# مجموعه آزمون های

(ریاضی عمومی2)

# مجموعه آزمون‌های ریاضی عمومی (2)

# مجموعه آزمون‌های ریاضی عمومی (2)

۱- اگر $\vec{v} \neq \vec{u}$ و $\vec{w}\times\vec{u} = \vec{w}\times\vec{v}$ باشد، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟ (MBA- ۸۷)

1) $\vec{w}$ عمود $\vec{u}-\vec{v}$.

2) $\vec{w}$ موازی $\vec{u}-\vec{v}$

3) $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ موازی یک صفحه

4) $\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = 0$

۲- امتداد ویژه نظیر کوچک‌ترین مقدار ویژه ماتریس $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}$ موازی کدام بردار است؟ (MBA- ۸۸)

1) $(-1,0,1)$

2) $(0,1,-1)$

3) $(1,-1,0)$

4) $(1,1,0)$

۳- به ازای چه مقادیر a و b بردارهای $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ بردارهای ویژه ماتریس $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ می‌باشد؟ (عمران- ۸۸)

1) $b=1$ و $a=1$

2) $b=-1$ و $a=-1$

3) $b=1$ و $a=-1$

4) $b=-1$ و $a=1$

۴- نقاط $A(2,1,-1)$ و $B(1,1,1)$ و $C(2,-1,1)$ مفروض‌اند، برداری هم‌راستا با نیمساز ABC کدام است؟(ریاضی- ۸۶)

1) $\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1,-1)$

2) $\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1,2)$

3) $\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-2,-2)$

4) $\frac{1}{\sqrt{5}}(2,2,-2)$

۵- اگر $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$، ماتریس $A^2-6A^3+12A$ برابر کدام است؟ (ژئوفیزیک-۸۶)

1) ماتریس صفر

2) $6I$

3) $8I$

4) $9I$

۶- اگر طول بردار $\vec{v}$ یک باشد، بردار $\vec{v}\times(\vec{v}\times(\vec{v}\times\vec{u}))$ کدام است؟ (آمار- ۸۷)

1) $-\vec{v}\times\vec{u}$

2) $(\vec{v}\cdot\vec{u})\vec{v}$

3) $(\vec{v}\cdot\vec{u})\vec{u}$

4) $(\vec{u}\cdot\vec{v})(\vec{v}\times\vec{u})$

**۷- اگر دو بردار $A \in \mathbb{R}^3$ و $B \in \mathbb{R}^3$ غیرصفر بوده و در یک راستا نباشند و دو ستون ماتریس $M = [AB]$ از این دو بردار تشکیل شده باشند، آن‌گاه کدام یک از گزاره‌های زیر در مورد $x^tM^tMx$ ، $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ صحیح است.**

**(مکانیک- ۸۶)**

1) عبارت مذکور مثبت است به ازای هر $x \neq 0$

2) به ازای بردارهای $x \neq 0$ هر علامتی را می‌تواند داشته باشد.

3) عبارت مذکور صفر هم می‌تواند باشد به ازای برخی $x \neq 0$

4) عبارت مذکور منفی هم می‌تواند باشد به ازای برخی $x \neq 0$

**۸- رتبه ماتریس $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 7 & 12 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 6 & 9 & 15 \end{bmatrix}$ کدام است؟** **(MBA- ۸۷)**

1) صفر 2) 1 3) 2 4) 3

**۹- به ازای چه مقادیری از $a$ دستگاه $\begin{cases} x - y + az = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ 6x - 4y + 5z = 0 \end{cases}$ بی‌نهایت جواب دارد؟** **(صنایع- ۸۵)**

1) $a = -1$ 2) $a = 0$ 3) $a = 1$ 4) $a = 2$

**۱۰- صفحه‌ای که از دو نقطه $(1,0,0)$ و $(0,0,1)$ بگذرد و بر صفحه به معادله $x + y + z = 2$ عمود باشد، از کدام نقطه به مختصات زیر می‌گذرد؟** **(ژئوفیزیک- ۸۵)**

1) $(1,1,2)$ 2) $(1,-1,1)$ 3) $(2,2,1)$ 4) $(-1,1,1)$

**۱۱- از تساوی ماتریسی $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ مقدار $a + b$ کدام است؟** **(آبیاری- ۸۲)**

1) -3 2) -1 3) 4 4) 5

**۱۲- اگر $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ فرض شود، $\det M$ برابر است با:** **(نساجی- ۷۹)**

1) 75 2) 30 3) -15 4) 0

۱۳- بردارهای $\vec{A} = i + 2j + 3k$ و $\vec{B} = -i + 2j + k$ و $\vec{C} = 3i + j$ مفروض هستند، مقدار $t$ را طوری پیدا کنید که بردار $\vec{A} + t\vec{B}$ بر بردار $\vec{C}$ عمود باشد. (سیستم- آزاد ۸۲)

1) $t = -5$ 2) $t = 5$ 3) $t = 1$ 4) $t = -1$

۱۴- مساحت مثلثی که رئوس آن در نقاط $A(0,0,0)$ و $B(1,0,2)$ و $C(2,-2,0)$ قرار دارند، مساوی است با:

(معماری کشتی- ۸۰)

1) $3$ 2) $\frac{5}{6}$ 3) $6$ 4) $\frac{5}{3}$

۱۵- معادله صفحه‌ای که از $\frac{x-1}{3} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-4}{-2}$ بگذرد و موازی $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+2}{1}$ باشد، عبارت است از: (صنایع- ۷۲)

1) $6x - 7y + 6z = 98$ 2) $6x - 7y + 16z = 9$

3) $6x + 7y + 16z = 98$ 4) $6x + 7y + 6z = 9$

۱۶- فرض کنید $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$، در این صورت چندجمله‌ای مشخصه $A^{-1}$ برابر است با: (ریاضی- ۸۱)

1) $x^3 - 2x + 1$ 2) $x^3 - 2x^2 + 1$ 3) $x^3 + 2x^2 + 1$ 4) $x^3 + 2x^2 - 1$

۱۷- معادله صفحه‌ای که از فصل مشترک دو صفحه $x + y + z = 6$ و $2x + 3y + 4z + 5 = 0$ و نقطه $p(1,1,1)$ می‌گذرد عبارت است از: (ریاضی- ۷۹)

1) $20x + 23y + 26z - 69 = 0$ 2) $20x - 23y + 26z - 69 = 0$

3) $20x + 23y - 26z + 69 = 0$ 4) $20x + 23y + 26z + 69 = 0$

۱۸- حجم مثلث‌القاعده‌ای به رئوس $A(0,0,1)$ و $B(2,3,5)$ و $C(6,2,3)$ و $D(3,7,2)$ را حساب کنید؟

(ژئوفیزیک- آزاد ۸۰)

1) $30$ 2) $10$ 3) $20$ 4) $40$

۱۹- اندازه انحنای مارپیچ $z = \frac{1}{3}t^3$ و $y = \frac{1}{2}t^2$ و $x = t$ در نقطه $A(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ کدام است؟ (ریاضی- ۸۸)

1) $\frac{\sqrt{2}}{9}$　2) $\frac{\sqrt{2}}{3}$　3) $\frac{1}{3}$　4) $\sqrt{2}$

**۲۰- معادله صفحه عمود بر منحنی $z=\cos 2t$ و $y=\sin t$ و $x=\sin t$ در $P(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)$ کدام است؟**

**(صنایع- ۸۵)**

1) $\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-4z=2$　2) $\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+4z=2$

3) $-\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+4z=2$　4) $-\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-4z=2$

**۲۱- کدام معادله معرف یک رویه دوّار است؟** **(صنایع- ۸۷)**

1) $z=2y^2+y$　2) $\frac{x^3}{4}+\frac{y^2}{5}=1$

3) $x^2+x^3-2y^2+y=0$　4) $z=2(x^2+y^2)^2+\sqrt{x^2+y^2}$

**۲۲- انحنای منحنی $y=\frac{1}{6}x^3$ در نقطه $x=1$ کدام است؟** **(صنایع- ۸۶)**

1) $\frac{5}{8}$　2) $8$　3) $\frac{8}{5\sqrt{5}}$　4) $\frac{5\sqrt{5}}{8}$

**۲۳- بردار یکّه قائم اصلی یعنی $\vec{N}(t)$ برای مارپیچ $\vec{R}(t)=(\cos t)\vec{i}+(\sin t)\vec{j}+t\vec{k}$ کدام است؟(مکانیک- ۸۶)**

1) $(-\cos t)i+(\sin t)j$　2) $(-\cos t)i+(-\sin t)j$

3) $(\cos t)i+(-\sin t)j$　4) $(\cos t)i+(\sin t)j$

**۲۴- انحنای منحنی $z=\frac{1}{2}t$ و $y=2\sin 3t$ و $x=2\cos 3t$.** **(ژئوفیزیک- ۸۸)**

1) نزولی است.　2) صعودی است.　3) ثابت است.　4) روی بعضی بازه‌ها صعودی و روی بعضی نزولی است.

**۲۵- منحنی‌های میدان برداری $F=xzi+2x^2zj+x^2k$ که در هر نقطه $(x,y,z)$ بر بردار میدان آن نقطه مماس است، دارای کدام معادلات‌اند؟** **(مکانیک- ۸۷)**

1) $\begin{cases} y=x^2+c_1 \\ y^2=z^2+c_2 \end{cases}$　2) $\begin{cases} y^2=x^2+c_1 \\ y=z^2+c_2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = x^2 + c_1 \\ y = z^2 + c_2 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y^2 = x^2 + c_1 \\ y^2 = z^2 + c_2 \end{cases}$

**۲۶- اگر $r(t) = \left(t, \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}, t^2\right)$ نمایش پارامتری منحنی c باشد، به ازای چه مقدار مثبت b، طول منحنی c از $t = 0$ تا $t = b$ برابر ۳۰ واحد است؟** (عمران- ۸۲)

1) $b = 3$ 2) $b = 4$ 3) $b = 5$ 4) $b = 6$

**۲۷- منحنی $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$:** (معماری کشتی- ۷۹)

1) در هر نقطه دارای انحنای ثابت $\frac{1}{2}$ است.
2) در هر نقطه دارای انحنای ثابت 1 است.
3) در هر نقطه دارای انحنای ثابت $\sqrt{2}$ است.
4) دارای انحنای ثابت صفر است.

**۲۸- محل تقاطع خط $\frac{z+2}{4} = \frac{y-3}{3} = \frac{x-4}{-6}$ با رویه $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{81} + \frac{z^2}{9} = 1$ عبارتند از:** (نساجی- ۷۹)

1) $(4,3,-2)$ و $(-2,6,2)$
2) $(-6,3,4)$ و $(4,3,-2)$
3) $(-2,6,2)$ و $(-6,3,4)$
4) $(2,-6,-2)$ و $(4,1,1)$

**۲۹- انحنای بیضی به معادله $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ در نقطه $(3,0)$ کدام است؟** (هسته‌ای- ۸۰)

1) $\frac{2}{9}$ 2) $\frac{3}{16}$ 3) $\frac{4}{9}$ 4) $\frac{3}{4}$

**۳۰- اگر بردار سرعت حرکت ذره‌ای به شکل زیر باشد با فرض این که $\theta$ زاویه بین بردار سرعت و شتاب باشد، در لحظه $t = 0$ کدام مورد درست است؟ $v(t) = e^t\vec{i} + (e^t \sin t)\vec{j} + (e^t \cos t)\vec{k}$** (فرآوری- ۸۲)

1) $\theta = \frac{\pi}{6}$ 2) $\theta = \frac{\pi}{3}$ 3) $\cos\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}$ 4) $\cos\theta = \sqrt{\frac{1}{3}}$

**۳۱- نمایش هندسی معادله $4x^2 - y^2 + 2y - 1 = 0$ کدام است؟** (صنایع- ۸۲)

1) بیضی 2) هذلولی 3) یک نقطه 4) دو خط راست

**۳۲- اگر $f(t)=(t,t^2,t^3)$ و $g(t)=(1,1,t)$، مقدار $\frac{d}{dt}(f\times g)(t)$ در $t=0$ کدام بردار است؟** (ریاضی- ۷۵)

1) $j-k$ 2) $K$ 3) $i+j$ 4) $i+j+k$

**۳۳- کدام تابع در نقطه $(0,0)$ می‌تواند با تعریف مجدد (در صورت لزوم) به تابع پیوسته‌ای در آن نقطه تبدیل شود؟** (صنایع- ۸۶)

1) $\frac{2xy}{x^2+y^2}$ 2) $\frac{x^2}{x^2+y^2}$ 3) $\frac{x^2y}{x^4+y^2}$ 4) $\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

**۳۴- برای تابع $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin^2(x-y)}{|x|+|y|} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ مقدار $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ چقدر است؟** (ژئوفیزیک- ۸۸)

1) $-1$ 2) $0$ 3) $1$ 4) موجود نیست.

**۳۵- دمای $T$ نقطه $(x,y,z)$ در یک گوی فلزی از رابطه $T(x,y,z)=\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ به دست می‌آید. $T$ در نقطه $(1,2,2)$ برابر ۱۲۰ است. نرخ تغییر دما در نقطه $P(2,-1,2)$ و در جهت $\overrightarrow{PQ}$، $Q(3,-2,2)$ کدام است؟**

(صنایع- ۸۸)

1) $40$ 2) $-20\sqrt{2}$ 3) $40\sqrt{3}$ 4) $\frac{40\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

**۳۶- فرض کنید در یک همسایگی از نقطه $(x,y)=(1,1)$ توابع $z=z(x,y)$ و $w(x)$ در معادله‌های $2x^2+y^2+z^2-zw=0$ و $x^2+y^2+2z^2+zw-8=0$ صدق کنند، $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial w}{\partial x}$ در نقطه مذکور کدام‌اند؟** (صنایع- ۸۵)

1) $\pm1$ و $\pm2$ 2) $-1$ و $\pm2$ 3) $\pm1$ و $\mp6$ 4) $1$ و $\pm2$

**۳۷- اگر $u=\mathrm{Arctg}\frac{x^2-xy}{x+y}$ باشد، حاصل $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}$ کدام است؟** (صنایع- ۸۷)

1) $-\frac{1}{2}\sin 2u$ 2) $\frac{1}{2}\sin 2u$

3) $\frac{1}{2}\cos u$ 4) $\frac{1}{2}\mathrm{tg}2u$

**۳۸- اگر $a$ و $b$ اعداد ثابت باشند، ماکزیمم تابع $f(x,y)=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$ با شرط (قید) $x^2+y^2=1$ برابر با چیست؟**

**(عمران- ۸۵)**

1) $\frac{a^2+b^2}{ab}$ 2) $\frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$ 3) $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$ 4) $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2ab}$

**۳۹- کدام حکم در مورد صفحات مماس بر سطح $z = 3x^4 + xy^3$ که در نقاط $M_1(0,1,0)$ و $M_2(0,-1,0)$ رسم می‌شوند برقرار است؟** **(ژئوفیزیک- ۸۸)**

1) دو صفحه بر هم عمودند. 2) دو صفحه موازیند.

3) دو صفحه بر هم منطبق‌اند. 4) دو صفحه با هم زاویه 30 درجه می‌سازند.

**۴۰- تابع $f$ با ضابطه $f(x,y) = x^3 + x^2y + y^2 - 1$ در نقطه $(-1,1)$ در امتداد کدام بردار نزولی است؟**

**(مکانیک- ۸۵)**

1) $-\vec{i}+\vec{j}$ 2) $\vec{i}-\vec{j}$ 3) $-2\vec{i}+\vec{j}$ 4) $4\vec{i}-\vec{j}$

**۴۱- اگر $u = x+y+z$ و $v = x^2+y^2+z^2$ و $w = u^2 - v$ باشد، حاصل $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$ کدام است؟**

**(MBA- ۸۸)**

1) صفر 2) 1 3) $xyz$ 4) $(x-y)(y-z)(z-x)$

**۴۲- ماکسیمم و می‌نیمم مطلق تابع $f(x,y) = x^2 - y^2$ در ناحیه $x^2 + y^2 \le 4$ کدام است؟** **(صنایع- ۸۷)**

1) $-4, 0$ 2) $-2, 2$ 3) $0, 4$ 4) $-4, 4$

**۴۳- با فرض $w = f(x,y)$ که در آن $x = u+v$ و $y = u-v$ است، $\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}$ برابر چیست؟ (مشتقات جزئی دوم پیوسته می‌باشند)** **(عمران- ۸۷)**

1) $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ 2) $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$

3) $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ 4) $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$

**۴۴- با کمک دیفرانسیل مقدار تقریبی عدد $(2/01)^{3/03}$ چقدر است؟ $(Ln2 \approx 0/7)$** **(ژئوفیزیک- ۸۷)**

1) 8 / 284 2) 8 / 288 3) 8 / 291 4) 8 / 293

۴۵- اگر $f(x,y)=\operatorname{Ln}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ و $\vec{n}$ بردار قائم بر نیمکره $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$ باشد، مشتق سویی تابع $f$ در امتداد بردار $n$ (و یک نقطه دلخواه روی کره) چقدر است؟ (MBA- ۸۷)

1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{1}{4}$ 3) 2 4) 4

۴۶- صفحه قائم بر منحنی $(C)$ فصل مشترک استوانه $x^2+y^2=5$ و رویه $z=xy$ در نقطه $(2,-1,-2)$، محور $x$ها را با کدام طول قطع می‌کند؟ (MBA- ۸۶)

1) 5 2) 3 3) -4 4) -6

۴۷- حاصل $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\dfrac{x^2y-y+2x-2}{x-1}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک- ۸۵)

1) 4 2) 2 3) 1 4) صفر

۴۸- طول نقطه ماکسیمم تابع $z=x^3+y^3-63(x+y)+12xy$ کدام است؟ (MBA- ۸۷)

1) -7 2) -3 3) 3 4) 7

۴۹- مشتق سویی تابع دیفرانسیل‌پذیر $f(x,y)$ در نقطه $(1,2)$ و در جهتی به طرف نقطه $(2,2)$ برابر ۲ و در نقطه $(1,2)$ و در جهتی به طرف $(1,1)$ برابر $-2$ است. مشتق سویی $f$ در نقطه $(1,2)$ و در جهتی به طرف $(4,6)$ برابر است با: (ریاضی- ۸۵)

1) $-\frac{14}{15}$ 2) $-\frac{12}{15}$ 3) $\frac{12}{5}$ 4) $\frac{14}{5}$

۵۰- برای میدان مرکزی $\vec{a}=f(r)\dfrac{\vec{r}}{r}$ که در آن $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ است، مقدار $\operatorname{div}\vec{a}$ برابر کدام است؟

(ژئوفیزیک- ۸۷)

1) $f(r)+\frac{1}{r}f'(r)$ 2) $f(r)+\frac{2}{r}f'(r)$ 3) $\frac{2}{r}f(r)+f'(r)$ 4) $\frac{1}{r}f(r)+f'(r)$

۵۱- در نقطه $(e,1)$ در چه سویی تابع $f(x,y)=x^y$ بیش‌ترین افزایش را دارد؟ (آمار- ۸۵)

1) $(-e,1)$ 2) $(1,e)$ 3) $(e,-1)$ 4) $(e,1)$

۵۲- در تابع دو متغیری $z=\operatorname{Ln}\dfrac{x^4+y^4}{x+y}$ حاصل $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$ کدام است؟ (MBA- ۸۸)

1) $z-3$ 2) $3z$ 3) 3 4) صفر

۵۳- معادله خط مماس بر منحنی فصل مشترک دو رویه $x^2+2y^2+3z^2=6$ و $xyz=1$ در نقطه $(1,1,1)$ کدام است؟ (مکانیک- ۸۷)

1) $\begin{cases} y=z \\ 2y+x=3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x=z \\ y+2x=3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x=z \\ 2y+x=3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} y=z \\ y+2x=3 \end{cases}$

۵۴- فرض کنید دستگاه $f_1(x_1,x_2,x_3,x_4)=0$ و $f_3(x_1,x_2,x_3,x_4)=0$ نسبت به متغیرهای $x_1$ و $x_2$ قابل حل باشد و $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ مقدار $\dfrac{\partial x_1}{\partial x_3}$ کدام است؟ (صنایع- ۸۵)

1) $-1$
2) $\dfrac{-1}{2}$
3) $\dfrac{1}{2}$
4) $1$

۵۵- در تابع دو متغیری $z=\dfrac{x-2y}{xy}$ دیفرانسیل مرتبه دوم $z$ در نقطه $(1,2)$ به صورت $[dx \quad dy][A]\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$ نشان داده شده است. دترمینان ماتریس متقارن $A$ کدام است؟ (MBA- ۸۸)

1) -1
2) -2
3) 1
4) 2

۵۶- اگر $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^4+y^4}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ مشتق سویی $f$ در مبدأ در کدام جهت موجود است؟(ریاضی- ۸۶)

1) $\vec{i}$
2) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$
3) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$
4) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{i}+\dfrac{1}{2}\vec{j}$

۵۷- اگر $z=y^2 tgx$ و $x=t^2uv$ و $y=u+tv^2$ ، $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ به ازای $v=0$ و $u=1$ و $t=2$ کدام است؟(صنایع- ۸۸)

1) $0$
2) 1
3) 2
4) $\dfrac{1}{2}$

۵۸- در کدام مجموعه تابع $F(x,y,z)=(2xy-y, x^2+y+2z^2, xy+y)$ معکوس دارد؟ (صنایع- ۸۸)

1) $\{(x,y,z): x>0,\ y=z=0\}$
2) $\{(x,y,z): x>0\ ,\ y>0\ ,\ z=0\}$
3) $\{(x,y,z): x\geq 0\ ,\ y=0\ ,\ z>0\}$
4) $\{(x,y,z): x>0, y>0, z>0\}$

**۵۹- تابع** $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y(x^2+y^2)}{y^2+(x^2+y^2)} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **در کدام گزاره صدق می‌کند؟** **(صنایع- ۸۸)**

1) در نقطه $(0,0)$ حد ندارد.

2) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=2$

3) حد $f$ در مسیرهای مستقیم منتهی به $(0,0)$ , $\dfrac{1}{2}$ است.

4) حد $f$ در مسیری دایره‌ای شکل که به $(0,0)$ منتهی می‌شود صفر است.

**۶۰- حوضی به شکل معکب مستطیل یا حجم ۲۵۶ واحد مکعب مورد نیاز است، ارتفاع حوض چند واحد طول انتخاب شود تا هزینه عایق‌بندی آن می‌نیمم شود؟** **(MBA- ۸۷)**

1) 2    2) 4    3) 6    4) 8

**۶۱- اگر** $f(x,y,z)=xy+yz+xz$ **و** $\vec{w}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ **و** $\vec{v}=2\vec{i}-\vec{j}$، $D_{\vec{v}}(D_{\vec{w}}f)$ **کدام است؟**

**(ژئوفیزیک- ۸۸)**

1) $\dfrac{1}{\sqrt{15}}$    2) $\dfrac{2}{\sqrt{15}}$    3) $\dfrac{3}{\sqrt{15}}$    4) $\dfrac{4}{\sqrt{15}}$

**۶۲- اگر** $u=x++y+z$ , $uv=y+z$ **و** $uvw=z$، **آن‌گاه** $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ **کدام است؟** **(MBA- ۸۷)**

1) $\dfrac{u}{v}$    2) $2uv$    3) $uv^2$    4) $u^2v$

**۶۳- تابع** $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **مفروض است، کدام یک از موارد زیر درست است؟(ریاضی- ۸۵)**

1) $F$ در مبدأ پیوسته است.

2) $F$ در مبدأ دیفرانسیل‌پذیر است.

3) مشتق سویی $f$ در مبدأ در هر جهت وجود دارد.

4) مشتق سویی $f$ در مبدأ فقط در جهت محور $x$ها وجود دارد.

**۶۴- اگر $D_x f(x,y)$ بیانگر مشتق جزئی تابع $f(x,y)$ نسبت به $x$ باشد و داشته باشیم:** **(آمار - ۸۸)**

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

**پیوستگی $f(x,y)$ و $D_x f(x,y)$ در $(0,0)$ چگونه است؟**

1) $f(x,y)$ پیوسته و $D_x f(x,y)$ ناپیوسته

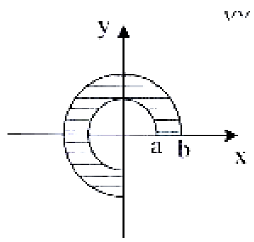
2) $f(x,y)$ ناپیوسته و $D_x f(x,y)$ پیوسته

3) هر دو ناپیوسته

4) هر دو پیوسته

**۶۵- ناحیه $D$ در شکل مقابل بخشی از صفحه‌ی $xoy$ و محدود به دو دایره به شعاع $a$ و $b$ است. اگر $\delta(x,y)=|x|+|y|$ چگالی (جرم مخصوص) هر نقطه از ناحیه جرم‌دار باشد، جرم کل ناحیه کدام است؟**

**(ریاضی - ۸۶)**




1) $\frac{3}{2}(b^2-a^2)$

2) $2(b^3-a^3)$

3) $\frac{3}{4}(a^3-b^3)$

4) $\frac{1}{6}(a^3-a^2-b^3+b^2)$

**۶۶- $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^4}dA$ که در آن $D$ ناحیه محدود به هذلولی‌های $xy=2$ و $xy=4$ و سهمی‌های $y^2=x$ و $y^2=3x$ است، کدام است؟** **(صنایع - ۸۷)**

1) $\frac{2}{3}$ 2) $\frac{4}{9}$ 3) $\frac{8}{27}$ 4) $\frac{1}{30}$

**۶۷- حجم محصور بالای صفحه $xy$ و بین سهموی $z=x^2+y^2$ و استوانه‌ای به معادله $x^2+y^2=a^2$ برابر است با:** **(مکانیک - ۸۵)**

1) $\frac{\pi}{4}a^2$ 2) $\frac{\pi}{2}a^4$ 3) $\frac{\pi}{3}a^2$ 4) $\frac{3\pi}{2}a^3$

۶۸- مقدار $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-z^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-z^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$ کدام است؟ (صنایع - ۸۶)

1) $\frac{\pi a}{2}$ 2) $\frac{\pi a^2}{4}$ 3) $\frac{\pi a^3}{4}$ 4) $\frac{\pi a^4}{8}$

۶۹- مقدار انتگرال $\int_0^1 \int_{\sin^{-1}y}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx\,dy$ کدام است؟ (ریاضی - ۸۸)

1) $\sqrt{2}-1$ 2) $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$

3) $\sqrt{2}+1$ 4) $\frac{4\sqrt{2}+1}{3}$

۷۰- چگالی هر نقطه در داخل نیم‌کره به شعاع $a$ برابر $(a-\rho)$ است که در آن $\rho$ فاصله آن نقطه تا مرکز کره است. جرم این نیم‌کره چقدر است؟ (MBA- ۸۷)

1) $\frac{\pi}{6}a^3$ 2) $\frac{\pi}{12}a^2$ 3) $\frac{\pi}{6}a^4$ 4) $\frac{\pi}{12}a^4$

۷۱- حجم محدود به سطح فضایی به معادله $x^2+y^2=9$ و صفحه به معادله $x+z=4$ و صفحه $xoy$ کدام است؟ (ژئوفیزیک - ۸۵)

1) $32\pi$ 2) $34\pi$ 3) $36\pi$ 4) $38\pi$

۷۲- مقدار انتگرال $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\,dy\,dx$ برابر با چیست؟ (عمران - ۸۵)

1) $\sqrt{2}+1$ 2) $2\sqrt{2}-1$ 3) $\sqrt{2}-1$ 4) $2\sqrt{2}-2$

۷۳- میدان $D$ ناحیه با رابطه $|x|+|y|\le 2$ و $dA$ عنصر مساحت در صفحه $xoy$ است، $\iint_D e^{x+y}dA$ کدام است؟ (ژئوفیزیک - ۸۶)

1) $4\sinh 2$ 2) $4\cosh 2$ 3) $8\sinh 2$ 4) $8\cosh 2$

۷۴- انتگرال دوگانه زیر پس از تعویض ترتیب، با کدام انتگرال مکرر برابر است؟ (ریاضی - ۸۶)

$$I=\int_{x=0}^{x=\frac{1}{2}}\int_{y=0}^{y=x} f(x,y)\,dy\,dx+\int_{x=\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\int_{y=0}^{\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$$

1) $I=\int_{y=0}^{1}\int_{x=y}^{\sqrt{1-2y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$ 2) $I=\int_{y=0}^{\frac{1}{2}}\int_{x=y}^{\sqrt{y^2-1}} f(x,y)\,dx\,dy$

3) $I=\int_{y=0}^{1}\int_{x=y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx\,dy$ 4) $I=\int_{y=0}^{\frac{1}{2}}\int_{x=y}^{\sqrt{\frac{1}{2}-y^2}} f(x,y)dx\,dy$

۷۵- مختصات مرکز ثقل سطح همگن محدود به منحنی $y=\sqrt{6x-x^2}$ و محور xها کدام است؟ (MBA- ۸۷)

1) $(2,\frac{\pi}{4})$ 2) $(2,\frac{4}{\pi})$

3) $(3,\frac{\pi}{4})$ 4) $(3,\frac{4}{\pi})$

۷۶- مقدار انتگرال $\iiint_R (x^2+y^2)dx\,dy\,dz$ که در آن R ناحیه داخل کره $x^2+y^2+z^2=4a^2$ و خارج استوانه $x^2+y^2=a^2$ می‌باشد، کدام مورد است؟ (عمران- ۸۸)

1) $\frac{11}{5}\sqrt{3}\pi a^5$ 2) $\frac{44}{15}\sqrt{3}\pi a^5$ 3) $\frac{44}{5}\sqrt{3}\pi a^5$ 4) $\frac{22}{5}\sqrt{3}\pi a^5$

۷۷- حجم محدود به کره $x^2+y^2+z^2=5$ از بالا و سهمی‌گون $x^2+y^2=4z$ از پایین برابر است با:(عمران- ۸۵)

1) $\frac{2}{3}\pi$ 2) $\frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5}-4)$

3) $\frac{2}{3}\pi\sqrt{5}$ 4) $\frac{2}{3}\pi(\sqrt{5}-4)$

۷۸- حاصل $\iiint_D zx\,dx\,dy\,dz$ وقتی D ناحیه بین صفحاتی به معادله $x=0$ و $y=0$ و $z=4$ و پارابولوئید (سهموی) $z=x^2+y^2$ و $x,y\geq 0$ باشد، کدام است؟ (ژئوفیزیک- ۸۵)

1) $\frac{96}{15}$ 2) $\frac{116}{15}$ 3) $\frac{128}{15}$ 4) $\frac{158}{15}$

۷۹- اگر D ناحیه محصور به خط $x+y=1$ و دو محور مختصات باشد، مقدار $\iint tg(\frac{y}{x+y})dx\,dy$ کدام است؟ (آمار- ۸۸)

1) $-\frac{1}{2}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{-1}{2}\text{Ln}\cos 1$ 4) $\frac{1}{2}\text{Ln}\cos 1$

۸۰- فاصله مرکز ثقل جسم همگن محدود به رویه $z=x^2+y^2$ و صفحه $z=4$ از صفحه xoy چقدر است؟

(MBA- ۸۶)

1) $\frac{11}{4}$ 2) $\frac{8}{3}$ 3) $\frac{7}{3}$ 4) $\frac{5}{2}$

۸۱- مقدار انتگرال $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le a^2}(2+x+\sin z)dx\,dy\,dz$ برابر با چیست؟ (عمران- ۸۶)

1) $\pi a^3$ 2) $2\pi a^3$ 3) $\frac{4}{3}\pi a^3$ 4) $\frac{8}{3}\pi a^3$

۸۲- حجم جسمی که در ناحیه اول از هشت ناحیه فضا قرار گرفته و به رویه‌های $x^2+y^2=4$ و $z^2=x^2+y^2$ محدود است، کدام است؟ (آمار- ۸۷)

1) $\frac{\pi}{2}$ 2) $\frac{2\pi}{3}$ 3) $\frac{3\pi}{2}$ 4) $\frac{4\pi}{3}$

۸۳- اگر $f(x)=\int_1^x e^{t^2}dt$ باشد، $\int_0^1 f(x)dx$ کدام است؟ (MBA- ۸۵)

1) $1+e$ 2) $1-e$ 3) $\frac{1}{2}(1-e)$ 4) $\frac{1}{2}(1+e)$

۸۴- مقدار انتگرال $\int_0^2\int_0^{4-x^2}\frac{xe^{2y}}{4-y}dy\,dx$ برابر است با: (عمران- ۸۷)

1) $\frac{1}{2}(e^4-1)$ 2) $\frac{1}{4}(1-e^8)$ 3) $\frac{1}{2}(1-e^8)$ 4) $\frac{1}{4}(e^8-1)$

۸۵- اگر S ناحیه بسته محدود به صفحات مختصات و صفحه به معادله $x+y+z=1$ باشد، مقدار $\iiint\limits_S z^2dx\,dy\,dz$ کدام است؟ (آمار- ۸۵)

1) $\frac{1}{30}$ 2) $\frac{1}{25}$ 3) $\frac{1}{60}$ 4) $\frac{1}{20}$

۸۶- حجم محدود به رویه $z=\frac{1}{x^2+y^2+1}$ و صفحه $z=0$ که در داخل استوانه $x^2+y^2=1$ قرار می‌گیرد، کدام است؟ (MBA- ۸۸)

1) $\pi$ 2) $\frac{\pi}{2}\text{Ln}2$ 3) $\pi\text{Ln}2$ 4) $\frac{\pi}{2}-\text{Ln}2$

۸۷- هرگاه C پاره‌خطی از نقطه $(0,1,-1)$ تا $(1,2,1)$ بوده، آن‌گاه $\int_C ydx+zdy-xdz$ برابر است با: (عمران- ۸۸)

1) $\frac{1}{4}$ 2) $3$ 3) $\frac{2}{3}$ 4) $\frac{1}{2}$

**۸۸- اگر $C$ قسمتی از سهمی $y = x^2$ از مبدأ تا نقطه $A(2,4)$ و پاره‌خط $A$ به مبدأ باشد، حاصل انتگرال $\oint_C 2ydx + 4xdy$ برابر است با:** **(مکانیک- ۸۵)**

1) $\frac{-8}{3}$ 2) $\frac{-4}{3}$ 3) $\frac{4}{3}$ 4) $\frac{8}{3}$

**۸۹- مساحت قسمتی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ که داخل استوانه به معادله $x^2 + y^2 = 3y$ قرار می‌گیرد، کدام است؟** **(MBA- ۸۷)**

1) $9(\pi - 1)$ 2) $9(\pi - 2)$ 3) $12(\pi - 1)$ 4) $18(\pi - 2)$

**۹۰- اگر تابع $\varphi(x)$ دارای مشتق مرتبه دوم بوده و $u = \varphi(x^2 + y^2 + z^2)$، آن‌گاه $\varphi'(t)$ را طوری تعیین کنید که $\operatorname{div}(\nabla u) = 0$.** **(مکانیک- ۸۵)**

1) $\varphi'(t) = ce^{-\frac{3}{2t}}$ و $c \in \mathbb{R}$ ثابت دلخواه

2) $\varphi'(t) = ct^{\frac{3}{2}}$ و $c \in \mathbb{R}$ ثابت دلخواه

3) $\varphi'(t) = ce^{\frac{3}{2t}}$ و $c \in \mathbb{R}$ ثابت دلخواه

4) $\varphi'(t) = ct^{\frac{-3}{2}}$ و $c \in \mathbb{R}$ ثابت دلخواه

**۹۱- مقدار انتگرال $I = \iint_S \operatorname{curl} F \cdot \vec{n}\, dS$ را که در آن $S$ قسمتی از کره $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 8$ است که در بالای صفحه $xy$ قرار دارد و $n$ بردار یکّه قائم یکّه خارجی $S$ است و $f(x,y,z) = (y^2 \cos xz, x^3 e^{yz}, -e^{-xyz})$ برابر با چیست؟** **(عمران- ۸۶)**

1) $0$ 2) $3\pi$ 3) $6\pi$ 4) $12\pi$

**۹۲- فرض کنید $D$ ناحیه $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$ و $\vec{F} = \alpha x^3 \vec{i} + \beta y^3 \vec{j} + \gamma z^3 \vec{k}$ 1 باشند، به طوری که $\alpha a^2 = \beta b^2 = \gamma c^2 = 1$ در این صورت اگر شار برونسوی میدان $\vec{F}$ از مرز ناحیه $D$ برابر $\varphi$ باشد، آن‌گاه** **(ریاضی- ۸۸)**

1) به ازای یک مقدار مناسب $k$ که مستقل از $a$، $b$، $c$، $\alpha$، $\beta$ و $\gamma$ است داریم: $\varphi = k\frac{abc}{\alpha\beta\gamma}$

2) به ازای یک مقدار مناسب $k$ که مستقل از $a$، $b$، $c$، $\alpha$، $\beta$ و $\gamma$ است داریم: $\varphi = k\pi$

3) به ازای یک مقدار مناسب $k$ که مستقل از $\alpha$، $\beta$ و $\gamma$ است داریم: $\varphi = k\alpha\beta\gamma$

4) به ازای یک مقدار مناسب $k$ که مستقل از $a$، $b$ و $c$ است داریم: $\varphi = k\,abc$

**۹۳- حاصل $\int_C (x+y+z)dS$ که در آن $c$ محل برخورد صفحه $y = x$ و کره $x^2+y^2+z^2=4$ در یک هشتم اول با جهت از نقطه $(0, 2, 0)$ به $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ می‌باشد، کدام است؟** **(ریاضی- ۸۶)**

1) $4+4\sqrt{2}$ 2) $4\sqrt{2}$ 3) $4+2\sqrt{2}$ 4) $2\sqrt{2}+2$

**۹۴- مقدار انتگرال خط $\int_\gamma 3ydx + xdy$ که در آن $\gamma$ نیم‌دایره $x = \cos t$ و $y = \sin t$ و $0 \le t \le \pi$ کدام است؟** **(صنایع- ۸۷)**

1) $0$ 2) $\pi$ 3) $-\pi$ 4) $\frac{\pi}{2}$

**۹۵- حاصل $\oint_C 2xyz^3dx + x^2z^3dy + 3x^2yz^2dz$ که در آن $C$ فصل مشترک استوانه $x^2+y^2=4$ با صفحه به معادله $x+2z=0$ باشد، برابر کدام است؟** **(MBA- ۸۶)**

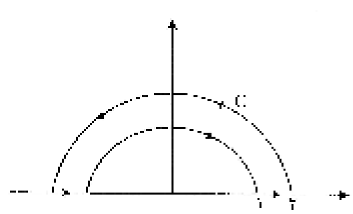
1) صفر 2) $\frac{5\pi}{2}$ 3) $4$ 4) $8$

**۹۶- مساحت سطح فضایی $z = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ وقتی $1 < y < 2$ و $0 < x < 1$ کدام است؟** **(ژئوفیزیک- ۸۵)**

1) $\frac{3}{2}(2\sqrt{2}-1)$ 2) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$

3) $\frac{3}{2}(\sqrt{2}-1)$ 4) $\frac{2}{3}(\sqrt{2}-1)$

**۹۷- فرض کنید $C$ منحنی بسته متشکل از دو نیم‌دایره به شعاع‌های ۱ و ۲ و دو پاره‌خط مطابق شکل زیر باشد، $I = \int_C y^3dx - x^3dy$ کدام است؟** **(مکانیک- ۸۸)**




1) $\frac{-45}{4}\pi$

2) $-11\pi$

3) $\frac{-35}{3}\pi$

4) $-12\pi$

۹۸- مقدار $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ که در آن $F(x,y,z)=(xz^2,yx^2,zy^2)$ و $S$ سطح بسته محصور به نیم‌کره $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ و صفحه $z=0$ است (شار برونسوی $F$ روی $S$) برابر است با: (عمران- ۸۷)

1) $\frac{2\pi}{3}a^5$ 2) $\frac{2\pi}{5}a^5$ 3) $\frac{2\pi}{3}a^3$ 4) $\frac{2\pi}{5}a^3$

۹۹- کار انجام شده توسط میدان نیروی $F(x,y,z)=(x,y,z)$ روی مارپیچ $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ و $R(t)=(\cos t)\vec{i}+(\sin t)\vec{j}+t\vec{k}$ برابر با چیست؟ (عمران- ۸۶)

1) $\frac{\pi}{2}-1$ 2) $2\pi-1$ 3) $\pi-\frac{1}{2}$ 4) $\frac{\pi^2}{8}$

۱۰۰- اگر $S$ قسمتی از مخروط $x^2=y^2+z^2$ باشد که بین صفحات $x=0$ و $x=1$ واقع است، آن‌گاه $\iint_S x^2ds$ برابر است با: (ریاضی- ۸۵)

1) $\pi\sqrt{2}$ 2) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ 3) $\pi$ 4) $2\pi$

۱۰۱- اگر $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$، آن‌گاه $\operatorname{div}(\frac{\vec{r}}{r})$ کدام است؟ (MBA- ۸۷)

1) $-\frac{1}{r^2}$ 2) $-\frac{2}{r^2}$ 3) صفر 4) $\frac{2}{r}$

۱۰۲- کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}=(x+2)\vec{i}+(x-z)\vec{j}+(y-z)\vec{k}$ بر مسیری (به صورت اجتماع پاره‌خط‌ها) از نقطه $A(2,0,0)$ به $B(0,3,0)$ و سپس به نقطه $C(0,0,6)$ و در ادامه به نقطه $A$ با استفاده از قضیه استوکس کدام است؟ (MBA- ۸۷)

1) 9 2) 15 3) 12 4) 21

۱۰۳- حاصل $\iint_S (x+y^2z)dx\,dy+(xz^2+y)dy\,dz+(x^2y-1)dx\,dz$ که در آن $S$ سطح نیم‌کره به معادله $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ و صفحه $z=0$ می‌باشد، کدام است؟ (MBA- ۸۸)

1) $\frac{32\pi}{3}$ 2) $\frac{64\pi}{3}$ 3) $\frac{32\pi}{5}$ 4) $\frac{64\pi}{5}$

۱۰۴- فرض کنید $\vec{F}(x,y,z)=(e^x\cos y+ayz)\vec{i}+(axz+be^x\sin y)\vec{j}+(cxy+az)\vec{k}$، به ازای چه مقادیری از a، b و c مقدار انتگرال $\int \vec{F}\cdot d\vec{R}$ مستقل از مسیر است؟ (مکانیک – ۸۷)

1) $a=c=b=-1$

2) $a=b=c=1$

3) $c=1$ و $a=b=1$

4) $b=1$ و $a=c=-1$

۱۰۵- مرکز جرم سیمی با چگالی $\delta=2(1-y)$ و به شکل نیم‌دایره که در نقاط $(1,0)$ و $(-1,0)$ به محور xها بسته شده است و در نیم‌صفحه بالایی قرار دارد، کدام است؟ (صنایع – ۸۶)

1) $(0,\frac{1}{2})$ 2) $(0,\frac{4+\pi}{2(\pi+2)})$ 3) $(0,\frac{4-\pi}{2(\pi+2)})$ 4) $(0,\frac{4-\pi}{2(\pi-2)})$

۱۰۶- مقدار انتگرال $I=\oint_C (x\sin y^2-y^2)dx+(x^2y\cos y^2+3x)dy$ که در آن C مرز ذوزنقه به رئوس $(0,-2)$ و $(1,-1)$ و $(1,1)$ و $(0,2)$ می‌باشد و در جهت مثلثاتی (خلاف عقربه‌های ساعت) پیموده شده است، برابر با چیست؟ (عمران – ۸۵)

1) 5 2) 6 3) 8 4) 9

۱۰۷- مساحت قسمتی از مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ که بین استوانه‌های $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=4$ قرار دارد، برابر کدام یک از مقادیر است؟ (MBA – ۸۸)

1) $3\sqrt{2}\pi$ 2) $2\sqrt{2}\pi$ 3) $\sqrt{2}\pi$ 4) $4\sqrt{2}\pi$

۱۰۸- فرض کنید $\vec{F}=ax\vec{i}+by\vec{j}+cz\vec{k}$ و s رویه بیضی‌گون $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ و $\vec{n}$ بردار یکّه قائم بر بیضی‌گون s رو به خارج باشد، مقدار انتگرال رویه‌ای $\iint_S (\vec{F}\cdot\vec{n})d\delta$ کدام است؟ $(a,b,c>0)$ (مکانیک – ۸۶)

1) $\pi a^2b^2c^2$ 2) $\frac{4}{3}\pi a^2b^2c^2$ 3) $\pi abc(a+b+c)$ 4) $\frac{4}{3}\pi abc(a+b+c)$

۱۰۹- مقدار $\int_c x(x-y)dx-(\frac{1}{2}x^2-y)dy$ که در آن $C$ نیم‌دایره $y=\sqrt{25-x^2}$ از نقطه $(0,5)$ تا نقطه $(-3,4)$ است، کدام است؟ (ژئوفیزیک- ۸۸)

1) $32$ 2) $-\frac{63}{2}$ 3) $\frac{63}{2}$ 4) $32$

۱۱۰- مقدار انتگرال $\int_c (e^x-yx^2)dx+(xy^2-e^y)dy$ که در آن $C$ دایره $x^2+y^2-2y=0$ می‌باشد که یک بار در جهت مثلثاتی پیموده شده است، برابر چیست؟ (عمران- ۸۷)

1) $\frac{\pi}{4}$ 2) $\frac{\pi}{2}$ 3) $\frac{\pi}{6}$ 4) $\frac{3\pi}{2}$

۱۱۱- اگر $\vec{T}$ بردار یکّه مماس بر دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{2}$ باشد، $\oint_C \vec{T}.d\vec{R}$ کدام است؟ (ریاضی- ۸۷)

1) $\frac{\pi}{4}$ 2) $0$ 3) $\pi$ 4) $2\pi$

۱۱۲- بیش‌ترین سرعت نقطه $p$ بر روی مسیر با تابع برداری $\vec{r}=(4\cos^3 t)\vec{i}+(4\sin^3 t)\vec{j}$ کدام است؟

1) $6$ 2) $4\sqrt{3}$ 3) $12$ 4) $4\sqrt{2}$

۱۱۳- تابع با ضابطه‌ی $f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x-1)y}{x^2+y^2-2x+1} & , (x,y)=(0,0)\\ a & , (x,y)=(0,0)\end{cases}$ به ازای کدام مقدار $a$ در نقطه‌ی $(1,0)$ پیوسته است؟

1) $1$ 2) $2$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) همواره ناپیوسته

۱۱۴- مشتق تابع $u=x^2z+\frac{y^2}{z}$ در نقطه‌ی $(3,2,1)$ در امتداد بردار $(2,-1,2)$ کدام است؟

1) $5$ 2) $5$ 3) $4$ 4) $3$

۱۱۵- صفحه مماس بر رویه $3x-y+xyz+1 0 0$ در نقطه‌ی $(1,2,-1)$ محور $z$ ها را با کدام ارتفاع قطع می‌کند؟

1) $-\frac{3}{2}$ 2) $\frac{3}{2}$ 3) $-\frac{5}{2}$ 4) $\frac{5}{2}$

۱۱۶- مقدار انحناء منحنی تابع $f(x) = xe^{-x}$ در مبدأ مختصات کدام است؟

1 (1 $\qquad$ $\frac{1}{2}$ (2 $\qquad$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3 $\qquad$ $\sqrt{2}$ (4

۱۱۷- اگر $A = x^2y\vec{i} - 2y^2z\vec{j} + xy^2z^2\vec{k}$ اندازه‌ی بردار $\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}$ در نقطه‌ی $(2,1,-2)$ کدام است؟

8 (1 $\qquad$ 16 (2 $\qquad$ $8\sqrt{5}$ (3 $\qquad$ $16\sqrt{5}$ (4

۱۱۸- اگر $F = yz^2\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ بردار $\operatorname{curl} F$ در نقطه‌ی $(5,1,-1)$ کدام است؟

$3\vec{i} - 2\vec{k}$ (1 $\qquad$ $-3\vec{j} - 2\vec{k}$ (2 $\qquad$ $2\vec{i} - 3\vec{j}$ (3 $\qquad$ $2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ (4

۱۱۹- نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$ چگونه‌اند؟

1) زینی- زینی $\qquad$ 2) می‌نیمم- زینی $\qquad$ 3) می‌نیمم- ماکسیمم $\qquad$ 4) ماکسیمم- زینی

۱۲۰- اگر $\begin{cases} uv + x^2 + xy = 0 \\ u^2 + v^2 - xy - y^2 = 0 \end{cases}$ که در آن u و v توابعی از دو مسیر مستقل x و y باشند مقدار $\frac{\partial u}{\partial x}$ به ازای $x = 2$ و $y = -5$ و $u = \sqrt{3}$ کدام است؟

$\sqrt{3}$ (1 $\qquad$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2 $\qquad$ $-\sqrt{3}$ (3 $\qquad$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (4

۱۲۱- حجم محدود به صفحه $z = 0$ و استوانه $x^2 + y^2 = a^2$ و رویه $az = a^2 - x^2$، چند برابر $\pi a^3$ است؟

$\frac{3}{4}$ (1 $\qquad$ $\frac{3}{2}$ (2 $\qquad$ $\frac{5}{2}$ (3 $\qquad$ $\frac{5}{4}$ (4

۱۲۲- حاصل $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy$ که در آن D ناحیه محدود به دو دایره به مرکزهای مبدأ مختصات و شعاع‌های ۲ و ۳ واحد باشد، برابر کدام است؟

$\frac{22\pi}{3}$ (1 $\qquad$ $\frac{32\pi}{3}$ (2 $\qquad$ $\frac{38\pi}{3}$ (3 $\qquad$ $\frac{28\pi}{3}$ (4

۱۲۳- حاصل $\int_C y^2dx + x^2dy$ بر روی اضلاع مثلثی محصور به خطوط $x = 0$ و $y = 0$ و $x + y = 1$ کدام است؟

1) صفر $\qquad$ $\frac{1}{2}$ (2 $\qquad$ $\frac{1}{3}$ (3 $\qquad$ $\frac{2}{3}$ (4

۱۲۴- اگر $F = yz\vec{i} + xz\vec{j} + x\vec{k}$ حاصل $\int F \cdot dR$ در امتداد منحنی $\begin{cases} y = x^2 \\ z = x^3 \end{cases}$ از نقطه $x = 0$ تا $x = 1$ کدام است؟

1) $\frac{3}{2}$ 2) $\frac{3}{4}$ 3) $\frac{5}{4}$ 4) $\frac{5}{2}$

۱۲۵- مقدار $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{1389}y}{(x^2+y^2)^5}$ برابر است با:

1) $0$ 2) $1$ 3) $2$ 4) وجود ندارد.

۱۲۶- مقدار $\int_{-1}^{1}\int_{y=|x|}^{y=1} e^{y^2}\,dy\,dx$ برابر است با:

1) $e - \frac{1}{e}$ 2) $e - 1$ 3) $e + \frac{1}{e}$ 4) $e + 1$

۱۲۷- مکان هندسی نقاطی که از نقطه‌ی $(0,0,c)$ و صفحه‌ی $z = -c$ به یک فاصله‌اند عبارت است از:

1) $x^2 - y^2 + 2z^2 = 2c^2 + 2cz$ 2) $x^2 + y^2 + 2z^2 = c^2 + 4cz$

3) $x^2 - y^2 = 2cz$ 4) $x^2 + y^2 = 4cz$

۱۲۸- فرض کنید $C$ دایره با معادله‌ی $(x-1)^2 + y^2 = 25$ باشد که در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت در نظر گرفته شده است، مقدار انتگرال $\oint_C (2xye^{x^2} + e^{\cos x})dx + (e^{y^2} + e^{x^2} + x)dy$ است، کدام است؟

1) $0$ 2) $\pi$ 3) $12\pi$ 4) $25\pi$

۱۲۹- مشتق جهتی $f(x,y,z) = x^2 + 2y^5\sin(y^5)\cos(y^5) + z^3$ در نقطه‌ی $(-1,0,2)$ در جهت بردار $(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}})$ کدام است؟

1) $-11\frac{\sqrt{3}}{3}$ 2) $-10\frac{\sqrt{3}}{3}$ 3) $8\frac{\sqrt{3}}{3}$ 4) $13\frac{\sqrt{3}}{3}$

۱۳۰- برای تابع $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y) = \begin{cases} -1 + x + y & x \geq 0 \\ -1 + x^2 + y^2 & x < 0 \end{cases}$ در نقطه‌ی $p = (0,0)$ کدام گزینه درست است؟

1) $f_y(p) = 0$ ، $f_x(p) = 1$ 2) $f_x(p) = 0$ ، $f_y(p) = 1$

3) $f_y(p)$ ، $f_x(p) = 1$ وجود ندارد. 4) $f_x(p)$ ، $f_y(p) = 1$ وجود ندارد.

۱۳۱- اگر $I = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma$ که در آن S سطح جانبی استوانه‌ی قائم محصور به رویه‌های $x^2 + y^2 = 9$ و $z = -2$ و $z = 2$ است و $F(x, y, z) = (y^2 + z^2 + x)\vec{i} + (x^2 + y^2 + y)\vec{j} + (x^2 + y^2 + z)\vec{k}$ در این صورت مقدار I کدام است؟

1) $36\pi$   2) $54\pi$   3) $72\pi$   4) $108\pi$

۱۳۲- بردار یک مماس تابع $\vec{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\vec{i} + (\sin t - t\cos t)\vec{j}$ برحسب طول قوس برابر است با:

1) $\cos\sqrt{s}\,\vec{i} + \sin\sqrt{s}\,\vec{j}$   2) $\sin\sqrt{s}\,\vec{i} + \cos\sqrt{s}\,\vec{j}$

3) $\cos\sqrt{2s}\,\vec{i} + \sin\sqrt{2s}\,\vec{j}$   4) $\sin\sqrt{2s}\,\vec{i} + \cos\sqrt{2s}\,\vec{j}$

۱۳۳- فرض کنید $F(x, y, z) = (z - y)\vec{i} + (x + y)\vec{j} + (x + 2y)\vec{k}$ مقدار $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ کدام است هرگاه C دایره‌ی $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 2 \end{cases}$ باشد که تصویر آن بر صفحه $(x, y)$ در جهت مثلثاتی در نظر گرفته شده است.

1) $4\pi$   2) $6\pi$   3) $8\pi$   4) $12\pi$

۱۳۴- اگر $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ و $\rho = |\vec{r}|$ باشد، با فرض موجود بودن $f'(\rho) = \dfrac{df}{d\rho}$، گرادیان $f(\rho)$ کدام است؟

1) $\dfrac{f'(\rho)}{\rho}\vec{r}$   2) $\dfrac{f'(\rho)}{\rho^2}\vec{r}$   3) $f'(\rho)\vec{r}$   4) $\rho f'(\rho)\vec{r}$

۱۳۵- بیش‌ترین انحنای منحنی $y = e^x$ چقدر است؟

1) $\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$   2) $\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$   3) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$   4) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

۱۳۶- چنانچه S سطح رویه $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ در بالای صفحه xy باشد. $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds$ چقدر است؟ $\vec{n}$ برداری که عمود بر سطح بوده و $\vec{F}$ به صورت مقابل باشد.

$$F(x, y, z) = (-6xy - y)\vec{i} + (3y^2 - 1)\vec{j} + (3x^2)\vec{k}$$

1) $2\pi$   2) $6\pi$   3) $12\pi$   4) $24\pi$

۱۳۷- مقدار انتگرال $\oint\limits_C xydx + x^2dy$ که در آن C منحنی بسته محدود به سهمی‌های $y = x^2$ و $y^2 = x$ است که یک بار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده است برابر است با:

1) $\frac{3}{20}$ 2) $\frac{1}{5}$ 3) $\frac{3}{5}$ 4) $\frac{27}{20}$

۱۳۸- مساحت ناحیه محصور به منحنی بسته C به معادله‌ی $\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + (\frac{t^3}{3} - t)\vec{j}$ و $-\sqrt{3} \le t \le \sqrt{3}$ کدام یک از موارد زیر است؟

1) $\frac{1}{2} - \sqrt{3}$ 2) $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ 3) $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ 4) $\frac{1}{2} + \sqrt{3}$

۱۳۹- ماکزیمم خمیدگی (انحناء) منحنی تابع $y = e^x$ کدام است؟

1) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 2) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 3) $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ 4) $\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$

۱۴۰- مقدار انتگرال دوگانه $I = \int_0^{\infty}\int_0^{x} xe^{\frac{-x^2}{y}}\,dy\,dx$ کدام است؟

1) $\frac{1}{4}$ 2) $-\frac{1}{2}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) 1

۱۴۱- استوانه‌ی $x^2 + y^2 = 2x$ از نیمه‌ی بالایی مخروط $x^2 + y^2 = z^2$ یک بخش $\Gamma$ را جدا می‌کند. مقدار انتگرال رویه‌ای $I = \iint\limits_{\Gamma}(x^4 - y^4 + y^2z^2 - z^2x^2 + 1)d\sigma$ کدام است؟

1) $-\pi\sqrt{2}$ 2) $0$ 3) $2\pi$ 4) $\pi\sqrt{2}$

۱۴۲- فرض کنیم $\Gamma$ رویه‌ی محصورکننده ناحیه $\Omega$ باشد که توسط صفحات $z = 0$ و $y = 0$ و $y = e$ و استوانه‌ی $z = 1 - x^2$ محصور شده، اگر میدان برداری $\vec{F} = (x + \cos y)\vec{i} + (y + \cosh z)\vec{j} + (z + e^{-x^2})\vec{k}$ آنگاه مقدار $\iint\limits_{\Gamma}(F \cdot n)d\sigma$ کدام است؟ (n قائم یک برونسو بر $\Gamma$ و $d\sigma$ جزء مساحت رویه است)

1) $\frac{e}{3}$ 2) $\frac{e}{2}$ 3) $\frac{2}{3}(e-1)$ 4) $4e$

# پاسخنامه مجموعه آزمون‌های ریاضی عمومی (2)

**۱-** گزینه «1» صحیح است.

با توجه به گزینه‌ها مشخص است که تنها یکی از دو گزینه 1 و 2 می‌تواند صحیح باشد و داریم:

$$\vec{w}\times\vec{u}=\vec{w}\times\vec{v} \Rightarrow \vec{w}(\vec{u}-\vec{v})=0$$

بنابراین $\vec{u}\cdot\vec{v}$ و $\vec{w}$ موازی هستند و گزینه 1 نادرست و پاسخ تست است.

بررسی سایر گزینه‌ها: از آن‌جایی که $\vec{u}-\vec{v}$ در صفحه شامل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ قرار دارد، بنابراین $\vec{w}$ که با $\vec{u}-\vec{v}$ موازی است، نیز در این صفحه قرار می‌گیرد و در نتیجه $\vec{w}$ بر بردار نرمال این صفحه یعنی $\vec{u}\times\vec{v}$ عمود بود و داریم:

$$\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})=0$$

**۲-** گزینه «3» صحیح است.

ابتدا مقادیر ویژه ماتریس $A$ را می‌یابیم:

$$|A-\lambda I|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & -1\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ 2 & 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & 2-\lambda\\ 2 & 2\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+4)-(2\lambda-2)=0 \Rightarrow (1-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+6)=0 \Rightarrow \lambda=1,2,3$$

کوچک‌ترین مقدار ویژه مقدار ویژه ماتریس $A$ برابر $\lambda=1$ است و بردار ویژه متناظر با این مقدار ویژه برابر است با:

$$(A-\lambda I)X=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}1-1 & 0 & -1\\ 1 & 2-1 & 1\\ 2 & 2 & 3-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}-x_3=0 \rightarrow x_3=0\\ x_1+x_2+x_3=0 \Rightarrow x_1+x_2=0 \Rightarrow x_1=-x_2\end{cases} \Rightarrow x=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$$

**۳-** گزینه «1» صحیح است.

اگر $\lambda$ مقدار ویژه ماتریس $A$ و $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ بردار ویژه متناظر با $\lambda$ باشد، داریم:

$$Ax=\lambda x \Rightarrow x_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1&1&1\\a&b&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}3\\a+b+1\\2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\lambda=3\\a+b+1=3 \Rightarrow a+b=2\end{cases}$$

$$x_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1&1&1\\a&b&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}0\\a-1\\0\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\lambda=0\\a-1=0 \Rightarrow a=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}a+b=2\\a=1\end{cases} \Rightarrow b=1$$

**۴-** گزینه «3» صحیح است.

اگر دو بردار $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ را در نظر بگیریم، آن‌گاه با توجه به نکته 11 نیمساز این دو بردار برابر است با:

$$\text{نیمساز}=\frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|}+\frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{BA}=(2,1,-1)-(1,1,1)=(1,0,-2) \rightarrow |\overrightarrow{BA}|=\sqrt{5}\\\overrightarrow{BC}=(2,-1,1)-(1,1,1)=(1,-2,0) \rightarrow |\overrightarrow{BC}|=\sqrt{5}\end{cases}$$

$$\text{نیمساز}=\frac{(1,0,-2)}{\sqrt{5}}+\frac{(1,-2,0)}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-2,-2)$$

**۵-** گزینه «4» صحیح است.

با توجه به قضیه کیلی- هامیلتون که هر ماتریس در معادله مشخصه خود صدق می‌کند، ابتدا معادله مشخصه را به صورت زیر می‌یابیم:

$$\left|A-\lambda I\right|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & -1\\ 0 & 3-\lambda & 0\\ 1 & -2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow (3-\lambda)(-1)\begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$(3-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+3)=0 \Rightarrow -\lambda^3+6\lambda^2-12\lambda+9=0 \Rightarrow$$

$$\xrightarrow[\text{کیلی ـ هامیلتون}]{\text{با توجه به قضیه}} A^3-6A^2+12A-9I=0 \Rightarrow A^3-6A^2+12A=9I$$

**۶-** گزینه «1» صحیح است.

با توجه به خصوصیات ضرب خارجی داریم:

$$\vec v\times(\vec v\times\vec u)=(\vec v\cdot\vec u)\vec v-(\vec v\cdot\vec v)\vec u=(\vec v\cdot\vec u)\vec v-\left|v\right|^2\vec u$$

با توجه به صورت سؤال که طول بردار $\vec v$ یک است، لذا $\left|v\right|=1$ و داریم:

$$\vec v\times(\vec v\times\vec v)=(\vec v\times\vec u)\vec v-\vec u$$

$$\Rightarrow \vec v\times(\vec v\times(\vec v\times\vec u))=\vec v\times((\vec v\cdot\vec u)\vec v-\vec u)=\cancel{(\vec v\cdot\vec u)\vec v\times\vec v}^{\,0}-\vec v\times\vec u=-\vec v\times\vec u$$

**۷-** گزینه «1» صحیح است.

برای حل این تست راه‌های مختلفی موجود است که ساده‌ترین روش استفاده از یک مثال برای $A$ و $B$ است، لذا داریم:

$$\text{اگر} \rightarrow A=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \text{ و } B=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow M=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \text{ و } M^t=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x^tM^tMx=(x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=(x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

$$=(x_1-x_2 \quad -x_1+x_2)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=x_1^2-x_1x_2-x_1x_2+x_2^2=x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=(x_1-x_2)^2$$

دیده می‌شود که برای بردارهای دلخواه $A$ و $B$ همانند فوق عبارت مربوطه به ازای $x\neq 0$ همواره مثبت است.

**۸-** گزینه «3» صحیح است.

رتبه یک ماتریس برابر تعداد سطرهای مستقل خطی آن ماتریس می‌باشد و از آن‌جا که در ماتریس فوق سطر سوم ضریبی از سطر دوم است، بنابراین آن را حذف می‌کنیم، از طرفی سطرهای اول و دوم ضریبی از یکدیگر نبوده و مستقل از هم می‌باشند، بنابراین رتبه ماتریس فوق برابر 2 می‌باشد.

**۹-** گزینه «3» صحیح است.

با توجه به همگن بودن دستگاه معادلات خطی فوق، شرط لازم و کافی برای این که دستگاه بی‌نهایت جواب داشته باشد این است که دترمینان ماتریس ضرایب برابر صفر باشد، یعنی:

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & a\\ 3 & -1 & 2\\ 6 & -4 & 5\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix}-1 & 2\\ -4 & 5\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}3 & 2\\ 6 & 5\end{vmatrix} + a\begin{vmatrix}3 & -1\\ 6 & -4\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 6-6a=0 \Rightarrow a=1$$

**۱۰-** گزینه «1» صحیح است.

بردار نرمال صفحه موردنظر را $n$ در نظر می‌گیریم و از آن‌جا که صفحه موردنظر بر صفحه به معادله $x+y+z=2$ عمود است، بنابراین بردار نرمال $n$ نیز بر بردار نرمال $n'=(1,1,1)$ عمود است. از طرفی صفحه موردنظر شامل دو نقطه $(1,0,0)$ و $(0,0,1)$ می‌باشد، پس شامل بردار واصل آن‌ها یعنی $u=(1,0,-1)$ نیز می‌باشد، بنابراین $n$ بر $u$ عمود است و بنابراین برای محاسبه $n$ داریم:

$$n = n' \times u = \begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix} = (-1,2,-1) \Rightarrow$$

معادله صفحه موردنظر $\Rightarrow -(x-1)+2(y-0)-(z-0)=0 \Rightarrow x-2y+z=1$

فقط نقطه گزینه 1 در این معادله صدق می‌کند و گزینه صحیح است.

**۱۱-** گزینه «4» صحیح است.

طرفین تساوی را از راست در ماتریس $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 7\end{bmatrix}^{-1}$ ضرب می‌کنیم، لذا داریم:

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 7\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{7-6}\begin{bmatrix}7 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}a=7\\ b=-2\end{cases} \Rightarrow a+b=5$$

**۱۲-** گزینه «1» صحیح است.

روش 1) با توجه به قضایای دترمینان اگر ضریبی از یک سطر ماتریس را به سطر دیگر اضافه کنیم، مقدار دترمینان تغییری نمی‌کند، بنابراین در این سؤال نصف سطر اول را به سطر دوم اضافه می‌کنیم، لذا داریم:

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

همان‌طور که در بالا دیده می‌شود، از آن‌جا که ماتریس فوق یک ماتریس پایین مثلثی است، بنابراین مقدار دترمینان آن برابر با حاصلضرب اعضای روی قطر اصلی است، لذا داریم.

$$\det(M) = 2 \times 2/5 \times 5 \times 1 \times 3 = 75$$

**۱۳-** گزینه «2» صحیح است.

برای این که $\vec{A} + t\vec{B}$ بر $\vec{C}$ عمود باشد، باید داشته باشیم:

$$(\vec{A} + t\vec{B}) \cdot \vec{C} = 0$$

$$(\vec{A} + t\vec{B}) \cdot \vec{C} = (1-t, 2+2t, 3+t) \cdot (3, 1, 0) = 3 - 3t + 2 + 2t = 5 - t = 0 \Rightarrow t = 5$$

**۱۴-** گزینه «1» صحیح است.

با توجه به رئوس گفته شده در صورت سؤال، ابتدا دو ضلع از مثلث را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\overrightarrow{AB} = (1, 0, 2) \quad \text{و} \quad \overrightarrow{AC} = (2, -2, 0)$$

با توجه به نکته 8 برای مساحت مثلث داریم:

$$\text{مساحت} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (4, 4, -2) \Rightarrow \text{مساحت} = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 16 + 4} = 3$$

**۱۵-** گزینه «3» صحیح است.

از آن‌جا که صفحه از خط $\frac{x-1}{3}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-4}{-2}$ می‌گذرد، بنابراین شامل نقطه $(1,4,4)$ می‌باشد، و بردار $\vec{u}_1=(3,2,-2)$ نیز یک بردار روی صفحه موردنظر می‌باشد. از طرفی صفحه مورد نظر با خط $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+2}{1}$ که دارای بردار هادی $(2,-4,1)$ می‌باشد، موازی است.

با توجه به این که صفحه موردنظر شامل بردار $\vec{u}_1$ است و با بردار $\vec{u}_2$ موازی است، بنابراین بردار نرمال صفحه بر این دو بردار عمود است، لذا برای به دست آوردن $n$ (بردار نرمال صفحه) داریم:

$$n=\vec{u}_1\times\vec{u}_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix}=(-6,-7,-16)$$

معادله‌ی صفحه $\Rightarrow\ -6(x-1)-7(y-4)-16(z-4)=0 \ \Rightarrow\ 6x+7y+16z=98$

**۱۶-** گزینه «2» صحیح است.

ابتدا معادله مشخصه $A$ را محاسبه می‌کنیم و سپس به جای هر چه $x$ داریم $\frac{1}{x}$ قرار می‌دهیم، لذا داریم:

$$\det\ (A-XI)=\begin{vmatrix} 1-x & 0 & 2 \\ 0 & -1-x & 1 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix}=(1-x)\begin{vmatrix} -1-x & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix}=(1-x)(x^2+x-1)$$

$\Rightarrow A$ معادله مشخصه ماتریس $=-x^3+2x-1=0$

$$x\to\frac{1}{x}\ \Rightarrow -\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x}-1=0 \quad \xrightarrow{x(-x^2)} x^3-2x^2+1=0$$

**۱۷-** گزینه «1» صحیح است.

از آن‌جا که قرار است صفحه موردنظر از فصل مشترک دو صفحه مشخصه بگذرد، بنابراین یک نقطه دلخواه از فصل مشترک دو صفحه مشخص شده در صورت سؤال بر روی صفحه مورد نظر قرار دارد، بنابراین:

اگر $z=0 \Rightarrow \begin{cases} x+y=6 \\ 2x+3y+5=0 \end{cases} \Rightarrow\ x=23\ ,\ y=-17$

بنابراین نقطه $A(23,-17,0)$ روی صفحه موردنظر قرار دارد و از آن‌جا که نقطه $p(1,1,1)$ نیز روی صفحه قرار دارند، بنابراین صفحه شامل بردار $\overrightarrow{PA}=(22,-18,-1)$ می‌باشد. از طرفی بردار هادی فصل مشترک دو صفحه برابر است با:

$$\vec{u}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}=(1,-2,1)$$

صفحه مورد نظر شامل بردار فصل مشترک $(\vec{u})$ نیز می‌باشد. بنابراین، بردار نرمال صفحه بر بردار $\vec{u}$ و بردار $\overrightarrow{PA}$ عمود است. لذا:

$$\vec{n}=\vec{u}\times\overrightarrow{PA}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 1 \\ 22 & -18 & -1 \end{vmatrix}=(20,23,26)$$

$$\text{معادله صفحه}\Rightarrow\ 20(x-1)+23(y-1)+26(z-1)=0\quad\Rightarrow\quad 20x+23y+26z-69=0$$

**۱۸-** گزینه «3» صحیح است.

بردارهای سازنده هرم را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\overrightarrow{AB}=(2,3,4)\qquad \overrightarrow{AC}=(6,2,2)\qquad \overrightarrow{AD}=(3,7,1)$$

بنابراین با توجه به نکته 9 حجم هرم مثلث‌القاعده تشکیل شده از سه بردار فوق برابر است با:

$$\text{حجم}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix}\xrightarrow{\text{بسط سطر اوّل}}\frac{1}{6}\left(2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}+4\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}\right)$$

$$=\frac{1}{6}(-24+0+144)=20$$

**۱۹-** گزینه «2» صحیح است.

نقطه $A$ متناظر با $t=1$ می‌باشد و از آن‌جا که معادله خم موردنظر به شکل $R(t)=\left(t,\frac{1}{2}t^2,\frac{1}{3}t^3\right)$ است، لذا برای محاسبه انحنای خم داریم:

$$\begin{aligned}\vec{v}&=R'(t)=(1,t,t^2)\xrightarrow{t=1}\vec{v}=(1,1,1)\\ \vec{a}&=V'(t)=(0,1,2t)\xrightarrow{t=1}\vec{a}=(0,1,2)\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad k=\frac{|\vec{v}\times\vec{a}|}{|\vec{v}|^3}$$

$$\vec{v} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (1,-2,1) \quad \text{و} \quad |\vec{v}| = \sqrt{3} \;\Rightarrow\; k = \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

**۲۰-** گزینه «1» صحیح است.

نقطه $P$ متناظر با $t = \frac{\pi}{4}$ می‌باشد، بردار نرمال صفحه موردنظر در نقطه $P$ همان بردار مماس بر منحنی در این نقطه می‌باشد، لذا داریم:

$$\text{بردار مماس بر منحنی} \Rightarrow \overrightarrow{v}(t) = (\cos t, \cos t, -2\sin 2t) \quad \Rightarrow \vec{v}(\frac{\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -2)$$

بنابراین باید معادله صفحه‌ای با بردار نرمال $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -2)$ و گذرنده از نقطه $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ را بیابیم، لذا داریم:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x - \frac{\sqrt{2}}{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2}(y - \frac{\sqrt{2}}{2}) - 2(z - 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 4z = 2$$

**۲۱-** گزینه «4» صحیح است.

وجود عبارت $x^2 + y^2$ در گزینه 4 نشان می‌دهد که سطح داده شده در اثر دوران حول محور $z$ به وجود آمده است، چرا که اگر منحنی $z = 2x^2 + x$ در صفحه $xz$ حول محور $z$ دوران کند، سطح موردنظر ساخته می‌شود.

**۲۲-** گزینه «3» صحیح است.

با توجه به فرمول محاسبه انحنا منحنی $y = f(x)$ به صورت زیر داریم:

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{و} \quad y = \frac{1}{6}x^3 \rightarrow \begin{cases} y' = \frac{1}{2}x^2 \xrightarrow{x=1} y' = \frac{1}{2} \\ y'' = x \xrightarrow{x=1} y'' = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; k = \frac{1}{(1 + \frac{1}{4})^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt[2]{(4)^3}}{\sqrt[2]{(5)^3}} = \frac{8}{5\sqrt{5}}$$

**۲۳-** گزینه «2» صحیح است.

می‌دانیم که اگر $\vec{T}$ بردار یکّه مماسی انحنای موردنظر باشد، آن‌گاه برای محاسبه بردار یکّه قائم اصلی داریم:

$$\vec{T}(t)=\frac{R'(t)}{|R'(t)|}\quad,\quad \vec{N}(t)=\frac{\overrightarrow{T'(t)}}{\left|\overrightarrow{T'(t)}\right|}\qquad R'(t)=(-\sin t\ ,\ \cos t,1)\Rightarrow|R'(t)|=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+1}=\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow\ \overrightarrow{T(t)}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t,\cos t,1)\ \Rightarrow\ \overrightarrow{T'(t)}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t,-\sin t,0)\ \Rightarrow\ \left|\overrightarrow{T'(t)}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow\ \overrightarrow{N(t)}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t,-\sin t,0)}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=(-\cos t,-\sin t,0)$$

**۲۴-** گزینه «3» صحیح است.

با توجه به این که $R(t)=(2\cos 3t,2\sin 3t,\frac{1}{2}t)$ است، برای محاسبه انحناء داریم:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v(t)}&=\overrightarrow{R'(t)}=(-6\sin 3t,6\cos 3t,\tfrac{1}{2})\\ \overrightarrow{a(t)}&=\overrightarrow{V'(t)}=(-18\cos 3t,-18\sin 3t,0)\end{aligned}\qquad\Rightarrow\ k=\frac{|\vec{v}\times\vec{a}|}{|\vec{v}|^3}$$

$$\vec{v}\times\vec{a}=(9\sin 3t,-9\cos 3t,108)\ \Rightarrow\ |\vec{v}\times\vec{a}|=\sqrt{81+108}=\sqrt{189}\quad و\quad |\vec{v}|=\sqrt{36+\frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow\ k=\frac{\sqrt{189}}{6}$$

بنابراین انحنا یک مقدار ثابت است و گزینه 3 صحیح است.

**۲۵-** گزینه «3» صحیح است.

اگر منحنی‌ها را به شکل $R(t)=(x(t),y(t),z(t))$ در نظر بگیریم، آن‌گاه $\vec{V}=R'(t)$ بردار مماس بر آن را مشخص می‌کند که باید موازی بردار $F=(xz,2x^2z,x^2)$ باشد، لذا داریم:

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{xz}=\frac{\frac{dy}{dt}}{2x^2z}=\frac{\frac{dz}{dt}}{x^2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\frac{dx}{dt}}{xz}=\frac{\frac{dy}{dt}}{2x^2z} \Rightarrow dx=\frac{dy}{2x} \\ \\ \frac{\frac{dy}{dt}}{2x^2z}=\frac{\frac{dz}{dt}}{x^2} \Rightarrow dy=2zdz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+c_1=y \\ z^2+c_2=y \end{cases}$$

**۲۶-** گزینه «3» صحیح است.

طول منحنی $c$ برابر است با:

$$S=\int_a^b \left|R'(t)\right|dt$$

$$r'(t)=(1,2\sqrt{t},2t) \Rightarrow \left|r'(t)\right|=\sqrt{1+4t+4t^2}=\sqrt{(2t+1)^2}=2t+1$$

$$\Rightarrow S=\int_0^b (2t+1)dt=b^2+b \xrightarrow{s=30} b^2+b=30 \Rightarrow b=5$$

**۲۷-** گزینه «1» صحیح است.

منحنی حاصل از تقاطع صفحه و کره یک دایره است و از آن‌جا که مبدأ مختصات که مرکز کره است بر روی صفحه قرار دارد، بنابراین دایره حاصله بزرگ‌ترین دایره ممکنه، یعنی دایره‌ای به شعاع برابر شعاع کره، یعنی $R=2$ است و لذا برای انحنا داریم:

$$K=\frac{1}{R}=\frac{1}{2}$$

**۲۸-** گزینه «1» صحیح است.

برای به دست آوردن محل تلاقی، معادله خط را به شکل پارامتری می‌نویسیم، لذا:

$$\begin{cases} x=4-6t \\ y=3+3t \\ z=-2+4t \end{cases}$$

حال با جایگذاری مقادیر فوق در معادله بیضی‌گون داریم:

$$\frac{(4-6t)^2}{36}+\frac{(3+3t)^2}{81}+\frac{(-2+4t)^2}{9}=1 \Rightarrow t^2-t=0 \Rightarrow t=0,1$$

$$t=0 \Rightarrow (x,y,z)=(4,3,-2) \quad \text{و} \quad t=1 \Rightarrow (x,y,z)=(-2,6,2)$$

**۲۹-** گزینه «4» صحیح است.

بیضی را به شکل پارامتری $\begin{cases} x = 2\sin t \\ y = 3\cos t \end{cases}$ می‌نویسیم و لذا نقطه داده شده متناظر با $t = 0$ است، لذا داریم:

$$\begin{cases} x' = -3\sin t \\ y' = 2\cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = -3\cos t \\ y'' = -2\sin t \end{cases} \xrightarrow{t=0} \begin{cases} x' = y'' = 0 \\ y' = 2 \\ x'' = -3 \end{cases}$$

$$k(t) = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow k(0) = \frac{|0+6|}{(0+4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

تذکر: توجه شود که در این‌جا از رابطه $k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ نمی‌توان به جواب رسید و تنها باید به روش فوق عمل کرد.

**۳۰-** گزینه «3» صحیح است.

با مشتق‌گیری از بردار سرعت داریم:

$$a(t) = (e^t, e^t\sin t + e^t\cos t, e^t\cos t - e^t\sin t)$$

در $t = 0$ داریم:

$$\begin{aligned} \vec{v}(0) &= (1, 0, 1) \\ \vec{a}(0) &= (1, 1, 1) \end{aligned} \Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{v}(0)\cdot\vec{a}(0)}{|\vec{v}(0)||\vec{a}(0)|} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

**۳۱-** گزینه «4» صحیح است.

با مربع‌سازی معادله داریم:

$$4x^2 - (y-1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = y - 1 \\ 2x = -y + 1 \end{cases} \rightarrow$$ نمایش دو خط است.

**۳۲-** گزینه «2» صحیح است.

ابتدا ضرب خارجی $f \times g$ را محاسبه می‌کنیم:

$$(f\times g)(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ t & t^2 & t^3 \\ 1 & 1 & t \end{vmatrix} = (t^3 - t^2)j + (t - t^2)k \rightarrow \frac{d}{dt}(f\times g)(t) = (3t^2 - 2t)j + (1-2t)k$$

$$\xrightarrow{t=0} \frac{d}{dt}(f\times g)(0) = k$$

**۳۳-** گزینه «4» صحیح است.

باید از بین گزینه‌ها تابعی را بیابیم که در نقطه $(0,0)$ دارای حد باشد تا با تعریف مقدار تابع در نقطه $(0,0)$ و برابر با حد تابع در این نقطه آن را به یک تابع پیوسته تبدیل کنیم.

در گزینه‌های 1 و 2 درجه صورت و مخرج با هم برابر است و مخرج‌ها همگن هستند، بنابراین با توجه به نکته 8، این دو تابع حد ندارند. برای گزینه 3 اگر مسیر $y = mx^2$ را در نظر بگیریم، داریم:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(mx^2)}{x^4 + m^2x^4} = \frac{m}{1+m^2}$$

می‌بینیم که حد تابع وابسته به مقدار m می‌باشد، بنابراین این تابع نیز در $(0,0)$ دارای حد نمی‌باشد.

برای گزینه 3 داریم:

$$(x,y)\to(0,0) \;\Rightarrow\; \sin(x^2+y^2) \sim x^2+y^2 \;\Rightarrow\; \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$$

**۳۴-** گزینه «4» صحیح است.

از آن‌جایی که مشتق f نسبت به x خواسته شده است، بنابراین y یک مقدار ثابت است که در نقطه $(0,0)$ دارای مقدار صفر می‌باشد، لذا داریم:

$$f(x,0) = g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

از آن‌جایی که ضابطه تابع f در مبدأ عوض می‌شود، باید مشتق را از تعریف محاسبه کنیم، لذا داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x|x|}$$

$$x \to 0 \;\Rightarrow\; \sin^2 x \sim x^2 \;\Rightarrow\; f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x|x|} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$$

حد چپ $\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} \dfrac{x}{-x} = -1$ و حد راست $\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x} = 1$

بنابراین حد نداریم و مشتق تابع $g(x)$ در نقطه صفر موجود نیست.

**۳۵-** گزینه «2» صحیح است.

با توجه به اطلاعات داده شده مقدار $k$ را می‌یابیم.

$$T(1,2,2)=160 \Rightarrow 120=\frac{k}{3} \Rightarrow k=360$$

از طرفی جهت موردنظر $\overrightarrow{PQ}$ است، لذا داریم:

$$\begin{cases}P(2,-1,2)\\ Q(3,-2,2)\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{PQ}=(1,-1,0) \Rightarrow \vec{u}=\frac{\overrightarrow{PQ}}{\left|\overrightarrow{PQ}\right|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$$

برای محاسبه نرخ تغییر دما در نقطه $P$ و در جهت $u$ با توجه به تعریف مشتق سویی داریم:

$$D_u T\Big|_P=\nabla T(P)\cdot u$$

اگر $\vec{r}=(x,y,z)$ بردار مکان باشد و $r=\left|\vec{r}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ قرار دهیم، داریم:

$$T=\frac{360}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=360\,r^{-1}$$

از طرفی می‌توان اثبات کرد که اگر $T=f(r)$ باشد، برای محاسبه گرادیان داریم:

$$\nabla T=f'(r)\frac{\vec{r}}{r} \qquad\qquad \nabla T=-360r^{-2}\frac{\vec{r}}{r}=-360\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\nabla T(p)=\nabla T(2,-1,2)=\frac{-40}{3}(2,-1,2)$$

$$\Rightarrow \quad D_u T=-\frac{40}{3}(2,-1,2)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)=-\frac{40}{\sqrt{2}}=-20\sqrt{2}$$

**۳۶-** گزینه «3» صحیح است.

ابتدا مقادیر $z$ و $w$ را در نقطه $(x,y)=(1,1)$ می‌یابیم، لذا داریم:

$$\begin{cases}2x^2+y^2+z^2-zw=0\\ x^2+y^2+2z^2+zw-8=0\end{cases} \xrightarrow{(x,y)=(0,0)} \begin{cases}z^2-zw=-3 \quad (*)\\ 2z^2+zw=6\end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} 3z^2=3 \Rightarrow z=\pm 1$$

$$\xrightarrow{(*)} 1-(\pm 1)w=-3 \Rightarrow (\pm 1)w=4 \Rightarrow w=\pm 4$$

بنابراین نقطه موردنظر $(z,w)=(1,4)$ و $(z,w)=(-1,-4)$ می‌باشد.

حال با فرض $\begin{cases} F: x^2+y^2+z^2-zw=0 \\ G: x^2+y^2+2z^2+zw-8=0 \end{cases}$ که $y$ و $x$ متغیر مستقل و $w$ و $z$ متغیر وابسته هستند و با استفاده از قاعده مشتق ضمنی داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,w)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,w)}}=-\frac{\begin{vmatrix}4x & -z\\ 2x & z\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2z-w & -z\\ 4z+w & z\end{vmatrix}} \quad \text{و} \quad \frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,w)}}=-\frac{\begin{vmatrix}2z-w & 4x\\ 4z+w & 2x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2z-w & -z\\ 4z+w & z\end{vmatrix}}$$

حال با جایگذاری نقطه $(x,y)=(1,1)$ و $(z,w)=(1,4)$ داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 8 & 1\end{vmatrix}}=-1 \quad \text{و} \quad \frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 8 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 8 & 1\end{vmatrix}}=+6$$

و با جایگذاری نقطه $(x,y)=(1,1)$ و $(z,w)=(-1,-4)$ داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix}4 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 1\\ -8 & -1\end{vmatrix}}=1 \quad \text{و} \quad \frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix}2 & 4\\ -8 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 1\\ -8 & -1\end{vmatrix}}=-6$$

**۳۷-** گزینه «2» صحیح است.

روش 1) اگر قرار دهیم $v=\frac{x^2-xy}{x+y}$، آن‌گاه داریم:

$$u=\operatorname{Arctg} v \;\Rightarrow\; v=\operatorname{tg} u \;\Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{1+v^2}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 u}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{1+v^2}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 u}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\Rightarrow x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 u}\left(x\frac{\partial v}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

از طرفی با توجه به این که تابع v همگن و از درجه 1 است، داریم:

$$x\frac{\partial v}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial y}=3v=\operatorname{tg}u$$

$$\Rightarrow\ x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\operatorname{tg}u}{1+\operatorname{tg}^2u}=\frac{1}{2}\sin 2u$$

روش 2) اگر $v=\dfrac{x^2-xy}{x+y}$ و $u=f(v)=\operatorname{Arctg}$، آن‌گاه از آن‌جا که تابع v همگن از درجه 1 است، داریم:

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=vf'(v)=\frac{v}{1+v^2}=\frac{\operatorname{tg}u}{1+\operatorname{tg}^2u}=\frac{1}{2}\sin 2u$$

**۳۸-** گزینه «3» صحیح است.

با توجه به این که تابع موردنظر $f(x,y)=\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}$ می‌باشد و قید مربوطه نیز $x^2+y^2=1$ است، با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ داریم:

$$\begin{array}{ll} f(x,y)=\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b} & \nabla f=(\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{b}) \\ & \Rightarrow \\ g(x,y):x^2+y^2-1=0 & \nabla g=(2x,2y) \end{array}$$

$$\text{روش ضرایب لاگرانژ}\ \Rightarrow\ \nabla f=\lambda\nabla y\ \Rightarrow\ \begin{cases}\dfrac{1}{a}=2\lambda x\\ \dfrac{1}{b}=2\lambda y\end{cases}\ \Rightarrow\ x=\frac{1}{2a\lambda}\ ,\quad y=\frac{1}{2b\lambda}$$

$$x^2+y^2=1\ \Rightarrow\ \frac{1}{4a^2\lambda^2}+\frac{1}{4b^2\lambda^2}=1\ \Rightarrow\ \frac{a^2+b^2}{4a^2b^2\lambda^4}=1\ \Rightarrow\ \lambda=\pm\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2ab}$$

$$\Rightarrow\ \max f=\frac{1}{2a^2\lambda}+\frac{1}{2b^2\lambda}=\frac{1}{\lambda}(\frac{a^2+b^2}{2a^2b^2})=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\times\frac{a^2+b^2}{2a^2b^2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$$

**۳۹-** گزینه «1» صحیح است.

ابتدا بردارهای نرمال صفحات مماس بر سطح مربوطه در نقاط فوق را می‌یابیم، برای این منظور داریم:

$$f:3x^4+xy^3-z=0\ \Rightarrow\ \vec{n}=\nabla f\ \Rightarrow\ \vec{n}=(12x^3+y^3,3xy^2,-1)$$

$$\begin{array}{l} M_1(0,1,0)\to\vec{n}_1=(1,0,-1) \\ M_2(0,-1,0)\to\vec{n}_2=(-1,0,-1) \end{array}\ \Rightarrow\ \cos\theta=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\frac{(1,0,-1).(-1,0,-1)}{2}=0$$

بنابراین بردارهای نرمال دو صفحه بر هم عمودند و در نتیجه دو صفحه عمود بر هم هستند.

**۴۰-** گزینه «2» صحیح است.

اگر بردار موردنظر به شکل $\vec{u}=(a,b)$ باشد، با توجه به تغییر فیزیکی مشتق سویی در صفحه باید مشتق $f$ در جهت $u$ منفی باشد، لذا با استفاده از تعریف مشتق جهتی داریم:

$$D_{\vec{u}}f\Big|_{p}=\nabla f(p)\cdot\vec{u}<0$$

$$f(x,y)=x^3+x^2y+y^2-1\ \Rightarrow\ \nabla f=(3x^2+2xy\ ,\ x^2+2y)$$

$$p(-1,1)\ \Rightarrow\ \nabla f(p)=(1,3)$$

$$\nabla f(p)\cdot\vec{u}<0\ \Rightarrow\ (1,3)\cdot(a,b)<0\ \Rightarrow\ a+3b<0$$

تنها گزینه 2 در این رابطه صدق می‌کند، بنابراین گزینه 2 صحیح است.

**۴۱-** گزینه «1» صحیح است.

روش 1) آن‌جایی که $u=f(x,y)$ و $v=g(x,y)$ است، شرط لازم و کافی برای آن‌که $x$ و $y$ بین $u$ و $v$ حذف شود و $Q(u,v)=0$ باشد، آن است که $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=0$ باشد و از آن‌جا که در رابطه سوم $w=u^2-v$ می‌باشد، بنابراین باید $\dfrac{\partial(u\ ,\ v\ ,w)}{\partial(x,y,z)}=0$ باشد.

روش 2) ابتدا $w$ را هم برحسب $x$ و $y$ می‌یابیم، لذا داریم:

$$w=(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)=2(xy+xz+yz)$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix}u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\\ w_x & w_y & w_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2x & 2y & 2z\\ 2(y+z) & 2(x+z) & 2(x+y)\end{vmatrix}=0$$

در دترمینان فوق، اگر سطر دوم را به سطر سوم اضافه کنیم، آن‌گاه سطر سوم ضریبی از سطر اول است و دترمینان برابر صفر است.

**۴۲-** گزینه «4» صحیح است.

ابتدا نقاط بحرانی داخل ناحیه مربوطه را به دست می‌آوریم، بنابراین:

$$\nabla f = (2x, -2y) = (0,0) \quad \Rightarrow \quad (x,y) = (0,0) \quad \Rightarrow \quad f(0,0) = 0 \qquad (1)$$

حال مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع را بر روی مرز ناحیه مربوطه، (یعنی قید $x^2 + y^2 = 4$) می‌یابیم:

$$x^2 + y^2 = 4 \;\Rightarrow\; y^2 = 4 - x^2 \ge 0 \quad (*) \;\Rightarrow\; -2 \le x \le 2$$

$$f(x,y) = x^2 - y^2 \xrightarrow{y^2 = 4 - x^2} g(x) = 2x^2 - 4 \quad , \quad -2 \le x \le 2$$

$$g'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 4x = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \xrightarrow{(*)} y = 2 \;\Rightarrow\; f(0,2) = -4 \qquad (2)$$

و برای مرزهای $x = 2$ و $x = -2$ داریم:

$$x = 2 \xrightarrow{(*)} y = 0 \quad \Rightarrow \quad f(2,0) = 4 \qquad (3)$$

$$x = -2 \xrightarrow{(*)} y = 0 \quad \Rightarrow \quad f(-2,0) = 4 \qquad (4)$$

از (1)، (2)، (3) و (4) نتیجه می‌شود که:

$$\max f = 4 \quad \text{و} \quad \min f = -4$$

تذکر: برای به دست آوردن ماکزیمم و مینیمم تابع بر روی مرز $x^2 + y^2 = 1$ از روش ضرایب لاگرانژ نیز می‌توانستیم استفاده کنیم.

**۴۳-** گزینه «1» صحیح است.

با استفاده از قاعده زنجیره‌ای داریم:

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial u} =$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

**۴۴-** گزینه «2» صحیح است.

اگر تابع $f(x,y)=x^{y}$ در نظر بگیریم و $x_{0}=2$ و $y_{0}=3$ و $\Delta x=0/01$ و $\Delta y=0/03$ باشد، با استفاده از فرمول دیفرانسیل مقدار تقریبی عدد فوق به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=f_{x}=yx^{y-1}\Rightarrow f_{x}(2,3)=12 \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y}=x^{y}\mathrm{Ln}x \Rightarrow f_{y}(2,3)=8\mathrm{Ln}2$$

$$f(x_{0}+\Delta x\ ,\ y_{0}+\Delta y)=f(x_{0},y_{0})+f_{x}(x_{0},y_{0})\Delta x+f_{y}(x_{0},y_{0})\Delta y$$

$$\Rightarrow f(2/01\,,\,3/03)\approx f(2,3)+f_{x}(2\,,\,3)\,\Delta x+f_{y}(2\,,\,3)\,\Delta y \Rightarrow$$

$$f(2/011,3/03)=(2/01)^{3/03}\approx 8+0/12+0/24\mathrm{Ln}2=8/288$$

**۴۵-** گزینه «2» صحیح است.

ابتدا بردار قائم بر نیم‌کره فوق را می‌یابیم:

$$g(x,y,z):x^{2}+y^{2}+z^{2}-16=0 \Rightarrow \vec{n}=\frac{\nabla g}{|\nabla g|}$$

$$\nabla g=(2x,2y,2z)\Rightarrow \vec{n}=\frac{(2x,2y,2z)}{2\sqrt{x^{2}+y^{2}+z^{2}}}=\frac{1}{4}(x,y,z)$$

حال برای محاسبه مشتق سویی $f$ در امتداد بردار $\vec{n}$ داریم:

$$D_{\vec{n}}f=\nabla f\cdot\vec{n}$$

$$f(x,y,z)=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(x^{2}+y^{2}+z^{2})\Rightarrow \nabla f=\left(\frac{x}{x^{2}+y^{2}+z^{2}}\ ,\ \frac{y}{x^{2}+y^{2}+z^{2}}\ ,\ \frac{z}{x^{2}+y^{2}+z^{2}}\right)$$

$$\Rightarrow D_{\vec{n}}f=\nabla f\cdot\vec{n}=\frac{1}{4}\left(\frac{x^{2}+y^{2}+z^{2}}{x^{2}+y^{2}+z^{2}}\right)=\frac{1}{4}$$

**۴۶-** گزینه «4» صحیح است.

اگر معادله سطوح را به شکل $\begin{cases} f:x^{2}+y^{2}-5=0 \\ g:z-xy=0 \end{cases}$ در نظر بگیریم، برای محاسبه بردار مماس بر فصل مشترک داریم:

$$\begin{cases}\nabla f=(2x,2y,0)\\ \nabla g=(-y,-x,1)\end{cases}\xrightarrow{P(2,-1,-2)}\begin{cases}\nabla f=(4,-2,0)\\ \nabla g=(1,-2,1)\end{cases}$$

$P(2,-1,-3)$ بردار هادی فصل مشترک در نقطه $\Rightarrow \vec{u} = \nabla f \times \nabla g = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-2,-4,-6)$

در نقطه مورد نظر بردار نرمال صفحه عمود بر فصل مشترک با بردار مماس بر فصل مشترک در نقطه $(2,-1,-2)$ برابر است.

بنابراین:

$$\vec{n} = (2,4,6)$$

معادله صفحه مورد نظر $\Rightarrow +2(x-2)+4(y+1)+6(z+2) = x+2y+3z+6 = 0$

$$\Rightarrow x+2y+3z=-6 \xrightarrow[y=0\ ,\ z=0]{\text{محل تلاقی با محور } x \text{ ها}} x=-6$$

**۴۷-** گزینه «1» صحیح است.

از آن‌جایی که در گزینه‌ها هیچ صحبتی از عدم وجود حد نشده است، بنابراین علم به وجود حد داریم، لذا:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2y-y+2x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\left(\lim_{y\to 1}\frac{x^2y-y+2x-2}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x-1} \underset{\text{هوپیتال}}{=\!=\!=} \lim_{x\to 1}\frac{2x+2}{1} = 4$$

**۴۸-** گزینه «1» صحیح است.

ابتدا نقاط بحرانی تابع مورد نظر را می‌یابیم:

$$\nabla z = (3x^2-63+12y\ ,\ 3y^2-63+12x) = (0,0) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2+4y-21=0 & (*) \\ y^2+4x-21=0 & (**) \end{cases} \xrightarrow{\text{تفریق}} (x^2-y^2)+4(y-x)=0$$

$$\Rightarrow (x-y)(x+y-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ y=4-x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=y \xrightarrow{(*)} x^2-4x-21=0 & \Rightarrow x=-7\ ,3 \Rightarrow A(-7,-7)\ ,\ B(3,3) \\ y=4-x \xrightarrow{(*)} x^2-4x-5=0 & \Rightarrow x=-1\ ,5 \Rightarrow C(-1,5)\ ,\ D(5,-1) \end{cases}$$

برای تشخیص نوع نقاط بحرانی داریم:

$$\Delta = z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2 = (6x)(6y)-12^2 = 36(xy-4)$$

$A(-7,-7) \Rightarrow \Delta > 0$ و $f_{xx} = 6x = -42 < 0 \Rightarrow$ نقطه max

$B(3,3) \Rightarrow \Delta > 0$ و $f_{xx} = 6x = 18 > 0 \Rightarrow$ نقطه min

$C(-1,5)$ و $D(5,-1) \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow$ نقطه زینی

**۴۹-** گزینه «4» صحیح است.

با استفاده از تعریف مشتق سویی داریم:

$$D_{\vec{u}} f = \nabla f \cdot \vec{u}$$

اگر $\nabla f = (a,b)$ در نظر بگیریم، داریم:

$$\vec{u}_1 = (2,2) - (1,2) = (1,0) \quad \text{و} \quad D_{\vec{u}_1} f = 2 \Rightarrow (1,0)\cdot(a,b) = 2 \Rightarrow a = 2$$

$$\vec{u}_2 = (1,1) - (1,2) = (0,-1) \quad \text{و} \quad D_{\vec{u}_2} f = -2 \Rightarrow (0,-1)\cdot(a,b) = -2 \Rightarrow b = 2$$

توجه شود که در محاسبات فوق، $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ باید حتماً بردارهای یکانی باشند.

اگر نقطه $P(1,2)$ و نقطه $Q(4,6)$ باشد، آن‌گاه برای محاسبه مشتق سویی $f$ در نقطه $P$ و در جهتی به سمت $Q$ داریم:

$$\overrightarrow{PQ} = (4,6) - (1,2) = (3,4) \Rightarrow \vec{u}_3 = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\left|\overrightarrow{PQ}\right|} = \frac{1}{5}(3,4)$$

$$D_{\vec{u}_3} f = \nabla f \cdot \vec{u}_3 = \frac{1}{5}(2,2)\cdot(3,4) = \frac{14}{5}$$

**۵۰-** گزینه «3» صحیح است.

روش 1) اگر مثلاً $f(r) = r$ باشد، داریم:

$$\vec{a} = r\frac{\vec{r}}{r} = \vec{r} = (x,y,z) \Rightarrow \operatorname{div} \vec{a} = 1+1+1 = 3$$

حال اگر $f(r) = r$ را در گزینه‌ها قرار دهیم فقط به ازای گزینه 3 جواب 3 به دست می‌آید.

روش 2) با استفاده از خواص دیورژانس داریم:

$$\nabla\cdot(\vec{a}) = \nabla\cdot\left(f(r)\frac{\vec{r}}{r}\right) = \nabla\left(\frac{f(r)}{r}\right)\cdot\vec{r} + \frac{f(r)}{r}(\nabla\cdot\vec{r}) \qquad (*)$$

همان‌طور که در پاسخ تست 3 گفته شد، برای $f(r)$ داریم: $\nabla(f(r)) = f'(r)\frac{\vec{r}}{r}$، بنابراین:

$$\nabla\cdot(\frac{f(r)}{r})=\frac{d}{dr}(\frac{f(r)}{r})\frac{\vec{r}}{r}=\frac{f'(r)r-f(r)}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}=\frac{rf'(r)-f(r)}{r^3}\cdot\vec{r}$$

همچنین از آن‌جا که $\vec{r}=(x,y,z)$:

$$\nabla\cdot\vec{r}=\operatorname{div}\vec{r}=1+1+1=3$$

با جایگذاری روابط بالا در $(*)$ داریم:

$$\nabla(f(r)\frac{\vec{r}}{r})=\frac{rf'(r)-f(r)}{r^3}\vec{r}\cdot\vec{r}+3\frac{f(r)}{r}$$

می‌دانیم که $\vec{r}\cdot\vec{r}=\left|r\right|^2=r^2$، بنابراین داریم:

$$\operatorname{div}\vec{a}=\frac{rf'(r)-f(r)}{r}+\frac{3f(r)}{r}=\frac{2}{r}f(r)+f'(r)$$

**۵۱-** گزینه «2» صحیح است.

با توجه به این‌که بیش‌ترین افزایش برای یک تابع در جهت بردار گرادیان و اندازه آن برابر اندازه بردار گرادیان است، لذا داریم:

$$\begin{aligned}f_x&=yx^{y-1}\\ f_y&=x^y\mathrm{Ln}x\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\nabla f=(yx^{y-1},x^y\mathrm{Ln}x)\ \Rightarrow$$

$(e,1)$ در نقطه $\Rightarrow\ \max(D_{\vec{u}}f)=\nabla f(p)=(1,e)$

**۵۲-** گزینه «3» صحیح است.

روش 1) اگر قرار دهیم: $u(x,y)=\frac{x^4+y^4}{x+y}$، آن‌گاه داریم:

$$z=\mathrm{Ln}\frac{x^4+y^4}{x+y}=\mathrm{Ln}u\quad\Rightarrow\quad u(x,y)=e^z$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial \mathrm{Ln}u}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial \mathrm{Ln}u}{\partial u}=\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\Rightarrow\ x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{u}(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y})$$

تابع $u(x,y)$ یک تابع همگن از درجه 3 می‌باشد و بنابراین با استفاده از قضیه اویلر داریم:

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=3u\ \Rightarrow\ x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{u}(3u)=3$$

روش 2) اگر $u=\dfrac{x^4+y^4}{x+y}$، $z=f(u)=\ln u$، آن‌گاه از آن‌جا که تابع u همگن از درجه 3 است، داریم:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=3uf'(u)=3u\cdot\frac{1}{u}=3$$

**۵۳-** گزینه «2» صحیح است.

اگر سطح‌های موردنظر را به شکل $\begin{cases} f: x^2+2y^2+3z^2-6=0 \\ g: xyz-1=0\end{cases}$ در نظر بگیریم، آن‌گاه برای محاسبه بردار مماس بر فصل مشترک در نقطه $(1,1,1)$ داریم:

$$\begin{array}{l}\nabla f=(2x,4y,6z)=(2,4,6)\\ \nabla g=(yz,xz,xy)=(1,1,1)\end{array}\Rightarrow \vec{u}=\nabla f\times\nabla g=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & 4 & 6\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=(2,-4,2)$$

بنابراین خط مماس با فصل مشترک دارای بردار هادی $(2,-4,2)$ است، لذا داریم:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z-1}{2}\Rightarrow\begin{cases} x-1=z-1 \Rightarrow x=z\\ -2(x-1)=y-1\Rightarrow y+2x=3\end{cases}$$

**۵۴-** گزینه «3» صحیح است.

با توجه به این که $x_1$ و $x_2$ متغیرهای وابسته و $x_3$ و $x_4$ متغیرهای مستقل هستند و با استفاده از قضیه تابع ضمنی داریم:

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_3}=-\frac{\dfrac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x_3,x_2)}}{\dfrac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x_1,x_2)}}=-\frac{\begin{vmatrix} f_{13} & f_{12}\\ f_{23} & f_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12}\\ f_{21} & f_{22}\end{vmatrix}}$$

با توجه به ماتریس $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ هر یک از $f_{ij}$ها معلوم است به عنوان مثال $f_{23}=-1$ و $f_{11}=3$

لذا داریم:

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_3}=-\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1\\ 5 & 1\end{vmatrix}}=-\frac{1}{-2}=\frac{1}{2}$$

**۵۵-** گزینه «1» صحیح است.

با توجه به رابطه بالا واضح است که برای این‌که عبارت فوق معتبر باشد و ضرب بین ماتریس‌های موجود، امکان‌پذیر باشد باید ماتریس $A$ یک ماتریس مربعی مرتبه 2 باشد که اگر این ماتریس را به شکل $A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_4 \end{bmatrix}$ در نظر بگیریم، داریم: (صورت سؤال $A$ را یک ماتریس متقارن معرفی کرده است.)

$$\begin{bmatrix} dx & dy \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1dx+a_2dy & a_2dx+a_4dy \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}=$$

$$a_1d^2x+a_2dxdy+a_2dxdy+a_4d^2y=a_1d^2x+2a_2dxdy+a_4d^2y \qquad (*)$$

از طرفی دیفرانسیل مرتبه دوم $z$ برابر است با:

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}d^2x+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}d^2y \qquad (**)$$

از برابری $(*)$ و $(**)$ داریم:

$$a_1=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad \text{و} \quad a_2=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} \quad \text{و} \quad a_3=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$|A|=a_1a_4-a_2^2=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2$$

$$z=\frac{x-2y}{xy}=\frac{1}{y}-\frac{2}{x}=y^{-1}-2x^{-1} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} z_x=2x^{-2} \ , \quad z_{xx}=-4x^{-3} \ , \quad z_{xy}=0 \\ z_y=-y^{-2} \ , \quad z_{yy}=+2y^{-3} \end{cases} \xrightarrow[(x,y)=(1,2)]{} \begin{cases} z_{xx}=-4 \\ z_{yy}=\dfrac{1}{4} \\ z_{xy}=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow |A|=-4\times\frac{1}{4}-0=-1$$

**۵۶-** گزینه «1» صحیح است.

اگر جهت دلخواه $\vec{u}=(a,b)$ را در نظر بگیریم، آن‌گاه با استفاده از تعریف برای محاسبه‌ی مشتق سویی تابع $f$ در جهت $\vec{u}$ داریم:

$$D_{\vec{u}}f(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0+ta,0+tb)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2ab}{t\sqrt{t^4(a^4+b^4)}}=\lim_{t\to 0}\frac{ab}{t\sqrt{a^4+b^4}}$$

از آن‌جایی که به ازای $t\to 0$ مخرج کسر فوق صفر می‌شود، بنابراین حد فوق تنها زمانی می‌تواند موجود باشد که صورت کسر نیز صفر شود که در این صورت یا $a$ و یا $b$ باید صفر باشند که در این صورت حد فوق برابر صفر می‌شود و در سایر حالات حد $\infty$ است.

$$\begin{cases} a=0\to \vec{u}=\pm\vec{j} \\ b=0\to \vec{u}=\pm\vec{i}\end{cases}$$

**۵۷-** گزینه «1» صحیح است.

با استفاده از قاعده زنجیره‌ای داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

$z_x=y^2\sec^2 x$ و $z_y=2y\,tgx$

$x_t=2tuv$ و $y_t=v^2$

$$\begin{cases} u=1 \\ v=0 \\ t=2\end{cases}\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1\end{cases}\Rightarrow \begin{cases} z_x=1\ , & x_t=0 \\ z_y=0\ , & y_t=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial z}{\partial t}=1\times 0+0\times 0=0$$

**۵۸-** گزینه «4» صحیح است.

می‌دانیم که شرط کافی برای آن‌که $F(x,y)=(f(x,y)\ ,\ g(x,y))$ دارای معکوس باشد، آن است که $\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}\neq 0$ باشد، داریم:

$$\begin{cases} f(x,y,z)=2xy-y \\ g(x,y,z)=x^2+y+2z^2 \\ h(x,y,z)=xy+y\end{cases}\Rightarrow \text{شرط داشتن معکوس برای } F\Rightarrow\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(x,y,z)}\neq 0\Rightarrow$$

$$\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \\ h_x & h_y & h_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2y & 2x-1 & 0 \\ 2x & 1 & 4z \\ y & x+1 & 0\end{vmatrix}=-4z\begin{vmatrix} 2y & 2x-1 \\ y & x+1\end{vmatrix}=-12yz\neq 0$$

**۵۹-** گزینه «1» صحیح است.

اگر مسیر $x^2 + y^2 = ky$ که نشان‌دهنده مسیری دایره‌ای شکل (دایره‌های قائم) گذرنده از $(0,0)$ را در نظر بگیریم، داریم:

$$f(x,y) = \frac{y(ky)}{y^2 + (ky)^2} = \frac{ky^2}{y^2 + k^2y^2} = \frac{k}{1+k^2}$$

از آن‌جایی که جواب وابسته به $k$ است، بنابراین حد وجود ندارد و گزینه 1 صحیح است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

با توجه به حل بالا مشخص است که گزینه 4 اشتباه است.

گزینه 2:

برای محاسبه $f_x(0,0)$ در تابع $f$، $y = 0$ قرار می‌دهیم. $\Rightarrow \quad f(x,0) = \frac{0}{x^4} = 0$

برای محاسبه $f_y(0,0)$ در تابع $f$، $x = 0$ قرار می‌دهیم. $\Rightarrow f(0,y) = \frac{y^3}{y^2 + y^4} = \frac{y}{1+y^2} \quad \Rightarrow$

$$f'(0,y) = \left.\frac{1-y^2}{(1+y^2)^2}\right|_{y=0} = 1$$

گزینه 3: خطوط $y = kx$ را در نظر می‌گیریم:

$$f(x,kx) = \frac{kx(x^2 + k^2x^2)}{k^2x^2 + (x^2 + k^2x^2)^2} = \frac{k(k^2+1)x^3}{k^2x^2 + x^4(1+k^2)^2} = \frac{k(k^2+1)x}{k^2 + x^2(1+k^2)^2} \quad \Rightarrow$$

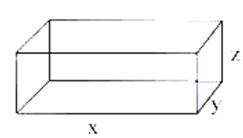
$$x \to 0 \quad \Rightarrow \quad f(x,kx) \to 0$$

**۶۰-** گزینه «2» صحیح است.

ابعاد حوض مکعب مستطیل را $x$، $y$ و $z$ در نظر می‌گیریم.

$\text{حجم حوض} = xyz = 256$

برای این که هزینه عایق‌بندی مینیمم شود باید مساحت جانبی کل که مورد عایق‌بندی قرار می‌گیرد مینیمم باشد، لذا داریم:




$\text{مساحت وجوه عقب و جلو} = 2xz$

$\text{مساحت وجوه کناری} = 2zy \quad \Rightarrow \quad \text{مساحت جانبی کل} = 2xz + 2zy + xz$

$\text{مساحت وجه پایین} = xz$

بنابراین تابعی که باید تحت قید $xyz = 256$ مینیمم شود $f(x,y,z) = 2xz + 2zy + xz$ می‌باشد، لذا با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ داریم:

$$\begin{matrix} f = 2xz + 2zy + xz & \Rightarrow & \nabla f = (y+2z\ ,\ x+2z\ ,\ 2x+2y) \\ g: xyz - 256 = 0 & \Rightarrow & \nabla g = (yz, xz, xy) \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \nabla f = \lambda \nabla g$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y + 2z = \lambda yz & (1) \\ x + 2z = \lambda xz & (2) \\ 2x + 2y = \lambda xy & (3) \end{cases}$$

(1) بر (2) تقسیم $\Rightarrow \dfrac{y+2z}{x+2z} = \dfrac{y}{z} \Rightarrow xy + 2zy = xy + 2zx$

$$\xrightarrow{z \neq 0} x = y$$

(2) بر (3) تقسیم $\Rightarrow \dfrac{x+2z}{2x+2y} = \dfrac{z}{y} \Rightarrow xy + 2zy = 2xz + 2zy$

$$\xrightarrow{x \neq 0} y = 2z$$

با توجه به قید $xyz = 256$ داریم:

$$\begin{cases} x = y \\ y = 2z \end{cases} \Rightarrow xyz = (2z)(2z)(z)$$

$$4z^3 = 256 \Rightarrow z^3 = 64 \Rightarrow z = 4\ ,\ x = y = 8$$

بنابراین ارتفاع حوض $z = 4$ می‌باشد.

**۶۱-** گزینه «2» صحیح است.

ابتدا مشتق سویی تابع f در جهت بردار $\vec{w}$ $(D_{\vec{w}} f)$ را می‌یابیم.

$$\begin{matrix} D_{\vec{w}} f = \nabla f \cdot \dfrac{\vec{w}}{|\vec{w}|} \\ \nabla f = (y+z\ ,\ x+z\ ,\ x+y) \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad D_{\vec{w}} f = (y+z\ ,\ x+z\ ,\ x+y) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) = \frac{2}{\sqrt{3}}(x+y+z)$$

حال تابع جدید را $g(x,y,z)=\frac{2}{\sqrt{3}}(x+y+z)$ در نظر می‌گیریم و برای محاسبه مشتق سویی این تابع و در جهت بردار $\vec{v}$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} D_{\vec{v}}g=\nabla g\cdot\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \\ \nabla g=\dfrac{2}{\sqrt{3}}(1,1,1) \end{array}\right.\Rightarrow D_{\vec{v}}g=\frac{2}{\sqrt{3}}(1,1,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1,0)=\frac{2}{\sqrt{15}}(2-1)=\frac{2}{\sqrt{15}}$$

**۶۲-** گزینه «2» صحیح است.

روش 1) ابتدا x، y و z را برحسب u، v و w محاسبه می‌کنیم، لذا داریم:

$$\begin{cases} uv=y+z \\ u=x+y+z \end{cases}\Rightarrow x=u-uv \quad \text{و} \quad \begin{cases} uv=y+z \\ uvw=z \end{cases}\Rightarrow y=uv-uvw \quad \text{و} \quad z=uvw$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1-v & -u & 0 \\ v-vw & u-uw & -uv \\ vw & uw & uv \end{vmatrix}\Rightarrow$$

$$(1-v)\begin{vmatrix} u-uw & -uv \\ uw & uv \end{vmatrix}+u\begin{vmatrix} v-vw & -uv \\ vw & uv \end{vmatrix}=u^2v(1-v)+u^2v^2=u^2v(1-v+v)=u^2v$$

روش 2) اگر قرار دهیم:

$$\begin{cases} F_1=x+y+z-u=0 \\ F_2=y+z-uv=0 \\ F_3=z-uvw=0 \end{cases}$$

نکته: با تعمیم مشتق ضمنی داریم:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=(-1)^n\frac{\dfrac{\partial(F_1,F_2,F_3)}{\partial(u,v,w)}}{\dfrac{\partial(F_1,F_2,F_3)}{\partial(x,y,z)}}$$

برای مسأله فوق $n=3$ می‌باشد، لذا داریم:

$$\Rightarrow \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -v & -u & 0 \\ -vw & -uw & -uv \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = u^2 v$$

**۶۳-** گزینه «3» صحیح است.

مشتق سویی $f$ در مبدأ و در جهت دلخواه بردار یکّه $\vec{u} = (a, b)$ را با استفاده از تعریف به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$D_{\vec{u}} f(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0 + ta\ ,\ 0 + tb) - f(0,0)}{t} = \lim \frac{t^3 ab^2}{t(t^2a^2 + t^4b^4)}$$

$$D_{\vec{u}} f(0,\ 0) = \lim_{t \to 0} \frac{ab^2}{a^2 + t^2b^4} \ \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \ \Rightarrow D_u f(0,0) = 0 \\ a \neq 0 \ \Rightarrow D_u f(0,0) = \dfrac{b^2}{a^2} \end{cases}$$

بنابراین تابع فوق در همه جهت‌ها دارای مشتق جهتی است و گزینه 3 صحیح است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه 1: با در نظر گرفتن مسیر $x = my^2$ داریم:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \lim_{y \to 0} \frac{my^4}{m^2y^4 + y^4} = \frac{m}{m^2 + 1}$$

بنابراین مقدار حد فوق وابسته به مقدار $m$ است و در نتیجه حد تابع فوق در نقطه $(0,0)$ موجود نیست و $f$ در مبدأ ناپیوسته است.

گزینه 2: از آن‌جا که در بالا اثبات شد که تابع $f$ در مبدأ پیوسته نیست، بنابراین در این نقطه دیفرانسیل‌پذیر نیز نمی‌باشد.

گزینه 4: در بالا اثبات شد که مشتق سویی $f$ در مبدأ در همه جهات موجود است نه فقط در جهت محور $x$ها.

**۶۴-** گزینه «3» صحیح است.

از آن‌جایی که درجه صورت و درجه مخرج برابر و مخرج همگن است، بنابراین با توجه به نکته 8 تابع $f$ در نقطه $(0,0)$ ناپیوسته است.

برای بررسی پیوستگی $D_x f(x,y)$ ابتدا تابع مربوطه را به صورت زیر می‌یابیم:

$$D_x f(x,y) = \frac{2xy^2(x^4+y^4) - 4x^3(x^2y^2)}{(x^4+y^4)^2}$$

برای این تابع نیز دیده می‌شود که درجه مخرج بیش‌تر از صورت بوده و مخرج همگن است، بنابراین با توجه به نکته 8، تابع فوق در نقطه $(0,0)$ ناپیوسته است و در نتیجه گزینه 3 صحیح است.

**۶۵-** گزینه «2» صحیح است.

با توجه به تابع چگالی $\delta(x,y)$ برای محاسبه جرم ناحیه فوق داریم:

$$\text{جرم} = \iint_D \delta(x,y)dA = \iint_D |x| + |y| dA$$

از آن‌جا که ناحیه $D$ به صورت دایره‌است، بهتر است که مسأله را در مختصات قطبی حل کنیم ولی قبل از آن بهتر است که برای هر ناحیه علامت $x$ و $y$ که داخل قدرمطلق هسند را تعیین کنیم، لذا داریم:

$$\text{جرم} = \iint_{D_1} (x+y)dA + \iint_{D_2} (y-x)dA + \iint_{D_3} (-x-y)dA$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_a^b r^2(\cos\theta + \sin\theta)dr\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_a^b r^2(\sin\theta - \cos\theta)dr\,d\theta + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \int_a^b -r^2(\sin\theta + \cos\theta)dr\,d\theta$$

$$= \left(\int_a^b r^2 dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta + \cos\theta)d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin\theta - \cos\theta)d\theta + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} -(\sin\theta + \cos\theta)d\theta\right)$$

$$= \left(\frac{r^3}{3}\Big|_a^b\right)\left((\sin\theta - \cos\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (-\sin\theta - \cos\theta)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + (\cos\theta - \sin\theta)\Big|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\right)$$

$$= \left(\frac{b^3 - a^3}{3}\right)(2+2+2) = 2(b^3 - a^3)$$

**۶۶-** گزینه «3» صحیح است.

با توجه به معادله مرزها بهتر است که از تغییر متغیرهای زیر استفاده کنیم:

$$\begin{cases} u = xy \\ v = \dfrac{y^2}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \le u \le 4 \\ 1 \le v \le 3 \end{cases} \quad \text{و} \quad \frac{1}{J} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ \dfrac{-y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x} \end{vmatrix}$$

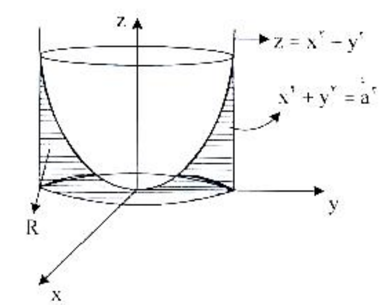
$$\Rightarrow \frac{1}{J} = \frac{3y^2}{x} \Rightarrow |J| = \frac{x}{3y^2} = \frac{1}{3V}$$

با جایگذاری ژاکوبین محاسبه شده و تغییر متغیرهای ذکر شده داریم:

$$\text{انتگرال} = \int_1^3 \int_2^4 \frac{1}{v^2} \times \frac{1}{3v} \, du \, dv = \int_1^3 \int_3^4 \frac{1}{3v^3} \, du \, dv = \frac{1}{3}\left(\int_1^3 \frac{dv}{v^3}\right)\left(\int_2^4 du\right) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} \times = \frac{8}{27}$$

**۶۷-** گزینه «2» صحیح است.

برای فهم بهتر ناحیه خواسته شده را به صورت زیر ترسیم می‌کنیم:




برای محاسبه حجم داریم:

$$V = \iiint_R dv = \iiint_R dz \, dx \, dy$$

با توجه به شکل، دیده می‌شود که $z$ از $z = 0$ تا $z = x^2 + y^2$ تغییرات دارد و تصویر محلی تلاقی دو رویه فوق در صفحه $xy$، $\left(\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ a = x^2 + y^2 \end{cases}\right)$ دایره $x^2 + y^2 = a^2$ می‌باشد، لذا داریم:

$$V = \iint_D \int_0^{x^2+y^2} dz \, dx \, dy = \iint_D (x^2 + y^2) dx \, dy$$

با حل در مختصات قطبی داریم:

$$V \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 \cdot r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^a r^3 dr \, d\theta = \left(\int_0^a r^3 dr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) \Rightarrow$$

$$V = \left( \frac{r^4}{4} \Big|_{0}^{a} \right)(2\pi) = \frac{\pi a^4}{2}$$

**۶۸-** گزینه «4» صحیح است.

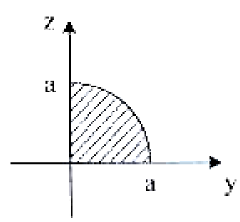
با توجه به این که حدود متغیر $x$ به صورت $0 \le x \le \sqrt{a^2 - y^2 - z^2}$ می‌باشد، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که مرز ناحیه $R$ به شکل زیر است:

مرز ناحیه $R$ یک نیم‌کره به شعاع $a$ و به مرکز مبدأ است

$$x = \sqrt{a^2 - y^2 - z^2} \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \;,\; x > 0 \;\rightarrow$$

از طرفی تصویر ناحیه $R$ بر صفحه $yz$ به صورت $y^2 + z^2 = a^2$ خواهد بود که در این صورت همان‌طور که در صورت سؤال نیز مشخص است تغییرات $y$ و $z$ به صورت $0 \le y \le \sqrt{a^2 - z^2}$ و $0 \le z \le a$ می‌باشد.

بنابراین ناحیه $D$ (تصویر $R$ بر صفحه‌ی $yz$) یک ربع دایره به شکل زیر است:




با توجه به این که ناحیه $R$ کروی است و با توجه به تابع زیر انتگرال را در مختصات کروی حل کنیم. برای این منظور با توجه به معادله کره $\rho = a$ برای حدود تغییرات $\rho$ داریم: $0 \le \rho \le a$

از طرفی با توجه به این که $0 \le z \le a$ می‌باشد برای حدود تغییرات $\varphi$ داریم: $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

و همچنین با توجه به ناحیه $D$ مشخص شده در بالا برای حدود تغییرات $\theta$ داریم: $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

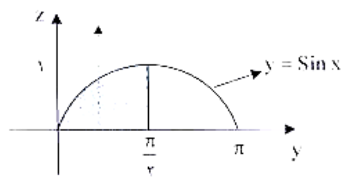
$$\text{انتگرال} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a} p(p^2 \sin\varphi) dp\, d\varphi\, d\theta = \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right) \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi \right) \left( \int_0^{a} p^3 dp \right) = \frac{\pi}{2} \times L \times \frac{a^4}{4} = \frac{\pi a^4}{8}$$

**۶۹-** گزینه «2» صحیح است.

برای محاسبه انتگرال خواسته شده باید جای دیفرانسیل‌ها را عوض کنیم، لذا برای محاسبه کران‌های جدید انتگرال داریم:

$$\begin{cases}\sin^{-1} y \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le y \le 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sin^{-1} y \ne x \quad \Rightarrow \quad y = \sin x \\ 0 \le y \le 1 \quad , \quad x \le \dfrac{\pi}{2}\end{cases} \Rightarrow \quad y = \sin x$$

بنابراین یکی از مرزها $y = \sin x$ می‌باشد و داریم:




$$\Rightarrow \text{انتگرال} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin x} \cos x\sqrt{1+\cos^2 x}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x\sqrt{1+\cos^2 x}\, dx \xrightarrow{\text{تغییر متغییر}} \begin{cases}1+\cos^2 x = u \to -2\sin x\cos x\, dx = du \\ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \to 1 \le u \le 2\end{cases}$$

انتگرال

$$\Rightarrow \text{انتگرال} = \int_2^1 -\frac{1}{2}\sqrt{u}\, du = -\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_2^1 = \frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

**۷۰-** گزینه «3» صحیح است.

با توجه به چگالی داده شده برای محاسبه جرم داریم:

$$\text{جرم} = \iiint_R (a-\rho)dv$$

از آن‌جا که ناحیه $R$ به شکل نیم‌کره است بهتر است از مختصات کروی استفاده کنیم و لذا داریم:

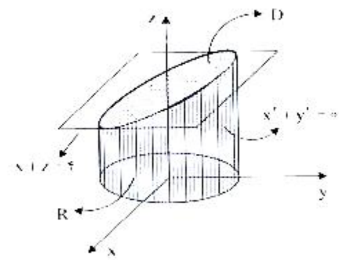
$$\begin{cases}0 \le \rho \le a \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le \theta \le 2\pi\end{cases} \quad \begin{aligned}\text{جرم} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a (a-\rho)\rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi\right)\left(\int_0^a (\rho^2 a-\rho^3)d\rho\right) = (2\pi)(1)\left(\frac{a^4}{12}\right) = \frac{\pi a^4}{6}\end{aligned}$$

**۷۱-** گزینه «3» صحیح است.

برای فهم بهتر ناحیه $R$ را به صورت تقریبی به شکل زیر رسم می‌کنیم، همان‌طور که در شکل دیده می‌شود، خط موازی محور zها از $z=0$ وارد و از $z=4-x$ خارج می‌شود و تصویر ناحیه هاشورخورده (محل تلاقی استوانه و صفحه) بر صفحه xy، داخل دایره $x^2+y^2=9$ می‌باشد، لذا داریم:

$$\text{حجم} = \iiint_R dv \iint_D \int_0^{4-x} dz\,dA = \iint_D (4-x)dA = 4\iint_D dA - \iint_D x\,dA$$

ناحیه $D$ نسبت به $x$ زوج است (با تبدیل $x \to -x$ معادله عوض نمی‌شود و یا این‌که می‌توان گفت که ناحیه $D$ نسبت به محور $x=0$ متقارن است) و تابع زیر انتگرال یعنی $x$ نسبت به $x$ فرد است و لذا داریم: $\iint_D x\,dA = 0$




بنابراین:

$$\text{حجم} = 4\iint_D dA = 4\times(\text{مساحت } D) = 4\times 9\pi = 36\pi$$

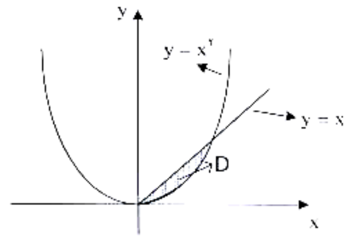
تذکر: اگر انتگرال فوق را در مختصات قطبی نیز حل کنیم به همین جواب خواهیم رسید.

**۷۲-** گزینه «3» صحیح است.

با توه به تابع زیر انتگرال بهتر است که از مختصات قطبی استفاده کنیم که در این صورت مرزهای ناحیه $D$ که $y=x^2$ و $y=x$ هستند در مختصات قطبی به شکل زیر تبدیل می‌شوند:

$$\begin{cases} y=x^2 \;\Rightarrow\; r\sin\theta = r^2\cos^2\theta \;\Rightarrow\; r=\dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}=\mathrm{tg}\theta\sec\theta \\ y=x \;\Rightarrow\; r\sin\theta = r\cos\theta \;\Rightarrow\; \theta=\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

با توجه به شکل ناحیه $D$ در پایین برای تغییرات $r$ و $\theta$ داریم:




$$\begin{cases} 0 \le r \le tg\theta \sec\theta \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\text{انتگرال} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sec\theta\, tg\theta} (r^2)^{\frac{-1}{2}} (r\, dr\, d\theta) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec\theta\, tg\theta)\, d\theta = \sec\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1$$

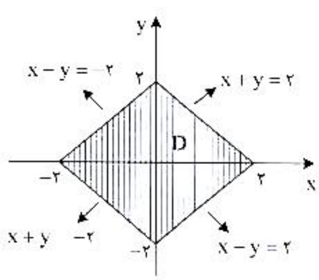
تذکر: برای حل این انتگرال می‌توانستیم از مختصات دکارتی نیز استفاده کنیم و به جواب برسیم، به صورت زیر:

$$\text{انتگرال} = \int_0^1 \sinh^{-1} \frac{y}{x} \Big|_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 (\sinh^{-1} 1 - \sinh^{-1} x) dx = \int_0^1 \sinh^{-1} 1 dx - \int_0^1 \underbrace{\sinh^{-1} x}_{u}\, \underbrace{dx}_{dv}$$

$$= \sinh^{-1} 1 - \left( x \sinh^{-1} x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x\, dx}{\sqrt{1 + x^2}} \right) = \sinh^{-1} 1 - \left( \sinh^{-1} 1 - \sqrt{1 + x^2} \Big|_0^1 \right) = \sqrt{2} - 1$$

**۷۳-** گزینه «1» صحیح است.

شکل ناحیه $D$ یک مربع با قطرهای موازی محورهای مختصات به شکل زیر است.




بنابراین با توجه به ناحیه $D$ و تابع زیر انتگرال بهتر است از تغییر متغیرهای زیر استفاده کنیم:

$$\begin{cases} u = x + y \rightarrow -2 \le u \le 2 \\ v = x - y \rightarrow -2 \le v \le 2 \end{cases}$$

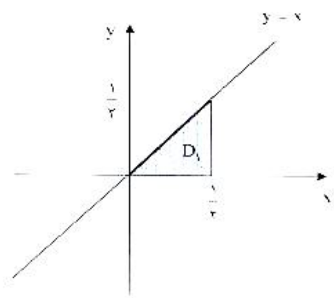
$$\frac{1}{J}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2 \ \Rightarrow \ |J|=\frac{1}{2}$$

$$\text{انتگرال}=\int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}e^{u}(\frac{1}{2}du\,dv)=\left(\int_{-2}^{2}dv\right)\left(\int_{-2}^{2}\frac{1}{2}e^{u}du\right)=2(e^{2}-e^{-2})=4\sinh 2$$

**۷۴-** گزینه «4» صحیح است.

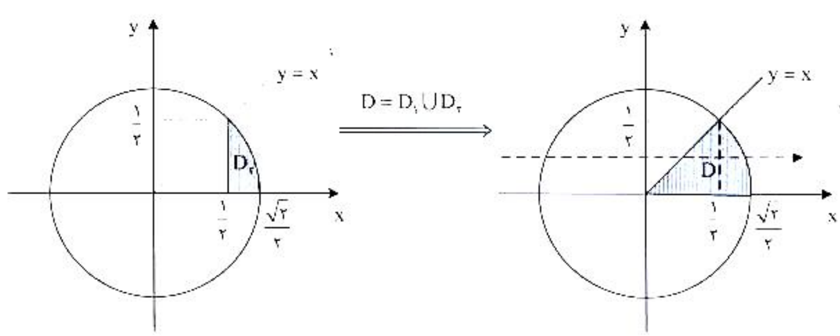
ابتدا شکل ناحیه $D$ توصیف شده در $I$ را که خود مجموع دو ناحیه $D_1$ و $D_2$ است را رسم می‌کنیم و سپس آن را به صورت $dx\,dy$ توصیف می‌کنیم.

بنابراین ابتدا هر یک از ناحیه‌های $D_1$ و $D_2$ را به صورت زیر رسم می‌کنیم:




$$\text{انتگرال اول سمت چپ تساوی} \Rightarrow D_1:\begin{cases}0\le y\le x\\ 0\le x\le \frac{1}{2}\end{cases}\rightarrow$$

$$\text{انتگرال دوم سمت چپ تساوی} \Rightarrow \ D_2:\begin{cases}0\le y\le \sqrt{1-x^2}\\ \frac{1}{2}\le x\le \frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases} \qquad \text{مرزهای ناحیه } D_2 \begin{cases}x^2+y^2=\frac{1}{2}\ ,\ \ y=0\\ x=\frac{1}{2}\ ,\ x=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

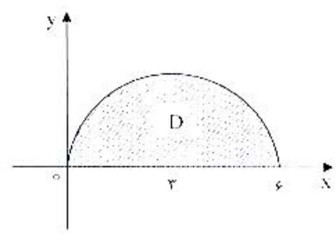


$$I = \int_{y=0}^{\frac{1}{2}} \int_{x=y}^{\sqrt{\frac{1}{2}-y^2}} f(x,y)dx\,dy$$

**۷۵-** گزینه «4» صحیح است.

ابتدا برای فهم بهتر شکل ناحیه موردنظر را که دارای مرز $y = \sqrt{6x - x^2}$ است به صورت زیر رسم می‌کنیم:

$$y = \sqrt{6x - x^2} \Rightarrow y^2 = 6x - x^2 \Rightarrow y^2 + x^2 - 6x + 9 = 9 \Rightarrow y^2 + (x-3)^2 = 9 \quad \text{و} \quad y \geq 0$$

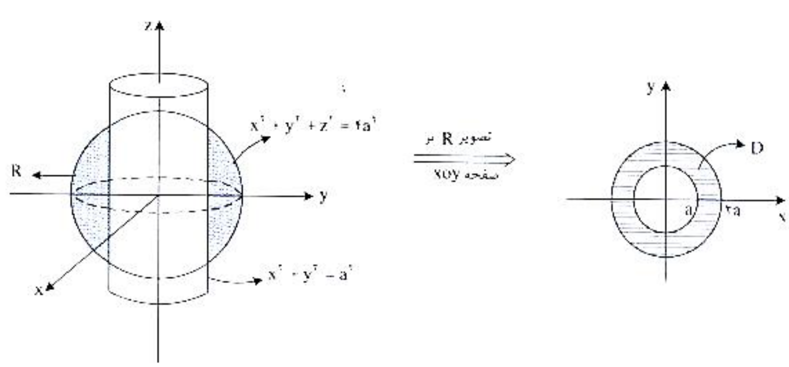



از آن‌جا که خط $x = 3$ محور تقارن ناحیه $D$ است، مرکز ثقل بر روی خط $x = 3$ واقع می‌شود و بنابراین $\overline{x} = 3$ و برای محاسبه $\overline{y}$ داریم:

$$\overline{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\int_0^6 \int_0^{\sqrt{6x-x^2}} y\,dy\,dx}{(\text{مساحت } D)} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^6 (6x - x^2)dx}{\frac{9\pi}{2}} = \frac{(3x^2 - \frac{x^3}{3})\Big|_0^6}{9\pi} = \frac{36}{9\pi} = \frac{4}{\pi}$$

**۷۶-** گزینه «3» صحیح است.

ابتدا برای فهم بهتر ناحیه $R$ و تصویر آن بر صفحه $xy$ (ناحیه $D$) را به صورت زیر رسم می‌کنیم:




با توجه به تابع زیر انتگرال، بهتر است که از مختصات استوانه‌ای استفاده کنیم.

از طرفی از آن‌جا که تابع زیر انتگرال $(x^2+y^2)$ نسبت به $z$ زوج است و ناحیه $R$ نیز نسبت به محور $z=0$ (صفحه $xoy$) متقارن است (با تبدیل $z \to -z$ در معادله مرزها و تابع زیر انتگرال، ضابطه‌ها تغییر نمی‌کند) بنابراین، $z \geq 0$ در نظر می‌گیریم و پاسخ را در 2 ضرب می‌کنیم. به این ترتیب خط موازی محور $z$ها از $z=0$ وارد و از کره $z=\sqrt{4a^2-r^2}$ خارج می‌گردد.

$$\text{محاسبه ناحیه } D: \begin{cases} \text{تصویر کره بر صفحه } xy \Rightarrow x^2+y^2=4a^2 \to r=2a \\ \text{تصویر استوانه بر صفحه } xy \Rightarrow x^2+y^2=a^2 \to r=a \end{cases} \Rightarrow a \leq r \leq 2a$$

$$\text{انتگرال } 2\int_0^{2\pi}\int_a^{2a}\int_0^{\sqrt{4a^2-r^2}}(r^2)(r\ dz\ dr\ d\theta)=2\int_0^{2\pi}\int_0^{2a} r^3\sqrt{4a^2-r^2}dr\ d\theta$$

$$=2(\int_0^{2\pi}d\theta)(\int_a^{2a}r^3\sqrt{4a^2-r^2}dr)=4\pi\int_0^{2a}r^3\sqrt{4a^2-r^2}dr$$

برای محاسبه انتگرال فوق از تغییر متغیر $4a^2-r^2=u$ استفاده می‌کنیم، لذا داریم:

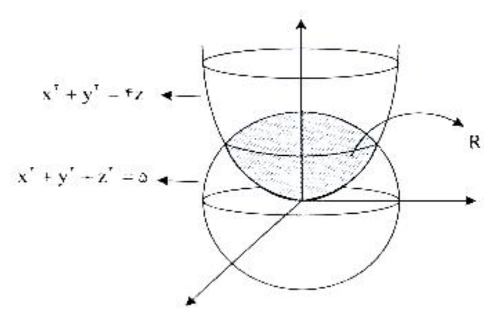
$$du=-2r\,dr \Rightarrow \begin{cases} r=a \to u=3a^2 \\ r=2a \to u=0 \end{cases}$$

$$\text{انتگرال}=4\pi\int_a^{2a}r^2\sqrt{4a^2-r^2}(r\,dr)=4\pi\int_{3a^2}^{0}(4a^2-u)\sqrt{u}(\frac{-1}{2}du)$$

$$\text{انتگرال}=2\pi\int_0^{3a^2}(4a^2u^{\frac{1}{2}}-u^{\frac{3}{2}})du=2\pi(\frac{8}{3}a^2u^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}})\Big|_0^{3a^2}=2\pi(8\sqrt{3}a^5-\frac{18\sqrt{3}}{5}a^5)=\frac{44}{5}\sqrt{3}\pi a^5$$

**۷۷-** گزینه «2» صحیح است.

برای فهم بهتر ناحیه $R$ را به صورت زیر رسم می‌کنیم:




با توجه به ناحیه فوق بهتر است که برای محاسبه حجم $R$ و حدود تغییرات $z$ $\left(\frac{x^2+y^2}{4} \leq z \leq \sqrt{5-(x^2+y^2)}\right)$ بهتر است که از مختصات استوانه‌ای استفاده کنیم که برای به دست آوردن حدود $r$ و $\theta$ داریم:

$$\begin{cases} \text{کره} & : z = \sqrt{5 - r^2} \\ \text{سهمیگون} & z = \dfrac{r^2}{4} \end{cases} \Rightarrow z = \sqrt{5 - 4z} \Rightarrow z^2 = 5 - 4z \Rightarrow z = 1 \Rightarrow r = 2$$

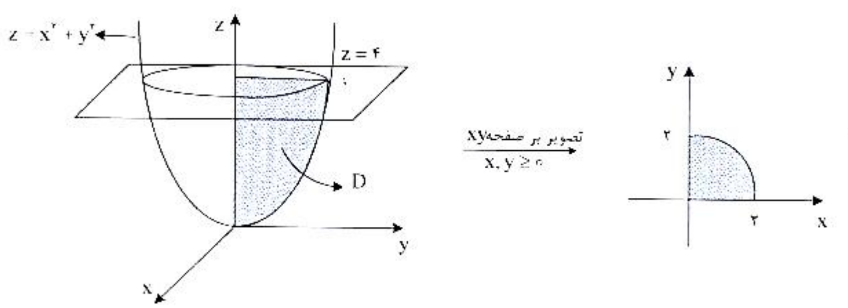
بنابراین تصویر ناحیه $R$ بر صفحه $xy$ داخل دایره $r = 2$ است، یعنی $\begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$. بنابراین داریم:

$$\text{حجم} = \iiint_R dv = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{\frac{r^2}{4}}^{\sqrt{5-r^2}} r\, dz\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (r\sqrt{5 - r^2} - \frac{r^3}{4}) dr\, d\theta$$

$$\text{حجم} = (\int_0^{2\pi} d\theta)\left(\int_0^2 (r\sqrt{5 - r^2} - \frac{r^3}{4}) dr\right) = 2\pi\left(-\frac{1}{3}(5 - r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{r^4}{16}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5} - 4)$$

**۷۸**- گزینه «3» صحیح است.

ابتدا برای فهم بهتر ناحیه $D$ را به صورت زیر رسم می‌کنیم:




با توجه به تصویر ناحیه $D$ بر صفحه $xy$ که یک دایره است و با توجه به تابع زیر انتگرال بهتر است که از مختصات استوانه‌ای استفاده کنیم. از طرفی با توجه به شکل بالا دیده می‌شود که خط موازی محور $z$ها از $z = r^2$ وارد و از $z = 4$ خارج می‌شود و برای به دست آوردن تصویر ناحیه $D$ بر صفحه $xy$ داریم:

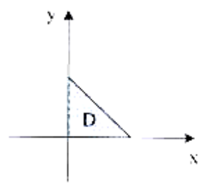
$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4 \xrightarrow{x,y \ge 0} \begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{انتگرال} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \int_{r^2}^4 2(r\cos\theta)(r\, dz\, dr\, d\theta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r^2 \cos\theta (4 - r^2) dr\, d\theta$$

$$=\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^{2}2r^2(4-r^2)dr\right)=\left(\sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\left(8\frac{r^3}{3}-\frac{2r^5}{5}\Big|_0^{2}\right)=\left(\frac{64}{3}-\frac{64}{5}\right)(1)=\frac{128}{15}$$

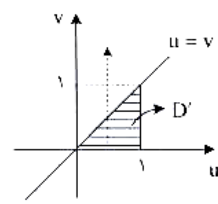
**۷۹-** گزینه «3» صحیح است.

با توجه به مرز ناحیه $D$ و تابع زیر انتگرال بهتر است که از تغییر متغیرهای زیر استفاده کنیم:




مرزهای ناحیه $D$ در مختصات جدید $\Rightarrow\begin{cases}x+y=1\to u=1\\ y=0\to v=0\\ x=0\to u=v\end{cases}$

$$\begin{cases}u=x+y\\ v=y\end{cases}$$



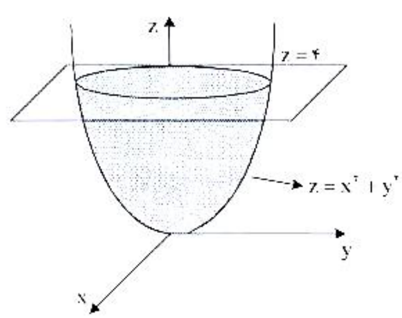

$$\frac{1}{J}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=1\quad\Rightarrow\quad|J|=1$$

$$\text{انتگرال}=\int_0^1\int_0^u tg\left(\frac{v}{u}\right)dv\,du\quad\Rightarrow$$

$$\text{انتگرال}=\int_0^1-u\,Ln\left(\cos\frac{v}{u}\right)\Big|_0^u du=-\int_0^1 u\,Ln\cos1\,du=\frac{-u^2}{2}Ln\cos\Big|_0^1=-\frac{1}{2}Ln\cos1$$

**۸۰-** گزینه «2» صحیح است.

برای تصور بهتر شکل ناحیه $R$ را به صورت زیر رسم می‌کنیم. برای محاسبه فاصله مرکز ثقل جسم همگن از صفحه $xoy$ کافیست که مقدار $\bar{z}$ را بیابیم، لذا داریم:



$$\overline{z}=\frac{M_{xy}}{M}=\frac{\iint_R\int z\,dv}{\iint_R\int dv}$$

ابتدا انتگرال $M_{xy}=\iiint z\,dv$ را محاسبه می‌کنیم که برای محاسبه این انتگرال، با توجه به مرز ناحیه R و تابع زیر انتگرال باید از مختصات استوانه‌ای استفاده کنیم، لذا داریم:

$$\text{xoy تصویر ناحیه R بر صفحه} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=z \\ z=4 \end{cases} \Rightarrow \quad x^2+y^2=4 \Rightarrow 0\le r\le 2 \ , \quad 0\le\theta\le 2\pi$$

برای محاسبه حدود تغییرات z با توجه به شکل بالا دیده می‌شود که خط موازی محور zها از $z=r^2$ وارد و از $z=4$ خارج می‌شود:

$$M_{xy}=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{r^2}^{4} z\,r\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\frac{1}{2}r(16-r^4)dr\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}(\int_0^{2\pi}d\theta)\left(\int_0^{2}(16r-r^5)dr\right)=\frac{1}{2}(2\pi)\left(8r^2-\frac{r^6}{6}\right)\Bigg|_0^2=\frac{64\pi}{3}$$

حال، حجم ناحیه R را به صورت زیر و با استفاده از مختصات استوانه‌ای همانند بالا محاسبه می‌کنیم.

$$M=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{r^2}^{4} r\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{2} r(4-r^2)dr\,d\theta=\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^{2}(4r-r^3)dr\right)$$

$$M=2\pi\left(2r^2-\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^2=8\pi \quad \Rightarrow \quad \overline{z}=\frac{M_{xy}}{M}=\frac{\frac{64\pi}{3}}{8\pi}=\frac{8}{3}$$

**۸۱-** گزینه «4» صحیح است.

با توجه به این‌که ناحیه R نسبت به محور $x=0$ (صفحه yoz) متقارن است (با تبدیل $x\to -x$ معادله مرز تغییر نمی‌کند) و همچنین با توجه به این که تابع x نسبت به x فرد است، بنابراین انتگرال $\iiint_R x\,dv$ برابر صفر است.

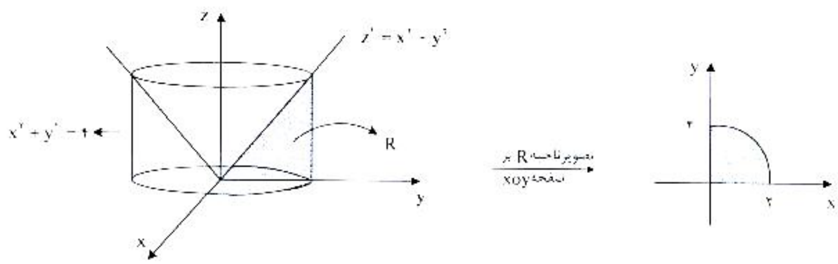
از طرفی با توجه به این‌که R نسبت به محور $(xoy)z=0$ متقارن است (با تبدیل $z\to -z$ معادله مرز تغییر نمی‌کند) و همچنین با توجه به این که تابع $\sin z$ نسبت به z فرد است، بنابراین انتگرال $\iiint_R \sin z\,dv$ برابر صفر است.

با توجه به توضیحات بالا داریم:

$$\iiint_R (2+x+\sin z)dv=\iiint_R 2dv=2(\text{حجم } R)=2(\frac{4}{3}\pi a^3)=\frac{8}{3}\pi a^3$$

**۸۲. گزینه «۴» صحیح است.**

برای تجسم بهتر ناحیه $R$ را به صورت زیر رسم می‌کنیم:



با توجه به معادله مرز ناحیه $R$ از مختصات استوانه‌ای به صورت زیر استفاده می‌کنیم.

$$\text{xoy بر صفحه } R \text{ تصویر} \Rightarrow x^2+y^2=4 \quad \text{و} \quad x,y\geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 0\leq r\leq 2 \\ 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

از آن‌جا که خط موازی محور zها از $z=0$ وارد و از $z=r$ خارج می‌شود داریم: $0\leq z\leq r$

$$.v=\iiint_R dv=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2\int_0^r r\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 r^2dr\,d\theta=(\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta)(\int_0^2 r^2dr).$$

$$\Rightarrow \quad v=(\frac{\pi}{2})\left(\frac{r^3}{3}\bigg|_0^2\right)=\frac{\pi}{2}\times\frac{8}{3}=\frac{4\pi}{3}$$

**۸۳-** گزینه «3» صحیح است.

با توجه به انتگرال $\int_0^1 f(x)dx$ کران‌های x به صورت $0\leq x\leq 1$ می‌باشد، بنابراین در انتگرال $f(x)=\int_1^x e^{t^2}dt$ کران بالا کوچک‌تر از کران پایین است و لذا آن را به شکل $f(x)=-\int_x^1 e^{t^2}dt$ می‌نویسیم، بنابراین داریم:

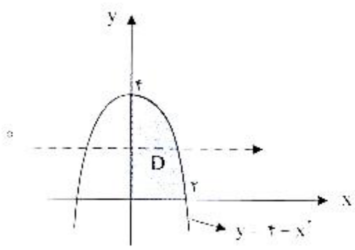
$$I=\int_0^1 f(x)dx=-\int_0^1\int_x^1 e^{t^2}dt\,dx$$

برای حل باید جای دیفرانسیل‌ها را عوض کنیم، لذا داریم:

$$I=-\int_0^1\int_0^t e^{t^2}dx\,dt=-\int_0^1 te^{t^2}dt=-\frac{1}{2}e^{t^2}\bigg|_0^1=\frac{1}{2}(1-e)$$

**۸۴-** گزینه «4» صحیح است.

با توجه به این که تابع اولیه نسبت به y قابل محاسبه نیست، باید ترتیب انتگرال‌گیری را عوض کنیم، لذا داریم:



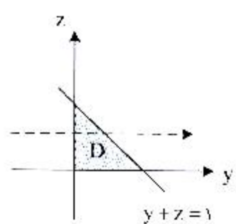

$$\begin{cases} 0 \le y \le 4 - x^2 \\ 0 \le x \le 2 \end{cases} \Rightarrow \quad D \text{ مرزهای ناحیه } \Rightarrow \begin{cases} y = 4 - x^2 \quad , \quad y = 0 \\ x = 0 \qquad\quad , \quad x = 2 \end{cases}$$

$$\text{انتگرال} = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{e^{2y}}{4-y} x \, dx \, dy = \int_0^4 \frac{e^{2y}}{(4-y)} \frac{(4-y)}{2} dy = \frac{1}{2} \int_0^4 e^{2y} dy$$

$$\text{انتگرال} = \frac{1}{4} e^{2y} \Big|_0^4 = \frac{1}{4}(e^8 - 1)$$

**۸۵-** گزینه «3» صحیح است.

هر خط موازی محور xها از $x = 0$ وارد و از $x = 1 - y - z$ از ناحیه خارج می‌شود و بنابراین $0 \le x \le 1 - y - z$ است و تصویر ناحیه s بر صفحه yz ناحیه محدود به خطوط $y = 0$ و $z = 0$ و $y + z = 1$ است و بنابراین داریم:




$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \le y \le 1 - z \\ 0 \le z \le 1 \end{cases} \Rightarrow \text{انتگرال} = \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-y-z} z^2 dx \, dy \, dz$$

$$\text{انتگرال} = \int_0^1 \int_0^{1-z} z^2 (1 - y - z) dy \, dz = \int_0^1 z^2 \left( y - \frac{1}{2} y^2 - zy \right) \Big|_0^{1-z} dz \quad \Rightarrow$$

$$\text{انتگرال} = \int_0^1 z^2 \left( 1 - z - \frac{1}{2}(1-z)^2 - z + z^2 \right) dz = \int_0^1 z^2 \left( \frac{1}{2} z^2 - z + \frac{1}{2} \right) dz = \frac{1}{60}$$

**۸۶**- گزینه «3» صحیح است.

خط موازی محور zها از $z = 0$ وارد و از رویه خارج می‌شود و تصویر شکل بر صفحه xy داخل دایره $x^2 + y^2 = 1$ است، بنابراین داریم:

$$\text{حجم} = \int_D \int \int_0^{\frac{1}{x^2+y^2+1}} dz\, dA = \int \int_D \frac{dA}{x^2 + y^2 + 1}$$

با توجه به ناحیه D و تابع زیر انتگرال با استفاده از مختصات قطبی داریم:

$$\text{حجم} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r dr d\theta}{r^2 + 1} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \mathrm{Ln}(r^2 + 1)\Big|_0^1 d\theta = \frac{\mathrm{Ln}2}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \pi \mathrm{Ln}2$$

**۸۷**- گزینه «4» صحیح است.

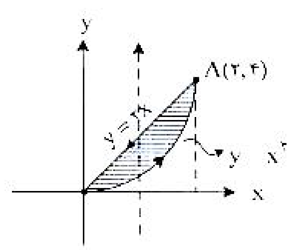
ابتدا خط را به صورت زیر پارامتر می‌کنیم:

$$\begin{cases} A(0,1,-1) \\ B(1,2,1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (1,1,2) \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2} = t \quad \text{و} \quad 0 \le t \le 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t+1 \\ z = 2t-1 \end{cases} , \quad 0 \le t \le 1 \Rightarrow \text{انتگرال} = \int_0^1 (t+1)dt + (2t-1)dt - t(2dt) = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$$

**۸۸**- گزینه «4» صحیح است.

ابتدا مسیر حرکت C را که در جهت مثلثاتی است به شکل زیر رسم می‌کنیم:




از آن‌جا که مسیر حرکت C بسته است، بنابراین با توجه به قضیه گرین داریم:

$$\oint_C 2ydx + 4xdy \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P(x,y) = 2y \\ Q(x,y) = 4x \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 4 - 2 = 2$$

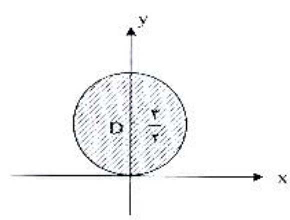
$$\text{انتگرال} = \iint_D 2dA = 2\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} dydx = 2\int_0^2 (2x - x^2)dx = 2\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{8}{3}$$

**۸۹-** گزینه «4» صحیح است.

از آن‌جایی که با تبدیل $z \to -z$ معادله کره و استوانه تغییر نمی‌کند، بنابراین ناحیه نسبت به صفحه $xy$ متقارن است. بنابراین مساحت قسمتی از ناحیه که بالای صفحه $xy$ واقع است را محاسبه کرده $(z \geq 0)$ و حاصل را در 2 ضرب می‌کنیم. ابتدا تصویر سطح خواسته شده $(S)$ در صفحه $xy$ را به صورت زیر می‌یابیم:

$$xy \text{ تصویر سطح در صفحه} \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 3y \ \to \ x^2 + y^2 - 3y + \frac{9}{4} = \frac{9}{4} \to \ x^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$$

تصویر سطح مورد نظر در صفحه $xy$ یک دایره به شعاع $\frac{3}{2}$ و مرکز $(0, \frac{3}{2})$ است.




از طرفی می‌دانیم که برای محاسبه مساحت خواسته شده باید انتگرال $\iint_S ds$ را محاسبه کنیم، بنابراین در این مرحله باید برای کره $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$ مقدار $ds$ را همانند زیر محاسبه کنیم، لذا داریم:

$$\nabla f = (2x, 2y, 2z) \to \ \left|\nabla f\right| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 6$$

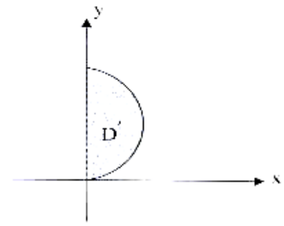
$$\nabla f \cdot k = 2z = 2\sqrt{9 - (x^2 + y^2)} \quad \Rightarrow \quad ds = \frac{\left|\nabla f\right|}{\left|\nabla f \cdot k\right|} dA = \frac{6}{2\sqrt{9 - (x^2 + y^2)}} dA = \frac{3}{\sqrt{9 - (x^2 + y^2)}} dA$$

$$\text{مساحت} = \iint_S ds = 2\iint_D \frac{3}{\sqrt{9 - (x^2 + y^2)}} dA$$

برای حل انتگرال فوق با استفاده از مختصات قطبی داریم:

$$D: x^2 + y^2 = 3y \to r^2 = 3r\sin\theta \ \Rightarrow \ r = 3\sin\theta \xrightarrow[\text{ناحیه D در بالا}]{\text{با توجه به شکل}} \begin{cases} 0 \leq r \leq 3\sin\theta \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

از آن‌جایی که در انتگرال بالا با تبدیل $x \to -x$ در تابع زیر انتگرال و معادله دایره، ضابطه تغییر نمی‌کند (ناحیه $D$ نسبت به محور $x=0$ متقارن است.)، بنابراین می‌توانیم محاسبه را برای $x \geq 0$ انجام داده و حاصل را در 2 ضرب کنیم، لذا در این صورت برای حدود $r$ و $\theta$ داریم:




$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq r \leq 3\sin\theta \\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{مساحت} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{3\sin\theta}\frac{3r\,dr\,d\theta}{\sqrt{9-r^2}} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} -3\sqrt{9-r^2}\Big|_0^{3\sin\theta} d\theta =$$

$$36\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos\theta)d\theta = 36(\theta-\sin\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 18(\pi-2)$$

**۹۰-** گزینه «4» صحیح است.

ابتدا رابطه داده شده بالا را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\operatorname{div}(\nabla u) = \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

$$u_x = 2x\varphi'(\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{t}) \to u_{xx} = 2\varphi'(t) + 4x^2\varphi''(t)$$

به طور مشابه برای $y$ و $z$ نیز داریم:

$$u_{yy} = 2\varphi'(t) + 4y^2\varphi''(t) \quad \text{و} \quad u_{zz} = 2\varphi'(t) + 4z^2\varphi''(t)$$

$$\Rightarrow \Delta u = 2\varphi'(t) + 4x^2\varphi''(t) + 2\varphi'(t) + 4y^2\varphi''(t) + 2\varphi'(t) + 4z^2\varphi''(t) \Rightarrow$$

$$\Delta u = 6\varphi'(t) + 4(\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{t})\varphi''(t) = 6\varphi'(t) + 4t\varphi''(t) = 0$$

برای حل معادله بالا قرار می‌دهیم: $v = \varphi'(t)$

$$\Rightarrow 4tv' + 6v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{-6v}{4t} \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{-3}{2t}dt \to \text{انتگرال می‌گیریم}$$

$$\text{Lnv} = -\frac{3}{2}\text{Lnt} + c' \rightarrow v = e^{-\frac{3}{2}\text{Lnt}+c'} = c^{-\frac{3}{2}\text{Lnt}} \times e^{c'} \;\Rightarrow\; \varphi'(t) = ce^{\text{Lnt}^{-\frac{3}{2}}} = ct^{-\frac{3}{2}}$$

**۹۱-** گزینه «4» صحیح است.

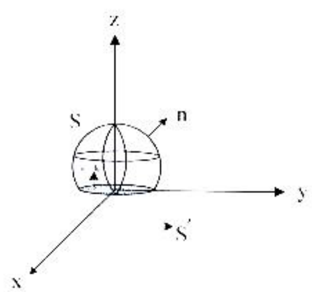
ابتدا تصویر $S$ بر صفحه $xy$ را به دست می‌آوریم که مرز این ناحیه از جایگذاری $z = 0$ در معادله کره فوق به دست می‌آید، لذا داریم:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 8 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \; x^2 + y^2 = 4 \rightarrow$$

ناحیه $D$ داخل یک دایره به شعاع 2 و مرکز مبدأ است.

در مرحله بعدی باید مقدار $n\,dS$ را برای کره فوق محاسبه کنیم، لذا ابتدا شکل کره فوق را به صورت زیر رسم می‌کنیم.

همان‌طور که در شکل نشان داده شده، برای محاسبه $n\,dS$ به جای محاسبه این مقدار برای سطح $S$ آن را برای سطح $S'$ که محاسبه ساده‌تری دارد به صورت زیر می‌یابیم:




از آن‌جا که $S'$ روی صفحه $xy$ است، بنابراین با توجه به نکته 21، $dS = dA$ می‌باشد $\Leftarrow$ $S' : n\,dS = k\,dA$

$$\Rightarrow \quad I = \iint_S \text{curl } F \cdot n\, dS = \iint_{S'} \text{curl } F \cdot n\, dS = \iint_{S'} \text{curl } F \cdot k\, dA$$

پارامتر $\text{curl } F \cdot K$ معادل محاسبه مؤلفه سوم $\text{curl } F$ همانند زیر است:

$$\text{curl } F \cdot K = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 e^{yz} - 2y\cos xz \xrightarrow[z=0]{\text{رؤی سطح } S'} \text{curl } F \cdot K = 3x^2 - 2y$$

$$\Rightarrow \; I = \iint_{S'} (3x^2 - 2y)\, dA = \iint_{S'} 3x^2 dA - \iint_{S'} 2y\, dA$$

ناحیه $D$ (که همان تصویر کره در صفحه $xy$ است) نسبت به محورهای $x$ و $y$ متقارن است و از آن‌جایی که تابع $2y$ نسبت به $y$ فرد است، بنابراین $\iint_{S'} 2y\, dA = 0$، لذا:

$$I = \iint_{S'} 3x^2 dA = \int_0^{2\pi}\int_0^2 3(r\cos\theta)^2 (r dr d\theta) = 3\left(\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta\right)\left(\int_0^2 r^3 dr\right) \Rightarrow$$

$$I = \frac{3}{2}\left(\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)\,d\theta\right)\left(\frac{r^4}{4}\bigg|_0^2\right) = \frac{3}{2}(2\pi)(4) = 12\pi$$

**۹۲-** گزینه «4» صحیح است.

شار برونسو برابر $\iint_S F\cdot n\,dS$ است، و از آن‌جا که سطح S بسته است با استفاده از قضیه دیورژانس داریم:

$$\text{شار} = \iint_S F\cdot n\,dS = \iiint_D \operatorname{div} F\,dv$$

$$F = (\alpha x^3, \beta y^3, \gamma z^3) \;\to\; \operatorname{div} F = 3(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2) = 3\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)$$

برای حل انتگرال سه‌گانه فوق با استفاده از تغییر متغیرهای بیضوی داریم:

$$\begin{cases} x = a\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = b\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = c\rho\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow J = abc\rho^2\sin\varphi \quad , \quad \begin{cases} 0\le\rho\le 1 \\ 0\le\varphi\le\pi \\ 0\le\nu\le 2\pi \end{cases}$$

$$\text{شار} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} 3\rho^2(abc\rho^2\sin\varphi)\,d\rho\,d\varphi\,d\theta =$$

$$abc\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\right)\left(\int_0^{1}3\rho^4\,d\rho\right) = \frac{12\pi}{5}abc = k\,abc$$

**۹۳-** گزینه «1» صحیح است.

ابتدا رابطه مربوط به خم c را با حذف y بین دو معادله داده شده، به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x = y \\ x^2+y^2+z^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{2}+\frac{z^2}{4} = 1$$

معادله بیضی فوق را به صورت زیر پارامتری می‌کنیم:

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = \sqrt{2}\cos t \\ z = 2\sin t \end{cases} \Rightarrow \quad c : R(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\cos t, 2\sin t)$$

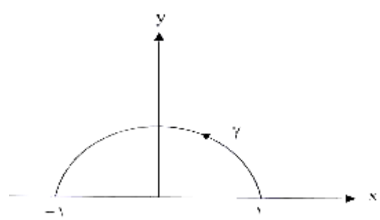
از آن‌جایی که در $\frac{1}{8}$ اول فضا $x, y, z \geq 0$ است، لذا داریم: $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \; R'(t) = (-\sqrt{2}\sin t, -\sqrt{2}\sin t, 2\cos t) \to \left|R'(t)\right| = \sqrt{2\sin^2 t + 2\sin^2 t + 4\cos^2 t} = 2 \;\Rightarrow$$

$$\text{انتگرال} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{2}\cos t + \sqrt{2}\cos t + 2\sin t)(2)dt = 4(\sqrt{2}\sin t - \cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4(\sqrt{2}+1)$$

**۹۴-** گزینه «3» صحیح است.

خم $\gamma$ را به صورت زیر رسم می‌کنیم:




از آن‌جایی که خم $\gamma$ باز است نمی‌توانیم از قضیه گرین استفاده کنیم، لذا با استفاده از تعریف داریم:

$$\begin{cases} x = \cos t \to dx = -\sin t\,dt \\ y = \sin t \to dy = \cos t\,dt \end{cases} \Rightarrow \; \text{انتگرال} = \int_0^{\pi} (3\sin t)(-\sin t\,dt) + (\cos t)(\cos t\,dt) =$$

$$\int_0^{\pi} (\cos^2 t - 3\sin^2 t)\,dt = \int_0^{\pi} (1 - 4\sin^2 t)dt = \int_0^{\pi} (1 - 2(1-\cos 2t))\,dt$$

$$= \int_0^{\pi} (2\cos 2t - 1)\,dt = -\pi$$

**۹۵-** گزینه «1» صحیح است.

با توجه به این‌که خم C یک بیضی و در نتیجه بسته است، ابتدا پایستاری میدان $F(2xyz^3, x^2z^3, 3x^2yz^2)$ را بررسی می‌کنیم، لذا داریم:

$$\text{curl } F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xyz^3 & x^2z^3 & x^2yz^2 \end{vmatrix} = 0$$

بنابراین میدان $F$ پایستار است. لذا کار آن در یک خم بسته برابر صفر است.

تذکر: اگر در این سؤال میدان $F$ پایستار نمی‌بود، می‌بایستی از طریق حل پارامتری و یا استفاده از قضیه استوکس مسئله را حل می‌کردیم.

**۹۶-** گزینه «2» صحیح است.

معادله سطح مورد نظر را به شکل $f = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - z = 0$ در نظر می‌گیریم.

تصویر سطح موردنظر بر صفحه $xy$ ناحیه $D$ می‌باشد که در صورت سؤال به صورت مستطیل مشخص شده است.

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 1 < y < 2 \end{cases}$$

در مرحله بعد، برای محاسبه $dS$ مربوط به سطح فضایی فوق داریم:

$$\nabla g = (x^{\frac{1}{2}}, 0, -1) \rightarrow |\nabla g| = \sqrt{x+1} \quad \text{و} \quad \nabla g \cdot k = -1$$

$$\Rightarrow \quad dS = \frac{|\nabla g|}{|\nabla g \cdot k|} dA = \sqrt{x+1}\, dA \ \Rightarrow \text{مساحت} = \iint_S dS = \iint_D \sqrt{x+1}\, dA =$$

$$\int_1^2 \int_0^1 \sqrt{x+1}\, dx\, dy = \left(\int_1^2 dy\right)\left(\int_0^1 \sqrt{x+1}\, dx\right) = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

**۹۷-** گزینه «1» صحیح است.

خم $C$ بسته و جهت حرکت روی آن مثلثاتی (مثبت) است، لذا با استفاده از قضیه گرین داریم:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial \rho}{\partial y} = -3x^2 - 3y^2 = -3(x^2 + y^2)$$

$$I = \iint_D -3(x^2+y^2)dA = -3\int_0^{\pi}\int_1^2 r^2 r\, dr\, d\theta = \left(-3\int_0^{\pi} d\theta\right)\left(\int_1^2 r^3 dr\right) = -\frac{45}{4}\pi$$

**۹۸-** گزینه «2» صحیح است.

از آن‌جایی که سطح S بسته است، با استفاده از قضیه دیورژانس داریم:

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \iiint_R (\operatorname{div} F)\,dv$$

$$F = (xz^2, yx^2, zy^2) \to \operatorname{div} F = x^2+y^2+z^2 \Rightarrow \text{انتگرال} = \iiint_R (x^2+y^2+z^2)dv$$

با توجه به تابع زیر انتگرال و با توجه به مرز ناحیه R که قسمت بالایی $(z \geq 0)$ کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ است بهتر است که از مختصات کروی استفاده کنیم، لذا داریم:

$$z \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \rho \leq a \\ 0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\text{انتگرال} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a \rho^2(\rho^2\sin\varphi)d\rho\,d\varphi\,d\theta = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi\right)\left(\int_0^a \rho^4 d\rho\right)$$

$$\text{کار} = 2\pi\times 1\times\frac{a^5}{5} = \frac{2\pi}{5}a^5$$

**۹۹-** گزینه «4» صحیح است.

برای محاسبه کار میدان داده شده، با توجه به خم $R(t)$ می‌توانیم از حل پارامتری استفاده کنیم، اما از آن‌جایی که $\operatorname{curl} F = 0$ و میدان پایستار است، بهتر است که از تابع پتانسیل به شکل زیر استفاده کنیم:

$$\operatorname{curl} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad\to$$

چون دامنه تعریف میدان F، $\mathbb{R}^2$ می‌باشد، بنابراین پایستار است.

همان‌طور که قبلاً هم گفته شد، برای محاسبه تابع پتانسیل از $\varphi$ از عبارت P جملات شامل y و z را حذف کرده و از باقیمانده جملات نسبت به x انتگرال می‌گیریم و در Q از جملات شامل z صرفنظر می‌کنیم و از باقیمانده جملات نسبت به y انتگرال می‌گیریم.

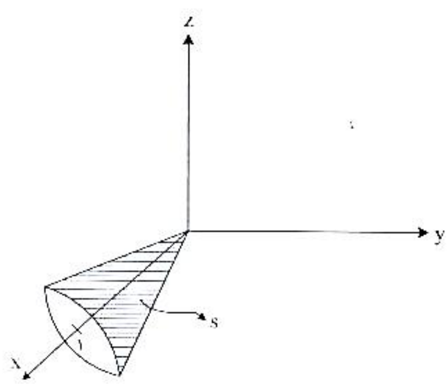
و در R نیز از جملات نسبت به z انتگرال می‌گیریم، مجموع حاصل سه انتگرال فوق برابر تابع پتانسیل است، لذا داریم:

$$\begin{cases} P(x,y,z)=x \\ Q(x,y,z)=y \\ R(x,y,z)=z \end{cases} \rightarrow \quad \varphi(x,y,z)=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}+c$$

$$=\int_R F\cdot dr=\varphi(0,1,\frac{\pi}{2})-\varphi(1,0,0)=(\frac{1}{2}+\frac{\pi^2}{8})-(\frac{1}{2})=\frac{\pi^2}{8}$$

**۱۰۰-** گزینه «2» صحیح است.

ابتدا شکل سطح s را به صورت زیر رسم می‌کنیم.




تصویر سطح s بر صفحه yz از تلاقی صفحه $x=1$ و مخروط $x=\sqrt{y^2+z^2}$ به صورت زیر محاسبه می‌شود.

تصویر سطح S بر صفحه yz داخل دایره‌ای به شعاع 1 و به مرکز مبدأ است.

$$\begin{cases} x=1 \\ x=\sqrt{y^2+z^2} \end{cases} \rightarrow \quad y^2+z^2=1 \rightarrow$$

در مرحله بعد به محاسبه ds برای مخروط فوق به صورت زیر می‌پردازیم:

$$f(x,y,z)=x^2-y^2-z^2=0 \quad \Rightarrow \quad \nabla f=(2x,-2y,-2z) \quad \text{و} \quad \nabla f\cdot i=2x$$

$$\left|\nabla f\right|=\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}=2\sqrt{x^2+y^2+z^2}=2\sqrt{2(y^2+z^2)}$$

$$ds=\frac{\left|\nabla f\right|}{\left|\nabla f\cdot i\right|}dA=\frac{2\sqrt{2(y^2+z^2)}}{2\sqrt{y^2+z^2}}dA=\sqrt{2}dA$$

بنابراین داریم:

$$\iint_S x^2 ds=\iint_D (y^2+z^2)\sqrt{2}\,dA$$

برای محاسبه این انتگرال از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم، بنابراین داریم:

$$D: 0 \le \theta \le 2\pi \quad \text{و} \quad 0 \le r \le 1$$

$$\text{انتگرال} = \int_0^{2\pi}\int_0^{1}\sqrt{2}\,r^2(r\,dr\,d\theta) = \sqrt{2}\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{1} r^3 dr\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

**۱۰۱-** گزینه «4» صحیح است.

با توجه به خصوصیت بیان شده در مبحث دیورژانس (نکته 2) اگر $\varphi = f(r)$ باشد، داریم:

$$\operatorname{div}(\varphi\vec{r}) = \nabla\cdot(\varphi\vec{r}) = \nabla\varphi\cdot\vec{r} + \varphi\nabla\cdot\vec{r}$$

$$\nabla\varphi = \nabla(f(r)) = f'(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

با توجه به صورت سؤال داریم: $\varphi = r^{-1}$، بنابراین:

$$\nabla\varphi = (r^{-1})'\frac{\vec{r}}{r} = \frac{-1}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r} = -r^{-3}\vec{r}$$

با توجه به این‌که $\vec{r} = (x, y, z)$ برای $\operatorname{div} r$ داریم:

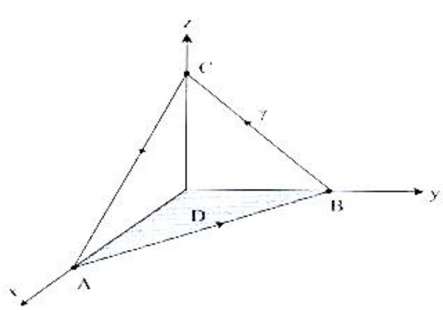
$$\operatorname{div}\vec{r} = \nabla\vec{r} = 1+1+1 = 3$$

$$\operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \nabla(r^{-1})\cdot\vec{r} + (r^{-1})\nabla\cdot\vec{r} = -r^{-3}\vec{r}\cdot\vec{r} + (r^{-1})(3)$$

$$\xrightarrow{\vec{r}\cdot\vec{r}=r^2} \operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = -r^{-1} + 3r^{-1} = \frac{2}{r}$$

**۱۰۲-** گزینه «4» صحیح است.

سطح S توصیف شده در بالا که دارای مرز $\gamma$ می‌باشد را به صورت زیر رسم می‌کنیم:



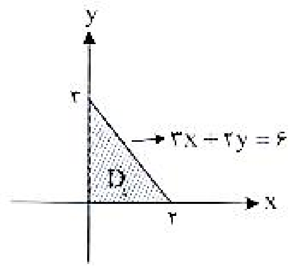

سطح S را که در واقع صفحه شامل نقاط A، B و C است را به صورت زیر توصیف می‌کنیم:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 1 \Rightarrow g: 3x + 2y + z - 6 = 0$$

برای محاسبه کار میدان بالا با استفاده از قضیه استوکس داریم:

$$\oint_{\gamma} F \cdot dr = \iint_S \text{curl } F \cdot n \, dS$$

ابتدا تصویر سطح S بر روی صفحه xy (ناحیه D) را با جایگذاری $z = 0$ در صفحه g به صورت زیر می‌یابیم:




$$D : 3x + 2y = 6 \;\; \Rightarrow$$

حال باید dS و n را برای سطح S به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$n = \frac{\nabla g}{|\nabla g|} \;\; \text{و} \;\; ds = \frac{|\nabla g|}{|\nabla g \cdot k|} dA \; \rightarrow \; nds = \frac{\nabla g}{|\nabla g \cdot k|} dA \;\; \Rightarrow \;\; nds = (3,2,1) dA$$

$$\nabla g = (3,2,1) \; \rightarrow \; \nabla g \cdot k = 1$$

$$\text{curl } F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+2 & x-z & y-z \end{vmatrix} = (2,0,1)$$

$$\text{انتگرال کار} = \iint_D (2,0,1) \cdot (3,2,1) dA = \iint_D 7 dA = 7 \times (\text{مساحت } D) = 7 \times \frac{2 \times 3}{2} = 21$$

**۱۰۳-** گزینه «4» صحیح است.

همان‌طور که قبلاً هم اشاره شد انتگرال فوق در واقع شار میدان $F(x,y,z) = (xz^2 + y \,,\; x^2y - 1 \,,\; x + y^2z)$ است و از طرفی با توجه به قضیه دیورژانس داریم:

$$\text{انتگرال} = \iint_S F \cdot nds = \iiint_R \text{div } F \, dv \quad \text{div } F = x^2 + y^2 + z^2$$

با توجه به تابع زیر انتگرال و ناحیه R که سطح بالایی نیم‌کره فوق است $(z \geq 0)$ بهتر است که از مختصات کروی استفاده کنیم، لذا داریم:

$$\begin{cases} 0 \le \rho \le 2 \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{انتگرال} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2}\rho^2(\rho^2\sin\varphi)d\rho\,d\varphi\,d\theta = \left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi\right)\left(\int_0^{2}\rho^4 d\rho\right) = \frac{64\pi}{5}$$

**۱۰۴-** گزینه «1» صحیح است.

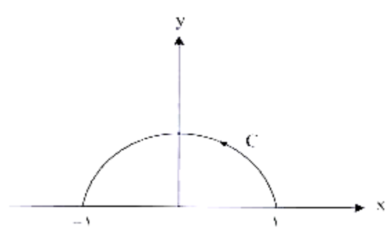
برای این‌که انتگرال کار مستقل از مسیر باشد، باید میدان $F$ پایستار باشد، لذا باید $\operatorname{curl} F = 0$ و داریم:

$$\operatorname{curl} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ e^x\cos y + ayz & axz + be^x\sin y & cxy + az \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} cx = ax \to c = a \\ ay = cy \to a = c \\ az - e^x\sin y = az + be^x\sin y \to b = -1 \end{cases} \longrightarrow$$ فقط گزینه 1 این خصوصیت را دارد.

**۱۰۵-** گزینه «4» صحیح است.

شکل سیم نیم‌دایره به صورت زیر است:




و از آن‌جا که خط $x = 0$ محور تقارن این سیم است. بنابراین $\bar{x} = 0$ باشد که در همه گزینه‌ها دیده می‌شود و برای محاسبه $\bar{y}$ داریم:

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\int_C y\delta ds}{\int_C \delta ds}$$

برای محاسبه انتگرال‌های بالا خم $C$ را به صورت پارامتری $0 \le t \le \pi$ و $C : R(t) = (\cos t, \sin t)$ می‌نویسیم، لذا داریم:

$$R'(t) = (-\sin t, \cos t) \to |R'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1 \to ds = |R'(t)|dt = dt$$

$$M_x = \int_C y\delta ds = 2\int_0^{\pi}(1 - \sin t)\sin t dt = \int_0^{\pi}(2\sin t - 1 + \cos 2t)dt = 4 - \pi$$

$$M = \int_C \delta ds = 2\int_0^{\pi}(1 - \sin t)dt = 2(\pi - 2) \Rightarrow \bar{y} = \frac{4-\pi}{2(\pi - 2)}$$

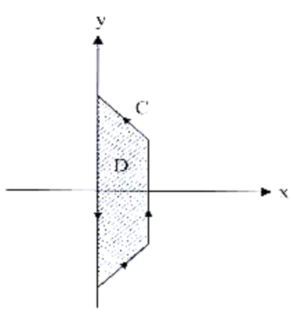
**۱۰۶-** گزینه «4» صحیح است.

با توجه به این‌که خم C بسته است می‌توانیم از قضیه گرین استفاده کنیم، لذا داریم:

$$\begin{cases} P(x,y) = x\sin y^2 - y^2 \\ Q(x,y) = x^2 y\cos y^2 + 3x \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2xy\cos y^2 + 3 - 2xy\cos y^2 - 2y = 3 - 2y$$

$$\Rightarrow I = \iint_D (3 - 2y)dA = \iint_D 3dA - 2\iint_D ydA$$

با توجه به رئوس ذوزنقه فوق، سطح D را به صورت زیر ترسیم می‌کنیم:

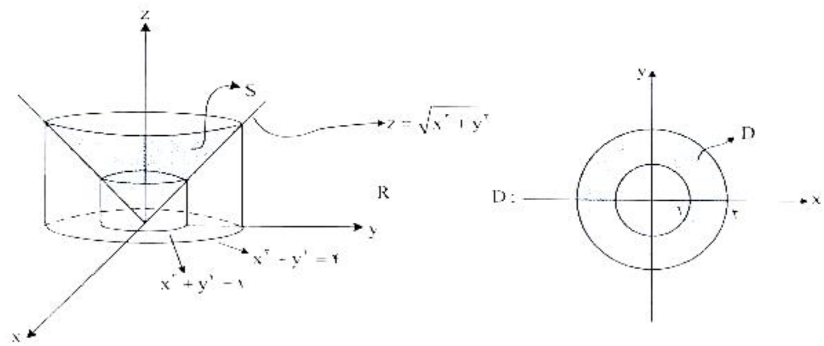



دیده می‌شود که سطح D نسبت به خط $y = 0$ متقارن است و تابع زیر انتگرال دوم نسبت به y فرد است (با تبدیل $y \to -y$ ضابطه قرینه می‌شود.) بنابراین $\iint_D ydA = 0$ و داریم:

$$I = \iint_D 3dA = 3(\text{مساحت } D) = 3 \times \frac{(2+4)\times 1}{2} = 9$$

**۱۰۷-** گزینه «1» صحیح است.

برای فهم بهتر سطح S مورد نظر را به صورت زیر ترسیم می‌کنیم:



همان‌طور که در شکل هم دیده می‌شود، تصویر سطح بر صفحه xy بین دو دایره $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=4$ می‌باشد.

برای محاسبه dS برای سطح مشخص شده بالا داریم:

$$g: z^2-x^2-y^2=0 \rightarrow \nabla g=(-2x,-2y,2z) \rightarrow \nabla g\cdot k=2z=2\sqrt{x^2+y^2}$$

$$|\nabla g|=\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}=2\sqrt{2(x^2+y^2)} \Rightarrow$$

$$dS=\frac{|\nabla g|}{|\nabla g\cdot k|}dA=\frac{2\sqrt{2(x^2+y^2)}}{2\sqrt{(x^2+y^2)}}dA=\sqrt{2}\,dA$$

بنابراین برای محاسبه سطح S داریم:

$$\text{سطح } S=\iint_S dS=\iint_D \sqrt{2}\,dA=\sqrt{2}(\text{مساحت } D)=\sqrt{2}(4\pi-\pi)=3\sqrt{2}\pi$$

**۱۰۸-** گزینه «4» صحیح است.

از آن‌جایی که سطح S بسته می‌باشد با استفاده از قضیه دیورژانس داریم:

$$F(x,y,z)=(ax,by,cz) \rightarrow \text{div } F=a+b+c$$

$$\text{انتگرال}=\iint_R\int \text{div } F\,dv=\iiint_R (a+b+c)\,dv=(a+b+c)(\text{حجم بیضی‌گون})=\frac{4}{3}\pi abc(a+b+c)$$

**۱۰۹-** گزینه «2» صحیح است.

ابتدا پایستار بودن میدان $F=\left(x(x-y),-(\frac{1}{2}x^2-y)\right)$ را بررسی می‌کنیم، لذا:

$\frac{\partial Q}{\partial x} = -x = \frac{\partial P}{\partial y} \rightarrow$ میدان F پایستار است.

بنابراین برای محاسبه انتگرال فوق از نقطه $(0,5)$ تا $(-3,4)$ می‌توانیم از تابع پتانسیل استفاده کنیم، لذا:

$$\begin{cases} P = x(x-y) \\ Q = -(\frac{1}{2}x^2 - y) \end{cases} \Rightarrow \varphi(x,y) = \frac{x^2}{3} - \frac{1}{2}x^2 y + \frac{y^2}{2} + c$$

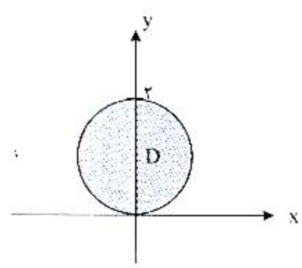
$$\text{انتگرال} = \varphi(-3,4) - \varphi(0,5) = (-9 - 18 + 8) - (0 - 0 + \frac{25}{2}) = -\frac{63}{2}$$

**۱۱۰-** گزینه «4» صحیح است.

از آن‌جا که خم C بسته است از قضیه گرین استفاده می‌کنیم، لذا داریم:

$$\begin{cases} P(x,y) = e^x - yx^2 \\ Q(x,y) = xy^2 - e^y \end{cases} \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = (x^2 + y^2) \rightarrow \text{انتگرال} = \iint_D (x^2 + y^2)dA$$

سطح D که ناحیه داخل خم C است به صورت زیر است:




$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y = 0 \rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1 \rightarrow \\ r^2 = 2r\sin\theta \rightarrow r = 2\sin\theta \end{cases} \xrightarrow[\text{مختصات قطبی}]{\text{استفاده از}} \begin{cases} 0 \le r \le 2\sin\theta \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$$

$$\text{انتگرال} = \int_0^\pi \int_0^{2\sin\theta} r^2 (r\,dr\,d\theta) = \int_0^\pi \int_0^{2\sin\theta} r^2 dr\,d\theta = \int_0^\pi 4\sin^4\theta\,d\theta =$$

$$\int_0^\pi (1-\cos 2\theta)^2 d\theta = \int_0^\pi \left(1 - 2\cos 2\theta + \left(\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right)\right) d\theta = \frac{3\pi}{2}$$

**۱۱۱-** گزینه «3» صحیح است.

بردار $\vec{R}=(x,y,z)$ می‌باشد و برای محاسبه $\vec{T}$ داریم:

دایره‌های به شعاع $\Rightarrow\ x^2+y^2=\frac{1}{4}\ \xrightarrow[\text{دایره } C]{\text{شکل پارامتری}}\ C:\gamma(t)=\left(\frac{1}{2}\cos t\ ,\ \frac{1}{2}\sin t, 0\right)\quad 0\le t\le 2\pi$

$\frac{1}{2}$

برای محاسبه بردار یکّه مماس $T$ داریم:

$$\gamma'(t)=\left(-\frac{1}{2}\sin t,\frac{1}{2}\cos t,0\right)\to\ \left|\gamma'(t)\right|=\frac{1}{2}\ \text{ و }\ \vec{T}=\frac{\gamma'(t)}{\left|\gamma'(t)\right|}$$

$$\to\ \vec{T}=\frac{\left(-\frac{1}{2}\sin t,\frac{1}{2}\cos t,0\right)}{\frac{1}{2}}=(-\sin t,\cos t,0)$$

$$\oint_C T\cdot dR=\oint_C T_x dx+T_y dy\ \text{ و }\ \begin{cases}dx=-\sin t dt\\ dy=\cos t dt\end{cases}\to$$

$$\oint_C T\cdot dR=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\sin t\right)(-\sin t dt)+\left(\frac{1}{2}\cos t\right)(\cos t dt)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}dt=\pi$$

**۱۱۲-** گزینه «1» صحیح است.

ابتدا بردار سرعت را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\vec{v}(t)=\vec{r}'(t)=(-12\cos^2 t\sin t)\vec{i}+(12\sin^2 t\cos t)\vec{j}$$

حال مقدار سرعت برابر است با:

$$v(t)=\left|\vec{v}(t)\right|=\sqrt{\left(-12\cos^2 t\sin t\right)^2+(12\sin^2 t\cos t)^2}=12\sin t\cos t\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}.$$

$$\Rightarrow\ v(t)=12\sin t\cos t=6\sin 2t$$

بیش‌ترین مقدار $\sin 2t$ برابر با 1 می‌باشد، لذا:

$$2t=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\ t=\frac{\pi}{4}\ \Rightarrow\ \sin 2t=1\ \Rightarrow\ v_{max}=v(\frac{\pi}{4})=6$$

۱۱۳- گزینه «4» صحیح است.

برای این‌که تابع $f(x,y)$ در نقطه‌ی $(1,0)$ پیوسته باشد باید مقدار حد تابع در $(x,y)\to(1,0)$ با مقدار تابع در نقطه $(1,0)$ برابر باشد. لذا ابتدا وجود حد تابع را مورد بررسی قرار می‌دهیم و برای این منظور دو مسیر زیر را انتخاب می‌کنیم:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{(x-1)y}{x^2+y^2-2x+1}=\lim_{\substack{x\to1\\y\to0}}\frac{(x-1)y}{x^2+y^2-2x+1}=\lim_{y\to0}\frac{0}{y^2}=0$$

مسیر 2: اگر مسیر $y=x-1$ را انتخاب کنیم، در یک همسایگی $(1,0)$ داریم:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{(x-1)y}{x^2+y^2-2x+1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-1)}{x^2+(x-1)^2-2x+1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2+(x-1)^2}=\frac{1}{2}$$

با توجه به این‌که از دو مسیر متفاوت دو مقدار مختلف برای حد تابع $f(x,y)$ در نقطه‌ی $(x,y)\to(1,0)$ به دست آمد بنابراین حد تابع موجود نیست و در نتیجه تابع $f(x,y)$ در نقطه‌ی $(1,0)$ ناپیوسته می‌باشد.

۱۱۴- گزینه «1» صحیح است.

برای محاسبه‌ی مشتق سویی تابع $f(x,y,z)$ در امتداد بردار یکه $\vec{u}=(a,b,c)$ و در نقطه‌ی $p(x_0,y_0,z_0)$ با توجه به تعریف داریم:

$$\nabla f_{\vec{u}}\Big|_P=\overrightarrow{\nabla f(p)}\cdot\vec{u}\qquad(*)$$

لذا برای تابع $u(x,y,z)=x^2z+\dfrac{y^2}{z}$ ابتدا گرادیان تابع در نقطه $(3,2,1)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\Rightarrow\ \overrightarrow{\nabla u}(3,2,1)=(6,4,5)\ \overrightarrow{\nabla u}(x,y,z)=(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z})\Rightarrow\overrightarrow{\nabla u}(x,y,z)=(2xz,\frac{2y}{z},x^2-\frac{y^2}{z^2})$$

بردار یکه : $\vec{v}=(2,-1,2)\Rightarrow\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\dfrac{1}{3}(2,-1,2)$

با جایگذاری در رابطه‌ی (*) داریم:

$$D_{\vec{v}}u\Big|_P=\nabla u(3,2,1)\cdot\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=(6,4,5)\cdot\frac{1}{3}(2,-1,2)=\frac{1}{3}(12-4+10)=6$$

**۱۱۵-** گزینه «3» صحیح است.

ابتدا معادله‌ی صفحه مماس بر رویه داده شده را می‌یابیم و برای این منظور بردار نرمال صفحه مماس را باید داشته باشیم. همچنین با توجه به این‌که بردار نرمال صفحه مماس بر رویه در نقطه‌ی $(1,2,-1)$ با بردار نرمال رویه که همان بردار گرادیان رویه می‌باشد یکسان است، داریم:

رویه: $F(x,y,z)=3x-y+xyz+1=0 \Rightarrow$

بردار نرمال صفحه‌ی مماس: $\vec{n}=\nabla F\Big|_{(1,2,-1)}=(3+yz\ ,\ xz-1\ ,\ xy)\Big|_{(1,2,-1)}=(1,-2,2)$

از طرفی معادله‌ی صفحه در نقطه‌ی $(x_0,y_0,z_0)$ با بردار نرمال $(a,b,c)$ برابر است با:

معادله‌ی صفحه: $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

لذا با جایگذاری $\vec{n}=(1,-2,1)$ و نقطه‌ی $p(1,2,-1)$ در رابطه‌ی فوق داریم:

معادله‌ی صفحه‌ی مماس: $1(x-1)-2(y-2)+2(z+1)=0 \Rightarrow x-2y+2z=-5$

حال برای یافتن نقطه‌ی تلاقی صفحه فوق با محور xها با قرار دادن $x=y=0$ در معادله داریم:

$$x=y=0 \Rightarrow 0-2\times 0+2z=-5 \Rightarrow z=-\frac{5}{2}$$

**۱۱۶-** گزینه «3» صحیح است.

مقدار انحناء تابع $y=f(x)$ برابر است با:

$$k(x)=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

لذا ابتدا $y'$ و $y''$ را محاسبه می‌کنیم:

$$y=xe^{-x} \Rightarrow \begin{cases} y'=e^{-x}-xe^{-x} \xrightarrow{x=0} y'=1 \\ y''=-e^{-x}-e^{-x}+xe^{-x} \xrightarrow{x=0} y''=-2 \end{cases}$$

و با جایگذاری در رابطه‌ی انحناء داریم:

$$k(x)\Big|_{x=0}=\frac{|y''(0)|}{\left(1+y'^2(0)\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{(1+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

**۱۱۷-** گزینه «4» صحیح است.

ابتدا هر یک از عبارت $\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases}\frac{\partial A}{\partial x}=(2xy,0,y^2z^2) \rightarrow \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}=(2y,0,0)\\ \frac{\partial A}{\partial y}=(x^2,-4yz,2xyz^2) \rightarrow \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}=(0,-4z,2xz^2)\end{cases}$$

و لذا با ضرب خارجی دو عبارت فوق داریم:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\times\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2y & 0 & 0\\ 0 & -4z & 2xz^2\end{vmatrix}=(0,-4xyz^2,-8yz)$$

در نقطه‌ی $(2,1,-2)$ داریم:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\times\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}=(0,-32,16) \Rightarrow \left|\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\times\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right|=\sqrt{32^2+16^2}=16\sqrt{5}$$

**۱۱۸-** گزینه «2» صحیح است.

بردار $\operatorname{curl} F$ برابر است با:

$$\operatorname{curl} F=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ yz^2 & xz & xy\end{vmatrix}=(0,2yz-y,z-z^2)$$

و برای نقطه‌ی $(5,1,-1)$ داریم:

$$\operatorname{curl} F\Big|_{(5,1,-1)}=(0,-2-1,-1-1)=(0,-3,-2)=-3\vec{j}-2\vec{k}$$

**۱۱۹-** گزینه «2» صحیح است.

برای یافتن نقاط بحرانی مشتق تابع را برابر صفر قرار می‌دهیم، لذا:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0 \Rightarrow 6x-3x^2=0 \Rightarrow \ x=0 \ , \ x=2 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0 \Rightarrow 6y+4=0 \Rightarrow y=-\dfrac{2}{3}\end{cases} \Rightarrow \text{نقاط بحرانی}: \begin{cases}(0,-\dfrac{2}{3}) \\ (2,-\dfrac{2}{3})\end{cases}$$

حال برای تشخیص نوع نقاط بحرانی داریم:

$$\Delta = f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2 \quad , \quad \begin{cases} z_{xx}=6-6x \\ z_{yy}=6 \\ z_{xy}=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \ \Delta = 6(6-6x)=36(1-x) \Rightarrow \begin{cases}(0,-\dfrac{2}{3}) \Rightarrow \ \Delta=36>0 \ , \ Z_{yy}>0 \rightarrow \\ (2,-\dfrac{2}{3}) \Rightarrow \ \Delta=-36<0 \ \rightarrow\end{cases}$$

**۱۲۰-** گزینه «2» صحیح است.

$u$ و $v$ تابعی از $x$ و $y$ هستند، لذا:

$$F: uv+x^2+xy=0 \quad , \quad G: u^2+v^2--xy-y^2=0$$

و برای محاسبه $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ با استفاده از تعریف ژاکوبی داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix}F_x & F_v \\ G_x & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v \\ G_u & G_v\end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix}2x+y & u \\ -y & 2v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}v & u \\ 2u & 2v\end{vmatrix}} \qquad (*)$$

از طرفی برای نقطه‌ی $x=2$ و $y=-5$ و $u=\sqrt{3}$ داریم:

$$uv+x^2+xy=0 \xrightarrow[u=\sqrt{3}]{x=2\,,\,y=-5} \sqrt{3}v+4-10=0 \ \Rightarrow \ v=2\sqrt{3}$$

و با جایگذاری در رابطه‌ی $(*)$ داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix}-1 & \sqrt{3} \\ +5 & 2\times 2\sqrt{3}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 4\sqrt{3}\end{vmatrix}}=-\frac{-4\sqrt{3}-5\sqrt{3}}{24-6}=\frac{9\sqrt{3}}{18}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

**۱۲۱-** گزینه «1» صحیح است.

حجم ناحیه مورد نظر برابر است با:

$$v = \iint_D \int_0^{\frac{1}{a}(a^2-x^2)} dz\, dA = \iint_D \frac{1}{a}(a^2 - x^2) dA$$

از طرفی ناحیه‌ی $D$ که تصویر حجم مورد نظر بر صفحه‌ی $xy$ است دایره‌ی $x^2 + y^2 = a^2$ می‌باشد، لذا برای محاسبه انتگرال دوگانه فوق بهتر است که از مختصات قطبی استفاده کنیم، بنابراین:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \quad , \quad 0 \le r \le a \\ y = r\sin\theta \quad , \quad 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

$$v = \int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{1}{a}(a^2 - r^2\cos^2\theta) r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^a ar\, dr\, d\theta - \frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\int_0^a r^3\cos^2\theta\, dr\, d\theta$$

$$\Rightarrow\ v = (\int_0^{2\pi} d\theta)(\int_0^a ar\, dr) - \frac{1}{a}(\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, d\theta)(\int_0^a r^3 dr)$$

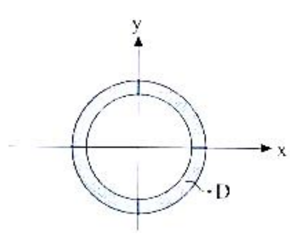
برای محاسبه‌ی انتگرال $\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, d\theta$ از رابطه‌ی $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$ داریم:

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi}(\frac{1+\cos 2\theta}{2})d\theta = (\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta)\Big|_0^{2\pi} = \pi$$

$$\Rightarrow\ v = 2\pi \times \frac{ar^2}{2}\Big|_0^a = -\frac{\pi}{a}\frac{r^4}{4}\Big|_0^a\ \pi a^3 - \frac{\pi a^3}{4} = \frac{3}{4}\pi a^3$$

**۱۲۲-** گزینه «3» صحیح است.

با توجه به تابع زیر انتگرال و ناحیه‌ی انتگرال‌گیری داده شده بهتر است که از مختصات قطبی استفاده کنیم، لذا:




$$\Rightarrow \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} 2 \le r \le 3 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ dx\,dy = r\,dr\,d\theta \end{cases} \Rightarrow \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_2^3 r \times r\,dr\,d\theta = (\int_0^{2\pi} d\theta)(\int_2^3 r^2 dr)$$

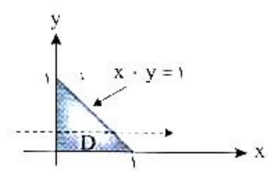
$$= 2\pi \times \frac{r^3}{3}\Big|_2^3 = 2\pi \times \frac{19}{3} = \frac{38\pi}{3}$$

**۱۲۳-** گزینه «1» صحیح است.

با توجه به این‌که میدان برداری $F(x,y) = (y^2, x^2)$ بر روی ناحیه محصور داده شده پیوسته است و دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته می‌باشد و همچنین ناحیه $D$ داده شده بسته می‌باشد، لذا با استفاده از قضیه‌ی گرین داریم:

قضیه‌ی گرین: $$\int_C y^3 dx + x^2 dy = \iint_D (\frac{\partial x^2}{\partial x} - \frac{\partial y^2}{\partial y}) dA = \iint_D (2x - 2y)dx\,dy$$

و برای حل انتگرال دوگانه فوق ابتدا ناحیه $D$ داده شده را رسم می‌کنیم:




بنابراین کران‌های انتگرال دوگانه فوق عبارتند از:

$$\int_C y^2 dx + x^2 dy = \int_0^1 \int_0^{1-y} 2(x-y)dx\,dy = 2\int_0^1 (\frac{1}{2}x^2 - xy)\Big|_0^{1-y} dy =$$

$$2\int_0^1 \left[\frac{1}{2}(1-y)^2 - y(1-y)\right] dy = 2(-\frac{1}{6}(1-y)^3 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3)\Big|_0^1 = 0$$

**۱۲۴-** گزینه «3» صحیح است.

انتگرال کار میدان برداری $F$ برابر است با:

$$F(x, y, z) = (P, Q, R) \Rightarrow \int_C F.dR = \int_a^b p dx + Q dy + R dz$$
$$\Rightarrow \int F.dR = \int (y\ z)dx + (xz)\ dy + (x)dz$$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ z = x^3 \end{cases},\quad 0 \le x \le 1 \Rightarrow \int F \cdot dR = \int_0^1 x^5 dx + (x^4)(2x\,dx) + x(3x^2)dx$$

$$= \int_0^1 (3x^5 + 3x^3)dx = (\frac{x^6}{2} + \frac{3x^4}{4})\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

**۱۲۵-** گزینه «1» صحیح است.

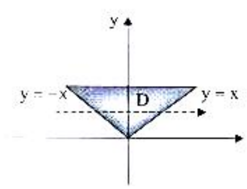
برای یافتن حد تابع چند متغیره داده شده با توجه به این‌که مقدار حد در نقطه‌ی $(0,0)$ خواسته شده است و همچنین $(x^2 + y^2)^n$ در مخرج کسر موجود است، از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{1389}y}{(x^2+y^2)^5} = \lim_{x\to 0} \frac{r^{1389}\cos^{1389}\theta r\sin\theta}{(r^2)^5}$$

$$= \lim_{r\to 0} r^{1390}\cos^{1389}\theta\sin\theta = 0 \times \text{کرانداری} = 0$$

**۱۲۶-** گزینه «2» صحیح است.

برای حل انتگرال داده شده بهتر است که ترتیب انتگرال‌گیری را عوض کنیم و لذا برای یافتن کران‌های انتگرال‌گیری جدید، ناحیه $D$ داده شده را رسم می‌کنیم:




$$\int_{-1}^{1}\int_{y=|x|}^{y=1} e^{y^2}\,dy\,dx = \int_0^1\int_{-y}^{y} e^{y^2}\,dy\,dx = \int_0^1 2ye^{y^2}dy = e^{y^2}\Big|_0^1 = e - 1$$

**۱۲۷-** گزینه «4» صحیح است.

ابتدا فاصله‌ی نقطه‌ی $(x,y,z)$ از نقطه‌ی $(0,0,c)$ و صفحه‌ی $z = -c$ را به صورت مجزا به دست می‌آوریم:

$(0,0,c)$ از نقطه $(x,y,z)$ فاصله نقطه $= \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-c)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-c)^2}$

$z = -c$ از صفحه $(x,y,z)$ فاصله نقطه. $= z + c$

مکان هندسی مورد نظر برابر است با:

$$\sqrt{x^2 + y^2 + (z-c)^2} = z + c \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2zc + c^2 = z^2 + 2zc + c^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 4cz$$

**۱۲۸-** گزینه «4» صحیح است.

خم c داده شده ساده بسته و قطعه به قطعه هموار است و میدان برداری داده شده نیز بر روی این خم پیوسته است و دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته می‌باشد، لذا با استفاده از قضیه‌ی گرین داریم:

$$I = \iint_D \left[ \frac{\partial(e^{y^2} + e^{x^2} + x}{\partial x} - \frac{\partial\left(2xye^{x^2} + e^{\cos x}\right)}{\partial y} \right] dx\,dy$$

$$I = \iint_D \left[(2xe^{x^2} + 1) - (2xe^{x^2})\right] dx\,dy = \iint_D dx\,dy = (\text{c مساحت داخل منحنی}) = \pi(5)^2 = 25\pi$$

**۱۲۹-** گزینه «2» صحیح است.

برای یافتن مشتق جهتی تابع چند متغیره $f(x,y,z)$ در نقطه‌ی p و در جهت بردار یکه $\vec{u}$ داریم:

$$D_{\vec{u}}f\Big|_p = \nabla f\Big|_p \cdot \vec{u}$$

لذا ابتدا گرادیان تابع چند متغیره $f(x,y,z)$ در نقطه‌ی $(-1,0,2)$ را محاسبه می‌کنیم، لذا:

$$\Delta f = (2x, f_y, 3z^2)\ ,\ \ f_y = 10\,y^4 \sin(y^5)\cos(y^5) + 10\,y^9 \cos^2(y^5) - 10\,y^9 \sin^2(y^5)$$

$$p = (1,0,2) \ \Rightarrow\ \nabla f\Big|_p = (-2,0,12)$$

$$D_{\vec{u}}f\Big|_p = (-2,0,12)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -10\,\frac{\sqrt{3}}{3}$$

**۱۳۰-** گزینه «4» صحیح است.

با استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} \quad , \quad f(0,0) = -1 + 0 + 0 = -1$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-1 + h + 0 - (-1)}{h} = 1$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-1 + h^2 + 0 - (-1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2}{h} = 0$$

از آن‌جایی که حد چپ و راست با هم برابر نیستند بنابراین $\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0)}$ موجود نیست، به طور مشابه برای $\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(0,0)}$ داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(0,0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} \quad , \quad f(0,0) = -1 + 0 + 0 = -1$$

$$f(0,h)=-1+0+h=-1+h \;\Rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(0,0)}=\lim_{h\to 0}=\frac{-1+h-(-1)}{h}=1$$

**۱۳۱-** گزینه «4» صحیح است.

با توجه به این‌که سطح $S$ بسته است و همچنین میدان برداری $F(x,y,z)$ در داخل این سطح پیوسته است و دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته می‌باشد، بنابراین با استفاده از قضیه دیورژانس داریم:

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iiint_R \operatorname{div} F\,dv$$

لذا ابتدا دیورژانس میدان برداری $F$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\operatorname{div}\vec{F}=1+1+1=3$$

$$\Rightarrow\;\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma\iiint_R 3dv=3\iiint_R dv$$

با توجه به ناحیه داده شده از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم، لذا:

$$I=3\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_{-2}^2 r\,dz\,dr\,d\theta=12\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^3 r\,dr\right)=12\times 2\pi\times\frac{9}{2}=108\pi$$

**۱۳۲-** گزینه «3» صحیح است.

برای محاسبه بردار یکّه مماسی تابع برداری $\vec{r}(t)$ داریم:

$$\vec{T}=\frac{\vec{r}'(t)}{\left|\vec{r}'(t)\right|}$$

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}\;\Rightarrow\;\vec{r}'(t)=x'(t)\vec{i}+y'(t)\vec{j}$$

$$x(t)=\cos t+t\sin t\;\Rightarrow\;x'(t)=-\sin t+\sin t+t\cos t=t\cos t$$

$$y(t)=\sin t-t\cos t\;\Rightarrow\;y'(t)=\cos t-\cos t+t\sin t=t\sin t$$

$$\vec{r}'(t)=t(\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j})\Rightarrow\left|\vec{r}'(t)\right|=t\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}=t$$

$$\Rightarrow\;\vec{T}=\frac{\vec{r}'(t)}{\left|\vec{r}'(t)\right|}=\frac{t(\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j})}{t}=\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}$$

از طرفی برای محاسبه طول قوس تابع برداری $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ داریم:

$$s=\int\left|\vec{r}'(t)\right|dt=\int\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt$$

لذا برای تابع برداری داده شده داریم:

$$s=\int\sqrt{t^2\cos t^2 t+t^2\sin^2 t}\,dt=\int t\,dt=\frac{t^2}{2}\Rightarrow t=\sqrt{2s}$$

و با جایگذاری در برابر یک مماسی داریم:

$$\vec{T}=\cos\sqrt{2s}\,\vec{i}+\sin\sqrt{2s}\,\vec{j}$$

**۱۳۳-** گزینه «3» صحیح است.

برای محاسبه انتگرال کار داده شده از قضیه‌ی استوکس استفاده می‌کنیم، لذا:

$$\oint_C F\cdot dR=\iint_S \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot n\,ds \qquad (*)$$

که در اینجا S سطح داخل دایره $\begin{cases}x^2+y^2=4\\ z=4\end{cases}$ می‌باشد و با توجه به این‌که سطح s صفحه‌ای موازی صفحه‌ی xy است،

بنابراین داریم:

$$ds=dA\ ,\ \vec{n}=\vec{k}$$

$$\text{curl}\,F=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ z-y & x+y & x+2y\end{vmatrix}=2\vec{i}+2\vec{k}$$

$$\Rightarrow\ \text{curl}\,F\cdot\vec{n}\,ds=(2\vec{i}+2\vec{k})\cdot\vec{k}ds=2dxdy$$

در نتیجه با جایگذاری در رابطه‌ی (*) داریم:

$$\oint_C F\cdot dR=\iint_S \text{curl}\,F\cdot n\,ds=\iint_D 2\,dx\,dy=2\times(\text{مساحت دایره})=2\times\pi\times 2^2=8\pi$$

**۱۳۴-** گزینه «1» صحیح است.

با توجه به این‌که $\rho=|\vec{r}|$ لذا داریم:

$$|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ \Rightarrow\ \rho=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

برای گرادیان تابع $f(\rho)=f(x,y,z)$ داریم:

$$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)=f'(\rho)\left(\frac{\partial\rho}{\partial x},\frac{\partial\rho}{\partial y},\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)$$

و برای محاسبه هر یک از مشتقات جزئی فوق داریم:

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\begin{cases}\dfrac{\partial\rho}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\dfrac{x}{\rho}\\ \dfrac{\partial\rho}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\dfrac{y}{\rho}\\ \dfrac{\partial\rho}{\partial z}=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\dfrac{z}{\rho}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ \nabla f=f'(\rho)(\frac{x}{\rho},\frac{y}{\rho},\frac{z}{\rho})=\frac{f'(\rho)}{\rho}(x,y,z)=\frac{f'(\rho)}{\rho}\,\frac{\mathbf{r}}{r}$$

**۱۳۵-** گزینه «2» صحیح است.

برای محاسبه‌ی انحنای تابع $y=f(x)$ داریم:

$$k(x)=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\ ,\ \ y=e^x\ \Rightarrow\begin{cases}y'=e^x\\ y''=e^x\end{cases}\Rightarrow\ k(x)=\frac{e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}$$

اکسترمم انحنانی $k(x)$ در نقطه‌ای اتفاق می‌افتد که $k'(x)=0$ باشد، لذا:

$$k(x)=e^x(1+e^{2x})^{-\frac{3}{2}}\ \Rightarrow\ k'(x)=e^x(1+e^{2x})^{-\frac{3}{2}}+e^x(2e^x)(-\frac{3}{2})(1+e^{2x})^{-\frac{5}{2}}$$

$$\Rightarrow\ k(x)=e^x(1+e^{2x})^{-\frac{5}{2}}\left((1+e^{2x})-3e^{2x}\right)=0\ \Rightarrow$$

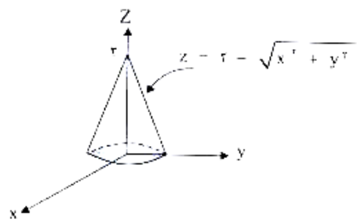
$$1-2e^{2x}=0\ \rightarrow\ e^{2x}=\frac{1}{2}\Rightarrow\ x=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\ln 2=\ln\frac{1}{\sqrt{2}}$$

و با جایگذاری در رابطه انحنای $k(x)$ داریم:

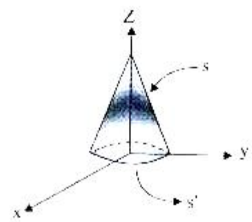
$$k_{max}(x)=k(\ln\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{e^{\ln\frac{1}{\sqrt{2}}}}{(1+e^{\ln\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{(1+\frac{1}{2})^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}=\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

**۱۳۶-** گزینه «3» صحیح است.

از آن‌جایی که سطح S داده شده که یک مخروط به شکل زیر می‌باشد بسته نیست، بنابراین نمی‌توان از قضیه‌ی دیورژانس استفاده کرد.




برای حل ساده‌تر مسئله داده شده بهتر است که شکل زیر را در نظر بگیریم:




مجموع دو سطح $s$ و $s'$ تشکیل یک سطح بسته $(s'')$ را می‌دهد و لذا داریم:

$$s + s' = s'' \;\;\Rightarrow\;\; \oiint_{S''} F \cdot \vec{n}\, ds = \iint_{S} F \cdot \vec{n}\, ds + \iint_{S'} F \cdot \vec{n}\, ds$$

از طرفی برای سمت چپ انتگرال رویه‌ای فوق با استفاده از قضیه دیورژانس داریم:

$$\oiint_{S''} F \cdot \vec{n}\, ds = \iiint_{R} \operatorname{div} F dv$$

و برای انتگرال دوم سمت چپ با توجه به این‌که سطح $s'$ یک صفحه موازی صفحه $xy$ است داریم:

$$ds = dA \;\;,\;\; \vec{n} = -\vec{k} \;\;\Rightarrow\;\; \iint_{S'} F \cdot \vec{n}\, ds = \iint_{D} F \cdot \vec{k}\, dA \;\;,\;\; F \cdot \vec{k} = -3x^2$$

لذا برای انتگرال رویه‌ای خواسته شده داریم:

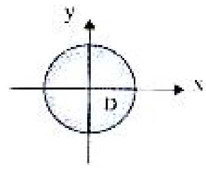
$$\iint_{S} F \cdot \vec{n}\, ds = \oiint_{S''} F \cdot \vec{n}\, ds - \iint_{S'} F \cdot \vec{n}\, ds = \iiint_{R} \operatorname{div} F\, dv - \iint_{D} (-3x^2) dx\, dy$$

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial(-6xy - y)}{\partial x} + \frac{\partial(3y^2 - 1)}{\partial y} + \frac{\partial(3x^2)}{\partial z} = -6y + 6y + 0 = 0$$

$$\iint_{S} F \cdot \vec{n}\, ds = 0 + \iint_{D} 3x^2 dx\, dy$$

و سطح $D$ نیز عبارت است از:

$$z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2} \;\Rightarrow\; D : z = 0 \;\Rightarrow\; 2 - \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 = 4$$




و برای حل انتگرال فوق با توجه به ناحیه‌ی $D$ از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم، لذا:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, \quad \begin{matrix} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{matrix} \quad \Rightarrow \iint_S F \cdot \overset{r}{n}\, ds = \int_0^{2\pi}\int_0^2 3r^2\cos^2\theta \times r\, dr\, d\theta$$

$$= \left(\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, d\theta\right)\left(\int_0^2 3r^3 dr\right) = \left(\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos^2\theta}{2}\right)d\theta\right)\left(\left.\frac{3r^4}{4}\right|_0^2\right) \Rightarrow$$

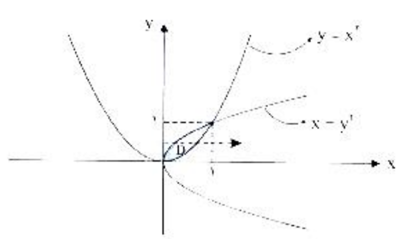
$$\iint_S F \cdot \overset{r}{n}\, ds = \left.\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right)\right|_0^{2\pi} \times 12 = \pi \times 12 = 12\pi$$

**۱۳۷-** گزینه «1» صحیح است.

با توجه به این‌که منحنی $c$ بسته و قطعه به قطعه هموار است و از آن‌جایی که میدان برداری $F(x, y) = (xy, x^2)$ در داخل ناحیه‌ی $D$ (داخل منحنی بسته) پیوسته است و دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته می‌باشد، لذا برای حل انتگرال داده شده می‌توان از قضیه‌ی گرین استفاده کرده بنابراین:

$$\oint_C xy\, dx + x^2 dy = \iint_D \left(\frac{\partial(x^2)}{\partial x} - \frac{\partial(xy)}{\partial y}\right)dA = \iint_D (2x - x)dA = \iint_D x\, dx\, dy$$

و برای ناحیه‌ی $D$ داریم:




$$\Rightarrow \oint_C xy\, dx + x^2 dy = \int_0^1 \int_{x=y^2}^{x=\sqrt{y}} x\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}\Big|_y^{\sqrt{y}}\right)dy = \int_0^1 \left(\frac{y}{2} - \frac{y^4}{2}\right)dy = \left(\frac{y^2}{4} - \frac{y^5}{10}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{3}{20}$$

**۱۳۸-** گزینه «؟» صحیح است.

هیچ کدام از گزینه‌ها صحیح نمی‌باشد. برای محاسبه ناحیه محصور به منحنی بسته $C$ کافیست که انتگرال کار میدان برداری نیروی مثلاً $F(x, y) = (0, x)$ را روی منحنی بسته $c$ محاسبه کنیم، لذا:

$$\oint_C F \cdot dR = \oint_C 0\,dx + x\,dy \xlongequal{\text{قضیه گرین}} \iint_D dA = (\text{مساحت داخل منحنی بسته } c)$$

لذا برای یافتن ناحیه داخل منحنی بسته $c$ کافیست که طرف چپ انتگرال فوق را محاسبه کنیم:

$$\begin{cases} x = t^2 & \to \quad dx = 2t\,dt \\ y = (\frac{t^3}{3} - t) & \to \quad dy = (t^2 - 1)\,dt \end{cases} \quad , \quad -\sqrt{3} \le t \le \sqrt{3}$$

$$\text{مساحت داخل منحنی بسته } c = \oint_C x\,dy = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} t^2(t^2 - 1)dt = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (t^4 - t^2)dt \Rightarrow$$

$$\text{مساحت داخل منحنی بسته } c = \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = 2 \times \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^{\sqrt{3}} = 2 \times \left(\frac{9\sqrt{3}}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$= 2 \times \left(\frac{9\sqrt{3} - 5\sqrt{3}}{5}\right) = 2 \times \frac{4\sqrt{3}}{5} = \frac{8\sqrt{3}}{5}$$

**۱۳۹-** گزینه «3» صحیح است.

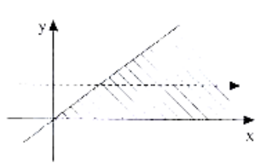
پاسخ تست 2 کنکور عمران 90

**۱۴۰-** گزینه «3» صحیح است.

حل انتگرال به ترتیبی که داده شد مشکل است لذا بهتر است که ترتیب انتگرال‌گیری را عوض کنیم، یعنی:

$$I = \iint x e^{-\frac{x^2}{y}} dx\,dy$$

برای یافتن کران‌های جدید انتگرال‌گیری با توجه به ناحیه‌ی داده شده برای انتگرال داریم:



$$\Rightarrow \begin{cases} x = y \quad , \quad x = \infty \\ y = 0 \quad , \quad y = \infty \end{cases}$$

بنابراین انتگرال داده شده برابر است با:

$$I = \int_0^\infty \int_y^\infty x e^{-\frac{x^2}{y}} dx\, dy \longrightarrow \frac{x^2}{y} = u \;\Rightarrow 2x\, dx = y\, dy$$

$$\Rightarrow dx = \frac{y}{2x} du \;,\; \begin{cases} x = y \to u = y \\ x = \infty \to u = \infty \end{cases} \Rightarrow$$

$$I = \int_0^\infty \int_y^\infty \frac{y}{2} e^{-u} du\, dy = \int_0^\infty -\frac{y}{2} e^{-u} \Big|_y^\infty dy = \int_0^\infty \frac{y}{2} e^{-y} du$$

برای حل انتگرال فوق از روش جزء به جزء داریم:

$$\begin{cases} u = \frac{y}{2} \Rightarrow du = \frac{1}{2} dy \\ dv = e^{-y} dy \to v = -e^{-y} \end{cases} \Rightarrow \int d\, dv = uv - \int v\, du \Rightarrow$$

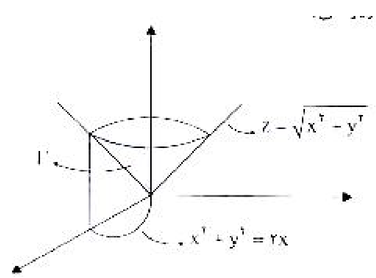
$$I = -\frac{y}{2} e^{-y} + \int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-y} dy = -\frac{1}{2} e^{-y} (y+1) \Big|_0^\infty = 0 - (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

**۱۴۱-** گزینه «4» صحیح است.

ابتدا انتگرال موردنظر را به صورت زیر ساده می‌کنیم.

$$I = \iint_\Gamma \left[(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) + z^2(x^2 - y^2) + 1\right] d\sigma = \iint_\Gamma \left[(x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - z^2) + 1\right] d\sigma$$

از طرفی سطح $\Gamma$ موردنظر به صورت زیر می‌باشد:




بنابراین با جایگذاری متغیر $z$ را در انتگرال $I$ از رابطه‌ی مربوط به $\Gamma$ (معادله‌ی مخروط) داریم:

$$x^2+y^2=z^2 \Rightarrow x^2+y^2-z^2=0 \Rightarrow I=\iint_{\Gamma}(1+0)d\sigma=\iint_{\Gamma}d\sigma \qquad (*)$$

حال کافیست که مقدار $d\sigma$ را به دست آوریم و برای این منظور، تصویر $\Gamma$ بر صفحه $xy$ را می‌یابیم.

$$xy \text{ بر صفحه‌ی } \Gamma \text{ تصویر}:\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ x^2+y^2=2x \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=2x \Rightarrow (x-1)^2+y^2=1$$

بنابراین تصویر موردنظر دایره‌ای به شعاع واحد می‌باشد.

$$d\sigma=\frac{|\nabla g|}{|\nabla g\cdot \vec{k}|}dA=\frac{|\nabla g|}{|g_z|}dA$$

$$\Gamma: g(x,y,z)=z^2-x^2-y^2=0 \Rightarrow \nabla g=(-2x,-2y,-2z) \Rightarrow g_z=2z$$

$$\Rightarrow d\sigma=\frac{|\nabla g|}{|g_z|}dA=\frac{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}{2z}dA=\frac{\sqrt{4z^2+4z^2}}{2z}dA=\sqrt{2}\,dA$$

بنابراین با جایگذاری در رابطه‌ی $(*)$ داریم:

$$I=I=\iint_D \sqrt{2}\,dA=\sqrt{2}\iint_D dA=\sqrt{2}(xy \text{ بر صفحه‌ی } \Gamma \text{ مساحت تصویر})=\sqrt{2(\Omega\times 1)}=\sqrt{2}\,\Omega$$

**۱۴۲-** گزینه «4» صحیح است.

برای حل انتگرال داده شده از قضیه‌ی دیورژانس استفاده می‌کنیم، لذا:

$$I=\iint_{\Gamma} F\cdot n\,d\sigma=\iiint_{R}\operatorname{div} F\,dv$$

بنابراین ابتدا دیورژانس تابع برداری $F(x,y,z)$ داده شده را می‌یابیم.

$$\operatorname{div} F=\frac{\partial(x+\cos y)}{\partial x}+\frac{\partial(y+\cosh z)}{\partial y}+\frac{\partial(z+e^{-x^2})}{\partial z}=1+1+1=3$$

بنابراین حاصل انتگرال داده شده برابر است با:

$$I=\iint_{\Gamma}(F\cdot n)\,d\sigma=\iiint_R 3\,dv$$

از طرفی با توجه به کران‌های داده شده برای ناحیه‌ی $R$ داریم:

$$R:\begin{cases}0\le z\le 1-x^2\\ -1\le x\le 1\\ 0\le y<e\end{cases}\quad\Rightarrow\quad I=\int_0^e\int_{-1}^1\int_0^{1-x^2}3\,dz\,dx\,dy\ \Rightarrow$$

$$I=6\int_0^e\int_0^1\int_0^{1-x^2}dz\,dx\,dy=6\int_0^e\int_0^1(1-x^2)dx\,dy\,6\int_0^e(x-\frac{x^3}{3})\Big|_0^1 dy$$

$$I=6\int_0^e\frac{2}{3}dy=6x\frac{2}{3}y\Big|_0^e=4e$$