نکات و مثال‌های فصل هفتم: تبدیل لاپلاس — درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها

---

* تبدیل لاپلاس دوطرفه:

$$L\{x(t)\} \triangleq X(s) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \quad , \forall s \in \underbrace{ROC_x}_{\text{ناحیه همگرایی}} \subset \underbrace{\mathbb{C}}_{\text{صفحه مختلط}}$$

$$s \triangleq \sigma + j\omega \rightarrow L\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt = \mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\}$$

- درواقع تبدیل لاپلاس $x(t)$، همان تبدیل فوریه سیگنال $x(t)e^{-\sigma t}$ است و با توجه به شرطی که برای وجود تبدیل فوریه داشتیم، برای همگرا شدن تبدیل لاپلاس $x(t)$ باید: $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}|dt < \infty$
- پس ناحیه همگرایی تنها به σ وابسته است (قسمت حقیقی s)، لذا ناحیه همگرایی به صورت نواحی موازی محور $j\omega$ در صفحه s خواهد بود.
- اگر ناحیه همگرایی شامل محور $j\omega$ باشد، سیگنال تبدیل فوریه نیز خواهد داشت، و کافی است در تبدیل لاپلاس به جای s، $j\omega$ قرار دهیم.

مثال: ترکیب سیگنال‌های دست راستی و دست چپی (دوطرفه)

$$x(t) = e^{-at}u(t) - e^{-bt}u(-t) \quad a,b \in \mathbb{R}$$

$$X(s) = L\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-st}dt - \int_{-\infty}^{0} e^{-bt}e^{-st}dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-(a+s)t}dt - \int_{-\infty}^{0} e^{-(b+s)t}dt = \frac{-1}{a+s}e^{-(a+s)t}\Big|_{0}^{\infty} + \frac{1}{b+s}e^{-(b+s)t}\Big|_{-\infty}^{0}$$

$$= \frac{1}{a+s}\left[1 - e^{-(a+s)\infty}\right] + \frac{1}{b+s}\left[1 - e^{(b+s)\infty}\right]$$

برای همگرایی باید: $Re\{a+s\} > 0 \rightarrow Re\{s\} > -a : ROC_1$

برای همگرایی باید: $Re\{b+s\} < 0 \rightarrow Re\{s\} < -b : ROC_2$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{1}{s+a} + \frac{1}{s+b}$$

$$ROC_x = ROC_1 \cap ROC_2 = \{s \in \mathbb{C} \mid -a < Re\{s\} < -b\}$$

نکته: اگر ناحیه همگرایی ROC_1 و ROC_2 اشتراک نداشته باشند، تبدیل لاپلاس دوطرفه وجود نخواهد داشت.

مثال: مطلوب است نمایش صفر و قطب و ناحیه همگرایی سیگنال

$$x(t) = \delta(t) + e^{-2t}u(t) + e^{-t}\cos(3t)u(t)$$

$$L\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-s\times 0}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \quad , ROC_1 = \mathbb{C}$$

$$L\{e^{-2t}u(t)\} = \frac{1}{s+2} \quad , ROC_2 : Re\{s\} > -2$$

نکته: $e^{-at}u(t) \quad a \in \mathbb{R} \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+a} , ROC: Re\{s\} > Re\{-a\}$

$$e^{-t}\cos(3t)u(t) = \frac{1}{2}e^{-t}\left[e^{j3t} + e^{-j3t}\right]u(t) = \frac{1}{2}e^{(-1+j3)t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-(1+j3)t}u(t)$$

$$L\{\frac{1}{2}e^{\overbrace{(-1+j3)}^{-a}t}u(t)\} = \frac{1}{2(s+1-j3)} \quad , ROC_3 : Re\{s\} > Re\{-1+j3\} = -1$$

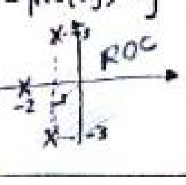
$$L\{\frac{1}{2}e^{-(1+j3)t}u(t)\} = \frac{1}{2(s+1+j3)} \quad , ROC_4 : Re\{s\} > Re\{-1-j3\} = -1$$

$$ROC_x = ROC_1 \cap ROC_2 \cap ROC_3 \cap ROC_4 = \{s \in \mathbb{C} \mid Re\{s\} > -1\}$$

$$X(s) = 1 + \frac{1}{s+2} + \frac{1}{2(s+1-j3)} + \frac{1}{2(s+1+j3)} = \frac{s^3+6s^2+19s+32}{(s+2)(s^2+2s+10)}$$

صورت $\xrightarrow{\text{ریشه}}$ صفرها

مخرج $\xrightarrow{\text{ریشه}}$ قطب‌ها: $p_1 = -2 \quad p_2 = -1+3j \quad p_3 = -1-3j$



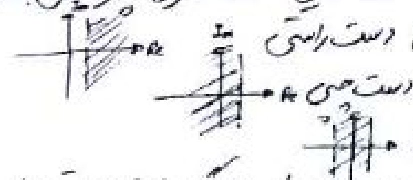
* خواص ناحیه همگرایی (ROC) تبدیل لاپلاس دوطرفه:

① شامل نوارهای موازی با محور موهومی و به طور کلی شامل s هایی که $x(t)e^{-\sigma t}$ بطور مطلق انتگرال پذیر باشد.

② ناحیه همگرایی نباید شامل هیچ قطبی بشود.

③ اگر سیگنال در یک مدت زمان محدود، مقدار داشته و در این فاصله انتگرال پذیر مطلق باشد ← $ROC = \mathbb{C}$ (کل صفحه)

④ سیگنال $x(t)$ دست راستی ← ROC دست راستی



⑤ " " " چپی ← ROC دست چپی

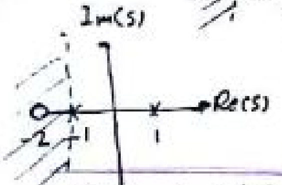
⑥ " " دوطرفه ← ROC نواری

⑦ اگر $x(t)$ دست راستی باشد، ناحیه همگرایی سمت راست قطب با بزرگترین مقدار حقیقی است

و " " " چپی " " " " چپ " " کوچکترین " " "

مثال: اگر $X(s) = \dfrac{s+2}{(s-1)(s+1)}$ و $x(t)$ یک سیگنال دست چپی باشد، آنگاه ناحیه همگرایی؟

با توجه به خاصیت ۷: $ROC: Re\{s\} < -1$



---

* تبدیل لاپلاس معکوس:
$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}\,ds \quad , \quad \sigma \in ROC$$

در عمل معمولاً از این تعریف استفاده نمی‌شود، بلکه کسر تبدیل لاپلاس را به فرم جمع کسرهای جزئی نوشته و تک تک عکس تبدیل خود را به دست می‌آوریم.

مثال: مطلوب است تبدیل لاپلاس معکوس $X(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}$ ، $ROC_x = \{s \in \mathbb{C} \mid -2 < Re(s) < -1\}$:

$$X(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \qquad \text{قطب‌ها}: \begin{matrix} p=-1 \\ p=-2 \end{matrix}$$

$$A = (s+1) \times X(s)\Big|_{s=-1} = 1 \qquad e^{at}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s-a} \quad ROC: Re\{s\} > a \quad \text{دست راستی}$$

و

$$B = (s+2) \times X(s)\Big|_{s=-2} = -1 \qquad e^{at}u(-t) \xleftrightarrow{L} \frac{-1}{s-a} \quad ROC: Re\{s\} < a \quad \text{دست چپی}$$

با توجه به ناحیه همگرایی، نسبت به قطب ۱- سمت چپی و نسبت به قطب ۲- سمت راستی است، لذا:

$$x(t) = -e^{-t}u(-t) - e^{-2t}u(t)$$

---

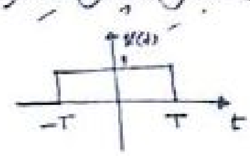
* تبدیل لاپلاس یک طرفه (دست راستی): کاربرد اصلی: تحلیل سیستم‌های دیفرانسیل با شرایط اولیه غیرصفر

$$L_+\{x(t)\} \triangleq L_u\{x(t)\} \triangleq X_u(s) = \int_{0^-}^{+\infty} x(t)e^{-st}\,dt \quad \forall s \in ROC_x^+ \subset \mathbb{C}$$

* وجود 0^- در تعریف به منظور در نظر گرفتن سیگنال‌هایی نظیر ضربه و مشتقات آن است.

* واضح است که $L_+\{x(t)\} = L\{x(t)\cdot u(t)\}$ ، لذا برای سیگنال‌هایی که $x(t) = x(t)\cdot u(t)$ است، تبدیل لاپلاس یک طرفه و دوطرفه یکسان خواهد بود.

مثال: مطلوب است تبدیل لاپلاس دوطرفه و یک طرفه سیگنال زیر:



$$X(s) = L\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{-T}^{T} 1 \times e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{-T}^{T} = \frac{e^{+sT} - e^{-sT}}{s}$$

$$X_u(s) = L_+\{x(t)\} = L\{x(t)\cdot u(t)\} = \int_{0^-}^{T} 1 \times e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{0}^{T} = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

و چون سیگنال $x(t)$ زمان محدود است، ناحیه همگرایی $ROC_x^+ = ROC_x = \mathbb{C}$ است.

* خواص تبدیل لاپلاس :

① خطی بودن : $\forall a,b \in \mathbb{R} : L\{a x(t) + b y(t)\} = aX(s) + bY(s)$, $ROC_x \cap ROC_y \subseteq ROC$

مثال: تبدیل لاپلاس $u(t) - u(t-T)$ را بدست آورید:

$x = u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s}$, $ROC_x : Re\{s\} > 0$

$y = u(t-T) \xleftrightarrow{L} \frac{e^{-sT}}{s}$, $ROC_y : Re\{s\} > 0$

$u(t) - u(t-T) \xleftrightarrow{L} \frac{1-e^{-sT}}{s}$, $ROC = \mathbb{C}$ ← چون سیگنال $u(t)-u(t-T)$ سیگنال زمان محدود است

اما اشتراک ناحیه همگرایی x و y، زیرمجموعه ناحیه همگرایی سیگنال کل است. $\frac{1}{s}$ دارای یک قطب در صفر است اما $\frac{1-e^{-sT}}{s}$ قطبی در صفر ندارد و در واقع صفر صورت قطب صفر را خنثی می کند چون:

بسط تیلور : $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum \frac{(-1)^n \cdot x^n}{n!}$

$e^{-sT} = 1 - sT + \frac{(sT)^2}{2!} - \frac{(sT)^3}{3!} + \dots \rightarrow \frac{1-e^{-sT}}{s} = \frac{sT - \frac{(sT)^2}{2!} + \frac{(sT)^3}{3!} - \dots}{s} = \frac{\cancel{s}T(1 - \frac{sT}{2!} + \frac{(sT)^3}{3!} - \dots)}{\cancel{s}}$

② کانولوشن : $L\{x(t) * y(t)\} = X(s) \cdot Y(s)$, $ROC_x \cap ROC_y \subseteq ROC$

$L_u\{x(t)u(t) * y(t)u(t)\} = X_u(s) \cdot Y_u(s)$, $ROC_x^+ \cap ROC_y^+ \subseteq ROC^+$

مثال: تبدیل لاپلاس دوطرفه $x(t) = \Lambda(t)$:

$\Lambda(t) = rect(t) * rect(t)$

$rect(t) \xleftrightarrow{L} \frac{e^{+\frac{s}{2}} - e^{-\frac{s}{2}}}{s}$, $ROC = \mathbb{C} \rightarrow L\{\Lambda(t)\} = \frac{e^{\frac{s}{2}} - e^{-\frac{s}{2}}}{s} \times \frac{e^{\frac{s}{2}} - e^{-\frac{s}{2}}}{s} = \frac{e^{s} - 2 + e^{-s}}{s^2}$, $ROC = \mathbb{C}$

③ انتقال زمانی : $L\{x(t+t_0)\} = e^{st_0} X(s)$, $ROC = ROC_x$, $t_0 \in \mathbb{R}$

$L_u\{x(t-t_0)u(t-t_0)\} = e^{-st_0} \cdot X_u(s)$, $ROC^+ = ROC_x^+$ $t_0 \geq 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$

④ انتقال فرکانسی (برای L_u و L یکسان) : $a \in \mathbb{C} : L\{e^{at} x(t)\} = X(s-a)$ $ROC = \{s \in \mathbb{C} \mid (s-a) \in ROC_x\}$

⑤ مشتق گیری زمانی : $L\{\frac{d}{dt} x(t)\} = sX(s)$, $ROC = ROC_x$

$L_u\{\frac{d}{dt} x(t)\} = sX_u(s) - x(0^-)$, $ROC^+ = ROC_x^+$

$L_u\{\frac{d^2}{dt^2} x(t)\} = s^2 X_u(s) - x(0^-)s - \frac{d}{dt} x(t)\Big|_{t=0^-}$, $ROC^+ = ROC_x^+$

⑥ مشتق گیری فرکانسی (یکسان برای L_u ، L) : $L\{-t x(t)\} = \frac{dX(s)}{ds}$, $ROC = ROC_x$ یا $L\{t x(t)\} = -\frac{dX(s)}{ds}$, $ROC = ROC_x$

مثال: مطلوب است تبدیل لاپلاس معکوس $X(s) = \frac{1}{(s-a)^2}$, $ROC: Re\{s\} > a$

$e^{at}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s-a}$, $ROC: Re\{s\} > a$, $\frac{1}{(s-a)^2} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-a}\right) \xleftrightarrow{L^{-1}} te^{at}u(t)$

تعمیم : $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{(s+a)^n}$, $ROC: Re\{s\} > -a$

⑦ انتگرال گیری : $L\{\int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau\} = \frac{X(s)}{s}$, $t \in \mathbb{R}$, $ROC = ROC_x \cap (Re\{s\} > 0)$

$L_u\{\int_{0^-}^{t} x(\tau) d\tau\} = \frac{X_u(s)}{s}$, $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, $ROC^+ = ROC_x^+ \cap (Re\{s\} > 0)$

مثال: تبدیل لاپلاس دوطرفه $r(t) = t u(t)$ ؟

$u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s}$ $ROC_x : Re(s) > 0$

$r(t) = tu(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau) d\tau \xleftrightarrow{L} \frac{\frac{1}{s}}{s} = \frac{1}{s^2}$, $ROC: [ROC_x \cap Re(s) > 0] = Re(s) > 0$

تعمیم $t^n u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s^{n+1}}$, $ROC: Re(s) > 0$

مثال: مطلوب است تبدیل لاپلاس سیگنال

$x(t) = r(t+2) - r(t+1) - r(t-1) + r(t-2)$

$X(s) = \frac{e^{2s}}{s^2} - \frac{e^{s}}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2} = \dots$ $ROC = \mathbb{C}$ چون سیگنال زمان محدود است

(8) مقیاس دهی زمانی : $L\{x(\alpha t)\} = \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{s}{\alpha}\right)$ $\quad \alpha \neq 0 \,,\, \alpha \in R \,,\, ROC=\{s\in C \,|\, \frac{s}{\alpha} \in ROC_x\}$

$L_u\{x(\alpha t)\} = \frac{1}{\alpha} X_u\left(\frac{s}{\alpha}\right)$ $\quad \alpha > 0 \,,\, \alpha \in R \,,\, ROC^+ = \{s \in C \,|\, \frac{s}{\alpha} \in ROC_x^+\}$

حالت خاص $\quad L\{x(-t)\} = X(-s) \,,\, ROC\{s\in C \,|\, -s \in ROC_x\}$

---

(9) قضیه مقدار اولیه (IVT) (برای L_u) : اگر $x(t)$ در بازه‌ای شامل صفر در t ... ضربه $\delta(t)$ نداشته باشد : $\lim\limits_{t\to 0^+} x(t) = \lim\limits_{s\to\infty} s X_u(s)$

مثال: اگر $X(s)=\frac{1}{s+a}$ باشد، مطلوب است $x(0^+)$:

$x(0^+) = \lim\limits_{s\to\infty} sX(s) = \lim\limits_{s\to\infty} \frac{s}{s+a} = 1$

---

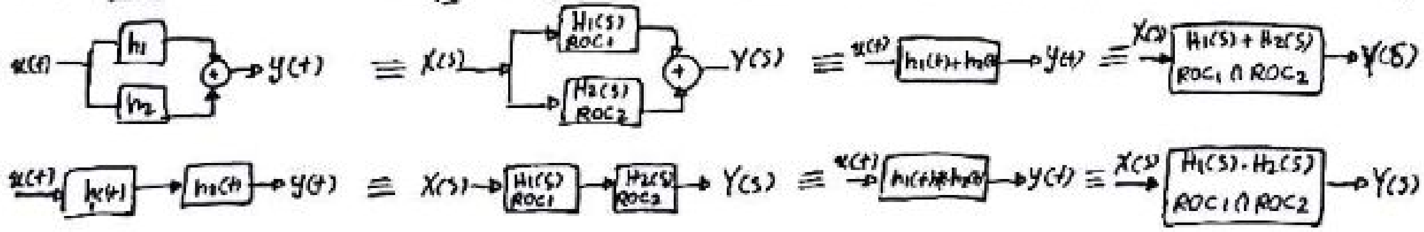
(10) قضیه مقدار نهایی (FVT) (برای L_u) : اگر شرایط موجود داشته باشد: $\begin{cases} \exists X_u(s) \quad \forall s\in C \ \ni Re(s)>0 \\ \exists \lim\limits_{t\to\infty} x(t) \end{cases}$ $\Rightarrow \lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \lim\limits_{s\to 0} s X_u(s)$

وجود شرایط گفته شده برای استفاده از این قضیه ضروری است، مثلاً ممکن است $\lim\limits_{s\to 0} sX_u(s)$ وجود داشته باشد، اما $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$ وجود نداشته باشد، در این صورت نباید از این قضیه استفاده کرد.

---

* تجزیه و تحلیل سیستم‌های کانولوشن به کمک تبدیل لاپلاس

$x(t) \to \boxed{h(t)} \to y(t)$ سیستم LTI : $y(t) = x(t) * h(t) \longrightarrow Y(s) = X(s)\cdot H(s) \,,\, ROC_x \cap ROC_h \subseteq ROC_y$



* معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت و رابطه پاسخ ضربه و پاسخ به ورودی دلخواه :

معادله دیفرانسیل : $a_N y^{(N)}(t) + \dots + a_0 y(t) = b_M x^{(M)}(t) + \dots + b_0 x(t)$ $\quad : \sum\limits_{n=0}^{N} a_n y^{(n)}(t) = \sum\limits_{m=0}^{M} b_m x^{(m)}(t)$

از طرفی : $y(t) = x(t)*h(t) \longrightarrow Y(s) = X(s)\cdot H(s) \longrightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \,,\, ROC_x \cap ROC_h \subseteq ROC_y$

$\longrightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum\limits_{m=0}^{M} b_m s^m}{\sum\limits_{n=0}^{N} a_n s^n} = \frac{b_M}{a_N} \frac{\prod\limits_{i=0}^{M}(s-z_i)}{\prod\limits_{i=0}^{N}(s-p_i)}$

z_i: صفرهای انتقال سیستم

p_i: قطب‌های سیستم

* بعد از بدست آوردن $H(s)$، می‌توان با عکس تبدیل لاپلاس و ناحیه همگرایی آن، $h(t)$ را بدست آورد. ناحیه همگرایی با قطب‌ها و خواص سیستم (علی و پایداری و ...) تعیین می‌شود.

* اگر پاسخ به ورودی دلخواه $x(t)$ خواسته شده باشد، کافی است $Y(s)$ را محاسبه کرده و براساس ناحیه همگرایی از آن لاپلاس معکوس بگیریم:

$Y(s) = X(s)\cdot H(s) \,,\, ROC_x \cap ROC_h \subseteq ROC_y \longrightarrow y(t) = L^{-1}\{Y(s)\}$

* در صورتیکه معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت دارای شرایط اولیه غیرصفر باشد، آنگاه سیستم LTI نیست، اما می‌توان با گرفتن تبدیل لاپلاس یکطرفه از دو طرف معادله، $Y(s)$ را بدست آورد و سپس از طریق لاپلاس معکوس $y(t)$ را محاسبه کرد.

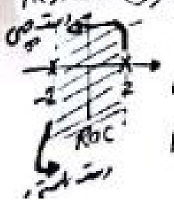
---

* ارتباط پایداری و علی بودن سیستم LTI با ناحیه همگرایی تابع تبدیل آن سیستم:

سیستم علی: $t<0 \quad h(t)=0 \longrightarrow h(t)$ دست راستی $\longrightarrow H(s)$ دست راستی $\longrightarrow$ ناحیه همگرایی سمت راست راست‌ترین قطب $H(s)$

ضدعلی: $t\geq 0 \quad h(t)=0 \longrightarrow$ " " چپی $\longrightarrow$ " " چپی $\longrightarrow$ " " " چپ چپ‌ترین قطب $H(s)$

مثال: اگر سیستم $H(s) = \frac{1}{(s+2)(s-2)}$ نه علی باشد و نه ضدعلی، مطلوب است مقدار $h(1)$: قطب‌ها؟ $p_1=2$ $\quad p_2=-2$



$H(s) = \frac{1}{(s+2)(s-2)} = \frac{-\frac{1}{4}}{s+2} + \frac{\frac{1}{4}}{s-2} \xrightarrow{L^{-1}} h(t) = -\frac{1}{4}e^{-2t}u(t) + \frac{1}{4}\times -e^{2t}u(-t) \rightarrow h(1) = -\frac{1}{4}e^{-2}$

* شرط پایداری سیستم LTI : $h(t)$ پاسخ ضربه سیستم انتگرال پذیر مطلق باشد : یعنی $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty$

و این شرط برای وجود تبدیل فوریه $h(t)$ کافی است پس ناحیه همگرایی $H(s)$ حتماً محور $j\omega$ را در برخواهد گرفت.

نتیجه: اگر سیستم LTI پایدار باشد، ناحیه همگرایی $H(s)$ حتماً شامل محور $j\omega$ است.

« « علی « « « « « « سمت راستی خواهد بود (سمت راست راست‌ترین قطب)

پس یک سیستم LTI، علّی و پایدار است، اگر و فقط اگر تمامی قطب‌های تابع تبدیل سیستم قسمت حقیقی منفی داشته باشند.

مثال: خروجی سیستم مقابل را به ازای ورودی $x(t)=e^{-t}u(t)$ بدست آورید.

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t)+3\frac{dy}{dt}(t)+2y(t)=x(t)$$

$$y(0)=1 \quad , \quad \frac{dy}{dt}(0)=-1$$

حل: از طریق تبدیل لاپلاس یک طرفه می‌گیریم:

$$L_u\left\{\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y\right\} \equiv L_u\{x(t)\} \rightarrow \left[s^2Y(s)-sy(0)-\frac{dy}{dt}(0)\right]+3\left[sY(s)-y(0)\right]+2Y(s)=X(s)$$

$$\rightarrow (s^2+3s+2)Y(s)=X(s)+(s+3)y(0)+\frac{dy}{dt}(0) \quad , \quad x(t)=e^{-t}u(t) \rightarrow X(s)=\frac{1}{s+1}$$

$$Y(s)=\frac{1}{(s+1)(s^2+3s+2)}+\frac{s+2}{s^2+3s+2}=\underbrace{\frac{1}{(s+1)^2(s+2)}+\frac{1}{s+1}}_{\text{تجزیه به کسرهای جزئی}}=\frac{1}{s+2}+\frac{1}{(s+1)^2}$$

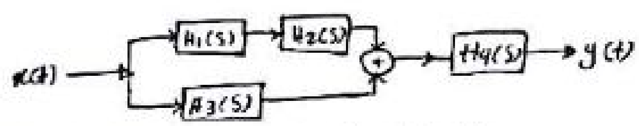
$$\rightarrow y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}=e^{-2t}u(t)+te^{-t}u(t)$$

---

* چگونگی اتصال سیستم‌ها به یکدیگر و نمایش بلوکی

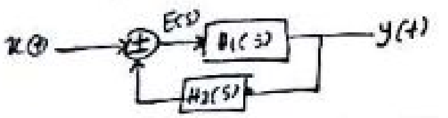
اتصال سری و موازی قبلاً بررسی شد.

- اتصال سری - موازی



$$H(s)=\big((H_1(s)H_2(s))+H_3(s)\big)H_4(s)$$

- اتصال فیدبک



$$\begin{cases} E(s)=X(s)\pm H_2(s)Y(s) \\ Y(s)=H_1(s)\cdot E(s) \end{cases}$$

$$Y(s)=H_1(s)\cdot[X(s)\pm H_2(s)Y(s)] \Rightarrow [1\mp H_1(s)H_2(s)]Y(s)=H_1(s)X(s) \Rightarrow H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{H_1(s)}{1\mp H_1(s)H_2(s)}$$

مثبت شود.

مثال: سیستم علی و LTI زیر را به صورت بلوکی پیاده سازی کنید:

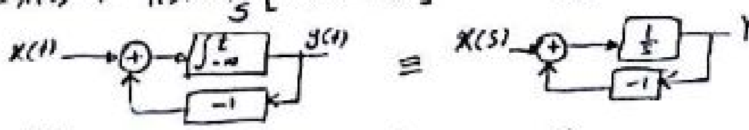
$$H(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

۱) اتصال سری: $H(s)=\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{s+2}$: هر کدام از $\frac{1}{s+1}$ و $\frac{1}{s+2}$ را جداگانه پیاده سازی کرده و سپس آنها را سری می‌کنیم،

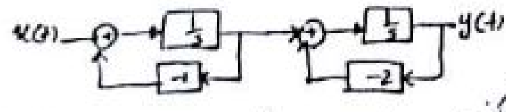
برای پیاده سازی $\frac{1}{s+1}$:

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s+1} \rightarrow sY(s)+Y(s)=X(s) \Rightarrow Y(s)=\frac{1}{s}[X(s)-Y(s)]$$

$$\rightarrow y(t)=\int_{-\infty}^{t}[x(\tau)-y(\tau)]d\tau$$



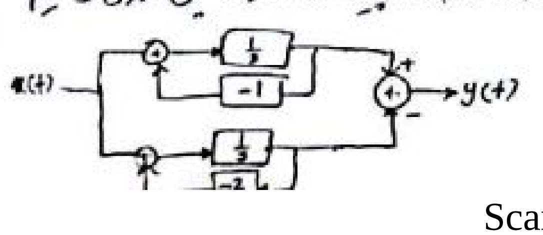
به همین ترتیب برای کل $H(s)$ داریم:



۲) اتصال موازی: H_1 و H_2 را جداگانه پیاده سازی کرده و سپس موازی می‌کنیم

$$H(s)=H_1(s)+H_2(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{-1}{s+2}$$

با تجزیه به کسرهای جزئی

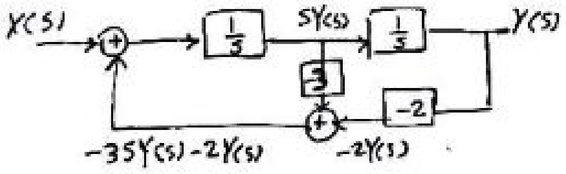


Y

۳) روش مستقیم :

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s^2+3s+2} = \frac{Y(s)}{X(s)} \rightarrow s^2Y(s)+3sY(s)+2Y(s) = X(s)$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2}\left[X(s) - 3sY(s) - 2Y(s)\right]$$



۹۴،۳،۳

تبدیل لاپلاس

۱- سیستم LTI با معادله دیفرانسیل ورودی خروجی $y''+3y'+2y=2x$ را در نظر بگیرید. پاسخ این سیستم به ورودی پله واحد با شرایط اولیه $y(0^-)=3$ و $y'(0^-)=-5$ را بدست آورید.

خاصیت:
$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} \xrightarrow{L} sX(s)-x(0^-) \\ \frac{d^2x}{dt^2} \xrightarrow{L} s^2X(s)-sx(0^-)-x'(0^-) \end{array}\right\}$$

$$(s^2Y(s)-3s+5)+3(sY(s)-3)+2Y(s)=\frac{2}{s}$$

$$Y(s)=\frac{3s^2+4s+2}{s(s+1)(s+2)}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}+\frac{3}{s+2}$$

$$y(t)=(1-e^{-t}+3e^{-2t})u(t)$$

۲- سیستم LTI با تابع تبدیل $H(s)=\frac{2s^3-9s^2+4s+10}{s^2-3s-4}$ را در نظر بگیرید. با فرض نواحی همگرایی مختلف، در علی و پایدار بودن این سیستم بحث کرده و پاسخ ضربه این سیستم را برای نواحی همگرایی مختلف آن بدست آورید.

$$H(s)=2s-3+\frac{3s-2}{(s+1)(s-4)}=2s-3+\frac{1}{s+1}+\frac{2}{s-4}$$

با توجه به ناحیه همگرایی سه ناحیه تعریف می‌شود.

ROC1: $(Re\{s\}<-1)$ در این ناحیه همگرایی سیستم غیر علی و ناپایدار است.

$$h(t)=2\delta'-3\delta(t)+(-e^{-t}-2e^{-4t})u(-t)$$

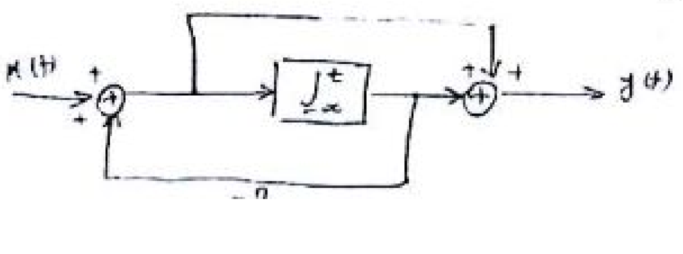
ROC2: $(-1<Re\{s\}<4)$ در این ناحیه همگرایی سیستم غیر علی و ناپایدار است.

$$h(t)=2\delta'(t)-3\delta(t)+e^{-t}u(t)-2e^{-4t}u(-t)$$

ROC3: $(Re\{s\}>4)$ در این ناحیه همگرایی سیستم علی و ناپایدار است.

$$h(t)=2\delta'(t)-3\delta(t)+(e^{-t}+2e^{-4t})u(t)$$

۳- پاسخ ضربه سیستم LTI در شکل مقابل را بدست آورید.



تبدیل لاپلاس سیگنال ورودی انتگرال‌گیر را $Z(s)$ می‌نامیم. آنگاه:

$$Z(s)=1-2\times\frac{Z(s)}{2} \rightarrow Z(s)=\frac{s}{s+2}$$

$$Y(s)=H(s)=\frac{Z(s)}{s}+Z(s)=Z(s)\times\frac{s+1}{s}=1+\frac{-1}{s+2} \rightarrow y(t)=h(t)=\delta(t)-e^{-2t}u(t$$

۲- فرض سیستم به ازای ورودی‌های $x_1(t)=\cos(t)$ و $x_2=\cos(t)u(t)$ را بدست آورید.

$$\frac{dy}{dt}+y(t)=x(t)$$

سیگنال $x_1(t)=\cos t$ یک سیگنال دوره‌ای است. بنابراین برای محاسبه خروجی کافی است اندازه و فاز $H(j\omega)$ را به ازای $\omega=1$ بدست آوریم.

$$y_1(t)=|H(j1)|\cos(t+\measuredangle H(j1))$$

$$H(s)=\frac{1}{s+1} \rightarrow H(j\omega)=\frac{1}{j\omega+1} \rightarrow y_1(t)=\frac{1}{\sqrt{1+1}}\cos(t-\tan^{-1}(1))=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t-$$

به دلیل اینکه $y_2(t)$ سیگنال دوره‌ای نیست از تبدیل لاپلاس یکطرفه کمک می‌گیریم.

$$X_2(s)=\frac{s}{s^2+1} \quad Y_2(s)=\frac{s}{s^2+1}\times\frac{1}{s+1}=\frac{\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}}{s^2+1}+\frac{-\frac{1}{2}}{s+1}=\frac{\frac{1}{2}s}{s^2+1}+\frac{\frac{1}{2}}{s^2+1}-\frac{\frac{1}{2}}{s+1}$$

$$\rightarrow y_2(t)=\frac{1}{2}\left[\cos(t)+\sin(t)-e^{-t}\right]u(t)$$

Scanned by CamScanner

تبدیل لاپلاس :

$$x(t)=\delta(t) \Rightarrow X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-st}\,dt=1 \quad (\forall s)$$

① تبدیل لاپلاس و ناحیه ROC .

$$x(t)=e^{-at}u(t) \Rightarrow X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(s+a)t}u(t)\,dt$$

$$=\int_{0}^{\infty}e^{-(s+a)t}\,dt=\frac{1}{s+a} \quad (Re(s)>-a)$$

$$x(t)=-e^{-at}u(-t) \Rightarrow X(s)=-\int_{-\infty}^{0}e^{-(s+a)t}\,dt=\frac{1}{s+a} \quad (Re(s)<-a)$$

---

② تبدیل لاپلاس و ROC :

$$x(t)=\cos t\,u(t)+e^{-t}u(-t)$$

$$\begin{cases}\cos t\,u(t) \longrightarrow \dfrac{s}{s^2+1} & \sigma>0\\[2mm] -e^{-t}u(-t) \longrightarrow \dfrac{1}{s+1} & \sigma<-1\end{cases} \Rightarrow$$

اشتراک ROC تهی است
پس تبدیل لاپلاس ندارد.

---

③ عکس تبدیل لاپلاس :

Ⅰ $\dfrac{1}{s^2+7s+12}\ ,\ \sigma>-3$

$$=\frac{1}{s+3}-\frac{1}{s+4} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-3t}u(t)-e^{-4t}u(t)$$

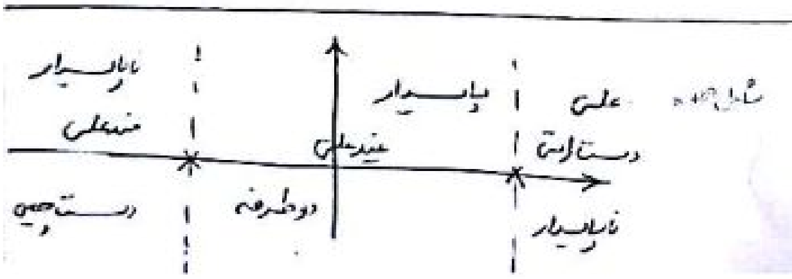
Ⅱ $\dfrac{s^3+9s^2+2s+2}{(s^2+1)(s-2)(s+2)}\ ,\ 0<\sigma<2$

$$\Rightarrow X(s)=\frac{1}{s^2+1}+\frac{2}{s-2}-\frac{1}{s+3} \Rightarrow x(t)=\sin t\,u(t)-2e^{2t}u(-t)-e^{-3t}u(t)$$

Ⅲ $Y(s)=e^{-2s}X(s) \Rightarrow y(t)=x(t-2)$

---

* تشخیص ویژگی‌ها از روی ROC :



④ کدام یک از ROC ها مربوط به سیگنال مطلقاً انتگرال پذیر دست چپ است؟

$\sigma > 1$

$-2 < \sigma < 3$

$\sigma < -3$

$\underline{\sigma < 3}$ ✓

* سیگنال مطلقاً انتگرال پذیر $\equiv$ ROC شامل $\sigma = 0$ باشد.
* سیگنال $e^{-\sigma_0 t} x(t)$ " " $\equiv$ ROC " $\sigma = \sigma_0$ باشد.

---

⑤ محاسبه تبدیل لاپلاس:

(I) $y(t) = x(-3t) + x^*(t-1)$

$$Y(s) = \frac{1}{3} X\left(-\frac{s}{3}\right) + e^{-s} X^*(s^*)$$

(II) $y(t) = 3x^*(-3t+1)$

$$x(t+1) \longrightarrow e^{s} X(s)$$

$$x(-3t+1) \longrightarrow e^{-s/3} \frac{1}{3} X\left(-\frac{s}{3}\right)$$

$$x^*(-3t+1) \longrightarrow \left[\frac{1}{3} e^{-s^*/3} X\left(-\frac{s^*}{3}\right)\right]^* \Rightarrow Y(s) = e^{-s/3} X^*\left(\frac{-s^*}{3}\right)$$

---

⑥ ورودی یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t) = e^{-2t} u(t)$ برابر $x(t) = -e^{-t} u(-t)$ است خروجی کدام است؟

$$y(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s+2} \cdot \frac{1}{s+1}, \quad -2 < \sigma < -1$$

$$= \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \Rightarrow y(t) = -e^{-t} u(-t) - e^{-2t} u(t)$$

---

⑦ توابع تبدیل زیر به ازای کدام مقادیر توأماً علی و پایدار هستند؟

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + (a+3)s + 3a}$$

$$= \frac{1}{(s+3)(s+a)} \Rightarrow \text{هر دو قطب در سمت چپ محور باشد} \Rightarrow -a < 0 \Rightarrow a > 0$$

$$H(s) = \frac{-s}{s^2 - ms + n} \quad \begin{cases} m = s_1 + s_2 < 0 \\ n = s_1 s_2 > 0 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

۸) یک سیستم LTI پایدار توسط معادله $4y(t) - \frac{d^2y}{dt^2} = x(t)$ توصیف می‌گردد. پاسخ این سیستم به ورودی‌های زیر کدام است؟

$$Y(s)(4 - s^2) = X(s) \Rightarrow \left(H(s) = \frac{1}{4-s^2} \text{ و } -2<\sigma<2\right)$$

$$x(t) = e^{-4t} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{4-s^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{s+4}}_{\sigma>-4} \quad \text{و } -2<\sigma<2$$

$$x(t) = e^{-t} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{4-s^2} \cdot \frac{1}{s+1} \quad \text{و } \sigma>-1 \text{ و } -2<\sigma<2$$

$$x(t) = e^{6t} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{4-s^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{s-6}}_{\sigma<6}$$

---

۹) پاسخ ضربه یک سیستم LTI در معادله زیر صدق می‌نماید.

$$\frac{dh(t)}{dt} + 2h(t) = e^{-4t}u(t) + bu(t)$$

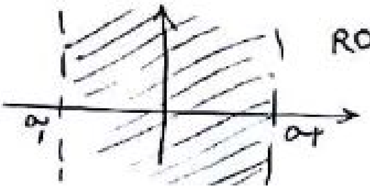
که در آن $u(t)$ پله واحد می‌باشد و b یک عدد ثابت. خروجی سیستم به ورودی $x(t)=e^{2t}$ برابر $y(t)=\frac{1}{12}e^{2t}$ می‌باشد. مقدار b کدام است؟

$$H(s) = \frac{\frac{1}{s+4} + \frac{b}{s}}{(s+2)}$$

$$H(2) = \frac{1}{12} = \frac{\frac{1}{6} + \frac{b}{2}}{4} \Rightarrow \boxed{b = 1/3}$$

---

۱۰) اگر ناحیه همگرایی $x(t)$ به صورت زیر باشد ناحیه همگرایی $x(t)u(t)$ کدام است؟



$ROC_{x(t)}$

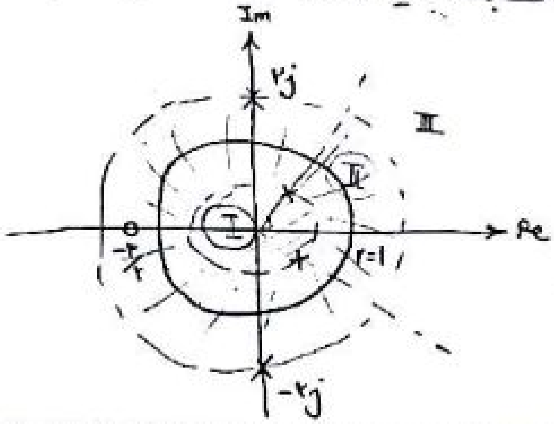
$$\left(ROC_{x(t)u(t)} : Re(s) > \sigma_1\right)$$

درست است

* تبدیل Z *

۱- برای تبدیل Z داده شده، نواحی ممکن ROC را همراه با خواص آنها بررسی کنید.

$$X(z)=\frac{(z+3/2)}{(z^2+4)\left(z-\frac{1}{2}e^{j\pi/4}\right)\left(z-\frac{1}{2}e^{-j\pi/4}\right)}$$



I = دست چپی، ناپایدار، غیرعلی ($|z|=0$ عضو ROC)

II = دوطرفه، پایدار، غیرعلی

III = دست راستی، ناپایدار، علی ($|z|=\infty$ عضو ROC)

۲- تابع تبدیل سیستم LTI با رابطه ورودی-خروجی زیر را محاسبه کنید.

$$y[n]=\sum_{k=n-1}^{n+3}x[k]$$

$$h[n]=\delta[n-1]+\delta[n]+\delta[n+1]+\delta[n+2]+\delta[n+3]\;\cdots\;\left(H(z)=z^{-1}+1+z+z^2+z^3\right)$$

۳- تبدیل Z سیگنال زیر را محاسبه نمایید.

$$x[n]=\left(\tfrac{1}{3}\right)^n u[n]-7^n u[-n+1]$$

$$\left(\tfrac{1}{3}\right)^n u[n]\longleftrightarrow\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\ ,\ |z|>\tfrac{1}{3}$$

$$\left(\tfrac{1}{7}\right)^{n+1} u[n+1]\longleftrightarrow\frac{z}{1-\frac{1}{7}z^{-1}}\ ,\ |z|>\tfrac{1}{7}\ ,\ |z|=\infty\notin ROC\qquad\left(ROC:\ \tfrac{1}{3}<|z|<7\right)$$

$$\tfrac{1}{7}(7)^n u[-n+1]\longleftrightarrow\frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{7}z}\ ,\ |z|<7\ \Rightarrow\left[X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}+\frac{7z^{-1}}{1-\frac{1}{7}z}\right]$$

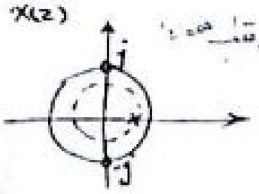
۴- سیگنال $x[n]$ دارای تبدیل Z زیر است:

$$X(z)=\frac{z^2+1}{z-4/5}\ ,\ ROC:\ |z|>4/5$$

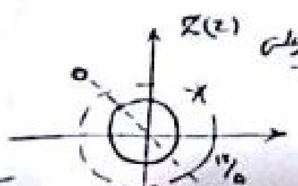
تبدیل Z سیگنال $z[n]=\left(3e^{j\pi/4}\right)^n x[n]$ را بدست آورده و خواص آن را بررسی نمایید.

$$z_0^n x[n]\longleftrightarrow X\left(\frac{z}{z_0}\right)\qquad ROC:\ |z_0|R$$

$$Z(z)=\frac{\left(\frac{z}{3e^{j\pi/4}}\right)^2+1}{\left(\frac{z}{3e^{j\pi/4}}\right)-4/5}\qquad ROC:\ |z|>12/5$$



پایدار، دست راستی، غیرعلی



ناپایدار، دست راستی، غیرعلی

سیگنال $z[n]$ مختلط است، مستلزم قطب و صفرهای مختلط مزدوج نیست.

۵- $X(z)$ دارای دو قطب است که یکی از آنها در $z_0=2e^{j\pi/4}$ واقع است اگر $x[n]$ یک سیگنال حقیقی باشد
$P_{1,2}=2e^{\pm j\pi/4}$
قطب های $y[n]=(-\frac{1}{5})^n x[n]+x[-n]$ را مشخص نمایید؟

$$x[-n] \longleftrightarrow X(z^{-1}) \longrightarrow \frac{1}{2}e^{\pm j\pi/4}=P_{3,4}$$

$$(-\frac{1}{5})^n x[n] \longleftrightarrow X(-5z) \longrightarrow P_{1,2}=\frac{2}{5}e^{j\frac{3\pi}{4}} , 2e^{j\frac{5\pi}{4}}$$

۶- $X(z)$ تبدیل Z سیگنال $x[n]$ است:

$$X(z)=\frac{z+1}{(z^2+1)(z-16)}$$

تبدیل Z سیگنال $y[n]=x_4[n]$ را بدست آورید و قطب و صفرهای آن را.

$$y[n]=x_4[n] \longleftrightarrow X(z^4) \quad , \quad ROC=\sqrt[4]{R}$$

$$Y(z)=\frac{z^4+1}{(z^8+1)(z^4-16)} \quad : \quad ROC: |z|>2$$

صفرها:

$$z^4+1=0 \Rightarrow z^4=-1 \Rightarrow z^4=e^{j(2k\pi+\pi)}=e^{j(2k+1)\pi} \Rightarrow z=e^{j\frac{(2k+1)\pi}{4}} \quad k=0,1,2,3$$

$$z=\left(e^{j\pi/4}, e^{j3\pi/4}, e^{j\frac{5\pi}{4}}, e^{j\frac{7\pi}{4}}\right)$$

قطب‌ها:

$$\begin{cases} z^4-16=0 \Rightarrow z^4=16e^{j2k\pi} \Rightarrow z=2e^{j\frac{2k\pi}{4}} & k=0,1,2,3 \\ z^8+1=0 \Rightarrow z^8=e^{j(2k\pi+\pi)} \Rightarrow z=e^{j\frac{(2k+1)\pi}{8}} & k=0,1,\dots,7 \end{cases}$$

۷- مقدار سیگنال $x[n]$ را در لحظه $n=5$ بدست آورید:

$$X(z)=\frac{z+1}{z^4(z-1)(z+3)(z^2+25)} \qquad 1<|z|<3$$

$$x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint_{C\in ROC} X(z)z^{n-1}dz \quad , \quad x[5]=\frac{1}{2\pi j}\oint \frac{z(z+1)}{(z-1)(z+3)(z^2+25)}dz$$

$$=\sum \text{Residue}\left(z^4X(z)\right)=\lim (z-1)\frac{z(z+1)}{(z-1)(z+3)(z^2+25)}=\frac{(1)(2)}{4\times 26}=\frac{1}{52}$$