^e (\ln r^2)\, r\, dr\, d\theta = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(2\int_2^e \ln r\, d(\tfrac{1}{2}r^2)\right)$$
$$= 4\pi\left[\frac{1}{2}r^2 \ln r - \frac{1}{4}r^2\right]_2^e = \pi(e^2 + 4 - 8\ln 2).$$

مثال ۳. انتگرال مجازی

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$$

را ، که همگرایی‌اش در مثال ۹ ، صفحهٔ ۶۸۳ ، نشان داده شد ، محاسبه نمایید .

حل . ترفند زیر ، که مستلزم انتگرال **مضاعف** در مختصات قطبی است ، به‌ما اجازهٔ محاسبهٔ این انتگرال ظاهرا " خودسر را می‌دهد . ابتدا می‌بینیم که ، طبق تعریف ، $I = \lim_{a\to\infty} I_a$ ، که در آن $I_a = \int_0^a e^{-x^2}\,dx$. چون هر حرف می‌تواند متغیر ظاهری انتگرالگیری باشد ، خواهیم داشت

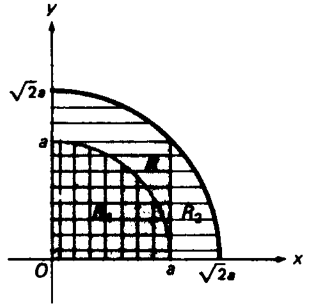
$$I_a^2 = \left(\int_0^a e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_0^a e^{-x^2}\,dx\right)$$
$$= \left(\int_0^a e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_0^a e^{-y^2}\,dy\right) = \iint_R e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy,$$

که در آن R ناحیهٔ مربعی واقع در ربع اول است که با نامساویهای $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le a$ تعریف می‌شود . اما انتگرالده $e^{-(x^2+y^2)}$ مثبت بوده و ناحیهٔ R شامل یکچهارم قرص R_1 است که با نامساویهای $0 \le r \le a,\ 0 \le \theta \le \pi/2$ در مختصات قطبی تعریف شده است ،واین خود مشمول یکچهارم قرص R_2 تعریف شده با نامساویهای $0 \le r \le \sqrt{2}a,\ 0 \le \theta \le \pi/2$ می‌باشد (ر.ک. شکل ۴۱) . بنابراین ،

$$\iint_{R_1} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \le \iint_R e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = I_a^2 \le \iint_{R_2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy,$$

که در آن نامساویها اکید می‌باشند . با تبدیل به مختصات قطبی که درآن $x^2 + y^2 + r^2$ در می‌یابیم که

$$\iint_{R_1} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a e^{-r^2} r\,dr = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^a = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-a^2})$$



شکل ۴۱

(در اینجا مستقیما" به انتگرال مکرر می‌رویم) ، و به همین نحو ،

$$\iint_{R_2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \frac{\pi}{4}(1-e^{-2a^2}),$$

درنتیجه ،

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-a^2}) \le I_a^2 \le \frac{\pi}{4}(1-e^{-2a^2}).$$

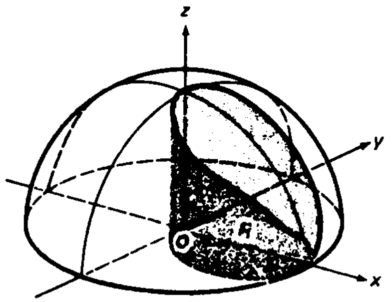
لذا ، I_a^2 بین دو عبارت قرار دارد که با رفتن $a \to \infty$ به حد مشترک $\pi/4$ نزدیک می‌شوند. چون وقتی $a \to \infty$ ، $I_a^2 \to I^2$ ، از قضیهٔ ۱۰ ، صفحهٔ ۱۳۷ (قضیهٔ ساندویچ) معلوم می‌شود که $I^2 = \pi/4$. لذا ، بالاخره ،

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

از مثالهای فوق معلوم می‌شود که اگر انتگرالده یک انتگرال مضاعف شامل عبارت x^2+y^2 یا توانهای آن باشد ، تبدیل به مختصات قطبی معمولا" سودمند است . ذیلا" مثال دیگری از این نوع را می‌آوریم .

مثال ۴ . حجم V ناحیهٔ جامد T جدا شده از کرهٔ جامد $x^2+y^2+z^2 \le a^2$ به وسیلهٔ استوانهٔ مستدیر $(a>0)$ $x^2+y^2 = ax$ را بیابید .

حل . استوانهٔ $x^2+y^2=ax$ صفحهٔ xy را در دایرهٔ $(x-\frac{1}{2}a)^2+y^2=\frac{1}{4}a^2$ به شعاع $\frac{1}{2}a$ و مرکز $(\frac{1}{2}a, 0)$ قطع می‌کند . همانند شکل ۴۲ ، فرض کنیم R ناحیهٔ نیمه‌مستدیر واقع در ربع



شکل ۴۲

اول صفحهٔ xy باشد که به این دایره و محور x مثبت محدود شده است . در این صورت ، بنابرتقارن ، V چهاربرابر حجم بین‌ناحیهٔ به‌طورشعاعی‌سادهٔ R ونمودار $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ (سطح بالایی کره) است ؛ یعنی ،

$$V = 4 \iint_R \sqrt{a^2-x^2-y^2}\, dx\, dy.$$

قسمت نیمه‌مستدیر مرز R به معادلهٔ قطبی $r = a\cos\theta$ $(0 \le \theta \le \pi/2)$ است . لذا ، باتبدیل به مختصات قطبی ، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} V &= 4\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \sqrt{a^2-r^2}\, r\, dr = 4\int_0^{\pi/2}\left[-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{3/2}\right]_0^{a\cos\theta} d\theta \\ &= \frac{4}{3}a^3\int_0^{\pi/2}(1-\sin^3\theta)\,d\theta = \frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta\right) \\ &= \frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\left[\frac{1}{3}\cos^3\theta-\cos\theta\right]_0^{\pi/2}\right) = \frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right), \end{aligned}$$

که در آن بار دیگر مستقیما" به انتگرال مکرر رفته ، مرحلهٔ

$$\iint_R \sqrt{a^2-x^2-y^2}\, dx\, dy = \iint_{R'} \sqrt{a^2-r^2}\, r\, dr\, d\theta$$

مستلزم ناحیهٔ به‌طورقائم سادهٔ $R'=\{(r,\theta): 0\le\theta\le\pi/2, 0\le r\le a\cos\theta\}$ را حذف می‌کنیم .

حجم V را می‌توان با محاسبهٔ انتگرال مستقیم $\iint_R \sqrt{a^2-x^2-y^2}\, dx\, dy$ درمختصات قائم به‌دست‌آورد ،ولی محاسبات خیلی‌مفصل است . این سادگی معادلهٔ‌قطبی $r= a\cos\theta$

برای قسمت نیمه‌مستدیر مرز R ، در مقایسه با معادلهٔ دکارتی $y = \sqrt{ax - x^2}$ ، است که محاسبهٔ V را در مختصات قطبی آسان می‌سازد .

مسائل

انتگرال مضاعف داده شده را با تبدیل مختصات قائم به قطبی حساب کنید .

۱. $\iint\limits_R \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy$ ، که در آن R قرص $x^2 + y^2 \le 9$ است

۲. $\iint\limits_R (x^2 + y^2)\, dx\, dy$ ، که در آن R قرص $x^2 + y^2 \le 4x$ است

۳. $\iint\limits_R \dfrac{dx\, dy}{x^2 + y^2 + 1}$ ، که در آن R ناحیهٔ نیمه‌مستدیر $x^2 + y^2 \le 1, y \ge 0$ است

۴. $\iint\limits_R e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$ ، که در آن R قرص $x^2 + y^2 \le \ln 2$ است

۵. $\iint\limits_R \dfrac{dx\, dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ، که در آن R ناحیهٔ طوقی $1 \le x^2 + y^2 \le 4$ است

۶. $\iint\limits_R \dfrac{\sin\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dx\, dy$ ، که در آن R ناحیهٔ طوقی $\pi^2/16 \le x^2 + y^2 \le \pi^2/9$ است

۷. $\iint\limits_R \cos\sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy$ ، که در آن R ناحیهٔ طوقی $\pi^2 \le x^2 + y^2 \le 4\pi^2$ است

۸. $\iint\limits_R (1 - 3x + 2y)\, dx\, dy$ ، که در آن R ناحیهٔ نیمه‌مستدیر $x^2 + y^2 \le 1, y \le 0$ است

۹. $\iint\limits_R \ln(1 + x^2 + y^2)\, dx\, dy$ ، که در آن R قرص $x^2 + y^2 \le e^2 - 1$ است

۱۰. $\iint\limits_R \arctan(y/x)\, dx\, dy$ ، که در آن R قطاع طوقی $1 \le x^2 + y^2 \le 4, x/\sqrt{3} \le y \le \sqrt{3}x$ است .

انتگرال مکرر داده شده را از مختصات قائم به مختصات قطبی تبدیل کنید . (فرض کنید $f(x, y)$ پیوسته باشد .)

۱۱. $\int_0^1 dy \int_{-y}^{y} f(x, y)\, dx$

۱۲. $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{3}x} f(x^2 + y^2)\, dy$

۱۳ . $\int_0^1 dx \int_0^1 f(\sqrt{x^2+y^2})\,dy$ ۱۴ . $\int_1^4 dy \int_0^{\sqrt{4y-y^2}} f(x,y)\,dx$

با استفاده از انتگرال مضاعف در مختصات قطبی ، مساحات زیر را بیابید .

۱۵ . داخل دلگون $r=a(1-\cos\theta)$ و خارج دایرهٔ $r=a$ ✓

۱۶ . بین دلگون $r=a(1+\cos\theta)$ و دایرهٔ $r=a\cos\theta$ ✓

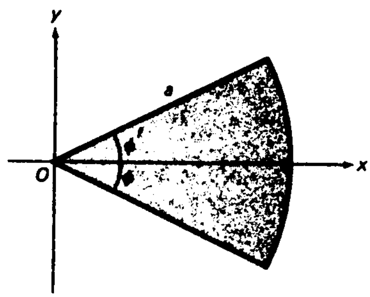
۱۷ . محدود به دایرهٔ $r=\frac{1}{2}$ و منحنیهای $\theta=\sin r$ و $\theta=\cos r$ ✓

۱۸ . محدود به دایرهٔ $x^2+y^2=x$ ، دایرهٔ $x^2+y^2=2x$ ، محور x ، و خط $y=x$ ✓

۱۹ . محدود به دایرهٔ $r=2\sin\theta$ و شعاع $\theta=\phi$ ، داخل گوهٔ $0\le\theta\le\phi\le 2\pi$ ✓

۲۰ . بین مارپیچهای ارشمیدسی $r=\theta$ و $r=2\theta$ به ازای $0\le\theta\le 4\pi$ ✓

۲۱ . یک قطاع مستدیر به شعاع a و زاویهٔ مرکزی 2ϕ به وسیلهٔ محور x نصف شده‌است (ر. ک . شکل ۴۳) . مرکزِ گون $(\bar{x},\bar{y})$ آن را بیابید . ✓



شکل ۴۳

۲۲ . چگالی نقطهٔ متغیر P یک واشر به شعاع داخلی 1cm و شعاع خارجی 3cm با فاصلهٔ P تا مرکز واشر نسبت عکس دارد . جرم کل واشر را درصورتی بیابید که چگالی در لبهٔ خارجی آن $2\ g/cm^2$ باشد . ✓

۲۳ . مرکز گون $(\bar{x},\bar{y})$ ناحیهٔ محصور به دلگون $r=a(1+\cos\theta)$ را بیابید . ✓

۲۴ . مرکز گون $(\bar{x},\bar{y})$ ناحیهٔ محصور به پر رز $r=\sin 2\theta$ در ربع اول را بیابید (ر.ک . شکل ۶۴ ، صفحهٔ ۱۰۰۳) . ✓

۲۵ . گشتاور ماند قطبی ناحیهٔ محصور به لمنیسکات $r^2=a^2\cos 2\theta$ را بیابید . (ر.ک . شکل ۸۲ ، صفحهٔ ۱۰۲۷) . ✓

۲۶ . گشتاورهای ماند ناحیهٔ R محصور به دلگون $r=a(1+\cos\theta)$ را حول محورهای x و y بیابید . همچنین ، گشتاور ماند قطبی R را پیدا نمایید . ✓

با استفاده از انتگرال مضاعف در مختصات قطبی، حجم V ناحیهٔ جامد دادهٔ شدهٔ T را بیابید.

۲۷. T فصل مشترک یک کرهٔ جامد به شعاع R با استوانهٔ مستدیری به شعاع $a < R$ بوده و محور استوانه از مرکز کره گذشته است.

۲۸. T به سهمی گون $az = x^2 + y^2$ و صفحهٔ $z = a > 0$ محدود است.

۲۹. T به کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ و سهمی گون $x^2 + y^2 = 4(1 - z)$ محدود است.

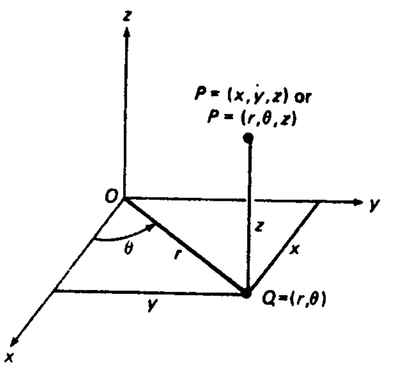
۳۰. T به صفحهٔ xy، استوانهٔ $x^2 + y^2 = x$، و مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ محدود است.

۳۱. T به سهمی گونهای $x^2 + y^2 - z = 0$ و $x^2 + y^2 + 2z = 1$ محدود است.

۳۲. T به مخروط $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ و کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ محدود بوده و خارج مخروط (دو پارچه) قرار دارد.

۷.۱۴ انتگرالهای سه‌گانه در مختصات استوانه‌ای

حال دستگاه مختصاتی در فضا معرفی می‌کنیم که تعمیم طبیعی دستگاه مختصات قطبی در صفحه باشد. فرض‌کنیم نقطهٔ P در فضا به مختصات‌قائم x، y، و z باشد. دراین‌صورت P نیز دارای *مختصات استوانه‌ای* r، θ، و z است که با نگهداشتن z و تعویض x و y با مختصات قطبی r و θ ی نقطهٔ Q که تصویر P روی صفحهٔ xy است به دست می‌آیند (ر.ک. شکل ۴۴)، اگر نقطه‌ای علاوه‌بر مختصات قائم x، y، و z دارای مختصات استوانه‌ای r



شکل ۴۴

θ، و z باشد، علاوه‌بر $P = (x, y, z)$ می‌نویسیم $P = (r, \theta, z)$. مثل بخش قبلی، شرایط $r \geq 0$ و $0 \leq \theta \leq 2\pi$ را اعمال می‌کنیم، ولی z آزاد است هر مقدار در بازهٔ $(-\infty, \infty)$

را بگیرد . از شکل واضح است که نقطه به مختصات استوانه‌ای r ، θ ، و z به‌مختصات‌قائم

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = z \tag{۱}$$

بوده ، و این فرمولها خود ایجاب می‌کنند که

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \ \ (x \neq 0), \qquad z = z. \tag{۲}$$

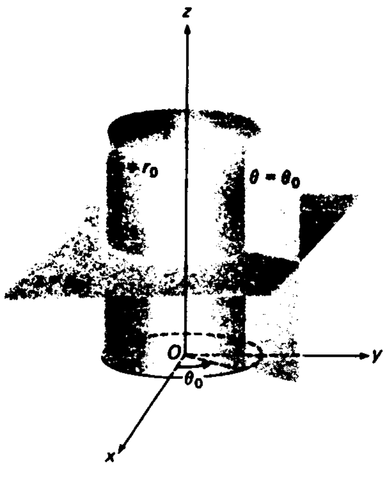
مثال ۱ . بنابر (۱) نقطه به مختصات استوانه‌ای $r = \sqrt{2}, \theta = \pi/4, z = -1$ به مختصات قائم زیر است :

$$x = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} = 1, \qquad y = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} = 1, \qquad z = -1,$$

ولی ، طبق (۲) ، نقطه به مختصات قائم $x = \sqrt{3}, y = 1, z = 2$ به مختصات‌استوانه‌ای‌زیر می‌باشد :

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = \sqrt{4} = 2, \qquad \theta = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}, \qquad z = 2.$$

در مختصات استوانه‌ای ، نمودار معادلهٔ $r = r_0 > 0$ یک استوانهٔ مستدیر به‌شعاع r_0 بوده و محور z محور تقارن آن است ، و نمودار $r = 0$ چیزی جز خود محور z نمی‌باشد .به همین نحو ، نمودار $\theta = \theta_0$ نیمصفحه‌ای است که محور z لبهٔ آن بوده و با صفحهٔ xz زاویهٔ θ_0 می‌سازد ، و نمودار $z = z_0$ صفحهٔ موازی صفحهٔ xy است که از نقطهٔ $(0, 0, z_0)$ در مختصات دکارتی می‌گذرد . توجه کنید که سه سطح $r = r_0$ ، $\theta = \theta_0$ ، و $z = z_0$ به ازای هر $r_0 \neq 0$ ، θ_0 ، و z_0 دو به دو برهم عمودند ، و این امر در شکل ۴۵ مجسم شده است .

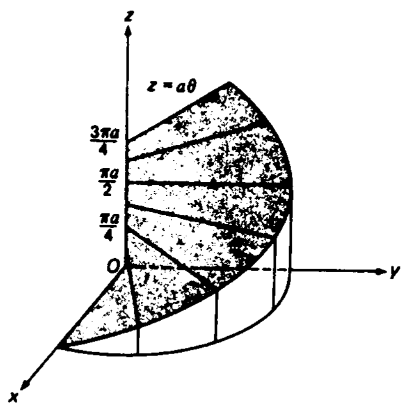


مثال ۲. نمودار معادلهٔ

$$z = a\theta \qquad (a > 0) \tag{۳}$$

را در مختصات استوانه‌ای رسم کنید.

حل. با افزایش θ ، z زیاد می‌شود، ولی مقدار r مشخص نشده است. لذا، r آزاد است تمام مقادیر نامنفی را به ازای هر جفت θ و z بگیرد. از اینرو، نمودار (۳) سطح بی‌کرانی است، به نام ***مارپیچگون*** ، که بخشی از آن در شکل ۴۶ نموده شده است. سطح به شکل



شکل ۴۶

سربالایی مارپیچ است، و توسط شعاعی که یک سرش به محور z وصل شده تولید می‌شود. در واقع، وقتی انتهای شعاع به‌بالای‌محور z حرکت‌کند، خود شعاع حول محور z چرخیده مارپیچگون را جارو خواهد کرد.

اغلب برای محاسبهٔ انتگرال سه‌گانهٔ

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

روی یک ناحیهٔ سه‌بعدی قائم T بهتر است انتگرال را به مختصات استوانه‌ای تبدیل کنیم. این در حالاتی که ناحیهٔ T ***تقارن استوانه‌ای*** دارد، یعنی تقارن حول محوری که می‌توان آن را محور z گرفت، مناسب است. فرض‌کنیم، علاوه‌بر فضای xyz معمولی که در آن هر نقطه مختصات قائم x ، y ، و z و مختصات استوانه‌ای r ، θ ، و z دارد، "فضای $r\theta z$ "

دیگری تعریف کنیم که درآن مختصات r ، θ ، و z مختصات قائم می‌باشند. فرض‌کنیم T'' ناحیه‌ای در فضای $r\theta z$ باشد که T نقش آن تحت تبدیل مختصات (۱) است. در این صورت، مشابه قضیهٔ ۸، صفحهٔ ۱۳۹۲، را داریم که اساساً" به همان ترتیب ثابت می‌شود.

قضیهٔ ۹ (انتگرالهای سه‌گانه در مختصات استوانه‌ای) . هرگاه $f(x, y, z)$ بر T پیوسته باشد، آنگاه

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{T'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\, dr\, d\theta\, dz. \tag{۴}$$

برهان ناقص . فرض کنیم T' در جعبهٔ $a \le r \le b, \alpha \le \theta \le \beta, A \le z \le B$ در فضای $r\theta z$ باشد. همچنین، نقاط $r_j\ (j = 0, 1, \ldots, J)$ و $\theta_k\ (k = 0, 1, \ldots, K)$ افرازهایی ازبازه‌های $[a, b]$ و $[\alpha, \beta]$ با اندازه‌های مش μ_r و μ_θ بوده، و $z_l\ (l = 0, 1, \ldots, L)$ افرازی از $[A, B]$ با اندازهٔ مش μ_z باشد. در این صورت، صفحات $r = r_j$ ، $\theta = \theta_k$ ، و $z = z_l$ ، که موازی صفحات مختصات فضای $r\theta z$ اند، T' را به n زیر ناحیهٔ بستهٔ $T'_1, T'_2, \ldots, T'_n$ تقسیم می‌کنند که اغلب جعبه بوده و $n \le JKL$ (معمولا" $n < JKL$) . استوانه‌ها، نیمصفحه‌ها، و صفحات در فضای xyz باهمین معادلات $r = r_j$ ، $\theta = \theta_k$ ، و $z = z_l$ ، T را به n زیرناحیهٔ بستهٔ $T_1, T_2, \ldots, T_n$ تقسیم می‌کنند که اغلب " گوه‌های استوانه‌ای " از نوعی‌هستند که عنقریب توصیف‌می‌شوند و T_i نقش T'_i تحت‌تبدیل‌مختصات (۱) است که مختصات‌استوانه‌ای را به مختصات قائم می‌برد. فرض کنیم

$$\mu = \max\{\mu_r, \mu_\theta, \mu_z\},$$

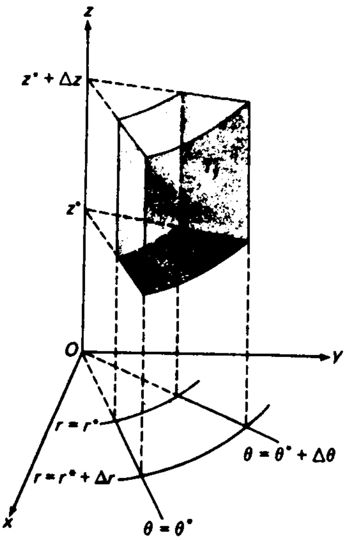
و ΔV_i و $\Delta V'_i$ حجمهای T_i و T'_i باشند. همچنین، $P'_i = (r'_i, \theta'_i, z'_i)$ نقطهٔ دلخواهی از T'_i بوده، و $P_i = (p_i, q_i, s_i)$ نقش P'_i تحت تبدیل (۱) باشد. در این صورت،

$$\begin{aligned} \iiint_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz &= \lim_{\mu\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(p_i, q_i, s_i)\Delta V_i \\ &= \lim_{\mu\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(r'_i\cos\theta'_i, r'_i\sin\theta'_i, z'_i)\frac{\Delta V_i}{\Delta V'_i}\Delta V'_i. \end{aligned} \tag{۵}$$

حال فرض‌کنیم T'_i جعبه یا مکعب مستطیل

$$r^* \le r \le r^* + \Delta r, \qquad \theta^* \le \theta \le \theta^* + \Delta\theta, \qquad z^* \le z \le z^* + \Delta z$$

به حجم $\Delta V'_i = \Delta r\,\Delta\theta\,\Delta z$ باشد. در این صورت، T_i " گوهٔ استوانه‌ای " شکل ۴۷ است. در واقع، T_i یک استوانهٔ قائم به ارتفاع Δz و قطاع طوقی به مساحت $r_i^*\Delta r\,\Delta\theta$ به عنوان



یک گوهٔ استوانه‌ای

شکل ۴۷

قاعده است، که همانند برهان قضیهٔ ۸ $r_i^* = r^* + \frac{1}{2}\Delta r$. لذا، حجم T_i مساوی است با

$$\Delta V_i = r_i^* \Delta r \, \Delta\theta \, \Delta z = r_i^* \Delta V_i' \tag{۶}$$

(مثال ۱، صفحهٔ ۶۹۹، را به یاد آورید) . واضح است که نقاطی در T_i' با r_i^* به عنوان مختص r وجود دارند، و چون $P_i' = (r_i', \theta_i', z_i')$ نقطهٔ دلخواهی از T_i' است، می‌توان فرض کرد $r_i' = r_i^*$. در این صورت، (۶) به شکل $\Delta V_i = r_i' \Delta V_i'$ ، یا معادلاً

$$\frac{\Delta V_i}{\Delta V_i'} = r_i' \tag{۷}$$

درمی‌آید. اگر تمام نواحی T_i' جعبه باشند، درنتیجه نواحی نظیر T_i گوه‌هایی استوانه‌ای‌اند، می‌توان (۷) را در (۵) گذارده به دست آورد

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(r_i' \cos \theta_i', r_i' \sin \theta_i', r_i') r_i' \Delta V_i'$$

$$= \iiint_{T'} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z)\, r\, dr\, d\theta\, dz,$$

و فرمول (۴) ثابت می‌شود. به‌طورکلی، بعضی از نواحی T_i' غیرمستطیلی‌اند ،ولی می‌توان

نشان داد که این اثری بر اعتبار (۴) ندارد.

چگونه فرمول (۴) را به یاد بیاوریم. با نگاهی دیگر به شکل ۴۷ معلوم می‌شود که اگر Δr و $\Delta\theta$ هر دو کوچک باشند، ناحیهٔ T_i تقریباً" مکعب مستطیل بوده و چهار ضلع مستقیمش به طول Δr و چهار تا به طول Δz، و چهار ضلع خمیده‌اش به طول تقریبی $r\,\Delta\theta$ اند، که در آن r مختص شعاعی نقطهٔ دلخواهی در T_i است. لذا، حجم T_i تقریباً" مساوی $r\,\Delta r\,\Delta\theta\,\Delta z$ می‌باشد. این امر ظاهرشدن $r\,dr\,d\theta\,dz$ در سمت راست فرمول (۴) پس از گرفتن حد وقتی $\mu \to 0$ را توضیح داده، و نیز راهی برای یادآوردن فرمول را به ما نشان می‌دهد.

برای محاسبهٔ انتگرال سه‌گانهٔ

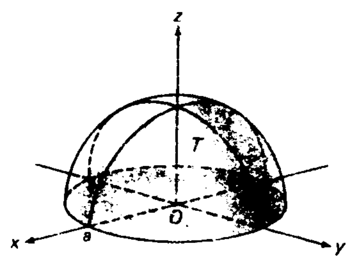
$$\iiint\limits_{T'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\, dr\, d\theta\, dz$$

به انتگرالهای مکرر به‌شیوه‌ای آشنا متوسل می‌شویم؛ این امر در مثالهای زیر شرح داده‌شده است.

مثال ۳. با استفاده از مختصات استوانه‌ای، مرکز گون $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ نیمکرهٔ توپر T به شعاع a را بیابید.

حل. فرض کنیم T از بالا به کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ و از پایین به صفحهٔ $z = 0$، مثل شکل ۴۸، کراندار باشد. در این صورت، طبق تقارن، $\bar{x} = \bar{y} = 0$، و

$$\bar{z} = \frac{1}{V}\iiint\limits_{T} z\, dx\, dy\, dz,$$



شکل ۴۸

که در آن $V = \frac{2}{3}\pi a^3$ حجم نیمکره می‌باشد. با استفاده از قضیهٔ ۹ برای تبدیل به‌مختصات استوانه‌ای، داریم

$$\iiint_T z\, dx\, dy\, dz = \iiint_{T'} zr\, dr\, d\theta\, dz,$$

که در آن T' ناحیه‌ای در فضای $r\theta z$ است که به صفحات $r = 0,\ \theta = 0,\ \theta = 2\pi,\ z = 0$ و استوانهٔ $r^2 + z^2 = a^2$ محدود شده است (به یاد آورید که در هر دو مختصات قطبی و استوانه‌ای، $x^2 + y^2 = r^2$). با رفتن به انتگرال مکرر، داریم

$$\iiint_{T'} zr\, dr\, d\theta\, dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a dr \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} rz\, dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r\left[\frac{1}{2} z^2\right]_0^{\sqrt{a^2-r^2}} dr$$

$$= \pi \int_0^a r(a^2 - r^2)\, dr = \pi\left[\frac{1}{2} a^2 r^2 - \frac{1}{4} r^4\right]_0^a = \frac{1}{4}\pi a^4,$$

و لذا،

$$\bar{z} = \frac{\frac{1}{4}\pi a^4}{\frac{2}{3}\pi a^3} = \frac{3}{8} a.$$

لذا، مرکز گون T عبارت است از $(0, 0, \frac{3}{8}a)$.

مثال ۴. فرض کنید T یک استوانهٔ مستدیر توپر همگن به شعاع a و ارتفاع h باشد. گشتاور ماند T را حول محورش بیابید.

حل. فرض کنیم T به سطح استوانه‌ای $x^2 + y^2 = a^2$ و صفحات $z = 0$ و $z = h$، مثل شکل ۴۹، محدود شده باشد، و ρ چگالی ثابت T باشد. در این صورت، با رفتن به انتگرال مکرر، معلوم می‌شود که گشتاور ماند استوانهٔ T حول محورش (محور z) مساوی است با

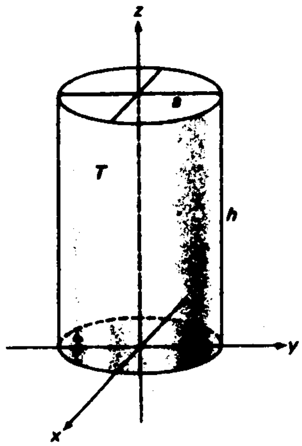
$$I_z = \iiint_T (x^2 + y^2)\rho\, dV = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a (\rho r^2) r\, dr$$

$$= \rho\left(\int_0^h dz\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^a r^3\, dr\right) = 2\pi\rho h\left[\frac{1}{4} r^4\right]_0^a = \frac{1}{2}\rho\pi a^4 h.$$

چون جرم کل T مساوی است با $M = \rho\pi a^2 h$، I_z را می‌توان به شکل فشردهٔ

$$I_z = \frac{1}{2} M a^2$$

نوشت .



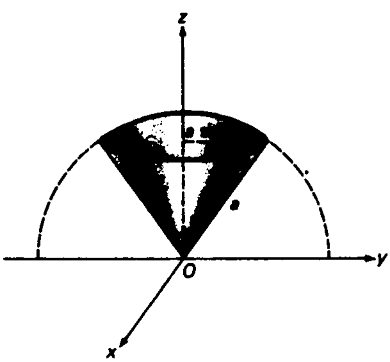
شکل ۴۹

مثال ۵. حجم V ناحیهٔ توپر T را که از بالا به کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ به شعاع a و از پایین به مخروط

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \cot \phi \qquad (0 < \phi < \pi),$$

که مولدهایش با محور z زاویهٔ ϕ می‌سازند، پیدا نمایید .

حل. ناحیهٔ T به ازای مقادیر کوچک زاویهٔ ϕ به شکل مخروط بستنی پر، مثل شکل ۵۰، است . در مختصات استوانه‌ای ، کره و مخروط به معادلات $r^2 + z^2 = a^2$ و $z = r \cot \phi$ بوده ، و از شکل واضح است که دو سطح به ازای $r = a \sin \phi$ همدیگر را قطع می‌کنند . بنا



شکل ۵۰

براین، به کمک قضیهٔ ۹،

$$V = \iiint_T dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a\sin\phi} dr \int_{r\cot\phi}^{\sqrt{a^2-r^2}} r\,dz$$
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a\sin\phi} (\sqrt{a^2-r^2} - r\cot\phi)\, r\,dr$$
$$= 2\pi\left[-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{3/2} - \frac{1}{3}r^3\cot\phi\right]_0^{a\sin\phi}$$
$$= \frac{2}{3}\pi a^3(1-\cos^3\phi - \sin^3\phi\cot\phi)$$
$$= \frac{2}{3}\pi a^3[1-\cos^3\phi - (1-\cos^2\phi)\cos\phi].$$

لذا، مآلا" داریم

$$V = \frac{2}{3}\pi a^3(1-\cos\phi). \tag{۸}$$

بخصوص، از (۸) نتیجه می‌شود که اگر $\phi = \pi/2$، $V = \frac{2}{3}\pi a^3$، و این چیزی است که انتظار آن می‌رفت (چرا؟).

مسائل

مختصات قائم نقطه به مختصات استوانه‌ای داده شده را بیابید.

۱. $r = \sqrt{3}, \theta = 5\pi/6, z = 0$ ✓ ۲. $r = 1, \theta = 1, z = 1$ ✓

۳. $r = 10, \theta = \pi, z = 2\pi$ ✓ ۴. $r = 0, \theta = 9\pi/10, z = -5$ ✓

مختصات استوانه‌ای نقطه به مختصات قائم داده شده را بیابید.

۵. $x = -4, y = 4, z = -2$ ✓ ۶. $x = 3, y = \sqrt{3}, z = 13$ ✓

۷. $x = 1, y = -\sqrt{3}, z = -6$ ✓ ۸. $x = -5, y = -12, z = 0$ ✓

معادلهٔ داده شده را از مختصات قائم به استوانه‌ای تبدیل کنید.

۹. $x^2 - y^2 = z^2$ ✓ ۱۰. $x + y + z = 8$ ✓

۱۱. $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ ✓ ۱۲. $z = 2xy$ ✓

انتگرال سه‌گانهٔ داده شده را با تبدیل مختصات قائم به استوانه‌ای حساب کنید.

۱۳. $\iiint_T (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$ ✓، که در آن T ناحیهٔ توپر محدود به استوانهٔ $x^2 + y^2 = 2x$

و صفحات $z=0$ و $z=2$ است.

۱۴. $\iiint_T xz\,dx\,dy\,dz$ ، که در آن T ناحیهٔ توپر واقع در یکهشت اول و محدود به‌سهمی گون $z=x^2+y^2$ و صفحات $x=0$ ، $y=0$ ، و $z=4$ است.

۱۵. $\iiint_T (x^2+y^2+z^2)^2\,dx\,dy\,dz$ ،که درآن T ناحیهٔتوپر محدودبه‌استوانهٔ $x^2+y^2=3$ و صفحات$z=\pm 1$است.

۱۶. $\iiint_T x^2y^2\,dx\,dy\,dz$ ، که در آن T ناحیهٔ توپر محدود به مخروط$z=\sqrt{x^2+y^2}$وصفحهٔ $z=a>0$ است.

۱۷. $\iiint_T y^2z\,dx\,dy\,dz$ ،که‌درآن T ناحیهٔ توپری است که از بالا به کرهٔ $x^2+y^2+z^2=4$ و از پایین به مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ محدود است.

۱۸. $\iiint_T (x^3+y^3)\,dx\,dy\,dz$ ، که در آن T ناحیهٔ توپر محدود به استوانهٔ $x^2+y^2=y$ سهمی‌گون $z=x^2+y^2$ ، و صفحهٔ xy است.

حجم V ناحیهٔ توپر T داده شده را با استفاده از مختصات استوانه‌ای پیدا نمایید.

۱۹. T به صفحهٔ xy ، استوانهٔ $x^2+y^2=a^2$ به شعاع a ، و اولین دور مارپیچ گون $z=a\theta$ $(0\le\theta\le 2\pi)$ محدود است.

۲۰. T به صفحهٔ xy ، استوانهٔ $x^2+y^2=4$ ، و صفحهٔ $x+y+z=6$ محدود است.

۲۱. T به استوانهٔ مستدیر $x^2+y^2=2x$ و استوانهٔ سهموی $z^2=4x$ محدود است.

۲۲. T به هذلولی گون دوار یک پارچهٔ $x^2+y^2-z^2=1$ و کرهٔ $x^2+y^2+z^2=3$ محدود بوده و شامل مبداء است.

۲۳. مرکز گون ناحیهٔ توپر T مثال ۴ ،صفحهٔ ۱۳۹۹، را به کمک مختصات استوانه‌ای‌بیابید.

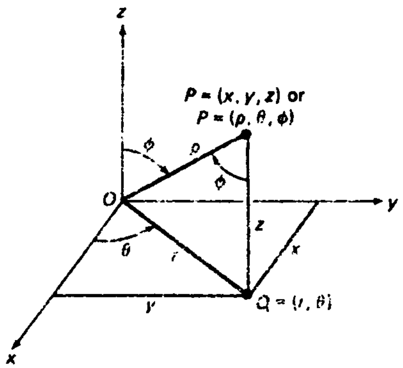
۲۴. با استفاده از مختصات استوانه‌ای ، جوابهای دیگر مثالهای ۴ و ۵ ، صفحات ۱۳۶۳ و ۱۳۶۶، را به دست آورید.

۲۵. گشتاور ماند یکااستوانهٔ مستدیر توپر همگن به‌جرم M ، شعاع a ،و ارتفاع h را حول یکی از اقطار قاعده‌اش بیابید. با استفاده از قضیهٔ محور موازی (ر.ک. مسئلهٔ ۱۵ ، صفحهٔ ۱۳۹۰) ، گشتاور ماند استوانه را حول محوری مار بر مرکز جرم آن و عمود بر محور تقارنش پیدا نمایید.

۲۶. گشتاور ماند یک استوانهٔ مستدیر توخالی همگن به جرم M ،شعاع داخلی a_1 ، و شعاع خارجی a_2 را حول محور تقارنش پیدا نمایید. همچنین، گشتاور ماند یک لولهٔ مستدیر با جدارهٔ نازک به جرم M و شعاع a را حول محور تقارنش پیدا نمایید.

۸.۱۴ انتگرالهای سه‌گانه در مختصات کروی

همانطور که مختصات استوانه‌ای در مسائلی که اجسام تقارن استوانه‌ای دارند مفید است، مختصاتی که اینک معرفی می‌شوند معمولاً بهترین مختصات در رابطه با اشیایی مانند گویها و غشاءهای کروی ،که **تقارن کروی** دارند، یعنی تقارن نسبت به یک نقطه در فضا که می‌توان آن را مبداء گرفت دارند، می‌باشند. فرض‌کنیم P به مختصات قائم x ، y ، و z بوده، $\rho = |OP|$ فاصلهٔ بین مبداء O و P باشد، و زاویهٔ ϕ از محور z مثبت به OP (روبه‌پایین) سنجیده شود (ر.ک. شکل ۵۱) .همچنین، فرض کنیم θ همان زاویه در مختصات‌استوانه‌ای باشد؛ یعنی، زاویه از محور x مثبت به OQ باشد، که در آن Q تصویر P روی صفحهٔ xy است (θ در جهت خلاف عقربه‌های ساعت توسط ناظری روی صفحهٔ xy که از طرف مثبت z به پایین نگاه می‌کند سنجیده می‌شود) . در این صورت، گوییم نقطهٔ P به **مختصات کروی** ρ ، θ ، و ϕ است و، علاوه‌بر $P = (x, y, z)$ ، می‌نویسیم $P = (\rho, \theta, \phi)$. مختصات شعاعی ρ را می‌توان‌هرمقدار در بازهٔ $[0, \infty)$ گرفت ،ولی‌ماشرطهای $0 \le \theta \le 2\pi$ و $0 \le \phi \le \pi$ را بر مختصات زاویه‌ای θ و ϕ می‌گذاریم. با پیروی از معانی جغرافیایی آنها، θ را *طول جغرافیایی* و ϕ را *متمم عرض جغرافیایی* می‌نامیم .چون مختص شعاعی با ρ نموده‌شده‌است،



شکل ۵۱

در مسائل مربوط به توزیعهای متقارن کروی جرم باید از علامت دیگری برای تابع چگالی، مثلاً δ ، استفاده نمود.

با بررسی شکل معلوم می‌شود که نقطه به مختصات کروی ρ ، θ ، و ϕ دارای مختصات استوانه‌ای r ، θ ، و z است ، که

$$r = \rho \sin \phi, \qquad \theta = \theta, \qquad z = \rho \cos \phi,$$

و درنتیجه ، مختصات قائم زیر را دارد :

$$(۱) \quad x = r \cos \theta = \rho \sin \phi \cos \theta, \qquad y = r \sin \theta = \rho \sin \phi \sin \theta, \qquad z = \rho \cos \phi.$$

به آسانی می‌توان تحقیق کرد که ، بنابر (۱) ،

$$(۲) \quad \begin{aligned} &\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \tan \theta = \frac{y}{x} \qquad (x \neq 0), \\ &\cos \phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \qquad (x^2 + y^2 + z^2 \neq 0). \end{aligned}$$

مثال ۱ . بنابر (۱) ، نقطه به مختصات کروی $\rho = \sqrt{2}, \theta = \pi/3, \phi = \pi/4$ دارای مختصات قائم

$$x = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \qquad y = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$z = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} = 1$$

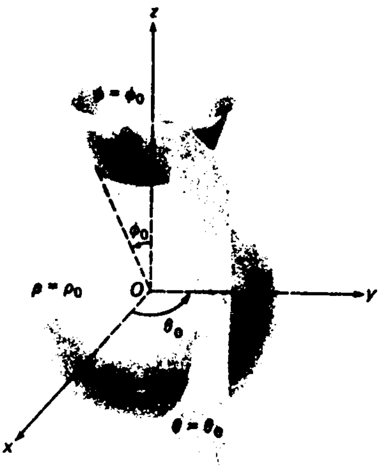
است ولی ، طبق (۲) ، نقطه به مختصات قائم $x = 1, y = -1, z = \sqrt{2}$ دارای مختصات کروی

$$\rho = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2, \qquad \theta = \arctan(-1) + 2\pi = \frac{7\pi}{4},$$

$$\phi = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

می‌باشد (چرا در فرمول دوم 2π اضافه می‌کنیم ؟)

نمودار معادلهٔ $\rho = \rho_0 > 0$ در مختصات کروی کره‌ای به شعاع ρ_0 و مرکز مبداء ، و نمودار $\rho = 0$ فقط خود مبداء می‌باشد . به همین نحو ، نمودار $\theta = \theta_0$ نیمصفحه‌ای است که محور z به عنوان لبه‌اش زاویهٔ θ_0 با صفحهٔ xz می‌سازد ، و نمودار $\phi = \phi_0$ یک پارچه از یک مخروط مستدیر قائم به رأس مبداء و مولدهایی است که با محور z مثبت زاویهٔ ϕ_0 می‌سازد (ر .ک . شکل ۵۲) . توجه کنید که نمودار $\phi = \phi_0$ به محور z مثبت تحویل می‌شود اگر



شکل ۵۲

$\phi_0 = 0$ ، به صفحهٔ xy تحویل می‌شود اگر $\phi_0 = \pi/2$ ، و به محور z منفی بدل می‌شود اگر $\phi_0 = \pi$.

مثال ۲ . معادلهٔ کرهٔ S به معادلهٔ دکارتی

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2az \qquad (a > 0) \tag{۳}$$

را در مختصات کروی بنویسید .

حل . چون (۳) معادل $x^2 + y^2 + (z-a)^2 = a^2$ است ، S کره‌ای به شعاع a وبه‌مرکزنقطهٔ $(0, 0, a)$ از محور z است . با جانشانی از (۱) معلوم می‌شود که (۳) به $\rho^2 = 2a\rho \cos \phi$ یا معادلا "

$$\rho = 2a \cos \phi$$

تبدیل می‌شود (تقسیم بر ρ را توجیه کنید) .

در محاسبهٔ انتگرال سه‌گانهٔ

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

روی ناحیهٔ سه‌بعدی‌نرمال T، درحالاتی که T تقارن کروی دارد ، معمولا " تبدیل‌به‌مختصات

کروی سودمند است . فرض کنیم علاوه‌بر فضای معمولی xyz ، که در آن هر نقطه مختصات قائم x ، y ، و z و مختصات کروی r ، θ ، و ϕ دارد ، " فضای $\rho\theta\phi$ " را نیز معرفی می‌کنیم ، که در آن مختصات ρ ، θ ، و ϕ مختصات قائم می‌باشند . فرض کنیم T' ناحیه‌ای در فضای $\rho\theta\phi$ باشد که T نقش آن تحت تبدیل مختصات (۱) است . در این صورت ، قضیهٔ زیر را داریم که به قضیهٔ ۹ ، صفحهٔ ۱۴۰۶، برای مختصات استوانه‌ای شبیه است .

قضیهٔ ۱۰ (انتگرالهای سه‌گانه در مختصات کروی) . هرگاه $f(x, y, z)$ بر T پیوسته باشد ، آنگاه

$$\iiint_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint_{T'} f(\rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi \sin\theta, \rho \cos\phi)\,\rho^2 \sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi. \qquad (۴)$$

برهان ناقص . فرض کنیم T' در جعبهٔ $a \le \rho \le b, \alpha \le \theta \le \beta,\ A \le \phi \le B$ درفضای $\rho\theta\phi$ باشد . همچنین ، نقاط ρ_j $(j = 0, 1, \ldots, J)$ ، θ_k $(k = 0, 1, \ldots, K)$ ، و ϕ_l $(l = 0, 1, \ldots, L)$ افرازهایی از بازه‌های $[a, b]$ ، $[\alpha, \beta]$ ، و $[A, B]$ با اندازه‌های مش μ_ρ ، μ_θ ، μ_ϕ باشند . در این صورت ، صفحات $\rho = \rho_j$ ، $\theta = \theta_k$ ، و $\phi = \phi_l$ ، موازی صفحات مختصات فضای $\rho\theta\phi$ ، T' را به n زیر ناحیهٔ بستهٔ $T'_1, T'_2, \ldots, T'_n$ تقسیم می‌کنند که اغلب جعبه بوده و $n \le JKL$ (معمولاً " $n < JKL$) . کرات ، نیمصفحه‌ها ، و مخروطها در فضای xyz با همان معادلات $\rho = \rho_j$ ، $\theta = \theta_k$ ، و $\phi = \phi_l$ ، T را به n زیر ناحیهٔ بستهٔ $T_1, T_2, \ldots, T_n$ تقسیم می‌کنند که T_i نقش T'_i تحت تبدیل (۱) است . فرض کنیم

$$\mu = \max\{\mu_\rho, \mu_\theta, \mu_\phi\},$$

و ΔV_i و $\Delta V'_i$ حجمهای T_i و T'_i باشند . همچنین ، فرض کنیم $P'_i = (\rho'_i, \theta'_i, \phi'_i)$ نقطهٔ دلخواهی از T'_i بوده ، و $P_i = (p_i, q_i, s_i)$ نقش P'_i تحت (۱) باشد . در این صورت ،

$$\iiint_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

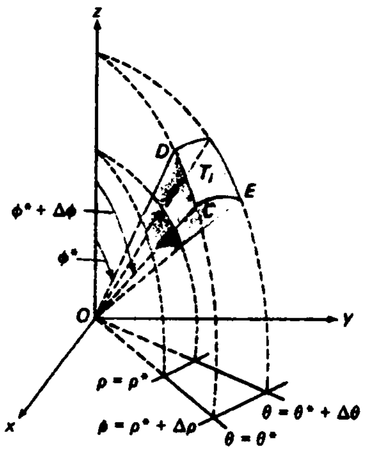
$$= \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(p_i, q_i, s_i)\,\Delta V_i \qquad (۵)$$

$$= \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\rho'_i \sin\phi'_i \cos\theta'_i, \rho'_i \sin\phi'_i \sin\theta'_i, \rho'_i \cos\phi'_i)\frac{\Delta V_i}{\Delta V'_i}\,\Delta V'_i.$$

حال فرض کنیم T'_i جعبهٔ

$$\rho^* \le \rho \le \rho^* + \Delta\rho, \qquad \theta^* \le \theta \le \theta^* + \Delta\theta, \qquad \phi^* \le \phi \le \phi^* + \Delta\phi$$

به حجم $\Delta V'_i = \Delta\rho\,\Delta\theta\,\Delta\phi$ باشد . در این صورت ، T_i " گوهٔ کروی " شکل ۵۳ است که به دو کرهٔ $\rho = \rho^*$ و $\rho = \rho^* + \Delta\rho$ ، دو نیمصفحهٔ $\theta = \theta^*$ و $\theta = \theta^* + \Delta\theta$ ، و دو مخروط



یک گوهٔ کروی

شکل ۵۳

$\phi = \phi^*$ و $\phi = \phi^* + \Delta\phi$ محدود است . لذا ، به کمک مثال ۵ ، صفحهٔ ۱۴۱۰، درمی‌یابیم که

$$\begin{aligned}\Delta V_i &= \frac{2\pi}{3}\frac{\Delta\theta}{2\pi}[(\rho^* + \Delta\rho)^3 - \rho^{*3}][1 - \cos(\phi^* + \Delta\phi) - (1 - \cos\phi^*)] \\ &= -\frac{\Delta\theta}{3}[(\rho^* + \Delta\rho)^3 - \rho^{*3}][\cos(\phi^* + \Delta\phi) - \cos\phi^*].\end{aligned} \tag{۶}$$

اما ، با دو بار استفاده از قضیهٔ مقدار میانگین ،

$$(\rho^* + \Delta\rho)^3 - \rho^{*3} = 3\rho_i^{*2}\,\Delta\rho, \qquad \cos(\phi^* + \Delta\phi) - \cos\phi^* = -\sin\phi_i^*\,\Delta\phi, \tag{۷}$$

که در آن $\rho^* < \rho_i^* < \rho^* + \Delta\rho$ و $\phi^* < \phi_i^* < \phi^* + \Delta\phi$ (زیرنویس کمیات ρ_i^* و ϕ_i^* نشان می‌دهند که با ناحیهٔ T_i در ارتباطند) . با گذاردن (۷) در (۶) ، به‌دست‌می‌آوریم

$$\Delta V_i = \rho_i^{*2}\sin\phi_i^*\,\Delta\rho\,\Delta\theta\,\Delta\phi = \rho_i^{*2}\sin\phi_i^*\,\Delta V'_i. \tag{۸}$$

واضح‌است‌که‌نقاطی در T'_i به ρـمختص ρ_i^* و ϕـمختص ϕ_i^* وجود دارند ، و چون $P'_i = (\rho'_i, \theta'_i, \phi'_i)$ نقطهٔ دلخواهی از T'_i است ، می‌توان فرض کرد $\rho'_i = \rho_i^*$ و $\phi'_i = \phi_i^*$. در این صورت ، (۸)

به شکل $\Delta V_i = \rho_i'^2 \sin \phi_i' \Delta V_i'$ یا معادلاً

$$\frac{\Delta V_i}{\Delta V_i'} = \rho_i'^2 \sin \phi_i' \tag{۹}$$

درمی‌آید. اگر تمام نواحی T_i' جعبه باشند، می‌توان (۹) را در (۵) گذارده به‌دست آورد

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\rho_i' \sin \phi_i' \cos \theta_i', \rho_i' \sin \phi_i' \sin \theta_i', \rho_i' \cos \phi_i') \rho_i'^2 \sin \phi_i' \Delta V_i'$$

$$= \iiint_{T'} f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi \, d\rho\, d\theta\, d\phi,$$

و فرمول (۴) ثابت می‌شود. در حالت کلی، بعضی از نواحی T_i غیرمستطیلی‌اند، ولی می‌توان نشان داد که این خدشه‌ای به اعتبار (۴) وارد نخواهد ساخت.

چگونه فرمول (۴) را به یاد بیاوریم. بررسی شکل ۵۳ نشان می‌دهد که ناحیهٔ T_i درصورت کوچک بودن $\Delta\rho$، $\Delta\theta$، و $\Delta\phi$ تقریباً مکعب مستطیلی است که چهار ضلع مستقیم آن به‌طول $\Delta\rho$، چهار ضلع خمیده‌اش مانند CD به طول تقریبی $\rho\Delta\phi$، و چهار ضلع خمیده‌اش‌مانند CE به طول تقریبی $\rho \sin \phi \, \Delta\theta$ اند، که در آن ρ و ϕ مختصات شعاعی و متمم عرض جغرافیایی نقطهٔ دلخواهی در T_i می‌باشند. لذا، حجم T_i تقریباً مساوی است با $\rho^2 \sin \phi \, \Delta\rho\, \Delta\theta\, \Delta\phi$ این وجود عبارت $\rho^2 \sin \phi \, d\rho\, d\theta\, d\phi$ در انتگرال سه‌گانه روی T' را توضیح داده، و به یاد آوردن فرمول (۴) را آسان می‌سازد.

حاجت به گفتن نیست که انتگرال سه‌گانهٔ

$$\iiint_{T'} f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi \, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

به کمک انتگرالهای مکرر حساب می‌شود؛ این امر در مثالهای زیر توضیح داده شده است.

مثال ۳. بااستفاده‌ازمختصات‌کروی مرکزگون $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ نیمکرهٔ توپر T به شعاع a راپیداکنید.

حل. این مسئله قبلاً در مثال ۳، صفحهٔ ۱۴۰۸، به کمک مختصات استوانه‌ای حل شده

است ، ولی حل آن در مختصات کروی آسانتر است . فرض کنیم T از بالا به کرهٔ $x^2+y^2+z^2=a^2$ و از پایین به صفحهٔ $z=0$ محدود باشد . مجددا" ، طبق تقارن ، $\bar{x}=\bar{y}=0$ ، و

$$\bar{z}=\frac{1}{V}\iiint_T z\,dx\,dy\,dz,$$

که در آن $V=\frac{2}{3}\pi a^3$ حجم نیمکره است . با استفاده از قضیهٔ ۱۰ در تبدیل به مختصات کروی ، داریم

$$\iiint_T z\,dx\,dy\,dz=\iiint_{T'}(\rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi,$$

که در آن T' جعبه‌ای در فضای $\rho\theta\phi$ است که به صفحات $\rho=0, \rho=a, \theta=0$ و $\theta=2\pi$ ، $\phi=0$ ، $\phi=\pi/2$ محدود است . با رفتن به انتگرال مکرر به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\iiint_{T'}\rho^3\cos\phi\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi&=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/2}d\phi\int_0^a\rho^3\cos\phi\sin\phi\,d\rho\\&=\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/2}\sin\phi\cos\phi\,d\phi\right)\left(\int_0^a\rho^3\,d\rho\right)\\&=2\pi\left[\frac{1}{2}\sin^2\phi\right]_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^a=\frac{1}{4}\pi a^4,\end{aligned}$$

و درنتیجه ، مثل قبل ،

$$\bar{z}=\frac{\frac{1}{4}\pi a^4}{\frac{2}{3}\pi a^3}=\frac{3}{8}a.$$

لذا ، مرکز گون T نقطهٔ $(0,0,\frac{3}{8}a)$ می‌باشد .

مثال ۴ . با استفاده از مختصات کروی ، گشتاور ماند I_l کرهٔ توپر همگن T به شعاع a حول محور l مار بر مرکزشرا بیابید .

حل . با انتخاب مبداء دستگاه مختصات قائم x ، y ، و z ، که l محور x آن است ، به عنوان مرکز T خللی به کلیت وارد نمی‌شود . چون کرهٔ T همگن است ، چگالی δ ی آن ثابت می‌باشد . بنابراین ،

$$I_l=I_x=\delta\iiint_T(y^2+z^2)\,dV$$

$$= 2\delta \iiint_T z^2\, dV = \frac{2\delta}{3} \iiint_T (x^2 + y^2 + z^2)\, dV,$$

که در آن از

$$\iiint_T x^2\, dV = \iiint_T y^2\, dV = \iiint_T z^2\, dV,$$

به خاطر تقارن ، استفاده شده است . با تبدیل به مختصات کروی (بدون معرفی صریح ناحیهٔ T') ، داریم

$$\begin{aligned} I_l &= \frac{2\delta}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\phi \int_0^{a} (\rho^2)\rho^2 \sin\phi\, d\rho \\ &= \frac{2\delta}{3} \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\pi} \sin\phi\, d\phi\right)\left(\int_0^{a} \rho^4\, d\rho\right) \\ &= \frac{4\pi\delta}{3} \Big[-\cos\phi\Big]_0^{\pi} \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^{a} = \frac{8\pi\delta}{15} a^5. \end{aligned}$$

فرض کنیم M جرم کل T باشد . در این صورت ،

$$M = \frac{4\pi\delta}{3} a^3,$$

درنتیجه ، می‌توان I_l را به شکل فشردهٔ زیر نوشت :

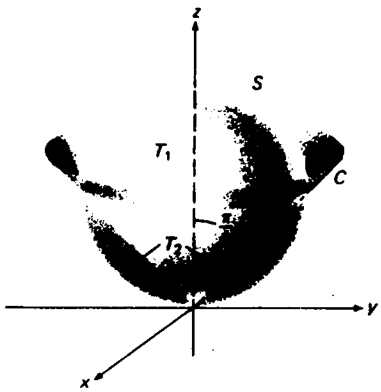
$$I_l = \frac{2}{5} Ma^2.$$

مثال ۵ . فرض کنیم S کره‌ای به معادلهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ $(a > 0)$ باشد ؛ یعنی ، کره‌ای به شعاع a ومرکز $(0, 0, a)$ از محور z . نشان‌دهید که مخروط C به‌معادلهٔ $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ درون S را به دو قسمت تقسیم می‌کند که یکی سه برابر دیگری می‌باشد .

حل . در مثال ۲ دیدیم که S در مختصات قطبی به معادلهٔ

$$\rho = 2a\cos\phi$$

است . همانطور که شکل ۵۴ در مقطع عرضی نشان می‌دهد ، پارچهٔ بالایی C درون S را به دو قسمت T_1 و T_2 تقسیم می‌کند ، و مولدهای C با محور z زاویهٔ $\pi/4$ می‌سازند . لذا ، حجم



شکل ۵۴

T_1 مساوی است با

$$V_1 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} d\phi \int_0^{2a\cos\phi} \rho^2 \sin\phi \, d\rho$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} \left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_0^{2a\cos\phi} \sin\phi \, d\phi$$

$$= \frac{8a^3}{3}\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/4} \cos^3\phi \sin\phi \, d\phi\right) = \frac{16\pi a^3}{3}\left[-\frac{1}{4}\cos^4\phi\right]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4\right] = \pi a^3,$$

ولی حجم T_2 برابر است با

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi a^3 - V_1 = \frac{1}{3}\pi a^3.$$

بنابراین، $V_1 = 3V_2$ ؛ درنتیجه، حجم T_1 سه برابر حجم T_2 می‌باشد.

در بخشهای ۶.۱۴ تا ۸.۱۴ طرز محاسبهٔ بعضی از انتگرالهای مضاعف و سه گانه را با رفتن از مختصات قائم به قطبی، استوانه‌ای، و کروی نشان دادیم. خواهیم دید که قضایای ۸ تا ۱۰ همه نتایجی هستند از یک بحث کلی تغییر متغیر در انتگرالهای چندگانه که در آخر بخش ۴.۱۵ مطرح شده است.

مسائل

مختصات قائم نقطه به مختصات کروی داده شده را بیابید.

۱. $\rho = 1, \theta = \pi, \phi = \pi/2$

۲. $\rho = \sqrt{6}, \theta = 3\pi/4, \phi = \pi/3$

۳. $\rho = 4, \theta = 5\pi/6, \phi = \pi/6$

۴. $\rho = 2, \theta = 0, \phi = 3\pi/4$

مختصات کروی نقطه به مختصات قائم داده شده را بیابید.

۵. $x = -1, y = 1, z = 1$ ۶. $x = 0, y = 1, z = -\sqrt{3}$

۷. $x = 4, y = -12, z = 3$ ۸. $x = 6, y = 2, z = 9$

معادلهٔ داده شده را از مختصات قائم به کروی تبدیل کنید.

۹. $x^2 + y^2 = 4$ ۱۰. $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$

۱۱. $x^2 + y^2 = z^2$ ۱۲. $x^2 - y^2 = z^2$

انتگرال سه‌گانهٔ داده شده را با تبدیل مختصات قائم به کروی حساب کنید.

۱۳. $\iiint\limits_T \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dx\,dy\,dz$ ، که در آن T گوی $(a > 0)$ $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$ است.

۱۴. $\iiint\limits_T (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz$ ، که در آن T ناحیهٔ توپر است که از بالا به کرهٔ یکهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ و از پایین به مخروط $z = -\sqrt{\frac{1}{3}(x^2 + y^2)}$ محدود است.

۱۵. $\iiint\limits_T yz\,dx\,dy\,dz$ ، که در آن T بخشی از غشاء کروی $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4$ است که در یکهشت‌اول قرار دارد.

۱۶. $\iiint\limits_T \frac{dx\,dy\,dz}{x^2 + y^2 + z^2}$ ، که در آن T ناحیهٔ توپرمحدود به استوانهٔ $x^2 + y^2 = 4$ و پارچه‌های مخروط $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ است.

۱۷. $\iiint\limits_T \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-2)^2}}$ ، که در آن T گوی یکهٔ $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ است.

۱۸. $\iiint\limits_T \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ ، که در آن T غشای کروی $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le e$ است.

۱۹. $\iiint\limits_T (x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz$ ، که در آن T گوی $x^2 + y^2 + z^2 \le z$ است.

۲۰. $\iiint_T \sqrt{1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\, dx\, dy\, dz$ ، که در آن T گوی $x^2 + y^2 + z^2 \le 3^{2/3}$ است.

با استفاده از مختصات کروی، حجم V ناحیهٔ توپر دادهٔ شدهٔ T را بیابید.

۲۱. T فصل مشترک کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 4z - 3$ با مخروط $z^2 = 4(x^2 + y^2)$ است و درداخل مخروط قرار دارد.

۲۲. T داخل پارچه‌های مخروط $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ و بین کرات $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ قرار دارد.

۲۳. T محصور به سطح $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 8z$ است.

۲۴. T محصور به سطح $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = xyz$ است.

۲۵. چگالی یک غشاء کروی به شعاع داخلی $10\ \mathrm{cm}$ و شعاع خارجی $12\ \mathrm{cm}$ در نقطهٔ متغیر P با فاصلهٔ P تا مرکز غشاء نسبت عکس دارد. جرم کل غشاء را در صورتی بیابید که چگالی در سطح داخلی‌اش $3\ \mathrm{g/cm^3}$ باشد.

۲۶. مرکز گون بخش T از کرهٔ توپر $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$ $(a > 0)$ را بیابید که در یکهشت اول قرار دارد.

۲۷. مرکز گون ناحیهٔ توپر T را بیابید که از بالا به کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ و از پایین به مخروط $z = \sqrt{\frac{1}{3}(x^2 + y^2)}$ محدود باشد.

۲۸. گشتاور ماند گوی توخالی همگنی به جرم M ، شعاع داخلی a_1 ، و شعاع خارجی a_2 را حول محور l مار بر مرکز آن بیابید. همچنین، گشتاور ماند یک غشاء کروی با جدارهٔ نازک به جرم M و شعاع a را حول چنین محور پیدا کنید.

اصطلاحات و مباحث کلیدی

انتگرال مضاعف روی یک ناحیهٔ مسطح

مساحت یک ناحیه و حجم زیر یک سطح به عنوان انتگرالهای مضاعف

انتگرالهای مکرر و موارد استعمال آنها در محاسبهٔ انتگرالهای مضاعف

انتگرال سه‌گانه روی یک ناحیهٔ توپر

حجم یک ناحیهٔ توپر به عنوان انتگرال سه‌گانه

محاسبهٔ انتگرالهای سه‌گانه برحسب انتگرالهای مکرر

محاسبهٔ جرم یک ناحیهٔ مسطح یا توپر به‌وسیلهٔ چگالی‌اش

مرکز جرم و گشتاورهای یک دستگاه از ذرات

مرکز جرم و گشتاورهای یک ورقه یا جسم جامد

مرکز گون یک ناحیهٔ مسطح یا توپر
مرکز جرم یک سیم با چگالی متغیر، مرکز گون یک منحنی
قضیهٔ پاپوس برای جسم دوار
قضیهٔ پاپوس برای سطح دوار
گشتاورهای ماند و شعاعهای چرخش
انتگرالهای مضاعف در مختصات قطبی
انتگرالهای سه‌گانه در مختصات استوانه‌ای و کروی

مسائل تکمیلی

انتگرال مکرر داده شده را حساب کنید.

۱. $\int_0^3 dy \int_0^1 xy\,dx$

۲. $\int_0^1 dx \int_{-1}^0 2^{x+y}\,dy$

۳. $\int_1^e dx \int_{1/x}^x \ln x\,dy$

۴. $\int_0^{\pi/2} dy \int_0^y \sin(x+y)\,dx$

۵. $\int_0^1 dy \int_0^{y^2} e^{x/y}\,dx$

۶. $\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\sin\theta} r^2\cos\theta\,dr$

۷. انتگرال مضاعف

$$\iint_R \frac{y}{x^2+y^2}\,dA$$

را درصورتی حساب کنید که R ناحیهٔ محدود به خط $y = x$ و سهمی $y = x^2$ باشد.

۸. فرض کنید R ناحیهٔ محدود به محور x و منحنی

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \le t \le 2\pi, a > 0)$$

(یک قوس کامل چرخزاد) باشد. نشان دهید که $\iint_R y\,dA = \frac{5}{2}\pi a^3$. مرکز گون R را پیدا نمایید.

۹. حجم ناحیهٔ توپر محدود به استوانهٔ بیضوی $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$، صفحهٔ xy، و $z = \alpha x + \beta y + h$ را که بالای اثر استوانه در صفحهٔ xy قرار دارد بیابید.

۱۰. حجم ناحیهٔ توپر محدود به سهمی گون دوار $z = x^2 + y^2$، استوانه سهموی $y = x^2$ صفحهٔ xy، و صفحهٔ $y = 1$ را بیابید.

۱۱. حجم ناحیهٔ توپر جدا شده از استوانهٔ مستدیر $x^2 + y^2 = 2x$ به وسیلهٔ سهمی گون

دوار $y^2 + z^2 = 4x$ را پیدا کنید.

۱۲. با استفاده از انتگرال مضاعف، نشان دهید هرگاه $f(x)$ و $g(x)$ بر $[a, b]$ پیوسته‌باشند، آنگاه

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}\,\sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}. \qquad \text{(یک)}$$

این **نامساوی کشی ــ شوارتز** برای انتگرالهاست (قس. نامساوی کشی ــ شوارتز برای مجموعها، که در مسئلهٔ ۴۷، صفحهٔ ۱۰۷۱، داده شده است).

راهنمایی. انتگرال مضاعف

$$\iint_R [f(x)g(y) - f(y)g(x)]^2\,dx\,dy$$

را درنظر بگیرید، که در آن R مربع محدود به خطوط $x = a$، $x = b$، $y = a$، و $y = b$ است.

۱۳. نشان دهید هرگاه تابع $f(x)$ بر $[a, b]$ مثبت و پیوسته باشد، آنگاه

$$\sqrt{\int_a^b f(x)\,dx}\,\sqrt{\int_a^b \frac{dx}{f(x)}} \ge b - a. \qquad \text{(دو)}$$

۱۴. نامساوی (یک) را به ازای توابع $f(x) = e^x$ و $g(x) = x$ بر بازهٔ $[0, 1]$ تحقیق نمایید.
نامساوی (دو) را به ازای تابع $f(x) = x$ بر بازهٔ $[1, 2]$ تحقیق نمایید.

۱۵. $\iiint_T \sin x \cos y \tan z\,dV$ را درصورتی حساب کنید که T جعبهٔ محدود به صفحات $x = 0$، $x = \pi/2$، $y = 0$، $y = \pi/6$، $z = 0$، و $z = \pi/3$ باشد.

۱۶. همانطور که در صفحهٔ ۷۰۹ نشان دادیم، حجم V جسم T حاصل از دوران نمودار تابع نامنفی پیوستهٔ $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ حول محور x از فرمول $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx$ به دست می‌آید. این فرمول را با استفاده از انتگرال سه‌گانه به دست آورید.

۱۷. چگالی یک ورقهٔ مربعی به ضلع 6 cm در نقطهٔ متغیر P با مجذور فاصلهٔ P تا یکی از رئوس مربع متناسب است. جرم کل ورقه را درصورتی بیابید که چگالی در مرکز مربع 3 g/cm^2 باشد.

۱۸. جرم کل جعبهٔ محدود به صفحات مختصات و صفحات $x = 1$، $y = 3$، و $z = 5$ را در صورتی بیابید که تابع چگالی $\rho(x, y, z) = x + y + z$ باشد.

۱۹. جرم کل جسم واقع در یکهشت اول و محدود به کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 9$، صفحات مختصات، و صفحهٔ $3x + 2y = 6$ را درصورتی بیابید که تابع چگالی $\rho(x, y, z) = 12z$ باشد.

۲۰. نشان دهید که مرکز جرم یک‌دستگاه‌از سه‌ذرهٔ غیرهمصفحهٔ A ، B ، و C به‌جرمهای مساوی در نقطهٔ تقاطع میانه‌های مثلث ABC قرار دارد.

۲۱. مرکز گون ناحیهٔ R محدود به سهمیهای $y^2 = 4 + 2x$ و $y^2 = 4 - 4x$ را بیابید.

۲۲. مرکز گون ناحیهٔ R محدود به منحنی $y = \cos x$ و خطوط $x = \pi/2$ و $y = 1$ را بیابید.

۲۳. مرکز گون ناحیهٔ R محصور به نمودار معادلهٔ $y^2 = x^2(1 - x^2)$ $(x \geq 0)$ رابیابید.

۲۴. مرکز جرم چهاروجهی T محدود به صفحات مختصات و صفحهٔ $x + y + z = 1$ را در صورتی بیابید که چگالی T در نقطهٔ‌متغیر P با فاصلهٔ P تا صفحهٔ xz متناسب‌باشد.

۲۵. مرکزگون ناحیهٔ‌توپر T محدودبه‌صفحات $x = 1$ ، $x = 3$ ، $y = 0$ ، $z = 0$ ، و $y + 2z = 2$ را بیابید.

۲۶. مرکز گون‌ناحیهٔ توپر T محدود به سهمی گون بیضوی $z = 2x^2 + y^2$ و صفحهٔ $z = 4$ را پیدا کنید.

۲۷. مختصات قائم مرکز گون منحنی مسطح $r = 2(1 - \cos\theta)$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ را ،که‌نیمهٔ‌بالایی دلگون شکل ۶۵، صفحهٔ‌۱۰۰۴، است بیابید.

۲۸. مرکز گون منحنی مسئلهٔ ۸ (یک قوس‌کامل چرخزاد) را بیابید.

۲۹. با استفاده از قضایای پاپوس، حجم V و مساحت A ناحیهٔ سه‌بعدی حاصل از دوران یک ناحیهٔ نیمه مستدیر به شعاع r را حول خط مماس موازی قطرش بیابید.

۳۰. بیضی $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ حول خط $y = 3b$ دوران می‌کند. حجم V جسم دوار حاصل چقدر است؟

۳۱. گشتاور ماند I_l ناحیهٔ محدود به سهمی $x = y^2$ و خط $x = 1$ را حول خط l به‌معادلهٔ $y = 1$ بیابید.

۳۲. گشتاور ماند قطبی I_O ناحیهٔ محدود به منحنی $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ و محورهای‌مختصات را بیابید.

گشتاور ماند I_z ناحیهٔ توپر محدود به سطوح زیر حول محور z رابیابید.

۳۳. کرات $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ (ر.ک. مسئلهٔ ۱۵ ، صفحهٔ‌۱۳۵۳)

۳۴. سهمی گون دوار $2z = x^2 + y^2$ و کره $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ (ر.ک. مسئلهٔ‌۲۲ ، ۱۳۵۴)

۳۵. با استفاده از مختصات قطبی ، انتگرال

$$\iint_R \sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}}\,dx\,dy$$

را که در آن R قرص یکهٔ $x^2 + y^2 \leq 1$ است حساب کنید.

۳۶. با استفاده از مختصات قطبی ، مثال ۶ ، صفحهٔ‌۱۳۳۴، را به صورتی دیگر حل کنید.

انتگرال مکرر داده شده را با تبدیل آن به مختصات قطبی حساب کنید.

۳۷. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2\sqrt{x^2+y^2}\, dy$

۳۸. $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx$

۳۹. بااستفاده از مختصات قطبی، مساحت A ی ناحیهٔ R محصور به منحنی $(x^2+y^2)^2 = 2x^3$ را بیابید.

۴۰. مرکز گون $(\bar{x}, \bar{y})$ ناحیهٔ R مسئلهٔ قبل را بیابید.

۴۱. گشتاور ماند یک قرص مستدیر به شعاع a را حول محور l که در نقطه‌ای از محیط قرص بر آن عمود است بیابید.

۴۲. انتگرال مکرر

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^3 z\sqrt{x^2+y^2}\, dz$$

را با استفاده از مختصات استوانه‌ای حساب کنید.

۴۳. با استفاده از مختصات استوانه‌ای، حجم ناحیهٔ توپر بین سهمی‌گون $z = x^2 + y^2$ و مخروط $z = \sqrt{x^2+y^2}$ را بیابید.

۴۴. نشان دهید که طول منحنی فضایی به معادلات پارامتری

$$r = r(t), \qquad \theta = \theta(t), \qquad z = z(t) \qquad (a \le t \le b)$$

در مختصات قطبی مساوی است با

$$L = \int_a^b \sqrt{r'^2 + r^2\theta'^2 + z'^2}\, dt,$$

که درآن پریم مشتقگیری‌نسبت‌به t را نشان‌می‌دهد. پس از نوشتن معادلات پارامتری مارپیچ مستدیر $x = 3\cos t, y = 3\sin t, z = 4t$ در مختصات استوانه‌ای، از فرمول فوق استفاده کرده طول یک دور مارپیچ را پیدا نمایید (قس. مثال ۳، صفحهٔ ۱۱۷۶).

مختصات استوانه‌ای نقطه به مختصات کروی داده شده را بیابید.

۴۵. $\rho = 2, \theta = \pi/3, \phi = \pi/2$

۴۶. $\rho = \sqrt{2}, \theta = \pi, \phi = 3\pi/4$

۴۷. $\rho = \sqrt{3}, \theta = \pi/4, \phi = \pi/3$

مختصات کروی نقطه به مختصات استوانه‌ای داده شده را بیابید.

۴۸. $r = \sqrt{3}, \theta = 5\pi/6, z = -1$

۴۹. $r = 2, \theta = \pi/6, z = 2$

۵۰. $r = 3, \theta = \sqrt{\pi}, z = 4$

۵۱. انتگرال مکرر

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\,dz$$

را با تبدیل به مختصات کروی حساب کنید.

۵۲. چگالی نیمکرهٔ توپر $x^2+y^2+z^2 \leq 2ay, z \geq 0$ به شعاع a در نقطهٔ متغیر P مساوی فاصلهٔ P تا مبداء است. جرم کل نیمکره را پیدا نمایید.

۵۳. گشتاور ماند یک کرهٔ توپر به جرم M و شعاع a را حول یک خط مماس آن بیابید.

۵۴. مقدار میانگین تابع $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ را روی گوی $x^2+y^2+z^2 \leq a^2$ به شعاع a بیابیـد (ر.ک. مسئلهٔ ۳۲، صفحهٔ ۱۳۵۵). این عدد را می‌توان " فاصلهٔ متوسط " بین نقاط گوی و مرکزش درنظر گرفت.

انتگرالهای خط و سطح[15]

در این فصل مطالعهٔ *انتگرالهای خط* را که در بخش ۴.۱۴ آغاز شد از سر گرفته، انتگرالهای خط جدیدی را معرفی می‌کنیم که برای محاسبهٔ کار انجام شده به‌وسیلهٔ نیروی متغیر وارد بر یک ذرهٔ متحرک در امتداد یک منحنی مناسب می‌باشد. همچنین، مفهوم انتگرال مضاعف را با پذیرش این امر که ناحیهٔ انتگرالگیری سطح خمیده باشد تعمیم می‌دهیم. این کار ما را به مفهوم *انتگرال سطح* می‌رساند که در بخش ۳.۱۵ بررسی خواهد شد.

با انتگرالهای خط و سطح می‌توان چند تعمیم چند متغیرهٔ قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، یعنی *قضیهٔ گرین*، *قضیهٔ دیورژانس*، و *قضیهٔ استوکس*، را که در بخشهای ۴.۱۵ تا ۶.۱۵ عرضه می‌شوند اثبات کرد. این نتایج در علوم کار بسته اهمیت زیادی داشته، و در واقع ضمن بررسی پدیده‌هایی فیزیکی نظیر الکتریسیته، مغناطیس، ثقل، و شارش مایع کشف شده‌اند.

یک موضوع جنبی *میدانهای برداری* است؛ یعنی، توابعی برداری‌از یک‌شناسهٔ *برداری* یا معادلاً، توابعی برداری از یک نقطهٔ متغیر در صفحه یا در فضا. به بیان صوری، یک میدان برداری قاعده یا روندی است که به هر نقطه در یک مجموعهٔ دویاسه بعدی از نقاط یک و فقط یک بردار منتسب می‌کند، ولی روش ما بر معنی ملموس فیزیکی میدانهای برداری تأکید خواهد کرد.

۱.۱۵ انتگرالهای خط

انتگرالهای خط نسبت به طول قوس. انتگرال خط به صورت

$$\int_C f(x, y)\,ds \qquad (1)$$

در صفحه یا

$$\int_C f(x, y, z)\, ds \tag{1'}$$

در فضا قبلاً در بخش ۴۰.۱۴ به عنوان ابزاری برای محاسبهٔ مرکز جرم سیم خمیدهٔ C با چگالی متغیر معرفی شد. در این کاربرد، انتگرالده موجود در (۱) یا (۱') به شکل ρ، $x\rho$، $y\rho$، یا $z\rho$ می‌باشد، که در آنها $\rho = \rho(x, y)$ یا $\rho = \rho(x, y, z)$ چگالی جرم سیم است، ولی نکاتی که به (۱) و (۱') منجر شدند بر هر تابع f پیوسته بر منحنی C در صفحه یا فضا که بیش از تعدادی متناهی خود قطعی نداشته باشد قابل اعمال‌اند. لذا،

$$\int_C f(x, y)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt \tag{2}$$

(ر.ک. صفحهٔ ۱۳۶۷)، که در آن C یک منحنی مسطح به معادلات پارامتری

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \qquad (a \le t \le b)$$

است، و

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt \tag{2'}$$

(ر.ک. صفحهٔ ۱۳۷۱)، که در آن C یک منحنی فضایی به معادلات پارامتری

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t) \qquad (a \le t \le b)$$

است. توجه کنید که رابطهٔ (۲) را می‌توان از (۲') با حذف $z(t)$ به دست آورد.

انتگرالهای (۱) و (۱') را *انتگرالهای خط* f *نسبت به طول قوس* s می‌نامند. به‌ازای f مثبت، هر انتگرال را می‌توان جرم کل یک سیم خمیده با چگالی متغیر f تعبیر کرد.

مثال ۱. انتگرال

$$\int_C ye^{-x}\, ds$$

را درصورتی حساب کنید که C منحنی مسطح

$$x = \ln(t^2 + 1), \qquad y = 2 \arctan t - t \qquad (0 \le t \le \sqrt{3})$$

باشد.

حل. با استفاده از (۲)، داریم

$$\int_C ye^{-x}\,ds = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2\arctan t - t}{t^2+1}\sqrt{\left(\frac{2t}{t^2+1}\right)^2 + \left(\frac{2}{t^2+1}-1\right)^2}\,dt$$
$$= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2\arctan t - t}{t^2+1}\,dt$$
$$= 2\int_0^{\sqrt{3}} \arctan t\, d(\arctan t) - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t}{t^2+1}\,dt$$
$$= \Big[(\arctan t)^2\Big]_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\Big[\ln(t^2+1)\Big]_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi^2}{9} - \ln 2.$$

مثال ۲. انتگرال

$$\int_C xyz\,ds$$

را درصورتی بیابید که C منحنی فضایی

$$x = t, \qquad y = \frac{4}{3}t^{3/2}, \qquad z = t^2 \qquad (0 \le t \le 1)$$

باشد.

حل. به کمک رابطهٔ (۲′)، داریم

$$\int_C xyz\,ds = \frac{4}{3}\int_0^1 t^{9/2}\sqrt{1+4t+4t^2}\,dt = \frac{4}{3}\int_0^1 t^{9/2}(1+2t)\,dt$$
$$= \frac{4}{3}\left[\frac{2}{11}t^{11/2} + \frac{4}{13}t^{13/2}\right]_0^1 = \frac{280}{429}.$$

کار به عنوان انتگرال خط. نوع دیگری از انتگرال خط در تعمیم مفهوم کار انجام شده به وسیلهٔ یک نیروی متغیر از حالت یک بعدی به حالت دو یا سه بعدی ظاهر می‌شود. ذره‌ای به جرم m در نظر می‌گیریم که در صفحه یا فضا حرکت کرده و مسیر Cآن نمودار تابع بردار موضع

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \qquad (a \le t \le b)$$

باشد، که درآن پارامتر t رازمان می‌گیریم. فرض کنیم C بیشتر از تعدادی متناهی خود قطعی نداشته، و *هموار* باشد بدین معنی که $\mathbf{r}(t)$ بر $[a, b]$ مشتق $d\mathbf{r}/dt$ ناصفرپیوسته داشته‌باشد.

(با اینحال ، همانند تبصرهٔ صفحهٔ ۱۰۸۰ ، امکان می‌دهیم که در نقاط انتهایی $t = a$ و $t = b$ داشته باشیم $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{0}$.) سرعت ذره در لحظهٔ t مساوی است با

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}.$$

فرض کنیم بر ذره نیروی $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ وارد شده‌باشد ،که در آن $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ یک تابع برداری‌از بردار موضع $\mathbf{r}$ است ، یا معادلاً ، یک تابع مانند $\mathbf{F}(x, y)$ یا $\mathbf{F}(x, y, z)$ از مختصات نقطه با بردار موضع $\mathbf{r}$ می‌باشد؛ چنین تابع یک **میدان برداری** نام دارد ، که در این حالت یک میدان نیرو می‌باشد . لذا ، در صفحه داریم

$$\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j},$$

که در آن $P = P(x, y)$ و $Q = Q(x, y)$ مؤلفه‌های $\mathbf{F}$ بوده و هر دو توابعی اسکالر از دو متغیرند ، ولی در فضا داریم

$$\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k},$$

که درآن مؤلفه‌های $P = P(x, y, z)$ ، $Q = Q(x, y, z)$ ،و $R = R(x, y, z)$ از $\mathbf{F}$ توابع اسکالری از سه متغیر می‌باشند . فرض‌کنیم $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ بر مجموعهٔ D پیوسته باشد به این معنی که مؤلفه‌های $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ بر D پیوسته باشند .

بنابر قانون دوم حرکت نیوتن ،

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}. \tag{۳}$$

با ضرب نقطه‌ای (۳) در $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ ، معلوم می‌شود که

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

یا معادلاً ، برحسب تندی $v = v(t) = |\mathbf{v}(t)|$ ذره ،

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{۴}$$

زیرا

$$\frac{d}{dt}(v^2) = \frac{d}{dt}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) = 2\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

با انتگرالگیری از (۴) نسبت به t از a تا b ، به دست می‌آوریم

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_a^b = \int_a^b \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt,$$

یعنی ،

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \int_a^b \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}dt, \qquad (۵)$$

که در آن $v_A = v(a)$ و $v_B = v(b)$.
کمیت

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

همانند صفحهٔ ۴۲۹ ، *انرژی جنبشی* نام دارد . لذا ، معادلهٔ (۵) می‌گوید که ، به خاطر عمل نیروی $\mathbf{F}$ ، انرژی جنبشی ذره به اندازهٔ

$$W = \int_a^b \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}dt \qquad (۶)$$

تغییر می‌کند ، که *کار* انجام شده توسط نیرو وقتی ذره مسیر C را از نقطهٔ شروع A به بردار موضع $\mathbf{r}(a)$ تا نقطهٔ پایان B به بردار موضع $\mathbf{r}(b)$ می‌پیماید نام دارد .

حال دو نوع انتگرال خط داریم ، یکی انتگرالهای (۱) و (۱') ، که هر دو را می‌توان به شکل $\int_C f\,ds$ نوشت ، که در آن $f = f(\mathbf{r})$ یک تابع اسکالر (از شناسهٔ برداری) است ، و انتگرالهای سمت راست (۵) و (۶) ، که می‌توان آنها را به شکل

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \qquad (۷)$$

نوشت ، و شامل میدان‌برداری‌پیوستهٔ $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ است ، *که در حالت کلی لازم نیست نیرو باشد* . انتگرال (۷) ، که اختصاری برای

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}dt \qquad (۸)$$

است ، *انتگرال خط* $\mathbf{F}$ *در امتداد* C نام دارد ، ولی انتگرالگیری در آن به جای طول‌قوس s مثل حالت $\int_C f\,ds$ نسبت به بردار موضع $\mathbf{r}$ است . دیفرانسیل $d\mathbf{r}$ تابع برداری $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ مثل تابع اسکالر تعریف می‌شود . لذا ،

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}dt,$$

درنتیجه ، در صفحه ،

$$d\mathbf{r} = d(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = \left(\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j}\right)dt = \left(\frac{dx}{dt}dt\right)\mathbf{i} + \left(\frac{dy}{dt}dt\right)\mathbf{j} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j}$$

و در فضا ، $d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}$ ، فرمولهای (۵) و (۶) برحسب انتگرال خط (۷) به صورت زیر درمی‌آیند:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

و

$$W = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}.$$

به آسانی معلوم می‌شود که تمام عبارات مربوط به کار W که در بخشهای قبل آمده‌اند حالات خاصی از فرمول اخیر می‌باشند.

انتگرالهای خط نسبت به مختصات. با گذاردن عبارات $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ و $d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j}$ در (۷) ، در صفحه داریم

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C P\,dx + Q\,dy \tag{۹}$$

زیرا $(P\mathbf{i} + Q\mathbf{j})\cdot(dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j}) = P\,dx + Q\,dy$ ، و در فضا خواهیم داشت

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz \tag{۹'}$$

طرفهای راست (۹) و (۹') نیز انتگرالهای خط در امتداد C نام دارند. شاید نوشتن این انتگرالها به صورت

$$\int_C (P\,dx + Q\,dy), \qquad \int_C (P\,dx + Q\,dy + R\,dz)$$

ابهام کمتری داشته باشد، ولی استفاده از پرانتز اطراف "فرمهای دیفرانسیل" $P\,dx + Q\,dy$ و $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ مرسوم نیست.

برای محاسبهٔ (۹) و (۹') ، رابطهٔ (۸) را به صورت باز می‌نویسیم ، در صفحه به دست می‌آوریم

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_a^b P(x(t), y(t))\frac{dx}{dt}\,dt + \int_a^b Q(x(t), y(t))\frac{dy}{dt}\,dt \tag{۱۰}$$

و در فضا خواهیم داشت

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_a^b P(x(t), y(t), z(t))\frac{dx}{dt}\,dt$$

$$+ \int_a^b Q(x(t), y(t), z(t))\frac{dy}{dt}\,dt + \int_a^b R(x(t), y(t), z(t))\frac{dz}{dt}\,dt \qquad (10')$$

جملات این مجموع را به صورت فشرده‌تر

$$\int_C P\,dx, \qquad \int_C Q\,dy, \qquad \int_C R\,dz$$

نشان داده و آنها را نیز انتگرال خط می‌نامیم، البته این بار نسبت به مختصات x ، y ، و z . لذا، فرمولهای (۱۰) و ('۱۰) با این نماد اختصاری به صورت زیر درمی‌آیند:

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_C P\,dx + \int_C Q\,dy$$

و

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_C P\,dx + \int_C Q\,dy + \int_C R\,dz.$$

درحالتی که C نمودار تابع پیوسته‌ای چون

$$y = f(x) \qquad (a \le x \le b)$$

است، می‌توان در فرمول (۱۰) x را پارامتر گرفت، که در این صورت داریم

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_a^b P(x, f(x))\,dx + \int_a^b Q(x, f(x))f'(x)\,dx. \qquad (11)$$

به همین نحو، هرگاه C نمودار تابع پیوسته‌ای به شکل

$$x = g(y) \qquad (a \le y \le b)$$

باشد، آنگاه

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_a^b P(g(y), y)g'(y)\,dy + \int_a^b Q(g(y), y)\,dy. \qquad (11')$$

فرض کنیم $s = s(t)$ تابع طول قوس C باشد؛ یعنی، طول قوس منحنی C از نقطهٔ شروع C تا نقطه‌به‌بردار موضع $\mathbf{r}(t)$. دراین‌صورت، C علاوه‌براینکه نمودار $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ $(a \le t \le b)$ است نمودار $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ $(0 \le s \le L)$ نیز هست، که در آن L طول C و $\mathbf{r}(s)$ تابع مرکب $\mathbf{r}(t(s))$ شامل معکوس $t = t(s)$ تابع $s = s(t)$ می‌باشد. لذا، به کمک قاعدهٔ زنجیره‌ای،

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt = \int_0^L \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{ds}\,ds = \int_0^L \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds}\,ds. \qquad (12)$$

اما ، همانطور که از صفحات ۱۰۸۲ و ۱۱۷۹ می‌دانیم ، $d\mathbf{r}/ds = \mathbf{T}$ ، که در آن $\mathbf{T}$ بـردار یکهٔ مماس در امتداد C است . لذا ، انتگرال خط $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ نمایش دیگری چون

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\, ds$$

دارد ، که از آن معلوم می‌شود که کار نیروی $\mathbf{F}$ بر یک ذرهٔ متحرک در امتداد C کـلا" از مؤلفهٔ مماسی‌اش ، یعنی مؤلفه در امتداد بردار $\mathbf{T}$ ، ناشی می‌شود .

همین استدلالی که هم‌اکنون برای اثبات فرمول (۱۲) به کار رفت نشان می‌دهد که *مقدار انتگرال خط $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ از نمایش پارامتری C مستقل است مشروط براینکه جهت C حفظ گردد* . درواقع ، هرگاه منحنی جهتدار C نمودار $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ باشد ، آنگاه C نمودار $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t(\tau))$ که در آن $t = t(\tau)$ تابع به طور پیوسته مشتقپذیری است که $t(\alpha) = a$ ، $t(\beta) = b$ ، و $dt/d\tau$ بر $[\alpha, \beta]$ مثبت است ، نیز می‌باشد . اما ، در این صورت ،

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt = \int_\alpha^\beta \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{d\tau}\,d\tau = \int_\alpha^\beta \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}\,d\tau,$$

که حکم با حروف شکسته را ثابت می‌کند .

اگر جهت C عکس شود ، وضع فرق خواهد کرد . فرض کنیم $-C$ منحنی حاصل از عکس کردن جهت C باشد ، مثل شکل ۱ . در این صورت ، $-C$ نمودار $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(\tau))$ است ، که در آن

شکل ۱

$t = t(\tau)$ تابع به‌طور پیوسته مشتقپذیری است که $t(\alpha) = b$ ، $t(\beta) = a$ ، و $dt/d\tau$ بر $[\alpha, \beta]$ منفی است . بنابراین ،

$$\int_{-C} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_\alpha^\beta \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}\,d\tau = \int_b^a \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}\,dt = \int_b^a \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt = -\int_a^b \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt,$$

درنتیجه ،

$$\int_{-C} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}. \qquad (۱۳)$$

هرگاه C دارای نقطهٔ شروع A و نقطهٔ پایان B باشد ، آنگاه $-C$ دارای نقطهٔ شروع B و نقطهٔ

پایان A می‌باشد (ر.ک. شکل) ، و (۱۳) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\int_{BA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{AB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \qquad (13')$$

البته با این فرض که AB یعنی قوس با شروع A و پایان B ، و BA یعنی همان قوس که در جهت خلاف پیموده شده است. به عنوان تمرین، نشان دهید که مقدار انتگرال خط $\int_C f(\mathbf{r})\,ds$ ، از نوع (۱) یا (۱') ، درصورت عکس‌کردن جهت C تغییر نمی‌کند.

در مثالهای زیر، انتگرالهای خط از نوع (۷) تا (۱۱) محاسبه شده‌اند.

مثال ۳. انتگرال

$$I = \int_C 3y\,dx + x\,dy$$

را درصورتی حساب کنید که C نیمدایره‌ٔ $x = \cos t,\ y = \sin t$ $(0 \le t \le \pi)$ باشد.

حل. با استفاده از فرمول (۱۰) ، داریم

$$I = \int_0^\pi 3 \sin t(-\sin t)\,dt + \int_0^\pi \cos t(\cos t)\,dt$$
$$= -3\int_0^\pi \sin^2 t\,dt + \int_0^\pi \cos^2 t\,dt = -\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = -\pi.$$

مثال ۴. انتگرال

$$I = \int_C yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$$

را درصورتی حساب کنید که C مکعبی پیچ خورده‌ٔ

$$x = t,\ y = t^2,\ z = t^3\ (0 \le t \le 1)$$

باشد.

حل. این بار از فرمول (۱۰') استفاده کرده، به دست می‌آوریم

$$I = \int_0^1 t^5\,dt + \int_0^1 t^4(2t)\,dt + \int_0^1 t^3(3t^2)\,dt = \int_0^1 6t^5\,dt = 1.$$

مثال زیر نشان می‌دهد که، در حالت کلی، مقادیر یک انتگرال خط درامتداد

منحنیهای مختلف با نقاط انتهایی یکسان متفاوتند.

مثال ۵. انتگرال خط

$$I = \int_C xy\,dx + (y - x)\,dy \tag{۱۴}$$

را در امتداد هر یک از منحنیهای زیر بین نقاط $(0, 0)$ و $(1, 1)$ حساب کنید:

(آ) خط $y = x$؛

(ب) سهمی $y = x^2$؛

(پ) سهمی $y^2 = x$؛

(ت) منحنی $y = x^3$.

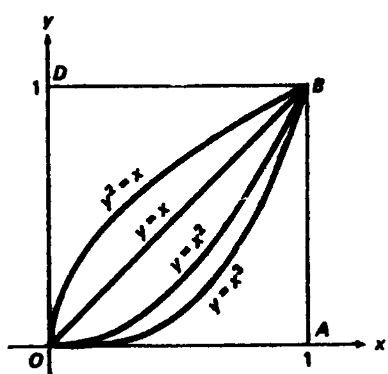
حل. چهار منحنی در شکل ۲ نموده شده‌اند. با استفاده از فرمول (۱۱) ومحاسباتی ساده، خواهیم داشت

(آ) $I = \int_0^1 [x^2 + (x - x)]\,dx = \frac{1}{3}$؛

(ب) $I = \int_0^1 [x^3 + 2(x^2 - x)x]\,dx = \frac{1}{12}$؛

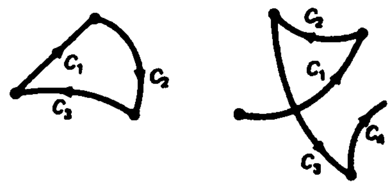
(پ) $I = \int_0^1 \left[x^{3/2} + \frac{1}{2}(x^{1/2} - x)x^{-1/2}\right]dx = \frac{17}{30}$؛

(ت) $I = \int_0^1 [x^4 + 3(x^3 - x)x^2]\,dx = -\frac{1}{20}$.



شکل ۲

منحنیهای قطعه قطعه هموار. فرض کنیم منحنی C از تعدادی متناهی منحنی هموار $C_1, C_2, \dots, C_n$ انتها به انتها، مانند شکل ۳، تشکیل شده باشد. این نوع منحنی را *قطعه قطعه هموار* گوییم، و می‌تواند در "نقاط اتصال" گوشه داشته باشد. انتگرال خط $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$



منحنیهای قطعه قطعه هموار

شکل ۳

در امتداد منحنی قطعه قطعه هموار C با فرمول زیر تعریف می‌شود:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \cdots + \int_{C_n} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}. \qquad (۱۵)$$

البته (همانطور که به آسانی تحقیق می‌شود)، این فرمول برای منحنی هموار C که به n قوس $C_1, C_2, \dots, C_n$ تقسیم شده است خود به خود برقرار است.

مثال ۶. انتگرال خط (۱۴) را در امتداد مسیرهای چندضلعی OAB و ODB حساب کنید که در آنها، مثل شکل ۲، $O=(0,0)$، $A=(1,0)$، $B=(1,1)$، و $D=(0,1)$.

حل. مسیرهای OAB و ODB قطعه قطعه هموارند. در واقع، OAB از پاره‌خطهای OA و AB تشکیل شده است، حال آنکه ODB از پاره‌خطهای OD و DB متشکل است. این پاره‌خطها به نمایشهای پارامتری زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned}
OA&:\quad x=t,\quad y=0 \qquad (0\le t\le 1),\\
AB&:\quad x=1,\quad y=t \qquad (0\le t\le 1),\\
OD&:\quad x=0,\quad y=t \qquad (0\le t\le 1),\\
DB&:\quad x=t,\quad y=1 \qquad (0\le t\le 1).
\end{aligned}$$

بنابراین، به کمک (۱۵) داریم

$$\begin{aligned}
\int_{OAB} xy\,dx + (y-x)\,dy &= \int_{OA} xy\,dx + (y-x)\,dy + \int_{AB} xy\,dx + (y-x)\,dy\\
&= \int_0^1 0\,dt + \int_0^1 (t-1)\,dt = -\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

$$\int_{ODB} xy\,dx + (y-x)\,dy = \int_{OD} xy\,dx + (y-x)\,dy + \int_{DB} xy\,dx + (y-x)\,dy$$
$$= \int_0^1 t\,dt + \int_0^1 t\,dt = 1$$

(توجه کنید که بر AB و OD ، $dx = 0$ ، حال آنکه بر OA و DB ، $dy = 0$) . به عنوان تمرین ، از فرمولهای (۱۱) و (۱۱') استفاده کرده همین انتگرالها را محاسبه نمایید .

مثال ۷. انتگرال خط

$$I = \int_C y^2\,dx + 2xy\,dy$$

را در امتداد منحنیهای مثال ۵ حساب کنید .

حل . محاسبات مستقیم نشان می‌دهند که

(آ) $$I = \int_0^1 (x^2 + 2x^2)\,dx = 1$$

(ب) $$I = \int_0^1 (x^4 + 4x^4)\,dx = 1$$

(پ) $$I = \int_0^1 (x + x)\,dx = 1$$

(ت) $$I = \int_0^1 (x^6 + 6x^6)\,dx = 1$$

توجه‌کنید که ، برخلاف مثال ۵ ، مقادیر I در مثال ۷ همه یکسانند . در مثال ۱ بخش آینده دلیلش را نشان خواهیم داد .

مسائل

انتگرال خط داده شده از نوع $\int_C f(\mathbf{r})\,ds$ را حساب کنید .

۱. $\int_C (x+y)\,ds$ ، که در آن C پاره‌خط از $(0, 0)$ تا $(3, 4)$ است

۲. $\int_C (x-y)\,ds$ ، که در آن C پاره‌خط از $(1, 2)$ تا $(5, -2)$ است

۳. $\int_C \frac{ds}{x-y}$ ، که در آن C پاره‌خط از $(0, -3)$ تا $(6, 0)$ است

۴. $\int_C xy\,ds$ ، که در آن C قوس سهموی $x = 2t,\ y = t^2$ $(0 \le t \le 1)$ است

۵. $\int_C x^2y\,ds$ ، که در آن C مستطیل به رئوس $(0, 0)$، $(2, 0)$، $(2, 3)$، و $(0, 3)$ است که یکبار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده است

۶. $\int_C \frac{y}{\sqrt{x}}\,ds$ ، که در آن C منحنی $x = 3t^2,\ y = 2t^3$ $(1 \le t \le 2)$ است

۷. $\int_C (x^2 + y^2)^2\,ds$ ، که در آن C دایرهٔ $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t$ $(0 \le t \le 2\pi)$ است

۸. $\int_C \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,ds$ ، که در آن C قوس مارپیچی $x = 3\cos t,\ y = 3\sin t,\ z = 4t$ $(0 \le t \le 2\pi)$ است

۹. $\int_C xyz\,ds$ ، که در آن C قوس مستدیر $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 1$ $(0 \le t \le \pi/2)$ است

۱۰. $\int_C (2\sqrt{x^2 + y^2} - z)\,ds$ ، که در آن C منحنی $x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ z = t$ $(0 \le t \le \sqrt{2})$ است

۱۱. $\int_C (x + y + z)\,ds$ ، که در آن C فصل مشترک صفحهٔ $x = y$ و کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ در یکهشت اول است که از $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ تا $(0, 0, 2)$ پیموده شده است .

۱۲. نشان دهید که انتگرال خط $\int_C f(x, y)\,ds$ در امتداد منحنی C به معادلهٔ قطبی $r = r(\theta)$ $(\alpha \le \theta \le \beta)$ مساوی است با

$$\int_\alpha^\beta f(r\cos\theta, r\sin\theta)\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta.$$

۱۳. بااستفاده‌از مسئلهٔ قبل، $\int_C (x - y)\,ds$ را درصورتی حساب کنید که C دایرهٔ $x^2 + y^2 = 2x$ باشد که یکبار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده است .

۱۴. فرض کنید بر یک ذرهٔ متحرک به سرعت $\mathbf{v}$ نیروی $\mathbf{F}$ وارد است که همواره بر $\mathbf{v}$ عمود می‌باشد . نشان دهید کار انجام شده توسط $\mathbf{F}$ بر ذره صفر است .

۱۵. کار نیروی $\mathbf{F} = 3x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$ وارد بر یک ذرهٔ متحرک در امتداد قوس سهموی $y = 4x^2$ از $(0, 0)$ تا $(1, 4)$ را بیابید .

۱۶. کار نیروی $\mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} - xy^2\mathbf{j}$ وارد بر ذرهٔ متحرکی که یکبار مربع C محدود به خطوط

$x = \pm 1$ و $y = \pm 1$ را می‌پیماید بیابید.

۱۷. یک تعمیرکار به وزن 150-lb که کیسه‌ای سیمان به وزن 25-lb را حمل می‌کند از یک پلکان مارپیچ حول یک‌سیلوی استوانه‌ای به‌شعاع 10 ft بالا می‌رود. ارتفاع سیلو 60 ft بوده و پلکان دقیقاً سه دور کامل دور سیلو می‌زند. تعمیرکار با بالارفتن از پلکان چه مقدار کار انجام داده است؟

۱۸. در مسئلهٔ قبل، اگر کیسه سوراخ بوده و ضمن بالارفتن 12 lb سیمان تدریجاً بریزد، کار انجام شده چقدر است؟

انتگرال خط داده شده از نوع $\int_C P\,dx + Q\,dy$ یا $\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ را حساب کنید.

۱۹. $\int_C x\,dy$ ، که در آن C پاره‌خط از $(0, 0)$ تا $(2, -3)$ است

۲۰. $\int_C y\,dx$ ، که در آن C پاره‌خط از $(2, 6)$ تا $(7, 1)$ است

۲۱. $\int_C x\,dy - y\,dx$ ، که در آن C پاره‌خط از $(a, 0)$ تا $(0, b)$ است

۲۲. $\int_C \sin x\,dy - \cos y\,dx$ ، که در آن C پاره‌خط از $(0, 0)$ تا $(\pi/3, \pi/6)$ است

۲۳. $\int_C (x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy$ ، که درآن C قوس‌مستدیر $x = \cos t,\ y = \sin t$ $(0 \le t \le \pi/2)$ است

۲۴. $\int_C \frac{(x - y)\,dx + (x + y)\,dy}{x^2 + y^2}$ ، که‌درآن C نیمدایرهٔ $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t$ $(0 \le t \le \pi)$ است

۲۵. $\int_C (x + y)\,dx + (x - y)\,dy$ ، که در آن C بیضی $x = \sin t,\ y = 2\cos t$ $(0 \le t \le 2\pi)$ است

۲۶. $\int_C \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$ ، که در آن C مربع به رئوس $(1, 0)$، $(0, 1)$، $(-1, 0)$ ، و $(0, -1)$ است که یکبار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده است

۲۷. $\int_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + xy + y^2}$ ، که در آن C دایرهٔ $x = a\cos t,\ y = a\sin t$ $(0 \le t \le 2\pi,\ a > 0)$ است

۲۸. $\int_C xy\,dx + x^2\,dy$ ، که در آن C منحنی بستهٔ محدود به سهمیهای $y = x^2$ و $y^2 = x$ است که یکبار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده است

۲۹. $\int_C x\,dx + (x-y)\,dy + (x+y+z)\,dz$ ، که در آن C پاره‌خط از $(1, 0, -1)$ تا $(2, 3, 4)$ است

۳۰. $\int_C (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$ ، که در آن C همان قوس مارپیچ مسئلهٔ ۸ است

۳۱. $\int_C e^x\,dx + e^y\,dy + e^z\,dz$ ، که در آن C همان مکعبی پیچ خوردهٔ مثال ۴ است

انتگرال $\int_C (x^2 + y)\,dx + (y^2 - x)\,dy$ را در امتداد مسیر داده شده از نقطهٔ $(0, 0)$ تا $(1, 2)$ حساب کنید.

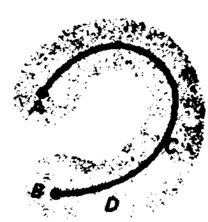
۳۲. پاره‌خط از $(0, 0)$ تا $(1, 2)$

۳۳. مسیر چندضلعی از $(0, 0)$ تا $(1, 0)$ و سپس از $(1, 0)$ تا $(1, 2)$

۳۴. قوس سهموی $y = 2x^2$ $(0 \le x \le 1)$

۲.۱۵ استقلال از مسیر و میدانهای گرادیان

قلمروها و مسیرها. فرض کنیم D مجموعه‌ای از نقاط در صفحه یا فضا بوده، و به ازای هر جفت از نقاط A و B در D یک‌منحنی‌مانند C با نقطهٔ شروع A و نقطهٔ پایان B موجود باشد که کاملاً در D قرار گیرد. در این صورت، گوییم D **همبند** (**قوسوار**) است. یک‌مجموعهٔ همبند *باز* را **قلمرو** می‌نامیم (آن را با قلمرو تابع خلط نکنید). مثلاً، شکل ۴ یک قلمرو دوبعدی D را با دو نقطهٔ A و B آن نشان می‌دهد که با منحنی C که کاملاً در D است به هم وصل شده‌اند. توجه کنید که چون قلمرو D باز است، شامل مرز خود نیست.



شکل ۴

منظور از یک منحنی بستهٔ *ساده* یعنی نمودار یک تابع برداری پیوسته مانند $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ $(a \le t \le b)$ در صفحه یا فضا با نقاط انتهایی منطبق بر هم یعنی $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ ، ولی بدون خود قطعی دیگر (صفحهٔ ۷۳۸ را به یاد آورید) . ناحیهٔ دوبعدی D را **همبند ساده** گوییم اگر به ازای هر منحنی بستهٔ سادهٔ C واقع در D ، ناحیهٔ مرکب از C ودرونش نیز در D جا داشته باشند . در غیر این صورت ، قلمرو را **همبند چندگانه** می‌نامیم . مثلاً ، قلمرو شکل ۴ همبند ساده است ، زیرا درون هر منحنی بستهٔ سادهٔ واقع در D فقط از نقاط متعلق به D تشکیل شده است ؛ این صرفاً " بدان خاطر است که D سوراخ ندارد . از آن‌سو ، قلمرو E شکل ۵ ، که سوراخدار است ، همبند چندگانه است ، زیرا درون هر منحنی بستهٔ ساده در E اطراف سوراخ نقاطی را شامل است که تعلق به E ندارد .

شکل ۵

به ازای دو نقطهٔ A و B ، یک مسیر از A به B یعنی منحنی قطعه قطعه هموار مانند C با نقطهٔ شروع A و نقطهٔ پایان B (که بیش از تعدادی متناهی خود قطعی نداشته باشد). به‌طورکلی ، مقدار انتگرال خط $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ در امتداد مسیر C از نقطهٔ A به نقطهٔ B نه فقط به A و B وابسته است بلکه به مسیر خاصی از A به B نیز بستگی دارد . مثلاً ، این امر در مثال ۵ ، صفحهٔ ۱۴۲۸، صحت دارد . لیکن ، حالات بسیاری وجود دارند که در آنها انتگرال خط **مستقل *از* مسیر** است ، بدین معنی که مقدارش فقط تابع نقاط انتهایی C بوده و به خود مسیر C بستگی ندارد . همانطور که درقضیهٔ زیر نشان داده‌ایم ، شرط لازم و کافی برای آنکه انتگرال خط $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ روی قلمرو D از مسیر مستقل باشد آن است که انتگرالده $\mathbf{F}$ یک **میدان گرادیان** باشد ، بدین معنی که تابع اسکالر مشتقپذیری چون $U = U(x, y)$ تعریف شده بر D موجود باشد که $\mathbf{F}$ گرادیان آن باشد ؛ یعنی ، $\mathbf{F} = \text{grad } U = \nabla U$. قضیه برای میدان دو بعدی $\mathbf{F}$ بیان شده است ، لیکن به آسانی می‌توان آن را به $\mathbf{F}$ سه‌بعدی تعمیم داد .

قضیهٔ ۱ (انتگرالهای خط مستقل از مسیر و میدانهای گرادیان) . *فرض کنیم میدان برداری* $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ *بر قلمرو* D *پیوسته باشد . در این صورت ، انتگرال خط*

$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C P\,dx + Q\,dy$ بر D مستقل از مسیر است اگر و فقط اگر تابعی چون $U = U(x, y)$ تعریف شده بر D موجود باشد به طوری که $\mathbf{F} = \operatorname{grad} U$ یا معادلاً

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Q = \frac{\partial U}{\partial y}. \tag{۱}$$

برهان. ابتدا فرض کنیم $\mathbf{F} = \operatorname{grad} U$، و C را یک منحنی هموار در D از A به B به معادلات پارامتری

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \qquad (a \le t \le b)$$

می‌گیریم. از رابطهٔ (۱) داریم

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C P\,dx + Q\,dy = \int_a^b P(x(t), y(t))x'(t)\,dt + \int_a^b Q(x(t), y(t))\,y'(t)\,dt$$
$$= \int_a^b \left[U_x(x(t), y(t))\,x'(t) + U_y(x(t), y(t))\,y'(t)\right]dt,$$

که در آن $U_x = \partial U/\partial x$ و $U_y = \partial U/\partial y$، و پریم مشتقگیری نسبت به t را نشان می‌دهد. با اعمال قاعدهٔ زنجیره‌ای، و به کمک قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، خواهیم داشت

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \frac{d}{dt}[U(x(t), y(t)]\,dt = U(x(b), y(b)) - U(x(a), y(a)),$$

این را می‌توان به طور فشردهٔ زیر نوشت:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = U(B) - U(A), \tag{۲}$$

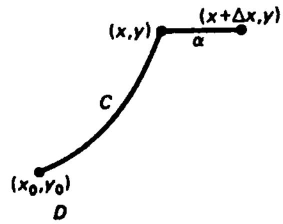
که در آن $U(A)$ و $U(B)$ مقادیر U در $A = (x(a), y(a))$ و $B = (x(b), y(b))$ اند. اگر C فقط قطعه قطعه هموار باشد، همین نتیجه پس از تقسیم C به قوسهای هموار به دست می‌آید (شرح مطلب را به عنوان تمرین می‌گذاریم). چون عبارت $U(B) - U(A)$ از مسیر مستقل است، همین امر در مورد خود انتگرال خط $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ درست خواهد بود.

به عکس، فرض کنیم $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ مستقل از مسیر باشد. همچنین، (x_0, y_0) نقطهٔ ثابتی از D و (x, y) نقطهٔ متغیری از D بوده، و $U = U(x, y)$ تابع اسکالر تعریف شده با انتگرال خط

$$U = \int_C P\,dx + Q\,dy \tag{۳}$$

باشد، که در آن C مسیری دلخواه از (x_0, y_0) به (x, y) است. توجه کنید که این تعریف فقط

به خاطر این معنی دارد که انتگرال (۳) از مسیر مستقل است. حال y را ثابت گرفته و به x نمو Δx می‌دهیم، $|\Delta x|$ را آنقدر کوچک می‌گیریم که، مثل شکل ۶، پاره‌خط افقی α از (x, y)



شکل ۶

تا $(x + \Delta x, y)$ داخل D قرار گیرد (این همیشه امکان دارد، زیرا D یک مجموعهٔ بازاست).
در این صورت،

$$U(x + \Delta x, y) = \int_{C+\alpha} P\,dx + Q\,dy = \int_C P\,dx + Q\,dy + \int_\alpha P\,dx + Q\,dy,$$

که در آن $C + \alpha$ مسیر حاصل از اتصال نقطهٔ شروع α به نقطهٔ پایان C است. با استفاده از (۳) و اینکه در امتداد α، $dy = 0$، خواهیم داشت

$$U(x + \Delta x, y) - U(x, y) = \int_\alpha P\,dx + Q\,dy = \int_\alpha P\,dx.$$

اما

$$\int_\alpha P\,dx = \int_x^{x+\Delta x} P(t, y)\,dt \qquad (\text{ثابت } y)$$

و درنتیجه، بنابر قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرالهای معمولی،

$$U(x + \Delta x, y) - U(x, y) = P(u, y)\,\Delta x \qquad (x \leq u \leq x + \Delta x),$$

که در آن وقتی $\Delta x \to 0$، $u \to x$. بنابراین، طبق پیوستگی P،

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x + \Delta x, y) - U(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} P(u, y) = P(x, y),$$

و استدلالی مشابه‌مستلزم پاره‌خط قائم از (x, y) تا $(x, y + \Delta y)$ نشان می‌دهد که

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y).$$

لذا ، $\mathbf{F} = \mathbf{grad}\ U$ ، که در آن U تابعی است که با انتگرال خط مستقل از مسیر تعریف شده است .

قضیهٔ اساسی انتگرالهای خط . *انتگرال خط مستقل از مسیر* $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ *تنها به نقاط انتهایی* A *و* B *مسیر* C *بستگی دارد ؛ و لذا ، گاهی به شکل* $\int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ *نوشته می‌شود (البته ، اگر انتگرال خط تابع مسیر باشد ، این نماد نامناسب خواهد بود) . لذا ، فرمولهای (۲) و (۳) را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت :*

$$\int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = U(B) - U(A) \tag{۴}$$

و

$$U = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P\,dx + Q\,dy.$$

فرمول (۴) ، یا معادلش

$$\int_A^B \nabla U\cdot d\mathbf{r} = U(B) - U(A)$$

$(\nabla U = \mathbf{grad}\ U)$ مشابه چند متغیرهٔ قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال است ، و به این دلیل گاهی قضیهٔ *اساسی انتگرالهای خط* نامیده می‌شود .

تبصره . اگر قرار دهیم

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k},$$

و

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

قضیهٔ ۱ برقرار می‌ماند

در اینجا طبعاً به جای (۱) داریم

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad R = \frac{\partial U}{\partial z},$$

که یک فرمول بیشتر دارد .

مثال ۱. در مثال ۷، صفحهٔ ۱۴۴۰، دریافتیم که انتگرال خط

$$I = \int_C y^2\,dx + 2xy\,dy$$

در امتداد چهار مسیر مختلف از $(0,0)$ تا $(1,1)$ مقدار یکسان 1 را دارد. حال، با استفاده از قضیهٔ ۱، می‌توان حکم کرد که به ازای هر مسیر C از $(0,0)$ تا $(1,1)$، $I = 1$، زیرا $I = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$، که در آن $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$ یک میدان گرادیان (روی تمام صفحهٔ xy) است. در واقع، لحظه‌ای تأمل معلوم می‌سازد که $\mathbf{F}$ گرادیان تابع

$$U = U(x, y) = xy^2$$

بوده، و در این صورت فرمول (۲) نتیجه می‌دهد که

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = U(1, 1) - U(0, 0) = 1 - 0 = 1.$$

تشخیص میدان گرادیان معمولاً آسان نیست، و ما بعداً آزمونی مبتنی بر مؤلفه‌های $\mathbf{F}$ را ثابت می‌کنیم که با آن می‌توان وجود یا عدم وجود تابع U که $\mathbf{F} = \operatorname{grad} U$ را ثابت کرد. اگر تابع U موجود باشد، آن را می‌توان با محاسبهٔ انتگرال خط (۳) به دست آورد.

مثال ۲. در مثال ۵، صفحهٔ ۱۴۳۸، دیدیم که انتگرال خط

$$I = \int_C xy\,dx + (y - x)\,dy$$

از مسیر مستقل نیست، و این را با نشان دادن اینکه مقادیرش به ازای مسیرهای مختلف بین دو نقطه متفاوتند ثابت کردیم. مستقل از مسیر نبودن I را می‌توان، بدون محاسبهٔ انتگرالهای خط، از قضیهٔ ۱ نتیجه گرفت. زیرا فرض کنیم I مستقل از مسیر باشد. دراین صورت، طبق قضیهٔ ۱، تابعی چون U وجود دارد به‌طوری که

$$\frac{\partial U}{\partial x} = xy, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = y - x.$$

اما این ناممکن است، زیرا در این صورت

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} = -1, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x} = x,$$

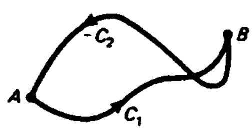
که با این امر مسلم که مشتقات جزئی دوم مخلوط $\partial^2 U/\partial x\,\partial y$ و $\partial^2 U/\partial y\,\partial x$ درصورت پیوستگی باید متحداً مساوی باشند در تضاد است (ر.ک. صفحهٔ ۱۲۳۹).

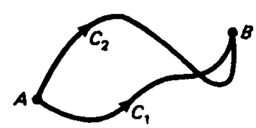
فرض کنیم انتگرال خط $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ بر قلمرو D مستقل از مسیر باشد، یا معادلاً " $\mathbf{F}$ بر D یک میدان گرادیان باشد. همچنین، C مسیر بسته‌ای در D باشد؛ یعنی، مسیری که نقاط انتهایی A و B آن یکی هستند. در این صورت، با گذاردن $A = B$ در فرمول (۲)، فوراً " حاصل می‌شود که

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0. \qquad (۵)$$

به عکس، هرگاه (۵) به ازای هر مسیر بسته در D برقرار باشد، آنگاه انتگرال خط $\mathbf{F}$ بر D مستقل از مسیر است. برای مشاهدهٔ این امر، فرض کنیم C_1 و C_2 دو مسیر از A تا B، مثل شکل ۷ (آ)، باشند. در این صورت، مسیر C که از اتصال نقطهٔ شروع C_2- به‌نقطهٔ پایان C_1، مثل شکل ۷ (ب)، به دست می‌آید بسته است. بنابراین، طبق فرض،

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$





شکل ۷

پس نتیجه می‌شود که

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

یا معادلاً "، به کمک فرمول (۱۳)، صفحهٔ ۱۴۳۶،

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

تبصره. در واقع، می‌توان نشان داد که فرض برقراری (۵) به ازای هر مسیر بستهٔ *سادهٔ* C در قلمرو D استقلال از مسیر انتگرال خط $\mathbf{F}$ بر D را تضمین می‌کند (ر.ک. مسئلهٔ ۳۷).

گردش. اگر C یک مسیر بسته باشد، کمیت $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ **گردش $\mathbf{F}$ حول C** نام دارد، و اغلب با

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

نموده می‌شود. در نماد $\oint$ معمولا" فرض می‌شود که مسیر C ساده بوده و خود قطعبی جز نقاط انتهایی منطبق برهم ندارد. از قضیهٔ ۱ و نکات فوق معلوم می‌شود که گردش یک میدان گرادیان حول هر مسیر بسته صفر است.

مثال ۳. گردش میدان

$$\mathbf{F} = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2 + y^2} \qquad (x^2 + y^2 \neq 0)$$

را حول دایرهٔ C به مرکز مبداء که یکبار خلاف جهت عقربه‌های ساعت پیموده شده است حساب کنید.

حل. میدان $\mathbf{F}$ بر قلمرو همبند چندگانهٔ D مرکب از تمام نقاط صفحهٔ xy جز مبداء تعریف شده‌است. اگردایرهٔ C به‌شعاع a باشد، دارای‌نمایش‌پارامتری $x = a \cos t,\ y = a \sin t$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ است. بنابراین،

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \oint_C \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{(-a \sin t)(-a \sin t) + (a \cos t)(a \cos t)}{(a \cos t)^2 + (a \sin t)^2}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.\end{aligned}$$

چون گردش حول C ناصفر است، نتیجه می‌شود که $\mathbf{F}$ بر D میدان گرادیان نیست.

انرژی پتانسیل و بقای انرژی. تابع U قضیهٔ ۱، بلکه قرینه‌اش، تعبیر فیزیکی مهمی دارد. میدان برداری $\mathbf{F}$ را نیروی متغیری می‌گیریم که بر ذره‌ای به جرم m عمل می‌کند. همانطورکه در صفحهٔ ۱۴۳۴ دیدیم،

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \tag{۶}$$

که در آن v_A تندی ذره در A و v_B تندی آن در B است. طرف راست (۶) کار W ی‌نیروی $\mathbf{F}$ بر ذره ضمن حرکت در امتداد مسیر C از A و B بوده، و طرف چپ تغییر نظیر در انرژی

جنبشی ذره می‌باشد.

حال فرض کنیم $\mathbf{F}$ یک میدان گرادیان باشد؛ یعنی، $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla U(\mathbf{r})$. بنابر قضیهٔ ۱،

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(B) - U(A), \tag{۷}$$

و از تلفیق (۶) و (۷) معلوم می‌شود که

$$\frac{1}{2} mv_A^2 - U(A) = \frac{1}{2} mv_B^2 - U(B). \tag{۸}$$

برای تغییر علامت منهای (۸) به علاوه، تابع جدید $V(\mathbf{r}) = -U(\mathbf{r})$ به‌نام *انرژی پتانسیل* ذره یا **پتانسیل** میدان $\mathbf{F}$، را معرفی می‌کنیم؛ درنتیجه، $\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r})$. (چون گرادیان یک ثابت صفر است، U و V فقط با تقریب یک ثابت جمعی مثبت تعیین می‌شوند.) در این صورت، معادلهٔ (۸) خواهد شد

$$\frac{1}{2} mv_A^2 + V(A) = \frac{1}{2} mv_B^2 + V(B), \tag{۸'}$$

و می‌گوید که وقتی ذره در یک میدان گرادیان حرکت کند، مجموع انرژی جنبشی $\frac{1}{2}mv^2$ و انرژی پتانسیل V آن ثابت می‌ماند، یا به زبان فیزیک " حفظ می‌شود". این امر، که نقشی کلیدی در مکانیک نیوتنی دارد، **قانون *بقای انرژی*** نامیده شده و مقدار مشترک مجموعهای ('۸) ***انرژی کل*** ذره نام دارد. در این وضع، میدانهای گرادیان، که به بقای انرژی منجر می‌شوند، نیز ***میدانهای بقا*** نامیده می‌شوند. معادلهٔ (۷) برحسب پتانسیل V به شکل زیر درمی‌آید:

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = V(A) - V(B), \tag{۷'}$$

و می‌گوید که مقدار کار W میدان بقای $\mathbf{F}$ بر ذرهٔ متحرکی از A تا B به مسیر بین A و B وابسته نبوده، و مساوی کاهش V، یا " افت پتانسیل " ضمن رفتن از A تا B است.

یک میدان برداری‌را **به‌طور پیوسته‌مشتقپذیر** گوییم اگر مشتقات جزئی اول مؤلفه‌هایش موجود و پیوسته باشند. قضیهٔ زیر روابطی را توصیف می‌کند که باید برای مؤلفه‌های یک میدان گرادیان به‌طور پیوسته مشتقپذیر برقرار باشند.

قضیهٔ ۲ (شرایط وارد بر مؤلفه‌های یک میدان گرادیان). *فرض کنیم* $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ *یک میدان گرادیان به‌طور پیوسته مشتقپذیر بر قلمرو D با مؤلفه‌های* $P = P(x, y, z)$ ،

$Q = Q(x, y, z)$ ، و $R = R(x, y, z)$ باشد. در این صورت، در هر نقطهٔ از D ،

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \qquad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \tag{۹}$$

برهان. چون $\mathbf{F}$ یک میدان گرادیان است، تابعی مانند $U = U(x, y, z)$ تعریف شده بر D وجود دارد به طوری که

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad R = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

بنابراین،

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y\, \partial x},$$
$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y\, \partial z}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial y},$$
$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial x}, \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial z},$$

که در آن پیوستگی هر مشتق جزئی اول سمت چپ پیوستگی مشتق جزئی دوم سمت راست را ایجاب می‌کند. اما، در این صورت، بنابر نکتهٔ بعداز مثال ۴، صفحهٔ ۱۲۳۹،

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y\, \partial x}, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial y\, \partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial z},$$

و این فرمولها با (۹) معادل می‌باشند.

در حالت میدان گرادیان دوبعدی $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ ، توابع P و Q فقط تابع x و y بوده، و مؤلفهٔ z ، R وجود ندارد. در این صورت، معادلات (۹) به تنها شرط

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \tag{۹'}$$

تحویل می‌شود.

لذا، عدم برقراری شرایط (۹)، یا شرط (۹') در حالت دوبعدی، به ما می‌گوید که $\mathbf{F}$ میدان گرادیان نیست. این امر سئوال زیر را مطرح می‌سازد: آیا برقراری (۹) یا (۹') بر قلمرو D میدان گرادیان بودن $\mathbf{F}$ بر D را تضمین می‌کند؟

با کمال تعجب، جواب منفی است، و این را مثال زیر نشان خواهد داد.

مثال ۴. فرض کنیم میدان $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ همانند مثال ۳ باشد. در این صورت،

$$P = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \qquad Q = \frac{x}{x^2 + y^2} \qquad (x^2 + y^2 \neq 0),$$

و $\mathbf{F}$ بر قلمرو همبند **چندگانه**ٔ D مرکب از تمام نقاط صفحهٔ xy جز مبداء تعریف‌شده‌است. با محاسبهٔ مشتقات جزئی $\partial Q/\partial x$ و $\partial P/\partial y$، به آسانی معلوم می‌شود که

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

درنتیجه، شرط (۹') در هر نقطه از D برقرار است. با اینحال، همانطور که در مثال ۳ نشان دادیم، $\mathbf{F}$ بر D میدان گرادیان نیست.

آزمون میدان گرادیان. چون قلمرو D مثال ۴ همبندچندگانه‌است، امکان‌آنکه شرط(۹') میدان گرادیان بودن $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ را در صورت همبند *ساده* بودن D تضمین کند هنوز وجود دارد. همانطور که بعداً" می‌بینیم، این امر صحت دارد (ر.ک. نتیجهٔ۲، صفحهٔ ۱۴۸۳). در قضیهٔ زیر نتیجه‌رافقط برای قلمرو *مستطیلی*، که البته قلمرو همبند ساده ازنوع مقدماتی خاصی است، ثابت می‌کنیم. در مسئلهٔ ۲۰ می‌بینید که این قضیه‌صورت سه‌بعدی نیز دارد.

قضیهٔ ۳ (آزمون میدان گرادیان بر قلمرو مستطیلی). *فرض کنیم مؤلفه‌های $P = P(x, y)$ و $Q = Q(x, y)$ میدان برداری به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ در هر نقطه از قلمرو مستطیلی $D = \{(x, y): a < x < b, c < y < d\}$ در شرط*

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

صدق نمایند. در این صورت، $\mathbf{F}$ یک میدان گرادیان بر D است؛ و در واقع، $\mathbf{F}$ گرادیان تابع

$$U = U(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t)\,dt \tag{10}$$

است، که در آن (x_0, y_0) نقطهٔ ثابتی از D و (x, y) نقطهٔ متغیری از D می‌باشد.

برهان. فرض کنیم $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ یک میدان گرادیان بر D باشد. در این صورت، انتگرال

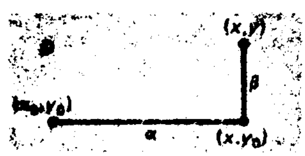
خط $\mathbf{F}$ بر D مستقل از مسیر است و ، همانند برهان قضیهٔ ۱ ، $\mathbf{F}$ گرادیان تابع زیر است :

$$U = \int_C P\,dx + Q\,dy,$$

که در آن C مسیری در D از نقطهٔ ثابت (x_0, y_0) به نقطهٔ متغیر (x, y) از D می‌باشد . مسیر C از پاره‌خط افقی α ی مرسوم از (x_0, y_0) به (x, y_0) و پس از آن پاره‌خط قائم β ی مرسوم از (x, y_0) تا (x, y) تشکیل شده است . همانطور که در شکل ۸ نشان دادیم ، این مسیر ، صرف نظر از انتخاب (x_0, y_0) و (x, y) ، همواره در قلمرو مستطیلی D قرار دارد . لذا ،

$$U = \int_C P\,dx + Q\,dy = \int_\alpha P\,dx + Q\,dy + \int_\beta P\,dx + Q\,dy = \int_\alpha P\,dx + \int_\beta Q\,dy,$$

زیرا بر α ، $dy = 0$ و بر β ، $dx = 0$ ، و این بلافاصله فرمول (۱۰) را به ما می‌دهد ،که در آن در هر دو انتگرال سمت راست که انتگرالهای معین عادی هستند از متغیر ظاهری انتگرالگیری t استفاده شده است (در انتگرالده دوم x ثابت گرفته شده است) .



شکل ۸

فرمول (۱۰) با این فرض به دست آمد که $\mathbf{F}$ یک میدان گرادیان است ، که ما در واقع سعی در اثبات آن داریم! اما اگر معلوم شود که گرادیان U مساوی $\mathbf{F}$ است ، موفق به اثبات قضیه خواهیم شد . لذا ، اینک به محاسبهٔ مشتقات جزئی U می‌پردازیم . اولین انتگرال سمت راست (۱۰) مستقل از y است ، ولی هر دو انتگرال تابع x می‌باشند . لذا ، ابتدا از (۱۰) نسبت به y مشتق گرفته ، به دست می‌آوریم

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int_{y_0}^{y} Q(x, t)\,dt = Q(x, y) \tag{۱۱}$$

(قضیهٔ ۵ ، صفحهٔ ۴۰۵) .حال ، با استفاده از مسئلهٔ ۵۱ ، صفحهٔ ۱۳۴۰، از (۱۰) نسبت به x مشتق می‌گیریم . نتیجه خواهد شد

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\,dt + \frac{\partial}{\partial x}\int_{y_0}^{y} Q(x, t)\,dt = P(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x}\,dt.$$

اما ، به خاطر شرط $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$ و تغییر y به متغیر ظاهری t ،

$$\int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} dt = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} dt = P(x, y) - P(x, y_0).$$

از تلفیق دو معادلهٔ اخیر ، معلوم می‌شود که

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = P(x, y_0) + P(x, y) - P(x, y_0) = P(x, y), \tag{۱۱}$$

که همراه با (۱۱) نشان می‌دهد که

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Q = \frac{\partial U}{\partial y},$$

یا معادلا" $\mathbf{F} = \mathbf{grad}\, U$.

مثال ۵. فرض کنیم

$$P(x, y) = \frac{1}{y}, \qquad Q(x, y) = -\frac{x}{y^2} \qquad (y \neq 0), \tag{۱۲}$$

و $D = \{(x, y): a < x < b, c < y < d\}$ یک قلمرو مستطیلی باشد که نقطه‌ای از محور x (خط $y = 0$) را ندارد . در این صورت ، چون

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{y^2} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

از قضیهٔ ۳ نتیجه می‌شود که

$$\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} = \frac{y\mathbf{i} - x\mathbf{j}}{y^2}$$

یک میدان گرادیان بر D است . لذا ، $\mathbf{F}$ یک میدان گرادیان بر نیمصفحهٔ بـالایی $y > 0$ است ، که می‌توان‌آن‌را قلمرو مستطیلی‌بی‌کران $D = \{(x, y): -\infty < x < \infty, 0 < y < \infty\}$ گرفت ، و بر نیمصفحهٔ پایینی $y < 0$ نیز چنین می‌باشد .

ممکن است دریافته باشید که $\mathbf{F}$ گرادیان تابع $U(x, y) = x/y$ است ، ولی اگـر متوجه نشده‌اید ، می‌توانید $U(x, y)$ را با استفاده از فرمول (۱۰) بسازید . در واقع ، با گذاردن (۱۲) در (۱۰) و انتخاب $x_0 = 0$ و $y_0 = 1$ ، به دست می‌آوریم

$$U(x, y) = \int_0^x dt - \int_1^y \frac{x}{t^2} dt = \frac{x}{y}.$$

اثر انتخاب مقادیر مختلف x_0 و y_0 صرفا" معرفی ثابت انتگرالگیری است . مثلا" ، انتخاب

$x_0 = y_0 = 1$ نتیجه می‌دهد که

$$U(x, y) = \int_1^x dt - \int_1^y \frac{x}{t^2}\, dt = \frac{x}{y} - 1.$$

لذا، شکل کلی $U(x, y)$ عبارت است از

$$U(x, y) = \frac{x}{y} + C,$$

که در آن C ثابت دلخواهی می‌باشد. رابطهٔ $\mathbf{F} = \mathbf{grad}\ U$ را با محاسبهٔ مستقیم امتحان کنید.

تابع $U(x, y)$ همان رابطه را با میدان برداری $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ دارد که پادمشتق $U(x)$ با تابع یک‌متغیرهٔ $F(x)$ داراست، و بخصوص $U(x, y)$ فقط با تقریب یک‌ثابت جمعی دلخواه تعریف شده است. تفاوت اساسی در این است که اگرچه هر تابع پیوسته بر یک بازه مانند $F(x)$ پاد مشتق دارد، تنها بعضی از میدانهای به‌طور پیوسته مشتقپذیر بر یک قلمرو مستطیلی مانند $\mathbf{F}(x, y)$ "مشتق" تابعی چون $U(x, y)$ اند، و این توابع آنهایی هستند که در "شرط انتگرالپذیری" $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$ صدق می‌کنند.

مسائل

آیا میدان برداری $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ با مؤلفه‌های $P = P(x, y)$ و $Q = Q(x, y)$ میدان گرادیان‌است؟ اگر چنین است، تابع U و قلمرو D را بیابید که بر آن $\mathbf{F} = \mathbf{grad}\ U$.

۱. $P = e^x \sin y, Q = e^x \cos y$

۲. $P = x \ln y, Q = -x/y$

۳. $P = x^2 + y^2, Q = x^3 + 2xy$

۴. $P = x + \ln y, Q = (x/y) + \sin y$

۵. $P = 4x^3y^3 - 3y^2, Q = 3x^4y^2 - 6xy$

۶. $P = x^2 + xy^3, Q = x^2y^2 - 2y$

۷. $P = xe^y, Q = ye^x$

۸. $P = x \sin 2y, Q = x^2 \cos 2y$

۹. $P = y - (\sin^2 y)/x^2, Q = x + (\sin 2y)/x$

۱۰. $P = 2x \cos^2 y, Q = 2y - x^2 \sin 2y$

تحقیق کنید که میدان نیروی $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ بقا است، و سپس، با استفاده از فرمول (۷)،

کار W ی نیروی $\mathbf{F}$ وارد بر ذرهٔ متحرک از A تا B را حساب کنید.

۱۱) $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j},\ A = (0, 1),\ B = (-3, 4)$

۱۲) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j},\ A = (-1, 1),\ B = (2, 3)$

۱۳) $\mathbf{F} = (x + y)(\mathbf{i} + \mathbf{j}),\ A = (-13, 0),\ B = (5, 12)$

۱۴) $\mathbf{F} = (2x + 3y)\mathbf{i} + (3x - 2y)\mathbf{j},\ A = (-4, 6),\ B = (1, -2)$

۱۵) $\mathbf{F} = [(x + y + 1)e^x - e^y]\mathbf{i} + [e^x - (x + y + 1)e^y]\mathbf{j},\ A = (0, 0),\ B = (\ln 3, \ln 2)$

۱۶) $\mathbf{F} = (\sinh x + \cosh y)\mathbf{i} + (x \sinh y + 2)\mathbf{j},\ A = (0, \ln 4),\ B = (\ln 2, 0)$

۱۷. گردش میدان

$$\mathbf{F} = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2 + 4y^2} \qquad (x^2 + y^2 \neq 0)$$

را حول دایرهٔ C به مرکز مبداء که یکبار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده است حساب کنید.

۱۸. نشان دهید که قضیهٔ ۳ در صورت تعویض فرمول (۱۰) با

$$U = U(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, t)\,dt$$

برقرار می‌ماند.

۱۹. نیروی جاذبهٔ ثقلی وارد بر ذرهٔ Q به جرم یک در نقطه به بردار موضع $\mathbf{R}$ ازسوی ذره P به جرم M در نقطه‌ای به بردار موضع $\mathbf{R}_1$ مساوی است با $\mathbf{F} = -(GM/r^2)\mathbf{u}$، که در آن G ثابت عمومی ثقل بوده، $\mathbf{r} = \mathbf{R} - \mathbf{R}_1$، $r = |\mathbf{r}|$، و $\mathbf{u} = \mathbf{r}/r$ بردار یکه از P_1 به Q است. نشان دهید که، برحسب **پتانسیل ثقلی** $U = GM/r$ (فیزیکدانان $V = -U$ را پتانسیل ثقلی می‌نامند)، $\mathbf{F} = \text{grad}\ U$. به‌طورکلی، نشان دهید هرگاه Q به‌وسیلهٔ n ذرهٔ $P_1, \ldots, P_n$ به جرمهای $M_1, \ldots, M_n$ در نقاطی به بردارهای موضع $\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_n$ جذب گردد، آنگاه نیروی برآیند $\mathbf{F}$ وارد بر Q مجدداً مساوی است با $\mathbf{F} = \text{grad}\ U$ که در آن

$$U = \sum_{i=1}^{n} \frac{GM_i}{r_i} \qquad (r_i = |\mathbf{R} - \mathbf{R}_i|).$$

۲۰. صورت سه‌بعدی زیر از قضیهٔ ۳ را ثابت کنید: فرض کنید مؤلفه‌های $P = P(x, y, z)$، $Q = Q(x, y, z)$، و $R = R(x, y, z)$ میدان برداری به‌طور پیوسته‌مشتق‌پذیر $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ به ازای هر نقطه از قلمرو مستطیلی

$$D = \{(x, y, z): a < x < b, c < y < d, A < z < B\}$$

در شرایط زیر صدق نمایند:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}, \qquad \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}$$

در این صورت، $\mathbf{F}$ یک میدان گرادیان D است؛ و در واقع، $\mathbf{F}$ گرادیان تابع

$$U = U(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0, z_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t, z_0)\,dt + \int_{z_0}^{z} R(x, y, t)\,dt \qquad \text{(یک)}$$

است، که در آن (x_0, y_0, z_0) نقطهٔ ثابتی از D و (x, y, z) نقطهٔ متغیری از D می‌باشد.

آیا میدان برداری $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ با مؤلفه‌های دادهٔ $P = P(x, y, z)$، $Q = Q(x, y, z)$ و $R = R(x, y, z)$ میدان گرادیان است؟ درصورت بودن، تابع U و قلمرو D را طوری بیابیدکه بر آن $F = \text{grad } U$. (ر.ک. مسئلهٔ ۲۰ و، درصورت لزوم، از فرمول (یک) استفاده نمایید.)

۲۱. $P = y + z, Q = x + z, R = x + y$

۲۲. $P = y - z, Q = x - z, R = x - y$

۲۳. $P = yz, Q = xz, R = xy$

۲۴. $P = xyz, Q = \frac{1}{2}x^2z, R = \frac{1}{2}x^2y$

۲۵. $P = 2xy, Q = \ln(1 + x^2), R = \ln(1 + z^2)$

۲۶. $P = yz\cos xy, Q = xz\cos xy, R = \sin xy$

۲۷. $P = \ln y - \cos 2z, Q = (x/y) + z, R = y + 2x\sin 2z$

۲۸. $P = Q = R = 1/(x + y + z)$

۲۹. اگر تابع مشتقپذیری چون $U = U(x, y)$ موجود باشد به طوری که $dU = P\,dx + Q\,dy$، فرم دیفرانسیل $P\,dx + Q\,dy$ را ***دیفرانسیل کامل*** گویند. نشان دهید $P\,dx + Q\,dy$ دیفرانسیل کامل است اگر و فقط اگر $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ یک میدان گرادیان باشد.

۳۰. نشان دهید که $(y + xy^2)dx - x\,dy$ دیفرانسیل کامل نیست، ولی با ضرب شدن در "عامل انتگرالگیری" مناسبی چون $f(x, y)$ به این صورت درمی‌آید. $f(x, y)$ را با امتحان بیابید.

۳۱. یک راه‌آهن هوایی کودکان به ارتفاع 121 ft برده شده و سپس رها می‌شود. تندی ماکزیمم آن در پایین‌ترین نقطهٔ مسیر چقدر است؟ از مقاومت هوا و اصطکاک صرف نظر کرده، از استدلال مربوط به تبدیل انرژی پتانسیل به انرژی جنبشی استفاده نمایید. آیا جواب به وزن کل واگنها و مسافرانش بستگی دارد؟ شتاب ثقل g را $32\ \text{ft/sec}^2$ بگیرید.

۳۲. دو کودک در لبهٔ بامی به ارتفاع h ft از زمین ایستاده‌اند. اولی سنگی را باتندی v_0 پایین می‌اندازد، و در همین زمان دومی سنگ دیگری را با تندی v_0 به بالا پرت می‌کند. نشان دهید که هر دو سنگ با تندی $v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$ به زمین می‌خورند، منتها در زمانهای مختلف t_1 و t_2. زمانهای t_1 و t_2 و نیز $\Delta t = t_2 - t_1$ را بیابید.

۳۳. انرژی پتانسیل V یک‌فنر کشیده‌شده را درصورتی بیابید که نیروی بازگردان الاستیک $F = -ks$ باشد، که در آن k ثابت فنر بوده و s انبساط طولی فنر نسبت به طول طبیعی‌اش باشد (صفحهٔ ٤٣١ را به یاد آورید). وقتی $s = 0$، V را صفر بگیرید.

۳۴. عنکبوتی به‌وسیلهٔ یک تار از سقف آویزان است. فرض کنید وزن عنکبوت طول طبیعی تار را دوبرابر کرده، آن را از L به $2L$ تبدیل کند. عنکبوت برای رسیدن به سقف W کار انجام می‌دهد که با کار W_0 درصورت غیرالاستیک بودن تار به طول $2L$ صورت می‌گیرد متفاوت است. نشان دهید که $W = \frac{3}{4}W_0$.

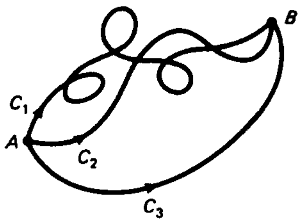
۳۵. فرض کنید T کرهٔ جامد $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$ به شعاع a بوده، و Q یک ذره به جرم یک در نقطهٔ $(0, 0, Z)$ خارج T باشد. همچنین، T به چگالی ثابت δ بوده، و T را به "گوه‌های کروی" $T_i\,(i = 1, \dots, n)$ از نوع شکل ۵۳، صفحهٔ ۱۴۱۷، افرازکنید. سپس هر T_i را ذره‌ای مانند P_i به جرم M_i بگیرید، که M_i حاصل‌ضرب δ در حجم T_i است، و مسئلهٔ ۱۹ را به ازای فاصلهٔ r_i نقطهٔ T_i تا Q اعمال کنید، و بالاخره اندازهٔ ماکزیمم تمام T_iها را به‌صفر نزدیک‌کرده، حد بگیرید تا معلوم شود که Q با نیروی $\mathbf{F} = \operatorname{grad} U$ جذب T می‌شود، که در آن پتانسیل ثقلی U با انتگرال

$$U = \iiint_T \frac{G\delta}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - Z)^2}}\, dV$$

داده می‌شود. U را حساب کرده، نشان دهید که کرهٔ جامد T نقطهٔ P را با نیرویی جذب می‌کند که گویی تمام جرمش در مرکز آن متمرکز شده است. نشان دهید این نه فقط در مورد چگالی ثابت δ، بلکه برای هر تابع چگالی به‌طور کروی متقارن $\delta = \delta(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ نیز درست است.

۳۶. نشان دهید که نیروی ثقلی خالص یک غشاء کروی همگن بر ذره‌ای در داخل آن صفر است.

۳۷. شکل ۹ دو مسیر C_1 و C_2 از A به B را نشان می‌دهد، که در آن C_1 و C_2 دوبار (در نقاطی غیر از A و B) متقاطع بوده، و C_1 سه خود قطعی دارد. فرض کنید فقط می‌دانیم که به ازای هر مسیر بستهٔ *سادهٔ* C (در قلمروی)، $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$. با معرفی مسیر دیگر C_3 از A به B، که C_1 یا C_2 را قطع نکند، نشان دهید که $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.



شکل ۹

۳.۱۵ مساحت سطح و انتگرالهای سطح

مساحت سطح. حال به *انتگرالهای سطح* رو می‌آوریم؛ یعنی، انتگرالها روی سطوحی که در حالت کلی خمیده‌اند. بحث را با مسئلهٔ تعیین مساحت نمودار یک تابع به طور پیوسته مشتقپذیر دو متغیره آغاز می‌کنیم. فرض کنیم سطح S نمودار تابع

$$z = f(x, y) \qquad ((x, y) \in R)$$

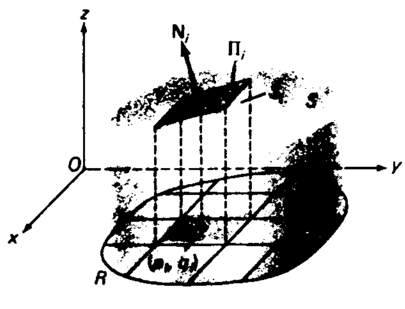
باشد، که در آن R یک ناحیهٔ نرمال در صفحهٔ xy است که در صفحهٔ ۱۳۱۸ تعریف شد، و f تابع به‌طور پیوسته مشتقپذیر می‌باشد (یعنی، مشتقات جزئی $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ موجود و پیوسته‌اند). همانند تعریف انتگرال مضاعف روی R که در بخش ۱.۱۴ داده شد، R را با رسم خطوط

$$x = x_j \quad (j = 0, 1, \ldots, J), \qquad y = y_k \quad (k = 0, 1, \ldots, K), \tag{1}$$

که در آنها

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{J-1} < x_J = b, \qquad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{K-1} < y_K = d,$$

و ناحیهٔ مستطیلی $\{(x, y): a \le x \le b, c \le y \le d\}$ شامل ناحیهٔ R است، به n زیر ناحیهٔ $R_1, R_2, \ldots, R_n$ افراز می‌کنیم. صفحات با همان معادلات (۱) موازی صفحات yz و xz بوده، و S را به n "عنصر سطح" $S_1, S_2, \ldots, S_n$ مانند عنصر S_i در شکل ۱۰ برای حالت $f(x, y) \ge 0$ تقسیم می‌کنند.



شکل ۱۰

حال در هر زیر ناحیهٔ R_i نقطهٔ دلخواه (p_i, q_i) را اختیار کرده، و نقطهٔ P_i بر S_i را طوری می‌یابیم که (p_i, q_i) تصویر آن در صفحهٔ xy باشد. سپس در هر نقطهٔ P_i صفحهٔ مماس بر S را رسم می‌کنیم. این کار n صفحهٔ مماس به ما می‌دهد که صفحات (۱) را در n ناحیهٔ مسطح $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$ قطع می‌کنند که مانند توفالهای بام چسبیده به S می‌باشند؛ در شکل ناحیهٔ Π_i برای یک عنصر سطح " درونی " S_i آمده است که تصویرش روی صفحهٔ xy مستطیلی است. فرض کنید $\Delta\sigma_i$ مساحت Π_i باشد (علامت σ سیگمای کوچک یونانی است). در این صورت، گویی مجموع $\sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i$ تقریب مناسبی است به آنچه شهودا " مساحت A_S سطح S برداشت می‌شود، و این تقریب وقتی اندازه هر عنصرسطح S_i کوچکتر شود، یعنی اندازهٔ مش

$$\mu = \max\{x_1 - x_0, \ldots, x_J - x_{J-1}, y_1 - y_0, \ldots, y_K - y_{K-1}\}$$

افراز R به صفر نزدیک شود، بهتر خواهد شد. این نکات ما را به تعریف A_S به صورت حد

$$A_S = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i \qquad (۲)$$

رهنمون می‌سازد.

حال فرض کنیم $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، و $\mathbf{k}$ بردارهای یکه‌ای در امتداد محورهای x، y، و z بوده و $\mathbf{N}_i$ یک قائم *بالایی* به Π_i (و درنتیجه، به S_i یا S) در P_i باشد؛ یعنی، بردار ناصفری عمود بر Π_i و رو به *بالا* که با محور z مثبت (و درنتیجه، با $\mathbf{k}$) زاویهٔ حادهٔ γ_i بسازد. برای تبدیل (۲) به انتگرال مضاعف روی R، می‌بینیم که اگر ΔA_i مساحت زیرناحیهٔ R_i باشد، آنگاه، دست کم به ازای یک " توفال Π_i با اضلاع مستقیم [1]،

$$\Delta\sigma_i = \Delta A_i \sec\gamma_i, \qquad (۳)$$

برای مشاهدهٔ این امر، به شکل ۱۱ نگاه می‌کنیم که توفال با اضلاع مستقیم Π_i به شکل متوازی‌الاضلاع را نشان می‌دهد که به‌وسیلهٔ دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ پیموده می‌شود. مساحت $\Delta\sigma_i$ توفال اندازهٔ حاصل‌ضرب خارجی $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ است، ولی‌خود حاصل‌ضرب خارجی $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ قائمی چون $\mathbf{N}_i$ به Π_i می‌باشد (به خاطر سادگی، $\mathbf{N}_i$ را به گوشهٔ Π_i وصل می‌کنیم). فرض کنیم زیر ناحیهٔ مستطیلی R_i که زیر Π_i در صفحهٔ xy واقع است به طول اضلاع Δx و Δy باشد. در این صورت، $\Delta A_i = \Delta x \Delta y$، و از شکل واضح است که

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{D'D} = \Delta x\,\mathbf{i} + (\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{D'D}) = \Delta x\,\mathbf{i} + r\mathbf{k},$$

---

۱. *می‌توان نشان داد که حتی اگر تمام جملات* $\Delta\sigma_i$ *نظیر به توفال* Π_i *با اضلاع خمیده را حذف کنیم، مجموع (۲) به همان حد* A_S *نزدیک خواهد شد.*

$$\mathbf{b} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'E'} + \overrightarrow{E'E} = \Delta y\,\mathbf{j} + (\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{E'E}) = \Delta y\,\mathbf{j} + s\mathbf{k},$$

که در آن $\mathbf{r}$ و s اسکالرهای مناسبی می‌باشند. بنابراین،

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\Delta x\,\mathbf{i} + r\mathbf{k}) \times (\Delta y\,\mathbf{j} + s\mathbf{k}) = \Delta x\,\Delta y\,\mathbf{k} - r\,\Delta y\,\mathbf{i} - s\,\Delta x\,\mathbf{j},$$

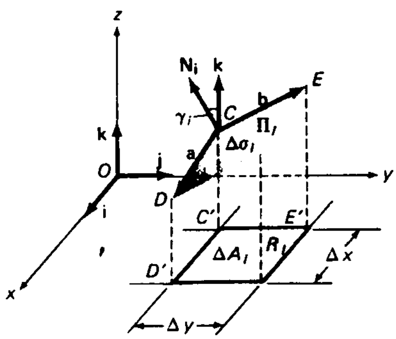
درنتیجه،

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{k} = \Delta x\,\Delta y$$

و لذا،

$$\Delta\sigma_i \cos\gamma_i = \Delta x\,\Delta y = \Delta A_i,$$

که با (۳) معادل می‌باشد.



شکل ۱۱

پس از (۲) و (۳) معلوم می‌شود که

$$A_S = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i \sec\gamma_i. \qquad (۴)$$

با انتخاب $F(x, y, z) = z - f(x, y)$ در فرمول (۳)، صفحهٔ ۱۲۶۶، و توجه به این امر که S نمودار معادلهٔ $F(x, y, z) = 0$ است، معلوم می‌شود که

$$\mathbf{N}_i = -f_x(p_i, q_i)\mathbf{i} - f_y(p_i, q_i)\mathbf{j} + \mathbf{k} \qquad (۵)$$

یک قائم بالایی به Π_i در (p_i, q_i) است. بنابراین،

$$\cos\gamma_i = \frac{\mathbf{N}_i \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{N}_i||\mathbf{k}|} = \frac{1}{\sqrt{[f_x(p_i, q_i)]^2 + [f_y(p_i, q_i)]^2 + 1}},$$

یا معادلاً

$$\sec\gamma_i = \sqrt{[f_x(p_i, q_i)]^2 + [f_y(p_i, q_i)]^2 + 1} \qquad (۶)$$

بالاخره، با گذاردن (۶) در (۴)، معلوم می‌شود که

$$A_S = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f_x(p_i, q_i)]^2 + [f_y(p_i, q_i)]^2 + 1}\, \Delta A_i.$$

این حد انتگرال مضاعف تابع

$$\sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}$$

روی R است. لذا، A_S از انتگرال زیر به دست می‌آید:

$$A_S = \iint_R \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}\, dA, \qquad (۷)$$

که وجودش را قضیهٔ ۱، صفحهٔ ۱۳۲۳، و پیوستگی مشتقات جزئی f_x و f_y بر R تضمین می‌کنند که پیوستگی انتگرالده بر R را نتیجه می‌دهند. فرمول (۷) را می‌توان به صورت فشرده‌تر زیر نوشت:

$$A_S = \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA. \qquad (۷')$$

البته، برای حالتی که سطح S نمودار یک تابع به‌طور پیوسته مشتقپذیر تعریف شده بر یک ناحیه در صفحهٔ مختصاتی غیراز صفحهٔ xy باشد، فرمولهای مشابهی وجود دارند. برای به دست آوردن این فرمولها، انتگرالده (۷') را با

$$\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1}$$

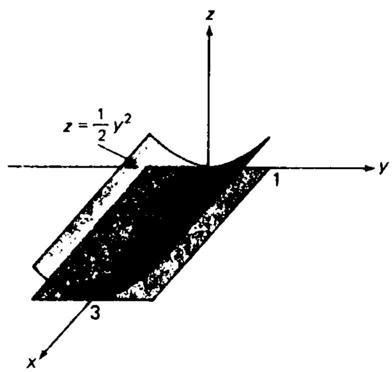
اگر R ناحیه‌ای در صفحهٔ xz باشد، و با

$$\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + 1}$$

اگر R ناحیه‌ای در صفحهٔ yz باشد تعویض کنید.

مثال ۱. فرض کنید S بخشی از استوانهٔ سهموی $z = \frac{1}{2}y^2$ روی ناحیهٔ مستطیلی R در صفحهٔ xy باشد که به محور y، خط $x = 3$، و خطوط $y = \pm 1$ محدود شده است (ر.ک. شکل ۱۲). مساحت A_S سطح S را پیدا نمایید.

حل. بنابر تقارن، A_S دوبرابر مساحت قسمتی از S است که روی ربع اول صفحهٔ xy قرار



شکل ۱۲

دارد . لذا ، با اعمال فرمول (۷′) ، و به کمک فرمول (۶′) ، صفحهٔ ۶۲۹، به‌دست‌می‌آوریم

$$\begin{aligned} A_S &= 2\iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA = 2\int_0^3 dx \int_0^1 \sqrt{y^2+1}\, dy \\ &= 6\left[\frac{1}{2} y\sqrt{y^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)\right]_0^1 \\ &= 3[\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})] \approx 6.89. \end{aligned}$$

کاربرد فرمول (۷) یا (۷′) اغلب به یک انتگرال مجازی همگرا منجر می‌شود . دراین حالات ، مساحت A_S مقدار این انتگرال مجازی گرفته می‌شود .

مثال ۲ . مساحت A_S سطح S که‌نمودارتابع $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ $(a > 0)$ است‌را بیابید .

حل . چون S نیمکره‌ای به شعاع a است ، از قبل می‌دانیم که $A_S = \frac{1}{2}(4\pi a^2) = 2\pi a^2$.لذا، این مثال فقط برای توضیح روش آورده شده است . با آنکه تابع $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ بر قلمرو تعریفش، یعنی قرص بستهٔ $R = \{(x, y): x^2 + y^2 \le a^2\}$ ، پیوسته است ، ولی بر R به‌طور پیوسته مشتقپذیر نیست ، زیرا مشتقات جزئی

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

بر دایرهٔ $x^2 + y^2 = a^2$ که مرز R است وجود ندارد . ولی $\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ بر هر قرص

بستهٔ

$$R_u = \{(x, y): x^2 + y^2 \le u^2\} \qquad (0 < u < a)$$

با شعاع کوچکتر u به‌طور پیوسته مشتقپذیر می‌باشد؛ و لذا، شایسته است مساحت S را با انتگرال مضاعف مجازی

$$\begin{aligned} A_S &= \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA \\ &= \iint_R \sqrt{\frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2} + 1}\, dA \\ &= \iint_R \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, dA = \lim_{u \to a^-} \iint_{R_u} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, dA \end{aligned}$$

تعریف کنیم. به‌خاطر تقارن مستدیر، به مختصاتِ قطبی می‌رویم، داریم

$$\begin{aligned} \iint_{R_u} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, dA &= a \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^u \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, dr = 2\pi a \left[-\sqrt{a^2 - r^2} \right]_0^u \\ &= 2\pi a \left(a - \sqrt{a^2 - u^2}\right), \end{aligned}$$

و درنتیجه،

$$A_S = 2\pi a \lim_{u \to a^-} \left(a - \sqrt{a^2 - u^2}\right) = 2\pi a^2.$$

انتگرالهای سطح. حال انتگرال یک تابع پیوسته روی سطح خمیدهٔ S را تعریف می‌کنیم. بار دیگر فرض‌کنیم S نمودار تابع به‌طور پیوسته مشتقپذیر $z = f(x, y)$ باشد که بر ناحیهٔ نرمال R در صفحهٔ xy تعریف شده است، و نقاط تقسیم x_j, y_k، اندازهٔ مش μ، زیر ناحیه‌های R_i، و "مساحات‌مقدماتی" ΔA_i و $\Delta\sigma_i$ همان معانی قبل را داشته‌باشند. همچنین $g(x, y, z)$ یک تابع سه‌متغیره باشد که بر سطح S پیوسته است؛ این یعنی تابع مرکب $g(x, y, f(x, y))$ بر ناحیهٔ R که تصویر S روی صفحهٔ xy است پیوسته می‌باشد. با اختیار نقطهٔ دلخواه (p_i, q_i) در هر زیر ناحیهٔ R_i، مجموع

$$\sum_{i=1}^{n} g(p_i, q_i, f(p_i, q_i))\, \Delta\sigma_i$$

را تشکیل می‌دهیم. فرض‌کنیم وقتی اندازهٔ مش μ به صفر نزدیک شود، ایـــن مجموع،

بی‌توجه‌به انتخاب اعداد x_j ، y_k ، p_i ، و q_i صادق در شرایط مقرر، به‌حدی متناهی نزدیک گردد. در این صورت، این حد را **انتگرال (سطح)** g روی S نامیم و با

$$\iint_S g(x, y, z)\, d\sigma$$

نشان می‌دهیم، و گوییم تابع g بر S ، یا روی S ، **انتگرالپذیر** است. لذا،

$$\iint_S g(x, y, z)\, d\sigma = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(p_i, q_i, f(p_i, q_i))\, \Delta\sigma_i, \tag{۸}$$

که در آن g **انتگرالده** انتگرال سمت چپ نام دارد.

مثال ۳. با اختیار $g(x, y, z) \equiv 1$ در فرمول (۸)، به دست می‌آید

$$\iint_S 1\, d\sigma = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i = A_S,$$

که در آن A_S مساحت سطح S می‌باشد. پس نتیجه می‌شود که

$$A_S = \iint_S d\sigma.$$

برای محاسبهٔ انتگرال سطح $\iint_S g(x, y, z)\, d\sigma$ روی S ، به موازات استدلالی که برای به دست آمدن فرمول (۷) برای مساحت S به کار رفت حرکت می‌کنیم. لذا، S را با R و $\Delta\sigma_i$ را با $\Delta A_i \sec \gamma_i$ تعویض می‌کنیم، که در آن γ_i زاویهٔ بین محور z مثبت و یک قائم رو به بالا به S در $P_i = (p_i, q_i, f(p_i, q_i))$ است. درنتیجه، به کمک (۶) داریم

$$\begin{aligned} \iint_S g(x, y, z)\, d\sigma &= \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(p_i, q_i, f(p_i, q_i))\, \Delta A_i \sec \gamma_i \\ &= \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(p_i, q_i, f(p_i, q_i)) \sqrt{[f_x(p_i, q_i)]^2 + [f_y(p_i, q_i)]^2 + 1}\, \Delta A_i, \end{aligned}$$

که در آن حد سمت راست انتگرال مضاعف زیر است:

$$\iint_R g(x, y, f(x, y)) \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}\, dA.$$

که وجودش را فرض پیوستگی توابع g ، f_x ، و f_y بر R تضمین می‌نماید. بنابراین،

$$\iint_S g(x, y, z)\, d\sigma = \iint_R g(x, y, f(x, y)) \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}\, dA \qquad (۹)$$

یا، به‌طور فشرده‌تر،

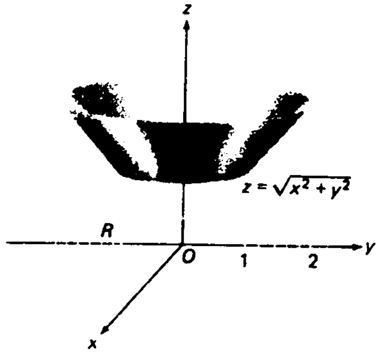
$$\iint_S g(x, y, z)\, d\sigma = \iint_R g(x, y, z) \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA, \qquad (۹')$$

که در طرف راست، $z = f(x, y)$. البته، برای حالتی که S نمودار تابع به طور پیوسته مشتقپذیری است که بر ناحیه‌ای در صفحهٔ xz یا صفحهٔ yz تعریف شده است، فرمولهایی مشابه (۹) و (۹') وجود دارند.

مثال ۴. انتگرال سطح

$$\iint_S \ln z\, d\sigma$$

را درصورتی حساب کنید که S بخشی از مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ باشد که بین صفحات $z = 1$ و $z = 2$ قرار دارد (ر.ک. شکل ۱۳).



شکل ۱۳

حل. تصویر S روی صفحهٔ xy ناحیهٔ طوقی $R = \{(x, y): 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$ است، و

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

لذا، از (۹′) پس از رفتن به مختصات قطبی نتیجه می‌شود که

$$\iint_S \ln z\, d\sigma = \iint_R \ln\sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}+1}\; dA$$

$$= \sqrt{2}\iint_R \ln\sqrt{x^2+y^2}\, dA = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r\ln r\, dr.$$

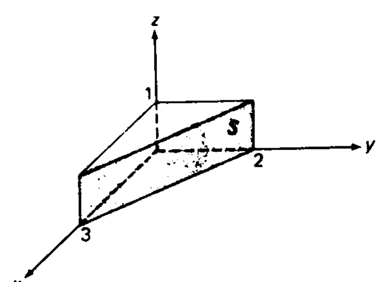
بنابراین، به کمک انتگرالگیری جزء به جزء،

$$\iint_S \ln z\, d\sigma = 2\pi\sqrt{2}\left[\frac{1}{2}r^2\ln r - \frac{1}{4}r^2\right]_1^2 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}(8\ln 2 - 3) \approx 5.65,$$

مثال ۵. انتگرال سطح

$$\iint_S xz\, d\sigma$$

را درصورتی بیابید که S بخشی از صفحهٔ $2x + 3y = 6$ در یکهشت اول باشد که بین صفحات $z = 0$ و $z = 1$ قرار دارد (ر.ک. شکل ۱۴).



شکل ۱۴

حل. چون S موازی محور z است، پس نمودار تابع $z = f(x, y)$ نیست. لیکن، نمودار تابع $y = 2 - \frac{2}{3}x$ بر ناحیهٔ مستطیلی $R = \{(x, z): 0 \le x \le 3, 0 \le z \le 1\}$ در صفحهٔ xz، ونیز نمودار تابع $x = 3 - \frac{3}{2}y$ بر ناحیهٔ مستطیلی $R' = \{(y, z): 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 1\}$ درصفحه yz می‌باشد. بنابراین،

$$\iint_S xz\,d\sigma = \iint_R xz\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2+1}\,dx\,dz = \frac{\sqrt{13}}{3}\int_0^3 dx\int_0^1 xz\,dz$$

$$= \frac{\sqrt{13}}{3}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^3\left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^1 = \frac{\sqrt{13}}{3}\left(\frac{9}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{13}}{4},$$

یا ، به صورت دیگر ،

$$\iint_S xz\,d\sigma = \iint_{R'}\left(3-\frac{3}{2}y\right)z\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2+1}\,dy\,dz$$

$$= \frac{\sqrt{13}}{2}\int_0^2 dy\int_0^1\left(3-\frac{3}{2}y\right)z\,dz$$

$$= \frac{3\sqrt{13}}{2}\left[y-\frac{1}{4}y^2\right]_0^2\left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^1 = \frac{3\sqrt{13}}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{13}}{4}$$

همانطور که جرم کل یک سیم به شکل منحنی C با انتگرال خط $\int_C \rho(x, y)\,ds$ داده می‌شود ، که در آن $\rho(x, y)$ چگالی در نقطهٔ (x, y) از C است که با واحدهایی چون گرم بر سانتیمتر سنجیده می‌شود ، جرم کل یک ورقهٔ فلزی نازک به شکل سطح S از انتگرال سطح $\iint_S \rho(x, y, z)\,d\sigma$ به دست می‌آید ، که در آن $\rho(x, y, z)$ چگالی درنقطهٔ (x, y, z) از S است که با واحدهایی چون گرم بر سانتیمترمربع سنجیده خواهد شد . شرح جزئیات لازم نیست ، چرا که قبلاً " در فصل ۱۴ برای اجسام جامد ، ورقه‌های مسطح ، و سیمها با چگالی متغیر داده شده است . در این وضع می‌توان مرکز جرم و گشتاورهای ماند یک سطح فلزی با چگالی متغیر یا ثابت را نیز تعریف کرد (ر.ک. مسائل ۲۱ تا ۲۳) .

ما اغلب می‌خواهیم یک انتگرال سطح را روی سطح S مرکب از تعدادی متناهی زیر سطح $S_1, S_2, \ldots, S_n$ حساب کنیم که هر یک نمودار یک تابع به طور پیوسته مشتقپذیربوده و فقط در بخشی یا تمام منحنیهای مرزی سهیم‌اند ولی نقطهٔ مشترک دیگری ندارند . انتگرال تابع پیوستهٔ g روی سطح S به‌طور طبیعی تعریف شده و مساوی مجموع انتگرالهای g روی زیرسطوح $S_1, S_2, \ldots, S_n$ گرفته می‌شود . به‌طور مشخص ،

$$\iint_S g\,d\sigma = \iint_{S_1} g\,d\sigma + \iint_{S_2} g\,d\sigma + \cdots + \iint_{S_n} g\,d\sigma, \qquad (۱۰)$$

که در آن برای اختصار به‌جای $g(x, y, z)$ فقط می‌نویسیم g .

$$\iint_S xy^2z^3\,d\sigma = \left(\int_0^1 y^2\,dy\right)\left(\int_0^1 z^3\,dz\right) + \left(\int_0^1 x\,dx\right)\left(\int_0^1 z^3\,dz\right) + \left(\int_0^1 x\,dx\right)\left(\int_0^1 y^2\,dy\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{8}.$$

بردارهای یکهٔ قائم به یک‌سطح. مجموعهٔ بردارهای یکهٔ قائم به‌سطح S یک میدان برداری بر S را تشکیل می‌دهد. مثلاً، فرض کنیم S نمودار یک تابع به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر مانند

$$z = f(x, y) \qquad ((x, y) \in R)$$

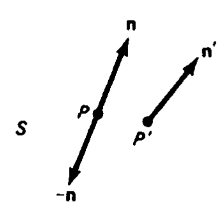
باشد، که در آن R ناحیه‌ای در صفحهٔ xy است. در این صورت، همان استدلالی که به فرمول (۵) منجر شد نشان می‌دهد که

$$\mathbf{n} = \frac{-f_x(x, y)\mathbf{i} - f_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}}$$

یک‌بردار یکهٔ قائم‌به S در نقطهٔ $P = (x, y, f(x, y))$ است، و همین‌طور بردار جهت‌دار متقابل

$$-\mathbf{n} = \frac{f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}}.$$

در واقع، $\mathbf{n}$ بردار یکهٔ *بالایی* به S در P است که از S به بالا اشاره داشته، و $-\mathbf{n}$ بردار یکهٔ *پایینی* به S در P است که‌از S به‌پایین‌اشاره‌دارد (به‌یادداشته‌باشیدکه $0 < \mathbf{n}\cdot\mathbf{k} \le 1$) همانطور که در شکل ۱۶ نشان داده شده، فقط دو بردار یکه به S در P وجود دارد. فرض کنیم $\mathbf{n}'$ قائم یکهٔ بالایی در نقطهٔ دیگر P' از S باشد (ر.ک. شکل). در این صورت، به خاطر پیوستگی مشتقات‌جزئی f_x و f_y، زاویهٔ بین $\mathbf{n}$ و $\mathbf{n}'$ را می‌توان با اختیار P' به‌قدرکافی نزدیک P بدلخواه کوچک‌کرد. این امر با گفتن اینکه قائم یکهٔ $\mathbf{n}$ بر S به‌طور پیوسته تغییر



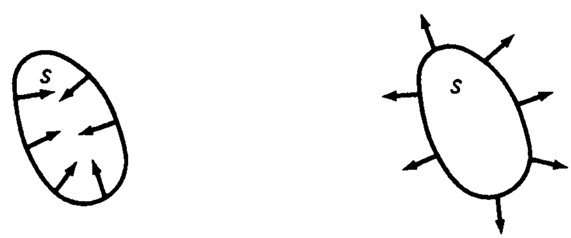
شکل ۱۶

می‌کند ، یا اینکه **قائم یکهٔ پیوستهٔ** $\mathbf{n}$ بر S وجود دارد بیان می‌شود. هرگاه $\mathbf{n}$ یک قائم یکهٔ پیوسته بر S باشد ، آنگاه بردار یکهٔ متقابل $-\mathbf{n}$ نیز چنین است . یک سطح با بردار یکهٔ قائم پیوسته را **هموار** می‌گویند .

در این وضع ، می‌توان دوقائم یکهٔ پیوسته بر سطح تعریف کرد که نمودار تابع به‌طور پیوسته مشتقپذیری به شکل $y = g(x, z)$ یا $x = h(y, z)$ باشد. مثلا" ، دو قائم یکه در نقطهٔ $P = (x, g(x, z), z)$ از نمودار $y = g(x, z)$ عبارتنداز

$$\pm \frac{-g_x(x, z)\mathbf{i} - g_z(x, z)\mathbf{k} + \mathbf{j}}{\sqrt{[g_x(x, z)]^2 + [g_z(x, z)]^2 + 1}}.$$

همچنین ، می‌توان دو میدان از بردارهای یکهٔ قائم بر یک سطح " بستهٔ " S ، مانند کره ، بیضی‌گون ، یا مکعب ، تعریف کرد که فضا را به دو ناحیه تقسیم کنند ، یک ناحیهٔ کراندار به نام **داخل** S و یک ناحیهٔ بی‌کران به نام **خارج** S . در این صورت ، یک‌میدان از قائمهای یکه از قائمهای یکهٔ **خارجی** به S تشکیل شده است که ، مثل شکل ۱۷ (آ) اشاره به خارج S دارد ، و میدان دیگر از قائمهای یکهٔ **داخلی** تشکیل شده است که ، مثل‌شکل۱۷ (ب) ، اشاره به داخل S دارد .روی یک مکعب ،وقتی بردار یکه از یک وجـه به‌دیگری می‌رود ،



(ب) (آ)

شکل ۱۷

تغییر جهت ناگهانی‌دارد.لذا ، یک مکعب سطح همواری نیست ،ولی **قطعه قطعه هموار** است، بدین معنی که از تعدادی متناهی سطح هموار تشکیل شده است که در امتداد مرزهایشان به هم وصل شده‌اند (درمکعب ، این سطوح هموار شش وجه آن می‌باشند) .

تبصره. تمام سطوح مورد بحث **دوطرفه** هستند . مثلا" ، نمودار تابع $z = f(x, y)$ یک طرف بالایی و یک طرف پایینی دارد ،کره خارج و داخل دارد ،و از این قبیل . باآنکه منحصرا" به سطوح دوطرفه توجه داریم ، باید از وجود سطوح **یکطرفه** آگاه بود (یک نمونهٔ کلاسیک از این سطوح در مسئلهٔ ۲۴ ذکر شده است) .

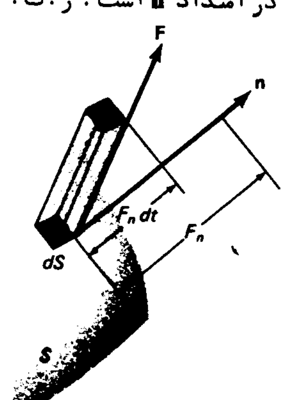
شار یک میدان برداری در امتداد یک سطح. حال نوع خاصی از انتگرالهای سطح را معرفی می‌کنیم که در ریاضیات کار بسته اهمیتی اساسی داشته و دردو بخش آخر این فصل نقشی کلیدی ایفا می‌کند. فرض کنید S یک سطح (دوطرفهٔ) هموار باشد که بر آن بردار یکهٔ پیوستهٔ $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{r})$ اختیار شده است، که $\mathbf{r}$ بردار موضع نقطهٔ متغیر S بوده، و $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ یک میدان برداری پیوسته بر S باشد. دراین صورت، منظوراز *شار* $\mathbf{F}$ *در امتداد* S یعنی انتگرال سطح

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma, \tag{11}$$

شامل حاصل‌ضرب نقطه‌ای $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$. با عکس کردن جهت $\mathbf{n}$، یعنی انتخاب قائم پیوستهٔ دیگر $-\mathbf{n}$ بر S، علامت شار عوض می‌شود، زیرا

$$\iint_S (\mathbf{F} \cdot -\mathbf{n})\, d\sigma = \iint_S -(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, d\sigma = -\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma.$$

برای تعبیر فیزیکی انتگرال شار (۱۱)، فرض می‌کنیم سطح S در مایعی با سرعت $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ که از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر تغییر کرده ولی مستقل از زمان است فرو رفته باشد (به زبان مکانیک مایعات، یک " شارش حالت پایدار "). در این صورت، شار $\mathbf{F}$ در امتداد S عبارت است از حجم خالص مایعی که در واحد زمان از یک طرف که با $-\mathbf{n}$ معین می‌شود به طرفی که با $\mathbf{n}$ مشخص می‌شود در امتداد S جریان می‌یابد. برای مشاهدهٔ این امر به صورت زیر استدلال کرده، از دیفرانسیلها به‌طور شهودی استفاده می‌کنیم. در یک بازهٔ زمانی به طول کوتاه dt، حجم مایع عبور کرده از قطعهٔ کوچکی از S، که آن را با dS نمایش می‌دهیم، مساوی حجم استوانه‌ای است (معمولا " مایل) به قاعدهٔ dS وارتفاع $F_n\, dt$، که در آن F_n مؤلفهٔ $\mathbf{F}$ در امتداد $\mathbf{n}$ است؛ ر.ک. شکل ۱۸.



شکل ۱۸

این حجم مساوی است با $F_n\, dt\, d\sigma$، که در آن $d\sigma$ مساحت dS می‌باشد (مثال ۱ ، صفحهٔ ۶۹۹ ، را به یاد آورید) . در اینجا فرض می‌کنیم زاویهٔ بین $\mathbf{F}$ و $\mathbf{n}$ از $90°$ متجاوز نباشد ؛ در غیر این صورت ، استوانه در طرف دیگر S قرار داشته و حجم مایع جریان یافته از dS منفی است (قدرمطلق آن مساوی حجم استوانه است) ، زیرا شارش اینک از طرف معین‌شده با $\mathbf{n}$ به طرف معین شده با $\mathbf{n}-$ است . لذا ، حجم مایع عبور کرده در امتداد dS بر واحد زمان مساوی است با

$$\frac{F_n\, dt\, d\sigma}{dt} = F_n\, d\sigma = \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma,$$

و با جمعبندی سهمهای تمام قطعات کوچک به سطح dS که S را می‌سازند ، انتگرال شار(۱۱) به دست خواهد آمد .اگر آخرین مرحله را خیلی شتاب زده می‌بینید ، S را به‌زیرسطحهای کوچک $S_1, S_2, \ldots, S_n$ افراز کرده ، $\mathbf{r}_i$ را بردار موضع نقطهٔ دلخواه S_i گرفته ،ومجموع‌ریمان $\sum_{i=1}^{n} [\mathbf{F}(\mathbf{r}_i)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{r}_i)]\,\Delta\sigma_i$ را تشکیل دهید ، که در آن $\Delta\sigma_i$ مساحت S_i می‌باشد . در این صورت ، انتگرال شار (۱۱) حد این مجموع است وقتی μ ، یعنی اندازهٔ ماکزیمم زیر سطوحها ، به صفر نزدیک گردد . (" اندازهٔ " S_i خود ماکزیمم فاصله بین نقاط S_i می‌باشد .)

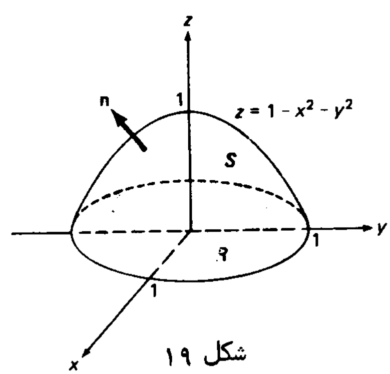
مثال ۷. شار میدان $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ را در امتداد سطح S که نمودار

$$z = 1 - x^2 - y^2 \qquad (z \ge 0)$$

است ، با انتخاب $\mathbf{n}$ به عنوان قائم یکهٔ بالایی به S ، حساب کنید .

حل . سطح S " عرقچین سهموی " شکل ۱۹ است . چون

$$\mathbf{N} = -\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$



شکل ۱۹

یک قائم بالایی به S است ، بردار $\mathbf{n} = \mathbf{N}/|\mathbf{N}|$ قائم یکهٔ بالایی به S می‌باشد (توجه کنید که $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} > 0$) . اما $\mathbf{N} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ، و

$$|\mathbf{N}| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1.}$$

لذا ، طبق فرمول (۹) ،

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_R (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})|\mathbf{N}|\, dA = \iint_R \left(\mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}\right)|\mathbf{N}|\, dA$$
$$= \iint_R \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dA = \iint_R [x^2(2x) + y^2(2y) + z]\, dA$$
$$= \iint_R [1 - (x^2 + y^2) + 2(x^3 + y^3)]\, dx\, dy,$$

که در آن R قرص یکهٔ $x^2 + y^2 \le 1$ در صفحهٔ xy می‌باشد . با تبدیل به مختصات قطبی ، معلوم می‌شود که

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 [1 - r^2 + 2r^3(\cos^3\theta + \sin^3\theta)]r\, dr$$
$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4 + \frac{2}{5}r^5(\cos^3\theta + \sin^3\theta)\right]_{r=0}^{1} d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4} + \frac{2}{5}(\cos^3\theta + \sin^3\theta)\right] d\theta = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2},$$

زیرا $\int_0^{2\pi} \cos^3\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^3\theta\, d\theta = 0$ (چرا؟)

به‌طورکلی ، هرگاه سطح هموار S نمودار تابع $z = f(x, y)$ باشد که بر ناحیهٔ R_{xy} در صفحهٔ xy تعریف شده است ، آنگاه ، درست به روش حل مثال ۷ ، معلوم می‌شود که شار میدان برداری پیوستهٔ $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ در امتداد S به صورت زیر است :

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_{R_{xy}} \left(-F_1\frac{\partial z}{\partial x} - F_2\frac{\partial z}{\partial y} + F_3\right) dx\, dy \qquad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} > 0). \tag{۱۲}$$

دو فرمول دیگر شار ، که مشابه (۱۲) است ، در مسئلهٔ ۳۱ داده شده‌اند .

مثال ۸ . شار میدان $\mathbf{F} = xy^2\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + x^2z^2\mathbf{k}$ خارج از مکعب S در یکهشت اول‌را بیابید

که به صفحات مختصات و صفحات $x = 1$ ، $y = 1$ ، و $z = 1$ محدود شده است (همین سطح در مثال ۶ درنظر گرفته شده بود) .

حل . طبیعی است که شار $\mathbf{F}$ خارج مکعب S مساوی مجموع شارهای $\mathbf{F}$ در امتداد شش وجه S ، از داخل S به خارج S ، تعریف می‌شود . در جدول زیر ، این وجوه $S_1, \ldots, S_6$ همراه با بردارهای یکهٔ خارجی نظیر و مقادیر حاصل‌ضرب نقطه‌ای $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ ذکر شده‌اند (ر.ک. شکل ۱۵) .

وجه	قائم یکهٔ خارجی $\mathbf{n}$	$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$
$S_1: x = 1$	$\mathbf{i}$	$xy^2 = y^2$
$S_2: y = 1$	$\mathbf{j}$	$-yz = -z$
$S_3: z = 1$	$\mathbf{k}$	$x^2z^2 = x^2$
$S_4: x = 0$	$-\mathbf{i}$	0
$S_5: y = 0$	$-\mathbf{j}$	0
$S_6: z = 0$	$-\mathbf{k}$	0

چون بر S_4 ، S_5 ، و S_6 ، $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 0$ ، کافی است شارهای در امتداد سه‌وجه مکعب ، یعنی وجه جلوی S_1 ، وجه سمت راست S_2 ، و وجه بالایی S_3 ، را درنظر بگیریم . بنابراین ،

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma + \iint_{S_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

$$= \iint_{R_1} y^2\, dy\, dz + \iint_{R_2} (-z)\, dx\, dz + \iint_{R_3} x^2\, dx\, dy,$$

که‌درآن‌مثل‌مثال ۶ $R_1 = \{(y, z): 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1\}$ ، $R_2 = \{(x, z): 0 \le x \le 1, 0 \le z \le 1\}$ و $R_3 = \{(x, y): 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ برای تبدیل یک انتگرال روی S_i به یک‌انتگرال روی R_i ، می‌توان $d\sigma$ را با حاصل‌ضرب دیفرانسیلهای مختصات نظیر به R_i عوض کرد . زیرا S_i موازی R_i می‌باشد . لذا ، بالاخره ، شار خالص $\mathbf{F}$ خارج مکعب S ، عبارت است از

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \left(\int_0^1 y^2\, dy\right)\left(\int_0^1 dz\right) - \left(\int_0^1 dx\right)\left(\int_0^1 z\, dz\right)$$

$$+ \left(\int_0^1 x^2\, dx\right)\left(\int_0^1 dz\right)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

مسائل

مساحت A_S سطح داده شدهٔ S را بیابید.

۱. S بخشی از صفحهٔ $3x + 2y + 6z = 12$ است که در یکهشت اول قرار دارد

۲. S بخشی از استوانهٔ سهموی $z = x^2$ است که توسط صفحات $x = \sqrt{2}$ ، $y = x$ ، و $y = 2x$ جدا شده است

۳. S بخشی از مخروط $z^2 = 2xy$ است که بین صفحات $x = 0$ ، $y = 0$ ، $x = a$ ، و $y = b$ قرار دارد $(a > 0, b > 0)$

۴. S بخشی از مخروط $z^2 = 2xy$ است که داخل کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ به شعاع a قرار دارد

۵. S بخشی از کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ است که توسط استوانهٔ مستدیر $x^2 + y^2 = ax$ $(a > 0)$ جدا شده است.

۶. S: بخشی از استوانهٔ مستدیر $x^2 + y^2 = ax$ $(a > 0)$ است که داخل کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ قرار دارد

۷. S عرقچین سهموی $x = 12 - y^2 - z^2$ $(x \geq 0)$ است

۸. S بخشی از کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ است که توسط استوانهٔ بیضوی $x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$ جدا شده است

۹. S بخشی از استوانهٔ $x^2 + z^2 = a^2$ است که داخل استوانهٔ $x^2 + y^2 = a^2$ با همان شعاع a قرار دارد

۱۰. S بخشی از مخروط $x^2 - y^2 - z^2 = 0$ در یکهشت اول است که توسط صفحهٔ $y + z = 4$ جدا شده است

۱۱. S بخشی از مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ است که بین صفحهٔ xy و استوانهٔ $x^2 + y^2 = 2y$ قرار دارد

۱۲. S بخشی از استوانهٔ سهموی $z^2 = 4x$ است که توسط استوانهٔ سهموی $y^2 = 4x$ و صفحهٔ $x = 3$ جدا شده است

انتگرال سطح داده شده را حساب کنید.

۱۳. $\iint_S xyz\, d\sigma$ ، که در آن S بخشی از صفحهٔ $x + y + z = 1$ است که در یکهشت اول قرار دارد

۱۴. $\iint_S z^2\, d\sigma$ ، که در آن S کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ است

۱۵. $\iint_S x^2\, d\sigma$ ، که در آن S بخشی از مخروط $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ است که بین صفحات $x = 0$ و

$x = 1$ قرار دارد

۱۶. $\iint_S z\,d\sigma$ ، که در آن S بخشی از کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ است که در یکهشت اول قرار دارد.

۱۷. $\iint_S x^2y^2\,d\sigma$ ، که در آن S نیمکرهٔ $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ است

۱۸. $\iint_S y\,d\sigma$ ، که در آن S عرقچین سهموی $y = 2 - x^2 - z^2$ $(y \geq 0)$ است

۱۹. $\iint_S (x + y + z)\,d\sigma$ ، که در آن S همان سطح مکعبی مثال ۶ است

۲۰. $\iint_S (x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2)\,d\sigma$ ، که در آن S بخشی از مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ است که از استوانهٔ $x^2 + y^2 = 2x$ جدا شده است.

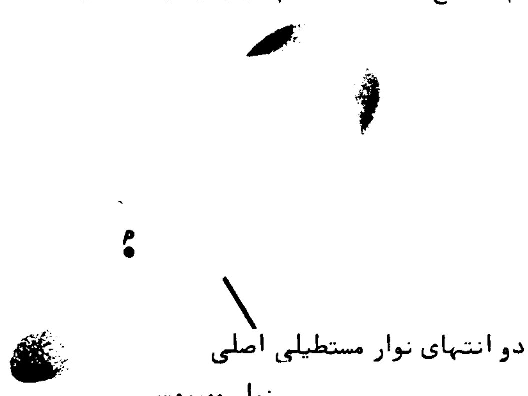
فرض کنید S بخشی از مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ باشد که بین صفحات $z = 1$ و $z = 4$ واقع است، و نیز چگالی در هر نقطهٔ P از S مساوی فاصلهٔ P تا صفحهٔ $z = 0$ باشد. در این صورت، کمیات زیر را بیابید.

۲۱. جرم کل و مرکز جرم S

۲۲. گشتاور ماند S حول محور z

۲۳. مرکز گون S را درصورتی بیابید که S بخشی از کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ باشد که در یکهشت اول قرار دارد.

۲۴. فرض کنید یک قطعه کاغذ مستطیلی نیم دور چرخیده و سپس دو انتهایش را به هم بچسبانیم. سطح حاصل، به نام **نوار موبیوس**، در شکل ۲۰ نموده شده است. چرا



شکل ۲۰

این سطح یکطرفه است؟

راهنمایی. حشره‌ای در نظر بگیرید که در خط‌وسط نوار از نقطهٔ P شروع به حرکت نماید.

شار $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ را درصورتی حساب کنید که $\mathbf{n}$ قائم یکهٔ بالایی به S، به ازای میدان $\mathbf{F}$ و سطح S داده شده، باشد.

۲۵. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$، S نیمکرهٔ $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

۲۶. $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$، S عرقچین سهموی مثال ۷

۲۷. $\mathbf{F} = \mathbf{i} - y^2\mathbf{j} - z\mathbf{k}$، S بخشی از سهمی‌گون هذلولوی $z = xy$ که بالای ناحیهٔ مستطیلی $0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2$ قرار دارد

۲۸. $\mathbf{F} = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$، S بخشی از کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ است که در یکهشت اول قرار دارد

۲۹. شار میدان $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ خارج سطح بستهٔ S محدود به استوانهٔ $x^2 + y^2 = 1$ و صفحات $z = 0$ و $z = 3$ را پیدا کنید.

۳۰. شار میدان $\mathbf{F} = x^2y\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$ خارج از مکعب مثال ۸ را پیدا نمایید.

۳۱. فرض کنید $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ یک میدان برداری پیوسته بر سطح هموار S باشد که نمودار تابع $y = g(x, z)$ است که بر ناحیهٔ R_{xz} در صفحهٔ xz تعریف شده است. نشان دهید که

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_{R_{xz}} \left(-F_1\frac{\partial y}{\partial x} + F_2 - F_3\frac{\partial y}{\partial z}\right)dx\,dz.$$

همچنین، نشان دهید هرگاه S نمودار تابع $x = h(y, z)$ باشد که بر ناحیهٔ R_{yz} در صفحهٔ yz تعریف شده است، آنگاه

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_{R_{yz}} \left(F_1 - F_2\frac{\partial x}{\partial y} - F_3\frac{\partial x}{\partial z}\right)dy\,dz.$$

در اینجا $\mathbf{n}$ قائم یکهٔ پیوسته‌ای بر S است که در شرط $\mathbf{n}\cdot\mathbf{j} > 0$ در حالت اول و شرط $\mathbf{n}\cdot\mathbf{i} > 0$ در حالت دوم صدق می‌کند.

۳۲. فرض کنید S سطح‌هموار‌ی‌باشد که درآن واحد نمودار سه‌تابع $z = f(x, y)$، $y = g(x, z)$ و $x = h(y, z)$ است که بر نواحی R_{xy}، R_{xz}، و R_{yz} در صفحات xy، xz، و yz تعریف شده‌اند، و $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ یک تابع برداری پیوسته بر S باشد. نشان دهید هرگاه S قائم یکهٔ پیوسته‌ای چون $\mathbf{n}$ داشته‌باشد که با هر سه محورهای‌مثبت‌مختصات

زاویهٔ حاده بسازد، آنگاه

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_{R_{yz}} F_1\,dy\,dz + \iint_{R_{xz}} F_2\,dx\,dz + \iint_{R_{xy}} F_3\,dx\,dy. \qquad (\text{یک})$$

۳۳. انتگرال $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ را به‌کمک فرمول (یک) درصورتی حساب‌کنید که $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ ، S بخشی از صفحهٔ

$$x + y + z = a \qquad (a > 0)$$

است که در یکهشت اول قـرار دارد، و $\mathbf{n}$ قائم یکهٔ بالایی به S می‌باشـد. سپس جواب را با استفاده از فرمول (۱۲) امتحان نمایید.

۴.۱۵ قضیهٔ گرین؛ تغییر متغیر در انتگرالهای چندگانه

قضیهٔ زیر، که به ریاضیدان خودآموز انگلیسی، جرج گرین[1] (۱۷۹۳–۱۸۴۱) منسوب‌است، رابطهٔ عمیق بین انتگرال خط در امتداد مرز یک ناحیهٔ مسطح و انتگرال مضاعف مربوطه روی خود ناحیه را آشکار می‌سازد.

قضیهٔ ۴ (قضیهٔ گرین). *فرض‌کنیم R ناحیه‌ای در صفحهٔ xy باشد که از منحنی بستهٔ سادهٔ قطعه قطعه هموار C و درونش تشکیل شده است، و توابع $P = P(x, y)$ و $Q = Q(x, y)$ بر R به‌طور پیوسته مشتقپذیر باشند. در این صورت،*

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA, \qquad (۱)$$

که در آن C خلاف جهت عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود.

برهان ناقص. برهان کامل قضیهٔ گرین در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته مطرح می‌شود؛ و لذا، قضیه فقط برای حالت خاصی که در آن R ناحیهٔ سادهٔ محدود به منحنی قطعه قطعه هموار C ثابت می‌شود (با اینحال، ر.ک. مسئلهٔ ۱۸). چون ناحیهٔ R ساده است، به‌طور قائم و افقی ساده است؛ درنتیجه، بخصوص

$$R = \{(x, y): a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\},$$

که در آن، همانطور که فرض شد، g_1 و g_2 نمودارهای قطعه قطعه همواری دارند. این امر در

1. George Green

شکل ۲۱ (آ) نموده شده‌است، که در آن C منحنی بستهٔ $KLMNK$ است؛ یعنی، منحنی از قوسهای KL، LM، MN، و NK با همین ترتیب تشکیل شده است، و ما این امکان را می‌دهیم که یکی یا هر دو پاره‌خط LM و NK به یک نقطه تحویل می‌شوند. بنابر قضیهٔ ۲، صفحهٔ ۱۳۲۹، به کار رفته در مورد $-\partial P/\partial y$،

$$\iint_R -\frac{\partial P}{\partial y}\,dA = -\int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = -\int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))]\,dx$$

$$= \int_a^b P(x, g_1(x))\,dx + \int_b^a P(x, g_2(x))\,dx = \int_{KL} P\,dx + \int_{MN} P\,dx$$

(ر.ک. فرمول (۱۱)، صفحهٔ ۱۴۳۵). اما

$$\int_{LM} P\,dx = \int_{NK} P\,dx = 0,$$

زیرا بر LM و NK داریم $dx = 0$؛ و لذا،

$$\int_C P\,dx = \int_{KL} P\,dx + \int_{LM} P\,dx + \int_{MN} P\,dx + \int_{NK} P\,dx$$
$$= \int_{KL} P\,dx + \int_{MN} P\,dx,$$

درنتیجه،

$$\int_C P\,dx = \iint_R -\frac{\partial P}{\partial y}\,dA. \qquad (۲)$$

به همین نحو، با نمایش R به شکل

$$R = \{(x, y): c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\},$$

که در آن توابع h_1 و h_2 نمودارهای قطعه قطعه هموازی بر $[c, d]$ اند، معلوم می‌شود که

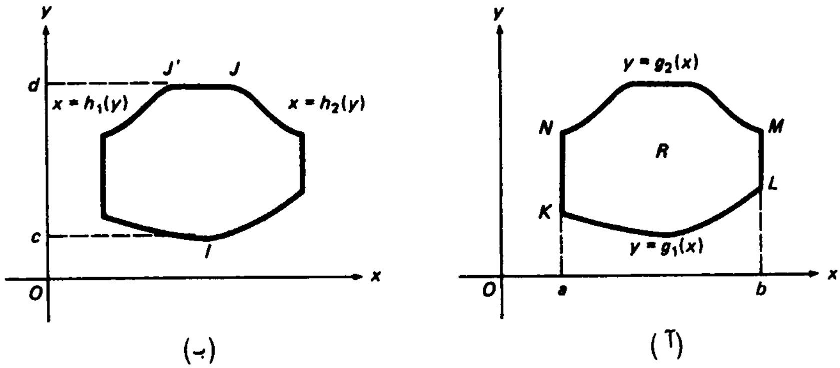
$$\iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}\,dA = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx = \int_c^d [Q(h_2(y), y) - Q(h_1(y), y)]\,dy$$

$$= \int_c^d Q(h_2(y), y)\,dy + \int_d^c Q(h_1(y), y)\,dy = \int_{IJ} Q\,dy + \int_{J'I} Q\,dy$$

(ر.ک. شکل ۲۱ (ب)، که در آن R همان ناحیهٔ شکل ۲۱ (آ) است منتها با حواشی مختلف).

اما

$$\int_{JJ'} Q\,dy = 0,$$



شکل ۲۱

زیرا بر JJ' ، $dy = 0$ ؛ و درنتیجه ،

$$\int_C Q\,dy = \int_{IJ} Q\,dy + \int_{JJ'} Q\,dy + \int_{J'I} Q\,dy = \int_{IJ} Q\,dy + \int_{J'I} Q\,dy,$$

درنتیجه ،

$$\int_C Q\,dy = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}\,dA. \qquad (۲')$$

با افزودن (۲) به (۲') ، بالاخره فرمول مطلوب (۱) به دست می‌آید .

نتیجهٔ ۱ . فرض کنیم R و C همانند در قضیهٔ گرین باشند . در این صورت ، مساحت R از هر یک از فرمولهای زیر به دست می‌آید :

$$A = -\int_C y\,dx, \qquad A = \int_C x\,dy, \qquad A = \frac{1}{2}\int_C -y\,dx + x\,dy, \qquad (۳)$$

که در آن C در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود .

برهان . انتخاب $P = -y, Q = 0$ فرمول (۱) را به $\int_C -y\,dx = \iint_R dA$ تبدیل می‌کند، ولی انتخاب $P = 0,\ Q = x$ آن را به $\int_C x\,dy = \iint_R dA$ بدل می‌سازد . اما $\iint_R dA = A$ ، که دو فرمول اول (۳) را ثابت خواهد کرد . برای به دست آوردن فرمول سوم ، دو فرمول اول را به‌هم افزوده‌و حاصل را نسبت‌به A حل‌کنید ،یا در(۱) $P = -\frac{1}{2}y,\ Q = \frac{1}{2}x$ رااختیارنمایید .

نتیجهٔ ۲ . فرض کنیم مؤلفه‌های $P = P(x, y)$ و $Q = Q(x, y)$ میدان برداری به طور پیوسته مشتقپذیر $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ در هر نقطه از قلمرو همبندسادهٔ D در شرط $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$ صدق کنند . دراین صورت ، $\mathbf{F}$ بر D مستقل از مسیر است ، یا معادلاً " $\mathbf{F}$ یک میدان گرادیان بر D می‌باشد .

برهان . فرض‌کنیم C یک مسیر بستهٔساده در D بوده ، و در هر نقطهٔ D ، $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$ چون D همبند ساده است ، درون C نیز مشمول D است (صفحهٔ ۱۴۴۴ را به یاد آورید) . لذا ، بر ناحیهٔ R مرکب از C و درون آن ، $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$. اما ، طبق قضیهٔ گرین ،

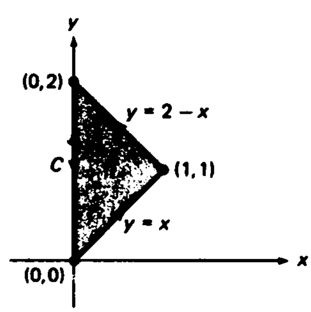
$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_R 0\,dA = 0.$$

بنابراین ، به ازای هر مسیر بستهٔ سادهٔ C مشمول D ، $\int_C P\,dx + Q\,dy = 0$. پس‌ازتبصرهٔ صفحهٔ ۱۴۴۹ معلوم می‌شود که انتگرال خط $\mathbf{F}$ بر D از مسیر مستقل است ، یا معادلاً " $\mathbf{F}$ بر D میدان گرادیان می‌باشد (قضیهٔ ۱ ، صفحهٔ ۱۴۴۴، را به یاد آورید) .

مثال ۱ . با استفاده از قضیهٔ گرین ، انتگرال خط

$$\int_C (x^2 + y^2)\,dx + (x + 2y)^2\,dy$$

را درصورتی حساب کنید که C مثلث به رئوس $(0, 0)$ ، $(1, 1)$ ، و $(0, 2)$ باشد کــه در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده است (ر.ک. شکل ۲۲) .



شکل ۲۲

حل . بنابر فرمول (۱) به ازای $P = x^2 + y^2$، $Q = (x + 2y)^2$، و ناحیهٔ سایه‌دار R شکل ،

$$\int_C (x^2+y^2)\,dx + (x+2y)^2\,dy = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(x+2y)^2 - \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)\right] dA$$
$$= \iint_R [2(x+2y) - 2y]\,dA = 2\iint_R (x+y)\,dA = 2\int_0^1 dx \int_x^{2-x} (x+y)\,dy$$
$$= 2\int_0^1 \left[xy + \frac{1}{2}y^2\right]_{y=x}^{2-x} dx = 2\int_0^1 \left[x(2-x) + \frac{1}{2}(2-x)^2 - x^2 - \frac{1}{2}x^2\right] dx$$
$$= 4\int_0^1 (1-x^2)\,dx = 4\left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{8}{3}.$$

جواب را بامحاسبهٔ مستقیم انتگرال خط امتحان کنید ،که خواهید دید محاسبات مشکلتری دارد .

مثال ۲ . با استفاده از نتیجهٔ ۱ ، مساحت A محصور به یک بیضی با نیم محور اطول a و نیم محور اقصر b را پیدا نمایید .

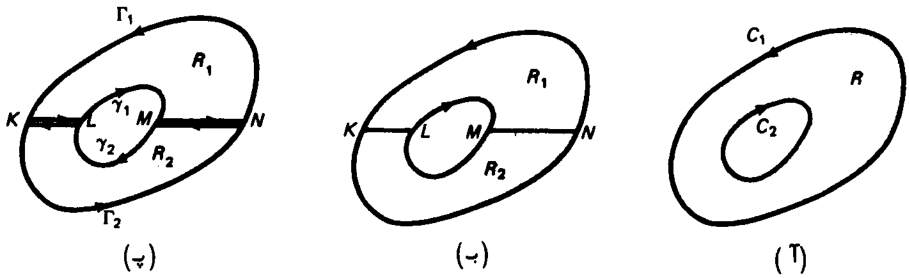
حل . با فرض اینکه بیضی نمایش پارامتری $x = a\cos t,\ y = b\sin t\ (0 \le t \le 2\pi)$ دارد خللی به کلیت وارد نمی‌شود . لذا ، طبق فرمول سوم (۳) ،

$$A = \frac{1}{2}\int_C -y\,dx + x\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [(-b\sin t)(-a\sin t) + (a\cos t)(b\cos t)]\,dt$$
$$= \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} dt = \pi ab,$$

و این را قبلا" در مثال ۴ ، صفحهٔ ۹۲۴، دیدیم .

حالت منحنیهای دو مرزی . صورتی از قضیهٔ گرین وجود دارد که در آن ناحیهٔ R بین دو منحنی بستهٔ سادهٔ قطعه قطعه هموار C_1 و C_2 واقع است . فرض کنیم C_2 ، مثل شکل ۳۳ (آ) ، داخل C_1 واقع بوده ، و جهت مثبت پیمودن منحنی C_1 یا C_2 چنان است که R همواره سمت چپ ناظری قرار می‌گیرد که منحنی‌را می‌پیماید .لذا ، جهت مثبت منحنی خارجی C_1 خلاف جهت عقربه‌های ساعت است ، ولی جهت مثبت منحنی داخلی C_2 در جهت عقربه‌های ساعت می‌باشد؛ این امر با سر سهم روی منحنیها نموده شده است . دو پاره‌خط به نام " میان بر " رسم می‌کنیم که C_1 و C_2 را به هم وصل می‌کنند . در این صورت ، ناحیهٔ R بین C_1 و C_2 به دو زیر ناحیهٔ R_1 و R_2 مثل شکل ۲۳ (ب) تقسیم می‌شود که هر یک فقط یک منحنی

بستهٔ ساده به عنوان مرز دارد. به‌طور مشخص، با رجوع به شکل ۲۳ (پ)، می‌بینیم که مرز R_1 کنتوری است که از قوس Γ_1، پاره‌خط KL، قوس γ_1، و پاره‌خط MN تشکیل شده است که به همین ترتیب و با جهات نموده شده پیموده می‌شود، ولی مرز R_2 کنتوری است که از قوس Γ_2، پاره‌خط NM، قوس γ_2، و پاره‌خط LK تشکیل شده است.



شکل ۲۳

حال فرض کنیم توابع $P = P(x, y)$ و $Q = Q(x, y)$ بر R، و درنتیجه بر زیرناحیه‌های R_1 و R_2، مشتقپذیر باشند. با اعمال قضیهٔ گرین بر R_1 و R_2، معلوم می‌شود که

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_{R_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA + \iint_{R_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$
$$= \left(\int_{\Gamma_1} P\,dx + Q\,dy + \int_{KL} \cdots + \int_{\gamma_1} \cdots + \int_{MN} \cdots\right)$$
$$+ \left(\int_{\Gamma_2} P\,dx + Q\,dy + \int_{NM} \cdots + \int_{\gamma_2} \cdots + \int_{LK} \cdots\right),$$

که در آن هر مورد نقاط. . . یعنی عبارت $P\,dx + Q\,dy$. اما، همانند فرمول (۱۳′)، صفحه ۱۴۳۶، $\int_{LK}\cdots = -\int_{KL}\cdots$ و $\int_{MN}\cdots = -\int_{NM}\cdots$. لذا، انتگرالها در امتداد میان‌برها همدیگر را حذف می‌کنند، و آنچه می‌ماند عبارت است از

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \left(\int_{\Gamma_1} P\,dx + Q\,dy + \int_{\Gamma_2} \cdots\right)$$
$$+ \left(\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy + \int_{\gamma_2} \cdots\right)$$
$$= \int_{C_1} P\,dx + Q\,dy + \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy$$

(فرمول (۱۵) ، صفحهٔ ۱۴۳۹، را به یاد آورید) . لذا ، قضیهٔ گرین برای ناحیهٔ R بین منحنیهای C_1 و C_2 برقرار است ، مشروط بر اینکه انتگرال $\int_C P\,dx + Q\,dy$ در فرمول (۱) به صورت مجموع انتگرالهای خط $\int_{C_1} P\,dx + Q\,dy$ و $\int_{C_2} P\,dx + Q\,dy$ تعبیر شود البته با این فرض که هر یک از منحنیهای C_1 و C_2 در جهت مثبت مناسبی پیموده شود .

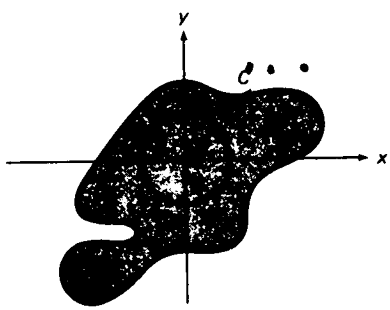
مثال ۳ . فرض کنید C منحنی بستهٔ سادهٔ قطعه قطعه هموازی باشد که مبداء را احاطه‌کرده و یکبار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده است . نشان دهید که

$$\int_C \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} = 2\pi. \tag{۴}$$

حل . توابع $P = -y/(x^2 + y^2)$ و $Q = x/(x^2 + y^2)$ همه جا جز در مبداء تعریف شده و به طور پیوسته مشتقپذیر باشند ؛ و اگر $(x, y) \neq (0\ 0)$ ،

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

فرض کنید γ دایره‌ای به مرکز مبداء بوده و یکبار در جهت ***عقربه‌های ساعت*** پیموده شده و آنقدر کوچک باشد که در C جای گیرد (ر.ک. شکل ۲۴) . در این صورت ، P و Q به



شکل ۲۴

طور پیوسته مشتقپذیر و بر ناحیهٔ R بین C و γ در $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$ صدق می‌کند . بنابر این ، طبق قضیهٔ گرین برای دو منحنی مرزی ،

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + \int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_R 0\,dA = 0.$$

اما ، در این صورت ،

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = -\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_{-\gamma} P\,dx + Q\,dy,$$

که در آن γ—*خلاف جهت عقربه‌های ساعت* پیموده می‌شود. این فرمول (۴) را ثابت می‌کند، زیرا طبق مثال ۳، صفحه‌ٔ ۱۴۵۰، $\int_{-\gamma} P\,dx + Q\,dy = 2\pi$. به عنوان تمرین، از نتیجه‌ٔ ۲ استفاده کرده نشان دهید که اگر مبداٴ خارج C باشد، طرف راست (۴) به‌جای 2π مساوی 0 می‌شود.

تبدیلات مختصات و ژاکوبیها. حال، با استفاده از قضیه‌ٔ گرین، فرمولی برای تغییر متغیر انتگرال مضاعف ثابت می‌کنیم. نمونه‌ٔ مهمی از این‌گونه فرمولها قبلاً در قضیه‌ٔ ۸، صفحه‌ٔ ۱۳۹۲، آمده است، که در آن نشان دادیم هرگاه $f(x, y)$ بر ناحیه‌ٔ R پیوسته بوده، و R نقش ناحیه‌ٔ R' در صفحه‌ٔ $r\theta$ تحت تبدیل

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

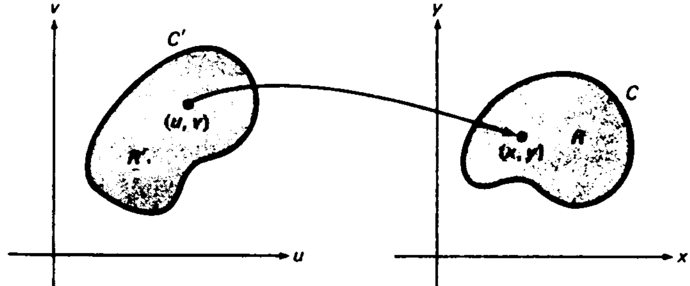
از مختصات قطبی r و θ به مختصات قائم x و y باشد، آنگاه

$$\iint\limits_{R} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{R'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta. \qquad (۵)$$

حال فرمولی مشابه (۵) برای تبدیل مختصات کلی به شکل

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad (۶)$$

از مختصات u و v به‌مختصات قائم x و y جستجو می‌کنیم. فرض‌کنیم تبدیل (۶) برناحیه‌ٔ R' در صفحه‌ٔ uv تعریف شده باشد که عبارت است از منحنی بسته‌ٔ ساده‌ٔ قطعه قطعه‌هموار C' و درون آن، و نقش R' تحت این تبدیل ناحیه‌ٔ R در صفحه‌ٔ xy باشد که از منحنی بسته‌ٔ ساده‌ٔ قطعه قطعه هموار دیگر C و درونش، مثل شکل ۲۵، تشکیل شده است. به علاوه، فرض کنیم وقتی (u, v) منحنی C' را یکبار در جهت مثبت طی کند، نقش (x, y) نقطه‌ٔ (u, v) منحنی C را یکبار در جهت مثبت یا منفی طی خواهد کرد. همچنین، چند فرض دیگر در



شکل ۲۵

باب تبدیل (۶) می‌کنیم:

(یک) توابع $x(u, v)$ و $y(u, v)$ پیوسته بوده و بر R' مشتقات جزئی اول و دوم پیوسته‌دارند؛

(دو) دترمینان

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v},$$

که ژاکوبی تبدیل (۶) نام داشته و به‌طور فشرده با $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ نموده می‌شود، بر R' ناصفر است؛

(سه) تبدیل (۶) یک به یک است؛ یعنی، نه فقط نظیر به هر نقطه از R' نقطهٔ منحصر به فردی مانند (x, y) در R وجود دارد، بلکه نظیر هر نقطهٔ (x, y) در R نقطهٔ منحصر به فرد (u, v) در R' نیز موجود است، و تبدیل از R به R' با

$$u = u(x, y), \qquad v = v(x, y) \tag{۶'}$$

نموده خواهد شد.

تحت این شرایط می‌توان نشان داد که توابع $u(x, y)$ و $v(x, y)$ بر R پیوسته بوده، و مشتقات جزئی اول و دوم پیوسته دارند، و نیز ژاکوبی

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}$$

تبدیل معکوس (۶') بر R ناصفر بوده و در فرمول

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 1\text{،} \tag{۷}$$

صدق خواهد کرد (ر.ک. مسئلهٔ ۲۶). بخصوص، رابطهٔ (۷) ایجاب می‌کند که‌ژاکوبیهای $\partial(u, v)/\partial(x, y)$ و $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ بر نواحی مربوطهٔ R و R' هم‌علامت می‌باشند.

تغییر متغیر در انتگرالهای مضاعف. حال، با تمام فرضهای فوق در باب تبدیلات (۶) و (۶')، نواحی R و R'، و منحنیهای C و C'، قضیه‌ای بیان می‌کنیم که فرمول (۵) را تعمیم خواهد داد. برهان قضیه سرراست ولی کاربردی نسبتاً " تکنیکی از قضیهٔ گرین است، و لذا، به‌آخر بخش موکول شده است.

قضیهٔ ۵ **(تغییر متغیر در انتگرالهای مضاعف) . هرگاه $f(x, y)$ بر R پیوسته باشد ، آنگاه**

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{R'} f(x(u, v), y(u, v)) \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv. \qquad (۸)$$

در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته نشان داده شده که قضیهٔ ۵ تحت شرایط ضعیفتر نیز برقرار است ؛ بخصوص، اگر تبدیل (۶) بر مرز ناحیهٔ R' یک به یک نباشد .

مثال ۴ . نشان دهید که فرمول (۵) حالت خاصی از فرمول (۸) است .

حل . فرض کنیم متغیرهای u و v مختصات قطبی r و θ باشند . در این صورت ،تبدیل (۶) عبارت است از

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

که در آن $r \geq 0$ (ر .ک . صفحهٔ ۱۳۹۱) ، و ژاکوبی $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ به صورت زیر درمی‌آید :

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r.$$

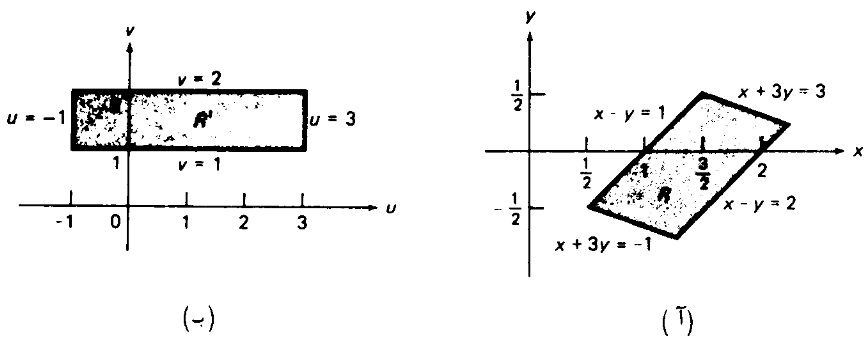
لذا ، به ازای این انتخاب u و v ، فرمول (۸) به (۵) تحویل خواهد شد .

مثال ۵ . انتگرال مضاعف $\iint_R xy\,dx\,dy$ را درصورتی حساب کنید که R ناحیهٔ شکل ۲۶ (آ) است که مرزش C متوازی‌الاضلاع به اضلاعی در امتداد خطوط $x + 3y = -1$ ، $x + 3y = 3$ ، $x - y = 1$ ، و $x - y = 2$ باشد .

حل . عبارات $x + 3y$ و $x - y$ در معادلات خطوطی می‌آیند که R را محدود کرده‌اند ، و این عبارات متغیرهای جدید

$$u = x + 3y, \qquad v = x - y \qquad (۹)$$

را می‌نمایند ، زیرا در این صورت معادلات خطوط به $u = -1$ ، $u = 3$ ، $v = 1$ ، و $v = 2$ ساده می‌شوند . لذا ، نقش R تحت تبدیل (۹) ناحیهٔ R' در صفحهٔ uv است که مرزش C' مستطیلی است که اضلاعش در امتداد خطوط $u = -1$ ، $u = 3$ ، $v = 1$ ، و $v = 2$ می‌باشد ، مانند شکل ۲۶ (ب) . با حل دستگاه معادلات (۹) نسبت به x و y و برحسب u و v ، به



شکل ۲۶

دست می‌آوریم

$$x = \frac{1}{4}(u + 3v), \qquad y = \frac{1}{4}(u - v), \tag{۹}$$

درنتیجه ،

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{vmatrix} = -\frac{4}{16} = -\frac{1}{4}. \tag{۱۰}$$

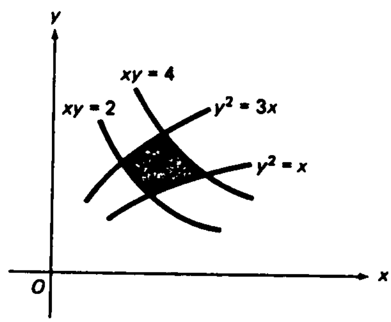
بنابراین ، طبق فرمول (۸) ،

$$\begin{aligned}\iint_R xy\,dx\,dy &= \iint_{R'} \frac{1}{16}(u + 3v)(u - v)\left|-\frac{1}{4}\right| du\,dv \\ &= \frac{1}{64}\int_{-1}^{3} du \int_{1}^{2} (u^2 + 2uv - 3v^2)\,dv \\ &= \frac{1}{64}\int_{-1}^{3} \Big[u^2v + uv^2 - v^3\Big]_{v=1}^{2} du \\ &= \frac{1}{64}\int_{-1}^{3} (u^2 + 3u - 7)\,du = \frac{1}{64}\left[\frac{1}{3}u^3 + \frac{3}{2}u^2 - 7u\right]_{-1}^{3} = -\frac{5}{48}.\end{aligned}$$

با بررسی متناظر بین رئوس C و C' ، به آسانی معلوم می‌شود که اگر کنتور C یا C' در جهتی (عقربه‌های ساعت یا خلاف آن) پیموده شود ، دیگری جهت مخالف آن‌را خواهد داشت . انتظار این امر می‌رفت ، زیرا ژاکوبی (۱۰) منفی است . توجه کنید که (۱۰) را می‌توان ابتدا بامحاسبهٔ $\partial(u, v)/\partial(x, y)$ و سپس اعمال فرمول (۷) به‌دست آورد . به‌عنوان

تمرین ، انتگرال $\iint_R xy\,dx\,dy$ را مستقیما" حساب کرده ، و ببینید که استفاده از روش فعلی چقدر آسان است .

مثال ۶. انتگرال مضاعف $\iint_R (x^2/y^4)\,dx\,dy$ را درصورتی حساب کنید که R ناحیهٔ محدود به هذلولیهای $xy = 2$ ، $xy = 4$ ، و سهمیهای $y^2 = x,\ y^2 = 3x$ باشد (ر.ک. شکل ۲۷) .



شکل ۲۷

حل. با نوشتن

$$xy = u, \qquad y^2 = vx,$$

یا معادلا"

$$u = xy, \qquad v = \frac{y^2}{x},$$

می‌بینیم که منحنیهایی که مرز R را تشکیل می‌دهند نظیر به مقادیر $u = 2$ ، $u = 4$ ، $v = 1$ ، و $v = 3$ اند . همچنین ،

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\dfrac{y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x} \end{vmatrix} = \frac{3y^2}{x},$$

و در این صورت (۷) نتیجه می‌دهد که

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}} = \frac{x}{3y^2} = \frac{1}{3v}.$$

و با انتخاب $f(x, y) = x^2/y^4 = 1/v^2$ در فرمول (۸) و توجه به اینکه R' ناحیهٔ مربعی $\{(u, v): 2 \le u \le 4, 1 \le v \le 3\}$ در صفحهٔ uv است، معلوم می‌شود که

$$\iint_R \frac{x^2}{y^4}\,dx\,dy = \iint_{R'} \frac{du\,dv}{3v^3} = \frac{1}{3}\left(\int_2^4 du\right)\left(\int_1^3 \frac{dv}{v^3}\right) = \frac{2}{3}\left[-\frac{1}{2v^2}\right]_1^3 = \frac{8}{27}.$$

تغییر متغیر در انتگرالهای سه‌گانه. نکات فوق را می‌توان به ابعاد سه تعمیم داد. فرض کنیم

$$x = x(u, v, w), \qquad y = y(u, v, w), \qquad z = z(u, v, w) \tag{۱۱}$$

یک نگاشت سه‌بعدی از ناحیهٔ توپر T' در فضای uvw به روی ناحیهٔ توپر T در فضای xyz باشد، و فرض کنیم (۱۱) در شرایطی مشابه آنهایی که بر تبدیل دوبعدی (۶) اعمال شدند صدق نماید. بخصوص، فرض کنیم دترمینان 3×3

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

که **ژاکوبی** تبدیل (۱۱) نام داشته و به‌طور فشرده با $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)$ نموده می‌شود، بر T' ناصفر باشد. در این صورت، مشابه قضیهٔ ۵ را داریم، که آن را بدون برهان ذکر می‌کنیم:

قضیهٔ ۶ (تغییر متغیر در انتگرالهای سه‌گانه). هرگاه $f(x, y, z)$ بر T پیوسته باشد، آنگاه

$$\iiint_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{T'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| du\,dv\,dw. \tag{۱۲}$$

مثال ۷. حجم V متوازی‌السطوح T محدود به شش صفحهٔ $x + y + 2z = \pm 3$، $x - 2y + z = \pm 2$، و $4x + y + z = \pm 6$ را پیدا کنید.

حل . با معرفی متغیرهای جدید

$$u = x + y + 2z, \qquad v = x - 2y + z, \qquad w = 4x + y + z,$$

که در آنها $-3 \le u \le 3$ ، $-2 \le v \le 2$ ، و $-6 \le w \le 6$ ، معلوم می‌شود که

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -3 + 3 + 2(9) = 18.$$

اما ، بنابر مشابه فرمول (۷) ،

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = 1,$$

و درنتیجه ،

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \frac{1}{18}.$$

لذا ، طبق فرمول (۱۲) به ازای $f(x, y, z) \equiv 1$ ،

$$V = \iiint_T dx\,dy\,dz = \frac{1}{18}\left(\int_{-3}^{3} du\right)\left(\int_{-2}^{2} dv\right)\left(\int_{-6}^{6} dw\right)$$
$$= \frac{1}{18}(6)(4)(12) = 16.$$

برهان قضیهٔ ۵ *(اختیاری)*. فرض کنیم

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} f(t, y)\,dt,$$

که در آن x_0 ثابت است؛ درنتیجه ، $\partial F(x, y)/\partial x = f(x, y)$. بنابر قضیهٔ گرین در صفحهٔ xy به ازای $P = 0$ و $Q = F$ ،

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \iint_R \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}\,dx\,dy = \int_C F(x, y)\,dy, \qquad (۱۳)$$

که در آن C یکبار در جهت مثبت (خلاف جهت عقربه‌های ساعت) پیموده‌می‌شود . فرض کنیم

$$u = u(t), \qquad v = v(t) \qquad (a \le t \le b)$$

معادلات پارامتری منحنی C' باشند (مرز ناحیهٔ R') که یکبار درجهت مثبت‌پیموده‌می‌شود. در این صورت، C به معادلات پارامتری زیر است:

$$x = x(u(t), v(t)), \qquad y = y(u(t), v(t)) \qquad (a \le t \le b),$$

و وقتی t از a تا b تغییر کند، نقطهٔ (x, y) منحنی C را یکبار در جهت مثبت یا منفی می‌پیماید (در آخر برهان دقیقاً مشخص‌می‌شود). طرف راست (۱۳) را می‌توان‌برحسب تابع مرکب $G(t) = F(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)))$ به صورت زیر نوشت:

$$\int_C F(x, y)\, dy = \int_a^b G(t) \frac{dy}{dt}\, dt$$

اما، طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای،

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dt},$$

و لذا، برحسب تابع مرکب $H(u, v) = F(x(u, v), y(u, v))$،

$$\begin{aligned} \int_C F(x, y)\, dy &= \int_a^b G(t)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right) dt \\ &= \int_{C'} H(u, v)\frac{\partial y}{\partial u}\, du + H(u, v)\frac{\partial y}{\partial v}\, dv \end{aligned} \tag{۱۴}$$

مشاهده می‌کنید که طرف راست (۱۴) یک انتگرال در صفحهٔ uv به شکل زیر است:

$$\int_{C'} P\, du + Q\, dv,$$

که در آن

$$P = H\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad Q = H\frac{\partial y}{\partial v}.$$

حال، برای ادامهٔ برهان، انتگرال $\int_{C'} P\, du + Q\, dv$ را با اعمال مجدد قضیهٔ گرین، این بار در صفحهٔ uv، اعمال می‌کنیم. به‌طور مشروح،

$$\begin{aligned} \int_{C'} P\, du + Q\, dv &= \iint_{R'} \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}\right) du\, dv \\ &= \iint_{R'} \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(H\frac{\partial y}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(H\frac{\partial y}{\partial u}\right)\right] du\, dv \\ &= \iint_{R'} \left(\frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + H\frac{\partial^2 y}{\partial u\, \partial v} - \frac{\partial H}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} - H\frac{\partial^2 y}{\partial v\, \partial u}\right) du\, dv \end{aligned} \tag{۱۵}$$

$$= \iint_{R'} \left(\frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial H}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) du\, dv,$$

که در آخرین مرحله از فرض پیوستگی مشتقات جزئی دوم $y(u, v)$ استفاده کرده‌ایم. اما، طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای و تعریف H،

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial H}{\partial v} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{۱۶}$$

لذا، از تلفیق روابط (۱۳) تا (۱۶) معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y)\, dx\, dy &= \pm \iint_{R'} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\frac{\partial y}{\partial v} - \left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\frac{\partial y}{\partial u}\right] du\, dv \\ &= \pm \iint_{R'} \frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right) du\, dv \qquad (۱۷) \\ &= \pm \iint_{R'} f(x(u, v), y(u, v))\,\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\, du\, dv. \end{aligned}$$

در اینجا علامت به‌علاوه درصورتی اختیار می‌شود که C با افزایش t از a تا b در جهت مثبت پیموده شود، ولی اگر C در جهت منفی پیموده شود، باید علامت منفی‌اختیارگردد (چرا؟).

بالاخره، فرض‌کنیم $f(x, y) \equiv 1$. در این صورت، طرف چپ (۱۷) مساحت R است، که ذاتا" مثبت‌است، و این به ما می‌گویدکه درصورت‌مثبت‌بودن ژاکوبی $J = \partial(x, y)/\partial(u, v)$ علامت به‌علاوه و، درصورت منفی بودن J، علامت منها را اختیار کنیم. به عبارت‌دیگر، اگر ژاکوبی J را با قدر مطلقش $|J| = |\partial(x, y)/\partial(u, v)|$ عوض کنیم، می‌توانیم در (۱۷) علامت $\pm$ را حذف نماییم. در این صورت، فرمول (۱۷) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{R'} f(x(u, v), y(u, v)) \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\, dv,$$

و برهان قضیهٔ ۵ کامل خواهد بود.

مسائل

انتگرال‌خط داده شده را با استفاده از قضیهٔ گرین حساب کنید. (در هر حالت، منحنی C در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود.)

۱. $\int_C (y^4 - x)\,dx + (y - x^2)\,dy$ ، که در آن C مربعی به رئوس $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ ، $(1, 1)$ ، و $(0, 1)$ است

۲. $\int_C (y + \ln x)\,dx + (x^3 + e^{-y})\,dy$ ، که در آن C مثلثی به رئوس $(1, 0)$ ، $(2, 0)$ ، و $(2, 1)$ است

۳. $\int_C (3x - 2y)\,dx + (2x + 3y)\,dy$ ، که‌در آن C مرز ناحیهٔ بین سهمیهای $y = x^2$ و $x = y^2$ است

۴. $\int_C \sqrt{x^2 + y^2}\,dx + [xy^2 + y\ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})]\,dy$ ، که در آن C مستطیلی به رئوس $(1, 0)$ ، $(4, 0)$ ، $(4, 5)$ ، و $(1, 5)$ است

۵. $\int_C -xy^2\,dx + xy^2\,dy$ ، که در آن C دایرهٔ $x^2 + y^2 = 4$ است

۶. $\int_C (2x + y)\,dx + 2x\,dy$ ، که در آن C بیضی $4x^2 + 9y^2 = 36$ است

۷. $\int_C e^x \cos y\,dx - e^x \sin y\,dy$ ، که در آن C بیضی $2x^2 + y^2 = 1$ است

۸. $\int_C \frac{xy^2}{1 + x^2}\,dx + y\ln(1 + x^2)\,dy$ ، که در آن C دایرهٔ $x^2 + y^2 + 2y = 0$ است

۹. $\int_C -y\sec^2 x\,dx + \tan x\,dy$ ، که‌در آن C مثلثی به‌رئوس $(0, 0)$ ، $(\pi/4, 0)$ ، و $(\pi/4, \pi/2)$ است

۱۰. $\int_C -xy\,dx + (y^2 + 16)\,dy$ ، که در آن C از نیمهٔ بالایی بیضی $4x^2 + y^2 = 1$ و پاره خط واصل بین نقاط $(\pm\frac{1}{2}, 0)$ تشکیل شده است .

مساحت A ناحیهٔ داده شدهٔ R را با استفاده از انتگرال خط بیابید .

۱۱. R ناحیه‌ای در ربع اول است که به هذلولی $xy = 4$ و خطوط $y = x$ و $y = 4x$ محصور شده است

۱۲. R ناحیه‌ای در ربع اول است که به هذلولی $8xy = 1$ و سهمیهای $y = x^2$ و $x = y^2$ محصور شده است ، با نقطهٔ $(1, 1)$ بر مرزش

۱۳. R ناحیهٔ محصور به ستاره‌گون

$$x = a\cos^3 t, \qquad y = a\sin^3 t \qquad (0 \le t \le 2\pi, a > 0)$$

است (ر.ک. شکل ۴۵، صفحهٔ ۷۴۵)

۱۴. R ناحیهٔ محصور به دلگون

$$x = 2a\cos t - a\cos 2t, \qquad y = 2a\sin t - a\sin 2t$$
$$(0 \le t \le 2\pi, a > 0)$$

است (ر.ک. شکل ۴۸، صفحهٔ ۷۴۹)

۱۵. فرض کنید R ناحیه‌ای در صفحهٔ xy باشد که از منحنی سادهٔ قطعه قطعه هموار C و درونش تشکیل شده است. نشان دهید که مرکزگون R به مختصات زیر است:

$$\bar{x} = \frac{1}{2A}\int_C x^2\,dy, \qquad \bar{y} = -\frac{1}{2A}\int_C y^2\,dx, \qquad \text{(یک)}$$

که در آن A مساحت R است.

۱۶. مرکزگون ناحیهٔ مسئلهٔ ۱۱ را با استفاده از فرمولهای (یک) بیابید.

۱۷. انتگرال خط $\int_C P\,dx + Q\,dy$ را بر قلمرو همبند چندگانه‌ای چون D طوری مثال بزنید که از مسیر مستقل باشد. (توجه کنید که نتیجهٔ ۲ این امکان را از بین نمی‌برد!)

۱۸. نشان دهید که قضیهٔ گرین برای هر ناحیهٔ بستهٔ کراندار R که بتوان آن را با رسم خطوط موازی مناسبی موازی محورهای مختصات به تعدادی متناهی زیر ناحیهٔ ساده تجزیه کرد برقرار است.

ژاکوبی $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ تبدیل داده شده را بیابید.

۱۹. $x = au + bv,\ y = cu + dv$

۲۰. $x = u^2 - v^2,\ y = uv$

۲۱. $x = \frac{1}{2}\ln(u^2+v^2),\ y = \arctan(v/u)$

۲۲. $x = u^2v,\ y = uv^2$

۲۳. $x = e^u\cos v,\ y = e^u\sin v$

۲۴. $x = ue^{-v},\ y = ve^u$

۲۵. تحقیق کنید که تبدیل مسئلهٔ ۲۳ و معکوسش در فرمول (۷) صدق می‌کنند.

۲۶. ثابت کنید که

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} aA + bC & aB + bD \\ cA + dC & cB + dD \end{vmatrix},$$

و سپس، فرمول (۷) را با استفاده از این قاعده برای ضرب دترمینانهای 2×2 و به کارگیری مکرر قاعدهٔ زنجیره‌ای ثابت نمایید.

ژاکوبی $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)$ تبدیل داده شده را بیابید.

۲۷. $x = au, y = \alpha u + bv, z = \beta u + \gamma v + cw$

۲۸. $x = vw, y = uw, z = uv$

۲۹. $x = u + v + w, y = u^2 + v^2 + w^2, z = uv + uw + vw$

۳۰. $x = e^u \cos v \sin w, y = e^u \cos v \cos w, z = e^u \sin v$

انتگرال مضاعف داده شده را با استفاده از قضیهٔ ۵ و تغییر متغیر مناسبی حساب کنید.

۳۱. $\iint\limits_R x^2\,dx\,dy$ ، که در آن R ناحیهٔ محدود به خطوط $2x + y = 1$ ، $2x + y = 3$ ، $x - 2y = -1$ ، و $x - 2y = 2$ است

۳۲. $\iint\limits_R \left(1 + \frac{y}{x}\right) dx\,dy$ ، که‌درآن R ناحیهٔ محدود به‌خطوط $y = 0$ ، $y = 3x$ ، $x + y = 1$ ، و $x + y = 2$ است.

۳۳. $\iint\limits_R \frac{1}{y}\,dx\,dy$ ، که درآن R ناحیهٔ محدود به منحنیهای $y^3 = x^2, y^3 = 4x^2$ و خطوط $y = x, y = 2x$ است.

۳۴. $\iint\limits_R x^2y^2\,dx\,dy$ ، که در R ناحیهٔ محدود به هذلولیهای $xy = 2, xy = 3$ و خطوط $y = x, y = 5x$ است.

۳۵. $\iint\limits_R \frac{x^2 \sin xy}{y}\,dx\,dy$ ، که در آن R ناحیهٔ محدود به سهمیهای $x^2 = \pi y/2$ ، $x^2 = \pi y$ ، $y^2 = x/2$ ، و $y^2 = x$ است.

۳۶. $\iint\limits_R \cos \frac{x - y}{x + y}\,dx\,dy$ ، که درآن R ناحیهٔ محدود به محور x ، خط $y = x$ ، و خط $x + y = \pi/2$ است.

۳۷. انتگرال سه‌گانهٔ $\iiint\limits_T yz\,dx\,dy\,dz$ را درصورتی حساب کنید که T ناحیهٔ محدود به شش صفحهٔ $x + y + z = \pm 2$ ، $x - y + z = \pm 3$ ، و $x + y - z = \pm 1$ باشد.

۳۸. نشان دهید که قضیهٔ ۹، صفحهٔ۱۴۰۶، راجع به انتگرالهای سه گانه در مختصات استوانه‌ای، حالت خاصی از قضیهٔ ۶ راجع به تغییر مختصات درانتگرالهای سه‌گانه است.

۳۹. نشان دهید که قضیهٔ ۱۰، صفحهٔ۱۴۱۶، راجع به انتگرالهای سه‌گانه در مختصات

کروی نیز حالت خاصی از قضیهٔ ۶ می‌باشد.

۴۰. ابتدا، با تبدیل $x = au,\ y = bv$ ، مساحت محصور به بیضی $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ را تعیین کنید. سپس حجم محصور به بیضی‌گون $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) = 1$ را با تبدیلی مشابه معین نمایید.

۵.۱۵ قضیهٔ دیورژانس

مطلب را با نوشتن قضیهٔ گرین

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA \qquad (1)$$

به شکل برداری آغاز می‌کنیم. دراینجا C یک منحنی بستهٔ سادهٔ قطعه قطعه هموار است که یکبار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود، و $P = P(x, y)$ و $Q = Q(x, y)$ توابعی هستند که بر ناحیهٔ مسطح کراندار R مرکب از منحنی C و درونش به طور پیوسته مشتقپذیرند. با معرفی میدان برداری دوبعدی $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ ، می‌بینیم که طرف‌چپ(۱) انتگرال خط $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ است (فرمول (۹)، صفحهٔ ۱۴۳۴، را به یاد آورید). لذا، اگر به جای $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ بنویسیم $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j}$ ، فرمول (۱) به شکل

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA,$$

یا معادلا"

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA \qquad (2)$$

در می‌آید. راه دیگر نوشتن (۲) عبارت است از

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA, \qquad (2)$$

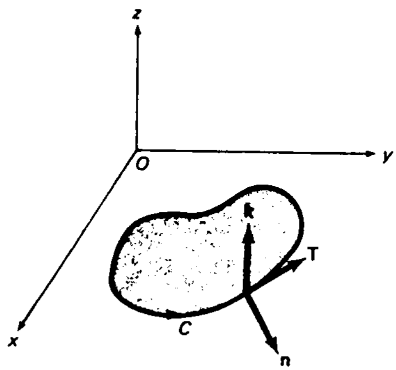
که در آن $\mathbf{T}$ بردار یکهٔ مماس به C می‌باشد (بحث بعداز فرمول (۱۲)، صفحهٔ ۱۴۳۵، را به یاد بیاورید.)

اگر $\mathbf{F}$ را نیرو تعبیر کنیم، فرمول (۲) به ما می‌گوید که کار انجام شده توسط $\mathbf{F}$ بر ذره‌ای که C را می‌پیماید مساوی انتگرال مضاعف سمت راست (۲) است. مثلا"، از مثال ۱، صفحهٔ ۱۴۸۳، معلوم می‌شود که کار انجام شده توسط نیروی $\mathbf{F} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (x + 2y)^2\mathbf{j}$ بر ذره‌ای که مثلث به رئوس $(0, 0)$ ، $(1, 1)$ ، و $(0, 2)$ را در جهت خلاف عقربه‌های ساعت

می‌پیماید مساوی $\frac{8}{3}$ است. توجه‌کنید هرگاه $\mathbf{F}$ یک میدان بقا باشد، آنگاه $\partial F_2/\partial x = \partial F_1/\partial y$ و نیرو وقتی ذره C را می‌پیماید "کاری صورت نمی‌دهد".

حال شکل برداری جالب دیگری از قضیهٔ گرین را درنظر می‌گیریم. فرض کنیم $\mathbf{n}$ قائم یکهٔ *خارجی* به منحنی C باشد. در این صورت، از شکل ۲۸ واضح است که $\mathbf{n} = \mathbf{T} \times \mathbf{k}$. چون $\mathbf{T} = d\mathbf{r}/ds$، نتیجه می‌شود که

$$\mathbf{n} = \left(\frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j}\right) \times \mathbf{k} = \frac{dy}{ds}\mathbf{i} - \frac{dx}{ds}\mathbf{j}.$$



شکل ۲۸

انتگرال خط $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds$ را، که با طرف چپ (۲') در این فرق دارد که به جای $\mathbf{T}$ در آن $\mathbf{n}$ آمده است، می‌توان به صورت انتگرال مضاعفی روی ناحیهٔ R محدود به C بیان کرد. در واقع،

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \int_C (F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{dy}{ds}\mathbf{i} - \frac{dx}{ds}\mathbf{j}\right) ds = \int_C -F_2\, dx + F_1\, dy,$$

و درنتیجه، بنابر قضیهٔ گرین (۱) به‌ازای $P = -F_2$ و $Q = F_1$، فورا" معلوم می‌شودکه

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_R \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\right) dA. \qquad (۳)$$

طرف چپ (۳) مشابه انتگرال شار $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$ است، که در آن S یک سطح و $\mathbf{F}$ یک میدان برداری سه‌بعدی می‌باشد (ر.ک. صفحهٔ ۱۴۷۳). از اینروست که $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds$ را *شار* $\mathbf{F}$ *در امتداد* C می‌نامند. برای تعبیر فیزیکی $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds$، فرض کنیم صفحهٔ xy با لایهٔ نازکی از یک مایع با ضخامتی نامحسوس پوشانده شده باشد که با سرعت $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y)$ در

حال حرکت است . در این صورت ، شار $\mathbf{F}$ در امتداد C مساحت خالص مایعی است که در امتداد C بر واحد زمان از داخل به خارج C جریان دارد . این را می‌توان با تعدیلهای مختصری در استدلال صفحات ۱۴۷۳تا۱۴۷۴، که به تعبیر فیزیکی شار $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ درامتداد سطح S با شارشی فضایی به سرعت $\mathbf{F}=\mathbf{F}(x, y, z)$ منجر شد ، دید . بخصوص، سطح S و استوانهٔ مایل شکل ۱۸ با منحنی C و متوازی‌الاضلاعی که یک ضلعش قوسی از C بوده و یک ساقش در امتداد $\mathbf{F}=\mathbf{F}(x, y)$ است تعویض می‌شوند .

مثال ۱ . شار میدان $\mathbf{F}=(x^2+y^2)\mathbf{i}+(x+2y)^2\mathbf{j}$ را در امتداد مثلث C به رئوس $(0, 0)$ ، $(1, 1)$ ، و $(0, 2)$ شکل ۲۲ ، صفحهٔ ۱۴۸۳، پیدا نمایید .

حل . بنابر فرمول (۳) به ازای $F_1=x^2+y^2$ و $F_2=(x+2y)^2$ ، داریم

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds &= \int_0^1 dx\int_x^{2-x}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)+\frac{\partial}{\partial y}(x+2y)^2\right]dy\\ &= \int_0^1 dx\int_x^{2-x}(6x+8y)\,dy = 2\int_0^1\Big[3xy+2y^2\Big]_{y=x}^{2-x}dx\\ &= 2\int_0^1(8-2x-6x^2)\,dx = 2\Big[8x-x^2-2x^3\Big]_0^1 = 10.\end{aligned}$$

دیورژانس یک میدان برداری . در فرمول (۳) انتگرالده مضاعف روی R دیورژانس دوبعدی میدان $\mathbf{F}=F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}$ نام دارد و به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\operatorname{div}\mathbf{F}=\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}.$$

فرمول (۳) را می‌توان برحسب این کمیت به شکل زیر نوشت :

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds=\iint_R \operatorname{div}\mathbf{F}\,dA, \tag{۴}$$

که **قضیهٔ دیورژانس دوبعدی** نام دارد . بنابر (۴) ، شار میدان $\mathbf{F}$ در امتداد منحنی بستهٔ سادهٔ C مساوی انتگرال دیورژانس آن روی ناحیهٔ R محدود به C می‌باشد .

به‌طورکلی ، دیورژانس میدان برداری سه‌بعدی $\mathbf{F}=F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}+F_3\mathbf{k}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\operatorname{div}\mathbf{F}=\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}. \tag{۵}$$

توجه کنید که عمل دیورژانس‌گیری، میدان برداری $\mathbf{F}$ را به یک میدان اسکالرتبدیل می‌کند. این با عمل گرادیان‌گیری

$$\text{grad } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

که میدان اسکالر f را به یک میدان برداری تبدیل می‌کند تقابل دارد. همچنین، توجه کنید که اگر حاصل‌ضرب نقطه‌ای صوری عملگر دل

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

را در $\mathbf{F}$ تشکیل دهیم، $\text{div } \mathbf{F}$ به دست می‌آید، چرا که

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

مثال ۲. $\text{div}(f\mathbf{F})$ را درصورتی حساب کنید که f یک تابع اسکالر مشتق‌پذیر بوده و $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ یک میدان برداری مشتق‌پذیر باشد.

حل. بنابر تعریف (۵) و قاعدهٔ حاصل‌ضرب برای مشتقگیری، داریم

$$\begin{aligned}
\text{div}(f\mathbf{F}) &= \frac{\partial(fF_1)}{\partial x} + \frac{\partial(fF_2)}{\partial y} + \frac{\partial(fF_3)}{\partial z} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}F_1 + f\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}F_2 + f\frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}F_3 + f\frac{\partial F_3}{\partial z} \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}F_1 + \frac{\partial f}{\partial y}F_2 + \frac{\partial f}{\partial z}F_3\right) + f\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) \\
&= (\text{grad } f)\cdot \mathbf{F} + f \text{ div } \mathbf{F},
\end{aligned}$$

یا، به‌طور فشرده‌تر،

$$\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = \nabla f \cdot \mathbf{F} + f\nabla \cdot \mathbf{F}.$$

حال نشان می‌دهیم که (۴) صورت دوبعدی قضیهٔ همگرایی سه‌بعدی کلیترمی‌باشد.

قضیهٔ ۷ (قضیهٔ دیورژانس). *فرض کنیم T ناحیهٔ توپر متشکل از سطح بستهٔ قطعه‌قطعه هموار S و درونش بوده، $\mathbf{n}$ قائم یکهٔ خارجی به S باشد، و $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ یک*

میدان برداری به‌طور پیوسته مشتقپذیر بر T باشد . در این صورت ،

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV, \tag{۶}$$

یعنی ، شار $\mathbf{F}$ در امتداد S مساوی انتگرال $div\ \mathbf{F}$ روی ناحیهٔ T است که به S محدود شده است[۱].

برهان ناقص . قضیه را فقط درحالتی ثابت می‌کنیم که T، x-ساده ، y-ساده ، و z-ساده ، به صورت تعریف‌شده در صفحهٔ ۱۳۴۰، باشد؛ برهان کامل در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته آمده است . با نوشتن فرمول (۶) به صورت زیر:

$$\iint_S (F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}+F_3\mathbf{k})\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_T \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}\right)dV, \tag{۶'}$$

معلوم می‌شود که قضیه درصورتی ثابت است که نشان دهیم

$$\iint_S (F_1\mathbf{i})\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_T \frac{\partial F_1}{\partial x}\,dV, \tag{۷}$$

$$\iint_S (F_2\mathbf{j})\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_T \frac{\partial F_2}{\partial y}\,dV, \tag{۸}$$

$$\iint_S (F_3\mathbf{k})\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_T \frac{\partial F_3}{\partial z}\,dV, \tag{۹}$$

زیرا (۶') مجموع فرمولهای (۷) تا (۹) می‌باشد . هر سه فرمول به یک نحو ثابت می‌شوند؛ و لذا ، کافی است فقط یکی از آنها ، مثلاً (۹) ، را ثابت کنیم .

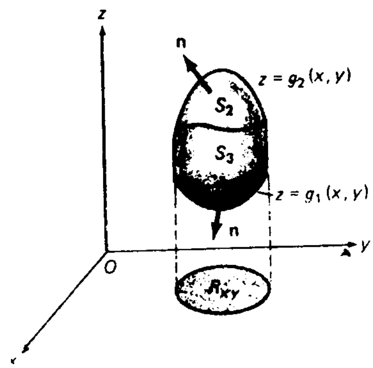
برای این کار ، ابتدا ملاحظه می‌کنیم که چون ناحیهٔ T ، z-ساده ، و S قطعه قطعه هموار است ، T مجموعه‌ای است به شکل

$$\{(x, y, z): (x, y)\in R_{xy},\ g_1(x, y)\le z\le g_2(x, y)\},$$

که در آن R_{xy} تصویر T روی صفحهٔ xy بوده ، و توابع g_1 و g_2 نمودارهای قطعه قطعه هموار دارند . لذا ، T به شکل ۲۹ است که از سطح پایینی S_1 ، سطح بالایی S_2 ، و سطح‌جانبی S_3

---

۱ . همچنین ، به افتخار کارل فردریش گاوس Carl Friedrich Gauss (1777–1855) که بزرگترین ریاضیدان عالم است ، قضیهٔ گاوس نامیده می‌شود .



شکل ۲۹

تشکیل شده است که از پاره‌خطهایی موازی محور z تولید می‌شود. در بعضی حالات، مثلاً" کره، ممکن است S_3 غایب باشد، ولی S_3 سهمی در $\iint_S (F_3\mathbf{k})\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ ندارد، زیرا بردار $\mathbf{n}$ بر S_3 موازی صفحهٔ xy است؛ و درنتیجه، $\mathbf{k}\cdot\mathbf{n} = 0$. لذا، برای اثبات (۹)، کافی است نشان دهیم که

$$\iint_{S_1} (F_3\mathbf{k})\cdot\mathbf{n}\,d\sigma + \iint_{S_2} (F_3\mathbf{k})\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_T \frac{\partial F_3}{\partial z}\,dV. \tag{۹'}$$

رابطهٔ (۹') با استفاده از نتایج قبل به آسانی ثابت می‌شود. اولا"، از قضیهٔ ۵، صفحهٔ ۱۳۴۵، معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned}\iiint_T \frac{\partial F_3}{\partial z}\,dV &= \iint_{R_{xy}} dA \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} \frac{\partial F_3(x, y, z)}{\partial z}\,dz \\ &= \iint_{R_{xy}} [F_3(x, y, g_2(x, y)) - F_3(x, y, g_1(x, y))]\,dA.\end{aligned} \tag{۱۰}$$

ثانیا"، بنابرفرمول (۱۲)، صفحهٔ ۱۴۷۵، به ازای $S = S_2$، $\mathbf{F} = F_3\mathbf{k}$، $F_1 = 0$، $F_2 = 0$ و $dx\,dy = dA$،

$$\iint_{S_2} (F_3\mathbf{k})\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_{R_{xy}} F_3(x, y, g_2(x, y))\,dA. \tag{۱۱}$$

برای به دست آوردن فرمول‌نظیر برای S_1، باید $\mathbf{n}$ را با $-\mathbf{n}$ عوض‌کنیم، زیرا قائم یکهٔ خارجی

بر S_1 روبه پایین است درحالی که بر S_2 رو به بالا می‌باشد . از این نتیجه می‌شود که

$$\iint_{S_1} (F_3\mathbf{k})\cdot(-\mathbf{n})\,d\sigma = \iint_{R_{xy}} F_3(x, y, g_1(x, y))\,dA,$$

یا معادلا "

$$\iint_{S_1} (F_3\mathbf{k})\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = -\iint_{R_{xy}} F_3(x, y, g_1(x, y))\,dA. \qquad (۱۱')$$

با افزودن (۱۱) به (۱۱') ، معلوم می‌شود که

$$\iint_{S_1} (F_3\mathbf{k})\cdot\mathbf{n}\,d\sigma + \iint_{S_2} (F_3\mathbf{k})\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$$
$$= \iint_{R_{xy}} [F_3(x, y, g_2(x, y)) - F_3(x, y, g_1(x, y))]\,dA,$$

و از مقایسهٔ این فرمول با (۱۰) رابطهٔ (۹') ، و درنتیجه (۹) ، ثابت می‌شود . همانطور که قبلا " گفتیم ، بقیهٔ برهان عبارت است از اثبات فرمولهای (۷) و (۸) بااستدلالهایی مشابه .

مثال ۳ . در مثال ۸ ، صفحهٔ ۱۴۷۵، شار میدان $\mathbf{F} = xy^2\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + x^2z^2\mathbf{k}$ خارج از سطح مکعبی S محدود به‌صفحات مختصات وصفحات $x = 1$ ، $y = 1$ ، و $z = 1$ را بامحاسبهٔ مستقیم پیدا کردیم . این کمیت را با استفاده از قضیهٔ دیورژانس حساب کنید .

حل . دیورژانس $\mathbf{F}$ مساوی است با

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial(xy^2)}{\partial x} + \frac{\partial(-yz)}{\partial y} + \frac{\partial(x^2z^2)}{\partial z} = y^2 - z + 2x^2z,$$

و درنتیجه ، طبق قضیهٔ دیورژانس ،

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F}\,dV = \iiint_T (y^2 - z + 2x^2z)\,dV,$$

که در آن T مکعب توپر محدود به S است . بنابراین ،

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (y^2 - z + 2x^2 z)\,dz$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^1 \left[y^2 z - \frac{1}{2}z^2 + x^2 z^2\right]_{z=0}^1 dy$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^1 \left(y^2 - \frac{1}{2} + x^2\right) dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y + x^2 y\right]_{y=0}^1 dx$$
$$= \int_0^1 \left(-\frac{1}{6} + x^2\right) dx = \left[-\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{6},$$

که با مثال مذکور هماهنگی دارد. توجه کنید که چگونه قضیهٔ دیورژانس نیاز به امتحان جداگانهٔ رفتار $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$ بر هر یک از شش وجه S را از بین می‌برد.

مثال ۴. شار میدان $\mathbf{F}=x^3\mathbf{i}+y^3\mathbf{j}+z^3\mathbf{k}$ خارج از کرهٔ $x^2+y^2+z^2=a^2$ به شعاع a را بیابید.

حل. کره را با S و گوی $x^2+y^2+z^2\le a^2$ را با T نشان داده، قضیهٔ دیورژانس را به‌کار می‌بریم. چون

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial(x^3)}{\partial x} + \frac{\partial(y^3)}{\partial y} + \frac{\partial(z^3)}{\partial z} = 3(x^2+y^2+z^2),$$

پس از تبدیل به مختصات کروی می‌بینیم که

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\phi \int_0^a (3\rho^2)\rho^2 \sin\phi\,d\rho$$
$$= 6\pi\left(\int_0^{\pi} \sin\phi\,d\phi\right)\left(\int_0^a \rho^4\,d\rho\right) = \frac{12}{5}\pi a^5.$$

مثال ۵. شار میدان $\mathbf{F}=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$ خارج از سطح S و صادق در شرایط قضیهٔ ۷ را بیابید.

حل. در اینجا

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial(yz)}{\partial x} + \frac{\partial(xz)}{\partial y} + \frac{\partial(xy)}{\partial z} = 0,$$

درنتیجه ، اگر T ناحیهٔ محصور به S باشد ، می‌توان فورا " نتیجه گرفت که

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = \iiint_T 0\,dV = 0.$$

یک میدان با دیورژانس صفر ، مانند میدان $\mathbf{F}$ در مثال‌قبل ،را **سلونوئیدی** می‌نامند .

مثال ۶ . شار میدان $\mathbf{F} = \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ خارج‌ازسطح S صادق در شرایط قضیهٔ۷ رابیابید.

حل . این بار

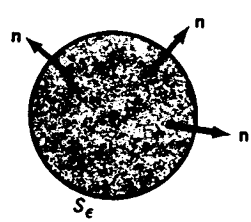
$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_S \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV$$
$$= \iiint_T \left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right)dV = 3\iiint_T dV = 3V,$$

که در آن V حجم ناحیهٔ T محصور به S است . با حل نسبت به V ، فرمول جالب

$$V = \frac{1}{3}\iint_S \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma \qquad (۱۲)$$

به دست می‌آید که حجم یک جسم را برحسب شار بردار $\mathbf{r}$ در امتداد سطحش‌بیان‌می‌کند.

تعبیر فیزیکی دیورژانس . حال دیورژانس را تعبیر فیزیکی می‌کنیم . فرض کنیم $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ میدان سرعت حالت پایدار یک مایع تراکم‌ناپذیر متحرک باشد ، که در آن $\mathbf{v}$ به‌طورپیوسته مشتقپذیر است . فرض کنیم $\operatorname{div}\,\mathbf{v}(\mathbf{a}) > 0$ ؛ درنتیجه ، دیورژانس $\mathbf{v}$ در نقطهٔ P به بردار موضع $\mathbf{a}$ مثبت است . فرض‌کنیم S_ε کره‌ای به شعاع ε و مرکز P با قائم یکهٔ خارجی $\mathbf{n}$ بوده، و T_ε گوی محصور به S_ε باشد (ر.ک. شکل ۳۰) . در این صورت ، چون $\operatorname{div}\,\mathbf{v}$ پیوسته است



شکل ۳۰

(چرا ؟) ، $\operatorname{div} \mathbf{v}$ به ازای ε به‌قدر کافی کوچک بر T_ε مثبت می‌باشد . بنابراین ، طبق قضیهٔ دیورژانس ،

$$\iint_{S_\varepsilon} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_{T_\varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{v}\,dV \tag{۱۳}$$

نیز مثبت است ؛ درنتیجه ، یک شارش روبه‌خارجی از مایع در امتداد S_ε وجود دارد . دراین حالت گوییم شارش یک **منبع** در P دارد . به همین نحو ، هرگاه $\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{a}) < 0$ ، آنگاه $\int_{S_\varepsilon} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma < 0$ ؛ درنتیجه ، یک شارش رو**به داخلی** از مایع درامتداد S_ε وجود دارد وگوییم شارش یک **چاهک** در P دارد . مثلاً ، فرض کنیم لوله‌ای از آب با چنان سرعتی پر شود که شیر زیر سطح آب قرار گیرد ، ولی سطح آب به‌خاطر بازبودن فاضل‌آب ثابت بماند . در این صورت ، شارش درحالت پایدار بوده و یک‌منبع در شیر و یک چاهک در فاضل‌آب‌دارد. در غیاب منبع یا چاهک داریم $\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{a}) = 0$ ، زیرا تراکم‌ناپذیری مایع از هر تجمع یا فقدان مایع داخل S_ε جلوگیری می‌کند .

از فرمول (۱۳) نتیجهٔ جالب دیگری می‌توان به دست آورد . فرض کنیم V_ε حجم T_ε باشد . در این صورت ، (۱۳) معادل است با

$$\frac{1}{V_\varepsilon}\iiint_{T_\varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{v}\,dV = \frac{1}{V_\varepsilon}\iint_{S_\varepsilon} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma,$$

که در آن عبارت سمت چپ مقدار میانگین یا متوسط $\mathbf{v}$ روی ناحیهٔ T_ε است (مسئلهٔ ۳۲ ، صفحهٔ ۱۳۵۵ ، را به یاد بیاورید) . اما وقتی $\varepsilon \to 0$ ، این مقدار متوسط به $\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{a})$ ، یعنی مقدار دیورژانس $\mathbf{v}$ در P ، نزدیک می‌شود (چرا ؟) . بنابراین ،

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{a}) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{V_\varepsilon}\iint_{S_\varepsilon} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma, \tag{۱۴}$$

که تعبیر *فارغ از مختصات* دیورژانس $\mathbf{v}$ در P به عنوان *شار* $\mathbf{v}$ *بر واحد حجم* در P را به ما می‌دهد . بخصوص ، اگر $\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{a})$ مثبت باشد ، یک " دیورژانس " خالص یا شارش روبه‌خارج مایع از کرهٔ S_ε وجود خواهد داشت .

مسائل

دیورژانس میدان دوبعدی دادهٔ شدهٔ $\mathbf{F}$ را بیابید .

۱ . $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

۲. $\mathbf{F} = \dfrac{-y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \dfrac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}$

۳. $\mathbf{F} = (\cos^2 xy)\mathbf{i} + (\sin^2 xy)\mathbf{j}$

۴. $\mathbf{F} = (\cosh^2 xy)\mathbf{i} + (\sinh^2 xy)\mathbf{j}$

۵. $\mathbf{F} = \ln(\sqrt{x^2+y^2})\mathbf{i} + \arctan(x/y)\mathbf{j}$

۶. $\mathbf{F} = (x \ln|x|)\mathbf{i} + (y \ln|y|)\mathbf{j}$

دیورژانس میدان سه‌بعدی داده شدهٔ $\mathbf{F}$ را بیابید.

۷. $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$

۸. $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

۹. $\mathbf{F} = xyz(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$

۱۰. $\mathbf{F} = x^2yz\mathbf{i} + xy^2z\mathbf{j} + xyz^2\mathbf{k}$

۱۱. $\mathbf{F} = \operatorname{grad}(e^{x+y+z})$

۱۲. $\mathbf{F} = (\sin xy)\mathbf{i} + (\cos xz)\mathbf{j} + (\sinh yz)\mathbf{k}$

۱۳. $\operatorname{div}(a\mathbf{F} + b\mathbf{G})$ را درصورتی حساب کنید که a و b اسکالرهای ثابتی باشند.

۱۴. دیورژانس گرادیان میدان اسکالر f *لاپلاسین* f نام دارد و با $\nabla^2 f$ نموده می‌شود. لذا،

$$\nabla^2 f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \operatorname{div}(\nabla f).$$

معادلهٔ $\nabla^2 f = 0$ *معادلهٔ لاپلاس* نام دارد، و جوابهای این معادله *توابع توافقی* خوانده می‌شوند (ر.ک. صفحهٔ ۱۲۳۹). نشان دهید که در بعد دو

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

ولی، در بعد سه،

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

۱۵. نشان دهید که تابع $f(x, y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ همه جا جز در مبداء توافقی است.

۱۶. نشان دهید که تابع $f(x, y, z) = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ هیچ جا توافقی نیست. مسئلهٔ ۵۱، صفحهٔ ۱۲۴۱، به زبان توابع توافقی چه می‌گوید؟

۱۷. آیا تابع $f(x, y, z) = e^x(\sin y + \cos z)$ توافقی است؟ جواب خود را شرح دهید.

۱۸. نشان دهید که $\operatorname{div}(f\nabla f) = |\nabla f|^2 + f\nabla^2 f$.

۱۹. فرمول (۱۲) را برای کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ به شعاع a تحقیق کنید.

۲۰. شبیه دوبعدی فرمول (۱۲) را یافته، و آن را برای دایرهٔ $x^2 + y^2 = a^2$ به شعاع a تحقیق نمایید.

کمیات زیر را با استفاده از قضیهٔ دیورژانس دوبعدی حساب کنید.

۲۱. شار میدان $\mathbf{F} = 3x\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ خارج از دایرهٔ $x^2 + y^2 = 2$

۲۲. شار میدان $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$ خارج از مربع به رئوس $(0, \pm 1)$ و $(2, \pm 1)$

۲۳. فرض کنید $\partial f/\partial n$ مشتق تابع f از دو یا سه‌متغیر در جهت قائم یکهٔ خارجی $\mathbf{n}$ به‌مسیر بستهٔ سادهٔ C یا سطح بستهٔ S باشد (درنتیجه، $\partial f/\partial n = \nabla f \cdot \mathbf{n}$)، و نیز f بر C یا S مشتقات جزئی دوم پیوسته داشته باشد. نشان دهید

$$\iint_R \nabla^2 f\, dA = \int_C \frac{\partial f}{\partial n} ds, \qquad \text{(یک)}$$

که در آن R ناحیهٔ مسطح مرکب از مسیر C و درونش است، یا

$$\iiint_T \nabla^2 f\, dV = \iint_S \frac{\partial f}{\partial n} d\sigma, \qquad \text{(یکَ)}$$

که در آن T ناحیهٔ توپر مرکب از سطح S و درونش می‌باشد.

۲۴. فرمول (یکَ) را برای تابع $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$ و مکعب

$$T = \{(x, y, z): 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1\}$$

تحقیق نمایید.

به کمک قضیهٔ دیورژانس، شار میدان دادهٔ شدهٔ $\mathbf{F}$ خارج از کرهٔ یکهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ را حساب کنید.

۲۵. $\mathbf{F} = 4x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}$

۲۶. $\mathbf{F} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ (a, b, c ثابت)

۲۷. $\mathbf{F} = -y^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$

۲۸. $\mathbf{F} = 2x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$

با محاسبهٔ طرفین معادلهٔ (۶)، قضیهٔ دیورژانس را برای ناحیهٔ توپر T و میدان $\mathbf{F}$ تحقیق کنید.

۲۹. $T = \{(x, y, z): x + y + z \le a, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}$, $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

۳۰. $T = \{(x, y, z): 0 \le x \le a, 0 \le y \le b, 0 \le z \le c\}$, $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$

۳۱. $T = \{(x, y, z): x^2 + y^2 \le 2, 0 \le z \le 1\}$, $\mathbf{F} = 3x\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

۳۲. فرض کنید $f = f(x, y, z)$ و $g = g(x, y, z)$ دو تابع اسکالر با مشتقات دوم پیوسته‌بوده، و S، $\mathbf{n}$، و T همانند در قضیهٔ دیورژانس باشند. *اتحاد اول گرین* را ثابت کنید:

$$\iiint_T (f\nabla^2 g + \nabla f\cdot\nabla g)\,dV = \iint_S f\nabla g\cdot\mathbf{n}\,d\sigma,$$

و ، با استفاده از آن ، *اتحاد دوم گرین* را اثبات نمایید :

$$\iiint_T (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\,dV = \iint_S (f\nabla g - g\,\nabla f)\cdot\mathbf{n}\,d\sigma.$$

۱۵ . ۶ قضیهٔ استوکس[1]

کرل یک میدان برداری . از بخش اخیر به یاد می‌آورید که دیورژانس $\mathbf{div\ F}$ میدان برداری $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ از حاصل‌ضرب *نقطه‌ای* عملگر ∇ در $\mathbf{F}$ تشکیل می‌شود . حال *کرل* $\mathbf{F}$ را درنظر می‌گیریم که از حاصل‌ضرب *خارجی* ∇ در $\mathbf{F}$ تشکیل می‌شود . لذا ،

$$\begin{aligned}\text{curl } \mathbf{F} &= \nabla\times\mathbf{F} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}) \\ &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k},\end{aligned} \tag{۱}$$

که می‌توان آن را به‌طور فشرده‌تر زیر نوشت :

$$\text{curl } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}. \tag{۱'}$$

این یک دترمینان عددی معمولی نیست ، زیرا اولین سطرش از بردارها ، دومین سطرش از عملگرهای دیفرانسیل جزئی ، و سومین سطرش از توابع اسکالر تشکیل شده است ، ولی این راه ساده‌ای برای به‌خاطر آوردن طرف‌راست فرمول (۱) است . توجه‌کنید که عمل کرل‌گیری یک میدان برداری را به میدان برداری دیگری تبدیل می‌کند .

مثال ۱ . $\mathbf{curl\ (grad}\ f)$ را درصورتی حساب کنید که f یک میدان اسکالر بامشتقات جزئی اول و دوم پیوسته باشد .

حل . چون

1- *Stokes*

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k},$$

از فرمول (۱) معلوم می‌شود که

$$\operatorname{curl}(\operatorname{grad} f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right)\mathbf{k}.$$

اما عبارت داخل هر پرانتز در سمت راست صفر است (چرا؟)؛ و لذا،

$$\operatorname{curl}(\operatorname{grad} f) = \nabla \times \nabla f = \mathbf{0}.$$

یک‌میدان با کرل صفر، مانند هر میدان‌گرادیان به‌طور پیوسته‌مشتقپذیر، **غیردورانی** نام دارد (دلیلش ذیلا "آورده می‌شود). حال، با معرفی کرل میدان $\mathbf{F}$، می‌توان‌قضیهٔ **استوکس** را بیان کرد. این تعمیم سه‌بعدی قضیهٔ گرین است به شکل زیر:

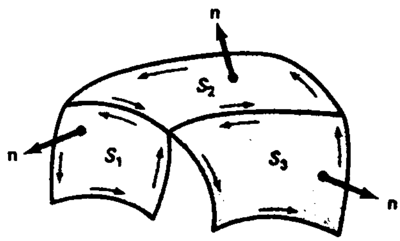
$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA, \qquad (۲)$$

درست مثل قضیهٔ دیورژانس که تعمیم سه‌بعدی قضیهٔ گرین به شکل

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \iint_R \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\right) dA$$

می‌باشد (بحث آغازین بخش ۵.۱۵ را به یاد آورید). در فرمول (۲)، منحنی مسطح بستهٔ سادهٔ C که ناحیهٔ R را محدود می‌کند در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود، که جهت مثبت به صورت تعریف شده در صفحهٔ۱۴۸۴است، به این معنی که R همواره سمت چپ ناظری است که در امتداد C در این جهت حرکت می‌کند. به طور کلی، اگر سطح هموار S مجهز به یک میدان از قائمهای یکهٔ $\mathbf{n}$ به یک منحنی *فضایی* بستهٔ ساده محدود شده باشد، جهت مثبت پیمایش C " القا شده به‌وسیلهٔ $\mathbf{n}$ " جهتی تعریف می‌شود که S همواره سمت چپ ناظری باشد که درحال پیمودن C سرش در جهت $\mathbf{n}$ باشد. اگر S هموار نبوده بلکه فقط قطعه قطعه هموار باشد، درنتیجه S از m زیر سطح‌هموار $S_1, \ldots S_m$ تشکیل شده باشد که در امتداد بخشهایی از منحنیهای مرزی $C_1, \ldots, C_m$ به‌هم‌وصل‌اند، انتساب قائم یکهٔ $\mathbf{n}$ به‌زیر سطوح $S_1, \ldots, S_m$ چنان‌است‌که جهتهای القا شدهٔ $C_1, \ldots, C_m$ ویژگی زیر را دارا می‌باشند: هر قوس از $C_1, \ldots, C_m$ که دو زیر سطح مجاور در آن شریک‌اند دوبار پیموده می‌شود، در هر جهت یکبار، و قوسهای‌باقیمانده " باهم جور شده " منحنی C

تشکیل می‌دهند که سطح S را محدود می‌سازد (منحنی C بخشی از S درنظر گرفته‌می‌شود) این امر در شکل ۳۱ برای سه زیر سطح S_1 ، S_2 ، و S_3 توضیح داده شده است . توجه کنید هرگاه **n** یک قائم یکه به S باشد **n**–انتخاب دیگری از قائم یکه (و تنها انتخاب دیگر) می‌باشد .



یک سطح قطعه قطعه هموار

شکل ۳۱

قضیهٔ ۸ (قضیهٔ استوکس)[۱] . *فرض کنیم S یک سطح قطعه قطعه هموار باشد که به منحنی بستهٔ سادهٔ قطعه قطعه هموار C محدود شده است ، وقائم یکهٔ* **n** *به S را اختیار می‌کنیم . همچنین ، C درجهت مثبت (جهت القا شده به‌وسیلهٔ* **n** *) پیموده‌شده ، و* $\mathbf{F}=F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ *یک میدان برداری به‌طور پیوسته مشتقپذیر بر S باشد . در این صورت ،*

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma. \qquad (۳)$$

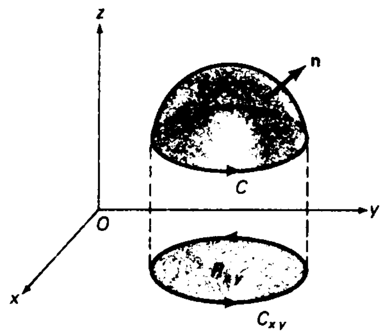
در این صورت ، گردش **F** *حول C مساوی شار کرل* **F** *در امتداد S می‌باشد .*

برهان ناقص (اختیاری) . برهان کامل قضیهٔ استوکس در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته مطرح می‌شود ؛ و لذا ، قضیه را فقط در حالت خاص شکل ۳۲ ثابت می‌کنیم ، که در آن S نمودار تابعی چون $z = z(x, y)$ است با مشتقات جزئی دوم پیوسته که برناحیهٔ ساده R_{xy} در صفحهٔ xy که مرزش منحنی بستهٔ سادهٔ قطعه قطعه هموار C_{xy} است تعریف شده

---

۱ . به افتخار سیر جرج گابریل استوکس Sir George Gabriel Stokes استاد ریاضیات دانشگاه کمبریج ، که قضیه را پس از اینکه در ۱۸۵۰ از سوی فیزیکدان برجسته ، ویلیام تامسون William Thomson که بیشتر به لرد کلوین Lord Kelvin معروف است ، به وی پیشنهاد شد مورد بررسی قرار داد .

است . البته ، ناحیهٔ R_{xy} و منحنی مرزش C_{xy} تصاویر سطح S و مرزش منحنی C روی صفحهٔ xy اند . همچنین ، فرض است که $\mathbf{n}$ قائم یکهٔ *بالایی* به S می‌باشد .



شکل ۳۲

طرف چپ (۳) مساوی است با

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz. \tag{۴}$$

با استفاده از فرمول (۱۲) ، صفحهٔ ۱۴۷۵، به ازای curl F در جای F ، معلوم می‌شود که طرف راست (۳) برابر است با

$$\iint_S (\text{curl }\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_{R_{xy}} \left[-(\text{curl }\mathbf{F})_1\frac{\partial z}{\partial x} - (\text{curl }\mathbf{F})_2\frac{\partial z}{\partial y} + (\text{curl }\mathbf{F})_3\right]dx\,dy$$

$$= \iint_{R_{xy}} \left[\left(\frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial y} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\right]dx\,dy. \tag{۵}$$

از مقایسهٔ (۴) و (۵) معلوم می‌شود که فرمول (۳) درصورتی برقرار است که نشان دهیم

$$\int_C F_1\,dx = -\iint_{R_{xy}} \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dx\,dy, \tag{۶}$$

$$\int_C F_2\,dy = \iint_{R_{xy}} \left(\frac{\partial F_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial x}\right)dx\,dy, \tag{۷}$$

$$\int_C F_3\,dz = \iint_{R_{xy}} \left(\frac{\partial F_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial F_3}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx\,dy, \tag{۸}$$

زیرا (۳) مجموع فرمولهای (۶) تا (۸) می‌باشد.

برای اثبات این فرمولها، فرض کنیم منحنی C_{xy} در جهت مثبت پیموده شده و به معادلات پارامتری $x = x(t),\ y = y(t)\ (a \le t \le b)$ باشد. در این صورت، C منحنی مرزی سطح S به معادلات پارامتری زیر است:

$$x = x(t),\ \ y = y(t),\quad z = z(x(t), y(t))\qquad (a \le t \le b),$$

و این نیز در جهت مثبت پیموده می‌شود. لذا، برحسب تابع مرکب $G(x, y) = F_1(x, y, z(x, y))$

$$\int_C F_1\,dx = \int_a^b F_1(x(t), y(t), z(x(t), y(t)))\frac{dx}{dt}\,dt$$

$$= \int_a^b G(x(t), y(t))\frac{dx}{dt}\,dt = \int_{C_{xy}} G\,dx. \tag{۹}$$

بنابر قضیهٔ گرین (۱)، صفحهٔ ۱۴۸۰، به ازای $P = G$، $Q = 0$، $C = C_{xy}$، $R = R_{xy}$، و $dA = dx\,dy$، با اعمال قاعدهٔ زنجیره‌ای،

$$\int_{C_{xy}} G\,dx = -\iint_{R_{xy}} \frac{\partial G}{\partial y}\,dx\,dy = -\iint_{R_{xy}} \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)dx\,dy. \tag{۹'}$$

از مقایسهٔ (۹) و (۹')، فرمول (۶) به دست می‌آید، و فرمول (۷) اساساً" به همین نحو ثابت می‌شود (شرح دهید).

حال، برای تکمیل برهان، فرمول (۸) را تحقیق می‌کنیم. در اینجا، برحسب تابع مرکب $H(x, y) = F_3(x, y, z(x, y))$،

$$\int_C F_3\,dz = \int_a^b F_3(x(t), y(t), z(x(t), y(t)))\frac{dz(x(t), y(t))}{dt}\,dt$$

$$= \int_a^b H(x(t), y(t))\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)dt \tag{۱۰}$$

$$= \int_{C_{xy}} H\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + H\frac{\partial z}{\partial y}\,dy.$$

مجدداً"، طبق قضیهٔ گرین، پس از اعمال قاعدهٔ زنجیره‌ای،

$$\int_{C_{xy}} H\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + H\frac{\partial z}{\partial y}\,dy = \iint_{R_{xy}} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(H\frac{\partial z}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(H\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]dx\,dy$$

$$= \iint_{R_{xy}} \left(\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + H\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} - H\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\right)dx\,dy$$

$$= \iint_{R_{xy}} \left(\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx\, dy$$

$$= \iint_{R_{xy}} \left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial y} - \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial x}\right] dx\, dy \tag{10'}$$

$$= \iint_{R_{xy}} \left(\frac{\partial F_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial F_3}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx\, dy$$

(کجا در آن از فرض پیوسته بودن جزئیهای دوم $z(x, y)$ استفاده شد ؟) . از مقایسهٔ (۱۰) با (۱۰') رابطهٔ (۸) به دست آمده ، بدین وسیله برهان قضیهٔ استوکس برای این حالت خاص کامل می‌شود .

برای آنکه قضیهٔ گرین به شکل برداری (۲) را از قضیهٔ استوکس (۳) به دست آوریم، سطح S را ناحیهٔ R در صفحهٔ xy می‌گیریم که مرز آن منحنی C بوده و دارای قائم یکهٔ بالایی ثابتی مساوی بردار پایهٔ $\mathbf{k}$ باشد ، و نیز $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j}$ یک میدان به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر C در صفحه باشد . در این صورت ، جهت مثبت $\mathbf{S}$ خلاف عقربه‌های ساعت است ، کرل $\mathbf{F}$ به

$$\text{curl } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

ساده می‌شود ، و $d\sigma = dA$ (چرا ؟) . لذا ، قضیهٔ استوکس فوراً به قضیهٔ گرین بدل می‌شود :

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, d\sigma = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA .$$

مثال ۲ . قضیهٔ استوکس را برای میدان $\mathbf{F} = -2z\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + 4y\mathbf{k}$ تحقیق کنید ، که در آن S عرقچین سهموی $z = 1 - x^2 - y^2$ $(z \geq 0)$ با قائم یکهٔ بالایی $\mathbf{n}$ است که مرزش C دایرهٔ یکهٔ $x^2 + y^2 = 1$ در صفحهٔ xy می‌باشد (ر.ک. شکل ۱۹ ، صفحهٔ ۱۴۷۴) .

حل . چون

$$\text{curl } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -2z & 3x & 4y \end{vmatrix} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

از فرمول (۵) نتیجه می‌شود که

$$\iint_S (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_R [(-4)(-2x) + 2(-2y) + 3]\, dx\, dy$$

$$= \iint_R (8x - 4y + 3)\, dx\, dy,$$

که در آن R قرص یکهٔ $x^2 + y^2 \leq 1$ می‌باشد. لذا، با تبدیل به مختصات قطبی، داریم

$$\iint_S (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (8r \cos\theta - 4r \sin\theta + 3)\, r\, dr$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{8}{3} r^3 \cos\theta - \frac{4}{3} r^3 \sin\theta + \frac{3}{2} r^2\right]_{r=0}^{1} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{8}{3} \cos\theta - \frac{4}{3} \sin\theta + \frac{3}{2}\right) d\theta = 3\pi.$$

و اما در مورد انتگرال خط $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$، چون C دایرهٔ یکهٔ $x^2 + y^2 = 1$ در صفحهٔ xy است، داریم

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C -2z\, dx + 3x\, dy + 4y\, dz = \int_C 3x\, dy$$

$(z = dz = 0)$. لذا، طبق نتیجهٔ ۱ از قضیهٔ گرین (ر.ک. صفحهٔ ۱۴۸۲)،

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 3\,(\text{مساحت } R) = 3\pi$$

و درنتیجه، $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ مساوی است با $\iint_S (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$، که با قضیهٔ استوکس هماهنگی دارد.

مثال ۳. قضیهٔ استوکس را برای میدان $\mathbf{F} = \mathbf{i} + x^3y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ تحقیق کنید، که در آن S کره‌گون $4x^2 + y^2 + z^2 = 4$ $(z \geq 0)$ بوده و $\mathbf{n}$ قائم یکهٔ بالایی S می‌باشد.

حل. این امر که $\mathbf{n}$ درامتداد لبهٔ S، یعنی بیضی $4x^2 + y^2 = 4$ درصفحهٔ xy، افقی است،

به تبدیل مختصری از برهان ناقص قضیهٔ استوکس منجر می‌شود ، که‌درآن S با S_ε ، یعنی‌نمودار

$$4x^2 + y^2 + z^2 = 4 \quad (z \ge \varepsilon > 0),$$

تعویض، محاسبات تکرار، و سپس فرض می‌شود که $\varepsilon \to 0$ ، ولی اعتبار قضیه خدشه‌دار نمی‌شود . چون

$$\text{curl } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 1 & x^3y^2 & z \end{vmatrix} = 3x^2y^2\mathbf{k},$$

از فرمول (۵) معلوم می‌شود که

$$\iint_S (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_R 3x^2y^2\, dx\, dy = 6\int_{-1}^{1} dx \int_0^{2\sqrt{1-x^2}} x^2y^2\, dy$$

$$= 6\int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{3}x^2y^3\right]_{y=0}^{2\sqrt{1-x^2}} dx = 16\int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)^{3/2}\, dx,$$

که در آن R ناحیهٔ بیضوی $4x^2 + y^2 \le 4$ در صفحهٔ xy است . با جانشانی $x = \sin t$ معلوم می‌شود که

$$\iint_S (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = 32\int_0^{\pi/2} \cos^4 t \sin^2 t\, dt. \tag{۱۱}$$

و اما راجع به انتگرال خط $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ، چون C بیضی $4x^2 + y^2 = 4$ در صفحهٔ xy به‌معادلات پارامتری $x = \cos t,\ y = 2\sin t,\ z = 0$ $(0 \le t \le 2\pi)$ است ، داریم

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C dx + x^3y^2\, dy + z\, dz = \int_0^{2\pi} (-\sin t + 8\cos^4 t \sin^2 t)\, dt \\ &= 8\int_0^{2\pi} \cos^4 t \sin^2 dt = 32\int_0^{\pi/2} \cos^4 t \sin^2 t\, dt \end{aligned} \tag{۱۱'}$$

(آخرین مرحله را توجیه کنید) . از مقایسهٔ (۱۱) و (۱۱') ، قضیهٔ استوکس‌دراین‌حالت تأیید می‌شود ، و این کار بدون محاسبهٔ انتگرال $\int_0^{\pi/2} \cos^4 t \sin^2 t\, dt$ ، که به کمک مثال ۳، صفحهٔ ۶۱۷ ، می‌تواند دید مساوی $\pi/32$ است ، صورت گرفته است .

فرض کنیم $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ یک میدان برداری به‌طور پیوسته مشتقپذیرباشد .

ما قبلاً از قضیهٔ ۲، صفحهٔ ۱۴۵۱، که در آن به جای P، Q، و R بنویسیم F_1، F_2، و F_3، می‌دانیم هرگاه $\mathbf{F}$ میدان گرادیان باشد، آنگاه

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}=\frac{\partial F_1}{\partial y},\qquad \frac{\partial F_3}{\partial y}=\frac{\partial F_2}{\partial z},\qquad \frac{\partial F_1}{\partial z}=\frac{\partial F_3}{\partial x},$$

که با $\text{curl }\mathbf{F}=\mathbf{0}$ معادل است. به عکس، فرض کنیم در هر نقطه از قلمرو سه‌بعدی D، $\text{curl }\mathbf{F}=\mathbf{0}$؛ درنتیجه، $\mathbf{F}$ بر D غیردورانی است، و D را چنان می‌گیریم که هر مسیر بستهٔ سادهٔ C واقع در D مرز سطح قطعه قطعه‌هموار S باشد که در D جا دارد؛ یک چنین قلمرو را همبند ساده می‌نامیم[1]. در این صورت، بر S، $\text{curl }\mathbf{F}=\mathbf{0}$، و درنتیجه، بنابرقضیهٔ استوکس،

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S(\text{curl }\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,d\sigma=\iint_S\mathbf{0}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma=0.$$

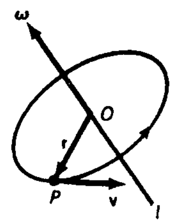
بنابراین، به ازای هر مسیر بستهٔ سادهٔ واقع در D، $\int_C\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=0$. پس از تبصرهٔ صفحهٔ ۱۴۴۹ در مورد میدانهای دوبعدی و سه‌بعدی نتیجه می‌شود که انتگرال خط $\mathbf{F}$ بر D از مسیر مستقل است، یا معادلاً $\mathbf{F}$ بر D میدان گرادیان است. این صورت سه‌بعدی نتیجهٔ ۲ از قضیهٔ گرین، صفحهٔ ۱۴۸۰، می‌باشد.

تعبیر فیزیکی کرل. برای توضیح معنی فیزیکی کرل، فرض کنیم ناحیه‌ای در فضا را با مایعی پر کرده باشیم که با تندی زاویه‌ای ثابت ω (ر.ک. ص۱۱۰۸) حول محور l دوران نماید (ر.ک. ص۱۱۰۸)، ومبداء O را مرکز دایرهٔ رسم شده توسط ذرهٔ چرخان P از مایع، مانند شکل ۳۳، می‌گیریم. اسکالر ω جهت دوران را به ما نمی‌گوید؛ ودرنتیجه، بردار $\boldsymbol{\omega}$ به‌اندازهٔ ω را معرفی می‌کنیم که در امتداد l بوده و در جهتی باشد که دوران در چشم ناظری واقع در نوک $\boldsymbol{\omega}$ خلاف جهت عقربه‌های ساعت باشد. سرعت معمولی (انتقالی) ذرهٔ P برحسب این بردار (به نام *سرعت زاویه‌ای*) مساوی است با

$$\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}, \tag{12}$$

---

۱. *این تعریف اساساً همان تعریف قلمرو دوبعدی همبند ساده است که در صفحهٔ ۱۴۴۴ داده شده است (ناحیهٔ مسطح را مرکب از منحنی بستهٔ سادهٔ C و درونش به عنوان سطح با مرز C تجسم نمایید). اما یک قلمرو همبند ساده در فضا می‌تواند حفره داشته باشد؛ مثلاً، قلمرو بین دو کرهٔ متحدالمرکز همبند ساده است. به عنوان یک قلمرو سه‌بعدی همبند چندگانه (یعنی، همبند ساده نباشد)، می‌توان چنبره را درنظرگرفت.*



شکل ۳۳

که در آن $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ بردار موضع P می‌باشد . در واقع ، همانطور که از شکل واضح است ، $\mathbf{v}$ بر هر دوی $\boldsymbol{\omega}$ و $\mathbf{r}$ عمود بوده ، و بردارهای $\mathbf{v}$ ، $\boldsymbol{\omega}$ ، و $\mathbf{r}$ یک دستگاه راست دست تشکیل می‌دهند (برای مشاهدهٔ این امر ، نقطهٔ شروع $\mathbf{v}$ را در O قرار دهید) . لذا ، $\mathbf{v}$ و $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ همجهت‌می‌باشند .ولی $\mathbf{v}$ و $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ هم‌اندازه نیز هستند ،زیرا$\boldsymbol{\omega}$و $\mathbf{r}$ برهم‌عمودند؛ درنتیجه ، $|\mathbf{v}| = \omega|\mathbf{r}|$ ، و ما از صفحهٔ ۱۱۰۸ می‌دانیم که $|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}| = \omega|\mathbf{r}|$. این رابطهٔ (۱۲) را ثابت می‌کند ، و اگر O هر نقطهٔ دیگر محور l گرفته شود ، این فرمول بازهم برقرار است (چرا ؟) .

حال کرل میدان سرعت (۱۲) را حساب می‌کنیم . فرض کنیم

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{i} + \omega_2\mathbf{j} + \omega_3\mathbf{k}$$

در این صورت ،

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$
$$= (\omega_2 z - \omega_3 y)\mathbf{i} + (\omega_3 x - \omega_1 z)\mathbf{j} + (\omega_1 y - \omega_2 x)\mathbf{k}$$

درنتیجه ،

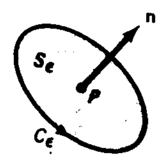
$$\operatorname{curl} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \omega_2 z - \omega_3 y & \omega_3 x - \omega_1 z & \omega_1 y - \omega_2 x \end{vmatrix} = 2\omega_1\mathbf{i} + 2\omega_2\mathbf{j} + 2\omega_3\mathbf{k} = 2\boldsymbol{\omega}\text{.}$$

لذا ، کرل میدان سرعت یک مایع چرخان ، صرف نظر از عامل 2 ، همان سرعت زاویه‌ای مایع می‌باشد . این نشان می‌دهد که $\operatorname{curl} \mathbf{v}$ " تمایل دورانی " میدان سرعت $\mathbf{v}$ را سنجیده ، و دلیل اینکه یک میدان با کرل صفر را " غیردورانی " نامند توضیح می‌دهد .

روش جالب دیگری نیز برای تعبیر کرل وجود دارد. فرض کنیم S_ε قرصی به شعاع ε باشد که در میدان سرعت حالت پایدار $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ فرورفته است، و مرکز S_ε در نقطهٔ P به بردار شعاعی $\mathbf{a}$ باشد. در این صورت، طبق قضیهٔ استوکس،

$$\iint_{S_\varepsilon} (\operatorname{curl} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \int_{C_\varepsilon} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}, \qquad (۱۳)$$

که در آن S_ε قائم یکهٔ $\mathbf{n}$ داشته و C_ε مرز مستدیر S_ε باشد که در جهت مثبت نسبت به $\mathbf{n}$ پیموده می‌شود (ر.ک. شکل ۳۴). فرض کنیم A_ε مساحت S_ε باشد. در این صورت، فرمول



شکل ۳۴

(۱۳) معادل است با

$$\frac{1}{A_\varepsilon} \iint_{S_\varepsilon} (\operatorname{curl} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \frac{1}{A_\varepsilon} \int_{C_\varepsilon} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r},$$

که در آن $\int_{C_\varepsilon} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ گردش $\mathbf{v}$ حول C_ε بوده (صفحهٔ ۱۴۴۹ را به یاد آورید)، و عبارت سمت چپ مقدار میانگین یا متوسط $(\operatorname{curl} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}$ روی قرص S_ε است. اما وقتی $\varepsilon \to 0$، این متوسط به $[\operatorname{curl} \mathbf{v}(\mathbf{a})] \cdot \mathbf{n}$، یعنی مؤلفهٔ کرل $\mathbf{v}$ در P روی $\mathbf{n}$، نزدیک می‌شود. بنابراین،

$$[\operatorname{curl} \mathbf{v}(\mathbf{a})] \cdot \mathbf{n} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{A_\varepsilon} \int_{C_\varepsilon} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r},$$

که تعبیر *فارغ از مختصات* مؤلفهٔ کرل $\mathbf{v}$ در P روی $\mathbf{n}$ را به عنوان *گردش* $\mathbf{v}$ *بر واحد مساحت* در صفحهٔ مار بر P و عمود بر $\mathbf{n}$ به ما می‌دهد. این فرمول را با فرمول (۱۴)، صفحهٔ ۱۵۰۸، برای دیورژانس $\mathbf{v}$ در P مقایسه نمایید.

مسائل

کرل میدان برداری $\mathbf{F}$ را پیدا نمایید.

۱. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ۲. $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

۳. $\mathbf{F} = (y - z)\mathbf{i} + (z - x)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$

۴. $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + (y - z)\mathbf{j} + (x - z)\mathbf{k}$

۵. $\mathbf{F} = (y\mathbf{i} - x\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$

۶. $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

۷. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$

۸. $\mathbf{F} = z^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + x^3\mathbf{k}$

۹. $\mathbf{F} = ye^z\mathbf{i} + xe^z\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$

۱۰. $\mathbf{F} = (\sin y)\mathbf{i} + (\cos x)\mathbf{j} + (\sin xy)\mathbf{k}$

۱۱. $\operatorname{div}(\operatorname{curl} \mathbf{F})$ را با فرض اینکه $\mathbf{F}$ مشتقات جزئی دوم پیوسته دارد حساب کنید.

۱۲. فرض کنید f یک‌میدان اسکالر مشتقپذیر و $\mathbf{F}$ یک‌میدان برداری‌مشتقپذیر باشد. نشان دهید که

$$\operatorname{curl}(f\mathbf{F}) = \operatorname{grad} f \times \mathbf{F} + f \operatorname{curl} \mathbf{F} = \nabla f \times \mathbf{F} + f\nabla \times \mathbf{F}$$

(به تشابه این با مثال ۲ ، صفحهٔ ۱۵۰۲، توجه کنید) .

فرض کنید $\mathbf{F}$ و $\mathbf{G}$ توابع برداری مشتقپذیری باشند. نشان دهید که

۱۳. $\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \operatorname{curl} \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \operatorname{curl} \mathbf{G}$

۱۴. $\operatorname{curl}(a\mathbf{F} + b\mathbf{G}) = a \operatorname{curl} \mathbf{F} + b \operatorname{curl} \mathbf{G}$ (a و b ثابتهای اسکالر هستند)

قضیهٔ استوکس را برای میدان برداری $\mathbf{F}$ و سطح S داده شده تحقیق نمایید. در هرحالت، $\mathbf{n}$ را قائم یکهٔ بالایی بگیرید.

۱۵. $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} - y\mathbf{k}$ ، S نمودار $z = x$ روی مستطیل $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2$ است

۱۶. $\mathbf{F} = (x^2 + x)\mathbf{i} + 3xy\mathbf{j} + (2xz + z^2)\mathbf{k}$ ، S نیمکرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ $(z \ge 0)$ است

۱۷. $\mathbf{F} = e^x\mathbf{i} + e^y\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}$ ، S همان عرقچین سهموی مثال ۲ است

۱۸. $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ، S ناحیهٔ بیضویی است که در آن صفحهٔ $x + y + z = 2$ استوانهٔ $x^2 + y^2 = 1$ را قطع می‌کند

با استفاده از قضیهٔ استوکس، انتگرال $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ را درصورتی حساب کنید که $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ و C منحنی داده شده باشد.

۱۹. C مثلثی به رئوس $(0, 0, 3)$ ، $(1, 0, 3)$ ، و $(2, 1, 3)$ است که به همین ترتیب پیموده می‌شود

۲۰. C دایره‌ای است که در آن صفحهٔ $z = y$ کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ قطع می‌کند و از محور z مثبت دیده می‌شود که پیمایش آن خلاف جهت عقربه‌های ساعت صورت می‌گیرد

فرض کنید f و g میدانهای اسکالر در فضا و با مشتقات جزئی دوم پیوسته بوده، و S ، C

و $\mathbf{n}$ همانند قضیهٔ استوکس باشند. نشان دهید که

۲۱. $$\int_C f\,\nabla g\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla f \times \nabla g)\cdot \mathbf{n}\,d\sigma$$

۲۲. $$\int_C (f\nabla g + g\nabla f)\cdot d\mathbf{r} = 0$$

۲۳. فرض کنید C یک منحنی بستهٔ سادهٔ قطعه قطعه هموار و مرز مشترک دو سطح قطعه قطعه هموار S_1 و S_2 با قائمهای $\mathbf{n}_1$ و $\mathbf{n}_2$ باشد، و نیز

$$I_1 = \iint_{S_1} (\text{curl }\mathbf{F})\cdot \mathbf{n}_1\,d\sigma, \qquad I_2 = \iint_{S_2} (\text{curl }\mathbf{F})\cdot \mathbf{n}_2\,d\sigma$$

که در آنها $\mathbf{F}$ یک میدان برداری به‌طور پیوسته مشتقپذیر بر هر دوی S_1 و S_2 است. نشان دهید اگر جهت پیمایش C القا شده توسط $\mathbf{n}_1$ و $\mathbf{n}_2$ یکسان باشد، $I_1 = I_2$؛ در غیر این صورت، $I_1 = -I_2$.

۲۴. فرض کنید سطح S در قضیهٔ استوکس بسته باشد؛ درنتیجه، منحنی مرزی S_1 وجود ندارد. نشان دهید که در این حالت

$$\iint_S (\text{curl }\mathbf{F})\cdot \mathbf{n}\,d\sigma = 0.$$

۲۵. فرض کنید $\mathbf{F} = -y^2\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$، و S سطح مکعبی شکل ۱۵، صفحهٔ ۱۴۷۰، باشد منتها وجه جلوی S_1 آن برداشته شده است، و $\mathbf{n}$ را قائم یکهٔ خارجی S بگیرید. شار کرل $\mathbf{F}$ در امتداد S را با محاسبهٔ گردش $\mathbf{F}$ حول مرز S مستقیماً" حساب کنید، ونیز، با استفاده از مسئلهٔ ۲۳، شار را به صورت انتگرالی روی وجه غایب بیان دارید.

۲۶. با فرض پیوسته بودن مشتقات جزئی دوم پیوستهٔ F، نشان دهید که

$$\text{curl (curl }\mathbf{F}) = -\nabla^2\mathbf{F} + \text{grad (div }\mathbf{F}) \qquad (\text{یک})$$

(عبارت $\nabla^2\mathbf{F} = \nabla^2(F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k})$ را به صورت $\nabla^2F_1\mathbf{i} + \nabla^2F_2\mathbf{j} + \nabla^2F_3\mathbf{k}$ تعبیر نمایید).

۲۷. $\text{curl (curl }\mathbf{F})$ را به ازای $\mathbf{F} = x^2y\mathbf{i} + 2xz\mathbf{j} - 3yz\mathbf{k}$ هم مستقیماً" و هم با استفاده‌ازفرمول (یک) حساب کنید.

۲۸. فرض کنید T، S، و $\mathbf{n}$ همانند قضیهٔ دیورژانس (ر.ک. صفحهٔ ۱۵۰۲) بوده، و $\mathbf{G}$ یک میدان برداری به‌طور پیوسته مشتقپذیر بر T باشد. نشان دهید که

$$\iint_S \mathbf{n}\times\mathbf{G}\,d\sigma = \iiint_T \text{curl }\mathbf{G}\,dV.$$

راهنمایی . در قضیهٔ دیورژانس قرار دهید $\mathbf{F} = \mathbf{G} \times \mathbf{c}$، که در آن $\mathbf{c}$ بردار ثابتی است. انتگرالهای سطح و حجم میدانهای برداری را مؤلفه به مؤلفه تعبیر نمایید؛ مثلاً "،

$$\iint_S \mathbf{F}\, d\sigma = \iint_S (F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k})\, d\sigma$$

$$= \left(\iint_S F_1\, d\sigma\right)\mathbf{i} + \left(\iint_S F_2\, d\sigma\right)\mathbf{j} + \left(\iint_S F_3\, d\sigma\right)\mathbf{k}.$$

اصطلاحات و مباحث کلیدی

انتگرالهای خط نسبت به طول قوس

انتگرالهای خط نسبت به مختصات

منحنیهای قطعه قطعه هموار، قلمروهای همبند ساده و چندگانه

انتگرالهای خط مستقل از مسیر، میدانهای گرادیان

انرژی پتانسیل، بقای انرژی، میدانهای بقا

توصیف میدانهای گرادیان

مساحت سطح و انتگرالهای سطح

قائمهای یکه به سطح، سطوح قطعه قطعه هموار

شار یک میدان برداری در امتداد سطح

قضیهٔ گرین و موارد استعمال آن

تبدیلات مختصات و ژاکوبیها

تغییر متغیر در انتگرالهای چندگانه

شکلهای برداری قضیهٔ گرین

دیورژانس و کرل یک میدان برداری

قضیهٔ دیورژانس و قضیهٔ استوکس

مسائل تکمیلی

انتگرال خط داده شده از نوع $\int_C f(\mathbf{r})\,ds$ را حساب کنید.

۱. $\int_C xy\,ds$ ، که در آن C قوس بیضوی $x = 3\cos t,\ y = 2\sin t$ $(0 \le t \le \pi/2)$ است

۲. $\int_C \sqrt{x^2 + y^2}\,ds$ ، که در آن C دایرهٔ $x^2 + y^2 = 2y$ است که یکبار در جهت خلاف

عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود .

۳ . $\int_C x\sqrt{x^2 - y^2}\, ds$ ، که درآن C حلقهٔ راست لمنیسکات $r^2 = 4\cos 2\theta$ $(-\pi/4 \le \theta \le \pi/4)$ است

۴ . $\int_C \frac{ds}{x^2 + y^2 + z^2}$ ، که در آن C قوس مارپیچی $x = \cos t, y = \sin t, z = t$ $(0 \le t \le 2\pi)$ است

۵ . یک ذرهٔ متحرک درامتداد دایرهٔ $x^2 + y^2 = R^2$ به‌شعاع R و درجهت خلاف عقربه‌های ساعت تحت اثر نیروی ثابتی به اندازهٔ F که در امتداد محور مثبت است قراردارد . کار این نیرو بر ذره را وقتی ذره قوسی از دایره که در ربعهای اول و دوم است می‌پیماید پیدا نمایید . این کار وقتی ذره باشروع از نقطه‌ای یک‌دور کامل‌را می‌پیماید چقدر است ؟

۶ . اندازهٔ نیرویی با فاصلهٔ بین نقطهٔ اثرش و صفحهٔ xy نسبت عکس داشته وثابت تناسب a می‌باشد. فرض کنید نیرو همیشه از مبداء دور شود . کار این نیرو بر ذرهٔ متحرکی از $A = (1, 2, 2)$ تا نقطهٔ $B = (2, 4, 4)$ در امتداد پاره‌خط AB را بیابید .

۷ . $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ را درصورتی حساب کنید که $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ و C پاره خط واصل بین مبداء و نقطهٔ (a, a, a) باشد .

۸ . انتگرال خط

$$\int_C \frac{x^2\, dy - y^2\, dx}{x^{5/3} + y^{5/3}}$$

را درصورتی حساب کنید که C ستاره‌گون $x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t$ $(0 \le t \le 2\pi)$ باشد که یک بار درجهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده است .

۹ . انتگرال خط $\int_C y^2\, dx + z^2\, dy + x^2\, dz$ را در صورتی حساب کنید که C منحنی $x = t, y = t^2, z = t^3$ $(0 \le t \le 1)$ باشد .

۱۰ . فرض کنید $f(x)$ بر $(-\infty, \infty)$ به‌طور پیوسته مشتقپذیر باشد . نشان دهید که میدانهای برداری $\mathbf{F}(x, y) = f(x^2 + y^2)(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$ و $\mathbf{G}(x, y) = f(xy)(y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$ هر دو میدانهای بقا هستند .

آیا میدان برداری $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ به مؤلفه‌های دادهٔ شدهٔ $P = P(x, y)$ و $Q = Q(x, y)$ میدان گرادیان است ؟ اگر چنین است ، تابع U و قلمرو D را طوری بیابید که بر آن $\mathbf{F} = \mathrm{grad}\, U$.

۱۱ . $P = (x^2 + xy + y^2)x,\ Q = (x^2 - xy + y^2)y$

۱۲. $P = \cosh x + \cosh y, Q = x \sinh y$

۱۳. $P = e^{x+y} - \sin(x-y), Q = e^{x+y} + \sin(x-y)$

۱۴. $P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, Q = \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}$

انتگرال خط داده شده را پس از تحقیق در استقلال از مسیر حساب کنید.

۱۵. $\int_{(0,0)}^{(1,-1)} \arctan x\, dx + \arctan y\, dy$

۱۶. $\int_{(-1,\pi/3)}^{(\pi/2,1)} (\sin xy)(y\,dx + x\,dy)$

۱۷. $\int_{(-1,1,-1)}^{(1,-1,\sqrt{3})} \frac{yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz}{1 + x^2y^2z^2}$

۱۸. $\int_{(-1,2,-2)}^{(3,-4,12)} \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

مساحت سطح S ذکر شده را بیابید.

۱۹. S بخشی از صفحهٔ $3x + 4y + 12z = 1$ است که داخل استوانهٔ $y^2 + z^2 = 1$ قراردارد

۲۰. S بخشی از مخروط $x^2 - y^2 - z^2 = 0$ است که توسط استوانهٔ هذلولوی $x^2 - y^2 = 1$ و صفحات $y = \pm\sqrt{2}$ جدا می‌شود.

۲۱. S بخشی از مخروط $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ است که توسط استوانهٔ $x^2 + z^2 = a^2$ به شعاع a جدا می‌شود.

۲۲. همانطور که در صفحهٔ ۷۵۵ نشان دادیم، مساحت A سطح S حاصل ازدوران نمودار تابع نامنفی پیوستهٔ $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ حول محور x از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$A = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

این فرمول را به کمک انتگرال سطح به دست آورید.

۲۳. انتگرال سطح

$$\iint_S \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

را درصورتی حساب کنید که S بخشی از سهمی‌گون هذلولوی $z = xy$ باشد که توسط استوانهٔ $x^2 + y^2 = 1$ جدا می‌شود.

۲۴. فرض کنید S سطح جانبی یک مخروط ناقص با چگالی یک، شعاع بالایی r_1، شعاع قاعدهٔ r_2، و ارتفاع h باشد (ر.ک. مسئلهٔ ۱۱، صفحهٔ ۷۰۴). گشتاور ماند S حول محور تقارن آن را بیابید.

۲۵. میدان سرعت مایعی $\mathbf{v} = y\mathbf{i} + \mathbf{j} + z\mathbf{k}$ به متربرثانیه است. چند متر مکعب بر ثانیه از مایع از سطح مثلثی S به رئوس $(1, 0, 0)$، $(0, 2, 0)$، و $(0, 0, 3)$ در جهت رو به بالا عبور می‌کند؟

۲۶. شار میدان $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ خارج از سطح بستهٔ S محدود به مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ و صفحهٔ $z = 1$ را بیابید.

۲۷. فرض کنید C کنتور مربعی به‌رئوس $(\pm 1, \pm 1)$ باشد که یکبار درجهت‌خلاف‌عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود. انتگرال خط

$$\int_C (ye^{xy} - y^2 \sin x)\, dx + (xe^{xy} + 2y \cos x)\, dy$$

را با استفاده از قضیهٔ گرین حساب کنید.

۲۸. فرض کنید C یک منحنی بستهٔ سادهٔ قطعه قطعه هموار باشد. تعبیر هندسی انتگرال خط $\int_C (2xy - y)\, dx + x^2\, dy$ چیست؟

۲۹. فرض کنید توابع $f = f(x, y)$ و $g = g(x, y)$ بر ناحیهٔ R، که از منحنی بستهٔ سادهٔ قطعه قطعه هموار C و درونش تشکیل شده است، به‌طور پیوسته مشتقپذیر باشد. نشان دهید که

$$\int_C fg\, dx + fg\, dy = \iint_R \left[g\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) + f\left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right) \right] dA.$$

۳۰. با استفاده از قضیهٔ گرین، نشان دهید که مساحت محصور به مسیر چندضلعی بستهٔ سادهٔ $P_1P_2P_3 \ldots P_nP_1$ به رئوس

$$P_i = (x_i, y_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

مساوی نصف قدرمطلق مجموع

$$(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + \cdots + (x_ny_1 - x_1y_n)$$

است. بخصوص، مسئلهٔ ۱۶، صفحهٔ ۱۲۱۰، را در مورد مساحت مثلث به رئوس (x_1, y_1)، (x_2, y_2)، و (x_3, y_3) تحقیق نمایید.

راهنمایی. ابتدا نشان دهید که اگر L پاره خط از (x_1, y_1) تا (x_2, y_2) باشد، $\int_L x\, dy - y\, dx = x_1y_2 - x_2y_1$.

۳۱. با استفاده از مسئلهٔ ۳۰، مساحت محصور به چهار ضلعی با رئوس $(1, -1)$، $(2, -3)$، $(5, 1)$، و $(2, 6)$ را بیابید.

۳۲. انتگرال مضاعف

$$\iint_R \sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\, dx\, dy$$

را درصورتی بیابید که R ناحیهٔ واقع در ربع اول و محدود به محورهای مختصات و قوس سهموی $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ باشد.

راهنمایی. از تبدیل $x = u\cos^4 v,\ y = u\sin^4 v$ استفاده کنید.

دیورژانس میدان برداری سه‌بعدی داده شده را درصورتی بیابید که $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بردارهای ثابتی بوده و $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

۳۳. $\mathbf{a} \times \mathbf{r}$
۳۴. $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{b}$
۳۵. $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}$

۳۶. $(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{b}$
۳۷. $(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{r}$
۳۸. $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{b} \times \mathbf{r})$

۳۹. میدان $\mathbf{F} = (3x - y)\mathbf{i} + (2y - x^2)\mathbf{j} + (xy - cz)\mathbf{k}$ به‌ازای چه‌مقداری از ثابت c سولنوئیدی است؟

۴۰. فرض کنید T، S، و $\mathbf{n}$ همانند قضیهٔ دیورژانس بوده، و A مساحت سطح S باشد. نشان دهید که

$$\iiint_T \operatorname{div} \mathbf{n}\, dV = A.$$

۴۱. نشان دهید که قضیهٔ دیورژانس برای ناحیهٔ توپر T بین دو سطح بستهٔ S' و S'' در صورتی برقرار می‌ماند که انتگرال سطح $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$ با مجموعی از انتگرالهای سطح روی S' و S'' با قائم یکهٔ $\mathbf{n}$ در جهت دور شدن از T عوض شود.

۴۲. فرض کنید $\mathbf{F} = (q/r^2)\mathbf{u}$ یک میدان قانون عکس‌مجذور ناشی از جاذبه یا دافعه (مثلاً، ثقلی یا الکترواستاتیک) در مبداء باشد؛ در اینجا q یک ثابت مثبت یا منفی است، $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$، $r = |\mathbf{r}|$، و $\mathbf{u} = \mathbf{r}/r$. به کمک مسئلهٔ قبل، نشان دهید هرگاه S یک سطح بستهٔ قطعه قطعه هموار حول مبداء با قائم یکهٔ خارجی $\mathbf{n}$ باشد، آنگاه

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = 4\pi q,$$

نتیجه‌ای که به *قانون گاوس*[1] معروف است.

راهنمایی. پس از نشان دادن اینکه به ازای $r \neq 0$، $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$، از مسئلهٔ ۴۱ استفاده کنید.

۴۳ تا ۴۸. کرل هر یک از میدانهای برداری مسائل ۳۳ تا ۳۸ را بیابید.

راهنمایی. در مسائل ۴۶ تا ۴۸ از "قاعدهٔ بک ــ کب" استفاده کنید (ر.ک. مسئلهٔ ۴۸، صفحهٔ ۱۱۶۲).

1. *Gauss*

۴۹. فرض کنید f میدان اسکالری با مشتقات جزئی اول و دوم پیوسته باشد. نشان دهید که میدان برداری ∇f غیردورانی است.

۵۰. فرض کنید T ، S ، و $\mathbf{n}$ همانند قضیهٔ دیورژانس بوده (ر.ک. صفحهٔ ۱۵۰۲)، و f یک میدان اسکالر به‌طور پیوسته مشتقپذیر بر T باشد. نشان دهید که

$$\iint\limits_S f\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint\limits_T \operatorname{grad} f\,dV.$$

راهنمایی. در قضیهٔ دیورژانس قرار دهید $\mathbf{F} = f\mathbf{c}$ ، که در آن $\mathbf{c}$ بردار ثابتی می‌باشد.

۵۱. فرض کنید S یک سطح بستهٔ قطعه قطعه هموار با قائم یکهٔ خارجی $\mathbf{n}$ باشد. نشان دهید که $\iint\limits_S \mathbf{n}\,d\sigma = \mathbf{0}$.

۵۲. پدیده‌های الکترومغناطیس تحت یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبهٔ اول، به نام *معادلات ماکسول*[1]، عمل می‌کنند که شامل *میدان الکتریکی* $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z, t)$ و *میدان مغناطیسی* $\mathbf{H} = \mathbf{H}(x, y, z, t)$ است که هر دو تابع t و مختصات فضایی x ، y ، و z می‌باشند. در فضای تهی، معادلات ماکسول به شکل زیرند:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 0, \qquad \operatorname{curl}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \qquad \operatorname{curl}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

که در آن c سرعت نور است. نشان دهید هر مؤلفهٔ $\mathbf{E}$ و $\mathbf{H}$ در *معادلهٔ* موج

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

صدق می‌کند، که از این ماکسول وجود امواج الکترومغناطیس را که با سرعت نور حرکت می‌کنند نتیجه گرفت. امواج رادیویی، اشعهٔ $\mathbf{X}$ ، و خود نور همه امواجی الکترو- مغناطیس می‌باشند.

راهنمایی. به کمک فرمول (یک)، صفحهٔ ۱۵۲۳، نشان دهید که معادلات ماکسول روابط زیر را ایجاب می‌کنند:

$$\nabla^2\mathbf{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \qquad \nabla^2\mathbf{H} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}.$$

---

1. *Maxwell*

معادلات دیفرانسیل مقدماتی[16]

معادلات دیفرانسیل قبلاً در بخشهای ۶.۲ و ۶.۴ آمده‌اند، و در فصل ۶ معادلات دیفرانسیلی از نوع خاص، به نام معادلات جدایی‌پذیر، در حل چند مسئلهٔ کار بسته به طور وسیع به کار گرفته شد. در این فصل کوتاه، مبحث معادلات دیفرانسیل را کمی بیشتر تعقیب می‌کنیم. این مبحث بسیار وسیع بوده، و در فرصت باقیمانده فقط می‌توانیم چند مطلب مقدماتی مهم را مطرح سازیم. ما خود را به معادلات دیفرانسیل معمولی محدود می‌کنیم؛ یعنی، معادلاتی که شامل یک یا چند مشتق تابع $y = y(x)$ از تنها متغیر مستقل x اند. البته، معادلات دیفرانسیل جزئی نیز وجود دارند که شامل مشتقات جزئی تابع $y = y(x_1, \ldots, x_n)$ از چند متغیر مستقل $x_1, \ldots, x_n$ اند، ولی بررسی اصولی این معادلات از حوصلهٔ این درس خارج می‌باشد.

منظور از مرتبهٔ یک معادلهٔ دیفرانسیل یعنی مرتبهٔ بالاترین مشتق تابع مجهول y که در معادله آمده است. گوییم یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ n خطی است اگر بتوان آن را به شکل زیر نوشت:

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_n(x)y^{(n)} = b(x),$$

که در آن $y', y'', \ldots, y^{(n)}$، n مشتق اول y بوده، و $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x), b(x)$ فقط تابع متغیر مستقل x باشند (بعضی یا تمام آنها ممکن است ثابت باشند)؛ در غیر این صورت، معادله را غیرخطی خواهیم نامید. مثلاً،

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x^2\frac{dy}{dx} - xy = e^x$$

یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم است، ولی

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = 0, \qquad y\frac{dy}{dx} + \sin x = 0, \qquad x\frac{dy}{dx} + \sin y = 0$$

همه معادلات دیفرانسیل غیرخطی از مرتبهٔ اول می‌باشند . اکثر معادلات بخش ۱۶.۱ غیر خطی‌اند ، ولی بقیهٔ فصل عمدتاً به معادلات خطی مراتب اول و دوم و کاربردهایشان می‌پردازد .

۱۶.۱ معادلات کامل و عاملهای انتگرالگیری

فرض کنیم $U = U(x, y)$ یک تابع به‌طور پیوسته مشتقپذیر دومتغیره بوده ، و معادلهٔ

$$U(x, y) = C \tag{۱}$$

را درنظر می‌گیریم ، که در آن C ثابت دلخواهی می‌باشد . با این فرض که (۱) y را به‌طور ضمنی به صورت تابع مشتقپذیری از x تعریف می‌کند ، از قاعدهٔ زنجیره‌ای معلوم می‌شود که

$$\frac{dU}{dx} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

پس نتیجه می‌شود که

$$P + Q\frac{dy}{dx} = 0, \tag{۲}$$

که در آن توابع $P = P(x, y)$ و $Q = Q(x, y)$ مشتقات جزئی U می‌باشند :

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Q = \frac{\partial U}{\partial y}. \tag{۳}$$

لذا ، **جواب عمومی** معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول معادلهٔ (۲) با (۱) داده می‌شود . این یعنی به ازای هر مقدار از C ، معادلهٔ (۱) یک تابع ضمنی مانند $y = y(x)$ تعریف می‌کند که در معادلهٔ (۲) صدق می‌نماید . همچنین ، ممکن است (۲) *جوابهای منفرد* داشته باشد ؛ یعنی ، جوابهایی که نظیر به هیچ مقداری از C نیستند ؛ مثلاً ، در مثال ۴ زیر یک جواب منفرد داریم . توجه کنید که معادلهٔ (۲) برحسب دیفرانسیلها شکل زیر را به خود می‌گیرد :

$$P\,dx + Q\,dy = 0. \tag{۲'}$$

معادلات کامل . به عکس ، اگر معادلهٔ دیفرانسیلی به شکل (۲) داده شده باشد که در آن $P = P(x, y)$ و $Q = Q(x, y)$ به‌طور پیوسته مشتقپذیر باشند ، فرض می‌کنیم تابعی چون $U = U(x, y)$ موجود باشد که در شرایط (۳) صدق نمایند . در این صورت ، گوییم (۲) یک *معادلهٔ دیفرانسیل کامل* است ، و در این وضع

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = P\,dx + Q\,dy$$

یک دیفرانسیل کامل نام دارد (مفهوم اخیر در مسئلهٔ ۲۹ ، صفحهٔ ۱۴۵۸، پیش‌بینی شده بود) . ما قبلاً " از فصل ۱۵ می‌دانیم که $P\,dx + Q\,dy$ بر قلمرو همبند سادهٔ D دیفرانسیل کامل است ، یا معادلاً " $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ بر D میدان گرادیان است اگر و فقط اگر شرط

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \tag{۴}$$

در هر نقطه از D برقرار باشد . در واقع ، (۳) رابطهٔ (۴) را ایجاب می‌کند ، زیرا

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

و همانطور که در قضیهٔ ۳ ، صفحهٔ ۱۴۵۳، برای قلمرو مستطیلی ، و درنتیجهٔ ۲ ، صفحهٔ ۱۴۸۲، برای قلمرو همبند سادهٔ کلی نشان دادیم ، رابطهٔ (۴) رابطهٔ (۳) را ایجاب خواهد کرد .

مثال ۱ . در بخش ۶.۶ معادلات دیفرانسیل *جدایی پذیر* ، یعنی معادلاتی به شکل

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \qquad (g(y) \neq 0), \tag{۵}$$

شامل تابع مجهول $y = y(x)$ و دو تابع معلوم $f(x)$ و $g(y)$ را معرفی کردیم . **هر معادلهٔ *جدایی* پذیر *کامل است*** . برای مشاهدهٔ این امر ، فرض کنیم $f(x)$ و $g(y)$ به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر باشند ، و قرار می‌دهیم

$$P = f(x), \qquad Q = -g(y).$$

در این صورت ، رابطهٔ (۵) را می‌توان به شکل (۲) نوشت ، و شرط کامل بودن خودبه‌خود برقرار است ، زیرا $\partial Q/\partial x = 0 = \partial P/\partial y$.

مثال ۲ . معادلهٔ دیفرانسیل

$$(2x + y) + (x + y)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{۶}$$

را درنظر می‌گیریم . این معادله با آنکه جدایی‌پذیر نیست (چرا ؟) کامل است . درواقع ، $P = 2x + y$ و $Q = x + y$ ؛ درنتیجه ، $\partial Q/\partial x = 1 = \partial P/\partial y$. معادلهٔ (۶) را می‌توان به طرق مختلف حل کرد . یک طریق نوشتن (۶) به شکل معادل زیر است :

$$(y\,dx + x\,dy) + 2x\,dx + y\,dy = 0, \tag{۶'}$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$d(xy) + d(x^2) + d(\tfrac{1}{2}y^2) = 0.$$

لذا، (′۶) به صورت زیر درمی‌آید:

$$d(xy + x^2 + \tfrac{1}{2}y^2) = 0,$$

که فوراً به جواب عمومی

$$xy + x^2 + \tfrac{1}{2}y^2 = C \qquad (۷)$$

منجر می‌شود، که در آن C یک ثابت دلخواه است. لذا، معادلهٔ (۶) را به آسانی با امتحان حل کرده‌ایم.

راه دیگری برای حل (۶) این است که بنویسیم

$$P = 2x + y = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Q = x + y = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad (۸)$$

که در آن $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$ می‌گوید که باید تابع U صادق در این دستگاه معادلات موجود باشد. با انتگرالگیری از معادلهٔ اول (۸) نسبت به x و ثابت گرفتن y، به‌دست‌می‌آوریم

$$U = x^2 + xy + f(y), \qquad (۹)$$

که در آن $f(y)$ تابع مشتقپذیری فقط از متغیر y است. پس، برحسب مشتق $f'(y)$، داریم

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x + f'(y)$$

با گذاردن این عبارت $\partial U/\partial y$ در معادلهٔ دوم (۸)، به دست می‌آوریم $x + y = x + f'(y)$ یا $f'(y) = y$؛ درنتیجه، با تقریب یک‌ثابت‌جمعی، $f(y) = \frac{1}{2}y^2$. به ازای این $f(y)$، معادلهٔ (۹) به صورت زیر درمی‌آید:

$$U = x^2 + xy + \tfrac{1}{2}y^2,$$

و با متحد گرفتن U و C، مجدداً فرمول (۷) به دست خواهد آمد.

راه سوم حل (۶) استفاده از فرمول

$$U = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t)\,dt$$

است که در صفحهٔ ۱۴۵۴ ثابت شد. به ازای $x_0 = y_0 = 0$، معلوم می‌شود که، با تقریب یک ثابت جمعی دلخواه،

$$U = \int_0^x 2t\,dt + \int_0^y (x + t)\,dt = \Big[t^2\Big]_0^x + \Big[xt + \frac{1}{2}t^2\Big]_{t=0}^{y} = x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2$$

که مجددا" فرمول (۷) برای جواب عمومی به دست می‌آید .

هر وقت معادلهٔ دیفرانسیلی را حل کردید ، باید جواب را با مشتقگیری مستقیم از آن و گذاردن در معادلهٔ دیفرانسیل‌اصلی امتحان‌نمایید . مثلا" ، در مثال فوق ، مشتقگیری (ضمنی) از جواب عمومی (۷) فورا" به معادلهٔ دیفرانسیل (۶) منجر می‌شود .

مثال ۳. جواب خصوصی معادلهٔ کامل (۶) را چنان بیابید که در شرط اولیهٔ $y(0) = 1$ صدق کند .

حل. با فرض $x = 0$ و $y = 1$ در فرمول (۷) فورا" نتیجه می‌شود که $C = \frac{1}{2}$ ، و در این صورت (۷) به شکل $xy + x^2 + \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}$ یا معادلا"

$$y^2 + 2xy + (2x^2 - 1) = 0 \qquad (۱۰)$$

درمی‌آید . به آسانی می‌توان معادلهٔ (۱۰) را نسبت به y حل کرد . در واقع ، طبق‌فرمول جواب یک معادلهٔ درجهٔ دو ،

$$y = \frac{-2x \pm \sqrt{4x^2 - 4(2x^2 - 1)}}{2} = -x + \sqrt{1 - x^2},$$

زیرا اگر y بخواهد در شرط اولیهٔ $y(0) = 1$ صدق کند ، باید علامت به‌علاوه اختیار شود . لذا ، جواب خصوصی مطلوب عبارت است از

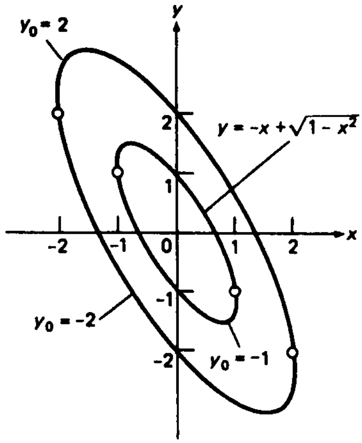
$$y = -x + \sqrt{1 - x^2} \qquad (-1 < x < 1), \qquad (۱۱)$$

که در آن صدق معادلهٔ اصلی (۶) در (۱۱) باید مستقیما" با مشتقگیری امتحان شود . شرط $-1 < x < 1$ وجود و مشتقپذیری y را تضمین می‌کند .

نمودار هر جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل منحنی *انتگرال* نام دارد . در شکل ۱ نه فقط منحنی انتگرال (۱۱) معادلهٔ (۶) را نشان داده‌ایم ، بلکه ، به کمک مسئلهٔ ۱۳ ، منحنیهای انتگرال نظیر به جوابهای خصوصی صادق در شرایط اولیهٔ

$$y(0) = y_0 \qquad (y_0 = -1, 2, -2)$$

را نیز رسم کرده‌ایم . توجه کنید که چگونه جوابهای خصوصی صادق در شرایط اولیهٔ $y(0) = 2$ و $y(0) = -2$ بر بازهٔ بزرگتر $(-2 < x < 2)$ از آنهایی‌که درشرایط $y(0) = 1$ و $y(0) = -1$ صدق می‌کنند تعریف شده‌اند .



شکل ۱

عاملهای انتگرالگیری. اغلب می‌توان یک معادلهٔ دیفرانسیل غیر**کامل** به شکل

$$P + Q\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (۱۲)$$

را با ضرب در تابع مناسبی چون $\mu = \mu(x, y)$ ، به نام ***عامل انتگرالگیری***، به معادلهٔ ***کامل***

$$\mu\left(P + Q\frac{dy}{dx}\right) = 0 \qquad (۱۲')$$

تبدیل کرد. در واقع، هرگاه μ هرگز صفر نشده یا فقط در (x, y) صفر شود که هر دوی P و Q صفرند، آنگاه جواب (۱۲′) نیز جوابی از معادلهٔ اصلی (۱۲) خواهد شد.

مثال ۴. معادلهٔ دیفرانسیل

$$y + xy^2 - x\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (۱۳)$$

یا معادلاً

$$(y + xy^2)\,dx - x\,dy = 0 \qquad (۱۳')$$

را حل کنید.

حل. در اینجا $P = y + xy^2$ ، $Q = -x$ ، $\partial P/\partial y = 1 + 2xy$ ، و $\partial Q/\partial x = -1$ ؛

درنتیجه $\partial Q/\partial x \neq \partial P/\partial y$. بنابراین، (۱۳) یک معادلهٔ کامل‌نیست. اما حدسی زیرکانه نشان می‌دهد که $\mu = 1/y^2$ یک عامل انتگرالگیری برای (۱۳) است . در واقع ، بـا ضرب (۱۳') در $1/y^2$ ، با امتحان به دست می‌آوریم

$$\left(\frac{1}{y}+x\right)dx-\frac{x}{y^2}\,dy=\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}+x\,dx=d\left(\frac{x}{y}\right)+d\left(\frac{1}{2}x^2\right)$$

واضح است که جواب عمومی این معادلهٔ دیفرانسیل عبارت است از

$$\frac{x}{y}+\frac{1}{2}x^2=C,$$

که در آن C ثابت دلخواهی است . با حل نسبت به y ، معلوم می‌شود که

$$y=\frac{2x}{2C-x^2}, \tag{۱۴}$$

که به آسانی می‌توان صدق کردن آن را در معادلهٔ غیرکامل اصلی (۱۳) امتحـان کرد . توجه کنید که در تقسیم بر y^2 خطر ازدست‌دادن جواب $y \equiv 0$ وجود دارد؛ و در واقع ، این صورت می‌گیرد ، زیرا $y \equiv 0$ بوضوح جواب (۱۳) می‌باشد . این یک جواب **منفرد** است ، زیرا نمی‌توان آن را از جواب " عمومی " (۱۴) به ازای مقداری از C به دست آورد .

معادلهٔ (۱۳) غیرخطی است (چرا؟) . می‌توان نشان داد که یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی جواب منفرد ندارد . لذا ، در سایر بخشها با این پیچیدگی مواجه نخواهیم شد .

مسائل

ابتدا تحقیق کنید که معادلهٔ دیفرانسیل داده شده به شکل $P\,dx + Q\,dy = 0$ کامـل است ، و سپس جواب عمومی آن را بیابید .

۱. $(x+y)\,dx+(x-y)\,dy=0$

۲. $(y^2-x^2)\,dx+2xy\,dy=0$

۳. $\left(4-\dfrac{y^2}{x^2}\right)dx+\dfrac{2y}{x}\,dy=0$

۴. $\cos x\sin y\,dx+\sin x\cos y\,dy=0$

۵. $y^2\cos xy\,dx+(\sin xy+xy\cos xy)\,dy=0$

۶. $y\cosh y\,dx+(x\cosh y+xy\sinh y)\,dy=0$

۷. $[(x+y)e^x - e^y]\,dx + [e^x - (x+y)e^y]\,dy = 0$

۸. $e^x y\,dx + (e^x - 2)\,dy = 0$

۹. $(2xye^{x^2} - \frac{1}{2}y^2)\,dx + (e^{x^2} - xy)\,dy = 0$

۱۰. $(1 + e^{x/y})\,dx + e^{x/y}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right)dy = 0$

۱۱. $\left(3x^2 \tan y - \dfrac{2y^3}{x^3}\right)dx + \left(x^3 \sec^2 y + 2y + \dfrac{3y^2}{x^2}\right)dy = 0$

۱۲. $\left(\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+1}} + 3x^2 y - \dfrac{y}{x}\right)dx + (\sqrt{x^2+1} + x^3 - \ln|x|)\,dy = 0$

۱۳. نشان دهید که جواب خصوصی معادلهٔ (۶) صادق در شرط اولیهٔ $y(0) = y_0 \neq 0$ عبارت است از

$$y = \begin{cases} -x + \sqrt{y_0^2 - x^2} \ , & y_0 > 0 \quad \text{اگر} \\ -x - \sqrt{y_0^2 - x^2} \ , & y_0 < 0 \quad \text{اگر} \end{cases}$$

آیا جوابی خصوصی‌که در شرط اولیهٔ $y(0) = 0$ صدق کند وجود دارد؟ نشان دهیدکه همانطور که از شکل ۱ برمی‌آید، هر منحنی انتگرال (۶) قوسی از یک بیضی است‌که محور اطولش در امتداد خط $x + y = 0$ می‌باشد.

۱۴. نشان دهید هرگاه $\mu = \mu(x, y)$ یک عامل انتگرالگیری معادلهٔ دیفرانسیل معمولی غیر کامل $P\,dx + Q\,dy = 0$ باشد، آنگاه μ در معادلهٔ دیفرانسیل جزئی

$$P\frac{\partial \mu}{\partial y} - Q\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \qquad \text{(یک)}$$

صدق می‌کند، که به

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \qquad \text{(دو)}$$

تحویل می‌شود اگر μ فقط تابعی از x باشد، و به

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy} = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \qquad \text{(دو')}$$

تحویل می‌شود اگر μ فقط تابعی از y باشد؛ دراینجا، البته، فرض است که طرف‌راست (دو) یا (دو') فقط تابعی از x یا y می‌باشد. حل معادلهٔ (یک) به صورت کلی ناممکن است، ولی حل (دو) یا (دو') آسانتر می‌باشد. مثلاً، نشان دهیدکه‌چطور

می‌توان عامل انتگرالگیری مثال ۴ را با حل (دُو) به دست آورد.
عامل انتگرالگیری μ معادلهٔ دیفرانسیل غیرکامل داده شده را تعیین کرده، و سپس جواب عمومی‌آن را بیابید.

۱۵. $(3xy + 2)\,dx + x^2\,dy = 0$

۱۶. $y\,dx - x\,dy = 0$

۱۷. $y\,dx - 3x\,dy = 0$

۱۸. $2x \tan y\,dx + x^2\,dy = 0$

۱۹. $(e^x - y^2)\,dx + 2y\,dy = 0$

۲۰. $\cos x\,dx + (e^{-y} + \sin x)\,dy = 0$

۲۱. $(x^2 + y^2 + y)\,dx - x\,dy = 0$

۲۲. $(x^2\sqrt{x^2 + 1} + y^2)\,dx + 2xy \ln |x|\,dy = 0$

۲۳. $xy^2\,dx + (x^2y - x)\,dy = 0$

۲۴. $(y^2 \cos x + y \ln |y|)\,dx + (x + y \sin x)\,dy = 0$

یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول به شکل $y' = dy/dx = f(x, y)$ را همگن گوییم اگر تابع یک متغیره‌ای مانند g موجود باشد به‌طوری که $f(x, y) = g(y/x)$. مثلاً، معادلهٔ

$$y' = \frac{2x^2 - y^2}{xy} = \frac{2 - (y/x)^2}{y/x} \qquad (xy \neq 0) \tag{سه}$$

همگن بوده و در آن $g(u) = (2 - u^2)/u$. برای حل یک معادلهٔ همگن جانشانی $y = xu$ را انجام می‌دهیم. در این صورت، $y' = u + xu'$؛ درنتیجه، $y' = g(u)$ شکل زیر را به خود می‌گیرد:

$$x\frac{du}{dx} + u = g(u),$$

یا معادلاً

$$\frac{dx}{x} + \frac{du}{u - g(u)} = 0$$

که در آن متغیرهای x و u از هم جدا شده‌اند. این معادله دارای جواب عمومی‌زیر است:

$$\ln |x| + \int \frac{du}{u - g(u)} = C. \tag{چهار}$$

حال جواب عمومی معادلهٔ همگن اصلی را می‌توان با گذاردن $u = y/x$ در (چهار) یافت.

۲۵. با استفاده از روشی که هم‌اکنون توصیف شد، جواب عمومی (سه) را بیابید.

۲۶. جواب خصوصی (سه) صادق در شرط $y(1) = 2$ را بیابید

۲۷. جواب خصوصی (سه) صادق در شرط $y(2) = 1$ را بیابید

جواب عمومی معادلهٔ همگن داده شده را بیابید.

۲۸. $x^2y' = x^2 - xy + y^2$ ‏ ۲۹. $xyy' = x^2 + y^2$

۳۰. $xy' = y - 2\sqrt{xy}$

۲.۱۶ معادلات خطی مرتبهٔ اول

هر معادله به شکل

$$y' + py = q, \tag{۱}$$

که در آن $p = p(x)$ و $q = q(x)$ توابع پیوسته‌ای از متغیر مستقل x اند، یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول نام دارد. برای حل معادلهٔ (۱)، فرض کنیم $P = \int p(x)\,dx$ پاد مشتق ثابتی از p بوده، و سپس (۱) را در e^P ضرب می‌کنیم. از این نتیجه می‌شود که

$$y'e^P + pe^Py = qe^P,$$

و چون $(e^P)' = P'e^P = pe^P$، عبارت سمت چپ مشتق حاصل‌ضرب ye^P نسبت به x است. بنابراین،

$$\frac{d}{dx}(ye^P) = qe^P,$$

که رابطهٔ

$$ye^P = \int qe^P\,dx + C,$$

یا معادلاً

$$y = e^{-P}\left(\int qe^P\,dx + C\right) = e^{-P}\int qe^P\,dx + Ce^{-P} \tag{۲}$$

را ایجاب می‌کند. این فرمول، که شامل ثابت دلخواه C است، جواب عمومی معادلهٔ (۱) می‌باشد. اگر معادلهٔ (۲) را به صورت باز بنویسیم، به شکل زیر درمی‌آید:

$$y = e^{-\int p(x)\,dx}\int q(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx + Ce^{-\int p(x)\,dx}. \tag{۲'}$$

برای هماهنگی با اصطلاح آمده در صفحهٔ ۱۵۳۵، تابع $\mu = e^P$ را یک *عامل انتگرالگیری* معادلهٔ (۱) می‌نامیم. ما μ را با " امتحان " به دست آوردیم، یعنی با کار حدسی، ولی μ را می‌توان به صورت مکانیکی‌تری به دست آورد. در واقع، فرض کنیم (۱) در μ ضرب

شده باشد و بخواهیم طرف چپ معادلهٔ حاصل

$$\mu y' + \mu p y = \mu q$$

به شکل $(\mu y)'$ باشد؛ درنتیجه ،می‌توان از آن به راحتی انتگرال گرفت. در این صورت، شرط $\mu y' + \mu p y = (\mu y)'$ فورا" به معادلهٔ جدایی‌پذیر $\mu' = p\mu$ نسبت به μ ، که جواب $\mu = e^P$ را دارد، منجر می‌شود.

مثال ۱. جواب عمومی

$$y' + ay = bx \tag{۳}$$

را درصورتی بیابید که a و b ثابتهای ناصفری باشند.

حل. معادلهٔ (۳) به شکل (۱) است که در آن $p = a$ و $q = bx$ ؛ درنتیجه،

$$P = \int p\,dx = ax, \qquad \int q e^P\,dx = b\int x e^{ax}\,dx.$$

با انتگرالگیری جزء به جزء، معلوم می‌شود که

$$\int x e^{ax}\,dx = \int x d\left(\frac{e^{ax}}{a}\right) = \frac{xe^{ax}}{a} - \frac{1}{a}\int e^{ax}\,dx = \frac{xe^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2}.$$

بنابراین، طبق رابطهٔ (۲)، جواب عمومی (۳) خواهد شد

$$y = be^{-ax}\left(\frac{xe^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2}\right) + Ce^{-ax} = \frac{bx}{a} - \frac{b}{a^2} + Ce^{-ax}$$

مثال ۲. جواب خصوصی

$$xy' - y = x^4 \tag{۴}$$

صادق در شرط اولیهٔ $y(1) = 3$ را بیابید.

حل. از تقسیم (۴) بر x به دست می‌آوریم

$$y' - \frac{1}{x}y = x^3, \tag{۴'}$$

که به شکل (۱) به ازای $p = -1/x$ و $q = x^3$ است. بنابراین،

$$P = \int p\,dx = -\int \frac{dx}{x} = -\ln x, \qquad e^P = \frac{1}{x}, \qquad \int q e^P\,dx = \int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3, \tag{۴''}$$

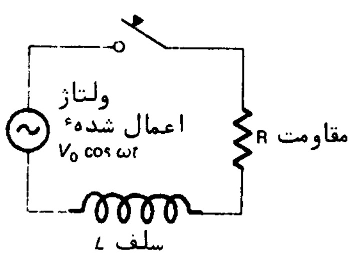
و از (۲) معلوم می‌شود که جواب عمومی (′۴) ، و درنتیجه (۴) ، مساوی است با

$$y = \frac{1}{3}x^4 + Cx. \qquad (۵)$$

با آنکه $p = -1/x$ در $x = 0$ تعریف نشده است ، این جواب بر تمام خط حقیقی در (۴) صدق می‌کند (چرا؟) . برای یافتن جواب خصوصی صادق در شرط $y(1) = 3$ ، در (۵) قرار می‌دهیم $x = 1$ و $y = 3$ ، خواهیم داشت $C = \frac{8}{3}$. لذا ، جواب خصوصی مطلوب عبارت است از

$$y = \frac{1}{3}x^4 + \frac{8}{3}x.$$

مثال ۳. کلیدی را به‌طور ناگهانی زده ، ولتاژ $V = V_0 \cos \omega t$ را در مدار الکتریکی شکل ۲ مرکب مقاومت R اهم که با سلف L هانری سری شده است برقرار می‌کنیم . شدت جریان $i = i(t)$ مدار را پیدا نمایید .



شکل ۲

حل. واحد i آمپر است . ثابت V_0 *ولتاژ اوج* است ، یعنی ماکزیمم V ، و ω *فرکانس زاویه‌ای* مساوی $2\pi f$ است ، که در آن f فرکانس به دور برثانیه است (ر.ک. صفحهٔ ۱۵۶۰) . درمثال ۳ ، صفحهٔ ۵۵۳ ، حالت dc (جریان مستقیم) را درنظر گرفتیم ، که در آن V ثابت است ، و دیدیم شدت جریان i در معادلهٔ دیفرانسیل خطی

$$Ri + L\frac{di}{dt} = V,$$

یا معادلاً

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V}{L}. \qquad (۶)$$

صدق می‌کند، و سپس (۶) را با جداسازی متغیرها حل کردیم. معادلهٔ (۶) در حالت فعلی ac (جریان متناوب) نیز برقرار است، ولی در اینجا V تابعی از t است که از جدایی پذیر بودن (۶) ممانعت می‌کند. بااینحال، هنوز می‌توان با استفاده از روشی که هم‌اکنون عرضه شد به (۶) پرداخت.

برای این کار، ملاحظه‌می‌کنیم که (۶) به شکل (۱) است با t به جای x ، i به‌جای y ، و

$$p = \frac{R}{L}, \qquad q = \frac{V}{L} = \frac{V_0}{L}\cos \omega t,$$

درنتیجه،

$$P = \int p\, dt = \frac{Rt}{L}, \qquad \int q e^{P}\, dt = \frac{V_0}{L}\int e^{Rt/L}\cos \omega t\, dt.$$

بنابر فرمول (۹)، صفحهٔ ۶۰۸،

$$\int e^{Rt/L}\cos \omega t\, dt = e^{Rt/L}\frac{(R/L)\cos \omega t + \omega \sin \omega t}{(R/L)^2 + \omega^2},$$

و درنتیجه،

$$\int q e^{P}\, dt = V_0 e^{Rt/L}\frac{R\cos \omega t + \omega L \sin \omega t}{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

لذا، طبق فرمول (۲)، جواب عمومی (۶) به ازای $V = V_0 \cos \omega t$ عبارت است از

$$i = \frac{V_0}{R^2 + \omega^2 L^2}(R\cos \omega t + \omega L \sin \omega t) + Ce^{-Rt/L} \qquad (۷)$$

برای تعیین ثابت C ، شرط اولیهٔ $i(0) = 0$ را اعمال می‌کنیم (تا لحظهٔ $t = 0$ که کلید زده می‌شود شدت جریانی وجود ندارد). با قراردادن $t = 0$ و $i = 0$ در (۷)، معلوم می‌شود که

$$C = -\frac{V_0 R}{R^2 + \omega^2 L^2},$$

و در این صورت، (۷) به شکل زیر درمی‌آید:

$$i = \frac{V_0}{R^2 + \omega^2 L^2}\left[(R\cos \omega t + \omega L \sin \omega t) - Re^{-Rt/L}\right]. \qquad (۸)$$

توجه کنید که این فرمول شامل جواب مثال ۳، صفحهٔ ۵۵۳، به عنوان حالتی خاص است، و این را می‌توان با فرض $\omega = 0$ و حذف زیرنویس V_0 تحقیق کرد.

بنابر (۸) ، i تفاضل دوجمله است ، یکی شدت جریان متناوب *حالت پایدار*

$$i_{ac} = \frac{V_0}{R^2 + \omega^2 L^2}(R \cos \omega t + \omega L \sin \omega t) \tag{۹}$$

و دیگری شدت جریان *گذرای*

$$i_{tr} = \frac{V_0 R}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-Rt/L},$$

که مثل حالت dc "سریعا مستهلک‌می‌شود" (ر.ک. شکل ۵۵۵) . فرمول (۹) پیچیده‌می‌نماید ، ولی می‌توان آن را به شکل بسیار ساده‌تر

$$i_{ac} = \frac{V_0}{Z}\cos(\omega t - \phi), \tag{۹'}$$

برحسب *مقاومت ظاهری*

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$

و زاویهٔ

$$\phi = \arctan \frac{\omega L}{R}$$

نوشت (شرح جزئیات را به عنوان تمرین می‌گذاریم) . لذا ، i_{ac} دارای همان فرکانس ولتاژ اعمال شدهٔ V است ، ولی نسبت به V به اندازهٔ ϕ رادیان " تأخیر دارد " ، ولی شدت *جریان اوج* i_0 ، یعنی ماکزیمم i_{ac} ، با فرمول

$$i_0 = \frac{V_0}{Z},$$

شامل مقاومت ظاهری ، به ولتاژ اوج V_0 مربوط شده است .

مسائل

جواب عمومی معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول داده شده را بیابید .

۱. $y' + ay = b$

۲. $y' + ay = e^{bx}$

۳. $y' - xy = x$

۴. $y' - 2xy = xe^{-x^2}$

۵. $y' + 2y = x^2 + x$

۶. $y' + y = \sin x$

۷. $y' - \frac{1}{x}y = x$

۸. $y' + \frac{2}{x}y = x^2$

۹. $y' + \frac{1}{x} y = x \cos x$

۱۰. $y' + \frac{n}{x} y = \frac{1}{x^n}$

۱۱. $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^2 e^x$

۱۲. $xy' = y - 1$

۱۳. $x(x-1)y' + y = x + 1$

۱۴. $(x^2+1)y' - 4xy = (x^2+1)^2$

۱۵. $(x^2+1)y' - y = \arctan x$

۱۶. $y' + y \cos x = \sin^2 x \cos x$

مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده شده را حل کنید.

۱۷. $y' + 3y = 4, y(0) = 2$

۱۸. $y' - y = e^{2x}, y(1) = 0$

۱۹. $y' - 2y = \cos x, y(\pi/2) = 0$

۲۰. $y' - \frac{1}{x} y = x \sin x, y(\pi) = 1$

۲۱. $y' \cos x + y \sin x = 1, y(0) = -1$

۲۲. $\sqrt{1-x^2}y' + y = 2, y(\frac{1}{2}) = 0$

۲۳. $y' + \frac{xy}{1+x^2} = x, y(0) = 1$

۲۴. $y' - \frac{y}{x \ln x} = \ln x, y(e) = 1$

۲۵. نشان دهید که در فرمول

$$y = e^{-P} \int q e^{P} dx + Ce^{-P} \qquad (P = \int p\, dx)$$

برای جواب عمومی معادلهٔ خطی $y' + py = q$ جملهٔ اول یک جواب خصوصی این معادله است، ولی جملهٔ دوم جواب عمومی معادلهٔ $y' + py = 0$ با صفرکردن q به دست می‌آید.

۲۶. معادلهٔ دیفرانسیل غیرخطی

$$y' + py = qy^n \qquad (n \neq 0, 1), \qquad \text{(یک)}$$

که در آن $p = p(x)$ و $q = q(x)$ توابعی پیوسته‌اند، به **معادلهٔ برنولی**[1] معروف است.

---

1. *Bernoulli*

نشان دهید که ضرب معادلهٔ (یک) در $(1-n)y^{-n}$ آن را به معادلهٔ دیفرانسیل‌خطی

$$u' + (1-n)pu = (1-n)q \qquad \text{(یُک)}$$

از متغیر جدید $u = y^{1-n}$ تبدیل می‌کند.

با استفاده از روش مسئلهٔ قبل، معادلهٔ برنولی داده شده را حل کنید.

۲۷. $y' + xy = xy^2$ ۲۸. $xy' - y = y^3 \ln x$

۲۹. $y' - y = xy^{-3}$

۳۰. کلیدی را ناگهان زده، ولتاز متناوب $V = V_0 \cos \omega t$ را در یک‌مدار الکتریکی مرکب‌از مقاومت R اهم که با خازن C فاراد سری است برقرار می‌کنیم. شدت جریان حاصل $i = i(t)$ مدار را بیابید. نشان دهید که شدت جریان متناوب حالت پایدار مساوی است با

$$i_{ac} = \frac{V_0}{Z} \cos (\omega t + \phi),$$

که در آن

$$Z = \sqrt{\frac{1}{\omega^2 C^2} + R^2}, \qquad \phi = \arctan \frac{1}{\omega RC}.$$

لذا، i_{ac} همان فرکانس ولتاز اعمال شدهٔ V است، ولی به اندازهٔ ϕ نسبت به V " تقدم " دارد.

راهنمایی. مسئلهٔ ۲۳، صفحهٔ ۵۵۹، را به یاد آورید.

۳۱. معادلهٔ دیفرانسیل غیرخطی $e^y(y' + 1) = x$ را با تحویل آن به معادلهٔ خطی نسبت به e^y حل کنید.

۳۲. نشان دهید که اگر در معادلهٔ خطی $y' + py = q$ توابع $p = p(x)$ و $q = q(x)$ هردوثابت باشند، این معادله را می‌توان با جداسازی متغیرها حل کرد.

۳.۱۶ معادلات خطی مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت

حال به معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم پرداخته، خود را به بررسی معادلات‌به‌شکل‌سادهٔ

$$y'' + ay' + by = f(x) \qquad (۱)$$

محدود می‌کنیم، که در آن y' و y'' مشتقات اول و دوم تابع مجهول $y = y(x)$اند، a و b ثابتهایی حقیقی‌اند، و $f(x)$ تابع پیوستهٔ معلومی از متغیر مستقل x می‌باشد. هر معادلهٔ دیفرانسیل از این نوع یک *معادلهٔ خطی مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت* نام دارد. اگر $f(x)$ متحد صفر نباشد، گوییم معادلهٔ (۱) **غیرهمگن** است، ولی اگر $f(x) \equiv 0$، معادله به

معادلهٔ همگن

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{۲}$$

ساده می‌شود (در اینجا اصطلاح " همگن " معنی کاملا " متفاوتی با این اصطلاح درمسائل ۲۵ تا ۳۰، صفحات ۱۵۳۸ تا ۱۵۳۹ ، دارد.)

برای حل معادلهٔ غیرهمگن (۱) ، ابتدا معادلهٔ همگن مربوطهٔ (۲) را مشروحا" بررسی می‌کنیم . قضیهٔ زیر دلیلش را توضیح خواهد داد.

قضیهٔ ۱ (جواب عمومی معادلهٔ غیرهمگن) . *جواب عمومی معادلهٔ غیرهمگن (۱) مساوی مجموع یک جواب خصوصی (۱) و جواب عمومی معادلهٔ همگن (۲) می‌باشد .*

برهان . فرض کنیم y_1 جوابی دلخواه و y_2 جواب ثابتی از معادلهٔ غیر همگن (۱) باشد . در این صورت ، $y_1'' + ay_1' + by_1 = f(x)$ و $y_2'' + ay_2' + by_2 = f(x)$ ، و با تفریق معادلهٔ دوم از اول ، به دست می‌آوریم

$$(y_1'' + ay_1' + by_1) - (y_2'' + ay_2' + by_2) = f(x) - f(x) = 0,$$

یا معادلا"

$$(y_1 - y_2)'' + a(y_1 - y_2)' + b(y_1 - y_2) = 0.$$

بنابراین ، $y_1 - y_2$ در معادلهٔ همگن (۲) صدق می‌کند؛ یعنی ، $y_1 = y_2 + u$ که درآن u جوابی از (۲) می‌باشد . برای اتمام برهان ، باید نشان دهیم که مجموع y_2 و یک جواب دلخواه u از (۲) جوابی از (۱) است . اما این فورا" از این نتیجه می‌شود که $y_2'' + ay_2' + by_2 = f(x)$ و $u'' + au' + bu = 0$ باهم ایجاب می‌کنند که

$$\begin{aligned}(y_2 + u)'' + a(y_2 + u)' + b(y_2 + u) &= (y_2'' + ay_2' + by_2) + (u'' + au' + bu)\\ &= f(x) + 0 = f(x).\end{aligned}$$

ما بررسی معادلهٔ همگن (۲) را با این امر شروع می‌کنیم که **هرگاه y_1 و y_2 دو جواب** *از (۲) باشند ، آنگاه هر ترکیب خطّی از y_1 و y_2 نیز چنین است؛ یعنی ، هر عبارت به شکل* $C_1y_1 + C_2y_2$ *که در آن C_1 و C_2 ثابتهای دلخواهی هستند* . این نتیجهٔ فوری آن است که هرگاه $y_1'' + ay_1' + by_1 = 0$ و $y_2'' + ay_2' + by_2 = 0$ ، آنگاه

$$\begin{aligned}(C_1y_1 + C_2y_2)'' + a(C_1y_1 + C_2y_2)' + b(C_1y_1 + C_2y_2)\\ = C_1y_1'' + C_2y_2'' + aC_1y_1' + aC_2y_2' + bC_1y_1 + bC_2y_2\end{aligned}$$

$$= C_1(y_1'' + ay_1' + by_1) + C_2(y_2'' + ay_2' + by_2)$$
$$= C_1(0) + C_2(0) = 0.$$

حال طبیعی است بپرسیم که، به عکس، آیا هر جواب (۲) به صورت ترکیبی خطی از دو جواب معلوم y_1 و y_2 هست یا نه؛ درنتیجه، $y = C_1y_1 + C_2y_2$ جواب عمومی (۲) می‌باشد. همانطور که مثال زیر نشان می‌دهد، این درصورتی که جوابهای y_1 و y_2 نامحدودند درست نیست.

مثال ۱. معادلهٔ خطی همگن

$$y'' - y = 0 \tag{۳}$$

را درنظر می‌گیریم. واضح است که $y_1 \equiv 0$ جواب (۳) است؛ و همین‌طور $y_2 = e^x$، زیرا $(e^x)'' = (e^x)' = e^x$. اما $y = C_1y_1 + C_2y_2 = C_2e^x$ نمی‌تواند جواب عمومی (۳) باشد، زیرا (۳) نیز دارای جواب $y = e^{-x}$ می‌باشد (این را امتحان کنید)، که مضرب ثابتی از e^x نیست. حتی اگر y_1 و y_2 هر دو ناصفر باشند، ممکن‌است $y = C_1y_1 + C_2y_2$ جواب‌عمومی (۳) نباشد. مثلاً، اگر $y_1 = 2e^x$ را اختیار کنیم، که جواب دیگری‌از (۳)است، می بینیم $y = C_1y_1 + C_2y_2 = (2C_1 + C_2)e^x = ke^x$ که در آن $k = 2C_1 + C_2$، ولی این نیز، به همان دلیل قبل، جواب‌عمومی (۳)نیست؛ یعنی، ثابتی‌چون k وجودندارد که $e^{-x} = ke^x$.

مثال فوق نشان می‌دهد که اگر یکی از توابع y_1 و y_2 متحد صفر بوده یا یکی مضرب ثابتی از دیگری باشد، نمی‌توان گفت $y = C_1y_1 + C_2y_2$ جواب عمومی معادلهٔ همگن (۲) است. اما، بنابر قضیهٔ زیر، که بدون برهان ذکر شده است، $y = C_1y_1 + C_2y_2$ بااستثنا کردن حالات فوق جواب عمومی (۲) خواهد بود.

قضیهٔ ۲ (جواب عمومی معادلهٔ همگن). *فرض کنیم y_1 و y_2 دو جواب معادلهٔ همگن (۲) باشند به‌طوری که هیچیک متحد صفر و مضرب ثابتی از دیگری‌نباشد (ذیلاً نشان‌می‌دهیم این‌جوابها‌همیشه وجود دارند). در این صورت، جواب عمومی (۲) عبارت است از*

$$y = C_1y_1 + C_2y_2,$$

که در آن C_1 و C_2 ثابتهای دلخواهی هستند.

گوییم دو جواب y_1 و y_2 صادق در شرایط قضیهٔ ۲ یک مجموعهٔ *اساسی* از جوابهای معادلهٔ (۲) را تشکیل می‌دهند. لیکن، این مجموعه منحصر به فرد نمی‌باشد.

مثال ۲. در مثال ۱ دیدیم که هر دو تابع e^x و e^{-x} جواب معادلهٔ (۳) اند. هیچیک از توابع متحد صفر و یا مضرب ثابتی از دیگری نیست. لذا، $y_1 = e^x$ و $y_2 = e^{-x}$ یک مجموعهٔ اساسی از جوابهای (۳) را تشکیل می‌دهند؛ و درنتیجه، (۳) جواب عمومی $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$ را خواهد داشت. به آسانی می‌توان تحقیق کرد که توابع $y_1 = \cosh x$ و $y_2 = \sinh x$ مجموعهٔ اساسی دیگری از جوابهای (۳) را تشکیل می‌دهند.

قضیهٔ وجودی و یکتایی. دلیل حذف برهان قضیهٔ ۲ این است که بر قضیهٔ وجودی و یکتایی زیر مبتنی است که اگرچه معنی آن کاملاً روشن است، برهانش از حوصلهٔ این درس خارج می‌باشد. *به ازای هر سه عدد حقیقی x_0، y_0، و y'_0، یک و فقط یک جواب مانند $y = y(x)$ از معادلهٔ همگن (۲) وجود دارد که در شرایط اولیهٔ*

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y'_0$$

صدق می‌کند.

ما از این نتیجه در حل مسائل مقدار اولیه برای معادلهٔ (۲) تلویحاً استفاده می‌کنیم.

مثال ۳. جواب عمومی معادلهٔ همگن

$$y'' + \omega^2 y = 0 \qquad (\omega > 0) \tag{۴}$$

را بیابید. همچنین، جواب خصوصی (۴) صادق در شرایط اولیهٔ

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = -1 \tag{۴'}$$

را پیدا کنید.

حل. هر تابع که با ضرب در ω^2 قرینهٔ مشتق دوم خود شود جوابی از (۴) است. $\cos \omega x$ و $\sin \omega x$ دو تابع از این نوعند، زیرا

$(\sin \omega x)'' = (\omega \cos \omega x)' = -\omega^2 \sin \omega x$ و $(\cos \omega x)'' = (-\omega \sin \omega x)' = -\omega^2 \cos \omega x$

به‌علاوه، هیچیک از این توابع متحد صفر نبوده و مضرب ثابتی از دیگری نیست (چرا نیست؟). لذا، طبق قضیهٔ ۲، جواب عمومی (۴) مساوی است با

$$y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x, \tag{۵}$$

که در آن C_1 و C_2 ثابتهای دلخواهی هستند. با مشتقگیری از (۵) نتیجه می‌شود که

$$y' = -\omega C_1 \sin \omega x + \omega C_2 \cos \omega x. \tag{۵'}$$

برای یافتن جوابی از (۴) که در شرایط (۴') صدق کند، در (۵) قرار می‌دهیم $x = 0, y = 1$ و در (۵') می‌گذاریم $x = 0, y' = -1$ و فوراً به دست می‌آوریم $C_1 = 1, C_2 = -1/\omega$. با

انتخاب این مقادیر از C_1 و C_2 در (۵)، جواب خصوصی مطلوب

$$y = \cos \omega x - \frac{1}{\omega} \sin \omega x$$

به دست می‌آید.

مثال زیر موارد استعمال قضیهٔ ۱ را در یافتن جواب عمومی یک معادلهٔ خطی غیر همگن نشان می‌دهد.

مثال ۴. معادلهٔ

$$y'' - y = 2 - 3x \tag{۶}$$

را حل کنید.

حل. بنابر قضیهٔ ۱، جواب عمومی (۶) مجموع یک جواب خصوصی (۶) و جواب عمومی معادلهٔ همگن مربوطهٔ $y'' - y = 0$ است. ما قبلاً از مثال ۲ می‌دانیم که جواب عمومی $y'' - y = 0$ مساوی است با $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$، و نگاهی به معادلهٔ (۶) آشکار می‌سازد که این معادله دارای جواب خصوصی $y = 3x - 2$ می‌باشد (توجه کنید که به ازای این y، $y'' = 0$). لذا، جواب عمومی (۶) عبارت است از

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + 3x - 2.$$

تحلیل معادلهٔ همگن. حال، به کمک قضیهٔ ۲، به مسئلهٔ حل معادلهٔ خطی همگن کلی (۲) می‌پردازیم. برای این کار، نمایی $y = e^{rx}$ را در (۲) می‌گذاریم، به این امید که مقادیر ثابت r را بیابیم که به ازای آنها (۲) برقرار باشد. هرگاه $y = e^{rx}$، آنگاه $y' = re^{rx}$ و $y'' = r^2e^{rx}$؛ درنتیجه، این جانشانی $y'' + ay' + by = 0$ را به

$$r^2e^{rx} + are^{rx} + be^{rx} = (r^2 + ar + b)e^{rx} = 0 \tag{۷}$$

تبدیل می‌کند. اما e^{rx} هرگز صفر نیست؛ و درنتیجه، (۷) برقرار است اگر و فقط اگر r جواب معادلهٔ درجهٔ دو

$$r^2 + ar + b = 0, \tag{۸}$$

به نام *معادلهٔ مشخص* (۲)، باشد.

با کامل کردن مربعها در (۸)، به دست می‌آوریم

$$\left(r + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + b = 0,$$

یا معادلا"

$$\left(r+\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2-4b}{4},$$

که از این نتیجه می‌شود که (۸) دو ریشهٔ متمایز

$$r_1=-\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2}, \qquad r_2=-\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

دارد اگر $a^2-4b>0$ ، یا فقط یک ریشهٔ (مضاعف)

$$r_1=r_2=-\frac{a}{2} \tag{۹}$$

دارد اگر $a^2-4b=0$ ، و ریشهٔ حقیقی‌ندارد اگر $a^2-4b^2<0$. هر یک‌از این‌سه‌حالت به مجموعه‌ای اساسی از جوابهای معادلهٔ (۲) منجر می‌شود ، ولی ماهیت جوابها در هر حالت متفاوت می‌باشد .

هرگاه $a^2-4b^2>0$ ، آنگاه e^{r_1x} و e^{r_2x} قبلا" مجموعه‌ای اساسی از جوابها را تشکیل می‌دهند ، زیرا هیچیک متحد صفر نبوده و مضرب ثابتی از دیگری نمی‌باشد ؛ درواقع ، هر تساوی به شکل $e^{r_1x}=ke^{r_2x}$ (k ثابت) فقط می‌تواند در نقطهٔ $x=(\ln k)/(r_1-r_2)$ برقرار باشد . لذا ، قضیهٔ ۲ در این حالت به ما می‌گوید که جواب عمومی معادلهٔ همگن (۲) به صورت زیر است :

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$$

مثال ۵. جواب عمومی

$$y''+y'-6y=0 \tag{۱۰}$$

را بیابید .

حل. معادلهٔ مشخص عبارت است از

$$r^2+r-6=(r-2)(r+3)=0,$$

که ریشه‌های متمایز $r_1=2$ و $r_2=-3$ دارد . لذا ، جواب عمومی (۱۰) مساوی است با

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x},$$

که در آن C_1 و C_2 ثابتهای دلخواهی می‌باشند .

هرگاه $a^2-4b=0$ ، آنگاه $y_1=e^{r_1x}=e^{-ax/2}$ جواب معادلهٔ همگن $y''+ay'+by=0$

است ، ولی برای تشکیل یک مجموعهٔ اساسی با y_1 به جواب دیگری چون y_2 نیازداریم. برای یافتن آن به ترفند سادهٔ زیر پناه می‌بریم . فرض کنیم $y = ue^{-ax/2}$ ، که در آن $u = u(x)$ تابع مجهول جدیدی است . در این صورت ،

$$y' = u'e^{-ax/2} - \frac{a}{2}ue^{-ax/2},$$

$$y'' = u''e^{-ax/2} - au'e^{-ax/2} + \frac{a^2}{4}ue^{-ax/2},$$

درنتیجه ، $y'' + ay' + by = 0$ به صورت زیر درمی‌آید :

$$(۱۱)\quad \left(u'' - au' + \frac{a^2}{4}u\right)e^{-ax/2} + a\left(u' - \frac{a}{2}u\right)e^{-ax/2} + bue^{-ax/2}$$

$$= \left(u'' + bu - \frac{a^2}{4}u\right)e^{-ax/2} = \left(u'' + \frac{4b - a^2}{4}u\right)e^{-ax/2} = u''e^{-ax/2} = 0,$$

که در آن از $4b - a^2 = 0$ استفاده شده است . چون $e^{-ax/2}$ هرگز صفر نیست ،نتیجه‌می‌شود که $u'' = 0$ ، ایجابگر آنکه

$$u' = A, \qquad u = Ax + B,$$

که در آن A و B ثابت می‌باشند . چون فقط به جواب u نیاز داریم ، انتخاب سادهٔ $A = 1$ و $B = 0$ را می‌کنیم که نتیجه می‌دهد که $u = x$. در این صورت ، معلوم می‌شود که

$$y_2 = ue^{-ax/2} = xe^{-ax/2}$$

جواب دیگری از معادلهٔ همگن است .هیچیک از جوابهای $y_1 = e^{-ax/2}$ و $y_2 = xe^{-ax/2}$ متحد صفر نبوده و مضرب ثابتی از دیگری نیست ؛ و در واقع ، یک معادله به شکل $e^{-ax/2} = kxe^{-ax/2}$ (k ثابت) فقط می‌تواند در نقطهٔ $x = 1/k$ برقرار شود . لذا ، در این حالت ، جواب عمومی (۲) مساوی است با

$$y = C_1e^{-ax/2} + C_2xe^{-ax/2}.$$

مثال ۶. جواب عمومی

$$(۱۲)\qquad y'' - 4y' + 4y = 0$$

را بیابید .

حل . معادلهٔ مشخص عبارت است از

$$r^2 - 4r + 4 = (r - 2)^2 = 0,$$

که فقط یک ریشهٔ (مضاعف) $r_1 = r_2 = 2$ را دارد . از (۹) معلوم می‌شود که این مقدار

ثابت$-a/2$ نیز هست . لذا ، جواب عمومی (۱۲) مساوی است با

$$y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}.$$

اگر $a^2 - 4b < 0$ ، معادلهٔ مشخص (۸) ریشهٔ حقیقی ندارد؛ درنتیجه ،جوابی به شکل e^{rx} وجود ندارد . با اینحال ، می‌توان یک مجموعهٔ اساسی از جوابهای (۲) را به آسانی به دست‌آورد .برای‌این‌کار ،ازهمان جانشانی $y = ue^{-ax/2}$ در حالت $a^2 - 4b = 0$ استفاده می‌کنیم . باتوجه به (۱۱) ، معلوم می‌شود که معادلهٔ $y'' + ay' + by = 0$ مجدداً ایجاب می‌کند که

$$\left(u'' + \frac{4b - a^2}{4} u\right)e^{-ax/2} = 0, \tag{۱۳}$$

ولی در اینجا ضریب u صفر نبوده بلکه عددی مثبت می‌باشد . در واقع ، فرض کنیم

$$\omega = \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2} > 0.$$

در این صورت ، (۱۳) معادل است با

$$u'' + \omega^2u = 0,$$

زیرا$e^{-ax/2}$ هرگزصفر نیست ، و همانطور که از مثال ۳ می‌دانیم ، جواب عمومی این معادله مساوی است با

$$u = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x.$$

لذا ، جواب عمومی (۲) ، یعنی $y = ue^{-ax/2}$ ، خود مساوی است با

$$y = e^{-ax/2}(C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x).$$

مثال ۷. جواب عمومی

$$y'' + 8y' + 25y = 0 \tag{۱۴}$$

را بیابید .

حل. در اینجا $a = 8$ و $b = 25$ ؛ در نتیجه ، $a^2 - 4b = 64 - 100 = -36 < 0$ و $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{36} = 3$. لذا ، جواب عمومی (۱۴) مساوی است با

$$y = e^{-4x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

روش ضرایب نامعین . درخاتمه ،به‌حل‌معادلهٔ غیرهمگن (۱) به‌شکل $y'' + ay' + by = f(x)$

می‌پردازیم . از قضیهٔ ۱ به یاد دارید که جواب عمومی (۱) مجموع یک جواب‌خصوصی(۱) و جواب عمومی معادلهٔ همگن مربوطهٔ $y'' + ay' + by = 0$ ، که اغلب معادلهٔ **تحویل یافتهٔ** (۱) نام دارد ، می‌باشد . اما هم اینک طرز به دست آوردن جواب عمومی معادلهٔ تحویل یافته را نشان دادیم . لذا ، آنچه اکنون بدان نیاز داریم یک جواب‌خصوصی خود معادلهٔ غیرهمگن (که اغلب معادلهٔ **تام** نامیده می‌شود) است . یافتن این جواب در حالت کلی مشکل‌است ،ولی خوشبختانه تکنیک موٴثری ، به نام **روش ضرایب نامعین** ، وجود دارد که درصورتی کارگر است که$f(x)$توابع متداولی چون

$$P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x \tag{۱۵}$$

و

$$P_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x, \tag{۱۵'}$$

شامل چندجمله‌ای معلوم

$$P_n(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n$$

از درجهٔ n باشد . در واقع ، فرض کنیم

$$A_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

و

$$B_n(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$$

دوچندجمله‌ای دیگر از درجهٔ n ولی باضرایب‌نامعین (یعنی ،فعلاً "مجهول")$a_0, a_1, \ldots, a_n$ و $b_0, b_1, \ldots, b_n$ بوده ، و$f(x)$به شکل (۱۵) یا (۱۵') باشد . در این صورت ،می‌توان‌نشان داد که جانشانی

$$\begin{aligned} y &= [A_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + B_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x]x^k \\ &= \sum_{i=1}^{n}(a_ix^{i+k}e^{\alpha x}\cos\beta x + b_ix^{i+k}e^{\alpha x}\sin\beta x) \end{aligned} \tag{۱۶}$$

معادلهٔ غیرهمگن$y'' + ay' + by = f(x)$ را به معادله‌ای تبدیل می‌کند که با انتخاب مناسبی از ضرایب $a_0, a_1, \ldots, a_n$ و $b_0, b_1, \ldots, b_n$ متحداً" برقرار است . در اینجا x^k $(k = 0, 1, 2)$ کوچکترین توان لازم از x است که هیچیک از جملات $a_ix^{i+k}e^{\alpha x}\cos\beta x$ و $b_ix^{i+k}e^{\alpha x}\sin\beta x$ سمت راست (۱۶) جوابی از معادلهٔ تحویل یافتهٔ$y'' + ay' + by = 0$ نباشد . جانشانی (۱۶) را می‌توان فقط با

$$y = A_n(x)x^k \tag{۱۷}$$

تعویض کرد اگر$f(x) = P_n(x)$ ، نظیر به$\alpha = \beta = 0$ در (۱۶) ، و فقط با

$$y = A_n(x)x^ke^{\alpha x} \tag{۱۷'}$$

عوض‌کرد اگر $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$ ، نظیر به $\beta = 0$ در (۱۶). از آن‌سو، اگر $f(x) = P_n(x) \cos \beta x$ یا $f(x) = P_n(x) \sin \beta x$ ، نظیر به $\alpha = 0$ در (۱۵) یا (۱۵')، تمام عبارت

$$y = [A_n(x) \cos \beta x + B_n(x) \sin \beta x]x^k \tag{۱۸}$$

مورد نیاز می‌باشد.

مثال ۸. جواب عمومی

$$y'' - y' - 2y = x^2 + x - 4 \tag{۱۹}$$

را بیابید.

حل. طرف راست (۱۹) به شکل (۱۵) است به ازای $n = 2$ و $\alpha = \beta = 0$. چون هیچیک از توابع $y = a_i x^i \ (i = 0, 1, 2)$ جواب معادلهٔ تحویل یافتهٔ $y'' - y' - 2y = 0$ نیست، جانشانی

$$y = Ax^2 + Bx + C, \tag{۱۹'}$$

نظیر به فرمول (۱۷) به‌ازای $n = 2$ و $k = 0$ را انجام می‌دهیم؛ برای سادگی، ضرایب نامعین را با حروف متوالی A ، B ، و C نشان می‌دهیم. در این صورت،

$$y' = 2Ax + B, \qquad y'' = 2A,$$

و جانشانی (۱۹') معادلهٔ (۱۹) را به معادلهٔ

$$2A - (2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2 + x - 4$$

تبدیل می‌کند، که نسبت‌به x همانی است اگر و فقط اگر توانهای یکسان x درطرفین معادله ضرایب یکسان داشته باشند. این شرط به دستگاه " مثلثی " از معادلات جبری خطی

$$-2A = 1,$$
$$-2A - 2B = 1,$$
$$2A - B - 2C = -4$$

منجر می‌شود با جواب $A = -\frac{1}{2}, B = 0, C = \frac{3}{2}$ (متوالیا "نسبت به A ، B ، و C حل‌کنید). معادلهٔ (۱۹) به ازای این ضرایب به شکل زیر درمی‌آید:

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2},$$

که یک‌جواب‌خصوصی (۱۹) است. معادلهٔ مشخص معادلهٔ تحویل‌یافتهٔ $y'' - y' - 2y = 0$ عبارت است از $r^2 - r - 2 = (r - 2)(r + 1) = 0$ ، که دارای ریشه‌های متمایز $r_1 = 2$ و $r_2 = -1$ می‌باشد. لذا، جواب‌عمومی‌معادلهٔ‌تحویل‌یافته‌عبارت‌است‌از $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$

و از قضیهٔ ۱ معلوم می‌شود که جواب عمومی معادلهٔ (۱۹) مساوی است با

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{2}.$$

مثال ۹. جواب عمومی

$$y'' - y' = x^2 + x - 4 \qquad (۲۰)$$

را بیابید.

حل. توجه کنید که طرف چپ (۲۰) با (۱۹) در غیبت جملهٔ $2y-$ فرق دارد. درنتیجه، یکی از توابع $y = a_i x^i$ $(i=0, 1, 2)$، یعنی $y = a_0 x^0 = a_0$، جواب معادلهٔ تحویل یافتهٔ $y'' - y' = 0$ است. لذا، به جای جانشانی (۱۹')، باید جانشانی

$$y = Ax^3 + Bx^2 + Cx, \qquad (۲۰')$$

نظیر به فرمول (۱۷) به ازای $n = 2$ و $k = 1$ را انجام دهیم. در این صورت،

$$y' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \qquad y'' = 6Ax + 2B,$$

و جانشانی (۲۰') معادلهٔ (۲۰) را به معادلهٔ

$$(6Ax + 2B) - (3Ax^2 + 2Bx + C) = x^2 + x - 4$$

تبدیل می‌کند. از متحد گرفتن ضرایب توانهای یکسان x در دو طرف این معادله، دستگاه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} -3A &= 1, \\ 6A - 2B &= 1, \\ 2B - C &= -4, \end{aligned}$$

که دارای جواب $A = -\frac{1}{3}, B = -\frac{3}{2}, C = 1$ می‌باشد. معادلهٔ (۲۰') به ازای این ضرایب به صورت زیر درمی‌آید:

$$y = -\frac{1}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + x.$$

معادلهٔ مشخص معادلهٔ تحویل یافتهٔ $y'' - y' = 0$ عبارت است از $r^2 - r = r(r-1) = 0$ با ریشه‌های متمایز $r_1 = 0$ و $r_2 = 1$. لذا، جواب عمومی معادلهٔ تحویل‌یافته مساوی است با $y = C_1 + C_2 e^x$، و بنابر قضیهٔ ۱، جواب عمومی معادلهٔ (۲۰) عبارت است از

$$y = C_1 + C_2 e^x - \frac{1}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + x.$$

مثال ۱۰. جواب عمومی

$$y'' - 2y' + y = 2e^x + \cos x \tag{۲۱}$$

را بیابید.

حل. هرگاه y_1 جواب خصوصی

$$y'' - 2y' + y = 2e^x \tag{۲۲}$$

و y_2 جواب خصوصی

$$y'' - 2y' + y = \cos x \tag{۲۲'}$$

باشد، آنگاه $y_1 + y_2$ جواب خصوصی (۲۱) است. هر دو معادلهٔ (۲۲) و (۲۲') دارای معادلهٔ تحویل یافتهٔ $y'' - 2y' + y = 0$ و معادلهٔ مشخص $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2$ با ریشهٔ (مضاعف) $r_1 = r_2 = 1$ می‌باشند. لذا، طبق استدلال بعداز مثال ۵، جواب عمومی معادلهٔ تحویل یافته عبارت است از $y = C_1e^x + C_2xe^x$. پس e^{2x} و xe^{2x} جوابهای معادلهٔ تحویل یافته می‌باشند. لذا، برای حل (۲۲)، جانشانی

$$y = y_1 = Ax^2e^x,$$

نظیر به فرمول (۱۷') به ازای $n = 0$، $\alpha = 1$، و $k = 2$ را انجام می‌دهیم. چون

$$y_1' = (2x + x^2)Ae^x, \qquad y_1'' = (2 + 4x + x^2)Ae^x,$$

این جانشانی (۲۲) را به

$$[(2 + 4x + x^2) - 2(2x + x^2) + x^2]Ae^x = 2Ae^x = 2e^x$$

تبدیل می‌کند، که از آن $A = 1$ نتیجه می‌شود. لذا، به آسانی معلوم می‌شود که $y_1 = x^2e^x$ جواب خصوصی (۲۲) می‌باشد.

و اما در مورد معادلهٔ (۲۲')، چون $\sin x$ و $\cos x$ جواب معادلهٔ تحویل یافته نیستند، جانشانی

$$y = y_2 = A\cos x + B\sin x,$$

نظیر به فرمول (۱۸) به ازای $n = 0$، $\beta = 1$، و $k = 0$ را انجام می‌دهیم. چون

$$y_2' = -A\sin x + B\cos x, \qquad y_2'' = -A\cos x - B\sin x,$$

این جانشانی (۲۲') را به

$$(-A\cos x - B\sin x) - 2(-A\sin x + B\cos x) + (A\cos x + B\sin x)$$
$$= 2A\sin x - 2B\cos x = \cos x$$

تبدیل می‌کند، که از آن $A = 0, B = -\frac{1}{2}$ نتیجه خواهد شد. لذا، به‌آسانی معلوم می‌شود که $y_2 = -\frac{1}{2}\sin x$ جواب خصوصی (۲۲') می‌باشد. با افزودن جوابهای خصوصی y_1 و y_2

معادلات (۲۲) و (۲۲') به هم ، جواب خصوصی

$$y_1 + y_2 = x^2e^x - \frac{1}{2}\sin x$$

معادلهٔ اصلی (۲۱) به دست می‌آید. ولی جواب عمومی معادلهٔ تحویل یافتهٔ $y'' - 2y' + y = 0$ عبارت است از $y = C_1e^x + C_2xe^x$ ؛ و درنتیجه ، جواب عمومی (۲۱) خواهد بود

$$y = C_1e^x + C_2xe^x + x^2e^x - \frac{1}{2}\sin x.$$

تبصره. درحالاتی‌که روش ضرایب نامعین به‌کار نمی‌روند ، سعی کنید از روش ***تغییرپارامتر*** ، که مقدم بر مسائل ۱۹ تا ۲۴ ، صفحه۱۵۷۴ توصیف شده است ، استفاده نمایید .

مسائل

جواب عمومی معادلهٔ خطی همگن داده شده را بیابید .

۱. $y'' - 2y' - y = 0$

۲. $y'' - 6y' + 9y = 0$

۳. $y'' - 4y' + 13y = 0$

۴. $y'' + 4y' + 29y = 0$

۵. $y'' + 10y' + 25y = 0$

۶. $5y'' + 3y' = 0$

۷. $\frac{1}{4}y'' - 2y' + 4y = 0$

۸. $y'' + 9y' + 14y = 0$

۹. $4y'' - 8y' + 5y = 0$

۱۰. $y'' - 2\sqrt{2}y' + 2y = 0$

۱۱. $3y'' + 7y' + 2y = 0$

۱۲. $y'' - 12y' + 52y = 0$

جواب خصوصی $y = y(x)$ معادلهٔ خطی‌همگن داده‌شده را که در شرایط ذکر شده‌صدق‌می‌کند پیدا نمایید ؛ بعضی شرایط اولیه‌اند ، بقیه شرایط مرزی می‌باشند (ر.ک.صفحهٔ ۴۲۲) .

۱۳. $y'' + y' - 2y = 0.\ y(0) = 1,\ y(\ln 2) = 0$

۱۴. $y'' + y' = 0,\ y(1) = 0,\ y'(1) = 3$

۱۵. $y'' - 2y' + 2y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$

۱۶. $y'' - 2y' + y = 0,\ y(0) = 0,\ y(1) = 1$

۱۷. $7y'' + 19y' + 13y = 0,\ y(0) = y'(0) = 0$

۱۸. $y'' + y = 0,\ y'(0) = 1,\ y'(\pi/4) = 0$

یک جواب خصوصی معادلهٔ خطی‌غیرهمگن $y'' + y = f(x)$ را ، که در آن $f(x)$ تابع داده‌شده است ، بیابید .

۱۹. $(x + 1)^3$

۲۰. $\cos x + 4x - 5$

۲۱. $\cos 3x$

۲۲. $\sinh x$

۲۳. $e^x + \sin x$

۲۴. $\sin x \sin 2x$

۲۵. $x \sin x$

۲۶. $e^x \cos x$

جواب عمومی معادلهٔ خطی غیرهمگن داده شده را بیابید.

۲۷. $y'' + 4y' = 3x^2 - x + 2$

۲۸. $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x}$

۲۹. $y'' + 2y' + 2y = e^x \sin x$

۳۰. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \cos x$

۳۱. $y'' - 2y' + y = xe^x$

۳۲. $y'' + 3y' = xe^{-3x}$

۳۳. $y'' - y' = x^4$

۳۴. $y'' + 2y' + y = 2 \cosh x$

۳۵. $y'' - 2y' - 8y = e^{6x}$

۳۶. $y'' - 5y' + 6y = e^{3x} + e^{2x}$

۳۷. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ $y'' - 2y' = e^{2x} + x^2 - 1,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 1$ را حل نمایید.

۳۸. مسئلهٔ مقدار مرزی $y'' + y' = x,\ y(0) = 1,\ y(1) = 0$ را حل نمایید.

۱۶.۴ حرکت توافقی ساده؛ نوسانات میرا و واداشته

فرض کنیم P ذره‌ای باشد که موضعش با تنها مختص $y = y(t)$ که تابعی از زمان t است مشخص شود. در این صورت، گوییم P **حرکت توافقی ساده** دارد اگر مختص y در یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم به شکل

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \qquad (\omega > 0) \tag{1}$$

صدق نماید. همانطور که از مثال ۳، صفحهٔ ۱۵۴۸، می‌دانیم (پس از تغییر متغیر مستقل به t)، جواب عمومی این معادله عبارت است از

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \tag{2}$$

که در آن C_1 و C_2 ثابتهای دلخواهی می‌باشند.

برای توضیح ماهیت حرکت P، معادلهٔ (۲) را به طریقی دیگر می‌نویسیم. فرض کنیم A و ϕ $(A > 0)$ مختصات قطبی نقطهٔ (C_2, C_1)، به عنوان نقطه‌ای در دستگاه مختصات

قائم ، باشد . در این صورت ،

$$A \cos \phi = C_2, \qquad A \sin \phi = C_1, \tag{۳}$$

درنتیجه ، $C_1^2 + C_2^2 = A^2(\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) = A^2$ ، یا معادلا "

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}. \tag{۴}$$

همچنین ، از تلفیق فرمولهای (۲) و (۳) معلوم می‌شود که

$$y = A \cos \omega t \sin \phi + A \sin \omega t \cos \phi,$$

که به

$$y = A \sin (\omega t + \phi) \tag{۵}$$

ساده می‌گردد . به‌بیان دیگر ، با انتخاب A و ϕ به عنوان مختصات‌قطبی نقطهٔ $(C_1, -C_2)$ ، داریم $A \cos \phi = C_1$ و $A \sin \phi = -C_2$ ، که A مجددا " از (۴) به دست می‌آید ، ولی اینجا به‌آسانی معلوم می‌شود که به جای (۵)

$$y = A \cos (\omega t + \phi). \tag{۵'}$$

توجه کنید که مقدار زاویهٔ ϕ در (۵') $\pi/2$ از مقدار در (۵) کمتر است .

از روابط (۵) و (۵') واضح است که یک ذره با حرکت توافقی ساده در امتداد محور y بالا و پایین می‌رود و پس از مدت زمان

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

به نام دورهٔ تناوب نوسانات ، حرکتش را تکرار می‌کند . توجه کنید که T دورهٔ تناوب اساسی هر دو تابع $\sin (\omega t + \phi)$ و $\cos (\omega t + \phi)$ است . گوییم نوسانات توصیف شده با (۵) یا (۵') **نوسانات توافقی سینوس گون** می‌باشند . متقابل T ، یعنی

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi},$$

فرکانس نام دارد ، و اگر زمان به ثانیه باشد ، f به **دور بر ثانیه** (cps) خواهد بود؛ واژهٔ " دور " دلالت بر یک‌دور کامل حرکت‌ذره‌می‌باشد . یک‌دور بر ثانیه را به افتخار فیزیکدان تجربی آلمانی ، هنریش هرتـــز[1] (۱۸۹۴–۱۸۵۷) ، اولین کسی که امواج رادیویی تولید کرد ، یک **هرتز** (Hz) می‌نامند . کمیت ω **فرکانس زاویه‌ای** نام دارد ، و با رادیان بر ثانیه سنجیده می‌شود . کمیت A را **دامنهٔ** A می‌نامند ، و عبارت است از ماکزیمم $|y|$. درواقع ،

---

1. Heinrich Hertz

ذرهٔ P بین دو موضع اکستریم $y = A$ و $y = -A$ جلو و عقب می‌رود . شناسهٔ $\omega t + \phi$ هر دو تابع $\sin(\omega t + \phi)$ و $\cos(\omega t + \phi)$ فاز نام دارد ، و زاویهٔ ϕ که‌مقدار فاز درلحظهٔ $t = 0$ است ، فاز اولیه نامیده می‌شود . برحسب فرکانس f ، می‌توان رابطهٔ (۵) را به صورت

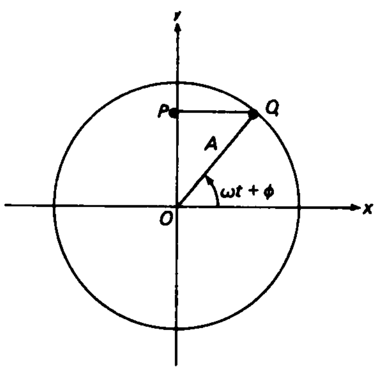
$$y = \sin(2\pi f t + \phi) \tag{۶}$$

و رابطهٔ (۵′) را به صورت

$$y = \cos(2\pi f t + \phi) \tag{۶′}$$

نوشت .

ارتباط جالب و مهمی بین حرکت توافقی‌ساده و حرکت مستدیر یکنواخت‌وجود دارد (ر.ک. صفحهٔ ۱۱۰۷) . فرض کنیم نقطهٔ Q با تندی زاویه‌ای ω در جهت خلاف عقربه‌های ساعت حول دایرهٔ $x^2 + y^2 = A^2$ به شعاع A و به مرکز O دوران کند . در این صورت ، زاویهٔ بین شعاع OQ و محور x مثبت در لحظهٔ t مساوی است با $\omega t + \phi$ ، که در آن ϕ زاویهٔ بین OQ و محور x مثبت در لحظهٔ $t = 0$ است (ر.ک. شکل ۳) . فرض کنیم P تصویر Q روی محور y باشد . دراین‌صورت ، وقتی Q حول‌دایرهٔ $x^2 + y^2 = A^2$ می‌چرخد ، نقطهٔ



شکل ۳

P در امتداد محور y بالا و پایین رفته حرکت توافقی سادهٔ (۵′) را با دامنهٔ A ، فرکانس زاویه‌ای ω ، فاز $\omega t + \phi$ ، و فاز اولیهٔ ϕ انجام می‌دهد . همچنین ، وقتی Q حول دایره می‌چرخد ، تصویر Q روی محور x حرکت توافقی سادهٔ (۵′) با x به جای y خواهدداشت .

مثال ۱ . حرکت توافقی سادهٔ

$$y = 3\cos 4\pi t + 4\sin 4\pi t \tag{۷}$$

را توصیف کنید .

حل. معادلهٔ (۷) به شکل (۲) است که در آن $C_1 = 3$ و $C_2 = 4$. لذا، طبق (۴)،

$$A = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5,$$

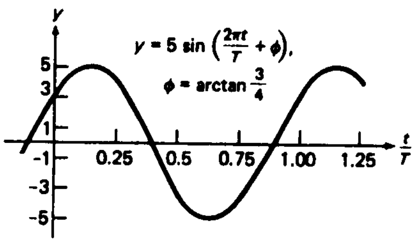
و معادلهٔ (۷) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$y = 5 \sin (2\pi ft + \phi) = 5 \sin \left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right), \tag{۷'}$$

که در آن $f = 2$ cps ، $T = 1/f = 0.5$ sec ، و

$$\phi = \arctan \frac{3}{4} \approx 0.6435 \text{ rad} \approx 36.87°$$

(معادلهٔ دوم (۳) را بر معادلهٔ اول تقسیم کرده و آن را نسبت به ϕ حل می‌کنیم). نمودار تابع ('۷) در شکل ۴ نموده شده است، که در آن می‌بینید که مقدار y در $t = 0$ مساوی است با $5 \sin \phi = C_1 = 3$



شکل ۴

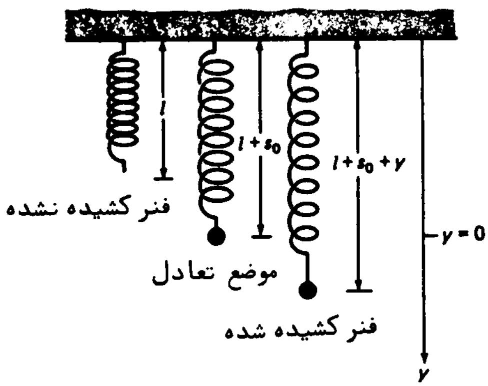
نوسانگر توافقی (حالت غیر میرا). هر دستگاه مکانیکی با حرکت توافقی ساده یک **نوسانگر توافقی** نام دارد. این دستگاه در مثال زیر توصیف می‌شود.

مثال ۲. یک گلوله به جرم m به انتهای پایینی فنری وصل شده است، و انتهای بالایی آن به تکیه‌گاه افقی محکمی متصل گشته است. فرض کنید در لحظهٔ $t = 0$ به گلوله تغییر مکان اولیهٔ y_0 و سرعت v_0 داده شده باشد. حرکت گلوله را درصورتی تعیین کنید که گلوله (به عنوان ذره) تحت اثر هیچ نیرویی جز وزنش و کشش فنر نباشد.

حل. بنابر قانون هوک[1] (ر.ک. صفحهٔ ۴۳۱)، برگلوله نیروی بازگردان الاستیک $F = -ks$

1. *Hooke*

وارد می‌شود ، که در آن k ثابت مثبتی به نام **سختی** یا **ثابت فنر** بوده و s اختلاف طول فنرکشیده شده و کشیده نشده یا طول طبیعی l می‌باشد . بر گوی نیروی وزنش mg نیز اثر دارد ، که فنر را به طول تعادلش $l + s_0$ می‌کشاند ، که در آن $mg = ks_0$ (چرا ؟) . همانند شکل ۵ ، فرض کنیم محور y قائم و روبه‌پایین با مبداء $(y = 0)$ درموضع



شکل ۵

تعادل گلوله باشد . در این صورت ، نیروی کل وارد بر گلوله در موضع جابجا شده‌به‌مختص $y = y(t)$ مساوی است با

$$F = mg - ks = mg - k(s_0 + y) = -ky,$$

و درنتیجه ، طبق قانون دوم حرکت نیوتن ،

$$my'' = -ky, \qquad (۸)$$

که در آن پریم مشتقگیری نسبت به t را نشان می‌دهد ، یا معادلا" ، برحسب ثابت مثبت $\omega = \sqrt{k/m}$ ،

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

اما این معادلهٔ دیفرانسیلی‌است‌که به‌حرکت توافقی ساده منجر می‌شود . لذا ، موضع گلولد در لحظهٔ $t \geq 0$ مساوی است با

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t. \qquad (۹)$$

برای تعیین ثابتهای C_1 و C_2 ، شرایط اولیهٔ $y(0) = y_0$ و $y'(0) = v_0$ را اعمال می‌کنیم . با گذاردن $t = 0, y = y_0$ در فرمول (۹) و $t = 0, y' = v_0$ در فرمول

$$y' = -\omega C_1 \sin \omega t + \omega C_2 \cos \omega t, \qquad (۹')$$

حاصل از مشتقگیری از (۹) نسبت به t ، خواهیم داشت $C_1 = y_0$ و $C_2 = v_0/\omega$. لذا ،

(۹) را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$y = A \sin(\omega t + \phi), \tag{۱۰}$$

که در آن دامنهٔ A و فاز اولیهٔ ϕ از فرمولهای زیر به دست می‌آیند :

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{y_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \qquad \phi = \arctan \frac{C_1}{C_2} = \frac{\omega y_0}{v_0}.$$

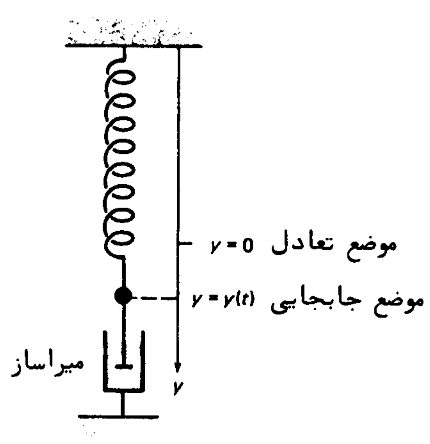
توجه کنید که هرقدر جرم گلوله کمتر و فنر سفت‌تر باشد ، فرکانس

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

نوسانات (۱۰) بزرگتر است . همچنین ، اگر گلوله وقت رهاشدن درحال سکون باشد ($v_0 = 0$) ، $y = y_0 \cos \omega t$.

نوسانگر توافقی (حالت میرا) . نوسانات مثال قبل *غیرمیرا* هستند ؛ یعنی ، با دامنه‌ای ثابت تا بی‌نهایت می‌روند . این یک وضع ایده‌آل است ، زیرا در عمل دامنهٔ نوسانات با زمان تحلیل می‌رود ، و این به‌خاطر نیروهای ذاتی مقاومت ، مانند اصطکاک در فنر یا مقاومت هوا ، می‌باشد . در واقع ، در بعضی حالات ، عمداً "یک نیروی مقاومت وارد می‌شود تا نوسانات " مستهلک شوند " ، یا حتی از رویداد نوسانات در اول کار جلوگیری نماید .

مثلاً ، شکل ۶ تعدیلی از دستگاه مکانیکی مثال ۲ را نشان می‌دهد ، که در آن پیستونی که به ته گلوله وصل شده در یک استوانه پر از مایعی چسبنده فرورفته است . اثر



شکل ۶

این مکانیسم میراکن ،به‌نام *میراساز* ،این‌است‌که برگلوله نیروی مقاومت‌اضافی $F_R = -bv$ وارد کند ، که در آن b ثابت مثبتی است که *ضریب میرایی* نـــام دارد و $v = dy/dt = y'$ سرعت گلوله می‌باشد . حال قانون دوم نیوتن به جای (۸) نتیجه می‌دهد که

$$my'' = -by' - ky \tag{۱۱}$$

یا معادلا"

$$y'' + 2\lambda y' + \omega^2 y = 0, \tag{۱۲}$$

که در آن

$$2\lambda = \frac{b}{m}, \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}.$$

هرگاه دستگاه مکانیکی که از معادلهٔ دیفرانسیل (۱۲) تبعیت کند یک *نوسانگرتوافقی میرا* نام دارد .

معادلهٔ مشخص (۱۲) عبارت است از

$$r^2 + 2\lambda r + \omega^2 = 0,$$

یا معادلا"

$$(r + \lambda)^2 = \lambda^2 - \omega^2,$$

با دو ریشهٔ $r = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$ اگر $\omega < \lambda$ ،یک ریشهٔ $r = -\lambda$ اگر $\lambda = \omega$ ،وبدون‌ریشهٔ حقیقی اگر $\lambda < \omega$. فرض کنیم

$\alpha = \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$ اگر $\omega < \lambda$ ، $\beta = \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$ اگر $\lambda < \omega$.

در این صورت ،بنابر روش توصیف‌شده در بخش ۳۰۱۶، جواب معادلهٔ (۱۲) مساوی است با

$$y = e^{-\lambda t}(C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{-\alpha t}) \tag{۱۳}$$

اگر $\omega < \lambda$ (*حالت فوق میرا*) ،

$$y = e^{-\lambda t}(C_1 + C_2 t) \tag{۱۴}$$

اگر $\lambda = \omega$ (*حالت به‌طور بحرانی میرا*) ، و

$$y = e^{-\lambda t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t) \tag{۱۵}$$

اگر $\lambda < \omega$ (*حالت تحت میرا*) .بااین فرض که گلوله ابتدا در موضع $y = y_0$ درحال‌سکون است که از آن با سرعت صفر رها شده است ، شرایط اولیهٔ

$$y(0) = y_0, \qquad y'(0) = 0$$

را داریم ، که حال با استفاده از آنها ثابتهای C_1وC_2را در هر یک از فرمولهای (۱۳)،(۱۴)

و (۱۵) تعیین می‌کنیم .

در حالت فوق میرا $(\lambda > \omega)$ ، از (۱۳) مشتق می‌گیریم :

$$y' = -\lambda e^{-\lambda t}(C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{-\alpha t}) + \alpha e^{-\lambda t}(C_1 e^{\alpha t} - C_2 e^{-\alpha t}).$$

با گذاردن $t = 0, y = y_0$ در (۱۳) و $t = 0, y' = 0$ در فرمول اخیر ، دستگاه معادلات زیر به دست می‌آید :

$$C_1 + C_2 = y_0, \qquad (\alpha - \lambda)C_1 - (\alpha + \lambda)C_2 = 0,$$

که جواب

$$C_1 = \frac{\alpha + \lambda}{2\alpha} y_0, \qquad C_2 = \frac{\alpha - \lambda}{2\alpha} y_0.$$

را دارد ؛ درنتیجه ، (۱۳) شکل زیر را به خود می‌گیرد :

$$y = y_0 e^{-\lambda t}\left(\frac{\alpha + \lambda}{2\alpha} e^{\alpha t} + \frac{\alpha - \lambda}{2\alpha} e^{-\alpha t}\right)$$

(۱۶)

$$= y_0 e^{-\lambda t}\left(\cosh \alpha t + \frac{\lambda}{\alpha} \sinh \alpha t\right).$$

در حالت به‌طور بحرانی میرا $(\lambda = \omega)$ ، از (۱۴) مشتق می‌گیریم :

$$y' = -\lambda e^{-\lambda t}(C_1 + C_2 t) + C_2 e^{-\lambda t}.$$

با گذاردن $t = 0, y = y_0$ در (۱۴) ، و $t = 0, y' = 0$ در فوق ، فورا" خواهیم داشت

$$C_1 = y_0, \qquad -\lambda C_1 + C_2 = 0,$$

یا معادلا" $C_1 = y_0, C_2 = \lambda y_0$ ؛ درنتیجه ، (۱۴) به صورت زیر درمی‌آید :

(۱۷) $$y = y_0 e^{-\lambda t}(1 + \lambda t).$$

در حالت تحت میرا $(\lambda < \omega)$ ، مشتق (۱۵) مساوی است با

$$y' = -\lambda e^{-\lambda t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t) + \beta e^{-\lambda t}(-C_1 \sin \beta t + C_2 \cos \beta t).$$

لذا ، با قرار دادن $t = 0, y = y_0$ در (۱۵) ، و $t = 0, y' = 0$ در فوق ، بلافاصله خواهیم داشت

$$C_1 = y_0, \qquad -\lambda C_1 + \beta C_2 = 0,$$

یا معادلا" $C_1 = y_0, C_2 = \lambda y_0/\beta$ ؛ درنتیجه ، (۱۵) به صورت زیر درمی‌آید :

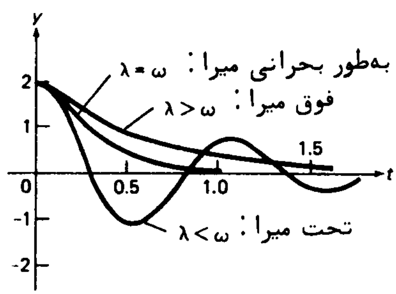
(۱۸) $$y = y_0 e^{-\lambda t}\left(\cos \beta t + \frac{\lambda}{\beta} \sin \beta t\right).$$

به آسانی می‌توان تحقیق کرد که (۱۸) شکل زیر را نیز دارد :

('۱۸) $$y = y_1 e^{-\lambda t} \sin(\beta t + \phi),$$

که در آن $y_1 = y_0\sqrt{1 + (\lambda/\beta)^2}$ و $\phi = \arctan(\beta/\lambda)$.

از رابطهٔ (۱۸') واضح است که حرکت گلوله در حالت **تحت میرا** نوسانی است ، ولی وقتی $t \to \infty$ ، نوسانات به خاطر وجود عامل نمایی $e^{-\lambda t}$ به میزانی متناسب بـا اندازهٔ λ " مستهلک می‌شوند " (اگر λ کوچک باشد ، نوسانات می‌توانند مدت مدیدی‌دوام بیاورند ، ولی در غیر این صورت به‌سرعت از بین‌می‌روند) . فرکانس این نوسانات "بامیرایی‌نمایی" $\beta/2\pi$ است ، و از فرکانس $\omega/2\pi$ نوسانات غیرمیرا که در غیاب نیروهای مقاوم روی‌می‌دهند $(\lambda = 0)$ کوچکتر است ؛ درواقع ، $\beta/2\pi$ را باید " شبه فرکانس " و $2\pi/\beta$ را " شبه‌دورهٔ تناوب" نامید ، زیرا نوسانات واقعا " متناوب نیستند . حرکت در حالات **فوق میرا** و **به‌طور بحرانی میرا** غیرنوسانی است . درواقع ، تحلیل توابع (۱۶) و (۱۷) نشان می‌دهد که‌هردو وقتی $t \to \infty$ تدریجا " به صفر نزول کرده ، و هرگز از محور t رد نمی‌شوند . شکل ۷ نمودارهای (۱۶) تا (۱۸) را به ازای $y_0 = 2$ و $\omega = 6$ نشان می‌دهد ؛ با $\lambda = 10$ درحالت فوق میرا ،



شکل ۷

درنتیجه $\alpha = \sqrt{\lambda^2 - \omega^2} = 8$ ، و $\lambda = 1$ درحالت‌تحت‌میرا، درنتیجه

$$\beta = \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} = \sqrt{35} \approx 5.92$$

توجه کنید که حرکت در حالت به‌طور بحرانی میرا سریعتر از حالت فوق میرا " مستهلـک می‌شود " .

نوسانات واداشته. بالاخره ، *نوسانات واداشته* را درنظرمی‌گیریم که درآن دستگاه نوسانات آزاد نبوده ، بلکه تحت اثر مداوم نیرویی خارجی به شکل $F_0 \cos \omega_0 t$ می‌باشد (یک نوسان توافقی با فرکانس $\omega_0/2\pi$ و دامنهٔ F_0) . فرض کنیم این نیرو بر گلولهٔ شکل ۶ وارد شده باشد ، و برای سادگی میراساز را برمی‌داریم ؛ درنتیجه ، نیروی مقاوم وجود ندارد . دراین صورت ، از قانون دوم نیوتن به جای (۸) داریم

$$my'' = -ky + F_0 \cos \omega_0 t$$

یا معادلا "

$$y'' + \omega^2 y = f_0 \cos \omega_0 t, \tag{۱۹}$$

که در آن $\omega = \sqrt{k/m}$ و $f_0 = F_0/m$ ، و فرض است که $\omega_0 \neq \omega$. معادلهٔ (۱۷) را به روش بخش ۳.۱۶ حل می‌کنیم ، خواهیم داشت

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos \omega_0 t. \tag{۲۰}$$

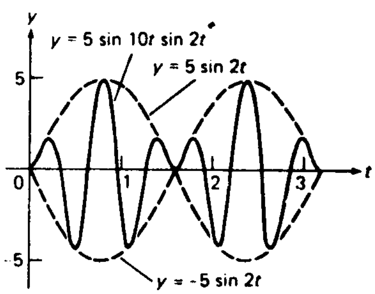
به آسانی معلوم می‌شود که دوجملهٔ اول سمت راست جواب عمومی معادلهٔ تحویل یافتهٔ $y'' + \omega^2 y = 0$ را تشکیل می‌دهند ، ولی جملهٔ آخر جواب خصوصی معادلهٔ تام (۱۹) است . فرض کنیم گلوله ابتدا جابجا نشده و در حال سکون باشد . در این صورت ، $y(0) = y'(0) = 0$ ،وبه‌آسانی می‌توان ثابتهای موجود در (۲۰) را یافت : $C_1 = -f_0/(\omega^2 - \omega_0^2)$ و $C_2 = 0$ ؛ درنتیجه ، رابطهٔ (۲۰) به صورت زیر درمی‌آید :

$$y = \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_0^2} (\cos \omega_0 t - \cos \omega t),$$

که می‌توان آن را به‌کمک فرمول مسئلهٔ ۶۲ ، صفحهٔ ۱۰۰ ، به صورت زیر درآورد :

$$y = \frac{2f_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin (\tfrac{1}{2}(\omega + \omega_0)t) \sin (\tfrac{1}{2}(\omega - \omega_0)t). \tag{۲۱}$$

فرض کنیم $|\omega - \omega_0|$ درمقایسه با $\omega + \omega_0$ کوچک‌باشد . در این صورت ، (۲۱) نوسانی با تغییر سریع متناسب با $\sin (\frac{1}{2}(\omega + \omega_0)t)$ است که درنوسان‌باتغییربطئی $\sin (\frac{1}{2}(\omega - \omega_0)t)$ " ضرب شده است " . لذا ، نوسان (۲۱) سریع است ، ولی " پوش " آن تغییرات متناوب کند دارد که به **تپش** معروفند . صدای تپشها در برد فرکانس قابل شنیدن ناموزون به گوش می‌رسد ؛ برای تحقیق این امر ، دو مهرهٔ مجاور یک پیانو را همزمان فشار دهید . شکل ۸ پدیدهٔ تپشها را برای حرکت $y = 5 \sin 10t \sin 2t$ ، که از (۲۱) با فرض $\omega = 12$ ، $\omega_0 = 8$



شکل ۸

و $5 = 2f_0/(\omega^2 - \omega_0^2)$ به دست می‌آید، نشان می‌دهد.

اگر $\omega = \omega_0$ ، درنتیجه فرکانس " تابع نیروی " $F = F_0 \cos \omega_0 t$ با فرکانس طبیعی دستگاه آزاد یکی باشد، جواب دیگری از معادلهٔ دیفرانسیل (۱۹) به دست می‌آید که به پدیدهٔ مهم **تشدید** منجر خواهد شد (ر.ک. مسئلهٔ ۲۱).

مسائل

۱. نشان دهید هر نوسان به‌شکل ('۵) را می‌توان به صورت (۵) با همان‌دامنه‌وفرکانس نوشت.

۲. نشان دهید هر نوسان توافقی با فرکانس منفی را می‌توان به صورت یک‌نوسان‌توافقی با فرکانس مثبت نوشت. لذا، فرض $\omega > 0$ خللی به کلیت وارد نمی‌سازد.

۳. طول تقریبی (در امتداد شیار) یک دورهٔ تناوب از نوسانی سینوس‌گون به فرکانس 440 cps (A زیر وسط C) خارجی‌ترین شیار یک صفحهٔ ۱۲ اینچی گرامافون که با سرعت $33\frac{1}{3}$ rpm (دور در دقیقه) می‌گردد را بیابید.

۴. نشان دهید که مجموع دو نوسان توافقی با فرکانس معلوم نوسان توافقی دیگری با همان فرکانس است.

۵. نشان دهید که تندی یک‌ذره با حرکت توافقی ساده در لحظاتی صفر است که فاصلهٔ ذره تا نقطهٔ تعادل ماکزیمم باشد.

۶. نشان دهید که تندی یک ذره با حرکت توافقی ساده در زمانهایی ماکزیمم است که ذره از موضع تعادل می‌گذرد.

۷. یک ذره‌دارای‌حرکت‌توافقی‌ساده‌بادورهٔ‌تناوب $T = \pi$ sec، موضع اولیهٔ $y(0) = -8$ cm و سرعت اولیهٔ $y'(0) = 12$ cm/sec است. دامنهٔ A ، فرکانس زاویه‌ای ω ، و فاز اولیه ϕ حرکت را بیابید. ذره در چه لحظهٔ t_1 از وضعیت تعادل عبور می‌کند؟

۸. فنری با وزنهٔ 3-lb به‌اندازهٔ 1.5 in کشیده شده است. فرض کنید وزنهٔ 6 in زیروضعیت تعادل کشیده شده و سپس با سرعت اولیهٔ صفر رها گردد. موضع y و سرعت y' وزنه را یکچهارم ثانیه بعد پیدا کنید. (شتاب ثقل را مساوی $g = 32$ ft/sec^2 بگیرید.)

۹. برای تعیین وزن جسم مسئلهٔ قبل واقعا" به چه چیز نیاز داریم؟ جواب خود را توضیح دهید.

۱۰. دورهٔ تناوب نوسان جسمی که از یک فنر آویزان است 1 sec می‌باشد. فرض کنید جسم از فنر قطع شود. فنر پس از رسیدن به حالت سکون چقدر کوتاهتر خواهد بود؟

زمین را به‌طور ایده‌آل یک گوی کروی همگن به شعاع $R = 3960$ میل گرفته، و فرض کنید در

امتداد قطری از آن حفره‌ای ایجاد کرده باشیم . می‌توان (به کمک مسائل ۳۵ و ۳۶ بخش ۲.۱۵) نشان داد که بر یک جسم داخل حفره نیروی جاذبه‌ای متناسب با فاصله‌اش تا مرکز زمین وارد می‌شود . فرض کنید جسمی از حال سکون به داخل حفره افتاده باشد .

۱۱ . زمان لازم T برای آنکه جسم به موضع اولیه‌اش در سطح زمین برسد چقدر است ؟

۱۲ . تندی v جسم را حین عبور از مرکز زمین پیدا نمایید .

۱۳ . نشان دهید که T و v دورهٔ تناوب و تندی ماهواره‌ای هستند که مدار مستدیر آن با زمین تماس دارد .

۱۴ . فرض کنید K انرژی جنبشی و V انرژی پتانسیل یک نوسانگر توافقی غیرمیرا باشند . مستقیماً " با محاسبه نشان دهید که انرژی کل $E = K + V$ نوسانگر ثابت است .

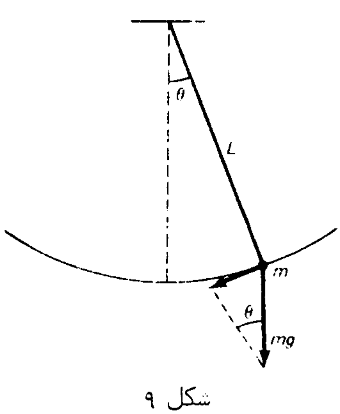
۱۵ . فنری با وزنهٔ 8-lb که به آن میراسازی با ضریب میرایی $b = 5$ lb sec/ft وصل است به اندازهٔ 4 in کشیده شده است . فرض کنید وزنه به اندازهٔ 6 in زیر وضعیت تعادل کشیده و سپس به آرامی رها شود . حرکت وزنه را تعیین نمایید .

۱۶ . فنری با وزنهٔ 4-lb که به آن میراسازی با ضریب میرایی b lb sec/ft وصل است به اندازهٔ 6 in کشیده شده است . حرکت به ازای چه مقادیری از b فوق‌میراست ؟ به‌طور بحرانی میراست ؟ تحت میراست ؟

۱۷ . فرض کنید A_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ ماکزیممهای متوالی نوسانات توافقی میرای (۱۸) باشند در این صورت ، کمیت $\delta = \ln (A_n/A_{n+1})$ **نزول لگاریتمی** نام دارد . δ را برحسب ثابت h و شبه دورهٔ تناوب $T = 2\pi/\beta$ ی نوسانات میرا بیان دارید .

۱۸ . نشان دهید که تغییرمکان y نوسانات به‌طوربحرانی میرای (۱۷) از تغییرمکان نوسانات تحت میرای (۱۶) به ازای هر $t > 0$ کمتر است .

۱۹ . شکل ۹ یک دستگاه مکانیکی آشنا ، به نام **پاندول** (ساده) را نشان می‌دهد ، که در



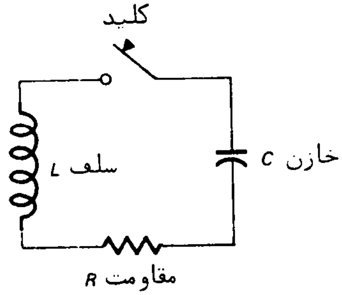
شکل ۹

آن گلوله‌ای به جرم m به نخی به طول L وصل بوده و در صفحهٔ قائمی نوسان می‌کند. فرض کنید $\theta = \theta(t)$ تغییرمکان زاویه‌ای گلوله از وضعیت سکون بوده، و نخ بدون وزن باشد. نشان دهید که θ در معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

صدق می‌کند. حرکت پاندول را به ازای θ های آنقدر کوچک که تعویض $\sin\theta$ با θ موجه است توصیف نمایید. این تقریب " خطی‌سازی" معادل حذف تمام جملات سری توانی $\sin\theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \cdots$ جز اولی است. دورهٔ تناوب T پاندول در این حالت چقدر است؟

۲۰. یک مدار الکتریکی از سلف L هانری، مقاومت R اهم، و خازن C فاراد تشکیل شده است که به طور سری به هم وصل شده‌اند (ر.ک. شکل ۱۰). فرض کنید $q = q(t)$ و $i = i(t)$ بار خازن و شدت جریان مدار در لحظهٔ t بوده، و ابتدا خازن بار داشته باشد ولی شدت جریانی در مدار موجود نباشد. نشان دهید که q و i نوسانی‌اند اگر و فقط اگر $R < 2\sqrt{L/C}$.



شکل ۱۰

۲۱. فرض کنید در معادلهٔ (۱۹) $\omega = \omega_0$؛ درنتیجه، فرکانس ω_0 تابع نیرو با فرکانس طبیعی دستگاه آزاد یکی است. معادلهٔ (۱۹) را حل کرده و نشان دهید نوسانات حاصل بزرگ می‌شوند تا جایی که فنر پاره می‌شود. این پدیده به پدیدهٔ **تشدید** معروف بوده، و می‌تواند به در هم شکستن ساختارهای مکانیکی منجر شود. برای احتراز از تشدید است که در عبور از پلهای کوچک به سربازان دستور می‌دهند تا قدمهایشان را بشکنند.

۲۲. معادلهٔ (۱۹) را برای نوسانات واداشته درحالتی که میرایی وجود دارد، درنتیجه

(۱۹) جملهٔ اضافی داشته و به شکل

$$y'' + 2\lambda y' + \omega^2 y = f_0 \cos \omega_0 t$$

است ، حل کنید . با فرض $\lambda^2 < \frac{1}{2}\omega^2$ ، **فرکانس تشدید** را بیابید؛ یعنی ، فرکانسی که به ازای آن نوسانات حالت پایدار حاصل ماکزیمم میباشند . دامنهٔ نوسانات را به ازای $\omega_0 = \omega$ بیابید .

اصطلاحات و مباحث کلیدی

معادلات دیفرانسیل خطی در مقابل غیرخطی
معادلات کامل ، شرط کامل بودن
منحنیهای انتگرال
عاملهای انتگرالگیری
معادلات خطی مرتبهٔ اول
معادلات خطی مرتبهٔ دوم همگن (با ضرایب ثابت)
معادلات خطی مرتبهٔ دوم غیرهمگن
قضیهٔ وجودی و یکتایی
مجموعهٔ اساسی از جوابها
معادلهٔ مشخص
روش ضرایب نامعین
حرکت توافقی ساده ، نوسانات توافقی
دورهٔ تناوب ، فرکانس ، دامنه ، و فاز
نوسانگر توافقی غیرمیرا و میرا
فوقمیرایی ، میرایی بحرانی ، تحت میرایی
نوسانات واداشته

مسائل تکمیلی

فرض کنید F خانوادهای از منحنیها در صفحهٔ xy باشد . یک منحنی که به هر عضو F عمود باشد یک **مسیر قائم** F نام دارد . به آسانی معلوم میشود که اگر F از منحنیهای انتگرال معادلهٔ دیفرانسیل

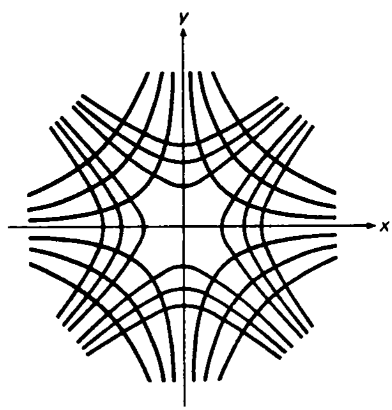
$$y' = f(x, y). \qquad \text{(یک)}$$

تشکیل شده باشد که در آن $f(x, y) \neq 0$ ، آنگاه هر مسیر قائم F یک منحنی انتگرال معادلهٔ

دیفرانسیل

$$y' = -\frac{1}{f(x, y)} \qquad \text{(دو)}$$

است، زیرا حاصل‌ضرب شیب یک منحنی انتگرال (یک) در شیب یک منحنی انتگرال (دو) در هر نقطهٔ اشتراک دو منحنی مساوی $1-$ است. مثلاً، فرض کنیم F از تمام‌هذلولیهای $x^2 - y^2 = C$ تشکیل شده است، که در آن C ثابت دلخواهی است. در این صورت، هر عضو F منحنی انتگرال معادلهٔ $y' = x/y$ است (از $x^2 - y^2 = C$ به‌طور ضمنی مشتق گرفته و سپس نسبت به y' حل کنید)؛ و لذا، هر مسیر قائم F منحنی انتگرال معادلهٔ $y' = -y/x$ یا معادلاً $y\,dx + x\,dy = 0$، است با جواب عمومی $xy = k$، که در آن k ثابت دلخواه دیگری است. لذا، هر هذلولی $xy = k$ یک مسیر قائم خانـــواده هذلولیهای $x^2 - y^2 = C$ است، و در همین وضع، هر هذلولی $x^2 - y^2 = C$ مسیر قائم خانوادهٔ هذلولیهای $xy = k$ می‌باشد؛ ر.ک. شکل ۱۱.



شکل ۱۱

با استفاده از این روش، مسیرهای قائم خانوادهٔ داده شده از منحنیها را بیابید.

۱. خطوط $y = Cx$

۲. سهمیهای $y^2 = Cx$

۳. دوایر $x^2 + y^2 = Cx$

۴. بیضیهای $x^2 + 2y^2 = C$

۵. هذلولیهای $x^2 - 2y^2 = C$

۶. معادلهٔ دیفرانسیل خطی $y' + py = q$ را با جانشانی $y = uv$ حل کنید، که در آن u و

v دو تابع مجهول‌اند ، v را طوری بگیرید که ضریب u صفر شود ،و سپس از معادلهٔ حاصل انتگرال بگیرید .

۷. اغلب می‌توان یک معادلهٔ دیفرانسیل را با تعویض نقشهای x و y حل کرد . مثلاً ، معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dx}(\ln y - x) = y, \qquad \text{(سه)}$$

که نسبت به y غیرخطی است ، نسبت به x خطی است ، و این را می‌توان با نوشتن آن به شکل معادل

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{y} = \frac{\ln y}{y} \qquad \text{(سهٔ)}$$

دید . جواب عمومی (سهٔ) ، و درنتیجه (سه) ، را بیابید .

معادلهٔ داده شده را با استفاده از روش مسئلهٔ قبل حل کنید .

۸. $(y - x)y' = 1$ ۹. $(x - y^2)y' = y$

۱۰. $(e^y + 2x)y' = 1$

معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم

$$y'' = f(x, y') \qquad \text{(چهار)}$$

را در نظر بگیرید، که در آن طرف راست تابع متغیر مستقل x و مشتق y' است ، ولی به تابع مجهول y بستگی ندارد . در این صورت ، معادلهٔ (چهار) فوراً به‌معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول

$$p' = f(x, p) \qquad \text{(چهارٔ)}$$

نسبت به متغیر جدید

$$p = y'$$

تحویل می‌شود . توجه کنید که معادلهٔ اخیر یک معادلهٔ دیفرانسیل مانند $y' = p$ از نوع بسیار ساده است . لذا ، اگر $p = p(x, C_1)$ جواب عمومی (چهارٔ) به شکل صریح (شامل ثابت دلخواه C_1) باشد ،جواب عمومی معادلهٔ اصلی (چهار) عبارت‌است از $y = \int p(x, C_1)\,dx + C_2$ ، که در آن C_2 ثابت دلخواه دیگر می‌باشد . مثلاً ، هرگاه $y'' - y' = x$ ، آنگاه $p' - p = x$ ، و جواب عمومی این معادلهٔ خطی نسبت به p مساوی است با $p = -x - 1 + C_1e^x$. پس نتیجه می‌شود که

$$y = \int p\,dx = -\tfrac{1}{2}x^2 - x + C_1e^x + C_2 .$$

معادلهٔ دیفرانسیل داده شده را به روش فوق حل نمایید .

۱۱. $xy'' + y' = 0$ ۱۲. $y'' - y' = e^x$

۱۳. $y'' = \sqrt{1 + y'^2}$ ۱۴. $x^2y'' + xy' = 1$

معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم

$$y'' = f(y, y') \qquad \text{(پنج)}$$

را در نظـــــــربگیرید ، که در آن طرف راست به تابع مجهول y و مشتقش y' وابسته است ولـــــی تابـــع متغیر مستقل x نیست ،و مثل مجموعه‌مسائل قبل قراردهید $p = y' = dy/dx$ دراین صورت ،

$$y'' = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}y' = \frac{dp}{dy}p,$$

درنتیجه ، (پنج) به معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p) \qquad \text{(پنج')}$$

تحـــویـــل مـــی‌شود . لذا ، اگر $p = p(y, C_1)$ جواب عمومی (پنج') به شکل صریح ، شـــامل ثابـــت دلخـــواه C_1 ، باشد ، جواب عمومی معادلهٔ

$$\frac{dy}{dx} = p(y, C_1)$$

جـــواب عمـــومی (پنج) می‌باشد . مثلا " ، هرگاه $yy'' - y'^2 = 0$ ، آنگاه $yp(dp/dy) - p^2 = 0$ یـــا ، پـــس از تقسیم بر p ، $y\,dp - p\,dy = 0$.با ضرب معادلهٔ اخیردرعامل انتگرالگیری $1/y^2$ نتیجــــــه می‌شودکه $(y\,dp - p\,dy)/y^2 = d(p/y) = 0$.لذا، $p/y = C_1$ یا $dy/dx = p = C_1y$ جـــــواب عمـومی معادلهٔ اخیر (که جدایی پذیر است) ، و درنتیجه معادلـــهٔ اصلـــی $yy'' - y'^2 = 0$ ، مســـــاوی اســـت با $y = C_2e^{C_1x}$. توجه کنید که جواب ثابت $y \equiv$ ، که در تقسیـــــم بـــر p مفقود شد ، با قراردادن $C_1 = 0$ به دست می‌آید .

معادلهٔ دیفرانسیل داده شده را به روش فوق حل نمایید .

۱۵. $yy'' + y'^2 = 0$ ۱۶. $yy'' - y'^2 = 1$

۱۷. $y''(1 + y) = y'(1 + y')$ ۱۸. $\sqrt{y}y'' = y'$

روش زیر برای حل معادلهٔ خطی غیرهمگن مرتبهٔ دوم $y'' + ay' + by = f(x)$ **روش تغییـــر پارامتر** نام دارد . فرض کنید $y_1 = y_1(x)$ و $y_2 = y_2(x)$ یک مجموعهٔ اساسی ازجوابهای معادلهٔ تحویل یافتهٔ $y'' + ay' + by = 0$ را تشکیل داده ، و $u = u(x)$ و $v = v(x)$ دو تابع مجهول باشند . $y = uy_1 + vy_2$ را در معادلهٔ غیرهمگن گذارده ، و شرط $u'y_1 + v'y_2 = 0$ را برمشتقات

u' و v' اعمال می‌کنیم . در این صورت ، به آسانی می‌توان تحقیق کرد که $(uy_1 + vy_2)'' + a(uy_1 + vy_2)' + b(uy_1 + vy_2) = f(x)$ به $u'y_1' + v'y_2' = f(x)$ ساده می‌شود . نتیجه عبارت است از دستگاه دو معادلهٔ

$$u'y_1 + v'y_2 = 0,$$
$$u'y_1' + v'y_2' = f(x), \qquad \text{(شش)}$$

و می‌توان نشان داد که این دستگاه همواره نسبت به u' و v' قابل حل است . در این‌صورت، با محاسبهٔ انتگرالهای $u = \int u'\,dx$ و $v = \int v'\,dx$ (در حالتی که میسر است) توابع u و v به دست می‌آیند ، و جواب خصوصی نظیر $y = uy_1 + vy_2$ را از معادلهٔ غیرهمگن‌را خواهیم داشت. مثلاً ، هرگاه $y'' - 2y' + y = 2e^x$ ، آنگاه ، همانطورکه در مثال ۱۰ ، صفحهٔ ۱۵۵۶، دیدیم، $y_1 = e^x$ و $y_2 = xe^x$ یک مجموعهٔ اساسی از جوابهای معادلهٔ تحویل یافتهٔ $y'' - 2y' + y = 0$ را تشکیل می‌دهند ، و دستگاه (شش) به صورت

$$u'e^x + v'xe^x = 0,$$
$$u'e^x + v'(e^x + xe^x) = 2e^x,$$

با جواب $u' = -2x,\ v' = 2$ درمی‌آید . بنابراین ، $u = \int -2x\,dx = -x^2,\ v = \int 2\,dx = 2x$ ؛ درنتیجه ، همانطور که در مثال فوق دیدیم ، $y = -x^2e^x + 2x^2e^x = x^2e^x$ یک جواب خصوصی معادلهٔ غیرهمگن $y'' - 2y' + y = 2e^x$ می‌باشد .

معادلهٔ دیفرانسیل داده شده را به روش فوق حل کنید .

۱۹. $y'' + y = \tan x$

۲۰. $y'' + y = \sec x$

۲۱. $y'' - y = 2\sin^2 x$

۲۲. $y'' - 2y' + y = e^x/x$

۲۳. $y'' - 2y' + y = e^x \ln x$

۲۴. $y'' + 3y' + 2y = \cos(e^x)$

معادلهٔ خطی همگن $y'' + ay' + by = 0$ با مجموعهٔ اساسی داده شده از جوابها را بیابید .

۲۵. $e^{-4x}\cos 5x, e^{-4x}\sin 5x$

۲۶. e^{-10x}, xe^{-10x}

۲۷. $e^{3x}, \sinh 3x$

۲۸. e^{-99x}, e^{100x}

دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول داده‌شده ،شامل دو تابع مجهول $x = x(t)$ و $y = y(t)$ از متغیر مستقل t ، را حل کنید . (ابتدا ، با حذف تابع y ، یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم نسبت به x بیابید .)

۲۹. $\dfrac{dx}{dt} = y, \dfrac{dy}{dt} = -x$

۳۰. $\dfrac{dx}{dt} = x + y, \dfrac{dy}{dt} = x - y$

۳۱. $\frac{dx}{dt} = x + y, \frac{dy}{dt} = t + x + y$

۳۲. $\frac{dx}{dt} = 2x + y, \frac{dy}{dt} = x + 2y$

۳۳. یک جسم استوانه‌ای روی یک دریاچه شناور است. فرض کنید جسم را کمی به‌پایین فشار داده و سپس به آرامی رها کنیم. نشان دهید که جسم حرکت توافقی ساده در راستای قائم می‌یابد (از نیروهای مقاومت صرف‌نظر می‌شود). دورهٔ تناوب T نوسانات را درصورتی بیابید که جسم در حال تعادل 2 ft در آب فرورفته باشد.

۳۴. فرض کنید E انرژی کل یک نوسانگر توافقی میرا باشد. نشان دهید که E به‌میزان hv^2 کاهش می‌یابد، که در آن v سرعت نوسانگر بوده و h ضریب میرایی آن می‌باشد.

یک معادلهٔ دیفرانسیل را اغلب می‌توان باگرفتن‌جوابی از آن به صورت سری‌توانی همگرای

$$y = y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{(هفت)}$$

حل کرد. مثلاً، معادلهٔ دیفرانسیل $y'' = 2xy' + 4y$ را درنظر بگیرید. با دوبارمشتقگیری از (هفت)، به کمک قضیهٔ ۱۴، صفحهٔ ۸۶۸، سریهای توانی

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}, \qquad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} \qquad \text{(هفت')}$$

را به دست می‌آوریم که همان شعاع همگرایی (هفت) را دارد. با گذاردن (هفت) و (هفت′) در $y'' = 2xy' + 4y$، نتیجه می‌شود که

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = 2x \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

$$(n = 1, 2, \ldots)$$

یا معادلاً

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n = 2 \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n + 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

هرگاه این معادله بخواهد اتحاد باشد، آنگاه توانهای یکسان x باید ضرایب یکسان‌داشته باشند (مثال ۴، صفحهٔ ۸۷۰، را به یاد آورید). بنابراین، $2a_2 = 4a_0$ یا $a_2 = 2a_0$، و

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = (2n+4)a_n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

لذا، ضرایب سری (هفت) در فرمول بازگشتی

$$a_{n+2} = \frac{2}{n+1} a_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad \text{(هشت)}$$

صدق می‌کنند. به ضرایب a_0 و a_1 می‌توان مقادیر دلخواه داد، ولی به محض انتخاب این ضرایب، سایر ضرایب $a_2, a_3, \ldots$ از فرمول (هشت) به دست می‌آیند. در واقع، به آسانی معلوم می‌شود که از (هشت) داریم

$$a_{2k} = \frac{2^k}{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1}a_0, \qquad a_{2k+1} = \frac{1}{k!}a_1$$

$$(k = 1, 2, \ldots).$$

با گذاردن این مقادیر از ضرایب در (هفت)، بالاخره معلوم می‌شود که جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل $y'' = 2xy' + 4y$ مساوی است با $y = a_0y_0(x) + a_1y_1(x)$، که در آن توابع $y_0 = y_0(x)$ و $y_1 = y_1(x)$ دارای بسطهای سری توانی

$$y_0 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^kx^{2k}}{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1}, \qquad y_1 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{k!}$$

می‌باشند. از آزمون نسبت نتیجه می‌شود که این دوسری به ازای هر x همگراست (درواقع، فوراً معلوم می‌شود که y_1 تابع xe^{x^2} است).

معادلهٔ دیفرانسیل داده شده را به روش فوق حل کنید.

۳۵. $y'' = 2xy' - 4y$

۳۶. $y'' + xy' + y = 0$

۳۷. $y'' = xy$

۳۸. $y'' = x^2y$