انتشارات دانشگاه تهران
۲۴۴۴
چاپ سوم
باتجدید نظر و اضافات

مکانیک محیط های پیوسته برای مهندسین

تالیف: توماس میس
جورج میس

مترجمان: دکتر عباس راستگو
مهندس محمدمهدی هیهات

University of Tehran
Press
2444

CONTINUUM MECHANICS for ENGINEERS

G. Thomas Mase
George E. Mase

Translated by:
Dr. A. Rastgou
Eng. M. M. Heyhat

ISBN:964-03-5446-5
9 789640 354469
بها: ۳۴۰۰۰ ریال

انتشارات دانشگاه تهران

نخستین ناشر دانشگاهی ایران

۱۳۲۵-۱۳۸۵

شصتمین سال تأسیس انتشارات دانشگاه تهران

مکانیک محیط‌های پیوسته
برای مهندسین

تالیف : جرج میس

دانشگاه ایالتی میشگان (ایست لنسینگ ، میشگان)

توماس میس

انستیتو مهندسی و مدیریت جنرال موتور (فلینت، میشگان)

ترجمه : عباس راستگو - محمدمهدی هیهات

دانشکده مکانیک - دانشگاه تهران

انتشارات دانشگاه تهران

شماره ۲۴۴۴

شماره مسلسل ۵۴۴۶

Mase, George E.
میس، جورج
مکانیک محیط‌های پیوسته برای مهندسین / تالیف جورج میس: ترجمه عباس راستگو، محمدمهدی هیهات ـــ [ویراست ۲] ـــ تهران: دانشگاه تهران، مؤسسه انتشارات و چاپ، ۱۳۸۵.
بیست، ۴۲۶ ص ـــ (انتشارات دانشگاه تهران؛ شماره ۲۴۴۴).
ISBN 964-03-5446-5: ۳۴۰۰۰ ریال
فهرستنویسی براساس اطلاعات فیپا.
عنوان اصلی: Continuum Mechanics for Engineers.
چاپ سوم. واژه‌نامه. نمایه.
۱. مکانیک پیوستار. میس، توماس Mase, Thomas راستگو، عباس، ۱۳۳۲- ، مترجم. هیهات، محمدمهدی، ۱۳۶۲- مترجم. دانشگاه تهران. موسسه انتشارات و چاپ.
QA ۸۰۸ / ۲ / م ۹ م ۷ ۵۳۱ ۱۳۸۵
کتابخانه ملی ایران ۸۵-۴۱۱۵۹م

این کتاب ترجمه‌ای است از: Continuum Mechanics for Engineers.

شابک ۵-۵۴۴۶-۰۳-۹۶۴ ISBN 964-03-5446-5

عنوان: مکانیک محیط‌های پیوسته برای مهندسین

تألیف: جرج میس - توماس میس

ترجمهٔ: دکتر عباس راستگو - محمدمهدی هیهات

ناشر: مؤسسهٔ انتشارات و چاپ دانشگاه تهران

شمارگان: ۲۰۰۰ نسخه

تاریخ انتشار: ۱۳۸۵ (چاپ سوم با تجدید نظر و اضافات)، (چاپ اول ۱۳۷۸)، (چاپ دوم ۱۳۸۳)

چاپ و صحافی: مؤسسهٔ انتشارات و چاپ دانشگاه تهران

مسئولیت صحت مطالب کتاب با مترجمان است.

«کلیه حقوق برای ناشر محفوظ است»

بها: ۳۴۰۰۰ ریال

پست الکترونیک: Press@ut.ac.ir - آدرس سایت: Press.ut.ac.ir

نیایش

"ای خداوند!
به علمای ما مسئولیت
و به عوام ما علم و به مؤمنان ما روشنایی
و به روشنفکران ما ایمان و به متعصبین ما فهم
و به فهمیدگان ما تعصب و به زنان ما شعور و به مردان ما شرف
و به پیروان ما آگاهی و به جوانان ما اصالت
و به اساتید ما عقیده و به دانشجویان ما نیز عقیده
و به خفتگان ما بیداری و به دینداران ما دین
و به نویسندگان ما تعهد و به هنرمندان ما درد و به شاعران ما شعور
و به محققان ما هدف و به نومیدان ما امید و به ضعیفان ما نیرو
و به محافظه‌کاران ما گستاخی و به نشستگان ما قیام
و به راکدان ما تکان و به مردگان ما حیات و به کوران ما نگاه
و به خاموشان ما فریاد و به مسلمانان ما قرآن
و به شیعیان ما علی و به فرقه‌های ما وحدت
و به حسودان ما شفا و به خودبینان ما انصاف
و به فحاشان ما ادب و به مجاهدان ما صبر و به مردم ما خودآگاهی
و به همه ملت ما همت تصمیم و استعداد فداکاری و شایستگی نجات و عزت ببخش!"

معلم اخلاق، استاد شهید، دکتر علی شریعتی

به نظر من شریعتی برخلاف آن چه که همگان تصور می‌کنند، یک چهره همچنان مظلوم است و این بدلیل طرفداران و مخالفان اوست

(مقام معظم رهبری)

پیشگفتار ویرایش اول مؤلفین

مکانیک محیط‌های پیوسته اساس اصلی چندین درس کارشناسی ارشد در علوم مهندسی است، که بر مبنای آن الاستیسیته ، پلاستیسیته ویسکوالاستیسیته و مکانیک شاره‌ها بوجود آمده‌اند. با چنین ذهنیتی، مطالعه مقدماتی اصول مکانیک محیط‌های پیوسته به‌صورت یک کتاب درسی مناسب برای اولین درس در این زمینه تدوین شده است، که دانشجویان را با پیش سابقه لازم در نظریه محیط‌های پیوسته آماده نماید تا درس اصلی در هر یک از موضوعات فوق‌الذکر را دنبال نمایند. ما معتقدیم که دانشجویان سال اول کارشناسی ارشد، یا دانشجویان سال آخر کارشناسی در مهندسی یا ریاضیات کاربردی با دانشی از حسابان و تحلیل برداری، همراه با شایستگی منطقی در دروس مقدماتی علم مکانیک ، این درس را جذاب تشخیص خواهند داد.

این کتاب درسی از مطالب ارائه شده در درس مقدمه‌ای بر مکانیک محیط‌های پیوسته در دانشگاه ایالتی میشگان که در مبنای دوره سه ماهه تدریس می‌شود استنتاج شده است. اطمینان داریم که این کتاب درسی بطور مناسب برای تدریس درس مکانیک محیط‌های پیوسته در مبنای سه ماهه یا چهار ماهه مهیا گردیده است. در مبنای چهار ماهه بیشتر زمان را می‌توان به فصل‌های آخر که با مکانیک جامدات و مکانیک شاره‌ها سر و کار دارد اختصاص داد. در مبنای سه ماهه یا چهار ماهه این کتاب درسی باید با تدریس سر کلاس توام باشد.

ریاضیات بکار گرفته شده برای توسعه مفاهیم محیط‌های پیوسته در این کتاب جبر و حسابان تانسورهای قائم می‌باشد که آنها با جزئیات کافی در فصل دو همراه با مروری بر روش‌های ماتریسی که برای مقاصد محاسباتی در حل مسائل مفید می‌باشند بحث شده‌اند. بخاطر طبیعت مقدماتی بودن کتاب، مختصات منحنی‌الخط معرفی نشده‌اند و بنابراین تلاشی برای شامل بودن تانسورهای عمومی در این کتاب صورت نگرفته است. چندین کتاب در قسمت مرجع فهرست شده است که دانشجویان می‌توانند برای بحث مکانیک محیط‌های پیوسته برحسب تانسورهای عمومی بدان آنها مراجعه نمایند. هر دو نمادگذاری شاخصی و نمادین برای بدست آوردن انواع معادلات و فرمول‌های مهم بکار برده شده‌اند.

جدا از ریاضیات اساسی ارائه شده در فصل دو ، کتاب را می‌توان به دو قسمت در نظر

گرفت. قسمت اول ، شامل اصول تنش، کرنش، و حرکت در فصل‌های سه و چهار می‌باشد که متعاقب آن بدست آوردن قوانین فیزیکی بنیادین مرتبط با پیوستگی، انرژی و اندازه حرکت را در فصل پنج دربر دارد. قسمت دوم ، شامل فصل شش است که چند کاربرد مقدماتی مکانیک محیط‌های پیوسته در رفتار الاستیسیته خطی و شاره‌های کلاسیک را نشان می‌دهد. چون این کتاب درسی به مقصود کتاب اول در مکانیک محیط‌های پیوسته تدوین شده است، رئوس مطالب به‌عنوان روش‌های اساسی بدون هر گونه بحثی روی نظریه چگونگی بدست آمدن معادله اساسی خاص ارائه شده است. خوانندگان علاقه‌مند باید بحث را از کتابهای پیشرفته فهرست شده در قسمت مرجع برای توسعه معادله اساسی تعقیب کنند. در پایان هر فصل (به استثناء فصل یک) مجموعه‌ای از مسائل وجود دارد که اغلب دارای جواب هستند و دانشجویان می‌توانند با حل آنها درک خویش را از مطالب ارائه شده در کتاب تقویت کنند. علاوه بر مثالهای متعدد حل شده در کتاب کلاً ۱۸۶ مسئله نیز تهیه شده است.

ما هم مثل اغلب نویسندگان به افراد زیادی که در تهیه این کتاب ما را یاری دادند مدیون هستیم. اگرچه قادر نیستیم اسامی هر یک از آنان را نام ببریم، ولی خرسندیم که از مشارکت کلیه آنها قدردانی کنیم. مزید بر آن، تشکر صمیمانه از دانشجویانی داریم که توصیه‌های آنان از یادداشت‌های سر کلاس به‌عنوان پیشرو در کتاب به خدمت گرفته شدند. بالاخره ، قدردانی خاص را از خانواده‌های خویش داریم که از شروع تا خاتمه این کار مشوق ما بودند.

جرج میس
ایست لنسینگ میشگان
توماس میس
فلینت میشگان

یادداشت‌هایی از زندگی‌نامه

جرج میس ، دکتری و پروفسور دپارتمان متالورژی، مکانیک و علم مواد ، دانشکده مهندسی، و پروفسور دپارتمان بیومکانیک دانشکده پزشکی دانشگاه ایالتی میشگان واقع در ایست لنسینگ میشگان می‌باشد. دکتر میس لیسانس خود را در مهندسی مکانیک (۱۹۴۸) و فوق لیسانس را در مکانیک کاربردی (۱۹۴۹) از دانشگاه ایالتی اوهایو واقع در کلمبوس اوهایو دریافت کرد. او دکتری را در مکانیک از انستیتو پلی‌تکنیک و دانشگاه ایالتی ویرجینیا در سال ۱۹۵۵ اخذ نمود. دکتر میس در دانشگاه ایالتی پنسیلوانیا ۱۹۵۰ تا ۱۹۵۱ (به عنوان مدرس) و در دانشگاه واشنگتن واقع در سنت لوئیس میسوری (به عنوان استادیار) ۱۹۵۱ تا ۱۹۵۴ تدریس

نمود. او به درجه دانشیاری در سال ۱۹۵۹ و درجه استادی در سال ۱۹۶۵ دانشگاه ایالتی میشگان نایل گردید، و به عنوان مدیر اجرائی دپارتمان متالورژی مکانیک و علم مواد از سال ۱۹۶۵ تا ۱۹۶۶ و مجدداً در سال ۱۹۷۸ تا ۱۹۷۹ خدمت نمود. او به عنوان استادیار مهمان در خلال تابستان‌های ۱۹۵۳ تا ۱۹۵۶ در دانشگاه ایالتی ویرجینیا تدریس کرد. دکتر میس عضو انجمن‌های علمی تاو - بتا - پی و همچنین سیگما - زی می‌باشد. علاقه تحقیقاتی و انتشارات وی در زمینه مکانیک محیط‌های پیوسته ، ویسکوالاستیسیته و بیومکانیک می‌باشد.

توماس میس ، دکتری و استادیار مهندسی مکانیک در انستیتو مهندسی و مدیریت جنرال موتور واقع در فلینت میشگان می‌باشد. دکتر میس درجه لیسانس را از دانشگاه ایالتی میشگان در سال ۱۹۸۰ از دپارتمان مهندسی مکانیک و دپارتمان متالورژی مکانیک و علم مواد دریافت کرد او درجه فوق لیسانس و دکتری را به‌ترتیب در سال‌های ۱۹۸۲ و ۱۹۸۵ از دپارتمان مهندسی مکانیک دانشگاه کالیفرنیا واقع در برکلی اخذ نمود. بلافاصله با دریافت درجه دکتری برای دو سال به عنوان مهندس محقق ارشد در دپارتمان مهندسی مکانیک در آزمایشگاههای تحقیقاتی جنرال موتور مشغول به کار شد. در سال ۱۹۸۷ استادیاری را در دانشگاه وایومینگ پذیرفت و سپس به انستیتو مهندسی و مدیریت جنرال موتور در سال ۱۹۹۰ منتقل شد. دکتر میس عضو انجمن مهندسین مکانیک امریکا ، آکادمی مکانیک آمریکا، پی - تاو - سیگما، سیگما - زی، انجمن مهندسین خودرو ، انجمن مکانیک‌های تجربی، و بتا - پی می‌باشد. او عضویت علمی ناسا را پذیرفت و در تابستان‌های ۱۹۹۰ و ۱۹۹۱ در مرکز تحقیقات لویس ناسا خدمت کرد. هنگامی که در دانشگاه کالیفرنیا مشغول بود، دو مرتبه جایزه ممتاز کمک مدرس را از دپارتمان مهندسی مکانیک دریافت نمود. علاقه تحقیقاتی ایشان ارزیابی غیر مخرب و مواد لایه‌ای می‌باشد.

پیشگفتار ویرایش اول مترجم

هرچند که برای اولین‌بار در دهه ۱۹۶۰ لغت «محیط‌های پیوسته» در نوشته‌های مهندسی ظاهر شد، ولی قدمت موضوع به‌اندازه طول عمر مهندسی می‌باشد. مکانیک محیط‌های پیوسته مجموعه‌ای از مفاهیم و اصول عمومی مشترک شاخه‌های اصلی مکانیک جامدات و مکانیک حرارت سیالات می‌باشد. در واقع مفاهیم بنیادین مکانیک محیط‌های پیوسته یک نیاز عمومی برای ورود به تخصص‌هائی همچون ، شاره‌های چسبنده ، الاستیسیته ویسکوالاستیسیته و پلاستیسیته و همچنین پشتوانه‌ای برای مکانیک محیط‌های پیوسته غیرخطی نوین می‌باشد،

دانشجویان مهندسی مکانیک با گرایش جامدات یا حرارت سیالات در مقطع کارشناسی پس از گذراندن دروس علوم پایه با علم مکانیک در قالب دروس تخصصی بطور گسترده آشنا می‌شوند، این یافته‌های مهندسی در درسی بنام مکانیک محیط‌های پیوسته با یک دیدگاه کلی و روش‌مند جمع‌بندی می‌شود. در حقیقت این درس برآیند کلیه اندوخته‌های و تجارب حاصل از مکانیک در مفهوم محیط پیوسته است که راه‌گشای ورود به ادراک جدیدتری از مکانیک می‌باشد.

از طرف دیگر، پیشرفت‌های مستمر در مصالح ترکیبی برای رسیدن خواص گوناگون و فن‌آوری جدید ضرورت این نگرش به مکانیک را بیشتر کرده است که بر این اساس در چند دهه اخیر کتابهای متعددی از ابعاد مختلف بر مکانیک محیط‌های پیوسته نوشته شده است به‌عنوان کتاب درسی بصورت مبانی و تسلط به ریاضی در حد مهندسی از این کتاب برای ترجمه مناسب تشخیص داده شد که می‌تواند مورد استفاده کلیه گرایش‌های مهندسی بخصوص مهندسین مکانیک، شیمی ، عمران باشد.

با وجود تلاشی که برای حفظ امانت در برگردان کتاب به فارسی رعایت شده است احیاناً ترجمه خالی از لغزش نبوده است. لذا از کلیه همکاران گرامی، متخصصین ارجمند و دانشجویان عزیز که نکات اصلاحی را به مترجم منعکس خواهند نمود در پیشاپیش تشکر و سپاسگزاری می‌نماید.

همت در ترجمه را مرهون توفیق ذات منور الهی و تشویق دوستان گرانقدر هیات علمی

گروه مکانیک دانشکده فنی دانسته که از مشورتی و مباحثه‌های آنان بی‌بهره نبوده‌ام حروف نگاری رایانه‌ای و آماده‌سازی کتاب هم حوصله و کوشش خاص نیاز دارد که آنهم به دست توانای کارکنان صدیق و پرتلاش انتشارات دانشگاه تهران عنایت پذیرفت از همگی انان صمیمانه قدردانی می‌شود.

عباس راستگو
آذرماه ۷۷

پیشگفتار ویرایش دوم مؤلفین

بجاست که پیشگفتار دومین ویرایش، با تشکر از تمام کسانی که در شش سال اخیر از کتاب استفاده کرده‌اند، آغاز شود. همچنین از کسانی که این متن توسعه یافته و بازبینی شده را بررسی کرده‌اند، تقدیر می‌گردد. امیدواریم که این ویرایش کتاب نیز همانند ویرایش نخست برای آشنایی دانشجویان کارشناسی ارشد و فارغ‌التحصیلان دورهٔ لیسانس با مکانیک محیط‌های پیوسته مفید باشد.

ویرایش دوم، همچون ویرایش قبلی، حاصل تدریس مکانیک محیط‌های پیوسته به دانشجویان سال اول و دوم کارشناسی ارشد است. از آنجا که پدرم در حال حاضر کاملاً باز نشسته شده است، این دوره به دانشجویانی که آخرین مدرک آنها نزدیک و معادل مدرک ارشد دانشگاه کترینگ است، آموزش داده می‌شود. درصد قابل توجهی از این دانشجویان زمانی که در این کلاس حضور می‌یابند، مشغول به کار در صنعت بوده و یا تجربهٔ کار در صنعت را دارند. به این دلیل، این دوره دانشجویان را با مفاهیم اصولی و بنیادین مکانیک محیط پیوسته آشنا ساخته و کاربردهای آن را تشریح می‌کند.

غالب اوقات، دانشجویان مایل به استفاده از برنامه‌های پیشرفتهٔ شبیه‌سازی هستند که از سینماتیک غیرخطی و روابط اساسی متنوعی بهره می‌گیرد. مطالب اضافه شده به ویرایش دوم با نگرش به این نیاز صورت گرفته است. دانشجویانی که به محتویات این کتاب مسلط شده باشند باید پایهٔ مکانیک لازم را داشته و بتوانند کاربر ماهری از ابزار طراحی پیشرفتهٔ امروزی همچون اجزاء محدود صریح غیرخطی باشند. البته، دانشجویان نیازمند تقویت پایهٔ مکانیک خویش بوده که در اینجا با تمرین سخت اجزاء محدود فراهم شده است.

مشخصهٔ عمدهٔ ویرایش دوم شامل دو فصل جدید و نیز توسعهٔ چشمگیر دو فصل دیگر آن است. نخست، به فصل پنجم، قوانین و معادلات بنیادین، توسعهٔ معادلات اساسی به لحاظ نوع ماده اضافه شده است. این شامل مواد در قانون دوم ترمودینامیک و تغییرناپذیری در ارتباط با قیود روی معادلات اساسی می‌شود. فصلی را که در ویرایش نخست مبحث الاستیسیته و سیالات را در برمی‌گرفت در اینجا به دو فصل مجزا تقسیم شده است. بحث شامل الاستیسیته با اضافه کردن بخش‌هایی با عنوان توابع تنش ایری، پیچش سطح مقطع‌های غیردایروی، و

حل‌های سه بعدی توسعه داده شده است. همچنین به منظور آشنایی پدیداری و مولکولی دانشجویان با مواد لاستیک مانند فصلی با عنوان الاستیسیتهٔ غیرخطی اضافه شده است. در نهایت، یک فصل برای معرفی ویسکوالاستیسیتهٔ خطی به دانشجویان، آورده شده است، به طوری که بسیاری از کاربردهای پلیمرهای پیشرفتهٔ مهم مقید به نوعی وابستگی نسبی پاسخ ماده می‌باشند.

تشکر از کمک فرد خاصی بدون اشاره به دیگران کار آسانی نیست، با این وجود، از افراد کمی باید تشکر شود. آقای شری بورتن در نوشتن ویرایش دوم مفید بودند. لازم می‌دانیم که از پیشنهادهای بسیار مفید خوانندگان ویرایش قبلی، و به طور خاص از پروفسور مرتضی مهرآبادی، در دانشگاه تولن، به خاطر نظرات نکته‌بین ایشان تشکر و سپاسگزاری نماییم. همچنین از پروفسور چارلز دیویز در دانشگاه کترینگ، به خاطر توضیحات مفید ایشان در دیدگاه مولکولی لاستیک و الاستومرهای ترموپلاستیک قدردانی می‌کنیم. در نهایت، از تشویق‌های خانواده‌هایمان صمیمانه سپاسگزاری می‌نماییم.

این کتاب که حاصل از تلاش و همکاری تیمی پدر و پسر است موجب مسرت است و دوباره از بذل توجه خواننده تشکر می‌گردد.

جرج میس
ایست لنسینگ میشیگان
توماس میس
فلینت میشیگان

پیشگفتار مترجمین ویرایش دوم

ویرایش دوم کتاب اصلی که با نگرشی جامع و عمیق‌تر به مباحث علمی در مکانیک محیط‌های پیوسته پرداخته توسط مؤلفین تدوین گردیده است و کتاب حاضر ترجمهٔ آن می‌باشد. ترجمهٔ ویرایش اول کتاب اصلی توسط انتشارات دانشگاه تهران در دو نوبت چاپ و در اختیار دانشجویان و مدرسین قرار گرفت. به دلایل متعدد از جمله سبک تدوین این کتاب و اقبال جهانی آن که منجر به تجدید چاپ کتاب اصلی شده است، مصمم به تکمیل ترجمهٔ آن شدیم. حجم اضافه شده در ویرایش دوم تقریباً برابر حجم ویرایش اول بوده و در واقع تفاوت آن در عمیق‌تر شدن مطالب و پرداختن به موضوعات بیشتری در ویرایش جدید است. تدریس کامل این کتاب درسی در طول یک ترم برای دانشجویان کارشناسی ارشد احیاناً مقدور نخواهد بود و تجربه نشان می‌دهد که استادان ارجمند با تدریس عناوین اساسی در این کتاب می‌توانند راهنمایی مناسب را برای ادامه مطالعه توسط خود دانشجویان فراهم سازند. به عبارت دیگر علاوه بر دارا بودن مزایای کتاب درسی، این کتاب یک مرجع قابل قبولی برای صاحب نظران و متخصصین می‌تواند باشد.

از آنجا که دامنه و گستره مفاهیم مهندسی محدود به تخصص خاصی نمی‌شود و مبانی مهندسی در کلیهٔ زمینه‌ها وجه اشتراک دارند، از اینرو درک عمیق و کارآمد از مکانیک محیط‌های پیوسته و تسلط کافی بر آن ایجاب می‌نماید که در دوره تحصیلات تکمیلی بعنوان یک درس پایه بدان اهمیت داده شود. براین اساس ترجمه ویرایش چاپ دوم کتاب اصلی با هدف یک ضرورت دنبال شد و اکنون در اختیار دانشجویان و مهندسین قرار گرفته است.

البته با وجود کتاب‌های متعدد در این زمینه برخی از مدرسین مبادرت به تهیهٔ جزوه درسی و جمع‌آوری مطالب نموده‌اند، اما آنچه مسلم است استفاده از کتب درسی که در سطح جهانی مطرح بوده و حاوی سال‌ها تجربه علمی و منطبق با روش‌ها و تکنولوژی‌های آموزشی است، بسیار مؤثرتر می‌باشد. بنابراین ایده‌آل آن است که از کتاب اصلی در تدریس استفاده شود و دانشجویان به متن اصلی که بسیار جامع‌تر از هر ترجمه‌ای است عادت کنند. اما به لحاظ صرف وقت زیاد و حجم درسی سنگین دانشجویان، لازم است سرعت مطالعهٔ آنان بیشتر شود که وجود ترجمه نقش مهمی در این خصوص دارد. از طرفی درک مفاهیم علمی به زبان مادری

خود نیز مقدمه‌ای برای بحث و ابراز عقیده در هر تخصصی می‌باشد و به یقین در فهم مطالب کمک خواهد کرد. در این ارتباط علاوه بر ترجمهٔ کتاب حاضر می‌توان به صورت الکترونیکی به کتاب اصلی دسترسی داشت.

برای رفع اشکالات هر چند جزئی در ویرایش اول و همچنین ترجمهٔ مطالب تکمیلی در ویرایش دوم نهایت دقت و تلاش را همراه با نظرسنجی‌ها از دانشجویان عزیز بکار گرفته‌ایم، با این حال نمی‌توان مطمئن بود که ترجمهٔ حاضر خالی از لغزش باشد. بنابراین پیشاپیش از تمامی صاحب نظران و اندیشمندان که نظرات اصلاحی را منعکس خواهند نمود سپاسگزاری می‌نماییم. تلاش بعمل آمده در حروف‌نگاری متون و فرمول‌ها و مقابله کردن آن کاری بس دشوار بوده و مستلزم صرف وقت و دقت فراوانی است که از این بابت نیز از همکاران دانشگاهی و دانش‌دوست در انتشارات دانشگاه تهران قدردانی می‌گردد. از تمامی مشوقان در این امر از جمله خانواده‌های خویش که صبر و حوصلهٔ آنان وصف‌ناپذیر است نهایت سپاس را داریم و از خداوند علیم پاداشی شایسته برایشان خواهانیم.

یقین داریم که بدون اراده و خواست خالق هستی هیچگاه توفیق این خدمت بی‌نهایت کوچک حاصل نمی‌شد که از درگاهش طلب عاقبت به خیری داشته و امیدواریم در پیشگاه صاحب عصرش این تلاش علمی مقبول افتد، ان‌شاءالله.

آذرماه ۱۳۸۵

عباس راستگو *arastgo@ut.ac.ir*

محمدمهدی هیهات *mh_heyhat@yahoo.com*

فهرست مطالب

۱ نظریه محیط‌های پیوسته ۱

۱ - ۱ مفهوم محیط‌های پیوسته ۱

۱ - ۲ مکانیک محیط‌های پیوسته ۲

۲- ریاضیات ضروری ۵

۲ - ۱ عددها ، بردارها ، تانسورهای قائم ۵

۲ - ۲ تانسور جبری در نمادگذاری نمادین - قرارداد جمع ۷

۲ - ۳ نمادگذاری شاخصی ۱۴

۲ - ۴ ماتریس‌ها و دترمینان‌ها ۱۷

۲ - ۵ انتقال ماتریس‌های قائم ۲۴

۲ - ۶ مقادیر اصلی و جهت‌های اصلی تانسورهای متقارن مرتبه دوم ۳۲

۲ - ۷ میدان‌های تانسوری ، حسابان تانسورها ۳۹

۲ - ۸ نظریه‌های انتگرالی گوس و استوکس ۴۱

مسائل ۴۳

۳- اصول تنش ۵۵

۳ - ۱ نیروهای حجمی و سطحی، چگالی جرم ۵۵

۳ - ۲ اصل تنش کوشی ۵۷

۳ - ۳ تانسور تنش ۶۰

۳ - ۴ تعادل نیرو و ممان، تقارن در تانسور تنش ۶۷

۳ - ۵ قوانین انتقال تنش ۶۹

۳ - ۶ تنش‌های اصلی ، جهت‌های تنش اصلی ۷۳

۳ - ۷ مقادیر تنش حداقل و حداکثر ۸۱

۳ - ۸ دایره‌های مور برای تنش ۸۵

۳ - ۹ - تنش صفحه‌ای ۹۳
۳ - ۱۰ بیان تنش کروی و بیان تنش انحراف ۹۸
۳ - ۱۱ تنش برشی هشت وجهی ۱۰۱
مسائل ۱۰۴

۴- سینماتیک تغییرشکل و حرکت ۱۱۹
۴ - ۱ ذرات ، پیکربندی‌ها، تغییرشکل و حرکت ۱۱۹
۴ - ۲ مختصات مادی و فضایی ۱۲۱
۴ - ۳ توصیف‌های اولری و لاگرانژی ۱۲۶
۴ - ۴ میدان تغییرمکان ۱۲۸
۴ - ۵ مشتق مادی ۱۳۰
۴ - ۶ گرادیان‌های تغییرشکل، تانسورهای کرنش محدود ۱۳۴
۴ - ۷ نظریه تغییرشکل بسیار کوچک ۱۴۱
۴ - ۸ نسبت‌های کشیدگی ۱۵۳
۴ - ۹ تانسور چرخش ، تانسورهای کشیدگی ۱۵۸
۴ - ۱۰ گرادیان سرعت ، نرخ تغییرشکل ، گردابی ۱۶۲
۴ - ۱۱ مشتق مادی اجزاء خطی ، مساحت‌ها، حجم‌ها ۱۶۹
مسائل ۱۷۴

۵- قوانین و معادلات بنیادین ۱۹۷
۵ - ۱ قوانین تعادل ، معادلات میدان ، معادلات اساسی ۱۹۷
۵ - ۲ مشتقات مادی انتگرال‌های خط ، سطح و حجم ۱۹۷
۵ - ۳ اصل بقای جرم ، معادله پیوستگی ۲۰۰
۵ - ۴ اصل ممنتوم خطی ، معادلات حرکت ۲۰۴
۵ - ۵ تانسورهای تنش پیلا - کرشوف ، معادلات لاگرانژ حرکت ۲۰۵
۵ - ۶ اصل ممان اندازه حرکت (اندازه حرکت زاویه‌ای) ۲۱۲
۵ - ۷ اصل بقای انرژی، معادله انرژی ۲۱۳
۵ - ۸ انتروپی و معادله کلازیوس - دوهام ۲۱۷
۵ - ۹ محدودیت‌هایی بر مواد الاستیک به وسیلهٔ قانون دوم ترمودینامیک ۲۲۱

۵ - ۱۰ تغییرناپذیری ۲۲۶
۵ - ۱۱ محدودیت‌های اعمال شده بر معادله‌های اساسی به واسطهٔ تغییرناپذیری . ۲۳۸
۵ - ۱۲ معادلات اساسی ۲۴۱
مسائل ۲۴۵

۶- الاستیسیتهٔ خطی ۲۵۵
۶ - ۱ الاستیسیته ، قانون هوک ، انرژی کرنشی ۲۵۵
۶ - ۲ قانون هوک برای مواد همسانگرد ، ثابت‌های الاستیک ۲۶۰
۶ - ۳ تقارن الاستیک ، قانون هوک برای مواد غیرهمسانگرد ۲۶۶
۶ - ۴ الاستو استاتیک و الاستو دینامیک همسانگرد ، اصل جمع آثار ۲۷۲
۶ - ۵ الاستیسیته صفحه‌ای ۲۷۵
۶ - ۶ ترموالاستیسیته خطی ۲۸۰
۶ - ۷ تابع تنش ایری ۲۸۲
۶ - ۸ پیچش ۲۹۶
۶ - ۹ الاستیسیتهٔ سه بعدی ۳۰۴
مسائل ۳۱۴

۷- شاره‌های کلاسیک ۳۲۷
۷ - ۱ تانسور تنش چسبنده ، شاره‌های استوکسی و نیوتنی ۳۲۷
۷ - ۲ معادلات اصلی جریان چسبنده ، معادلات ناویر - استوکس ۳۳۰
۷ - ۳ شاره‌های ویژه ۳۳۲
۷ - ۴ جریان یکنواخت ، جریان غیرچرخشی ، جریان پتانسیل ۳۳۳
۷ - ۵ معادله برنولی ، قضیه کلوین ۳۳۸
مسائل ۳۴۰

۸- الاستیسیتهٔ غیرخطی ۳۴۳
۸ - ۱ روش مولکولی برای الاستیسیتهٔ لاستیک ۳۴۳
۸ - ۲ تئوری انرژی کرنشی برای الاستیسیتهٔ غیرخطی ۳۵۲
۸ - ۳ حالت‌های خاص انرژی کرنشی ۳۵۷

۸ - ۴ حل دقیق برای یک مادهٔ تراکم‌ناپذیر و نئو-هوکین ۳۶۰
مراجع ۳۶۷
مسائل ۳۶۸

۹- ویسکوالاستیسیته خطی ۳۷۳
۹ - ۱ مقدمه ۳۷۳
۹ - ۲ معادلات اساسی ویسکوالاستیک در شکل اپراتور دیفرانسیل خطی ۳۷۴
۹ - ۳ تئوری یک بعدی، مدل‌های مکانیکی ۳۷۶
۹ - ۴ خزش و وارفتگی ۳۸۰
۹ - ۵ اصل برهم‌نهی، انتگرال‌های توارثی ۳۸۷
۹ - ۶ بارگذاری‌های هارمونیک، مدول مختلط، مطلوبیت مختلط ۳۸۹
۹ - ۷ مسائل سه بعدی، اصل تطابق ۳۹۶
مسائل ۴۰۵

۱ نظریه محیط‌های پیوسته

۱ - ۱ مفهوم محیط‌های پیوسته

عنوان مکانیک بطور وسیع مطالعه حرکت و تغییرشکل ماده تحت سیستم‌های نیرو را می‌تواند دربرگیرد. تعریف عمومی، انواع زمینه‌های مورد علاقه مانند الاستیسیته ، پلاستیسیته ، دینامیک جسم صلب ، و مکانیک شاره‌ها را احاطه می‌کند. این زمینه‌ها از لحاظ پاسخ مواد به نیروهای اعمال شده با هم توفیر دارند. یک جسم الاستیک بطور متناسب با بار وارد بر آن تغییرشکل می‌دهد، و تغییرشکل همراه با رها شدن بار محو می‌شود. در پلاستیسیته تغییرشکل در اثر نیرو برای رده‌های بزرگ نیرو ، خطی نیست و تغییرشکل دائمی پس از برداشتن نیرو باقی می‌ماند. یک شاره رفتاری متفاوت از این حالات دارد وقتی یک نیرو اعمال می‌شود تغییرشکل ادامه می‌یابد و مهم نیست بار وارده چه میزان کوچک باشد. بخاطر این رفتارها ، علاقه‌مند به پاسخ مواد ، وقتی نیرو اعمال می‌شود هستیم.

اگر بدقت جسمی که تحت نیرو قرار گرفته است بررسی کنیم، مثلاً یک تیر در حالت الاستیسیته یا یک حجم کنترلی از شاره ، در مقیاس میکروسکوپی ترتیبی از پروتون‌ها، نوترون‌ها و الکترون‌ها را مشاهده خواهیم کرد. در این مقیاس، ماده یک توزیع ناپیوسته در فضای فیزیکی سه بعدی که زندگی می‌کنیم دارد، که در واقع یک محیط پیوسته است. اما در اغلب مسائل مهندسی مکانیک، کاربرد نیروها روی جسم (مجموعه ماده) شامل یک سطحی بسیار بزرگتر از ذرات انفرادی می‌باشد پس کاربرد نیروها یا شرایط مرزی چنین مساحت بزرگی از ماده مجزا از هم را دربر می‌گیرد که ما نیروی وارد بر یک جسم یکنواخت را در نظر می‌گیریم. حتی جسمی که کاملاً فضای «اشغال شده» را «پُر» نکرده است، ترکیب مجزای جسم را صرف‌نظر نموده فرض می‌کنیم جسم در تمامی فضایش توزیع شده است. با در نظر داشتن این مدل محیط پیوسته ، ادعا می‌کنیم که هر جسم مادی ممکن است بطور نامعین به قسمتهای کوچک و کوچک‌تر تقسیم می‌شوند، هر یک از باقیمانده‌ها کلیه خواص فیزیکی جسم مادر را حفظ می‌کند. بر طبق آن، ما قادر هستیم کمیت‌های میدانی مثل، چگالی یا سرعت به هر نقطه از ناحیه‌ای از فضایی که جسم اشغال کرده نسبت دهیم. علاوه بر آن، چنین کمیت‌های میدانی که خواص مکانیکی یا سینماتیکی محیط‌های پیوسته را منعکس می‌کنند، می‌توانند از لحاظ

ریاضی به‌صورت توابعی پیوسته از متغیرهای فضا و زمان بیان شوند، به همین منوال مشتقات این توابع که در نظریه دخالت دارند همچنان پیوسته هستند.

مدل محیط پیوسته برای اجسام مادی به دو دلیل خیلی خوب مفید است. نخست ، در مقیاس ابعاد که بطور معمول اجسامی مثل فولاد، آلومینیوم، بتن و غیره را در نظر می‌گیریم، ابعاد مشخصه آنان بی‌اندازه در مقایسه با فاصله اتم‌ها بزرگ است، بنابراین مفهوم محیط پیوسته اثبات می‌کند که نتایج حاصله خیلی قابل اعتماد است. سپس ، دانش ما از خواص مکانیکی مواد مهندسی که اغلب براساس جمع‌آوری اطلاعات آزمایشگاهی از روی نمونه‌های با ابعاد نسبتاً بزرگ می‌باشد کسب می‌گردد.

۱ - ۲ مکانیک محیط‌های پیوسته

تحلیل سینماتیکی و رفتار مکانیکی مواد مدل شده براساس فرضیه محیط پیوسته را مکانیک محیط‌های پیوسته می‌نامیم. دو تدبیر اصلی وجود دارد که عناوین مکانیک محیط‌های پیوسته را تقسیم‌بندی می‌کند. در اولی، تاکید روی بدست آوردن معادلات بنیادین است که برای کلیه محیط‌های پیوسته معتبر می‌باشد. این معادلات بر مبنای قوانین جهانی فیزیک مانند بقای جرم و اصل انرژی و اصل اندازه حرکت استوار هستند. در دومی، توجه روی توسعه *معادلات اساسی* که رفتار مواد ایده‌آل شده خاص را بیان می‌کند متمرکز شده است که در میان آنان جامد کاملاً الاستیک و شاره چسبنده (لزج) بهترین مثالهای مشهور هستند. این معادلات نقاط کانونی برای مطالعات در الاستیسیته ، پلاستیسیته ، ویسکوز الاستیسیته و مکانیک شاره‌ها را فراهم می‌آورند.

از لحاظ ریاضی، معادلات بنیادین مکانیک محیط‌های پیوسته اشاره شده در فوق ممکن است به دو روال تشکیل معادلات مجزا و اساساً معادل یکدیگر توسعه یابند. یکی ، شکل مطلق یا انتگرالی است که از اصول اساسی بکار رفته روی یک جسم معین ماده بدست می‌آید، دیگری شکل دیفرانسیلی یا میدانی است که منجر به معادلات حاصل از کاربرد اصول اساسی به یک حجم خیلی کوچک (بسیار کوچک) می‌باشد. عملاً اغلب راحت‌تر و مفیدتر آن است که معادلات میدان از بدنه مطلقش استنباط گردد.

علاوه بر فرضیه بنیادین پیوستگی مواد ، دو محدودیت دیگر را روی اجسام در نظر گرفته در این کتاب اعمال می‌کنیم. اول ، الزام می‌کنیم که **همگن** باشند، یعنی خواص مکانیکی یکسان در تمام موقعیت‌ها داشته باشند. و دوم، بطورکلی موادی را در نظر می‌گیریم که **همسانگرد** هستند یعنی در یک نقطه دارای خواص فیزیکی یکسان در هر جهت می‌باشند.

اجسام ناهمسانگرد فقط بطورخلاصه بدان‌ها اشاره خواهد شد. فرضیه محیط پیوسته تنها نیازی است که در بدست آوردن معادلات عمومی (میدان) بدان احتیاج می‌باشد. همگنی و همسانگردی با معرفی معادلات اساسی وارد نظریه می‌شوند. مسائل مقدار مرزی در رشته‌های فنی که ریشه در نظریه محیط‌های پیوسته دارند برحسب معادلات اصلی میدان همراه با معادلات اساسی مقتضی و شرایط مرزی مرتبط تشکیل معادلاتشان صورت می‌گیرد. الاستیسیته خطی و مکانیک کلاسیک شاره‌ها مشهورترین این رشته‌ها هستند و یک بحث خلاصه‌ای از این‌ها در مفهوم مکانیک محیط‌های پیوسته در فصل شش ارائه شده است.

۲ ریاضیات ضروری

۲ - ۱ *عددها ، بردارها ، تانسورهای قائم*

یادگیری زبان یک رشته اولین قدمی است که دانشجو برای ذیصلاح شدن در آن رشته برمی‌دارد. زبان مکانیک محیط‌های پیوسته ، جبر و حسابان ***تانسورها*** می‌باشد. در اینجا، تانسورها نام ژنریک برای ماهیت‌های ریاضی هستند که برای ارائه کمیت‌های فیزیکی مکانیک محیط‌های پیوسته بکار برده می‌شود. فقط طبقه‌ای از تانسورها که مشهور به ***تانسورهای قائم*** می‌باشند در این کتاب بکار برده می‌شوند که تعریف آنها در صفحه‌های بعدی دنبال خواهد شد. معادلات تانسوری بکار رفته برای توسعه نظریه بنیادین مکانیک محیط‌های پیوسته به یکی از دو نمادگذاری متمایز ، ***نمادگذاری نمادین*** و ***نمادگذاری شاخصی*** نوشته می‌شوند. از هر دو نمادگذاری می‌توان بسته به اینکه کدام برای تحلیل یا استخراج معادلات موضوع موردنظر راحت‌تر می‌باشد استفاده نمود، اما باید به ایجاد ارتباط بین آن دو نمادگذاری توجه داشت.

همانطور که معمولاً اتفاق می‌افتد، تنوع قابل ملاحظه‌ای از کمیت‌های فیزیکی و هندسی نقش مهمی در مکانیک محیط‌های پیوسته دارند، و خوشبختانه ، هر یک از آنها با نوعی از تانسورها بیان می‌شوند. برای مثال کمیت‌هایی مانند ***چگالی*** و ***درجه حرارت*** ممکن است کاملاً با ارائه مقدارشان مشخص شوند. یعنی با یک مقدار عددی بیان شوند. این کمیت‌ها از لحاظ ریاضی با ***عددها*** بیان می‌شوند که به آنان ***تانسورهای مرتبه صفر*** می‌گویند. لازم به تاکید است که عددها ثابت نیستند، اما در واقع توابعی از موقعیت یا زمان یا هر دوی آنان می‌باشند. همچنین، مقدار عددی دقیق یک عدد بستگی به واحدهایی دارد که در آن بیان می‌شود. پس درجه حرارت یک موقعیت مشخص ممکن است با $۶۸^\circ F$ یا $۲۰^\circ C$ ارائه شود. به عنوان قاعده کلی، حروف یونانی کوچک که به‌صورت کج نوشته شود مثل α , β , λ و غیره به عنوان نماد برای عددها در هر دو نوع نمادگذاری شاخصی و نمادین بکار برده خواهد شد.

چندین کمیت فیزیکی مثل **نیرو** و **سرعت** در مکانیک وجود دارد که نه فقط مشخص کردن مقدارشان بلکه همچنین تعیین کردن جهت آنان برای کامل کردن مشخصه آنها نیاز است. بعنوان یک مثال خیلی ابتدائی، نیروی N ۲۰ وارد بر یک نقطه در جهت عمودی بطور قابل ملاحظه‌ای متفاوت از یک نیروی N ۲۰ وارد بر یک نقطه در جهت افقی است. کمیت‌هایی که

دارای چنین خواص جهت‌دار می‌باشند توسط ***بردارها*** نشان داده می‌شوند که ***تانسورهای مرتبه اول*** نامیده می‌شوند. از نظر هندسی، بردارها را با پیکان نشان می‌دهند. بطوری که دارای طول معینی (اندازه) ، موقعیت مشخص (امتداد) ، و جهتی که عمل واقع می‌شود توسط سر پیکان نمایش داده می‌شود. بعضی کمیت‌ها در مکانیک ماهیتاً بردار نیستند، اما توسط بردارها مجسم می‌شوند ، برای مثال دوران‌های کوچک. در ادامه علاوه بر مشخصه اندازه ، امتداد، تعریف کامل یک بردار مستلزم تعاریف بیشتری بدین قرار است که جمع بردارها (و تفریق آنها) طبق قانون مثلث اجرا می‌شود بطوری که بردار جمع دو بردار ، پیکانی است که از مبدأ اولی به انتهای دومی وصل می‌شود وقتی که پیکان‌های مذکور سر به ته وصل شده باشند.

هرچند که بردارها مستقل از هر دستگاه مختصات خصوصی هستند. اغلب مفید است یک بردار برحسب مولفه‌های مختصاتی خود تعریف شود، و بدین ترتیب لازم است بردار به یک مجموعه محورهای مقتضی ارجاع داده شود. از دید محدودیت خودمان که منحصر به تانسورهای قائم است، خود را محدود به بررسی دستگاههای مختصاتی قائم برای مشخص کردن مولفه‌های بردار خواهیم کرد.

تعداد قابل ملاحظه‌ای از کمیت‌های فیزیکی دارای وضعیت مهمی در مکانیک محیط‌های پیوسته هستند که نیاز به ماهیت‌های ریاضی مرتبه بالاتر از بردارها برای بیان آنان می‌باشد که در حیطه تانسورها قرار می‌گیرند. همانگونه که بعداً ملاحظه خواهد شد در میان معروف‌ترین آنها ***تانسور تنش*** و ***تانسورهای کرنش*** می‌باشد. این تانسورهای خاص ***تانسور مرتبه دوم*** هستند که می‌گویم دارای رده **دومی** باشند. تانسورهای مرتبه سوم و مرتبه چهارم در مکانیک محیط دمای پیوسته غیرمعمول نیستند، اما وجودشان به فراوانی تانسورهای مرتبه دوم نیست. از این رو استفاده فاقد شرط از لغت تانسور در این کتاب منظور تانسور مرتبه دوم می‌باشد. فقط با چند مورد استثناء تانسورهای مشخص‌کننده تنش و کرنش راکه مرتبه دوم نیز می‌باشند با حروف لاتین بزرگ بصورت سیاه نشان می‌دهیم، یک مثال شاخص آن تانسور $\boldsymbol{T}$ است.

تانسورها مانند بردارها مستقل از هر دستگاه مختصات هستند، اما مانند بردارها هرگاه بخواهیم تانسور را با مولفه‌هایش مشخص کنیم، مجبور به ارجاع دادن آن به مجموعه محورهای مرجع مناسب می‌باشد. تعاریف دقیق تانسورهای از مرتبه مختلف برحسب خواص انتقال مولفه‌هایشان بین دو مجموعه محورهای مختصات قائم ارائه خواهد شد.

۲ - ۲ تانسور جبری در نمادگذاری نمادین - قرارداد جمع

فضای فیزیکی سه بعدی زندگی روزمره یک فضایی است که وقایع مکانیک محیط‌های پیوسته اتفاق می‌افتد. از لحاظ ریاضی، این فضا مشهور به فضای سه بعدی اقلیدسی است، و هندسه آن را می‌توان به دستگاه محورهای مختصات قائم نسبت داد. چون یک عدد فقط یک مولفه منفرد دارد، در هر دستگاه محورهای مختصات همان مقدار را خواهد داشت، اما مولفه‌های بردارها و تانسورها، مقادیر مولفه‌ای متفاوت برای هر مجموعه محورها خواهند داشت.

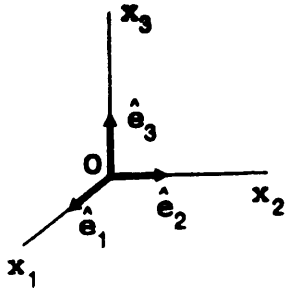
برای بیان بردارها و تانسورها در شکل مولفه‌ای، در فضای فیزیکی یک دستگاه محورهای مختصات مستطیلی قائم راستگرد $Ox_1x_2x_3$ معرفی می‌کنیم و برای این محورها بردارهای یکّه سه‌گانه $\hat{\mathbf{e}}_1$, $\hat{\mathbf{e}}_2$, $\hat{\mathbf{e}}_3$ را مطابق شکل ۲ - ۱ الف مشخص می‌کنیم. کلیه بردارهای یکّه در این کتاب به‌صورت نماد سیاه حروف و علامت ^ روی آنها نوشته شده‌اند. بخاطر دوبدو عمود بودن این بردارهای مبنا آنها یک ***مبنای متعامد*** را تشکیل می‌دهند، مزید بر آن، چون آنها بردارهای یکّه هستند، مبنا را ***اورتو نرمال*** می‌نامند. برحسب این مبنا یک بردار اختیاری $\mathbf{v}$ در شکل مولفه‌ای به‌صورت زیر ارائه می‌شود.

$$\mathbf{v} = v_1\hat{\mathbf{e}}_1 + v_2\hat{\mathbf{e}}_2 + v_3\hat{\mathbf{e}}_3 = \sum_{i=1}^{3} v_i\hat{\mathbf{e}}_i \qquad (۱ - ۲ - ۲)$$

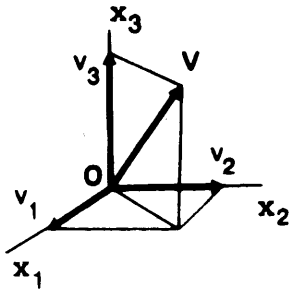
این بردار و مولفه‌های مختصاتی آن در شکل ۲ - ۱ ب نشان داده شده‌اند. برای توضیح نمادین، بردارها معمولاً با حروف لاتین کوچک و بصورت سیاه ارائه می‌شوند، در حالی که اندازه بردار با همان حرف به‌صورت روشن‌تر و کج بیان می‌شود. یعنی v اندازه $\mathbf{v}$ است.

در این مقطع از بحث مفید است تدبیری که مشهور به ***قرارداد جمع*** می‌باشد معرفی شود، این تدبیر بطور قابل ملاحظه‌ای نوشتن معادلات مکانیک محیط‌های پیوسته را آسان می‌سازد. به بیان خلاصه ، توافق می‌کنیم که هرگاه یک زیرنوشت دقیقاً **دو مرتبه** در یک جمله ظاهر شود، این زیرنوشت مقادیر ۳ , ۲ , ۱ را بطور متوالی اختیار کند، و جملات حاصله با هم جمع شوند. برای مثال با استفاده از این تدبیر حالا می‌توان معادله ۲ - ۲ - ۱ را به شکل ساده زیر نوشت و کاملاً نماد جمع Σ را حذف کرد.

$$\mathbf{v} = v_i\hat{\mathbf{e}}_i \qquad (۲ - ۲ - ۲)$$



(الف)



(ب)

شکل ۲ - ۱ (الف) محورهای مستطیلی قائم $Ox_1x_2x_3$

(ب) مولفه‌های بردار $\mathbf{v}$

برای تانسورهای قائم ، فقط نیاز به زیرنوشت برای مولفه‌ها می‌باشد، در تانسورهای عمومی ، هر دو زیرنوشت و بالانوشت بکار برده می‌شود. زیرنوشت‌های جمع شونده را ***شاخص کاذب*** می‌نامند، زیرا مهم نیست که چه حروف خاصی بکار برده شده‌اند ، پس وقتی قرارداد جمع استفاده شود $v_j\hat{\mathbf{e}}_j$ کاملاً معادل $v_i\hat{\mathbf{e}}_i$ یا $v_k\hat{\mathbf{e}}_k$ می‌باشد. تذکر، هیچ زیرنوشتی نباید بیش از دو مرتبه ظاهر گردد، اما همانگونه که به زودی نشان خواهیم داد، بیش از یک جفت شاخص کاذب ممکن است در یک جمله ظاهر گردد. همچنین توجه شود که قرارداد جمع ممکن است زیرنوشت‌هایی از بردارهای یکّه و ضرایب عددی را شامل بشوند.

مثال ۲ ــ ۲ ــ ۱ بدون اعتنا به معنی آنها تا جائی که مربوط به مکانیک می‌باشد روابط زیر را طبق قرارداد جمع توسعه دهید.

(الف) $u_iv_iw_j\hat{\mathbf{e}}_j$ (ب) $T_{ij}v_i\hat{\mathbf{e}}_j$ (پ) $T_{ii}v_j\hat{\mathbf{e}}_j$

حل (الف) اولین جمع روی i و سپس روی j

$$u_i v_i w_j \hat{e}_j = (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)(w_1 \hat{e}_1 + w_2 \hat{e}_2 + w_3 \hat{e}_3)$$

(ب) جمع روی i و سپس روی j آنگاه جمع جملات روی بردارهای یکّه

$$T_{ij} v_i \hat{e}_j = T_{1j} v_1 \hat{e}_j + T_{2j} v_2 \hat{e}_j + T_{3j} v_3 \hat{e}_j$$
$$= (T_{11} v_1 + T_{21} v_2 + T_{31} v_3)\,\hat{e}_1 + (T_{12} v_1 + T_{22} v_2 + T_{32} v_3)\,\hat{e}_2 +$$
$$(T_{13} v_1 + T_{23} v_2 + T_{33} v_3)\hat{e}_3$$

(پ) جمع روی i و سپس روی j

$$T_{ii} v_j \hat{e}_j = (T_{11} + T_{22} + T_{33})(v_1 \hat{e}_1 + v_2 \hat{e}_2 + v_3 \hat{e}_3)$$

به تشابه بین (الف) و (پ) توجه شود.

با ذهنیتی از مطالب فوق ، اکنون استفاده از نمادگذاری نمادین را برای چند تعریف مفید از جبر بردار و تانسور فهرست می‌کنیم.

۱ ــ جمع بردارها :

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \qquad w_i \hat{e}_i = (u_i + v_i)\,\hat{e}_i \qquad (۲ - ۲ - ۳)$$

۲ ــ ضرب

(الف) یک بردار توسط یک عدد

$$\lambda \mathbf{v} = \lambda v_i \hat{e}_i \qquad (۲ - ۲ - ۴)$$

(ب) ضرب عددی دو بردار

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = uv \cos\theta \qquad (۲ - ۲ - ۵)$$

که در آن θ کوچکترین زاویه بین دو بردار است وقتی آنها از یک مبدأ ترسیم شده باشند.

دلتای کرانکر

از معادله ۲ ـ ۲ ـ ۵ برای بردارهای مبنا $\hat{e}_i\ (i = ۱, ۲, ۳)$

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \begin{cases} ۱ & \text{اگر مقدار عدد } i = \text{مقدار عدد } j \\ ۰ & \text{اگر مقدار عدد } i \neq \text{مقدار عدد } j \end{cases}$$

بنابراین، اگر دلتای کرانکر را با تعریف زیر معرفی کنیم.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} ۱ & \text{اگر مقدار عدد } i = \text{مقدار عدد } j \\ ۰ & \text{اگر مقدار عدد } i \neq \text{مقدار عدد } j \end{cases}$$

مشاهده می‌شود که

$$\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij} \qquad (i, j = ۱, ۲, ۳) \qquad (۲-۲-۶)$$

همچنین، توجه شود که با قرارداد جمع

$$\delta_{ii} = \delta_{jj} = \delta_{۱۱} + \delta_{۲۲} + \delta_{۳۳} = ۱ + ۱ + ۱ = ۳$$

مزید بر آن، توجه را به خاصیت جایگزینی دلتای کرانکر توسط بسط (جمع روی j) عبارت زیر جلب می‌کنیم.

$$\delta_{ij}\hat{\mathbf{e}}_j = \delta_{i۱}\hat{\mathbf{e}}_۱ + \delta_{i۲}\hat{\mathbf{e}}_۲ + \delta_{i۳}\hat{\mathbf{e}}_۳$$

اما برای یک مقدار i در این معادله ، فقط یکی از دلتاهای کرانکر در سمت راست معادله غیرصفر است و مقدارش یک می‌باشد. بنابراین

$$\delta_{ij}\hat{\mathbf{e}}_j = \hat{\mathbf{e}}_i$$

و دلتای کرانکر در $\delta_{ij}\hat{\mathbf{e}}_j$ موجب می‌شود جمع زیرنوشت j در $\hat{\mathbf{e}}_j$ با i جایگزین شود و عبارت را به شکل ساده $\hat{\mathbf{e}}_i$ کاهش دهد.

از تعریف δ_{ij} و خاصیت جایگزینی ، اکنون ضرب عددی $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ خواهد شد.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_i\hat{\mathbf{e}}_i \cdot v_j\hat{\mathbf{e}}_j = u_iv_j\delta_{ij} = u_iv_i \qquad (۲-۲-۷)$$

(پ) ضرب برداری (ضربدری) دو بردار :

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u} = (uv \sin\theta)\,\hat{\mathbf{e}}$$

که در آن $۰ \le \theta \le \pi$ زاویه بین دو بردار است وقتی از یک مبدأ آن دو بردار ترسیم شوند، و $\hat{\mathbf{e}}$ بردار یکّه عمود بر صفحه آن دو است بطوری که چرخش راستگرد حول $\hat{\mathbf{e}}$ به اندازه زاویه θ موجب شود $\mathbf{u}$ روی $\mathbf{v}$ قرار گیرد.

نماد جایگشت

با معرفی نماد جایگشت ε_{ijk} که به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} ۱ & \text{اگر مقادیر عدد } ijk \text{ به‌صورت دنباله } ۱۲۳۱۲ \text{ ظاهر شود} \\ -۱ & \text{اگر مقادیر عدد } ijk \text{ به‌صورت دنباله } ۳۲۱۳۲ \text{ ظاهر شود} \\ ۰ & \text{اگر مقادیر عدد } ijk \text{ به‌صورت دنباله غیر از موارد فوق ظاهر شود} \end{cases}$$

(۲-۲-۸)

ضرب برداری مبنای $\hat{\mathbf{e}}_i \ (i = ۱, ۲, ۳)$ را می‌توان با استفاده از معادله ۲-۲-۸ به‌صورت زیر بیان نمود.

$$\hat{\mathbf{e}}_i \times \hat{\mathbf{e}}_j = \varepsilon_{ijk}\hat{\mathbf{e}}_k \qquad (i, j, k = ۱, ۲, ۳) \qquad (۲-۲-۹)$$

همچنین از روی تعریف دقت شود که جابجایی داخلی بین دو زیرنوشت در ε_{ijk} موجب تغییر علامت می‌شود، برای مثال

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{kji} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{ikj}$$

مزید بر آن برای زیرنوشت‌های تکراری ، ε_{ijk} صفر می‌شود یعنی

$$\varepsilon_{۱۱۳} = \varepsilon_{۲۱۲} = \varepsilon_{۱۳۳} = \varepsilon_{۲۲۲} = ۰$$

بنابراین هم‌اکنون می‌توان ضرب برداری فوق را بدین صورت نوشت.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = u_i\hat{\mathbf{e}}_i \times v_j\hat{\mathbf{e}}_j = u_iv_j(\hat{\mathbf{e}}_i \times \hat{\mathbf{e}}_j) = \varepsilon_{ijk}u_iv_j\hat{\mathbf{e}}_k \qquad (۲-۲-۱۰)$$

(ت) ضرب عددی سه‌گانه (ضرب جعبه‌ای) :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$$

یا

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = u_i\hat{\mathbf{e}}_i \cdot (v_j\hat{\mathbf{e}}_j \times w_k\hat{\mathbf{e}}_k) = u_i\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \varepsilon_{jkq}v_jw_k\hat{\mathbf{e}}_q$$

$$= \varepsilon_{jkq}u_iv_jw_k = \varepsilon_{ijk}u_iv_jw_k \qquad (۲-۲-۱۱)$$

که در مرحله آخری از خواص جایگزینی δ_{ij} و خواص تغییر علامت ε_{ijk} استفاده شده است.

(ث) ضرب برداری سه گانه :

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = u_i\hat{\mathbf{e}}_i \times (v_j\hat{\mathbf{e}}_j \times w_k\hat{\mathbf{e}}_k) = u_i\hat{\mathbf{e}}_i \times (\varepsilon_{jkq}v_jw_k\hat{\mathbf{e}}_q)$$

$$= \varepsilon_{iqm}\varepsilon_{jkq}u_iv_jw_k\hat{\mathbf{e}}_m = \varepsilon_{miq}\varepsilon_{jkq}u_iv_jw_k\hat{\mathbf{e}}_m \qquad (۲-۲-۱۲)$$

تساوی δ ـ ε

ضرب نماد جایگشت $\varepsilon_{miq}\,\varepsilon_{jkq}$ در معادله ۲ ـ ۲ ـ ۱۲ را می‌توان برحسب دلتاهای کرانکر به‌صورت تساوی زیر بیان نمود.

$$\varepsilon_{miq}\,\varepsilon_{jkq} = \delta_{mj}\,\delta_{ik} - \delta_{mk}\,\delta_{ij} \qquad (۲-۲-۱۳)$$

که با بسط مستقیم قابل اثبات است. این یکی از مهمترین فرمول‌ها و شایان ذکر می‌باشد. همچنین از خواص تغییر علامت ε_{ijk}

$$\varepsilon_{miq}\,\varepsilon_{jkq} = \varepsilon_{miq}\,\varepsilon_{qjk} = \varepsilon_{qmi}\,\varepsilon_{qjk} = \varepsilon_{qmi}\,\varepsilon_{jkq}$$

بعلاوه به آسانی از معادله ۲ ـ ۲ ـ ۱۳ می‌توان نشان داد که

$$\varepsilon_{jkq}\,\varepsilon_{mkq} = ۲\,\delta_{mj}$$

و

$$\varepsilon_{jkq}\,\varepsilon_{jkq} = ۶$$

پس اکنون معادله ۲ - ۲ - ۱۲ به‌صورت زیر درمی‌آید.

$$\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = (\delta_{mj}\,\delta_{jk} - \delta_{mk}\,\delta_{ij})\,u_i v_j w_k \hat{\mathbf{e}}_m$$

$$= (u_i v_m w_i - u_i v_i w_m)\,\hat{\mathbf{e}}_m = u_i w_i v_m \hat{\mathbf{e}}_m - u_i v_i w_m \hat{\mathbf{e}}_m \quad (۱۴-۲-۲)$$

ممکن است به شکل زیر هم نوشته شود که تساوی معروفی در جبر بردارها می‌باشد.

$$\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = (\mathbf{u}\,.\,\mathbf{w})\,\mathbf{v} - (\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v})\,\mathbf{w}$$

(ج) ضرب تانسوری دو بردار (دیاد)

$$\mathbf{uv} = u_i\hat{\mathbf{e}}_i v_j \hat{\mathbf{e}}_j = u_i v_j \hat{\mathbf{e}}_i\hat{\mathbf{e}}_j \quad (۱۵-۲-۲)$$

که در شکل بسط داده شده و سپس در ابتدا جمع روی i نتیجه می‌دهد.

$$u_i v_j \hat{\mathbf{e}}_i\hat{\mathbf{e}}_j = u_۱ v_j \hat{\mathbf{e}}_۱\hat{\mathbf{e}}_j + u_۲ v_j \hat{\mathbf{e}}_۲\hat{\mathbf{e}}_j + u_۳ v_j \hat{\mathbf{e}}_۳\hat{\mathbf{e}}_j$$

آنگاه جمع روی j نتیجه می‌دهد.

$$\begin{aligned} u_i v_j \hat{\mathbf{e}}_i\hat{\mathbf{e}}_j = {} & u_۱ v_۱ \hat{\mathbf{e}}_۱\hat{\mathbf{e}}_۱ + u_۱ v_۲ \hat{\mathbf{e}}_۱\hat{\mathbf{e}}_۲ + u_۱ v_۳ \hat{\mathbf{e}}_۱\hat{\mathbf{e}}_۳ \\ & + u_۲ v_۱ \hat{\mathbf{e}}_۲\hat{\mathbf{e}}_۱ + u_۲ v_۲ \hat{\mathbf{e}}_۲\hat{\mathbf{e}}_۲ + u_۲ v_۳ \hat{\mathbf{e}}_۲\hat{\mathbf{e}}_۳ \\ & + u_۳ v_۱ \hat{\mathbf{e}}_۳\hat{\mathbf{e}}_۱ + u_۳ v_۲ \hat{\mathbf{e}}_۳\hat{\mathbf{e}}_۲ + u_۳ v_۳ \hat{\mathbf{e}}_۳\hat{\mathbf{e}}_۳ \quad (۱۶-۲-۲) \end{aligned}$$

این مجموع نه جمله را **شکل نه تایی دیاد** $\mathbf{uv}$ می‌نامند. نمادگذاری متناوبی غالباً برای ضرب دیاد به‌صورت زیر بکار برده می‌شود.

$$\mathbf{u}\otimes\mathbf{v} = u_i\hat{\mathbf{e}}_i\otimes v_j\hat{\mathbf{e}}_j = u_i v_j \hat{\mathbf{e}}_i\otimes\hat{\mathbf{e}}_j \quad (۱۷-۲-۲)$$

جمع دیادها که به‌صورت زیر درمی‌آیند معروف به **دیادیک** هستند.

$$\mathbf{u}_۱\mathbf{v}_۱ + \mathbf{u}_۱\mathbf{v}_۲ + \ldots + \mathbf{u}_N\,\mathbf{v}_N \quad (۱۸-۲-۲)$$

(چ) ضرب های بردار ـ دیاد

۱. $\mathbf{u}\,(\mathbf{vw}) = u_i\hat{\mathbf{e}}_i\,.\,(v_j\hat{\mathbf{e}}_j w_k\hat{\mathbf{e}}_k) = u_i v_i w_k\hat{\mathbf{e}}_k \quad (۱۹-۲-۲)$

۲. $(\mathbf{uv})\,.\,\mathbf{w} = (u_i\hat{\mathbf{e}}_i v_j\hat{\mathbf{e}}_j)\,.\,w_k\hat{\mathbf{e}}_k = u_i v_i w_j\hat{\mathbf{e}}_i \quad (۲۰-۲-۲)$

۳. $\mathbf{u}\times(\mathbf{vw}) = (u_i\hat{\mathbf{e}}_i\times v_j\hat{\mathbf{e}}_j)\,w_k\hat{\mathbf{e}}_k = \varepsilon_{ijq}u_i v_j w_k\hat{\mathbf{e}}_q\hat{\mathbf{e}}_k \quad (۲۱-۲-۲)$

۴. $(\mathbf{uv})\times\mathbf{w} = u_i\hat{\mathbf{e}}_i\,(v_j\hat{\mathbf{e}}_j\times w_k\hat{\mathbf{e}}_k) = \varepsilon_{jkq}u_i v_j w_k\hat{\mathbf{e}}_i\hat{\mathbf{e}}_q \quad (۲۲-۲-۲)$

(باید توجه داشت که در ضرب‌های ردیف ۳ و ۴ ، مرتبه بردارهای مبنای $\hat{\mathbf{e}}_i$ مهم

است).

(ح) ضرب دیاد ـ دیاد

$$(\mathbf{uv}) \cdot (\mathbf{ws}) = u_i\hat{\mathbf{e}}_i\,(v_j\hat{\mathbf{e}}_j \cdot w_k\hat{\mathbf{e}}_k)\,s_q\hat{\mathbf{e}}_q = u_iv_jw_js_q\hat{\mathbf{e}}_i\hat{\mathbf{e}}_q \qquad (۲۳ - ۲ - ۲)$$

(خ) ضرب های بردار ـ تانسور

$$۱.\ \mathbf{v}.\mathbf{T} = v_i\hat{\mathbf{e}}_i \cdot T_{jk}\hat{\mathbf{e}}_j\hat{\mathbf{e}}_k = v_iT_{jk}\delta_{ij}\hat{\mathbf{e}}_k = v_iT_{ik}\hat{\mathbf{e}}_k \qquad (۲۴ - ۲ - ۲)$$

$$۲.\ \mathbf{T}.\mathbf{v} = T_{ij}\hat{\mathbf{e}}_i\hat{\mathbf{e}}_j \cdot v_k\hat{\mathbf{e}}_k = T_{ij}\hat{\mathbf{e}}_i\delta_{jk}v_k = T_{ij}v_j\hat{\mathbf{e}}_i \qquad (۲۵ - ۲ - ۲)$$

(توجه شود که این ضرب‌ها همچنین می‌توانند به شکل ساده **vT** و **Tv** نوشته شوند).

(د) ضرب تانسور ـ تانسور

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{S} = T_{ij}\hat{\mathbf{e}}_i\hat{\mathbf{e}}_j \cdot \mathbf{S}_{pq}\hat{\mathbf{e}}_p\hat{\mathbf{e}}_q = T_{ij}\mathbf{S}_{jq}\hat{\mathbf{e}}_i\hat{\mathbf{e}}_q \qquad (۲۶ - ۲ - ۲)$$

مثال ۲ ـ ۲ ـ ۲ اگر بردار **v** به‌صورت $\mathbf{v} = (\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}})\,\hat{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{a} \times \hat{\mathbf{n}})$ بیان شود که در آن **a** یک بردار اختیاری و $\hat{\mathbf{n}}$ بردار یکّه می‌باشد. **v** را برحسب بردارهای مبنای $\hat{\mathbf{e}}_i$ بیان نموده آنگاه بسط داده و آن را ساده کنید (توجه شود که $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = n_i\hat{\mathbf{e}}_i \cdot n_j\hat{\mathbf{e}}_j = n_in_j\delta_{ij} = n_in_i = ۱$)

حل برحسب بردارهای مبنای $\hat{\mathbf{e}}_i$ بردار **v** توسط معادله زیر بیان می‌شود.

$$\mathbf{v} = (a_i\hat{\mathbf{e}}_i \cdot n_j\hat{\mathbf{e}}_j)\,n_k\hat{\mathbf{e}}_k + n_i\hat{\mathbf{e}}_i \times (a_j\hat{\mathbf{e}}_j \times n_k\hat{\mathbf{e}}_k)$$

در اینجا توجه داریم که شاخص‌های i , j و k چهار مرتبه ظاهر می‌شوند، اما قرارداد جمع نقض نشده است. جملاتی که با علامت به‌اضافه یا منها مجزا شده‌اند، جملات متفاوت ملاحظه می‌شوند که روال قرارداد جمع در بین خودشان قابل کاربرد است. بردارهایی که با ضرب عددی یا برداری بهم مرتبط هستند جملات مجزا نمی‌باشند، و قرارداد جمع باید متفق با آنها باشد. با اجرای عملیات ضرب‌های نشان داده شده خواهیم داشت.

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= (a_in_j\delta_{ij})\,n_k\hat{\mathbf{e}}_k + n_i\hat{\mathbf{e}}_i \times (\varepsilon_{jkq}a_jn_k\hat{\mathbf{e}}_q) \\
&= a_in_in_k\hat{\mathbf{e}}_k + \varepsilon_{iqm}\varepsilon_{jkq}n_ia_jn_k\hat{\mathbf{e}}_m \\
&= a_in_in_k\hat{\mathbf{e}}_k + \varepsilon_{miq}\varepsilon_{jkq}n_ia_jn_k\hat{\mathbf{e}}_m \\
&= a_in_in_k\hat{\mathbf{e}}_k + (\delta_{mj}\delta_{ik} - \delta_{mk}\delta_{ij})\,n_ia_jn_k\hat{\mathbf{e}}_m \\
&= a_in_in_k\hat{\mathbf{e}}_k + n_ia_jn_i\hat{\mathbf{e}}_j - n_ia_in_k\hat{\mathbf{e}}_k \\
&= n_in_ia_j\hat{\mathbf{e}}_j = a_j\hat{\mathbf{e}}_j = \mathbf{a}
\end{aligned}$$

چون **a** باید مساوی با **v** باشد، این مثال نشان می‌دهد که بردار **v** می‌تواند به یک مؤلفه $(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}})\,\hat{\mathbf{n}}$ در امتداد $\hat{\mathbf{n}}$ و یک مولفه $\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}})$ عمود بر $\hat{\mathbf{n}}$ تجزیه شود.

مثال ۲ ــ ۲ ــ ۳ با استفاده از معادله ۲ - ۲ - ۱۳ ، نشان دهید که (الف) $\varepsilon_{mkq}\,\varepsilon_{jkq} = ۲\,\delta_{mj}$ و (ب) $\varepsilon_{jkq}\,\varepsilon_{jkq} = ۶$ (توجه شود که $\delta_{kk} = ۳$ و $\delta_{mk}\delta_{kj} = \delta_{mj}$).

حل (الف) معادله ۲ - ۲ - ۱۳ را با جابجایی شاخص i به k می‌نویسیم.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{mkq}\,\varepsilon_{jkq} &= \delta_{mj}\,\delta_{kk} - \delta_{mk}\,\delta_{kj}\\ &= ۳\,\delta_{mj} - \delta_{mj} = ۲\,\delta_{mj}\end{aligned}$$

(ب) معادله اولی در قسمت (الف) را در نظر می‌گیریم با جابجایی شاخص m به j خواهیم داشت.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{jkq}\,\varepsilon_{jkq} &= \delta_{jj}\,\delta_{kk} - \delta_{jk}\,\delta_{jk}\\ &= (۳)(۳) - \delta_{jj} = ۹ - ۳ = ۶\end{aligned}$$

مثال ۲ ــ ۲ ــ ۴ ضرب‌های دو نقطه‌ای دیادها بدین ترتیب تعریف می‌شوند.

$$\text{(الف)}\quad (\mathbf{uv}) \,..\, (\mathbf{ws}) = (\mathbf{v}\,.\,\mathbf{w})(\mathbf{u}\,.\,\mathbf{s})$$
$$\text{(ب)}\quad (\mathbf{uv}) \,:\, (\mathbf{ws}) = (\mathbf{u}\,.\,\mathbf{w})(\mathbf{v}\,.\,\mathbf{s})$$

این ضرب‌ها را توسعه و شکل مولفه‌های آنها را با هم مقایسه کنید.

حل

$$\text{(الف)}\quad (\mathbf{uv}) \,..\, (\mathbf{ws}) = (v_i\hat{\mathbf{e}}_i\,.\,w_j\hat{\mathbf{e}}_j)(u_k\hat{\mathbf{e}}_k\,.\,s_q\hat{\mathbf{e}}_q) = v_iw_iu_ks_k$$
$$\text{(ب)}\quad (\mathbf{uv}) \,:\, (\mathbf{ws}) = (u_i\hat{\mathbf{e}}_i\,.\,w_j\hat{\mathbf{e}}_j)(v_k\hat{\mathbf{e}}_k\,.\,s_q\hat{\mathbf{e}}_q) = u_iw_iv_ks_k$$

۲ - ۳ نمادگذاری شاخصی

با اختصاص دادن معنای خاص به زیرنوشت‌ها، نمادگذاری شاخصی عملیات جمع ، ضرب ، دیفرانسیل‌گیری و غیره را بدون استفاده و حتی ظهور بردارهای مبنا $\hat{\mathbf{e}}_i$ در معادلات مجاز می‌دارد. بطور ساده توافق می‌کنیم که رده تانسوری (مرتبه) یک جمله با تعداد «آزاد» یعنی غیرتکرار زیرنوشت‌ها در جمله نمایان شود. بر این اساس یک جمله بدون شاخص آزاد نمایانگر یک عدد است، یک جمله با یک شاخص آزاد یک بردار می‌باشد، یک جمله با دو شاخص آزاد

یک تانسور مرتبه دوم و به همین ترتیب . مشخصاً نمادهای زیر را داریم.

λ = عدد (تانسور مرتبه صفر) λ

v_i = بردار (تانسور مرتبه اول) **v** ، یا معادل ۳ مولفه‌اش

$u_i v_j$= دیاد (تانسور مرتبه دوم) **uv** ، یا معادل ۹ مولفه‌اش

T_{ij} = دیادیک (تانسور مرتبه دوم) **T** ، یا معادل ۹ مولفه‌اش

Q_{ijk} = تریادیک (تانسور مرتبه سوم) **Q** ، یا معادل ۲۷ مولفه‌اش

C_{ijkm} = تترادیک (تانسور مرتبه چهارم) **C** ، یا معادل ۸۱ مولفه‌اش

برای تانسورهای تعریف شده در فضای سه بعدی ، شاخص‌های آزاد به‌ترتیب مقادیر ۱ ، ۲ ، ۳ را اختیار می‌کنند، و می‌گوییم این شاخص‌ها دارای دامنه ۳ هستند. اگر N تعداد شاخص‌های آزاد در یک تانسور باشد آن تانسور 3^N مولفه در فضای سه بعدی خواهد داشت.

باید تاکید کرد که در نمادگذاری شاخصی دقیقاً **دو** نوع زیرنوشت ظاهر می‌شود.

۱ - شاخص‌های «آزاد» ، توسط حروفی که فقط ***یکبار*** در یک جمله واقع می‌شوند بیان می‌گردد.

۲ - شاخص‌های «جمع» یا «کاذب» ، توسط حروفی که **فقط دو دفعه** در یک جمله ظاهر می‌شوند، بیان می‌گردد.

مزید بر آن، هر جمله در یک معادله معتبر باید همان حرف زیرنوشت را برای شاخص‌های آزاد دارا باشد. هیچ زیرنوشتی نباید بیش از دو دفعه در هر جمله ظاهر شود.

عملیات ریاضی بین تانسورها به آسانی با استفاده از نمادگذاری شاخصی اجرا می‌شود. بنابراین جمع (و تفریق) بین تانسورهای هم رده براساس معادلات شاخص $u_i + v_i - w_i = s_i$ برای بردارها و $T_{ij} - V_{ij} + S_{ij} = Q_{ij}$ برای تانسورهای مرتبه دوم دنبال می‌شود. ضرب دو تانسورکه یک تانسور **خروجی** را ایجاد می‌کند به سادگی با قرار دادن نماد تانسورها درکنار هم و بدون ظاهر شدن شاخص‌های کاذب اجرا می‌گردد. به‌عنوان یک مثال شاخص ، ضرب خارجی بردار v_iدر تانسور $\mathbf{T}_{jk}$ یک تانسور مرتبه $v_i\mathbf{T}_{jk}$ می‌باشد. ادغام یک فرآیندی است برای تشخیص (یعنی، مساوی قرار دادن یکدیگر) هر دو شاخص یک جمله تانسوری . ضرب داخلی تانسور تشکیل می‌شود از یک ضرب خارجی تانسور توسط یک یا چند ادغام شاخص‌ها از تانسورهای مجزای واقع شده در ضرب خارجی . توجه داریم که رده یک تانسور به‌ازای هر ادغام **دو درجه** کاهش می‌یابد. تعدادی ضرب‌های خارجی که ادغام می‌شوند و ضرب‌های داخلی معروف را تشکیل می‌دهند در زیر آورده شده‌اند.

ضرب‌های داخلی		ادغام	ضرب‌های خارجی
(ضرب عددی بردار)	$u_i v_i$	$i = j$	$u_i v_j$
(ضرب برداری بردار)	$\varepsilon_{ijk} u_j v_k$	$j = q,\ k = m$	$\varepsilon_{ijk} u_q v_m$
(ضرب جعبه‌ای)	$\varepsilon_{ijk} u_i v_j w_k$	$i = q,\ j = m,\ k = n$	$\varepsilon_{ijk} u_q v_m w_n$

یک تانسور در هر دو شاخصی متقارن است اگر با جابجا شدن آن دو شاخص بجای یکدیگر مقدار تانسور بدون تغییر باقی بماند. برای مثال، اگر $S_{ij} = S_{ji}$ و $C_{ijm} = C_{jim}$ باشند، هر دوی این تانسورها را متقارن در شاخص‌های i و j می‌نامند. یک تانسور را نامتقارن (یا متقارن - اریب) در هر دو شاخصی گویند اگر جای یکدیگر قرار گرفتن این دو شاخص موجب تغییر علامت در مقدار تانسور بشود. پس اگر $A_{ij} = -A_{ji}$ این تانسور در شاخص‌های i و j نامتقارن است. همچنین در تعریف $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = \varepsilon_{jki}$ و غیره نتیجه می‌گیریم که نماد جایگشت یک تانسور نامتقارن به‌ازای کلیه شاخص‌هایش می‌باشد.

مثال ۲ ـ ۳ ـ ۱ نشان دهید که ضرب داخلی $S_{ij} A_{ij}$، یک تانسور متقارن $S_{ij} = S_{ji}$ در یک تانسور نامتقارن $A_{ij} = -A_{ji}$ صفر است.

حل طبق تعریف تانسور متقارن A_{ij} و تانسور متقارن - اریب S_{ij} داریم.

$$S_{ij} A_{ij} = -S_{ji} A_{ji} = -S_{mn} A_{mn} = -S_{ij} A_{ij}$$

که اولین اقدام به‌ترتیب تعاریف متقارن و نامتقارن را اجرا می‌کند و دو اقدام بعدی حاصل از کاذب بودن تماس شاخص‌ها می‌باشد بنابراین

$$S_{ij} A_{ij} = ۰ \quad \text{یا} \quad ۲ S_{ij} A_{ij} = ۰$$

یکی از مهمترین مزیت نمادگذاری شاخصی فشردگی ایجاد شده در بیان معادلات در فضای سه بعدی می‌باشد. یک خلاصه‌ای از معادلات شاخص مکانیک محیط‌های پیوسته برای تشریح این موضوع در زیر ارائه شده است.

۱ - $\phi = S_{ij} T_{ij} - S_{ii} T_{jj}$ (یک معادله ، ۱۸ جمله در طرف راست آن)

۲ - $t_i = Q_{ij} n_j$ (سه معادله ، سه جمله در طرف راست هر کدام)

۳ - $T_{ij} = \lambda \delta_{ij} E_{kk} + ۲ \mu E_{ij}$ (نه معادله ، چهار جمله در طرف راست هر کدام)

مثال ۲ ـ ۳ ـ ۲ با بسط مستقیم عبارت $v_i = \varepsilon_{ijk} W_{jk}$ مولفه‌های بردار v_i برحسب مولفه‌های تانسور W_{ij} را تعیین کنید.

حل ابتدا با جمع روی j و سپس روی k و آنگاه حذف جملات صفر نتیجه می‌گیریم

$$v_i = \varepsilon_{ilk} W_{lk} + \varepsilon_{i۲k} W_{۲k} + \varepsilon_{i۳k} W_{۳k}$$
$$= \varepsilon_{i۱۲} W_{۱۲} + \varepsilon_{i۱۳} W_{۱۳} + \varepsilon_{i۲۱} W_{۲۱} + \varepsilon_{i۲۳} W_{۲۳} + \varepsilon_{i۳۱} W_{۳۱} + \varepsilon_{i۳۲} W_{۳۲}$$

بنابراین

$$v_۱ = \varepsilon_{۱۲۳} W_{۲۳} + \varepsilon_{۱۳۲} W_{۳۲} = W_{۲۳} - W_{۳۲}$$
$$v_۲ = \varepsilon_{۲۱۳} W_{۱۳} + \varepsilon_{۲۳۱} W_{۳۱} = W_{۳۱} - W_{۱۳}$$
$$v_۳ = \varepsilon_{۳۱۲} W_{۱۲} + \varepsilon_{۳۲۱} W_{۲۱} = W_{۱۲} - W_{۲۱}$$

توجه شود اگر تانسور W_{ij} متقارن می‌بود، بردار v_i یک بردار تهی (صفر) می‌شد.

۲ - ۴ ماتریس‌ها و دترمینان‌ها

برای مقاصد محاسباتی اغلب اقتضا می‌کند از *بیان ماتریسی* بردارها و تانسورها استفاده شود. بر این اساس، در اینجا چندین تعریف و عملیات مقدماتی نظریه ماتریس‌ها را مرور می‌کنیم.

یک *ماتریس* تنظیم شده است از آرایه‌های مستطیلی محصور توسط کروشه که تحت قوانین مشخص عملیات ریاضی واقع می‌شوند. اجزای مشخصه A_{ij} یک ماتریس در i سطر (افقی) و j ستون (عمودی) قرار دارند. یک ماتریس دارای A_{ij} جزء است که ممکن است از نوع عددها، متغیرها، توابع ، یا هر یک از چندین ماهیت ریاضی باشد که به‌صورت $[A_{ij}]$ یا نمادی که معروف به حروف شکسته $\mathscr{A}$ می‌باشد مشخص گردد. بردار یا تانسوری که ماتریس معرف آن باشد توسط نماد شکسته بصورت سیاه نشان داده می‌شود. یک ماتریس M در N (که نوشته می‌شود $M \times N$) دارای M سطر و N ستون می‌باشد که ممکن است بدین گونه بیان شود.

$$\mathscr{A} = [A_{ij}] = \begin{bmatrix} A_{۱۱} A_{۱۲} \cdots A_{۱N} \\ A_{۲۱} A_{۲۲} \cdots A_{۲N} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ A_{M۱} \quad A_{M۲} \cdots A_{MN} \end{bmatrix} \qquad (۲ - ۴ \cdot ۱)$$

اگر $M = N$ باشد، ماتریس **یک ماتریس مربع** است. یک ماتریس $N \times ۱$ یعنی $[A_{۱N}]$ یک **ماتریس سطری** است، و یک ماتریس $۱ \times M$ یعنی $[A_{M۱}]$ یک **ماتریس ستونی** می‌باشد. ماتریس‌های سطری و ستونی ، بردارها را بیان می‌کنند، در حالی که ماتریس مربع ۳×۳ یک تانسور مرتبه دوم را نشان می‌دهد. یک عدد را با یک ماتریس ۱×۱ (دارای یک عنصر) نمایش می‌دهند. استفاده فاقد شرط از لغت ماتریس در این کتاب ، ارجاع به یک ماتریس مربع ۳×۳ می‌باشد، یعنی ماتریس بیانگر یک تانسور مرتبه دوم .

یک ماتریس **صفر یا تهی** دارای کلیه عناصر مساوی با صفر است. یک **ماتریس قطری**، یک ماتریس مربعی است که عناصر غیر واقع در روی **قطر اصلی** (که از $A_{۱۱}$ تا A_{NN} می‌باشد) تماماً صفر هستند. پس برای یک ماتریس قطری، $A_{ij} = ۰$ به‌ازای $i \neq j$. **ماتریس یکه یا واحد** $\mathscr{I}$ که اتفاقاً ماتریس بیانگر دلتای کرانکر هم هست، یک ماتریس قطری با عناصر روی قطر با مقدار یک است.

ماتریس $M \times N$ تشکیل یافته از جابجایی سطرها و ستون‌های ماتریس $\mathscr{A}$ $(M \times N)$ معروف به ماتریس **برگردان** $\mathscr{A}$ است و به‌صورت $\mathscr{A}^T$ یا $[A_{ij}]^T$ بیان می‌شود. طبق تعریف، عناصر یک ماتریس $\mathscr{A}$ و برگردان آن توسط رابطه $A_{ij}{}^T = A_{ji}$ بهم مرتبط هستند. یک ماتریسی که $\mathscr{A} = \mathscr{A}^T$ یا در شکل اجزائی $A_{ij} = A_{ij}{}^T$ باشد آن را ماتریس متقارن می‌نامند، وقتی که $\mathscr{A} = -\mathscr{A}^T$ یا $A_{ij} = -A_{ij}{}^T$ باشد آن را ماتریس نامتقارن یا متقارن - اریب می‌گویند. عناصر واقع در قطر اصلی یک ماتریس متقارن - اریب تماماً صفر هستند. دو ماتریس مساوی هستند اگر عنصر به عنصر یکسان باشند. ماتریس‌های دارای تعداد سطر و ستون یکسان می‌توانند عنصر به عنصر با هم جمع (یا تفریق) شوند. پس اگر $\mathscr{A} = \mathscr{B} + \mathscr{C}$ عناصر $\mathscr{A}$ توسط رابطهٔ زیر ارائه می‌شوند.

$$A_{ij} = B_{ij} + C_{ij} \qquad (۲-۴-۲)$$

جمع ماتریس‌ها جابجاپذیر ، $\mathscr{A} + \mathscr{B} = \mathscr{B} + \mathscr{A}$ و شرکت‌پذیر نیز می‌باشند $\mathscr{A} + (\mathscr{B} + \mathscr{C}) = (\mathscr{A} + \mathscr{B}) + \mathscr{C}$.

مثال ۲ ـ ۴ ـ ۱ نشان دهید که ماتریس مربع $\mathscr{A}$ را می‌توان به‌صورت جمع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس متقارن - اریب با تجزیه زیر بیان نمود.

$$\mathscr{A} = \frac{\mathscr{A} + \mathscr{A}^T}{۲} + \frac{\mathscr{A} - \mathscr{A}^T}{۲}$$

حل تجزیه را به‌صورت $\mathscr{A} = \mathscr{B} + \mathscr{C}$ می‌توان اختیار نمود که $\mathscr{B} = \frac{۱}{۲}(\mathscr{A} + \mathscr{A}^T)$ و $\mathscr{C} = \frac{۱}{۲}(\mathscr{A} - \mathscr{A}^T)$ باشد. آنگاه $\mathscr{B}$ و $\mathscr{C}$ به‌صورت اجزائی عبارتند از

$$B_{ij} = \frac{A_{ij} + A_{ij}^T}{۲} = \frac{A_{ij} + A_{ji}}{۲} = \frac{A_{ji} + A_{ji}^T}{۲} = B_{ji} = B_{ij}^T$$

$$C_{ij} = \frac{A_{ij} - A_{ij}^T}{۲} = \frac{A_{ij} - A_{ji}}{۲} = -\frac{A_{ji} - A_{ji}^T}{۲} = -C_{ji} = -C_{ij}^T$$

بنابراین ، $\mathscr{B}$ متقارن و $\mathscr{C}$ متقارن - اریب می‌باشد.

ضرب ماتریس $\mathscr{A}$ توسط عدد λ منجر به ماتریس $\lambda\mathscr{A}$ یا $[\lambda A_{ij}]$ می‌شود. ضرب دو ماتریس $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ که با $\mathscr{A}\mathscr{B}$ بیان می‌شود، فقط وقتی تعریف شده است که ماتریس‌ها **تطبیق** باشند، یعنی ماتریس $\mathscr{A}$ و **پیش ضرب** دارای همان تعداد ستون باشد که ماتریس **پس ضرب** $\mathscr{B}$ دارای سطر است. پس ضرب ماتریس $M \times Q$ در ماتریس $Q \times N$ یک ماتریس $M \times N$ نتیجه می‌دهد. ضرب ماتریس $\mathscr{C} = \mathscr{A}\mathscr{B}$ دارای اجزایی بدین صورت است.

$$C_{ij} = A_{ik} B_{kj} \qquad (۲ - ۴ - ۳)$$

که در آن k البته یک شاخص جمع است. بنابراین هر عنصر C_{ij} ماتریس حاصلضرب عبارت است از یک ضرب داخلی i امین سطر ماتریس پیش ضرب در j امین ستون ماتریس پس ضرب . در حالت کلی، ضرب ماتریس‌ها جابجاپذیر هستند $\mathscr{A}\mathscr{B} \neq \mathscr{B}\mathscr{A}$ ، اما قوانین شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری ضرب برای ماتریس‌ها برقرار است. ضرب یک ماتریس در خودش، مربع ماتریس خودش می‌شود و بدین صورت است $\mathscr{A}\mathscr{A} = \mathscr{A}^۲$. به همین ترتیب، مکعب ماتریس برابر است با $\mathscr{A}\mathscr{A}\mathscr{A} = \mathscr{A}^۳$ و بطورکلی ضرب ماتریس از قانون توان تبعیت می‌کند.

$$\mathscr{A}^m \mathscr{A}^n = \mathscr{A}^n \mathscr{A}^m = \mathscr{A}^{m+n} \qquad (۲ - ۴ - ۴)$$

که در آن m , n اعداد صحیح مثبت یا صفر هستند. همچنین توجه داریم که

$$(\mathscr{A}^n)^T = (\mathscr{A}^T)^n \qquad (۲ - ۴ - ۵)$$

اگر $\mathscr{B}\mathscr{B} = \mathscr{A}$ باشد آنگاه

$$\mathscr{B} = \sqrt{\mathscr{A}} = (\mathscr{A})^{\frac{۱}{۲}} \qquad (۲ - ۴ - ۶)$$

اما جذر ریشه منحصر بفرد نیست.

مثال ۲ ـ ۴ ـ ۲ نشان دهید که برای ماتریس‌های اختیاری $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$:

(الف) $(\mathscr{A} + \mathscr{B})^T = \mathscr{A}^T + \mathscr{B}^T$

(ب) $(\mathscr{A}\mathscr{B})^T = \mathscr{B}^T \mathscr{A}^T$

(پ) $\mathscr{I}\mathscr{B} = \mathscr{B}\mathscr{I} = \mathscr{B}$

حل (الف) اگر $\mathscr{C} = \mathscr{A} + \mathscr{B}$ آنگاه در شکل اجزائی $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$ و بنابراین $\mathscr{C}^T$ عبارت است از

$$C_{ij}^T = C_{ji} = A_{ji} + B_{ji} = A_{ij}^T + B_{ij}^T \quad \text{یا} \quad \mathscr{C}^T = (\mathscr{A} + \mathscr{B})^T = \mathscr{A}^T + \mathscr{B}^T$$

(ب) اگر $\mathscr{C} = \mathscr{A}\mathscr{B}$ آنگاه در شکل اجزائی

$$C_{ij} = A_{ik} B_{kj} = A_{ki}^T B_{jk}^T = B_{jk}^T A_{ki}^T = C_{ji}^T$$

از این رو ، $(\mathscr{A}\mathscr{B})^T = \mathscr{B}^T \mathscr{A}^T$.

(پ) اگر $\mathscr{C} = \mathscr{I}\mathscr{B}$ آنگاه در شکل اجزائی

$$C_{ij} = \delta_{ik} B_{kj} = B_{ij} = B_{ik} \delta_{kj}$$

با جایگذاری خواص ، آنگاه $\mathscr{I}\mathscr{B} = \mathscr{B}\mathscr{I} = \mathscr{B}$.

دترمینان یک ماتریس مربع به شکل یک مربعی از عناصر ماتریس تشکیل می‌شود که بر طبق قوانین ریاضی ارزیابی می‌گردد. دترمینان ماتریس $\mathscr{A}$ را به‌صورت $det\ \mathscr{A}$ یا $| A_{ij} |$ نشان می‌دهند. برای یک ماتریس $\mathscr{A}$ (۳×۳) داریم.

$$det\ \mathscr{A} = | A_{ij} | = \begin{vmatrix} A_{۱۱} & A_{۱۲} & A_{۱۳} \\ A_{۲۱} & A_{۲۲} & A_{۲۳} \\ A_{۳۱} & A_{۳۲} & A_{۳۳} \end{vmatrix} \qquad (۲ - ۴ - ۷)$$

کهاد $det\ \mathscr{A}$ ، دترمینان دیگری است مثل $| M_{ij} |$ که از حذف i امین سطر و j امین ستون $| A_{ij} |$ تشکیل شده است. کوفاکتور عناصر A_{ij} (که بعضی اوقات کهاد علامت‌دار نامیده می‌شود) به‌صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$A_{ij}^{(c)} = (-۱)^{i+j} | M_{ij} | \qquad (۲ - ۴ - ۸)$$

که در آن بالانوشت (c) بیانگر کوفاکتور ماتریس $\mathscr{A}$ می‌باشد.

ارزیابی دترمینان را می‌توان با روش معمول که «**بسط کوفاکتورها**» نامیده می‌شود اجرا نمود. در این روش هر سطر (یا ستون) دترمینان را اختیار نموده و هر عنصر در سطر (یا ستون) را در کوفاکتورش ضرب می‌کنیم. جمع این ضرب‌ها مقدار دترمینان را می‌دهد. برای مثال، بسط دترمینان معادله ۲ - ۴ - ۷ توسط اولین سطر عبارت است از

$$det\,\mathscr{A} = A_{11}\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} - A_{12}\begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} + A_{13}\begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} \qquad (۹ - ۴ - ۲)$$

پس از تکمیل کردن نتیجه می‌شود.

$$det\,\mathscr{A} = A_{11}\,(A_{22}A_{33} - A_{23}A_{32}) - A_{12}\,(A_{21}A_{33} - A_{23}A_{31}) + A_{13}\,(A_{21}A_{32} - A_{22}A_{31}) \qquad (۱۰ - ۴ - ۲)$$

چند خواص جالب دترمینان‌ها در این مرحله شایان ذکر است. در ابتدا، جابجایی هر دو سطر (یا ستون) یک دترمینان موجب تغییر علامت در مقدارش می‌شود. بخاطر این خاصیت و خواص تغییر علامت در نماد جایگشت ، $det\,\mathscr{A}$ در معادله ۲ - ۴ - ۷ را می‌توان با نمادگذاری شاخصی به شکلهای متناوب (رجوع به مسئله ۲ - ۱۱) بیان نمود.

$$det\,\mathscr{A} = \varepsilon_{ijk}\,A_{i1}\,A_{j2}\,A_{k3} = \varepsilon_{ijk}\,A_{1i}\,A_{2j}\,A_{3k} \qquad (۱۱ - ۴ - ۲)$$

بعلاوه ، جابجایی اختیاری تعدادی از ستون‌ها همراه با تغییر علامت دترمینان به‌ازای هر کدام از آنها می‌باشد، از شکل نخست معادله ۲ - ۴ - ۱۱ می‌توان نشان داد که (رجوع به مسئله ۲ - ۱۲).

$$\varepsilon_{qmn}\,det\,\mathscr{A} = \varepsilon_{ijk}\,A_{iq}\,A_{jm}\,A_{kn} \qquad (۱۲ - ۴ - ۲)$$

بالاخره ، توجه داریم که اگر $det\,\mathscr{A} = 0$ ماتریس را **تکین** می‌نامند. به آسانی می‌توان نشان داد که هر ماتریس متقارن - اریب 3×3 تکین است. همچنین، دترمینان ماتریس قطری $\mathscr{D}$ به‌سادگی ضرب عناصر قطرش در یکدیگر می‌باشد، $det\,\mathscr{D} = D_{11}\,D_{22}\,...\,D_{NN}$.

مثال ۲ ــ ۴ ــ ۳ نشان دهید که برای ماتریس‌های $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ ،

$$det\,\mathscr{A}\mathscr{B} = det\,\mathscr{B}\mathscr{A} = det\,\mathscr{A}\,det\,\mathscr{B}$$

حل اگر $\mathscr{C} = \mathscr{AB}$ آنگاه $C_{ij} = A_{ik} B_{kj}$ و معادله ۲ - ۴ - ۱۱

$$\begin{aligned} det\, \mathscr{C} &= \varepsilon_{ijk} C_{i1} C_{j2} C_{k3} \\ &= \varepsilon_{ijk} A_{iq} B_{q1} A_{jm} B_{m2} A_{kn} B_{n3} \\ &= \varepsilon_{ijk} A_{iq} A_{jm} A_{kn} B_{q1} B_{m2} B_{n3} \end{aligned}$$

اما از معادله ۲ - ۴ - ۱۲

$$\varepsilon_{ijk} A_{iq} A_{jm} A_{kn} = \varepsilon_{qmn}\, det\, \mathscr{A}$$

بنابراین اکنون داریم

$$det\, \mathscr{C} = det\, \mathscr{AB} = \varepsilon_{qmn} B_{q1} B_{m2} B_{n3}\, det\, \mathscr{A} = det\, \mathscr{B}\, det\, \mathscr{A}$$

با جابجایی مستقیم $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$، $det\, \mathscr{AB} = det\, \mathscr{BA}$.

مثال ۲ ـ ۴ ـ ۴ با استفاده از معادلات ۲ - ۴ - ۹ و ۲ - ۴ - ۱۰ نشان دهید که $det\, \mathscr{A} = det\, \mathscr{A}^T$.

حل چون

$$| \mathscr{A}^T | = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}$$

در اینجا بسط کوفاکتور توسط اولین ستون نتیجه می‌دهد.

$$| \mathscr{A}^T | = A_{11} \begin{vmatrix} A_{22} & A_{32} \\ A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} - A_{12} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{31} \\ A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} + A_{13} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{31} \\ A_{22} & A_{32} \end{vmatrix}$$

که یکسان با معادله ۲ - ۴ - ۹ است و از این رو مساوی با معادله ۲ - ۴ - ۱۰ می‌باشد.

معکوس ماتریس $\mathscr{A}$ را که به‌صورت $\mathscr{A}^{-1}$ نمایش داده می‌شود به‌طریق زیر تعریف می‌گردد.

$$\mathscr{A}\mathscr{A}^{-1} = \mathscr{A}^{-1}\mathscr{A} = \mathscr{I} \qquad (۲ - ۴ - ۱۳)$$

که در آن $\mathscr{I}$ ماتریس واحد است، پس اگر $\mathscr{AB} = \mathscr{I}$ باشد، آنگاه $\mathscr{B} = \mathscr{A}^{-1}$ و $\mathscr{A} = \mathscr{B}^{-1}$

خواهد بود. ماتریس مجاور $\mathscr{A}^*$ به‌صورت برگردان ماتریس کوفاکتور تعریف می‌شود.

$$\mathscr{A}^* = [\mathscr{A}^{(c)}]^T \qquad (۱۴-۴-۲)$$

ماتریس معکوس برحسب ماتریس مجاور به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$\mathscr{A}^{-1} = \frac{\mathscr{A}^*}{det\ \mathscr{A}} \qquad (۱۵-۴-۲)$$

که در واقع یک معادله کاری برای محاسبه ماتریس معکوس می‌باشد. این معادله نشان می‌دهد که معکوس ماتریس وجود دارد فقط اگر $det\ \mathscr{A} \neq 0$ باشد، یعنی فقط اگر ماتریس $\mathscr{A}$ غیرتکین باشد. مشخصاً یک ماتریس متقارن - اریب 3×3 بدون معکوس می‌باشد.

مثال ۲ ـ ۴ ـ ۵ از تعریف معکوس در معادله ۲ - ۴ - ۱۳ نشان دهید که

$$(\mathscr{A}\mathscr{B})^{-1} = \mathscr{B}^{-1}\ \mathscr{A}^{-1} \quad \text{(الف)}$$
$$(\mathscr{A}^T)^{-1} = (\mathscr{A}^{-1})^T \quad \text{(ب)}$$

حل (الف) با پیش ضرب نمودن ضرب دو ماتریس $\mathscr{A}\mathscr{B}$ توسط $\mathscr{B}^{-1}\ \mathscr{A}^{-1}$ خواهیم داشت (از معادله ۲ - ۴ - ۱۳ استفاده شده است).

$$\mathscr{B}^{-1}\ \mathscr{A}^{-1}\ \mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{B}^{-1}\ \mathscr{I}\mathscr{B} = \mathscr{B}^{-1}\ \mathscr{B} = \mathscr{I}$$

و بنابراین $(\mathscr{A}\mathscr{B})^{-1} = \mathscr{B}^{-1}\ \mathscr{A}^{-1}$.

(ب) با برگردان نمودن طرفین معادله ۲ - ۴ - ۱۳ و استفاده از نتایج مثال ۲ - ۴ - ۲ (ب) داریم

$$(\mathscr{A}\mathscr{A}^{-1})^T = (\mathscr{A}^{-1})^T\ \mathscr{A}^T = \mathscr{I}^T = \mathscr{I}$$

از این رو $(\mathscr{A}^{-1})^T$ باید معکوس $\mathscr{A}^T$ باشد یعنی $(\mathscr{A}^T)^{-1} = (\mathscr{A}^{-1})^T$.

یک ماتریس **متعامد** را که به‌صورت $\mathscr{Q}$ نشان می‌دهند یک ماتریس مربع است که $\mathscr{Q}^{-1} = \mathscr{Q}^T$ می‌باشد. از این تعریف نتیجه می‌گیریم که یک ***ماتریس متقارن متعامد*** معکوس خودش است زیرا در این حالت داریم.

$$\mathscr{Q}^{-1} = \mathscr{Q}^T = \mathscr{Q} \qquad (۱۶-۴-۲)$$

همچنین اگر $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ ماتریس‌های متعامد باشند،

$$(\mathscr{A}\mathscr{B})^{-1} = \mathscr{B}^{-1}\ \mathscr{A}^{-1} = \mathscr{B}^{T}\mathscr{A}^{T} = (\mathscr{A}\mathscr{B})^{T} \qquad (۲ - ۴ - ۱۷)$$

بنابراین ضرب آن دو ماتریس هم متعامد می‌باشد. مزید بر آن اگر $\mathscr{A}$ متعامد باشد می‌توان نشان داد که (رجوع به مسئله ۲ - ۱۶).

$$det\ \mathscr{A} = \pm 1 \qquad (۲ - ۴ - ۱۸)$$

همانطوری که در شروع این قسمت اشاره شد، یک بردار را می‌توان با یک ماتریس سطری یا ستونی و یک تانسور مرتبه دوم را توسط یک ماتریس مربع ۳ × ۳ بیان نمود. برای مقاصد محاسباتی غالباً مزیت در آن است که معادلات برداری یا تانسوری را در شکل ماتریسی آنها نوشت. به‌عنوان یک مثال خیلی ساده ضرب تانسور در بردار، $\mathbf{u} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}$ (نمادگذاری نمادین) یا $u_i = T_{ij}\, v_j$ (نمادگذاری شاخصی) در شکل ماتریسی به‌صورت زیر ظاهر می‌شود.

$$[\,u_{i1}\,] = [\,T_{ij}\,][\,v_{j1}\,] \quad \text{یا} \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

(۲ - ۴ - ۱۹)

تقریباً به همان طریق برای ضرب

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \quad \text{یا} \quad w_i = v_j\, T_{ji}$$

به‌صورت زیر ظاهر می‌گردد.

$$[\,w_{1i}\,] = [\,v_{1j}\,][\,T_{ji}\,] \quad \text{یا} \quad [w_1, w_2, w_3] = [v_1, v_2, v_3] \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

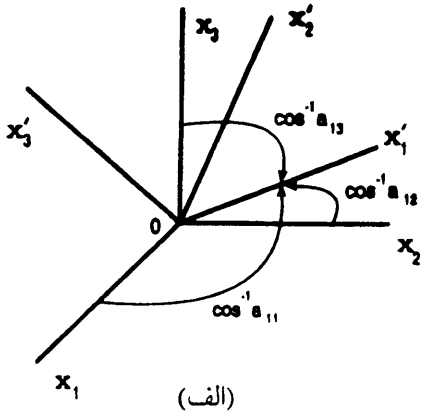
(۲ - ۴ - ۲۰)

۲ - ۵ انتقال ماتریس‌های قائم

همانگونه که قبلاً اشاره شد، بردارها و تانسورها دارای هویتی مستقل از هر دستگاه مختصات خاص می‌باشند، ولی مقادیر نسبی مولفه‌هایشان وابسته به محورهای تعریف شده‌ای است که بدان آنها ارجاع شده‌اند. روابط بین این مولفه‌های مختلف وقتی نسبت به دو مجموعه مجزای محورهای مختصات تعریف شده باشند، مشهور به ***معادلات انتقال*** می‌باشد.

در توسعه این معادلات انتقال برای تانسورهای قائم ، دو مجموعه محورهای قائم مستطیلی $Ox_1x_2x_3$ و $Ox'_1x'_2x'_3$ که دارای مبدأ مشترک هستند در نظر می‌گیریم، موقعیت نسبی آنها نسبت به یکدیگر به گونه‌ای است که جهت کسینوس‌های بین محورهای پرایم‌دار و بدون پرایم به‌صورت $a_{ij} = cos\ (x'_i\ ,\ x_j)$ مطابق شکل ۲ - ۲ الف ارائه شده‌اند.

آرایه مربعی متشکل از نُه جهت کسینوس در شکل ۲ - ۲ ب در ارتباط دادن بردارهای یکّه مبنای $\hat{e}'_i$ به مبنای $\hat{e}_i$ و همچنین در ارتباط دادن مختصات پرایم‌دار و بدون پرایم x'_i و x_i از یک نقطه مفید است. بنابراین، بردارهای مبنای پرایم‌دار $\hat{e}'_i$ برحسب بردارهای بدون پرایم $\hat{e}_i$ توسط معادلات زیر ارائه می‌شوند (همانطوری که به آسانی از هندسه بردارها در نمودار شکل ۲ - ۲ الف تشخیص داده می‌شود).



(الف)

		$\hat{e}_1$	$\hat{e}_2$	$\hat{e}_3$
		x_1	x_2	x_3
$\hat{e}'_1$	x'_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
$\hat{e}'_2$	x'_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
$\hat{e}'_3$	x'_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

(ب)

شکل ۲ - ۲

(الف) دستگاه مختصات مستطیلی $Ox_1x_2x_3$ دوران یافته به $Ox'_1x'_2x'_3$ (ب) جدول انتقال نشان دهنده جهت کسینوس‌ها .

$$\hat{\mathbf{e}}'_1 = a_{11}\hat{\mathbf{e}}_1 + a_{12}\hat{\mathbf{e}}_2 + a_{13}\hat{\mathbf{e}}_3 = a_{1j}\,\hat{\mathbf{e}}_j \qquad (۲-۵-۱\text{ الف})$$

$$\hat{\mathbf{e}}'_2 = a_{21}\hat{\mathbf{e}}_1 + a_{22}\hat{\mathbf{e}}_2 + a_{23}\hat{\mathbf{e}}_3 = a_{2j}\,\hat{\mathbf{e}}_j \qquad (۲-۵-۱\text{ ب})$$

$$\hat{\mathbf{e}}'_3 = a_{31}\hat{\mathbf{e}}_1 + a_{32}\hat{\mathbf{e}}_2 + a_{33}\hat{\mathbf{e}}_3 = a_{3j}\,\hat{\mathbf{e}}_j \qquad (۲-۵-۱\text{ پ})$$

یا در شکل فشرده با استفاده از قرارداد جمع

$$\hat{\mathbf{e}}'_i = a_{ij}\,\hat{\mathbf{e}}_j \qquad (۲-۵-۲)$$

با تعریف ماتریس $\mathscr{A}$ که عناصر آن جهت کسینوس‌ها یعنی a_{ij} می‌باشد، می‌توان معادله ۲ - ۵ - ۲ را به شکل ماتریسی زیر نوشت.

$$[\,\hat{\mathbf{e}}_{i1}\,] = [\,a_{ij}\,][\,\hat{\mathbf{e}}_{j1}\,] \quad \text{یا} \quad \begin{bmatrix}\hat{\mathbf{e}}_1\\ \hat{\mathbf{e}}_2\\ \hat{\mathbf{e}}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{e}}_1\\ \hat{\mathbf{e}}_2\\ \hat{\mathbf{e}}_3\end{bmatrix}$$

$$(۲-۵-۳)$$

که در آن عناصر ماتریس‌های ستونی بردارهای یکّه هستند. ماتریس $\mathscr{A}$ معروف به ***ماتریس انتقال*** است، زیرا همانطور که ملاحظه می‌کنید، نقش آنها در انتقال مولفه‌های یک بردار (یا تانسور) مربوط به یک مجموعه محورها به مولفه‌های همان بردار (یا تانسور) در یک مجموعه دوران یافته می‌باشد.

بخاطر عمود بودن محورهای پرایم‌دار خواهیم داشت $\hat{\mathbf{e}}'_i \cdot \hat{\mathbf{e}}'_j = \delta_{ij}$. اما از نقطه نظر معادله ۲ - ۵ - ۲، $\hat{\mathbf{e}}'_i \cdot \hat{\mathbf{e}}'_j = a_{iq}\,\hat{\mathbf{e}}_q \cdot a_{jm}\,\hat{\mathbf{e}}_m = a_{iq}\,a_{jm}\,\delta_{qm} = a_{iq}\,a_{jq} = \delta_{ij}$ که از آنجا ***شرط متعامد*** روی جهت کسینوس‌ها استنباط می‌گردد (در اینجا به هر دو شکل شاخصی و ماتریس ارائه می‌شود).

$$a_{iq}\,a_{jq} = \delta_{ij} \quad \text{یا} \quad \mathscr{A}\mathscr{A}^T = \mathscr{I} \qquad (۲-۵-۴)$$

توجه داشته باشید که به آسانی مشخص می‌شود که این عبارت ضرب داخلی i امین سطر در j امین سطر ماتریس $\mathscr{A}$ می‌باشد. با یک روال مشابه منتهی به معادله ۲ - ۵ - ۲ اما با استفاده از ستون‌های ماتریس $\mathscr{A}$ بدست می‌آوریم.

$$\hat{\mathbf{e}}_i = a_{ji}\,\hat{\mathbf{e}}'_j \qquad (۲ - ۵ - ۵)$$

که در شکل ماتریسی عبارت است از

$$[\,\hat{\mathbf{e}}_{1i}\,] = [\,\hat{\mathbf{e}}'_{1j}\,][\,a_{ji}\,] \quad \text{یا} \quad [\,\hat{\mathbf{e}}_1\,,\,\hat{\mathbf{e}}_2\,,\,\hat{\mathbf{e}}_3] = [\hat{\mathbf{e}}'_1\,,\,\hat{\mathbf{e}}'_2\,,\,\hat{\mathbf{e}}'_3] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

(۲ - ۵ - ۶)

توجه شود هنگامی که ماتریس برگردان $\mathscr{A}^T$ استفاده می‌شود، معادله ۲ - ۵ - ۶ به‌صورت زیر است.

$$[\,\hat{\mathbf{e}}_{i1}\,] = [\,a_{ij}]^T[\,\hat{\mathbf{e}}'_{j1}\,] \quad \text{یا} \quad \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 \\ \hat{\mathbf{e}}_2 \\ \hat{\mathbf{e}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}'_1 \\ \hat{\mathbf{e}}'_2 \\ \hat{\mathbf{e}}'_3 \end{bmatrix}$$

(۲ - ۵ - ۷)

بطوری که ماتریس‌های ستونی برای بردارهای $\hat{\mathbf{e}}_i$ و $\hat{\mathbf{e}}'_i$ بکار برده می‌شوند. با ملاحظه ضرب برداری $\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij}$ و معادله ۲ - ۵ - ۵، شرط دوم متعامد بودن را بدست می‌آوریم.

$$a_{ij}\,a_{ik} = \delta_{jk} \quad \text{یا} \quad \mathscr{A}^T\mathscr{A} = \mathscr{I} \qquad (۲ - ۵ - ۸)$$

ضرب داخلی j امین ستون در k امین ستون ماتریس $\mathscr{A}$.

اکنون یک بردار اختیاری $\mathbf{v}$ دارای مولفه‌های v_i در دستگاه بدون پرایم و v'_i در دستگاه پرایم‌دار را در نظر بگیرید. آنگاه با استفاده از معادله ۲ - ۵ - ۵

$$\mathbf{v} = v'_j \hat{\mathbf{e}}'_j = v_i \hat{\mathbf{e}}_i = v_i a_{ji} \hat{\mathbf{e}}'_j$$

از آنجا با انطباق دادن ضرایب روی $\hat{\mathbf{e}}'_j$ داریم (در هر دو شکل شاخصی و نمادین تانسور)

$$v'_j = a_{ji} v_i \quad \text{یا} \quad \mathbf{v}' = \mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{v}\mathbf{A}^T \qquad (۹-۵-۲)$$

پس ***قانون انتقال*** بیان کننده مولفه‌های پرایم دار یک بردار اختیاری برحسب مولفه‌های بدون پرایم آن می‌باشد. اگرچه عناصر ماتریس انتقال به‌صورت a_{ij} نوشته می‌شوند، باید تاکید کرد که آنها مولفه‌های یک تانسور مرتبه دوم قائم نیستند، که واضح می‌باشد. ولی در معادلات انتقال مکانیک محیط‌های پیوسته غالباً بطور عادت از «تانسور» انتقال **A** که عناصرش جهت کسینوس‌ها یعنی a_{ij} می‌باشد و ماتریس آن ماتریس انتقال است و به همان صورتی که در معادله ۲ - ۵ - ۹ انجام دادیم استفاده می‌شود. از این رو، نمادگذاری تانسوری را برای ماتریس انتقال استفاده می‌کنیم، اما تاکید می‌کنیم که تانسور نیست و این اقدام فقط برای راحتی نمادگذاری اجرا می‌شود.

با ضرب a_{jk} در معادله ۲ - ۵ - ۹ و استفاده از شرط متعامد بودن معادله ۲ - ۵ - ۸، قانون به‌عکس را بدست می‌آوریم.

$$v_k = a_{jk} v'_j \quad \text{یا} \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}'\mathbf{A} = \mathbf{A}^T\mathbf{v}' \qquad (۱۰-۵-۲)$$

که مولفه‌های بدون پرایم را برحسب مولفه‌های پرایم‌دار ارائه می‌دهد.

با کاربرد مستقیم معادله ۲ - ۵ - ۱۰ برای دیاد **uv** خواهیم داشت.

$$u_i v_j = a_{qi} u'_q a_{mj} v'_m = a_{qi} a_{mj} u'_q v'_m \qquad (۱۱-۵-۲)$$

اما یک دیاد در نهایت یک شکلی از تانسور مرتبه دوم است، بنابراین با یک تطابق آشکار از معادله ۲ - ۵ - ۱۱ ، قانون انتقال برای یک تانسور مرتبه دوم **T** به‌صورت زیر می‌باشد.

$$T_{ij} = a_{qi} a_{mj} T'_{qm} \quad \text{یا} \quad \mathbf{T} = \mathbf{A}^T\mathbf{T}'\mathbf{A} \qquad (۱۲-۵-۲)$$

که به سادگی توسط شرایط متعامد معکوس می‌شود و نتیجه می‌دهد.

$$T'_{ij} = a_{iq}a_{jm}T_{qm} \quad \text{یا} \quad \mathbf{T'} = \mathbf{ATA}^T \qquad (۱۳-۵-۲)$$

به موقعیت جمع شاخص‌های q و m در معادلات ۲ - ۵ - ۱۲ و ۲ - ۵ - ۱۳ با دقت توجه نمایید. بالاخره ، با عمومیت دادن منطقی قوانین انتقال که تاکنون توسعه داده شده است، می‌توان بیان کرد که برای یک تانسور قائم اختیاری از هر مرتبه‌ای که باشد داریم.

$$R'_{ij \ldots k} = a_{iq}a_{jm} \ldots a_{kn} R_{qm \ldots n} \qquad (۱۴-۵-۲)$$

محورهای پرایم‌دار را می‌توان به محورهای بدون پرایم از طریق یک **چرخش** حول یک محور از مبدأ یا توسط *انعکاس* محورها در یکی از صفحه‌های مختصات (یا توسط ترکیبی از چنین تغییرات) ارتباط داد. به‌عنوان یک مثال ساده ، چرخش ساعتگرد به اندازه ۹۰° حول محور x_3 در شکل ۲ - ۳ الف را در نظر بگیرید. ماتریس جهت کسینوس‌ها برای این چرخش عبارت است از

$$[\,a_{ij}\,] = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

و $det\ (A) = ۱$ می‌باشد. انتقال مولفه‌های تانسور در این حالت را ***انتقال متعامد مقتضی*** می‌نامند. برای انعکاس محورها در صفحه x_1x_3 مطابق شکل ۲ - ۳ ب ، ماتریس انتقال عبارت است از

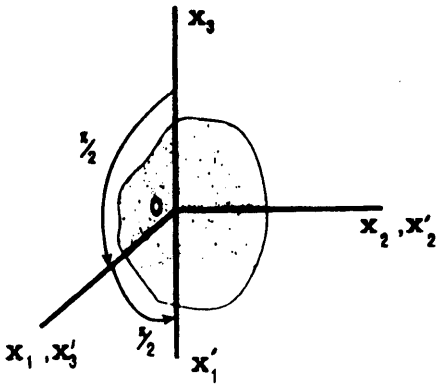
$$[\,a_{ij}\,] = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

که در آن $det\ (A) = -۱$ ، یعنی ***انتقال متعامد غیرمقتضی*** داریم. می‌توان نشان داد که ***بردارهای واقعی (قطبی)*** توسط قوانین $v'_i = a_{ij}v_j$ و $v_j = a_{ij}v'_i$ صرف نظر از اینکه آیا

انتقال محورها مقتضی یا غیر مقتضی باشند انتقال می‌یابند. ولی بردارهای ساختگی (محوری) دقیقاً فقط بر طبق روابط زیر و تحت انتقال غیر مقتضی محورها انتقال می‌یابند.

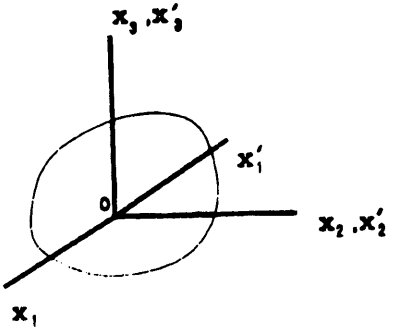
$$v'_i = det\ \mathbf{A}\ a_{ij} v_j$$

$$v_j = det\ \mathbf{A}\ a_{ij} v'_i$$



شکل ۲ - ۳

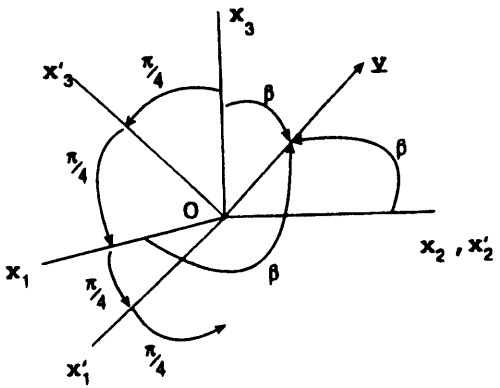
الف چرخش محورهای مستطیلی به‌اندازه ۹۰° حول محور x_2



شکل ۲ - ۳

(ب) انعکاس محورهای مستطیلی در صفحه x_2x_3

مثال ۲ ــ ۵ ــ ۱ اگر محورهای پرایم‌دار $Ox'_1x'_2x'_3$ نسبت به محورهای بدون پرایم با یک چرخش ۴۵° ساعتگرد حول محور x_2 مطابق شکل مشخص شده باشند. مولفه‌های پرایم دار بردار $\mathbf{v} = \hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \hat{e}_3$ را تعیین کنید.



حل در اینجا ماتریس انتقال عبارت است از

$$[\,a_{ij}\,] = \begin{bmatrix} ۱/\sqrt{۲} & ۱ & -۱/\sqrt{۲} \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱/\sqrt{۲} & ۰ & ۱/\sqrt{۲} \end{bmatrix}$$

و از معادله ۲ - ۵ - ۹ در شکل ماتریسی

$$\begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱/\sqrt{۲} & ۱ & -۱/\sqrt{۲} \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱/\sqrt{۲} & ۰ & ۱/\sqrt{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ \sqrt{۲} \end{bmatrix}$$

مثال ۲ ــ ۵ ــ ۲ مولفه‌های پرایم‌دار تانسور

$$[\,T_{ij}\,] = \begin{bmatrix} ۲ & ۶ & ۴ \\ ۰ & ۸ & ۰ \\ ۴ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$$

را تحت چرخش محورها بگونه‌ای که در مثال ۲ - ۵ - ۱ توضیح داده شده است تعیین کنید.

حل در اینجا معادله ۲ - ۵ - ۱۳ را می‌توان بکار برد پس در شکل ماتریسی

$$[T'_{ij}]=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -3 & 4/\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 8 & 0 \\ 1 & 8/\sqrt{2} & 5 \end{bmatrix}$$

۲ - ۶ مقادیر اصلی و جهت‌های اصلی تانسورهای متقارن مرتبه دوم

در ابتدا توجه داریم که ضرب داخلی یک تانسور مرتبه دوم **T** با بردار اختیاری **u** به‌صورت زیر می‌باشد (که در اینجا به هر دو صورت نمادگذاری شاخصی و نمادین می‌نویسیم)

$$T_{ij}u_j = v_i \quad \text{یا} \quad \mathbf{T}\cdot\mathbf{u}=\mathbf{v} \qquad (۲-۶-۱)$$

و هر تانسور مرتبه دوم را می‌توان به‌عنوان یک ***انتقال خطی*** که ***بردار مقدم*** **u** را به ***بردار تصویری*** **v** در فضای سه‌بعدی اقلیدسی انتقال می‌دهد تجسم کرد. بخصوص برای هر تانسور متقارن **T** که دارای مولفه‌های حقیقی T_{ij} و تعریف شده در نقطه‌ای از فضای فیزیکی می‌باشد، مرتبط با هر جهتی در آن نقطه (که با بردار یکه n_i تعریف شده است) یک بردار تصویری v_i به‌صورت زیر وجود دارد.

$$T_{ij}\,n_j = v_i \quad \text{یا} \quad \mathbf{T}\cdot\hat{\mathbf{n}}=\mathbf{v} \qquad (۲-۶-۲)$$

اگر بردار v_i بدست آمده از معادله ۲ - ۶ - ۲ اتفاقاً ضرب یک عدد در n_i باشد یعنی

$$T_{ij}\,n_j = \lambda v_i \quad \text{یا} \quad \mathbf{T}\cdot\hat{\mathbf{n}}=\lambda\hat{\mathbf{n}} \qquad (۲-۶-۳)$$

آنگاه جهت تعریف شده توسط n_i را **جهت اصلی** $\mathbf{T}$ می‌نامند و عدد λ را **مقدار اصلی** یا **مقدار ویژه** $\mathbf{T}$ می‌گویند. هنگامی که از خواص دلتای کرانکر استفاده شود، معادله ۲ - ۶ - ۳ به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$(T_{ij} - \lambda\delta_{ij})\, n_j = 0 \quad \text{یا} \quad (\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \qquad (۲ - ۶ - ۴)$$

یا در شکل بسط داده شده عبارت است از

$$(T_{11} - \lambda)\, n_1 + T_{12}\, n_2 + T_{13}\, n_3 = 0 \qquad (۲ - ۶ - ۵ \text{ الف})$$

$$T_{21}\, n_1 + (T_{22} - \lambda)\, n_2 + T_{23}\, n_3 = 0 \qquad (۲ - ۶ - ۵ \text{ ب})$$

$$T_{31}\, n_1 + T_{32}\, n_2 + (T_{33} - \lambda)\, n_3 = 0 \qquad (۲ - ۶ - ۵ \text{ پ})$$

این دستگاه معادلات همگن برای جهت‌های مجهول n_i و مقادیر مجهول λ حل غیر صفر دارد اگر دترمینان ضرایب صفر شود، یعنی

$$| T_{ij} - \lambda\delta_{ij} | = 0 \qquad (۲ - ۶ - ۶)$$

که پس از بسط دادن منجر به معادله مکعب برحسب λ می‌شود (آن را **معادله مشخصه** می‌نامند.)

$$\lambda^3 - I_T\lambda^2 + II_T\lambda - III_T = 0 \qquad (۲ - ۶ - ۷)$$

که در آن هم اکنون ضرایب برحسب مولفه‌های معلوم $\mathbf{T}$ می‌باشند

$$I_T = T_{ii} = tr\ \mathbf{T} \qquad (۲ - ۶ - ۸ \text{ الف})$$

$$II_T = \frac{1}{2}(T_{ii}\, T_{jj} - T_{ij}\, T_{ji}) = \frac{1}{2}\left[(tr\ \mathbf{T})^2 - tr\ (\mathbf{T}^2) \right] \qquad (۲ - ۶ - ۸ \text{ ب})$$

$$III_T = \varepsilon_{ijk}\, T_{1i}\, T_{2j}\, T_{3k} = det\ \mathbf{T} \qquad (۲ - ۶ - ۸ \text{ پ})$$

و آنها را به‌ترتیب ***پایاهای اول ، دوم و سوم*** تانسور **T** می‌نامند. جمع عناصر قطر اصلی ماتریس هر تانسور را ***اثر*** می‌نامند، و برای تانسور **T** به‌صورت $tr\ \mathbf{T}$ نوشته می‌شود مطابق معادله ۲ - ۶ - ۸.

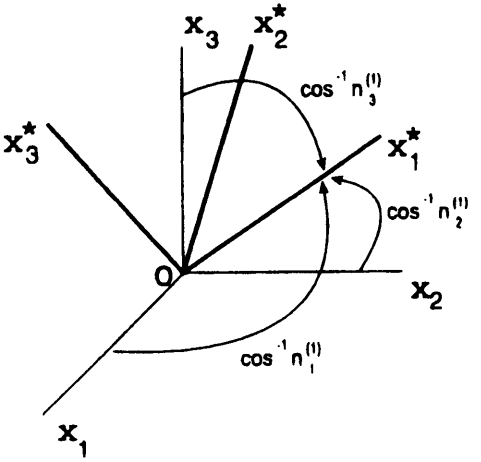
ریشه‌های $\lambda_{(1)}$, $\lambda_{(2)}$ و $\lambda_{(3)}$ معادله ۲ - ۶ - ۷ تماماً برای تانسور متقارن **T** که مولفه‌های حقیقی دارد، حقیقی هستند. به‌ازای هر یک از این ریشه‌ها $(q = 1, 2, 3)$ $\lambda_{(q)}$ می‌توان یک جهت اصلی $n_i^{(q)}$ $(q = 1, 2, 3)$ توسط حل معادلات ۲ - ۶ - ۴ همراه با شرط عمود بودن $n_i n_i = 1$ تعیین نمود. پس معادلات ۲ - ۶ - ۴ توسط معادلات زیر تامین می‌شوند.

$$[\ T_{ij} - \lambda_{(q)}\ \delta_{ij}\ ]\ n_i^{(q)} = 0 \quad , \quad (q = 1, 2, 3) \qquad (۹ - ۶ - ۲)$$

با

$$n_i^{(q)}\ n_i^{(q)} = 1 \quad , \quad (q = 1, 2, 3) \qquad (۱۰ - ۶ - ۲)$$

اگر $\lambda_{(q)}$ از یکدیگر متمایز باشند، جهت‌های اصلی منحصر بفرد و دوبدو بر هم عمود هستند، اما اگر دو ریشه با هم مساوی باشند یعنی $\lambda_{(1)} = \lambda_{(2)}$ آنگاه فقط جهت مرتبط با $\lambda_{(3)}$ منحصر بفرد خواهد بود. در این حالت، دو جهت دیگر که عمود بر $n_i^{(3)}$ و خودشان نیز بر هم عمود هستند یک دستگاه راستگرد را تشکیل می‌دهند که جهت‌های اصلی می‌باشند. اگر $\lambda_{(1)} = \lambda_{(2)} = \lambda_{(3)}$ هر مجموعه محورهای متعامد راستگرد به‌عنوان محورهای اصلی شایستگی داشته باشند آنگاه هر جهتی را می‌توان جهت اصلی نام نهاد.



شکل ۲ - ۴

چرخش محورهای $Ox_1x_2x_3$ به محورهای اصلی $Ox^*_1x^*_2x^*_3$

برای اینکه مفهوم جهت‌های اصلی را قوی کرد، اجازه دهید مولفه‌های تانسور **T** بدواً نسبت به محورهای قائم $Ox_1x_2x_3$ ارائه شده باشند و محورهای اصلی **T** مطابق شکل ۲ - ۴ با $Ox^*_1x^*_2x^*_3$ نشان داده شده باشند. ماتریس انتقال بین این دو مجموعه محورها با بدست آوردن جهت کسینوس‌ها $n_i^{(q)}$ همانگونه که از معادلات ۲ - ۶ - ۹ و ۲ - ۶ - ۱۰ به‌عنوان عناصر q امین سطر A محاسبه شده‌اند تنظیم می‌گردد. بنابراین طبق تعریف $a_{ij} \equiv n_j^{(i)}$ می‌باشد که در جدول زیر با جزییات نشان داده شده است.

	x_1 یا $\hat{\mathbf{e}}_1$	x_2 یا $\hat{\mathbf{e}}_2$	x_3 یا $\hat{\mathbf{e}}_3$
x^*_1 یا $\hat{\mathbf{e}}^*_1$	$a_{11} = n_1^{(1)}$	$a_{12} = n_2^{(1)}$	$a_{13} = n_3^{(1)}$
x^*_2 یا $\hat{\mathbf{e}}^*_2$	$a_{21} = n_1^{(2)}$	$a_{22} = n_2^{(2)}$	$a_{23} = n_3^{(2)}$
x^*_3 یا $\hat{\mathbf{e}}^*_3$	$a_{31} = n_1^{(3)}$	$a_{32} = n_2^{(3)}$	$a_{33} = n_3^{(3)}$

(۲ - ۶ - ۱۱)

در اینجا ماتریس انتقال متعامد است و مطابق با قانون انتقال برای تانسورهای مرتبه دوم می‌باشد.

$$T^*_{ij} = a_{iq}\, a_{jm}\, T_{qm} \quad \text{یا} \quad \mathbf{T}^* = \mathbf{ATA}^T \qquad (۲ - ۶ - ۱۲)$$

که در آن T^* یک ماتریس قطری است که عناصر آن مقادیر اصلی $\lambda_{(q)}$ می‌باشند.

مثال ۲ ــ ۶ ــ ۱ مقادیر اصلی و جهت‌های اصلی تانسور مرتبه دوم **T** را که ماتریس آن به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود تعیین کنید.

$$[\, T_{ij} \,] = \begin{bmatrix} ۵ & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

حل در اینجا معادله ۲ - ۶ - ۶ عبارت است از

$$\begin{vmatrix} ۵-\lambda & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۲-\lambda & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳-\lambda \end{vmatrix} = ۰$$

که بسط آن به کمک سطر سوم خواهد شد.

$$(۳-\lambda)(۱۰-۷\lambda+\lambda^{۲}-۴) = ۰$$

یا

$$(۳-\lambda)(۶-\lambda)(۱-\lambda) = ۰$$

از این رو ، $\lambda_{(۳)} = ۱$, $\lambda_{(۲)} = ۶$, $\lambda_{(۱)} = ۳$ مقادیر اصلی $\mathbf{T}$ هستند. برای $\lambda_{(۱)} = ۳$، معادله ۲ - ۶ - ۵ معادلات زیر را نتیجه می‌دهد.

$$۲n_{۱} + ۲n_{۲} = ۰$$
$$۲n_{۱} + n_{۲} = ۰$$

که فقط اگر $n_{۱} = n_{۲} = ۰$ باشد آنان تأمین می‌شوند و بنابراین از $n_i n_i = ۱$ داریم $n_{۳} = \pm ۱$ برای $\lambda_{(۲)} = ۶$ معادله ۲ - ۶ - ۵ نتیجه می‌دهد.

$$-n_{۱} + ۲n_{۲} = ۰$$
$$۲n_{۱} - ۴n_{۲} = ۰$$
$$-۳n_{۳} = ۰$$

بنابراین $n_{۱} = ۲n_{۲}$ و چون $n_{۳} = ۰$ است داریم $(۲n_{۲})^{۲} + n_{۲}^{۲} = ۱$ یا $n_{۲} = \pm ۱/\sqrt{۵}$ و $n_{۱} = \pm ۲/\sqrt{۵}$. برای $\lambda_{(۳)} = ۱$ معادله ۲ - ۶ - ۵ نتیجه می‌دهد.

$$۴n_{۱} + ۲n_{۲} = ۰$$
$$۲n_{۱} - n_{۲} = ۰$$

همچنین $n_۳ = ۰$ و در اینجا $n_۱^۲ + (-۲\, n_۱)^۲ = ۱$ مجدداً $n_۳ = ۰$ پس $n_۱ = \pm ۱ / \sqrt{۵}$ و $n_۲ = \pm ۲ / \sqrt{۵}$ می‌باشد. از این نتایج ماتریس انتقال A عبارت است از

$$[\, a_{ij} \,] = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & \pm ۱ \\ \pm ۲ / \sqrt{۵} & \pm ۱ / \sqrt{۵} & ۰ \\ \pm ۱ / \sqrt{۵} & \pm ۲ / \sqrt{۵} & ۰ \end{bmatrix}$$

که دو مجموعه محورهای اصلی را مشخص می‌کند، یکی انعکاس دیگری نسبت به مبدا می‌باشد. توجه شود که علامت‌ها در سطر سوم این ماتریس انتقال به‌گونه‌ای تنظیم شده است که محورهای اصلی یک مجموعه راستگرد را تشکیل دهند. همچنین، به آسانی تشخیص داده می‌شود که A متعامد است یعنی با ضرب خودش در برگردانش ماتریس واحد بدست می‌آید.

بالاخره، از معادله ۲ - ۶ - ۱۲ مشاهده می‌شود که استفاده از مجموعه بالای علامت $\pm$ نتیجه زیر حاصل می‌گردد.

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۲/\sqrt{۵} & ۱/\sqrt{۵} & ۰ \\ -۱/\sqrt{۵} & ۲/\sqrt{۵} & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۵ & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۲/\sqrt{۵} & -۱/\sqrt{۵} \\ ۰ & ۱/\sqrt{۵} & ۲/\sqrt{۵} \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۶ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

مثال ۲ ــ ۶ ــ ۲ نشان دهید که مقادیر اصلی برای تانسوری که دارای ماتریس زیر است، تکثر دوتایی دارد و جهت‌های اصلی را تعیین کنید.

$$[\, T_{ij} \,] = \begin{bmatrix} ۵ & ۱ & \sqrt{۲} \\ ۱ & ۵ & \sqrt{۲} \\ \sqrt{۲} & \sqrt{۲} & ۶ \end{bmatrix}$$

حل در اینجا ، معادله ۲ - ۶ - ۶ به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{bmatrix} ۵-\lambda & ۱ & \sqrt{۲} \\ ۱ & ۵-\lambda & \sqrt{۲} \\ \sqrt{۲} & \sqrt{۲} & ۶-\lambda \end{bmatrix} = ۰$$

که از آن معادله مشخصه خواهد شد.

$$\lambda^{۳} - ۱۶\lambda^{۲} + ۸۰\lambda - ۱۲۸ = ۰$$

یا

$$(\lambda - ۸)(\lambda - ۴)^{۲} = ۰$$

برای $\lambda_{(۱)} = ۸$، معادله ۲ - ۶ - ۵ نتیجه می‌دهد.

$$-۳n_{۱} + n_{۲} + \sqrt{۲}n_{۳} = ۰$$

و

$$n_{۱} - ۳n_{۲} + \sqrt{۲}n_{۳} = ۰$$

همچنین

$$\sqrt{۲}n_{۱} + \sqrt{۲}n_{۲} - ۲n_{۳} = ۰$$

از دو معادله اول ، $n_{۱} = n_{۲}$ و از معادلات دوم و سوم $n_{۳} = \sqrt{۲}n_{۲}$ و بنابراین با استفاده از $n_i n_i = ۱$ داریم

$$(n_{۲})^{۲} + (n_{۲})^{۲} + (\sqrt{۲}n_{۲})^{۲} = ۱$$

پس $n_{۱} = n_{۲} = \pm \frac{۱}{۲}$ و $n_{۳} = \pm ۱/\sqrt{۲}$، از آنجا بردار یکّه در جهت اصلی مرتبط با $\lambda_{(۱)} = ۸$ (که معروف به بردار ویژه نرمالیزه می‌باشد) عبارت است از

$$\hat{\mathbf{n}}^{(۱)} = \frac{۱}{۲}(\hat{\mathbf{e}}_{۱} + \hat{\mathbf{e}}_{۲} + \sqrt{۲}\hat{\mathbf{e}}_{۳}) = \hat{\mathbf{e}}_{۱}^{*}$$

برای $\hat{\mathbf{n}}_{(۲)}$ ، هر بردار یکّه عمود بر $\hat{\mathbf{n}}_{(۱)}$ را انتخاب می‌کنیم یک انتخاب آشکار عبارت است از

$$\hat{\mathbf{n}}^{(۲)} = (-\hat{\mathbf{e}}_۱ + \hat{\mathbf{e}}_۲) / \sqrt{۲} = \hat{\mathbf{e}}_۲^*$$

آنگاه $\hat{\mathbf{n}}_{(۳)}$ از رابطه $\hat{\mathbf{n}}_{(۳)} = \hat{\mathbf{n}}_{(۱)} \times \hat{\mathbf{n}}_{(۲)}$ حاصل می‌شود، بطوری که

$$\hat{\mathbf{n}}^{(۳)} = \frac{۱}{۲} (-\hat{\mathbf{e}}_۱ - \hat{\mathbf{e}}_۲ + \sqrt{۲}\,\hat{\mathbf{e}}_۳) = \hat{\mathbf{e}}_۳^*$$

پس ماتریس انتقال A برای محورهای اصلی ارائه شده توسط معادله ۲ - ۶ - ۱۱ به‌صورت زیر است.

$$[\,a_{ij}\,] = \begin{bmatrix} ۱/۲ & ۱/۲ & ۱/\sqrt{۲} \\ -۱/\sqrt{۲} & ۱/\sqrt{۲} & ۰ \\ -۱/۲ & -۱/۲ & ۱/\sqrt{۲} \end{bmatrix}$$

در جمع‌بندی این قسمت ، چندین خواص جالب تانسورهای مرتبه دوم متقارن اشاره شده است. (۱) مقادیر اصلی و جهت‌های اصلی $\mathbf{T}$ و $\mathbf{T}^T$ یکسان می‌باشند (۲) مقادیر اصلی $\mathbf{T}^{-۱}$ با مقادیر اصلی $\mathbf{T}$ متقابل هستند و هر دو دارای جهت‌های یکسان هستند (۳) ضرب تانسورهای $\mathbf{TQ}$ و $\mathbf{QT}$ مقادیر اصلی یکسان دارند (۴) یک تانسور متقارن ***را مثبت (منفی) معین*** گویند اگر تمامی مقادیر اصلی آن مثبت (منفی) باشد و ***مثبت (منفی) نیمه معین*** می‌نامند اگر یک مقدار اصلی صفر و سایر مثبت (منفی) باشند.

۲ - ۷ *میدان‌های تانسوری ، حسابان تانسورها*

یک ***میدان تانسوری*** اختصاص داده شده به هر موقعیت $\mathbf{x}$ در هر لحظه t یک تانسور $T_{ij\ldots k}(\mathbf{x}, t)$ می‌باشد که دامنه $\mathbf{x}$ روی یک ناحیه محدود از فضا و t روی چند فاصله زمانی تغییر می‌کند. میدان پیوسته و از این رو قابل دیفرانسیل‌گیری است اگر مولفه‌های $T_{ij\ldots k}(\mathbf{x}, t)$ توابع پیوسته $\mathbf{x}$ و t باشند. میدان‌های تانسوری از هر مرتبه‌ای می‌توانند باشند. برای مثال، میدان‌های شاخص عددی، برداری و تانسوری را به‌ترتیب توسط نمادگذاری $\phi(\mathbf{x}, t)$ ، $\nu_i(\mathbf{x}, t)$ و $T_{ij}(\mathbf{x}, t)$ می‌توان نشان داد.

دیفرانسیل‌گیری جزئی یک میدان تانسوری نسبت به متغیر t را توسط اپراتور $\partial / \partial t$ نمایش می‌دهند که قوانین معمول حسابان را تبعیت می‌کند. از طرف دیگر، دیفرانسیل‌گیری جزئی نسبت به مختصات x_q با اپراتور $\partial / \partial x_q$ نشان می‌دهند که ممکن به‌صورت ساده ∂_q خلاصه بشود. به همین منوال دیفرانسیل جزئی دوم را با $\partial^2 / \partial x_q \partial x_m$ بیان می‌کنند که ممکن به‌صورت ∂_{qm} خلاصه شود، و دیفرانسیل‌های بعدی به همین ترتیب می‌باشد. به‌عنوان یک توافق مزید در فشردگی نمادگذاری معمول است در مکانیک محیط‌های پیوسته ***زیرنوشت کاما*** را برای نشان دادن دیفرانسیل‌گیری جزئی نسبت به مختصات متغیر بکار می‌برند. برای مثال ، می‌نویسیم $\phi_{,i}$ برای $\partial\phi / \partial x_i$ ، $v_{i,j}$ برای $\partial v_i / \partial x_j$ ، $T_{ij,k}$ برای $\partial T_{ij} / \partial x_k$ و $u_{i,jk}$ برای $\partial^2 u_i / \partial x_j \partial x_k$ در این مثال توجه داریم که دیفرانسیل‌گیری نسبت به یک مختصات موجب یک افزایش در مرتبه تانسور می‌شود. همچنین یک نتیجه مفید از مشتق $\partial x_i / \partial x_j$ به‌صورت زیر است.

$$\partial x_i / \partial x_j = x_{i,j} = \delta_{ij} \qquad (۱-۷-۲)$$

در نمادگذاری که در اینجا تطبیق داده شده است، اپراتور ∇ *(del)* در حسابان بردارها، که در نمادگذاری نمادین به‌صورت زیر ظاهر می‌شود

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1}\hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\hat{\mathbf{e}}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\hat{\mathbf{e}}_3 = \frac{\partial}{\partial x_i}\hat{\mathbf{e}}_i \qquad (۲-۷-۲)$$

شکل ساده ∂_i را می‌گیرد. بنابراین می‌توان ***گرادیان عدد*** $\nabla\phi = \mathbf{grad}\,\phi$ را بدین صورت نوشت.

$$\partial_i\phi = \phi_{,i} \qquad (۳-۷-۲)$$

گرادیان بردار $\nabla\mathbf{v}$ عبارت است از

$$\partial_i v_j = v_{j,i} \qquad (۴-۷-۲)$$

دیوژانس $\mathbf{v}$ یعنی $\nabla \cdot \mathbf{v}$ عبارت است از

$$\partial_i v_i = v_{i,i} \qquad (۵-۷-۲)$$

کرل $\mathbf{v}$ یعنی $\nabla \times \mathbf{v}$ عبارت است از

$$\varepsilon_{ijk}\partial_j v_k = \varepsilon_{ijk}\, v_{kj} \qquad (۶-۷-۲)$$

باید توجه داشت که خیلی از تساوی‌های تحلیل برداری ، بطور نسبتاً ساده‌ای با استفاده از نمادگذاری شاخصی صحت و سقم آنها قابل بررسی است. مثلاً برای اینکه نشان دهیم $div\ (\mathbf{curl}\ \mathbf{v}) = 0$ است، برای هر بردار $\mathbf{v}$ از معادلات ۲-۷-۶ و ۲-۷-۵ می‌توان نوشت.

$$\partial_i\,(\varepsilon_{ijk}\,v_{k,j}) = \varepsilon_{ijk}\,v_{k,ji} = 0$$

که نتیجه صفر از جمله اول این ضرب داخلی حاصل می‌شود، چون نسبت به شاخص‌های i و j متقارن - اریب است. در حالی که جمله دوم با همان شاخص‌ها متقارن است (چون فرض شده v_k دارای گرادیان‌های فضایی پیوسته می‌باشد).

۲ - ۸ نظریه‌های انتگرالی گوس و استوکس

یک میدان تانسوری اختیاری $T_{ij...k}$ که بطور پیوسته قابل دیفرانسیل‌گیری می‌باشد و روی ناحیه معین از فضای فیزیکی تعریف شده است را در نظر می‌گیریم. اگر V یک حجمی در این فضا باشد که با سطح بسته S حجم را محصور کرده است. و نرمال بطور خارج به این سطح محصور مطابق شکل ۲ - ۵ الف n_i باشد، آنگاه جزئی از سطح به‌صورت $dS_i = n_i dS$ بیان می‌شود. **نظریه دیورژانس گوس** یک رابطه‌ای بین انتگرال سطح که دارای عبارت زیر انتگرال $T_{ij...k}$ است نسبت به انتگرال حجم که مشتق یک مختصه $T_{ij...k}$ را به‌عنوان زیر انتگرال دارد، ایجاد می‌کند.

$$\int_S T_{ij...k}\,n_q\,dS = \int_V T_{ij...k,q}\,dV \qquad (۲-۸-۱)$$

چندین حالت خاص مهم این نظریه برای میدان‌های عددی و برداری شایان ذکر است. و در اینجا به هر دو صورت نمادگذاری شاخصی و نمادین ارائه شده است.

$$\int_S \lambda n_q\,dS = \int_V \lambda_{,q}\,dV \quad \text{یا} \quad \int_S \lambda\hat{\mathbf{n}}\,dS = \int_V \mathbf{grad}\,\lambda\,dV \qquad (۲-۸-۲)$$

$$\int_S v_q n_q\,dS = \int_V v_{q,q}\,dV \quad \text{یا} \quad \int_S \mathbf{v}\,.\,\hat{\mathbf{n}}\,dS = \int_V div\,\mathbf{v}\,dV \qquad (۲-۸-۳)$$

$$\int_S \varepsilon_{ijk} n_j v_k\,dS = \int_V \varepsilon_{ijk} v_{k,j}\,dV \quad \text{یا} \quad \int_S \hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{v}\,dS = \int_V \mathbf{curl}\,\mathbf{v}\,dV \qquad (۲-۸-۴)$$

معروف به **نظریه دیورژانس گوس** می‌باشد، معادله ۲ - ۸ - ۳ نظریه ارائه شده در درس حسابان بردارها می‌باشد.

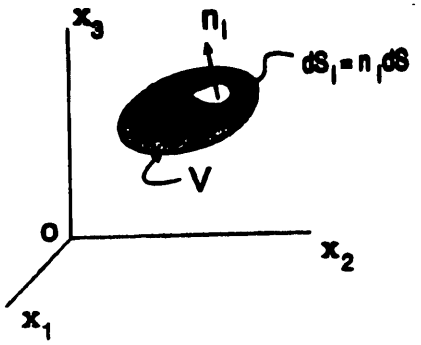
نظریه گوس یک انتگرال روی یک حجم بسته را به یک انتگرال روی سطح محصورش

را ارتباط می‌دهد، **نظریه استوکس** یک انتگرال روی یک سطح باز (معروف به حفره) را به یک انتگرال حول منحنی محصور سطح را ارتباط می‌دهد. بنابراین C منحنی فضایی محصور سطح S باشد و dx_i **دیفرانسیل بردار مماسی** به C مطابق شکل ۲ - ۵ - ب (به عنوان یک مثال کلاسیک یک سطح نیم کره‌ای دارای یک منحنی محصور دایروی C است). اگر n_i نرمال به سمت خارج سطح S باشد و v_i هر میدان برداری تعریف شده روی S و C نظریه استوکس اثبات می‌کند که

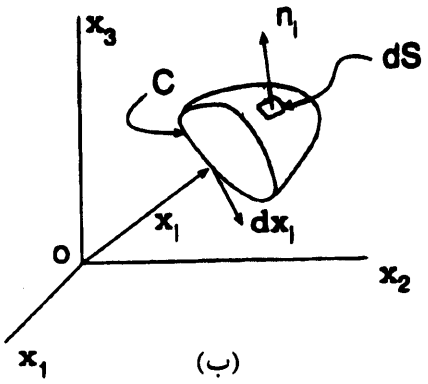
$$\int_S \varepsilon_{ijk} n_i v_{k,j}\, dS = \int_C v_k dx_k \quad \text{یا} \quad \int_S \hat{\mathbf{n}} \cdot (\nabla \times \mathbf{v})\, dS = \int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}$$

(۲ - ۸ - ۵)

انتگرال سمت راست این معادله را وقتی بردار $\mathbf{v}$ بردار سرعت باشد اغلب به‌عنوان **سیرکولاسیون** نام می‌برند.



(الف)



(ب)

شکل ۲ - ۵

مسائل

۲ - ۱ اگر $\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ یا در نوشتار شاخصی به‌صورت زیر باشد.

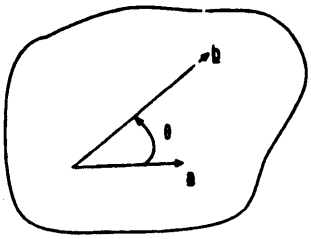
$$v_i \hat{\mathbf{e}}_i = a_j \hat{\mathbf{e}}_j \times b_k \hat{\mathbf{e}}_k = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \hat{\mathbf{e}}_i$$

نشان دهید

(الف) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = a^2 b^2 \sin^2 \theta$

(ب) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = 0$

(پ) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 0$



۲ - ۲ نسبت به مبنای سه‌گانه بردارهای $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ و $\mathbf{u}_3$ (الزاماً بردارهای یکّه نیستند). بردارهای سه‌گانه u^1 , u^2 و u^3 را **مبنای متقابل** نامند اگر $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}^j = \delta_{ij}$ $(i,j = 1, 2, 3)$. نشان دهید که شرایط زیر برقرار هستند.

$$\mathbf{u}^1 = \frac{\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3}{[\,\mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 , \mathbf{u}_3\,]} \; ; \; \mathbf{u}^2 = \frac{\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1}{[\,\mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 , \mathbf{u}_3\,]} \; ; \; \mathbf{u}^3 = \frac{\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2}{[\,\mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 , \mathbf{u}_3\,]}$$

مبنای متقابل را برای بردارهای مبنای خاص که به‌صورت زیر تعریف شده است تعیین کنید.

$$\mathbf{u}_1 = 2\,\hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2$$
$$\mathbf{u}_2 = 2\,\hat{\mathbf{e}}_2 - \hat{\mathbf{e}}_3$$
$$\mathbf{u}_3 = \hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2 + \hat{\mathbf{e}}_3$$

پاسخ :

$$\mathbf{u}^1 = \frac{1}{5}(3\,\hat{\mathbf{e}}_1 - \hat{\mathbf{e}}_2 - 2\,\hat{\mathbf{e}}_3)$$

$$\mathbf{u}^2 = \frac{1}{5}(-\hat{\mathbf{e}}_1 + 2\,\hat{\mathbf{e}}_2 - \hat{\mathbf{e}}_3)$$

$$\mathbf{u}^3 = \frac{1}{5}(-\hat{\mathbf{e}}_1 + 2\,\hat{\mathbf{e}}_2 + 4\,\hat{\mathbf{e}}_3)$$

۲ - ۳ بردار موقعیت یک نقطه اختیاری $P\ (x_1 x_2 x_3)$ عبارت است از $x = x_i \hat{\mathbf{e}}_i$ و $b = b_i \hat{\mathbf{e}}_i$ یک

بردار ثابت است. نشان دهید که $(\mathbf{x} - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{x} = 0$ معادله برداری یک سطح کروی است که مرکزش در $\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{b}$ و شعاع آن $\frac{1}{2}b$ می‌باشد.

۲ - ۴ با استفاده از نمادگذاری $A_{(ij)} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji})$ و $A_{[ij]} = \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji})$ نشان دهید که

(الف) تانسور A با مولفه‌های A_{ij} همیشه می‌تواند به مجموع قسمت‌های متقارن $A_{(ij)}$ و متقارن - اریب $A_{[ij]}$ تجزیه شود.

$$A_{ij} = A_{(ij)} + A_{[ij]}$$

(ب) اثر A برحسب $A_{(ij)}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$A_{ii} = A_{(ii)}$$

(پ) برای تانسورهای اختیاری A و B

$$A_{ij}B_{ij} = A_{(ij)}B_{(ij)} + A_{[ij]}B_{[ij]}$$

۲ - ۵ عبارات شامل دلتاهای کرانکر را بسط داده تا جائی که امکان دارد ساده نمایید.

(الف) $\delta_{ij}\delta_{ij}$ (ب) $\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{ki}$ (پ) $\delta_{ij}\delta_{jk}$ (ت) $\delta_{ij}A_{ik}$

پاسخ : (الف) ۳ , (ب) ۳ , (پ) δ_{ki} , (ت) A_{jk}

۲ - ۶ اگر $a_i = \varepsilon_{ijk}b_jc_k$ و $b_i = \varepsilon_{ijk}g_jh_k$ باشد، b_j را در عبارات a_i جایگزین نموده نشان دهید

$$a_i = g_kc_kh_i - h_kc_kg_i$$

یا در نمادگذاری نمادین $\mathbf{a} = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{g})\,\mathbf{h} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{h})\,\mathbf{g}$

۲ - ۷ با جمع روی زیرنوشت‌های تکراری ، ساده‌ترین شکل عبارات زیر را تعیین کنید.

(الف) $\varepsilon_{3jk}a_ja_k$ (ب) $\varepsilon_{ijk}\delta_{kj}$ (پ) $\varepsilon_{1jk}a_2T_{kj}$ (ت) $\varepsilon_{1jk}\delta_{3j}\nu_k$

پاسخ : (الف) ۰ (ب) ۰ (پ) $a_2(T_{32} - T_{23})$ (ت) $-\nu_2$

۲ - ۸ (الف) نشان دهید که تانسور $B_{ik} = \varepsilon_{ijk}\nu_j$ متقارن - اریب است.

(ب) اگر B_{ij} متقارن - اریب باشد. بردار تعریف شده توسط $\nu_i = \varepsilon_{ijk}B_{jk}$ را در نظر بگیرید. (اغلب آن را **بردار دوگانه** تانسور B می‌نامند). نشان دهید که $B_{mq} = \frac{1}{2}\varepsilon_{mqi}\nu_i$ می‌باشد.

۲ - ۹ اگر $A_{ij} = \delta_{ij}B_{kk} + 3B_{ij}$ باشد، B_{kk} را تعیین و آن برای حل B_{ij} برحسب A_{ij} و اولین پایا یعنی A_{ii} استفاده نمایید.

پاسخ : $B_{kk} = \frac{1}{6} A_{kk} \;;\quad B_{ij} = \frac{1}{3} A_{ij} - \frac{1}{18} \delta_{ij} A_{kk}$

۲ - ۱۰ نشان دهید که مقدار $T_{ij}x_ix_j$ عیناً بدون تغییر باقی می‌ماند اگر بجای T_{ij} قسمت متقارنش یعنی $\frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji})$ را قرار دهیم

۲ - ۱۱ با بسط دادن مستقیم (یا به هر صورت دیگر) نشان دهید که ضرب جعبه‌ای $\lambda = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k$ برابر با دترمینان زیر است.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

سپس با جایگذاری A_{1i} بجای a_i ، A_{2j} بجای b_j و A_{3k} بجای c_k، معادله ۲ - ۴ - ۱۱ را به شکل $det\ (\mathscr{A}) = \varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$ بدست آورید که در آن A_{ij} عناصر $\mathscr{A}$ باشند.

۲ - ۱۲ از معادله ۲ - ۴ - ۱۱ کتاب با شکل زیر شروع کنید.

$$det\ \mathscr{A} = \varepsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3}$$

نشان دهید که بکمک چند جابجایی اختیاری ستون‌های A_{ij} خواهیم داشت.

$$\varepsilon_{qmn}\ det\ \mathscr{A} = \varepsilon_{ijk} A_{iq} A_{jm} A_{kn}$$

که معادله ۲ - ۴ - ۱۲ می‌باشد. مزید بر آن این معادله را در یک نماد جایگشت مقتضی ضرب کنید تا فرمول زیر بدست آید.

$$6\ det\ \mathscr{A} = \varepsilon_{qmn} \varepsilon_{ijk} A_{iq} A_{jm} A_{kn}$$

۲ - ۱۳ اگر دترمینان ماتریس A_{ij} به‌صورت زیر داده شود.

$$det\ \mathscr{A} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

چون جابجایی هر دو سطر یا هر دو ستون موجب یک تغییر علامت در مقدار دترمینان می‌شود نشان دهید بعد از تعدادی جابجایی اختیاری سطر و ستون خواهیم داشت.

$$\begin{vmatrix} A_{mq} & A_{mr} & A_{ms} \\ A_{nq} & A_{nr} & A_{ns} \\ A_{pq} & A_{pr} & A_{ps} \end{vmatrix} = \varepsilon_{mnp}\varepsilon_{qrs}\, det\, \mathscr{A}$$

اکنون اگر در دترمینان فوق $A_{ij} \equiv \delta_{ij}$ باشد نتیجه می‌شود $det\, \mathscr{A} = ۱$ و با بسط آن عبارت زیر حاصل می‌گردد.

$$\varepsilon_{mnp}\varepsilon_{qrs} = \delta_{mq}\,(\delta_{nr}\delta_{ps} - \delta_{ns}\delta_{pr}) - \delta_{mr}\,(\delta_{nq}\delta_{ps} - \delta_{ns}\delta_{pq}) + \delta_{ms}\,(\delta_{nq}\delta_{pr} - \delta_{nr}\delta_{pq})$$

بنابراین، با قرار دادن $p = q$ معادل معادله ۲ - ۲ - ۱۳ را به شکل زیر بدست آورید.

$$\varepsilon_{mnq}\varepsilon_{qrs} = \delta_{mr}\delta_{ns} - \delta_{ms}\delta_{nr}$$

۲ - ۱۴ نشان دهید که ماتریس‌های مربع زیر

$$[\,b_{ij}\,] = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad [\,c_{ij}\,] = \begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ -۱۲ & -۵ \end{bmatrix}$$

هر دو جذر ماتریس واحد هستند.

۲ - ۱۵ با استفاده از ماتریس‌های مربع زیر، نشان دهید که

(الف) برگردان مربع یک ماتریس برابر است با مربع برگردانش (معادله ۲ - ۴ - ۵ وقتی $n=۲$ باشد).

(ب) $(\mathscr{A}\mathscr{B})^T = \mathscr{B}^T \mathscr{A}^T$ می‌باشد همانگونه که در مثال ۲ - ۴ - ۲ به اثبات رسید.

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۴ \\ ۵ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} \qquad [b_{ij}] = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۲ & ۵ \\ ۴ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

۲ - ۱۶ اگر $\mathscr{A}$ ماتریس متعامد باشد یعنی $\mathscr{A}\mathscr{A}^{T} = \mathscr{A}\mathscr{A}^{-۱} = \mathscr{O}$ که در آن $\mathscr{O}$ ماتریس واحد است ، آنگاه با استفاده از نتایج مثال ۲ - ۴ - ۳ و ۲ - ۴ - ۴ نشان دهید که $det\ \mathscr{A} = \pm ۱$ می‌باشد.

۲ - ۱۷ یک تانسور را **همسانگرد** می‌نامند اگر مولفه‌هایش برای یک نقطه در هر دستگاه مختصات قائم دارای مقادیر یکسان باشد. فرض کنید $\mathbf{T}$ یک تانسور همسانگرد مرتبه دوم با مولفه‌های T_{ij} نسبت به محورهای $Ox_۱x_۲x_۳$ باشد. اگر محورهای $Ox'_۱x'_۲x'_۳$ نسبت به $Ox_۱x_۲x_۳$ با چرخش راستگرد به اندازه ۱۲۰° حول محوری در امتداد $\hat{\mathbf{n}} = (\hat{\mathbf{e}}_۱ + \hat{\mathbf{e}}_۲ + \hat{\mathbf{e}}_۳)/\sqrt{۳}$ بدست آمده باشند، نشان دهید با انتقال بین این محورها خواهیم داشت $T_{۱۱} = T_{۲۲} = T_{۳۳}$ و همچنین سایر روابط بین مولفه‌ها . علاوه بر آن اگر محورهای $Ox''_۱x''_۲x''_۳$ نسبت به محورهای $Ox_۱x_۲x_۳$ توسط چرخش راستگرد به اندازه ۹۰° حول محور $x_۳$بدست آمده باشند، آنگاه نشان دهید که بررسی‌های بیشتر این انتقال نتیجه می‌دهد که اگر $\mathbf{T}$ هر تانسور همسانگرد مرتبه دوم باشد، آن را می‌توان به‌صورت $\lambda\mathbf{I}$ نوشت که در آن λ یک عدد و $\mathbf{I}$ تانسور واحد است.

۲ - ۱۸ برای یک انتقال متعامد مقتضی بین محورهای $Ox_۱x_۲x_۳$ و $Ox'_۱x'_۲x'_۳$ ، پایداری δ_{ij} و ε_{ijk} را نشان دهید. یعنی نشان دهید که

(الف) $\delta'_{ij} = \delta_{ij}$ (ب) $\varepsilon'_{ijk} = \varepsilon_{ijk}$

راهنمایی : در قسمت (ب) $\varepsilon'_{ijk} = a_{iq}a_{jm}a_{kn}\varepsilon_{qmn}$ را اختیار نمایید و از معادله ۲ - ۴ - ۲ استفاده کنید.

۲ - ۱۹ زوایای بین محورهای دستگاه مختصات مستقیم‌الخط $Ox'_۱x'_۲x'_۳$ و $Ox_۱x_۲x_۳$ عبارتند از

	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$
$x'_۱$	۴۵°	۹۰°	۴۵°
$x'_۲$	۶۰°	۴۵°	۱۲۰°
$x'_۳$	۱۲۰°	۴۵°	۶۰°

(الف) ماتریس انتقال بین دو مجموعه محورها را تعیین کنید و نشان دهید که یک انتقال متعامد مقتضی می‌باشند.

(ب) معادله صفحه $x_1 + x_2 + x_3 = 1/\sqrt{2}$ را در محورهای پرایم دار که به‌صورت $b_1x'_1 + b_2x'_2 + b_3x'_3 = b$ می‌باشد تعیین کنید.

پاسخ :

(الف) $[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} & -1/2 \\ -1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \end{bmatrix}$ (ب) $2x'_1 + x'_2 + x'_3 = 1$

۲ - ۲۰ با استفاده از معادله ۲ - ۴ - ۱۱ به شکل زیر

$$det\,\mathscr{A} = \varepsilon_{ijk} A_{1i}A_{2j}A_{3k}$$

معادله ۲ - ۶ - ۶ را به‌صورت زیر بنویسید.

$$| T_{ij} - \lambda\delta_{ij} | = \varepsilon_{ijk} (T_{1i} - \lambda\delta_{1i})(T_{2j} - \lambda\delta_{2j})(T_{3k} - \lambda\delta_{3k}) = 0$$

و با بسط این معادله نشان دهید که

$$\lambda^3 - T_{ii}\lambda^2 + [\ \tfrac{1}{2}\ (T_{ii}\ T_{jj} - T_{ij}\ T_{ji})\ ]\ \lambda - \varepsilon_{ijk}T_{1i}T_{2j}T_{3k} = 0$$

تا معادله ۲ - ۶ - ۸ کتاب بررسی گردد.

۲ - ۲۱ برای تانسور B که نمایش ماتریس آن به‌صورت زیر است.

$$[\ B_{ij}\ ] = \begin{bmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 0 & -23 & 28 \\ 0 & 28 & 10 \end{bmatrix}$$

مقادیر اصلی (مقادیر ویژه) و جهت‌های اصلی (بردارهای ویژه) تانسور را تعیین کنید.

پاسخ : $\lambda_1 = ۱۷ \quad \lambda_2 = ۲۶ \quad \lambda_3 = -۳۹$

$$\hat{\mathbf{n}}^{(1)} = \hat{\mathbf{e}}_1 \qquad \hat{\mathbf{n}}^{(2)} = (۴\,\hat{\mathbf{e}}_2 + ۷\,\hat{\mathbf{e}}_3)/\sqrt{۶۵} \qquad \hat{\mathbf{n}}^{(3)} = (-۷\,\hat{\mathbf{e}}_2 + ۴\,\hat{\mathbf{e}}_3)/\sqrt{۶۵}$$

۲ - ۲۲ ماتریس متقارن زیر را در نظر بگیرید.

$$[\,B_{ij}\,] = \begin{bmatrix} \frac{۵}{۲} & ۰ & \frac{۳}{۲} \\ ۰ & ۴ & ۰ \\ \frac{۳}{۲} & ۰ & \frac{۵}{۲} \end{bmatrix}$$

(الف) نشان دهید که یک تکثر دوتایی در مقادیر اصلی این ماتریس وجود دارد.

(ب) اگر λ_1 مقدار اصلی منحصر بفرد باشد، نشان دهید که ماتریس انتقال زیر

$$[\,a_{ij}\,] = \begin{bmatrix} ۱/\sqrt{۲} & ۰ & -۱/\sqrt{۲} \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱/\sqrt{۲} & ۰ & ۱/\sqrt{۲} \end{bmatrix}$$

B^* را طبق عبارت $B^*_{ij} = a_{iq}a_{jm}B_{qm}$ نتیجه می‌دهد.

(پ) با جذر گرفتن از $[\,B^*_{ij}\,]$ و برگشت انتقال به محورهای $Ox_1x_2x_3$ نشان دهید که

$$[\,\sqrt{B_{ij}}\,] = \begin{bmatrix} \frac{۳}{۲} & ۰ & \frac{۱}{۲} \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ \frac{۱}{۲} & ۰ & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix}$$

(ت) بررسی کنید که ماتریس زیر همچنان جذر $[\,B_{ij}\,]$ است.

$$[\,C_{ij}\,] = \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۲} & ۰ & -\frac{۳}{۲} \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ -\frac{۳}{۲} & ۰ & -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$$

۲ - ۲۳ مقادیر اصلی ماتریس زیر را تعیین کنید.

$$[K_{ij}] = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱۱ & -\sqrt{۳} \\ ۰ & -\sqrt{۳} & ۹ \end{bmatrix}$$

و نشان دهید که محورهای اصلی $Ox^*_۱x^*_۲x^*_۳$ بدست آمده از $Ox_۱x_۲x_۳$ توسط یک چرخش ۶۰° حول محور $x_۱$ صورت گرفته است.

پاسخ : $\lambda_۱ = ۴ \ , \ \lambda_۲ = ۸ \ , \ \lambda_۳ = ۱۲$

۲ - ۲۴ مقادیر اصلی $\lambda_{(q)}$ $(q = ۱ \ , \ ۲ \ , \ ۳)$ و جهت‌های اصلی $\hat{\mathbf{n}}^{(q)}$ $(q = ۱ \ , \ ۲ \ , \ ۳)$ را برای ماتریس متقارن زیر تعیین کنید.

$$[T_{ij}] = \frac{۱}{۲} \begin{bmatrix} ۳ & -۱/\sqrt{۲} & ۱/\sqrt{۲} \\ -۱/\sqrt{۲} & ۹/۲ & ۳/۲ \\ ۱/\sqrt{۲} & ۳/۲ & ۹/۲ \end{bmatrix}$$

پاسخ :

$$\lambda_{(۱)} = ۱ \ , \ \lambda_{(۲)} = ۲ \ , \ \lambda_{(۳)} = ۳$$

$$\hat{\mathbf{n}}^{(۱)} = \frac{۱}{۲}(\sqrt{۲}\,\hat{\mathbf{e}}_۱ + \hat{\mathbf{e}}_۲ - \hat{\mathbf{e}}_۳), \quad \hat{\mathbf{n}}^{(۲)} = \frac{۱}{۲}(\sqrt{۲}\,\hat{\mathbf{e}}_۱ - \hat{\mathbf{e}}_۲ + \hat{\mathbf{e}}_۳), \quad \hat{\mathbf{n}}^{(۳)} = (\hat{\mathbf{e}}_۲ + \hat{\mathbf{e}}_۳)/\sqrt{۲}$$

۲ - ۲۵ $\mathbf{D}$ یک تانسور ثابت است که مولفه‌هایش وابسته به دستگاه مختصات نیست نشان دهید

$$\nabla(\mathbf{x} \cdot \mathbf{D}) = \mathbf{D}$$

که در آن $\mathbf{x} = x_i\hat{\mathbf{e}}_i$ بردار موقعیت است.

۲ - ۲۶ بردار $\mathbf{x} = x_i\hat{\mathbf{e}}_i$ دارای مربع اندازه به‌صورت $x^۲ = x_۱^۲ + x_۲^۲ + x_۳^۲$ را در نظر بگیرید، تعیین کنید.

(الف) $\mathbf{grad}\ x$ (ب) $\mathbf{grad}\ (x^{-n})$ که n عدد صحیح مثبت

(پ) $\nabla^۲ (۱/x)$ (ت) $div\ (x^n\,\mathbf{x})$ (ث) $\mathbf{curl}\ (x^n\,\mathbf{x})$,

پاسخ : (الف) x_i / x (ب) $-nx_i/x^{(n+۲)}$ (پ) ۰ (ت) $(n + ۳)x^n$ (ث) ۰

۲ - ۲۷ اگر λ و ϕ توابع عددی در مختصات x_i باشند، تساوی‌های برداری زیر را بررسی کنید. سمت چپ معادلات را به نمادگذاری شاخصی منتقل نموده آنگاه اپراتورهای مشخص شده را دنبال نمایید. نشان دهید که نتایج سمت راست بدست می‌آید.

(الف) $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$

(ب) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \times \mathbf{w} = \mathbf{v} \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

(پ) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}$

(ت) $\nabla \cdot (\lambda \nabla \phi) = \lambda \nabla^2 \phi + \nabla \lambda \cdot \nabla \phi$

(ث) $\nabla^2 (\lambda \phi) = \lambda \nabla^2 \phi + 2 (\nabla \lambda) \cdot (\nabla \phi) + \phi \nabla^2 \lambda$

(ج) $\nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) = (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v})$

۲ - ۲۸ اگر بردار $\mathbf{v} = \mathbf{b} \times \mathbf{x}$ به‌گونه‌ای باشد که $\mathbf{b}$ وابسته به دستگاه مختصات نباشد. نشان دهید که با استفاده از نمادگذاری شاخصی خواهیم داشت.

(الف) $\mathbf{curl}\ \mathbf{v} = 2\ \mathbf{b}$ (ب) $div\ \mathbf{v} = 0$

۲ - ۲۹ سمت چپ معادلات زیر را به نمادگذاری شاخصی منتقل نمایید و بررسی کنید که با اجرای اپراتورهای مشخص شده در عبارات سمت راست معادلات برای عدد ϕ و بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ حاصل می‌گردد.

(الف) $div\ (\phi \mathbf{v}) = \phi\ div\ \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}\ \phi$

(ب) $\mathbf{u} \times \mathbf{curl}\ \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{curl}\ \mathbf{u} = -(\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad})\ \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\ \mathbf{u} + \mathbf{grad}\ (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$

(پ) $div\ (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{curl}\ \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{curl}\ \mathbf{v}$

(ت) $\mathbf{curl}\ (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\ \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad})\ \mathbf{v} + \mathbf{u}\ div\ \mathbf{v} - \mathbf{v}\ div\ \mathbf{u}$

(ث) $\mathbf{curl}\ (\mathbf{curl}\ \mathbf{u}) = \mathbf{grad}\ (div\ \mathbf{u}) - \nabla^2 \mathbf{u}$

۲ - ۳۰ حجم V دارای یک سطح محصور S با نرمال یکّه n_i به سمت خارج آن می‌باشد، اگر x_i بردار موقعیت هر نقطه در داخل حجم یا روی سطح آن باشد نشان دهید که

(الف) $$\int_S x_i n_j dS = \delta_{ij} V$$

(ب) $$\int_S \nabla (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 6 V$$

(پ) $\int_S \lambda \mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int \mathbf{w} \cdot \mathbf{grad}\, \lambda \, dV$ که در آن $\mathbf{w} = \mathbf{curl}\, \mathbf{v}$, $\lambda = \lambda(\mathbf{x})$

(ت) $\int_S [\hat{\mathbf{e}}_i \times \mathbf{x}, \hat{\mathbf{e}}_j, \hat{\mathbf{n}}] \, dS = ۲ V \delta_{ij}$ که در آن $\hat{\mathbf{e}}_i$ و $\hat{\mathbf{e}}_j$ بردارهای مبنای مختصات می‌باشند.)

راهنمایی : ضرب جعبه‌ای به‌صورت زیر را بنویسید و به نمادگذاری شاخصی منتقل کنید.

$$[\hat{\mathbf{e}}_i \times \mathbf{x}, \hat{\mathbf{e}}_j, \hat{\mathbf{n}}] = (\hat{\mathbf{e}}_i \times \mathbf{x})(\hat{\mathbf{e}}_j \times \hat{\mathbf{n}})$$

۲ - ۳۱ به کمک نظریه استوکس نشان دهید که با انتگرال‌گیری حول منحنی فضایی C که دارای یک دیفرانسیل بردار مماسی به‌صورت dx_i است برای $\phi(\mathbf{x})$ خواهیم داشت.

$$\oint_C \phi_{,i} dx_i = ۰$$

۲ - ۳۲ برای بردار موقعیت x_i که دارای اندازه x می‌باشد نشان دهید که $x_j = x_j/x$ و بنابراین

(الف) $x_{,ij} = \frac{\delta_{ij}}{x} - \frac{x_i x_j}{x^۳}$ (ب) $x^{(-۱)}_{,ij} = \frac{۳ x_i x_j}{x^۵} - \frac{\delta_{ij}}{x^۳}$ (پ) $x_{,ii} = \frac{۲}{x}$

۲ - ۳۳ نشان دهید که برای تانسورهای اختیاری $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ و بردارهای اختیاری $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ داریم.

(الف) $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{b}$

(ب) $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = \frac{۱}{۲} (\mathbf{B} - \mathbf{B}^T) \cdot \mathbf{a}$, $۲ b_i = \varepsilon_{ijk} \mathbf{B}_{kj}$

(پ) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{a}$

۲ - ۳۴ در صورت لزوم برای اثبات تساوی‌های زیر از معادلات ۲ - ۴ - ۱۱ و ۲ - ۴ - ۱۲ استفاده کنید.

(الف) $[\mathbf{Aa}, \mathbf{Ab}, \mathbf{Ac}] = det\, \mathscr{A}\, [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$

(ب) $\mathbf{A}^{T} . (\mathbf{Aa} \times \mathbf{Ab}) = det\, \mathbf{A}\, (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

بردارهای $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ و تانسور $\mathbf{A}$ اختیاری هستند.

۲-۳۵ اگر $\phi = \phi(x_i)$ و $\psi = \psi(x_i)$ توابع عددی در دستگاه مختصات باشند. یادآور می‌شویم که نمادگذاری شاخصی $\phi_{,i}$ نمایانگر $\nabla\phi$ و $\phi_{,ii}$ بیانگر $\nabla^{2}\phi$ می‌باشد. اکنون قضیه دیورژانس یعنی معادله ۲ - ۸ - ۱ را برای میدان $\phi\psi_{,i}$ بکار برید تا عبارت زیر بدست آید.

$$\int_{S} \phi\psi_{,i} n_i dS = \int_{V} (\phi_{,i}\psi_{,i} + \phi\psi_{,ii})\, dV$$

این نتیجه را با نمادگذاری نمادین به شکل زیر منتقل کنید.

$$\int_{S} \phi \nabla\psi .\, \hat{\mathbf{n}}\, dS = \int_{S} \phi \frac{\partial\psi}{\partial n}\, dS = \int_{V} (\nabla\phi . \nabla\psi + \phi\, \nabla^{2}\psi)\, dV$$

که معروف به **اتحاد اول گرین** می‌باشد. همچنین توسط قضیه دیورژانس نشان دهید که

$$\int_{S} (\phi\psi_{,i} - \psi\phi_{,i})\, n_i\, dS = \int_{V} (\phi\psi_{,ii} - \psi\phi_{,ii})\, dV$$

و منتقل کنید به نمادگذاری نمادین به‌صورت زیر

$$\int_{S} \left(\phi \frac{\partial\psi}{\partial u} - \psi \frac{\partial\phi}{\partial n}\right) dS = \int_{V} (\phi\, \nabla^{2}\psi - \psi\, \nabla^{2}\phi)\, dV$$

که معروف به **اتحاد دوم گرین** است.

۳ اصول تنش

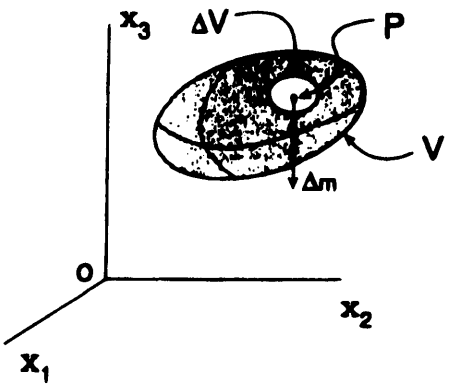
۳ - ۱ نیروهای حجمی و سطحی، چگالی جرم

چگالی نیرو در داخل یا روی سطح محصور یک جسم تحت اثر بار را تنش می‌گویند. باید توجه داشت که در مکانیک محیط‌های پیوسته یک جسم را وقتی «بدون تنش» در نظر می‌گیرند که تنها نیروهای موجود نیروهای بین اتم‌ها باشد که برای نگه داشتن ماهیت جسم لازم است. پس نتیجه می‌گیریم که تنش‌های موردنظر ما در اینجا آنهایی هستند که از کاربرد نیروها توسط یک عامل خارجی حاصل می‌گردد.

دو نوع اصلی نیرو که بسادگی از یکدیگر تمیز داده می‌شوند بدین صورت تعریف می‌شوند. اول، نیروهایی که روی کل حجم اجزاء اعمال می‌شوند و در تمامی جسم توزیع شده است و معروف به **نیروهای حجمی** می‌باشند از آن جمله نیروهای جاذبه و اینرسی بهترین مثال است. نیروهای حجمی را بکمک نماد b_i (نیرو در واحد جرم)، یا توسط نماد P_i (نیرو در حجم) نشان می‌دهیم. دوم، نیروهایی که به طریقی روی جزئی از سطح جسم اعمال و توزیع شده‌اند، صرف‌نظر از اینکه آیا آن جزء قسمتی از سطح محصور یا یک جزء اختیاری از سطح داخل جسم باشد، این‌ها معروف به **نیروهای سطحی** هستند. این نیروها با نماد برداری f_i نشان داده می‌شوند و دارای بُعد نیرو در واحد سطح می‌باشند. نیروهایی که روی سطوح خارجی دو جسم بیکدیگر فشرده شده اتفاق می‌افتد (نیروهای تماس) یا آنهایی که حاصل از انتقال نیروها در امتداد سطح داخلی هستند مثال‌هایی از این نوع می‌باشند.

اکنون ، یک جسم مادی B دارای حجم V محصور شده توسط سطح S که یک ناحیه معمولی R از فضای فیزیکی را اشغال کرده است در نظر می‌گیریم. P یک نقطه داخلی از جسم واقع در جزء کوچکی به حجم ΔV که جرم آن Δm است مطابق شکل ۳ - ۱ قرار دارد. می‌دانیم جرم خاصیتی از یک جسم مادی است که توسط آن جسم دارای اینرسی می‌شود، یعنی اینرسی مخالفتی از طرف جسم است که در مقابل هر تغییری در حرکتش از خود ابراز می‌کند. **چگالی متوسط** این حجم جزء را توسط نسبت زیر

$$\rho_{ave} = \frac{\Delta m}{\Delta V} \qquad (۳ - ۱ - ۱)$$



شکل ۳ - ۱

شاخصی از حجم محیط پیوسته V با جزء ΔV که دارای جرم Δm در نقطه P است.

و **چگالی** ρ در هر نقطه P را با حد این نسبت در حالی که حجم با جمع‌شدگی به یک نقطه P منجر می‌شود، تعریف می‌کنیم.

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} \qquad (۳ - ۱ - ۲)$$

واحد چگالی کیلوگرم بر مترمکعب (kg/m^3) است. توجه شود که دو سنجش نیروهای حجمی ، b_i دارای واحد نیوتن بر کیلوگرم (N/kg) و p_i دارای واحد نیوتن بر مترمکعب (N/m^3) از طریق چگالی توسط معادله زیر بهم ارتباط می‌یابند.

$$\rho b_i = p_i \quad \text{یا} \quad \rho \mathbf{b} = \mathbf{p} \qquad (۳ - ۱ - ۳)$$

البته ، چگالی یک تابع عددی از موقعیت و زمان است که به‌صورت زیر نشان داده می‌شود.

$$\rho = \rho\,(x_i\,,\,t) \quad \text{یا} \quad \rho = \rho\,(\mathbf{x}\,,\,t) \qquad (۳ - ۱ - ۴)$$

پس می‌تواند از نقطه‌ای به نقطه دیگر در داخل یک جسم موردنظر تغییر کند.

۳ - ۲ اصل تنش کوشی

یک جسم مادی همگن ، همسانگرد B دارای سطح محصور S با حجم V که تحت اثر نیروهای سطحی اختیاری f_i و نیروهای حجمی b_i قرار گرفته است را در نظر می‌گیریم. اگر P یک نقطه داخل B باشد تصور کنید یک سطح صاف S^* از نقطه P می‌گذرد (بعضی اوقات به‌عنوان **صفحه برش** نام برده می‌شود) بطوری که جسم را به دو قسمت I و II تقسیم می‌کند (شکل ۳ - ۲ الف). نقطه P در جزء کوچک دارای مساحت ΔS^* از صفحه برش که توسط نرمال یکّه‌ای که جهت آن از قسمت I به قسمت II می‌باشد قرار دارد، همانگونه که پیکر آزاد قسمت I در شکل ۳ - ۲ ب نشان می‌دهد. نیروهای داخلی انتقال یافته در سرتاسر صفحه برش ناشی از عمل قسمت II روی قسمت I منجر به یک توزیع نیرو روی ΔS^* معادل با یک نیروی منتجه Δf_i و یک ممان منتجه ΔM_i در نقطه P می‌شود به‌صورتی که در شکل ۳ - ۲ ب نشان داده شده است. (برای سادگی نیروهای حجمی b_i و نیروهای سطحی f_i وارد بر جسم بطور کامل در شکل ۳ - ۲ ترسیم نشده است). توجه شود که Δf_i و ΔM_i لزوماً در جهت بردار نرمال یکّه n_i در نقطه P نیستند. **اصل تنش کوشی** ادعا می‌کند که در حد وقتی مساحت ΔS^* جمع‌شدگی به سمت صفر میل می‌کند در حالی که P بصورت نقطه داخلی باقی بماند، خواهیم داشت.

$$\lim_{\Delta S^* \to 0} \frac{\Delta f_i}{\Delta S^*} = \frac{df_i}{dS^*} = t_i^{(\hat{\mathbf{n}})} \qquad (۱ - ۲ - ۳)$$

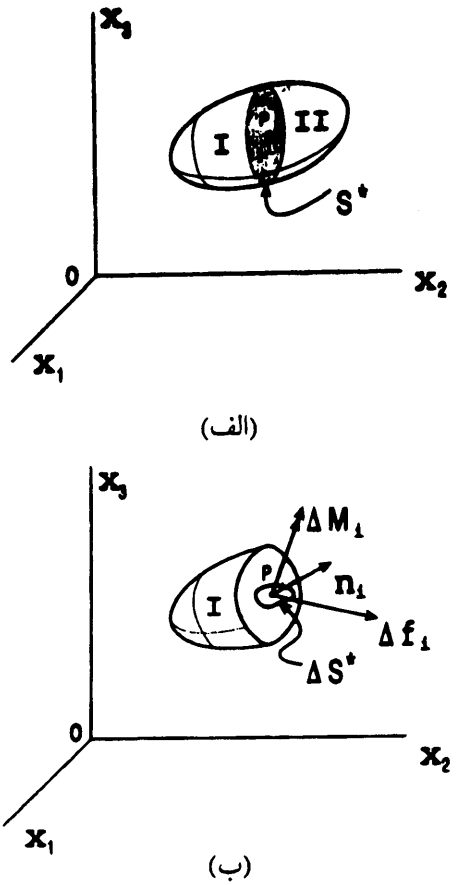
و

$$\lim_{\Delta S^* \to 0} \frac{\Delta M_i}{\Delta S^*} = 0 \qquad (۲ - ۲ - ۳)$$

بردار $t_i^{(\hat{\mathbf{n}})} = df_i / dS^*$ را **بردار تنش** یا بعضی اوقات **بردار کشش** می‌نامند. در معادله ۳ - ۲ - ۲ فرض کرده‌ایم در حد که واقع در P است، بردار ممان حذف می‌شود و ممان متمرکز یا **تنش کوپل** که اصطلاحاً نامیده می‌شود باقی نمی‌ماند. برای بحث تنش‌های کوپل خواننده را به مرجع ارینگن ، ۱۹۶۷ ارجاع می‌دهیم.

ظاهر شدن $(\hat{\mathbf{n}})$ در نماد $t_i^{(\hat{\mathbf{n}})}$ برای بردار تنش به یاد می‌آورد که این یک بردار خاص است و فقط همراه با بردار نرمال $\hat{\mathbf{n}}$ در نقطه P دارای معنی می‌باشد. پس برای بسیار کوچک صفحه برش تصوری که از نقطه P می‌گذرد، هر کدام توسط یک $\hat{\mathbf{n}}$ خاص خود مشخص می‌شوند. همچنین بسیار کوچک بردار تنش $t_i^{(\hat{\mathbf{n}})}$ مرتبط با آن برای یک جسم تحت بارگذاری وجود دارد. همراهی جفت بردارهای $t_i^{(\hat{\mathbf{n}})}$ و $\hat{\mathbf{n}}$ در نقطه P همانگونه که توسط یک شاخص جفتی در شکل

۳-۳ تشریح شده است ، *بیان تنش* در نقطه P را تعریف می‌کند.



شکل ۳ - ۲

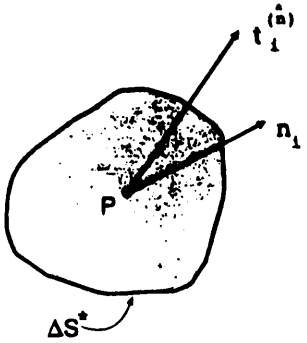
(الف) شاخصی از حجم محیط پیوسته که صفحه برش S^* را نشان می‌دهد (ب) نیرو و ممان وارد در نقطه P سطح جزء ΔS^*

با استفاده از قانون سوم نیوتن برای عمل و عکس‌العمل در سرتاسر صفحه برش، مشاهده می‌شود که نیروی اعمال شده توسط قسمت I روی قسمت II مساوی و مخالف نیروی قسمت II روی قسمت I می‌باشد. بعلاوه ، از اصل اندازه حرکت خطی (قانون دوم نیوتن) می‌دانیم که نرخ زمانی تغییرات اندازه حرکت خطی در هر قسمتی از یک جسم با محیط پیوسته برابر است با

نیروی منتجه وارد بر آن قسمت برای قسمت‌های I و II، اصل را می‌توان به شکل انتگرالی با معادلات نسبی (این معادلات در قسمت ۵ - ۴ از اصل اندازه حرکت خطی بدست آمده‌اند).

$$\int_{S_I} t_i^{(\hat{\mathbf{n}})}\, dS + \int_{V_I} \rho b_i\, dV = \frac{d}{dt}\int_{V_I} \rho v_i\, dV \qquad (۳-۲-۳\text{ الف})$$

$$\int_{S_{II}} t_i^{(\hat{\mathbf{n}})}\, dS + \int_{V_{II}} \rho b_i\, dV = \frac{d}{dt}\int_{V_{II}} \rho v_i\, dV \qquad (۳-۲-۳\text{ ب})$$



شکل ۳ - ۳

بردار کشش $t_i^{(\hat{\mathbf{n}})}$ در نقطه P صفحه ΔS^* تعریف شده توسط بردار نرمال یکّه n_i

که در آن S_I و S_{II} سطح‌های محصورکننده و V_I و V_{II} به‌ترتیب حجم قسمت‌های I و II هستند. همچنین b_i نیروهای حجمی، ρ چگالی و v_i میدان سرعت برای هر دو قسمت می‌باشد. توجه داریم که S_I و S_{II} هر کدام S^* را به‌عنوان قسمتی از کل مساحتشان دربر دارند.

اصل اندازه حرکت خطی را همچنان می‌توان برای جسم B وقتی به‌صورت یکپارچه تصور شود بکار برد

$$\int_{S} t_i^{(\hat{\mathbf{n}})}\, dS + \int_{V} \rho b_i\, dV = \frac{d}{dt}\int_{V} \rho v_i\, dV \qquad (۳-۲-۴)$$

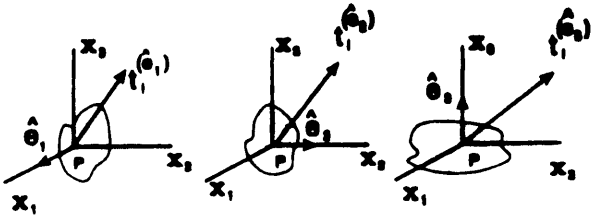
اگر معادلات ۳ - ۲ - ۳ الف و ۳ - ۲ - ۳ ب را با یکدیگر جمع و از معادله ۳ - ۲ - ۴ استفاده کنیم، با توجه به اینکه نرمال بر S^* برای قسمت I برابر $\hat{\mathbf{n}}$، در حالی که برای قسمت II مساوی $-\hat{\mathbf{n}}$ می‌باشد به معادله زیر می‌رسیم

$$\int_{S^*} \left[t_i^{(\hat{\mathbf{n}})} + t_i^{(-\hat{\mathbf{n}})} \right] dS = 0 \qquad (۳ - ۲ - ۵)$$

چون هر دو S_I و S_{II} حاوی یک انتگرال سطح روی S^* این معادله باید برای تقسیم‌بندی اختیاری جسم (یعنی برای هر صفحه برش تصوری از نقطه P) برقرار باشد. که معنی می‌دهد عبارت زیر انتگرال باید مشخصاً صفر بشود، از این رو

$$t_i^{(\hat{\mathbf{n}})} = - t_i^{(-\hat{\mathbf{n}})} \qquad (۳ - ۲ - ۶)$$

نشان می‌دهد اگر قسمت II بجای قسمت I به‌عنوان جسم آزاد انتخاب می‌شد بردار تنش منتجه $-t_i^{(-\hat{\mathbf{n}})}$ می‌بود.



شکل ۳ - ۴

بردار کشش روی صفحه‌های مختصات در نقطه P

۳ - ۳ تانسور تنش

همانگونه که در قسمت ۳ - ۲ اشاره شد، اصل تنش کوشی مرتبط با هر جهت $\hat{\mathbf{n}}$ در نقطه P یک بردار تنش $t_i^{(\hat{\mathbf{n}})}$ می‌باشد. مشخصاً اگر یک دستگاه مختصات قائم مستطیلی مرجع در نقطه P تعریف کنیم، مرتبط با هر یک از مساحت‌های جزء dS_i $(i = ۱ , ۲ , ۳)$ واقع در صفحه‌های مختصات همراه با نرمال‌های یکّه $\hat{\mathbf{e}}_i$ $(i = ۱ , ۲ , ۳)$ به‌ترتیب یک بردار تنش $t_i^{(\hat{\mathbf{e}}j)}$ مطابق شکل ۳ - ۴ وجود دارد. برحسب مولفه‌های مختصاتشان این سه بردار تنش در ارتباط با صفحه‌های مختصات به‌صورت زیر بیان می‌شوند.

$$\mathbf{t}^{(\hat{e}_1)} = t_1^{(\hat{e}_1)}\,\hat{\mathbf{e}}_1 + t_2^{(\hat{e}_1)}\,\hat{\mathbf{e}}_2 + t_3^{(\hat{e}_1)}\,\hat{\mathbf{e}}_3 \qquad (۳-۳-۱\text{ الف})$$

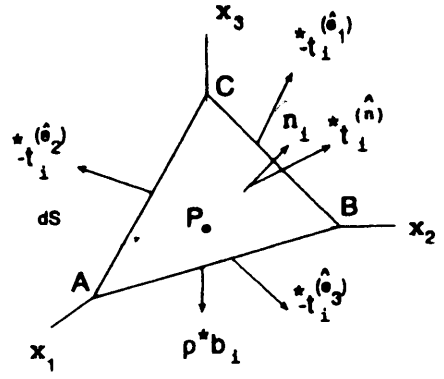
$$\mathbf{t}^{(\hat{e}_2)} = t_1^{(\hat{e}_2)}\,\hat{\mathbf{e}}_1 + t_2^{(\hat{e}_2)}\,\hat{\mathbf{e}}_2 + t_3^{(\hat{e}_2)}\,\hat{\mathbf{e}}_3 \qquad (۳-۳-۱\text{ ب})$$

$$\mathbf{t}^{(\hat{e}_3)} = t_1^{(\hat{e}_3)}\,\hat{\mathbf{e}}_1 + t_2^{(\hat{e}_3)}\,\hat{\mathbf{e}}_2 + t_3^{(\hat{e}_3)}\,\hat{\mathbf{e}}_3 \qquad (۳-۳-۱\text{ پ})$$

یا بطور فشرده با استفاده از قرارداد جمع ،

$$\mathbf{t}^{(\hat{e}_i)} = t_j^{(\hat{e}_i)}\,\hat{\mathbf{e}}_j \qquad (۳-۳-۲)$$

این معادله بردار تنش را برای یک صفحه مختصات ارائه شده در نقطه P برحسب مولفه‌های قائم مستطیلی بیان می‌کند، اما آنچه حقیقاً نیاز است ، بیان یک رابطه‌ای برای مولفه‌های مختصات بردار تنش در نقطه P در ارتباط با یک صفحه اختیاری می‌باشد. برای این مقصود، تعادل یک قسمت کوچک از جسم در شکل چهاروجهی با رأس P و قاعده ABC عمود بر نرمال اختیاری $\hat{\mathbf{n}} = n_i\hat{\mathbf{e}}_i$ مطابق شکل ۳ - ۵ را در نظر می‌گیریم. جهت‌های مختصات طوری انتخاب می‌شوند که سه ضلع BPC , CPA و APB چهاروجهی در وضعیت صفحه‌های مختصات قرارگیرند. اگر مساحت قاعده را با مقدار dS مشخص شود مساحت اضلاع تصویری از مساحت قاعده خواهند بود $(i = ۱ , ۲ , ۳)$, $dS_i = dS\ cos\ (\hat{\mathbf{n}} , \hat{\mathbf{e}}_i)$ یا مشخصاً



شکل ۳ - ۵

نمودار آزاد چهاروجهی بسیار کوچک واقع در نقطه P

$$dS_1 = n_1 dS \qquad \text{برای ضلع } BPC \qquad (۳-۳-۳\text{ الف})$$

$$dS_2 = n_2 dS \qquad \text{برای ضلع } CPA \qquad (۳-۳-۳\text{ ب})$$

$$dS_3 = n_3 dS \qquad \text{برای ضلع } APB \qquad (۳-۳-۳\text{ پ})$$

بردارهای تنش نشان داده شده روی سطوح چهاروجهی شکل ۳ - ۵ ، **مقادیر متوسط** روی مساحت‌هایی که آنها اعمال می‌شوند را بیان می‌کنند. این موضوع را در نمادگذاری توسط یک ستاره ضمیمه شده به نماد بردار تنش نشان می‌دهند (به یاد داشته باشیم که بردار تنش یک کمیت نقطه‌ای است). تعادل مستلزم آن است که جمع برداری تمام نیروهای وارد بر چهاروجهی صفر باشد ، یعنی

$$*t_i^{(\hat{\mathbf{n}})}\, dS - *t_i^{(\hat{\mathbf{e}}_1)}\, dS_1 - *t_i^{(\hat{\mathbf{e}}_2)}\, dS_2 - *t_i^{(\hat{\mathbf{e}}_3)}\, dS_3 + \rho *b_i dV = 0 \qquad (۴-۳-۳)$$

که در آن $*b_i$ نیروی حجمی متوسط است که در کل جسم عمل می‌کند، علامت‌های منفی در کشش‌های مربوط به صفحه‌های مختصات ناشی از طرف خارج بودن نرمال‌های یکّه روی این صفحه‌ها می‌باشد که به سمت جهت‌های منفی مختصات هستند (می‌دانیم که $(t_i^{(-\hat{\mathbf{n}})} = -t_i^{(\hat{\mathbf{n}})}$). با منظور کرد معادله ۳ - ۳ - ۳ می‌توان معادله ۳ - ۳ - ۴ را به‌صورت زیر نوشت.

$$*t_i^{(\hat{\mathbf{n}})}\, dS - *t_i^{(\hat{\mathbf{e}}j)}\, n_j\, dS + \rho *b_i dV = 0 \qquad (۵-۳-۳)$$

اگر اجازه بدهیم شاخص‌های روی بردارهای یکّه $*t_i^{(\hat{\mathbf{e}}j)}$ در فرآیند جمع شرکت کنند. حجم چهاروجهی $dV = \frac{1}{3} h\, dS$ باشد که h فاصله عمودی از نقطه P تا قاعده ABC است، با وارد کردن آن در معادله ۳ - ۳ - ۵ و حذف dS آنگاه خواهیم

$$*t_i^{(\hat{\mathbf{n}})} = *t_i^{(\hat{\mathbf{e}}j)}\, n_j - \frac{1}{3}\rho *b_i h \qquad (۶-۳-۳)$$

اکنون ، جمع‌شدگی چهاروجهی و رسیدن به نقطه P را با گرفتن حد وقتی h به سمت صفر میل کند $(h \to 0)$ در نظر می‌گیریم و با توجه به اینکه در فرآیند حد کمیت‌های ستاره‌دار (متوسط)

مقادیر واقعی همان کمیت‌ها در نقطه P را می‌گیرند خواهیم داشت.

$$t_i^{(\hat{\mathbf{n}})} = t_i^{(\hat{\mathbf{e}}j)}\, n_j \qquad (۳-۳-۷)$$

با تعریف $\sigma_{ji} \equiv t_i^{(\hat{\mathbf{e}}j)}$ آنگاه داریم

$$t_i^{(\hat{\mathbf{n}})} = \sigma_{ji} n_j \qquad \text{یا} \qquad \mathbf{t}^{(\hat{\mathbf{n}})} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \sigma \qquad (۳-۳-۸)$$

که **فرمول تنش کوشی** می‌باشد. می‌توان همین نتیجه را برای اجسامی که دارای شتاب هستند با استفاده از اصل بقای اندازه حرکت خطی بجای تعادل نیروها برای چهاروجهی شکل ۳ - ۵ بدست آورد.

تانسور تنش

کمیت‌های $\sigma_{ji} \equiv t_i^{(\hat{\mathbf{e}}j)}$ مولفه‌های یک تانسور مرتبه دوم σ معروف به تانسور تنش است. این موضوع با در نظر گرفتن انتقال مولفه‌های بردار تنش $t_i^{(\hat{\mathbf{n}})}$ بین دستگاههای مختصات $px_1x_2x_3$ و $px'_1x'_2x'_3$ توسط ماتریس انتقال با مولفه‌های زیر صورت می‌پذیرد (رجوع به قسمت ۲ - ۵)

$$a_{ij} = \hat{\mathbf{e}}'_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j \qquad (۳-۳-۹)$$

چون $t^{(\hat{\mathbf{n}})}$ برحسب مولفه‌هایش در هر کدام از دستگاههای مختصات قابل بیان می‌باشد.

$$\mathbf{t}^{(\hat{\mathbf{n}})} = t_i^{(\hat{\mathbf{n}})}\, \hat{\mathbf{e}}_i = t_i^{(\hat{\mathbf{n}}')}\, \hat{\mathbf{e}}'_i \qquad (۳-۳-۱۰\text{ الف})$$

از معادله ۳ - ۳ - ۸

$$\mathbf{t}^{(\hat{\mathbf{n}})} = \sigma_{ji} n_j \hat{\mathbf{e}}_i = \sigma'_{ji} n'_j \hat{\mathbf{e}}'_i \qquad (۳-۳-۱۰\text{ ب})$$

اما از معادله ۲ - ۵ - ۲ ، $\hat{\mathbf{e}}'_i = a_{ij}\hat{\mathbf{e}}_j$ و از معادله ۲ - ۵ - ۹ ، $n'_j = a_{js} n_s$ ، اکنون معادله ۳ - ۳ - ۱۰ ب پس از چند عملیات جمع شاخص‌ها به‌صورت زیر خواهد شد.

$$(\sigma_{sr} - a_{js} a_{ir} \sigma'_{ji})\, n_s \hat{\mathbf{e}}_r = 0 \qquad (۳-۳-۱۹)$$

زیرا که بردارهای $\hat{\mathbf{e}}_r$ بطور خطی مستقل هستند و چون معادله ۳ - ۳ - ۱۱ باید برای تمامی بردارهای n_s معتبر باشد ، مشاهده می‌شود که

$$\sigma_{sr} = a_{js} a_{ir} \sigma'_{ji} \qquad (۳-۳-۱۲)$$

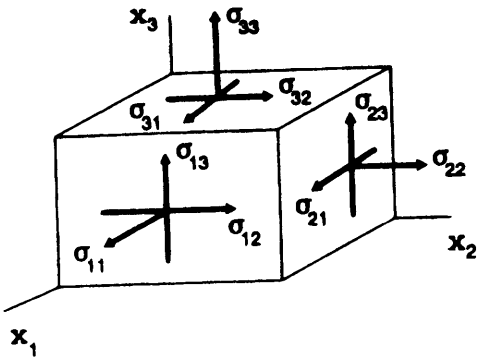
اما این معادله انتقال برای یک تانسور مرتبه دوم است، پس توسط معادله ۲ - ۵ - ۱۲ مشخصه تانسوری مولفه‌های تنش بطور آشکار بنا نهاده می‌شود.

فرمول تنش کوشی ارائه شده توسط معادله ۳ - ۳ - ۸ ، بردار تنش مرتبط با مساحت جزء که دارای نرمال n_i به‌طرف خارج در نقطه P می‌باشد را برحسب مولفه‌های تانسور تنش σ_{ji} در آن نقطه بیان می‌کند. اگرچه بیان تنش در P به‌صورت جفت بردارهای کشش همراه با نرمال مرتبط با آن در نقطه توضیح داده شده است، از تحلیل جزء چهاروجهی مشاهده می‌شود که اگر بردارهای تنش را روی سه صفحه مختصات در هر دستگاه قائم در نقطه P را داشته باشیم، یا بطور معادل نه مولفه تانسور تنش σ_{ji} در آن نقطه را در اختیار داشته باشیم، آنگاه می‌توانیم بردار تنش برای هر صفحه در آن نقطه را تعیین کنیم. برای مقاصد محاسباتی، اغلب راحتتر است معادله ۳ - ۳ - ۸ به شکل ماتریسی زیر بیان شود.

$$[\, t_1^{(\hat{\mathbf{n}})} ,\, t_2^{(\hat{\mathbf{n}})} ,\, t_3^{(\hat{\mathbf{n}})} \,] = [\, n_1 , n_2 , n_3 \,] \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \qquad (۳ - ۳ - ۱۳)$$

نُه مولفه σ_{ji} را اغلب با پیکان روی اضلاع مختصات یک متوازی‌السطوح مستطیلی مطابق شکل ۳ - ۶ نشان می‌دهند. تاکید می‌کنیم که این متوازی‌السطوح یک قطعه‌ای از ماده جسم محیط پیوسته نیست (توجه شود که هیچ ابعادی برای متوازی‌السطوح منظور نشده است)، اما بطور ساده یک وسیله شماتیک برای نمایش دادن مولفه‌های تانسور تنش می‌باشد. در یک جسم فیزیکی واقعی B، تمام نُه مولفه تنش **بر یک نقطه منفرد** P اعمال می‌شود. سه مولفه نشان داده شده توسط پیکان که بطور عمودی (نرمال) به صفحه‌های مختصات اعمال و با σ_{11} , σ_{22} و σ_{33} مشخص شده‌اند معروف به ***تنش های نرمال*** هستند. شش پیکان قرارگرفته در داخل صفحه‌های مختصات که اشاره به جهت محورهای مختصات دارند مشخصاً σ_{12} , σ_{21} , σ_{23} , σ_{32} , σ_{31} و σ_{13} معروف به ***تنش های برشی*** می‌باشند. توجه شود که برای این مولفه‌ها، اولین زیرنوشت صفحه مختصات را که تنش برشی روی آن اعمال می‌شود نشان می‌دهد و دومین زیرنوشت جهت مختصات اعمال تنش را بیان می‌کند. مولفه تنش **مثبت** است وقتی که بردار پیکان اشاره به جهت مثبت یکی از محورهای مختصات داشته باشد در حالی که روی صفحه‌ای اعمال می‌شود که نرمال به طرف خارج صفحه همچنان اشاره به یک جهت مثبت مختصات داشته باشد. تمامی مولفه‌های تنش نمایش داده شده در شکل ۳ - ۶ مثبت هستند. بطورکلی، تنش‌های نرمال مثبت را ***تنش های کششی*** و تنش‌های نرمال منفی را ***تنش های***

فشاری می‌نامند. واحدهای تنش نیوتن بر متر مربع (N/m^2) در سیستم SI و پوند بر اینچ مربع (psi) در سیستم انگلیسی می‌باشد. یک نیوتن بر متر مربع را یک **پاسکال** می‌گویند، اما چون این یک مقیاس نسبتاً کوچک تنش است از نقطه نظر مهندسی تنش‌ها را معمولاً بـه مگـاپاسکال (MPa) یا در واحدهای انگلیسی به کیلو پوند بر اینچ مربع (ksi) بیان می‌کنند.



شکل ۳ - ۶

نمودار شماتیک مولفه‌های تنش مثبت

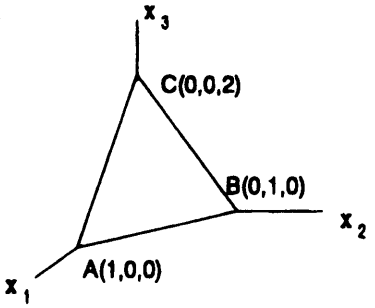
مثال ۳ ـ ۳ ـ ۱ مولفه‌های تانسور تنش در نقطه P در شکل ماتریسی برحسب مگاپاسکال به‌صورت زیر می‌باشد.

$$[\sigma_{ji}] = \begin{bmatrix} ۲۱ & -۶۳ & ۴۲ \\ -۶۳ & ۰ & ۸۴ \\ ۴۲ & ۸۴ & -۲۱ \end{bmatrix}$$

(الف) بردار تنش را روی صفحه‌ای در نقطه P که دارای نرمال یکّه به شکل زیر می‌باشد تعیین کنید.

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{۱}{۷}(۲\,\hat{\mathbf{e}}_۱ - ۳\,\hat{\mathbf{e}}_۲ + ۶\,\hat{\mathbf{e}}_۳)$$

(ب) بردار تنش روی یک صفحه‌ای واقع در نقطه P کـه مـوازی صـفحه ABC مـطابق شکـل می‌باشد تعیین کنید.



حل (الف) از معادله ۳ - ۳ - ۱۳ برای اطلاعات داده شده

$$[\, t_1^{(\hat{\mathbf{n}})}\,,\, t_2^{(\hat{\mathbf{n}})}\,,\, t_3^{(\hat{\mathbf{n}})}\,] = [\tfrac{2}{7}\,,\, -\tfrac{3}{7}\,,\, \tfrac{6}{7}\,] \begin{bmatrix} 21 & -63 & 42 \\ -63 & 0 & 84 \\ 42 & 84 & -21 \end{bmatrix} = [69\,,\, 54\,,\, -42]$$

یا در شکل برداری داریم $\mathbf{t}^{(\hat{\mathbf{n}})} = 69\,\hat{\mathbf{e}}_1 + 54\,\hat{\mathbf{e}}_2 - 42\hat{\mathbf{e}}_3$ این بردار مولفه‌های نیرو در واحد سطح (کشش) روی صفحه تعریف شده توسط $[\, \frac{2}{7}\,,\, -\frac{3}{7}\,,\, \frac{6}{7}\,]$ را بیان می‌کند.

(ب) معادله صفحه ABC در شکل بسادگی مشخص می‌شود که $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2$ است و نرمال یکّه به طرف خارج صفحه عبارت است از $\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{3}(2\,\hat{\mathbf{e}}_1 + 2\,\hat{\mathbf{e}}_2 + \hat{\mathbf{e}}_3)$ پس مجدداً از معادله ۳ - ۳ - ۱۳ داریم

$$[\, t_1^{(\hat{\mathbf{n}})}\,,\, t_2^{(\hat{\mathbf{n}})}\,,\, t_3^{(\hat{\mathbf{n}})}\,] = [\tfrac{2}{3}\,,\, \tfrac{2}{3}\,,\, \tfrac{1}{3}\,] \begin{bmatrix} 21 & -63 & 42 \\ -63 & 0 & 84 \\ 42 & 84 & -21 \end{bmatrix} = [\,-14\,,\, -14\,,\, 77\,]$$

یا در شکل برداری $\mathbf{t}^{(\hat{\mathbf{n}})} = -14\,\hat{\mathbf{e}}_1 - 14\,\hat{\mathbf{e}}_2 + 77\,\hat{\mathbf{e}}_3$. در این مثال، به‌وضوح وابستگی صفحه برش به بردار تنش مشاهده می‌شود. در اینجا، دو صفحه برش متفاوت در یک نقطه در نظر گرفته شده است و نتیجه می‌شود که دو بردار کشش مجزا از هم توسط مولفه‌های تانسور تنش ارائه شده حاصل می‌گردد.

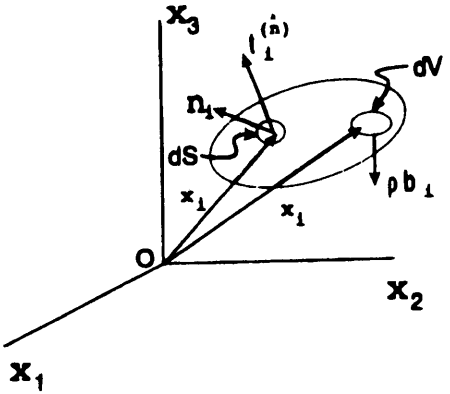
۳ - ۴ تعادل نیرو و ممان، تقارن در تانسور تنش

در قسمت قبل، شرط تعادل نیروها را برای یک جزء چهاروجهی از یک جسم در حال تعادل برای تعریف تانسور تنش و بدست آوردن فرمول تنش کوشی استفاده نمودیم. در اینجا ، تعادل نیرو روی جسم را وقتی به جسم صورت یکپارچه در نظر گرفته شود برای بدست آوردن ***معادلات تعادل محلی*** بکار می‌بریم. این یک مجموعه سه‌تایی از معادلات دیفرانسیل است که باید روی هر نقطه از جسم در محیط پیوسته که در حال تعادل است برقرار باشد. همانگونه که مشهور است، تعادل مستلزم آن است که جمع ممان‌ها نسبت به هر نقطه ثابت صفر باشد، این شرط را همراه با معادلات تعادل محلی برای استنباط حقیقی که تانسور تنش در غیاب ممان‌های متمرکز جسم ، متقارن می‌باشد بکار می‌بریم.

یک جسم مادی دارای حجم V و سطح محصور S را در نظر می‌گیریم. جسم تحت تاثیر کشش‌های سطحی $t_i^{(\hat{n})}$ و نیروهای حجمی b_i (نیرو در واحد جرم) مطابق شکل ۳ - ۷ قرار گرفته است. مانند قبل ، ممان‌های متمرکز جسم را از ملاحظات حذف می‌کنیم. تعادل ایجاب می‌کند که جمع کلیه نیروها وارد بر جسم برابر صفر باشد. این شرط توسط یک معادله مطلق (انتگرال) بیانگر جمع کل نیروهای حجمی و سطحی وارد بر جسم بیان می‌شود.

$$\int_S t_i^{(\hat{n})}\, dS + \int_V \rho b_i\, dV = 0 \qquad (۱ - ۴ - ۳)$$

که در آن dS جزء دیفرانسیلی سطح S و dV جزء دیفرانسیلی حجم V می‌باشد.



شکل ۳ - ۷

حجم مادی نشان‌دهندهٔ بردار کشش سطحی روی مساحت بسیار کوچک dS و بردار نیروی حجمی روی حجم بسیار کوچک dV در x_i .

چون $t_i^{(\hat{n})} = \sigma_{ji} n_j$ حاصل از معادله ۳ - ۳ - ۸ می‌باشد، قضیه دیورژانس (معادله ۲ - ۸ - ۱) مجاز می‌دارد جمله اول معادله ۳ - ۴ - ۱ بدین صورت نوشته شود.

$$\int_S \sigma_{ji} n_j dS = \int_V \sigma_{ji,j}\, dV$$

پس معادله ۳ - ۴ - ۱ خواهد شد.

$$\int_V (\sigma_{ji,j} + \rho b_i)\, dV = 0 \qquad (۳ - ۴ - ۲)$$

این معادله باید برای هر حجم اختیاری معتبر باشد (هر قسمتی از جسم در تعادل است) که ایجاب می‌کند زیر انتگرال صفر شود، آنگاه **معادلات تعادل محلی** بدست می‌آیند.

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = 0 \qquad (۳ - ۴ - ۳)$$

علاوه بر تعادل نیروهای بیان شده توسط معادله ۳ - ۴ - ۱ ، تعادل مستلزم آنست که جمع ممان‌ها نسبت به هر نقطه اختیاری ، باید همچنین صفر بشود. می‌دانیم که ممان یک نیرو حول یک نقطه توسط ضرب برداری بردار موقعیت در نیرو می‌باشد. بنابراین، با اختیار کردن مبدأ مختصات به‌عنوان مرکز ممان‌گیری ، و توجه به اینکه x_i بردار موقعیت برای اجزاء شاخص سطح و حجم (شکل ۳ - ۷) می‌باشند، تعادل ممان‌ها برای جسم وقتی بصورت یکپارچه در نظر گرفته شود عبارت است از

$$\int_S \varepsilon_{ijk} x_j t_k^{(\hat{n})}\, dS + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho b_k\, dV = 0 \qquad (۳ - ۴ - ۴)$$

مانند قبل ، با استفاده از تساوی $t_k^{(\hat{n})} = \sigma_{qk} n_q$ و قضیه دیورژانس گوس بدست می‌آوریم.

$$\int_V \varepsilon_{ijk} \left[(x_j \sigma_{qk})_{,q} + x_j \rho b_k \right] dV = 0$$

یا

$$\int_V \varepsilon_{ijk} \left[x_{j,q} \sigma_{qk} + x_j (\sigma_{qk,q} + \rho b_k) \right] dV = 0$$

اما چون $x_{j,q} = \delta_{jq}$ و از معادله ۳ - ۴ - ۳ داریم $\sigma_{qk,q} + \rho b_k = 0$ پس معادله فوق به معادله زیر کاهش می‌یابد.

$$\int_V \varepsilon_{ijk}\, \sigma_{jk}\, dV = 0$$

مجدداً، چون حجم V اختیاری است، در اینجا زیر انتگرال باید صفر شود.

$$\varepsilon_{ijk}\, \sigma_{jk} = 0 \qquad (۵ - ۴ - ۳)$$

با بسط مستقیم سمت چپ این معادله، برای شاخص آزاد $i = 1$ (با حذف جملات صفر) داریم $\varepsilon_{123}\, \sigma_{23} + \varepsilon_{132}\, \sigma_{32} = 0$ یا $\sigma_{23} - \sigma_{32} = 0$ یعنی $\sigma_{23} = \sigma_{32}$. به همان طریق برای $i = 2$ و $i = 3$ بدست می‌آوریم $\sigma_{13} = \sigma_{31}$ و $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ پس در حالت کلی

$$\sigma_{jk} = \sigma_{kj} \qquad (۶ - ۴ - ۳)$$

بنابراین، در تعادل ممان‌ها برای یک جسم در غیاب ممان‌های متمرکز جسم، تانسور تنش متقارن است و اکنون معادله ۳ - ۴ - ۳ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت.

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = 0 \qquad \text{یا} \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = 0 \qquad (۷ - ۴ - ۳)$$

همچنین، بخاطر تقارن تانسور تنش، معادله ۳ - ۳ - ۸ را حالا می‌توان با کمی متفاوت به شکل زیر بیان کرد.

$$t_i^{(\hat{\mathbf{n}})} = \sigma_{ij} n_j \qquad \text{یا} \qquad \mathbf{t}^{(\hat{\mathbf{n}})} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \qquad (۸ - ۴ - ۳)$$

در شکل ماتریسی معادله ۳ - ۴ - ۸، بردارهای $t_i^{(\hat{\mathbf{n}})}$ و n_j توسط ماتریس‌های ستونی بیان شده‌اند.

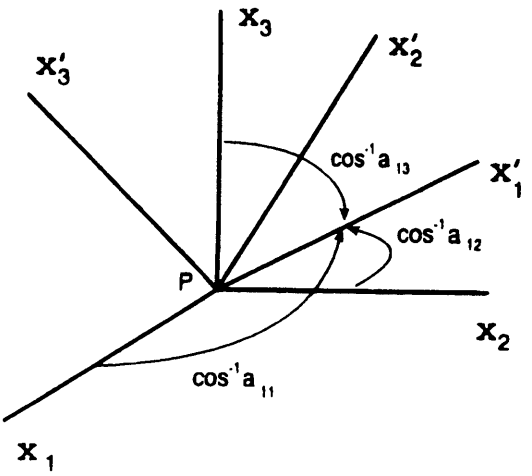
۳ - ۵ قوانین انتقال تنش

بیان تنش در نقطه P نسبت به محورهای قائم $Px_1x_2x_3$ مطابق شکل ۳ - ۸ توسط تانسور تنش $\boldsymbol{\sigma}$ که دارای مولفه‌های σ_{ij} می‌باشد ارائه شده است. یک مجموعه محورهای دومی را مثل

$px'_1x'_2x'_3$ معرفی می‌کنیم که از چرخش محورهای $px_1x_2x_3$ بطوری که ماتریس انتقال $[\ a_{ij}\ ]$ آن دو را توسط ماتریس متعامد مقتضی ارتباط داده باشد حاصل گردد. چون $\boldsymbol{\sigma}$ یک تانسور مرتبه دوم قائم است، مولفه‌هایش σ_{ij} در دستگاه پرایم‌دار برحسب مولفه‌های بدون پرایم توسط معادله ۲ - ۵ - ۱۳ بدین صورت بیان می‌شوند.

$$\sigma'_{ij} = a_{iq}a_{jm}\sigma_{qm} \quad \text{یا} \quad \sigma' = \mathbf{A}\,\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{A}^T \qquad (۳ - ۵ - ۱)$$

عملیات ماتریسی معادله ۳ - ۵ - ۱ برای محاسبه مولفه‌های پرایم دار تنش خیلی آسان می‌باشد که توسط دو مثال زیر نشان داده می‌شود.



شکل ۳ - ۸

محورهای مستطیلی $px_1x_2x_3$ درون یافته به $px'_1x'_2x'_3$.

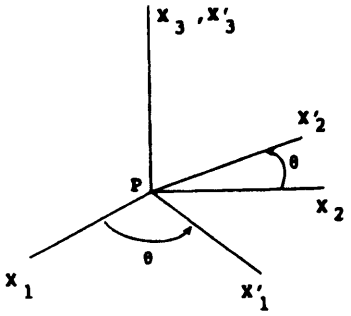
مثال ۳ ـ ۵ ـ ۱ مولفه‌های تنش (برحسب MPa) در نقطه P نسبت به محورهای $px_1x_2x_3$ توسط ماتریس زیر بیان شده است.

$$[\ \sigma_{ij}\ ] = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \\ ۳ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۰ & -۲ \end{bmatrix}$$

محورهای پرایم‌دار $px'_1x'_2x'_3$ با یک چرخش ساعتگرد به اندازه ۴۵° حول محور x_3 حاصل می‌گردند. مولفه‌های تنش σ'_{ij} را تعیین کنید.

حل برای یک چرخش مثبت θ حول محور x_3 مطابق شکل، ماتریس انتقال $[\,a_{ij}\,]$ به‌صورت کلی زیر است.

$$[\,a_{ij}\,] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & ۰ \\ -\sin\theta & \cos\theta & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$



بنابراین از معادله ۳ - ۵ - ۱ که به‌صورت ماتریسی بیان شده است نتیجه می‌شود که یک چرخش ۴۵° محورها مستلزم آنست که

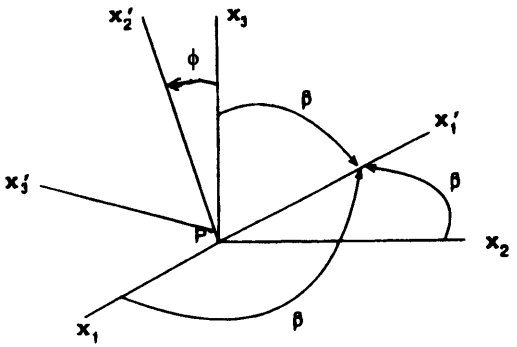
$$[\sigma'_{ij}] = \begin{bmatrix} ۱/\sqrt{۲} & ۱/\sqrt{۲} & ۰ \\ -۱/\sqrt{۲} & ۱/\sqrt{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \\ ۳ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۰ & -۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱/\sqrt{۲} & -۱/\sqrt{۲} & ۰ \\ ۱/\sqrt{۲} & ۱/\sqrt{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ۴ & ۰ & \sqrt{۲} \\ ۰ & -۲ & -\sqrt{۲} \\ \sqrt{۲} & -\sqrt{۲} & -۲ \end{bmatrix}$$

مثال ۳ ـ ۵ ـ ۲ فرض کنید تانسور تنش $\boldsymbol{\sigma}$ (برحسب *ksi*) در نقطه P نسبت به محورهای $px_1x_2x_3$ توسط ماتریس زیر بیان می‌شود.

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} ۱۸ & ۰ & -۱۲ \\ ۰ & ۶ & ۰ \\ -۱۲ & ۰ & ۲۴ \end{bmatrix}$$

اگر محور x'_1 زوایای مساوی با سه محور بدون پرایم بسازد و محور x'_2 در صفحه x'_1x_3 مطابق شکل واقع شود، مولفه‌های $\boldsymbol{\sigma}$ را با فرض اینکه دستگاه $px'_1x'_2x'_3$ راستگرد می‌باشد تعیین کنید.



حل ابتدا باید ماتریس انتقال $[a_{ij}]$ را تعیین کرد. اگر β زاویه مشترکی باشد که محور x'_1 با محورهای بدون پرایم مطابق شکل بسازد، آنگاه $a_{11} = a_{12} = a_{13} = \cos\beta$ و از شرط متعامد بودن معادله ۲ ـ ۵ ـ ۴ برای $i = j = ۱$ داریم $\cos\beta = ۱/\sqrt{۳}$. سپس اگر ϕ زاویه بین محور x'_2 و x_3 باشد. آنگاه $a_{23} = \cos\phi = \sin\beta = ۲/\sqrt{۶}$ می‌باشد. همانگونه که از تقارن آشکار پارامتر محورها مشاهده می‌شود، محور x'_2 زوایای مساوی با x_1 و x_2 می‌سازد، بدین معنی که $a_{21} = a_{22}$. پس مجدداً از معادله ۲ ـ ۵ ـ ۴ برای $i = ۱$, $j = ۲$ داریم $a_{21} = a_{22} = -۱/\sqrt{۶}$ (علامت منفی لازم است زیر علامت مثبت برای a_{23} اختیار شده است). برای اینکه محورهای پرایم‌دار یک دستگاه راستگرد را تشکیل دهند، نیاز است $\hat{e}'_3 = \hat{e}'_1 \times \hat{e}'_2$ باشد با این نتیجه که $a_{31} = ۱/\sqrt{۲}$, $a_{32} = -۱/\sqrt{۲}$ و $a_{33} = ۰$. بالاخره از معادله ۳ ـ ۵ ـ ۱ خواهیم داشت.

$$[\sigma'_{ij}]=\begin{bmatrix} ۱/\sqrt{۳} & ۱/\sqrt{۳} & ۱/\sqrt{۳} \\ -۱/\sqrt{۶} & -۱/\sqrt{۶} & ۲/\sqrt{۶} \\ ۱/\sqrt{۲} & -۱/\sqrt{۲} & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱۸ & ۰ & -۱۲ \\ ۰ & ۶ & ۰ \\ -۱۲ & ۰ & ۲۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱/\sqrt{۳}-۱/\sqrt{۶} & ۱/\sqrt{۲} \\ ۱/\sqrt{۳}-۱/\sqrt{۶} & -۱/\sqrt{۲} \\ ۱/\sqrt{۳} & ۲/\sqrt{۶} \quad ۰ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۸ & ۲/\sqrt{۲} & ۰ \\ ۲/\sqrt{۲} & ۲۸ & -۶/\sqrt{۳} \\ ۰ & -۶/\sqrt{۳} & ۱۲ \end{bmatrix}$$

۳ - ۶ تنش‌های اصلی ، جهت‌های تنش اصلی

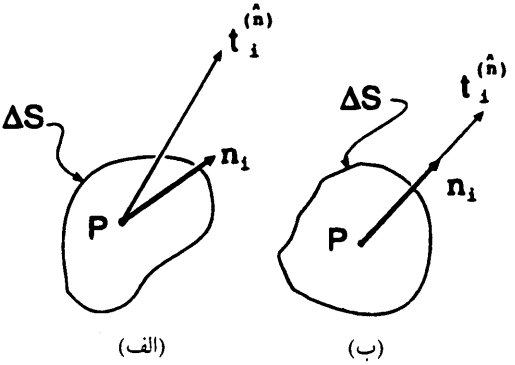
یکبار دیگر توجه خودمان را به بیان تنش در نقطه P متمرکز نموده و فرض می‌کنیم نسبت به محورهای $px_1x_2x_3$ توسط تانسور تنش σ_{ij} ارائه شده است. همانطور که از مثال ۳ - ۳ - ۱ مشاهده شد، برای هر جزء صفحه‌ای به مساحت ΔS در نقطه P بردار نرمال n_i به سمت خارج صفحه یک بردار تنش $t_i^{(\hat{n})}$ که توسط معادله ۳ - ۴ - ۸ تعریف شده است خواهیم داشت. بعلاوه ، همانطوری که شکل ۳ - ۹ الف نشان می‌دهد، این بردار تنش عموماً در جهت n_i نیست. اگرچه برای شرایط خاص در P بردار تنش در واقع در جهت n_i عمل می‌کند و بنابراین می‌توان آن را با مضربی عددی از بردار نرمال بیان کرد. پس ، مطابق شکل ۳ - ۹ برای چنین شرایطی داریم

$$t_i^{(\hat{n})} = \sigma n_i \qquad (۱ - ۶ - ۳)$$

که در آن σ مضرب عددی n_i است. جهت‌های نشان داده شده توسط n_i برای اینکه معادله ۳ - ۶ - ۱ برقرار باشد معروف به ***جهت‌های تنش اصلی*** است، و عدد σ را ***مقدار تنش اصلی*** σ_{ij} می‌نامند. همچنین صفحه‌ای که در P عمود بر n_i باشد معروف به ***صفحه تنش اصلی*** است. از شکل ۳ - ۹ ب مشاهده می‌شود بخاطر عمودی بودن $\mathbf{t}^{(\hat{n})}$ بر صفحه‌های اصلی ، تنش‌های برشی در این صفحه‌ها وجود ندارند.

تعیین مقادیر تنش اصلی و جهت‌های تنش اصلی دقیقاً همان روال توسعه یافته در قسمت ۲ - ۶ برای تعیین مقادیر اصلی و جهت‌های اصلی هر تانسور متقارن مرتبه دوم را دنبال می‌کند. در تشکیل معادلات مسئله مقدار ویژه برای تانسور تنش از تساوی $t_i^{(\hat{n})} = \sigma_{ji}n_j$ و جایگذاری مناسبی از دلتای کرانکر استفاده می‌کنیم تا معادله ۳ - ۶ - ۱ مجدداً به‌صورت زیر درآید.

$$(\sigma_{ji} - \delta_{ij}\sigma)\, n_j = ۰ \qquad (۳ - ۶ - ۲)$$



شکل ۳ - ۹

بردار کشش در نقطه P برای (الف) یک جهت اختیاری (ب) یک جهت اصلی

یا در شکل گسترده ، با استفاده از $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ داریم

$$(\sigma_{۱۱} - \sigma)\, n_۱ + \sigma_{۱۲}\, n_۲ + \sigma_{۱۳}\, n_۳ = ۰ \qquad (۳ - ۶ - ۳ \text{ الف})$$

$$\sigma_{۱۲}\, n_۱ + (\sigma_{۲۲} - \sigma)\, n_۲ + \sigma_{۲۳}\, n_۳ = ۰ \qquad (۳ - ۶ - ۳ \text{ ب})$$

$$\sigma_{۱۳}\, n_۱ + \sigma_{۲۳}\, n_۲ + (\sigma_{۳۳} - \sigma)\, n_۳ = ۰ \qquad (۳ - ۶ - ۳ \text{ پ})$$

در سه معادله همگن خطی بیان شده توسط معادله ۳ - ۶ - ۳ ، مولفه‌های تانسور σ_{ij} معلوم فرض شده‌اند، مجهول‌ها سه مولفه نرمال اصلی n_i و مقدار تنش اصلی σ مرتبط با آن می‌باشد. برای تکمیل کردن دستگاه معادلات برای این چهار مجهول ، شرط نرمال کردن را روی کسینوس‌های جهت بکار می‌بریم.

$$n_i n_i = ۱ \qquad (۳ - ۶ - ۴)$$

برای حل‌های غیرصفر معادله ۳ - ۶ - ۲ (حل $n_j = ۰$ با معادله ۳ - ۶ - ۳ سازگار نیست) دترمینان ضرایب روی n_j باید صفر شود

$$| \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma | = ۰ \qquad (۵-۶-۳)$$

که با بسط نتایج معادله درجه سوم برحسب σ حاصل می‌شود (که **معادله مشخصه** تانسور تنش نام دارد)

$$\sigma^{۳} - \mathbf{I}_{\sigma}\sigma^{۲} + \mathbf{II}_{\sigma}\sigma - \mathbf{III}_{\sigma} = ۰ \qquad (۶-۶-۳)$$

که ریشه‌هایش $\sigma_{(۱)}$, $\sigma_{(۲)}$, $\sigma_{(۳)}$ مقادیر تنش اصلی σ_{ij} هستند. ضرایب $\mathbf{I}_{\sigma}$, $\mathbf{II}_{\sigma}$ و $\mathbf{III}_{\sigma}$ به‌ترتیب معروف به ***پایاهای اول، دوم و سوم*** σ_{ij} می‌باشند که برحسب مولفه‌هایشان به‌صورت زیر بیان می‌شوند.

$$\mathbf{I}_{\sigma} = \sigma_{ii} = tr\boldsymbol{\sigma} \qquad (۷-۶-۳ \text{ الف})$$

$$\mathbf{II}_{\sigma} = \frac{۱}{۲}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji}) = \frac{۱}{۲}\left[(tr\,\boldsymbol{\sigma})^{۲} - tr\,(\boldsymbol{\sigma}^{۲}) \right] \qquad (۷-۶-۳ \text{ ب})$$

$$\mathbf{III}_{\sigma} = \varepsilon_{ijk}\sigma_{۱i}\sigma_{۲j}\sigma_{۳k} = det\,\boldsymbol{\sigma} \qquad (۷-۶-۳ \text{ پ})$$

چون تانسور تنش σ_{ij} یک تانسور متقارن دارای مولفه‌های حقیقی می‌باشد، سه پایاهای تنش حقیقی هستند، به طریق مشابه تنش‌های اصلی یعنی ریشه‌های معادله ۳ - ۶ - ۶ نیز حقیقی می‌باشند. برای نشان دادن این مطلب ، نظریه معادلات را در نظر می‌گیریم که بیان می‌کند برای یک معادله درجه سوم با ضرایب حقیقی حداقل یک ریشه حقیقی وجود دارد، $\sigma_{(۱)}$ را به‌عنوان یک ریشه و مرتبط با آن جهت اصلی را با $n_i^{(۱)}$ مشخص می‌کنیم. یک مجموعه محورهای قائم دومی مثل $px'_۱x'_۲x'_۳$ معرفی کنید که $x'_۱$ در جهت $n_i^{(۱)}$ باشد. در این دستگاه تنش‌های برشی $\sigma'_{۱۲} = \sigma'_{۱۳} = ۰$ به‌گونه‌ای که معادله مشخصه σ'_{ij} نسبت به این محورها از بسط دترمینان زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{vmatrix} \sigma_{(۱)} - \sigma & ۰ & ۰ \\ ۰ & \sigma'_{۲۲} - \sigma & \sigma'_{۲۳} \\ ۰ & \sigma'_{۲۳} & \sigma'_{۳۳} - \sigma \end{vmatrix} = ۰ \qquad (۸-۶-۳)$$

یا

$$[\,\sigma_{(۱)} - \sigma\,]\,[\,(\sigma^{۲}) - (\sigma'_{۲۲} + \sigma'_{۳۳})\,\sigma + \sigma'_{۲۲}\,\sigma'_{۳۳} - (\sigma'_{۲۳})^{۲}\,] = ۰ \qquad (۹-۶-۳)$$

از این معادله ، دو تنش اصلی باقیمانده یعنی $\sigma_{(۲)}$ و $\sigma_{(۳)}$ ریشه‌های معادله درجه دوم داخل کروشه هستند. اما عبارت زیر رادیکال این معادله درجه دوم بطور واضح مثبت است که نشان می‌دهد $\sigma_{(۱)}$ و $\sigma_{(۲)}$ حقیقی می‌باشند.

$$(\sigma'_{۲۲} + \sigma'_{۳۳})^۲ - ۴ [\sigma'_{۲۲}\sigma'_{۳۳} - (\sigma'_{۲۳})^۲] = (\sigma'_{۲۲} - \sigma'_{۳۳})^۲ + ۴(\sigma'_{۲۳})^۲$$

اگر مقادیر تنش اصلی $\sigma_{(۱)}$ ، $\sigma_{(۲)}$ و $\sigma_{(۳)}$ متمایز از هم باشند، جهت‌های اصلی مرتبط با این تنش‌ها دوبدو بر هم عمودند. برای مشاهده اینکه چرا این واقعیت دارد، اگر $n_i^{(۱)}$ و $n_i^{(۲)}$ بردارهای جهت اصلی (بردارهای ویژه) نرمال شده به‌ترتیب متعلق به $\sigma_{(۱)}$ و $\sigma_{(۲)}$ باشند، آنگاه از معادله ۳ - ۶ - ۲ $\sigma_{ij}n_j^{(۱)} = \sigma_{(۱)}n_i^{(۱)}$ و $\sigma_{ij}n_j^{(۲)} = \sigma_{(۲)}n_i^{(۲)}$ که با تشکیل ضرب داخلی یعنی به نوبت در $n_i^{(۲)}$ و $n_i^{(۱)}$ ضرب شوند خواهیم داشت.

$$\sigma_{ij}n_j^{(۱)}n_i^{(۲)} = \sigma_{(۱)}n_i^{(۱)}n_i^{(۲)} \qquad (۳ - ۶ - ۱۰ \text{ الف})$$

$$\sigma_{ij}n_j^{(۲)}n_i^{(۱)} = \sigma_{(۲)}n_i^{(۲)}n_i^{(۱)} \qquad (۳ - ۶ - ۱۰ \text{ ب})$$

مزید بر آن، چون تانسور تنش متقارن است و از طرفی i و j شاخص‌های کاذب هستند در نتیجه

$$\sigma_{ij}n_j^{(۱)}n_i^{(۲)} = \sigma_{ji}n_j^{(۱)}n_i^{(۲)} = \sigma_{ij}n_i^{(۱)}n_j^{(۲)}$$

که با تفریق معادله ۳ - ۶ - ۱۰ ب از معادله ۳ - ۶ - ۱۰ الف ، سمت چپ معادله تفاضل صفر است یعنی

$$[\sigma_{(۱)} - \sigma_{(۲)}] n_i^{(۱)}n_i^{(۲)} = ۰ \qquad (۳ - ۶ - ۱۱)$$

اما چون فرض کرده‌ایم که تنش‌های اصلی متمایز هستند، یا $\sigma_{(۱)} \neq \sigma_{(۲)}$ نتیجه می‌دهد.

$$n_i^{(۱)}n_i^{(۲)} = ۰ \qquad (۳ - ۶ - ۱۲)$$

که متعامد بودن بین $n_i^{(۱)}$ و $n_i^{(۲)}$ را بیان می‌کند. با بحثی مشابه می‌توان نشان داد که $n_i^{(۳)}$ بر هر دوی $n_i^{(۱)}$ و $n_i^{(۲)}$ نیز عمود است.

اگر دو مقدار تنش اصلی بطور اتفاقی با هم مساوی بشوند، یعنی $\sigma_{(۱)} = \sigma_{(۲)}$ باشد، جهت اصلی $n_i^{(۳)}$ مرتبط با $\sigma_{(۳)}$ هنوز منحصر بفرد است و بخاطر خطی بودن معادله ۳ - ۶ - ۲ ، هر جهتی در صفحه عمود بر $n_i^{(۳)}$ می‌تواند به‌عنوان یک جهت اصلی منظور گردد. بر این اساس ، می‌توان $n_i^{(۳)}$ را منحصر بفرد تعیین کرد و آنگاه $n_i^{(۱)}$ و $n_i^{(۲)}$ را *انتخاب* نمود بگونه که دستگاه محورهای اصلی راستگرد ایجاد گردد. اگر اتفاق بیفتد که تمامی سه تنش اصلی مساوی با هم بشوند، هر جهتی را می‌توان به‌عنوان یک جهت اصلی اختیار کرد. و در نتیجه در این حالت هر مجموعه‌ای از محورهای قائم راستگرد در نقطه P یک مجموعه محورهای اصلی را تشکیل می‌دهند.

در وضعیت خاص، محورهای مختصات را روی جهت‌های تنش اصلی در نظر مشخص $x_۱^*$ می‌گیریم و مطابق شکل ۳ - ۱۰ الف آن را با وارد $px_۱^*x_۲^*x_۳^*$ می‌کنیم. پس، برای مثال $n_i^{(q)}{}_{(۱)}$ بردار σ روی صفحه عمود بر $x_۱^*$ عمل می‌کند و مثبت (کشش) است اگر در جهت مثبت شود و منفی خواهد بود (فشاری) اگر در جهت منفی باشد، $x_۱^*$ اعمال شود. همچنین اگر $a_{qj} \equiv$ نرمال یکّه مرتبط با تنش اصلی $\sigma_{(q)}$ $(q = ۱ , ۲ , ۳)$ ماتریس انتقال ارتباط دهنده محورهای تنش اصلی به محورهای اختیاری $px_۱x_۲x_۳$ دارای عناصری تعریف شده توسط $n_j^{(q)}$ می‌باشند، همانگونه که جدول ۳ - ۱۰ ب نشان می‌دهد. بر این اساس معادله انتقال بیان کننده مولفه‌های تنش اصلی برحسب تنش‌های اختیاری در نقطه P توسط معادله ۲ - ۶ - ۱۲ به شکل زیر ارائه می‌شوند.

$$\sigma^*_{ij} = a_{iq}a_{jm}\sigma_{qm} \qquad \text{یا} \qquad \boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{A}\,\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{A}^T \qquad (۱۳ - ۶ - ۳)$$

بعلاوه ، توجه شود که معادله ۳ - ۶ - ۲ توسط $n_i^{(q)}$ و $\sigma_{(q)}$ تامین می‌شود بطوری که

$$\sigma_{ij}n_j^{(q)} = \sigma_{(q)}n_i^{(q)}$$

برای $(q = ۱ , ۲ , ۳)$ که با معرفی تساوی $a_{qi} \equiv n_i^{(q)}$ خواهد شد $\sigma_{ij}a_{qj} = \sigma_{(q)}a_{qi}$. اکنون هر دو طرف این معادله را در a_{mi} ضرب و از خواص تقارن تانسور تنش استفاده می‌کنیم، خواهیم داشت.

$$\sigma_{ji}a_{qj}a_{mi} = \sigma_{(q)}a_{qi}a_{mi}$$

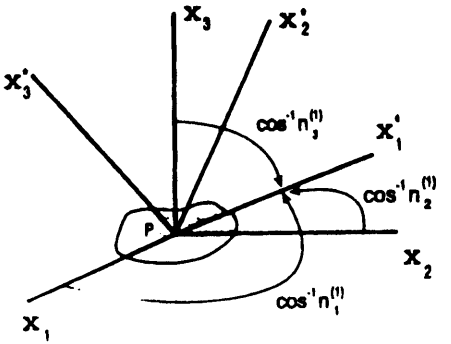
سمت چپ این رابطه بسادگی σ^*_{qm} می‌باشد، از معادله ۳ - ۶ - ۱۳ توسط متعامد بودن

$a_{qi}\ a_{mi} = \delta_{qm}$ که در سمت راست جایگزین می‌شود، نتیجه نهایی عبارت است از

$$\sigma^*_{qm} = \delta_{qm}\ \sigma_{(q)} \qquad (۱۴-۶-۳)$$

که آن را وقتی به محورهای اصلی ارجاع داده شده باشد نمایش می‌دهد، تانسور تنش یک تانسور قطبی با مقادیر تنش اصلی روی قطر اصلی می‌باشد. در شکل ماتریسی

$$[\sigma^*_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{(۱)} & ۰ & ۰ \\ ۰ & \sigma_{(۲)} & ۰ \\ ۰ & ۰ & \sigma_{(۳)} \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad [\sigma^*_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_I & ۰ & ۰ \\ ۰ & \sigma_{II} & ۰ \\ ۰ & ۰ & \sigma_{III} \end{bmatrix} \qquad (۱۵-۶-۳)$$



(الف)

	x_1	x_2	x_3
x_1^*	$a_{11}=n_1^{(1)}$	$a_{12}=n_2^{(1)}$	$a_{13}=n_3^{(1)}$
x_2^*	$a_{21}=n_1^{(2)}$	$a_{22}=n_2^{(2)}$	$a_{23}=n_3^{(2)}$
x_3^*	$a_{31}=n_1^{(3)}$	$a_{32}=n_2^{(3)}$	$a_{33}=n_3^{(3)}$

(ب)

شکل ۳ - ۱۰

(الف) محورهای اصلی $x_1^* x_2^* x_3^*$ در نقطه P، (ب) جدول کسینوس‌های جهت برای محورهای اصلی.

که در معادله دوم، نمادگذاری نشان می‌دهد که تنش‌های اصلی به‌صورت $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$ مرتب شده‌اند که تنش‌های مثبت، بزرگتر از تنش‌های منفی صرف‌نظر از مقادیر عددیشان می‌باشد. برحسب تنش‌های اصلی، پایاهای تنش را می‌توان بدین صورت نوشت.

$$\mathbf{I}_\sigma = \sigma_{(1)} + \sigma_{(2)} + \sigma_{(3)} = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} \qquad (۳-۶-۱۶ \text{ الف})$$

$$\mathbf{II}_\sigma = \sigma_{(1)}\sigma_{(2)} + \sigma_{(2)}\sigma_{(3)} + \sigma_{(3)}\sigma_{(1)} = \sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_{III}\sigma_I \qquad (۳-۶-۱۶ \text{ ب})$$

$$\mathbf{III}_\sigma = \sigma_{(1)}\sigma_{(2)}\sigma_{(3)} = \sigma_I\sigma_{II}\sigma_{III} \qquad (۳-۶-۱۶ \text{ پ})$$

مثال ۳ ـ ۶ ـ ۱ مولفه‌های تانسور تنش در P برحسب MPa نسبت به محورهای $px_1x_2x_3$ توسط ماتریس زیر ارائه شده‌اند.

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} ۵۷ & ۰ & ۲۴ \\ ۰ & ۵۰ & ۰ \\ ۲۴ & ۰ & ۴۳ \end{bmatrix}$$

تنش‌های اصلی و جهت‌های تنش اصلی در P را تعیین کنید.

حل برای تانسور تنش داده شده، معادله ۳ - ۶ - ۵ دترمینانی به شکل زیر دارد.

$$\begin{vmatrix} ۵۷-\sigma & ۰ & ۲۴ \\ ۰ & ۵۰-\sigma & ۰ \\ ۲۴ & ۰ & ۴۳-\sigma \end{vmatrix} = ۰$$

که با بسط کوفاکتور حول اولین سطر منجر به معادله

$$(۵۷-\sigma)(۵۰-\sigma)(۴۳-\sigma) - (۲۴)^۲(۵۰-\sigma) = ۰$$

یا بآسانی در شکل فاکتور گرفته شده عبارت است از

$$(۵۰-\sigma)(\sigma-۲۵)(\sigma-۷۵) = ۰$$

از این رو ، مقادیر تنش اصلی $\sigma_{(1)} = ۲۵$, $\sigma_{(2)} = ۵۰$ و $\sigma_{(3)} = ۷۵$ می‌باشند. توجه شود که در برقرار نگه داشتن معادلات ۳ - ۶ - ۷ الف و ۳ - ۶ - ۱۶ الف پایای اول تنش تایید می‌شود،

$$\mathbf{I}_\sigma = ۵۷ + ۵۰ + ۴۳ = ۲۵ + ۵۰ + ۷۵ = ۱۵۰$$

برای تعیین جهت‌های اصلی ابتدا $\sigma_{(1)} = ۲۵$ در نظر می‌گیریم که به‌ازای آن معادله ۳ - ۶ - ۳ سه معادله برای کسینوس‌های جهت مربوط به جهت اصلی $\sigma_{(1)}$ دارد، مشخصاً

$$۳۲\, n_i^{(1)} + ۲۴\, n_۳^{(1)} = ۰$$
$$۲۵\, n_۲^{(1)} = ۰$$

همراه با

$$۲۴\, n_i^{(1)} + ۱۸\, n_۳^{(1)} = ۰$$

واضح است که از معادله دوم $n_۲^{(1)} = ۰$ و از دو معادله دیگر $n_۳^{(1)} = -\frac{۴}{۳} n_۱^{(1)}$ می‌باشد از شرط نرمال کردن یعنی $n_i n_i = ۱$، مشاهده‌می‌شود که $(n_۱^{(1)})^۲ = \frac{۹}{۲۵}$ در نتیجه $n_۱^{(1)} = \pm \frac{۳}{۵}$ و $n_۳^{(1)} = \pm \frac{۴}{۵}$ می‌باشد.

سپس برای $\sigma_{(2)} = ۵۰$ معادله ۳ - ۶ - ۳ نتیجه می‌دهد.

$$۷\, n_۱^{(2)} + ۲۴\, n_۳^{(2)} = ۰$$
$$۲۴\, n_۱^{(2)} - ۷\, n_۳^{(2)} = ۰$$

فقط وقتی تامین می‌شوند که $n_۱^{(2)} = n_۳^{(2)} = ۰$ باشد. آنگاه از شرط $n_i n_i = ۱$ داریم $n_۲^{(2)} = \pm ۱$.

بالاخره، برای $\sigma_{(3)} = ۷۵$ از معادله ۳ - ۶ - ۳ داریم

$$-۱۸\, n_۱^{(3)} + ۲۴\, n_۳^{(3)} = ۰$$
$$-۲۵\, n_۲^{(3)} = ۰$$

و همچنین

$$۲۴\, n_۱^{(3)} - ۳۲\, n_۳^{(3)} = ۰$$

در اینجا از معادله دوم $n_2^{(3)} = 0$ و از دو معادله دیگر $n_3^{(3)} = 3\, n_1^{(3)}$ ۴ نتیجه می‌شود که از شرط $n_i n_i = 1$ خواهیم داشت $n_1^{(3)} = \pm \frac{4}{5}$ و $n_3^{(3)} = \pm \frac{3}{5}$.

از این مقادیر $n_i^{(q)}$ اکنون ماتریس انتقال $[\ a_{ij}\ ]$ را بر طبق جدول شکل ۳ - ۱۰ ب با بخاطر سپردن اینکه برای اطمینان از راستگرد بودن دستگاه محورهای اصلی باید $\hat{\mathbf{n}}^{(3)} = \hat{\mathbf{n}}^{(1)} \times \hat{\mathbf{n}}^{(2)}$ باشد تنظیم می‌کنیم. پس ماتریس انتقال شکل کلی زیر را دارد.

$$[\ a_{ij}\ ] = \begin{bmatrix} \pm\frac{3}{5} & 0 & \pm\frac{4}{5} \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ \pm\frac{4}{5} & 0 & \pm\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

بنابراین، از معادله ۳ - ۶ - ۱۳ وقتی علامت‌های بالایی در ماتریس فوق بکار برده شود.

$$[\ \sigma_{ij}^*\ ] = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 57 & 0 & 24 \\ 0 & 50 & 0 \\ 24 & 0 & 43 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 75 \end{bmatrix}$$

۳ - ۷ مقادیر تنش حداقل و حداکثر

بردار تنش $t_i^{(\hat{\mathbf{n}})}$ روی یک صفحه اختیاری در P ممکن است به یک مولفه نرمال بر صفحه با اندازه σ_N همراه با یک مولفه برشی با اندازه σ_S که در داخل صفحه عمل می‌کند مطابق شکل ۳ - ۱۱ تجزیه گردد. (در اینجا σ_N و σ_S بردار نیستند، اما اندازه‌های عددی مولفه‌ها می‌باشند، زیرنوشت‌های N و S به‌عنوان نمادهای مولفه‌ای اختیار شده‌اند). بطور واضح ، از شکل ۳ - ۱۱ مشاهده می‌شود که σ_N توسط ضرب عددی بدست می‌آید، $\sigma_N = t_i^{(\hat{\mathbf{n}})}\, n_i$ و چون $t_i^{(\hat{\mathbf{n}})} = \sigma_{ij}\, n_j$ نتیجه می‌شود که

$$\sigma_N = \sigma_{ij} n_j n_i \quad \text{یا} \quad \sigma_N = \mathbf{t}^{(\hat{\mathbf{n}})} \cdot \hat{\mathbf{n}} \qquad (۳ - ۷ - ۱)$$

همچنین از هندسه جداسازی داریم

$$\sigma^2_S = t_i^{(\hat{n})}\, t_i^{(\hat{n})} - \sigma^2_N$$

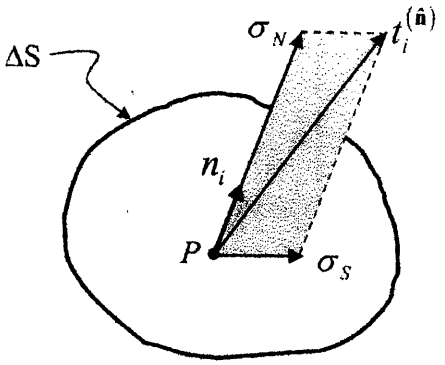
$$\sigma^2_S = \mathbf{t}^{(\hat{n})} \cdot \mathbf{t}^{(\hat{n})} - \sigma^2_N \qquad (۳-۷-۲)$$

در جستجوی مقادیر حداقل و حداکثر (معروف به اکسترمال) مولفه‌های فوق ، ابتدا σ_N را بررسی می‌کنیم. چون فرض می‌شود نرمال n_i تمامی موقعیت‌های ممکن در P را داراست، مقادیر σ_N توسط معادله ۳ - ۷ - ۱ و تحت شرط $n_i n_i = 1$ بیان می‌شود. بر این اساس، از مزیت روش ضریب لاگرانژ برای بدست آوردن مقادیر اکسترمال σ_N استفاده می‌کنیم. بدین منظور تابع $f(n_i) = \sigma_{ij} n_i n_j - \sigma\,(n_i n_i - 1)$ را تشکیل می‌دهیم که در آن عدد σ معروف به **ضریب لاگرانژ** می‌باشد. این روش مستلزم مشتقات $f(n_i)$ نسبت به n_k است تا به صفر برسد، با توجه به اینکه $\partial n_i / \partial n_k = \delta_{ik}$ خواهیم داشت.

$$\frac{\partial f}{\partial n_k} = \sigma_{ij}\,(\delta_{ik}\, n_j + \delta_{jk}\, n_i) - \sigma\,(2\, n_i\, \delta_{ik}) = 0$$

اما چون $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ و $\delta_{kj} n_j = n_k$ می‌باشد. پس این معادله به‌صورت زیر کاهش می‌یابد.

$$(\sigma_{kj} - \sigma\delta_{kj})\, n_j = 0 \qquad (۳-۷-۳)$$



شکل ۳ - ۱۱

مولفه‌های نرمال و برشی بردار کشش در P

که با معادله ۳ - ۶ - ۲ یعنی فرمول مقدار ویژه برای تنش‌های اصلی یکسان می‌باشد. بنابراین نتیجه می‌گیریم که ضریب لاگرانژ σ نقش یک تنش اصلی ایفا می‌کند و علاوه بر آن تنش‌های اصلی هر دو مقدار تنش نرمال حداقل و حداکثر را شامل می‌باشد.

با عنایت به مقادیر حداقل و حداکثر مولفه برشی σ_S، بیان تنش توسط محورهای اصلی $px_1^* x_2^* x_3^*$ مطابق شکل ۳ - ۱۲ مفید است. تنش‌های اصلی در دنباله‌ای به‌صورت $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$ مرتب می‌شوند که در نتیجه $t_i^{(\hat{n})}$ در شکل برداری عبارت است از

$$\mathbf{t}^{(\hat{n})} = \boldsymbol{\sigma}.\ \hat{\mathbf{n}} = \sigma_I n_1 \hat{\mathbf{e}}_1^* + \sigma_{II} n_2 \hat{\mathbf{e}}_2^* + \sigma_{III} n_3 \hat{\mathbf{e}}_3^* \qquad (۴ - ۷ - ۳)$$

و بطور مشابه $\sigma_N = \mathbf{t}^{(\hat{n})} .\ \hat{\mathbf{n}}$ برابر است با

$$\sigma_N = \sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2 \qquad (۵ - ۷ - ۳)$$

آنگاه با جایگزین کردن معادلات ۳ - ۷ - ۴ و ۳ - ۷ - ۵ در معادله ۳ - ۷ - ۲ خواهیم داشت.

$$\sigma_S^2 = \sigma_I^2 n_1^2 + \sigma_{II}^2 n_2^2 + \sigma_{III}^2 n_3^2 - (\sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2)^2 \qquad (۶ - ۷ - ۳)$$

که σ_S^2 را برحسب کسینوس‌های جهت n_i بیان می‌کند، امّا $n_i n_i = 1$ پس $n_3^2 = 1 - n_1^2 - n_2^2$ و می‌توان n_3 را از معادله ۳ - ۷ - ۶ حذف نمود، که آنگاه فقط تابعی از n_1 و n_2 خواهد شد.

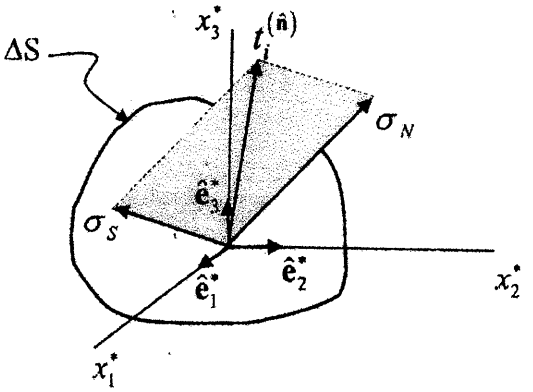
$$\sigma_S^2 = (\sigma_I^2 - \sigma_{III}^2)\, n_1^2 + (\sigma_{II}^2 - \sigma_{III}^2)\, n_2^2 + \sigma_{III}^2 - [(\sigma_I - \sigma_{III})\, n_1^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})\, n_2^2 + \sigma_{III}]^2 \qquad (۷ - ۷ - ۳)$$

برای بدست آوردن *ایستایی*، یعنی مقادیر *اکسترمال* σ_S^2، باید مشتقات طرف راست این معادله نسبت به هر دوی n_1 و n_2 مساوی صفر قرار گیرد و همزمان حل شود. پس از چند عملیات جبری بدست می‌آوریم.

$$\frac{\partial (\sigma_S^2)}{\partial n_1} = n_1 (\sigma_I - \sigma_{III}) \{ \sigma_I - \sigma_{III} - 2 [(\sigma_I - \sigma_{III})\, n_1^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})\, n_2^2] \} = 0 \qquad (۸ - ۷ - ۳ \text{ الف})$$

$$\frac{\partial (\sigma_S^2)}{\partial n_2} = n_2 (\sigma_I - \sigma_{III}) \{ \sigma_I - \sigma_{III} - 2 [(\sigma_I - \sigma_{III}) n_1^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III}) n_2^2] \} = 0$$

(۳ - ۷ - ۸ ب)



شکل ۳ - ۱۲

مولفه‌های نرمال و برشی بردار کشش در P نسبت به محورهای اصلی

یک حل واضح از معادله ۳ - ۷ - ۸ عبارت است از $n_1 = n_2 = 0$، که در نتیجه $n_3 = \pm 1$ خواهد شد و مقدار σ_S^2 مرتبط با آن از معادله ۳ - ۷ - ۷ مشاهده می‌شود که صفر است. این یک نتیجه مورد انتظار است چون $n_3 = \pm 1$ یک صفحه اصلی را مشخص می‌کند که روی آن برش صفر است. یک محاسبه مشابه که با n_1 و n_3 یا با n_2 و n_3 به‌عنوان متغیرها اجرا شود، منجر به دو صفحه اصلی دیگر خواهد شد که به‌عنوان صفحه‌های تنش برشی حداقل (صفر) شناخته می‌شود. بآسانی بررسی می‌شود که حل دوم برای معادلات ۳ - ۷ - ۸ با اختیار کردن $n_1 = 0$ و حل برای بدست آوردن n_2 حاصل می‌گردد. نتیجه می‌دهد $n_2 = \pm 1/\sqrt{2}$ و $n_3 = \pm 1/\sqrt{2}$ از متعامد بودن. برای این حل، معادله ۳ - ۷ - ۷ نتایج زیر را خواهد داد.

$$\sigma_S^2 = \frac{1}{4} (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 \quad \text{یا} \quad \sigma_S = \pm \frac{1}{2} (\sigma_{II} - \sigma_{III}) \qquad (۳ - ۷ - ۹)$$

مانند قبل، اگر به نوبت معادلات دارای n_1 و n_3 یا n_2 و n_3 را به‌عنوان جفت متغیر در نظر بگیریم، و به‌ترتیب فرض کنیم $n_2 = 0$ و $n_3 = 0$ می‌توان حل کامل را به شکل جدول زیر

بیان نمود.

$$n_1 = 0 \ , \ n_2 = \pm 1/\sqrt{2} \ , \ n_3 = \pm 1/\sqrt{2} \ , \ \sigma_S = \left| \tfrac{1}{2}(\sigma_{II} - \sigma_{III}) \right|$$

(۳ - ۷ - ۱۰ الف)

$$n_1 = \pm 1/\sqrt{2} \ , \ n_2 = 0 \ , \ n_3 = \pm 1/\sqrt{2} \ , \ \sigma_S = \left| \tfrac{1}{2}(\sigma_{III} - \sigma_I) \right|$$

(۳ - ۷ - ۱۰ ب)

$$n_1 = \pm 1/\sqrt{2} \ , \ n_2 = \pm 1/\sqrt{2} \ , \ n_3 = 0 \ , \ \sigma_S = \left| \tfrac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II}) \right|$$

(۳ - ۷ - ۱۰ پ)

که در آن خطوط عمودی از معادلات فوق برای σ_s مقادیر مطلق عبارت را بیان می‌کند. چون $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$ واضح است که بزرگترین مقدار تنش برشی عبارت است از

$$\sigma_{S(max)} = \left| \tfrac{1}{2}(\sigma_{III} - \sigma_I) \right| \qquad (۳ - ۷ - ۱۱)$$

می‌توان نشان داد که برای تنش‌های اصلی متمایز ، فقط دو حل ارائه شده در این قسمت ، معادله ۳ - ۷ - ۸ را تامین می‌کند.

۳ - ۸ دایره‌های مور برای تنش

بیان تنش در P نسبت به محورهای اصلی (شکل ۳ - ۱۲) را مجدداً در نظر بگیرید و تنش‌های اصلی را بر طبق $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$ مرتب کنید. مانند قبل ، می‌توان σ_N و σ_S را روی هر صفحه‌ای در P برحسب مولفه‌های نرمال $\hat{n}$ بر آن صفحه توسط معادلات زیر بیان کرد.

$$\sigma_N = \sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2 \qquad (۳ - ۸ - ۱ \text{ الف})$$

$$\sigma^2_N + \sigma^2_S = \sigma^2_I n_1^2 + \sigma^2_{II} n_2^2 + \sigma^2_{III} n_3^2 \qquad (۳ - ۸ - ۱ \text{ ب})$$

که همراه با شرط زیر می‌باشد.

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \qquad (۳ - ۸ - ۱ \text{ پ})$$

که سه معادله برای سه کسینوس‌های جهت یعنی n_1 , n_2 و n_3 فراهم می‌کند.

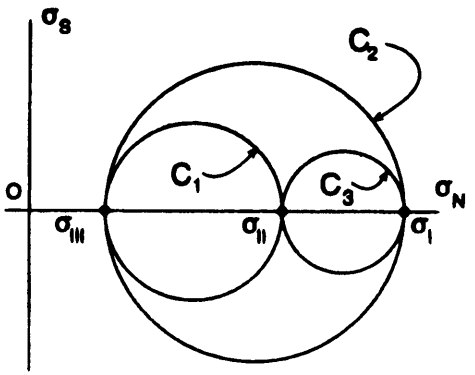
از حل این معادلات بدست می‌آوریم

$$n_1^2 = \frac{(\sigma_N - \sigma_{II})(\sigma_N - \sigma_{III}) + \sigma_S^2}{(\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_I - \sigma_{III})} \qquad (۳ - ۸ - ۲ \text{ الف})$$

$$n_2^2 = \frac{(\sigma_N - \sigma_{III})(\sigma_N - \sigma_I) + \sigma_S^2}{(\sigma_{II} - \sigma_{III})(\sigma_{II} - \sigma_I)} \qquad (۳ - ۸ - ۲ \text{ ب})$$

$$n_3^2 = \frac{(\sigma_N - \sigma_I)(\sigma_N - \sigma_{II}) + \sigma_S^2}{(\sigma_{III} - \sigma_I)(\sigma_{III} - \sigma_{II})} \qquad (۳ - ۸ - ۲ \text{ پ})$$

در این معادلات، σ_I , σ_{II} و σ_{III} معلوم هستند، σ_N و σ_S توابعی از کسینوس‌های جهت یعنی n_i می‌باشد. در اینجا قصد ما این است که معادلات فوق را بطور ترسیمی با ارائه جفت‌های مزدوج مقادیر σ_N و σ_S تفسیر کنیم بطوری که معادله ۳ - ۸ - ۲ را به‌عنوان یک نقطه از صفحه تنش که دارای محور افقی σ_N و محور عمودی σ_S می‌باشد تامین کند. (رجوع به شکل ۳ - ۱۳).



شکل ۳ - ۱۳

دایره‌های شاخص مور برای تنش

برای توسعه این تفسیر بیان تنش سه بعدی برحسب σ_N و σ_S، ابتدا توجه داریم که مخرج معادله ۳ - ۸ - ۲ الف مثبت است چون هر دوی $\sigma_I - \sigma_{II} > 0$ و $\sigma_I - \sigma_{III} > 0$ و همچنین $n_1^2 > 0$، پس در نتیجه

$$(\sigma_N - \sigma_{II})(\sigma_N - \sigma_{III}) + \sigma_S^2 \geq 0 \qquad (۳ - ۸ - ۳)$$

برای حالتی که علامت تساوی برقرار است، این معادله را می‌توان پس از چند عملیات جبری ساده به‌صورت زیر نوشت.

$$[\sigma_N - \tfrac{1}{2}(\sigma_{II} + \sigma_{III})]^2 + \sigma_S^2 = [\tfrac{1}{2}(\sigma_{II} - \sigma_{III})]^2 \qquad (۳-۸-۴)$$

که معادله یک دایره در صفحه σ_N , σ_S می‌باشد، مرکزش در نقطه $\frac{1}{2}(\sigma_{II} + \sigma_{III})$ روی محور σ_N و دارای شعاعی به اندازه $\frac{1}{2}(\sigma_{II} - \sigma_{III})$ است. این دایره را C_1 می‌نامیم و در شکل ۳ - ۱۳ مشخص می‌کنیم. برای حالتی که علامت نامساوی برای معادله ۳ - ۸ - ۳ برقرار است، مشاهده می‌شود که جفت‌های مزدوج مقادیر σ_N و σ_S که این رابطه را تامین می‌کنند منجر به نقاط تنش با مختصات **خارج** از دایره C_1 می‌شود، پس ترکیب σ_N و σ_S که در معادله ۳ - ۸ - ۲ الف صدق می‌کند روی یا خارج از دایره C_1 در شکل ۳ - ۱۳ قرار می‌گیرند.

با امتحان کردن معادله ۳ - ۸ - ۲ ب ، توجه داریم که مخرج منفی است چون $\sigma_{II} - \sigma_{III} > 0$ و $\sigma_{II} - \sigma_I < 0$. کسینوس‌های جهت اعداد حقیقی هستند بطوری که $n_2^2 \geq 0$ داریم.

$$(\sigma_N - \sigma_{III})(\sigma_N - \sigma_I) + \sigma_S^2 \leq 0 \qquad (۳-۸-۵)$$

برای حالتی که علامت تساوی دایره را در صفحه σ_N , σ_S تعریف می‌کند خواهیم داشت.

$$[\sigma_N - \tfrac{1}{2}(\sigma_I + \sigma_{III})]^2 + \sigma_S^2 = [\tfrac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{III})]^2 \qquad (۳-۸-۶)$$

این دایره را در شکل ۳ - ۱۳ ، C_2 می‌نامیم و نقاط تنش که نامساوی معادله ۳ - ۸ - ۵ را تامین می‌کند در داخل آن قرار می‌گیرد. با دنبال کردن همان روال عمومی، معادله ۳ - ۸ - ۲ پ را به‌گونه‌ای مرتب می‌کنیم تا معادله دایره سوم C_3 در شکل ۳ - ۳ از آن استخراج شود.

$$[\sigma_N - \tfrac{1}{2}(\sigma_I + \sigma_{II})]^2 + \sigma_S^2 = [\tfrac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II})]^2 \qquad (۳-۸-۷)$$

نقاط تنش قابل پذیرش در صفحه σ_N , σ_S در روی یا خارج این دایره قرار می‌گیرند. سه دایره تعریف شده در فوق که در شکل ۳ - ۱۳ نشان داده شده‌اند معروف به ***دایره‌های مور برای تنش*** هستند. تمام جفت‌های ممکن مقادیر σ_N , σ_S در P که معادله ۳ - ۸ - ۲ را تامین می‌کنند

روی این دایره‌ها یا در داخل مساحت‌های سایه‌دار محصور توسط آنان قرار دارند. عملاً ، در تبعیت از شکل ۳ - ۱۱ (که مبنای فیزیکی برای شکل ۳ - ۱۳ است) ، مشاهده می‌شود که علامت مولفه تنش برشی اختیاری است، بنابراین فقط نیمه بالایی نمودار دایره‌ای نیاز به ترسیم دارد. یک تمرینی بعداً در این زمینه خواهیم داشت. بعلاوه ، از نمودار دایره‌های مور واضح است که مقدار تنش برشی حداکثر در P همان شعاع دایره $C_۲$ است که نتیجه ارائه شده در معادله ۳ - ۷ - ۱۱ را تائید می‌کند.

برای اینکه یک نقطه تنش شاخص دارای مختصات σ_N , σ_S را در صفحه تنش شکل ۳ - ۱۳ را با موقعیت مساحت جزء ΔS (که در شکل ۳ - ۱۲ با n_i مشخص شده است) که مولفه‌های تنش σ_N , σ_S روی آن اعمال شده است ارتباط دهیم، یک قسمت کروی کوچک از جسم محیط پیوسته متمرکز در P را در نظر می‌گیریم. بطوری که نرمال یکّه n_i تمامی جهت‌های ممکن در P را منظور کند، نقطه تلاقی امتداد اثرش با کره روی سطح کره حرکت خواهد کرد. آنگونه که از معادلات ۳ - ۷ - ۵ و ۳ - ۷ - ۶ ملاحظه می‌شود مقادیر σ_N , σ_S توابعی از **مجذور** کسینوس‌های جهت هستند، و از این رو برای n_i قرینه آینه‌ای در صفحه‌های اصلی تغییری نمی‌کنند. بر این اساس ، توجه خودمان را محدود به یک هشتم جسم کروی مطابق شکل ۳ - ۱۴ الف می‌کنیم. برای Q نقطه تلاقی خط اثر n_i با سطح کره ABC در شکل ۳ - ۱۴ الف داریم.

$$\hat{\mathbf{n}} = \cos\phi\hat{\mathbf{e}}_۱^* + \cos\beta\hat{\mathbf{e}}_۲^* + \cos\theta\hat{\mathbf{e}}_۳^* \qquad (۸ - ۸ - ۳)$$

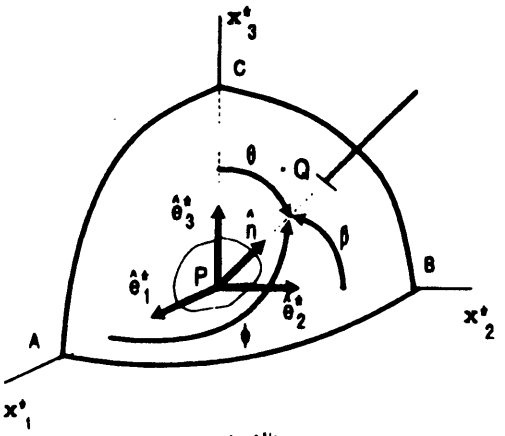
اگر $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{e}}_۱^*$ بطوری که نقطه تلاقی Q با A منطبق باشد، $\sigma_N = \sigma_I$ خواهد شد. به همین منوال، وقتی Q با B منطبق شود، $\sigma_N = \sigma_{II}$ و اگر با C منطبق شود $\sigma_N = \sigma_{III}$ خواهند شد. در تمامی این حالات ، σ_S صفر است. در نمودار دایره مور (شکل ۳ - ۱۴ ب) ، این مقادیر تنش به‌ترتیب در نقاط a , b و c قرار دارند. اکنون اگر A مساوی $\frac{\pi}{۲}$ و ϕ مجاز به تغییر از صفر تا $\frac{\pi}{۲}$ باشد (β متقابلاً از $\frac{\pi}{۲}$ به صفر می‌رود)، Q در امتداد قوس ربع دایره AB از A تا B حرکت خواهد کرد. فضای تنش شکل ۳ - ۱۴ ب ، نقطه تنش q (تصویر نقطه Q) دارای مختصات σ_N و σ_S بطور همزمان در امتداد نیمدایره $C_۳$ از a تا b حرکت خواهد کرد. (توجه شود در حالی که Q به اندازه ۹۰° در امتداد AB در فضای فیزیکی حرکت می‌کند، q به اندازه ۱۸۰° در امتداد نیمدایره اتصال‌دهنده a به b در فضای فیزیکی حرکت خواهد کرد). بطور مشابه وقتی Q روی ربع دایره BC یا CA شکل ۳ - ۱۴ الف قرار گیرد، نقطه q به‌ترتیب موقعیت مرتبط با آن را روی نیمدایره‌های bc و ca مطابق شکل ۳ - ۱۴ ب اشغال خواهد کرد.

اکنون اگر زاویه ϕ چند مقدار ثابت کمتر از $\frac{\pi}{۲}$ را اختیار کند، مثلاً $\phi = \phi_۱$ و تصور کنید β و θ تمامی مقادیر سازگار با جابجایی Q در امتداد قوس دایره‌ای KD از شکل ۳ - ۱۵ الف را داشته باشد، برای این حالت معادله ۳ - ۸ - ۲ الف عبارت است از

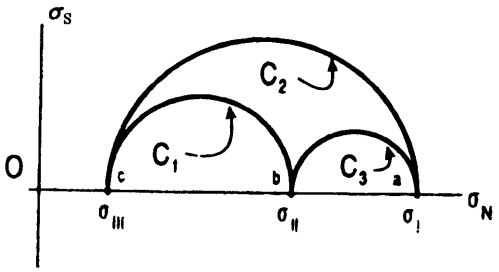
$(\sigma_N - \sigma_{II})(\sigma_N - \sigma_{III}) + \sigma_S^۲ = (\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_I - \sigma_{III})\ cos^۲\ \phi_۱$ که ممکن است به شکل استاندارد معادله دایره دربیاید.

$$[\sigma_N - \tfrac{۱}{۲}(\sigma_{II} + \sigma_{III})]^۲ + \sigma_S^۲ = (\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_I - \sigma_{III})\ cos^۲\ \phi_۱ + [\tfrac{۱}{۲}(\sigma_{II} - \sigma_{III})]^۲ = R_۱^۲$$

(۳ - ۸ - ۹)



(الف)

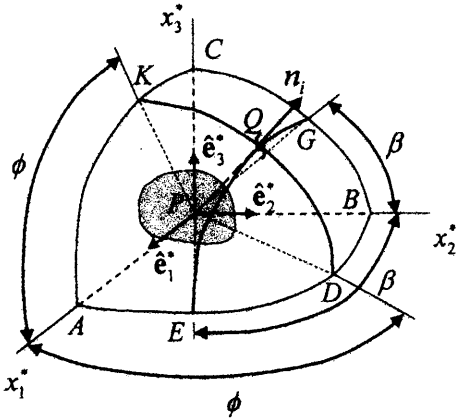


(ب)

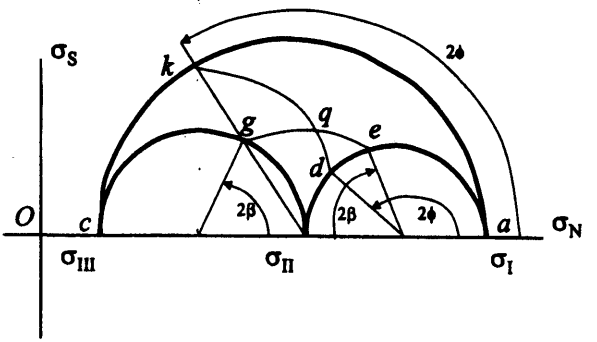
شکل ۳ - ۱۴

(الف) یک هشتم کره کوچک جسم در P، (ب) نیمدایره‌های تنش مور برای یک هشتم

مشاهده می‌شود که این دایره دارای مرکزی منطبق با دایره C_1 در فضای تنش و شعاع R_1 مطابق معادله ۳ - ۸ - ۹ می‌باشد. بنابراین، در حالی که Q روی قوس دایره‌ای KD مطابق شکل ۳ - ۱۵ الف حرکت می‌کند، نقطه تنش q قوس دایره‌ای kd مطابق شکل ۳ - ۱۵ ب را می‌پیماید. [توجه شود که اگر $\phi_1 = \frac{\pi}{2}$ باشد در نتیجه $\cos\phi_1 = 0$ ، R_1 به $\frac{1}{2}(\sigma_{II} - \sigma_{III})$ یعنی شعاع دایره C_1 کاهش می‌یابد.] اگر $\beta = \beta_1 < \frac{\pi}{2}$ باشد، آنگاه وقتی ϕ و θ تمام مقادیر قابل پذیرش را اختیار کند، نقطه Q در امتداد قوس دایره‌ای EG از شکل ۳ - ۱۵ الف حرکت می‌کند. برای این حالت، معادله ۳ - ۸ - ۲ ب را می‌توان به شکل زیر مجدداً مرتب نمود.



(الف)



(ب)

شکل ۳ - ۱۵

زوایای مرجع ϕ و β روی ، (الف) یک هشتم جسم ، (ب) نمودار دایره‌های مور

$$[\sigma_N - \tfrac{1}{2}(\sigma_I + \sigma_{III})]^2 + \sigma_S^2 = (\sigma_{II} - \sigma_{III})(\sigma_{II} - \sigma_I)\cos^2\beta_1 + [\tfrac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{III})]^2 = R_2^2 \qquad (۳-۸-۱۰)$$

که یک دایره را با مرکزی منطبق بر دایره C_2 با شعاع R_2 تعریف می‌کند. در اینجا، وقتی $\beta_1 = \frac{\pi}{2}$، شعاع R_2 به $\frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{III})$ کاهش می‌یابد که شعاع دایره C_2 است. در حالی که Q روی قوس دایره‌ای EG از شکل ۳ - ۱۵ الف حرکت می‌کند، نقطه تنش q قوس دایره‌ای eg در شکل ۳ - ۱۵ ب را می‌پیماید.

بطور خلاصه ، برای یک $\hat{\mathbf{n}}$ مشخص در نقطه P از جسم نقطه Q [جائی که امتداد اثر $\hat{\mathbf{n}}$ یک هشتم کره از جسم را قطع می‌کند (شکل ۳ - ۱۵ الف)] در نقطه مشترک قوس‌های دایره‌ای KD و EG قرار دارد و در همان لحظه نقطه تنش q مرتبط با آن (دارای مختصات σ_N و σ_S) در تلاقی قوس‌های دایره‌ای kd و eg در صفحه تنش شکل ۳ - ۱۵ ب قرار دارد. مثال زیر جزییات روش را ارائه می‌دهد.

مثال ۳ ـ ۸ ـ ۱ بیان تنش در نقطه P برحسب MPa نسبت به محورهای $px_1x_2x_3$ توسط ماتریس زیر داده شده است.

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} ۲۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۳۰ & -۶۰ \\ ۰ & -۶۰ & ۵ \end{bmatrix}$$

(الف) بردار تنش را روی صفحه‌ای که نرمال یکّه‌اش $\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{3}(2\,\hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2 + 2\,\hat{\mathbf{e}}_3)$ می‌باشد تعیین کنید.

(ب) مولفه تنش نرمال σ_N و مولفه تش برشی σ_S روی همان صفحه را تعیین کنید.

(پ) نتایج قسمت (ب) را با ساختن دایره مور مطابق شکل ۳ - ۱۵ ب بررسی کنید.

حل (الف) با استفاده از معادله ۳ - ۴ - ۸ در شکل ماتریسی بردار $t_i^{(\hat{\mathbf{n}})}$ بدست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} t_1^{(\hat{\mathbf{n}})} \\ t_2^{(\hat{\mathbf{n}})} \\ t_1^{(\hat{\mathbf{n}})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۳۰ & -۶۰ \\ ۰ & -۶۰ & ۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{۲}{۳} \\ \frac{۱}{۳} \\ \frac{۲}{۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۵۰}{۳} \\ -\frac{۱۵۰}{۳} \\ -\frac{۵۰}{۳} \end{bmatrix}$$

یا

$$\mathbf{t}^{(\hat{\mathbf{n}})} = \frac{1}{3}\,(50\ \hat{\mathbf{e}}_1 - 150\ \hat{\mathbf{e}}_2 - 50\ \hat{\mathbf{e}}_3)$$

(ب) با استفاده از معادله ۳ - ۷ - ۱ می‌توان σ_N را براحتی از ضرب ماتریسی محاسبه نمود.

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -30 & -60 \\ 0 & -60 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \sigma_N$$

$$\sigma_N = \frac{100}{9} - \frac{150}{9} - \frac{100}{9}$$

در نتیجه $\sigma_N = -\frac{150}{9} = -16/67\ MPa$ می‌باشد. توجه شود که این نتیجه با ضرب عددی زیر می‌توانست حاصل شود.

$$\sigma_N = \mathbf{t}^{(\hat{\mathbf{n}})} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{3}\,(50\ \hat{\mathbf{e}}_1 - 150\ \hat{\mathbf{e}}_2 - 50\ \hat{\mathbf{e}}_3) \cdot \frac{1}{3}\,(2\ \hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2 + 2\ \hat{\mathbf{e}}_3)$$

مولفه برشی σ_S بکمک معادله ۳ - ۷ - ۲ ارائه می‌شود، که برای مقادیر σ_N و $t^{(\hat{\mathbf{n}})}$ محاسبه شده در فوق منجر به معادله زیر می‌شود.

$$\sigma_S{}^2 = \frac{2500 + 22500 + 2500}{9} - \frac{22500}{81} = 2777/29$$

بالاخره

$$\sigma_S = 52/7\ MPa$$

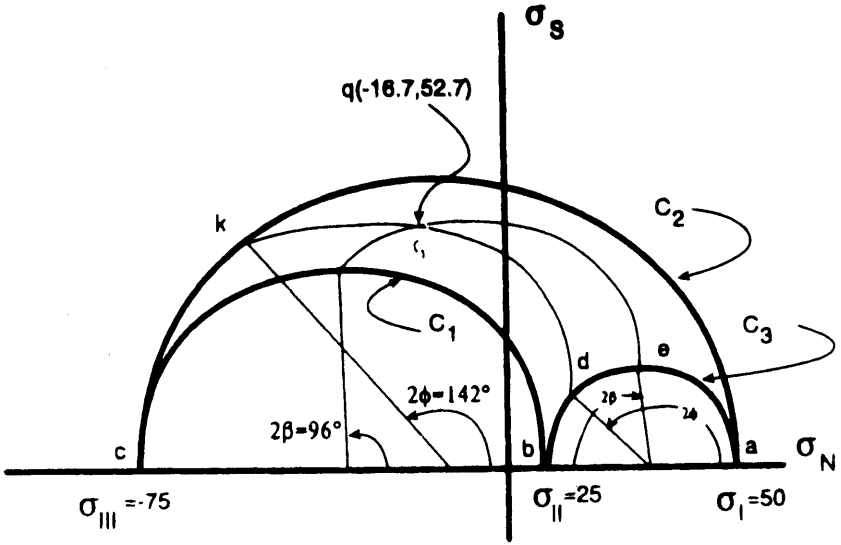
(پ) با استفاده از روال مثال ۳ - ۶ - ۱ دانشجویان می‌توانند بررسی کنند که برای تانسور تنش σ_{ij} مورد اشاره ، مقادیر تنش اصلی عبارتند از $\sigma_I = 50$, $\sigma_{II} = 25$ و $\sigma_{III} = -75$.
همچنین ماتریس انتقال از محورهای $px_1x_2x_3$ به $px_1{}^*x_2{}^*x_3{}^*$ عبارت است از

$$[\,a_{ij}\,] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

در نتیجه مولفه‌های $\hat{\mathbf{n}}$ نسبت به محورهای اصلی به شکل زیر می‌باشد.

$$\begin{bmatrix} n^*_1 \\ n^*_2 \\ n^*_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

بنابراین، نسبت به شکل ۳ - ۴ الف ، $\phi = cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 70/53^\circ$,
$\beta = \theta = cos^{-1}(\frac{2}{3}) = 48/19^\circ$. در نتیجه با تعقیب نمودن روال عنوان شده برای ساختن شکل ۳ - ۱۵ ب ، شکل ۳ - ۱۶ حاصل می‌شود، از آنجا می‌توانیم مختصات نقطه تنش q را اندازه گرفت و مقادیر $\sigma_N = -16/7$, $\sigma_S = 52/7$ را تائید نمود.



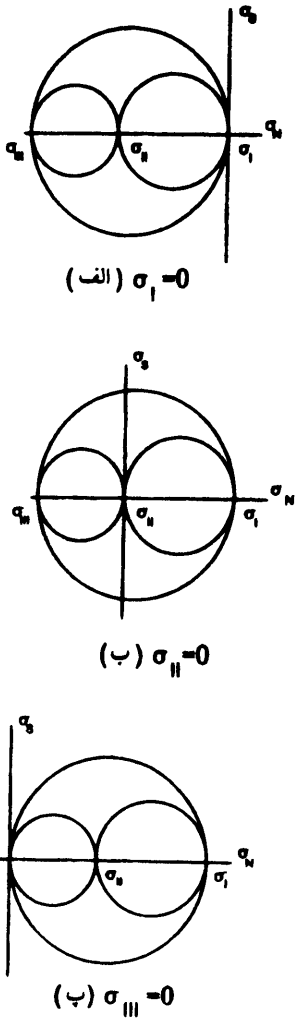
شکل ۳ - ۱۶

نمودار دایره‌های مور برای مثال ۳ - ۸ - ۱

۳ - ۹ - تنش صفحه‌ای

هنگامی که فقط و فقط یکی از تنش‌های اصلی صفر باشد، بیان **تنش صفحه‌ای** را داریم که صفحه دو تنش اصلی غیرصفر را **صفحه برگزیده** می‌نامند. این بیان تنش با اهمیت زیرا که

وضعیت فیزیکی در یک نقطه بدون بار در روی سطح محصور یک جسم تحت تنش را نشان می‌دهد. تنش اصلی صفر ممکن است یکی از سه تنش اصلی نشان داده شده توسط دایره‌های مور مربوط به آن در شکل ۳ - ۱۷ باشد.



(الف) $\sigma_I = 0$

(ب) $\sigma_{II} = 0$

(پ) $\sigma_{III} = 0$

شکل ۳ - ۱۷

دایره‌های مور برای تنش صفحه‌ای

اگر تنش‌های اصلی ترتیب نشده باشند و جهت تنش اصلی صفر بطور اختیاری x_3

انتخاب شده باشد، تنش صفحه‌ای موازی با صفحه x_1x_2 می‌باشد و ماتریس تنش به‌صورت زیر است.

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (۳-۹-۱ \text{ الف})$$

یا نسبت به محورهای اصلی به شکل زیر می‌باشد.

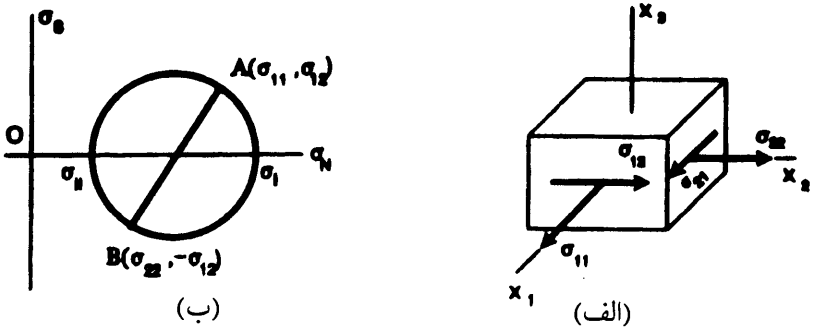
$$[\sigma^*_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (۳-۹-۱ \text{ ب})$$

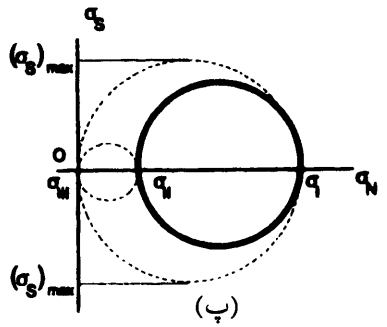
توضیح تصویری این وضع تنش صفحه‌ای توسط یک جزء مکعب مستطیل از جسم محیط پیوسته در شکل ۳ - ۱۸ الف نشان داده شده است و بعضی اوقات توسط یک دایره مور تکی نمایش داده می‌شود (شکل ۳ - ۱۸ ب)، کانونی که نقاط تنش را مشخص می‌کند (دارای مختصات σ_N و σ_S) برای نرمال‌های یکّه فقط در صفحه x_1x_2قرار می‌گیرند. معادله دایره در شکل ۳ - ۱۸ ب به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\left(\sigma_N - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}\right)^2 + (\sigma_S)^2 = \left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + (\sigma_{12})^2 \qquad (۳-۹-۲)$$

مرکز دایره $\sigma_S = 0$, $\sigma_N = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ واقع شده است و تنش برشی حداکثر در صفحه x_1x_2شعاع دایره خواهد بود، یعنی جذر سمت راست معادله ۳ - ۹ - ۲ . نقاط Aو B روی دایره بیان‌های تنش برای مساحت اجزای به‌ترتیب دارای نرمال‌های یکّه $\hat{e}_1$ و $\hat{e}_2$ را نشان می‌دهد. برای یک جزء از مساحت که دارای یک نرمال یکّه در یک جهت اختیاری در نقطه P می‌باشد، باید دو دایره هاشور زده در شکل ۳ - ۱۸ پ را منظور نمود تا بیان تنش کاملاً مشخص شود.

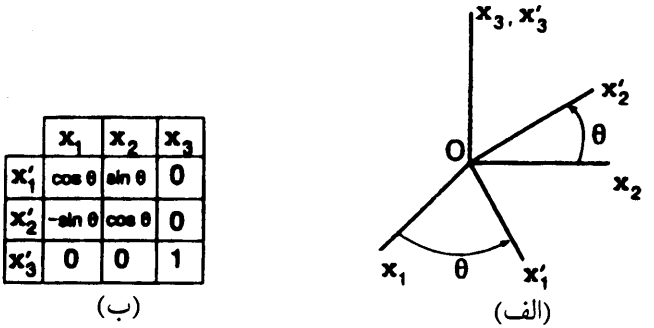
نسبت به محورهای $Ox'_1x'_2x'_3$ که تحت زاویه θ حول محور x_3 نسبت به $Ox_1x_2x_3$ مطابق شکل ۳ - ۱۹ الف دوران داشته است، معادلات انتقال برای تنش صفحه‌ای در صفحه x_1x_2 توسط فرمول عمومی تانسور انتقال یعنی معادله ۲ - ۵ - ۱۳ ارائه می‌شود. با استفاده از جدول کسینوس‌های جهت برای این وضع همانگونه که در شکل ۳ - ۱۹ ب فهرست شده است، می‌توانیم مولفه‌های تنش پرایم دار را برحسب زاویه چرخش θ و مولفه‌های بدون پرایم مطابق زیر بیان نمود.





شکل ۳ - ۱۸

(الف) جزء تنش صفحه‌ای ، (ب) دایره مور در صفحه برای تنش صفحه‌ای ، (پ) دایره‌های مور عمومی برای تنش صفحه‌ای .



	x_1	x_2	x_3
x'_1	cos θ	sin θ	0
x'_2	-sin θ	cos θ	0
x'_3	0	0	1

(ب)

شکل ۳ - ۱۹

(الف) محورهای دوران یافته برای تنش صفحه‌ای ، (ب) جدول انتقال برای تنش صفحه‌ای

$$\sigma'_{11} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \cos 2\theta + \sigma_{12} \sin 2\theta \qquad (۳-۹-۳ \text{الف})$$

$$\sigma'_{22} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \cos 2\theta - \sigma_{12} \sin 2\theta \qquad (۳-۹-۳ \text{ب})$$

$$\sigma'_{12} = -\frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin 2\theta + \sigma_{12} \cos 2\theta \qquad (۳-۹-۳ \text{پ})$$

بعلاوه ، اگر محورهای اصلی تنش برای جهت‌های پرایم دار انتخاب شود، به آسانی نشان داده می‌شود که دو مقدار تنش اصلی غیر صفر عبارتند از

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{(1)} \\ \sigma_{(2)}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})\right]^2 + (\sigma_{12})^2} \qquad (۳-۹-۴)$$

مثال ۳ ــ ۹ ــ ۱ برای حالتی که تنش صفحه‌ای توسط ماتریس زیر ارائه شده است.

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_0 & \sigma_0 & 0 \\ \sigma_0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

که در آن σ_0 تنش ثابت می‌باشد، مقادیر تنش اصلی را تعیین نمایید و دایره‌های مور را ترسیم کنید.

حل برای این نوع بیان تنش دترمینان معادله ۳ - ۶ - ۵ عبارت است از

$$\begin{vmatrix} \sigma_0 - \sigma & \sigma_0 & 0 \\ \sigma_0 & \sigma_0 - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{vmatrix} = 0$$

که منجر به یک معادله کعب با ریشه‌های (مقادیر تنش اصلی) $\sigma_{(1)} = 2\sigma_{(1)}$, $\sigma_{(2)} = \sigma_{(3)} = 0$ می‌شود (همانگونه که به سرعت می‌توان از معادله ۳ - ۹ - ۴ تشخیص داد) در نتیجه در

شکل محورهای اصلی ماتریس تنش برابر است با

$$[\sigma^*_{ij}] = \begin{bmatrix} ۲\sigma_{\cdot} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

نمودار دایره مور در شکل نشان داده شده است. در اینجا بخاطر صفر بودن دو ریشه یکی از دایره‌های مور منحط بداخل یک نقطه (مبدأ) می‌شود و دو دایره دیگر بر هم منطبق می‌شوند. همچنین، توجه داریم که بطور فیزیکی و ساده این یک کشش یک بعدی در جهت $x_۱^*$است و مقادیر تنش برشی حداکثر (که توسط نقاط Aو Bنشان داده شده است) در صفحه‌های مختصات $x_۱$و $x_۲$که زاویه ۴۵° با جهت اصلی $x_۱^*$ می‌سازد اتفاق می‌افتد.

۳ - ۱۰ بیان تنش کروی و بیان تنش انحراف

میانگین حسابی تنش‌های نرمال ،

$$\sigma_M = \frac{۱}{۳}(\sigma_{۱۱} + \sigma_{۲۲} + \sigma_{۳۳}) = \frac{۱}{۳}\sigma_{ii} \qquad (۳ - ۱۰ - ۱)$$

به ***میانگین تنش نرمال*** معروف است. حالتی از تنش که تمامی سه تنش اصلی مساوی باشد (و بنابراین مساوی با σ_M) ***حالت کروی تنش*** نامیده می‌شود و توسط ماتریس قطری نمایش

داده می‌شود.

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_M & ۰ & ۰ \\ ۰ & \sigma_M & ۰ \\ ۰ & ۰ & \sigma_M \end{bmatrix} \qquad (۳ - ۱۰ - ۲)$$

بطوری که کلیه جهت‌ها اصلی هستند به همان صورتی که در قسمت ۳ - ۶ توضیح داده شده است. مثال فیزیکی کلاسیک برای این حالت ، عبارت است از تنش در یک شاره در حال سکون که به نوبه خود آن را ***تنش هیدرواستاتیکی*** می‌گویند و برای $\sigma_M = -P$. فشار استاتیک می‌باشد.

هر حالتی از تنش σ_{ij} را می‌توان به یک قسمت کروی و یک قسمت S_{ij} معروف به تنش انحراف بر طبق معادله زیر مجزا کرد.

$$\sigma_{ij} = S_{ij} + \delta_{ij}\,\sigma_M = S_{ij} + \frac{۱}{۳}\,\delta_{ij}\,\sigma_{kk} \qquad (۳ - ۱۰ - ۳)$$

که در آن δ_{ij} دلتای کرانکر است. این معادله را می‌توان برای S_{ij} حل کرد، که آنگاه در شکل ماتریس متقارن ظاهر می‌شود.

$$\begin{bmatrix} S_{۱۱} & S_{۱۲} & S_{۱۳} \\ S_{۱۲} & S_{۲۲} & S_{۲۳} \\ S_{۱۳} & S_{۲۳} & S_{۳۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{۱۱} - \sigma_M & \sigma_{۱۲} & \sigma_{۱۳} \\ \sigma_{۱۲} & \sigma_{۲۲} - \sigma_M & \sigma_{۲۳} \\ \sigma_{۱۳} & \sigma_{۲۳} & \sigma_{۳۳} - \sigma_M \end{bmatrix} \qquad (۳ - ۱۰ - ۴)$$

همچنین از معادله ۳ - ۱۰ - ۳ بلافاصله متوجه می‌شویم که اولین پایا تنش انحراف عبارت است از

$$S_{ii} = \sigma_{ii} - \frac{۱}{۳}\,\delta_{ii}\,\sigma_{kk} = ۰ \qquad (۳ - ۱۰ - ۵)$$

(چون $\delta_{ii} = ۳$ است) در نتیجه معادله مشخصه برای تنش انحراف (مشابه معادله ۳ - ۶ - ۶ برای σ_{ij}) بدین صورت خواهد بود.

$$S^۳ + \mathrm{II}_s S - \mathrm{III}_s = ۰ \qquad (۳ - ۱۰ - ۶)$$

که پایاهای تنش عبارتند از

$$\mathbf{II}_s = -\frac{1}{2} S_{ij} S_{ji} = S_I S_{II} + S_I S_{III} + S_{III} S_I \qquad (۳-۱۰-۷\text{ الف})$$

$$\mathbf{III}_s = \varepsilon_{ijk} S_{1j} S_{2j} S_{3k} = S_I S_{II} S_{III} \qquad (۳-۱۰-۷\text{ ب})$$

بالاخره ، یک جهت اصلی $n_j^{(q)}$ از σ_{ij} را بگونه‌ای در نظر بگیرید که معادله مقدار ویژه $[\ \sigma_{ij} - \sigma_{(q)}\ \delta_{ij}\ ]\ n_j^{(q)} = 0$ تامین گردد. آنگاه از تعریف S_{ij} داریم

یا $[\ S_{ij} + \sigma_M\ \delta_{ij} - \sigma_{(q)}\ \delta_{ij}\ ]\ n_j^{(q)} = 0$

$$[\ S_{ij} - (\sigma_{(q)} - \sigma_M)\ \delta_{ij}\ ]\ n_j^{(q)} = 0 \qquad (۳-۱۰-۸)$$

که نشان می‌دهد $n_j^{(q)}$ همچنان جهت اصلی S_{ij} است ، مزید بر آن مقادیر اصلی S_{ij} برحسب مقادیر اصلی σ_{ij} توسط عبارت زیر ارائه می‌شود.

$$S_{(q)} = \sigma_{(q)} - \sigma_M \quad , \qquad (q = 1, 2, 3) \qquad (۳-۱۰-۹)$$

مثال ۳ــ ۱ــ ۱ تانسور تنش σ در مثال ۳ - ۶ - ۱ را به دو قسمت کروی و انحراف مجزا کنید و مقادیر تنش اصلی قسمت انحراف را تعیین نمایید.

حل به کمک معادله ۳ - ۱۰ - ۱ ، σ_M برای تنش عبارت است از

$$\sigma_M = \frac{1}{3}(۵۷ + ۵۰ + ۴۳) = ۵۰$$

پس ، مجزاسازی توسط معادله ۳ - ۱۰ - ۳ منجر به ماتریس جمع زیر می‌شود.

$$\begin{bmatrix} ۵۷ & ۰ & ۲۴ \\ ۰ & ۵۰ & ۰ \\ ۲۴ & ۰ & ۴۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۷ & ۰ & ۲۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۲۴ & ۰ & -۷ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۵۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۵۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵۰ \end{bmatrix}$$

مقادیر تنش اصلی قسمت انحراف از بسط دترمینان حاصل می‌گردد.

$$\begin{vmatrix} ۷-S & ۰ & ۲۴ \\ ۰ & -S & ۰ \\ ۲۴ & ۰ & -۷-S \end{vmatrix} = -S\ [\ (۷-S)(-۷-S) - (۲۴)^2\ ] = 0$$

که براحتی فاکتورگیری و نتیجه می‌دهد $S_{(۱)} = ۲۵$, $S_{(۲)} = ۰$ و $S_{(۳)} = -۲۵$. این نتایج بسادگی با استفاده از مقادیر اصلی بدست آمده در مثال ۳ - ۶ - ۱ و همچنین معادله ۳ - ۱۰ - ۹ تائید می‌گردد.

۳ - ۱۱ تنش برشی هشت وجهی

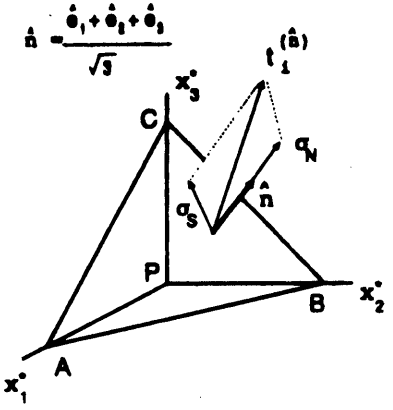
صفحه‌ای در P که نرمال یکه‌اش زوایای مساوی با جهت‌های تنش اصلی می‌سازد در نظر بگیرید. این صفحه را **صفحه هشت وجهی** می‌نامند که تصویر آن به‌صورت سطح مثلث ABC در شکل ۳ - ۲۰ باشد و تصور می‌شود که سطحی در یک هشتم یک هشت وجهی معمولی باشد. بردار کشش روی این صفحه عبارت است از

$$\mathbf{t}^{(\hat{\mathbf{n}})} = \boldsymbol{\sigma}^* \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{\sigma_{(۱)}\,\hat{\mathbf{e}}_۱^* + \sigma_{(۲)}\,\hat{\mathbf{e}}_۲^* + \sigma_{(۳)}\,\hat{\mathbf{e}}_۳^*}{\sqrt{۳}} \qquad (۱ - ۱۱ - ۳)$$

و مولفه‌اش در جهت $\hat{\mathbf{n}}$ برابر است با

$$\sigma_N = \mathbf{t}^{(\hat{\mathbf{n}})} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{۱}{۳}\left[\sigma_{(۱)} + \sigma_{(۲)} + \sigma_{(۳)}\right] = \frac{۱}{۳}\,\sigma_{ii} \qquad (۲ - ۱۱ - ۳)$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\hat{\mathbf{e}}_۱ + \hat{\mathbf{e}}_۲ + \hat{\mathbf{e}}_۳}{\sqrt{۳}}$$



شکل ۳ - ۲۰

صفحه هشت وجهی و تنش‌های نرمال و برشی هشت وجهی .

بنابراین ، از معادله ۳ - ۷ - ۲ ، مربع تنش برشی روی صفحه هشت وجهی ، معروف به **تنش برشی هشت وجهی** می‌باشد که به‌صورت زیر است.

$$\sigma^{۲}_{oct} = \mathbf{t}^{(\hat{\mathbf{n}})} \cdot \mathbf{t}^{(\hat{\mathbf{n}})} - \sigma^{۲}_{N} = \frac{۱}{۳}\left[\sigma^{۲}_{(۱)} + \sigma^{۲}_{(۲)} + \sigma^{۲}_{(۳)}\right] - \frac{۱}{۹}\left[\sigma_{(۱)} + \sigma_{(۲)} + \sigma_{(۳)}\right]^{۲}$$

(۳ - ۱۱ - ۳)

و ممکن است به یکی از دو صورت زیر کاهش یابد.

$$\sigma_{oct} = \frac{۱}{۳}\sqrt{\left[\sigma_{(۱)} - \sigma_{(۲)}\right]^{۲} + \left[\sigma_{(۲)} - \sigma_{(۳)}\right]^{۲} + \left[\sigma_{(۳)} - \sigma_{(۱)}\right]^{۲}} \qquad (۴ - ۱۱ - ۳)$$

یا

$$\sigma_{oct} = \frac{\sqrt{S^{۲}_{(۱)} + S^{۲}_{(۲)} + S^{۲}_{(۳)}}}{\sqrt{۳}} = \sqrt{\frac{-۲\,\mathbf{II}_{s}}{۳}} \qquad (۵ - ۱۱ - ۳)$$

مثال ۳ ـ ۱۱ ـ ۱ مولفه‌های نرمال و برشی ، σ_N و σ_{oct} را بطور مستقیم روی صفحه هشت وجهی برای بیانی از تنش که در مثال ۳ - ۶ - ۱ ارائه شده تعیین کنید و نتیجه را برای σ_{oct} بکمک معادله ۳ - ۱۱ - ۴ بررسی نمایید.

حل از مثال ۳ - ۶ - ۱ ، بردار تنش روی صفحه هشت وجهی توسط ضرب ماتریسی زیر ارائه می‌شود.

$$\begin{bmatrix} ۷۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۵۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱/\sqrt{۳} \\ ۱/\sqrt{۳} \\ ۱/\sqrt{۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۷۵/\sqrt{۳} \\ ۵۰/\sqrt{۳} \\ ۲۵/\sqrt{۳} \end{bmatrix}$$

یا

$$\mathbf{t}^{(\hat{\mathbf{n}})} = \frac{(۷۵\,\hat{\mathbf{e}}_{۱}^{*} + ۵۰\,\hat{\mathbf{e}}_{۲}^{*} + ۲۵\,\hat{\mathbf{e}}_{۳}^{*})}{\sqrt{۳}}$$

در نتیجه

$$\sigma_N = \mathbf{t}^{(\hat{\mathbf{n}})} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{۱}{۳}(۷۵ + ۵۰ + ۲۵) = ۵۰\ MPa$$

همچنین از معادله ۳ - ۷ - ۲

$$\sigma^2_{oct} = \mathbf{t}^{(\hat{\mathbf{n}})} \cdot \mathbf{t}^{(\hat{\mathbf{n}})} - \sigma^2_N = \frac{1}{3}\left[(۷۵)^2 + (۵۰)^2 + (۲۵)^2\right] - (۵۰)^2 = ۴۱۶٫۶۷$$

بنابراین $\sigma_{oct} = \sqrt{۴۱۶٫۶۷} = ۲۰٫۴۱\ MPa$ بکمک معادله ۳ - ۱۱ - ۴ مستقیماً بررسی می‌کنیم و خواهیم داشت.

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3}\sqrt{(۷۵ - ۵۰)^2 + (۵۰ - ۲۵)^2 + (۲۵ - ۷۵)^2} = ۲۰/۴۱\ MPa$$

مسائل

۳ - ۱ در یک نقطه P، تانسور تنش نسبت به محورهای $px_1x_2x_3$ دارای مولفه‌های σ_{ij} می‌باشد. روی مساحت جزء $dS^{(1)}$ که دارای نرمال یکّه $\hat{\mathbf{n}}_1$ می‌باشد، بردار تنش $\mathbf{t}^{(\hat{\mathbf{n}}_1)}$ است، و روی مساحت جزء $dS^{(2)}$ که دارای نرمال یکّه $\hat{\mathbf{n}}_2$ است، بردار تنش $\mathbf{t}^{(\hat{\mathbf{n}}_2)}$ می‌باشد. نشان دهید که مولفه $\mathbf{t}^{(\hat{\mathbf{n}}_1)}$ در جهت $\hat{\mathbf{n}}_2$ مساوی مولفه $\mathbf{t}^{(\hat{\mathbf{n}}_2)}$ در جهت $\hat{\mathbf{n}}_1$ است.

۳ - ۲ نتیجه بدست آمده در مسئله ۳ - ۱ را برای مساحت اجزاء که دارای نرمال‌های زیر هستند بررسی کنید.

$$\hat{\mathbf{n}}_1 = \frac{1}{7}(2\,\hat{\mathbf{e}}_1 + 3\,\hat{\mathbf{e}}_2 + 6\,\hat{\mathbf{e}}_3)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_2 = \frac{1}{7}(3\,\hat{\mathbf{e}}_1 - 6\,\hat{\mathbf{e}}_2 + 2\,\hat{\mathbf{e}}_3)$$

اگر ماتریس تنش در P نسبت به محورهای $Px_1x_2x_3$ به‌صورت زیر ارائه شود.

$$[\,\sigma_{ij}\,] = \begin{bmatrix} 35 & 0 & 21 \\ 0 & 49 & 0 \\ 21 & 0 & 14 \end{bmatrix}$$

۳ - ۳ تانسور تنش در P نسبت به محورهای $px_1x_2x_3$ دارای مولفه‌هایی برحسب MPa به‌صورت ماتریسی زیر می‌باشد.

$$[\,\sigma_{ij}\,] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

که در آن σ_{11} مشخص نشده است. یک جهتی مثل $\hat{\mathbf{n}}$ در P تعیین کنید که صفحه عمود بر $\hat{\mathbf{n}}$ آزاد از تنش باشد. یعنی روی آن صفحه $\mathbf{t}^{(\hat{\mathbf{n}})} = 0$ باشد. مقدار σ_{11} برای این شرط چقدر باید باشد ؟

پاسخ : $\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{3}(2\,\hat{\mathbf{e}}_1 - \hat{\mathbf{e}}_2 - 2\,\hat{\mathbf{e}}_3)$, $\sigma_{11} = 2\ MPa$

۳ - ۴ تانسور تنش در نقطه P دارای مولفه‌هائی برحسب ksi است که توسط ماتریس زیر مشخص شده

است.

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} -۹ & ۳ & -۶ \\ ۳ & ۶ & ۹ \\ -۶ & ۹ & -۶ \end{bmatrix}$$

تعیین کنید

(الف) بردار تنش روی صفحه‌ای در P که بردار نرمالش به‌صورت زیر باشد.

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{۱}{۹}(\hat{\mathbf{e}}_۱ + ۴\,\hat{\mathbf{e}}_۲ + ۸\,\hat{\mathbf{e}}_۳)$$

(ب) اندازه این بردار تنش

(پ) مولفه بردار تنش در جهت نرمال

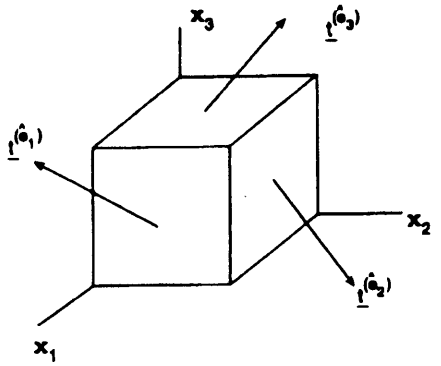
(ت) زاویه برحسب درجه بین بردار تنش و بردار نرمال

پاسخ : (الف) $۵\,\hat{\mathbf{e}}_۱ + ۱۱\,\hat{\mathbf{e}}_۲ - ۲\,\hat{\mathbf{e}}_۳$ (ب) $\mathbf{t}^{(\hat{\mathbf{n}})} = \sqrt{۱۵۰}$ (پ) $\frac{۳۳}{۹}$ (ت) $۷۲/۵۸^\circ$

۳ - ۵ مولفه‌های تانسور تنش در نقطه‌ای به‌صورت $\sigma_{ij} = \pm\,\sigma_۰ n_i n_j$ ارائه شده است که $\sigma_۰$ یک ثابت مثبت می‌باشد. نشان دهید که یک بیان تک محوری تنش با اندازه $\pm\,s_۰$ و در جهت n_i می‌باشد.

۳ - ۶ نشان دهید که جمع مربعات اندازه بردارهای تنش روی صفحه‌های مختصات مستقل از موقعیت محورهای مختصات می‌باشد، یعنی نشان دهید که جمع زیر پایا است.

$$t_i^{(\hat{e}_۱)}\,t_i^{(\hat{e}_۱)} + t_i^{(\hat{e}_۲)}\,t_i^{(\hat{e}_۲)} + t_i^{(\hat{e}_۳)}\,t_i^{(\hat{e}_۳)}$$



۳ - ۷ نسبت به محورهای $Ox_1x_2x_3$ بیان تنش برحسب مختصات توسط ماتریس زیر ارائه شده است.

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} x_1x_2 & x_2^2 & 0 \\ x_2^2 & x_2x_3 & x_3^2 \\ 0 & x_3^2 & x_2x_1 \end{bmatrix}$$

تعیین کنید

(الف) مولفه‌های نیروی حجمی را به‌عنوان توابعی از مختصات اگر معادلات تعادل قرار است در هر جا تامین گردند.

(ب) بردار تنش در نقطه $P\ (1, 2, 3)$ را روی صفحه‌ای که نرمال یکّه به سمت بیرون بوده و زوایای مساوی با محورهای مثبت مختصات می‌سازد.

پاسخ : (الف) $b_1 = \frac{-3x_2}{\rho}\ ,\ b_2 = \frac{-3x_3}{\rho}\ ,\ b_3 = \frac{-x_1}{\rho}$

(ب) $$\mathbf{t}^{(\hat{\mathbf{n}})} = \frac{(6\,\hat{\mathbf{e}}_1 + 19\hat{\mathbf{e}}_2 + 12\hat{\mathbf{e}}_3)}{\sqrt{3}}$$

۳ - ۸ نسبت به محورهای مستقیم‌الخط $Ox_1x_2x_3$، یک میدان تنش توسط ماتریس زیر داده شده است.

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} (1-x_1^2)\,x_2 + \frac{2}{3}x_2^3 & -(4-x_2^2)\,x_1 & 0 \\ -(4-x_2^2)\,x_1 & -\frac{1}{3}(x_2^3 - 12\,x_2) & 0 \\ 0 & 0 & (3-x_1^2)\,x_2 \end{bmatrix}$$

(الف) نشان دهید که معادلات تعادل برای نیروهای حجمی صفر در هر نقطه برقرار هستند.

(ب) بردار تنش در نقطه $P\ (2\ ,\ -1\ ,\ 6)$ از صفحه‌ای به معادله $3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 12$ را تعیین کنید.

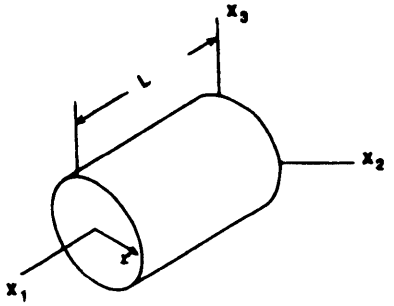
پاسخ : (ب) $\mathbf{t}^{(\hat{\mathbf{n}})} = \frac{1}{7}(-29\,\hat{\mathbf{e}}_1 - 40\,\hat{\mathbf{e}}_2 + 2\,\hat{\mathbf{e}}_3)$

۳ - ۹ مولفه‌های تنش در یک استوانه مدور به طول L و شعاع r عبارتند از

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} Ax_2 + Bx_3 & Cx_3 & -Cx_2 \\ Cx_3 & 0 & 0 \\ -Cx_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

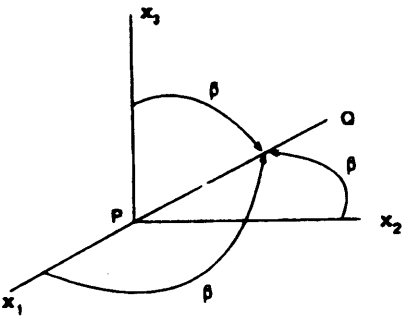
(الف) بررسی کنید که در غیاب نیروهای حجمی ، معادلات تعادل برقرار هستند.

(ب) نشان دهید که بردار تنش در تمامی نقاط روی سطح منحنی استوانه حذف می‌شود.



۳ - ۱۰ محورهای دوران یافته $px_1'x_2'x_3'$ از محورهای $px_1x_2x_3$ توسط یک دوران راستگرد حول خط PQ که زوایای مساوی نسبت به محورهای $px_1x_2x_3$ می‌سازد بدست آمده‌اند. مولفه‌های پرایم دار تنش برای تانسور تنش (برحسب MPa) زیر وقتی زاویه دوران (الف) ۱۲۰° یا (ب) ۶۰° باشد تعیین کنید.

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۶ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۶ & ۰ & -۳ \end{bmatrix}$$



پاسخ :

$$[\sigma'_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix} MPa \text{ (الف)} \qquad [\sigma'_{ij}] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -5 & 10 & 10 \\ 10 & -11 & -2 \\ 10 & -2 & 16 \end{bmatrix} MPa \text{ (ب)}$$

۳ - ۱۱ در نقطه P، محورهای دوران یافته $px'_1x'_2x'_3$ به محورهای $px_1x_2x_3$ توسط ماتریس انتقال زیر ارتباط یافته‌اند.

$$[a_{ij}] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} a & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & b & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & c \end{bmatrix}$$

که در آن a , b و c قرار است تعیین شوند. اگر ماتریس تنش نسبت به محورهای $px_1x_2x_3$ برحسب MPa به‌صورت زیر باشد آنگاه $[\sigma'_{ij}]$ را تعیین کنید.

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

پاسخ : MPa

$$[\sigma'_{ij}] = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 11+2\sqrt{3} & 5+\sqrt{3} & -1 \\ 5+\sqrt{3} & 5 & 5-\sqrt{3} \\ -1 & 5-\sqrt{3} & 11-2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

۳ - ۱۲ ماتریس تنش نسبت به محورهای $px_1x_2x_3$ برحسب ksi عبارت است از

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 14 & 0 & 21 \\ 0 & 21 & 0 \\ 21 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

محورهای دوران یافته $px'_1x'_2x'_3$ نسبت به محورهای $px_1x_2x_3$ توسط جدول بردارهای مبنا به‌صورت زیر تعریف شده‌اند.

	$\hat{e}_1$	$\hat{e}_2$	$\hat{e}_3$
$\hat{e}'_1$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{6}{7}$
$\hat{e}'_2$	$\frac{3}{7}$	$-\frac{6}{7}$	$\frac{2}{7}$
$\hat{e}'_3$	$\frac{6}{7}$	$\frac{2}{7}$	$-\frac{3}{7}$

(الف) بردارهای تنش روی صفحه‌های که در نقطه P عمود بر محورهای پرایم‌دار می‌باشند، یعنی $t^{(\hat{e}'_1)}$, $t^{(\hat{e}'_2)}$ و $t^{(\hat{e}'_3)}$ را برحسب بردارهای مبنای $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$ و $\hat{e}_3$ تعیین کنید.

(ب) هر یک از بردارهای تنش بدست آمده از (الف) را روی محورهای پرایم‌دار تصویر کنید تا نُه مولفه $[\sigma'_{ij}]$ تعیین شوند.

(پ) نتیجه بدست آمده در (ب) را توسط یک کاربرد مستقیم معادله ۳ - ۵ - ۱ بررسی کنید.

پاسخ : MPa

$$[\sigma'_{ij}] = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 143 & 36 & 114 \\ 36 & 166 & 3 \\ 114 & 3 & -15 \end{bmatrix}$$

۳ - ۱۳ در نقطه P ، ماتریس تنش برحسب MPa نسبت به محورهای $px_1x_2x_3$ به‌صورت زیر ارائه شده است.

$$[\sigma_{ij}]: \text{حالت ۱} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad [\sigma_{ij}]: \text{حالت ۲} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

برای هر حالت تعیین کنید

(الف) مقادیر تنش اصلی

(ب) جهت‌های تنش اصلی

پاسخ :

(الف) حالت ۱ : $\sigma_{(۳)} = -۲\ MPa\ ,\ \sigma_{(۲)} = ۲\ MPa\ ,\ \sigma_{(۱)} = ۱۰\ MPa$

حالت ۲ : $\sigma_{(۲)} = \sigma_{(۳)} = ۱\ MPa\ ,\ \sigma_{(۱)} = ۴\ MPa$

(ب) حالت ۱ :

$$\hat{\mathbf{n}}^{(۱)} = \pm \frac{\hat{\mathbf{e}}_۱ + \hat{\mathbf{e}}_۲}{\sqrt{۲}}\ ,\ \hat{\mathbf{n}}^{(۲)} = \pm \frac{\hat{\mathbf{e}}_۱ - \hat{\mathbf{e}}_۲}{\sqrt{۲}},\ \hat{\mathbf{n}}^{(۳)} = \mp\ \hat{\mathbf{e}}_۳$$

حالت ۲ :

$$\hat{\mathbf{n}}^{(۱)} = \frac{\hat{\mathbf{e}}_۱ + \hat{\mathbf{e}}_۲ + \hat{\mathbf{e}}_۳}{\sqrt{۳}},\ \hat{\mathbf{n}}^{(۲)} = \frac{-\hat{\mathbf{e}}_۱ + \hat{\mathbf{e}}_۲}{\sqrt{۲}}\ ,\ \hat{\mathbf{n}}^{(۳)} = \frac{-\hat{\mathbf{e}}_۱ - \hat{\mathbf{e}}_۲ + ۲\hat{\mathbf{e}}_۳}{\sqrt{۶}}$$

۳ - ۱۴ هنگامی که ارجاع به محورهای اصلی در نقطه P می‌شود، ماتریس تنش برحسب ksi عبارت است از

$$[\ \sigma^*_{ij}\ ] = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۷ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱۲ \end{bmatrix}$$

اگر ماتریس انتقال بین محورهای اصلی و محورهای $px_۱x_۲x_۳$ به‌صورت زیر باشد.

$$[\ a_{ij}\ ] = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \begin{bmatrix} -\frac{۳}{۵} & ۱ & -\frac{۴}{۵} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ -\frac{۳}{۵} & -۱ & -\frac{۴}{۵} \end{bmatrix}$$

که در آن $a_{۲۱}$, $a_{۲۲}$ و $a_{۲۳}$ قرار است تعیین شوند، آنگاه $[\ \sigma_{ij}\ ]$ را محاسبه نمایید.

پاسخ : ksi

$$[\ \sigma_{ij}\ ] = \begin{bmatrix} ۷ & ۳ & ۰ \\ ۳ & ۷ & ۴ \\ ۰ & ۴ & ۷ \end{bmatrix}$$

۳ - ۱۵ ماتریس تنش برحسب MPa وقتی به محورهای $px_۱x_۲x_۳$ ارجاع شود عبارت است از

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} ۳ & -۱۰ & ۰ \\ -۱۰ & ۰ & ۳۰ \\ ۰ & ۳۰ & -۲۷ \end{bmatrix}$$

تعیین کنید

(الف) تنش‌های اصلی ، σ_I , σ_{II} , σ_{III}

(ب) جهت‌های تنش اصلی

پاسخ : (الف) $\sigma_I = ۲۳\ MPa$, $\sigma_{II} = ۰\ MPa$, $\sigma_{III} = -۴۷\ MPa$

(ب) $\hat{\mathbf{n}}^{(۱)} = -۰/۳۹۴\ \hat{\mathbf{e}}_۱ + ۰/۷۸۸\ \hat{\mathbf{e}}_۲ + ۰/۴۷۳\ \hat{\mathbf{e}}_۳$

$\hat{\mathbf{n}}^{(۲)} = ۰/۹۱۳\ \hat{\mathbf{e}}_۱ + ۰/۲۷۴\ \hat{\mathbf{e}}_۲ + ۰/۳۰۴\ \hat{\mathbf{e}}_۳$

$\hat{\mathbf{n}}^{(۳)} = ۰/۱۱۰\ \hat{\mathbf{e}}_۱ + ۰/۵۵۱\ \hat{\mathbf{e}}_۲ - ۰/۸۲۷\ \hat{\mathbf{e}}_۳$

۳ - ۱۶ در نقطه P ، ماتریس تنش نسبت به محورهای $Px_۱x_۲x_۳$ برحسب MPa عبارت است از

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} ۵ & a & -a \\ a & ۰ & b \\ -a & b & ۰ \end{bmatrix}$$

که در آن a و b مشخص نشده‌اند. در همان نقطه نسبت به محورهای $px_۱^*x_۲^*x_۳^*$ ماتریس تنش به شکل زیر است.

$$[\sigma^*_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_I & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \sigma_{III} \end{bmatrix}$$

اگر اندازه تنش برشی حداکثر در P برابر $۵/۵\ MPa$ باشد، σ_I و σ_{III} را تعیین کنید.

پاسخ : $\sigma_I = ۷\ MPa$, $\sigma_{III} = -۴\ MPa$

۳ - ۱۷ بیان تنش در نقطه P برحسب ksi نسبت به محورهای $px_۱x_۲x_۳$ توسط ماتریس زیر ارائه شده است.

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۰ & -۲ \end{bmatrix}$$

تعیین کنید

(الف) مقادیر تنش اصلی و جهت‌های تنش اصلی در P

(ب) مقدار تنش برشی حداکثر در P

(پ) نرمال $\hat{\mathbf{n}} = n_i\hat{\mathbf{e}}_i$ وارد بر صفحه در نقطه P را که تنش برشی حداکثر اعمال می‌شود.

پاسخ : (الف) $\sigma_{(۱)} = ۲\ ksi\ ,\quad \sigma_{(۲)} = ۱\ ksi\ ,\quad \sigma_{(۳)} = -۳\ ksi$

$$\hat{\mathbf{n}}^{(۱)} = \frac{۲\hat{\mathbf{e}}_۱ + \hat{\mathbf{e}}_۳}{\sqrt{۵}}\ ,\ \hat{\mathbf{n}}^{(۲)} = \hat{\mathbf{e}}_۲\ ,\ \hat{\mathbf{n}}^{(۳)} = \frac{-\hat{\mathbf{e}}_۱ + ۲\hat{\mathbf{e}}_۳}{\sqrt{۵}}$$

$$(\sigma_s)_{max} = \pm ۲/۵\ ksi \quad \text{(ب)}$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{۳\hat{\mathbf{e}}_۱ + \hat{\mathbf{e}}_۳}{\sqrt{۱۰}} \quad \text{(پ)}$$

۳ - ۱۸ تانسور تنش در P نسبت به $Ox_۱x_۲x_۳$ در شکل ماتریسی و برحسب MPa ارائه شده است.

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} ۴ & b & b \\ b & ۷ & ۲ \\ b & ۲ & ۴ \end{bmatrix}$$

که در آن b تعریف نشده است. اگر $\sigma_{III} = ۳\ MPa$ و $\sigma_I = ۲\ \sigma_{II}$ باشد تعیین کنید.

(الف) مقادیر تنش اصلی

(ب) مقدار b

(پ) جهت تنش اصلی σ_{II}

پاسخ : (الف) $\sigma_I = ۸\ MPa\ ,\quad \sigma_{II} = ۴\ MPa\ ,\quad \sigma_{III} = ۳\ MPa$

(ب) $b = ۰$

(پ) $\hat{\mathbf{n}}^{(II)} = \hat{\mathbf{e}}_۱$

۳ - ۱۹ بیان تنش در P وقتی ارجاع به محورهای $px_1x_2x_3$ باشد برحسب ksi توسط ماتریس زیر ارائه شده است.

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} ۹ & ۳ & ۰ \\ ۳ & ۹ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱۸ \end{bmatrix}$$

تعیین کنید

(الف) مقادیر تنش اصلی در P

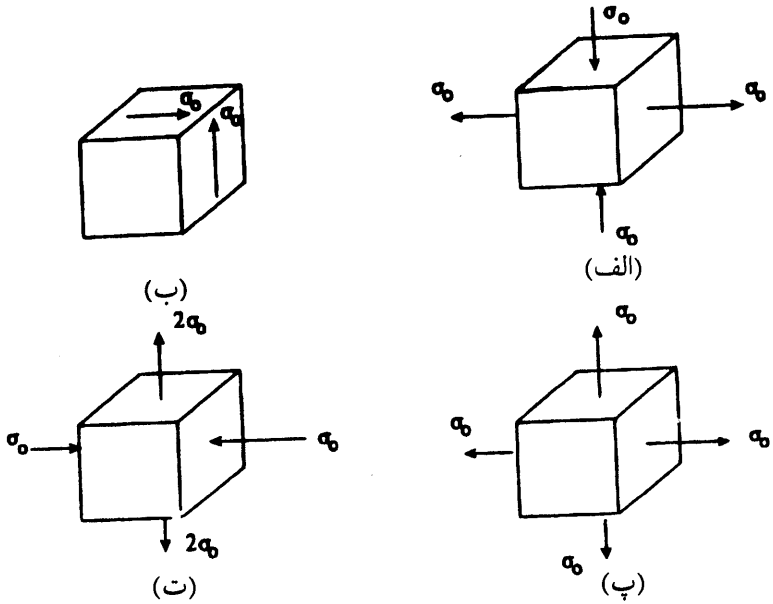
(ب) نرمال یکّه $\hat{\mathbf{n}}^* = n_i \hat{\mathbf{e}}^*_i$ متعلق به صفحه‌ای که روی آن $\sigma_N = ۱۲\ ksi$ و $\sigma_S = ۳\ ksi$ باشد

پاسخ : (الف) $\sigma_I = ۱۸\ ksi\ ,\ \sigma_{II} = ۱۲\ ksi\ ,\ \sigma_{III} = ۶\ ksi$

(ب) $$\hat{\mathbf{n}}^* = \frac{\hat{\mathbf{e}}_۱^* + \sqrt{۶}\,\hat{\mathbf{e}}_۲^* + \hat{\mathbf{e}}_۳^*}{۲\sqrt{۲}}$$

۳ - ۲۰ نتیجه بدست آمده از مسئله ۳ - ۱۹ ب در فوق را ، با استفاده از معادله ۳ - ۸ - ۲ بررسی کنید.

۳ - ۲۱ دایره‌های مور را برای انواع بیان تنش نشان داده شده روی مکعب که در امتداد محورهای مختصات می‌باشند ترسیم کنید.



۳ - ۲۲ بیان تنش براساس محورهای $Ox_1x_2x_3$ برحسب MPa توسط ماتریس زیر ارائه شده است.

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} ۹ & ۱۲ & ۰ \\ ۱۲ & -۹ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$$

تعیین کنید

(الف) مولفه‌های نرمال و برشی به‌ترتیب σ_N و σ_S را روی صفحه‌ای در P که نرمال یکّه آن

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{۱}{۵}(۴\,\hat{\mathbf{e}}_۱ + ۳\,\hat{\mathbf{e}}_۲)$$

(ب) نتیجه بدست آمده در (الف) را توسط ترسیم یک دایره مور شبیه به آنچه در شکل ۳ - ۱۶ نشان داده شده است بررسی کنید.

پاسخ : $\sigma_N = ۱۴/۰۴\ MPa\ ,\ \sigma_S = ۵/۲۸\ MPa$

۳ - ۲۳ دایره‌های مور را برای حالت‌های ساده تنش که به‌صورت زیر ارائه شده‌اند ترسیم نمایید.

(الف) $[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_۰ & ۰ & \sigma_۰ \\ ۰ & \sigma_۰ & ۰ \\ \sigma_۰ & ۰ & \sigma_۰ \end{bmatrix}$ (ب) $[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲\sigma_۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -\sigma_۰ \end{bmatrix}$

در هر حالت تنش برشی حداکثر را تعیین کنید.

پاسخ : (الف) $(\sigma_S)_{max} = \sigma_۰$ (ب) $(\sigma_S)_{max} = \frac{۳}{۲}\sigma_۰$

۳ - ۲۴ نسبت به محورهای $Ox_1x_2x_3$ بیان تنش در O توسط ماتریس زیر داده شده است.

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} ۶ & -۳ & ۰ \\ -۳ & ۶ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} ksi$$

نشان دهید که نسبت به محورهای $Ox_1{}^*x_2{}^*x_3{}^*$ ماتریس تنش عبارت است از

$$[\sigma^*_{ij}] = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۹ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} ksi$$

که این محورها حاصل از دورانی به اندازه ۴۵° حول محور $x_۳$ می‌باشد. این نتایج را از طریق معادله ۳ - ۹ - ۲ بررسی کنید.

۳ - ۲۵ بیان ماتریس تنش در P به‌صورت زیر ارائه شده است.

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} ۲۹ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۲۶ & ۶ \\ ۰ & ۶ & ۹ \end{bmatrix} ksi$$

این ماتریس را به قسمت‌های کروی و انحراف مجزا کنید و آنگاه مقادیر تنش اصلی انحراف را تعیین نمایید.

پاسخ : $S_I = ۲۵\ ksi \quad , \quad S_{II} = ۶\ ksi \quad , \quad S_{III} = -۳۱\ ksi$

۳ - ۲۶ پایای دوم تنش انحراف برحسب مقادیر اصلی به‌صورت زیر بیان شده است.

$$\mathbf{II}_s = S_I S_{II} + S_{II} S_{III} + S_{III} S_I$$

نشان دهید که این جمع برابر است با منهای دو سوم جمع مربعات تنش‌های برشی اصلی مطابق آنچه در معادله ۳ - ۱۰ - ۷ می‌باشد.

۳ - ۲۷ نتایج ارائه شده در معادلات ۳ - ۱۱ - ۴ و ۳ - ۱۱ - ۵ برای تنش برشی هشت وجهی را بررسی کنید.

۳ - ۲۸ در نقطه P از یک جسم محیط پیوسته ، مولفه‌های تانسور تنش برحسب MPa نسبت به محورهای $Px_۱x_۲x_۳$ توسط ماتریس زیر داده شده است.

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} ۱ & -۳ & \sqrt{۲} \\ -۳ & ۱ & -\sqrt{۲} \\ \sqrt{۲} & -\sqrt{۲} & ۴ \end{bmatrix}$$

تعیین کنید

(الف) مقادیر تنش اصلی σ_I ، σ_{II} و σ_{III} را همراه با جهت‌های تنش اصلی مربوطه

(ب) پایاهای تنش $\mathbf{I}_\sigma$ ، $\mathbf{II}_\sigma$ و $\mathbf{III}_\sigma$

(پ) مقدار تنش برشی حداکثر و نرمال متعلق به صفحه‌ای که روی آن اعمال می‌شوند.

(ت) مقادیر تنش اصلی انحراف

(ث) بردار تنش روی صفحه هشت وجهی توام با نرمال آن و مولفه‌های برشی

(ج) ماتریس تنش را برای محورهائی که به اندازه ۶۰° خلاف ساعتگرد نسبت به محور PQ با زوایای مساوی نسبت به محورهای مختصات $px_1x_2x_3$ دوران داشته باشد.

پاسخ : (الف) $\sigma_I = ۶\ MPa\ ,\ \sigma_{II} = ۲\ MPa\ ,\ \sigma_{III} = -۲\ MPa$

$$\hat{\mathbf{n}}^{(I)} = \frac{۱}{۲}\left(\hat{\mathbf{e}}_۱ - \hat{\mathbf{e}}_۲ + \sqrt{۲}\,\hat{\mathbf{e}}_۳\right)$$

$$\hat{\mathbf{n}}^{(II)} = \frac{۱}{۲}\left(\hat{\mathbf{e}}_۱ - \hat{\mathbf{e}}_۲ - \sqrt{۲}\,\hat{\mathbf{e}}_۳\right)$$

$$\hat{\mathbf{n}}^{(III)} = \frac{\hat{\mathbf{e}}_۱ + \hat{\mathbf{e}}_۲}{\sqrt{۲}}$$

(ب) $\mathbf{I}_\sigma = ۶\ MPa\ ,\ \mathbf{II}_\sigma = -۴\ MPa\ ,\ \mathbf{III}_\sigma = -۲۴\ MPa$

(پ) $(\sigma_s)_{max} = ۴\ MPa\ ,\ \hat{\mathbf{n}}_{max} = \dfrac{(۱+\sqrt{۲})\,\hat{\mathbf{e}}_۱ - (۱-\sqrt{۲})\,\hat{\mathbf{e}}_۲ + \sqrt{۲}\,\hat{\mathbf{e}}_۳}{۲\sqrt{۲}}$

(ت) $S_I = ۴\ MPa\ ,\ S_{II} = ۰\ MPa\ ,\ S_{III} = -۴\ MPa$

(ث) $\mathbf{t}^{(\hat{\mathbf{n}})} = \dfrac{۶\,\hat{\mathbf{e}}_۱^* + ۲\,\hat{\mathbf{e}}_۲^* - ۲\,\hat{\mathbf{e}}_۳^*}{\sqrt{۳}}\ ,\ \sigma_N = ۲\ ,\ \sigma_{oct} = \sqrt{\frac{۳۲}{۳}}$

(ج)
$$[\,\sigma'_{ij}\,] = \frac{۱}{۹}\begin{bmatrix} -۱۲ & -۱۲+۳\sqrt{۲} & -۱۲-۳\sqrt{۲} \\ -۱۲+۳\sqrt{۲} & ۳۳-۱۲\sqrt{۲} & -۳ \\ -۱۲-۳\sqrt{۲} & -۳ & ۳۳+۱۲\sqrt{۲} \end{bmatrix} MPa$$

۳ - ۲۹ در یک محیط پیوسته ، میدان تنش نسبت به محورهای $Ox_1x_2x_3$ عبارت است از

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} x_1^2 x_2 & x_1(1-x_2^2) & 0 \\ x_1(1-x_2^2) & \frac{1}{3}(x_2^3 - 3x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 2x_3^2 \end{bmatrix}$$

تعیین کنید

(الف) توزیع نیروی حجمی اگر معادلات تعادل قرار است در کل میدان تامین باشند.

(ب) تنش‌های اصلی در $P(a, 0, 2\sqrt{a})$

(پ) تنش برشی حداکثر در P

(ت) تنش‌های اصلی انحراف در P

پاسخ : (الف) $b_1 = b_2 = 0 \ , \ b_3 = -4x_3/\rho$

(ب) $\sigma_I = 8a \ , \ \sigma_{II} = a \ , \ \sigma_{III} = -a$

(پ) $(\sigma_S)_{max} = \pm 4/5\, a$

(ت) $S_I = \frac{16}{3}a \ , \ S_{II} = -\frac{5}{3}a \ , \ S_{III} = -\frac{11}{3}a$

۳ - ۳۰ مولفه‌های تانسور تنش σ_{ij} از میدان تانسوری متقارن ϕ_{ij} توسط معادله $\sigma_{ij} = \varepsilon_{iqk}\varepsilon_{jpm}\phi_{km,qp}$ قابل استخراج است. نشان دهید که در غیاب نیروهای حجمی معادلات تعادل تامین می‌شوند. از مسئله ۲ - ۱۳ داریم

$$\varepsilon_{iqk}\varepsilon_{jpm} = \begin{vmatrix} \delta_{ji} & \delta_{jq} & \delta_{jk} \\ \delta_{pi} & \delta_{pq} & \delta_{pk} \\ \delta_{mi} & \delta_{mq} & \delta_{mk} \end{vmatrix}$$

۳ - ۳۱ بررسی کنید که $\partial\sigma_{ij} / \partial\sigma_{mn} = \delta_{im}\,\delta_{jn}$ می‌باشد، آنگاه این نتیجه (یا نوع دیگری) را بکار ببرید نشان دهید که $\partial \mathbf{II}_s / \partial\sigma_{ij} = -S_{ij}$ یعنی مشتق پایای دوم تنش انحراف نسبت به مولفه‌های تنش برابر است با منهای مولفه مرتبط با تنش انحراف .

۴ سینماتیک تغییرشکل و حرکت

۴ - ۱ ذرات ، پیکربندی‌ها، تغییرشکل و حرکت

در مکانیک محیط‌های پیوسته *اجسام مادی* را در شکل جامدات ، شاره‌ها و گازها در نظر می‌گیریم، موضوع را با توضیح مدلی که برای بیان چنین اجسام بکار می‌بریم شروع می‌کنیم. برای این مقصود یک جسم مادی B را به‌عنوان مجموعه‌ای از اجزاء X که *ذرات* یا *نقاط مادی* نامیده می‌شوند تعریف می‌کنیم که قابل قرار دادن به‌صورت یک به یک با نقاط یک ناحیه معمولی دستگاه مختصات R. از فضای فیزیکی می‌باشد. توجه شود یک «ذره» در مکانیک کلاسیک دارای یک جرم مشخص است، یک «ذره محیط پیوسته» اساساً یک نقطه مادی است که چگالی آن تعریف شده است.

مشخصات موقعیت تمامی ذرات B نسبت به یک مبدأ ثابت در لحظه‌ای از زمان را اصطلاحاً تعریف **پیکربندی** جسم در آن لحظه گویند. بطور ریاضی ، این موضوع توسط ارتباط نقش‌بندی زیر بیان می‌شود

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\kappa}\,(X) \qquad (۴ - ۱ - ۱)$$

که تابع برداری $\boldsymbol{\kappa}$ موقعیت $\mathbf{x}$ نسبت به مبدأ هر ذره X از جسم را تعیین می‌کند. فرض می‌کنیم که این ارتباط بطور منحصر بفرد معکوس‌پذیر و قابل دیفرانسیل‌گیری است به هر مرتبه‌ای که نیاز باشد، بطور عمومی دو یا سه مرتبه کافی خواهد بود. معکوس بدین صورت نوشته می‌شود.

$$X = \boldsymbol{\kappa}^{-1}\,(\mathbf{x}) \qquad (۴ - ۱ - ۲)$$

و مشخص می‌کند که ذره X در موقعیت $\mathbf{x}$ قرار دارد.

تغییر در پیکربندی ناشی از *تغییرمکان* جسم است، برای مثال ، حالت عمومی *تغییرمکان جسم صلب* شامل یک انتقال و دوران توام می‌باشد که یک پیکربندی جدید را ایجاد می‌کند، اما موجب تغییرات در اندازه یا شکل جسم نمی‌شود ، فقط تغییرات در موقعیت یا آرایش جسم یا هر دو می‌باشد. از طرف دیگر یک تغییرمکان اختیاری معمولاً شامل تغییرمکان

جسم صلب و همچنین **تغییرشکل** می‌باشد که موجب تغییر در اندازه یا شکل یا احیاناً هر دوی آنها می‌شود.

حرکت جسم B یک دنبالهٔ پیوسته زمانی از تغییرمکان‌هاست که مجموعه ذرات X را به پیکربندی‌های مختلف در یک فضای ساکن حمل می‌کند. چنین حرکتی را می‌توان با معادله زیر بیان کرد.

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\kappa}\,(X\,,\,t) \qquad (۳-۱-۴)$$

که موقعیت $\mathbf{x}$ را برای هر ذره X در تمام لحظات t که از $-\infty$ تا $+\infty$ می‌باشد ارائه می‌دهد. وقتی پیکربندی در حال شکل‌گیری است، فرض می‌کنیم تابع حرکت بیان شده توسط معادله ۴ - ۱ - ۳ بطور منحصر بفرد معکوس‌پذیر و قابلیت دیفرانسیل‌گیری دارد، پس معکوس آن را می‌توان به‌صورت زیر نشان داد.

$$X = \boldsymbol{\kappa}^{-1}\,(\mathbf{x}\,,\,t) \qquad (۴-۱-۴)$$

که مشخص می‌کند ذره X در موقعیت $\mathbf{x}$ در لحظه t واقع شده است.

بعضی از پیکربندی‌های جسم دارای مفهوم خاص می‌باشند، مشخصاً، یک **پیکربندی مرجع** را انتخاب می‌کنیم که تمامی تغییرمکان‌ها از این مرجع محسوب می‌شوند. برای مقصودی که پیکربندی مرجع به خدمت گرفته می‌شود نیازی نیست که آن تنها یک حالت باشد که جسم عملاً اشغال می‌کند. اغلب، **پیکربندی اولیه**، یعنی حالتی که جسم در لحظه $t = 0$ اشغال می‌کند، به‌عنوان پیکربندی مرجع انتخاب می‌شود و تغییرمکان‌ها و حرکاتی که پس از آن حاصل می‌شود مرتبط با آن است. **پیکربندی جاری** آن است که جسم در لحظه جاری t اشغال می‌کند.

در توسعه مفاهیم کرنش‌ها، توجه را محدود به دو پیکربندی خاص بدون هر گونه اعتنایی به دنباله‌ای که پیکربندی دوم از اول حاصل شده است معطوف می‌داریم. معمول است که حالت اول (مرجع) را **پیکربندی تغییرشکل نیافته** و حالت دوم را **پیکربندی تغییرشکل یافته** می‌نامند. بعلاوه، زمان عاملی در بدست آوردن تانسورهای کرنش مختلف نیست، بنابراین هر دو پیکربندی مستقل از زمان در نظر گرفته می‌شوند.

در مکانیک شاره‌ها، ایدهٔ پیکربندی‌های خاص چندان مفهوم ندارد چون شاره‌ها دارای یک «هندسه طبیعی» نیستند، بخاطر این موضوع، **میدان سرعت** یک شاره است که فرض

می‌شود نقش سینماتیکی بنیادین را دارد.

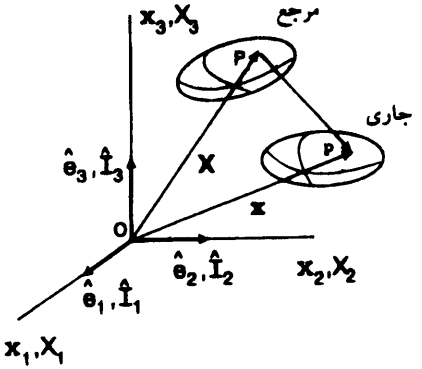
۴ - ۲ مختصات مادی و فضایی

اکنون پیکربندی مرجع توضیح داده شده توسط چند تابع نقش‌بندی را Φ را در نظر بگیرید. بطوری که بردار موقعیت $\mathbf{X}$ ذره X نسبت به محورهای $Ox_1x_2x_3$ در شکل ۴ - ۱ بدین صورت باشد.

$$\mathbf{X} = \Phi\ (X) \qquad (۱ - ۲ - ۴)$$

در این حالت می‌توان $\mathbf{X}$ را برحسب بردارهای مبنای $\hat{\mathbf{I}}_1$, $\hat{\mathbf{I}}_2$, $\hat{\mathbf{I}}_3$ که در شکل نشان داده شده توسط معادله زیر بیان کرد.

$$\mathbf{X} = X_A\hat{\mathbf{I}}_A \qquad (۲ - ۲ - ۴)$$



شکل ۴ - ۱

موقعیت یک ذره شاخص در پیکربندی مرجع $\mathbf{X}$ و پیکربندی جاری $\mathbf{x}$

و مولفه‌های X_A را ***مختصات مادی*** یا بعضی اوقات ***مختصات مرجع*** ذره X می‌نامند. حروف بزرگ که به‌عنوان زیرنوشت در مختصات مادی یا روی هر کمیتی که برحسب مختصات مادی بیان شده باشد بکار برده می‌شود، تمامی قاعده‌های نمادگذاری شاخصی را تبعیت می‌کند. معمول است که مختصات مادی (یعنی ، موقعیت بردار $\mathbf{X}$) هر ذره را به‌عنوان ***نام یا*** برچسب آن ذره اختصاص می‌دهند. در نتیجه ، در تمامی پیکربندی‌های متعاقب آن هر ذره را می‌توان

توسط موقعیت $\mathbf{X}$ که در پیکربندی مرجع اشغال می‌کند مشخص کرد. طبق معمول ، فرض می‌کنیم که نقش‌بندی معکوس وجود دارد.

$$X = \Phi^{-1}(\mathbf{X}) \qquad (۳-۲-۴)$$

پس با جایگذاری معادله ۴ - ۲ - ۳ در معادله ۴ - ۱ - ۳ بدست می‌آوریم.

$$\mathbf{x} = \kappa [\Phi^{-1}(\mathbf{X}, t)] = \chi(\mathbf{X}, t) \qquad (۴-۲-۴)$$

که حرکت جسم در فضای فیزیکی نسبت به پیکربندی مرجع توضیح داده شده توسط تابع نقش‌بندی Φ را تعریف می‌کند.

باید توجه داشت که معادله ۴ - ۲ - ۴ هر ذره واقع با موقعیت $\mathbf{X}$ در پیکربندی مرجع را نقش می‌زند به نقطه $\mathbf{x}$ در پیکربندی جاری در لحظه t، آنگونه که در شکل ۴ - ۱ مشخص شده است. نسبت به محورهای قائم $Ox_1x_2x_3$ بردار موقعیت جاری عبارت است از

$$\mathbf{x} = x_i\hat{\mathbf{e}}_i \qquad (۵-۲-۴)$$

که در آن مولفه‌های x_i را *مختصات فضایی* ذره می‌نامند. هر چند که منطبق کردن محورهای مختصات مادی و فضایی بصورتی که در شکل ۴ - ۱ اجرا شده است ضروری نیست، اما راحتتر خواهد بود چنین انجام شود، و محدودیت‌های جدی از این اقدام در بدست آوردن معادلات بعدی وجود ندارد. تاکید می‌کنیم که مختصات مادی فقط همراه با پیکربندی مرجع بکار برده می‌شود و مختصات فضایی برای سایر پیکربندی‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. همانگونه که قبلاً اظهار داشته شد. مختصات مادی مستقل از زمان است.

معادله ۴ - ۲ - ۴ را می‌توان بصورت مولفه‌هایی در مختصات قائم یا یک نمادگذاری مختصات آزاد (نمادین) با معادلات زیر که معادل یکدیگر هستند بیان نمود.

$$x_i = \chi_i(X_A, t) \quad \text{یا} \quad \mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) \qquad (۶-۲-۴)$$

در مکانیک محیط‌های پیوسته نوشتن این معادلات به شکل‌های متناوب زیر متداول می‌باشد.

$$x_i = x_i\,(X_A\,,\ t) \quad \text{یا} \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}\,(\mathbf{X}\,,\ t) \qquad (۷-۲-۴)$$

با درک اینکه نماد x_i (یا $\mathbf{x}$) در سمت راست معادله بیانگر ***تابعی*** است که پارامترهای آن $\mathbf{X}$ و t می‌باشد. در حالی که همان نماد در سمت چپ بیانگر **مقدار** تابع است، یعنی یک نقطه در فضا. این نمادگذاری را به کرات منبعد بکار می‌بریم.

باید توجه داشت وقتی که $\mathbf{X}$ مقادیر تخصیص یافته مرتبط با پیکربندی مرجع را اختیار می‌کند، t بطور همزمان روی فاصله زمانی تعریف شده‌ای تغییر خواهد کرد، تابع برداری $\boldsymbol{\chi}$ در معادله ۴ - ۲ - ۶ موقعیت فضایی $\mathbf{x}$ اشغال شده در هر لحظه از زمان را برای هر ذره از جسم ارائه می‌دهد. در یک زمان خاص مثلاً در $t = t_1$ تابع $\boldsymbol{\chi}$ پیکربندی را بدین صورت تعریف می‌کند.

$$\mathbf{x}_1 = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}\,,\ t_1) \qquad (۸-۲-۴)$$

بطور خاص، در $t = ۰$، معادله ۴ - ۲ - ۶ پیکربندی اولیه را تعریف می‌کند که اغلب به‌عنوان پیکربندی مرجع پذیرفته شده است، و این نتایج در مختصات ***فضایی اولیه*** از لحاظ مقدار با مختصات مادی یکسان هستند، پس در این حالت برای لحظه $t = ۰$

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}\,,\ ۰) = \mathbf{X} \qquad (۹-۲-۴)$$

اگر توجه را روی ذره خاص X^P که دارای بردار موقعیت مادی $\mathbf{X}^P$ است متمرکز کنیم، معادله ۴ - ۲ - ۶ شکل زیر را می‌گیرد.

$$\mathbf{x}^P = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}^P\,,\ t) \qquad (۱۰-۲-۴)$$

که ***مسیر یا خط سیر*** آن ذره را به‌عنوان تابعی از زمان توضیح می‌دهد. **سرعت** $\mathbf{v}^P$ ذره در امتداد مسیرش به‌عنوان نرخ زمانی تغییرات موقعیت تعریف شده است.

$$\mathbf{v}^P = \frac{d\mathbf{x}^P}{dt} = \dot{\boldsymbol{\chi}}^P = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^P} \qquad (۱۱-۲-۴)$$

که در آن نمادگذاری آخری نشان می‌دهد که متغیر $\mathbf{X}$ به هنگام گرفتن مشتق جزیی $\boldsymbol{\chi}$ ثابت نگه

داشته شده است. همچنین ، طبق استاندارد ، قرار دادن نقطه روی حروف معرفی شده است که مشتق نسبت به زمان را نشان می‌دهد. در یک عمومیت دادن آشکار ، می‌توان *میدان* سرعت کل جسم را به‌صورت مشتق تعریف کرد.

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial\, \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{x}\ (\mathbf{X}, t)}{\partial t} \qquad (۱۲-۲-۴)$$

بطور مشابه ، *میدان شتاب* عبارت است از

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{x}} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \frac{\partial^2\, \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2} \qquad (۱۳-۲-۴)$$

پس شتاب هر ذره خاص با جایگذاری مختصات مادی آن در معادله ۴ - ۲ - ۱۳ تعیین می‌شود.

البته ، ذرات یک جسم بطور انفرادی نمی‌توانند حرکات اختیاری را مستقل از یکدیگر اجرا کنند. مشخصاً ، هیچ دو ذره‌ای نمی‌توانند یک موقعیت در فضا را در یک زمان مشخص اشغال کنند (حقیقت آشکار نفوذناپذیر)، مزید بر آن در حرکات نرم که در اینجا در نظر می‌گیریم، هر دو ذره‌ای که در همسایگی یکدیگر در پیکربندی مرجع هستند همچنان در همسایگی هم در سایر پیکربندی‌ها باقی می‌ماند. بدین دلایل تابع $\boldsymbol{\chi}$ در معادله ۴ - ۲ - ۶ ، باید تک مقداره و پیوسته باشد و باید مشتقات پیوسته نسبت به فضا و زمان را به هر مرتبه‌ای که نیاز است معمولاً به دو یا سه مرتبه داشته باشد. بعلاوه ، نیاز به تابع معکوس یعنی $\boldsymbol{\chi}^{-1}$ می‌باشد.

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\chi}^{-1}\ (\mathbf{x}, t) \qquad (۱۴-۲-۴)$$

که همان خواص $\boldsymbol{\chi}$ را می‌بخشد. از نظر مفهوم ، معادله ۴ - ۲ - ۱۴ مجاز می‌دارد حرکت را برگردان کنیم و مسیر برگشت را بپیمایم و جائی را که ذره اکنون در $\mathbf{x}$ است در پیکربندی مرجع کشف کنیم. شرط ریاضی که وجود چنین تابع معکوس را تضمین می‌کند ، غیرصفر بودن دترمینان ژاکوبی J است. یعنی برای اینکه معادله معتبر باشد باید

$$J = \left| \frac{\partial \chi_i}{\partial X_A} \right| \neq 0 \qquad (۱۵-۲-۴)$$

این دترمینان معمولاً به‌صورت زیر نوشته خواهد شد.

$$J = \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_A} \right| \qquad (۱۶ - ۲ - ۴)$$

مثال ۴ ـ ۲ ـ ۱ حرکت یک جسم توسط معادله ۴ - ۲ - ۶ در شکل مولفه‌ای به‌صورت زیر داده شده است.

$$x_۱ = X_۱ + t^۲ X_۲$$
$$x_۲ = X_۲ + t^۲ X_۱$$
$$x_۳ = X_۳$$

تعیین کنید.

(الف) مسیر ذره‌ای که مبدأش در $(۱ , ۲ , ۱)$ **X** باشد.

(ب) مولفه‌های سرعت و شتاب همان ذره وقتی $t = ۲$ ثانیه باشد.

حل (الف) برای ذره $(۱ , ۲ , ۱)$ **X** معادله حرکت عبارت است از

$$x_۱ = ۱ + ۲ t^۲ \quad , \quad x_۲ = ۲ + t^۲ \quad , \quad x_۳ = ۱$$

که با حذف متغیر t، نتیجه می‌دهد $x_۱ - ۲x_۲ = -۳$ و همچنین $x_۳ = ۱$، پس ذره مورد مطالعه روی یک مسیر خط راست در صفحه $x_۳ = ۱$ حرکت می‌کند.

(ب) توسط معادلات ۴ - ۲ - ۱۲ و ۴ - ۲ - ۱۳ میدان‌های سرعت و شتاب در شکل مولفه‌ای عبارتند از

$$v_۱ = ۲ t X_۲ \qquad a_۱ = ۲ X_۲$$
$$v_۲ = ۲ t X_۱ \qquad \text{و} \qquad a_۲ = ۲ X_۱$$
$$v_۳ = ۰ \qquad a_۳ = ۰$$

در نتیجه برای ذره $(۱ , ۲ , ۱)$ **X** در لحظه $t = ۲$ داریم

$$v_۱ = ۸ \qquad a_۱ = ۴$$
$$v_۲ = ۴ \qquad \text{و} \qquad a_۲ = ۲$$
$$v_۳ = ۰ \qquad a_۳ = ۰$$

مثال ۴ ـ ۲ ـ ۲ معادلات حرکت مثال ۴ - ۲ - ۱ را معکوس کنید تا بدین صورت $\mathbf{X} = \boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x}, t)$ بدست آیند، آنگاه مولفه‌های سرعت و شتاب ذره واقع در $\mathbf{x}(۱, ۰, ۱)$ را وقتی $t = ۲$ ثانیه است تعیین کنید.

حل مستقیماً با معکوس کردن معادلات حرکت بدست می‌آوریم.

$$X_۱ = \frac{x_۱ - t^۲ x_۲}{۱ - t^۴} \quad , \quad X_۲ = \frac{x_۲ - t^۲ x_۱}{۱ - t^۴} \quad , \quad X_۳ = x_۳$$

که با جایگذاری در روابط سرعت و شتاب مثال ۴ - ۲ - ۱ نتیجه می‌دهد.

$$v_۱ = \frac{۲(x_۲ - t^۲ x_۱)}{۱ - t^۴} \qquad a_۱ = \frac{۲(x_۲ - t^۲ x_۱)}{۱ - t^۴}$$

$$v_۲ = \frac{۲t(x_۱ - t^۲ x_۲)}{۱ - t^۴} \quad \text{و} \quad a_۲ = \frac{۲(x_۱ - t^۲ x_۲)}{۱ - t^۴}$$

$$v_۳ = ۰ \qquad a_۳ = ۰$$

برای ذره واقع در $\mathbf{x}(۱, ۰, ۱)$ وقتی $t = ۲$ ثانیه است.

$$v_۱ = \frac{۱۶}{۱۵} \qquad a_۱ = \frac{۸}{۱۵}$$

$$v_۲ = -\frac{۴}{۱۵} \quad \text{و} \quad a_۲ = -\frac{۲}{۱۵}$$

$$v_۳ = ۰ \qquad a_۳ = ۰$$

۴ - ۳ توصیف‌های اولری و لاگرانژی

اگر یک خواص فیزیکی جسم **B** مثلاً چگالی ρ، یا یک خواص سینماتیکی حرکتش مثل سرعت **v**، برحسب مختصات ریاضی **X** و زمان t بیان شود، می‌گوئیم آن خواص توسط یک **توصیف مرجع یا مادی** ارائه شده است. وقتی پیکربندی مرجع به عنوان پیکربندی واقعی در لحظه $t = ۰$ اختیار شود، این توصیف را معمولاً **توصیف لاگرانژی** می‌نامند. پس معادلات

$$\rho = \rho\,(X_A\,,\,t) \quad \text{یا} \quad \rho = \rho\,(\mathbf{X}\,,\,t) \qquad (۴-۳-۱\text{ الف})$$

و

$$\nu_i = \nu_i\,(X_A\,,\,t) \quad \text{یا} \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}\,(\mathbf{X}\,,\,t) \qquad (۴-۳-۱\text{ ب})$$

شرح وقایع تاریخچه زمانی این خواص را برای هر ذره از جسم بیان می‌کند. در مقابل، اگر خواص ρ و $\mathbf{v}$ به‌صورت توابعی از مختصات فضایی $\mathbf{x}$ و زمان t داده شود، می‌گوئیم آن خواص توسط یک **توصیف فضایی** یا آنگونه که بعضی اوقات مصطلح است توسط **توصیف اولری** بیان شده‌اند. از نقطه نظر معادله ۴ - ۲ - ۱۴ ، واضح است که معادله ۴ - ۳ - ۱ می‌تواند تبدیل به بیان همان خواص در توصیف فضایی بشود. بر این اساس، می‌توان نوشت.

$$\rho = \rho\,(\mathbf{X}\,,\,t) = \rho\,[\boldsymbol{\chi}^{-1}\,(\mathbf{x}\,,\,t)\,,\,t\,] = \rho^*\,(\mathbf{x}\,,\,t) \qquad (۴-۳-۲\text{ الف})$$

و

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}\,(\mathbf{X}\,,\,t) = \mathbf{v}\,[\boldsymbol{\chi}^{-1}\,(\mathbf{x}\,,\,t)\,,\,t\,] = \mathbf{v}^*\,(\mathbf{x}\,,\,t) \qquad (۴-۳-۲\text{ ب})$$

که در آن ستاره فقط به منظور تاکید می‌باشد که توابعی مختلف از جابجائی متغیرها نتیجه شده‌اند. توجه داریم که ، در توصیف مادی توجه روی آنچه در حال اتفاق افتادن برای ذرات منفرد در حال حرکت است متمرکز می‌شود ، در حالی که در توصیف فضایی تاکید جهت‌گیری به وقایعی است که در نقاط خاص در فضا رخ می‌دهد.

مثال ۴ ــ ۳ ــ ۱ معادلات حرکت در شکل مولفه‌ای با توصیف لاگرانژی عبارتند از

$$x_1 = X_1 e^t + X_2\,(e^t - 1)$$
$$x_2 = X_2 + X_3\,(e^t - e^{-t})$$
$$x_3 = X_3$$

توصیف اولری این حرکت را تعیین کنید.

حل نخست توجه شود که برای حرکتی به‌صورت $x_1 = X_1$, $x_2 = X_2$ و $x_3 = X_3$ در لحظه $t = 0$ نتیجه می‌شود که پیکربندی اولیه به‌عنوان پیکربندی مرجع اختیار شده است. بخاطر سادگی معادلات لاگرانژی حرکت ، می‌توان x_3 را برای X_3 در دو معادله اول قرار دارد آنها را مستقیماً برای بدست آوردن معادلات معکوس حل کرد.

$$X_1 = x_1 e^{-t} + x_2 (e^{-t} - 1)$$
$$X_2 = x_2 + x_3 (e^{-t} - e^{t})$$
$$X_3 = x_3$$

مثال ۴ ـ ۳ ـ ۲ برای حرکت مثال ۴ - ۳ - ۱ ، میدان‌های سرعت و شتاب را تعیین کنید و آنها را در هر دو شکل توصیف‌های لاگرانژی و اولری بیان نمایید.

حل

از معادلات حرکت و تعریف سرعت توسط معادله ۴ - ۲ - ۱۲ مولفه‌های سرعت لاگرانژی را بدست می‌آوریم.

$$v_1 = X_1 e^{t} + X_2 e^{t}$$
$$v_2 = X_3 (e^{t} + e^{-t})$$
$$v_3 = 0$$

و از معادله ۴ - ۲ - ۱۳ مولفه‌های شتاب عبارتند از

$$a_1 = (X_1 + X_2)\, e^{t}$$
$$a_2 = X_3 (e^{t} - e^{-t})$$
$$a_3 = 0$$

بنابراین با معرفی معادلات نقش‌بندی معکوس بدست آمده در مثال ۴ - ۳ - ۱ ، معادلات شتاب در شکل اولری بدست می‌آید.

$$v_1 = x_1 + x_2 \qquad a_1 = x_1 + x_2$$
$$v_2 = x_3 (e^{t} + e^{-t}) \qquad \text{و} \qquad a_2 = x_3 (e^{t} - e^{-t})$$
$$v_3 = 0 \qquad a_3 = 0$$

۴ - ۴ میدان تغییرمکان

همانگونه که از شکل ۴ - ۱ مشاهده می‌شود، ذره‌ای شاخص از جسم تحت **تغییرمکان**

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \qquad (۱ - ۴ - ۴)$$

در حال عبور از پیکربندی مرجع به پیکربندی جاری قرار گرفته است. چون این رابطه برای تمامی ذرات صدق می‌کند، اغلب مفید است که تغییرشکل یا حرکت را برحسب *میدان تغییرمکان* جسم تحلیل نمود. می‌توان بردار تغییرمکان $\mathbf{u}$ را در شکل مولفه‌ای به یکی از دو عبارت معادل زیر نوشت.

$$\mathbf{u} = u_i \hat{\mathbf{e}}_i = u_A \hat{\mathbf{I}}_A \qquad (۲ - ۴ - ۴)$$

بعلاوه ، با عنایت به توصیف‌های مادی و فضایی می‌توان معادله ۴ - ۴ - ۱ را در شکل مادی

$$\mathbf{u}\,(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}\,(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \qquad (۴ - ۴ - ۳ \text{ الف})$$

یا در شکل فضایی تفسیر کرد

$$\mathbf{u}\,(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X}\,(\mathbf{x}, t) \qquad (۴ - ۴ - ۳ \text{ ب})$$

معادله اول تغییرمکانی را توصیف می‌کند که اتفاق خواهد افتاد برای ذره‌ای که از $\mathbf{X}$ شروع کند، و معادله دوم، تغییرمکانی راکه ذره هم‌اکنون در $\mathbf{x}$ تحت آن واقع شده ارائه می‌دهد. با یادآوری اینکه مختصات مادی فقط موقعیت‌ها را به پیکربندی مرجع ارتباط می‌دهد، و از این رو مستقل از زمان است، می‌توان نرخ زمانی تغییرات تغییرمکان را به‌عنوان یک تعریف جایگزین برای سرعت در نظر گرفت پس ،

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\,(\mathbf{x} - \mathbf{X})}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v} \qquad (۴ - ۴ - ۴)$$

مثال ۴ ـ ۴ ـ ۱ میدان تغییرمکان را برای حرکت اشاره شده در مثال ۴ - ۳ - ۱ در هر دو توصیف مادی و فضایی بدست آورید.

حل از معادلات حرکت مثال ۴ - ۳ - ۱ ، مشخصاً داریم

$$x_1 = X_1 e^t + X_2\,(e^t - 1)$$
$$x_2 = X_2 + X_3\,(e^t - e^{-t})$$
$$x_3 = X_3$$

می‌توان میدان تغییرمکان در شکل مادی را مستقیماً محاسبه نمود.

$$u_1 = x_1 - X_1 = (X_1 + X_2)(e^t - 1)$$
$$u_2 = x_2 - X_2 = X_3\,(e^t - e^{-t})$$
$$u_3 = x_3 - X_3 = 0$$

با استفاده از معادلات معکوس مثال ۴ - ۳ - ۱ ، یعنی

$$X_1 = x_1 e^{-t} + x_2\,(e^{-t} - 1)$$
$$X_2 = x_2 + x_3\,(e^{-t} - e^t)$$
$$X_3 = x_3$$

توصیف فضایی میدان تغییرمکان در شکل مولفه‌ای بدست می‌آید.

$$u_1 = (x_1 + x_2)(1 - e^{-t})$$
$$u_2 = x_3\,(e^t - e^{-t})$$
$$u_3 = 0$$

۴ - ۵ مشتق مادی

در این قسمت، هر گونه خواص فیزیکی یا سینماتیکی یک جسم محیط پیوسته را در نظر می‌گیریم. چون این خاصیت ممکن است عددی، برداری یا تانسوری باشد آن را با نماد عمومی $\mathbf{P}_{ij}$ ... با درک اینکه ممکن است در توصیف مادی

$$\mathbf{P}_{ij} \ldots = \mathbf{P}_{ij} \ldots (\mathbf{X}, t) \qquad (۴ - ۵ - ۱ \text{ الف})$$

یا در توصیف فضایی

$$\mathbf{P}_{ij} \ldots = \mathbf{P}_{ij} \ldots (\mathbf{x}, t) \qquad (۴ - ۵ - ۱ \text{ ب})$$

بیان شود. **مشتق مادی** چنین خواصی عبارت است از نرخ زمانی تغییرات آن خواص برای یک مجموعه خاص ذرات (یک یا بیشتر) از جسم محیط پیوسته . این مشتق را اینگونه می‌توان تصور کرد که نرخ تغییر $\mathbf{P}_{ij}$ ... وقتی توسط یک ناظر همراه و همسفر با ذره یا گروه ذرات اندازه‌گیری شود. اپراتور دیفرانسیل d / dt یا قرار دادن نقطه روی حرف را برای مشتق مادی بکار

می‌بریم، توجه شود که سرعت و شتاب تعریف شده در قبل مشتقات مادی هستند.

وقتی ... $\mathbf{P}_{ij}$ در توصیف مادی طبق معادله ۴ - ۵ - ۱ الف ارائه شود، مشتق مادی بطور ساده همان مشتق جزیی نسبت به زمان است.

$$\frac{d}{dt}\ [\ \mathbf{P}_{ij} \ldots (\mathbf{X}, t)\ ] = \frac{\partial}{\partial t}\ [\ \mathbf{P}_{ij} \ldots (\mathbf{X}, t)] \qquad (۴ - ۵ - ۲)$$

چون همانگونه که قبلاً توضیح داده شد، مختصات مادی $\mathbf{X}$ اساساً برچسب هستند و نسبت به زمان تغییر نمی‌کنند. ولی اگر ... $\mathbf{P}_{ij}$ در شکل فضایی طبق معادله ۴ - ۵ - ۱ ب داده شود تشخیص خواهیم داد که مجموعه ذرات خاص موردنظر موقعیت آنان در فضا تغییر می‌کند و باید قاعده دیفرانسیل‌گیری زنجیره‌ای را بکار برد.

$$\frac{d}{dt}\ [\ \mathbf{P}_{ij} \ldots (\mathbf{x}, t)\ ] = \frac{\partial}{\partial t}\ [\ \mathbf{P}_{ij} \ldots (\mathbf{x}, t)] + \frac{\partial}{\partial x_k}\ [\mathbf{P}_{ij} \ldots (\mathbf{x}, t)]\ \frac{dx_k}{dt} \qquad (۴ - ۵ - ۳)$$

در این معادله ، جمله اول سمت راست تغییری که در خواص برای موقعیت $\mathbf{x}$ اتفاق می‌افتد را بیان می‌کند که معروف به *نرخ محلی تغییرات* است، جمله دوم حاصل از تغییرات موقعیت ذرات در فضا می‌باشد و معروف به *نرخ انتقالی تغییرات* است. چون توسط معادله ۴ - ۲ - ۱۲ سرعت به‌صورت $\mathbf{v} = d\mathbf{x} / dt$ (یا $v_k = dx_k / dt$) تعریف می‌شود، معادله ۴ - ۵ - ۳ را بدین گونه می‌توان نوشت.

$$\frac{d}{dt}\ [\ \mathbf{P}_{ij} \ldots (\mathbf{x}, t)\ ] = \frac{\partial}{\partial t}\ [\ \mathbf{P}_{ij} \ldots (\mathbf{x}, t)] + \frac{\partial}{\partial x_k}\ [\ \mathbf{P}_{ij} \ldots (\mathbf{x}, t)]\ v_k \qquad (۴ - ۵ - ۴)$$

که از آن ، *اپراتور مشتق مادی* برای خواص بیان شده در *توصیف فضایی* استنباط می‌شود.

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \quad \text{یا} \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_x \qquad (۴ - ۵ - ۵)$$

شکل اول معادله ۴ - ۵ - ۵ نمادگذاری شاخصی برای مختصات قائم مستطیلی می‌باشد. در حالی که شکل دوم به‌صورت نمادگذاری نمادین می‌باشد، و زیرنوشت در اپراتور *del* مشخص می‌کند که مشتقات جزیی نسبت به متغیرهای فضایی است.

مثال ۴ ـ ۵ ـ ۱ یک حرکت مشخص برای یک محیط پیوسته با معادلات مولفه‌ای زیر داده شده است.

$$x_1 = X_1 e^{-t} \quad , \quad x_2 = X_2 e^{t} \quad , \quad x_3 = X_3 + X_2 \, (e^{-t} - 1)$$

برای میدان درجه حرارت جسم در توصیف فضایی به‌صورت زیر

$$\mathbf{T} = e^{-t} \, (x_1 - 2\, x_2 + 3\, x_3)$$

میدان سرعت در شکل فضایی را تعیین کنید. با استفاده از آن مشتق مادی $dT \,/\, dt$ میدان درجه حرارت را محاسبه کنید.

حل در اینجا مجدداً باید توجه داشت که پیکربندی اولیه به‌عنوان پیکربندی مرجع می‌باشد. در نتیجه معادله ۴ – ۲ – ۹ تامین می‌شود. وقتی معادله ۴ – ۵ – ۲ بکار برده شود، مولفه‌های سرعت در شکل مادی براحتی بدین صورت تعیین می‌شوند.

$$v_1 = - X_1 e^{-t} \quad , \quad v_2 = X_2 e^{t} \quad , v_3 = - X_2 e^{-t}$$

همچنین معادلات حرکت را مستقیماً می‌توان معکوس کرد تا بدست آید.

$$X_1 = x_1 e^{t} \quad , \quad X_2 = x_2 e^{-t} \quad , X_3 = x_3 - x_2 \, (e^{-2t} - e^{-t})$$

که با جایگذاری در روابط سرعت ، مولفه‌های فضایی آن نتیجه می‌شود.

$$v_1 = - x_1 \quad , \quad v_2 = x_2 \quad , \quad v_3 = - x_2 e^{-2t}$$

بنابراین، اکنون می‌توان $dT \,/\, dt$ را در شکل فضایی با استفاده از معادله ۴ – ۵ – ۴ محاسبه کرد.

$$\frac{dT}{dt} = - e^{-t} \, (x_1 - 2\, x_2 + 3\, x_3) - x_1 e^{-t} - 2\, x_2 e^{-t} - 3\, x_2 e^{-2t}$$

که قابل تبدیل به شکل مادی با استفاده از معادلات اصلی حرکت می‌باشد در نتیجه

$$\frac{dT}{dt} = -۲X_۱e^{-۲t} - ۳X_۲(۲e^{-۲t} - e^{-t}) - ۳X_۳e^{-t}$$

وضعیت جالب و نسبتاً منحصر بفردی که اتفاق می‌افتد هنگامی است که می‌خواهیم میدان سرعت را در شکل فضایی با کاربرد مستقیم معادله ۴ - ۵ - ۴ روی میدان تغییرمکان در شکل فضایی‌اش اجرا نمائیم. مثال زیر این نکته را تشریح می‌کند.

مثال ۴ ـ ۵ ـ ۲ مولفه‌های فضایی سرعت را که در مثال ۴ - ۵ - ۱ بدست آمده‌اند با کاربرد مستقیم معادله ۴ - ۵ - ۴ روی مولفه‌های تغییرمکان در شکل فضایی برای حرکت ذکر شده در همان مثال را بررسی کنید.

حل مولفه‌های تغییرمکان در شکل مادی را مستقیماً می‌توان از معادلات حرکت اشاره شده در مثال ۴ - ۵ - ۱ تعیین نمود.

$$u_۱ = x_۱ - X_۱ = X_۱(e^{-t} - ۱)$$
$$u_۲ = x_۲ - X_۲ = X_۲(e^{t} - ۱)$$
$$u_۳ = x_۳ - X_۳ = X_۲(e^{-t} - ۱)$$

با استفاده از معادلات معکوس $\mathbf{X} = \boldsymbol{\chi}^{-۱}(\mathbf{x}, t)$ محاسبه شده در مثال ۴ - ۵ - ۱ تغییرمکان‌های فضایی را بدست می‌آوریم.

$$u_۱ = x_۱(۱ - e^{t})$$
$$u_۲ = x_۲(۱ - e^{-t})$$
$$u_۳ = x_۲(e^{-۲t} - e^{-t})$$

بنابراین، با جایگذاری u_i برای ... $\mathbf{P}_{ij}$ در معادله ۴ - ۵ - ۴ نتیجه می‌دهد.

$$v_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$$

پس با دیفرانسیل‌گیری از مولفه‌های تغییرمکان فوق

$$v_1 = -x_1 e^t + v_1 (1 - e^t)$$
$$v_2 = x_2 e^{-t} + v_2 (1 - e^{-t})$$
$$v_3 = -x_2 (2 e^{-2t} - e^{-t}) + v_2 (e^{-2t} - e^{-t})$$

که یک مجموعه معادلات دارای مولفه‌های سرعت موردنظر در هر دو طرف معادله را نتیجه می‌دهد. بطورکلی، این مجموعه معادلات باید همزمان برای بدست آوردن یک رابطه صریح برای سرعت حل شوند. در این حالت ، حل کاملاً آسان حاصل می‌گردد.

$$v_1 = -x_1 \quad , \quad v_2 = x_2 \quad , \quad v_3 = -x_2 e^{-2t}$$

که نتایج مثال ۴ - ۵ - ۱ را تائید می‌کند.

۴ - ۶ گرادیان‌های تغییرشکل، تانسورهای کرنش محدود

در تحلیل تغییرشکل، توجه را منحصر می‌کنیم به دو پیکربندی ساکن و هر ملاحظه‌ای را برای دنباله خاصی که ***پیکربندی تغییرشکل یافته*** نهایی از ***پیکربندی تغییرشکل نیافته*** اولیه بدست آورده کنار می‌گذاریم. بر این اساس، تابع نقش بندی وابسته به زمان به‌عنوان یک متغیر نیست، در نتیجه معادله ۴ - ۲ - ۶ به‌صورت زیر درمی‌آید.

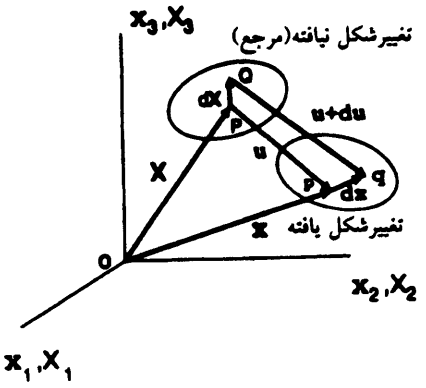
$$x_i = \chi_i (\mathbf{X}) \quad \text{یا} \quad \mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}) \qquad (۱ - ۶ - ۴)$$

پس دو ذره همسایه از یک جسم که در نقاط P و Q از پیکربندی تغییرشکل نیافته قرار دارند در نظر می‌گیریم بطوری که وضعیت Q نسبت به P مطابق شکل ۴ - ۲ توسط بردار موقعیت دیفرانسیلی زیر بیان شود.

$$d\mathbf{X} = dX_A \hat{\mathbf{I}}_A \qquad (۲ - ۶ - ۴)$$

مربع اندازه $d\mathbf{X}$ عبارت است از

$$(dX)^2 = d\mathbf{X} \,.\, d\mathbf{X} = dX_A dX_A \qquad (۳ - ۶ - ۴)$$



شکل ۴ - ۲

بردار $d\mathbf{X}$ بین نقاط P و Q در پیکربندی مرجع تبدیل خواهد شد به $d\mathbf{x}$ بین نقاط p و q در پیکربندی تغییرشکل یافته . بردار تغییرمکان $\mathbf{u}$ برداری است بین نقاط p و P.

تحت میدان تغییرمکان تعیین شده توسط تابع χ_i معادله ۴ - ۶ - ۱ ، ذرات واقع در P و Q به‌ترتیب به موقعیت‌های p و q در پیکربندی تغییرشکل یافته حرکت می‌کنند بگونه‌ای که بردار موقعیت نسبی آنها اکنون بدین صورت است.

$$d\mathbf{x} = dx_i \hat{\mathbf{e}}_i \qquad (۴ - ۶ - ۴)$$

و مربع اندازه آن خواهد شد.

$$(dx)^2 = d\mathbf{x} \,.\, d\mathbf{x} = dx_i \, dx_i \qquad (۴ - ۶ - ۵)$$

فرض می‌کنیم تابع نقش‌بندی χ_i معادله ۴ - ۶ - ۱ پیوسته است پس

$$dx_i = \frac{\partial \chi_i}{\partial X_A} dX_A \qquad (۴ - ۶ - ۶)$$

که غالباً بدین صورت نوشته می‌شود.

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_A} dX_A = x_{i,A} \, dX_A \qquad (۴ - ۶ - ۷)$$

که در آن

$$x_{i,A} \equiv F_{iA} \qquad (۸-۶-۴)$$

را *تانسور گرادیان تغییرشکل* یا بطور ساده ، *گرادیان تغییرشکل* می‌نامند. تانسور **F** تغییرشکل محلی در **X** را مشخص می‌کند که ممکن است بطور صریح وابسته به **X** باشد. در این حالت تغییرشکل را **غیرهمگن** می‌نامند. اگر **F** مستقل از **X** باشد، تغییرشکل را **همگن** می‌گویند.

در نمادگذاری نمادین ، معادله ۴ - ۶ - ۷ در یکی از دو صورت زیر ظاهر می‌شوند.

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}.\, d\mathbf{X} \qquad \text{یا} \qquad d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X} \qquad (۹-۶-۴)$$

که در آن، همانگونه که معادله دوم نشان می‌دهد نقطه اغلب برای راحتی در معادله حذف می‌شود. از دید شرایط نرمی اعمال شده روی تابع نقش‌بندی χ ، می‌دانیم که **F** معکوس‌پذیر است در نتیجه معکوس $\mathbf{F}^{-1}$ وجود دارد.

$$dX_A = X_{A,i}dx_i \qquad \text{یا} \qquad d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1}\,.\, d\mathbf{x} \qquad (۱۰-۶-۴)$$

در توضیح حرکات و تغییرشکل‌ها ، بطور معمول چندین اندازه تغییرشکل را مورد استفاده قرار می‌دهند. ابتدا یکی از آنان را که بر مبنای تغییر در خلال تغییرشکل در *مربعات اندازه* مسافت بین ذرات واقع در P و Q هستند در نظر می‌گیریم، مشخصاً

$$(dx)^2 - (dX)^2 = dx_i dx_i - dX_A dX_A$$

که از معادله ۴ - ۶ - ۷ و جایگذاری خاصیت دلتای کرانکر δ_{AB} می‌تواند به‌صورت زیر بسط یابد.

$$(dx)^2 - (dX)^2 = (x_{i,A}\, dX_A)(x_{i,B}\, dX_B) - \delta_{AB}\, dX_A\, dX_B$$

$$= (x_{i,A}\, x_{i,B} - \delta_{AB})\, dX_A\, dX_B$$

$$= (C_{AB} - \delta_{AB})\, dX_A\, dX_B \qquad (۱۱-۶-۴)$$

که در آن تانسور متقارن

$$C_{AB} = x_{i,A}\, x_{i,B} \quad \text{یا} \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^T . \mathbf{F} \qquad (۱۲-۶-۴)$$

را *تانسور تغییرشکل گرین* می‌نامند. از این بلافاصله *تانسور کرنش محدود لاگرانژی* E_{AB} تعریف می‌شود.

$$۲\, E_{AB} = C_{AB} - \delta_{AB} \quad \text{یا} \quad ۲\, \mathbf{E} = \mathbf{C} - \mathbf{I} \qquad (۱۳-۶-۴)$$

که در آن ضریب دو برای راحتی در محاسبات بعدی معرفی شده است. بالاخره می‌توان نوشت.

$$(dx)^۲ - (dX)^۲ = ۲\, E_{AB}\, dX_A\, dX_B = d\mathbf{X} .\, ۲\, \mathbf{E} .\, d\mathbf{X} \qquad (۱۴-۶-۴)$$

تفاوت $(dx)^۲ - (dX)^۲$ ممکن است برحسب متغیرهای فضایی به‌طریق مشابه بسط داده شود.

$$(dx)^۲ - (dX)^۲ = \delta_{ij}\, dx_i\, dx_j - (X_{A,i}\, dx_i)(X_{A,j}\, dx_j)$$

$$= (\delta_{ij} - X_{A,i}\, X_{A,j})\, dx_i\, dx_j$$

$$= (\delta_{ij} - c_{ij})\, dx_i\, dx_j \qquad (۱۵-۶-۴)$$

که در آن تانسور متقارن

$$c_{ij} = X_{A,i}\, X_{A,j} \quad \text{یا} \quad \mathbf{c} = (\mathbf{F}^{-۱})^T .\, (\mathbf{F}^{-۱}) \qquad (۱۶-۶-۴)$$

را *تانسور تغییرشکل کوشی* می‌نامند. از این نتیجه *تانسور کرنش محدود اولری* تعریف می‌شود.

$$۲\, e_{ij} = (\delta_{ij} - c_{ij}) \quad \text{یا} \quad ۲\, \mathbf{e} = (\mathbf{I} - \mathbf{c}) \qquad (۱۷-۶-۴)$$

در نتیجه اکنون

$$(dx)^۲ - (dX)^۲ = ۲\, e_{ij}\, dx_i\, dx_j = d\mathbf{x} .\, ۲\, \mathbf{e} .\, d\mathbf{x} \qquad (۱۸-۶-۴)$$

البته هر دو تانسور E_{AB} و e_{ij} تانسورهای مرتبه دوم متقارن هستند، همانگونه که از تعارفشان مشاهده می‌شود.

برای هر دو بردار دیفرانسیل اختیاری $d\mathbf{X}^{(1)}$ و $d\mathbf{X}^{(2)}$ که بترتیب تغییرشکل می‌دهند به $d\mathbf{x}^{(1)}$ و $d\mathbf{x}^{(2)}$ از معادله ۴ - ۶ - ۹ و همچنین معادلات ۴ - ۶ - ۱۲ و ۴ - ۶ - ۱۳ خواهیم داشت.

$$d\mathbf{x}^{(1)} . d\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{F} . d\mathbf{X}^{(1)} . \mathbf{F} . d\mathbf{X}^{(2)} = d\mathbf{X}^{(1)} . \mathbf{F}^{T} . \mathbf{F} . d\mathbf{X}^{(2)}$$

$$= d\mathbf{X}^{(1)} . \mathbf{C} . d\mathbf{X}^{(2)} = d\mathbf{X}^{(1)} . (\mathbf{I} + 2\,\mathbf{E}) . d\mathbf{X}^{(2)}$$

$$= d\mathbf{X}^{(1)} . d\mathbf{X}^{(2)} + d\mathbf{X}^{(1)} . 2\,\mathbf{E} . d\mathbf{X}^{(2)} \qquad (۱۹ - ۶ - ۴)$$

اگر $\mathbf{E}$ مشخصاً صفر باشد (کرنش وجود نداشته باشد) معادله ۴ - ۶ - ۱۹ اثبات می‌کند که طول‌های تمامی اجزاء خطی بدون تغییر باقی می‌مانند [می‌توان $d\mathbf{X}^{(1)} = d\mathbf{X}^{(2)} = d\mathbf{X}$ را انتخاب کرد در نتیجه $(dx)^2 = (dX)^2$] و از دید تعریف $d\mathbf{x}^{(1)} . d\mathbf{x}^{(2)} = dx^{(1)} dx^{(2)} \cos\theta$ زاویه بین هر دو جزء همچنان بدون تغییر باقی خواهد ماند. پس در غیاب کرنش فقط یک تغییرمکان جسم صلب اتفاق می‌افتد.

تانسورهای کرنش محدود لاگرانژی و اولری بیان شده توسط معادلات ۴ - ۶ - ۱۳ و ۴ - ۶ - ۱۷ برحسب گرادیان‌های تغییرشکل مقتضی ارائه شده‌اند. این تانسورهای یکسان را می‌توان همچنان برحسب *گرادیان های تغییرمکان* توسعه داد. برای این مقصود، با نوشتن معادله ۴ - ۴ - ۳ در شکل مستقل از زمان و استوار با تحلیل تغییرشکل شروع می‌کنیم. در نمادگذاری مولفه‌ای، توصیف مادی عبارت است از

$$u_i (X_A) = x_i (X_A) - X_i \qquad (۴ - ۶ - ۲۰ \text{ الف})$$

و در توصیف فضایی برابر است با

$$u_A (x_i) = x_A - X_A (x_i) \qquad (۴ - ۶ - ۲۰ \text{ ب})$$

از معادله اول ، معادله ۴ - ۶ - ۱۳ خواهد شد.

$$۲\,E_{AB} = x_{i,A}\,x_{i,B} - \delta_{AB} = (u_{i,A} + \delta_{iA})(u_{i,B} + \delta_{iB}) - \delta_{AB}$$

که به‌صورت زیر کاهش می‌یابد.

$$۲\,E_{AB} = u_{A,B} + u_{B,A} + u_{i,A}\,u_{i,B} \qquad (۴ - ۶ - ۲۱)$$

و از معادله دوم ، معادله ۴ - ۶ - ۱۷ نتیجه می‌دهد.

$$۲\,e_{ij} = \delta_{ij} - X_{A,i}\,X_{A,j} = \delta_{ij} - (\delta_{Ai} - u_{A,i})(\delta_{Aj} - u_{A,j})$$

که بدین شکل کاهش می‌یابد.

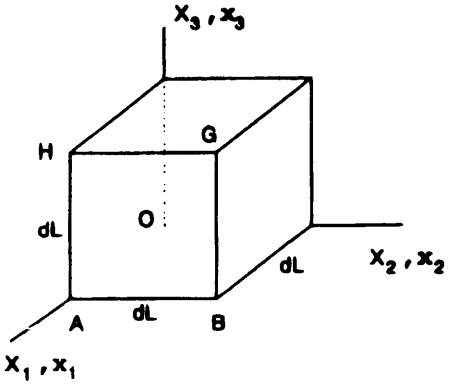
$$۲\,e_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} - u_{A,i}\,u_{A,j} \qquad (۴ - ۶ - ۲۲)$$

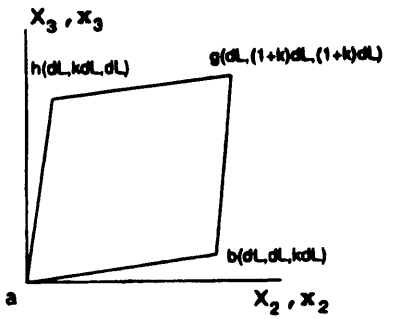
مثال ۴ ـ ۶ ـ ۱ تغییرشکل برشی ساده $x_۱ = X_۱\,,\ x_۲ = X_۲ + kX_۳\,, x_۳ = X_۳ + kX_۲$ که در آن k یک ثابت است، به یک مکعب کوچک به بعد dL مطابق شکل اعمال می‌شود. شکل تغییرشکل یافته ضلع $ABGH$ از مکعب را بکشید و تفاوت $(dx)^۲ - (dX)^۲$ را برای قطرهای $AG\,,\ BH$ و OG مکعب تعیین کنید.

حل مستقیماً از معادله نقش‌بندی مشاهده می‌شود که مبدأ O در جا باقی می‌ماند و ذرات اصالتاً در نقاط $A\,,\ B\,,\ G$ و H به‌ترتیب به نقاط $a\ (dL\,,\ O\,,\ O)\,,\ b\ (dL\,,\ dL\,,\ kdL)\,,$ $g\ [\ dL\,,\ (۱ + k)\ dL\,,\ (۱ + k)\ dL\ ]$ و $h\ (dL\,,\ kdL\,,\ dL)$ جابجا می‌شوند، در نتیجه ذرات در صفحه‌های موازی با صفحه $X_۲X_۳$ در همان صفحه‌ها باقی می‌مانند، و ضلع مربع شکل $ABGH$ به متوازی‌الاضلاع الماس شکل $abgh$ مطابق شکل تبدیل می‌شود.

همچنین از معادلات نقش‌بندی و معادله ۴ - ۶ - ۸ ، مشاهده می‌شود که گرادیان تغییرشکل $\mathbf{F}$ دارای شکل ماتریسی زیر است.

$$[\ F_{iA}\ ] = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & k \\ ۰ & k & ۱ \end{bmatrix}$$





چون $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T . \mathbf{F}$ می‌باشد پس

$$[\,C_{AB}\,] = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ + k^۲ & ۲k \\ ۰ & ۲k & ۱ + k^۲ \end{bmatrix}$$

از آنجا $۲\mathbf{E} = \mathbf{C} - \mathbf{I}$ تعیین می‌شود.

$$[\,۲E_{AB}\,] = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & k^۲ & ۲k \\ ۰ & ۲k & k^۲ \end{bmatrix}$$

بطورکلی ، $(dx)^2 - (dX)^2 = d\mathbf{X} \,.\, 2\,\mathbf{E} \,.\, d\mathbf{X}$ در نتیجه ، برای قطر AG داریم

$$(dx)^2 - (dX)^2 = [0\ ,\ dL\ ,\ dL] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^2 & 2k \\ 0 & 2k & k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ dL \\ dL \end{bmatrix}$$

$$= 2\,(2k + k^2)(dL)^2$$

برای قطر BH

$$(dx)^2 - (dX)^2 = [0\ ,\ -dL\ ,\ dL] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^2 & 2k \\ 0 & 2k & k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -dL \\ dL \end{bmatrix}$$

$$= 2\,(-2k + k^2)(dL)^2$$

برای قطر OG

$$(dx)^2 - (dX)^2 = [dL\ ,\ dL\ ,\ dL] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^2 & 2k \\ 0 & 2k & k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dL \\ dL \\ dL \end{bmatrix}$$

$$= 2\,(2k + k^2)(dL)^2$$

توجه : تمامی این نتایج را می‌توان مستقیماً از هندسه مکعب تغییرشکل یافته برای این تغییرشکل ساده محاسبه کرد.

۴ - ۷ نظریه تغییرشکل بسیار کوچک

اگر مقادیر عددی تمام مولفه‌های تانسورهای گرادیان تغییرمکان خیلی کوچک باشند، می‌توان از مربعات و ضرب این کمیت‌ها در مقایسه با خود گرادیان‌ها صرف‌نظر کرد، در نتیجه معادلات ۴ - ۶ - ۲۱ و ۴ - ۶ - ۲۲ به‌صورت زیر کاهش می‌یابد.

$$۲\,E_{AB} = u_{A,B} + u_{B,A} \qquad (۱-۷-۴)$$

و

$$۲\,e_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} \qquad (۲-۷-۴)$$

این روابط به‌ترتیب معروف به تانسورهای **خطی شده** کرنش لاگرانژی و اولری می‌باشند. مزید بر آن به همان مرتبه تقریب سازی

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_A} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial X_A} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u_k}{\partial X_A} + \delta_{kA}\right) \approx \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\,\delta_{kA} \qquad (۳-۷-۴)$$

که در اینجا رابطه زیر را که با دیفرانسیل‌گیری از معادله ۴ - ۶ - ۲۰ الف با صرف‌نظر از جمله مربع گرادیان تغییرمکان بدست آمده است، بکار برده‌ایم.

$$\frac{\partial x_k}{\partial X_A} = \frac{\partial u_k}{\partial X_A} + \delta_{kA}$$

بنابراین تا اولین مرتبه تقریب سازی برای حالت گرادیان‌های تغییرمکان کوچک ، مهم نیست که آیا دیفرانسیل‌گیری مولفه‌های تغییرمکان نسبت به مختصات مادی یا فضایی می‌باشد. از این دیدگاه ، می‌توان گرادیان‌های تغییرمکان نسبی معادل را برای نظریه تغییرشکل کوچک به‌صورت $u_{i,A}$ یا $u_{i,j}$ نشان داد. بطور مشابه می‌توان نشان داد که در نظریه خطی $u_{A,B}$ و $u_{A,j}$ معادل هستند. از آنجا نتیجه می‌شود که همان مرتبه تقریب سازی ، از معادلات ۴ - ۷ - ۱ و ۴ - ۷ - ۲

$$E_{AB} \approx e_{ij}\,\delta_{iA}\,\delta_{jB} \qquad (۴-۷-۴)$$

و بطور معمول یک ***تانسور کرنش بسیار کوچک*** منفرد تعریف می‌شود که برای آن نماد ε_{ij} به‌صورت زیر معرفی می‌گردد.

$$۲\,\varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_A}\,\delta_{Aj} + \frac{\partial u_j}{\partial X_B}\,\delta_{Bi} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = u_{i,j} + u_{j,i} \qquad (۵-۷-۴)$$

چون تانسورهای کرنش E_{AB} , e_{ij} و ε_{ij} همگی متقارن و از مرتبه دوم هستند، کلیه مطالب برای کرنش‌های اصلی ، پایاهای کرنش، و جهت‌های کرنش اصلی را می‌توان عیناً مانند

آنچه برای تانسور تنش در فصل ۳ بود اجرا نمود. پس با انتخاب ε_{ij} به‌عنوان تانسور شاخص گروه ، این نتایج را با نشان دادن ماتریس آن نسبت به محورهای اصلی به‌صورت زیر خلاصه می‌کنیم.

$$[\varepsilon^*_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} \end{bmatrix} \qquad (۶-۷-۴)$$

همراه با پایاهای کرنش

$$\mathbf{I}_\varepsilon = \varepsilon_{ii} = tr\,(\boldsymbol{\varepsilon}) = \varepsilon_I + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III} \qquad (۴-۷-۷\text{ الف})$$

$$\mathbf{II}_\varepsilon = \tfrac{1}{2}\,(\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj} - \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji}) = \varepsilon_I\varepsilon_{II} + \varepsilon_{II}\varepsilon_{III} + \varepsilon_{III}\varepsilon_I \qquad (۴-۷-۷\text{ ب})$$

$$\mathbf{III}_\varepsilon = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{1i}\varepsilon_{2j}\varepsilon_{3k} = \varepsilon_I\varepsilon_{II}\varepsilon_{III} \qquad (۴-۷-۷\text{ پ})$$

مولفه‌های $\boldsymbol{\varepsilon}$ دارای تفسیر فیزیکی مشخص می‌باشد که اکنون بررسی می‌کنیم. در محتوی نظریه تغییرشکل کوچک ، معادله ۴ - ۶ - ۱۴ را در شکل اصلاح شده زیر بیان می‌کنیم.

$$(dx)^2 - (dX)^2 = 2\,\varepsilon_{ij}\,dX_i\,dX_j = d\mathbf{X}\,.\,2\,\boldsymbol{\varepsilon}\,.\,d\mathbf{X} \qquad (۸-۷-۴)$$

هنگامی که از سمت چپ معادله فاکتورگیری و معادله بر $(dX)^2$ تقسیم شود، خواهیم داشت.

$$\frac{dx - dX}{dX}\,\frac{dx + dX}{dX} = 2\,\varepsilon_{ij}\,\frac{dX_i}{dX}\,\frac{dX_j}{dX}$$

اما $dX_i / dX = N_i$ یک بردار یکّه در جهت $d\mathbf{X}$ می‌باشد و برای تغییرشکل‌های کوچک می‌توان فرض کرد $(dx + dX) / dX \approx 2$ ، در نتیجه

$$\frac{dx - dX}{dX} = \varepsilon_{ij}N_iN_j = \hat{\mathbf{N}}\,.\,\boldsymbol{\varepsilon}\,.\,\hat{\mathbf{N}} \qquad (۹-۷-۴)$$

نسبت عددی سمت چپ این معادله بطور واضح تغییرات طول در واحد طول اصلی برای جزء واقع در امتداد $\hat{\mathbf{N}}$ می‌باشد که معروف به کرنش طولی یا کرنش نرمال است و با $e_{(\hat{\mathbf{N}})}$ نمایش داده می‌شود. اگر برای مثال ، $\hat{\mathbf{N}}$ در جهت X_1 اختیار شود یعنی $\hat{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{I}}_1$ باشد ، آنگاه

$$e_{(\hat{\mathbf{I}}_1)} = \hat{\mathbf{I}}_I \,.\, \boldsymbol{\varepsilon} \,.\, \hat{\mathbf{I}}_I = \varepsilon_{II}$$

به همین منوال، برای $\hat{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{I}}_2$ یا $\hat{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{I}}_3$ کرنش‌های نرمال ε_{22} و ε_{33} بدست می‌آیند. پس عناصر قطری تانسور کرنش کوچک (بسیار کوچک) در امتداد محورهای مختصات ، کرنش‌های نرمال را بیان می‌کنند.

برای رسیدن به مفهوم فیزیکی عمیق عناصر غیر قطری تانسور کرنش بسیار کوچک، بردارهای دیفرانسیل $d\mathbf{X}^{(1)}$ و $d\mathbf{X}^{(2)}$ در موقعیت P را که به بردارهای $d\mathbf{x}^{(1)}$ و $d\mathbf{x}^{(2)}$ تغییرشکل می‌یابد در نظر می‌گیریم. در این حالت، معادله ۴ - ۶ - ۱۹ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت.

$$d\mathbf{x}^{(1)} \,.\, d\mathbf{x}^{(2)} = d\mathbf{X}^{(1)} \,.\, d\mathbf{X}^{(2)} + d\mathbf{X}^{(1)} \,.\, 2\,\boldsymbol{\varepsilon} \,.\, d\mathbf{X}^{(2)} \qquad (۱۰ - ۷ - ۴)$$

اگر $d\mathbf{X}^{(1)}$ و $d\mathbf{X}^{(2)}$ را عمود بر یکدیگر انتخاب کنیم، آنگاه

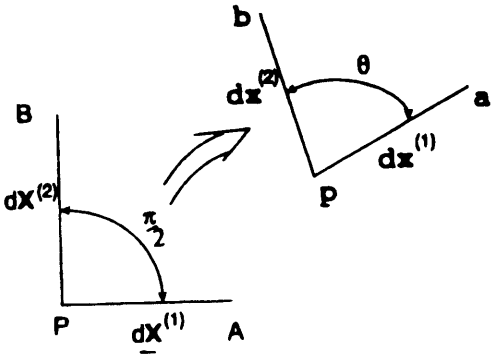
$$d\mathbf{x}^{(1)} \,.\, d\mathbf{x}^{(2)} = dx^{(1)}\, dx^{(2)}\, cos\ \theta = d\mathbf{X}^{(1)} \,.\, 2\,\boldsymbol{\varepsilon} \,.\, d\mathbf{X}^{(2)} \qquad (۱۱ - ۷ - ۴)$$

که در آن θ زاویه بین بردارهای تغییرشکل یافته مطابق شکل ۴ - ۳ می‌باشد. اکنون اگر $\theta = \frac{\pi}{2} - \gamma$ اختیار شود، زاویه γ ***تغییرات کوچک*** زاویه قائمه اصلی بین $d\mathbf{X}^{(1)}$ و $d\mathbf{X}^{(2)}$ را اندازه می‌گیرد. پس

$$cos\ \theta = cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = sin\ \gamma \approx \gamma$$

چون γ برای تغییرشکل‌های بسیار کوچک قابل صرف‌نظر است، بنابراین مانند قبل فرض می‌کنیم $d\mathbf{x}^{(1)} \approx d\mathbf{X}^{(1)}$ و $d\mathbf{x}^{(2)} \approx d\mathbf{X}^{(2)}$ زیرا که تغییرشکل‌ها کوچک هستند.

$$\gamma \approx cos\ \theta = \frac{d\mathbf{X}^{(1)}}{dx^{(1)}} \,.\, 2\,\boldsymbol{\varepsilon} \,.\, \frac{d\mathbf{X}^{(2)}}{dx^{(2)}} \approx \hat{\mathbf{N}}_{(1)} \,.\, 2\,\boldsymbol{\varepsilon} \,.\, \hat{\mathbf{N}}_{(2)} \qquad (۱۲ - ۷ - ۴)$$



شکل ۴ - ۳

زاویه قائمه بین قطعات خطی AP , BP در پیکربندی مرجع تبدیل به زاویه θ بین قطعات خطی ap , bp در پیکربندی تغییرشکل یافته می‌شود.

در اینجا ، اگر $\hat{\mathbf{N}}_{(1)} = \hat{\mathbf{I}}_1$ و $\hat{\mathbf{N}}_{(2)} = \hat{\mathbf{I}}_2$ و زاویه γ را به صورت γ_{12} مشخص کنیم، بدست خواهیم آورد.

$$\gamma_{12} = 2\,[1\,,\,0\,,\,0] \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\,\varepsilon_{12} \qquad (۱۳-۷-۴)$$

در نتیجه با انتخاب جفت برداری تغییرشکل نیافته در معادله ۴ - ۷ - ۱۱ هم‌جهت با محورهای مختصات می‌توانیم معادله ۴ - ۷ - ۱۳ را عمومیت بدهیم.

$$\gamma_{ij} = 2\,\varepsilon_{ij}\ , \qquad (i \neq j) \qquad (۱۴-۷-۴)$$

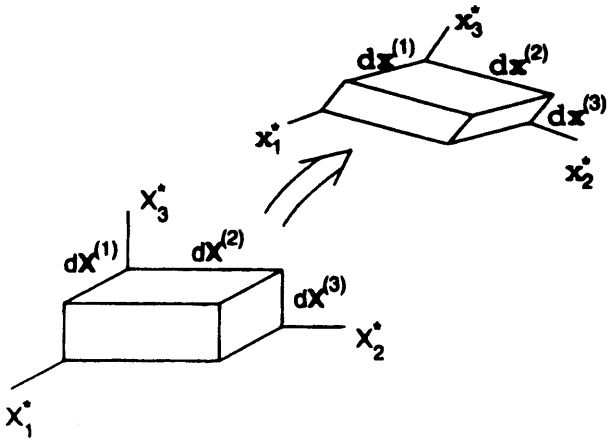
این معادله رابطه بین مولفه‌های غیر قطری تانسور ε_{ij} و مولفه‌های γ_{ij} معروف به **کرنش برشی مهندسی** را که تغییرات در زوایای قائمه اصلی بین محورهای مختصات در پیکربندی تغییرشکل نیافته را بیان می‌کند، فراهم می‌سازد. توجه شود که چون $\boldsymbol{\varepsilon}$ را می‌توان نسبت به هر مجموعه محورهای قائم در P تعریف کرد، این نتیجه برای هر جفت بردارهای عمود بر هم در آن نقطه برقرار خواهد بود. در کتب درسی مهندسی ، تانسور کرنش بسیار کوچک را غالباً در شکل

ماتریسی به‌صورت زیر می‌نویسند.

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{1}{2}\gamma_{12} & \frac{1}{2}\gamma_{13} \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} & \varepsilon_{22} & \frac{1}{2}\gamma_{23} \\ \frac{1}{2}\gamma_{13} & \frac{1}{2}\gamma_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \qquad (۱۵-۷-۴)$$

اگر $\hat{N}_{(1)}$ و $\hat{N}_{(2)}$ منطبق بر جهت‌های کرنش اصلی انتخاب شوند، معادله ۴ - ۷ - ۱۲ خواهد شد.

$$\gamma = \hat{N}_{(1)} \cdot 2\varepsilon^* \cdot \hat{N}_{(2)} = 0 \qquad (۱۶-۷-۴)$$



شکل ۴ - ۴

متوازی‌السطوح مستطیلی با طول لبه $dX^{(1)}$, $dX^{(2)}$ و $dX^{(3)}$ در پیکربندی مرجع به یک متوازی‌السطوح مورب با طول لبه $dx^{(1)}$, $dx^{(2)}$ و $dx^{(3)}$ در پیکربندی تغییرشکل یافته تبدیل می‌گردد.

از آنجا می‌توان عمومیت داد تا نتیجه شود که تمامی جهت‌های کرنش اصلی همچنان عمود بر هم باقی خواهند بود وقتی که تغییرشکل بسیار کوچک باشد. بنابراین، یک متوازی‌السطوح مستطیلی کوچک با ابعاد تغییرشکل نیافته $dX^{(1)}$, $dX^{(2)}$ و $dX^{(3)}$ اختیار شده در راستای جهت‌های کرنش اصلی به متوازی‌السطوح مستطیلی دیگری در وضعیت تغییرشکل یافته تبدیل می‌گردد که طولهای زیر را مطابق شکل ۴ - ۴ دارا می‌باشد.

$$dx^{(i)} = [\,1 + \varepsilon_{(i)}\,]\, dX^{(i)} \quad , \qquad (i = 1\,,\ 2\,,\ 3) \qquad (17-7-4)$$

که در آن $\varepsilon_{(i)}$ کرنش‌های نرمال در جهت‌های اصلی هستند. تغییر در حجم بر واحد حجم اصلی متوازی‌السطوح عبارت است از

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{[1 + \varepsilon_{(1)}]\, dX^{(1)}\, [1 + \varepsilon_{(2)}]\, dX^{(2)} [1 + \varepsilon_{(3)}]\, dX^{(3)} - dX^{(1)}\, dX^{(2)}\, dX^{(3)}}{dX^{(1)} dX^{(2)} dX^{(3)}}$$

$$\approx \varepsilon_{(1)} + \varepsilon_{(2)} + \varepsilon_{(3)} \qquad (18-7-4)$$

با صرف نظر از جملات شامل حاصلضرب‌های کرنش اصلی نسبت $\Delta V / V$ اولین پایای $\boldsymbol{\varepsilon}$ خواهد بود که *اتساع مکعبی* می‌نامند و آن را با نماد e نشان می‌دهیم و داریم

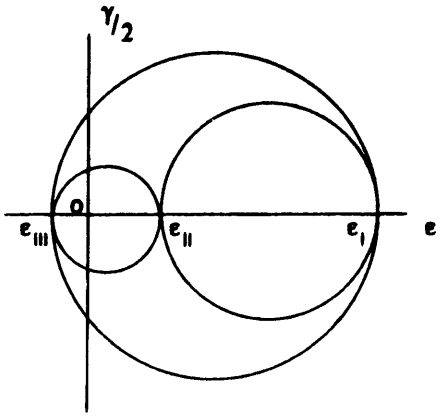
$$e = \Delta V / V = \varepsilon_{ii} = \mathbf{I}_{\varepsilon} \qquad (19-7-4)$$

چون $\boldsymbol{\varepsilon}$ یک تانسور مرتبه دوم متقارن می‌باشد، توسعه ***دایره‌های مور*** برای کرنش کوچک و همچنین تجزیه $\boldsymbol{\varepsilon}$ به تانسورهای کروی و انحراف را ممکن می‌سازد و همان طریق در مفاهیم مشابه برای تنش در فصل ۳ را دنبال می‌کند. یک تفاوت متمایز آن است که برای دایره‌های مور ، محور (عمودی) کرنش برشی دارای واحد $\frac{1}{2}\gamma$ مطابق شکل ۴ - ۵ می‌باشد. ***تانسور کرنش کروی*** بسیار کوچک توسط یک ماتریس قطری با عناصر یکسان $\varepsilon_M = \frac{1}{3}\varepsilon_{ii} = \frac{1}{3}e$ بیان می‌شود که معروف به ***کرنش نرمال متوسط*** می‌باشد. ***تانسور کرنش انحراف*** $\boldsymbol{\eta}$ بدین صورت تعریف می‌شود.

$$\eta_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\,\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\,\varepsilon_M \qquad (20-7-4)$$

و در شکل ماتریسی

$$\begin{bmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{12} & \eta_{22} & \eta_{23} \\ \eta_{13} & \eta_{23} & \eta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon_M & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} - \varepsilon_M & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} - \varepsilon_M \end{bmatrix} \qquad (21-7-4)$$



شکل ۴ - ۵

دایره‌های مور شاخص برای کرنش

توجه شود که ، مانند قرینه‌اش در تنش ، اولین پایای کرنش انحراف صفر است.

$$\eta_{ii} = 0 \qquad (۲۲ - ۷ - ۴)$$

و کرنش‌های انحراف اصلی عبارتند از

$$\eta_{(q)} = \varepsilon_{(q)} - \varepsilon_M \quad , \qquad (q = ۱ , ۲ , ۳) \qquad (۲۳ - ۷ - ۴)$$

که در آن $\varepsilon_{(q)}$ مقدار اصلی تانسور کرنش بسیار کوچک است.

بیان **کرنش صفحه‌ای** موازی با صفحه $X_۱ X_۲$ در P وجود دارد اگر در همان نقطه داشته باشیم.

$$\varepsilon_{۳۳} = \gamma_{۱۳} = \gamma_{۲۱} = \gamma_{۲۳} = \gamma_{۳۲} = 0 \qquad (۲۴ - ۷ - ۴)$$

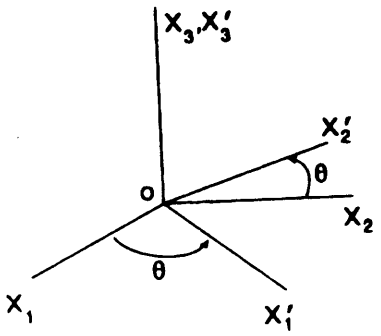
همچنین کرنش صفحه‌ای نسبت به صفحه $X_۱ X_۲$ در جسم محیط پیوسته وقتی به‌عنوان جسم یکپارچه در نظر گرفته شود وجود دارد اگر معادله ۴ - ۷ - ۲۴ در هر جائی از جسم تامین شود، مخصوصاً اگر مولفه‌های غیرصفر باقی مانده مستقل از $X_۳$ باشند. برای محورهای $OX'_۱X'_۲X'_۳$ دوران یافته حول $X_۳$ با زاویه θ نسبت به محورهای $OX_۱X_۲X_۳$ مطابق شکل ۶ - ۴ الف، معادلات انتقال برای کرنش صفحه‌ای (مشابه با معادله ۳ - ۹ - ۳ برای تنش صفحه‌ای) فرمول تانسور انتقال ذکر شده در معادله ۲ - ۵ - ۱۳ را دنبال می‌کند. در ارتباط با جدول کسینوس‌های

هادی در معادله ۴ - ۶ ب ، نتایج عبارتند از

$$\varepsilon'_{11} = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{12}}{2} \sin 2\theta \qquad (۴ - ۷ - ۲۵ \text{ الف})$$

$$\varepsilon'_{22} = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{2} - \frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{2} \cos 2\theta - \frac{\gamma_{12}}{2} \sin 2\theta \qquad (۴ - ۷ - ۲۵ \text{ ب})$$

$$\gamma'_{12} = -(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) \sin 2\theta + \gamma_{12} \cos 2\theta \qquad (۴ - ۷ - ۲۵ \text{ پ})$$



(الف)

	X_1	X_2	X_3
X'_1	cos θ	sin θ	0
X'_2	-sin θ	cos θ	0
X'_3	0	0	1

(ب)

شکل ۴ - ۶

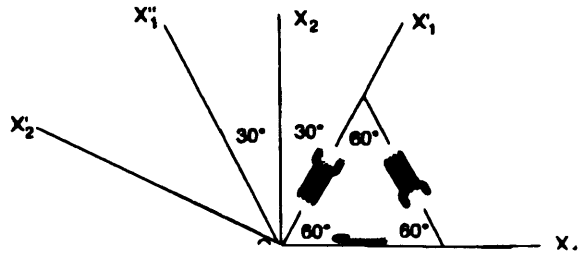
(الف) کرنش صفحه‌ای برای محورهای درون یافته ، (ب) جدول انتقال برای کرنش صفحه‌ای .

همچنین مقادیر کرنش اصلی غیرصفر برای کرنش صفحه‌ای بدین ترتیب می‌باشند.

$$\left.\begin{matrix}\varepsilon_{(1)} \\ \varepsilon_{(2)}\end{matrix}\right\} = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{12}}{2}\right)^2} \qquad (۴ - ۷ - ۲۵ \text{ ت})$$

چون اندازه‌گیری کرنش‌های برشی بطور تجربی مشکل می‌باشد، معمولاً بیان کرنش در یک نقطه را بوسیله ضبط سه کرنش طولی مجزا از هم در آن نقطه تعیین می‌کند (با استفاده از کرنش‌سنج گل نواری) آنگاه با جایگزین کردن این مقادیر در معادله ۴ - ۷ - ۲۵ γ_{12} محاسبه می‌گردد. مثال زیر روش را توضیح می‌دهد.

مثال ۴ ـ ۷ ـ ۱ یک دلتای گل نواری که مثلث متساوی‌الاضلاع را تشکیل می‌دهد برای ضبط کردن کرنش‌های طولی در جهت‌های X_1 ، X'_1 و X''_1 مطابق شکل قرار گرفته است. اگر کرنش‌های اندازه‌گیری شده در این جهت‌ها عبارت باشند از $\varepsilon_{11} = -3 \times 10^{-4}$ ، $\varepsilon'_{11} = 4 \times 10^{-4}$ و $\varepsilon''_{11} = 2 \times 10^{-4}$ واحد آنها m / m (بدون بعد) است. تعیین کنید ε_{22} ، γ_{12} و ε'_{22}. نشان دهید که $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = \varepsilon'_{11} + \varepsilon'_{22}$، همانگونه که اولین پایای کرنش ایجاب می‌کند.



حل در اینجا فقط معادله ۴ ـ ۷ ـ ۲۵ الف را نیاز داریم، تا به نوبت برای X'_1 و X''_1 بنویسیم (برای راحتی فاکتور مشترک 10^{-4} را حذف می‌کنیم) پس برای $\theta = 60°$ و $\theta = 120°$ به‌ترتیب داریم

$$4 = \frac{-3 + \varepsilon_{22}}{2} + \frac{-3 - \varepsilon_{22}}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\gamma_{12}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2 = \frac{-3 + \varepsilon_{22}}{2} + \frac{-3 - \varepsilon_{22}}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\gamma_{12}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

با اضافه کردن این دو معادله γ_{12} حذف می‌شود و $\varepsilon_{22} = 5$ بدست می‌آید. با تفریق کردن معادله دوم از اول به منظور حذف ε_{22} آنگاه بدست خواهیم آورد $\gamma_{12} = 4 / \sqrt{3}$. سپس با استفاده از $\theta = 150°$ از معادله ۴ ـ ۷ ـ ۲۵ الف ε'_{22} را بدست می‌آوریم.

$$\varepsilon'_{22} = \frac{-3 + 5}{2} + \frac{-3 - 5}{2}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2$$

توسط اولین پایای تانسور کرنش کوچک نتایج را بررسی می‌کنیم.

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = -3 + 5 = \varepsilon'_{11} + \varepsilon'_{22} = 4 - 2 = 2$$

مجدداً دو ذره همسایه را در موقعیت‌های P و Q در پیکربندی تغییرشکل نیافته در نظر

می‌گیریم که اکنون به‌ترتیب در موقعیت‌های p و q در پیکربندی تغییرشکل یافته می‌باشند (شکل ۴ - ۲). بطورکلی، یک تغییرمکان اختیاری هر دو تغییرشکل (کرنش) و تغییرمکان‌های جسم صلب را شامل می‌شود. برای مجزا کردن آنها، بردار دیفرانسیل تغییرمکان $d\mathbf{u}$ را در نظر می‌گیریم. شرایط فرضی روی میدان تغییرمکان، وجود مشتق را تضمین می‌کند، دیفرانسیل تغییرمکان du_i را به‌صورت زیر می‌نویسیم.

$$du_i = \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right)_{\mathrm{p}} dX_j \qquad (۲۶ - ۷ - ۴)$$

که در آن مشتق در P ارزیابی می‌شود همانگونه که توسط نمادگذاری مشخص شده است. حال می‌توان **تغییرمکان نسبی واحد** را برای ذره واقع در Q نسبت به ذره واقع در P توسط معادله زیر تعریف کرد.

$$\frac{du_i}{dX} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \frac{dX_j}{dX} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} N_j \qquad (۲۷ - ۷ - ۴)$$

که در آن N_j بردار یکّه با جهتی از P به سمت Q می‌باشد، با تجزیه گرادیان تغییرمکان در معادله ۴ - ۷ - ۲۶ به قسمت‌های متقارن و متقارن - اریب بدست می‌آوریم.

$$du_i = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \right] dX_j$$

$$= (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij})\, dX_j \qquad (۲۸ - ۷ - ۴)$$

که در آن ε_{ij} به‌عنوان تانسور کرنش بسیار کوچک شناخته می‌شود و ω_{ij} را ***تانسور چرخش بسیار کوچک*** می‌نامند.

اگر ε_{ij} اتفاقی صفر بشود ، آنگاه کرنشی وجود ندارد و تغییرمکان را تغییرمکان جسم صلب می‌نامند برای این حالت ***بردار چرخش*** را بدین صورت تعریف می‌کنیم.

$$\omega_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk}\, \omega_{kj} \qquad (۲۹ - ۷ - ۴)$$

که به آسانی برگردان می‌شود چون $\omega_{kj} = -\omega_{jk}$ است پس نتیجه می‌دهد.

$$\omega_{ij} = \varepsilon_{kji}\, \omega_k \qquad (۳۰ - ۷ - ۴)$$

بنابراین معادله ۴ - ۷ - ۲۸ برای $\varepsilon_{ij} \equiv 0$ خواهد شد

$$du_i = \varepsilon_{kji}\,\omega_k\,dX_j = \varepsilon_{ikj}\,\omega_k\,dX_j \qquad \text{یا} \qquad d\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{X} \quad (۳۱ - ۷ - ۴)$$

مشاهده می‌شود که دیفرانسیل تغییرمکان نسبی نتیجه حاصل شده از دوران یک جسم صلب حول محور بردار چرخش $\boldsymbol{\omega}$ می‌باشد. بعبارت دیگر، اگر $\omega_{ij} \equiv 0$ تغییرمکان نسبی نتیجه حاصل از یک ***کرنش خالص*** است.

بالاخره، اگر شش رابطه مستقل کرنش - تغییرمکان (معادله ۴ - ۷ - ۵) را در نظر بگیریم.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = 2\,\varepsilon_{ij}$$

یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جزیی را برای بدست آوردن سه مولفه تغییرمکان u_i (با فرض اینکه ε_{ij} به‌عنوان توابعی از x_i معلوم هستند) تشکیل می‌دهند، این دستگاه بیش از نیاز معادله دارد و در حالت کلی نمی‌توان سه تابع تک مقداره $u_i = u_i\,(x_j)$ بدست آورد که شش معادله دیفرانسیل جزئی را تامین کند. بنابراین چند شرط محدودکننده باید روی مولفه‌های کرنش اعمال گردد (در واقع روی مشتقات مولفه‌های کرنش) اگر قرار باشد معادلات فوق توسط میدان تغییرمکان تک مقداره تامین بشود، چنین شرایطی توسط معادلات ***سازگاری کرنش*** به‌صورت زیر بیان می‌گردند.

$$\varepsilon_{ij,kn} + \varepsilon_{kn,ij} - \varepsilon_{ik,jn} - \varepsilon_{jn,ik} = 0 \qquad (۳۲ - ۷ - ۴)$$

تعداد $۸۱ = ۳^۴$ معادله کلاً در معادله ۴ - ۷ - ۳۲ وجود دارد (۴ شاخص آزاد)، اما فقط شش معادله از آنها مجزا هستند. می‌توان نشان داد که این شش شرط برای یک میدان تغییرمکان تک مقداره از یک جسمی که یک دامنه پیوسته ساده را اشغال می‌کند لازم و کافی می‌باشد *(Malvern 1969)*.

برای کرنش صفحه‌ای در صفحه $x_1\ x_2$ شش معادله منحصر بفرد موجود در معادله ۴ - ۷ - ۲۳ به یک معادله تکی به شکل زیر کاهش می‌یابد.

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2\,\varepsilon_{12,12} \qquad (۳۳ - ۷ - ۴)$$

که بآسانی به‌عنوان یک شرط لازم توسط یک دیفرانسیل‌گیری ساده از معادله ۴ - ۷ - ۵ برای دامنه‌ای که شاخص‌های i و j تا عدد ۲ را اختیار کنند قابل بررسی می‌باشد.

۴ - ۸ نسبت‌های کشیدگی

مجدداً به شکل ۴ - ۲ مراجعه می‌کنیم و نسبت اندازه‌های dx به $d\mathbf{X}$ را **نسبت کشیدگی** Λ (یا بطور ساده **کشیدگی**) تعریف می‌کنیم. بطور اخص ، برای جزء دیفرانسیلی در جهت بردار یکّه $\hat{\mathbf{N}}$ واقع در P می‌توان نوشت.

$$\Lambda_{(\hat{\mathbf{N}})} = \frac{dx}{dX} \qquad (۴ - ۸ - ۱)$$

که در آن dx اندازه تغییرشکل یافته $d\mathbf{X} = dX\,\hat{\mathbf{N}}$ می‌باشد. بلحاظ راحتی، اغلب ترجیح دارد که با مربع کشیدگی سر و کار داشته باشیم.

$$\Lambda^2_{(\hat{\mathbf{N}})} = \left(\frac{dx}{dX}\right)^2 \qquad (۴ - ۸ - ۲)$$

بنابراین از معادلات ۴ - ۶ - ۹ و ۴ - ۶ - ۱۲

$$(dx)^2 = d\mathbf{x}\,.\,d\mathbf{x} = \mathbf{F}\,.\,d\mathbf{X}\,.\,\mathbf{F}\,.\,d\mathbf{X} = d\mathbf{X}\,.\,\mathbf{C}\,.\,d\mathbf{X} \qquad (۴ - ۸ - ۳)$$

در نتیجه با تقسیم نمودن بر $(dX)^2$ ، عبارت زیر برای جزء اصلی واقع در جهت $\hat{\mathbf{N}}$ حاصل می‌شود.

$$\Lambda^2_{(\hat{\mathbf{N}})} = \frac{d\mathbf{X}}{dX}\,.\,\mathbf{C}\,.\,\frac{d\mathbf{X}}{dX} = \hat{\mathbf{N}}\,.\,\mathbf{C}\,.\,\hat{\mathbf{N}} \qquad (۴ - ۸ - ۴)$$

به طریق مشابه **نسبت کشیدگی** $\lambda_{(\hat{\mathbf{n}})}$ در جهت $\hat{\mathbf{n}} = d\mathbf{x} / dx$ واقع در p توسط معادله زیر بدست می‌آید.

$$\frac{1}{\lambda_{(\hat{\mathbf{n}})}} = \frac{dX}{dx} \qquad (۴ - ۸ - ۵)$$

در اینجا از معادله ۴ - ۶ - ۱۰ داریم $d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1}\,.\,d\mathbf{x}$ و با استفاده از معادله ۴ - ۶ - ۱۶ بدست می‌آوریم.

$$(dX)^2 = d\mathbf{X}\,.\,d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1}\,.\,d\mathbf{x}\,.\,\mathbf{F}^{-1}\,.\,d\mathbf{x} = d\mathbf{x}\,.\,\mathbf{c}\,.\,d\mathbf{x} \qquad (۴ - ۸ - ۶)$$

که با تقسیم نمودن بر $(dx)^2$ خواهیم داشت.

$$\frac{۱}{\lambda^{۲}_{(\hat{\mathbf{n}})}} = \frac{d\mathbf{x}}{dx} \cdot \mathbf{c} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dx} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{n}} \qquad (۷-۸-۴)$$

بطورکلی $\Lambda_{(\hat{\mathbf{N}})} \neq \lambda_{(\hat{\mathbf{n}})}$. ولی اگر $\hat{\mathbf{n}}$ بردار یکّه‌ای باشد در جهتی که $\hat{\mathbf{N}}$ در پیکربندی تغییرشکل یافته فرض خواهد شد، آنگاه دو کشیدگی یکسان خواهد بود. برای $\hat{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{I}}_{۱}$.

$$\Lambda^{۲}_{(\hat{\mathbf{I}}_{۱})} = \hat{\mathbf{I}}_{۱} \cdot \mathbf{C} \cdot \hat{\mathbf{I}}_{۱} = C_{۱۱} = ۱ + ۲E_{۱۱} \qquad (۸-۸-۴)$$

و برای $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{e}}_{۱}$

$$\frac{۱}{\lambda^{۲}_{(\hat{\mathbf{e}}_{۱})}} = \hat{\mathbf{e}}_{۱} \cdot \mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{۱} = c_{۱۱} = ۱ - ۲e_{۱۱} \qquad (۹-۸-۴)$$

روابطی مشابه برای $\hat{\mathbf{N}}$ و $\hat{\mathbf{n}}$ در سایر جهت‌های مختصات خواهیم داشت.

سپس کشش واحد (کرنش طولی) در هر جهت $\hat{\mathbf{N}}$ واقع در P را بررسی می‌کنیم. این موضوع برحسب کشیدگی بدین صورت بیان می‌شود.

$$e_{(\hat{\mathbf{N}})} = \frac{dx - dX}{dX} = \Lambda_{(\hat{\mathbf{N}})} - ۱ = \sqrt{\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{C} \cdot \hat{\mathbf{N}}} - ۱ \qquad (۱۰-۸-۴)$$

توجه شود که کشش واحد وقتی کشیدگی واحد است صفر می‌شود، همانگونه که برای تغییرمکان جسم صلب اتفاق افتاد. اگر $\hat{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{I}}_{۱}$

$$e_{(\hat{\mathbf{I}}_{۱})} = \sqrt{\hat{\mathbf{I}}_{۱} \cdot \mathbf{C} \cdot \hat{\mathbf{I}}_{۱}} - ۱ = \sqrt{C_{۱۱}} - ۱ = \sqrt{۱ + ۲E_{۱۱}} - ۱ \qquad (۱۱-۸-۴)$$

عبارت را برای $E_{۱۱}$ حل می‌کنیم.

$$E_{۱۱} = e_{(\hat{\mathbf{I}}_{۱})} + \frac{۱}{۲} e^{۲}_{(\hat{\mathbf{I}}_{۱})} \qquad (۱۲-۸-۴)$$

برای نظریه تغییرشکل کوچک جائی که $E_{۱۱} \longrightarrow \varepsilon_{۱۱}$ و در نتیجه $e^{۲}_{(\hat{\mathbf{N}})}$ قابل صرف‌نظر در مقایسه با $e_{(\hat{\mathbf{N}})}$ می‌باشد، معادله فوق نشان می‌دهد که $E_{۱۱} = \varepsilon_{۱۱} = e_{(\hat{\mathbf{I}}_{۱})}$ خواهد بود.

تغییر در زاویه بین دو جزء خطی را می‌توان برحسب کشیدگی ارائه داد. برای بردارهای

اختیاری $d\mathbf{X}^{(1)}$ و $d\mathbf{X}^{(2)}$ که به‌ترتیب در خلال تغییرشکل به‌صورت $d\mathbf{x}^{(1)}$ و $d\mathbf{x}^{(2)}$ درمی‌آیند، با ضرب نقطه‌ای $d\mathbf{x}^{(1)} \cdot d\mathbf{x}^{(2)} = dx^{(1)} dx^{(2)} \cos\theta$ می‌توان زاویه θ بین $d\mathbf{x}^{(1)}$ و $d\mathbf{x}^{(2)}$ را از کسینوس محاسبه کرد، که به کمک معادله ۴ - ۸ - ۳ شکل زیر را به خود می‌گیرد.

$$\cos\theta = \frac{d\mathbf{x}^{(1)}}{dx^{(1)}} \cdot \frac{d\mathbf{x}^{(2)}}{dx^{(2)}} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}^{(1)}}{\sqrt{d\mathbf{X}^{(1)} \cdot \mathbf{C} \cdot d\mathbf{X}^{(1)}}} \cdot \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}^{(2)}}{\sqrt{d\mathbf{X}^{(2)} \cdot \mathbf{C} \cdot d\mathbf{X}^{(2)}}}$$

یا با تقسیم کردن صورت و مخرج بر عبارت $dX^{(1)}\, dX^{(2)}$ و استفاده از معادلات ۴ - ۸ - ۴ و ۴ - ۶ - ۱۲ بدست می‌آوریم

$$\cos\theta = \frac{\hat{\mathbf{N}}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \hat{\mathbf{N}}_2}{\Lambda_{(\hat{\mathbf{N}}_2)}\, \Lambda_{(\hat{\mathbf{N}}_2)}} \qquad (۱۳ - ۸ - ۴)$$

پس برای اجزائی که اصالتاً در جهت‌های $\hat{\mathbf{I}}_1$ و $\hat{\mathbf{I}}_2$، زاویه بین آنها در پیکربندی تغییرشکل یافته از معادله زیر تعیین می‌شود.

$$\cos\theta = \frac{C_{12}}{\Lambda_{(\hat{\mathbf{I}}_1)}\Lambda_{(\hat{\mathbf{I}}_2)}} = \frac{C_{12}}{\sqrt{C_{11}C_{22}}} \qquad (۱۴ - ۸ - ۴)$$

بطریق مشابه از $d\mathbf{X}^{(1)} \cdot d\mathbf{X}^{(2)} = dX^{(1)}\, dX^{(2)} \cos\Theta$، جائی که Θ زاویه بین $d\mathbf{X}^{(1)}$ و $d\mathbf{X}^{(2)}$ می‌باشد، از معادلات ۴ - ۸ - ۶ و ۴ - ۸ - ۷ بدست خواهیم آورد.

$$\cos\Theta = \frac{d\mathbf{X}^{(1)}}{dX^{(1)}} \cdot \frac{d\mathbf{X}^{(2)}}{dX^{(2)}} = \frac{\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2}{\sqrt{\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1}\sqrt{\hat{\mathbf{n}}_2 \cdot \mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2}}$$

$$= \lambda_{(\hat{\mathbf{n}}_1)}\, \lambda_{(\hat{\mathbf{n}}_2)}\, (\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2) \qquad (۱۵ - ۸ - ۴)$$

که زاویه اصلی بین اجزاء در جهت‌های $\hat{\mathbf{n}}_1$ و $\hat{\mathbf{n}}_2$ در پیکربندی جاری را می‌دهد.

مثال ۴ ـ ۸ ـ ۱ یک تغییرشکل همگن توسط معادلات نقش‌بندی $x_1 = X_1 - X_2 + X_3$، $x_2 = X_2 - X_3 + X_1$ و $x_3 = X_3 - X_1 + X_2$ ارائه شده است. تعیین کنید (الف) نسبت کشیدگی در جهت $\hat{\mathbf{N}}_1 = (\hat{\mathbf{I}}_1 + \hat{\mathbf{I}}_2)/\sqrt{2}$، (ب) زاویه θ_{12} در پیکربندی تغییرشکل یافته بین اجزائی که اصالتاً در جهت‌های $\hat{\mathbf{N}}_1$ و $\hat{\mathbf{N}}_2 = \hat{\mathbf{I}}_2$ قرار داشته‌اند.

حل از تغییرشکل ارائه شده داریم (دانشجویان آنها را بررسی کنند)

$$[F_{iA}] = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ & -۱ \\ -۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad [C_{AB}] = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ & -۱ \\ -۱ & ۳ & -۱ \\ -۱ & -۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

(الف) بنابراین ، از معادله ۴ - ۸ - ۴

$$\Lambda^{۲}_{(\hat{\mathbf{N}}_۱)} = [۱/\sqrt{۲},\ ۱/\sqrt{۲},\ ۰] = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ & -۱ \\ -۱ & ۳ & -۱ \\ -۱ & -۱ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱/\sqrt{۲} \\ ۱/\sqrt{۲} \\ ۰ \end{bmatrix} = ۲$$

و

$$\Lambda_{(\hat{\mathbf{N}}_۱)} = \sqrt{۲}$$

(ب) برای $\hat{\mathbf{N}}_۲ = \hat{\mathbf{I}}_۲$ ، $\Lambda^{۲}_{(\hat{\mathbf{I}}_۲)} = \hat{\mathbf{I}}_۲ \cdot \mathbf{C} \cdot \hat{\mathbf{I}}_۲ = C_{۲۲} = ۳$ ، آنگاه از معادله ۴ - ۸ - ۱۳ با استفاده از نتیجه بدست آمده در قسمت (الف) خواهیم داشت.

$$\cos\theta_{۱۲} = \frac{(\hat{\mathbf{I}}_۱ + \hat{\mathbf{I}}_۲)/\sqrt{۲} \cdot \mathbf{C} \cdot \hat{\mathbf{I}}_۲}{\sqrt{۲}\sqrt{۳}} = \frac{۲/\sqrt{۲}}{\sqrt{۶}}$$

پس $\theta_{۱۲} = ۵۴/۷^\circ$ است یعنی زاویه اصلی ۴۵° به اندازه $۹/۷^\circ$ بزرگ شده است.

از معادله ۴ - ۸ - ۱۴ مشهود است که اگر محورهای مختصات در جهت‌های اصلی $\mathbf{C}$ انتخاب شوند، زاویه $\theta_{۱۲}$ تغییرشکل یافته یک زاویه قائمه است (در این حالت $\mathbf{C}_{۱۲} = ۰$ می‌باشد) و تغییری در زاویه بین اجزاء در واقع در جهت‌های $X_۱$ و $X_۲$ وجود ندارد. در بحثی مشابه ، هر سه محور *اصلی* دوبدو عمود بر هم $\mathbf{C}$ واقع در pبه سه محور دوبدو عمود بر هم در p تغییرشکل می‌دهد. بنابراین، برای یک جزء حجمی به‌صورت یک متوازی‌السطوح مستطیلی که لبه‌هایش در جهت‌های اصلی $\mathbf{C}$ قرار دارد (همچنین در $\mathbf{E}$) ، چون کرنش برشی بین هر دو تای از این لبه‌ها وجود ندارد، حجم جدید هنوز یک متوازی‌السطوح مستطیلی باقی می‌ماند و در جهت‌های لبه $\hat{\mathbf{N}}_i$ $(i = ۱, ۲, ۳)$ کرنش‌های یکّه عبارتند از

$$e_{(\hat{\mathbf{N}}i)} = \Lambda_{(\hat{\mathbf{N}}i)} - ۱ \ , \quad (i = ۱, ۲, ۳) \qquad (۱۶ - ۸ - ۴)$$

در نتیجه

$$dx^{(i)} = dX^{(i)} + dX^{(i)} \left[\Lambda_{(\hat{N}i)} - ۱ \right] = dX^{(i)} \Lambda_{(\hat{N}i)} \quad (i = ۱ , ۲ , ۳) \quad (۱۷ - ۸ - ۴)$$

و نسبت حجم تغییرشکل یافته به حجم اصلی خواهد شد.

$$\frac{dV}{dV^{\circ}} = \frac{dx^{(۱)}\, dx^{(۲)}\, dx^{(۳)}}{dX^{(۱)}\, dX^{(۲)}\, dX^{(۳)}} = \Lambda_{(\hat{N}_۱)}\Lambda_{(\hat{N}_۲)}\Lambda_{(\hat{N}_۳)} \quad (۴ - ۸ - ۱۸ \text{ الف})$$

هنگامی که معادله ۴ - ۸ - ۴ بکار برده شود داریم

$$\frac{dV}{dV^{\circ}} = \sqrt{\mathbf{C}_{(۱)}\mathbf{C}_{(۲)}\mathbf{C}_{(۳)}} = \sqrt{\mathbf{III}_{\mathbf{C}}} \qquad (۴ - ۸ - ۱۸ \text{ ب})$$

اهمیت شکل دوم معادله ۴ - ۸ - ۱۸ ب در آن است که یک عبارت پایا می‌باشد و بدون ارجاع به محورهای **C** قابل محاسبه است.

مثال ۴ ـ ۸ ـ ۲ نسبت حجم dV / dV° را برای تغییرشکل مثال ۴ - ۸ - ۱ با استفاده از معادله ۴ - ۸ - ۱۸ الف تعیین کنید و سپس بکمک معادله ۴ - ۸ - ۱۸ ب صحت آن را بررسی نمایید.

حل همانگونه که قرار بود دانشجویان در مثال قبل نشان دهند، یک مجموعه محورهای اصلی برای تانسور **C** مثال ۴ - ۸ - ۱ عبارتند از $\hat{\mathbf{N}}_۱ = (\hat{\mathbf{I}}_۱ + \hat{\mathbf{I}}_۲ + \hat{\mathbf{I}}_۳) / \sqrt{۳}$, $\hat{\mathbf{N}}_۲ = (\hat{\mathbf{I}}_۱ - \hat{\mathbf{I}}_۲) / \sqrt{۲}$ و $\hat{\mathbf{N}}_۳ = (\hat{\mathbf{I}}_۱ + \hat{\mathbf{I}}_۲ - ۲\,\hat{\mathbf{I}}_۳) / \sqrt{۶}$. در نتیجه از معادله ۴ - ۸ - ۴ کشیدگی‌های اصلی به‌ترتیب $\Lambda_{(\hat{N}_۱)} = ۱$, $\Lambda_{(\hat{N}_۲)} = ۲$ و $\Lambda_{(\hat{N}_۳)} = ۲$ هستند. وقتی که این نتایج بکار برده شوند، معادله ۴ - ۸ - ۱۸ الف نتیجه می‌دهد $dV / dV^{\circ} = ۴$، توسط معادله ۴ - ۸ - ۱۸ ب داریم.

$$\mathbf{III}_{\mathbf{C}} = det\ \mathbf{C} = \begin{vmatrix} ۳ & -۱ & -۱ \\ -۱ & ۳ & -۱ \\ -۱ & -۱ & ۳ \end{vmatrix} = ۱۶$$

$$dV / dV^{\circ} = \sqrt{۱۶} = ۴ \quad \text{و}$$

۴ - ۹ تانسور چرخش ، تانسورهای کشیدگی

در فصل ۲ ، به این نکته توجه شد که هر تانسور مرتبه دوم اختیاری را می‌توان به مجموع دو قسمت متقارن و متقارن - اریب تجزیه نمود. در اینجا، تجزیه شدن به دو عامل ضرب را معرفی می‌کنیم که معروف به **تجزیه قطبی** است که هر تانسور غیرتکین را می‌توان به ضرب دو مولفه تانسوری تجزیه کرد. با یادآوری اینکه گرادیان تغییرشکل $\mathbf{F}$ یک تانسور غیرتکین (معکوس‌پذیر) است، بخاطر این غیرتکین بودن ، گرادیان تغییرشکل را می‌توان به ضرب دو عامل تجزیه کرد.

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \,.\, \mathbf{U} = \mathbf{V} \,.\, \mathbf{R} \qquad (۱ - ۹ - ۴)$$

که در آن $\mathbf{R}$ ***تانسور چرخش*** متعامد می‌باشد، و $\mathbf{U}$ و $\mathbf{V}$ تانسورهای متقارن مثبت معین هستند که به‌ترتیب ***تانسور راست کشیدگی*** و ***تانسور چپ کشیدگی*** نامیده می‌شوند. مزید بر آن ، $\mathbf{U}$ و $\mathbf{V}$ دارای مقادیر ویژه یکسان هستند (رجوع شود به مسئله ۴ - ۳۲).

گرادیان تغییرشکل را به‌عنوان یک عامل نقش‌بندی برای بردار بسیار کوچک $d\mathbf{X}$ از پیکربندی مرجع که نقش می‌بندد به بردار بسیار کوچک $d\mathbf{x}$ در پیکربندی جاری تصور کرد. توجه شود که اولین تجزیه در معادله ۴ - ۹ - ۱ انتقال خطی $d\mathbf{x} = \mathbf{F} \,.\, d\mathbf{X}$ معادله ۴ - ۶ - ۹ را با دو انتقال متوالی زیر جایگزین می‌کند.

$$d\mathbf{x}' = \mathbf{U} \,.\, d\mathbf{X} \qquad (۴ - ۹ - ۲ \text{ الف})$$

و متعاقب آن

$$d\mathbf{x} = \mathbf{R} \,.\, d\mathbf{x}' \qquad (۴ - ۹ - ۲ \text{ ب})$$

تانسور $\mathbf{U}$ دارای سه مقدار ویژه مثبت $U_{(۱)}$, $U_{(۲)}$ و $U_{(۳)}$ می‌باشد که ***کشیدگی های اصلی*** نام دارد، مرتبط با هر یک از آنها به‌ترتیب یک جهت کشیدگی اصلی $\hat{\mathbf{N}}_۱$, $\hat{\mathbf{N}}_۲$ و $\hat{\mathbf{N}}_۳$ وجود دارد. این بردارهای یکّه تشکیل سه‌گان متعامد معروف به جهت‌های ***اصلی راست کشیدگی*** را می‌دهند، توسط معادله انتقال ۴ - ۹ - ۲ الف ، اجزاء خطی در امتداد جهت‌های $\hat{\mathbf{N}}_i \ (i = ۱ , ۲ , ۳)$ به‌ترتیب به میزان $U_{(i)} \ (i = ۱ , ۲ , ۳)$ بدون تغییری از لحاظ جهت ، کشیده می‌شوند: این موضوع همراه با یک دوران جسم صلب ارائه شده توسط معادله ۴ - ۹ - ۲ ب می‌باشد. دومین تجزیه معادله ۴ - ۹ - ۱ ، روال را معکوس می‌کند، ابتدا یک دوران توسط $\mathbf{R}$ و سپس کشیدگی توسط $\mathbf{V}$ خواهد بود. در تغییرشکل عمومی ، انتقال جسم صلب ممکن است شامل چرخش و

کشیدگی باشد که هم اکنون توضیح داده شد.

به‌عنوان مقدمه برای تعیین تانسورهای چرخش و کشیدگی ، توجه داریم که یک تانسور اختیاری $\mathbf{T}$ معین مثبت است وقتی که برای تمامی بردارهای $\mathbf{V} \neq 0$ داشته باشیم $\mathbf{V} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{V} > 0$. یک شرط لازم و کافی برای اینکه $\mathbf{T}$ معین مثبت باشد آنست که مقادیر ویژه‌اش مثبت باشند. در این ارتباط ، تانسور $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ را در نظر می‌گیریم. تا زمانی که $\mathbf{F}$ غیرتکین است (یعنی $det\ \mathbf{F} \neq 0$) و $\mathbf{F} \cdot \mathbf{V} \neq 0$ چنانچه $\mathbf{V} \neq 0$ باشد، نتیجه می‌شود که $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{V}) \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{V})$ یک مجموعه مربعی است و از این رو بزرگتر از صفر می‌باشد. پس

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{V}) \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{V}) = \mathbf{V} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{V} > 0 \qquad (۴-۹-۳)$$

و $\mathbf{C}$ معین مثبت است. مزید بر آن

$$(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F})^T = \mathbf{F}^T \cdot (\mathbf{F}^T)^T = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \qquad (۴-۹-۴)$$

که اثبات می‌کند $\mathbf{C}$ همچنین متقارن هم هست. با بحث‌هایی مشابه ، می‌توان نشان داد که $\mathbf{c} = (\mathbf{F}^{-1})^T \cdot (\mathbf{F}^{-1})$ نیز متقارن و معین مثبت است.

اکنون $\mathbf{C}$ را در محورهای اصلی به‌صورت ماتریس در نظر می‌گیریم.

$$[\ C^*_{AB}\ ] = \begin{bmatrix} C_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & C_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & C_{(3)} \end{bmatrix} \qquad (۴-۹-۵)$$

و اگر $[\ a_{MN}\ ]$ ماتریس متعامدی باشد که مولفه‌های $\mathbf{C}^*$ را به مولفه‌های $\mathbf{C}$ در هر مجموعه دیگری از محورها از طریق معادله بیان شده زیر در هر دو شکل شاخصی و تانسوری ارتباط دهد، آنگاه خواهیم داشت.

$$C^*_{AB} = a_{AQ}\, a_{BP}\, C_{QP} \quad \text{یا} \quad \mathbf{C}^* = \mathbf{ACA}^T \qquad (۴-۹-۶)$$

$\mathbf{U}$ را به‌صورت جذر $\mathbf{C}$ تعریف می‌کنیم یعنی $\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}}$ یا $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{C}$ و چون مقادیر اصلی $C_{(i)}, (i = 1, 2, 3)$ تمامی مثبت هستند ، می‌توان نوشت.

$$[\sqrt{C^*_{AB}}] = \begin{bmatrix} \sqrt{C_{(1)}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{C_{(2)}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{C_{(3)}} \end{bmatrix} = [U^*_{AB}] \quad (۴-۹-۷)$$

همانطور که مشهود است، معکوس آن $(U^*)^{-1}$ عبارت است از

$$[(U^*_{AB})^{-1}] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{C_{(1)}} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{C_{(2)}} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{C_{(3)}} \end{bmatrix} \quad (۴-۹-۸)$$

توجه شود که هر دوی $\mathbf{U}$ و $\mathbf{U}^{-1}$ تانسورهای متقارن معین مثبت هستند و به‌ترتیب زیر ارائه می‌شوند.

$$U_{AB} = a_{QA}\, a_{PB}\, U^*_{QP} \quad \text{یا} \quad \mathbf{U} = \mathbf{A}^T\, \mathbf{U}^*\, \mathbf{A} \quad (۴-۹-۹)$$

و

$$U^{-1}_{AB} = a_{QA}\, a_{PB}\, (U^*_{QP})^{-1} \quad \text{یا} \quad \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{A}^T\, (\mathbf{U}^*)^{-1}\, \mathbf{A} \quad (۴-۹-۱۰)$$

بنابراین ، از تجزیه اول در معادله ۴ - ۹ - ۱ داریم

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}\,.\,\mathbf{U}^{-1} \quad (۴-۹-۱۱)$$

در نتیجه

$$\mathbf{R}^T\,.\,\mathbf{R} = (\mathbf{F}\,.\,\mathbf{U}^{-1})^T\,.\,(\mathbf{F}\,.\,\mathbf{U}^{-1}) = (\mathbf{U}^{-1})^T\,.\,\mathbf{F}^T\,.\,\mathbf{F}\,.\,\mathbf{U}^{-1}$$
$$= \mathbf{U}^{-1}\,.\,\mathbf{C}\,.\,\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\,.\,\mathbf{U}\,.\,\mathbf{U}\,.\,\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{I} \quad (۴-۹-۱۲)$$

که نشان می‌دهد $\mathbf{R}$ متعامد مقتضی می‌باشد.

تجزیه دوم در معادله ۴ - ۹ - ۱ را می‌توان با توسعه‌ای مشابه و استفاده از $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{F}\,.\,\mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2$ تائید کرد.

مثال ۴ ـ ۹ ـ ۱ یک تغییرشکل همگن توسط معادلات $x_1 = 2X_1 - 2X_2$, $x_2 = X_1 + X_2$ و $x_3 = X_3$ ارائه شده است. تجزیه قطبی $\mathbf{F} = \mathbf{R}\,.\,\mathbf{U}$ را برای این تغییرشکل تعیین کنید.

حل شکل ماتریسی تانسور $F_{iA} \equiv x_{i,A}$ بسادگی تعیین می‌شود.

$$[\,F_{iA}\,] = \begin{bmatrix} ۲ & -۲ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

که از آن $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \,.\, \mathbf{F}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$[\,C_{AB}\,] = \begin{bmatrix} ۵ & -۳ & ۰ \\ -۳ & ۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

در شکل محورهای اصلی این ماتریس به‌صورت زیر درمی‌آید.

$$[\,C^*_{AB}\,] = \begin{bmatrix} ۸ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

که ماتریس انتقال متعامد عبارت است از (این ماتریس با محاسبه بردارهای ویژه $\mathbf{C}$ تعیین می‌شود)

$$[\,a_{MN}\,] = \begin{bmatrix} ۱/\sqrt{۲} & -۱/\sqrt{۲} & ۰ \\ ۱/\sqrt{۲} & ۱/\sqrt{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین، از معادلات ۴ - ۹ - ۷ و ۴ - ۹ - ۸ داریم

$$|\,U^*_{AB}\,| = \begin{bmatrix} ۲\sqrt{۲} & ۰ & ۰ \\ ۰ & \sqrt{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad |\,(U^*_{AB})^{-۱}\,| = \frac{۱}{۲\sqrt{۲}} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲\sqrt{۲} \end{bmatrix}$$

و با استفاده از معادلات انتقال ۴ - ۹ - ۹ و ۴ - ۹ - ۱۰ (که دانشجویان باید بررسی کنند) تعیین می‌کنیم.

$$[\,U_{AB}\,] = \begin{bmatrix} ۳/\sqrt{۲} & -۱/\sqrt{۲} & ۰ \\ -۱/\sqrt{۲} & ۳/\sqrt{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

و

$$[\,U^{-۱}{}_{AB}\,] = \frac{۱}{۴\sqrt{۲}} \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴\sqrt{۲} \end{bmatrix}$$

بالاخره از معادله ۴ - ۹ - ۱۱

$$[\,R_{AB}\,] = \begin{bmatrix} ۲ & -۲ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴\sqrt{۲} \end{bmatrix} \frac{۱}{۴\sqrt{۲}}$$

$$= \begin{bmatrix} ۱/\sqrt{۲} & -۱/\sqrt{۲} & ۰ \\ ۱/\sqrt{۲} & ۱/\sqrt{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

این بسادگی با استفاده از نتایج $\mathbf{F} = \mathbf{RU}$ و $\mathbf{R} = \mathbf{I}$. $\mathbf{R}^T$ تائید می‌شوند.

۴ - ۱۰ گرادیان سرعت ، نرخ تغییرشکل ، گردابی

برای میدان سرعت یک محیط پیوسته در نواحی از فضا که توسط $v_i = v_i\,(\mathbf{x}\,,\,t)$ بیان می‌شود، *گرادیان سرعت فضایی* بدین صورت تعریف می‌شود.

$$L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \qquad (۱ - ۱۰ - ۴)$$

یک تجزیه جمعی از این تانسور به قسمت‌های متقارن و متقارن - اریب عبارت است از

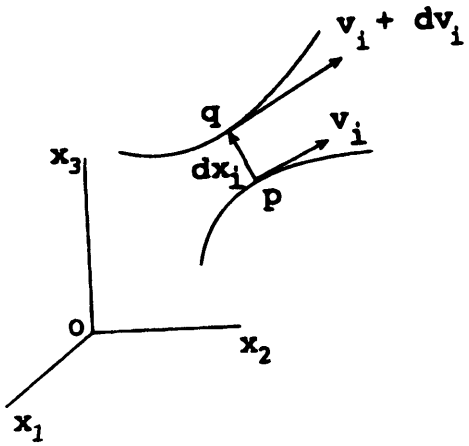
$$L_{ij} = D_{ij} + W_{ij} \qquad (۴ - ۱۰ - ۲)$$

که در آن ، قسمت متقارن

$$D_{ij} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \qquad (۴ - ۱۰ - ۳)$$

را تانسور **نرخ تغییرشکل** و قسمت متقارن - اریب

$$W_{ij} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \qquad (۴ - ۱۰ - ۴)$$



شکل ۴ - ۷

میدان سرعت دیفرانسیلی در نقطه P

را تانسور **گرادیان** یا اسپیس می‌نامند. این تجزیه هیچ فرضی روی مولفه‌های گرادیان سرعت مبنی بر کوچک بودن نمی‌گذارد و برای مولفه‌های $\partial v_i / \partial x_j$ معتبر است.

مولفه‌های سرعت در دو نقطه همسایه p و q را در نظر بگیرید. ذره در حال حاضر در P دارای یک سرعت v_i و ذره واقع در P سرعت $v_i + dv_i$ را مطابق شکل دربر دارد. پس ذره واقع در q دارای یک سرعتی نسبت به ذره P به‌صورت زیر می‌باشد.

$$dv_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j \quad \text{یا} \quad d\mathbf{v} = \mathbf{L} \,.\, d\mathbf{x} \qquad (۴ - ۱۰ - ۵)$$

توجه شود که

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial X_A} \frac{\partial X_A}{\partial x_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_A} \right) \frac{\partial X_A}{\partial x_j} \qquad (۴ - ۱۰ - ۶ \text{الف})$$

یا در نمادگذاری نمادین

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \,.\, \mathbf{F}^{-1} \qquad (۴ - ۱۰ - ۶ \text{ب})$$

که در آن حقیقتی که مشتقات زمانی مادی و گرادیان‌های مادی تبدیل هم هستند بکار برده شده است. بنابراین

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L} \,.\, \mathbf{F} \qquad (۴ - ۱۰ - ۷)$$

سپس نسبت کشیدگی $\Lambda = dx \,/\, dX$ که در آن Λ طبق معادله ۴ - ۸ - ۴ تعریف شده است، یعنی کشیدگی جزء خطی dX بطور اولیه در امتداد $\hat{\mathbf{N}}$ و هم‌اکنون در امتداد $\hat{\mathbf{n}}$ می‌باشد. با تعریف گرادیان تغییرشکل، $dx_i = x_{i,A}\, dX_A$ همراه با بردارهای یکّه $n_i = dx_i \,/\, dx$ و $N_A = dX_A \,/\, dX$ می‌توان نوشت.

$$dx n_i = x_{i,A}\, dX\, N_A$$

که به‌صورت زیر درخواهد آمد (پس از تقسیم کردن طرفین توسط عدد dX)

$$n_i \Lambda = x_{i,A}\, N_A \quad \text{یا} \quad \hat{\mathbf{n}} \Lambda = \mathbf{F} \,.\, \hat{\mathbf{N}} \qquad (۴ - ۱۰ - ۸)$$

اگر مشتق مادی این معادله را بگیریم (برای راحتی نمادگذاری نمادین را بکار می‌بریم).

$$\dot{\hat{\mathbf{n}}} \Lambda + \hat{\mathbf{n}} \dot{\Lambda} = \dot{\mathbf{F}} \,.\, \hat{\mathbf{N}} = \mathbf{L} \,.\, \mathbf{F} \,.\, \hat{\mathbf{N}} = \mathbf{L} \,.\, \hat{\mathbf{n}} \Lambda$$

در نتیجه داریم

$$\dot{\hat{\mathbf{n}}} + \hat{\mathbf{n}}\, \dot{\Lambda} \,/\, \Lambda = \mathbf{L} \,.\, \hat{\mathbf{n}} \qquad (۴ - ۱۰ - ۹)$$

با تشکیل دادن ضرب داخلی این معادله با $\hat{\mathbf{n}}$ بدست می‌آوریم.

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{n}}} + \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, \dot{\Lambda} / \Lambda = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

اما $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = ۱$ و بنابراین $\dot{\hat{\mathbf{n}}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = ۰$ نتیجه می‌دهد.

$$\dot{\Lambda} / \Lambda = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad \text{یا} \quad \dot{\Lambda} / \Lambda = v_{i,j} n_i n_j \qquad (۱۰ - ۱۰ - ۴)$$

که نرخ **کشیدگی در واحد کشیدگی** را بیان می‌کند برای جزئی که اصالتاً در جهت $\hat{\mathbf{N}}$ قرار داشته و در پیکربندی جاری در جهت $\hat{\mathbf{n}}$ واقع شده است. با توجه بیشتر درمی‌یابیم که معادله ۴ - ۱۰ - ۱۰ قابل ساده شدن است زیرا که W متقارن - اریب می‌باشد، بدین معنی که

$$L_{ij} n_i n_j = (D_{ij} + W_{ij})\, n_i n_j = D_{ij} n_i n_j$$

و بنابراین

$$\dot{\Lambda} / \Lambda = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad \text{یا} \quad \dot{\Lambda} / \Lambda = D_{ij} n_i n_j \qquad (۱۱ - ۱۰ - ۴)$$

برای مثال ، برای جزء واقع در جهت $x_۱$، $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{e}}_۱$ و

$$\dot{\Lambda} / \Lambda = [\, ۱ , ۰ , ۰ \,] \begin{bmatrix} D_{۱۱} & D_{۱۲} & D_{۱۳} \\ D_{۱۲} & D_{۲۲} & D_{۲۳} \\ D_{۱۳} & D_{۲۳} & D_{۳۳} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} = D_{۱۱}$$

به‌طریق مشابه ، برای $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{e}}_۲$ داریم $\dot{\Lambda} / \Lambda = D_{۲۲}$ و برای $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{e}}_۳$ داریم $\dot{\Lambda} / \Lambda = D_{۳۳}$. پس ، عناصر قطری تانسور نرخ تغییرشکل ، **نرخ‌های کشش** یا **نرخ‌های کشیدگی** در جهت‌های مختصات (فضایی) را بیان می‌کند.

برای اینکه عناصر غیرقطری تانسور نرخ تغییرشکل را تفسیر کرد، دو بردار دیفرانسیلی اختیاری $dx_i^{(۱)}$ و $dx_i^{(۲)}$ در نقطه P را در نظر می‌گیریم. مشتق مادی ضرب داخلی این دو بردار (با استفاده از قرار دادن نقطه در بالانوشت تا نشان دهیم که دیفرانسیل‌گیری نسبت به زمان برای کمیت داخل کروشه واقع در سمت چپ نقطه می‌باشد).

$$[\, dx_i^{(1)}\, dx_i^{(2)}\,\dot{]} = [\, dx_i^{(1)}\,\dot{]}\, dx_i^{(2)} + dx_i^{(1)}\,[\, dx_i^{(2)}\,\dot{]}$$

$$= dv_i^{(1)}\, dx_i^{(2)} + dx_i^{(1)}\, dv_i^{(2)} = v_{i,j}\, dx_j^{(1)} dx_i^{(2)} + dx_i^{(1)}\, v_{i,j}\, dx_j^{(2)}$$

$$= (v_{i,j} + v_{j,i})\, dx_i^{(1)}\, dx_j^{(2)} = 2\, D_{ij}\, dx_i^{(1)}\, dx_j^{(2)} \qquad (۱۲-۱۰-۴)$$

امّا $dx_i^{(1)}\, dx_i^{(2)} = dx^{(1)}\, dx^{(2)} \cos\theta$ می‌باشد، پس

$$[\, dx^{(1)} dx^{(2)} \cos\theta\,\dot{]} = [\, dx^{(1)}\,\dot{]}\, dx^{(2)} \cos\theta + dx^{(1)}\,[\, dx^{(2)}\,\dot{]}\, \cos\theta - dx^{(1)} dx^{(2)}\, \dot{\theta} \sin\theta$$

$$= \left(\left\{ \frac{[dx^{(1)}\dot{]}}{dx^{(1)}} + \frac{[dx^{(2)}\dot{]}}{dx^{(2)}} \right\} \cos\theta - \dot{\theta} \sin\theta \right) dx^{(1)}\, dx^{(2)} \qquad (۱۳-۱۰-۴)$$

اگر معادلات ۴ - ۱۰ - ۱۲ و ۴ - ۱۰ - ۱۳ را مساوی هم قرار دهیم.

$$2 D_{ij} dx_i^{(1)} dx_j^{(2)} = \left(\left\{ \frac{[dx^{(1)}\dot{]}}{dx^{(1)}} + \frac{[dx^{(2)}\dot{]}}{dx^{(2)}} \right\} \cos\theta - \dot{\theta} \sin\theta \right) dx^{(1)}\, dx^{(2)} \qquad (۱۴-۱۰-۴)$$

اگر $dx_i^{(1)} = dx_i^{(2)} = dx_i$ آنگاه $\theta = 0$ و $\cos\theta = 1$, $\sin\theta = 0$ و $dx^{(1)} = dx^{(2)} = dx$ بطوری که معادله ۴ - ۱۰ - ۱۴ به‌صورت زیر کاهش می‌یابد.

$$D_{ij} \frac{dx_i}{dx} \frac{dx_j}{dx} = D_{ij} n_i n_j = \frac{(dx)\dot{}}{dx} \qquad (۱۵-۱۰-۴)$$

که مشاهده می‌شود **نرخ کشش در واحد طول** جزء در حال حاضر واقع در جهت n_i می‌باشد (با معادله ۴ - ۱۰ - ۱۱ مقایسه نمایید). اما اگر $dx_i^{(1)}$ عمود بر $dx_i^{(2)}$ باشد، در آن صورت $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\cos\theta = 0$, $\sin\theta = 1$ است، آنگاه معادله ۴ - ۱۰ - ۱۴ خواهد شد.

$$2\, D_{ij} n_i^{(1)} n_j^{(2)} = \hat{\mathbf{n}}_1 \cdot 2\, \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 = -\dot{\theta} \qquad (۱۶-۱۰-۴)$$

این نرخ کاهش در زاویه θ اندازه **نرخ برشی** بین اجزاء واقع در جهت‌های عمودی $\hat{\mathbf{n}}_1$ و $\hat{\mathbf{n}}_2$

می‌باشد. در نوشته‌های مهندسی، معمول است که **نرخ برشی** را به‌عنوان نصف تغییر (افزایش یا کاهش) بین دو جزء خطی مادی بطور لحظه‌ای در زوایای قائمه نسبت به یکدیگر تعریف می‌کنند. پس برای $\hat{\mathbf{n}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_1$ و $\hat{\mathbf{n}}_2 = \hat{\mathbf{e}}_2$ داریم

$$-\frac{1}{2}\dot{\theta}_{12} = \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 = D_{12}$$

و در حالت کلی، عناصر غیرقطری تانسور نرخ تغییرشکل ، **نرخ‌های برشی** برای سه جفت محورهای مختصات را بیان می‌کنند.

چون $\mathbf{D}$ یک تانسور متقارن مرتبه دوم می‌باشد، مشتق مقادیر اصلی ، جهت‌های اصلی نمایشی از دایره‌های مور تانسور انحراف نرخ تغییرشکل، و غیره را می‌توان برای آن اجرا نمود. همچنین، مفید خواهد بود رابطه‌ای بین $\mathbf{D}$ و مشتق مادی تانسور کرنش $\mathbf{E}$ توسعه یابد. یادآوری می‌شود که

$$2\,\mathbf{E} = \mathbf{C} - \mathbf{I} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}$$

در نتیجه هنگامی که معادله ۴ - ۱۰ - ۷ بکار برده می‌شود.

$$2\,\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \cdot \dot{\mathbf{F}} = (\mathbf{L} \cdot \mathbf{F})^T \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \cdot (\mathbf{L} \cdot \mathbf{F})$$
$$= \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F}^T \cdot (\mathbf{L}^T + \mathbf{L}) \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F}^T \cdot (2\,\mathbf{D}) \cdot \mathbf{F}$$

یا

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F} \qquad (۴ - ۱۰ - ۱۷)$$

همچنین توجه شود که از $u_i + X_i = x_i$ داریم $u_{i,A} + \delta_{i,A} = x_{i,A}$ و اگر گرادیان‌های تغییر مکان $u_{i,A}$ خیلی کوچک باشند، $u_{i,A} << 1$ و قابل صرف‌نظر ، آنگاه $\delta_{i,A} \approx x_{i,A}$ $(\mathbf{I} \approx \mathbf{F})$ و البته $\mathbf{F}^T = \mathbf{I}^T = \mathbf{I}$. همزمان برای هر $u_{i,A}$ خیلی کوچک توسط معادله ۴ - ۷ - ۴ ، $\mathbf{E} \approx \varepsilon$ و معادله ۴ - ۱۰ - ۱۷ برای نظریه بسیار کوچک به‌صورت زیر کاهش می‌یابد

$$\dot{\varepsilon} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{D} \qquad (۴ - ۱۰ - ۱۸)$$

بالاخره ، با مشتق‌گیری مادی از تفاوت $(dx)^2 - (dX)^2 = d\mathbf{X} \cdot 2\,\mathbf{E} \cdot d\mathbf{X}$ و توجه به اینکه

$[\,(dx)^2\,\dot{}\,] = [\,(dx)^2 - (dX)^2\,\dot{}\,] = [\,(dX)^2\,\dot{}\,]$ چون $0 =$ می‌باشد بدست می‌آوریم.

$$[(dx)^2\dot{}] = d\mathbf{X}\,.\,2\,\dot{\mathbf{E}}\,.\,d\mathbf{X} = d\mathbf{X}\,.\,\mathbf{F}^T\,.\,2\,\mathbf{D}\,.\,\mathbf{F}\,.\,d\mathbf{X} = d\mathbf{x}\,.\,2\,\mathbf{D}\,.\,d\mathbf{x}$$

(۴ - ۱۰ - ۱۹)

که نشان می‌دهد حرکت محلی در نقطه‌ای مثل $\mathbf{x}$ یک حرکت جسم صلب است اگر و فقط اگر در $\mathbf{x}$، $\mathbf{D} = 0$ باشد

با حل معادله ۴ - ۱۰ - ۹ برای $\dot{n}_i$ و استفاده از معادله ۴ - ۱۰ - ۱۱ می‌توان نوشت.

$$\dot{n}_i = v_{i,j}\,n_j - n_i\dot{\Lambda}\,/\,\Lambda = (D_{ij} + W_{ij})\,n_j - D_{qk}\,n_q\,n_k\,n_i$$

اکنون اگر n_i در امتداد یک جهت اصلی $\mathbf{D}$ انتخاب شود، نتیجه می‌شود $D_{ij}\,n_j^{(P)} = D_{(p)}n_i^{(p)}\quad (p = 1\,,\,2\,,\,3)$ که در آن $D_{(p)}$ یک مقدار اصلی $\mathbf{D}$ را نشان می‌دهد، آنگاه

$$\dot{n}_i = D_{(p)}n_i^{(p)} + W_{ij}n_j^{(p)} - D_{(p)}n_q^{(p)}n_q^{(p)}n_i^{(p)} = W_{ij}n_j^{(p)} \qquad (۴ - ۱۰ - ۲۰)$$

زیرا که $n_q^{(p)}n_q^{(p)} = 1$. چون بردار یکّه فقط از لحاظ جهت می‌تواند تغییر کند، معادله ۴ - ۱۰ - ۲۰ نشان می‌دهد که W_{ij} **نرخ تغییر در جهت** را برای محورهای اصلی $\mathbf{D}$ ارائه می‌دهد. از این رو، نام **چرخش** یا **اسپین** به $\mathbf{W}$ داده می‌شود. بعلاوه، در ارتباط با $\mathbf{W}$ بردار زیر وجود دارد.

$$w_i = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk}\,v_{k,j} \qquad \text{یا} \qquad \mathbf{w} = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{v} \qquad (۴ - ۱۰ - ۲۱)$$

که **بردار چرخش** نامیده می‌شود، با دنبال کردن محاسبات خواهیم داشت.

$$\varepsilon_{pqi}w_i = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon_{pqi}\varepsilon_{ijk}v_{k,j} = \tfrac{1}{2}\,(\delta_{pj}\delta_{qk} - \delta_{pk}\delta_{qj})\,v_{k,j}$$

$$= \tfrac{1}{2}\,(v_{q,p} - v_{p,q}) = W_{qp} \qquad (۴ - ۱۰ - ۲۲)$$

پس اگر $\mathbf{D} \equiv 0$ باشد، آنگاه $L_{ij} = W_{ij}$. در نتیجه $dv_i = L_{ij}dx_j = W_{ij}dx_j = \varepsilon_{jik}w_kdx_j$ و چون $\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{ikj},$

$$dv_i = \varepsilon_{ijk}\, w_j\, dx_k \qquad \text{یا} \qquad d\mathbf{v} = \mathbf{w} \times d\mathbf{x} \qquad (۲۳ - ۱۰ - ۴)$$

که بر طبق آن سرعت نسبی در حومه p متعلق به دوران یک جسم صلب حول یک محور عبور کرده از p می‌باشد. بردار $\mathbf{w}$ سرعت زاویه‌ای ، جهت و مبدا دوران را مشخص می‌کند.

برای خلاصه کردن تفسیر فیزیکی گرادیان سرعت $\mathbf{L}$ ، توجه داریم که این در جداسازی *حرکت لحظه‌ای محلی* به دو قسمت زیر موثر است :

۱ - نرخ‌های به اصطلاح لگاریتمی کشیدگی $D_{(p)}$, $(p = ۱ , ۲ , ۳)$ یعنی مقادیر ویژه $\mathbf{D}$ در امتداد محورهای اصلی دوبدو متعامد $\mathbf{D}$ ، به‌صورت زیر بیان می‌شوند

$$\dot{\Lambda} / \Lambda = \frac{d\ (ln\ \Lambda)}{dt} = D_{ij}\, n_i^{(p)} n_i^{(p)} = n_i^{(p)}\, D_{(p)}\, n_i^{(p)} = D_{(p)}$$

۲ - دوران صلب محورهای اصلی $\mathbf{D}$ با سرعت زاویه‌ای $\mathbf{w}$.

۴ - ۱۱ مشتق مادی اجزاء خطی ، مساحت‌ها، حجم‌ها

نخست مشتق مادی جزء خطی دیفرانسیل $d\mathbf{x} = \mathbf{F} \,.\, d\mathbf{X}$ را در نظر می‌گیریم. واضح است $(d\mathbf{x})^{\cdot} = \dot{\mathbf{F}} \,.\, d\mathbf{X}$ و توسط معادله ۴ - ۱۰ - ۷

$$(d\mathbf{x})^{\cdot} = \dot{\mathbf{F}} \,.\, d\mathbf{X} = \mathbf{L} \,.\, \mathbf{F} \,.\, d\mathbf{X} = \mathbf{L} \,.\, d\mathbf{x} \qquad \text{یا} \qquad (dx_i)^{\cdot} = v_{i,j} dx_j \qquad (۱ - ۱۱ - ۴)$$

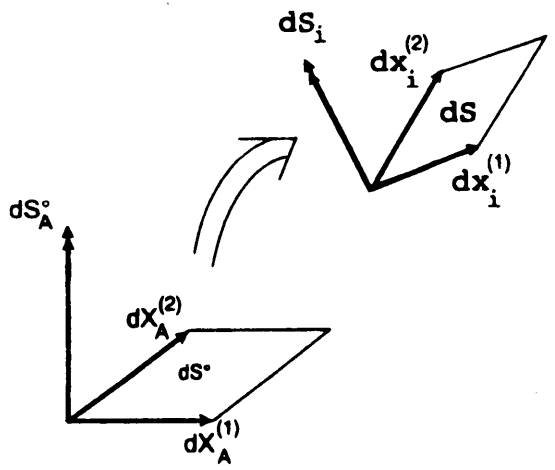
باید توجه داشت که از معادله ۴ - ۱۱ - ۱ مشتق مادی ضرب نقطه‌ای $d\mathbf{x} \,.\, d\mathbf{x}$ عبارت است از

$$(d\mathbf{x} \,.\, d\mathbf{x})^{\cdot} = ۲ d\mathbf{x} \,.\, (d\mathbf{x})^{\cdot} = d\mathbf{x} \,.\, ۲\mathbf{L} \,.\, d\mathbf{x} = d\mathbf{x} \,.\, ۲\,(\mathbf{D} + \mathbf{W}) \,.\, d\mathbf{x} = d\mathbf{x} \,.\, ۲\,\mathbf{D} \,.\, d\mathbf{x}$$

که با معادله ۴ - ۱۰ - ۱۹ در توافق است.

این موضوع برای روابطی که برای مشتقات مادی جزء سطحی و جزء حجمی توسعه داده شود برقرار است. بنابراین، مساحت مسطح تعریف شده در پیکربندی مرجع توسط اجزاء خطی دیفرانسیل $dX_A^{(۱)}$ و $dX_A^{(۲)}$ مطابق شکل ۴ - ۸ را در نظر می‌گیریم. مساحت متوازی‌الاضلاع dS° توسط بردار زیر قابل بیان است.

$$dS^{\circ}_A = \varepsilon_{ABC}\, dX^{(۱)}{}_B\, dX^{(۲)}{}_C \qquad (۲ - ۱۱ - ۴)$$



شکل ۴ - ۸

مساحت dS° بین بردارهای $dX_A^{(1)}$ و $dX_A^{(2)}$ در پیکربندی مرجع تبدیل می‌شود به dS بین بردارهای $dx_i^{(1)}$ و $dx_i^{(2)}$ در پیکربندی تغییرشکل یافته .

در اثر حرکت $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ این مساحت به مساحت جاری dS_i مطابق شکل ۴ - ۸ مبدل می‌شود و عبارت است از

$$dS_i = \varepsilon_{ijk} dx_j^{(1)} dx_k^{(2)} = \varepsilon_{ijk} x_{j,B} dX_B^{(1)} x_{k,C} dX_C^{(2)} \qquad (۴ - ۱۱ - ۳)$$

که با ضرب طرفین در $x_{i,A}$ نتیجه می‌دهد.

$$x_{i,A} dS_i = \varepsilon_{ijk} x_{i,A} x_{j,B} x_{k,C} dX_B^{(1)} dX_C^{(2)} = \varepsilon_{ijk} F_{iA} F_{jB} F_{kC} dX_B^{(1)} dX_C^{(2)}$$

یادآوری می‌شود $det\ \mathbf{F} = J$ (ژاکوبی) و از معادله ۲ - ۴ - ۱۲ داریم

$$\varepsilon_{ijk} F_{iA} F_{jB} F_{kC} = \varepsilon_{ABC}\ det\ \mathbf{F} = \varepsilon_{ABC} J$$

بنابراین، با واردکردن این نتیجه در معادله مربوط به $x_{i,A}\, dS_i$ و ضرب طرفین آن در $X_{A,q}$ بدست خواهیم آورد.

$$x_{i,A}\, X_{A,q}\, dS_i = \varepsilon_{ABC}\, J\, dX_B^{(1)}\, dX_C^{(2)}\, X_{A,q}$$

اما $x_{i,A}\, X_{A,q} = \delta_{iq}$ در نتیجه

$$\delta_{iq}\, dS_i = dS_q = X_{A,q}\, J\, dS^\circ_A \qquad (۴ - ۱۱ - ۳)$$

که مساحت جاری را برحسب مساحت اصلی بیان می‌کند.

برای تعیین مشتق مادی dS_i، تساوی زیر را لازم داریم

$$\dot{(det\ \mathbf{A})} = tr\ (\dot{\mathbf{A}}\ .\ \mathbf{A}^{-1})\ det\ \mathbf{A} \qquad (۴ - ۱۱ - ۵)$$

که در آن $\mathbf{A}$ یک تانسور اختیاری با جایگزین کردن $\mathbf{F}$ برای $\mathbf{A}$ بدست می‌آوریم.

$$\dot{(det\ \mathbf{F})} = \dot{J} = (det\ \mathbf{F})\ tr\ (\dot{\mathbf{F}}\ .\ \mathbf{F}^{-1}) = J\ tr\ \mathbf{L}$$

یا

$$\dot{J} = J\, v_{i,i} = J\, div\ \mathbf{v} \qquad (۴ - ۱۱ - ۶)$$

باید توجه داشت که معادله ۴ - ۱۱ - ۴ ممکن است به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$dS_q = JX_{A,q}\, dS^\circ_A$$

با استفاده از نمادگذاری نمادین مزایای معادله ۴ - ۱۱ - ۴ حاصل می‌گردد.

$$d\mathbf{S} = \dot{J}\ (\mathbf{F}^{-1})^T\ .\ d\mathbf{S}^\circ = \dot{J}\, d\mathbf{S}^\circ\ .\ \mathbf{F}^{-1}$$

و

$$d\mathbf{S}\ .\ \mathbf{F} = \dot{J}\, d\mathbf{S}^\circ$$

با دیفرانسیل‌گیری از این معادله خواهیم داشت.

$$d\dot{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{F} + d\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{F}} = \dot{J}\, d\mathbf{S}^\circ = J\,(tr\ \mathbf{L})\, d\mathbf{S}^\circ$$

$$d\dot{\mathbf{S}} + d\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = J\,(tr\ \mathbf{L})\, d\mathbf{S}^\circ \cdot \mathbf{F}^{-1} = (tr\ \mathbf{L})\, d\mathbf{S}$$

بالاخره

$$d\dot{\mathbf{S}} = (tr\ \mathbf{L})\, d\mathbf{S} - d\mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \quad \text{یا} \quad d\dot{\mathbf{S}}_i = v_{k,k} d\mathbf{S}_i - d\mathbf{S}_j\, v_{j,i} \qquad (۴-۱۱-۷)$$

که نرخ تغییر جزء مساحتی را برحسب مساحت جاری، اثر گرادیان سرعت ، و مولفه‌های $\mathbf{L}$ ارائه می‌دهد.

سپس جزء حجمی تعریف شده در پیکربندی مرجع توسط ضرب جعبه‌ای را در نظر می‌گیریم.

$$dV^\circ = d\mathbf{X}^{(1)} \cdot d\mathbf{X}^{(2)} \times d\mathbf{X}^{(3)} = \varepsilon_{ABC}\, dX_A{}^{(1)} dX_B{}^{(2)} dX_C{}^{(3)} = [\, d\mathbf{X}^{(1)},\, d\mathbf{X}^{(2)},\, d\mathbf{X}^{(3)} \,]$$

به همان صورتی که در شکل ۴ - ۹ به تصویر کشیده شده است و همچنین جزء حجمی تغییرشکل یافته در شکل ۴ - ۹ به‌صورت زیر ارائه شده است.

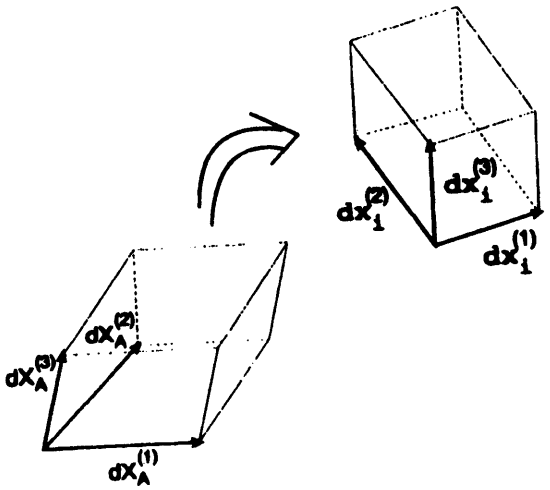
$$dV = d\mathbf{x}^{(1)} \cdot d\mathbf{x}^{(2)} \times d\mathbf{x}^{(3)} = \varepsilon_{ijk}\, dx_i{}^{(1)} dx_j{}^{(2)} dx_k{}^{(3)} = [\, d\mathbf{x}^{(1)},\, d\mathbf{x}^{(2)},\, d\mathbf{x}^{(3)} \,]$$

برای حرکت $\mathbf{x} = \mathbf{x}\,(\mathbf{X},\, t)$ ، داریم $d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$ در نتیجه حجم جاری ضرب جعبه‌ای است

$$dV = [\, \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}^{(1)},\, \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}^{(2)},\, \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}^{(3)} \,] = \varepsilon_{ijk}\, x_{i,A}\, x_{j,B}\, x_{k,C}\, dX_A{}^{(1)} dX_B{}^{(2)}\, dX_C{}^{(3)}$$

$$= det\ \mathbf{F}\, [\, d\mathbf{X}^{(1)},\, d\mathbf{X}^{(2)},\, d\mathbf{X}^{(3)} \,] = J\, dV^\circ \qquad (۴-۱۱-۸)$$

که جزء حجمی جاری را برحسب اندازه اصلی‌اش ارائه می‌دهد. چون $J \neq 0$ ($\mathbf{F}$ معکوس‌پذیر است)، داریم $J > 0$ یا $J < 0$. از لحاظ ریاضی ، $J < 0$ ممکن است اما بطور فیزیکی این موضوع متعلق به حجم منفی می‌باشد ، پس آن را رد می‌کنیم.



شکل ۴ - ۹

حجم متوازی‌السطوح تعریف شده توسط $dX_A^{(1)}$, $dX_A^{(2)}$ و $dX_A^{(3)}$ در پیکربندی مرجع به جسم تعریف شده توسط متوازی‌السطوح $dx_i^{(1)}$, $dx_i^{(2)}$ و $dx_i^{(3)}$ در پیکربندی تغییرشکل یافته مبدل می‌شود.

از این به بعد فرض می‌کنیم $J > 0$ باشد اگر $J = 1$ باشد آنگاه $dV = dV^\circ$ و اندازه حجم محفوظ می‌ماند. اگر J برای تمامی $\mathbf{X}$ مساوی واحد باشد، می‌گوییم حرکت *ایزوکوریک* است.

برای تعیین نرخ زمانی تغییرات dV مشتق مادی می‌گیریم.

$$(dV)^{\cdot} = \dot{J}\, dV^\circ = J\ (tr\ \mathbf{L})\ dV^\circ = J\, v_{i,i}\, dV^\circ = v_{i,i}\, dV \qquad (۹ - ۱۱ - ۴)$$

پس یک شرط لازم و کافی برای اینکه حرکت ایزوکوریک باشد آنست که

$$v_{i,i} = div\ \mathbf{v} = 0 \qquad (۱۰ - ۱۱ - ۴)$$

بطور خلاصه، مشاهده می‌شود که گرادیان تغییرشکل $\mathbf{F}$ بر کشیدگی یک جزء خطی، تغییرات یک جزء مساحتی و تغییرات یک جزء حجمی حاکمیت می‌کند. اما گرادیان سرعت $\mathbf{L}$ است که نرخی را که این تغییرات اتفاق می‌افتد تعیین می‌کند.

مسائل

۴ - ۱ حرکت یک محیط پیوسته توسط معادلات مولفه‌ای زیر مشخص شده است.

$$x_1 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)\, e^{t} + \frac{1}{2}(X_1 - X_2)\, e^{-t}$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)\, e^{t} - \frac{1}{2}(X_1 - X_2)\, e^{-t}$$

$$x_3 = X_3$$

(الف) نشان دهید که دترمینان ژاکوبی $\mathbf{J}$ حذف نمی‌شود، و آن را برای معادلات معکوس $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ حل کنید.

(ب) مولفه‌های سرعت و شتاب را برحسب مختصات مادی محاسبه کنید.

(پ) معادلات معکوس توسعه یافته در قسمت (الف) را بکار ببرید، مولفه‌های سرعت و شتاب را برحسب مختصات فضایی بیان کنید.

پاسخ : (الف)

$$\mathbf{J} = \cos h^2 t - \sin h^2 t = 1$$

$$X_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)\, e^{-t} + \frac{1}{2}(x_1 - x_2)\, e^{t}$$

$$X_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)\, e^{-t} - \frac{1}{2}(x_1 - x_2)\, e^{t}$$

$$X_3 = x_3$$

(ب)

$$v_1 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)\, e^{t} - \frac{1}{2}(X_1 - X_2) e^{-t}$$

$$v_2 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)\, e^{t} + \frac{1}{2}(X_1 - X_2)\, e^{-t}$$

$$v_3 = 0$$

$$a_1 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)\, e^{t} + \frac{1}{2}(X_1 - X_2)\, e^{-t}$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)\, e^{t} - \frac{1}{2}(X_1 - X_2)\, e^{-t}$$

$$a_3 = 0$$

(پ)

$$v_1 = x_2,\ v_2 = x_1,\ v_3 = 0,\ a_1 = x_1,\ a_2 = x_2,\ a_3 = 0$$

۴ - ۲ حرکت یک محیط پیوسته در شکل مولفه‌ای توسط معادلات زیر ارائه شده است.

$$x_1 = X_1 + X_2 t + X_3 t^2$$

$$x_2 = X_2 + X_3 t + X_1 t^2$$

$$x_3 = X_3 + X_1 t + X_2 t^2$$

(الف) نشان دهید که $\mathbf{J} \neq 0$ ، آن را برای معادلات معکوس حل کنید.

(ب) سرعت و شتاب را برای وضعیت‌های زیر تعیین کنید.

(۱) در لحظه $t = 1\ s$ برای ذره‌ای که در نقطه (۴ , ۳/۷۵ , ۲/۷۵) و $t = 0/5\ s$ واقع بوده است.

(۲) در لحظه $t = 2\ s$ برای ذره‌ای که در نقطه (۱- , ۲ , ۱) و $t = 0$ واقع بوده است.

پاسخ : (الف) $\mathbf{J} = (1 - t^3)^2$, $X_1 = \frac{x_1 - x_3 t}{1 - t_3}$, $X_2 = \frac{x_2 - x_3\, t}{1 - t^3}$, $X_3 = \frac{x_3 - x_1 t}{1 - t^3}$

(ب)

(۱) $\mathbf{v} = 8\,\hat{\mathbf{e}}_1 + 5\,\hat{\mathbf{e}}_2 + 5\,\hat{\mathbf{e}}_3$, $\mathbf{a} = 6\,\hat{\mathbf{e}}_1 + 2\,\hat{\mathbf{e}}_2 + 4\,\hat{\mathbf{e}}_3$

(۲) $\mathbf{v} = -2\,\hat{\mathbf{e}}_1 + 3\,\hat{\mathbf{e}}_2 + 9\,\hat{\mathbf{e}}_3$, $\mathbf{a} = -2\,\hat{\mathbf{e}}_1 + 2\,\hat{\mathbf{e}}_2 + 4\,\hat{\mathbf{e}}_3$

۴ - ۳ یک جسم محیط پیوسته دارای حرکتی با معادلات تعریف شده زیر است.

$$x_1 = X_1 + 2\,X_2 t^2 \quad , \quad x_2 = X_2 + 2\,X_1 t^2 \quad , \quad x_3 = X_3$$

(الف) مولفه‌های سرعت در لحظه $t = 1/5$ را برای ذره‌ای که نقطه (۴ , ۳ , ۲) را در لحظه $t = 1\ s$ اشغال نموده است تعیین کنید.

(ب) معادله مسیری را که ذره شناسائی شده در قسمت (الف) طی خواهد نمود تعیین کنید.

(پ) مولفه‌های شتاب همان ذره را در لحظه $t = 2\ s$ محاسبه کنید.

پاسخ : (الف) $v_1 = 2$, $v_2 = 8$, $v_3 = 0$

(ب) $4\,x_1 - x_2 = 5$ در صفحه $x_3 = 4$

(پ) $a_1 = \frac{4}{3}$, $a_2 = \frac{16}{3}$, $a_3 = 0$

۴ - ۴ حرکت $\mathbf{x} = \mathbf{x}\,(\mathbf{X}, t)$ در شکل مولفه‌ای توسط معادلات زیر ارائه شده‌اند.

$$x_1 = X_1\,(1 + t) \quad , \quad x_2 = X_2\,(1 + t)^2 \quad , \quad x_3 = X_3\,(1 + t^2)$$

روابطی برای مولفه‌های سرعت و شتاب برحسب هر دو مختصات لاگرانژی و اولری بدست آورید.

پاسخ :

$$v_1 = X_1 = \frac{x_1}{1+t},\ v_2 = 2X_2(1+t) = \frac{2x_2}{1+t},\ v_3 = 2X_3 t = \frac{2x_3 t}{1+t^2}$$

$$a_3 = 0\ ,\quad a_2 = 2X_2 = \frac{2x_2}{(1+t)^2}\ ,\quad a_3 = 2X_3 = \frac{2x_3}{1+t^2}$$

۴ - ۵ توصیف لاگرانژی یک حرکت محیط پیوسته عبارت است از

$$x_1 = X_1 e^{-t} + X_3(e^{-t}-1)\ ,\ x_2 = X_2 e^{t} - X_3(1-e^{-t})\ ,\ x_3 = X_3 e^{t}$$

نشان دهید که این معادلات معکوس‌پذیر هستند، و توصیف اولری حرکت را تعیین کنید.

پاسخ :

$$X_1 = x_1 e^{t} - x_3(e^{t}-1)\ ,\ X_2 = x_2 e^{-t} + x_3(e^{-2t}-e^{-2t})\ ,\ X_3 = x_3 e^{-t}$$

۴ - ۶ میدان سرعت در شکل لاگرانژی به‌صورت زیر ارائه شده است.

$$v_1 = 2t + X_1\ ,\quad v_2 = X_2 e^{t}\ ,\quad v_3 = X_3 - t$$

از این معادلات انتگرال بگیرید تا $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X},t)$ با $\mathbf{x} = \mathbf{X}$ در $t = 0$ بدست آید و از این نتایج برای محاسبه مولفه‌های سرعت و شتاب در شکل اولری (فضایی) استفاده کنید.

پاسخ :

$$v_1 = \frac{x_1 + 2t + t^2}{1+t}\ ,\quad v_2 = x_2\ ,\quad v_3 = \frac{2x_3 - 2t - t^2}{2(1+t)}$$

$$a_1 = 2\ ,\ a_2 = x_2\ ,\ a_3 = -1$$

۴ - ۷ حرکت یک محیط پیوسته توسط روابط زیر داده شده است.

$$x_1 = X_1 e^{t} - X_3(e^{t}-1)\quad ,\quad x_2 = X_2 e^{-t} + X_3(1-e^{-t})\quad ,\quad x_3 = X_3$$

میدان تغییرمکان را در هر دو توصیف مادی و فضایی تعیین کنید.

پاسخ :

$$u_1 = (X_1 - X_3)(e^t - 1) = (x_1 - x_3)(1 - e^{-t})$$

$$u_2 = (X_2 - X_3)(e^{-t} - 1) = (x_2 - x_3)(1 - e^t)$$

$$u_3 = 0$$

۴ - ۸ میدان درجه حرارت در یک محیط پیوسته توسط عبارات زیر بیان شده است.

$$T = e^{-2t} / x^2 \qquad \text{که در آن} \quad x^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

میدان سرعت محیط پیوسته دارای مولفه‌های

$$v_1 = x_2 + 2x_3 \ , \ v_2 = x_3 - x_1 \ , \ v_3 = x_1 + 3x_2$$

می‌باشد ، مشتق مادی dT / dt میدان درجه حرارت را تعیین کنید.

پاسخ :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{-e^{-2t}(3x^2 + 6x_1x_3 + 8x_2x_3)}{x^2}$$

۴ - ۹ در یک ناحیه خاصی از جریان شاره ، سرعت دارای مولفه‌های

$$v_1 = A(x_1^3 + x_1x_2^2)e^{-kt} \ , \ v_2 = A(x_1^2x_2 + x_3^3)e^{-kt} \ , \ v_3 = 0$$

می‌باشد که در آن A و k ثابت هستند. اپراتور مشتق مادی (فضایی) را بکار ببرید تا مولفه‌های شتاب در نقطه $(0 , 1 , 1)$ برای لحظه $t = 0$ تعیین شوند

پاسخ :

$$a_1 = -2A(k - 5A) \ , \quad a_2 = -A(k - 5A) \ , \ a_3 = 0$$

۴ - ۱۰ میدان تغییرمکان برحسب متغیرهای فضایی و زمان توسط معادلات زیر ارائه شده است.

$$u_1 = x_2t^2 \quad , \quad u_2 = x_3t \quad , \quad u_3 = x_1t$$

اپراتور مشتق مادی (فضایی) را استفاده کنید تا مولفه‌های سرعت تعیین شوند.

پاسخ :

$$v_1 = \frac{2x_2t + x_2t^2 + x_1t^3}{1 - t^2} \quad , \quad v_2 = \frac{x_2 + x_1t + 2x_2t^3}{1 - t^2} \quad , \quad v_3 = \frac{x_1 + 2x_2t^2 + x_2t^3}{1 - t^2}$$

۴ - ۱۱ برای حرکتی که توسط معادلات زیر داده شده است.

$$x_1 = X_1 \cos \omega t + X_2 \sin \omega t$$
$$x_2 = - X_1 \sin \omega t + X_2 \cos \omega t$$
$$x_3 = (1 + kt) X_3$$

و در آن ω و k ثابت هستند، میدان تغییرمکان در شکل اولری را تعیین کنید.

پاسخ :

$$u_1 = x_1 (1 - \cos \omega t) + x_2 \sin \omega t$$
$$u_2 = - x_1 \sin \omega t + x_2 (1 - \cos \omega t)$$
$$u_3 = x_3 kt / (1 + kt)$$

۴ - ۱۲ نشان دهید که میدان تغییرمکان برای حرکت تحلیل شده در مسئله ۴ - ۱ دارای شکل اولری به‌صورت زیر است.

$$u_1 = x_1 - \frac{1}{2} (x_1 + x_2) e^{-t} - \frac{1}{2} (x_1 - x_2) e^{t}$$

$$u_2 = - x_2 - \frac{1}{2} (x_1 + x_2) e^{-t} + \frac{1}{2} (x_1 - x_2) e^{t}$$

با استفاده از اپراتور مشتق مادی $(du_i / dt = \partial u_i / \partial t + v_j \partial u_i / \partial x_j)$ مولفه‌های سرعت و شتاب محاسبه شده در مسئله ۴ - ۱ را بررسی کنید.

۴ - ۱۳ توصیف لاگرانژی یک تغییرشکل توسط عبارات زیر داده شده است.

$$x_1 = X_1 + X_2 (e^2 - e^{-2})$$
$$x_2 = X_2 - X_2 (e^2 - 1)$$
$$x_3 = X_3 e^2$$

مولفه‌های گرادیان تغییرشکل F_{iA} را تعیین کنید و توسط آنان نشان دهید که ژاکوبی J صفر نیست. معادلات نقش‌بندی را معکوس کنید تا توصیف اولری تغییرشکل حاصل گردد.

پاسخ :

$$J = e^{۲} \, , \, X_۱ = x_۱ - x_۳ \, (۱ - e^{-۲})$$
$$X_۲ = x_۲ + x_۳ \, (۱ - e^{-۲})$$
$$X_۳ = x_۳ e^{-۲}$$

۴ - ۱۴ تغییرشکل **همگن** به گونه‌ای توضیح داده می‌شود که تمامی تانسورهای تغییرشکل و کرنش مستقل از مختصات هستند، بنابراین می‌توان آن را در حالت عمومی با میدان تغییرمکان $u_i = A_{ij} X_j$ بیان کرد که A_{ij} ثابت می‌باشند (یا در حالت حرکت توابعی از زمان). نشان دهید که برای یک تغییرشکل همگن با A_{ij} ثابت

(الف) سطوح مسطح مادی به‌صورت مسطح باقی می‌مانند.

(ب) اجزاء خطی مستقیم همچنان مستقیم باقی می‌مانند.

(پ) سطوح مادی که در پیکربندی مرجع کروی هستند به سطوح بیضوی در پیکربندی تغییرشکل یافته مبدل می‌شوند.

۴ - ۱۵ تغییرشکل همگن **بسیار کوچک** $u_i = A_{ij} \, X_j$ به‌گونه‌ای تعریف می‌شود که ثابت‌های A_{ij} به اندازه‌ای کوچک هستند که ضرب‌هایشان را می‌توان صرف‌نظر کرد. نشان دهید که برای دو تغییرشکل بسیار کوچک متوالی ، کل تغییرمکان برابر جمع تغییرمکان‌های انفرادی بدون عتنا به‌ترتیبی که تغییرشکل‌ها اعمال شده‌اند می‌باشد.

۴ - ۱۶ برای تغییرشکل همگن تعریف شده توسط

$$x_۱ = \alpha X_۱ + \beta X_۲$$
$$x_۲ = - X_۱ + \alpha X_۲$$
$$x_۳ = \mu X_۳$$

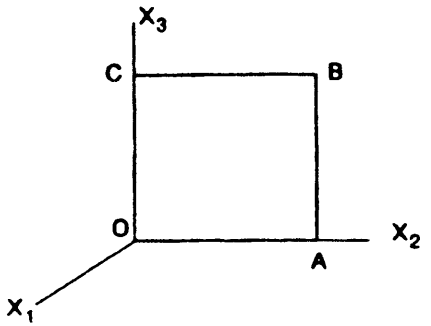
که در آن α , β و μ ثابت هستند، تانسور کرنش محدود لاگرانژی $\mathbf{E}$ را محاسبه کنید. نشان دهید که اگر $\alpha = cos\,\theta$, $\beta = sin\,\theta$ و $\mu = ۱$ باشد، کرنش صفر و نقش‌بندی منجر به دوران جسم صلب به اندازه θ حور محور $X_۳$ خواهد شد.

پاسخ :

$$E_{AB} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \alpha^2 + \beta^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 + \beta^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu^2 - 1 \end{bmatrix}$$

۴ - ۱۷ تغییرشکلی توسط روابط زیر تعریف شده است.

$$x_1 = X_1$$
$$x_2 = X_2 + \frac{1}{2} X_3^2$$
$$x_3 = X_3$$



(الف) تصویر تغییرشکل یافتهٔ مربع واحد $OABC$ را در صفحه $X_1 = 0$ ترسیم کنید.

(ب) بردارهای دیفرانسیل $d\mathbf{x}^{(2)}$ و $d\mathbf{x}^{(3)}$ را تعیین کنید که به‌ترتیب بردارهای تغییرشکل یافته حاصل از $d\mathbf{X}^{(2)} = dX^{(2)}\hat{\mathbf{I}}_2$ و $d\mathbf{X}^{(3)} = dX^{(3)}\hat{\mathbf{I}}_3$ می‌باشند که در اصل در نقطه $\mathbf{C}$ واقع بوده‌اند.

(پ) ضرب نقطه‌ای $d\mathbf{x}^{(2)} \cdot d\mathbf{x}^{(3)}$ را محاسبه کنید و از آنجا تغییر در زاویهٔ قائم اصلی بین $d\mathbf{X}^{(2)}$ و $d\mathbf{X}^{(3)}$ در نقطه $\mathbf{C}$ را که در اثر تغییرشکل رخ می‌دهد تعیین نمایید.

(ت) کشیدگی Λ در $\mathbf{B}$ در جهت نرمال یکّه $\hat{\mathbf{N}} = (\hat{\mathbf{I}}_2 + \hat{\mathbf{I}}_3)/\sqrt{2}$ را محاسبه کنید.

پاسخ :

(ب) $d\mathbf{x}^{(2)} = dX^{(2)}\,\hat{\mathbf{e}}_2$, $d\mathbf{x}^{(3)} = dX^{(3)}\,(\hat{\mathbf{e}}_2 + \hat{\mathbf{e}}_3)$,

(پ) $\Delta\theta = -45^\circ$

(ت) $\Lambda = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

۴ - ۱۸ تغییرشکلی توسط عبارات زیر داده شده است.

$$x_1 = X_1 + AX_2^2$$
$$x_2 = X_2$$
$$x_3 = X_3 - AX_2^2$$

که در آن A ثابت است (الزاماً کوچک نیست)، تانسورهای کرنش محدود $\mathbf{E}$ و $\mathbf{e}$ را تعیین کنید و نشان دهید که اگر تغییرمکان‌ها کوچک باشند بگونه‌ای که $\mathbf{x} \approx \mathbf{X}$ و اگر از مربع A صرف‌نظر شود، هر دو تانسور به تانسور کرنش بسیار کوچک ε کاهش می‌یابند.

پاسخ :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & Ax_2 & 0 \\ Ax_2 & 0 & -Ax_2 \\ 0 & -Ax_2 & 0 \end{bmatrix}$$

۴ - ۱۹ برای تغییرشکل همگن بسیار کوچک $x_i = X_i + A_{ij}X_j$ که ثابت‌های A_{ij} خیلی کوچک هستند، تانسور کرنش کوچک ε را تعیین کنید و از آنجا کرنش طولی (نرمال) در جهت بردار یکّه $\hat{\mathbf{N}} = (\hat{\mathbf{I}}_1 - \hat{\mathbf{I}}_2) / \sqrt{2}$ را بدست می‌آوریم.

پاسخ : $2\, e_{(\hat{\mathbf{N}})} = A_{11} - A_{13} - A_{31} + A_{33}$

۴ - ۲۰ برای تغییرشکل تعریف شده به‌صورت زیر

$$x_1 = \frac{X_1}{X_1^2 + X_2^2}\ ,\ x_2 = \frac{X_2}{X_1^2 + X_2^2}\ ,\ x_3 = X_3$$

تانسور تغییرشکل $\mathbf{C}$ و همچنین مقادیر اصلی‌اش را بدست آورید.

پاسخ : $C_{(1)} = C_{(2)} = (X_1^2 + X_2^2)^{-2}\ ,\ C_{(3)} = 1$

۴ - ۲۱ برای میدان تغییرشکل ارائه شده توسط

$$x_1 = X_1 + \alpha X_2$$
$$x_2 = X_2 - \alpha X_1$$
$$x_3 = X_3$$

که در آن α ثابت است، مولفه‌های تانسورهای $\mathbf{E}$ و $\mathbf{e}$ را تعیین کنید و نشان دهید که دایره ذرات $X_1^2 + X_2^2 = 1$ به دایره $x_1^2 + x_2^2 = 1 + \alpha^2$ تغییرشکل می‌یابد.

پاسخ :

$$E_{AB} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ,e_{ij} = \frac{1}{2(1+\alpha^2)^2}\begin{bmatrix} -\alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۴ - ۲۲ تغییرشکل یک محیط پیوسته با معادلات زیر تعریف شده است.

$$x_1 = X_1 + kX_2^2$$
$$x_2 = X_2 - kX_1^2$$
$$x_3 = X_3$$

که در آن k ثابت است. تانسور کرنش محدود لاگرانژی $\mathbf{E}$ را تعیین کنید و از آنجا با فرض اینکه k خیلی کوچک است تانسور کرنش بسیار کوچک ε را استنباط نمایید. این مطلب را با محاسبه میدان تغییرمکان و استفاده از تعریف $2\ \varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}$ برای نظریه بسیار کوچک بررسی کنید.

۴ - ۲۳ برای میدان تغییرمکان به‌صورت معادلات زیر

$$u_1 = AX_2X_3$$
$$u_2 = AX_3^2$$
$$u_3 = AX_1^2$$

که در آن A یک ثابت خیلی کوچک است تعیین کنید.

(الف) مولفه‌های تانسور کرنش بسیار کوچک $\boldsymbol{\varepsilon}$ و تانسور چرخش بسیار کوچک $\boldsymbol{\omega}$

(ب) مقادیر اصلی ε در نقطه $(0, 1, 1)$

پاسخ :

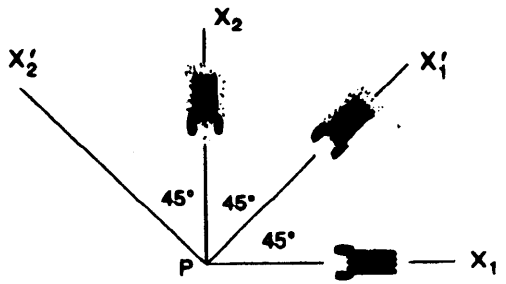
(الف) $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0 \ , \ \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} AX_3 \ , \ \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} A\ (X_2 + 2\ X_1) \ , \ \varepsilon_{23} = AX_3$

$$\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = 0 \ , \ \omega_{12} = -\omega_{21} = \frac{1}{2} AX_3$$

$$\omega_{13} = -\omega_{31} = \frac{1}{2} AX_2 - AX_1 \ , \ \omega_{23} = -\omega_{32} = AX_3$$

(ب) $$\varepsilon_{(I)} = \frac{3}{2} A \ , \ \varepsilon_{(II)} = 0 \ , \ \varepsilon_{(III)} = -\frac{3}{2} A$$

۴ - ۲۴ اندازه‌گیرهای گل نواری تحت زاویه $45°$ قرار دارند و کرنش‌های طولی را در امتداد محورهای X_1, X_2 و X'_1 مطابق شکل زیر اندازه‌گیری می‌کنند.



در نقطه P کرنش‌های ثبت شده عبارتند از

$$\varepsilon_{11} = 6 \times 10^{-4} \ , \ \varepsilon_{22} = 4 \times 10^{-4} \ , \ \varepsilon'_{11} = 8 \times 10^{-4}$$

کرنش برشی γ_{12} را در نقطه P همراه با ε'_{22} تعیین کنید، و بررسی نمایید که $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = \varepsilon'_{11} + \varepsilon'_{22}$ (معادله ۴ - ۷ - ۲۵)

۴ - ۲۵ با بسط مستقیم معادله ۴ - ۷ - ۲۹ ، $2\ \omega_i = \varepsilon_{ijk}\ \omega_{kj}$ ، نشان‌دهید که $\omega_1 = \omega_{32} - \omega_{23}$ و غیره . همچنین اثبات کنید که فقط اگر A ثابت خیلی کوچک باشد نقش‌بندی با معادلات

$$x_1 = X_1 - AX_2 + AX_3$$
$$x_2 = X_2 - AX_3 + AX_1$$
$$x_3 = X_3 - AX_1 + AX_2$$

دوران جسم صلب ($\mathbf{E} \equiv 0$) را نمایش می‌دهد. بعلاوه ، تانسور چرخش بسیار کوچک ω_{ij} را در این حالت تعیین کنید و از آنجا با استفاده از نتایج اثبات شده فوق بردار چرخش ω_i را استنباط نمایید.

پاسخ : $\omega = A\,(\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \hat{e}_3)$

۴ - ۲۶ برای میدان تغییرمکان

$u_1 = kX_1X_2$

$u_2 = kX_1X_2$

$u_3 = 2k\,(X_1 + X_2)\,X_3$

که در آن k ثابت خیلی کوچک است تانسور چرخش ω را تعیین کنید و نشان دهید که فقط یک مقدار حقیقی اصلی برای نقطه $(1\ ,\ 0\ ,\ 0)$ دارد.

پاسخ : $\omega_{(1)} = 0\ ,\ \omega_{(2)} = -\omega_{(3)} = ik\sqrt{2},\ \ i = \sqrt{-1}$

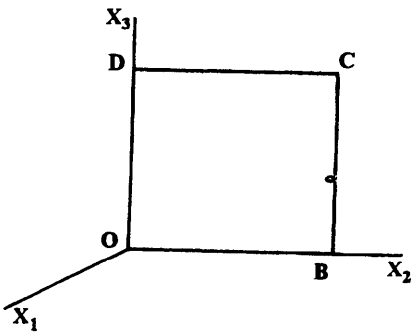
۴ - ۲۷ برای تغییرشکل به‌صورت

$$x_1 = X_1 + AX_2X_3$$

$$x_2 = X_2 + AX_3^2$$

$$x_3 = X_3 + AX_1^2$$

که در آن A یک ثابت بکار برده شده در جسم محیط پیوسته می‌باشد. برای مربع $OBCD$ با اجزاء خطی مادی مطابق شکل ، محاسبات زیر را در نقطه C انجام دهید.



(الف) کشیدگی و ازدیاد طول واحد برای جزئی که در امتداد قطر OC قرار دارد.

(ب) تغییر در زاویه قائمه در نقطه C اگر $A = ۱$ و اگر $A = ۰/۱$ باشد

پاسخ : (الف) $e_{(oc)} = \sqrt{۱ + ۲A + ۴A^۲} - ۱$, $\Lambda^۲_{(oc)} = ۱ + ۲A + ۴A^۲$

(ب) $\Delta\theta_{(A=۱)} = ۶۰^\circ$, $\Delta\theta_{(A=۰/۱)} = ۱۱/۷۷^\circ$

۴ - ۲۸ برای تغییرشکل همگن بیان شده توسط معادلات

$$x_۱ = \sqrt{۲}X_۱ + \frac{۳}{۴}\sqrt{۲}X_۲$$

$$x_۲ = -X_۱ + \frac{۳}{۴}X_۲ + \frac{۱}{۴}\sqrt{۲}X_۳$$

$$x_۳ = X_۱ - \frac{۳}{۴}X_۲ + \frac{۱}{۴}\sqrt{۲}X_۳$$

تعیین کنید

(الف) نرمال یکّه $\hat{\mathbf{n}}$ برای جزء خطی اصالتاً در جهت $\hat{\mathbf{N}} = (\hat{\mathbf{I}}_۱ - \hat{\mathbf{I}}_۲ + \hat{\mathbf{I}}_۳) / \sqrt{۳}$

(ب) کشیدگی $\Lambda_{(\hat{\mathbf{N}})}$ این جزء

(پ) کشیدگی‌های حداکثر و حداقل در نقطه $X_۱ = ۱$, $X_۲ = ۰$, $X_۳ = -۲$ پیکربندی مرجع

پاسخ : (الف) $\hat{\mathbf{n}} = \dfrac{\sqrt{۲}\,\hat{\mathbf{e}}_۱ + (\sqrt{۲} - ۷)\,\hat{\mathbf{e}}_۲ + (\sqrt{۲} + ۷)\,\hat{\mathbf{e}}_۳}{\sqrt{۱۰۴}}$

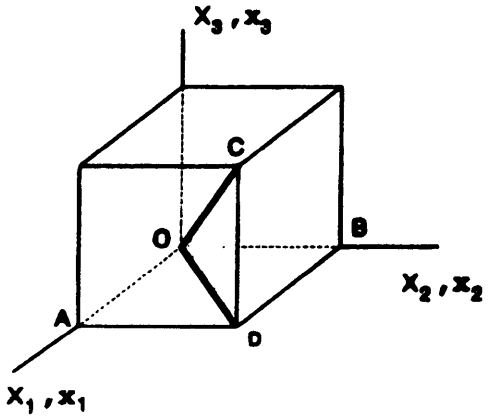
(ب) $\Lambda_{(\hat{\mathbf{N}})} = ۱/۴۷۲$

(پ) $\Lambda_{(min)} = ۰/۵$, $\Lambda_{(max)} = ۲$

۴ - ۲۹ برای تغییرشکلی به‌صورت زیر

$$x_۱ = a_۱ (X_۱ + ۲X_۲)$$
$$x_۲ = a_۲X_۲$$
$$x_۳ = a_۲X_۳$$

که در آن a_1 , a_2 و a_3 ثابت‌های بکار برده شده در مکعب مادی واحد نشان داده شده در شکل زیر می‌باشند.



تعیین کنید

(الف) طول تغییرشکل یافته l قطر OC

(ب) زاویه بین لبه‌های OA و OB پس از تغییرشکل

(پ) شرایطی راکه ثابت‌ها باید تامین کنند برای اینکه تغییرشکل ممکن گردد اگر

(۱) ماده تراکم‌ناپذیر باشد.

(۲) زاویه بین اجزاء OC و OD بدون تغییر باقی بماند.

پاسخ : (الف) $l^2 = 9\,a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

(ب) $$\cos\theta = \frac{2\,a_1}{\sqrt{4a_1^2 + a_2^2}}$$

(پ) (۱) $a_1 a_2 a_3 = 1$ (۲) $9\,a_1^2 + a_2^2 = 2\,a_3^2$

۴ - ۳۰ یک تغییرشکل همگن بدین صورت تعریف شده است

$$x_1 = \alpha X_1 + \beta X_2$$
$$x_2 = -\alpha X_1 + \beta X_2$$
$$x_3 = \mu X_3$$

که در آن α , β و μ ثابت هستند. تعیین کنید

(الف) اندازه‌ها و جهت‌های کشیدگی‌های اصلی

(ب) نمایش ماتریسی تانسور چرخش $\mathbf{R}$

(پ) جهت محور بردار چرخش و اندازه زاویه چرخش

پاسخ :

(الف)

$$\Lambda^{۲}_{(۱)} = \Lambda^{۲}_{(\hat{e}_۱)} = ۲\,\alpha^{۲} \quad , \quad \Lambda^{۲}_{(۲)} = \Lambda^{۲}_{(\hat{e}_۲)} = ۲\,\beta^{۲} \, , \, \Lambda^{۲}_{(۳)} = \Lambda^{۲}_{(\hat{e}_۳)} = \mu^{۲}$$

(ب)

$$R_{ij} = \begin{bmatrix} ۱/\sqrt{۲} & ۱/\sqrt{۲} & ۰ \\ -۱/\sqrt{۲} & ۱/\sqrt{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

(پ) $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{I}}_۳$, $\Phi = ۴۵^{\circ}$

۴ - ۳۱ میدان تغییرشکل زیر را در نظر بگیرید.

$$x_۱ = X_۱ - AX_۲ + AX_۳$$
$$x_۲ = X_۲ - AX_۳ + AX_۱$$
$$x_۳ = X_۳ - AX_۱ + AX_۲$$

که در آن A یک ثابت است. نشان دهید که مقادیر اصلی تانسور راست کشیدگی دارای یک تکثر دوتایی می‌باشد و محور تانسور چرخش در امتداد $\hat{\mathbf{N}} = (\hat{\mathbf{I}}_۱ + \hat{\mathbf{I}}_۲ + \hat{\mathbf{I}}_۳)/\sqrt{۳}$ است. ماتریس بردار چرخش و همچنین زاویه چرخش Φ را تعیین کنید.

پاسخ : $\Lambda_{(۱)} = ۱ \quad , \quad \Lambda_{(۲)} = \Lambda_{(۳)} = \sqrt{۱ + ۳A^{۲}} = \beta$

$$R_{ij} = \frac{۱}{۳\beta} \begin{bmatrix} \beta + ۲ & \beta - ۱ - ۳A & \beta - ۱ + ۳A \\ \beta - ۱ + ۳A & \beta + ۲ & \beta - ۱ - ۳A \\ \beta - ۱ - ۳A & \beta - ۱ + ۳A & \beta + ۲ \end{bmatrix} \quad , \quad \Phi = \cos^{-۱}\frac{۱}{\beta}$$

۴ - ۳۲ برای میدان تغییرشکل

$$x_1 = \sqrt{3}\,X_1 + X_2$$

$$x_2 = 2\,X_2$$

$$x_3 = X_3$$

تعیین کنید

(الف) نمایش ماتریسی تانسور چرخش $\mathbf{R}$

(ب) تانسور راست کشیدگی $\mathbf{U}$ و تانسور چپ کشیدگی $\mathbf{V}$ و نشان دهید که مقادیر اصلی $\mathbf{U}$ و $\mathbf{V}$ مساوی هستند

(پ) جهت محور چرخش و اندازه زاویه چرخش

پاسخ :

(الف)
$$R_{ij} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{3}+1 & \sqrt{3}-1 & 0 \\ -\sqrt{3}+1 & \sqrt{3}+1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(ب) $\Lambda_{(1)} = \sqrt{6}\ ,\ \Lambda_{(2)} = \sqrt{2}\ ,\ \Lambda_{(3)} = 1$

(پ) $\hat{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{I}}_3\ ,\ \Phi = 15^\circ$

۴ - ۳۳ میدان تغییرمکان توسط عبارت زیر داده شده‌اند

$$u_1 = \frac{1}{4}\,(X_3 - X_2)$$

$$u_2 = \frac{1}{4}\,(X_1 - X_3)$$

$$u_3 = \frac{1}{4}\,(X_2 - X_1)$$

تعیین کنید.

(الف) نسبت حجم $dV\,/\,dV^\circ$

(ب) تغییر در زاویه قائمه بین اجزاء خطی اصالتاً در امتداد بردارهای یکّه $\hat{\mathbf{N}}_1 = (3\hat{\mathbf{I}}_1 - 2\hat{\mathbf{I}}_2 - \hat{\mathbf{I}}_3)\,/\sqrt{14}$ و $\hat{\mathbf{N}}_2 = (\hat{\mathbf{I}}_1 + 4\,\hat{\mathbf{I}}_2 - 5\hat{\mathbf{I}}_3)\,/\sqrt{42}$. هستند پاسخ خویش را

توضیح دهید.

پاسخ : (الف) $dV / dV^{\circ} = ۱/۱۸۷$ (ب) $\Delta\theta = ۰^{\circ}$

۴ - ۳۴ مجدداً تغییرشکل ارائه شده در مثال ۴ - ۹ - ۱ ، مشخصاً

$$x_۱ = ۲\,(X_۱ - X_۲)$$
$$x_۲ = X_۱ + X_۲$$
$$x_۳ = X_۳$$

را در نظر بگیرید، تعیین کنید

(الف) تانسور چپ کشیدگی $\mathbf{V}$

(ب) جهت نرمال‌های کشیدگی اصلی $\mathbf{V}$

پاسخ :

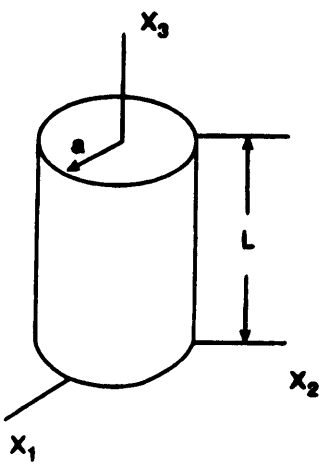
(الف)
$$V_{AB} = \begin{bmatrix} ۲\sqrt{۲} & ۰ & ۰ \\ ۰ & \sqrt{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

(ب) $\hat{\mathbf{N}}_۱ = \hat{\mathbf{I}}_۱$, $\hat{\mathbf{N}}_۲ = \hat{\mathbf{I}}_۲$, $\hat{\mathbf{N}}_۳ = \hat{\mathbf{I}}_۳$

۴ - ۳۵ میدان تغییرشکل بدین صورت بیان شده است

$$x_۱ = \mu\,(X_۱ \cos \beta X_۳ + X_۲ \sin \beta X_۳)$$
$$x_۲ = \mu\,(- X_۱ \sin \beta X_۳ + X_۲ \cos \beta X_۳)$$
$$x_۳ = \nu X_۳$$

که در آن μ , β و ν ثابت‌ها هستند.



(الف) اگر قرار است تغییرشکل برای یک محیط پیوسته تراکم‌ناپذیر ممکن باشد رابطه بین این ثابت‌ها را تعیین کنید.

(ب) اگر تغییرشکل فوق در استوانه مدور مطابق شکل بکار برود، تعیین کنید

(۱) طول تغییرشکل یافته l برحسب L، بُعد a و ثابت‌های μ , β و ν یک جزء سطح جانبی که دارای طول واحد و موازی محور استوانه در پیکربندی مرجع قرار دارد.

(۲) طول اولیه L یک جزء خطی روی سطح جانبی که دارای طول واحد و موازی محور استوانه است پس از اینکه تغییرشکل یابد.

پاسخ :

(الف) $\mu^{۲}\nu = ۱$ (ب) (۱) $l = \sqrt{\mu^{۲}\beta^{۲}a^{۲} + \nu^{۲}}$ (۲) $L = \frac{۱}{\nu}\sqrt{\beta^{۲}a^{۲} + ۱}$

۴ - ۳۶ یک میدان سرعت برحسب مختصات فضایی و زمان توسط معادلات زیر تعریف شده است

$$v_{۱} = ۲tx_{۱}\ sin\ x_{۳}$$

$$v_{۲} = ۲\ tx_{۲}\ cos\ x_{۳}$$

$$v_{۳} = ۰$$

در نقطه $(۰\ ,\ -۱\ ,\ ۱)$ و لحظه $t = ۱$ ثانیه ، را تعیین کنید

(الف) تانسور نرخ تغییرشکل و تانسور چرخش

(ب) نرخ کشیدگی در واحد طول در جهت نرمال $\hat{\mathbf{n}} = (\hat{\mathbf{e}}_{۱} + \hat{\mathbf{e}}_{۲} + \hat{\mathbf{e}}_{۳}) / \sqrt{۳}$

(پ) نرخ کشیدگی حداکثر در واحد طول و جهتی که اتفاق می‌افتد.

(ت) نرخ کرنش برشی حداکثر

پاسخ :

(الف) $D_{ij} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$, $W_{ij} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$

(ب) $\dot{\Lambda} / \Lambda = \frac{۴}{۳}$ (پ) $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{e}}_۲$, $(\dot{\Lambda} / \Lambda)_{max} = ۲$ (ت) $\dot{\gamma}_{max} = ۱/۵$

۴ - ۳۷ اگر N_A و n_i کسینوس‌های جهت یک جزء خطی مادی را به‌ترتیب در پیکربندی مرجع و پیکربندی جاری مشخص کنند، با معادله ۴ - ۱۰ - ۸، $n_i \Lambda = x_{i,A} N_A$ شروع کنید و نمادگذاری شاخصی را بکار ببرید، نشان دهید که

(الف) $\dot{\Lambda} / \Lambda = D_{ij} n_i n_j$

(ب) $\ddot{\Lambda} / \Lambda = Q_{ij} n_i n_j + \dot{n}_i n_j$ که در آن $Q_{ij} = \frac{۱}{۲} (a_{i,j} + a_{j,i})$، a_i مولفه‌های شتاب هستند.

۴ - ۳۸ در یک ناحیه خاص جریان مولفه‌های سرعت عبارتند از

$$v_۱ = (x_۱^۲ + x_۱ x_۲^۲)\, e^{-kt}$$
$$v_۲ = (x_۲^۲ - x_۱^۲ x_۲)\, e^{-kt}$$
$$v_۳ = ۰$$

که در آن k یک ثابت است و t زمان برحسب ثانیه می‌باشد. در نقطه $(۱ , ۱ , ۱)$ وقتی $t = ۰$ است، تعیین کنید

(الف) مولفه‌های شتاب

(ب) مقادیر اصلی تانسور نرخ تغییرشکل

(پ) نرخ تغییرشکل برشی حداکثر

پاسخ : (الف) $a_۱ = ۲ (۴ - k)$, $a_۲ = -۴$, $a_۳ = ۰$

(ب) $D_{(۱)} = ۴$, $D_{(۲)} = ۲$, $D_{(۳)} = ۰$ (پ) $\dot{\gamma}_{max} = \pm ۲$

۴ - ۳۹ برای حرکتی به‌صورت

$$x_1 = X_1$$
$$x_2 = X_2 e^t + X_1 (e^t - 1)$$
$$x_3 = X_1 (e^t - e^{-t}) + X_3$$

میدان سرعت $v_i = v_i (\mathbf{x})$ را تعیین کنید و نشان دهید که برای این حرکت

(الف) $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}$

(ب) $\mathbf{D} = \dot{\varepsilon}$ در لحظه $t = 0$

۴ - ۴۰ یک رابطه‌ای برای مشتق مادی $d\ (ln\ d\mathbf{x})\ /\ dt$ برحسب تانسور نرخ تغییرشکل $\mathbf{D}$ و نرمال یکّه $\hat{\mathbf{n}} = d\mathbf{x}\ /\ dx$ تعیین کنید.

پاسخ : $d\ (ln\ d\mathbf{x})\ /\ dt = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}$

۴ - ۴۱ میدان سرعت به‌صورت فضایی توسط عبارات زیر داده شده است.

$$v_1 = x_1 x_3$$
$$v_2 = x_2^2 t$$
$$v_3 = x_3 x_1 t$$

(الف) تانسور چرخش $\mathbf{W}$ و بردار چرخش $\mathbf{w}$ را تعیین کنید.

(ب) معادله $\varepsilon_{pqi} w_i = W_{qp}$ را برای نتایج قسمت (الف) بررسی کنید.

(پ) نشان دهید که در نقطه $(1\ ,\ 0\ ,\ 1)$ وقتی $t = 1$ باشد، تانسور چرخش فقط یک ریشه حقیقی دارد

پاسخ : (الف) $w_1 = \frac{1}{2} x_3 t\ ,\ w_2 = \frac{1}{2} x_1\ ,\ w_3 = 0$

(پ) $W_{(1)} = 0\ ,\ W_{(2)} = -W_{(3)} = i / \sqrt{2}$ بطوری که $i = \sqrt{-1}$

۴ - ۴۲ میدان سرعت زیر را در نظر بگیرید.

$$v_1 = e^{x_2 - ct} \cos \omega t$$
$$v_2 = e^{x_2 - ct} \sin \omega t$$
$$v_3 = c$$

که در آن c و ω ثابت‌ها هستند.

(الف) نشان دهید که سرعت هر ذره ثابت است.

(ب) مولفه‌های شتاب a_i را تعیین کنید.

(پ) کشیدگی لگاریتمی $\dot{\Lambda} / \Lambda = d\ (ln\ \Lambda) / dt$ را برای جزئی که در پیکربندی جاری در جهت $\mathbf{n} = (\hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2) / \sqrt{2}$ در $\mathbf{x} = 0$ است ، محاسبه کنید.

پاسخ : (ب) $a_1 = -\omega v_2$, $a_2 = \omega v_1$, $a_3 = 0$

(پ) $\frac{1}{2} e^{-ct} \cos \omega t$

۴ - ۴۳ نشان دهید که میدان سرعت

$$v_1 = 1/5\, x_3 - 3\, x_2$$
$$v_2 = 3\, x_1 - x_3$$
$$v_3 = x_2 - 1/5\, x_1$$

متعلق به دوران جسم صلب است و محور اسپین (بردار چرخش) را تعیین کنید.

پاسخ : $\mathbf{w} = \hat{\mathbf{e}}_1 + 1/5\, \hat{\mathbf{e}}_2 + 3\, \hat{\mathbf{e}}_3$

۴ - ۴۴ برای میدان سرعت یکنواخت

$$v_1 = x_1^2 x_2$$
$$v_2 = 2\, x_2^2 x_3$$
$$v_3 = 3\, x_1 x_2 x_3$$

نرخ کشش در $(1\ ,\ 0\ ,\ 2)$ در جهت بردار یکّه $\frac{1}{5}\,(4\,\hat{e}_1 - 3\hat{e}_2)$ تعیین کنید.

پاسخ : $\dot{\Lambda} / \Lambda = -\frac{48}{25}$

۴ - ۴۵ ثابت کنید که $d\ (\ln J) / dt = div\ \mathbf{v}$ و مشخصاً بررسی کنید که این رابطه حرکت زیر را تأمین می‌کند

$$x_1 = X_1 + ktX_3$$
$$x_2 = X_2 + ktX_3$$
$$x_3 = X_3 - kt\ (X_1 + X_2)$$

که در آن k یک ثابت است.

پاسخ : $\dot{J} / J = div\ \mathbf{v} = \frac{4\, k^2 t}{1 + 2\, k^2 t^2}$

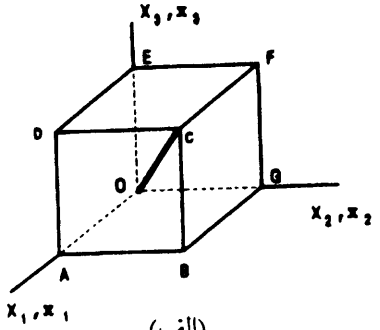
۴ - ۴۶ معادله ۴ - ۱۰ - ۱۹ مشتق مادی dx^2 برحسب D_{ij} را ارائه می‌دهد. با استفاده از آن معادله به‌عنوان نقطه شروع ، نشان دهید که $d^2\ (dx^2) / dt^2$ برحسب D_{ij} و مشتق زمانی عبارت است از

$$d^2\ (dx^2) / dt^2 = 2\ (\dot{D}_{ij} + v_{k,i}\, D_{kj} + v_{k,j}\, D_{ik})\, dx_i\, dx_j$$

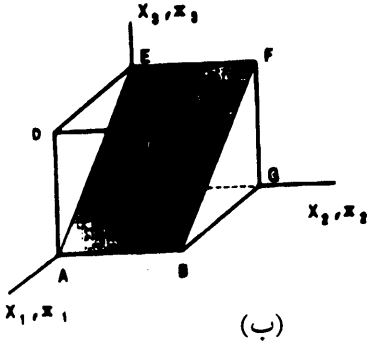
۴ - ۴۷ یک جسم محیط پیوسته به شکل مکعب واحد مطابق شکل تحت تغییرشکل همگن بدین صورت می‌باشد.

$$x_1 = \lambda_1 X_1$$
$$x_2 = \lambda_2 X_2$$
$$x_3 = \lambda_3 X_3$$

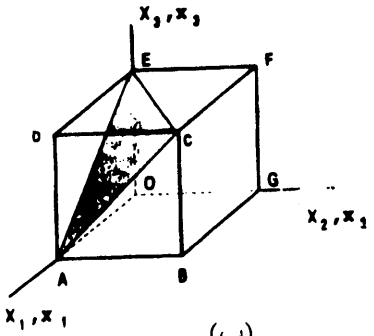
که در آن λ_1 , λ_2 و λ_3 ثابت‌ها هستند.



(الف)



(ب)



(پ)

روابطی که بین λ_1 , λ_2 و λ_3 تعیین کنید، اگر

(الف) طول قطر OC بدون تغییر باقی بماند.

(ب) مساحت مستطیل $ABFE$ بدون تغییر باقی بماند.

(پ) مساحت مثلث ACE بدون تغییر باقی بماند.

پاسخ : (الف) $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 3$ (ب) $\lambda_2^2 (\lambda_1^2 + \lambda_3^2) = 2$

(پ) $\lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2 = 3$

۴ - ۴۸ مکعب واحد نشان داده شده در مسئله ۴ - ۴۷ دارای حرکتی به‌صورت زیر است.

$$x_1 = X_1 + \frac{1}{2} t^2 X_2$$

$$x_2 = X_2 + \frac{1}{2} t^2 X_1$$

$$x_3 = X_3$$

در لحظه t، تعیین کنید

(الف) نرخ تغییر مساحت $ABFE$

(ب) حجم جسم

پاسخ : (الف) $(dS) = \dfrac{-\frac{۱}{۲}t^{۲}\hat{\mathbf{e}}_{۱} - t\,\hat{\mathbf{e}}_{۲} - t^{۲}\hat{\mathbf{e}}_{۳}}{۱ - \frac{۱}{۴}t^{۲}}$ (ب) $V = ۱ - \frac{۱}{۴}t^{۲}$

۴ - ۴۹ برای تغییرشکل همگن

$$x_{۱} = X_{۱} + \alpha X_{۲} + \alpha\beta X_{۳}$$
$$x_{۲} = \alpha\beta X_{۱} + X_{۲} + \beta^{۲} X_{۳}$$
$$x_{۳} = X_{۱} + X_{۲} + X_{۳}$$

که در آن α و β ثابت‌ها هستند روابطی بین این ثابت‌ها تعیین کنید اگر تغییرشکل ایـزوکوریک باشد

پاسخ : $\beta = \dfrac{\alpha^{۲} + \alpha}{\alpha^{۲} + \alpha - ۱}$

۴ - ۵۰ نشان دهید برای هر میدان سرعت $\mathbf{v}$ منتج از یک بردار پتانسیل ψ توسط $\mathbf{v} = \mathbf{curl}\,\psi$ جریان ایزوکوریک خواهد بود، همچنین برای میدان سرعت

$$v_{۱} = a x_{۱} x_{۳} - ۲ x_{۳}$$
$$v_{۲} = -b x_{۲} x_{۳}$$
$$v_{۳} = ۲ x_{۱} x_{۲}$$

روابطی بین ثابت‌های a و b را تعیین کنید، اگر جریان قرار است ایزوکوریک باشد.

پاسخ : $a = b$

۵ قوانین و معادلات بنیادین

۵ - ۱ قوانین تعادل ، معادلات میدان ، معادلات اساسی

تعدادی از قوانین بنیادین مکانیک محیط‌های پیوسته بیانی از اصل بقای چند کمیت فیزیکی هستند. این‌ها را که غالباً *قوانین تعادل* می‌نامند، به تمامی مواد محیط‌های پیوسته کاربرد دارد و منجر به معادلاتی می‌شود که باید همواره تامین گردند. در این کتاب مبانی، ما فقط قوانین بقای جرم ، ممنتوم خطی، زاویه‌ای ، و انرژی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در ارتباط با انرژی ابتدا یک تعادل انرژی مکانیکی خالص را توسعه می‌دهیم که پس با تعادل انرژی شامل هر دو انرژی‌های مکانیکی و حرارتی دنبال می‌شود، یعنی بیان قانون اول ترمودینامیک. علاوه برآن، شکل کلازیوس - دوهام قانون دوم ترمودینامیک نیز مورد توجه قرارگرفته است.

قوانین تعادل معمولاً با ملاحظه بقای چند خاصیت جسم بطور یکپارچه در مفهوم روابط مطلق (انتگرال) به معادله درآورده می‌شود. همانگونه که در فصل یک توضیح داده شد، معادلات مطلق را می‌توان برای توسعه *معادلات میدان* مربوطه که در تمامی نقاط داخل جسم و روی مرز آن معتبر است بکار برد. برای مثال، می‌توان معادلات محلی حرکت را از بیان مطلق بقای ممنتوم خطی استخراج نمود.

معادلات اساسی، اساس داخلی یک ماده را منعکس نموده و انواع خاص رفتار ماده را تعریف می‌کنند. آنها بنیادین هستند بدین معنی که آنها نقطه شروع مطالعه در مباحث ، الاستیسیته ، پلاستیسیته و انواع شاره‌های ایده‌آل می‌باشند. این معادلات عناوین قسمت آخر این فصل هستند.

قبل از اینکه بحث قوانین مطلق اصل بقا را شروع کنیم، توسعه روابطی برای مشتقات مادی بعضی انتگرال‌ها مفید خواهد بود. این موضوع را در قسمت بعد انجام می‌دهیم.

۵ - ۲ مشتقات مادی انتگرال‌های خط ، سطح و حجم

هر خاصیت عددی، برداری یا تانسوری مجموعه ذرات اشغال‌کننده حجم V توسط انتگرال زیر بیان می‌شود.

$$P_{ij...}(t) = \int_V P^*_{ij...}(\mathbf{x}, t)\, dV \qquad (۱-۲-۵)$$

که در آن $P^*_{ij...}$ توزیع خواص در واحد حجم را نمایش می‌دهد و دارای مشتقات پیوسته می‌باشد. مشتق مادی این خواص در هر دو شکل فضایی و مادی با استفاده از معادله ۴ - ۱۱ - ۸ عبارت است از

$$\dot{P}_{ij...}(t) = \frac{d}{dt}\int_V P^*_{ij...}(\mathbf{x}, t)\, dV = \frac{d}{dt}\int_{V^\circ} P^*_{ij...}[\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t]\, JdV^\circ$$

چون V° یک حجم ثابت در پیکربندی مرجع است، دیفرانسیل‌گیری و انتگرال‌گیری با یکدیگر تبدیل‌پذیر هستند و دیفرانسیل‌گیری را می‌توان داخل علامت انتگرال اجرا نمود. بنابراین از معادله ۴ - ۱۱ - ۶ با استفاده از نماد $\dot{[]}$ برای نشان دادن دیفرانسیل‌گیری نسبت به زمان داریم

$$\int_{V^\circ} [P^*_{ij...}(\mathbf{X}, t)\, J]\dot{}\, dV^\circ = \int_{V^\circ} (\dot{P}^*_{ij...}J + P^*_{ij...}\dot{J})\, dV^\circ$$

$$= \int_{V^\circ} (\dot{P}^*_{ij...} + v_{k,k}\, P^*_{ij...})\, JdV^\circ$$

با برگرداندن به فرمول فضایی

$$\dot{P}_{ij...}(t) = \int_V [\dot{P}^*_{ij...}(\mathbf{x}, t) + v_{k,k}\, P^*_{ij...}(\mathbf{x}, t)]\, dV \qquad (۲-۲-۵)$$

به کمک اپراتور مشتق مادی ارائه شده در معادله ۴ - ۵ - ۵ ، این معادله ممکن است بدین صورت نوشته شود (برای راحتی از فهرست کردن متغیرهای مستقل $\mathbf{x}$ و t خودداری شده است).

$$\dot{P}_{ij...}(t) = \int_V \left[\frac{\partial P^*_{ij...}}{\partial t} + v_k \frac{\partial P^*_{ij...}}{\partial x_k} + v_{k,k}\, P^*_{ij...}\right] dV$$

$$= \int_V \left[\frac{\partial P^*_{ij...}}{\partial t} + (v_k\, P^*_{ij...})_{,k}\right] dV$$

که با کاربرد قضیه دیورژانس خواهد شد.

$$\dot{P}_{ij\ldots}(t) = \int_V \frac{\partial P^*_{ij\ldots}}{\partial t}\, dV + \int_S v_k\, P^*_{ij\ldots}\, n_k\, dS \qquad (۵-۲-۳)$$

این معادله نرخ زمانی تغییرات خواص $P_{ij\ldots}$ را به‌صورت جمع مقدار ایجاد شده در حجم V به اضافه مقدار داخل شده از طریق سطح محصور S که اغلب **قضیه انتقال** نام دارد ارائه می‌دهد.

مشتقات زمانی انتگرال‌ها روی سطوح مادی و منحنی‌های مادی را می‌توان به روال مشابه بدست آورد. ابتدا یک خاصیت تانسوری $Q_{ij\ldots}$ ذرات که سطح جاری S را تشکیل می‌دهند به‌صورت زیر در نظر بگیرید.

$$Q_{ij\ldots}(t) = \int_S Q^*_{ij\ldots}(\mathbf{x}, t)\, dS_p = \int_S Q^*_{ij\ldots}(\mathbf{x}, t)\, n_p\, dS \qquad (۵-۲-۴)$$

که در آن $Q^*_{ij\ldots}(\mathbf{x}, t)$ توزیع خاصیت روی سطح می‌باشد. از معادله ۴ - ۱۱ - ۷ در شکل اولری داریم (مجدداً متغیرهای $\mathbf{x}$ و t را حذف می‌کنیم)

$$\dot{Q}_{ij\ldots}(t) = \int_S (\dot{Q}^*_{ij\ldots} + v_{k,k}\, Q^*_{ij\ldots})\, dS_p - \int_S Q^*_{ij\ldots}\, v_{q,p}\, dS_q$$

$$= \int_S [(\dot{Q}^*_{ij\ldots} + v_{k,k}\, Q^*_{ij\ldots})\, \delta_{pq} - Q^*_{ij\ldots}\, v_{q,p}]\, dS_q \qquad (۵-۲-۵)$$

بطور مشابه ، برای خواص ذرات قرارگرفته روی منحنی فضایی C و تعریف شده توسط انتگرال خطی

$$R_{ij\ldots}(t) = \int_C R^*_{ij\ldots}(\mathbf{x}, t)\, dx_p \qquad (۵-۲-۶)$$

با استفاده از معادله ۴ - ۱۱ - ۱ داریم

$$\dot{R}_{ij\ldots}(t) = \int_C \dot{R}^*_{ij\ldots}\, dx_p + \int_C v_{p,q}\, R^*_{ij\ldots}\, dx_q$$

$$= \int_C (\dot{R}^*_{ij\ldots}\, \delta_{pq} + v_{p,q}\, R^*_{ij\ldots})\, dx_q \qquad (۷-۲-۵)$$

۵ - ۳ اصل بقای جرم ، معادله پیوستگی

به هر جسم مادی و یا هر قسمتی از چنین جسم یک اندازه عددی غیرمنفی اختصاص داده شده است که آن را **جرم** جسم یا قسمتی از جسم که مورد مطالعه است می‌نامند. بطور فیزیکی، جرم مرتبط با خاصیت اینرسی جسم است، یعنی تمامش به مقاومت در برابر تغییرات در حرکت . اندازه جرم ممکن است تابعی از متغیرهای فضایی و زمان باشد. اگر Δm جرم یک حجم کوچک ΔV در پیکربندی جاری باشد، و اگر فرض کنیم Δm مطلقاً پیوسته است ، حد

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} \qquad (۱-۳-۵)$$

میدان عددی $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ را تعریف می‌کند که چگالی جرم را برای جسم در آن پیکربندی در لحظه t نام دارد. بنابراین، جرم m تمامی یک جسم توسط رابطه زیر بیان می‌شود.

$$m = \int_V \rho(\mathbf{x}, t)\, dV \qquad (۲-۳-۵)$$

به همین منوال، جرم جسم در پیکربندی مرجع (اولیه)برحسب میدان چگالی $\rho_0 = \rho_0(\mathbf{X}, t)$ توسط انتگرال زیر تعریف می‌شود.

$$m = \int_{V^\circ} \rho_0(\mathbf{X}, t)\, dV^\circ \qquad (۳-۳-۵)$$

قانون بقای جرم ادعا می‌کند که جرم یک جسم یا هر قسمتی از جسم تحت تاثیر حرکت پایا می‌باشد یعنی در هر پیکربندی ثابت باقی می‌ماند. پس مشتق مادی معادله

۵ - ۳ - ۲ صفر است.

$$\dot{m} = \frac{d}{dt} \int_V \rho\ (\mathbf{x}\ ,\ t)\ dV = 0 \qquad (۵-۳-۴)$$

که با کاربرد معادله ۵ - ۲ - ۲ و $P^*_{ij\ldots} \equiv \rho$ خواهیم داشت.

$$\dot{m} = \int_V (\dot{\rho} + \rho v_{i,i})\ dV = 0 \qquad (۵-۳-۵)$$

و چون V یک قسمت اختیاری از محیط پیوسته می‌باشد، در اینجا انتگرال باید حذف شود، در نتیجه

$$\dot{\rho} + \rho v_{i,i} = 0 \qquad (۵-۳-۶)$$

که معروف به **معادله پیوستگی** در شکل اولری می‌باشد. اما مشتق مادی ρ بدین صورت می‌تواند نوشته شود.

$$\dot{\rho} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i}$$

پس معادله ۵ - ۳ - ۶ را در شکل متناوب زیر می‌توان نوشت.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho v_{i,i} = 0 \qquad (۵-۳-۷\text{ الف})$$

یا

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_i)_{,i} = 0 \qquad (۵-۳-۷\text{ ب})$$

اگر چگالی ذرات ثابت باشد در نتیجه $\dot{\rho} = 0$ ماده را ***تراکم ناپذیر*** گویند. بنابراین از معادله ۵ - ۳ - ۶ برای محیط پیوسته تراکم‌ناپذیر حاصل می‌گردد.

$$v_{i,i} = 0 \quad \text{یا} \quad div\ \mathbf{v} = 0 \qquad (۵-۳-۸)$$

چون قانون بقای جرم مستلزم یکسان بودن جرم در تمامی پیکربندی‌ها می‌باشد،

می‌توان معادله پیوستگی را از مقایسه روابط m در پیکربندی‌های مرجع و جاری بدست آورد. پس اگر معادلات ۵ - ۳ - ۲ و ۵ - ۳ - ۳ را مساوی هم قرار دهیم.

$$m = \int_V \rho\ (\mathbf{x}, t)\ dV = \int_{V^\circ} \rho_\circ\ (\mathbf{X}, t)\ dV^\circ \qquad (۹ - ۳ - ۵)$$

توجه شود که برای حرکت $\mathbf{x} = \mathbf{x}\ (\mathbf{X}, t)$ داریم

$$\int_V \rho\ [\ \mathbf{x}\ (\mathbf{X}, t)\ , t\ ]\ dV = \int_{V^\circ} \rho\ (\mathbf{X}, t)\ J dV^\circ$$

اکنون اگر سمت راست این معادله را جایگزین سمت چپ معادله ۵ - ۳ - ۹ نماییم و با جمع جملات خواهیم داشت.

$$\int_{V^\circ} [\rho\ (\mathbf{X}, t)\ J - \rho_\circ\ (\mathbf{X}, t)]\ dV^\circ = ۰$$

اما V° اختیاری است پس در توصیف مادی

$$\rho J = \rho_\circ \qquad (۵ - ۳ - ۱۰ \text{ الف})$$

علاوه بر آن ، $\dot{\rho}_\circ = ۰$ پس نتیجه می‌شود.

$$(\rho \dot{J}) = ۰ \qquad (۵ - ۳ - ۱۰ \text{ ب})$$

معادلات ۵ - ۳ - ۱۰ را شکل لاگرانژی یا مادی معادله پیوستگی می‌نامند.

مثال ۵ ـ ۳ ـ ۱ نشان دهید که شکل فضایی معادله پیوستگی از شکل مادی آن تبعیت می‌کند.

حل با اجرای دیفرانسیل‌گیری نشان داده شده در معادله ۵ - ۳ - ۱۰ ب

$$(\rho \dot{J}) = \dot{\rho} J + \rho \dot{J} = ۰$$

و پس توسط معادله ۴ - ۱۱ - ۶

$$\dot{J} = v_{i,i}\, J$$

اکنون داریم

$$(\rho J)^{\cdot} = J\,(\dot{\rho} + \rho v_{i,i}) = 0$$

اما $J = det\ \mathbf{F} \neq 0$ (یک تانسور معکوس‌پذیر است) مستلزم آنست که

$$\dot{\rho} + \rho v_{i,i} = 0$$

یعنی معادله پیوستگی در شکل فضایی می‌باشد.

در پی‌آمد معادله پیوستگی می‌توان یک نتیجه مفید برای مشتق مادی انتگرال در معادله ۵ - ۲ - ۱ بدست آورد وقتی که $P^*_{ij...}$ برابر با حاصلضرب $\rho A^*_{ij...}$ و در آن $A^*_{ij...}$ عبارت است از توزیع هر خاصیت در **واحد جرم** بر این اساس

$$\dot{P}_{ij...}(t) = \frac{d}{dt}\int_V A^*_{ij...}(\mathbf{x}, t)\,\rho\, dV = \frac{d}{dt}\int_{V^\circ} A^*_{ij...}(\mathbf{X}, t)\,\rho\, J\, dV^\circ$$

$$= \int_{V^\circ} [\,\dot{A}^*_{ij...}(\rho J) + A^*_{ij...}(\rho J)^{\cdot}\,]\, dV^\circ$$

که بخاطر معادله ۵ - ۳ - ۱۰ ب به‌صورت زیر کاهش می‌یابد.

$$\dot{P}_{ij...}(t) = \int_{V^\circ} \dot{A}^*_{ij...}\,\rho J\, dV^\circ = \int_V \dot{A}^*_{ij...}\,\rho\, dV$$

و

$$\frac{d}{dt}\int_V A^*_{ij...}(\mathbf{x}, t)\,\rho\, dV = \int_V \dot{A}^*_{ij...}(\mathbf{x}, t)\,\rho\, dV \quad (۱۱ - ۳ - ۵)$$

فرصت‌های متعددی برای استفاده از این معادله قاطع را داریم

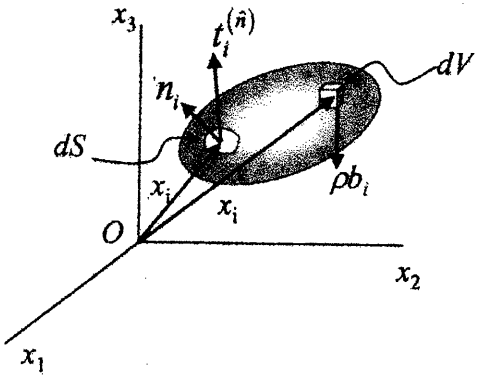
۵ - ۴ اصل ممنتوم خطی ، معادلات حرکت

یک جسم در محیط پیوسته مادی دارای یک حجم جاری V و سطح محصور S تحت کشش‌های سطحی $t_i^{(\hat{n})}$ و نیروهای حجمی گسترده ρb_i مطابق شکل ۵ - ۱ قرار گرفته است. بعلاوه ، جسم تحت تاثیر میدان سرعت $v_i = v_i\ (\mathbf{x}\ ,\ t)$ در حرکت می‌باشد. **ممنتوم خطی** جسم توسط بردار زیر تعریف می‌شود.

$$P_i\ (t) = \int_V \rho v_i\ dV \qquad (۱ - ۴ - ۵)$$

و اصل ممنتوم خطی بیان می‌کند که نرخ زمانی تغییرات ممنتوم خطی برابر است با نیروی منتجه وارد بر جسم بنابراین ، در شکل مطلق نسبت به مرجع شکل ۵ - ۱

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho v_i\ dV = \int_S t_i^{(\hat{n})}\ dS + \int_V \rho b_i\ dV \qquad (۲ - ۴ - ۵)$$



شکل ۵ - ۱

جسم مادی در حال حرکت تحت تاثیر نیروهای حجمی و سطحی

چون $t_i^{(\hat{n})} = \sigma_{ji}\ n_j$ می‌توان انتگرال سطح را به انتگرال حجم مبدل کرد و $\sigma_{ji,j}$ زیر انتگرال قرار گیرد. با استفاده از معادله ۵ - ۳ - ۱۱ در سمت چپ معادله ۵ - ۴ - ۲ پس از جمع جملات داریم

$$\int_V (\rho \dot{v}_i - \sigma_{ji,j} - \rho b_i)\, dV = 0 \qquad (۵-۴-۳)$$

که در آن $\dot{v}_i$ *میدان شتاب* جسم است. مجدداً ، V اختیاری است پس انتگرال باید حذف شود، بدست می‌آوریم.

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i \qquad (۵-۴-۴)$$

که معروف به *معادلات محلی حرکت* در شکل اولری می‌باشد.

هنگامی که میدان سرعت صفر یا ثابت است در نتیجه $\dot{v}_i = 0$ معادلات حرکت به *معادلات تعادل* کاهش می‌یابد

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = 0 \qquad (۵-۴-۵)$$

که در مکانیک جامدات مهم است.

۵ - ۵ تانسورهای تنش پیلا - کرشوف ، معادلات لاگرانژ حرکت

همانگونه که در قسمت قبل اشاره شد، معادلات حرکت (معادلات ۵ - ۴ - ۴) در شکل اولری هستند. این معادلات ممکن است بر اساس تانسور تنش پیلا - کرشوف به‌صورت مرجعی هم دربیایند که هم‌اکنون معرفی می‌کنیم.

با یادآوری از قسمت ۳ - ۳ ، مولفه‌های تنش σ_{ij} متعلق به تانسور تنش کوشی σ به‌گونه‌ای تعریف شده‌اند که i امین مولفه بردار تنش $t_i^{(\hat{\mathbf{e}}_j)}$ روی سطح مادی دارای نرمال یکّه $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{e}}_j$ اعمال می‌شود. توجه شود که این نرمال یکّه در پیکربندی جاری تعریف شده است. همچنین امکان تعریف یک برداری که به سطح مادی در پیکربندی مرجع نسبت داده شده باشد و از آنجا یک تانسور تنش مرتبط با آن پیکربندی ایجاد شود فراهم می‌باشد. در اجرای این مطلب ، مشابه با توسعه‌ای که در قسمت ۳ - ۳ برای تانسور تنش کوشی مرتبط با پیکربندی جاری داشتم اقدام می‌کنیم.

بردار $\mathbf{p}^{\circ(\hat{\mathbf{N}})}$ به‌عنوان بردار تنش نسبت داده شده به جزء مساحتی ΔS° در صفحه عمود بر نرمال یکّه $\hat{\mathbf{N}} = N_A \hat{\mathbf{I}}_A$ همانگونه که بردار تنش کوشی در معادله ۳ - ۲ - ۱ تعریف شده است، می‌توان نوشت.

$$\lim_{\Delta S^\circ \to 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta S^\circ} = \frac{d\mathbf{f}}{dS^\circ} = \mathbf{p}^{\circ(\hat{\mathbf{N}})} \qquad (۵-۵-۱)$$

که در آن $\Delta \mathbf{f}$ نیروی منتجه وارد بر سطح مادی است که در پیکربندی مرجع ΔS° بود.

اصل ممنتوم خطی می‌تواند برحسب کمیت‌هائی که به پیکربندی مرجع نسبت داده شده‌اند به‌صورت زیر نوشته شوند.

$$\int_{S^\circ} \mathbf{p}^{\circ(\hat{\mathbf{N}})}(\mathbf{X}, t)\, dS^\circ + \int_{V^\circ} \rho_\circ \mathbf{b}^\circ(\mathbf{X}, t)\, dV^\circ = \int_{V^\circ} \rho_\circ \mathbf{a}^\circ(\mathbf{X}, t)\, dV^\circ \qquad (۲-۵-۵)$$

که در آن S° , V° و $\rho_\circ$ به‌ترتیب سطح مادی ، حجم مادی و چگالی نسبت به پیکربندی مرجع هستند. بالانوشت صفر که در متغیرها بکار برده می‌شود برای تاکید واقعیتی است که تابع برحسب پیکربندی مرجع نوشته شده است برای مثال،

$$a_i(\mathbf{x}, t) = a_i[\chi(\mathbf{X}, t), t] = a^\circ_i(\mathbf{X}, t)$$

توجه شود که چون تمامی کمیت‌ها برحسب مختصات مادی هستند، اپراتور دیفرانسیل d/dt در معادله ۳ - ۲ - ۴ را به داخل انتگرال انتقال داده‌ایم تا شتاب را نتیجه بدهد. در یک روالی مشابه با آنچه در قسمت ۳ - ۲ اجرا شد، معادله ۵ - ۵ - ۲ را برای قسمت‌های I و II جسم (همانگونه که در شکل ۳ - ۲ الف تعریف شده است) و به جسم بصورت یکپارچه بکار می‌بریم تا به معادله زیر برسیم.

$$\int_{S^\circ} [\mathbf{p}^{\circ(\hat{\mathbf{N}})} + \mathbf{p}^{\circ(-\hat{\mathbf{N}})}]\, dS^\circ = 0 \qquad (۳-۵-۵)$$

این معادله باید برای قسمت‌های اختیاری سطح جسم برقرار باشد، پس

$$\mathbf{p}^{\circ(\hat{\mathbf{N}})} = -\mathbf{p}^{\circ(-\hat{\mathbf{N}})} \qquad (۴-۵-۵)$$

که با معادله ۳ - ۲ - ۶ در تشابه است.

بردار تنش $\mathbf{p}^{\circ(\hat{\mathbf{N}})}$ را می‌توان به‌صورت مولفه‌ای مرتبط با صفحه‌های مختصات مرجع نوشت.

$$\mathbf{p}^{\circ(\hat{\mathbf{I}}_A)} = p^\circ_i{}^{(\hat{\mathbf{I}}_A)}\, \hat{\mathbf{e}}_i \quad , \quad (A = ۱, ۲, ۳) \qquad (۵-۵-۵)$$

این معادله مولفه‌های بردار تنش $\mathbf{p}^{\circ(\hat{\mathbf{N}})}$ نسبت به صفحه‌های مختصات مرجع را توضیح می‌دهد، برای تعیین مولفه‌هایش نسبت به صفحه اختیاری تعریف شده توسط بردار یکّه $\hat{\mathbf{N}}$ تعادل نیروها را روی یک چهاروجهی بسیار کوچک از جسم بکار می‌بریم. اگر اجازه بدهیم چهاروجهی با جمع‌شدگی به نقطه تبدیل شود، خواهیم داشت.

$$p^{\circ(\hat{N})}_i = p^{\circ(\hat{I}_A)}_i N_A \qquad (۶ - ۵ - ۵)$$

با تعریف

$$p^{\circ}_{Ai} \equiv p^{\circ(\hat{I}_A)}_i \qquad (۷ - ۵ - ۵)$$

بدست می‌آوریم

$$p^{\circ(\hat{N})}_i = p^{\circ}_{Ai} N_A \qquad (۸ - ۵ - ۵)$$

که در آن p°_{Ai} مولفه‌های تانسور تنش اول پیلا - کرشوف می‌باشد. این تانسور مولفه‌های x_i نیرو در واحد مساحت یک سطح که دارای نرمال مرجع $\hat{\mathbf{N}}$ می‌باشد نشان می‌دهد.

با استفاده از تانسور تنش اول پیلا - کرشوف می‌توان معادلات حرکت و از این رو معادلات تعادل در تشکیل معادلات مرجع را بدست آورد. با شروع از معادله ۵ - ۵ - ۲ و سپس معرفی معادله ۵ - ۵ - ۸ خواهیم داشت.

$$\int_{S^\circ} P^{\circ}_{Ai} N_A \, dS^\circ + \int_{V^\circ} \rho_\circ \, b^{\circ}_i \, dV^\circ = \int_{V^\circ} \rho_\circ \, a^{\circ}_i \, dV^\circ \qquad (۹ - ۵ - ۵)$$

با استفاده از قضیه دیورژانس روی انتگرال سطح معادله ۵ - ۵ - ۹ را به‌صورت زیر یکی می‌کنیم.

$$\int_{V^\circ} (P^{\circ}_{Ai,A} + \rho_\circ \, b^{\circ}_i - \rho_\circ \, a^{\circ}_i) \, dV^\circ = 0$$

این معادله باید برای قسمت‌های اختیاری جسم برقرار باشد در نتیجه زیر انتگرال برابر صفر است.

$$P^{\circ}_{Ai,A} + \rho_\circ \, b^{\circ}_i = \rho_\circ \, a^{\circ}_i \qquad (۵ - ۵ - ۱۰ \text{ الف})$$

که *معادلات حرکت* در شکل مرجع می‌باشند. اگر میدان شتاب صفر باشد، این معادلات به

معادلات تعادل در شکل مرجع کاهش می‌یابد.

$$P^{\circ}_{Ai,A} + \rho_{\circ} b^{\circ}_i = 0 \qquad (۵-۵-۱۰ ب)$$

توجه داریم که مشتقات جزئی مولفه‌های تنش پیلا - کرشوف نسبت به مختصات مادی هستند زیرا این تانسور تنش به سطح در پیکربندی مرجع نسبت داده شده است.

همچنین تعادل یک موازنه ممان‌ها حول هر نقطه را ایجاب می‌کند. جمع ممان‌ها حول مبدا (شکل ۵ - ۱ ممکن است برای مجسم‌سازی این عملیات مفید باشد) نتیجه می‌دهد.

$$\int_{S^{\circ}} \varepsilon_{ijk} x_j P^{\circ}_k{}^{(\hat{N})} dS^{\circ} + \int_{V^{\circ}} \varepsilon_{ijk} x_j \rho_{\circ} b^{\circ}_k dV^{\circ} = 0 \qquad (۵-۵-۱۱)$$

که به‌صورت زیر کاهش می‌یابد.

$$\int_{V^{\circ}} \varepsilon_{ijk} [(x_j P^{\circ}_{Ak})_{,A} + x_j \rho_{\circ} b^{\circ}_k] dV^{\circ} = 0$$

که در آن معادله ۵ - ۵ - ۸ و قضیه دیورژانس را بکار برده‌ایم. با اجرای دیفرانسیل‌گیری جزئی بدست می‌آوریم.

$$\int_{V^{\circ}} \varepsilon_{ijk} [x_{j,A} P^{\circ}_{Ak} + x_j (P^{\circ}_{Ak,A} + \rho_{\circ} b^{\circ}_k)] dV^{\circ} = 0$$

و توسط معادله ۵ - ۵ - ۱۰ ب این معادله به شکل زیر کاهش می‌یابد.

$$\int_{V^{\circ}} (\varepsilon_{ijk} x_{j,A} P^{\circ}_{Ak}) dV^{\circ} = 0 \qquad (۵-۵-۱۲)$$

مجدداً ، این معادله باید برای تمامی قسمت‌های V° جسم برقرار باشد، پس زیر انتگرال باید حذف شود، نتیجه می‌دهد

$$\varepsilon_{ijk} x_{j,A} P^{\circ}_{Ak} = 0 \qquad (۵-۵-۱۳)$$

با دنبال کردن بحثی مشابه که در قسمت ۳ - ۴ ارائه شد، نتیجه می‌گیریم که معادله ۵-۵-۱۳ عبارت زیر را استدلال می‌کند

$$x_{j,A}\, P^{\circ}_{Ak} = x_{k,A}\, P^{\circ}_{Aj} \qquad (۱۴ - ۵ - ۵)$$

اگر اکنون تعریف s_{AB} را معرفی کنیم

$$P^{\circ}_{Ai} = x_{i,B}\, s_{BA} \qquad (۱۵ - ۵ - ۵)$$

و با جایگزینی در ۵ - ۵ - ۱۴ مشاهده می‌شود که

$$s_{AB} = s_{BA} \qquad (۱۶ - ۵ - ۵)$$

که تانسور **تنش دوم پیلا ـ کرشوف** نامیده می‌شود، یا بعضی مواقع تانسور **متقارن پیلا ـ کرشوف** می‌گویند.

تنش‌های پیلا - کرشوف را می‌توان به تنش کوشی با در نظر گرفتن دیفرانسیل نیروی اعمال شده روی جزء سطحی تغییرشکل یافته dS به‌صورت زیر ارتباط داد.

$$df_i = \sigma_{ji}\, n_j\, dS \qquad (۱۷ - ۵ - ۵)$$

این نیرو برحسب تانسور تنش اول پیلا - کرشوف بدین صورت می‌تواند نوشته شود.

$$df_i = P^{\circ}_{Ai}\, N_A\, dS^{\circ} \qquad (۱۸ - ۵ - ۵)$$

با یادآوری از معادله ۴ - ۱۱ - ۴ جزء سطحی در پیکربندی تغییرشکل یافته به جزء سطحی در پیکربندی مرجع توسط رابطه زیر ارتباط داده می‌شود.

$$n_q\, dS = X_{A,q}\, JN_A\, dS^{\circ}$$

با استفاده از این و همراه با معادلات ۵ - ۵ - ۱۷ و ۵ - ۵ - ۱۸ بدست می‌آوریم

$$df_i = \sigma_{ji}\, n_j\, dS = \sigma_{ji}\, X_{A,j}\, JN_A\, dS^\circ = P^\circ_{Ai}\, N_A\, dS^\circ \qquad (۱۹-۵-۵)$$

که به شکل زیر دوباره نوشته می‌شوند.

$$(\sigma_{ji}\, X_{A,j}\, J - P^\circ_{Ai})\, N_A\, dS^\circ = ۰ \qquad (۲۰-۵-۵)$$

از این معادله مشاهده می‌شود که تنش کوشی و تنش اول پیلا - کرشوف با یکدیگر به شکل زیر ارتباط دارند.

$$J\sigma_{ji} = P^\circ_{Ai}\, x_{j,A} \qquad (۲۱-۵-۵)$$

همچنین از معادله ۵ - ۵ - ۱۵ می‌توان نوشت

$$J\sigma_{ji} = x_{j,A}\, x_{i,B}\, s_{AB} \qquad (۲۲-۵-۵)$$

که تنش کوشی را به تنش دوم پیلا - کرشوف ارتباط می‌دهد.

در فصل چهار نشان دادیم که تفاوت بین کرنش‌های اولری و لاگرانژی وقتی که تغییرشکل‌ها خطی ملاحظه شوند محو می‌گردد. نشان خواهیم داد که در نظریه‌های خطی متمایز بین اندازه‌های تنش کوشی و پیلا - کرشوف ضروری نیست.

برای نشان دادن برابری تنش‌های کوشی و پیلا - کرشوف در نظریه‌های خطی، باید چند نتیجه سینماتیکی را در قسمت ۴ - ۷ فراخواند و تعدادی را همچنین بدست آورد. با معرفی یک عدد مثبت $\in$ که نمایانگر اندازه کوچک است به‌گونه‌ای که گرادیان‌های تغییرمکان $u_{i,A}$ از همان مرتبه اندازه $\in$ باشد می‌توان نوشت.

$$u_{i,A} = ۰\ (\in) \quad \text{در} \quad \in \longrightarrow ۰ \qquad (۲۳-۵-۵)$$

همانگونه که در قسمت ۴ - ۷ کشف شد، کرنش‌های اولری و لاگرانژی معادل هستند وقتی $\in \to ۰$ بنابراین معادلات ۴ - ۷ - ۱ و ۴ - ۷ - ۲ داریم

$$E_{AB}\, \delta_{iA}\, \delta_{jB} = e_{ij} = ۰\ (\in)$$

امتحان کردن معادلات ۵ - ۵ - ۲۱ و ۵ - ۵ - ۲۲ اندازه‌های تنش σ_{ji} ، P°_{Ai} و s_{AB} را بهم ارتباط می‌دهد. برای بحث این ارتباط در حالت خطی، باید یک رابطه‌ای برای ژاکوبی بدست آورد وقتی که $\in \to 0$ میل کند. با تعریف J در شکل زیر شروع می‌کنیم.

$$J = \frac{1}{6}\, \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{ABC}\, F_{iA}\, F_{jB}\, F_{kC}$$

عبارت $F_{iA} = u_{i,A} + \delta_{iA}$ و غیره را جایگزین می‌کنیم تا بدست آوریم

$$J = \frac{1}{6}\, \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{ABC}\, (u_{i,A} + \delta_{iA})(u_{j,B} + \delta_{jB})(u_{k,C} + \delta_{kC})$$

با اجرای عملیات جبری و سپس شاخصی

$$J = \frac{1}{6}\, \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{ABC}\, [\, \delta_{iA}\, \delta_{jB}\, \delta_{kC} + 3\, u_{k,C}\, \delta_{iA}\, \delta_{jB} + 0\, (\in^2)]$$

که در آن جملات مرتبه $\in^2$ و بالاتر بطور صریح نوشته نشده‌اند. چون $\varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{ijk} = 6$ و $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijC} = 2\, \delta_{kC}$ می‌باشند.

$$J = 1 + u_{k,k} + 0\, (\in^2) \qquad (۵ - ۵ - ۲۴)$$

اکنون معادلات ۵ - ۵ - ۲۱ و ۵ - ۵ - ۲۲ را وقتی $\in \to 0$ میل می‌کند می‌توان ارزیابی کرد یعنی برای حالت نظریه خطی چون $u_{k,k}$ برابر $0\, (\in)$ می‌باشد.

$$\sigma_{ji} + 0\, (\in) = P^{\circ}_{Ai}\, \delta_{Aj} + 0\, (\varepsilon) \qquad (۵ - ۵ - ۲۵)$$

با یک بحث مشابه برای معادله ۵ - ۵ - ۲۲ بدست می‌آوریم.

$$\sigma_{ji} = s_{AB}\, \delta_{Ai}\, \delta_{Bj} \qquad \text{وقتی که} \quad \in \to 0 \qquad (۵ - ۵ - ۲۶)$$

معادلات ۵ - ۵ - ۲۵ و ۵ - ۵ - ۲۶ نشان می‌دهند که در نظریه خطی اندازه‌های تنش کوشی، پیلا - کرشوف ، پیلا - کرشوف متقارن همگی معادل هم هستند.

۵ - ۶ اصل ممان اندازه حرکت (اندازه حرکت زاویه‌ای)

ممان اندازه حرکت عبارتی است که برای مشخص کردن ممان حاصل از اندازه حرکت خطی نسبت به نقطه‌ای بکار برده می‌شود. این کمیت برداری را همچنین در بعضی مواقع اندازه حرکت زاویه‌ای جسم هم می‌گویند. اصل اندازه حرکت زاویه‌ای بیان می‌کند که نرخ زمانی تغییرات ممان اندازه حرکت یک جسم نسبت به نقطه‌ای معلوم برابر ممان نیروهای سطحی و حجمی نسبت به آن نقطه است. برای جسم نشان داده شده در شکل ۵ - ۱ اگر مبدا را به‌عنوان نقطه مرجع در نظر بگیریم ، اصل اندازه حرکت زاویه‌ای دارای شکل ریاضی زیر خواهد بود.

$$\frac{d}{dt}\int_V \varepsilon_{ijk}\, x_j\, \rho v_k\, dV = \int_S \varepsilon_{ijk}\, x_j\, t_k^{(\hat{n})}\, dS + \int_V \varepsilon_{ijk}\, x_j\, \rho b_k\, dV \qquad (۱-۶-۵)$$

با بکار بردن معادله ۵ - ۳ - ۱۱ در مشتق‌گیری از سمت چپ معادله فوق و استفاده از قضیه دیورژانس در انتگرال سطح و سپس معرفی تساوی $t_k^{(\hat{n})} = \sigma_{qk}\, n_q$ آنگاه نتیجه می‌شود.

$$\int_V \varepsilon_{ijk}\, [\, x_j\, (\rho \dot{v}_k - \sigma_{qk,q} - \rho b_k) - \sigma_{jk}\,]\, dV = 0$$

که به شکل زیر کاهش می‌یابد

$$\int_V \varepsilon_{ijk}\, \sigma_{kj}\, dV = 0 \qquad (۲-۶-۵)$$

که بخاطر معادله ۵ - ۴ - ۴ (معادلات حرکت) و خاصیت تغییر علامت در نماد جایگشت است. مجدداً برای V اختیاری زیر انتگرال باید حذف شود.

$$\varepsilon_{ijk}\, \sigma_{kj} = 0 \qquad (۳-۶-۵)$$

که با بسط مستقیم نشان داده می‌شود $\sigma_{kj} = \sigma_{jk}$ و تانسور تنش متقارن است. توجه شود که در تشکیل معادلات اصل اندازه حرکت زاویه‌ای توسط معادله ۵ - ۶ - ۱ ، فرض کرده‌ایم که زوج نیروهای سطحی یا حجمی روی جسم اعمال نشده است. اگر چنین ممان‌های متمرکزی وارد شود، مواد را ***مواد قطبی*** می‌گویند، و خاصیت متقارن بودن σ دیگر برقرار نیست. اما همانگونه

که در فصل ۳ اشاره شد، این یک وضعیت تقریباً خاص است که در اینجا مورد بررسی قرار نمی‌دهیم.

۵ - ۷ اصل بقای انرژی، معادله انرژی

اصل بقای انرژی می‌گوید مشتق زمانی مادی جنبش به اضافه انرژی‌های داخلی برابر است با جمع نرخ کار انجام شده توسط نیروهای سطحی و حجمی به اضافه سایر انرژی‌هایی که در واحد زمان به جسم وارد یا از جسم خارج می‌شود. برای مثال سایر انرژی‌ها ممکن است شامل حرارتی ، الکتریکی ، مغناطیسی یا شیمیایی بشود. در این کتاب فقط انرژی‌های مکانیکی و حرارتی را در نظر می‌گیریم و لازم است مواد محیط پیوسته غیرقطبی باشد (آزاد از زوج نیروهای حجمی و کششی) .

اگر فقط انرژی مکانیکی در نظر گرفته شود، تعادل انرژی را می‌توان از معادلات حرکت (معادله ۵ - ۴ - ۴) بدست آورد. در اینجا یک روش متفاوت به‌صورت زیر را اتخاذ می‌کنیم. طبق تعریف، *انرژی جنبشی* مواد اشغال‌کننده یک حجم اختیاری V از جسم واقع در شکل ۵ - ۱ عبارت است از

$$K(t) = \tfrac{1}{2}\int_V \rho \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\, dV = \tfrac{1}{2}\int_V \rho v_i v_i\, dV \qquad (۱-۷-۵)$$

همچنین *توان مکانیکی* یا *نرخ کار* انجام شده توسط نیروهای حجمی و سطحی که در شکل نشان داده شده است با رابطه عددی زیر تعریف می‌شود.

$$P(t) = \int_S t_i^{(\hat{\mathbf{n}})} v_i\, dS + \int_V \rho b_i v_i\, dV \qquad (۲-۷-۵)$$

اکنون مشتق مادی انرژی جنبشی داخلی را در نظر بگیرید

$$\dot{K} = \frac{d}{dt}\int_V \tfrac{1}{2}\rho v_i v_i\, dV = \tfrac{1}{2}\int_V \rho\,(v_i v_i)^{\cdot}\, dV$$

$$= \int_V \rho(v_i \dot{v}_i)\, dV = \int_V v_i\,(\sigma_{ji,j} + \rho b_i)\, dV$$

که در آن معادله ۵ - ۴ - ۴ برای بدست آوردن شکل نهایی زیر انتگرال بکار برده شده است.
اما $v_i\sigma_{ij,j} = (v_i\ \sigma_{ij})_{,j} - v_{i,j}\ \sigma_{ij}$ و

$$\dot{K} = \int_V [\ \rho b_i\ v_i + (v_i\ \sigma_{ij})_{,j} - v_{i,j}\ \sigma_{ij}\ ]\ dV$$

اگر جمله وسطی را بکمک قضیه دیورژانس تبدیل کنیم و از تجزیه $v_{i,j} = D_{ij} + W_{ij}$ استفاده نماییم آنگاه

$$\dot{K} = \int_V \rho b_i\ v_i\ dV + \int_S t_i^{(\hat{n})}\ v_i\ dS - \int_V \sigma_{ij}\ D_{ij}\ dV \qquad (۳ - ۷ - ۵)$$

از تعریف معادله ۵ - ۷ - ۲ این عبارت را به‌صورت زیر می‌توان نشان داد.

$$\dot{K} + S = P \qquad (۴ - ۷ - ۵)$$

که در آن انتگرال

$$S = \int_V \sigma_{ij}\ D_{ij}\ dV = \int_V tr\ (\boldsymbol{\sigma}.\ \mathbf{D})\ dV \qquad (۵ - ۷ - ۵)$$

معروف به ***کارتنش*** و عبارت زیر انتگرال یعنی $\sigma_{ij}\ D_{ij}$ را ***توان تنش*** می‌نامند. تعادل انرژی مکانیکی توسط معادله ۵ - ۷ - ۴ ارائه شده است که نشان می‌دهد، کل کار انجام شده توسط نیروهای خارجی یک قسمتی از آن صرف افزایش انرژی جنبشی و باقی‌مانده به‌صورت کار انجام شده توسط تنش‌های داخلی ظاهر می‌گردد.

در حالت کلی ، S را نمی‌توان به‌عنوان مشتق مادی یک انتگرال حجمی بیان کرد، یعنی

$$S \neq \frac{d}{dt} \int_V (\ )\ dV \qquad (۶ - ۷ - ۵)$$

زیرا تابع جامع معلومی وجود ندارد که به‌عنوان زیر انتگرال در این معادله بتوانیم وارد کنیم. اما در وضعیت خاص وقتی که

$$S = \dot{U} = \frac{d}{dt} \int_V \rho u\ dV = \int_V \rho \dot{u}\ dV \qquad (۷ - ۷ - ۵)$$

که در آن U را *انرژی داخلی* و u *انرژی داخلی مخصوص* یا چگالی انرژی (در واحد جرم) می‌گویند. معادله ۵ - ۷ - ۴ خواهد شد

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\,(\tfrac{1}{2}\rho v_i\,v_i + u)\,dV = \int_V \rho b_i\,v_i\,dV + \int_S t_i^{(\hat{\mathbf{n}})}\,v_i\,dS$$

(۵ - ۷ - ۸ الف)

یا بطور خلاصه

$$\dot{K} + \dot{U} = P \qquad (۵ - ۷ - ۸ ب)$$

(نماد u برای انرژی داخلی مخصوص استفاده شده است زیرا بطور وسیع در نوشتجات پذیرفته شده است. مقصور می‌گردد احتمال کمتری وجود دارد که در این زمینه با اندازه بردار تغییرمکان **u** سوء تعریف شود). توجه داریم که معادلات ۵ - ۷ - ۸ نشان می‌دهد که قسمتی از کار خارجی P موجب افزایش در انرژی جنبشی می‌شود و باقیمانده به‌صورت انرژی داخلی ذخیره می‌گردد. همانگونه که در فصل شش خواهیم دید، مواد الاستیک ایده‌آل در مقابل نیروها بدین صورت عکس‌العمل نشان می‌دهند.

برای یک *محیط پیوسته حرارتی مکانیکی* ، نرخی که به میزان آن انرژی حرارتی به جسم اضافه می‌گردد عبارت است از

$$Q = \int_V \rho r\,dV - \int_S q_i\,n_i\,dS \qquad (۵ - ۷ - ۹)$$

میدان عددی r نرخی که به میزان آن حرارت در واحد جرم توسط منابع داخلی تولید می‌شود را مشخص می‌کند و معروف به *منبع حرارتی* است. بردار q_i را بردار *شار حرارتی* می‌گویند که عبارت است از اندازه نرخی که به میزان آن حرارت بداخل جسم در واحد مساحت در واحد زمان در عرض جزء سطحی dS که نرمال به طرف بیرونش n_i است هدایت می‌شود (از این رو علامت منها در معادله ۵ - ۷ - ۹ داریم). اغلب فرض می‌شود شار حرارتی q_i قانون اول هدایت حرارتی فوریه را تبعیت نموده است.

$$q_i = -\,\kappa T_{,i} \qquad \text{یا} \qquad \mathbf{q} = -\,\kappa\nabla\,\mathbf{T} \qquad (۵ - ۷ - ۱۰)$$

که در آن κ هدایت حرارتی و $T_{,i}$ گرادیان درجه حرارت است. اما چون تمامی مواد از قانون

هدایت تبعیت نمی‌کنند، بطور جامع معتبر نیست.

با اضافه کردن ملاحظات انرژی حرارتی ، تعادل کامل انرژی مستلزم اصلاح سازی معادله ۵ - ۷ - ۸ است که هم اکنون شکل زیر را می‌گیرد

$$\dot{K} + \dot{U} = P + Q \qquad (۵ - ۷ - ۱۱ \text{ الف})$$

یا وقتی که با جزئیات نوشته شود.

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\ (\tfrac{1}{2}\, v_i\, v_i + u)\ dV = \int_V \rho\ (b_i\, v_i + r)\ dV + \int_S\ [\ t_i^{(\hat{\mathbf{n}})}\, v_i - q_i\, n_i\ ]\ dS$$

(۵ - ۷ - ۱۱ ب)

اگر انتگرال سطح را به انتگرال حجم تبدیل کنیم و از معادلات حرکت استفاده نماییم (معادله ۵ - ۴ - ۴) ، شکل کاهش یافته معادله ۵ - ۷ - ۱۱ ب به‌صورت زیر مشاهده می‌شود

$$\int_V (\rho\dot{u} - \sigma_{ij}\, D_{ij} - \rho r - q_{i,i})\ dV = 0 \quad \text{یا} \quad \int_V (\rho\dot{u} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \rho r + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q})\ dV = 0$$

(۵ - ۷ - ۱۲ الف)

یا بطور خلاصه

$$S = \dot{U} - Q \qquad (۵ - ۷ - ۱۲ \text{ ب})$$

که بعضی اوقات به‌عنوان *تعادل انرژی حرارتی* به آن ارجاع می‌گردد، در تشابه با معادله ۵ - ۷ - ۴ آن معادله به *تعادل انرژی مکانیکی* ارتباط دارد. پس مشاهده می‌شود که نرخ کار انجام شده توسط نیروهای داخلی برابر است با نرخی که به میزان آن انرژی داخلی افزایش می‌یابد منهای نرخی که حرارت داخل جسم می‌شود. طبق معمول برای یک حجم اختیاری V با بحثی که اکنون استاندارد می‌باشد، با قرار دادن زیر انتگرال معادله ۵ - ۷ - ۱۲ الف مساوی صفر، معادله میدان را بدست می‌آوریم

$$\rho\dot{u} - \sigma_{ij}\, D_{ij} - \rho r + q_{i,i} = 0 \quad \text{یا} \quad \rho\dot{u} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \rho r + div\ \mathbf{q} = 0 \qquad (۱۳ - ۷ - ۵)$$

که *معادله انرژی* نامیده می‌شود.

بطور خلاصه ، تعادل انرژی مکانیکی معادله ۵ - ۷ - ۳ مستقیماً از معادلات حرکت

مشتق‌پذیر است (اصل اندازه حرکت خطی) که یک قسمت از تصویر انرژی کامل است. هنگامی که انرژی حرارتی شامل شده باشد، تعادل مطلق معادله ۵ - ۷ - ۱۱ همان بیان قانون اول ترمودینامیک است. برای بررسی کامل ترمودینامیکی محیط پیوسته نیاز به ملاحظه آنتروپی، میدان‌های درجه حرارت ، و قانون دوم ترمودینامیک داریم. قانون دوم را می‌توان برای کاهش وابستگی تابعی فرضیات اساسی بکار برد. اهمیت آنان در تصویر جامع انرژی مکانیک محیط‌های پیوسته روشن است، اما چنین ملاحظاتی خارج از چارچوب این کتاب مبانی می‌باشد.

۵ - ۸ انتروپی و معادله کلازیوس - دوهام

بقای انرژی همان‌طوری که در بخش ۵-۷ فرموله شد، بیانی از قابلیت تبدیل درونی کار و حرارت است. با وجود این، برای فرایندهای بازگشت‌ناپذیر قابلیت تبدیل درونی مطلق وجود ندارد. برای نمونه، حالتی را که کار مکانیکی در اثر اصطکاک به حرارت تبدیل می‌شود شناخته شده است، اما عکس آن قابل پیاده‌سازی نیست به این معنی که نمی‌توان به‌طور مستقیم از حرارت برای تولید کار بهره برد. البته این، انگیزهٔ ***قانون دوم ترمودینامیک*** است.

مکانیک محیط‌های پیوسته، قانون دوم را به روشی متفاوت از ترمودینامیک کلاسیک استفاده می‌کند. در آن نظام، از قانون دوم برای اعمال محدودیت جریان حرارت و انرژی استفاده شده است. در بیان کلوین - پلانک، وسیله‌ای نمی‌توان ساخت که در یک سیکل عمل کند و در حالی که هیچ اثری به جز تولید کار مکانیکی ندارد تنها با یک منبع تبادل حرارت کند، یا اینکه در بیان کلازیوس، غیرممکن است وسیله‌ای بسازیم که در یک سیکل عمل کند و تنها اثر آن انتقال حرارت از جسم سردتر به جسم گرم‌تر باشد (ون وایلن و زونتاگ، ۱۹۶۵). در مکانیک محیط پیوسته، بیانی از قانون دوم برای اعمال محدودیت‌هایی برای محیط پیوسته اتخاذ شده است. هرچند در مورد مکانیک محیط‌های پیوسته، محدودیت‌های اعمالی روی توابع پاسخ ماده، ***پاسخ‌های ذاتی*** گفته می‌شوند.

در این بخش، پارامتر ترمودینامیکی (***انتروپی***) به عنوان راهی برای ارتباط دادن پاسخ‌های مکانیکی و حرارتی معرفی شده است. با استفاده از این پارامتر، قانون دوم ترمودینامیک به شکل معادله ***کلازیوس ـ دوهام*** بیان شده است. از این معادله در بخش‌های بعدی برای قرار دادن محدودیت‌های مفیدی بر پاسخ‌های ذاتی مسلم و بدیهی در مواد مختلف استفاده شده است.

در هر بیانی برای محیط پیوسته کمیت‌های مختلفی وجود دارند که بر انرژی داخلی

تأثیرگذارند. این ممکن است حجم گاز ایده‌آل یا مؤلفه‌های گرادیان تغییر شکل جسمی جامد باشد. در مورد گرادیان تغییر شکل، نه مؤلفه تغییر شکل در جسمی را که ذخیره کنندهٔ انرژی است، نشان می‌دهند. به مجموعهٔ این پارامترها، زیر ***حالت ترمودینامیکی*** گفته می‌شود و به‌وسیلهٔ $v_n,...,v_2,v_1$ نشان داده خواهد شد.

زمانی که زیرحالت ترمودینامیکی انرژی داخلی جسم را تحت تأثیر قرار می‌دهد، به‌طور کامل آن را تعریف نمی‌کند. فرض کنید که زیرحالت به همراه یک پارامتر اضافی اسکالر مستقل η برای تعریف انرژی داخلی کافی باشد. این تعریف ممکن است به شکل زیر داده شود:

$$u = f(\eta, v_1, v_2, ..., v_n) \qquad (۱-۸-۵)$$

که اغلب از آن به عنوان ***معادله کالریک حالت***، ارجاع داده می‌شود. به پارامتر η ***انتروپی مخصوص*** گفته می‌شود. از آنجا که انرژی داخلی به وضوح تعریف شده و انتروپی در کنار زیرحالت آورده شده است، ترکیب η به اضافهٔ $v_n,...,v_2,v_1$ ***حالت ترمودینامیک*** را ایجاد می‌کند.

دما نتیجهٔ تغییر انرژی داخلی نسبت به انتروپی است.

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial \eta} \qquad (۲-۸-۵)$$

علاوه بر این، دیفرانسیل‌گیری جزئی از انرژی داخلی نسبت به متغیرهای زیرحالت ترمودینامیکی، کشش‌های ترمودینامیک را نتیجه می‌دهد.

$$\tau_a = \frac{\partial u}{\partial v_a} \qquad (۳-۸-۵)$$

با استفاده از روابط قبلی می‌توان شکل دیفرانسیلی انرژی داخلی را به فرم زیر نوشت:

$$du = \theta d\eta + \sum_a \tau_a dv_a \qquad (۴-۸-۵)$$

از روابط ۵-۸-۱ و ۵-۸-۲ مشاهده می‌شود که هم درجه حرارت و هم کشش‌های ترمودینامیک، توابعی از انتروپی و پارامترهای زیرحالت هستند.

با فرض اینکه همهٔ توابعی که در این بخش تعریف شده‌اند به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر از هر مرتبهٔ دلخواه باشند، حل انتروپی برحسب جملات درجهٔ حرارت امکان‌پذیر است.

$$\eta = \eta(\theta, v_a) \qquad (۵-۸-۵)$$

این نتایج ممکن است در معادلهٔ کالریک حالت برای بیان انرژی داخلی برحسب تابعی از درجه حرارت و پارامترهای زیرحالت جایگزین شوند.

$$u = u(\theta, \mathrm{v}_a) \qquad (۶-۸-۵)$$

استفاده از این نتایج در معادله ۵-۸-۳ امکان تعریف روابط حرارتی حالت را می‌دهد.

$$\tau_a = \tau_a(\theta, \mathrm{v}_a) \qquad (۷-۸-۵)$$

که معکوس آن پارامترهای زیرحالت را نتیجه می‌دهد.

$$\mathrm{v}_a = \mathrm{v}_a(\theta, \tau_a) \qquad (۸-۸-۵)$$

اغلب اصول ترمودینامیک در عبارات پتانسیل ترمودینامیکی بیان می‌شوند که ممکن است به شکل زیر تعریف شوند:

انرژی داخلی (۵ - ۸ - ۹الف) u

انرژی آزاد (۵ - ۸ - ۹ب) $\psi = u - \eta\theta$

انتالپی (۵ - ۸ - ۹پ) $\chi = u - \sum_{\mathrm{a}} \tau_a \mathrm{v}_a$

انتالپی آزاد (۵ - ۸ - ۹ت) $\zeta = \chi - \eta\theta = u - \eta\theta - \sum_{\mathrm{a}} \tau_a \mathrm{v}_a$

این پتانسیل‌ها با معادله زیر به هم مرتبط‌اند.

$$u - \psi + \zeta - \chi = ۰ \qquad (۱۰-۸-۵)$$

همهٔ پتانسیل‌های انرژی ممکن است در عباراتی از هر یک از جفت متغیرهای مستقل زیر نوشته شود:

$$\eta, \mathrm{v}_a\,; \quad \theta, \mathrm{v}_a\,; \quad \eta, \tau_a\,; \quad \theta, \tau_a \qquad (۱۱-۸-۵)$$

به منظور تشریح حرکت مکانیکی خالص محیط پیوسته تابع $x_i = x_i(X_A, t)$ نیاز است. اضافه کردن پاسخ ترمودینامیکی نیاز به اضافه کردن درجه حرارت، θ، یا معادل آن، انتروپی، η را دارد که هر دو آنها تابع موقعیت و زمان هستند.

$$\theta = \theta(X_A, t) \quad \text{یا} \quad \eta = \eta(X_A, t) \qquad (۱۲-۸-۵)$$

اگر توجه خود را به بخش p جسم معطوف کنیم، آنگاه انتروپی کل به وسیلهٔ معادله زیر داده می‌شود:

$$H = \int_P \rho\eta dV \qquad (۱۳-۸-۵)$$

و تولید انتروپی در بخش p جسم نیز به شکل زیر است:

$$\Gamma = \int_P \rho\gamma dV \qquad (۱۴-۸-۵)$$

که کمیت اسکالر γ **تولید انتروپی** مخصوص است. قانون دوم را می‌توان به گونه‌ای که به دنبال می‌آید، بیان کرد: نرخ زمانی تغییر در انتروپی برابر است با تغییر در انتروپی در اثر ذخیرهٔ حرارت، شار حرارتی ورودی به آن قسمت به اضافهٔ تولید انتروپی داخلی که برای یک بخش p از جسم به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d}{dt}\int_P \rho\eta dV = \int_P \frac{\rho r}{\theta}\, dV - \int_{\partial P} \frac{q_i \cdot n_i}{\theta}\, dS + \int_P \rho\gamma dV \qquad (۱۵-۸-۵)$$

همواره تولید انتروپی مثبت است، این مطلب ما را به بیان قانون دوم در شکل ***نابرابری کلازیوس ـ دوهام*** سوق می‌دهد.

$$\frac{d}{dt}\int_P \rho\eta dV \geq \int_P \frac{r}{\theta}\, dV - \int_{\partial P} \frac{q_i \cdot n_i}{\theta}\, dS \qquad (۱۶-۸-۵)$$

این شکل کلی را می‌توان به‌طور موضعی با روش‌های شناخته شدهٔ امروزی بیان کرد. با به‌کارگیری قضیه دیورژانس برای عبارت شار حرارتی، نتیجه می‌شود:

$$\int_{\partial P} \frac{q_i \cdot n_i}{\theta}\, dS = \int_P \left(\frac{q_i}{\theta}\right)_{,i} dV$$

علاوه بر این، دیفرانسیل‌گیری از عبارت انتروپی با توجه به اینکه کمیتی مخصوص است، آسان‌تر شده است. (بخش ۵-۳، معادله ۵-۳-۱۱ را ببینید.)، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\int_P \left[\rho\dot{\eta} - \rho\frac{r}{\theta} + \left(\frac{q_j}{\theta}\right)_{,j}\right]dV \geq 0 \qquad (۱۷-۸-۵)$$

و از آنجا که این برای هر قسمت دلخواه از جسم صادق و انتگرال ده نیز پیوسته است، داریم:

$$\rho\dot{\eta} - \rho\frac{r}{\theta} + \left(\frac{q_j}{\theta}\right)_{,j} = \rho\dot{\eta} - \rho\frac{r}{\theta} + \frac{q_{j,j}}{\theta} - \frac{1}{\theta^2}q_j\theta_{,j} \geq 0$$

بنابراین، شکل موضعی معادله کلازیوس - دوهام به صورت (۵-۸-۱۸الف) است.

$$\rho\theta\dot{\eta} - \rho r + q_{i,i} - \frac{1}{\theta}q_i\theta_{,i} \geq 0 \qquad (۵-۸-۱۸\text{الف})$$

اغلب گرادیان درجهٔ حرارت به شکل $g_i = \theta_{,i}$ نوشته می‌شود که در این حالت معادله (۵-۸-۱۸الف) به شکل زیر در می‌آید:

$$\rho\theta\dot{\eta} - \rho r + q_{i,i} - \frac{1}{\theta}q_i g_i \geq 0 \qquad (۵-۸-۱۸\text{ب})$$

ترکیب این نتایج با معادله ۵-۷-۱۳ توان تنش و انرژی داخلی را نیز در عبارت ظاهر خواهد کرد و شکل کاهش یافته‌ای از معادله کلازیوس - دوهام نتیجه می‌دهد.

$$\rho\theta\dot{\eta} - \rho\dot{u} + D_{ij}\sigma_{ij} - \frac{1}{\theta}q_i g_i \geq 0 \qquad (۱۹-۸-۵)$$

یک شکل نهایی از معادله کلازیوس - دوهام با کاربرد معادلهٔ ۵-۸-۹ب برای حصول نابرابری موضعی تلفات قابل دستیابی است.

$$\dot{\psi} + \eta\dot{\theta} - D_{ij}\sigma_{ij} - \frac{1}{\theta}q_i g_i \geq 0 \qquad (۲۰-۸-۵)$$

۵ - ۹ محدودیت‌هایی بر مواد الاستیک به وسیلهٔ قانون دوم ترمودینامیک

به‌طور کلی، جسم پیوستهٔ ترمومکانیکی باید به‌وسیلهٔ توابع پاسخی که شامل کمیت‌های مکانیکی و ترمودینامیکی است، مشخص شود. برای مشخص کردن محیط پیوسته

به‌طور کامل، *فرایند ترمودینامیکی* باید تعریف شده باشد. برای یک جسم محیط پیوستهٔ B که دارای نقاط مادی X است، فرایند ترمودینامیکی با هشت تابع وابسته به زمان و نقطهٔ مادی، تعریف شده است. این توابع به شکل زیر خواهند بود:

۱- موقعیت فضایی $x_i = \chi_i(X,t)$

۲- تانسور تنش $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(X,t)$

۳- نیروی جسمی بر واحد جرم $\mathrm{b_i} = b_i(X,t)$

۴- انرژی داخلی مخصوص $u = u(X,t)$

۵- بردار شار حرارت $q_i = q_i(X,t)$

۶- ذخیرهٔ حرارت بر واحد جرم $r = r(X,t)$

۷- انتروپی مخصوص $\eta = \eta(X,t)$

۸- درجه حرارت (همیشه مثبت) $\theta = \theta(X,t)$

مجموعه‌ای از این هشت تابع که در توافق با تعادل مومنتوم خطی و پایستاری انرژی‌اند، تشکیل فرایند ترمودینامیکی می‌دهند. این دو قانون تعادل در شکل محلی در روابط ۵-۴-۴ و ۵-۷-۱۳ داده شده‌اند و در زیر با شکل کمی متفاوت از قبل تکرار شده‌اند

$$\sigma_{ji,j} - \rho\dot{v}_i = -\rho b_i$$
$$\rho\dot{u} - \sigma_{ij}D_{ij} + q_{i,i} = \rho r \qquad (۱-۹-۵)$$

در نوشتن قوانین بقا به این شکل، تأثیر خارجی روی جسم، ذخیرهٔ حرارت، و نیروی جسمی در سمت راست تساوی قرار داده شده است و در می‌یابیم که تنها مشخص کردن x_i، σ_{ij}، ε، q_i، η و θ کافی است و دو تابع فرایند باقیمانده r و b_i از روابط ۵-۹-۱ تعیین می‌شوند.

یکی از کاربردهای قانون دوم به شکل کلازیوس - دوهام، یافتن محدودیت‌ها در پاسخ‌های ذاتی است. با در نظر گرفتن معادله ۵-۸-۲۰ به عنوان معادلهٔ کلازیوس - دوهام مشاهده می‌شود که توابع تنش، انرژی آزاد، انتروپی، و شار حرارتی باید مشخص شوند. نقطهٔ شروع برای پاسخ اساسی در مورد ماده‌ای خاص، اصل حضور هماهنگ است. (کلمن و میزل، ۱۹۶۳).

یک متغیر مستقل موجود در معادله اساسی یک ماده، باید همچنین همه جا حضور داشته باشد، مگر آنکه حضور آن به منظور تضاد با فرض تقارن ماده، اصل عینیت ماده و یا

قوانین ترمودینامیک باشد.

برای مادهٔ الاستیک، فرض شده است که توابع پاسخ وابسته به گرادیان تغییر شکل، درجه حرارت و گرادیان درجه حرارت خواهد بود. بنابراین، فرض می‌شود:

$$\sigma_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij}(F_{iA},\theta,g_i); \qquad \psi = \tilde{\psi}(F_{iA},\theta,g_i);$$
$$\eta = \tilde{\eta}(F_{iA},\theta,g_i); \qquad q_i = \tilde{q}_i(F_{iA},\theta,g_i); \qquad (۵-۹-۲)$$

این توابع پاسخ برای تشخیص بین توابع و مقدار آنها نوشته شده‌اند. علامت ~ برای تشخیص تابع پاسخ از مقدار پاسخ به کار رفته است.

در استفاده از معادله ۵-۸-۲۰ مشتق ψ باید به صورت عباراتی از متغیرهای مستقل آن بیان شود.

$$\dot{\psi} = \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial F_{iA}}\dot{F}_{iA} + \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial g_i}\dot{g}_i \qquad (۵-۹-۳)$$

این معادله با استفاده از معادله ۴-۱۰-۷ به منظور جایگذاری مشتق زمانی گرادیان تغییر شکل به صورت عبارتی از گرادیان سرعت و گرادیان تغییر شکل، ساده‌سازی شده است.

$$\dot{\psi} = \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial F_{iA}}L_{ij}F_{jA} + \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial g_i}\dot{g}_i \qquad (۵-۹-۴)$$

با جایگذاری معادلهٔ ۵-۹-۳ در ۵-۸-۲۰ و فاکتورگیری جمله‌های مشترک داریم:

$$-\rho\left(\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\theta}+\tilde{\eta}\right)\dot{\theta} + \left(\sigma_{ij} - \rho\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial F_{iA}}F_{jA}\right)L_{ij} - \rho\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial g_i}\dot{g}_i - \frac{1}{\theta}\tilde{q}_i g_i \geq 0 \qquad (۵-۹-۵)$$

توجه کنید که در نوشتن معادله ۵-۹-۵ توان تنش به جای اینکه به صورت $\sigma_{ij}D_{ij}$ نوشته شود، به‌صورت $\sigma_{ij}L_{ij}$ نوشته شده است، این کار شدنی است، زیرا تنش متقارن است و اضافه کردن قسمت متقارن - اریب L_{ij} در اصل اضافه کردن صفر به نابرابری است. گرادیان سرعت استفاده شده است، زیرا مشتق جزئی انرژی آزاد نسبت به گرادیان تغییر شکل ضربدر ترانهادهٔ گرادیان تغییر شکل به‌طور کلی متقارن نیست.

قانون دوم باید برای هر فرایند ترمودینامیکی برقرار باشد، که این حالت ممکن است به‌وسیلهٔ تشکیل میدان‌های تغییر مکان و درجه حرارت به عنوان حالتی خاص توضیح داده

شود. میدان‌های تغییر شکل و درجه حرارت به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$x_i = \chi(X_A, t) = Y_A + A_{iA}(t)[X_A - Y_A] \qquad (۶-۹-۵)$$

$$\theta = \theta(X_A, t) = \alpha(t) + [A_{Ai}(t)a_i(t)][X_A - Y_A]$$

در این معادله، X_A و Y_A بیانگر موقعیت در شکل مرجع نقاط مادی X و Y، و تابع $A_{iA}(t)$ یک تانسور معکوس‌پذیر، $a_i(t)$ بردار وابسته به زمان، و $\alpha(t)$ تابع عددی از زمان هستند. در موقعیت ویژهٔ Y_A به آسانی می‌توان محاسبه کرد:

$$\theta(Y_A, t) = \alpha(t) \qquad (۷-۹-۵)$$

$$F_{iA}(Y_A, t) = A_{iA}(t) \qquad (۸-۹-۵)$$

توجه کنید که ممکن است معادله ۵-۹-۶ در شکل جاری به صورت زیر بیان شود:

$$\theta(y_i, t) = \alpha(t) + a_i(t)[x_i - y_i] \qquad (۹-۹-۵)$$

بنابراین گرادیان درجه حرارت در نقطهٔ مادی Y به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\theta_{,i} = g_i = a_i(t) \qquad (۱۰-۹-۵)$$

از روابط ۵-۹-۷، ۵-۹-۸ و ۵-۹-۹ واضح است که می‌توان کمیت‌های θ، g_i و F_{iA} را به‌طور مستقل انتخاب کرد. علاوه بر این، مشتق‌های زمانی این کمیت‌ها را نیز می‌توان به‌طور دلخواه انتخاب کرد. به دلیل فرض پیوستگی روی توابع پاسخ، امکان تعیین دلخواه توابع u g_i و F_{iA} و مشتقات زمانی آنها وجود دارد.

با رجوع به ماده‌ای الاستیک و معادلهٔ ۵-۹-۴، برای یک نقطهٔ مادی داده شده در محیط پیوسته، نظر خود را به حالتی معطوف می‌سازیم که گرادیان سرعت، L_{ij}، به‌طور یکسان صفر و درجه حرارت ثابت است. این بدان معنی است که $L_{ij} = 0$ و $\dot{\theta} = 0$. همچنین فرض کنید که گرادیان درجه حرارت مقدار ثابت دلخواه داشته باشد. $g_i = g^*_i$ معادلهٔ ۵-۹-۵ می‌شود:

$$-\rho \frac{\partial \tilde{\psi}(F_{iA},\theta.,g^{\cdot}_i)}{\partial g_i} \dot{g}_i - \frac{1}{\theta} \tilde{q}_i(F_{iA},\theta.,g^{\cdot}_i)g^{\cdot}_i \geq 0$$

دوباره از آنجا که قانون دوم در هر فرایندی صادق است و چون $\dot{g}_i$ به‌طور دلخواه بوده، ممکن است به گونه‌ای انتخاب شده باشد که نابرابری را نقض کند، بنابراین ضریب مشتق زمانی گرادیان درجه حرارت باید صفر باشد.

$$\frac{\partial \tilde{\psi}(F_{iA},\theta.,g^{\cdot}_i)}{\partial g_i} = 0 \qquad (۱۱-۹-۵)$$

از آنجا که $g^{\cdot}_i$ به‌عنوان گرادیان درجه حرارت دلخواه انتخاب شده است، معادله ۵-۹-۱۱ دلالت بر این مطلب دارد که انرژی آزاد، تابعی از گرادیان درجه حرارت نیست، یعنی :

$$\frac{\partial \tilde{\psi}(F_{iA},\theta.,g_i)}{\partial g_i} = 0$$

که بلافاصله نتیجه می‌شود $\psi = \tilde{\psi}(F_{iA}, \theta)$. این حقیقت سبب حذف جملهٔ سوم در معادله ۵-۹-۵ می‌شود.

با کاربرد حالت‌های خاص اضافی در مورد معادله کاهش یافتهٔ ۵-۹-۵، اطلاعات بیشتری دربارهٔ فرضیات اساسی قابل استنتاج است. در مرحله‌ای دیگر، توجه خود را به نقطهٔ مادی دلخواهی و در زمان دلخواه که $L_{ij} = 0$ و $\dot{g}_i = 0$ اما گرادیان درجه حرارت مقدار ثابت دلخواه $g_i = g^{\circ}_i$ را دارد، معطوف می‌سازیم. در این حالت، نابرابری کلازیوس - دوهام به‌صورت زیر نوشته خواهد شد

$$-\left(\frac{\partial \tilde{\psi}(F_{kB},\theta)}{\partial \theta} + \tilde{\eta}\,(F_{kB},\theta,g_k^{\cdot})\right)\dot{\theta} - \frac{1}{\theta}\tilde{q}_i(F_{kB},\theta,g_k^{\cdot})g_i^{\cdot} \geq 0 \qquad (۱۲-۹-۵)$$

که برای هر نرخ درجه حرارت $\dot{\theta}$ باید برقرار باشد، بنابراین تابع پاسخ انتروپی ممکن است به‌صورت عباراتی از انرژی آزاد حل شود

$$\tilde{\eta}(F_{kB},\theta,g_i^{\cdot}) = -\frac{\partial \tilde{\psi}(F_{kB},\theta)}{\partial \theta}$$

و از آنجا که انرژی آزاد تنها تابعی از گرادیان تغییر شکل و درجه حرارت است، انتروپی نیز باید تنها باید تابعی از آنها باشد، یعنی:

$$\eta = \tilde{\eta}(F_{kB}, \theta) = -\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \theta} \qquad (۱۳-۹-۵)$$

کاربردی دیگر از نابرابری کلازیوس - دوهام برای فرایندی خاص به عبارتی برای تنش کوشی برحسب انرژی آزاد منجر خواهد شد. برای این فرایند، گرادیان درجه حرارت ثابتی دلخواه و نرخ زمانی تغییرات گرادیان درجه حرارت را به‌طور یکسان، صفر انتخاب می‌کنیم. معادله ۵-۹-۵ به‌صورت زیر خواهد شد:

$$\left(\tilde{\sigma}_{ij}(F_{kB}, \theta, g_k^{\cdot}) - \rho \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial F_{iA}} F_{jA}\right) L_{ij} - \frac{1}{\theta} \tilde{q}_i (F_{kB}, \theta, g_k^{\cdot}) g_i^{\cdot} \geq 0 \qquad (۱۴-۹-۵)$$

که باید برای همهٔ گرادیان‌های سرعت L_{ij} برقرار باشد. تنها در صورتی که ضریب L_{ij} صفر شود، می‌توان L_{ij} ای انتخاب کرد که در معادله صدق نکند.

$$\sigma_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij}(F_{kB}, \theta) = \rho \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial F_{iA}} F_{jA} \qquad (۱۵-۹-۵)$$

در رسیدن به معادله ۵-۹-۱۴ با توجه به این نکته که انرژی آزاد همان‌طور که قبل از این به واسطهٔ معادله ۵-۹-۱۱ نشان داده شده بود، مستقل از گرادیان درجه حرارت است، بنابراین g_k از لیست متغیرهای مستقل در معادله ۵-۹-۱۴ حذف شده بود. سرانجام، جایگذاری نتایج روابط ۵-۹-۱۵ و ۵-۹-۱۳ و ۵-۹-۱۱ در ۵-۹-۵ آخرین محدودیت برای مادهٔ الاستیک شناخته می‌شود.

$$\tilde{q} g_i \leq 0 \qquad (۱۶-۹-۵)$$

۵ - ۱۰ تغییرناپذیری

نظریهٔ کلی **تغییرناپذیری** در بخش ۲-۵ در مورد تانسورها بحث شده است. کمیت تانسوری که تحت انتقال‌های مجاز محورهای مختصات بدون تغییر باقی بماند. به عبارت دیگر همهٔ مؤلفه‌های مختلف تنش که با دایرهٔ مور نشان داده می‌شوند، بیانگر حالت تنش‌اند. این تغییرناپذیری در ادغام مؤلفه‌های مختلف تنش به منظور رسیدن به معیاری چون تنش برشی

ماکزیمم (یا معیار ترسکا *(Tresca criterion)*) مهم و اساسی است.

تغییرناپذیری نقش مهم دیگری را نیز در مکانیک محیط‌های پیوسته ایفا می‌کند. لزوم تغییرناپذیر بودن محیط پیوسته در خصوص چارچوب مرجع یا عدم تغییر پاسخ زمانی که حرکت بر هم نهی شده جسم صلب به تمام نقاط مادی اعمال شده است، چند نتیجهٔ مشخص حاصل می‌شود. مهمترین این نتایج ممکن است محدودیت اعمال شده بر مدل‌های اساسی باشد که در بخش بعد بحث و بررسی می‌شود.

دو روش عمده برای امتحان تغییرناپذیری توابع پاسخ اساسی وجود دارد، نخست عدم *تغییر چارچوب مادی* و دوم، *حرکت برهم‌نهی‌شدهٔ جسم صلب*. در روش اول، پاسخ جسم محیط پیوسته به نیروهای اعمالی و یا حرکت از قبل تعریف شده از دیدگاه دو چارچوب مرجع مختلف باید یکسان باشد. در این حالت جسم و نیروهای اعمالی ثابت نگه داشته می‌شوند و تنها چارچوب مرجع بیننده عوض می‌شود. در برهم‌نهی حرکت جسم صلب در مورد آن جسم چارچوب مرجع بیننده یکسان است. در این حالت هر نقطهٔ مادی جمعی از حرکت‌ها را دارد. نیروهای اعمالی به جسم نیز همراه حرکت برهم‌نهی‌شده، چرخانده می‌شود.

طی متن این کتاب هر دو روش بالا، محدودیت یکسانی در پاسخ‌های اساسی ایجاد می‌کند. در این متن، روش حرکت برهم‌نهی‌شده جسم صلب به عنوان ابزاری برای اعمال تغییرناپذیری ارائه خواهد شد.

برهم‌نهی حرکت جسم صلب همراه با جابجایی زمانی قابل بیان با تعریف اساسی حرکت است.

$$x_i = \chi_i(X_A, t) \qquad (۱ - ۱۰ - ۵)$$

از این بیان حرکت برهم‌نهی‌شدهٔ جسم صلب با حفظ همهٔ نسبت فواصل بین نقاط مادی به کار برده می‌شود، همچنین از آنجا که حرکت تابعی از زمان است، جابه‌جایی زمان هم به حرکت اعمال شده است. بعد از کاربرد حرکت برهم‌نهی‌شده، موقعیت نقطهٔ مادی x^+_i و در زمان $t^+ = t + a$ که a ثابت است، خواهد بود. علامت "+" برای کمیت‌هایی که حرکت برهم‌نهی‌شده دارند، استفاده شده است. برخی نوشته‌ها از علامت "*" استفاده کرده‌اند ولی چون ما این علامت را برای کمیت‌های تنش اصلی استفاده کرده‌ایم، علامت "+" استفاده شده است. حرکت به شکل حرکت برهم‌نهی‌شده به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$x_i^+ = \chi_i^+(X_A, t) \qquad (۲ - ۱۰ - ۵)$$

با فرض کافی پیوستگی، حرکت را می‌توان به صورت جملاتی در شکل جاری نوشت. از آنجا که $X_A = \chi^{-1}(x_i, t)$ داریم:

$$x_i^+ = \chi_i^+ (X_A, t) = \tilde{\chi}_i^+ (x_i, t) \qquad (۳-۱۰-۵)$$

که نوشتن $\tilde{\chi}_i^+$ به دلیل جایگذاری $X_A = \chi^{-1}(x_i t)$ است که به تابع متفاوتی از χ^+_i منجر می‌شود.

برای نشان دادن فاصلهٔ نسبی میان دو ذره، نقطهٔ مادی دومی انتخاب شده است. در روشی قیاسی، تعیین آن سرراست است.

$$y_i^+ = \chi_i^+ (Y_A, t) = \tilde{\chi}_i^+ (y_i, t) \qquad (۴-۱۰-۵)$$

فاصلهٔ مادی میان ذرات مادی X_A و Y_A به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(x_i - y_i)(x_i - y_i) = \left[\tilde{\chi}_i^+(x_i t) - \tilde{\chi}_i^+(y_i, t)\right]\left[\tilde{\chi}_i^+(x_i, t) - \tilde{\chi}_i^+(y_i, t)\right] \qquad (۵-۱۰-۵)$$

که ضرب نقطه‌ای بردار بین موقعیت‌های x_i و y_i است. از آنجاکه نقاط مادی X_A و Y_A به‌صورت دلخواه انتخاب شده بودند، کمیت‌های x_i و y_i مستقل‌اند. به دنبال آن دیفرانسیل‌گیری از معادلهٔ ۵-۱۰-۵ نسبت به x_i و سپس y_i منجر می‌شود به:

$$\frac{\partial \tilde{\chi}_i^+(x_i, t)}{\partial x_p} \frac{\partial \tilde{\chi}_i^+(y_i, t)}{\partial y_q} = \delta_{pq} \qquad (۶-۱۰-۵)$$

و چون برای هر جفت از نقاط مادی باید برقرار باشد، می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial \tilde{\chi}_i^+(x_i, t)}{\partial x_p} \frac{\partial \tilde{\chi}_i^+(y_i, t)}{\partial y_p} = Q_{ip}(t) \qquad (۷-۱۰-۵)$$

استفاده از معادلهٔ ۵-۱۰-۷ در ۵-۱۰-۶ نشان می‌دهد که ماتریس $Q_{ip}(t)$ متعامد است. علاوه بر این، در حالت خاصی از حرکت برهم‌نهی‌شده که به عنوان حرکت تهی یا پوچ شناخته می‌شود، داریم $x_i = \chi_i^+(x_i, t)$ بنابراین ماتریس $Q_{ip}(t)$ باید متعامد مقتضی باشد، یعنی داشته باشیم $Q_{ip}(t)Q_{iq}(t)=\delta_{pq}$ و $\det(Q_{ip}) = +1$.

به منظور تأمین حالتی خاص برای حرکت برهم‌نهی‌شده، معادله ۵-۱۰-۷ ممکن است

به‌طور فضایی انتگرال‌گیری شود که داریم:

$$\tilde{\chi}_i^{+}(x_j, t) = a_i(t) + Q_{im}(t)x_m \qquad (۵-۱۰-۸\text{الف})$$

یا

$$x_i^{+} = a_i + Q_{im}x_m \qquad (۵-۱۰-۸\text{ب})$$

که ممکن است بردار a_i به شکل زیر نوشته شود:

$$a_i(t) = c_i^{+}(t^{+}) - Q_{im}(t)c_m(t) \qquad (۵-۱۰-۹)$$

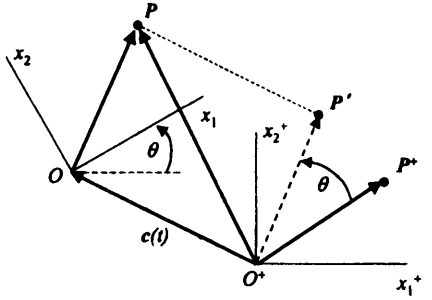
در نتیجه:

$$x_i^{+} = c_i^{+} + Q_{im}[x_m - c_m] \qquad (۵-۱۰-۱۰)$$

که:

$$Q_{im}Q_{in} = Q_{mi}Q_{ni} = \delta_{mn'} \quad \text{و} \quad \det(Q_{ij}) = ۱ \qquad (۵-۱۰-۱۱)$$

توسعه‌ای مشابه از حرکت برهم‌نهی‌شده را می‌توان با فرض دو مختصات کارتزین $Ox_۱x_۲x_۳$ و $O^{+}x^{+}_۱x^{+}_۲x^{+}_۳$ که توسط بردار $c_i(t)$ فاصله داشته و با انتقال مجاز مختصات تعریف شده و به‌وسیلهٔ Q_{im} چرخیده باشد را کسب کرد (مالورن ۱۹۶۹). حال به جای انتگرال‌گیری از معادله ۵-۱۰-۷ از آن مشتق می‌گیریم. حرکت برهم‌نهی را می‌توان به صورت:



شکل ۵ - ۲

تفاوت جزئی دستگاه مرجع $Ox_۱x_۲x_۳$ به $O^{+}x_۱^{+}x_۲^{+}x_۳^{+}$ به وسیلهٔ جسم صلب برهم‌نهی‌شده.

$$p_i^{+} = c_i(t) + Q_{im}(t)p_m \qquad (۵-۱۰-۱۲)$$

نوشت که بردار p^{+}_i و p_m به‌صورتی که در شکل ۵-۲ نشان داده شده، تعریف شده‌اند. در اینجا،

Q_{im} به سادگی ماتریس کسینوس هادی‌های بین $Ox_1x_2x_3$ و $O^+x^+_1x^+_2x^+_3$ است.

مثال ۵ ـ ۱۰ ـ ۱: نشان دهید حرکت برهم‌نهی‌شده جسم صلب که با معادلهٔ ۵-۱۰-۱۰ تعریف شده است، حفظ کنندهٔ زاویه و فاصله است.

حل: با توجه به مربع فاصله بین نقاط مادی X_A و Y_A به صورت عباراتی از حرکت برهم‌نهی‌شده داریم.

$$(x_i^+ - y_i^+)(x_i^+ - y_i^+) = Q_{im}\,(x_m - y_m)Q_{in}(x_n - y_n)$$
$$= Q_{im}Q_{in}(x_m - y_m)(x_n - y_n)$$

و از آنجا که Q_{im} متعامد است

$$(x_i^+ - y_i^+)(x_i^+ - y_i^+) = \delta_{mn}(x_m - y_m)(x_n - y_n)$$
$$= (x_m - y_m)(x_m - y_m)$$

که از خاصیت جایگذاری دلتا استفاده شده است، بنابراین فاصله در حرکت برهم‌نهی‌شده، حفظ شده است.

از سه نقطهٔ مادی، X_A، Y_A و Z_A، برای نشان دادن حفظ زوایا در حرکت برهم‌نهی‌شدهٔ جسم صلب استفاده شده است. فرض کنید θ^+ زاویهٔ بین بردارهای $x_i^+ - y_i^+$ و $x_i^+ - z_i^+$ باشد. با استفاده از تعریف ضرب نقطه‌ای داریم :

$$\cos\theta^+ = \frac{x_i^+ - y_i^+}{|x_n^+ - y_n^+|}\,\frac{x_i^+ - z_i^+}{|x_n^+ - z_n^+|}$$

توجه کنید که اندیس n در مخرج در جمع شرکت نمی‌کند، زیرا درون عملگر اندازه بردارند. با جایگذاری در معادله ۵-۱۰-۸ و بهره‌گیری از خاصیت متعامد بودن Q_{im} و استفاده از نتیجهٔ قسمت اول این مثال داریم:

$$\cos\theta^+ = \frac{Q_{im}(x_m - y_m)Q_{in}(x_n - z_n)}{|x_m - y_m|\,|x_n - z_n|}$$

$$= \frac{Q_{im}Q_{in}(x_m - y_m)(x_n - z_n)}{|x_m - y_m|\,|x_n - z_n|}$$

$$= \frac{\delta_{mn}(x_m - y_m)(x_n - z_n)}{|x_m - y_m|\,|x_n - z_n|}$$

$$= \frac{(x_m - y_m)(x_m - z_m)}{|x_m - y_m|\,|x_n - z_n|}$$

$$= \cos\theta$$

بعد از این مثال توجه خود را به چگونگی تأثیر حرکت برهم‌نهی‌شدهٔ جسم صلب بر سرعت محیط پیوسته معطوف می‌داریم. سرعت را در شکل برهم‌نهی‌شده برحسب مشتق زمانی نسبت به t^+ تعریف می‌کنیم.

$$v_i{}^+ = \dot{x}_i{}^+ = \frac{dx_i{}^+}{dt^+} \qquad (۵ - ۱۰ - ۱۳)$$

با استفاده از نتایج معادله ۵-۱۰-۸ و به کمک قاعدهٔ زنجیره‌ای، سرعت به صورت زیر داده می‌شود.

$$v_i{}^+ = \frac{d}{dt^+}\,[a_i(t) + Q_{im}(t)x_m]$$

$$= \frac{d}{dt}\,[a_i(t) + Q_{im}(t)x_m]\frac{dt}{dt^+}$$

با یادآوری این که $t^+ = t + a$، بنابر این واضح است که $dt/dt^+ = ۱$. به عنوان نتیجه‌ای از این مطلب، عبارتی برای سرعت تحت حرکت برهم‌نهی‌شده جسم صلب به وسیلهٔ مشتق زمانی گرفتن از جملهٔ درون پرانتز در معادله اخیر به دست می‌آید:

$$v_i{}^+ = \dot{a}_i(t) + \dot{Q}_{im}(t)x_m + Q_{im}(t)\dot{x}_m$$

$$= \dot{a}_i(t) + \dot{Q}_{im}(t)x_m + Q_{im}(t)v_m \qquad (۵ - ۱۰ - ۱۴)$$

تعریف می‌کنیم:

$$\Omega_{ij}(t) = \dot{Q}_{im}(t)Q_{jm}(t) \qquad (۵-۱۰-۱۵)$$

یا با نوشتن بعد از ضرب کردن به وسیلهٔ Q_{jk} داریم :

$$\Omega_{ij}(t)Q_{jk}(t) = \dot{Q}_{im}(t)Q_{jm}(t)Q_{jk}(t) = \dot{Q}_{ik}(t) \qquad (۵-۱۰-۱۶)$$

جایگذاری معادله ۵-۱۰-۱۶ در دومین معادله ۵-۱۰-۱۴ به رابطه‌ای برای میدان سرعت یک جسم محیط پیوسته تحت چرخش برهم‌نهی‌شده جسم صلب منجر می‌شود.

$$v_i^+ = \dot{a}_i + \Omega_{ij}Q_{jk}x_k + Q_{im}v_m \qquad (۵-۱۰-۱۷)$$

دقت کنید که Ω_{ij} متقارن - اریب است. با مشتق زمانی گرفتن از شرط متعامد بودن Q_{ij}، یعنی:

$$\frac{d}{dt}[Q_{im}Q_{in}] = \frac{d}{dt}[۱] = ۰$$

زمانی که مشتق گرفته شود، داریم :

$$\dot{Q}_{im}Q_{in} + Q_{im}\dot{Q}_{in} = ۰$$

و با استفاده از تعریف $\dot{Q}_{im}$ از معادله ۵-۱۰-۱۶ و جایگذاری در این عبارت نتیجه می‌شود :

$$Q_{im}[\Omega_{ji} + \Omega_{ij}]Q_{jm} = ۰$$

این معادله تنها در صورتی درست است که عبارت درون کروشه صفر باشد، یعنی :

$$\Omega_{ij} = -\Omega_{ji} \qquad (۵-۱۰-۱۸)$$

این حقیقت که Ω_{ij} متقارن - اریب است، به این معنی است که دارای بردار محوری با تعریف زیر است :

$$\omega_k = -\frac{۱}{۲}\varepsilon_{kij}\Omega_{ij} \qquad (۵-۱۰-۱۹)$$

که ممکن است به صورت معکوس شدهٔ زیر بیان شود:

$$\Omega_{ij} = -\varepsilon_{ijk}\omega_k \qquad (۵-۱۰-۲۰)$$

در مورد دینامیک جسم صلب، بردار محوری ω_k را به عنوان سرعت زاویه‌ای جسم می‌توان بیان کرد (مسئلهٔ ۵-۳۴ را ببینید). در استفادهٔ دیگر از مدل‌سازی اساسی، خاصیت کمیت‌های متفاوت سینماتیکی تحت حرکات برهم‌نهی‌شده جسم صلب مورد نیاز خواهد بود. در اینجا روند استخراج اثر حرکت برهم‌نهی جسم صلب بر تانسورهای گردابی و نرخ تغییر شکل تشریح خواهد شد.

با سرعت داده شده در معادله ۵-۱۰-۱۷ شروع می‌کنیم. با جایگذاری x_i با استفاده از معادله ۵-۱۰-۸ب داریم :

$$v_i^+ = \dot{a}_i + \Omega_{ij}[x_j^+ - a_j] + Q_{ij}v_j \qquad (۵-۱۰-۲۱\text{الف})$$

$$= Q_{ij}v_j + \dot{Q}_{im}x_m + \dot{a}_i - \Omega_{ij}a_j \qquad (۵-۱۰-۲۱\text{ب})$$

$$= Q_{ij}v_j + \dot{Q}_{im}x_m + c_i \qquad (۵-۱۰-۲۱\text{پ})$$

که از معادله ۵-۱۰-۱۵ برای نوشتن معادله ۵-۱۰-۲۱ب از ۵-۱۰-۲۱الف استفاده شده است. و از $c_i = \dot{a}_i - \Omega_{ij}a_j$ برای رسیدن از معادله ۵-۱۰-۲۱ب به ۵-۱۰-۲۱پ استفاده شده است. نوشتن سرعت در این شکل به ما امکان محاسبهٔ راحت‌تر گرادیان سرعت در شکل مرجع و به صورت برهم‌نهی‌شده را می‌دهد.

$$\frac{\partial v_i^+}{\partial x_m^+} = \Omega_{ij}\frac{\partial x_j^+}{\partial x_m^+} + Q_{ij}\frac{\partial v_j}{\partial x_m^+} \qquad (۵-۱۰-۲۲)$$

توجه کنید که:

$$\frac{\partial x_j^+}{\partial x_m^+} = \delta_{jm}$$

و

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_m^+} = \frac{\partial v_j}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial x_m^+} = \frac{\partial v_j}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial x_m^+}[Q_{kn}(x_k^+ - a_k)]$$

که آخرین جایگذاری از حل معادلهٔ ۵-۱۰-۸ب برای x_k^+ به دست می‌آید. استفاده از این نتایج به همراه خاصیت جایگذاری دلتا در معادله ۵-۱۰-۲۲ نتیجه می‌دهد:

$$\frac{\partial v_i^+}{\partial x_m^+} = \Omega_{im} + Q_{ij}Q_{mn}v_{j,n} = \Omega_{im} + Q_{ij}Q_{mn}[D_{jn} + W_{jn}] \qquad (۵-۱۰-۲۳)$$

که D_{jn} و W_{jn} به ترتیب نرخ تغییر شکل و گردابی هستند. در حرکت برهم‌نهی‌شده، ممکن است گرادیان سرعت به قسمت‌های متقارن و متقارن - اریب تجزیه شود.

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_m}^+ = D_{im}{}^+ + W_{im}{}^+$$

که نرخ تغییر شکل و گردابی در چارچوب جسم صلب برهم‌نهی‌شده هستند. از روابط ۵-۱۰-۲۳ و ۵-۱۰-۱۸ واضح است که

$$D_{ij}{}^+ = Q_{im}Q_{jn}D_{nm} \qquad (۲۴ - ۱۰ - ۵)$$

و

$$W_{ij}{}^+ = \Omega_{ij} + Q_{im}Q_{jn}W_{mn} \qquad (۲۵ - ۱۰ - ۵)$$

با به یاد آوردن روابط معرفی شده انتقال کلی در فصل دوم مورد انتظار است که بردارها و تانسورهای مرتبهٔ دوم براساس فرمول‌های کلی انتقال یابند،

$$u_i{}^+ = Q_{im}u_m\,, \qquad u_{ij}{}^+ = Q_{im}Q_{jn}u_{mn}$$

اما نتایج قبلی به ما نشان می‌دهند که این گونه نیست. سرعت و گردابی به روش پیچیده‌تری انتقال می‌یابند. همهٔ آنچه باقی مانده، آماده شدن برای پژوهش تئوری روابط اساسی تعیین چگونگی انتقال تنش تحت حرکت برهم‌نهی‌شدهٔ جسم صلب است. انتقال بردار تنش و مؤلفه‌های آن به راحتی کمیت‌های سینماتیکی توضیح داده شده در بالا نیستند. این نتیجه‌ای از شروع با بردار تنش که یک نیرو است می‌باشد. فرض شده است که نیروها به عنوان بردارهای عمومی به شکل زیر انتقال یابند.

$$t_i = Q_{ij}t_j$$

از آنجا که تنش مقدار نیرو بر واحد سطح است، با نگاهی به عقب و نتایج سینماتیکی، لازم است چگونگی انتقال سطح دیفرانسیلی تحت حرکت برهم‌نهی‌شده جسم صلب تعیین شود. یک المان دیفرانسیلی از سطح در شکل جاری ممکن است به صورت زیر نوشته شود:

$$da_k = J\frac{\partial X_K}{\partial x_k}\,dA_K$$

تحت حرکت برهم‌نهی‌شده جسم صلب المان دیفرانسیلی سطح به صورت زیر است:

$$da_k^+ = da^+ n_k^+ = J^+ \frac{\partial X_K}{\partial x_k^+} dA_K \qquad (۲۶ - ۱۰ - ۵)$$

که کمیت‌های مرجع تغییر نمی‌یابند، da^+ سطح بسیار کوچک است و n_k^+ بردار نرمال یکهٔ سطح است و همه در حالت حرکت برهم‌نهی‌شده جسم صلب بیان شده‌اند. در آینده این عبارت در چند مرحله کاهش خواهد یافت.

نخست، می‌توان نشان داد که انتقال ژاکوبین براساس $J^+ = J$ است (مسئله ۵-۳۰ را ببینید). دوم، کمیت $\frac{\partial X_k}{\partial x_k^+}$ معکوس گرادیان تغییر شکل است، همان طور که در چارچوب چرخیده برهم‌نهی‌شده جسم صلب اظهار شد. با کاربرد قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم :

$$\frac{\partial X_K}{\partial x_k^+} = \frac{\partial X_K}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x_k^+} \qquad (۲۷ - ۱۰ - ۵)$$

آخرین جملهٔ این معادله براساس معادله ۵-۱۰-۸ب و حل آن برای x_k به وسیلهٔ ضرب آن در Q_{ik} برآورد شده است. دیفرانسیل‌گیری از نتیجه نشان می‌دهد که آخرین جملهٔ معادله ۵-۱۰-۲۷ همان Q_{ik} است، بنابراین :

$$\frac{\partial X_K}{\partial x_k^+} = \frac{\partial X_K}{\partial x_j} Q_{kj}$$

یا

$$(F_{kK}^+)^{-1} = F_{jK}^{-1} Q_{kj} \qquad (۲۸ - ۱۰ - ۵)$$

با جایگذاری نتایج از پاراگراف قبلی در معادله ۵-۱۰-۲۶ نتیجه می‌شود:

$$da_k^+ = da^+ n_k^+ = Q_{kj} da_j = Q_{kj} (da) n_j \qquad (۲۹ - ۱۰ - ۵)$$

به توان ۲ رساندن دومین و چهارمین عبارت از معادله بالا و مساوی هم قرار دادن آنها نتیجه می‌دهد $(da^+)^2 = (da)^2$ و از آنجا که مساحت همیشه مثبت است:

$$da^+ = da \qquad (۳۰ - ۱۰ - ۵)$$

با استفاده از روابط ۵-۱۰-۲۹ و ۵-۱۰-۳۰ واضح است که:

$$n_k^+ = Q_{kj} n_j \qquad (۵ - ۱۰ - ۳۱)$$

آنچه باقی مانده، تعیین چگونگی مؤلفه‌های انتقال یافتهٔ تنش تحت حرکت برهم‌نهی‌شده جسم صلب است. تمام نتایج برای یافتن این انتقال مهیاست. در چارچوب حرکت برهم‌نهی‌شدهٔ جسم صلب، بردار تنش t_i^+ را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$t_i^+ = \sigma_{ij}^+ n_j^+ = \sigma_{ij}^+ Q_{jk} n_k \qquad (۵ - ۱۰ - ۳۲)$$

که معادلهٔ ۵-۱۰-۳۱ استفاده شده است. انتقال فرض شده برای بردار تنش منجر می‌شود به :

$$t_i^+ = Q_{ij} t_j = Q_{ij} \sigma_{jk} n_k \qquad (۵ - ۱۰ - ۳۳)$$

که همچون معادله ۵-۱۰-۳۲، فرمول تنش کوشی استفاده شده است. مساوی قرار دادن بردار تنش در چارچوب مرجع جسم صلب برهم‌نهی‌شده منجر می‌شود به:

$$(\sigma_{ij}^+ Q_{jk} - Q_{ij}\sigma_{jk}) n_k = ۰$$

که برای هر n_k برقرار است، بنابراین جملات درون پرانتز باید مساوی صفر باشند. ضرب جملات باقیمانده در Q_{mk} عبارت زیر را که مؤلفه‌های انتقال یافتهٔ تنش تحت حرکت برهم‌نهی‌شده جسم صلب است، نتیجه می‌دهد:

$$\sigma_{ij}^+ = Q_{im} Q_{jn} \sigma_{mn} \qquad (۵ - ۱۰ - ۳۴)$$

در پلاستیسیته، همچون فرمولاسیون صریح اجزای محدود، پاسخ اساسی تنش به‌طور معمول به صورت افزایشی فرموله شده است، یعنی نرخ تنش استفاده شده است. نرخ تنش باید قابل مشاهده باشد، به این معنی که :

$$\dot{\sigma}_{ij}^+ = \dot{Q}_{im} Q_{jn} \sigma_{mn} + Q_{im} \dot{Q}_{jn} \sigma_{mn} + Q_{im} Q_{jn} \dot{\sigma}_{mn} \qquad (۵ - ۱۰ - ۳۵)$$

این نتیجه مهم است، زیرا نرخ تنش همانطورکه در معادلهٔ ۵-۱۰-۳۵ نشان داده شده است به عنوان تابع پاسخ یا در لیست متغیرهای مستقل تابع پاسخ، استفاده می‌شود. خوشبختانه، چندین راه برای بیان شکلی از نرخ تنش در رفتار تغییرناپذیر وجود دارد. یک راه برای کسب نرخ تنش واقعی با استفاده از تانسور گردابی W_{ij} به دست می‌آید. با استفاده از روابط ۵-۱۰-۲۵ ۵-۱۰-۱۵ و حل برای Q_{ij} برحسب جملات گردابی

$$\dot{Q}_{ip} = W_{ij}{}^{+}Q_{jp} - Q_{im}W_{mp} \qquad (۳۶ - ۱۰ - ۵)$$

که پس از جایگذاری در معادله ۵-۱۰-۳۵ به دست می‌آوریم:

$$\sigma_{ij}{}^{+} = W_{iq}{}^{+}Q_{qm}\sigma_{mn}Q_{jn} + Q_{im}\sigma_{mn}Q_{qn}W_{iq}{}^{+} \qquad (۳۷ - ۱۰ - ۵)$$

$$+ Q_{im}[\dot{\sigma}_{mn} - W_{nq}\sigma_{mq} - W_{mq}\sigma_{qn}]Q_{jn}$$

قرار دادن همهٔ کمیت‌هایی که به حرکت برهم‌نهی‌شده جسم صلب مربوط می‌شود، در سمت چپ تساوی و استفاده از معادلهٔ ۵-۱۰-۳۴ نتیجه می‌شود:

$$\sigma_{ij}{}^{+} - W_{iq}{}^{+}\sigma_{qj}{}^{+} - \sigma_{iq}{}^{+}W_{jq}{}^{+} = Q_{im}[\dot{\sigma}_{mn} - W_{mq}\sigma_{qn} - \sigma_{mq}W_{nq}]Q_{jn} \qquad (۳۸ - ۱۰ - ۵)$$

واضح است که کمیت $\dot{\sigma}_{mn} - W_{nq}\sigma_{mq} - W_{mq}\sigma_{qn}$ حقیقی است که ما را به تعریف **نرخ تنش جومان** *(Jaumann stress rate)* هدایت می‌کند.

$$\sigma_{ij}{}^{\nabla} = \dot{\sigma}_{ij} - W_{iq}\sigma_{qj} - \sigma_{iq}W_{jq} \qquad (۳۹ - ۱۰ - ۵)$$

تعریف نرخ‌های تنش متعدد دیگری که شرط حقیقی بودن را تأمین می‌کند، وجود دارد. **نرخ تنش گرین ـ نقدی** *(Green - Naghdi Stress rate)* به صورت زیر است:

$$\sigma_{ij}{}^{\nabla} = \dot{\sigma}_{ij} + \Omega_{iq}\sigma_{qj} + \sigma_{iq}\Omega_{jq} \qquad (۴۰ - ۱۰ - ۵)$$

که Ω_{iq} در معادله ۵-۱۰-۱۵ تعریف شده است.

۵ - ۱۱ محدودیت‌های اعمال شده بر معادله‌های اساسی به واسطهٔ تغییرناپذیری

در بخش ۵-۹ دیده شد که قانون دوم ترمودینامیک محدودیت‌هایی را در شکل توابع پاسخ اساسی قرار می‌دهد. تغییر نکردن چارچوب مادی، یا حرکت برهم‌نهی‌شده جسم صلب نیز محدودیت‌هایی بر متغیرهای مستقل تابع پاسخ دارد، همان طور که در اصل حضور یکسان گفته شد. در بخش ۵-۱۰ رفتار بسیاری از کمیت‌های مورد استفاده در مکانیک محیط پیوسته تحت حرکت برهم‌نهی‌شده جسم صلب ارائه شد. در این بخش به بررسی و آزمایش توابع پاسخ اجسام تحت حرکت برهم‌نهی‌شده جسم صلب می‌پردازیم. بویژه نظر خود را به محدودیت‌های اعمال شده بر متغیرهای مستقل اساسی که در معادله ۵-۹-۲ داده شده، معطوف می‌کنیم.

تحت حرکت برهم‌نهی‌شده جسم صلب، اعداد بدون تغییر باقی می‌مانند و می‌توان نوشت:

$$u^+ = u\,, \qquad \eta^+ = \eta\,, \qquad \theta^+ = \theta \qquad (۵-۱۱-۱)$$

در این مورد، از روابط ۵-۸-۹الف تا ۵-۸-۹ج واضح است که ψ ،χ و ξ تحت حرکت برهم‌نهی‌شده جسم صلب بدون تغییر باقی می‌ماند. کمیت‌های باقیماندهٔ توابع پاسخ معادلهٔ ۵-۹-۲ و متغیرهای مستقل آنها با روش‌های مختلف از حرکت برهم‌نهی‌شدهٔ جسم صلب تأثیر می‌پذیرند. تحت چنین حرکتی این توابع به شکل زیر انتقال می‌یابند (برخی از این روابط از بخش ۵-۱۰ با همان شکل یا با شکل کمی متفاوت تکرار شده‌اند):

$$F_{iA}{}^+ = Q_{ij}F_{jA} \qquad (۵-۱۱-۲\text{الف})$$

$$\dot{F}_{iA}{}^+ = Q_{ij}\dot{F}_{jA} + \Omega_{ij}Q_{jk}F_{kA} \qquad (۵-۱۱-۲\text{ب})$$

$$L_{im}{}^+ = Q_{ij}L_{jn}Q_{nm} + \Omega_{im} \qquad (۵-۱۱-۲\text{پ})$$

$$\sigma_{ij}{}^+ = Q_{ik}\sigma_{kl}Q_{lj} \qquad (۵-۱۱-۲\text{ت})$$

$$q_i{}^+ = Q_{ij}q_j \qquad (۵-۱۱-۲\text{ث})$$

$$g_i{}^+ = Q_{ij}g_j \qquad (۵-۱۱-۲\text{ج})$$

که Ω_{ij} تانسور متقارن - اریب است و در معادلهٔ ۵-۱۰-۱۵ تعریف شده است.

روابط اساسی حقیقی‌اند اگر و فقط اگر تحت حرکت برهم‌نهی‌شدهٔ جسم صلب به صورت زیر انتقال یابند:

$$u^+(\eta^+\,, F_{iA}{}^+) = u(\eta\,, F_{iA}) \qquad (۵-۱۱-۳\text{الف})$$

$$\theta^{+}(\eta^{+}, F_{iA}{}^{+}) = \theta(\eta, F_{iA}) \qquad (۵-۱۱-۳ب)$$

$$\sigma_{ij}{}^{+}(\eta^{+}, F_{mA}{}^{+}) = Q_{ik}\sigma_{kl}(\eta, F_{mA})Q_{Lj} \qquad (۵-۱۱-۳پ)$$

$$q_i{}^{+}(\eta^{+}, F_{kA}{}^{+}, g_k{}^{+}, L_{kl}{}^{+}) = Q_{im}q_m(\eta, F_{kA}, g_k, L_{kl}) \qquad (۵-۱۱-۳ت)$$

در نوشتن این معادلات توجه شده که به دلیل فرض پیوستگی می‌توان نقش η و θ را جایگزین کرد، همچنین محدود بودن لیست متغیرهای مستقل معادلات ۵-۱۱-۳الف تا ۵-۱۱-۳پ به انتروپی (یا درجه حرارت) و گرادیان تغییر شکل نشان داده شده که حالتی کلی است (کلمن و میزل، ۱۹۶۴). در نهایت ممکن است مجموعه‌ای از توابع اساسی در جملاتی برحسب توابع پاسخ متفاوتی باشد. برای مثال، مواد الاستیک که در بخش ۵-۹ به آنها توجه شد، توابع پاسخ مسلمی برحسب ψ ،η ،σ_{ij} و θ_i داشتند. با وجود این، بدیهی است که برحسب تابعی از u ،θ ،σ_{ij} و q_i نیز هستند.

به عنوان نمونه‌ای از اینکه چگونه معادلهٔ ۵-۱۱-۳ متغیرهای مستقل را محدود می‌کند، به سیالی نظر می‌افکنیم که فرض شده تابع پاسخ تنش آن تابعی از دانسیتهٔ φ سرعت v_i و گرادیان سرعت L_{ij} باشد. با این فرض محدودیت‌های معادله ۵-۱۱-۳پ خواهد بود

$$\sigma_{ij}{}^{+}(\rho^{+}, v_k{}^{+}, D_{mn}{}^{+}, W_{mn}{}^{+}) = Q_{ip}\sigma_{pl}(\rho, v_k, D_{mn}, W_{mn})Q_{lj} \qquad (۵-۱۱-۴)$$

که گرادیان سرعت به قسمت‌های متقارن و متقارن - اریب به ترتیب D_{mn} و W_{mn} تجزیه شده است. با استفاده از نتایج مسئلهٔ ۵-۳۱ و معادلات ۵-۱۰-۲۱پ، ۵-۱۰-۲۴ و ۵-۱۰-۲۵ درمی‌یابیم که:

$$\tilde{\sigma}_{ij}(\rho, v_k + c_k, Q_{mp}D_{pq}Q_{qn}, Q_{mp}W_{pq}Q_{qn} + \Omega_{mn}) = Q_{ip}\tilde{\sigma}_{pl}(\rho, v_k, D_{mn}, W_{mn})Q_{lj} \qquad (۵-۱۱-۵)$$

از آنجا که معادلهٔ ۵-۱۱-۵ برای هر حرکتی باید برقرار باشد، چرخشی معین از جسم صلب ممکن است برای کاهش فرض اساسی معادله ۵-۱۱-۴ انتخاب شود. به این منظور فرض کنید که $Q_{ij} = \delta_{ij}$ و لذا $\dot{Q}_{ij} = 0$. با استفاده از این حرکت و معادله ۵-۱۱-۵ داریم :

$$\tilde{\sigma}_{ij}(\rho, v_k + c_k, D_{mn}, W_{mn}) = \tilde{\sigma}_{ij}(\rho, v_k, D_{mn}, W_{mn}) \qquad (۵-۱۱-۶)$$

با توجه به اینکه معادله ۵-۱۰-۱۵ استفاده شده است. در این حالت، بردار c_k به آسانی تبدیل به $\dot{a}_K$ می‌شود که مشتق زمانی فاکتور انتگرال‌گیر حرکت برهم‌نهی‌شده جسم صلب است (معادله ۵-۱۰-۸ را ببینید). چنانچه تابع تنش دارای بردار سرعت به عنوان متغیر مستقل باشد، این حالت اختیاری امکان نقض معادلهٔ ۵-۱۱-۶ را به وجود می‌آورد.

بنابراین، سرعت از لیست متغیرهای مستقل برای تنش باید حذف شود، پس آنچه باقی ماند:

$$\sigma_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij}(\rho\ ,\ D_{mn}\ ,\ W_{mn}) \qquad (۵-۱۱-۷)$$

دوباره براساس تابع پاسخ اصلاح شده معادلهٔ ۵-۱۱-۷، شرط تغییرناپذیری تحت حرکت برهم‌نهی‌شدهٔ جسم صلب را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\tilde{\sigma}_{ij}(\rho\ ,\ Q_{mp}D_{pq}Q_{qn}\ ,\ Q_{mp}W_{pq}Q_{qn} + \Omega_{mn}) = Q_{ip}\tilde{\sigma}_{pl}(\rho\ ,\ D_{mn}\ ,\ W_{mn})Q_{lj} \qquad (۵-۱۱-۸)$$

که برای همهٔ حرکت‌ها باید برقرار باشد. همچون قبل حرکتی را که $Q_{ij} = \delta_{ij}$ و در این حالت $\Omega_{ij} \neq 0$ باشد، برمی‌گزینیم. با جایگذاری این روابط در معادلهٔ ۵-۱۱-۸ داریم:

$$\tilde{\sigma}_{ij}(\rho\ ,\ D_{mn}\ ,\ W_{mn} + \Omega_{mn}) = \tilde{\sigma}_{ij}(\rho\ ,\ D_{mn}\ ,\ W_{mn}) \qquad (۵-۱۱-۹)$$

همان طور که لازمهٔ تغییرناپذیری تنش است. برای هر حرکتی این صحیح است که قسمت متقارن - اریب گرادیان سرعت نباید متغیر مستقل باشد.

با کاربرد حرکت برهم‌نهی‌شدهٔ جسم صلب برای تابع پاسخ دو مرتبه کاهش یافته به اطلاعات بیشتری خواهیم رسید. در این حالت،

$$\tilde{\sigma}_{ij}(\rho\ ,\ Q_{mp}D_{pq}Q_{qn}) = Q_{ip}\tilde{\sigma}_{pl}(\rho\ ,\ D_{mn})Q_{lj} \qquad (۵-۱۱-۱۰)$$

از آنجاکه Q_{ij} تانسور متعامد مقتضی است و این معادله در صورت جایگزینی Q_{ij} با مقدار منفی آن نیز برقرار است، تنش باید تابعی ایزوتروپیک از D_{mn} باشد. حال شکل معمول‌تر تابع تانسوری ایزوتروپیک مرتبهٔ دوم از D_{mn} به عنوان پاسخ تنش ارائه می‌شود:

$$\sigma_{ij} = -p(\rho)\delta_{ij} + \lambda(\rho)D_{kk}\delta_{ij} + 2\mu(\rho)D_{ij} \qquad (۵ - ۱۱ - ۱۱)$$

که φ ، γ و μ توابعی از چگالی و بیانگر ضریب ویسکوزیته نیز هستند.

۵ - ۱۲ معادلات اساسی

قوانین تعادل مطلق و معادلات میدان حاصل از آن که قبلاً در این فصل توسعه یافت به تمامی محیط‌های پیوسته کاربرد دارد. اما چیزی راجع به پاسخ مواد خاص به نیرو یا بارگذاری حرارتی گفته نشده است. برای بدست آوردن این نیاز ***معادلات اساسی*** را معرفی می‌کنیم، که خواص مکانیکی و حرارتی مواد خاص را براساس ساختار داخلشان مشخص می‌کند. از نظر ریاضی، مفید بودن این معادلات اساسی در آن است که روابط بین معادلات میدان سینماتیکی، مکانیکی و حرارتی را توضیح می‌دهد و تشکیل معادلات برای کامل مطرح شدن مسائل مکانیک محیط‌های پیوسته را فراهم می‌سازد. از نظر فیزیکی معادلات اساسی انواع مواد ایده‌آل را که به‌عنوان مدل برای رفتار مواد حقیقی بکار برده می‌شوند تعریف می‌کنند. هر چند که ، امکان ندارد یک معادله نوشت که قابلیت نشان دادن یک ماده در تمامی انواع کاربردش باشد. چون خیلی از مواد تحت تغییرات سطوح بارگذاری رفتارهای کاملاً متفاوتی از خود نشان می‌دهد. مثل پاسخ الاستیک - پلاستیک ناشی از افزایش تنش. پس در این مفهوم شاید بهتر باشد در فکر معادلات اساسی به‌عنوان نماینده ***رفتار*** خاص ترجیح بر ***مواد*** خاص باشیم.

در بخش‌های قبلی این فصل، فرضیات اساسی بیان شده‌اند. در مقیاس بنیانی، امکان بحث درباره جزئیات استخراج تمام مدلهای اساسی که انتظار می‌رود یک مهندس با آن آشنا باشد وجود ندارد. در عوض، پشتوانه نظری و تعاریف مرتبط با آنها ارائه شده است و علاوه برآن چند حالت خاص مورد بررسی قرار گرفته است که موجب می‌شود دانشجویان مفاهیم ارائه شده را جذب نمایند. چون تنها به تعداد کمی از مدل‌های اساسی مطرح در مفاهیم بنیادین توجه شده است، این بخش اختصاص به مروری بر معادلات اساسی دارد. این مرور به صورت یک مقدمه‌ای برای فصل‌های بعدی، هنگامی که مدلهای اساسی مختلف به عنوان کاربردی از مکانیک محیط‌های پیوسته موردبحث قرار می‌گیرند عمل خواهد کرد.

فهرست خلاصه‌ای از چند معادله اساسی معروف در زیر ارائه شده است :

(الف) معادلات تنش - کرنش برای یک جسم ***الاستیک خطی*** با فرض کرنش‌های بسیار کوچک

$$\sigma_{ij} = C_{ijkm}\, \varepsilon_{km} \qquad (۵ - ۱۲ - ۱)$$

که در آن C_{ijkm} ثابت‌های الاستیک هستند که خواص جسم را نشان می‌دهند. برای رفتار **همسانگرد** معادله ۵ - ۱۲ - ۱ شکل خاص زیر را می‌گیرد.

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij}\, \varepsilon_{kk} + ۲\, \mu \varepsilon_{ij} \qquad (۵ - ۱۲ - ۲)$$

که در آن λ و μ ضرایبی هستند که خواص الاستیک ماده را بیان می‌کند.

(ب) **شاره چسبنده خطی**

$$\tau_{ij} = K_{ijmn}\, D_{mn} \qquad (۵ - ۱۲ - ۳)$$

که در آن τ_{ij} تنش برشی در شاره‌ها و ثابت‌های K_{ijmn} خواص چسبندگی را نشان می‌دهد. برای یک **شاره نیوتنی**

$$\tau_{ij} = \lambda^* \delta_{ij}\, D_{kk} + ۲\, \mu^*\, D_{ij} \qquad (۵ - ۱۲ - ۴)$$

که در آن λ^* و μ^* ضرایب چسبندگی هستند

(پ) معادله تنش - کرنش پلاستیک

$$d\varepsilon_{ij}^{P} = S_{ij}\, d\lambda \qquad (۵ - ۱۲ - ۵)$$

که در آن $d\varepsilon^{P}_{ij}$ نمو کرنش پلاستیک، S_{ij} تنش انحراف ، و $d\lambda$ یک ثابت تناسب است.

(ت) معادلات *اپراتور دیفرانسیلی ویسکوالاستیک خطی*

$$\{ P \}\, S_{ij} = ۲ \{ Q \}\, \eta_{ij} \qquad (۵ - ۱۲ - ۶ \text{الف})$$

$$\sigma_{ii} = ۳\, K \varepsilon_{ii} \qquad (۵ - ۸۱۲ - ۶ \text{ب})$$

که در آن $\{ P \}$ و $\{ Q \}$ اپراتورهای دیفرانسیل زمان به‌صورت زیر هستند.

$$\{ P \} = \sum_{i=0}^{N} p_i \frac{\partial^i}{\partial t^i} \qquad (۵ - ۱۲ - ۷ \text{الف})$$

$$\{ Q \} = \sum_{i=0}^{M} q_i \frac{\partial^i}{\partial t^i} \qquad (۵ - ۱۲ - ۷ \text{ب})$$

که در آن ضرایب p_i و q_i (الزاماً ثابت نیستند) خواص ویسکوالاستیک را نشان می‌دهند. همچنین در اینجا K **مدول حجمی** می‌باشد باز هم توجه شود که این جفت معادله بطور جداگانه پاسخ‌های انحرافی و حجمی را مشخص می‌کنند.

(ث) معادلات ***انتگرالی ویسکوالاستیک خطی***

$$\eta_{ij} = \int_0^t \psi_s (t - t') \frac{\partial S_{ij}}{\partial t'} dt' \qquad (۵ - ۱۲ - ۸ \text{الف})$$

$$\varepsilon_{ii} = \int_0^t \psi_v (t - t') \frac{\partial \sigma_{ii}}{\partial t'} dt' \qquad (۵ - ۱۲ - ۸ \text{ب})$$

که در آن خواص نشان داده شده توسط ψ_s و ψ_v به‌ترتیب ***توابع خزش برشی و حجمی*** می‌باشد.

برای تشکیل معادلات در مسائل مناسب مطرح شدهٔ مکانیک محیط‌های پیوسته ، به معادلات میدان همراه با آنچه معادلات حالت نیاز دارند، به اضافه معادلات اساسی مقتضی و شرایط مرزی احتیاج داریم. به‌عنوان نقطه مرجع مجدداً به‌صورت گروهی ، معادلات مهم میدان در هر دو نمادگذاری شاخصی و نمادین را فهرست می‌کنیم.

(الف) معادله پیوستگی (معادله ۵ - ۳ - ۷)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_k)_{,k} = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla . (\rho \mathbf{v}) = 0 \qquad (۵ - ۱۲ - ۹)$$

(ب) معادلات حرکت (معادله ۵ - ۴ - ۴)

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i \quad \text{یا} \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \dot{\mathbf{v}} \qquad (۱۰ - ۸ - ۵)$$

(پ) معادله انرژی (معادله ۵ - ۷ - ۱۲)

$$\rho \dot{u} - \sigma_{ij} D_{ij} - \rho r + q_{i,i} = ۰ \quad \text{یا} \quad \rho \dot{u} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \rho r + \nabla \cdot \mathbf{q} = ۰ \qquad (۱۱ - ۸ - ۵)$$

اگر فرض کنیم که نیروهای حجمی b_i و منابع حرارتی‌گسترده r توضیح داده شده‌اند، مجموعه فوق شامل پنج معادله مستقل شامل **چهارده** مجهول ، مشخصاً ρ , v_i , σ_{ij} , q_i و u می‌باشد. بعلاوه ، در یک وضعیت حرارتی غیرهمسان، آنتروپی s و میدان درجه‌حرارت $T = T(\mathbf{x}, t)$ باید بحساب آورده شوند. برای نظریه حرارتی غیرهمسان، یازده معادله مرتبط با پنج معادله میدان فهرست شده در فوق نیاز است. از این‌ها ، شش معادله اساسی سه معادله هدایت حرارتی (قانون فوریه) و دو معادله حالت می‌باشند.

اگر میدان‌های مکانیکی و حرارتی غیرکوپل و شرایط حرارتی همسان ارجح باشد معادله پیوستگی همراه با معادلات حرکت و شش معادله اساسی یک مجموعه معین ده معادله سینماتیکی مکانیکی برای ده مجهول ρ , v_i و σ_{ij} را فراهم می‌کند. این‌ها مسائل محیط‌های پیوسته ساده‌ای هستند که در فصل شش بررسی خواهیم کرد.

منابع

Carlson, D. E. (1984), "Linear thermoelasticity," in S. Flugge's *Handbuch der Physik*, Vol. II (edited by C. Truesdell), Springer-Verlag, pp. 297–345.

Coleman, B. D. and Noll, W. (1963), "The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity," *Arch. Rational Mech. Anal.*, Vol. 13, pp. 167–178 (4).

Coleman, B. D. and Mizel, V. J. (1964), "Existence of caloric equations of state in thermodynamics," *J. Chem. Phys.*, Vol. 40, pp. 1116–1125 (4).

Green, A. E. and Naghdi, P. M., (1979), "A note on invariance under superposed rigid body motions," *J. of Elasticity*, Vol. 9, pp. 1–8.

Malvern, L. E. (1969), *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ.

Naghdi, P. M. (1984), "The theory of shells and plates," in S. Flugge's *Handbuch der Physik*, Vol. II (edited by C. Truesdell), Springer-Verlag, pp. 425–640.

Van Wylen, G. J. and Sonntag, R. E. (1965), *Fundamentals of Classic Thermodymanics*, Wiley, Inc., New York.

مسائل

۵ - ۱ مشتق مادی شار با خواص برداری Q^*_i که از مساحت فضایی S عبور می‌کند را تعیین کنید. مخصوصاً نشان دهید که معادله زیر در توافق با معادله ۵ - ۲ - ۵ می‌باشد.

$$\frac{d}{dt}\int_S Q^*_i\, n_i\, dS = \int_S (\dot{Q}^*_i + Q^*_i\, v_{k,k} - Q^*_k\, v_{i,k})\, n_i\, dS$$

۵ - ۲ خواص $P^*_{ij...}$ در معادله ۵ - ۲ - ۱ عدد یک است در نتیجه انتگرال در آن معادله ، حجم لحظه‌ای V را نمایش می‌دهد. نشان دهید در این حالت

$$\dot{P}_{ij...} = \frac{d}{dt}\int_V dV = \int_V v_{i,i}\, dV$$

۵ - ۳ تساوی زیر را بررسی کنید.

$$\varepsilon_{ijk}\, a_{k,j} = ۲\,(\dot{w}_i + w_i v_{j,j} - w_j v_{i,j})$$

و با استفاده از این تساوی و همچنین نتیجه مسئله ۵ - ۱ ، ثابت کنید که مشتق مادی شار چرخش برابر است با نصف شار کرل شتاب ، یعنی نشان دهید.

$$\frac{d}{dt}\int_S w_i\, n_i\, dS = \frac{۱}{۲}\int_S \varepsilon_{ijk}\, a_{k,j}\, n_i\, dS$$

۵ - ۴ با استفاده از قضیه دیورژانس گوس و همچنین تساوی

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} = \frac{۱}{۲}\,\varepsilon_{ijk}\, a_{k,j} - \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{kmq}\,(w_m\, v_q)_{,j}$$

نشان دهید که

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V w_i\, dV = \int_S (\varepsilon_{ijk}\, a_k + w_j\, v_i - w_i\, v_j)\, n_j\, dS$$

۵ - ۵ نشان دهید که مشتق مادی چرخش ماده مشتمل بر حجم V عبارت است از

$$\frac{d}{dt}\int_V w_i\, dV = \int_S \left(\frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk}\, a_k + w_j\, v_i\right) n_j\, dS$$

۵ - ۶ میدان سرعت به‌صورت زیر ارائه شده است.

$$v_1 = ax_1 - bx_2$$
$$v_2 = bx_1 - ax_2$$
$$v_3 = c\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

که در آن a , b و c ثابت‌ها هستند. تعیین کنید

(الف) آیا معادله پیوستگی تامین می‌شود ؟

(ب) آیا حرکت ایزوکریک است ؟

پاسخ : (الف) فقط وقتی که $\rho = \rho_0\, e^{-2at}$ (ب) فقط اگر $a = 0$

۵ - ۷ برای یک محیط پیوسته خاص در حال سکون تنش توسط رابطه زیر داده شده است.

$$\sigma_{ij} = -p_0\, \delta_{ij}$$

که در آن p_0 یک ثابت است. با استفاده از معادله پیوستگی نشان دهید که برای این حالت تنش را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد.

$$\sigma_{ij}\, D_{ij} = p_0\, \dot{\rho} / \rho$$

۵ - ۸ حرکت $x_i = (1 + t / k)\, X_i$ را در نظر بگیرید. که در آن k یک ثابت است. از اصل بقای جرم و شرط اولیه $\rho = \rho_0$ در لحظه $t = 0$، ρ را به‌صورت تابعی از ρ_0 , t و k تعیین کنید

پاسخ : $$\rho = \frac{\rho_0\, k^3}{(k + t)^3}$$

۵ - ۹ با ترکیب معادلات ۵ - ۳ - ۱۰ ب و ۵ - ۳ - ۶ ، نتیجه ارائه شده در معادله ۴ - ۱۱ - ۶ را بررسی کنید.

۵ - ۱۰ با استفاده از تساوی

$$\varepsilon_{ijk}\, a_{kj} = ۲\,(\dot{w}_i + w_i\, v_{j,j} - w_j\, v_{i,j})$$

و همچنین معادله پیوستگی نشان دهید که

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{w_i}{\rho}\right) = \frac{\varepsilon_{ijk}\, a_{kj} + ۲\, w_j\, v_{ij}}{۲\,\rho}$$

۵ - ۱۱ معادلات حرکت را بیان کنید و از آنها با استفاده از مشتق مادی

$$\dot{v}_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j\, v_{i,j}$$

و معادله پیوستگی ، نشان دهید که

$$\frac{\partial\,(\rho v_i)}{\partial t} = (\sigma_{ij} - \rho\, v_i\, v_j)_{,j} + \rho b_i$$

۵ - ۱۲ شکلی از معادلات حرکت را تعیین کنید اگر مولفه‌های تنش عبارت باشند از $\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij}$ که در آن $p = p\,(\mathbf{x}\,,\,t)$ است.

پاسخ : $\rho a_i = -\,p_{,i} + \rho b_i$

۵ - ۱۳ یک محیط پیوسته مادی دارای معادله اساسی

$$\sigma_{ij} = \alpha\delta_{ij}\, D_{kk} + ۲\,\beta\, D_{ij}$$

است که در آن α و β ثابت‌ها هستند. معادلات حرکت را برحسب مشتقات سرعت برای این ماده تعیین کنید.

پاسخ : $\rho\dot{v}_i = \rho b_i + (\alpha + \beta)\, v_{j,ij} + \beta v_{i,jj}$

۵ - ۱۴ فرض کنید که ممان‌های گسترده جسم m_i بر یک محیط پیوسته در حال حرکت اعمال می‌شود، نشان دهید که معادلات حرکت هنوز در شکل معادله ۵ - ۴ - ۴ معتبر است اما اصل اندازه حرکت

زاویه‌ای اکنون مستلزم

$$\varepsilon_{ijk}\,\sigma_{jk} + m_i = ۰$$

است و می‌رساند که تانسور تنش دیگر نمی‌تواند متقارن باشد.

۵ - ۱۵ برای یک جسم صلب در حال دوران حول مبدا ، میدان سرعت می‌تواند توسط $v_i = \varepsilon_{ijk}\omega_j x_k$ بیان شود که ω_j بردار سرعت زاویه‌ای است. نشان دهید برای این وضعیت اصل اندازه حرکت زاویه‌ای عبارت است از

$$M_i = (\omega_j\, I_{ij})^{\cdot}$$

که در آن M_i کل ممان حول مبدا تمامی نیروهای سطحی و حجمی و I_{ij} ممان اینرسی جسم تعریف شده توسط تانسور زیر است.

$$I_{ij} = \int_{\mathrm{V}} \rho\,(\delta_{ij}\,x_k\,x_k - x_i\,x_j)\,dV$$

۵ - ۱۶ روابطی برای توان تنش $\sigma_{ij}\;D_{ij}$ برحسب موارد زیر تعیین کنید.

(الف) تانسور تنش اول پیلا - کرشوف

(ب) تانسور تنش دوم پیلا - کرشوف

پاسخ : (الف) $\sigma_{ij}\,D_{ij} = \rho\,\dot{F}_{iA}\,P_{iA}\,/\,\rho_{\circ}$ (ب) $\sigma_{ij}\,D_{ij} = \rho_{\circ}\,\dot{C}_{AB}\,S_{AB}\,/\,۲\,\rho$

۵ - ۱۷ نشان دهید برای دوران یک جسم صلب حول مبدا ، انتگرال انرژی جنبشی معادله ۵ - ۷ - ۱ به شکل ارائه شده در دینامیک جسم صلب کاهش می‌یابد، یعنی

$$K = \tfrac{۱}{۲}\,\omega_i\,\omega_j\,I_{ij}$$

که در آن I_{ij} تانسور اینرسی تعریف شده در مسئله ۵ - ۱۵ می‌باشد.

۵ - ۱۸ نشان دهید یک راه برای بیان نرخ تغییرات انرژی جنبشی مواد اشغال کننده حجم V توسط معادله زیر می‌باشد.

$$\dot{K} = \int_{\mathrm{V}} \rho b_i\,v_i\,dV - \int_{\mathrm{V}} \sigma_{ij}\,v_{i,j}\,dV + \int_{\mathrm{S}} v_i\,t_i^{(\hat{\mathbf{n}})}\,dS$$

و تفسیری برای هر کدام از زیر انتگرال‌های فوق ارائه دهید.

۵ - ۱۹ یک محیط پیوسته که در آن تنش برابر $\sigma_{ij} = - p. \delta_{ij}$ است و از قانون هدایت حرارتی $q_i = - \kappa T_{,i}$ تبعیت می‌کند در نظر بگیرید. نشان دهید برای این محیط پیوسته معادله انرژی شکل زیر را خواهد داشت.

$$\rho \dot{u} = - p. v_{i,i} + \rho r + \kappa T_{,ii}$$

۵ - ۲۰ اگر فقط انرژی مکانیکی در نظر گرفته شود، نشان دهید که تعادل انرژی می‌تواند از معادلات حرکت بدست آید. پس با تشکیل ضرب عددی هر جمله معادله ۵ - ۴ - ۴ در سرعت v_i و انتگرال‌گیری از معادله منتجه به‌صورت جمله به جمله روی حجم V معادله انرژی بدست می‌آید. بررسی کنید که یک شکل نتیجه به‌صورت زیر است.

$$\frac{1}{2} \rho \, (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{\cdot} + tr \, (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}) - \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + div \, (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) = 0$$

۵ - ۲۱ اگر یک محیط پیوسته دارای معادله اساسی

$$\sigma_{ij} = - p \, \delta_{ij} + \alpha D_{ij} + \beta D_{ik} \, D_{kj}$$

باشد که در آن α ، ρ و β ثابت‌ها هستند، و اگر ماده تراکم‌ناپذیر باشد ، $(D_{ii} = 0)$ نشان دهید

$$\sigma_{ii} = - 3 p - 2 \beta \mathbf{II_D}$$

که در آن $\mathbf{II_D}$ پایای دوم تانسور نرخ تغییرشکل است.

۵ - ۲۲ از معادله ۵ - ۸ - ۲ برای رفتار الاستیک همسانگرد شروع کنید، نشان دهید

$$\sigma_{ii} = (3 \lambda + 2 \mu) \, \varepsilon_{ii}$$

و با استفاده از این نتیجه استنباط کنید که

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2 \mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3 \lambda + 2 \mu} \delta_{ij} \, \sigma_{kk} \right)$$

۵ - ۲۳ برای یک شاره نیوتنی معادله اساسی به‌صورت زیر ارائه شده است.

$$\sigma_{ij} = - p\delta_{ij} + \tau_{ij}$$

$$\sigma_{ij} = - p\delta_{ij} + \lambda^*\delta_{ij} D_{kk} + ۲ \mu^* D_{ij} \qquad \text{(رجوع شود به معادله ۵ - ۸ - ۴)}$$

با جایگزینی این معادله اساسی در معادلات حرکت ، معادله زیر را بدست آورید.

$$\rho\dot{v}_i = \rho b_i - p_{,i} + (\lambda^* + \mu^*) v_{j,ji} + \mu^* v_{i,jj}$$

۵ - ۲۴ معادلات ۵ - ۸ - ۶ الف و ۵ - ۸ - ۶ ب را ترکیب کنید تا یک معادله اساسی ویسکوالاستیک منفرد به‌صورت زیر حاصل شود.

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \{ R \} \varepsilon_{kk} + \{ S \} \varepsilon_{ij}$$

که در آن اپراتورهای زمانی خطی { **R** } و { **S** } به‌ترتیب عبارتند از

$$\{ R \} = \frac{۳ K \{ P \} - ۲ \{ Q \}}{۳ \{ P \}} \qquad \text{و} \qquad \{ S \} = \frac{۲ \{ Q \}}{\{ P \}}$$

۵ - ۲۵ فرض می‌کنیم یک محیط پیوسته ویسکوالاستیک تحت حاکمیت معادلات اساسی ۵ - ۸ - ۶ می‌باشد. یک میله باریک از چنین ماده تحت اثر کشش محوری حاصل از تنش $\sigma_{۱۱} = \sigma_. f(t)$ است که در آن $\sigma_.$ یک ثابت و $f(t)$ تابعی از زمان است. با فرض اینکه $\sigma_{۲۲} = \sigma_{۳۳} = \sigma_{۱۳} = \sigma_{۲۳} = \sigma_{۱۲} = ۰$ ، $\varepsilon_{۱۱}$, $\varepsilon_{۲۲}$ و $\varepsilon_{۳۳}$ را به‌صورت توابعی از $\{P\}$, $\{Q\}$ و $f(t)$ تعیین کنید

پاسخ :

$$\varepsilon_{۱۱}(t) = \frac{۳ K \{P\} + \{Q\}}{۹ K \{Q\}} \sigma_. f(t) \text{ , } \varepsilon_{۲۲} = \varepsilon_{۳۳} = \frac{۳ K \{P\} + ۲\{Q\}}{۱۸ K \{Q\}} \sigma_. f(t)$$

۵-۲۵- فرض کنید که معادلات اساسی ۵-۱۲-۶ حاکم بر محیط ویسکوالاستیک باشد. مفتولی نازک از

این جنس را که تحت تنش محوری $\sigma_{۱۱} = \sigma f(t)$ قرار دارد، در نظر بگیرید. σ ثابت و $f(t)$ تابعی از زمان است. فرض کنید $\sigma_{۱۲} = \sigma_{۱۳} = \sigma_{۲۳} = \sigma_{۳۳} = \sigma_{۲۲} = \sigma_{۱۱} = ۰$ و $\varepsilon_{۲۲}$ و $\varepsilon_{۳۳}$ را به صورت تابعی از $\{P\}$ و $\{Q\}$ و $f(t)$ تعیین کنید.

پاسخ:

$$\varepsilon_{۱۱}(t) = \frac{۳K\{P\} + \{Q\}}{۹K\{Q\}} \sigma f(t)$$

$$\varepsilon_{۲۲}(t) = \varepsilon_{۳۳}(t) = \frac{۳K\{P\} + ۲\{Q\}}{۱۸K\{Q\}} \sigma f(t)$$

۵-۲۶- با استفاده از تعریف انرژی آزاد در خصوص شکل کاهش یافتهٔ معادله کلازیوس - دوهام، نابرابری تلفات محلی را استخراج کنید.

۵-۲۷- مدل اساسی برای مادهٔ تراکم‌پذیر، ویسکوز و هادی حرارت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\psi = \tilde{\psi}(\theta, g_k, F_{iA}, \dot{F}_{iA})$$

$$\eta = \tilde{\eta}(\theta, g_k, F_{iA}, \dot{F}_{iA})$$

$$\sigma_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij}(\theta, g_k, F_{iA}, \dot{F}_{iA})$$

$$q_i = \tilde{q}_i(\theta, g_k, F_{iA}, \dot{F}_{iA})$$

محدودیت‌های حاکم بر توابع پاسخ اساسی را استنتاج کنید.

الف) $$\frac{\partial \tilde{\psi}(\theta, g_k, F_{kB}, \dot{F}_{kB})}{\partial g_i} = ۰$$

ب) $$\frac{\partial \tilde{\psi}(\theta, g_k, F_{kB}, \dot{F}_{kB})}{\partial \dot{F}_{iA}} = ۰$$

پ) $$\tilde{\eta}(\theta, F_{kB}) = -\frac{\partial \tilde{\psi}(\theta, F_{kB})}{\partial \theta}$$

ت) $$\tilde{\sigma}_{ij} = \rho F_{jA} \frac{\partial \tilde{\psi}(\theta, F_{kB})}{\partial F_{iA}}$$

ث) $$-\frac{۱}{\theta} \tilde{q}_i(\theta, g_k, F_{kB}, ۰) g_i \geq ۰$$

۵-۲۸- روابط اساسی زیر را در نظر بگیرید.

$$u = \tilde{u}(C_{AB}, \eta)$$

$$\theta = \tilde{\theta}(C_{AB}, \eta)$$

$$\sigma_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij}(C_{AB}, \eta)$$

$$q_i = \tilde{q}_i(C_{AB}, \eta, g_k)$$

برای یک مادهٔ الاستیک با استفاده نابرابری کلازیوس - دوهام نشان دهید.

$$\tilde{\theta} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}$$

$$u = \tilde{u}(C_{AB}\eta)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2}\rho F_{iA}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial C_{AB}} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial C_{BA}}\right)F_{jB}$$

$$\tilde{q}_i g_i \geq 0$$

۵-۲۹- با استفاده از نتایج بنیادی سینماتیکی که از حرکت برهم‌نهی‌شده جسم صلب در معادله ۵-۱۰-۸ب آمده روابط زیر را نشان دهید.

الف)
$$\frac{\partial x_i^+}{\partial x_k} = Q_{ik}$$

ب)
$$F_{iA}^+ = Q_{ij}F_{jA}$$

۵-۳۰- نشان دهید که انتقال ژاکوبین تحت حرکت برهم‌نهی‌شده جسم صلب به صورت زیر است:

$$J^+ = J$$

۵-۳۱- با استفاده از نتیجهٔ مسئلهٔ ۵-۳۰ در خصوص قانون بقای جرم نشان دهید که $\rho^+ = \rho$

۵-۳۲- نشان دهید که گرادیان مؤلفه‌های تنش تحت حرکت برهم‌نهی‌شده جسم صلب به صورت زیر انتقال می‌یابند:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{+}}{\partial x_j^{+}} = Q_{im} \frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial x_n}$$

۵-۳۳- با استفاده از تعاریف حرکت برهم‌نهی‌شدهٔ جسم صلب روابط زیر را نشان دهید:

الف) $$C_{AB}^{+} = C_{AB}$$

ب) $$u_{AB}^{+} = u_{AB}$$

پ) $$R_{iA}^{+} = Q_{ij} R_{jA}$$

ت) $$B_{ij}^{+} = Q_{im} B_{mk} Q_{kj}$$

۵-۳۴- در مورد دینامیک جسم صلب به حرکتی که به صورت معادله زیر تعریف شده، توجه کنید.

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X}$$

به علاوه،

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}^T(t)[\mathbf{x}^{+} - \mathbf{a}(t)]$$

نشان دهید که

$$\mathbf{v}^{+} = \dot{\mathbf{a}}(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times [\mathbf{x}^{+} - \mathbf{a}(t)]$$

که ω سرعت زاویه‌ای جسم است.

۶ الاستیسیتهٔ خطی

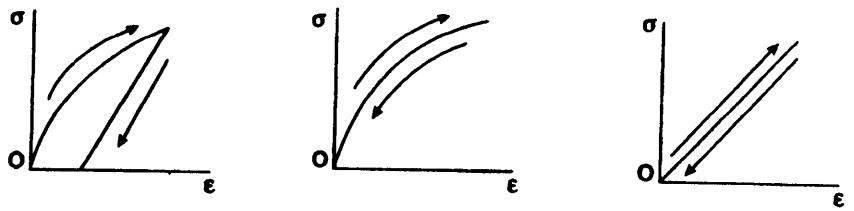
۶ - ۱ الاستیسیته ، *قانون هوک* ، *انرژی کرنشی*

رفتار الاستیک با دو شرط توصیف می‌شود : (۱) وقتی که تنش در ماده تابعی منحصر بفرد از کرنش باشد، و (۲) هنگامی که ماده دارای خاصیت برگشت کامل به حالت «طبیعی» خود را با رها شدن نیروهای وارده داشته باشد. اگر رفتار یک ماده الاستیک نباشد، می‌گوئیم آن ماده ***غیر الاستیک*** است. همچنین، تصدیق می‌کنیم که رفتار الاستیک ممکن است ***خطی*** یا ***غیرخطی*** باشد. شکل ۶ - ۱ این رفتارها را بطور هندسی توسط منحنی‌های ساده تنش - کرنش همراه با مسیرهای بارگذاری و باربرداری نشان می‌دهد. برای اغلب کاربردهای مهندسی، مخصوصاً آنهایی که شامل مواد سازه‌ای مثل فولاد و بتن هستند. شرایط برای رفتار الاستیک تشخیص داده شده است و برای این حالات نظریه پیشنهادات الاستیسیته یک مدل قابل اعتماد و مفید برای طراحی می‌باشد.

بطور نمادین ، معادله اساسی برای رفتار الاستیک در عمومی‌ترین شکلش به‌صورت زیر است.

$$\boldsymbol{\sigma} = \underline{\mathbf{G}}\,(\boldsymbol{\varepsilon}) \qquad (۶ - ۱ - ۱)$$

که در آن $\underline{\mathbf{G}}$ یک تابع مقدار تانسوری متقارن است و $\boldsymbol{\varepsilon}$ هر یک از انواع تانسورهای کرنش است که قبلاً معرفی شده‌اند. اگرچه ، برای تابع پاسخ $\underline{\mathbf{G}}$ در این کتاب ، فقط حالتی را که در معادله ۶ - ۱ - ۱ تنش یک تابع ***خطی*** از کرنش می‌باشد در نظر می‌گیریم. همچنین ، فرض می‌شود که در مواد تغییرشکل یافته گرادیان‌های تغییرمکان در همه جا در مقایسه با واحد خیلی کوچک می‌باشند. پس تمایز بین توصیف‌های لاگرانژی و اولری قابل صرف‌نظر است، و با دنبال نمودن بحث معادله ۴ - ۷ - ۳ از تعریف تانسور کرنش بسیار کوچک در معادله



شکل ۶ - ۱

منحنی‌های بارگذاری - باربرداری تک محوری تنش - کرنش برای (الف) الاستیک خطی ، (ب) الاستیک غیرخطی (پ) رفتار غیر الاستیک

۴ - ۷ - ۵ استفاده می‌کنیم، در اینجا آن را دوباره می‌نویسیم :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad (۶-۱-۲)$$

در چارچوب مفهوم فرضیات فوق ، معادله اساسی را برای رفتار الاستیک خطی بدین صورت می‌نویسیم.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkm}\,\varepsilon_{km} \quad \text{یا} \quad \boldsymbol{\sigma} = \underset{\sim}{\mathbf{C}}\,\boldsymbol{\varepsilon} \qquad (۶-۱-۳)$$

که در آن تانسور ضریب الاستیک C_{ijkm} دارای $۳^۴ = ۸۱$ مولفه می‌باشد. هر چند که بخاطر تقارن هر دو تانسور تنش و کرنش واضح است که

$$C_{ijkm} = C_{jikm} = C_{ijmk} \qquad (۶-۱-۴)$$

که امکان ۸۱ ضریب متمایز را حداکثر به ۳۶ کاهش می‌دهد.

تانسور مشخصه $\underset{\sim}{\mathbf{C}}$ را با در نظر گرفتن معادله اساسی الاستیک وقتی در یک دستگاه مختصات دوران یافته (پرایم‌دار) بیان شده باشد می‌توان نشان داد که به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\sigma'_{ij} = C'_{ijpn}\,\varepsilon'_{pn} \qquad (۶-۱-۵)$$

اما با قوانین انتقال برای تانسورهای مرتبه دوم ، همراه با معادله ۶ - ۱ - ۳ داریم

$$\sigma'_{ij} = a_{iq}\, a_{js}\, \sigma_{qs} = a_{iq}\, a_{js}\, C_{qskm}\, \varepsilon_{km}$$
$$= a_{iq}\, a_{js}\, C_{qskm}\, a_{pk}\, a_{nm}\, \varepsilon'_{pn}$$

که در مقایسه مستقیم با معادله ۶ - ۱ - ۵ نتیجه زیر را می‌دهد.

$$C'_{ijpn} = a_{iq}\, a_{js}\, a_{pk}\, a_{nm}\, C_{qskm} \qquad (۶ - ۱ - ۶)$$

یعنی ، قاعده انتقال برای یک تانسور مرتبه چهارم قائم .

در حالت کلی ، ضرایب C_{ijkm} ممکن است وابسته به درجه حرارت باشند، اما در اینجا شرایط *آدیاباتیک* (هیچ حرارتی بدست نیاورد و از دست ندهد) و *ایزوترمال* (درجه حرارت ثابت) را فرض می‌کنیم. همچنین اثرات نرخ کرنش را چشم‌پوشی نموده و مولفه‌های C_{ijkm} را حداکثر تابعی از موقعیت در نظر می‌گیریم. اگر ضرایب الاستیک ثابت باشند، ماده را **همگن** می‌نامند. این ثابت‌ها آنهائی هستند که خواص الاستیک ماده را توصیف می‌کنند. قانون اساسی ارائه شده توسط معادله ۶ - ۱ - ۳ معروف به **قانون عمومیت داده شده هوک** می‌باشد.

برای مقاصد خاص راحتتر است قانون هوک با استفاده از یک زیرنوشت روی مولفه‌های تنش و کرنش و دو زیرنوشت روی ثابت‌های الاستیک بنویسیم. تا به اینجا می‌توان تعریف کرد.

$$\begin{aligned}
&\sigma_{۱۱} = \sigma_۱ \qquad \sigma_{۲۳} = \sigma_{۳۲} = \sigma_۴ \\
&\sigma_{۲۲} = \sigma_۲ \qquad \sigma_{۳۱} = \sigma_{۱۳} = \sigma_۵ \\
&\sigma_{۳۳} = \sigma_۳ \qquad \sigma_{۱۲} = \sigma_{۲۱} = \sigma_۶
\end{aligned} \qquad (۶ - ۱ - ۷ \text{الف})$$

و

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{۱۱} = \varepsilon_۱ \qquad ۲\,\varepsilon_{۲۳} = ۲\,\varepsilon_{۳۲} = \varepsilon_۴ \\
&\varepsilon_{۲۲} = \varepsilon_۲ \qquad ۲\,\varepsilon_{۳۱} = ۲\,\varepsilon_{۱۳} = \varepsilon_۵ \\
&\varepsilon_{۳۳} = \varepsilon_۳ \qquad ۲\,\varepsilon_{۱۲} = ۲\,\varepsilon_{۲۱} = \varepsilon_۶
\end{aligned} \qquad (۶ - ۱ - ۷ \text{ب})$$

که در آن ضرایب دو در مولفه‌های کرنش برشی برای حفظ تشابه با معادله ۴ - ۷ - ۱۴ معرفی شده است. از این تعاریف ، اکنون قانون هوک عبارت است از

$$\sigma_\alpha = C_{\alpha\beta}\, \varepsilon_\beta \quad \text{یا} \quad \sigma = \underset{\sim}{\mathbf{C}}\, \varepsilon \qquad (۶ - ۱ - ۸)$$

زیرنوشت‌های یونانی دارای دامنه شش هستند، شکل ماتریسی معادله ۶ - ۱ - ۸ به‌صورت زیر ظاهر می‌شود.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}C_{12}C_{13}C_{14}C_{15}C_{16} \\ C_{21}C_{22}C_{23}C_{24}C_{25}C_{26} \\ C_{31}C_{32}C_{33}C_{34}C_{35}C_{36} \\ C_{41}C_{42}C_{43}C_{44}C_{45}C_{46} \\ C_{51}C_{52}C_{53}C_{54}C_{55}C_{56} \\ C_{61}C_{62}C_{63}C_{64}C_{65}C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}$$

(۶ - ۱ - ۹)

خاطر نشان می‌کنیم که آرایه $C_{\alpha\beta}$ که دارای ۳۶ عنصر ثابت می‌باشد تشکیل یک تانسور را نمی‌دهد.

با فرض اینکه تاثیرات حرارتی در این نقطه صرف‌نظر می‌شود، تعادل انرژی یعنی معادله ۵ - ۷ - ۱۳ به‌صورت زیر کاهش می‌یابد.

$$\dot{u} = \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}\, D_{ij} \qquad \text{(۶ - ۱ - ۱۰ الف)}$$

که برای نظریه تغییرشکل‌های کوچک ، توسط معادله ۴ - ۱۰ - ۱۸ خواهد شد.

$$\dot{u} = \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}\, \dot{\varepsilon}_{ij} \qquad \text{(۶ - ۱ - ۱۰ ب)}$$

انرژی داخلی u در این معادلات بطور خاص مکانیکی است و ***انرژی کرنشی*** (در واحد جرم) نامیده می‌شود. اکنون با یادآوری اینکه ، معادله پیوستگی در شکل لاگرانژی عبارت است از $\rho_0 = \rho J$ و همچنین با تقریب مرتبه اول خواهد شد.

$$J = det\ \mathbf{F} = det\left(\delta_{iA} + \frac{\partial u_i}{\partial X_A}\right) \approx 1 + \frac{\partial u_i}{\partial X_A} \qquad \text{(۶ - ۱ - ۱۱)}$$

بنابراین، از فرض کوچک بودن گرادیان‌های تغییرمکان ، مشخصاً $\partial u_i / \partial X_A << 1$ در معادله پیوستگی $J \approx 1$ اختیار می‌کنیم که نتیجه می‌دهد $\rho = \rho_0$ و یک ثابت در معادلات ۶ - ۱ - ۱۰ خواهد شد.

برای رفتار الاستیک تحت فرضیاتی که اعمال کرده‌ایم، انرژی کرنشی فقط تابعی از مولفه‌های کرنش می‌باشد و داریم

$$u = u\ (\varepsilon_{ij}) \qquad (۶ - ۱ - ۱۲)$$

در نتیجه

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}}\ \dot{\varepsilon}_{ij} \qquad (۶ - ۱ - ۱۳)$$

و در مقایسه مستقیم با معادله ۶ - ۱ - ۱۰ ب بدست می‌آوریم.

$$\frac{1}{\rho}\ \sigma_{ij} = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}} \qquad (۶ - ۱ - ۱۴)$$

چگالی انرژی کرنشی، u^* (انرژی کرنشی در واحد حجم) توسط رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$u^* = \rho_0\ u \qquad (۶ - ۱ - ۱۵)$$

چون $\rho = \rho_0$ یک ثابت است، تحت فرضیاتی که اختیار کرده‌ایم، از معادله ۶ - ۱ - ۱۴ نتیجه می‌شود.

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial u^*}{\partial \varepsilon_{ij}} \qquad (۶ - ۱ - ۱۶)$$

شایان ذکر است که در این نقطه رفتار الاستیک بعضی مواقع براساس وجود یک تابع انرژی کرنشی که از آن تنش‌ها با دیفرانسیل‌گیری از معادله ۶ - ۱ - ۱۶ بدست می‌آیند تعریف می‌شود. موادی که بدین طریق تعریف می‌شوند معروف به مواد ***هایپرالاستیک*** است. تنش هنوز تابعی منحصر بفرد از کرنش است در نتیجه این «روش انرژی» با تعریف قبلی از رفتار الاستیک قابل مقایسه است. پس ، با حفظ محدودیت اصلی که تغییرشکل‌های بسیار کوچک می‌باشد، شکل خطی شده معادله ۶ - ۱ - ۱۶ را توسعه می‌دهیم. با بسط دادن u^* حول مبدا داریم

$$u^*\ (\varepsilon_{ij}) = u^*(0) + \frac{\partial u^*(0)}{\partial \varepsilon_{ij}}\ \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}\ \frac{\partial^2 u^*(0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{km}}\ \varepsilon_{ij}\ \varepsilon_{km} + \ldots \qquad (۶ - ۱ - ۱۷)$$

از معادله ۶ - ۱ - ۱۶

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial u^*}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial u^*(0)}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial^2 u^*(0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{km}} \varepsilon_{km} + \ldots \qquad (۶ - ۱ - ۱۸)$$

بطور معمول فرض می‌شود که تنش‌های باقیمانده در حالت بدون کرنش ماده وجود ندارد در نتیجه $\sigma_{ij} = 0$ است وقتی‌که $\varepsilon_{ij} = 0$ باشد. پس ، با نگه داشتن فقط جمله خطی بسط فوق ، معادله اساسی الاستیک خطی را می‌توان بدین صورت براساس تابع انرژی کرنشی بیان کرد.

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial^2 u^*(0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{km}} \varepsilon_{km} = C_{ijkm}\, \varepsilon_{km} \qquad (۶ - ۱ - ۱۹)$$

این معادله یکسان با معادله ۶ - ۱ - ۳ ظاهر می‌شود، اما یک فرق خیلی مهم بین این دو وجود دارد، نه فقط تقارن بیان شده توسط معادله ۶ - ۱ - ۴ برقرار است ، بلکه اکنون داریم

$$C_{ijkm} = C_{kmij} \qquad (۶ - ۱ - ۲۰)$$

که بخاطر حقیقت زیر است.

$$\frac{\partial^2 u^*(0)}{\partial \varepsilon_{ij}\, \partial \varepsilon_{km}} = \frac{\partial^2 u^*(0)}{\partial \varepsilon_{km} \partial \varepsilon_{ij}}$$

پس وجود تابع انرژی کرنشی تعداد مولفه‌های متمایز C_{ijkm} را از ۳۶ به ۲۱ کاهش می‌دهد. کاهش بیشتری برای انواع خاص رفتار الاستیک حاصل از خواص تقارن ماده در قسمت بعد بدست می‌آید. توجه شود که با جایگزینی معادله ۶ - ۱ - ۱۹ در معادله ۶ - ۱ - ۱۷ و با فرض یک رابطه خطی تنش - کرنش ، اکنون می‌توان نوشت

$$u^*(\varepsilon_{ij}) = \tfrac{1}{2} C_{ijkm}\, \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{km} = \tfrac{1}{2} \sigma_{ij}\, \varepsilon_{ij} \qquad (۶ - ۱ - ۲۱ \text{ الف})$$

که در نمادگذاری معادله ۶ - ۱ - ۸ به‌صورت زیر درمی‌آید.

$$u^*(\varepsilon_\alpha) = \tfrac{1}{2} C_{\alpha\beta}\, \varepsilon_\alpha\, \varepsilon_\beta = \tfrac{1}{2} \sigma_\alpha\, \varepsilon_\alpha \qquad (۶ - ۱ - ۲۱ \text{ ب})$$

و با شرط تقارن $C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}$ فقط ۲۱ ثابت متمایز از ۳۶ امکان‌پذیر است.

۶ - ۲ قانون هوک برای مواد همسانگرد ، ثابت‌های الاستیک

اگر رفتار ماده تحت یک مجموعه شرایط ارائه شده الاستیک باشد، بطور عادت وقتی بحث وضعیت باشد صحبت از ماده الاستیک است حتی اگر تحت یک مجموعه شرایط مختلف رفتارش الاستیک نباشد. بعلاوه ، اگر خواص الاستیک یک جسم که توسط ضرایب C_{ijkm} توضیح داده شده است در هر مجموعه محورهای مرجع در هر نقطه از یک وضعیت داده شده یکسان باشد، آن را ***ماده الاستیک همسانگرد*** گویند. برای چنین مواد ، معادله اساسی فقط دو ثابت الاستیک دارد. ماده‌ای که همسانگرد نباشد آن را غیرهمسانگرد می‌نامند، تعدادی از این مواد را براساس درجه تقارن الاستیک که هر کدام دارا می‌باشند تعریف خواهیم کرد.

همسانگردی ایجاب می‌کند تانسور الاستیک $\underset{\sim}{\mathbf{C}}$ معادله ۶ - ۱ - ۳ یک تانسور همسانگرد مرتبه چهارم باشد. در حالت کلی، یک تانسور همسانگرد طبق تعریف تانسوری است که مولفه‌هایش با هر انتقال متعامد از یک مجموعه محورهای مختصات به مجموع دیگر بدون تغییر باشد. تانسورهای صفر از هر مرتبه‌ای و تمامی تانسورهای مرتبه صفر (اعداد) همسانگرد هستند. اما تانسورهای همسانگرد مرتبه اول وجود ندارند (بردارها). تانسور واحد $\mathbf{I}$ که دلتاهای کرانکر را به‌عنوان مولفه دربر دارد و هر مضرب عددی $\mathbf{I}$ تنها تانسورهای همسانگرد مرتبه دوم هستند (رجوع شود به مسئله ۶ - ۵). تنها تانسور همسانگرد مرتبه سوم غیرصفر ، نماد جایگشت می‌باشد. متداولترین تانسور همسانگرد مرتبه چهارم را به شکلی که دارای جملات دلتاهای کرانکر باشد می‌توان نشان داد که هم اکنون به‌صورت نمونه برای $\underset{\sim}{\mathbf{C}}$ معرفی می‌کنیم.

$$C_{ijkm} = \lambda\delta_{ij}\delta_{km} + \mu\ (\delta_{ik}\ \delta_{jm} + \delta_{im}\ \delta_{jk}) + \beta\ (\delta_{ik}\ \delta_{jm} - \delta_{im}\ \delta_{jk}) \qquad (۱ - ۲ - ۶)$$

که در آن λ , μ و β عدد هستند. اما توسط معادله ۶ - ۱ - ۴ ، $C_{ijkm} = C_{jikm} = C_{ijmk}$. این موضوع می‌رساند که β باید برای تقارن‌های بیان شده صفر باشد چون با جابجایی i , j در عبارت زیر داریم

$$\beta\ (\delta_{ik}\ \delta_{jm} - \delta_{im}\ \delta_{jk}) = \beta\ (\delta_{jk}\ \delta_{im} - \delta_{jm}\ \delta_{ik})$$

مشاهده می‌شود $\beta = -\beta$ متعاقباً $\beta = ۰$ بنابراین، با وارد کردن معادله کاهش یافته ۶-۲-۱ در معادله ۶ - ۱ - ۳ خواهیم داشت.

$$\sigma_{ij} = (\lambda\ \delta_{ij}\ \delta_{km} + \mu\ \delta_{ik}\ \delta_{jm} + \mu\ \delta_{im}\ \delta_{jk})\ \varepsilon_{km}$$

اما با جایگذاری خاصیت δ_{ij} رابطه به‌صورت زیر کاهش می‌یابد.

$$\sigma_{ij} = \lambda\, \delta_{ij}\, \varepsilon_{kk} + ۲\, \mu\varepsilon_{ij} \qquad (۲-۲-۶)$$

که **قانون هوک** برای رفتار الاستیک همسانگرد می‌باشد. همانگونه که قبلاً اشاره شد توجه داریم که برای رفتار همسانگرد الاستیک ، ۲۱ ثابت قانون عمومی به دو ثابت λ و μ که معروف به **ثابت های لامه** می‌باشد کاهش یافته است. توجه شود که برای ماده الاستیک همسانگرد $C_{ijkl} = C_{klij}$ ، یعنی یک ماده الاستیک همسانگرد الزاماً هایپرالاستیک است.

مثال ۶ ــ ۲ ــ ۱ نشان دهید که برای یک جسم صلب الاستیک خطی همسانگرد، محورهای اصلی تانسورهای تنش و کرنش بر هم منطبق هستند و یک رابطه‌ای برای ارتباط بین مقادیر اصلی آنها بدست آورید.

حل اگر $\hat{\mathbf{n}}^{(q)}$ $(q = ۱, ۲, ۳)$ نرمال‌های یکّه در جهت‌های اصلی ε_{ij} باشد و مرتبط با این نرمال‌ها مقادیر اصلی آنها $\varepsilon_{(q)}$ که $(q = ۱, ۲, ۳)$ باشد، آنگاه از معادله ۶ - ۲ - ۲ ضرب‌های نقطه‌ای را به‌صورت زیر تشکیل می‌دهیم.

$$\sigma_{ij}\, n_j^{(q)} = (\lambda\, \delta_{ij}\, \varepsilon_{kk} + ۲\, \mu\varepsilon_{ij})\, n_j^{(q)}$$

$$= \lambda\, n_i^{(q)}\, \varepsilon_{kk} + ۲\, \mu\varepsilon_{ij}\, n_j^{(q)}$$

اما $n_j^{(q)}$ و $\varepsilon_{(q)}$ معادله بنیادین را برای مسئله مقدار ویژه تامین می‌کند، مشخصاً $\varepsilon_{ij}n_j^{(q)} = \varepsilon_{(q)}\delta_{ij}n_j^{(q)}$ در نتیجه

$$\sigma_{ij}\, n_j^{(q)} = \lambda\, \varepsilon_{kk}\, n_i^{(q)} + ۲\, \mu\varepsilon_{(q)}\, n_i^{(q)}$$

$$= [\, \lambda\, \varepsilon_{kk} + ۲\, \mu\varepsilon_{(q)}\,]\, n_i^{(q)}$$

و چون $\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{(۱)} + \varepsilon_{(۲)} + \varepsilon_{(۳)}$ اولین پایای کرنش است، برای تمامی $n_i^{(q)}$ ثابت خواهد

بود، پس

$$\sigma_{ij}\, n_j^{(q)} = \{\, \lambda\, [\, \varepsilon_{(۱)} + \varepsilon_{(۲)} + \varepsilon_{(۳)}\,] + ۲\, \mu \varepsilon_{(q)}\, \}\, n_i^{(q)}$$

این معادله نشان می‌دهد که $n_i^{(q)}$ $(q = ۱, ۲, ۳)$ جهت‌های اصلی تنش هستند. همچنین دارای مقادیر تنش اصلی به‌صورت زیر می‌باشند.

$$\sigma_{(q)} = \lambda\, [\, \varepsilon_{(۱)} + \varepsilon_{(۲)} + \varepsilon_{(۳)}\,] + \; ۲\, \mu \varepsilon_{(q)} \qquad (q = ۱\,,\; ۲\,,\; ۳)$$

بسادگی می‌توان معادله ۶ - ۲ - ۲ را که مولفه‌های کرنش برحسب تنش را بیان می‌کند معکوس کرد. تا بدین جا ، ابتدا ε_{ii} را برحسب σ_{ii} از معادله ۶ - ۲ - ۲ با قرار دادن $i = j$ تعیین می‌کنیم که نتیجه می‌دهد.

$$\sigma_{ii} = ۳\, \lambda\, \varepsilon_{kk} + ۲\, \mu \varepsilon_{ii} = (۳\, \lambda + ۲\, \mu)\, \varepsilon_{ii} \qquad (۳ - ۲ - ۶)$$

اکنون ، با حل معادله ۶ - ۲ - ۲ برای ε_{ij} و جایگزینی از معادله ۶ - ۲ - ۳ ، شکل معکوس معادله اساسی همسانگرد بدست می‌آید.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{۱}{۲\, \mu} \left(\sigma_{ij} + \frac{\lambda}{۳\, \lambda + ۲\, \mu}\, \delta_{ij}\, \sigma_{kk} \right) \qquad (۴ - ۲ - ۶)$$

بطور مستدل و پذیرشی غیر آشکار ، با دوباره ترتیب کردن این معادله می‌توان نوشت.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\lambda + \mu}{\mu\, (۳\, \lambda + ۲\, \mu)} \left\{ \left[\, ۱ + \frac{\lambda}{۲\, (\lambda + \mu)} \right] \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{۲\, (\lambda + \mu)}\, \delta_{ij}\, \sigma_{kk} \right\}$$

$(۵ - ۲ - ۶)$

از آنجا اگر تعریف کنیم

$$E = \frac{\mu\, (۳\, \lambda + ۲\, \mu)}{\lambda + \mu} \qquad (۶ - ۲ - ۶ \text{ الف})$$

و

$$\nu = \frac{\lambda}{۲\, (\lambda + \mu)} \qquad (۶ - ۲ - ۶ \text{ ب})$$

قانون هوک برای رفتار همسانگرد برحسب ثابت‌های مهندسی E و ν به شکل زیر درمی‌آید.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\, \sigma_{ij} - \nu \delta_{ij}\, \sigma_{kk}] \qquad (۶ - ۲ - ۷)$$

در اینجا E را **مدول یانگ** یا بطور ساده **مدول الاستیسیته** و ν را **نسبت پواسون** می‌گویند. با ترکیب مناسبی از این دو ثابت ، می‌توان دو ثابت مهم دیگر در مهندسی الاستیسیته را تعریف کرد. ابتدا **مدول برشی** یا **مدول صلبیت** به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = \mu \qquad (۶ - ۲ - ۸ \text{الف})$$

همانگونه که اشاره شد برابر μ ثابت لامه است، سپس **مدول حجمی** بدین ترتیب تعریف می‌شود.

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \qquad (۶ - ۲ - ۸ \text{ب})$$

تفاسیر فیزیکی ثابت‌های E , ν , G و K که در فوق معرفی شده‌اند، از بررسی حالات خاص تنش نمایش داده شده در شکل ۶ - ۲ قابل تعیین هستند. در حالت تنش تک محوری (کشش یا فشار) یعنی در جهت x_1 با $\sigma_{11} = \pm \sigma_0$ و سایر مولفه‌ها صفر (شکل ۶ - ۲ الف) معادله ۶ - ۲ - ۷ نتیجه می‌دهد (چون $\sigma_{ii} = \pm \sigma_0$).

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} = \frac{\pm \sigma_0}{E} \qquad (\text{برای } i = j = 1) \qquad (۶ - ۲ - ۹ \text{الف})$$

$$\varepsilon_{22} = -\nu\, \varepsilon_{11} = \frac{\mp \nu \sigma_0}{E} \qquad (\text{برای } i = j = 2) \qquad (۶ - ۲ - ۹ \text{ب})$$

$$\varepsilon_{33} = -\nu\, \varepsilon_{11} = \frac{\mp \nu \sigma_0}{E} \qquad (\text{برای } i = j = 3) \qquad (۶ - ۲ - ۹ \text{پ})$$

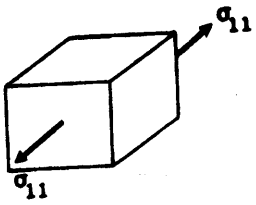
همچنین کرنش‌های برشی برای $i \neq j$ صفر است. پس E ضریب تناسب بین تنش‌های (نرمال) محوری کرنش‌ها می‌باشد، از نظر هندسی ، شیب نمودار تنش - کرنش خطی یک بُعدی می‌باشد (شکل ۶ - ۱ الف). توجه شود که $E > 0$ یعنی نمونه تحت کشش ازدیاد طول و تحت فشار کاهش طول می‌دهد. از دومین و سومین قسمت معادله ۶ - ۲ - ۹ فوق ، ν نسبت

فشردگی جانبی واحد به کشیدگی طولی واحد ناشی از کشش می‌باشد، و بعکس آن برای فشار می‌باشد. برای حالت برشی ساده نشان داده شده در شکل ۶ - ۲ ب ، که در آن $\sigma_{۱۲} = \tau_{.}$ و تمامی سایر تنش‌ها صفر است، از معادله ۶ - ۲ - ۷ داریم

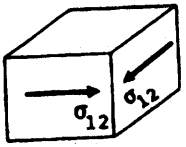
$$\varepsilon_{۱۲} = \frac{۱ + \nu}{E} \sigma_{۱۲} = \frac{\tau_{.}}{۲ G} \qquad (۶ - ۲ - ۱۰ \text{ الف})$$

یا برای کرنش‌های «مهندسی» با استفاده از معادله ۴ - ۷ - ۱۴

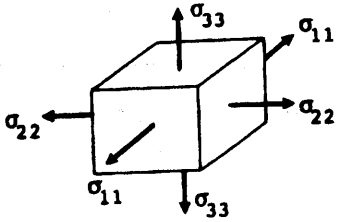
$$\gamma_{۱۲} = \frac{\sigma_{۱۲}}{G} = \frac{\tau_{.}}{G} \qquad (۶ - ۲ - ۱۰ \text{ ب})$$



(الف)



(ب)



(پ)

شکل ۶ - ۲

حالات تنش ساده ، (الف) کشش تک محوری ، (ب) برش ساده ، (پ) کشش تک محوری یکنواخت، $\sigma_{۱۱} = \sigma_{۲۲} = \sigma_{۳۳}$.

که G برای برشی ساده همان نقشی دارد که E برای کشش محوری (فشاری) فرض می‌شود. از این رو نام **مدول برشی** برای G اختیار شده است. بالاخره ، برای حالت کشش سه محوری یکنواخت (یا فشار هیدرواستاتیک) شکل ۶ - ۲ پ ، $\sigma_{ij} = \pm p\,\delta_{ij}$ با $p > 0$ اختیار می‌کنیم. بدین منظور، معادله ۶ - ۲ - ۷ نشان می‌دهد.

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1 - 2\nu}{E}\ \sigma_{ii} = \frac{\pm 3(1 - 2\nu)}{E}\ p = \frac{\pm I}{K} \qquad (۶ - ۲ - ۱۱)$$

که از آن می‌توان استنباط کرد مدول حجمی K فشار p را به تغییرات حجم حاصل از اتساع کعبی ε_{ii} ارتباط می‌دهد (رجوع شود به معادله ۴ - ۷ - ۱۸).

همچنین باید خاطر نشان ساخت که با استفاده از ثابت‌های G و K قانون هوک را می‌توان برحسب مولفه‌های انحراف و کروی تانسورهای تنش و کرنش بیان نمود، پس جفت معادلات زیر را خواهیم داشت.

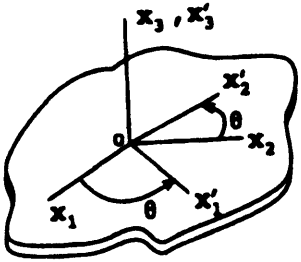
$$S_{ij} = 2G\eta_{ij} \qquad (۶ - ۲ - ۱۲ \text{ الف})$$

$$\sigma_{ii} = 3K\varepsilon_{ii} \qquad (۶ - ۲ - ۱۲ \text{ ب})$$

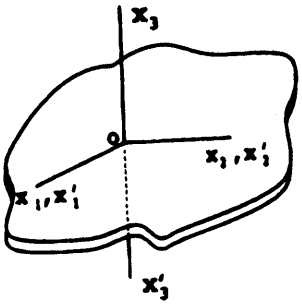
۶ - ۳ تقارن الاستیک ، قانون هوک برای مواد غیرهمسانگرد

قانون هوک برای رفتار همسانگرد در قسمت ۶ - ۲ براساس $\underset{\sim}{\mathbf{C}}$ که یک تانسور همسانگرد مرتبه چهارم باشد بنا گذاشته شد. همین نتیجه را از مفاهیم تقارن الاستیک می‌توان بدست آورد. برای انجام آن ابتدا **جهت های الاستیک معادل** یعنی همان آنهایی که توسط محورهای قائم $Ox_1x_2x_3$ و $Ox'_1x'_2x'_3$ در یک نقطه‌ای که ثابت‌های الاستیک $C_{\alpha\beta}$ با انتقال بین دو مجموعه محورها بدون تغییر باقی می‌ماند را تعریف می‌کنیم. اگر انتقال یک چرخش حول یک محور را بیان کند، می‌گوئیم ماده دارای **تقارن الاستیک محوری** نسبت به آن محور است. اگر انتقال یک انعکاسی از محورها نسبت به صفحه‌ای باشد، می‌گوئیم ماده دارای **تقارن الاستیک صفحه‌ای** است. شکل ۶ - ۳ الف حالتی را نشان می‌دهد که x_3 محور تقارن الاستیک باشد. در حالی که شکل ۶ - ۳ ب وضعیتی را نشان می‌دهد که صفحه x_1x_2 به‌عنوان صفحه تقارن الاستیک است. حقیقتی که انتقال برای انعکاس در شکل ۶ - ۳ ب از نوع غیرمقتضی است (منجر می‌شود که محورهای $Ox'_1x'_2x'_3$ یک دستگاه مختصات چپگرد باشد) ملاحظات تقارن مورد استفاده را غیرمعتبر نمی‌کند. همچنین، محور x_3 در شکل ۶ - ۳ الف را از مرتبه N می‌نامند که در آن $N = 2\pi / \theta$ است. همچنان قابل ذکر است که یک **نقطه تقارن**

الاستیک رفتار همسانگرد را دربر دارد، زیرا که ثابت‌های الاستیک برای هر دو مجموعه‌ای از محورهای قائم در آن نقطه بدون تغییر باقی می‌ماند.



(الف)



(ب)

شکل ۶ - ۳

برای تنش صفحه‌ای (الف) دوران به اندازه θ حول ....

اکنون عواقب ناشی از صفحه x_1x_2 که یک صفحه تقارن الاستیک مطابق شکل ۶ - ۳ ب می‌باشد را بررسی می‌کنیم. ماتریس انتقال برای این حالت بطور واضح عبارت است از

$$[\,a_{ij}\,] = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix} \qquad (۱ - ۳ - ۶)$$

پس در نمادگذاری با زیرنوشت تکی برای مولفه‌های تنش و کرنش انتقال‌ها در شکل ماتریسی عبارتند از

$$\begin{bmatrix} \sigma'_1 & \sigma'_6 & \sigma'_5 \\ \sigma'_6 & \sigma'_2 & \sigma'_4 \\ \sigma'_5 & \sigma'_4 & \sigma'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & \sigma_5 \\ \sigma_6 & \sigma_2 & \sigma_4 \\ \sigma_5 & \sigma_4 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & -\sigma_5 \\ \sigma_6 & \sigma_2 & -\sigma_4 \\ -\sigma_5 & -\sigma_4 & \sigma_3 \end{bmatrix} \qquad (۶-۳-۲ \text{ الف})$$

و

$$\begin{bmatrix} \varepsilon'_1 & \frac{1}{2}\varepsilon'_6 & \frac{1}{2}\varepsilon'_5 \\ \frac{1}{2}\varepsilon'_6 & \varepsilon'_2 & \frac{1}{2}\varepsilon'_4 \\ \frac{1}{2}\varepsilon'_5 & \frac{1}{2}\varepsilon'_4 & \varepsilon'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \frac{1}{2}\varepsilon_6 & \frac{1}{2}\varepsilon_5 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_6 & \varepsilon_2 & \frac{1}{2}\varepsilon_4 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_5 & \frac{1}{2}\varepsilon_4 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \frac{1}{2}\varepsilon_6 & -\frac{1}{2}\varepsilon_5 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_6 & \varepsilon_2 & -\frac{1}{2}\varepsilon_4 \\ -\frac{1}{2}\varepsilon_5 & -\frac{1}{2}\varepsilon_4 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

(۶-۳-۲ ب)

بنابراین، با فرض اینکه تمامی ۳۶ ثابت در معادله ۶-۱-۸ متمایز هستند، توجه داریم برای محورهای $Ox_1x_2x_3$

$$\sigma_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{13}\varepsilon_3 + C_{14}\varepsilon_4 + C_{15}\varepsilon_5 + C_{16}\varepsilon_6 \qquad (۶-۳-۳)$$

در حالی که برای محورهای $Ox'_1x'_2x'_3$ ، تحت شرطی که x_1x_2 یک صفحه تقارن است به‌گونه‌ای که $C_{\alpha\beta}$ در این دستگاه بدون تغییر می‌باشد، خواهیم داشت.

$$\sigma'_1 = C_{11}\varepsilon'_1 + C_{12}\varepsilon'_2 + C_{13}\varepsilon'_3 + C_{15}\varepsilon'_5 + C_{16}\varepsilon'_6 \qquad (۶-۳-۴)$$

اما از معادله ۶ - ۳ - ۲ الف $\sigma'_\alpha = \sigma_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3, 6)$ و $\sigma'_\alpha = -\sigma_\alpha$ $(\alpha = 4, 5)$ به همین منوال $\varepsilon'_\alpha = \varepsilon_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3, 6)$ و $\varepsilon'_\alpha = -\varepsilon_\alpha$ $(\alpha = 4, 5)$ در نتیجه معادله ۶ - ۳ - ۴ خواهد شد.

$$\sigma'_1 = \sigma_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{13}\varepsilon_3 - C_{13}\varepsilon_3 - C_{15}\varepsilon_5 + C_{16}\varepsilon_6 \qquad (۶-۳-۵)$$

با مقایسه معادله ۶ - ۳ - ۳ با معادله ۶ - ۳ - ۵ ، ملاحظه می‌شود، برای اینکه این روابط (هر کدام σ_1 را نشان می‌دهند) مساوی باشند، باید داشته باشیم $C_{14} = C_{15} = 0$. با دنبال کردن همان روش ، متوجه می‌شویم اگر روابط $\sigma'_\alpha = \sigma_\alpha$ $(\alpha = 2, 3, 6)$ و $\sigma'_\alpha = -\sigma_\alpha$ $(\alpha = 4, 5)$ را مقایسه کنیم ، ثابت‌های الاستیک C_{24} C_{25} C_{34} C_{35} C_{41} , C_{42} , C_{43} , C_{45} , C_{51} , C_{52} , C_{53} , C_{56} , C_{62} و C_{65} همچنان برای اینکه صفحه x_1x_2 صفحه تقارن الاستیک باشد باید تمامی صفر بشوند. بر این اساس ، ماتریس ثابت الاستیک برای این حالت دارای شکل زیر است.

$$[C_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{55} & 0 \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \qquad (۶-۳-۶)$$

و ۳۶ ثابت اصلی به ۲۰ کاهش می‌یابد. همچنین اگر یک تابع انرژی کرنشی وجود داشته باشد، آنگاه $C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}$ و این ۲۰ ثابت غیرصفر به ۱۳ کاهش خواهد یافت.

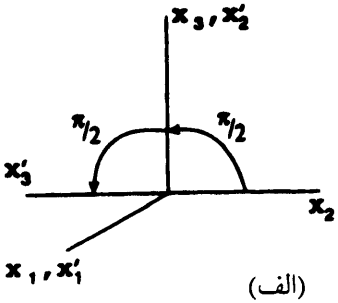
اگر همچنین صفحه x_2x_3 یک صفحه تقارن الاستیک هم زمان با صفحه x_1x_2 در آن نقطه باشد، با تکرار روش عنوان شده فوق بدست می‌آوریم که C_{16} , C_{26} , C_{36} , C_{45} , C_{52} , C_{61} , C_{62} و C_{63} باید صفر باشند و ماتریس $\underline{\mathbf{C}}$ باز هم به‌صورت زیر کاهش می‌یابد.

$$[C_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} C_{11}C_{12}C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21}C_{22}C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31}C_{32}C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \qquad (۶-۳-۷)$$

که دارای دوازده ضریب غیرصفر ، یا اگر تابع انرژی کرنشی وجود داشته باشد به نُه ضریب می‌رسد. جالب است اگر x_1x_2 هم یک صفحه تقارن الاستیک همراه با دو صفحه فوق‌الذکر باشد، هیچ کاهش دیگری در ماتریس $C_{\alpha\beta}$ رخ نمی‌دهد. یک ماده‌ای که سه صفحه تقارن الاستیک دوبدو عمود بر هم داشته باشد **یک ماده ارتوتروپیک** نامیده می‌شود، و ماتریس ثابت‌های الاستیک آن است که در معادله ۶ - ۳ - ۷ داده شده است.

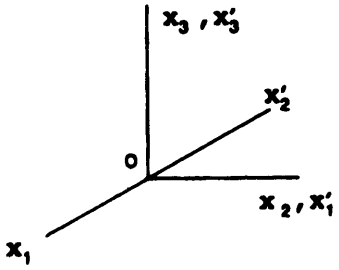
کاهش ماتریس الاستیک ارتوتروپیک به ماتریس همسانگرد با بررسی متوالی سه محور تقارن الاستیک نشان داده شده در شکل ۶ - ۴ و همچنین ماتریس‌های انتقال آنها حاصل می‌گردد. با دوران ° ۹۰ حول محور x_1 (شکل ۶-۴ الف) بدست می‌آوریم $C_{12}=C_{13}$, $C_{21}=C_{31}$, $C_{22}=C_{33}$, $C_{23}=C_{32}$ و $C_{44}=C_{66}$ و C_{55} . برای دوران ° ۹۰ حول محور x_3 (شکل ۶-۴ ب) مشاهده می‌شود که $C_{21}=C_{12}$, $C_{11}=C_{22}$, $C_{12}=C_{23}$, $C_{31}=C_{32}$ و $C_{44}=C_{55}$. بالاخره ، با دوران ° ۴۵ حول محور x_3 (شکل ۶ - ۴ پ) بدست می‌آوریم $C_{44}=C_{11}-C_{12}$ ۲ . بنابراین، با قرارداد $C_{44}=\mu$ و $C_{12}=\lambda$ می‌توان این سه $C_{\alpha\beta}$ باقی‌مانده را ثابت‌های لامه تشخیص داد و ماتریس ضرایب الاستیک را برای رفتار همسانگرد بدین صورت نوشت.

$$[C_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \qquad (۶-۳-۸)$$



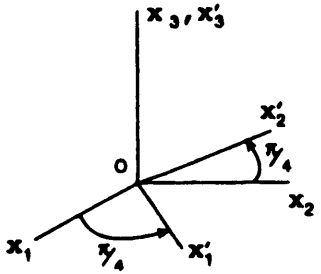
1	0	0
0	0	1
0	-1	0

(الف)



0	1	0
-1	0	0
0	0	1

(ب)



1/2	1/2	0
-1/2	1/2	0
0	0	1

(پ)

شکل ۶ - ۴

جداول هندسی و انتقال برای (الف) ۹۰° دوران حول x_1 ، (ب) ۹۰° دوران حول x_3و (پ) ۴۵° دوران حول x_3.

از تعاریف ارائه شده در معادله ۶ - ۲ - ۶ ، این ماتریس را می‌توان برحسب ثابت‌های مهندسی E و ν بیان کرد، در نتیجه قانون هوک برای جسم همسانگرد در شکل ماتریسی به‌صورت زیر ظاهر می‌شود.

$$\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_4\\ \sigma_5\\ \sigma_6\end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0\\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0\\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \varepsilon_4\\ \varepsilon_5\\ \varepsilon_6\end{bmatrix}$$

(۶ - ۳ - ۹)

۶ - ۴ الاستو استاتیک و الاستو دینامیک همسانگرد ، اصل جمع آثار

تشکیل معادلات و حل مسائل اساسی الاستیسیته خطی موضوعاتی را دربر دارند که آنها را *الاستواستاتیک* و *الاستودینامیک* می‌گوئیم. الاستواستاتیک محدود به وضعیت‌هایی است که نیروهای اینرسی صرف‌نظر شده‌اند. در هر دو الاستواستاتیک و الاستودینامیک، معادلات میدان مشخص باید برای تمامی نقاط داخلی جسم الاستیک مورد مطالعه تامین گردد، و در همان لحظه متغیرهای میدان باید شرایط مشخصی روی مرز را تامین کنند. در حالت مسائل الاستودینامیک ، شرایط اولیه روی سرعت‌ها و تغییرمکان‌ها همچنان باید تامین شوند.

بحث را برای الاستواستاتیک در حالتی که معادلات میدان مقتضی به‌صورت زیر باشند شروع می‌کنیم.

(الف) معادلات تعادل

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = 0 \qquad (۶ - ۴ - ۱)$$

(ب) رابطه کرنش - تغییرمکان

$$2\,\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} \qquad (۶ - ۴ - ۲)$$

(پ) قانون هوک

$$\sigma_{ij} = \lambda\,\delta_{ij}\,\varepsilon_{kk} + 2\,\mu\varepsilon_{ij} \qquad (۶ - ۴ - ۳ \text{ الف})$$

یا

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\,\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\,\sigma_{kk}\right] \qquad (۶ - ۴ - ۳ \text{ ب})$$

معمولاً فرض می‌شود که نیروهای حجمی b_i معلوم هستند در نتیجه حلی را که از پانزده معادله فهرست شده در اینجا جستجو می‌کنیم عبارت است از شش تنش σ_{ij}، شش کرنش ε_{ij} و سه تغییرمکان u_i. شرایطی که باید روی سطح مرزی S تامین شود به یکی از عبارات زیر ظاهر می‌شود.

۱ - تغییرمکان‌ها در همه جا تعیین شده‌اند.

$$u_i = u^*_i(\mathbf{x}) \quad \text{روی} \quad S \qquad (۶-۴-۴)$$

که در آن ستاره نمایانگر یک کمیت تعیین شده است.

۲ - کشش‌ها در همه جا تعیین شده‌اند.

$$t_i^{(\hat{\mathbf{n}})} = t_i^{*(\hat{\mathbf{n}})} \quad \text{روی} \quad S \qquad (۶-۴-۵)$$

۳ - تغییرمکان‌ها روی قسمت S_1 از S تعیین شده‌اند.

$$u_i = u_i^*(\mathbf{x}) \quad \text{روی} \quad S_1 \qquad (۶-۴-۶\text{الف})$$

همراه با کشش‌های تعیین شده روی سطح باقی‌مانده S_2

$$t_i^{(\hat{\mathbf{n}})} = t_i^{*(\hat{\mathbf{n}})} \quad \text{روی} \quad S_2 \qquad (۶-۴-۶\text{ب})$$

مهمترین نکته در معادلات میدان ۶ - ۴ - ۱ تا ۶ - ۴ - ۳ در آن است که آنها برحسب مجهول‌ها خطی هستند. متعاقباً اگر $\sigma_{ij}^{(1)}$, $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ و $u_i^{(1)}$ یک حلی برای نیروهای حجمی ${}^1b^*_i$ و کشش‌های سطحی ${}^1t_i^{*(\hat{\mathbf{n}})}$ باشند، در حالی که $\sigma_{ij}^{(2)}$, $\varepsilon_{ij}^{(2)}$ و $u_i^{(2)}$ یک حلی برای نیروهای حجمی ${}^2b^*_i$ و کشش‌های سطحی ${}^2t_i^{*(\hat{\mathbf{n}})}$ باشند، آنگاه

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)} \quad , \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)} \quad \text{و} \quad u_i = u_i^{(1)} + u_i^{(2)}$$

یک حلی را برای وضعیتی که $b_i = {}^1b^*_i + {}^2b^*_i$ و $t_i^{(\hat{\mathbf{n}})} = {}^1t_i^{*(\hat{\mathbf{n}})} + {}^2t_i^{*(\hat{\mathbf{n}})}$ باشد پیشنهاد

می‌کند. این بیان *اصل جمع آثار* می‌باشد، که بسیار مفید در توسعه حل‌ها در الاستیسیته خطی می‌باشد.

برای مسائلی که شرایط مرزی برحسب تغییرمکان‌ها توسط معادله ۶ - ۴ - ۴ داده شده است، برای ما راحت‌تر خواهد بود تنش و کرنش مجهول را از معادلات میدان حذف کنیم به‌گونه‌ای که مسئله فقط برحسب مولفه‌های تغییرمکان مجهول باشد. پس ، با جایگذاری معادله ۶ - ۴ - ۲ در قانون هوک (معادله ۶ - ۴ - ۳) و نتیجه در معادلات تعادل (معادله ۶ - ۴ - ۱) سه معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم بدست می‌آوریم.

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu)\, u_{j,ji} + \rho b_i = 0 \qquad (۶ - ۴ - ۷)$$

که به *معادلات ناویر* مشهور هستند. اگر یک حل برای این معادلات قابل تعیین باشند که همچنین شرط مرزی معادله ۶ - ۴ - ۴ را تامین کند ، آن نتیجه ممکن است در معادله ۶ - ۴ - ۲ جایگزین شود تا کرنش‌ها و به نوبه خود با جایگزین کردن در معادله ۶ - ۴ - ۳ الف تنش‌ها را حاصل نماید.

وقتی شرایط مرزی برحسب کشش‌های سطحی (معادله ۶ - ۴ - ۵) داده شده باشد، معادلات سازگاری برای کرنش‌های بسیار کوچک (معادله ۴ - ۷ - ۳۲) را می‌توان با قانون هوک (معادله ۶ - ۴ - ۳ ب) ترکیب کرد تا معادلات تعادل بدست آیند، پس از تعدادی عملیات جبری به معادلات زیر می‌رسیم.

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{kk,ij} + \rho\,(b_{i,j} + b_{j,i}) + \frac{\nu}{1-\nu}\delta_{ij}\rho b_{k,k} = 0 \quad (۶ - ۴ - ۸)$$

که معروف به *معادلات سازگاری تنش بلترامی ـ میشل* می‌باشد. در ترکیب با معادلات تعادل این معادلات شامل یک سیستمی برای حل مولفه‌های تنش است، اما مشخصاً سیستم ساده نیست برای حل شدن مانند آن حالتی است که در معادله سازگاری کرنش بسیار کوچک، جسم باید بطور ساده بهم متصل شده باشد.

در الاستو دینامیک ، معادلات تعادل باید توسط معادلات حرکت (معادله ۵ - ۴ - ۴) در سیستم معادلات میدان اصلی جایگزین شده باشند. بنابراین، اکنون تمامی کمیت‌های میدان توابعی از زمان و همچنین مختصات در نظر گرفته می‌شوند، در نتیجه یک حل برای میدان تغییرمکان ، مثلاً به شکل $u_i = u_i(\mathbf{x}, t)$ ظاهر می‌شود. بعلاوه ، حل باید نه تنها شرایط مرزی

که توابعی از زمان به‌صورت

$$u_i = u_i^* (\mathbf{x}, t) \quad \text{روی} \quad S \qquad (۶-۴-۹ \text{الف})$$

یا

$$t_i^{(\hat{\mathbf{n}})} = t_i^{*(\hat{\mathbf{n}})} (\mathbf{x}, t) \quad \text{روی} \quad S \qquad (۶-۴-۹ \text{ب})$$

بلکه همچنین *شرایط اولیه* که معمولاً بدین صورت اختیار می‌شوند تامین نمایند.

$$u_i = u^*_i (\mathbf{x}, ۰) \qquad (۶-۴-۱۰ \text{الف})$$

و

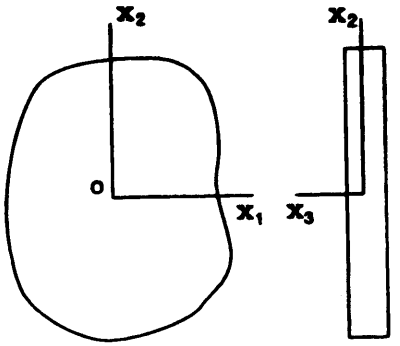
$$\dot{u}_i = \dot{u}^*_i (\mathbf{x}, ۰) \qquad (۶-۴-۱۰ \text{ب})$$

در تشابه با معادله ۶ - ۴ - ۷ برای الاستواستاتیک به آسانی نشان داده می‌شود که معادلات حاکم برای تغییرمکان‌ها در نظریه الاستودینامیک به‌صورت زیر است که همچنان *معادلات ناویر* نامیده می‌شوند.

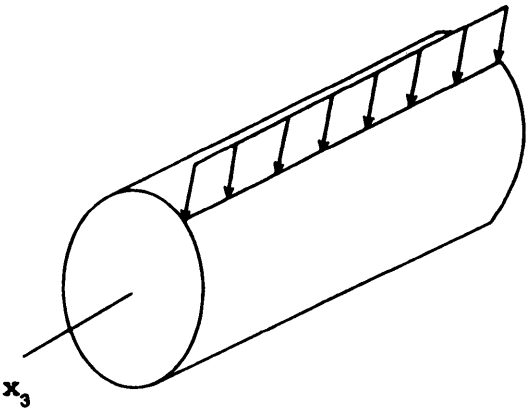
$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i \qquad (۶-۴-۱۱)$$

۶ - ۵ الاستیسیته صفحه‌ای

در تعدادی کاربردهای مهندسی ، هندسه خاص جسم و نحوهٔ بارگذاری منجر به کاهش معادلات الاستیسیته به شکل دو بعدی می‌شود و مطالعه این وضعیت‌ها بر مبنای *الاستیسیته صفحه‌ای* می‌باشد. دو نوع اصلی مسائل که هسته این تحلیل صفحه‌ای را تشکیل می‌دهند با بیان فرضیات مشخصی روی تنش‌ها و تغییرمکان‌ها تعریف می‌شوند، در اینجا آنها را برحسب شکل اولیه فیزیکی شاخص معرفی می‌کنیم. در مسائل *تنش صفحه‌ای* ، هندسه جسم به‌گونه‌ای است که ورق نازک با یک بُعد خیلی کوچکتر از دو بُعد دیگر می‌باشد. بارگذاری در این حالت در صفحه ورق است و فرض می‌شود در عرض ضخامت مطابق شکل ۶ - ۵ الف یکنواخت باشد. در مسائل *کرنش صفحه‌ای* ، هندسه به‌صورت یک منشور استوانه‌ای دارای یک بُعد خیلی بزرگتر از دو بُعد دیگر است که دارای بارگذاری عمودی با توزیع یکنواخت نسبت به این بُعد بزرگ می‌باشد (شکل ۶ - ۵ ب). در این حالت، چون شرایط در تمامی مقاطع یکسان است، تحلیل می‌تواند روی یک استوانه باریک متمرکز شود.



(الف)



(ب)

شکل ۶ - ۵

(الف) مسائل تنش صفحه‌ای بطور عمومی شامل اجسامی می‌باشد که در یک بُعد نازک هستند و بارگذاری عمود بر این بُعد اعمال می‌شود. (ب) مسائل کرنش صفحه‌ای بطور عمومی شامل اجسامی می‌باشد که در یک بُعد طویل هستند و بارگذاری در امتداد آن بُعد اعمال می‌شود.

برای وضعیت تنش صفحه‌ای، شکل ۶ - ۵ الف ، مولفه‌های تنش $\sigma_{۳۳}$ ، $\sigma_{۳۱}$ و $\sigma_{۳۲}$ در همه جا صفر اختیار شده‌اند و مولفه‌های باقی‌مانده به‌صورت توابعی فقط از $x_۱$ و $x_۲$ در نظر گرفته می‌شوند، پس

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}\,(x_۱ , x_۲), \qquad (i,j = ۱ , ۲) \qquad (۱ - ۵ - ۶)$$

و در نتیجه ، معادلات تعادل (معادله ۶ - ۴ - ۱) به معادلات خاص زیر کاهش می‌یابند.

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \rho b_1 = 0 \qquad (۶ - ۵ - ۲ \text{ الف})$$

$$\sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + \rho b_2 = 0 \qquad (۶ - ۵ - ۲ \text{ ب})$$

روابط کرنش - تغییرمکان (معادله ۶ - ۴ - ۲) خواهد شد

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1}\,, \qquad \varepsilon_{22} = u_{2,2}\,, \qquad 2\,\varepsilon_{12} = u_{1,2} + u_{2,1} \qquad (۶ - ۵ - ۳)$$

و هم‌زمان معادلات سازگاری کرنش (معادله ۴ - ۷ - ۳۲) شکلی مانند معادله ۴ - ۷ - ۳۳ خواهند داشت که در اینجا تکرار شده‌اند

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2\,\varepsilon_{12,12} \qquad (۶ - ۵ - ۴)$$

معادلات قانون هوک (معادله ۶ - ۴ - ۳ ب) برای تنش صفحه‌ای به‌صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\,(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) \qquad (۶ - ۵ - ۵ \text{ الف})$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}\,(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}) \qquad (۶ - ۵ - ۵ \text{ ب})$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E}\;\sigma_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2\,G} = \frac{\gamma_{12}}{2} \qquad (۶ - ۵ - ۵ \text{ پ})$$

همراه با

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}\,(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \frac{-\nu}{1-\nu}\,(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \qquad (۶ - ۵ - ۶)$$

با معکوس کردن معادله ۶ - ۵ - ۵ ، مولفه‌های تنش را برحسب کرنش بدین صورت بیان می‌کنیم.

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}) \qquad (۶-۵-۷\text{ الف})$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}) \qquad (۶-۵-۷\text{ ب})$$

$$\sigma_{12} = \frac{E}{1-\nu}\ \varepsilon_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)}\ \gamma_{12} = G\gamma_{12} \qquad (۶-۵-۷\text{ پ})$$

این معادلات را به راحتی می‌توان به شکل ماتریس درآورد.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \qquad (۶-۵-۸)$$

برحسب مولفه‌های تغییرمکان $u_i\ (i = 1, 2)$ معادلات میدان تنش صفحه‌ای را می‌توان ترکیب و معادلات نوع ناویر را برای الاستواستاتیک توسعه داد، مشخصاً

$$\frac{E}{2(1+\nu)}u_{i,jj} + \frac{E}{2(1-\nu)}u_{j,ji} + \rho b_i = 0, \qquad (i, j = 1, 2) \qquad (۶-۵-۹)$$

برای وضعیت کرنش صفحه‌ای (شکل ۶ - ۵ ب) فرض می‌شود که $u_3 = 0$ و دو مولفه تغییرمکان باقی‌مانده توابعی فقط از x_1 به x_2 هستند.

$$u_i = u_i(x_1, x_2), \qquad (i = 1, 2) \qquad (۶-۵-۱۰)$$

در این حالت ، معادلات تعادل، روابط کرنش تغییرمکان و معادلات سازگاری کرنش تمامی به همان صورت تنش صفحه‌ای باقی می‌ماند، یعنی به‌ترتیب معادلات ۶ - ۵ - ۲ ، ۶ - ۵ - ۳ و ۶ - ۵ - ۴ . در اینجا ، قانون هوک (معادله ۶ - ۴ - ۳ الف) برحسب ثابت‌های مهندسی بدین صورت می‌تواند نوشته شود.

$$\sigma_{11} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\,\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22} \right] \qquad (۶-۵-۱۱\text{ الف})$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\,\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11} \right] \qquad (۶-۵-۱۱\text{ ب})$$

$$\sigma_{12} = \frac{E}{1+\nu}\,\varepsilon_{12} = \frac{E}{1+\nu}\,\frac{\gamma_{12}}{2} = G\gamma_{12} \qquad (۶-۵-۱۱\text{ پ})$$

همراه با

$$\sigma_{33} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}) = \nu\,(\sigma_{11}-\sigma_{22}) \qquad (۶-۵-۱۲)$$

سه معادله اول را در شکل ماتریسی می‌توان بیان نمود.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \qquad (۶-۵-۱۳)$$

علاوه بر آن ، با معکوس کردن همین سه معادله ، قانون هوک برای کرنش صفحه‌ای توسط معادلات زیر بیان می‌شود.

$$\varepsilon_{11} = \frac{1+\nu}{E} \left[(1-\nu)\,\sigma_{11} - \nu\sigma_{22} \right] \qquad (۶-۵-۱۴\text{ الف})$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1+\nu}{E} \left[(1-\nu)\,\sigma_{22} - \nu\sigma_{11} \right] \qquad (۶-۵-۱۴\text{ ب})$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E}\,\sigma_{12} = \frac{2(1+\nu)}{E}\,\frac{\sigma_{12}}{2} = \frac{\sigma_{12}}{2G} \qquad (۶-۵-۱۴\text{ پ})$$

با ترکیب کردن معادلات میدان با قانون هوک برای کرنش صفحه‌ای الاستواستاتیک ، معادله مقتضی ناویر بدین صورت بدست می‌آید.

$$\frac{E}{2(1+\nu)}\,u_{i,jj} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\,u_{j,ji} + \rho b_i = 0 \quad , (i\,,\,j = 1\,,\,2) \qquad (۶-۵-۱۵)$$

شایان ذکر است که معادلات ۶ - ۵ - ۵ و ۶ - ۵ - ۷ برای تنش صفحه‌ای با معادلات کرنش صفحه به‌ترتیب معادلات ۶ - ۵ - ۱۴ و ۶ - ۵ - ۱۱ یکسان خواهند شد اگر در معادلات تنش صفحه‌ای جای E را با $E / (1 - \nu^2)$ و ν را با $\nu / (1 - \nu)$ عوض کنیم. همچنین باید تفسیر کرد حقیقتی را که اگر نیروهای وارد بر لبه ورق در شکل ۶ - ۵ الف در عرض ضخامت یکنواخت نباشد، اما نسبت به وسط صفحه ورق تقارن داشته باشد ، بعضی مواقع این وضعیت را یک حالت **تنش صفحه‌ای عمومی** می‌گویند. در چنین حالتی، متغیرهای تنش و کرنش را متوسط مقادیر روی ضخامت در نظر می‌گیرند. همچنین، برای یک حالت **کرنش صفحه‌ای عمومی** به کتب الاستیسیته ارجاع داده می‌شود اگر مولفه کرنش $\varepsilon_{۳۳}$ در شکل ۶ - ۵ ب مقداری غیر از صفر داشته باشد.

۶ - ۶ ترموالاستیسیته خطی

هنگامی که بررسی ما به تاثیرات درجه حرارت و همچنین نیروهای مکانیکی روی رفتار الاستیک اجسام معطوف می‌شود، با بحث **ترموالاستیسیته** سر و کار خواهیم داشت. در اینجا ، فقط **نظریه غیرکوپل** نسبتاً ساده را نشان می‌دهیم که تغییرات درجه حرارت بوجود آمده توسط کرنش الاستیک صرف‌نظر شده است. همچنین ، در مفهوم خطی بودن فرض می‌شود که کل کرنش ، دو جمع زیر باشد.

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(M)} + \varepsilon_{ij}^{(T)} \qquad (۱ - ۶ - ۶)$$

که در آن $\varepsilon_{ij}^{(M)}$ مشارکت از نیروهای مکانیکی و $\varepsilon_{ij}^{(T)}$ کرنش‌های بوجود آمده در اثر درجه حرارت هستند. اگر $T_.$ به‌عنوان درجه حرارت مرجع و T به‌عنوان درجه حرارت اختیاری در نظر گرفته شوند، کرنش‌های حرارتی حاصل در تغییر درجه حرارت یک حجم همسانگرد کاملاً غیرمقید عبارت است از

$$\varepsilon_{ij}^{(T)} = \alpha\,(T - T_.)\,\delta_{ij} \qquad (۲ - ۶ - ۶)$$

که در آن α **ضریب انبساط حرارتی خطی** است و دارای واحد متر بر متر بر درجه سلسیوس می‌باشد $(m/m/°C)$. حضور دلتای کرانکر در معادله ۶ - ۶ - ۲ نشان می‌دهد که کرنش‌های برشی توسط یک تغییر درجه حرارت در یک جسم غیرمقید بوجود نیامده‌اند.

با وارد کردن معادله ۶ - ۶ - ۲ در معادله ۶ - ۶ - ۱ و استفاده از قانون هوک برای کرنش‌های مکانیکی در آن معادله به معادله اساسی ترموالاستیک می‌رسیم.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk} + \alpha\,(T - T_0)\,\delta_{ij} \qquad (۶-۶-۳)$$

این معادله بسادگی برای بیان تنش‌ها برحسب کرنش‌ها به‌صورت زیر معکوس می‌شود.

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\nu\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + (1-2\nu)\,\varepsilon_{ij} - (1+\nu)\,\alpha\,(T - T_0)\,\delta_{ij}\right] \qquad (۶-۶-۴)$$

همچنین ، برحسب مولفه‌های انحراف و کروی تنش و کرنش، روابط اساسی ترموالاستیک به‌صورت جفت معادلات زیر ظاهر می‌شود

$$S_{ij} = \frac{E}{(1+\nu)}\,\eta_{ij} \qquad (۶-۶-۵\text{ الف})$$

$$\sigma_{ii} = \frac{E}{(1-2\nu)}\left[\varepsilon_{ii} + \alpha\,(T - T_0)\right] \qquad (۶-۶-۵\text{ ب})$$

اگر هدایت حرارتی در یک جسم صلب الاستیک با قانون فوریه (معادله ۵ - ۷ - ۱۰) حاکم باشد، که در اینجا به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$q_i = -\kappa\, T_{,i} \qquad (۶-۶-۶)$$

که در آن κ هدایت حرارتی جسم می‌باشد (یک ثابت مثبت)، و اگر ثابت **حرارت مخصوص** c در معادله معرفی کنیم.

$$-q_{i,i} = \rho c\dot{T} \qquad (۶-۶-۷)$$

معادله هدایت حرارتی برای نظریه غیرکوپل خواهد شد.

$$\kappa T_{,ii} = \rho c\dot{T} \qquad (۶-۶-۸)$$

این معادله ، همراه با معادلات ترموالاستیک تنش - کرنش (معادله ۶ - ۶ - ۳ یا ۶ - ۶ - ۴) معادلات تعادل (معادله ۶ - ۴ - ۱) و روابط کرنش - تغییرمکان (معادله ۶ - ۴ - ۲) مجموعه

اصلی معادلات میدان برای مسائل ترموالاستیک غیرکوپل شبه استاتیک را تشکیل می‌دهد. البته شرایط مرزی و معادلات سازگاری کرنش باید همچنان تامین شوند.

۶ - ۷ تابع تنش ایری

همان طور که در بخش ۶-۵ بیان شد، معادلات اساسی برای مسائل دوبعدی در الاستیسیتهٔ ایزوتروپیک، شامل روابط تعادل، معادلهٔ ۶-۵-۲، شرط سازگاری، معادلهٔ ۶-۵-۴ و قانون هوک، چه در شکل تنش صفحه‌ای (معادله ۶-۵-۲) و یا در شکل کرنش صفحه‌ای (معادلهٔ ۶-۵-۱۴) است. زمانی که نیروهای جسمی در معادلهٔ ۶-۵-۲ پایستارند و به وسیلهٔ تابع پتانسیل $V = V(x_1, x_2)$ تعریف شوند، به طوری که $b_i = -V_{,i}$، می‌توانیم ***تابع تنش ایری*** $\phi=\phi(x_1, x_2)$ را تعریف کنیم. در این حالت تنش‌ها در عباراتی به شکل زیر داده می‌شوند:

$$\sigma_{11} = \phi_{,22} + \rho V ; \quad \sigma_{22} = \phi_{,11} + \rho V ; \quad \sigma_{12} = -\phi_{,12} \qquad (۱-۷-۶)$$

توجه کنید که با استفاده از این تعریف، معادلات تعادل به طور یکسان تأمین می‌شوند.

در حالت تنش صفحه‌ای با قرار دادن معادله ۶-۵-۵ در معادلهٔ ۶-۵-۴ داریم:

$$\sigma_{11,22} + \sigma_{22,11} - \nu(\sigma_{11,11} + \sigma_{22,22}) = 2(1 + \nu)\sigma_{12,12} \qquad (۲-۷-۶)$$

که در جملاتی برحسب ϕ به صورت زیر است:

$$\phi_{,1111} + 2\phi_{,1212} + \phi_{,2222} = -(1 - \nu)\,\rho(V_{,11} + V_{,22}) \qquad (۳-۷-۶)$$

به طور مشابه، برای حالت کرنش صفحه‌ای، با در نظرگرفتن معادلهٔ ۶-۵-۱۴ در معادله ۶-۵-۴ به نتیجهٔ زیر می‌رسیم:

$$(1 - \nu)\,(\sigma_{11,22} + \sigma_{22,11}) - \nu(\sigma_{11,11} + \sigma_{22,22}) = 2\sigma_{12,12} \qquad (۴-۷-۶)$$

یا برحسب ϕ

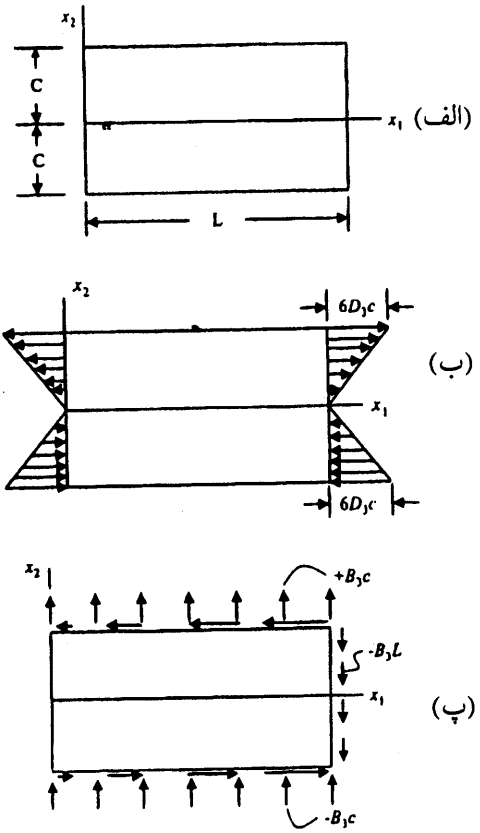
$$\phi_{,1111} + 2\phi_{,1212} + \phi_{,2222} = -(1 - 2\nu)\,\rho(V_{,11} - V_{,22})/(1-\nu) \qquad (۵-۷-۶)$$

اگر نیروهای جسمی فقط متشکل از نیروهای گرانشی و یا نیروهای ثابتی باشند، سمت راست

هر دو معادله ۶-۷-۳ و ۶-۷-۵ صفر شده و ϕ باید معادله هارمونیک دوتایی را تأمین کند.

$$\phi_{,1111} + 2\phi_{,1212} + \phi_{,2222} = \nabla^4\phi = 0 \qquad (6-7-6)$$

البته، در هر حالت شرایط مرزی حاکم بر تنش‌ها باید به منظور کامل کردن حل برای مسئله‌ای خاص تأمین شوند. برای اجسامی که دارای هندسهٔ مربع مستطیل شکل هستند، به طور مخصوص توابع تنش در شکل چند جمله‌ای‌هایی از x_1 و x_2 همان گونه که در مثال‌هایی که به دنبال می‌آید نشان داده شده است، مفید هستند.



شکل ۶-۷-۱

الف) ناحیهٔ مستطیلی تیری راکه در جهت x_1 امتداد یافته نشان می‌دهد؛ ب) توزیع تنش با فرض اینکه تنها ثابت غیرصفر D_3 است به دست آمده است؛ پ) مؤلفه‌های تنش عمودی و برشی به دست آمده با فرض اینکه تنها ثابت غیرصفر B_3 باشد.

مثال ۶ ـ ۷ ـ ۱: برای صفحه‌ای نازک مستطیلی که ابعاد آن در شکل مثال ۶-۷-۱الف نشان داده شده است، شکل کلی یک چند جمله‌ای از درجه سه را به عنوان تابع تنش ایری فرض کرده و از آن تنش‌ها را تعیین کنید. فرض کنید نیروهای جسمی صفرند.

حل: یک تابع تنش چند جمله‌ای به شکل $\phi_3 = A_3 x_1^3 + B_3 x_1^2 x_2 + C_3 x_1 x_2^2 + D_3 x_2^3$ انتخاب کنید. انتخاب این شکل خاص چند جمله‌ای برای تابع تنش تصادفی نیست و این انتخاب براساس بررسی‌های بسیاری از چند جمله‌ای‌های مرتبهٔ مختلف صورت گرفته است. بعد از تجربه‌ای معین در مشاهدهٔ اثر یک چند جمله‌ای بر مؤلفه‌های تنش محاسبه شده با استفاده از معادلهٔ ۶-۷-۱، می‌توان حدس قوام یافته‌ای زد که کدام جملات باید برای مسئله‌ای خاص در نظر گرفته شود. به همین دلیل، مسائلی این چنین را به طور معمول مسائل نیمه‌معکوس می‌گویند.

با جایگذاری مستقیم در معادلهٔ ۶-۷-۶ تصدیق می‌کنیم که ϕ_3 هارمونیک دوتایی است. به علاوه، تنش‌ها به صورت زیر داده می‌شوند:

$$\sigma_{11} = 2 C_3 x_1 + 6 D_3 x_2$$

$$\sigma_{22} = 6 A_3 x_1 + 2 B_3 x_2$$

$$\sigma_{12} = -2 B_3 x_1 - 2 C_3 x_2$$

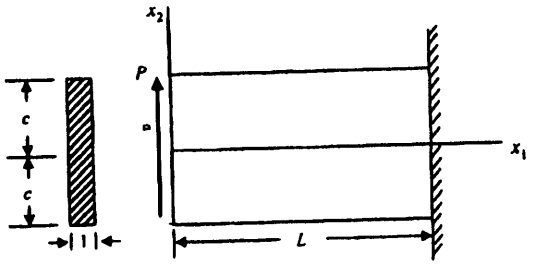
با انتخاب ثابت‌های مختلف صفر و غیرصفر، مسائل فیزیکی متفاوتی ممکن است حل شود. در اینجا به دو مورد خاص توجه خواهد شد:

الف) فرض کنید تمام ثابت‌ها به جز D_3 در ϕ_3 صفر هستند. این مورد را می‌توان در حل حالت خمش خالص یک تیر به وسیلهٔ معادل سازی ممان‌های دو انتهایی آن همچنان که در شکل ۶-۷-۱ب نشان داده شده است، در نظر گرفت. تنش در جهت تار تیر به طور خطی نسبت به فاصله از محور x_1 تغییر می‌کند.

$$\sigma_{11} = 6 D_3 x_2 ; \quad \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$$

همان طور که برای حالت خمش ساده است. به طور مشابه، اگر تنها $A_۳$ غیرصفر اتخاذ شود، حل برای ممان خمشی اعمال شده بر تیری است که جهت طولی آن در راستای $x_۲$ نسبت به $x_۱$ گرفته شده است.

(ب) اگر تنها $B_۳$ (یا $C_۳$) غیرصفر باشد، هر دو تنش عمودی و برشی ظاهر می‌شوند. شکل ۶-۷-۱ج شکل تنش را در حالتی که $B_۳ \neq ۰$ نشان می‌دهد.



شکل مثال ۶ - ۷ - ۲

تیر یک سرگیردار که نیروی P در انتهای آن قرار گرفته است

مثال ۶ ـ ۷ ـ ۲: به تابع تنش ویژه‌ای به شکل زیر توجه کنید.

$$\phi^* = B_۲ x_۱ x_۲ + D_۴ x_۱ x_۲^۳$$

نشان دهید که این تابع قابل انطباق برای حل تنش‌ها در تیری یک سرگیردار تحت بار انتهایی است. این تیر در تصویر نشان داده شده است. فرض کنید که نیروهای جسمی در این مسئله صفرند.

حل: به آسانی با جایگذاری مستقیم قابل بررسی است که $\nabla^۴\phi^* = ۰$. مؤلفه‌های تنش به طور مستقیم از معادلهٔ ۶-۷-۱ محاسبه می‌شوند:

$$\sigma_{۱۱} = ۶ D_۴ x_۱ x_۲$$

$$\sigma_{۲۲} = ۰$$

$$\sigma_{۱۲} = - B_۲ - ۳ D_۴ x_۲^۲$$

این مؤلفه‌های تنش در ارتباط با تیری یک سرگیردار با بار انتهایی است و ثابت‌های $B_۲$ و $D_۴$ با توجه به شرایط مرزی قابل تعیین هستند. از آنجا که سطوح بالایی و پایینی تیر رها از تنش‌اند.

$\sigma_{۱۲}$ در $x_۲ = \pm c$ باید صفر باشد. با استفاده از این شرط $B_۲$ برحسب $D_۲$ تعیین می‌شود، به طوری که $B_۲ = -۳D_۴c^۲$ بنابراین تنش برشی برحسب تنها یک ثابت $B_۲$ داده می‌شود:

$$\sigma_{۱۲} = -B_۲ + \frac{B_۲ x_۲^۲}{c^۲}$$

بار متمرکز به صورت مجموع تنش برشی $\sigma_{۱۲}$ روی انتهای آزاد تیر مدل شده است، بنابراین حاصل انتگرال‌گیری این تنش روی سطح آزاد انتهایی تیر در $x_۱ = ۰$ همان نیروی اعمال شدهٔ P است، در شکل معادله‌ای:

$$P = -\int_{-c}^{+c} \left[-B_۲ + B_۲ \frac{x_۲^۲}{c^۲}\right] dx_۲$$

که علامت منفی به دلیل قرارداد علامت روی تنش برشی مورد نیاز است. با انجام انتگرال‌گیری داریم $B_۲ = ۳P/۴c$ بنابراین مؤلفه‌های تنش را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\sigma_{۱۱} = -\frac{۳P}{۲c^۳} x_۱ x_۲$$

$$\sigma_{۲۲} = ۰$$

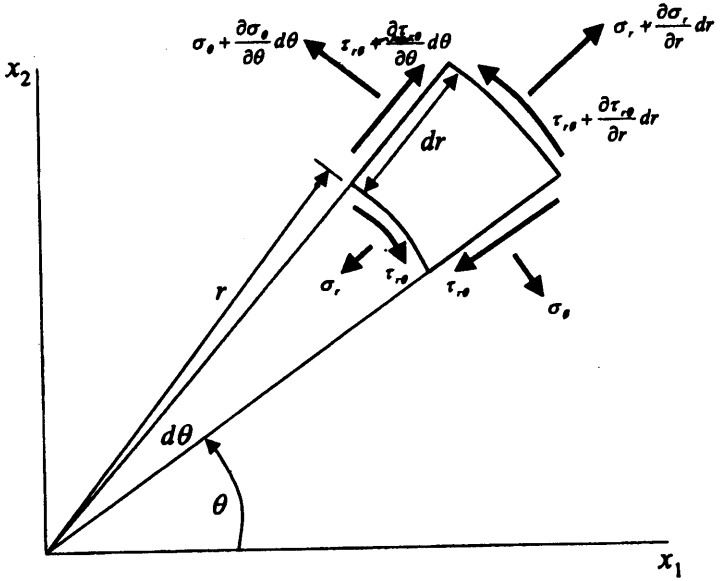
$$\sigma_{۳۳} = -\frac{۳P}{۴c}\left(۱ - \frac{x_۲^۲}{c^۲}\right)$$

اما برای این تیر ممان اینرسی سطح مقطع آن $I = ۲c^۳/۳$ است، حال داریم:

$$\sigma_{۱۱} = -\frac{P}{I} x_۱ x_۲ \; ; \quad \sigma_{۲۲} = ۰ \; ; \quad \sigma_{۳۳} = -\frac{P}{۲I}(c^۲ - x_۲^۲)$$

که در توافق با نتایج حاصل از تئوری مقدماتی خمش تیر است.

چندین حل مهم در الاستیسیتهٔ صفحه‌ای به وسیلهٔ روش تابع تنش ایری زمانی که برحسب مختصات قطبی بیان شود، دست یافتنی هستند. به این منظور، المان مادی اساسی همراه با مؤلفه‌های تنش مربوطه را برحسب عباراتی از مختصات r و θ، همان طور که در شکل ۶-۶ نشان داده شده، معرفی می‌کنیم. به کمک این المان و جمع نیروهای شعاعی، نتیجه‌ای به صورت معادله تعادل زیر داریم:



شکل ۶ - ۶

المان دیفرانسیلی تنش در مختصات قطبی

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R = 0 \qquad (۶-۷-۷\text{الف})$$

و جمع نیروهای مماسی نیز نتیجه می‌دهد:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2\frac{\tau_{r\theta}}{r} + \Theta = 0 \qquad (۶-۷-۷\text{ب})$$

که R و Θ بیانگر نیروهای جسمی هستند. در غیاب چنین نیروهایی معادله ۶-۷-۷الف و ب به وسیلهٔ معادلهٔ زیر تأمین می‌شود:

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \qquad (۶-۷-۸\text{الف})$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \qquad (۶-۷-۸\text{ب})$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right) \qquad (۶-۷-۸\text{پ})$$

که در آنها $\phi = \phi(r,\theta)$ به منظور توصیف کردن ϕ به صورت تابع تنش ایری ϕ باید شرط $\nabla^۴\phi = ۰$ را نیز تأمین کند که در شکل قطبی آن از معادلهٔ ۶-۷-۶ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\nabla^۴\phi = \left(\frac{\partial^۲}{\partial r^۲} + \frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{۱}{r^۲}\frac{\partial^۲}{\partial \theta^۲}\right)\left(\frac{\partial^۲\phi}{\partial r^۲} + \frac{۱}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{۱}{r^۲}\frac{\partial^۲\phi}{\partial \theta^۲}\right) = ۰ \qquad (۹-۷-۶)$$

برای میدان تنشی که نسبت به محور قطبی متقارن است، معادلهٔ ۶-۷-۹ به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\nabla^۴\phi = \left(\frac{\partial^۲}{\partial r^۲} + \frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial^۲\phi}{\partial r^۲} + \frac{۱}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = ۰ \qquad (۱۰\text{الف}-۷-۶)$$

یا

$$r^۴\frac{\partial^۴\phi}{\partial r^۴} + ۲r^۳\frac{\partial^۳\phi}{\partial r^۳} - r^۲\frac{\partial^۲\phi}{\partial r^۲} + r\frac{\partial\phi}{\partial r} = ۰ \qquad (۱۰\text{ب}-۷-۶)$$

می‌توان نشان داد که حل عمومی برای این معادله دیفرانسیل به صورت زیر است:

$$\phi = A\ln r + Br^۲\ln r + Cr^۲ + D \qquad (۱۱-۷-۶)$$

که برای حالت متقارن، مؤلفه‌های تنش شکل زیر را به خود می‌گیرند:

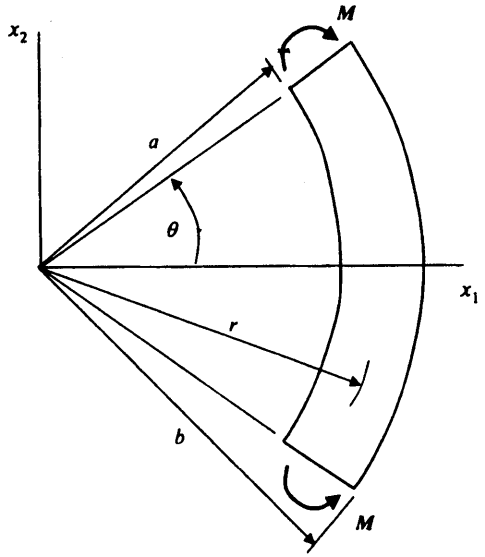
$$\sigma_r = \frac{۱}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{A}{r^۲} + B(۱ + ۲\ln r) + ۲C \qquad (۱۲\text{الف}-۷-۶)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^۲\phi}{\partial r^۲} = -\frac{A}{r^۲} + B(۳ + ۲\ln r) + ۲C \qquad (۱۲\text{ب}-۷-۶)$$

$$\tau_{r\theta} = ۰ \qquad (۱۲\text{پ}-۷-۶)$$

اگر در اصل هیچ حفره‌ای درون جسم الاستیک تحت بررسی وجود نداشته باشد، A و B باید صفر باشند، زیرا در غیر این صورت تنش‌های بسیار کوچکی در آن نقطه حاصل خواهد شد، بنابراین برای صفحه‌ای که هیچ حفره‌ای نداشته باشد، تنها فشار یا کشش یکنواخت به عنوان حالتی متقارن وجود دارد.

هندسه‌ای خاص که حالت همراه با حفره‌ای در مبدأ را توصیف می‌کند، تیر خمیده‌ای است که تحت دو ممان در دو انتهای خود قرار گرفته است. این حالت در مثال زیر بررسی می‌شود.



شکل مثال ۶ - ۷ - ۳

تیر منحنی شکل با گشتاورهای انتهایی

مثال ۶ ــ ۷ ــ ۳: تنش‌ها را در تیری خمیده با ابعاد نشان داده شده هنگامی که تحت یک ممان ثابت معادل قرار دارد، تعیین کنید.

حل: از تقارن، تنش‌ها از معادلهٔ ۶-۷-۱۲ داده می‌شوند. شرایط مرزی مورد نیاز

(۱) $\sigma_r = 0$ در $r = a$، و در $r = b$.

(۲) $\int_a^b \sigma_\theta \, dr = 0$ در روی سطوح انتهایی .

(۳) $\int_a^b r \, \sigma_\theta \, dr = -M$ در روی سطوح انتهایی .

(۴) $\tau_{r\theta} = 0$ هر جایی روی مرز.

این شرایط به معادلات زیر منجر می‌شوند که از آنها برای محاسبهٔ ثابت‌های A، B و C استفاده می‌شود. در شعاع‌های داخلی و خارجی فاقد تنش نرمال هستیم که در عباراتی از شرط مرزی (۱) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$A / a^2 + B(1 + 2 \ln a) + 2C = 0$$

$$A / b^2 + B(1 + 2 \ln b) + 2C = 0$$

هیچ نیروی عرضی در دو انتهای تیر خمیده وجود ندارد و در عباراتی از شرط مرزی (۲) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\int_a^b \sigma_\theta \, dr = \int_a^b \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \, dr = \frac{\partial \phi}{\partial r}\Big]_a^b = 0$$

محاسبهٔ این انتگرال در حدودش خود به خود به عنوان نتیجه‌ای از شرط مرزی (۱) تأمین می‌شود. سرانجام، ممان‌های اعمال شده بر دو انتهای تیر در عباراتی از شرط مرزی (۳) نوشته می‌شود:

$$\int_a^b r \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \, dr = \left[\frac{\partial \phi}{\partial r} r\right]_a^b - \int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial r} \, dr = -M$$

به دلیل شرط (۱) جملهٔ داخل کروشه در اینجا صفر است و از عبارت انتگرال داریم:

$$\phi_B - \phi_A = M$$

یا

$$A \ln b/a + B(b^2 \ln b - a^2 \ln a) + C(b^2 - a^2) = M$$

این عبارت به همراه دو معادلهٔ تنش حاصل از شرط (۱) را می‌توان حل و ثابت‌های A، B و C را محاسبه کرد.

$$A = -\frac{4M}{N} a^2 b^2 \ln \frac{b}{a}$$

$$B = -\frac{2M}{N} (b^2 - a^2)$$

$$C = \frac{M}{N}\left[b^2 - a^2 + 2(b^2 \ln b - a^2 \ln a)\right]$$

که $N = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2b^2[\ln(b/a)]^2$. سرانجام می‌توان مؤلفه‌های تنش را با جایگذاری ثابت‌ها در معادلات ۶-۷-۱۲ برحسب عباراتی از ممان اعمال شده و شعاع‌ها، بیان کرد.

$$\sigma_r = -\frac{4M}{N}\left[\frac{a^2b^2}{r^2}\ln\frac{b}{a} + b^2\ln\frac{r}{b} + a^2\ln\frac{a}{r}\right]$$

$$\sigma_\theta = -\frac{4M}{N}\left[-\frac{a^2b^2}{r^2}\ln\frac{b}{a} + b^2\ln\frac{r}{b} + a^2\ln\frac{a}{r} + b^2 - a^2\right]$$

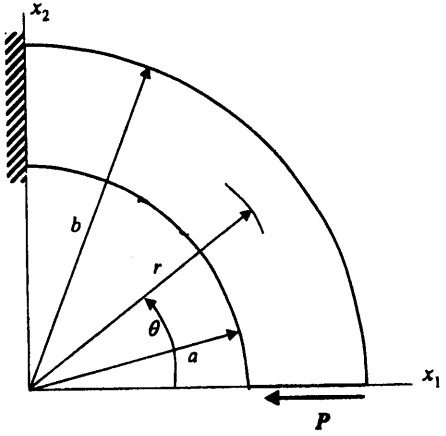
$$\tau_{r\theta} = 0$$

تحقق این نتایج با رجوع به کتب درسی گوناگون در زمینهٔ مقاومت مصالح قابل انجام است.

اگر ϕ به عنوان تابعی از هر دو متغیر r و θ در نظر گرفته شود، فرض زیر مفید است

$$\phi(r,\theta) = f(r)\, e^{in\theta} \qquad (۶-۷-۱۳)$$

به منظور حصول تابعی نوسانی برحسب θ برای حالتی که $n = 0$ است، حل عمومی همان طور که انتظار می‌رود، مشابه حلی است که در معادلهٔ ۶-۷-۱۱ داده شده است. برای مثال از حالتی که $n = 1$ است توجه خود را به شکلی از تابع $\phi(r,\phi)$ به صورت زیر معطوف می‌کنیم:



شکل مثال ۶ - ۷ - ۴

تیر یک سرگیردار ربع دایره‌ای با بار شعاعی P

$$\phi = (Ar^2 + B/r + Cr + Dr \ln r) \sin \theta \qquad (۱۴-۷-۶)$$

مثال ۶ ـ ۷ ـ ۴: نشان دهید که تابع تنش ارائه شده به وسیلهٔ معادله ۶-۷-۱۴ برای حل تیر ربع دایره تحت بار P در انتها، استفاده می‌شود.

حل: از معادلهٔ ۶-۷-۸ مؤلفه‌های تنش به صورت زیر است.

$$\sigma_r = \left[2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r}\right] \sin \theta$$

$$\sigma_\theta = \left[6Ar + \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r}\right] \sin \theta$$

$$\tau_{r\theta} = -\left[2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r}\right] \cos \theta$$

شعاع داخلی و خارجی سطوح فاقد تنش هستند، بنابراین شرایط مرزی $\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$ در $r=a$ و در $r=b$ نتیجه می‌شود. همچنین نیروی P اعمال شده را می‌توان به صورت مجموع تنش‌های برشی روی انتهای آزاد تیر در $\theta = 0$ در نظر گرفت.

$$\int_a^b \tau_{r\theta}\Big]_{\theta=0} dr = -P$$

این شرایط به سه معادله منجر شده که از آنها ثابت‌های A و B و D تعیین می‌شوند.

$$2Aa - \frac{2B}{a^3} + \frac{D}{a} = 0$$

$$2Ab - \frac{2B}{b^3} + \frac{D}{b} = 0$$

$$-A(b^2 - a^2) + B\frac{(b^2 - a^2)}{a^2b^2} - D \ln \frac{b}{a} = P$$

با حل این سه معادله و سه مجهول ثابت‌ها به صورت زیر معین می‌شوند.

$$A = \frac{P}{2N}; \quad B = -\frac{Pa^2b^2}{2N}; \quad P = -\frac{P(a^2 + b^2)}{N}$$

که $N = a^2 - b^2 + (a^2 + b^2)\ln(b/a)$. سرانجام، استفاده از این ثابت‌ها در روابط مؤلفه‌های تنش نتیجه می‌دهد:

$$\sigma_r = \frac{P}{N}\left(r + \frac{a^2b^2}{r^3} - \frac{a^2 + b^2}{r}\right)\sin\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{P}{N}\left(3r + \frac{a^2b^2}{r^3} - \frac{a^2 + b^2}{r}\right)\sin\theta$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{P}{N}\left(r + \frac{a^2b^2}{r^3} - \frac{a^2 + b^2}{r}\right)\cos\theta$$

توجه کنید که وقتی $\theta = 0$

$$\sigma_r = \sigma_\theta = 0 \quad \text{و} \quad \tau_{r\theta} = -\frac{P}{N}\left[r + \frac{a^2b^2}{r^3} - \frac{a^2 + b^2}{r}\right]$$

و زمانی که $\theta = \frac{\pi}{2}$ و $\tau_{r\theta} = 0$ در حالی که

$$\sigma_r = \frac{P}{N}\left[r + \frac{a^2b^2}{r^3} - \frac{a^2 + b^2}{r}\right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{P}{N}\left[3r - \frac{a^2b^2}{r^3} - \frac{a^2 + b^2}{r}\right]$$

این بخش را به همراه مثالی از حالت $n = 2$ در معادله ۶-۷-۱۳ به پایان می‌رسانیم.

مثال ۶ ــ ۷ ــ ۵: برای حل مسئلهٔ تنش در صفحه‌ای مسطح بزرگ که تحت یک تنش محوری یکنواخت S قرار دارد و دارای یک حفرهٔ دایره‌ای کوچک در مرکزش است، از تابع تنش زیر استفاده کنید. همان طور که در شکل نشان داده شده است.

$$\phi = (Ar^2 + Br^4 + C/r^2 + D)\cos 2\theta$$

حل: از معادلهٔ ۶-۷-۸ مؤلفه‌های تنش دارای شکلی به صورت زیر هستند:

$$\sigma_r = -\left[2A + \frac{6C}{r^4} + \frac{4D}{r^2}\right]\cos 2\theta$$

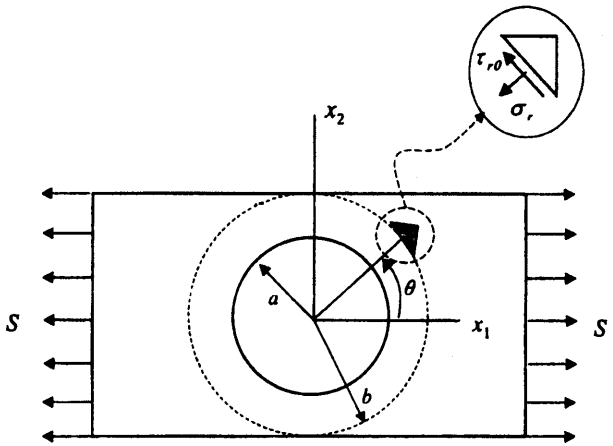
$$\sigma_\theta = \left[2A + 12Br^2 + \frac{6C}{r^4}\right] \cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = \left[2A + 6Br^2 - \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{r^2}\right] \sin 2\theta$$

فرض کنید که عرض صفحه b در مقایسه با شعاع حفره بزرگ باشد. با توجه به المان مثلثی کوچکی که در فاصله b از مبدأ قرار دارد، شرایط مرزی زیر باید برقرار باشند:

$$\sigma_r = S \cos^2\theta \qquad \text{در} \qquad r = b \qquad (1)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{S}{2} \sin 2\theta \qquad \text{در} \qquad r = b \qquad (2)$$



شکل مثال ۶ - ۷ - ۵

صفحهٔ تحت بار محوری با سوراخ دایره‌ای

و سطح داخلی حفره نیز فاقد تنش است که به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\sigma_r = 0 \qquad \text{در} \qquad r = a \qquad (3)$$

$$\tau_{r\theta} = 0 \qquad \text{در} \qquad r = a \qquad (4)$$

این شرایط، زمانی که با عبارت‌های تنش ترکیب شوند، نتیجه می‌دهند:

$$۲A + \frac{۶C}{b^۴} + \frac{۴D}{b^۲} = -\frac{S}{۲}$$

$$۲A + ۶Bb^۲ - \frac{۶C}{b^۴} - \frac{۲D}{b^۲} = -\frac{S}{۲}$$

$$۲A + \frac{۶C}{a^۴} + \frac{۴D}{a^۲} = ۰$$

$$۲A + ۶Ba^۲ - \frac{۶C}{a^۴} - \frac{۲D}{a^۲} = ۰$$

در حالتی که $b \to \infty$، معادلات بالا را می‌توان حل و تعیین کرد:

$$A = -\frac{S}{۴}; \quad B = ۰; \quad C = -\frac{a^۴S}{۴}; \quad D = \frac{a^۲S}{۲}$$

بنابراین تنش‌ها به وسیلهٔ روابط زیر داده می‌شوند:

$$\sigma_r = \frac{S}{۲}\left[۱ - \frac{a^۲}{r^۲}\right] + \frac{S}{۲}\left[۱ + \frac{۳a^۴}{r^۴} - \frac{۴a^۲}{r^۲}\right]\cos ۲\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{S}{۲}\left[۱ + \frac{a^۲}{r^۲}\right] - \frac{S}{۲}\left[۱ + \frac{۳a^۴}{r^۴}\right]\cos ۲\theta$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{S}{۲}\left[۱ - \frac{۳a^۴}{r^۴} + \frac{۲a^۲}{r^۲}\right]\sin ۲\theta$$

توجه کنید که وقتی r به سمت بسیار کوچک میل کند در $\theta = ۰$، تنش‌ها به صورت $\sigma_r = S$، $\sigma_\theta = S - ۲S\cos ۲\theta$ و $\sigma_r = \tau_{r\theta} = ۰$ $r = a$ (کشش ساده) تبدیل می‌شوند. در $\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = ۰$ که حاکی از آن است زمانی که $\theta = \frac{\pi}{۲}$ یا $\theta = \frac{۳\pi}{۲}$، تنش‌ها $\sigma_\theta = S - ۲S(-۱) = ۳S$ هستند که عامل تمرکز تنش شناخته شده در طراحی است، همچنین زمانی که $\theta = ۰$ یا $\theta = \pi$، $\sigma_\theta = -S$ عامل فشار در خط مرکزی حفره است.

باید اشاره کرد که در این بخش مختصر، تنها تنش‌ها مشخص شده‌اند. از اینها به همراه قانون هوک می‌توان برای تعیین جابه‌جایی‌ها در مسائل مورد نظر استفاده کرد.

۶ - ۸ پیچش

با مرور کوتاه حل ساده‌ترین مسئله در پیچش را شروع می‌کنیم، یعنی حالتی که یک محور با سطح مقطع دایره‌ای ثابت تحت کوپل معادل M_t در دو انتهای آن همان طور که در شکل ۶-۷الف نشان داده شده، قرار گرفته است. فرض کنید مقطع انتهایی تیر در $x_3 = 0$ ثابت شده و سطح مقطع دیگر تیر در $x_3 = L$ حول محور شافت می‌چرخد. فرض بر آن است که مقاطع صفحه‌ای عمود بر محور، تحت پیچش صفحه باقی می‌مانند و هر کدام تحت زاویه‌ای که متناسب با فاصلهٔ صفحه از انتهای ثابت است، دوران می‌کند. براین اساس، نقطه‌ای در سطح مقطع واقع در x_3 به اندازهٔ زاویهٔ θx_3 می‌چرخد. برای مثال نقطهٔ P، در سطح مقطع عرضی مسافت $\Theta x_3 R$ را طی می‌کند که متناسب با فاصلهٔ R از محور x_3 بوده، همان طور که در شکل ۶-۷ب نشان داده شده است. مربع فاصله تا نقطهٔ P برابر مربع مختصات x_1 و x_2 است (شکل ۶-۷پ). با استفاده از این فاصله، تعریف سینوس و کسینوس زاویهٔ β آسان و نوشتن تغییر مکان‌های u_1 و u_2 برحسب θ ساده است، زیرا $\sin(90-\beta) = \frac{x_1}{R}$ و $\cos(90-\beta)=\frac{x_2}{R}$. بنابراین،

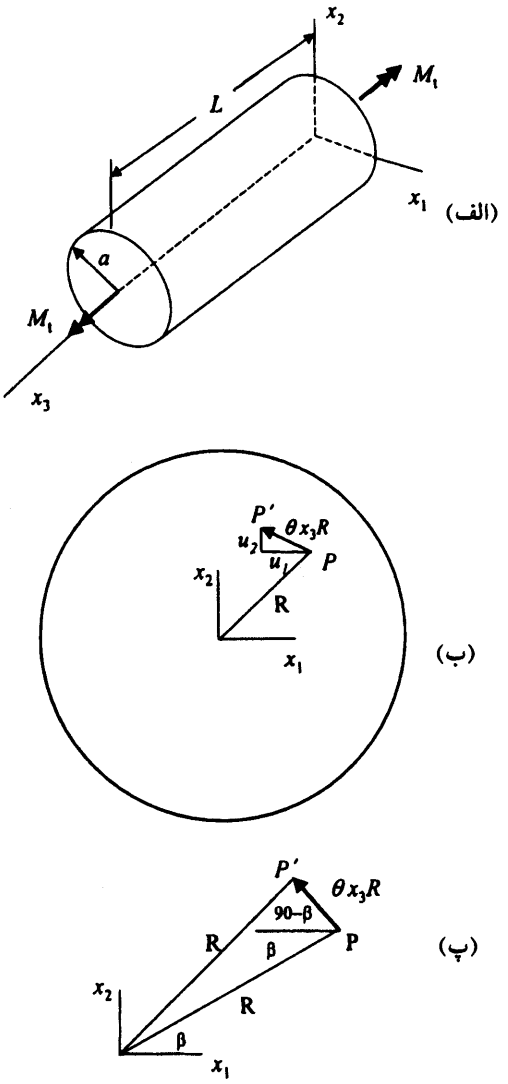
$$u_1 = -\theta x_2 x_3 \; ; \quad u_2 = \theta x_1 x_3 \; ; \quad u_3 = 0 \qquad (1-8-6)$$

که θ زاویهٔ چرخش به ازای طول واحد محور است.

به یاد آورید که در معادلهٔ ۴-۷-۵، $2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}$ که می‌توان کرنش‌ها را از معادله ۶-۸-۱ محاسبه کرد، سپس برای به دست آوردن مؤلفه‌های تنش، نتایج کرنش‌ها در معادلهٔ ۶-۲-۲ قرار می‌گیرند (زیرا از معادله ۶-۲-۸الف $\mu \equiv G$).

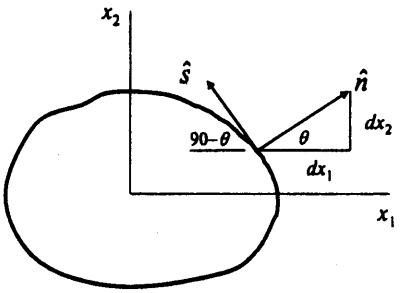
$$\sigma_{23} = G\theta x_1 \; ; \quad \sigma_{13} = -G\theta x_2 \; ; \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = 0 \qquad (2-8-6)$$

از آنجا که این مؤلفه‌های تنش، همچون کرنش‌ها به همان روشی که استخراج شده بودند، توابع خطی از مختصات و یا صفر هستند، معادلات سازگاری معادله ۴-۷-۳۲ تأمین می‌شوند. به طور مشابه، برای حالت نیروهای جسمی صفر، معادلات بقای معادله ۶-۴-۱ به طور واضح تأمین می‌شود. سطح جانبی محور فاقد تنش است. برای بررسی این مطلب، به مؤلفه‌های تنش



شکل ۶ - ۷

الف) استوانه با گشتاورهای خود متعادل M_t؛ ب) جابه‌جایی نقطهٔ P به P' در مقطع عرضی ؛ پ) جزئیات چرخش سطح مقطع، β



شکل ۶ - ۸

سطح مقطع دلخواه با بردارهای یکهٔ عمودی و مماسی بر مرز

در جهت عمودی $\hat{n}$ در نقطه‌ای روی پیرامون مقطع عرضی طرح شده در شکل ۶-۷ب توجه کنید، بنابراین در یک شعاع $R = a$

$$\sigma_{۱۳}\frac{x_۱}{a} + \sigma_{۲۳}\frac{x_۲}{a} = \frac{G\theta}{a}(-x_۲x_۱ + x_۱x_۲) = ۰ \qquad (۳-۸-۶)$$

به طور همزمان، تنش برشی کل در هر نقطه‌ای از سطح مقطع حاصل زیر است:

$$\tau = \sqrt{\sigma_{۱۳}^{۲} + \sigma_{۲۳}^{۲}} = G\theta\sqrt{x_۱^{۲} + x_۲^{۲}} = G\theta R \qquad (۴-۸-۶)$$

که بیانگر متناسب بودن برش به شعاع در هر نقطه‌ای که عمود بر آن شعاع است.

با جمع ممان‌های نیروهای برشی روی صفحهٔ انتهایی محور هم درمی‌یابیم که:

$$M_t = \iint (x_۱\sigma_{۲۳} - x_۲\sigma_{۱۳})dx_۱dx_۲ = G\theta \iint R^{۲}dx_۱dx_۲ = G\theta I_p \qquad (۵-۸-۶)$$

که I_p ممان قطبی اینرسی سطح مقطع است.

برای هر محور منشوری با هر سطح مقطعی بـه غـیر از دایـره، مـطابق آنـچه در طـرح شماتیک شکل ۶-۸ نشان داده شده است، مقاطع صـفحه‌ای تـحت پـیچش صـفحه‌ای بـاقی نمی‌مانند و تابیدگی رخ می‌دهد. برای چنین حالتی باید معادلهٔ ۶-۸-۱ با تغییر مکان‌ها به شکل زیر تصحیح شود.

$$u_۱ = -\theta x_۲x_۳\,; \quad u_۲ = \theta x_۱x_۳\,; \quad u_۳ = \theta\psi(x_۱, x_۲) \qquad (۶-۸-۶)$$

که به $\psi(x_1, x_2)$ *تابع تاب برداشتگی* می‌گویند. توجه کنید که تابیدگی مستقل از x_3 است و بنابراین برای تمام مقاطع عرضی یکسان است. همچنین، فرض کرده‌ایم که x_3 یک محور مرکزی است که این شرط به طور مطلق لازم نیست.

همچون تحلیل صورت گرفته در مورد شافت دایره‌ای دوباره می‌توان با استفاده از معادلهٔ ۴-۷-۵ به علاوه معادله ۶-۲-۲ مؤلفهٔ تنش را از معادلهٔ ۶-۸-۶ محاسبه کرد، بنابراین

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = 0; \sigma_{13} = G\theta(\psi_{,1} - x_2); \sigma_{23} = G\theta(\psi_{,2} - x_1) \quad (۶-۸-۷)$$

از این مؤلفه‌های تنش واضح است که هیچ تنش نرمالی بین المان‌های طولی شافت وجود ندارد. دو معادلهٔ اول تعادل، معادلهٔ ۶-۴-۱ به وسیلهٔ ۶-۸-۷ در غیاب نیروهای جسمی به طور یکسان تأمین می‌شوند و جایگذاری در معادلهٔ سوم تعادل نتیجه می‌دهد:

$$\sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} + \sigma_{33,3} = G\theta(\psi_{,11} + \psi_{,22}) = 0 \quad (۶-۸-۸)$$

و دلالت دارد که ψ باید روی مقطع عرضی شافت هارمونیک باشد.

$$\nabla^2\psi = 0 \quad (۶-۸-۹)$$

شرایط مرزی روی سطوح شافت نیز باید تأمین شوند.

در سطح جانبی که فاقد تنش است، شرایط زیر براساس معادلهٔ ۳-۴-۸ باید حاکم باشد.

$$\sigma_{11}n_1+\sigma_{12}n_2=0; \quad \sigma_{21}n_1+\sigma_{22}n_2=0; \quad \sigma_{31}n_1+\sigma_{32}n_2= \quad (۶-۸-۱۰)$$

توجه کنید که اینجا $n_3 = 0$ است. دو معادلهٔ اول از این معادلات به طور یکسان تأمین می‌شوند، در حالی که سومی نیازمند است به :

$$G\theta(\psi_{,1} - x_2)n_1 + G\theta(\psi_{,2} + x_1)n_2 = 0 \quad (۶-۸-۱۱\text{الف})$$

که بلافاصله به شکل زیر درمی‌آید:

$$\psi_{,1}n_1 + \psi_{,2}n_2 = \frac{d\psi}{dn} = x_2n_1 - x_1n_2 \qquad (۶-۸-۱۱ب)$$

بنابراین، $\psi(x_1, x_2)$ باید در مقطع عرضی شافت نشان داده شده در شکل ۶-۸ هارمونیک باشد و مشتق آن نسبت به نرمال بر سطح جانبی، باید معادلهٔ ۶-۸-۱۱ب روی محیط پیرامون C مقطع عرضی را تأمین کند.

علاوه بر این، توجه کنید که به ترتیب همهٔ مقاطع عرضی فاقد نیرو هستند، یعنی برش ساده روی آن مقاطع عرضی

$$\iint \sigma_{13}dx_1dx_2 = \iint \sigma_{23}dx_1dx_2 = \iint \sigma_{33}dx_1dx_2 = 0 \qquad (۶-۸-۱۲)$$

از آنجا که $\sigma_{33} = 0$، سومین انتگرال در اینجا صفر است. با توجه به نخستین انتگرال می‌توان نوشت:

$$G\theta\iint(\psi_{,1}-x_2)dx_1dx_2=G\theta\iint\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}[x_1(\psi_{,1}-x_2)]+\frac{\partial}{\partial x_2}[x_1(\psi_{,2}+x_1)]\right\}dx_1dx_2 \qquad (۶-۸-۱۳)$$

که شرط $\nabla^2\psi = 0$ استفاده شده است. از قضیهٔ گرین می‌توان این انتگرال را به انتگرال خط که حول محیط C گرفته شود، تبدیل کرد

$$G\theta\int_C x_1\{(\psi_{,1} - x_2)n_1 + (\psi_{,2} + x_1)n_2\}ds = 0 \qquad (۶-۸-۱۴)$$

که به وسیلهٔ معادلهٔ ۶-۸-۱۱ب به وضوح تأمین می‌شود. با محاسبه‌ای مشابه درمی‌یابیم که دومین انتگرال معادله ۶-۸-۱۲ نیز تأمین می‌شود.

در دو سطوح انتهایی شافت، $x_3 = 0$ و $x_3 = L$ شرایط زیر باید تأمین شود:

$$\iint x_2\sigma_{31}dx_1dx_2 = \iint x_1\sigma_{31}dx_1dx_2 = 0\ ;\ \iint (x_1\sigma_{32} - x_2\sigma_{31})dx_1dx_2 = M_t \qquad (۶-۸-۱۵)$$

دوباره از آنجا که $\sigma_{33} = 0$ دو انتگرال اول صفرند. از سومین انتگرال نتیجه می‌شود:

$$M_t = G\theta\iint(x_1^2 + x_2^2 + x_1\psi_{,2} - x_2\psi_{,1})dx_1dx_2 \qquad (۶-۸-۱۶)$$

با تعریف صلبیت پیچشی به صورت

$$K = G \iint (x_1^2 + x_2^2 + x_1\psi_{,2} - x_2\psi_{,1})dx_1dx_2 \qquad (۱۷-۸-۶)$$

که وقتی $\psi(x_1, x_2)$ شناخته شده باشد، قابل محاسبه است، زاویهٔ پیچش به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\theta = \frac{M_t}{K} \qquad (۱۸-۸-۶)$$

راه دوم برای مسائل کلی پیچش که متکی بر معرفی یک تابع تنش پیچش است، با تعریف ϕ در اینجا مطرح شده است. تنش‌های غیرصفر با تعاریف زیر به ϕ مرتبط‌اند:

$$\sigma_{13} = \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}; \quad \sigma_{23} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} \qquad (۱۹-۸-۶)$$

بنابراین:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_2} = G\theta(\psi_{,1} - x_2); \quad \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} = -G\theta(\psi_{,2} + x_1) \qquad (۲۰-۸-۶)$$

با حذف ψ از این جفت معادله، نتیجه می‌شود:

$$\nabla^2\Phi = -2G\theta \qquad (۲۱-۸-۶)$$

همان طور که تاکنون توجه شده است، سطح جانبی شافت که موازی با محور x_3 است، باید فاقد تنش باقی بماند. این بدان معنی است که سومین معادله از معادله ۶-۸-۱۰ باید تأمین شود. با وجود این، نوشتن این شرط برحسب بردار یکه $\hat{S}$ در امتداد مرز به جای نرمال یکه $\hat{n}$ همان طور که در شکل ۶-۸ نشان داده شد، مفید است. به طور مستقیم از هندسه نتیجه می‌شود که $n_1 = \frac{dx_2}{dS}$ و $n_2 = -\frac{dx_1}{dS}$ برحسب dS دیفرانسیل طول در امتداد محیط C، مؤلفه‌های تنش در جهت عمودی توسط معادله زیر داده خواهند شد:

$$\sigma_{13}\frac{dx_2}{ds} - \sigma_{23}\frac{dx_1}{ds} = 0 \qquad (۲۲-۸-۶)$$

که برحسب ϕ می‌شود:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial s} + \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\frac{dx_2}{ds} = \frac{d\Phi}{ds} = 0 \qquad (۲۳-۸-۶)$$

بنابراین ϕ در امتداد محیط مقطع عرضی ثابت است و در اینجا مقدار صفر به آن اختصاص داده خواهد شد.

سرانجام، شرایط روی سطوح انتهایی شافت باید تأمین شوند. با شروع از نخستین معادله ۶-۸-۱۲ برحسب ϕ داریم،

$$\iint \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} dx_1 dx_2 = \iint \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} dx_2\right] dx_1 = \int \Phi \Big]_a^b dx_1 = 0 \qquad (۶-۸-۲۴)$$

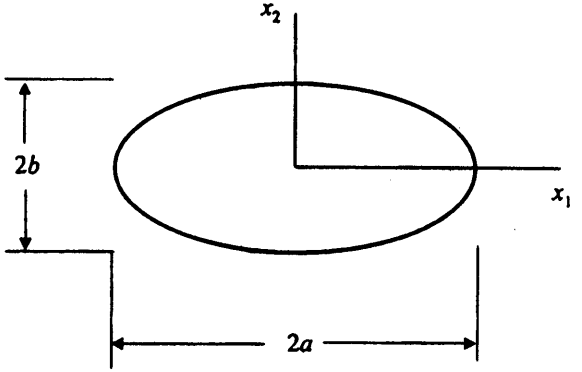
زیرا ϕ روی پیرامون ثابت است. به طور مشابه، به دلیلی یکسان، دومین معادله از معادلهٔ ۶-۸-۱۲ تأمین می‌شود و چون $\sigma_{33} = 0$ سومین معادله نیز تأمین می‌شود. دو شرط اول در معادلهٔ ۶-۸-۱۵ نیز تأمین می‌شوند و سومین آنها به صورت زیر می‌شود:

$$\iint \left[-x_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}\right] dx_1 dx_2 = M_t \qquad (۶-۸-۲۵)$$

با انتگرال‌گیری جزء به جزء و استفاده از این واقعیت که ϕ روی محیط C صفر فرض شده است، نتیجه می‌شود:

$$M_t = 2 \iint \Phi dx_1 dx_2 \qquad (۶-۸-۲۶)$$

بنابراین، حل به این روش مستلزم تعیین تابع تنش ϕ است که این تابع روی محیط مقطع عرضی صفر است و معادله ۶-۸-۲۱ نیز تأمین می‌شود. براساس نتایج بالا، می‌توانیم θ از معادلهٔ ۶-۸-۲۶ را تعیین کنیم.



شکل مثال ۶ - ۸ - ۱

سطح مقطع بیضوی محور جامد

مثال ۶ ـ ۸ ـ ۱: تنش‌ها و زاویهٔ پیچش یک شافت جامد بیضوی با ابعاد نشان داده شده را زمانی که تحت کوپل‌های M_t در دو انتهاست، تعیین کنید.

حل: معادلهٔ این بیضی به صورت زیر است:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

بنابراین تابع تنش ϕ را به شکل زیر بر می‌گزینیم:

$$\Phi = \lambda\left[\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1\right]$$

که λ یک ثابت است. بنابراین، ϕ روی محیط مقطع عرضی صفر است. از معادله ۶-۸-۲۱ داریم:

$$2\lambda\left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right] = -2G\theta$$

بنابراین:

$$\lambda = -\frac{a^2b^2G\theta}{a^2 + b^2}$$

حال از معادله ۶-۸-۲۶ :

$$M_t = -\frac{2a^2b^2G\theta}{a^2 + b^2}\iint\left[\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1\right]dx_1dx_2$$

توجه کنید که:

$$\iint x_1^2 dx_1dx_2 = I_{x2} = \frac{1}{4}\pi ba^3$$

$$\iint x_2^2 dx_1dx_2 = I_{x1} = \frac{1}{4}\pi ab^3$$

و:

$$\iint dx_1dx_2 = \pi ab$$

(مساحت مقطع عرضی است.) می‌توان حل را برای M_t انجام داد:

$$M_t = \frac{\pi a^3b^3G\theta}{a^2 + b^2}$$

از این نتیجه :

$$\theta = \frac{(a^2 + b^2)}{\pi a^3 b^3 G} M_t$$

زمانی که در عبارت اصلی ϕ جایگذاری شود، نتیجه می‌دهد:

$$\Phi = -\frac{M_t}{\pi ab}\left[\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1\right]$$

حال با تعریف:

$$\sigma_{13} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = -\frac{2M_t}{\pi ab^3} x_2 \; ; \quad \sigma_{23} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = -\frac{2M_t}{\pi a^3 b} x_1$$

تنش ماکزیمم در انتهای محور کوچک اتفاق می‌افتد و برابر است با:

$$\tau_{\max} = \pm \frac{2M_t}{\pi ab^2}$$

به آسانی صلبیت پیچشی محاسبه می‌شود که برابر است با:

$$K = \frac{M_t}{\theta} = \frac{\pi a^3 b^3 G}{a^2 + b^2} = \frac{G(A)^2}{4\pi^2 I_p}$$

توجه کنید برای حالتی که $a = b$ (مقطع عرضی دایره‌ای)، تنش حاصل در هر نقطه برابر است با:

$$\tau = \sqrt{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2} = \frac{M_t}{I_p} r$$

که در توافق با تئوری مقدماتی است.

باید اشاره شود که در مورد محورهایی که محیط آنها را نمی‌توان با روابط ساده بیان کرد، حل را می‌توان با استفاده از تابع تنش به شکل سری، به دست آورد. این تحلیل‌ها فراتر از اهداف این بخش مقدماتی است.

۶ - ۹ الاستیسیتهٔ سه بعدی

از نظر تاریخی حل مسائل الاستیسیتهٔ سه بعدی در دو فرمول بندی مجزا مد نظر قرار

گرفته است. اول، **فرمول‌بندی تغییر مکان** است که براساس حل معادلات ناویر در بخش ۶-۴ بیان شد و دوباره در این قسمت نیز توسعه می‌یابند. فرمول بندی دوم، **فرمول بندی تنش** گفته می‌شود که از حل معادلات تعادل به همراه معادلات تنش میشل - بلترامی در بخش ۶-۴ استخراج شدند و براساس معادلات سازگاری برحسب کرنش‌ها بهره می‌گیرد. این معادلات در پاراگراف بعدی نیز یادآوری شده‌اند.

با معادلات اساسی الاستواستاتیک که در بخش ۶-۴ لیست شده‌اند، شروع کرده و دوباره آنها را در اینجا با شماره‌های جدید تکرار می‌کنیم:

معادلات تعادل، معادله ۶-۴-۱،

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = 0 \qquad (۶-۹-۱)$$

معادلات کرنش، تغییر مکان، معادله ۶-۴-۲

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} \qquad (۶-۹-۲)$$

قانون هوک، معادله ۶-۴-۳الف یا ۶-۴-۳ب

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij} \qquad (۶-۹-۳\text{الف})$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}[(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\sigma_{kk}] \qquad (۶-۹-۳\text{ب})$$

با جایگذاری معادله ۶-۹-۲ در قانون هوک، معادلهٔ ۶-۹-۳الف، و قرار دادن نتیجهٔ آن در معادلهٔ ۶-۹-۱، به دست می‌آوریم:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu)u_{j,ji} + \rho b_i = 0 \qquad (۶-۹-۴)$$

که شامل سه معادلهٔ دیفرانسیل جزئی از مرتبهٔ دو است و به عنوان ***معادلات ناویر*** مشهور است. برای فرمول بندی تنش معادلات سازگاری کرنش معرفی شده در بخش ۴-۷ را به معادلهٔ ۴-۷-۳۲ تبدیل کرده و در اینجا آن را تکرار می‌کنیم:

$$\varepsilon_{ij,km} + \varepsilon_{km,ij} - \varepsilon_{ik,jm} - \varepsilon_{jm,ik} = 0 \qquad (۶-۹-۵)$$

به عبارت دیگر، برحسب تنش‌ها با استفاده از معادلهٔ ۶-۹-۳الف و ترکیب آن با معادلهٔ ۶-۹-۱ به دست می‌آوریم:

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{kk,ij} + \rho(b_{i,j} + b_{j,i}) + \frac{\nu}{1+\nu}\delta_{ij}\rho b_{k,k} = 0 \quad (۶-۹-۶)$$

که *معادلات سازگاری میشل ـ بلترامی* هستند. در جست‌وجوی جواب‌ها چه در فرمول بندی تغییر مکان و چه در فرمول بندی تنش، تنها به حالت‌هایی توجه می‌کنیم که نیروهای جسمی صفرند. حضور چنین نیروهایی که اغلب گرانشی یا گریز از مرکزند، همراه حل همگن می‌آید که به طور معمول به شکل انتگرال ویژه‌ای براساس شرایط مرزی ظاهر می‌شود.

اجازه دهید که ابتدا به حل‌های توسعه یافته‌ای در فرمول بندی تغییر مکان توجه کنیم. به جای تلاش برای حل معادلات ناویر به طور مستقیم، میدان تغییر مکان را برحسب پتانسیل‌های برداری و عددی بیان کرده و معادلاتی را که حل آنها پتانسیل‌های مورد نیاز را نتیجه می‌دهند، استخراج می‌کنیم.

با بیان عبارتی برای u_i برحسب پتانسیل‌های مطرح شده در معادلات ناویر، معادلات حاکم برای پتانسیل‌های مناسب را به دست می‌آوریم. اغلب چنین پتانسیل‌هایی توابع هارمونیک یا هارمونیک دوتایی‌اند. سه روش مجزا برای رسیدن به حل معادلات ناویر ارائه خواهیم کرد.

شیوه‌ای که در نخستین روش از آن استفاده شده است، متکی بر تئوری مشهور هلمهولتز است و بیان می‌کند که هر تابع برداری که پیوسته و محدود باشد و در بسیار کوچک صفر شود، قابل تجزیه به یک جفت از مؤلفه‌هاست، یکی بردار چرخش و دیگری بردار غیرچرخش، بنابراین اگر کرل یک بردار دلخواه همچون $\mathbf{a}$ صفر باشد، آنگاه $\mathbf{a}$ گرادیان اسکالری مانند ϕ است و $\mathbf{a}$ *غیرچرخشی* است یا برخی اوقات به آن *سلنودال* گفته می‌شود. به طور همزمان، اگر دیورژانس بردار $\mathbf{a}$ صفر باشد، آنگاه $\mathbf{a}$ کرل بردار دیگری همچون ψ و یک بردار چرخشی است. براین اساس، در توافق با تئوری هلمهولتز فرض می‌کنیم که میدان تغییر مکان به صورت زیر داده شده است:

$$u_i = \phi_{,i} + \varepsilon_{ipq}\psi_{q,p} \quad (۷-۹-۶)$$

که $\phi_{,i}$ بیانگر بخش غیرچرخشی و کرل ψ بخش چرخشی است. جایگذاری این بردار تغییر مکان در معادلهٔ ۶-۹-۴ و b_i که در آن صفر در نظر گرفته شده، یعنی :

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu)u_{j,ji} = 0 \quad (۸-۹-۶)$$

به دست می‌آوریم:

$$\mu\phi_{,ijj} + \mu\varepsilon_{ipq}\psi_{q,pjj} + (\lambda + \mu)\phi_{,ijj} + (\lambda + \mu)\varepsilon_{jpq}\psi_{q,pji} = ۰ \qquad (۶-۹-۹)$$

که به صورت زیر در می‌آید:

$$(\lambda + ۲\mu)\phi_{,ijj} + \mu\varepsilon_{ipq}\psi_{q,pjj} = ۰ \qquad (۶-۹-۱۰)$$

که $\varepsilon_{jpq}\psi_{q,pji} = ۰$ در نمادگذاری نمادین معادله ۶-۹-۱۰ به صورت زیر است:

$$(\lambda + ۲\mu)\nabla\nabla^۲\phi + \mu\nabla \times \nabla^۲\psi = ۰ \qquad (۶-۹-۱۱)$$

هر مجموعهٔ ϕ و ψ که معادله ۶-۹-۱۰ را تأمین کند (هنگامی که درون معادله ۶-۹-۷ جایگذاری شود.)، میدان تغییر مکانی را فراهم می‌کند که معادلهٔ ناویر (۶-۹-۸) تأمین می‌شود. به طور واضح، چنین مجموعه‌ای با لزوم هارمونیک بودن ϕ و ψ به دست می‌آید:

$$\nabla^۲\phi = ۰ \qquad (۶-۹-۱۲\text{الف})$$

$$\nabla^۲\psi = ۰ \qquad (۶-۹-۱۲\text{ب})$$

باید اشاره شود زمانی که معادلهٔ ۶-۹-۱۲ حل معادلهٔ ۶-۹-۸ است، حل عمومی معادلات ناویر نیست. اگر ما ثابت $\nabla^۲\phi =$ و $\psi = ۰$ را در معادلهٔ ۶-۹-۱۲ انتخاب کنیم، تابع اسکالر ϕ به عنوان پتانسیل کرنش لامه مشهور است با گرفتن دیورژانس از معادله ۶-۹-۱۰ و یادآوری این مطلب که دیورژانس کرل صفر است، خواهیم دید که:

$$\nabla^۲\phi = ۰ \qquad (۶-۹-۱۳)$$

که حلی از معادله حاصل به منظور یک تابع هارمونیک دوتایی همچون ϕ نیز به حلی برای u_i منجر می‌شود. به طور مشابه، با گرفتن کرل از معادلهٔ ۶-۹-۱۰ در می‌یابیم که:

$$\nabla^۲\psi = ۰ \qquad (۶-۹-۱۴)$$

که این نیز حلی برای u_i ارائه می‌دهد.

روش دوم برای حل معادلات ناویر براساس قضیه بیان میدان تغییر مکان برحسب

مشتق‌های دوم برداری مشهور به بردار گالرکین است که اینجا به صورت $\mathbf{F} = F_i\hat{\mathbf{e}}_i$ طرح می‌شود. در این روش فرض می‌کنیم که تغییر مکان u_i برحسب ***بردار گالرکین*** به شکل خاص زیر داده شده است:

$$u_i = ۲(۱-\nu)F_{i,jj} - F_{j,ji} \qquad (۶-۹-۱۵)$$

که به طور مستقیم در معادلهٔ ۶-۹-۸ جایگذاری می‌شود. با گرفتن دیفرانسیل اشاره شده و کاهش معادلات حاصل به کمک تساوی $\lambda = \frac{۲\nu\mu}{(۱-۲\nu)}$ در می‌یابیم که معادلات ناویر در صورتی تأمین می‌شوند که:

$$\nabla^۴\mathbf{F} = ۰ \qquad (۶-۹-۱۶)$$

بنابراین هر بردار هارمونیک دوتایی برای بردار گالرکین مناسب است. همان گونه که مورد انتظار است، چون آنها حل معادلهٔ یکسانی هستند، معادله‌ای بین ϕ و ψ با F وجود دارد. می‌توان نشان داد که:

$$\phi = -F_{i,i} \qquad (۶-۹-۱۷\text{الف})$$

و

$$\varepsilon_{ijk}\psi_{k,j} = ۲(۱-\nu)F_{i,jj} \qquad (۶-۹-۱۷\text{ب})$$

اگر F_i فقط هارمونیک دوتایی نباشد، بلکه هارمونیک نیز باشد، آنگاه معادلهٔ ۶-۹-۱۷ب به صورت زیر کاهش می‌یابد:

$$\varepsilon_{ijk}\psi_{k,j} = ۰ \qquad (۶-۹-۱۸\text{الف})$$

و ارتباط بین ϕ و F می‌شود:

$$\phi_{,ii} = -F_{i,jji} \qquad (۶-۹-۱۸\text{ب})$$

در این حالت به ϕ پتانسیل کرنش لامه گفته می‌شود.

مثال ۶ ــ ۹ ــ ۱: با توجه به بردار گالرکین به شکل $\mathbf{F} = F_۳\hat{\mathbf{e}}_۳$ که $F_۳$ تابعی از مختصات است یعنی $F_۳=F_۳(x_۱,x_۲,x_۳)$ و به کارگیری این بردار، حل مسئله‌ای را که در آن نیرویی متمرکز در مبدأ مختصات و در جهت مثبت محور $x_۳$ به یک جسم الاستیک بسیار بزرگ اعمال می‌شود، به دست آورید. به این ***مسئله کلوین*** گفته می‌شود.

حل: اجازه دهید $u_i = ۲(۱-\nu)F_{i,jj}-F_{j,ji}$ همان طور که در معادلهٔ ۶-۹-۱۵ داده شده است. براین اساس،

$$u_۱ = -F_{۳,۳۱}$$
$$u_۲ = -F_{۳,۳۲}$$
$$u_۳ = ۲(۱-\nu)(F_{۳,۱۱} + F_{۳,۲۲} + F_{۳,۳۳}) - F_{۳,۳۳}$$

$F_۳$ را متناسب با مربع فاصله از مبدأ در نظر می‌گیریم و به وسیلهٔ $F_۳ = BR$ که B یک عدد ثابت و $R^۲ = x_۱^۲ + x_۲^۲ + x_۳^۲$ تعریف می‌کنیم، بنابراین تغییر مکان‌ها به صورت زیرند:

$$u_۱ = \frac{Bx_۳x_۱}{R^۳}$$

$$u_۲ = \frac{Bx_۳x_۲}{R^۳}$$

$$u_۳ = B\left[\frac{۴(۱-\nu)}{R} - \frac{x_۱^۲ + x_۲^۲}{R^۳}\right]$$

از این مؤلفه‌های تغییر مکان، تنش‌ها با استفاده از قانون هوک قابل محاسبه‌اند. بویژه می‌توان نشان داد که:

$$\sigma_{۳۳} = \frac{\partial}{\partial x_۳}\left[(۲-\nu)\left(\frac{\partial^۲}{\partial x_۱^۲} + \frac{\partial^۲}{\partial x_۲^۲} + \frac{\partial^۲}{\partial x_۳^۲}\right) - \frac{\partial^۲}{\partial x_۳^۲}\right]BR$$

که با انجام دیفرانسیل‌گیری بیان شده و ترکیب جملاتش می‌شود:

$$\sigma_{۳۳} = -B\left[\frac{۲(۲-\nu)x_۳}{R^۳} - \frac{۳(x_۱^۲ + x_۲^۲)x_۳}{R^۵}\right]$$

این معادله را می‌توان به شکل مناسب‌تری برای انتگرال‌گیری نوشت. این کار با توجه به این که $R^۲=r^۲+x_۳^۲$ و $r^۲=x_۱^۲+x_۲^۲$ است، صورت می‌گیرد. معادله اصلاح شده به صورت زیر است:

$$\sigma_{۳۳} = -B\left[\frac{(۱-۲\nu)x_۳}{R^۳} + \frac{۳x_۳^۳}{R^۵}\right]$$

جمع نیروها در جهت $x_۳$ و روی صفحهٔ ثابت $x_۳ =$ به ما امکان می‌دهد که B را برحسب نیروی اعمالی P تعیین کنیم. انتگرال مورد نیاز به صورت زیر است:

$$P = \int_{0}^{\infty} (-\sigma_{rr}) 2\pi r \, dr$$

اما $rdr = RdR$ و بنابراین:

$$P = 2\pi B\left[(1-2\nu)x_3 \int_{x_3}^{\infty} \frac{dR}{R^2} + 3x_3^2 \int_{x_3}^{\infty} \frac{dR}{R^4}\right]$$

و از آن در می‌یابیم که :

$$B = \frac{P}{4\pi(1-\nu)}$$

روش سوم برای حل معادلات ناویر علاوه بر این دو روش توضیح داده شده، **حل پاپکویچ ـ نوبر** *(Papkovich - Neuber)* گفته می‌شود که به معادلاتی برحسب توابع هارمونیک از یک اسکالر و یک بردار پتانسیل منجر می‌شود. برای این حالت بردار تغییر مکان به گونه‌ای که با یک پتانسیل اسکالر B، بردار پتانسیل V و بردار موقعیت x_i بیان شود، به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$u_i = V_i - B_{,i} - \frac{(V_k x_k)_{,i}}{4(1-\nu)} \qquad (۶-۹-۱۹)$$

که وقتی در معادلات همگن ناویر جایگذاری و با استفاده از تساوی $\lambda = \frac{2\nu\mu}{(1-2\nu)}$ ساده‌سازی شوند، به دست می‌آوریم:

$$\mu V_{i,jj} - (\lambda + 2\mu)B_{,ijj} - \frac{1}{2}(\lambda + \mu)(V_{k,ijj}x_k + V_{i,jj}) = 0 \qquad (۶-۹-۲۰)$$

این معادلات به وضوح زمانی که شرایط زیر برقرار باشد، تأمین می‌شوند.

$$\nabla^2 \mathbf{V} = 0 \qquad (۶-۹-۲۱\text{الف})$$

و

$$\nabla^2 B = 0 \qquad (۶-۹-۲۱\text{ب})$$

و بیانگر این است که هر چهار تابع هارمونیک، V_i با $i = 1,2,3$ و B برای ارائهٔ بردار تغییر مکان u_i از معادله ۶-۹-۱۹ که معادلات ناویر را تأمین می‌کند، به کار گرفته خواهد شد. از آنجا که بردار تغییر مکان تنها سه مؤلفه دارد، چهار تابع اسکالر V_i و B به طور کامل مستقل از هم نیستند و قابل کاهش به سه تابع اسکالرند. می‌توان نشان داد که این پتانسیل‌ها با بردار گالرکین طبق معادله زیر وابسته‌اند:

$$\mathbf{V} = ۲(۱ - \nu)\nabla^{۲}\mathbf{F} \qquad (۶ - ۹ - ۲۲\text{الف})$$

و

$$B = \nabla.\mathbf{F} - \frac{\mathbf{V}.\mathbf{x}}{۴(۱-\nu)} \qquad (۶ - ۹ - ۲۲\text{ب})$$

در صورتی که حل معادلات ناویر به طور مستقیم برای مسائل شامل جسمی با هندسهٔ دلخواه و نامشخص به طور معمول امکان‌پذیر نیست و تنها برای حالات خاص تقارن کروی یک حل مقدماتی در دسترس است. حالتی را که یک کره توخالی با شعاع داخلی $r_۱$ و شعاع خارجی $r_۲$ تحت فشار داخلی $p_۱$ و فشار خارجی $p_۲$ است، در نظر بگیرید. براساس شرایط تقارن در اینجا میدان تغییر مکانی به صورت زیر فرض می‌کنیم:

$$u_i = \phi(r)x_i \qquad (۶ - ۹ - ۲۳)$$

که $r^{۲} = x_i x_i$ و ϕ تنها به r وابسته است. با جایگذاری مستقیم معادلهٔ ۶-۹-۲۳ در معادلهٔ ۶-۹-۸ به معادلهٔ دیفرانسیل معمولی زیر می‌رسیم:

$$\frac{d^{۲}\phi}{dr^{۲}} + \frac{۴}{r}\frac{d\phi}{dr} = ۰ \qquad (۶ - ۹ - ۲۴)$$

که حل عمومی چنین معادله‌ای را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\phi(r) = A_{۱} + \frac{A_{۲}}{r^{۳}} \qquad (۶ - ۹ - ۲۵)$$

که $A_{۱}$ و $A_{۲}$ ثابت‌های انتگرال‌گیری هستند و به شرایط مرزی وابسته‌اند. معادلهٔ ۶-۹-۳ برحسب مشتق‌های تغییر مکان نوشته شده و دارای شکل زیر است:

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}u_{k,k} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad (۶ - ۹ - ۲۶)$$

که با استفاده از معادلات ۶-۹-۲۳ و ۶-۹-۲۵ داریم:

$$\sigma_{ij} = ۳\lambda A_{۱}\delta_{ij} + ۲\mu\left[\left(A_{۱} + \frac{A_{۲}}{r^{۳}}\right)\delta_{ij} - \frac{۳A_{۲}x_i x_j}{r^{۵}}\right] \qquad (۶ - ۹ - ۲۷)$$

به خاطر آورید که بردار کشش در جهت شعاعی (معادله ۳-۷-۱ را ببینید.) $\sigma_N = \sigma_{ij}n_i n_j$ است که براساس جایگذاری معادله ۶-۹-۲۵ می‌شود:

$$\sigma_N = (3\lambda + 2\mu)A_1 + \frac{4\mu A_2}{r^3} \qquad (۶ - ۹ - ۲۸)$$

که تساوی $x_i = rn_i$ استفاده شده است. به طور مشابه، کشش مماسی قابل محاسبه با استفاده از $\sigma_s = \sigma_{ij}\nu_i\nu_j$ می‌باشد، که ν_i بردار یکهٔ عمود بر n_i است. نتیجه به صورت زیر است:

$$\sigma_S = (3\lambda + 2\mu)A_1 + \frac{2\mu A_2}{r^3} \qquad (۶ - ۹ - ۲۹)$$

زیرا $\nu_i x_i = 0$.

ثابت‌های A_1 و A_2 از شرایط مرزی حاکم بر کشش تعیین می‌شوند، واضح است که،

$$\sigma_N = -p_1 \quad \text{در} \quad r = r_1$$

$$\sigma_N = -p_2 \quad \text{در} \quad r = r_2$$

با انجام عملیات جبری اشاره شده، فرمول‌های مشهور زیر را داریم:

$$\sigma_N = \frac{p_1 r_1^3 - p_2 r_2^3}{r_2^3 - r_1^3} - \frac{r_1^3 r_2^3}{r^3}\frac{p_1 - p_2}{r_2^3 - r_1^3} \qquad (۶ - ۹ - ۳۰\text{الف})$$

$$\sigma_S = \frac{p_1 r_1^3 - p_2 r_2^3}{r_2^3 - r_1^3} + \frac{r_1^3 r_2^3}{2r^3}\frac{p_1 - p_2}{r_2^3 - r_1^3} \qquad (۶ - ۹ - ۳۰\text{ب})$$

این معادلات به راحتی برای دربرگرفتن حالتی که $p_1 = 0$ یا حالتی که $p_2 = 0$ باشد، قابل اصلاح‌اند. این بخش را با بحث مختصری در مورد توابع تنش سه بعدی به پایان می‌بریم. این توابع به منظور به دست آوردن حل‌هایی برای معادلات تعادل، طرح می‌شوند. علاوه بر این، به منظور کامل بودن حل باید آن با معادلات میشل - بلترامی سازگار باشد. با معادلات تعادل در غیاب نیروهای جسمی شروع می‌کنیم.

$$\sigma_{ij,j} = 0 \qquad (۶ - ۹ - ۳۱)$$

میدان تنش به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\sigma_{ij} = \varepsilon_{ipq}\varepsilon_{jkm}\Phi_{qk,pm} \qquad (۶ - ۹ - ۳۲)$$

که Φ_{qk} تابع متقارن تانسوری از مختصات است. با بسط مستقیم این معادله، مؤلفه‌های تنش را می‌توان برحسب پتانسیل Φ_{qk} بیان کرد. برای مثال،

$$\sigma_{11} = \varepsilon_{1pq}\varepsilon_{1km}\Phi_{qk,pm} \qquad (۶ - ۹ - ۳۳)$$

که با جمع روی اندیس‌های تکراری و توجه به خاصیت جابه‌جایی نماد جایگشت به صورت زیر درمی‌آید:

$$\sigma_{11} = 2\Phi_{22,23} - \Phi_{22,23} - \Phi_{33,22} \qquad (۶-۹-۳۴الف)$$

به طور مشابه،

$$\sigma_{22} = 2\Phi_{13,13} - \Phi_{11,33} - \Phi_{33,11} \qquad (۶-۹-۳۴ب)$$

$$\sigma_{33} = 2\Phi_{12,12} - \Phi_{11,22} - \Phi_{22,11} \qquad (۶-۹-۳۴پ)$$

$$\sigma_{12} = \Phi_{12,33} + \Phi_{33,12} - \Phi_{23,31} - \Phi_{13,32} \qquad (۶-۹-۳۴ت)$$

$$\sigma_{23} = \Phi_{23,11} + \Phi_{11,23} - \Phi_{12,13} - \Phi_{13,12} \qquad (۶-۹-۳۴ث)$$

$$\sigma_{31} = \Phi_{31,22} + \Phi_{22,31} - \Phi_{12,23} - \Phi_{32,21} \qquad (۶-۹-۳۴ج)$$

می‌توان با جایگذاری مستقیم نشان داد که معادلات تعادل با این مؤلفه‌های تنش تأمین می‌شوند.

با صفر قرار دادن جمله‌های غیرقطری Φ_{qk}، یعنی اگر $\Phi_{12} = \Phi_{23} = \Phi_{31} = 0$، حل پیشنهادی ماکسول *(Maxwell)* را به دست می‌آوریم. با صفر قرار دادن جمله‌های قطری Φ_{qk}، یعنی $\Phi_{11} = \Phi_{22} = \Phi_{33} = 0$، به حلی می‌رسیم که توسط موررا *(Morera)* پیشنهاد شده و به همان نام نیز شناخته می‌شود. توجه به این موضوع جالب است که اگر همهٔ مؤلفه‌های Φ_{qk} به جز Φ_{33} صفر باشند، این مؤلفه تابع تنش ایری بوده که در بخش ۶-۷ معرفی شده است و به وسیلهٔ معادله ۶-۹-۳۴ قابل بررسی است. اگرچه پتانسیل Φ_{qk} ما را به حلی برای معادلات تعادل سوق می‌دهد، ولی حل در توافق با معادلات میشل - بلترامی نیست مگر تحت شرایط خاص.

مسائل

۶ - ۱ در حالت عمومی ، چگالی انرژی کرنشی u^* به شکل قابل بیان است.

$$u^* = C^*_{\alpha\beta}\,\varepsilon_\alpha\,\varepsilon_\beta \qquad (\alpha\,,\,\beta = ۱\,,...,\,۶)$$

که در آن $C^*_{\alpha\beta}$ لزوماً متقارن نمی‌باشد. نشان دهید که این معادله را می‌توان با ترکیب مجدد به شکل زیر درآورد.

$$u^* = \tfrac{۱}{۲}\,C_{\alpha\beta}\,\varepsilon_\alpha\,\varepsilon_\beta$$

که در آن $C_{\alpha\beta}$ متقارن است، در نتیجه اکنون داریم

$$\frac{\partial u^*}{\partial \varepsilon_\beta} = C_{\alpha\beta}\,\varepsilon_\alpha = \sigma_\beta$$

که در توافق با معادله ۶ - ۱ - ۸ می‌باشد.

۶ - ۲ اگر تانسورهای تنش و کرنش به مولفه‌های انحراف و کروی مربوطه تجزیه شده باشند. یک رابطه‌ای برای چگالی انرژی کرنشی u^* به‌صورت جمع یک چگالی انرژی اتساع $u^*_{(۱)}$ و یک چگالی انرژی تحریف $u^*_{(۲)}$ تعیین کنید.

پاسخ : $u^* = u^*_{(۱)} + u^*_{(۲)} = \tfrac{۱}{۶}\,\sigma_{ii}\,\varepsilon_{jj} + \tfrac{۱}{۲}\,S_{ij}\,\eta_{ij}$

۶ - ۳ اگر چگالی انرژی کرنشی u^* عمومیت داده شده باشد. بدین معنی که فرض شده یک تابعی از مولفه‌های گرادیان تغییرشکل بجای مولفه‌های کرنش کوچک باشد، یعنی اگر $u^* = u^*\,(F_{iA})$ باشد با استفاده از معادله انرژی و معادله پیوستگی نشان دهید که در این حالت معادله ۶ - ۱ - ۱۶ با معادله زیر جایگزین می‌شود.

$$J\sigma_{ij} = \frac{\partial u^*}{\partial F_{iA}}\,F_{jA}$$

۶ - ۴ برای یک ماده الاستیک همسانگرد که توسط معادله ۶ - ۲ - ۲ تعریف شده است، چگالی انرژی کرنشی را برحسب موارد زیر بیان کنید.

(الف) مولفه‌های ε_{ij}

(ب) مولفه‌های σ_{ij}

(پ) پایاهای ε_{ij}

پاسخ : (الف) $u^* = \frac{1}{2}(\lambda\, \varepsilon_{ii}\, \varepsilon_{jj} + 2\,\mu \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{ij})$

(ب) $u^* = \dfrac{(3\,\lambda + 2\,\mu)\,\sigma_{ij}\,\sigma_{ij} - \lambda\,\sigma_{ii}\,\sigma_{jj}}{4\,\mu\,(3\,\lambda + 2\,\mu)}$

(پ) $u^* = \left(\frac{1}{2}\,\lambda + \mu\right)(\mathbf{I}_\varepsilon)^2 - 2\,\mu \mathbf{II}_\varepsilon$

۶ - ۵ اگر T_{ij} هر تانسور همسانگرد مرتبه دوم باشد به‌گونه‌ای که

$$T'_{ij} = a_{im}\, a_{jn}\, T_{mn} = T_{ij}$$

برای هر انتقال متعامد مقتضی a_{ij} با کاربرد متوالی انتقال‌های

$$[\,a_{ij}\,] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad [\,a_{ij}\,] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

نشان دهید که هر تانسور همسانگرد مرتبه دوم مضربی عددی از دلتای کرانکر δ_{ij} می‌باشد.

۶ - ۶ بررسی کنید که از ترکیب معادلات ۶ - ۲ - ۱۲ الف و ۶ - ۲ - ۱۲ ب و با استفاده از معادلات ۶ - ۲ - ۸ الف و ب ، معادله ۶ - ۲ - ۷ نتیجه می‌شود.

۶ - ۷ برای یک ماده الاستیک، با استفاده از معادله ۶ - ۲ - ۱۲ نتیجه بدست آمده در مسئله ۶ - ۲ را برحسب ثابت‌های الاستیک مهندسی K و G بیان کنید.

پاسخ : $u^* = \frac{1}{2}\,k\,\varepsilon_{ii}\,\varepsilon_{jj} + G\,(\varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\,\varepsilon_{ii}\,\varepsilon_{jj})$

۶ - ۸ نشان دهید که چگالی انرژی تحریف $u^*_{(2)}$ برای یک ماده الاستیک خطی را می‌توان برحسب

(الف) تنش‌های اصلی و (ب) کرنش‌های اصلی به‌صورت زیر بیان کرد.

$$u^*_{(۲)} = \frac{(\sigma_۱ - \sigma_۲)^۲ + (\sigma_۲ - \sigma_۳)^۲ + (\sigma_۳ - \sigma_۱)^۲}{۱۲\, G} \qquad \text{(الف)}$$

$$u^*_{(۲)} = \frac{۱}{۳} \left[(\varepsilon_۱ - \varepsilon_۲)^۲ + (\varepsilon_۲ - \varepsilon_۳)^۲ + (\varepsilon_۳ - \varepsilon_۱)^۲ \right] G \qquad \text{(ب)}$$

۶ - ۹ از تعریف u^* (معادله ۶ - ۱ - ۲۱ الف) شروع کنید. نشان دهید برای یک ماده الاستیک خطی که توسط معادله ۶ - ۲ - ۲ یا ۶ - ۲ - ۷ ارائه شده باشد، آنگاه خواهیم داشت $\partial u^* / \partial \varepsilon_{ij} = \sigma_{ij}$ $\partial u^* / \partial \sigma_{ij} = \varepsilon_{ij}$ (توجه شود که $\partial \varepsilon_{ij} / \partial \varepsilon_{mn} = \delta_{im}\, \delta_{jn}$)

۶ - ۱۰ برای یک جسم صلب الاستیک خطی همسانگرد، محورهای اصلی تنش و کرنش بر هم منطبق هستند همان گونه که در مثال ۶ - ۲ - ۱ ملاحظه شد. نشان دهید که این نتیجه را می‌توان برحسب ثابت‌های مهندسی E و ν به‌صورت زیر بیان کرد.

$$\varepsilon_{(q)} = \frac{(۱ + \nu)\sigma_{(q)} - \nu \left[\sigma_{(۱)} + \sigma_{(۲)} + \sigma_{(۳)} \right]}{E}, \qquad (q = ۱, ۲, ۳)$$

سپس برای $E = ۱۰^۶\ psi$ و $\nu = ۰/۲۵$ کرنش‌های اصلی را برای جسمی که تحت میدان تنش (برحسب ksi) به‌صورت زیر می‌باشد تعیین کنید.

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} ۱۲ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۴ & ۰ & ۶ \end{bmatrix}$$

پاسخ : $\varepsilon_{(۳)} = ۱۳ \times ۱۰^{-۶}$, $\varepsilon_{(۲)} = ۰/۵ \times ۱۰^{-۶}$, $\varepsilon_{(۱)} = -۴/۵ \times ۱۰^{-۶}$

۶ - ۱۱ برای یک ماده الاستیک همسانگرد نشان دهید که

(الف) $\frac{۱}{۱ + \nu} = \frac{۲(\lambda + \mu)}{۳\lambda + ۲\mu}$ (ب) $\frac{\nu}{۱ - \nu} = \frac{\lambda}{\lambda + ۲\mu}$

(پ) $\frac{۲\mu\nu}{۱ - ۲\nu} = \frac{۳K\nu}{۱ + \nu}$ (ت) $۲\mu(۱ + \nu) = ۳K(۱ - ۲\nu)$

۶ - ۱۲ صفحه x_2x_3 یک صفحه الاستیک متقارن است بطوری که ماتریس انتقال محورهای $ox_1x_2x_3$ و $ox'_1x'_2x'_3$ عبارت است از

$$[\,a_{ij}\,] = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

نشان دهید، همانگونه که در این کتاب اثبات شده است، تقارن اضافی تاثیری بر کاهش بیشتر روی ماتریس ثابت‌های الاستیک ندارد (یعنی معادله ۶ - ۳ - ۷)

۶ - ۱۳ اگر محور x_1 یک محور تقارن الاستیک مرتبه $N = ۲$ باشد، ماتریس ثابت‌های الاستیک $C_{\alpha\beta}$ را با فرض اینکه $C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}$ است تعیین کنید.

پاسخ :

$$[\,C_{\alpha\beta}\,] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & ۰ & ۰ \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & ۰ & ۰ \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & ۰ & ۰ \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & C_{55} & C_{56} \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix}$$

۶ - ۱۴ فرض کنید از بحث‌های تقارن الاستیک، ماتریس ثابت‌های الاستیک برای جسم همسانگرد به شکل زیر کاهش یافته است.

$$[\,C_{\alpha\beta}\,] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & ۰ & ۰ & ۰ \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & ۰ & ۰ & ۰ \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & C_{44} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & C_{44} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & C_{44} \end{bmatrix}$$

نشان دهید که اگر محور x_1 به‌عنوان محور تقارن الاستیک از هر مرتبه‌ای (θ اختیاری است) در نظر گرفته شود، آنگاه $C_{11} = C_{12} + 2\,C_{44}$ خواهد بود (راهنمایی : عبارات $\sigma'_{23} = a_{2q}\,a_{3m}\,\sigma_{qm}$ و $\varepsilon'_{23} = a_{2q}\,a_{3m}\,\varepsilon_{qm}$ را بسط دهید).

۶ - ۱۵ اگر محوری که زوایای مساوی با محورهای مختصات می‌سازد محور تقارن الاستیک مرتبه $N = 3$ باشد، نشان دهید که دوازده ثابت الاستیک مستقل وجود دارد و ماتریس الاستیک به‌صورت زیر می‌باشد.

$$[\,C_{\alpha\beta}\,] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{13} & C_{11} & C_{12} & C_{16} & C_{14} & C_{15} \\ C_{12} & C_{13} & C_{11} & C_{15} & C_{16} & C_{14} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{43} & C_{41} & C_{42} & C_{46} & C_{44} & C_{45} \\ C_{42} & C_{43} & C_{41} & C_{45} & C_{46} & C_{44} \end{bmatrix}$$

۶ - ۱۶ برای یک جسم الاستیک که محور x_3 آن یک محور تقارن الاستیک مرتبه $N = 6$ است، نشان دهید که ثابت‌های الاستیک غیرصفر آن عبارتند از $C_{11} = C_{22}$, C_{33} , $C_{55} = C_{44}$, $C_{66} = \frac{1}{2}\,(C_{11} - C_{12})$ و $C_{13} = C_{23}$.

۶ - ۱۷ فرمولی برحسب مولفه‌های کرنش برای چگالی انرژی کرنشی u^* در حالتی که ماده الاستیک ارتوتروپیک باشد توسعه دهید.

پاسخ :

$$u^* = \frac{1}{2}\,(C_{11}\varepsilon_1 + 2\,C_{12}\varepsilon_2 + 2\,C_{13}\,\varepsilon_3)\,\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\,(C_{22}\varepsilon_2 + 2\,C_{23}\varepsilon_3)\,\varepsilon_2$$

$$+ \frac{1}{2}\,(C_{33}\varepsilon_3^2 + C_{44}\varepsilon_4^2 + C_{55}\varepsilon_5^2 + C_{66}\varepsilon_6^2)$$

۶ - ۱۸ نشان دهید برای یک محیط پیوسته الاستیک که دارای محور x_1 به‌عنوان محور تقارن الاستیک مرتبه $N = 2$ است، چگالی انرژی کرنشی دارای همان شکلی خواهد بود که برای یک محیط پیوسته ، صفحه x_2x_3 صفحه تقارن الاستیک باشد.

پاسخ :

$$۲u^* = \varepsilon_۱(C_{۱۱}\varepsilon_۱ + ۲C_{۱۲}\varepsilon_۲ + ۲C_{۱۳}\varepsilon_۳ + ۲C_{۱۳}\varepsilon_۴) + \varepsilon_۲ (C_{۲۲}\varepsilon_۲ + ۲C_{۲۳}\varepsilon_۳ + ۲ C_{۲۳}\varepsilon_۴)$$

$$+ \varepsilon_۳ (C_{۳۳}\varepsilon_۳ + ۲ C_{۳۳}\varepsilon_۴) + C_{۴۴}\varepsilon_۴^۲ + \varepsilon_۵ (C_{۵۵}\varepsilon_۵ + ۲ C_{۵۶}\varepsilon_۶) + C_{۶۶}\varepsilon_۶^۲$$

۶ - ۱۹ میدان تنش برای یک محیط پیوسته عبارت است از

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} x_۱ + x_۲ & \sigma_{۱۲} & ۰ \\ \sigma_{۱۲} & x_۱ - x_۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & x_۲ \end{bmatrix}$$

که در آن $\sigma_{۱۲}$ تابعی از $x_۱$ و $x_۲$ می‌باشد. اگر معادلات تعادل در غیاب نیروهای حجمی تامین بشوند و اگر بردار تنش روی صفحه $x_۱ = ۱$ توسط $\mathbf{t}^{(\hat{\mathbf{e}}_۱)} = (۱ + x_۲)\,\hat{\mathbf{e}}_۱ + (۶ - x_۲)\,\hat{\mathbf{e}}_۲$ ارائه بشود، $\sigma_{۱۲}$ را به‌صورت تابعی از $x_۱$ و $x_۲$ بیان کنید.

پاسخ : $\sigma_{۱۲} = x_۱ - x_۲ + ۵$

۶ - ۲۰ معادله ۶ - ۴ - ۳ ب را معکوس کنید تا قانون هوک به شکل زیر بیان شود.

$$\sigma_{ij} = \frac{۲G}{۱ - ۲\nu}(\varepsilon_{ij} + \nu\varepsilon_{kk}\delta_{ij})$$

ترکیبی از این عبارت با معادلات ۶ - ۳ - ۲ و ۶ - ۴ - ۱ منجر به معادله ناویر به‌صورت زیر می‌شود.

$$\frac{G}{۱ - ۲\nu}(u_{i,jj} + u_{j,ij})\rho b_i = ۰$$

واضح است که این معادله به‌ازای $\nu = ۰/۵$ نامعین است. امّا نشان دهید که در این حالت قانون هوک و معادلات تعادل نتیجه می‌دهد

$$Gu_{i,jj} + \frac{۱}{۳}\sigma_{jj,i} + \rho b_i = ۰$$

۶ - ۲۱ میدان تغییرمکان برحسب بردارهایی به‌صورت q_i توسط معادله زیر ارائه شده است.

$$u_i = \frac{۲\,(۱ - \nu)\, q_{i,jj} - q_{j,ji}}{G}$$

نشان دهید که معادله ناویر (معادله ۶ - ۴ - ۷) تامین می‌شود و ایجاب می‌کند $b_i \equiv ۰$ و q_i هارمونیک دوتایی باشد یعنی $q_{i,jjkk} = ۰$. اگر $q_۱ = x_۲ / r$ و $q_۲ = -x_۱ / r$ باشد که در آن $r^۲ = x_i x_i$ است، میدان تنش حاصله را تعیین کنید.

پاسخ :

$$\sigma_{۱۱} = -\sigma_{۲۲} = ۶\, Q x_۱ x_۲ / r^۵ \quad , \quad \sigma_{۳۳} = ۰ \, , \quad \sigma_{۱۲} = ۳\, QG\, (x_۲^۲ - x_۱^۲) / r^۵$$

$$\sigma_{۱۳} = -\sigma_{۳۱} = ۳\, Q x_۲ x_۳ / r^۵ \quad , \quad \sigma_{۲۳} = ۰ \, , \quad Q = ۴\,(۱ - \nu) / G$$

۶ - ۲۲ اگر نیروهای حجمی برابر صفر باشند، نشان دهید که معادله الاستودینامیک ناویر (معادله ۶ - ۴ - ۱۱) با میدان تغییرمکان زیر تامین می‌شود.

$$u_i = \phi_{,i} + \varepsilon_{ijk}\, \psi_{k,j}$$

که توابع پتانسیل ϕ و $\psi_{,k}$ معادلات سه بعدی موج را تامین می‌کنند.

۶ - ۲۳ نشان دهید که برای تنش صفحه‌ای قانون هوک یعنی معادلات ۶ - ۵ - ۵ و ۶ - ۵ - ۶ را می‌توان برحسب ثابت‌های لامه λ و μ به‌صورت زیر بیان کرد.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{۱}{۲\,\mu}\left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{۳\,\lambda + ۲\,\mu}\,\delta_{ij}\,\sigma_{kk}\right), \quad (i\,,\, j\,,\, k = ۱\,,\, ۲)$$

$$\varepsilon_{۳۳} = -\frac{\lambda}{۲\,\mu\,(۳\,\lambda + ۲\,\mu)}\,\sigma_{ii}\,, \qquad (i = ۱\,,\, ۲)$$

۶ - ۲۴ برای حالت تنش صفحه‌ای مولفه‌های تنش برحسب تابع $\phi = \phi\,(x_۱\,,\, x_۲)$ که معروف به تابع تنش ایری می‌باشد، توسط رابطه زیر تعریف شده‌اند.

$$\sigma_{۱۱} = \phi_{,۲۲}\,, \qquad \sigma_{۲۲} = \phi_{,۱۱}\,, \qquad \sigma_{۱۲} = -\phi_{,۱۲}$$

نشان دهید که ϕ باید معادله هارمونیک دوتایی $\nabla^{۴}\phi = ۰$ را تامین کند و از آنجا در غیاب نیروهای حجمی، معادلات تعادل مشخصاً توسط این مولفه‌های تنش تامین بشوند. اگر $\phi = Ax_{۱}^{۳}x_{۲}^{۲} - Bx_{۱}^{۵}$ باشد که در آن A و B ثابت‌ها هستند، رابطه‌ای بین A و B برای اینکه تابع تنش معتبری باشد تعیین کنید.

پاسخ : $A = ۱۰\, B$

۶ - ۲۵ یک رابطه‌ای برای چگالی انرژی کرنشی u^* توسعه دهید که ماده الاستیک در حالت (الف) تنش صفحه‌ای (ب) کرنش صفحه‌ای باشد.

پاسخ : (الف)
$$u^* = [\, \sigma_{۱۱}^{۲} + \sigma_{۲۲}^{۲} - ۲\nu\sigma_{۱۱}\sigma_{۲۲} + ۲(۱ + \nu)\sigma_{۱۲}^{۲}] / ۲E$$

(ب)
$$u^* = (\mu + \tfrac{۱}{۲}\lambda)(\varepsilon_{۱۱}^{۲} + \varepsilon_{۲۲}^{۲}) + \lambda\varepsilon_{۱۱}\varepsilon_{۲۲} + ۲\mu\varepsilon_{۱۲}^{۲}$$

۶ - ۲۶ نشان دهید که $\phi = x_{۱}^{۲}x_{۲} + ۴x_{۱}^{۲}x_{۲}^{۳} - x_{۲}^{۵}$ یک تابع تنش ایری معتبر است. یعنی $\nabla^{۴}\phi = ۰$ می‌باشد و تانسور تنش برای این حالت با فرض اینکه یک بیان کرنش صفحه‌ای $\nu = ۰/۲۵$ است محاسبه کنید.

پاسخ :

$$[\, \sigma_{ij} \,] = \begin{bmatrix} ۲۴x_{۱}^{۲}x_{۲} - ۲۰x_{۲}^{۳} & -۴x_{۱}^{۳} - ۲۴x_{۱}x_{۲}^{۲} & ۰ \\ -۴x_{۱}^{۳} - ۲۴x_{۱}x_{۲}^{۲} & ۱۲x_{۱}^{۲}x_{۲} + ۸x_{۲}^{۳} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۹x_{۱}^{۲}x_{۲} - ۳x_{۲}^{۳} \end{bmatrix}$$

۶ - ۲۷ معکوس معادله ۶ - ۶ - ۳ در معادله ۶ - ۶ - ۴ را بررسی کنید. همچنین نشان دهید که دو معادله موجود در معادله ۶ - ۶ - ۵ را می‌توان با هم ترکیب تا معادله ۶ - ۶ - ۴ ایجاد شود.

۶ - ۲۸ معادلات اساسی مقتضی برای ترموالاستیسیته در حالت (الف) تنش صفحه‌ای (ب) کرنش صفحه‌ای را توسعه دهید.

پاسخ :

(الف)
$$\varepsilon_{ij} = [(۱ + \nu)\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\sigma_{kk}] / E + \delta_{ij}(T - T_{۰})\alpha, \qquad (i, j, k = ۱, ۲)$$

$$\varepsilon_{۳۳} = -\nu\sigma_{ii} / E + \alpha(T - T_{۰}), \qquad (i = ۱, ۲)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + ۲ \mu \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} (۳ \lambda + ۲ \mu)\alpha (T - T_۰), \quad (i, j, k = ۱, ۲) \quad \text{(ب)}$$

$$\sigma_{۳۳} = \nu \sigma_{ii} - \alpha E (T - T_۰) = \lambda \varepsilon_{ii} - (۳ \lambda + ۲ \mu)\alpha (T - T_۰), \quad (i = ۱, ۲)$$

۶ - ۲۹ با توجه به تابع تنش ایری زیر

$$\phi_۵ = D_۵ x_۱^۲ x_۲^۳ + F_۵ x_۲^۵$$

الف) نشان دهید که برای این تابع تنش $F_۵ = -\frac{D_۵}{۵}$ معتبر است.

ب) تابع تنش مرکب زیر را تشکیل داده

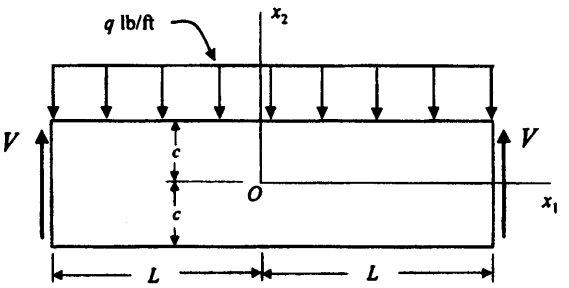
$$\phi = \phi_۵ + \phi_۳ + \phi_۲$$

که

$$\phi = D_۵(x_۱^۲ x_۲^۳ - \frac{۱}{۵} x_۲^۵) + \frac{۱}{۲} B_۳ x_۱^۲ x_۲ + \frac{۱}{۲} A_۳ x_۱^۲ x_۲$$

برای این تابع تنش نشان دهید که مؤلفه‌های تنش به صورت زیر هستند.

$$\sigma_{۱۱} = D_۵(۶ x_۱^۲ x_۲ - ۴ x_۲^۳)$$
$$\sigma_{۲۲} = ۲ D_۵ x_۲^۳ + B_۳ x_۲ + A_۲$$
$$\sigma_{۱۲} = -۶ D_۵ x_۱ x_۲^۲ - B_۳ x_۱$$



۶ - ۳۰ یک تیر مستطیلی با عرض واحد و طول $۲L$، بارگسترده یکنواخت $q\frac{lb}{ft}$ را طابق شکل تحمل می‌کند. نیروهای برشی V در دو انتها تیر را نگه می‌دارند. شش شرط مرزی برای این تیر را که تنش‌ها باید تأمین کنند، فهرست کنید.

۶ - ۳۱ با استفاده از شرایط مرزی ۱و۲و۳ فهرست شده در مسئله ۶-۳۰، نشان دهید که تنش‌ها در مسئله

۶-۲۹ لازم است که

$$A_2 = -\frac{q}{2}; \quad B_3 = -\frac{3q}{4c}; \quad D_5 = \frac{q}{8c^3}$$

بنابراین، برای تیر نشان داده تنش‌ها به صورت زیر است.

$$\sigma_{11} = \frac{q}{2I}\left(x_1^2 x_2 - \frac{2}{3}x_2^3\right)$$

$$\sigma_{22} = \frac{q}{2I}\left(\frac{1}{3}x_2^3 - c^2 x_2 - \frac{2}{3}c^3\right)$$

$$\sigma_{12} = \frac{q}{2I}\left(x_1^2 x_2^2 + c^2 x_1\right)$$

که $I = \frac{2}{3}c^3$ ممان اینرسی سطح مقطع عرضی تیر است.

۶ - ۳۲ نشان دهید که با استفاده از تنش‌های محاسبه شده در مسئله ۶-۳۱، شرایط مرزی ۴و۵ تأمین می‌شوند، ولی شرط مرزی ۶ تأمین نمی‌شود.

۶ - ۳۳ به دنبال مسائل ۶-۳۱ و ۶-۳۲، و به منظور تأمین شرط مرزی ۶ یک جملهٔ اضافی به تابع تنش اضافه می‌شود، یعنی

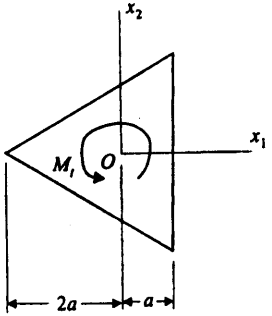
$$\phi_3 = D_3 x_2^3$$

نشان دهید که براساس شرط مرزی ۶

$$D_3 = \frac{3q}{4c}\left(\frac{1}{15} - \frac{L^2}{6c^2}\right),$$

در نهایت داریم:

$$\sigma_{11} = \frac{q}{2I}\left[x_1^2 - \frac{2}{3}x_2^2 + \frac{1}{15}c^2 - \frac{1}{6}L^2\right]x_2.$$



۶ - ۳۴ نشان دهید که برای یک شافت با مقطع عرضی به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع تابع تابیدگی به صورت زیر است:

$$\psi(x_1 , x_2) = \lambda(x_2^3 - 3x_1^2 x_2)$$

تعیین کنید:

الف) ثابت λ برحسب ابعاد شافت.

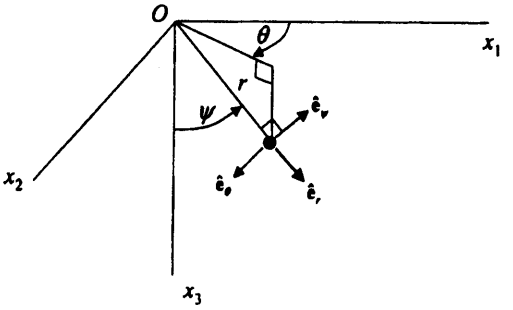
ب) صلبیت پیچشی K

ج) ماکزیمم تنش برشی.

(الف) $$\lambda = -\frac{1}{6a^2},$$

(ب) $$K = \frac{9\sqrt{3}a^4}{5},$$

(ج) $$\sigma_{23}\big]_{\max} = \frac{3M_t a}{2K} \quad \text{در } x_1 = a, \quad x_2 = 0$$



۶ - ۳۵ با توجه به بردار گالرکین که جمع سه نیروی مضاعف است، یعنی:

$$\mathbf{F} = B\left(\frac{x_1}{r}\,\hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{x_2}{r}\,\hat{\mathbf{e}}_2 + \frac{x_3}{r}\,\hat{\mathbf{e}}_3\right)$$

B یک ثابت و $r = x_i x_i$ نشان دهید که مؤلفه‌های تغییر مکان به صورت زیر داده می‌شوند:

$$u_i = -\frac{2B(1-\nu)x_i}{r^3}$$

با استفاده از طرح نشان داده شده (مختصات کروی) مشاهده کنید که تغییر مکان شعاعی u_r (زیرنویس r اندیس جمع نیست و تنها به مؤلفه شعاعی تغییر مکان اشاره می‌کند).

$$u_r = \frac{u_i x_i}{r}$$

و نشان دهید که $u_r = -۲B(۱-۲\nu)r^{۲}$ همچنین $u_\psi = u_\theta = ۰$ بنابراین

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{۴B(۱-۲\nu)}{r^{۳}} \text{ و } \varepsilon_\psi = \varepsilon_\theta = -\frac{۲B(۱-۲\nu)}{r^{۳}}$$

از این رو اتساع مکعبی $\varepsilon_r + \varepsilon_\psi + \varepsilon_\theta = ۰$ است. از قانون هوک

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}u_{k,k} + ۲\mu(u_{i,j} + u_{j,i})$$

که در اینجا به $\sigma_{ij} = ۲\mu e_{ij}$ تقلیل می‌یابد، بنابراین

$$\sigma_{rr} = \frac{۸B(۱-۲\nu)}{r^{۳}}$$

و

$$\sigma_{\psi\psi} = \sigma_{\theta\theta} = -\frac{۴B(۱-۲\nu)}{r^{۳}}$$

۷ شاره‌های کلاسیک

۷ - ۱ *تانسور تنش چسبنده ، شاره‌های استوکسی و نیوتنی*

یک مشخصه بنیادین هر شاره که تعیین می‌کند مایع است یا گاز ، آن است که عمل تنش‌های برشی (مهم نیست که چقدر ممکن است کوچک باشند) موجب می‌شود که شاره بطور پیوسته تا جائی که تنش‌ها اعمال می‌شوند تغییرشکل بدهد. بنابراین، یک شاره در حال سکون (یا در حالت حرکت جسم صلب) قادر نیست هر تنش برشی را تحمل کند به هر صورتی که باشد. این موضوع می‌رساند که بردار تنش روی یک جزء اختیاری از سطح در هر نقطه‌ای از شاره در حال سکون متناسب با نرمال n_i آن جزء است، اما مستقل از جهتش می‌باشد. پس می‌نویسیم.

$$t_i^{(\hat{\mathbf{n}})} = \sigma_{ij}\, n_j = -\, p.\, n_i \qquad (۱ - ۱ - ۷)$$

که در آن ضریب تناسب $p.$ (مثبت) ***فشار ترموالاستیک*** است که اغلب آن را ***فشار هیدرواستاتیک*** می‌نامند. از معادله ۶ - ۷ - ۱ توجه داریم که

$$\sigma_{ij} = -\, p.\, \delta_{ij} \qquad (۲ - ۱ - ۷)$$

که نشان می‌دهد برای یک شاره در حال سکون تنش در همه جا فشاری است، یعنی هر جهتی همان جهت تنش اصلی در هر نقطه می‌باشد، و فشار هیدرواستاتیک برابر میانگین تنش نرمال است.

$$p. = -\tfrac{1}{3}\sigma_{ii} \qquad (۳ - ۱ - ۷)$$

این فشار به درجه حرارت T و چگالی ρ توسط یک معادله حالت به شکل زیر به هم ارتباط داده می‌شود.

$$F\,(p.\,,\,\rho\,,\,T) = ۰ \qquad (۴ - ۱ - ۷)$$

برای شاره در حال حرکت، تنش‌های برشی معمولاً صفر نیستند، و در این حالت می‌نویسیم.

$$\sigma_{ij} = - p\, \delta_{ij} + \tau_{ij} \qquad (۵ - ۱ - ۷)$$

که در آن τ_{ij} را ***تانسور تنش چسبنده*** می‌نامند، که تابعی از حرکت است و هنگامی که شاره در حال سکون باشد حذف می‌گردد. در این معادله ، فشار p را ***فشار هیدرودینامیک*** می‌گویند و با همان ارتباط تابعی نسبت به T و ρ ارائه می‌شود همانگونه که برای فشار استاتیک p. در حالت تعادل داشتیم یعنی

$$F\,(p\,,\,\rho\,,\,T) = ۰ \qquad (۶ - ۱ - ۷)$$

از معادله ۶ – ۷ – ۵ توجه شود که برای یک شاره در حال حرکت ، p برابر تنش نرمال میانگین نیست، اما در عوض بدین صورت داده می‌شود.

$$p = -\tfrac{۱}{۳}\,(\sigma_{ii} - \tau_{ii}) \qquad (۷ - ۱ - ۷)$$

پس برای یک شاره در حال سکون $(\tau_{ij} = ۰)$، p با p. برابر می‌شود.

در توسعه معادلات اساسی برای شاره‌های چسبنده ، ابتدا به‌خاطر می‌آوریم که این تانسور تنش چسبنده باید برای شاره‌های در حال سکون حذف شود، و با دنبال کردن روال معمول ، فرض می‌کنیم که τ_{ij} یک تابعی از تانسور نرخ تغییرشکل D_{ij} می‌باشد. با بیان این مطلب به‌طور نمادین داریم.

$$\tau_{ij} = f_{ij}\,(\mathbf{D}) \qquad (۸ - ۱ - ۷)$$

اگر ارتباط تابعی در این معادله غیرخطی باشد، شاره را شاره ***استوکسی*** می‌گویند. وقتی τ_{ij} و f_{ij} را به‌عنوان تابع خطی D_{ij} تعریف می‌کند، شاره معروف به ***شاره نیوتنی*** است و آن را توسط معادله زیر نشان می‌دهیم.

$$\tau_{ij} = K_{ijpq}\, D_{pq} \qquad (۹ - ۱ - ۷)$$

که در آن ضرایب K_{ijpq} خواص چسبندگی شاره را منعکس می‌کند.

همانطوری که بطور تجربی قابل بررسی است تمامی شاره‌ها همسانگرد هستند.

بنابراین، K_{ijpq} در معادله ۶ - ۷ - ۹ یک تانسور همسانگرد است. این همراه با خواص تقارن D_{ij} و τ_{ij} مجاز می‌دارد که ۸۱ ضریب K_{ijpq} به ۲ کاهش یابد. نتیجه می‌گیریم که برای یک شاره نیوتنی همسانگرد همگن ، معادله اساسی عبارت است از

$$\sigma_{ij} = - p\delta_{ij} + \lambda^* \delta_{ij} D_{kk} + ۲ \mu^* D_{ij} \qquad (۱۰ - ۱ - ۷)$$

که در آن λ^* و μ^* **ضرایب چسبندگی** هستند که خواص چسبندگی شاره را بیان می‌کنند. از این معادله مشاهده می‌شود که تنش نرمال میانگین برای شاره نیوتنی به‌صورت زیر است.

$$\frac{۱}{۳} \sigma_{ii} = - p + \frac{۱}{۳} (۳ \lambda^* + ۲ \mu^*) D_{ii} = - p + \kappa^* D_{ii} \qquad (۱۱ - ۱ - ۷)$$

که در آن $\kappa^* = \frac{۱}{۳} (۳ \lambda^* + ۲ \mu^*)$ معروف به **ضریب حجمی چسبندگی** است. شرط

$$\kappa^* = \frac{۱}{۳} (۳ \lambda^* + ۲ \mu^*) = ۰ \qquad (۱۲ - ۱ - ۷ \text{ الف})$$

یا بطور معادل

$$\lambda^* = - \frac{۲}{۳} \mu^* \qquad (۱۲ - ۱ - ۷ \text{ ب})$$

معروف به **شرط *استوکسی*** می‌باشد، و از معادله ۶ - ۷ - ۱۱ مشاهده می‌شود که این شرط اطمینان می‌دهد برای یک شاره نیوتنی در حال سکون ، تنش نرمال میانگین برابر فشار p(منفی) است.

اگر تانسورهای انحراف برای تنش

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{۱}{۳} \delta_{ij} \sigma_{kk} \qquad (۱۳ - ۱ - ۷ \text{ الف})$$

و برای نرخ تغییرشکل

$$\beta_{ij} = D_{ij} - \frac{۱}{۳} \delta_{ij} D_{kk} \qquad (۱۳ - ۱ - ۷ \text{ ب})$$

باشند، اگر آنها را در معادله ۶ - ۷ - ۱۰ معرفی کنیم، بدست می‌آوریم.

$$S_{ij} + \frac{۱}{۳} \delta_{ij} \sigma_{kk} = - p \delta_{ij} + \frac{۱}{۳} \delta_{ij} (۳ \lambda^* + ۲ \mu^*) D_{kk} + ۲ \mu^* \beta_{ij} \qquad (۱۴ - ۱ - ۷)$$

که براحتی به یک جفت معادله اساسی تقسیم می‌شود.

$$S_{ij} = ۲ \mu^* \beta_{ij} \qquad (۷ - ۱ - ۱۵ \text{ الف})$$

$$\sigma_{ii} = - ۳ (p + \kappa^* D_{ii}) \qquad (۷ - ۱ - ۱۵ \text{ ب})$$

اولین این جفت اثر برشی حرکت را به انحراف تنش ارتباط می‌دهد و دومین آن تنش نرمال میانگین را با فشار ترمودینامیکی و چسبندگی حجمی مرتبط می‌سازد.

۷ - ۲ معادلات اصلی جریان چسبنده ، معادلات ناویر - استوکس

تا آنجائیکه شاره‌ها «حالت طبیعی» را با رها کردن نیروهای اعمال شده حفظ نکنند، و چون نیروهای چسبندگی مستقیماً به میدان سرعت ارتباط دارد، بطور معمول توصیف اولری در نوشتن معادلات حاکم برای مسائل مقدار مرزی در نظریه شاره چسبنده بکار برده می‌شود. پس برای رفتار ترمومکانیکی یک شاره نیوتنی، معادلات میدان زیر باید تامین شوند.

(الف) معادله پیوستگی (معادله ۵ - ۳ - ۶)

$$\dot{\rho} + \rho v_{i,i} = ۰ \qquad (۷ - ۲ - ۱)$$

(ب) معادلات حرکت (معادله ۵ - ۴ - ۴)

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = p \dot{v}_i \qquad (۷ - ۲ - ۲)$$

(پ) معادلات اساسی (معادله ۶ - ۷ - ۱۰)

$$\sigma_{ij} = - p \delta_{ij} + \lambda^* \delta_{ij} D_{kk} + ۲ \mu^* D_{ij} \qquad (۷ - ۲ - ۳)$$

(ت) معادله انرژی (معادله ۵ - ۷ - ۱۳)

$$\rho \dot{u} = \sigma_{ij} D_{ij} - q_{i,i} + \rho r \qquad (۷ - ۲ - ۴)$$

(ث) معادله جنبشی حالت (معادله ۶ - ۷ - ۶)

$$p = p (\rho , T) \qquad (۷ - ۲ - ۵)$$

(ج) معادله کالریک حالت

$$u = u\ (\rho\ ,\ T) \qquad (۶ - ۲ - ۷)$$

(چ) معادله هدایت حرارتی (معادله ۵ - ۷ - ۱۰)

$$q_i = -\ \kappa\ T_{,i} \qquad (۷ - ۲ - ۷)$$

این دستگاه معادله یعنی معادلات ۶ - ۸ - ۱ تا ۶ - ۸ - ۷ و همچنین تعریف تانسور نرخ تغییرشکل

$$۲\ D_{ij} = v_{i,j} + v_{j,i} \qquad (۸ - ۲ - ۷)$$

جمعاً ۲۲ معادله با ۲۲ مجهول $\sigma_{ij}\ ,\ \rho\ ,\ v_i\ ,\ D_{ij}\ ,\ u\ ,\ q_i\ ,\ p$ و T را ارائه می‌دهند. اگر اثرات حرارتی صرف‌نظر بشود و یک مسئله مکانیکی خالص پیشنهاد گردد، فقط نیاز به معادلات ۶ - ۸ - ۱ تا ۶ - ۸ - ۳ و همچنین معادله ۶ - ۸ - ۸ و یک شکل معادله ۶ - ۸ - ۵ مستقل از درجه حرارت به‌صورت زیر خواهد بود.

$$p = p\ (\rho) \qquad (۹ - ۲ - ۷)$$

که یک دستگاه ۱۷ معادله و ۱۷ مجهول $\sigma_{ij}\ ,\ \rho\ ,\ v_i\ ,\ D_{ij}$ و p تشکیل می‌دهند.

بعضی از معادلات میدان فوق ممکن است با هم ترکیب و تشکیل معادلات فشرده را در مسائل شاره‌های چسبنده فراهم کنند. پس ، با جایگذاری معادله ۶ - ۸ - ۳ در معادله ۶ - ۸ - ۲ و استفاده از تعریف معادله ۶ - ۸ - ۸ ، بدست می‌آوریم

$$\rho \dot{v}_i = \rho b_i - p_{,i} + (\lambda^* + \mu^*)\ v_{j,ji} + \mu^*\ v_{i,jj} \qquad (۱۰ - ۲ - ۷)$$

که معروف به معادلات *ناویر ــ استوکس* برای شاره‌ها می‌باشند. این معادلات همراه با معادلات ۶ - ۸ - ۴ ، ۶ - ۸ - ۵ و ۶ - ۸ - ۶ یک دستگاه هفت معادله برای هفت $\rho,\ v_i\ ,$ $u,\ p$ و T را تشکیل می‌دهند. توجه شود با وجودی که معادله ۶ - ۸ - ۳ یک معادله اساسی خطی است، معادلات ناویر - استوکس غیرخطی هستند زیرا در تشکیل معادلات اولری داریم

$$\dot{v}_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j\ v_{i,j}$$

اگر شرط استوکس ($\lambda^* = -\frac{2}{3}\mu^*$) فرض شده باشد، معادله ۶ - ۸ - ۱۰ به‌شکل زیر کاهش می‌یابد.

$$\rho \dot{v}_i = \rho b_i - p_{,i} + \frac{1}{3}\mu^* (v_{j,ji} + 3\, v_{i,jj}) \qquad (۱۱ - ۲ - ۷)$$

همچنین، اگر معادله جنبشی حالت به‌صورت معادله ۶ - ۸ - ۹ باشد، معادلات ناویر - استوکس همراه با معادله پیوستگی یک مجموعه کامل چهار معادله با چهار مجهول v_i و ρ را تشکیل می‌دهد.

در تمامی انواع تشکیل معادلات برای مسائل شاره چسبنده بیان شده در فوق ، حل‌ها باید معادلات میدان مقتضی را همراه با شرایط مرزی و اولیه روی هر دو مولفه‌های کشش و سرعت تامین کنند. شرایط مرزی روی یک سطح ثابت نیاز دارد نه تنها به نرمال وارد بر آن، بلکه همچنین مولفه مماسی سرعت هم حذف بشود، زیراکه «لایه مرزی» روی چسبندگی شاره‌ها اثر دارد. لازم به ذکر است که تشکیل معادلات مطرح شده در این قسمت تنها مربوط به ***جریان های لایه‌ای*** می‌باشد. ***جریان های اغتشاش*** نیاز به ملاحظات بیشتری دارد.

۷ - ۳ شاره‌های ویژه

هر چند که مطالعه شاره‌های چسبنده در مفهوم معادلات ارائه شده در قسمت ۶ - ۸ نقش اصلی را در مکانیک شاره‌ها دارا می‌باشد، همچنین یک تعدادی وضعیت‌های ویژه از ساده‌سازی فرضیات منشعب می‌شود که مسائل جالب از نقطه نظر کاربردی را بوجود می‌آورد. در اینجا ، تعدادی از فرضیات که بطور متداول پیش می‌آید را فهرست نموده و به اختصار معنای آنها را نسبت به شاره‌های خاص بررسی می‌کنیم.

(الف) ***شاره های باروتروپیک*** ، اگر معادله حالت مستقل از درجه حرارت باشد همانگونه که توسط معادله ۶ - ۸ - ۹ بیان شده است، تغییرات حالت را باروتروپیک می‌گویند، و شاره‌هائی که از این شرایط تبعیت می‌کند شاره‌های باروتروپیک نام دارند. بطور اخص، هر دو تغییرات ***ایزوترمال*** (که در آن درجه حرارت ثابت است) و تغییرات ***بی‌دررو*** (که هیچ حرارتی وارد یا خارج از شاره نمی‌شود) را به‌عنوان تغییرات باروتروپیک می‌شناسیم.

(ب) ***شاره های تراکم ناپذیر*** ، اگر چگالی یک شاره ثابت باشد، معادله حالت خواهد شد

$$\rho = \text{ثابت} \qquad (۱ - ۳ - ۷)$$

که تراکم‌ناپذیری را توضیح می‌دهد. این موضوع می‌رساند که $\dot{\rho} = 0$، بکمک معادله پیوستگی برای شاره‌های تراکم‌ناپذیر $v_{i,i} = 0$. از نظر فیزیکی، تراکم‌ناپذیری بدین معنی است که اجزاء یک شاره وقتی که در معرض تغییرات فشار قرار گیرند. هیچ تغییری را در چگالی (یا حجم) نمی‌پذیرند. برای شاره‌های تراکم‌ناپذیر ، معادلات ناویر - استوکس خواهد شد.

$$\rho \dot{v}_i = \rho b_i - p_{,i} + \mu^* v_{i,jj} \qquad (۷ - ۳ - ۲)$$

که بخاطر شرط $v_{i,i} = 0$ می‌باشد. آب و روغن ، در بین سایرین، بطور عمومی فرض می‌شوند که تراکم‌ناپذیر هستند، در حالی که اغلب گازها شدیداً تراکم‌پذیر می‌باشند.

(پ) ***شاره‌های غیرچسبنده*** ***(بدون اصطکاک)*** ، یک شاره‌ای که نتواند تنش‌های برشی را حتی وقتی که در حال حرکت است تحمل کند یک شاره **غیرچسبنده** یا بعضی مواقع یک ***شاره کامل*** نامیده می‌شود. بطور واضح ، اگر ضرایب λ^* و μ^* در معادله ۶ - ۷ - ۱۰ مساوی صفر باشد، آن معادله یک شاره کامل را توصیف می‌کند و معادلات ناویر - استوکس به‌صورت زیر کاهش می‌یابد.

$$\rho \dot{v}_i = \rho b_i - p_{,i} \qquad (۷ - ۳ - ۳)$$

که اغلب بنام ***معادلات حرکت اولر*** بدان ارجاع می‌شود. یک گاز ***ایده‌آل*** یک شاره کامل است که از قانون گازها تبعیت می‌کند.

$$p = \rho R T \qquad (۷ - ۳ - ۴)$$

که در آن R ثابت گازها برای گاز خاص تحت مطالعه می‌باشد. باید خاطر نشان کرد که تمامی شاره‌های حقیقی تراکم‌پذیر و چسبنده هستند به یک درجه یا بیشتر .

۷ - ۴ جریان یکنواخت ، جریان غیرچرخشی ، جریان پتانسیل

اگر مولفه‌های سرعت یک شاره مستقل از زمان باشد، حرکت را ***جریان یکنواخت*** می‌نامند. در چنین حالات ، مشتق مادی سرعت

$$\dot{v}_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j v_{i,j}$$

به شکل ساده زیر کاهش می‌یابد.

$$\dot{v}_i = v_j \, v_{i,j}$$

پس، برای یک جریان یکنواخت ، معادله اولر بدین صورت ترمیم می‌شود.

$$\rho v_j v_{i,j} = \rho b_i - p_{,i} \qquad (۱ - ۴ - ۷)$$

علاوه بر آن ، اگر میدان سرعت در همه جا ثابت و برابر صفر باشد ، شاره در حال سکون است و نظریه برای این شرط را **هیدرواستاتیک** می‌گویند. در این حالت ، معادلات ناویر - استوکس بسادگی عبارتند از

$$\rho b_i - p_{,i} = ۰ \qquad (۲ - ۴ - ۷)$$

با فرض شرط باروتروپیک بین ρ و pامکان تعریف یک ***تابع فشار*** به‌صورت زیر می‌باشد.

$$P(p) = \int_{p_.}^{p} \frac{dp}{\rho} \qquad (۳ - ۴ - ۷)$$

مزید بر آن، اگر نیروهای حجمی محافظه‌کارانه باشد، می‌توان آنها را برحسب یک تابع پتانسیل Ω توسط رابطه زیر بیان کرد.

$$b_i = \Omega_{,i} \qquad (۴ - ۴ - ۷)$$

از تعریف معادله ۶ - ۱۰ - ۳ ، نتیجه می‌شود که

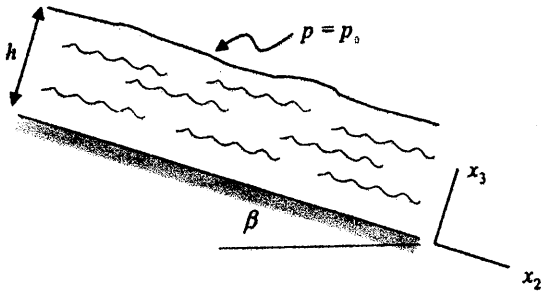
$$P_{,i} = \frac{۱}{\rho} p_{,i} \qquad \text{یا} \qquad \nabla P = \nabla p / \rho \qquad (۵ - ۴ - ۷)$$

پس اکنون معادله ۶ - ۱۰ - ۲ را می‌توان بدین صورت نوشت.

$$(\Omega + P)_{,i} = ۰ \qquad (۶ - ۴ - ۷)$$

که به‌عنوان معادله حاکم برای جریان یکنواخت یک شاره باروتروپیک با نیروهای حجمی محافظه‌کارانه می‌باشد.

مثال ۷ ـ ۴ ـ ۱ یک شاره نیوتنی تراکم‌ناپذیر یک جریان یکنواخت تحت اثر جاذبه روی یک صفحه با شیب θ را فراهم می‌کند. اگر ضخامت شاره عمود بر صفحه h باشد و فشار روی سطح آزاد $p = p_0$ (یک ثابت) در نظر گرفته شود میدان‌های فشار و سرعت را برای این جریان تعیین کنید.



حل فرض کنید $v_1 = v_3 = 0$ ، $v_2 = v_2(x_2, x_3)$ باشد. توسط معادله پیوستگی برای جریان تراکم‌ناپذیر، $v_{i,i} = 0$. از این رو $v_{2,2} = 0$ و $v_2 = v_2(x_3)$. پس تانسور نرخ تغییرشکل دارای مولفه‌های $D_{23} = D_{32} = \frac{1}{2}(\partial v_2 / \partial x_3)$ و بقیه برابر صفر هستند. معادله اساسی نیوتنی در این حالت عبارت است از

$$\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij} + 2\,\mu^* D_{ij}$$

از آنجا می‌توان محاسبه کرد.

$$[\,\sigma_{ij}\,] = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & \mu^*(\partial v_2 / \partial x_3) \\ 0 & \mu^*(\partial v_2 / \partial x_3) & -p \end{bmatrix}$$

چون جاذبه تنها نیروی حجمی می‌باشد.

$$\mathbf{b} = g\,(\sin\theta\,\hat{\mathbf{e}}_2 - \cos\theta\,\hat{\mathbf{e}}_3)$$

و معادلات حرکت که دارای شکلی به‌صورت زیر است.

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho v_j v_{i,j}$$

برای جریان یکنواخت به‌صورت روابط خاص زیر درمی‌آید.

$$-p_{,1} = 0 \qquad (\text{برای } i = 1)$$

$$-p_{,2} + \mu^* (\partial^2 v_2 / \partial x^2_3) + \rho g \sin\theta = 0 \qquad (\text{برای } i = 2)$$

$$-p_{,3} - \rho g \cos\theta = 0 \qquad (\text{برای } i = 3)$$

با انتگرال‌گیری از معادله آخری

$$p = (\rho g \cos\theta)\, x_3 + f(x_2)$$

که در آن $f(x_2)$ یک تابع اختیاری حاصل از انتگرال‌گیری است. در سطح آزاد $p = p_0$, $(x_3 = h)$ و همچنین

$$f(x_2) = p_0 - \rho g h \cos\theta$$

پس

$$p = p_0 + (\rho g \cos\theta)(x_3 - h)$$

که فشار در شاره را توضیح می‌دهد.

سپس، با دو مرتبه انتگرال‌گیری از معادله وسطی فوق‌الذکر $(i = 2$ برای$)$ نسبت به x_3 بدست می‌آوریم.

$$v_2 = \frac{-\rho g \sin\theta}{2\mu^*} x^2_3 + a x_3 + b$$

a و b ثابت‌های انتگرال‌گیری هستند. اما از شرایط مرزی داریم.

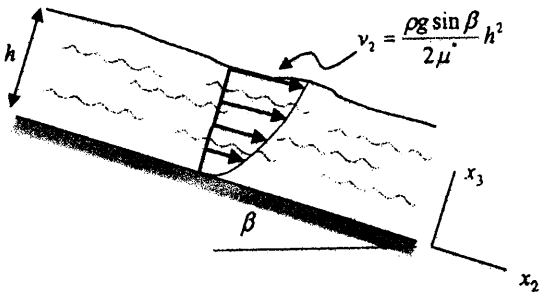
(۱) $v_2 = 0$ وقتی‌که $x_3 = 0$ بنابراین $b = 0$

(۲) $\sigma_{23} = 0$ وقتی‌که $x_3 = h$ بنابراین $a = \frac{\rho g h}{\mu^*} \sin\theta$

بالاخره در معادله مربوط به v_2 با جایگذاری $a = (\rho g h / \mu^*) \sin\theta$ خواهیم داشت.

$$v_۲ = \frac{\rho g \sin\theta}{۲\mu^*}(۲h - x_۳)\, x_۳$$

که دارای نیم‌رخی بدین شکل می‌باشد.



اگر میدان سرعت یک شاره به‌گونه‌ای باشد که تانسور **W** حذف شود ، می‌گوئیم جریان **غیرچرخشی** است در این حالت بردار گردابی **w** ، که توسط معادله ۴ - ۱۰ - ۲۲ با **W** ارتباط دارد همچنان در همه جا صفر است، در نتیجه برای جریان غیرچرخشی

$$w_i = \tfrac{۱}{۲}\varepsilon_{ijk} v_{k,j} = ۰ \qquad \text{یا} \qquad \mathbf{w} = \tfrac{۱}{۲}\nabla \times \mathbf{v} = \tfrac{۱}{۲}\,\mathbf{curl}\ \mathbf{v} = ۰ \qquad (۷-۴-۷)$$

بالاخره، از تساوی $\mathbf{curl}\ (\mathbf{grad}\ \phi) = ۰$ نتیجه می‌گیریم که برای یک جریانی که معادله ۶ - ۱۰ - ۷ را تامین کند، میدان سرعت را می‌توان برحسب پتانسیل سرعت به‌صورت زیر نوشت.

$$v_i = \phi_{,i} \qquad \text{یا} \qquad \mathbf{v} = \nabla\phi \qquad (۸-۴-۷)$$

در واقع ، می‌توان نشان داد که شرط $\mathbf{curl}\ \mathbf{v} = ۰$ یک شرط لازم و کافی برای غیرچرخشی بودن است و نتیجه آن در معادله ۶ - ۱۰ - ۸ بیان شده است که دلیلی برای نام ***جریان پتانسیل*** است که اغلب همراه با این وضعیت می‌باشد.

برای یک جریان غیرچرخشی تراکم‌پذیر، معادله اولر و معادله پیوستگی را می‌توان خطی و سپس ترکیب نمود تا معادله موج بدست آید.

$$\ddot{\phi} = c^2 \phi_{,ii} \qquad (۹-۴-۷)$$

که در آن c سرعت صوت در شاره است. برای یک جریان غیرچرخشی یکنواخت یک شاره باروتروپیک تراکم‌پذیر، معادله اولر و معادله پیوستگی را می‌توان با هم ترکیب نمود.

$$(c^2 \delta_{ij} - v_i v_j) v_{j,i} = 0 \qquad (۱۰-۴-۷)$$

که ***معادله دینامیک گازها*** نام دارد. برای جریان پتانسیل تراکم‌ناپذیر معادله پیوستگی به معادله لاپلاس کاهش می‌یابد.

$$\phi_{,ii} = 0 \qquad \text{یا} \qquad \nabla^2 \phi = 0 \qquad (۱۱-۴-۷)$$

حل‌های آن برای ایجاد میدان سرعت با استفاده از معادله ۶ - ۱۰ - ۸ بکار برده می‌شود. در اینجا شایان ذکر است که معادله لاپلاس خطی است، در نتیجه اصل جمع آثار برای حل‌ها ممکن می‌باشد.

۷ - ۵ معادله برنولی، قضیه کلوین

اگر یک شاره با نیروهای حجمی پایستار باروتروپیک باشد، معادله ۶ - ۱۰ - ۶ را می‌توان در سمت راست معادله اولر جایگزین کرد.

$$\rho \dot{v}_i = (\Omega + P)_{,i} \qquad (۱-۵-۷)$$

به‌عنوان یک قدم در بدست آوردن یک حل برای این معادله دیفرانسیل، یک ***خط جریان*** تعریف می‌کنیم که در هر نقطه از منحنی فضایی، بردار مماس جهت سرعت شاره (بردار) باشد برای یک جریان یکنواخت، مسیر ذرات شاره در امتداد خطوط جریان می‌باشد. با انتگرال‌گیری از معادله ۶ - ۱۱ - ۱ در امتداد خط جریان (به مسئله ۶ - ۴۳ رجوع شود) می‌توان نشان داد که

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial v_i}{\partial t} dx_i + \frac{v^2}{2} + \Omega + P = G(t) \qquad (۲-۵-۷)$$

که در آن dx_i یک دیفرانسیل بردار مماس در امتداد خط جریان است. این مشهور به **معادله برنولی** است. اگر حرکت یکنواخت باشد، تابع زمانی $G\ (t)$ حاصل از انتگرال‌گیری به یک ثابت G کاهش می‌یابد که ممکن است از یک خط جریان به دیگری تغییر کند. بعلاوه ، اگر جریان غیرچرخشی باشد، یک ثابت منحصر بفرد $G.$ در کل جریان معتبر است.

هنگامی که جاذبه تنها نیروی وارد بر جسم باشد، می‌نویسیم $\Omega = gh$ که در آن $g = ۹٫۸۱\ m/s^۲$ ثابت جاذبه است و h یک اندازه ارتفاع بالای سطح مرجع در شاره می‌باشد. اگر $h_p = P / g$ به‌عنوان **ارتفاع فشار** و $h_v = v^۲ / ۲\, g$ به‌عنوان ارتفاع سرعت تعریف شود، آنگاه معادله برنولی برای شاره‌های تراکم‌ناپذیر خواهد شد

$$h + h_p + h_v = h + \frac{P}{\rho g} + \frac{v^۲}{۲\, g} = G. \qquad (۳ - ۵ - ۷)$$

با یادآوری اینکه از طریق معادله ۲ - ۸ - ۵ در فصل دو قضیه استوکس را معرفی نمودیم، این قضیه انتگرال خطی حول یک منحنی بسته را به انتگرال سطح روی یک شکاف ارتباط می‌دهد. توسط این قضیه **سرعت سیرکولاسیون** Γ_c حول یک مسیر بسته از شاره را تعریف می‌کنیم.

$$\Gamma_c = \oint v_i\, dx_i = \int_S \varepsilon_{ijk}\, v_{k,j}\, n_i\, dS \qquad (۴ - ۵ - ۷)$$

که در آن n_i نرمال یکّه سطح S محصور توسط C و dx_i دیفرانسیل جزء مماسی به منحنی C می‌باشد. باید توجه داشت وقتی که جریان غیرچرخشی است ، $\mathbf{curl\ v} = ۰$ و سیرکولاسیون حذف می‌شود. اگر مشتق مادی سیرکولاسیون را با بکار بردن معادله ۵ - ۲ - ۷ در معادله ۶ - ۱۱ - ۴ اجراکنیم، بدست می‌آوریم.

$$\dot{\Gamma}_c = \oint (\dot{v}_i\, dx_i + v_i\, dv_i) \qquad (۵ - ۵ - ۷)$$

برای یک شاره باروتروپیک غیرچسبنده با نیروهای حجمی پایستار، این انتگرال را می‌توان حذف کرد، که **قضیه کلوین** را برای سیرکولاسیون ثابت نتیجه می‌دهد.

مسائل

۷ - ۱ انحراف تنش S_{ij} و انحراف تنش چسبنده $T_{ij} = \tau_{ij} - \frac{۱}{۳} \delta_{ij} \tau_{kk}$ را در داخل معادله ۶ - ۷ - ۵ معرفی و ثابت کنید که $S_{ij} = T_{ij}$ می‌باشد.

۷ - ۲ عبارتی برای توان تنش (الف) $\sigma_{ij} D_{ij}$ و (ب) $\tau_{ij} D_{ij}$ برای یک شاره نیوتنی تعیین کنید. ابتدا نشان دهید که

$$\tau_{ij} = (\kappa^* - \frac{۲}{۳} \mu^*) \delta_{ij} D_{kk} + ۲ \mu^* D_{ij}$$

پاسخ : (الف) $$\sigma_{ij} D_{ij} = -pD_{ii} + \kappa^* D_{ii} D_{jj} + ۲ \mu^* \beta_{ij} \beta_{ij}$$

(ب) $$\tau_{ij} D_{ij} = \kappa^* (tr\ \mathbf{D})^۲ + ۲ \mu^* \beta_{ij} \beta_{ij}$$

۷ - ۳ معادله اساسی برای یک شاره نیوتنی را که شرط استوکس در آن صدق کند یعنی $\kappa^* = ۰$ تعیین نمایید.

پاسخ : $$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + ۲ \mu^* \beta_{ij}$$

۷ - ۴ یک عبارتی برای معادله انرژی در شاره نیوتنی با فرض اینکه هدایت حرارتی از قانون فوریه تبعیت دارد توسعه دهید.

پاسخ : $$\rho \dot{u} = -pv_{i,i} + \lambda^* v_{i,i} v_{j,j} + \frac{۱}{۲} \mu^* (v_{i,j} + v_{j,i})^۲ + \kappa T_{,ii} + \rho r$$

۷ - ۵ پتانسیل پراکندگی Ψ برای یک شاره نیوتنی به‌عنوان تابعی از $\mathbf{D}$ و $\boldsymbol{\beta}$ توسط عبارت زیر تعریف شده است.

$$\Psi = \frac{۱}{۲} \kappa^* D_{jj} D_{ii} + \mu^* \beta_{ij} \beta_{ij}\ ,\quad \text{که در آن}\quad \kappa^* = \lambda^* + \frac{۲}{۳} \mu^*$$

می‌باشد، نشان دهید که $\partial \Psi / \partial D_{ij} = \tau_{ij}$

۷ - ۶ استخراج معادلات ناویر - استوکس برای یک شاره نیوتنی را بررسی کنید که به‌صورت ارائه شده در معادله ۶ - ۸ - ۱۰ می‌باشد.

۷ - ۷ یک جریان دوبعدی موازی با صفحه $x_۲x_۳$ یعنی $v_۱ = ۰$ در کل شاره را در نظر بگیرید. با فرض اینکه یک شاره نیوتنی تراکم‌ناپذیر تحت این جریان می‌باشد، معادله ناویر - استوکس و معادله پیوستگی را برای شاره توسعه دهید.

پاسخ : (ناویر - استوکس) $$\rho \dot{v}_i = \rho b_i - p_{,i} + \mu^* v_{i,jj}, \qquad (i\ ,\ j = ۲\ ,\ ۳)$$

(پیوستگی) $$v_{i,i} = ۰, \qquad (i = ۲\ ,\ ۳)$$

۷ - ۸ یک شاره باروتروپیک غیر چسبنده تحت اثر نیروهای حجمی محافظه‌کارانه را در نظر بگیرید. نشان دهید که مشتق مادی چرخش شاره در حجم موجود V عبارت است از

$$\frac{d}{dt}\int_{V} w_i\, dV = \int_{S} v_i\, w_j\, n_j\, dS$$

۷ - ۹ نشان دهید که برای یک شاره تراکم‌ناپذیر غیرچسبنده توان تنش حذف می‌شود همانطوری که انتظار می‌رود.

۷ - ۱۰ نشان دهید چرخش و سرعت یک شاره باروتروپیک با چگالی ثابت که تحت نیروهای حجمی محافظه‌کارانه در حال حرکت است، توسط معادله $\dot{w}_i = w_i\, v_{i,j}$ با هم ارتباط دارند. استنباط کنید که برای یک جریان یکنواخت از این شاره خواهیم داشت $v_j\, w_{i,j} = w_j\, v_{i,j}$.

۷ - ۱۱ برحسب بردار چرخش $\mathbf{w}$ معادلات ناویر - استوکس برای یک شاره تراکم‌ناپذیر ممکن است به‌صورت زیر نوشته شوند.

$$\rho \dot{v}_i = \rho b_i - p_{,i} - \mu^* \varepsilon_{ijk}\, w_{k,j}$$

نشان دهید که برای حرکت غیر دورانی ، این معادله به معادله اولر به‌صورت زیر کاهش می‌یابد.

$$\rho \dot{v}_i = \rho b_i - p_{,i}$$

۷ - ۱۲ همانطوری که در این کتاب پیشنهاد شده است با ترکیب معادله اولر و معادله پیوستگی نحوه بدست آوردن معادله ۶ - ۱۰ - ۱۰ را دنبال نمایید.

۷ - ۱۳ پتانسیل سرعت $\phi = x_1 x_2 / r^2$ که در آن $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ می‌باشد را در نظر بگیرید. نشان دهید که معادله لاپلاس $\phi_{,ii} = 0$ را تامین می‌کند. میدان سرعت را بدست آورید و اثبات کنید که این جریان تراکم‌ناپذیر و غیر دورانی می‌باشد.

۷ - ۱۴ اگر معادله حالت شاره باروتروپیک به‌صورت $\rho = \lambda \rho^k$ باشد که در آن k و λ ثابت‌ها هستند، جریان را آیسن تروپیک می‌نامند. نشان دهید که معادله برنولی برای یک حرکت یکنواخت در این حالت خواهد شد.

$$\Omega + \frac{k\rho}{(k+1)\rho} + \frac{1}{2} v^2 = \text{ثابت}$$

همچنین نشان دهید که برای جریان ایزوترمال ، معادله برنولی به‌صورت زیر است.

$$\Omega + \frac{p\ln\rho}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 = \text{ثابت}$$

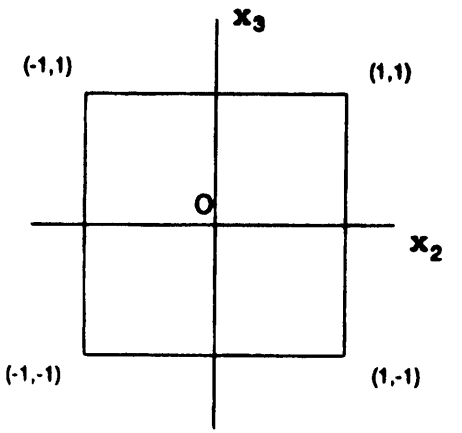
۷ - ۱۵ معادله ۶ - ۱۱ - ۲ را با ضرب عددی dx_i (دیفرانسیل تغییرمکان در امتداد خط جریان) در معادله ۶ - ۱۱ - ۱ بدست آورید و در امتداد خط جریان ، انتگرال‌گیری نمایید، یعنی انتگرالی بدین صورت

$$\int_C (\dot{v}_i + \Omega_{,i} + P_{,i})\, dx_i$$

۷ - ۱۶ بررسی کنید که معادله ۶ - ۱۱ - ۵ مشتق مادی معادله ۶ - ۱۱ - ۴ است. همچنین نشان دهید که برای یک شاره باروتروپیک غیرچسبنده تحت نیروهای حجمی محافظه‌کارانه نرخ تغییرات سیرکولاسیون صفر است (رجوع شود به معادله ۶ - ۱۱ - ۵).

۷ - ۱۷ سیرکولاسیون Γ_c اطراف مربعی در صفحه‌ای x_2x_3 مطابق شکل را برای میدان سرعتی که به‌صورت زیر ارائه شده است تعیین کنید.

$$\mathbf{v} = (x_3 - x_2^2)\,\hat{\mathbf{e}}_2 + (x_3 + x_2)\,\hat{\mathbf{e}}_3$$

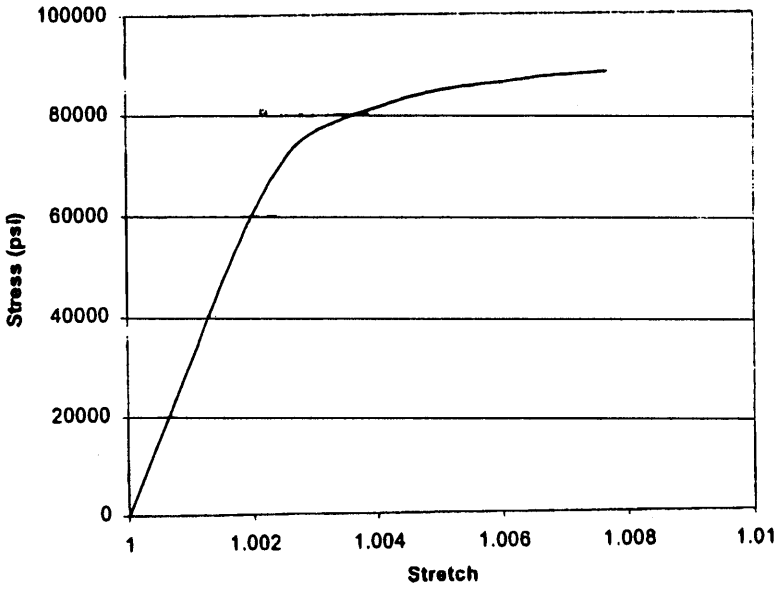


پاسخ : $\Gamma_c = 0$

۸ الاستیسیتهٔ غیرخطی

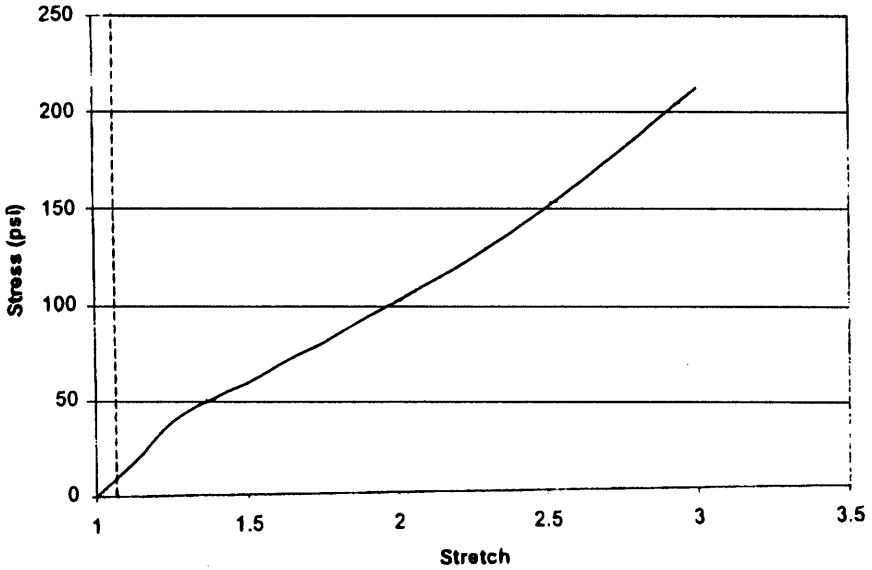
۸ - ۱ روش مولکولی برای الاستیسیتهٔ لاستیک

بسیاری از چالش‌های مسائل طراحی امروزی شامل موادی همچون *لاستیک بوتادین (BR)*، *لاستیک طبیعی*، یا *الاستومرها* هستند. مواد لاستیکی به آسانی با کشیدگی و رهایی لاستیک شناسایی می‌شوند. بر جهندگی لاستیک یعنی توانایی بازیافتن ابعاد اولیه بعد از کشیدگی بزرگ در مورد لاستیک خام طبیعی دست نیافتنی بود تا اینکه در ۱۹۳۹ چارلز گودیر، ولکانیزاسیون (جوش اکسیژن لاستیک) را کشف کرد. ولکانیزاسیون فرایند شیمیایی شناخته شده به عنوان اتصال عرضی است که مایع لاستیک خام را به جامدی غیرقابل ذوب شدن (*ترموست*) تبدیل می‌کند. لاستیک اتصال عرضی شده نیز امکان بررسی کشیدگی با میرایی کم، نیرو و سفتی و سختی در حالت کشش کامل را می‌دهد، که بعد از این کشش به سرعت منقبض می‌شود (دوباره به جای اول برمی‌گردد). نخستین کاربردهای آن، لباس‌های درست شده از لاستیک اشباع شده بود که برای پوشش ملوان‌های مکنتاش استفاده می‌شد. به دنبال تایرها که بزرگ‌ترین محصول برگزیده لاستیک‌اند، کاربردهای بسیار زیاد دیگری نیز دارند. این کاربردها برخی یا همه چهار مشخصه لاستیک را نمایش می‌دهند. به طور مختصر میرایی در پایه‌های موتور، حالت ارتجاعی و برجهندگی در مرکز توپ‌های گلف، یا کشش ساده‌ای در دستکش یا بادکنک. مادامی که لاستیک ترموست در تولید لاستیک غالب است، سختی‌های پردازش به سمت توسعه و کاربرد *الاستومرهای ترموپلاستیک (TPE)* سوق داده می‌شود. این مواد فراوری آسان دارند و به طور مستقیم قابل بازسازی هستند. از آنجا که الاستومرهای ترموپلاستیک شبیه ترموست‌های شبه لاستیک نیستند، کاربرد وسیعی در لایهٔ پوششی فایبری در صنعت اتومبیل و به عنوان مواد جاذب انرژی پیدا کرده است. دلایل متعددی وجود دارد که چرا طراحی با مواد پلاستیک و لاستیک سخت‌تر از طراحی با فلزهاست. برای استارترها پاسخ تنش - کرنش، یعنی پاسخ تشکیل دهنده به طور کامل متفاوت است. شکل ۸-۱الف منحنی تنش - کرنش نمونه‌ای از فولاد نرم را در خصوص پاسخ یک لاستیک طبیعی استفاده شده در



شکل ۸ - ۱ الف

منحنی تنش - کشش نامی برای فولاد نرم



شکل ۸ - ۱ ب

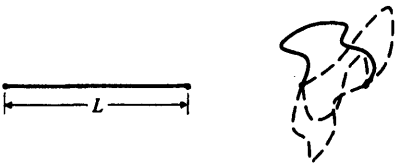
منحنی تنش - کشش نامی برای لاستیک طبیعی. به کشیدگی زیاد در مقایسه با منحنی فولاد نرم توجه کنید.

پایهٔ یک موتور نشان می‌دهد. توجه کنید که کرنش نمونه لاستیک به مقدار مقاومت کششی بیشتری نسبت به فولاد می‌رسد. خط‌چین عمودی در شکل ۸-۱ب مقدار کرنش فولاد نرم را در گسیختگی نشان می‌دهد. این مقدار بسیار کوچکتر از ۲۰۰٪ کرنش لاستیک است که بدون گسیختگی تحمل می‌کند. در واقع بسیاری از لاستیک‌ها و الاستومرها به کرنش ۳۰۰ تا ۵۰۰٪ می‌رسند. اتصال عرضی قوی و اشباع شده در لاستیک منجر به موادی می‌شود که تمایلی به چنین کرنش‌های بزرگی نداشته باشند. دو لایه پوششی توپ گلف به هم پیوسته برای مثال بسیار سفت‌تر از یک نوار لاستیک است. هر کدام از این تولیدات برای نواحی کرنش متفاوتی طراحی شده‌اند. ماکزیمم کرنش، توپ گلف از مرتبهٔ ۴۰ تا ۵۰٪ است. ساختار تارهای زیاد آن برای برجهندگی ساخته شده‌اند و نه برای کرنش زیاد. منحنی تنش - کرنش لاستیک از ابتدایی‌ترین نقطهٔ تغییرشکل خود رفتاری غیرخطی نشان می‌دهد، در صورتی که فولاد یک ناحیهٔ خطی قبل از تنش تسلیم دارد.

علت اینکه مواد لاستیکی رفتار بسیار متفاوتی نسبت به فلزها نشان می‌دهند از مشخصه‌های خیلی ریزمیکروسکپی آنها نشأت می‌گیرد. فلزها از شبکه‌های کریستالی اتم‌ها تشکیل شده‌اند که کم و بیش دارای نظم و ترتیب خوبی هستند: در مقابل مولکول‌های مواد لاستیک از اتم‌های کربن وابسته به زنجیره‌ای طویل شبیه مجموعه‌ای پیچیده از قطعه تارها تشکیل شده است. از آنجا که پیوند کربن - کربن (C-C) می‌چرخد، برای این پلیمرهای حلقه‌ای طویل به هم گره خورده امکان آن وجود دارد که خودشان را به تعداد بی‌شماری از شکل‌های متفاوت بازآرایی کنند. مادامی که حلقه‌ای نامنظم به صورت فنر رفتار می‌کند، برجهندگی ثابت نیازمند اتصال عرضی برای توقف جریان ویسکوز است. در لاستیک ترموست پیوند شیمیایی اغلب با گوگرد اتصال ایجاد می‌کند، در صورتی که وابستگی‌های فیزیکی تأثیری شبیه عملکرد در یک مادهٔ الاستومر ترموپلاستیک دارند. از مرتبهٔ اتصال عرضی برای کنترل سفتی لاستیک استفاده می‌شود.

در مطالب پوشش داده شده از مکانیک محیط‌های پیوسته در این کتاب، ماده بنا شده بر مقیاس میکرو با فرض محیط پیوسته که در فصل اول بحث شده، در تناقض است. با وجود این، مدل الاستیسیتهٔ لاستیک از سطح مولکولی که تا اندازه‌ای رفتار ماده را در سطح ماکروسکوپیک بیان می‌کند، قابل استنتاج است. در این فصل، الاستیسیتهٔ لاستیک براساس اصل اولی توسعه داده خواهد شد. به دنبال آن، روشی سنتی در محیط پیوسته با فرض شکلی از دانسیتهٔ انرژی کرنشی و استفاده از محدودیت‌های حاکم بر پاسخ اساسی که به وسیلهٔ قانون دوم ترمودینامیک تحمیل شده‌اند، توسعه داده می‌شود تا به پاسخ تنش - کشش دست یابیم.

یکی از بزرگ‌ترین اختلاف‌هایی که بین کریستال‌های فلز و پلیمر بی‌شکل (آمورف) وجود داد، آن است که زنجیرهای پلیمر دارای آزادی برای بازآرایی خودشان هستند. لغت چیدمان برای توضیح تفاوت جهت‌گیری‌های فضایی زنجیره استفاده می‌شود. از نظر فیزیکی، ساده است که چیدمان‌های مختلف به دست آمده حاصل از پیوند میان اتم‌های کربن است. اگرچه در اتصال اتم‌های کربن به شکل زنجیر پلیمر، زاویهٔ پیوند ۱۰۹/۵° است، اما همچنان یک زاویهٔ چرخشی آزاد حول محور پیوند وجود دارد. برای بیشترین مولکول‌های درشت، تعداد اتم‌های کربن در محدودهٔ ۱۰۰۰ تا ۱۰۰۰۰۰ است. در ازای هر پیوند یک زاویهٔ آزاد برای جهت‌گیری آن پیوند داریم، بنابراین تعداد چیدمان‌ها بسیار بزرگ است. به دلیل این مقدار قابل توجه، ممکن است از ترمودینامیک آماری در رسیدن به روابط الاستیسیته لاستیک بکمک اصول اولیه استفاده شود. علاوه بر این تعداد زیاد چیدمان برای یک زنجیر تنها، علت دیگری برای مناسب بودن روش آماری وجود دارد: پلیمر واقعی تعداد زیادی زنجیره‌های مجزای متفاوتی دارد که تودهٔ ماده را تشکیل می‌دهند. برای مثال، یک متر مکعب از پلیمر بی‌شکل (آمورف) که ۱۰۰۰۰ اتم کربن به ازای هر مولکولش دارد، بیشتر از 10^{23} مولکول دارد (مک کروم و همکارانش، ۱۹۹۷). به طور واضح نمونه به قدری بزرگ است که استفاده از یک روش آماری را توجیه می‌کند.



شکل ۸ - ۲

مقایسهٔ شماتیک ترکیب شکلی مولکول هنگامی که فاصلهٔ دو انتهای مولکول تغییر کند. خطوط خط‌چین دیگر ترکیب شکلی ممکن را نشان می‌دهند.

از این دید، یک مولکول خاص، یا زنجیرهٔ پلیمر و چیدمان‌های آن را مشاهده کنید. تعداد چیدمان‌های مختلف یک زنجیره براساس فاصلهٔ انفصال نوک‌های زنجیره قابل دست یافتن است. اگر یک مولکول از n بخش هرکدام به طول l شکل یافته باشد، طول کل $L=nl$ خواهد بود. انفصال نوک‌های زنجیره در طول L به آن معنی خواهد بود که تنها یک چیدمان با حفظ دست‌نخوردگی زنجیره امکان‌پذیر است. همچنان که نوک‌های مولکول به یکدیگر نزدیک‌تر می‌شوند، چیدمان‌های بیشتری وجود دارد که می‌توان آنها را به دست آورد، بنابراین یک توزیع

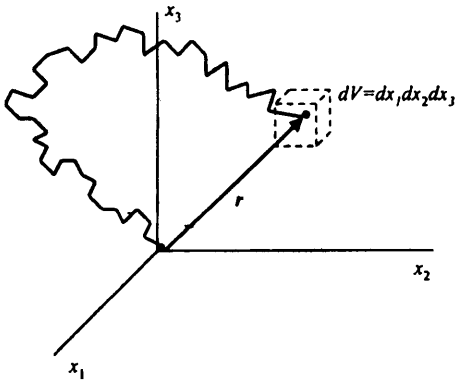
گوس از چیدمان‌ها به عنوان تابعی از فاصله بین نوک‌های زنجیره، مناسب است. شکل ۸-۲ توضیح می‌دهد که چگونه زمانی که فاصله بین نوک‌های مولکول کاهش می‌یابد، چیدمان‌های بیشتری امکان‌پذیرند. فاصلهٔ انتها به انتهای مولکول، r به وسیلهٔ حاصل‌جمع تمام طول قطعات، l همان طور که در شکل ۸-۳ نشان داده شده است، محاسبه می‌شود. جمع طول قطعات به صورت جبری فاصله r از انتها تا انتهای دیگر مولکول را می‌دهد، اما نشانی در مورد طول زنجیره نمی‌دهد. اگر دو انتهای مولکول به نسبت نزدیک به هم باشند و مولکول نیز طویل باشد، امکان وجود چیدمان‌های بسیاری خواهد بود. مقدار مربع اندازه بردار انتها به انتهای مولکول، r بر حسب برداری که به صورت حاصل‌جمع قطعات مجزاست به صورت:

$$r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = (\underline{l}_1 + \underline{l}_2 + \ldots + \underline{l}_n).(\underline{l}_1 + \underline{l}_2 + \ldots + \underline{l}_n) \qquad (۱-۱-۸)$$

که $\underline{l}_i$ برداری است که i امین قطعه از زنجیرهٔ مولکول را تعریف می‌کند. با ضرب سمت راست معادله ۸-۱-۱ درهم داریم:

$$r^2 = nl^2 + [\underline{l}_1 \cdot \underline{l}_2 + \underline{l}_1 \cdot \underline{l}_3 + \ldots + \underline{l}_{n-1} \cdot \underline{l}_n] \qquad (۲-۱-۸)$$

که این مربع بردارهای انتها به انتهای مولکولی برای یک مولکول پلیمر است. در حجم نمونه از ماده، زنجیره‌های بسیاری موجود است که به این وسیله می‌توان میانگین مربعات فاصله انتها تا انتها را شکل داد.



شکل ۸ - ۳

زنجیره آزاد پیوسته شده با بردار انتها به انتهای r

$$\langle r^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{1}^{N} (nl^2 + [\underline{l}_1 \cdot \underline{l}_2 + \underline{l}_1 \cdot \underline{l}_3 + \ldots + \underline{l}_{n-1} \cdot \underline{l}_n]) \quad (۳-۱-۸)$$

عبارت داخل کروشه در معادلهٔ ۸-۱-۳ براساس منطقی که به دنبال آورده می‌شود، استدلال شده که صفر است. از آنجا که تعداد زیادی از مولکول‌ها در نمونه در نظر گرفته شده است، برای هر ضرب متمایز $l_1.l_2$ ضرب جفت قطعه دیگری وجود خواهد داشت که مساوی مقدار منفی آن خواهد بود. حذف جفت قطعه، نباید از مولکول یکسانی باشد، بنابراین عبارت داخل کروشه در معادلهٔ ۸-۱-۳ فرض می‌شود که در جمع صفر است. پس تنها یک عبارت ساده برای فاصله میانگین انتها به انتها باقی می‌ماند.

$$\langle r^2 \rangle = nl^2 \quad (۴-۱-۸)$$

فاصلهٔ میانگین انتها به انتها نشان می‌دهد که چه تعدادی از قطعات، یا اتم‌های کربن، در یک زنجیره معین هستند. برای آدرس‌دهی و نظارت بر تحویل اینکه چگونه فواصل انتها به انتها در همهٔ پلیمر توزیع شده است، توزیع گوسی فرض می‌شود. مختصات مبدأ را به عنوان یک انتهای زنجیرهٔ نمونه در نظر بگیرید. شکل ۸-۳ این را برای یک زنجیرهٔ تنها نشان می‌دهد، که انتهای دیگر زنجیره در حجم بسیار کوچک dV به وسیلهٔ بردار r قرار داده شده است. احتمال واقع شدن انتهای زنجیره در حجم dV به صورت زیر داده می‌شود:

$$P(r)dr = \frac{e^{-[\frac{r}{\rho}]^2}}{(\sqrt{\pi}\rho)^3} dr \quad (۵-۱-۸)$$

که ρ پارامتر توزیع است. با استفاده از این فرض توزیع فواصل میانگین انتها تا انتها، به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\langle r^2 \rangle_{\text{پ}} = \int_0^\infty r^2 P(r)dr = \frac{3}{2}\rho^2 \quad (۶-۱-۸)$$

که زیرنویس ۰ بیانگر خاصیت ذاتی زنجیره است زمانی که به صورت تنها به آن نگریسته شود. زمانی که زنجیره در پشت یک اتصال عرضی از شبکهٔ زنجیره‌ها قرار داده می‌شود آنگاه فاصلهٔ انتها تا انتها به صورت $\langle r^2 \rangle$ نوشته می‌شود، تعریف اخیر این حقیقت که زنجیره محدودیت‌هایی

دارد که به وسیلهٔ وابسته بودن در حجمی که به همراه بقیه زنجیره‌ها بر آن اعمال شده، به حساب می‌آورد. با مساوی قرار دادن معادلات ۸-۱-۴ و ۸-۱-۶ پارامتر توزیع ρ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\rho = \sqrt{\frac{۲n}{۳}}\, l \qquad (۸-۱-۷)$$

مشابه نتایج بخش ۵-۹، نیروی ایجاد شده به وسیلهٔ کشش در یک نمونهٔ تک محوری برحسب انرژی آزاد هلمهولتز داده می‌شود:

$$F = \frac{\partial \psi}{\partial L}\bigg|_{\theta,V} \qquad (۸-۱-۸)$$

که F نیرو، L طول، و زیرنویس‌های θ و V بیانگر این نکته‌اند که تغییر در طول در دما و حجم ثابت رخ می‌دهد. جایگذاری معادلهٔ ۵-۸-۹ب نیرو را برحسب انرژی داخلی و انتروپی نتیجه می‌دهد:

$$F = \frac{\partial u}{\partial L} - \theta \frac{\partial \eta}{\partial L} \qquad (۸-۱-۹)$$

که برای راحتی زیرنویس‌های ثابت بودن دما و حجم نوشته نشده است.

بررسی معادلهٔ ۸-۱-۹ مقایسه‌ای آگاه کننده بین فلزها و لاستیک‌های ایده‌آل ارائه می‌کند. در فلزها، ساختار کریستالی زمانی که ماده تغییر شکل می‌دهد، دست نخورده باقی می‌ماند. اتم‌ها نزدیک‌تر می‌شوند و علاوه بر این، از مجاورت و نزدیکی اتم‌ها نیروی انباشته‌ای تولید می‌شود، اما مرتبهٔ وابستگی میان اتم‌ها یکسان می‌ماند. آخرین جملهٔ معادله ۸-۱-۹ از آنجا که مرتبهٔ وابستگی اتم‌ها بدون تغییر باقی می‌ماند، هیچ سهم نیرویی ندارد. برای یک لاستیک ایده‌آل، تغییر در طول آن اثری بر انرژی داخلی ندارد، بنابراین نخستین جملهٔ مشتق در معادلهٔ ۸-۱-۹ صفر است. با وجود این، کشیدن نمونه فاصلهٔ میانگین انتها تا انتها را افزایش داده، بنابراین چیدمان‌های ممکن برای زنجیره‌ها را کاهش می‌دهد. این کاهش در چیدمان‌ها سبب تغییر منفی در انتروپی بر اثر افزایش طول می‌شود.

انتروپی برای یک زنجیرهٔ تنها براساس طول میانگین انتها به انتها به صورت‌بندی ارتباط خواهد داشت. با توجه به اینکه تعداد صورت‌بندی‌ها متناسب با احتمال بر واحد حجم، $P(r)$، است و با استفاده از معادلهٔ بولتزمن انتروپی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\eta = \eta_{\circ} + k \ln P(r) = \eta_{\circ} + k\left[۳\ln(\sqrt{\pi}\rho) + \left(\frac{r}{\rho}\right)^{۲}\right] \qquad (۸-۱-۱۰)$$

که K ثابت بولتزمن است. استفاده از آن در معادلهٔ ۸-۱-۹ برای یک لاستیک ایده‌آل، نیروی حاصل از انقباض و جمع‌شدگی برای یک زنجیره تنها را به صورت زیر می‌دهد:

$$F = \frac{2k\theta}{\rho^2} r^2 \qquad (۸-۱-۱۱)$$

به پلیمری که دارای نیروهای اعمالی حاصل از نسبت‌های کشیدگی λ_1 λ_2 و λ_3 است، توجه کنید. کار انجام شده روی هر زنجیره از ماده، برابر جمع کار انجام شده در هر یک از جهت‌های مختصات x_i است.

$$W^{(i)} = \int_{x_i}^{\lambda^{(i)}x_i} f_i dx_i = \frac{2k\theta}{\rho^2} \int_{x_i}^{\lambda^{(i)}x_i} x_i dx_i = \frac{k\theta}{\rho^2} \left[(\lambda^{(i)})^2 - 1\right] x_i^2 \quad \text{(بدون جمع)}$$

با به احتساب آوردن کار انجام شده روی همهٔ زنجیره‌ها، کار کلی در هر یک از جهت‌های مختصات به دست می‌آید:

$$\sum_n W^{(i)} = \frac{k\theta}{\rho^2} \left[(\lambda^{(i)})^2 - 1\right] \sum_n x_i^2 \quad \text{(بدون جمع)} \qquad (۸-۱-۱۲)$$

که عبارت جمع شده آخر تعداد زنجیره‌ها، n ضربدر فاصلهٔ میانگین انتها تا انتهای اولیه در جهت x_i است. فرض اینکه لاستیک درابتدا ایزوتروپیک است منجر می‌شود به:

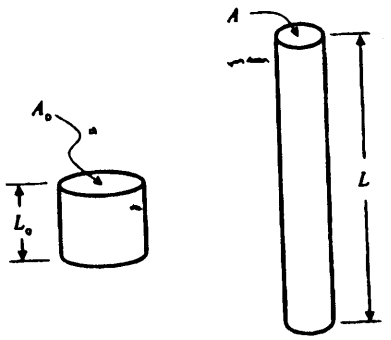
$$\sum_n x_i^2 = n\langle x_i^2\rangle_i = \frac{n}{3}\langle r^2\rangle_i \qquad \text{(بدون جمع)}$$

با جایگذاری این به همراه ρ از معادلهٔ ۸-۱-۶ در معادلهٔ ۸-۱-۱۲ و جمع عبارات کار در سه مختصه نتیجه می‌دهد:

$$W = \frac{nk\theta}{2} \frac{\langle r^2\rangle_i}{\langle r^2\rangle_0} [\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3] \qquad (۸-۱-۱۳)$$

که برای سهولت، این معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$W = \frac{VG}{2} [\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3] \qquad (۸-۱-۱۴)$$



شکل ۸ - ۴

نمونه لاستیک با طول اولیه L_0 و سطح مقطع عرضی A_0 که به طول L و سطح مقطع عرضی A کشیده شده است.

که V حجم و G مدول برشی است که به وسیلهٔ روابط زیر داده می‌شوند:

$$N = \frac{n}{V}$$

و

$$G = Nk\theta \frac{\langle r^2 \rangle_i}{\langle r^2 \rangle_0}$$

سپس، با در نظر گرفتن کشش تک محوری در یک نمونه (شکل ۸-۴) نسبت‌های کشیدگی به صورت زیر کاهش می‌یابند.

$$\lambda_1 = \lambda\,, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \qquad (۱۵ - ۱ - ۸)$$

که طبیعت به تقریب غیرقابل تراکمی به شکل $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$ استفاده شده است. کار کل انجام شده به صورت زیر است:

$$W = \frac{VG}{2}\left[\lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3\right] \qquad (۱۶ - ۱ - ۸)$$

این کار انجام شده روی زنجیره‌های پلیمری است، اما با کار انجام شده به وسیلهٔ نیروهای خارجی چون لاستیک ایده‌آل فرض شده، یکسان است، بنابراین کار نشان داده شده در معادله ۸-۱-۱۶ برابر تغییر در انرژی آزاد هلمهولتز است. با یادآوری نیروی حاصل از تغییر شکل تعریف شده به وسیلهٔ معادلهٔ ۸-۱-۸، نیروی حاصل از یک کشش λ به صورت زیر داده می‌شود:

$$F = \frac{\partial \psi}{\partial L} = \frac{dW}{dL} = \frac{dW}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dL}$$

تغییر شکل حفظ کنندهٔ حجم است، داریم $V = A.L. = AL$ که زیرنوس ۰ بر مساحت و طول اولیه دلالت دارد. از آنجا که نسبت کشیدگی در این حالت $\lambda = \frac{L}{L.}$ است، واضح است که $\frac{d\lambda}{dL} = \frac{۱}{L.}$. با استفاده از این نتیجه و دیفرانسیل‌گیری از معادلهٔ ۸-۱-۱۶ نتیجه می‌شود:

$$F = \frac{VG}{L.}\left[\lambda - \frac{۱}{\lambda^۲}\right] = A.G\left[\lambda - \frac{۱}{\lambda^۲}\right]$$

که به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f = \frac{F}{A.} = G\left[\lambda - \frac{۱}{\lambda^۲}\right] \qquad (۱۷ - ۱ - ۸)$$

به موادی که از این معادله پیروی می‌کنند، **مادهٔ نئو-هوکین** *(neo-Hookean material)* گفته می‌شود.

۸ - ۲ تئوری انرژی کرنشی برای الاستیسیتهٔ غیرخطی

تئوری توسعه یافته در بخش قبل، به خوبی داده‌های تجربی در کرنش‌های بزرگ را نشان نمی‌دهد. راه بهتر برای مدل کردن پاسخ لاستیک‌ها، از فرض وجود انرژی کرنشی که تابعی از گرادیان تغییر شکل به صورت **تانسور چپ تغییر شکل** $B_{ij} = F_{iA}F_{jA}$ است، نشأت می‌گیرد. این روش که ابتدا توسط مونی (۱۹۴۰ *Mooney*) و بعد از آن توسط ریولین (۱۹۴۸ *Rivlin*) منتشر شد، از روش مولکولی که در بخش ۸-۱ بحث شد، پیشی گرفته است. اساس تئوری مونی و تئوری‌های بعد از آن این است که مادهٔ از ابتدا ایزوتروپیک، باید از تقارن‌های خاصی با توجه به تابعی شکل بودن تابع انرژی کرنشی تبعیت کند.

فرض کنید که انرژی کرنشی بر واحد حجم تابعی ایزوتروپیک از کرنش برحسب پایاهای تانسور چپ تغییر شکل $I_۱$، $I_۲$ و $I_۳$ باشد.

$$W = W(I_۱, I_۲, I_۳) \qquad (۱ - ۲ - ۸)$$

که

$$I_۱ = B_{ii}$$

$$I_۲ = \frac{۱}{۲}\,[B_{ii}B_{jj} - B_{ij}B_{ij}] \qquad (۸-۲-۲)$$

$$I_۳ = \varepsilon_{ijk}B_{۱i}B_{۲j}B_{۳k} = det\{B_{ij}\}$$

توجه کنید که اگر محورهای اصلی B_{ij} انتخاب شوند، آنگاه پایاهای معادلهٔ ۸-۲-۲ برحسب نسبت‌های کشیدگی $\lambda_۱$ $\lambda_۲$ و $\lambda_۳$ به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned} I_۱ &= \lambda_۱^{۲} + \lambda_۲^{۲} + \lambda_۳^{۲} \\ I_۲ &= \lambda_۱^{۲}\lambda_۲^{۲} + \lambda_۲^{۲}\lambda_۳^{۲} + \lambda_۱^{۲}\lambda_۳^{۲} \\ I_۳ &= \lambda_۱^{۲}\lambda_۲^{۲}\lambda_۳^{۲} \end{aligned} \qquad (۸-۲-۳)$$

بسیاری از مواد لاستیکی و الاستومری، پاسخی مکانیکی دارند که اغلب غیرقابل تراکم‌اند. اگرچه یک مادهٔ به طور کامل غیرقابل تراکم ممکن نیست، انواعی از مسائل با فرض غیرقابل تراکم بودن حل می‌شوند. ***پاسخ غیرقابل تراکم*** ماده به عنوان قیدی بر گرادیان تغییر شکل تصور می‌شود. این بدان معنی است که طبیعت تراکم‌ناپذیر ماده به وسیلهٔ یک وابستگی تابعی اضافی بین مؤلفه‌های گرادیان تغییر شکل مدل می‌شود. برای یک مادهٔ تراکم‌ناپذیر چگالی ثابت می‌ماند. این موضوع در بخش ۵-۳ به وسیلهٔ معادله $v_{i,i} = ۰$ (معادلهٔ ۵-۳-۸) یا $\rho J = \rho_۰$ (معادلهٔ ۵-۳-۱۰الف) بیان شد. از آنجا که چگالی ثابت می‌ماند و معادله ۵-۳-۱۰الف به عنوان بیان معادلهٔ پیوستگی، واضح است که:

$$J = det\{F_{iA}\} = ۱ \qquad (۸-۲-۴)$$

اکنون از شرایط خاص تراکم‌ناپذیری به حالت کلی‌تر محیطی پیوسته با ***قیدی داخلی*** بازمی‌گردیم. قیدی کلی به صورت زیر را در نظر بگیرید

$$\phi(F_{iA}) = ۰ \qquad (۸-۲-۵)$$

یا، از آنجا که $C_{AB} = F_{iA}F_{iB}$

$$\bar{\phi}(C_{AB}) = ۰ \qquad (۸-۲-۶)$$

این شکل دوم برای قید داخلی، این خصوصیت مفید را دارد که تحت حرکت‌های برهم‌نهی‌شده جسم صلب بدون تغییر باقی می‌ماند. با دیفرانسیل‌گیری از ϕ داریم :

$$\frac{\partial \phi}{\partial C_{AB}}\,\dot{C}_{AB} = \frac{\partial \phi}{\partial C_{AB}}\,(\dot{F}_{iA}F_{iB} + F_{iA}\dot{F}_{iB}) \qquad (۸-۲-۷)$$

و نتیجه می‌شود با دیفرانسیل‌گیری جزئی نسبت به یک تانسور متقارن به یک تانسور متقارن می‌رسیم، بدان معنی که:

$$\frac{\partial \phi}{\partial C_{AB}} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial C_{AB}} + \frac{\partial \phi}{\partial C_{BA}}\right) \qquad (۸-۲-۸)$$

توجه کنید که $\dot{C}_{AB}$ در اصل شبیه $\dot{E}_{AB}$ بوده که با معادلهٔ ۴-۱۰-۱۷ داده شده است، بنابراین معادلهٔ ۸-۲-۷ ممکن است به صورت

$$\phi_{ij} D_{ij} = 0 \qquad (۸-۲-۹)$$

که ϕ_{ij} به وسیلهٔ

$$\phi_{ij} = \frac{1}{2} F_{iA}\left(\frac{\partial \phi}{\partial C_{AB}} + \frac{\partial \phi}{\partial C_{BA}}\right) F_{jB} \qquad (۸-۲-۱۰)$$

تعریف می‌شود.

فرض کنید که تنش با جمع مؤلفه‌های تنش $\hat{\sigma}_{ij}$، قابل استنتاج از پاسخ اساسی، و مؤلفه‌های تنشی دلخواه $\bar{\sigma}_{ij}$ حاصل از قید داخلی، شکل می‌یابد.

$$\sigma_{ij} = \hat{\sigma}_{ij} + \bar{\sigma}_{ij} \qquad (۸-۲-۱۱)$$

در مورد مؤلفه‌های تنش دلخواه $\bar{\sigma}_{ij}$ فرض بر این است که کار آنها صفر باشد، یعنی:

$$\bar{\sigma}_{ij} D_{ij} = 0 \qquad (۸-۲-۱۲)$$

مقایسهٔ معادلات ۸-۲-۹ و ۸-۲-۱۲ نشان می‌دهد که هر دو ϕ_{ij} و $\bar{\sigma}_{ij}$ متعامد بر D_{ij} هستند و بنابراین می‌توان $\bar{\sigma}_{ij}$ را به صورت زیر نوشت:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \lambda \phi_{ij} \qquad (۸-۲-۱۳)$$

برای یک ماده تراکم‌ناپذیر، $D_{ii} = 0$ که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\delta_{ij} D_{ij} = 0 \qquad (۸-۲-۱۴)$$

یا به طور معادل به وسیلهٔ انتخاب $\phi_{ij} = \delta_{ij}$ در معادلهٔ ۸-۲-۹. با جایگذاری آن در معادلهٔ

۸-۲-۱۳ نتیجه می‌شود:

$$\bar{\sigma}_{ij} = -p\delta_{ij} \qquad (۱۵-۲-۸)$$

که اسکالر برای انعکاس عامل فشار تغییر علامت داده و در عبارت ظاهر شده است.

حال ممکن است تنش در یک مادهٔ تراکم‌ناپذیر به صورت زیر نوشته شود:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \hat{\sigma}_{ij} \qquad (۱۶-۲-۸)$$

جملهٔ دوم در معادلهٔ ۸-۲-۱۶ از پاسخ اساسی تعیین می‌شود که برای تنش کوشی مؤلفه‌های تنش به صورت دنبال نتیجه می‌شود:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + F_{iA}\frac{\partial W}{\partial F_{jA}} \qquad (۱۷-۲-۸)$$

که $J = ۱$ برای مادهٔ تراکم‌ناپذیر و W انرژی کرنشی بر واحد حجم است. با تنش کوشی که در معادله ۸-۲-۱۷ برحسب عباراتی از فشار اضافه شدهٔ دلخواه و عبارت انرژی کرنشی، توسعهٔ بیشتر آن از فرض شکل خاص‌تری برای W نشأت گرفته می‌شود. برای ماده تراکم‌ناپذیر $J = ۱$ بنابراین $I_۳ = ۱$ و معادلهٔ ۸-۲-۱ را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$W = W(I_۱, I_۲) \qquad (۱۸-۲-۸)$$

با دیفرانسیل‌گیری از انرژی کرنشی، براساس قاعدهٔ زنجیری، مؤلفه‌های تنش حاصل می‌شود.

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + F_{iA}\left[\frac{\partial W}{\partial I_۱}\frac{\partial I_۱}{\partial F_{jA}} + \frac{\partial W}{\partial I_۲}\frac{\partial I_۲}{\partial F_{jA}} + \frac{\partial W}{\partial I_۳}\frac{\partial I_۳}{\partial F_{jA}}\right] \qquad (۱۹-۲-۸)$$

که پایاهای $I_۱$ و $I_۲$ در معادلهٔ ۸-۲-۳ داده شده‌اند. مفید است که $I_۱$ و $I_۲$ برحسب عباراتی از گرادیان تغییر شکل به صورت آنچه به دنبال می‌آید نوشته شود:

$$\begin{aligned} I_۱ &= F_{iA}F_{iA} \\ I_۲ &= \frac{۱}{۲}\left[F_{iA}F_{iA}F_{jB}F_{jB} - F_{iA}F_{jA}F_{iB}F_{jB}\right] \\ I_۳ &= det\{F_{iA}\} \end{aligned} \qquad (۲۰-۲-۸)$$

مشتق‌های جزئی پایاهای I_1 و I_2 با توجه به اینکه مؤلفه‌ها کمیت‌هایی مستقل‌اند، کامل می‌شود، بنابراین

$$\frac{\partial F_{iA}}{\partial F_{pP}} = \delta_{ip}\delta_{AP} \qquad (۸-۲-۲۱)$$

با استفاده از معادلات ۸-۲-۲۱ و ۸-۲-۲۰ در ۸-۲-۱۹، مؤلفه‌های تنش کوشی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\hat{\sigma}_{ij} = I_3 \frac{\partial W}{\partial I_3}\delta_{ij} + 2B_{ij}\left[\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_2 \frac{\partial W}{\partial I_2}\right] + 2B_{ik}B_{jk}\frac{\partial W}{\partial I_2} \qquad (۸-۲-۲۲)$$

که در عملیات جبری بعد وابسته به I_3 می‌باشد.

استفاده از تئوری کیلی - هامیلتون *(Cayley - Hamilton)* به شکل

$$\hat{\sigma}_{ij} = \gamma_0\delta_{ij} + \gamma_1 B_{ij} + \gamma_2 B_{ik}B_{jk} \qquad (۸-۲-۲۳)$$
$$= \gamma_2 I_3 B_{ij}^{-1} + (\gamma_0 - \gamma_2 I_2)\delta_{ij} + (\gamma_1 - \gamma_2 I_1)B_{ij}$$

نتیجه می‌دهد که:

$$\hat{\sigma}_{ij} = \left[\frac{\partial W}{\partial I_3} I_3 - I_2 \frac{\partial W}{\partial I_2}\right]\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial I_1} B_{ij} + I_3 \frac{\partial W}{\partial I_2} B_{ij}^{-1} \qquad (۸-۲-۲۴)$$

برای تراکم‌ناپذیری، لازم است که $I_3 = 1$ و $\frac{\partial W}{\partial I_3} = 0$ باشد. علاوه بر این، از آنجاکه عبارت فشار در قید تنش داخلی دلخواه است، نخستین عبارت از معادلهٔ ۸-۲-۲۴ با عبارت فشار ترکیب می‌شود. نتیجهٔ آن عبارت زیر برای تنش کوشی است

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial I_1} B_{ij} + \frac{\partial W}{\partial I_2} B_{ij}^{-1} \qquad (۸-۲-۲۵)$$

یا

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial I_1} B_{ij} + \frac{\partial W}{\partial I_2} c_{ij} \qquad (۸-۲-۲۶)$$

که C_{ij} در معادلهٔ ۴-۶-۱۶ تعریف شده است.

در این جا، انرژی کرنشی تابعی از I_1 و I_2 فرض شده است، اما شکل تابعی دقیق تعیین

نشده است. ریولین (۱۹۴۸) به طور منطقی فرض کرد که انرژی کرنشی باید به صورت چند جمله‌ای کلی برحسب I_1 و I_2 بیان شود.

$$W = \sum C_{\alpha\beta}(I_1 - 3)^{\alpha}(I_2 - 3)^{\beta} \qquad (۸ - ۲ - ۲۷)$$

توجه می‌شود که انرژی کرنشی برحسب عباراتی از I_1-۳ و I_2-۳ نسبت به I_1 و I_2 نوشته شده تا تطابق بین کرنش صفر و انرژی کرنشی صفر تضمین شود.

براساس نوع ماده و تغییر شکل، یعنی داده آزمایش تجربی، تعداد جمله‌های مورد استفاده در معادلهٔ ۸-۲-۲۷ انتخاب می‌شود. برای مثال، با انتخاب $C_{10}=G$ و دیگر ضرایب صفر، یک پاسخ نئو-هوکین حاصل می‌شود که G مدول برشی است. تنش‌ها به وسیلهٔ معادلهٔ ۸-۲-۲۶ محاسبه می‌شوند و در معادلات حرکت (معادله ۵-۴-۴) مورد استفاده قرار می‌گیرند. این نتایج به صورت مجموعه معادلات دیفرانسیلی برای مسائل همراه با شرایط مرزی مناسب حل می‌شوند. فشار نامعین نیز با معادلات حرکت ترکیب شده و در تأمین شرایط مرزی به دست می‌آید.

۸ - ۳ حالت‌های خاص انرژی کرنشی

زمان روبه‌رو شدن با طراحی قطعه‌ای خاص که از ماده‌ای شبه لاستیک ساخته شده است، مانند پوشش یا الواری از تصادف ساختگی اتومبیل یا درون توپ گلف، برای محاسبهٔ ثابت‌های مختلف تابع انرژی کرنشی آزمایش باید صورت بگیرد، اما قبل از اینکه آزمایش انجام گیرد، شکل خاصی از انرژی کرنشی باید انتخاب شود و معادل است با اینکه چه تعدادی از عبارات انرژی کرنشی مونی - ریولین (معادله ۸-۲-۲۷) باید انتخاب شوند، به طوری که صفر نبوده و به طور مؤثر پاسخ ماده را بیان کنند. شکل‌های معمول دیگری از انرژی کرنشی وجود دارند که همه تا اندازه‌ای معادل شکلی‌اند که به وسیلهٔ مونی مطرح شد (ریولین، ۱۹۷۶ را ببینید). از آنجا که ثابت‌های $C_{\alpha\beta}$ از معادلهٔ ۸-۲-۲۷ کمیت‌های فیزیکی همچون مدول‌های الاستیسیته را نشان نمی‌دهند ثابت‌ها در اصل پارامترهای منحنی برازش یافتهٔ مناسب هستند.

ساده‌ترین شکل انرژی کرنشی برای ماده‌ای لاستیک گونه، مدل یک پارامتری است که ماده **نئو-هوکین** گفته می‌شود. آن پارامتر تنها به عنوان مدول برشی، G، انتخاب می‌شود و انرژی کرنشی تنها به نخستین پایای تانسور تغییر شکل B_{ij} وابسته است:

$$W = G(I_1 - 3) \qquad (1-3-8)$$

با فرض محورهای اصلی به منظور تانسور چپ تغییر شکل B_{ij} برای حرکتی که دارای کششی‌های اصلی λ_1 λ_2 و λ_3 بوده، بدان معنی است که معادلهٔ ۸-۳-۱ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$W = G(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) \qquad (2-3-8)$$

برای حالت کشش تک محوری، کشش‌ها به صورت $\lambda_1^2 = \lambda^2$, $\lambda_2^2 = \lambda_3^2 = \lambda^{-1}$ هستند. و علاوه بر این اگر ماده تراکم‌ناپذیر باشد $\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 = 1$ بنابراین

$$W = G(\lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3)$$

با استفاده از این عبارت در معادلهٔ ۸-۲-۲۶ برای حالت کشش تک محوری، تنش به ازای واحد سطح تغییر شکل نیافته به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$f = P_{11} = \frac{\partial W}{\partial \lambda} = 2G\ (\lambda - \frac{1}{\lambda^2}) \qquad (3-3-8)$$

که P_{11} مؤلفه ۱۱ از تنش پیلا-کرشوف است.

ماده نئو-هوکین ساده‌ترین شکل برای تابع انرژی کرنشی است و حل‌های دقیق سرراست‌تری را منجر می‌شود. یک مدل کمتر عمومی، مدل ساده، یا دو جمله‌ای، **مونی ـ ریولین** است. در این حالت تابع انرژی کرنشی نسبت به پایاهای اول و دوم تانسور چپ تغییر شکل خطی در نظر گرفته می‌شود. دوباره، با فرض اینکه ماده ایزوتروپیک و تراکم‌ناپذیر است، انرژی کرنشی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$W = C_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + C_2\left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_3^2} - 3\right) \qquad (4-3-8)$$

برای آزمایش تک محوری، کشش‌های اصلی $\lambda_1^2 = \lambda^2$ و $\lambda_2^2 = \lambda_3^2 = \lambda^{-1}$ هستند. جایگذاری این کشش‌ها در معادلهٔ ۸-۳-۴ و دیفرانسیل‌گیری نسبت به λ تنش تک محوری بر واحد مساحت تغییر شکل نیافته را می‌دهد.

$$f = P_{11} = ۲\left(\lambda - \frac{۱}{\lambda^۲}\right)\left(C_۱ + \frac{C_۲}{\lambda}\right) \qquad (۵-۳-۸)$$

به راحتی با توجه به اینکه مساحت در شکل تغییر یافته را می‌توان با مقیاس و سنجش ابعاد در جهت‌های $x_۲$ و $x_۳$ به ترتیب به وسیلهٔ $\lambda_۲$ و $\lambda_۳$ به دست آورد، تنش کوشی، شکل می‌یابد. برای حالت تک محوری، این بدان معنی است که ضرب نیرو بر مساحت تغییر نیافته به وسیلهٔ λ به تنش تک محوی کوشی منجر می‌شود :

$$\sigma_{۱۱} = ۲\left(\lambda^۲ - \frac{۱}{\lambda}\right)\left(C_۱ + \frac{C_۲}{\lambda}\right) \qquad (۶-۳-۸)$$

با استفاده از معادلهٔ ۴-۸-۸ به همراه توجه کردن به اینکه Λ در آن معادله همان λ در معادلهٔ ۸-۳-۶ است، فرمولی برای تنش برحسب عباراتی از کرنش به دست می‌آید:

$$\sigma_{۱۱} = ۲C_۱\left(۱ + ۲E_{۱۱} + \frac{۱}{\sqrt{۱+۲E_{۱۱}}}\right) + ۲C_۲\left(\sqrt{۱+۲E_{۱۱}} + \frac{۱}{۱+۲E_{۱۱}}\right) \qquad (۷-۳-۸)$$

بسط سه جملهٔ آخر معادلهٔ ۸-۳-۷ به صورت سری به همراه فرض کوچک بودن $E_{۱۱}$ منجر می‌شود به:

$$\sigma_{۱۱} = ۶(C_۱ + C_۲)E_{۱۱} \qquad (۸-۳-۸)$$

بنابراین، برای کرنش کوچک مدول الاستیسیته به صورت $E = ۶(C_۱ + C_۲)$ نوشته می‌شود. علاوه بر این، از آنجا که ماده تراکم‌ناپذیر فرض شده، نسبت پواسون برابر ۰/۵ است. این بدان معنی است که، به وسیلهٔ خاصیت معادلهٔ ۶-۲-۸الف، مدول برشی به وسیلهٔ $G = ۳(C_۱+C_۲)$ برای کرنش کوچک داده می‌شود.

مدل ساده، دو جمله‌ای مونی - ریولین پاسخ ماده را به خوبی برای کشش‌های کوچک تا متوسط بیان می‌کند، اما برای کشش بزرگ جملات مرتبهٔ بالاتر مورد نیاز است. برخی از این شکل‌های مختلف برای تابع انرژی کرنشی دارای اسم‌های خاصی هستند. برای مثال، یک ماده *اگدن* (اگدن، ۱۹۷۲)، فرض می‌شود که انرژی کرنشی به شکل زیر داشته باشد:

$$W = \sum_n \frac{\mu_n}{\alpha_n}[\lambda_۱^{\alpha_n} + \lambda_۲^{\alpha_n} + \lambda_۳^{\alpha_n} - ۳] \qquad (۹-۳-۸)$$

این شکل برای حالتی که $n = ۱,۲$ و $\alpha_۱ = ۲$ ، $\alpha_۲ = -۲$ و $\mu_۱ = ۲C_۱$ ، $\mu_۲ = -۲C_۲$ انتخاب شود، به ماده مونی - ریولین کاهش می‌یابد.

۸ - ۴ حل دقیق برای یک مادهٔ تراکم‌ناپذیر و نئو-هوکین

حل‌های دقیق برای مسائل الاستیسیتهٔ غیرخطی با استفاده از معادلات حرکت، معادلهٔ ۵-۴-۴، یا برای تعادل، معادلهٔ ۵-۴-۵، در خصوص شرایط مرزی مناسب به دست می‌آیند. مادهٔ نئو - هوکین، ماده‌ای است که پاسخ تنش تک محوی آن متناسب با ترکیب کشش $\lambda - \frac{۱}{\lambda^۲}$ است، همان طور که در بخش ۸-۱ بیان شد. ثابت تناسب مدول برشی G است. تابع انرژی کرنشی در حالت نئو - هوکین متناسب با $I_۱ - ۳$ است که $I_۱$ نخستین پایای تانسور چپ تغییر شکل است. یک چنین انرژی کرنشی به مؤلفه‌های تنش به صورت زیر منجر می‌شود:

$$\sigma_{ij} = p\delta_{ij} + GB_{ij} \qquad (۱-۴-۸)$$

که P عبارت فشار نامعین، G مدول برشی و B_{ij} تانسور چپ تغییر شکل است.

مؤلفه‌های تنش باید معادلات تعادل را تأمین کنند که در غیاب نیروهای حجمی به صورت زیر داده می‌شوند.

$$\sigma_{ij,j} = ۰ \qquad (۲-۴-۸)$$

جایگذاری معادلات ۴-۶-۱۶ و ۸-۴-۱ در معادلهٔ ۸-۴-۲ معادلهٔ حاکم دیفرانسیلی تعادل را می‌دهد.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \qquad (۳-۴-۸)$$

$$G\left[\left(\frac{\partial^۲ x_i}{\partial X_A \partial X_B}\frac{\partial X_B}{\partial x_j}\right)\frac{\partial x_j}{\partial X_A} + \left(\frac{\partial^۲ x_j}{\partial X_A \partial X_B}\frac{\partial X_B}{\partial x_j}\right)\frac{\partial x_i}{\partial X_A}\right] = ۰$$

که به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = G\frac{\partial^۲ x_i}{\partial X_A \partial X_A} = G\nabla^۲ x_i \qquad (۴-۴-۸)$$

که

$$\frac{\partial X_B}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial X_A} = \delta_{AB}$$

و

$$\frac{\partial^2 x_j}{\partial X_A \partial X_B} \frac{\partial X_B}{\partial x_j} = 0$$

استفاده شده است. معادلهٔ ۸-۴-۴ به صورت مناسب‌تری با نوشتن عبارت فشار برحسب تابعی از شکل مرجع و استفاده از قاعده زنجیری به دست می‌آید:

$$\frac{\partial P}{\partial X_A} = G \frac{\partial x_i}{\partial X_A} \nabla^2 x_i \qquad (۵ - ۴ - ۸)$$

که P تابعی از X_A و t است.

به حالت کرنش صفحه‌ای که به صورت زیر تعریف شده، توجه کنید:

$$x = x(X,Y); \quad y = y(X,Y); \quad z = Z \qquad (۶ - ۴ - ۸)$$

از آن داریم که گرادیان تغییر شکل به صورت:

$$F_{iA} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (۷ - ۴ - ۸)$$

توجه کنید که برای وضوح در حل این مسئله خاص از قرارداد جمع دقیق محیط پیوسته منحرف شده‌ایم. جایگذاری گرادیان تغییر شکل در تعریف تانسور چپ تغییر شکل و استفاده از معادلهٔ ۸-۴-۱ نتیجه می‌دهد:

$$\sigma_{xx} = -p + G\left[\left(\frac{\partial x}{\partial Y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial Y}\right)^2\right] \qquad (۸ - ۴ - ۸\text{الف})$$

$$\sigma_{yy} = -p + G\left[\left(\frac{\partial y}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial Y}\right)^2\right] \qquad (۸ - ۴ - ۸\text{ب})$$

$$\sigma_{xy} = G\left[\frac{\partial x}{\partial X}\frac{\partial y}{\partial Y} + \frac{\partial x}{\partial Y}\frac{\partial y}{\partial Y}\right] \qquad (۸ - ۴ - ۸\text{ج})$$

که دوباره برای وضوح در این حل خاص از نوشتار دقیق در محیط پیوسته استفاده نشده است. شرط تراکم‌ناپذیری $J = det[F] = 1$ ممکن است به صورت زیر نوشته شود:

$$\frac{\partial x}{\partial X}\frac{\partial y}{\partial Y} - \frac{\partial x}{\partial Y}\frac{\partial y}{\partial X} = ۱ \qquad (۹-۴-۸)$$

معکوس گرادیان تغییر شکل به طور مستقیم از معادلهٔ ۸-۴-۷ محاسبه می‌شود.

$$F_{iA}^{-۱} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial Y} & -\frac{\partial x}{\partial Y} & ۰ \\ -\frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial X} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad (۱۰-۴-۸)$$

بنابراین، در حالت ماده تراکم‌ناپذیر تحت حرکت کرنش صفحه‌ای روابط دنبال باید برقرار باشد:

$$\frac{\partial x}{\partial X} = \frac{\partial Y}{\partial y};\quad \frac{\partial x}{\partial Y} = -\frac{\partial X}{\partial y};\quad \frac{\partial y}{\partial X} = -\frac{\partial Y}{\partial x};\quad \frac{\partial y}{\partial Y} = \frac{\partial X}{\partial x} \qquad (۱۱-۴-۸)$$

شکل تغییر یافتهٔ مؤلفه‌های تنش را می‌توان با فاکتورگیری کمیت $\pi = \frac{(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{۲}$ به صورت طرح مناسب زیر نوشت:

$$\sigma_{xx} = \Pi + \frac{۱}{۲} G\left[\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^۲ + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^۲ - \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^۲ - \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^۲\right] \qquad (۱۲\text{الف}-۴-۸)$$

$$\sigma_{yy} = \Pi - \frac{۱}{۲} G\left[\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^۲ + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^۲ - \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^۲ - \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^۲\right] \qquad (۱۲\text{ب}-۴-۸)$$

$$\sigma_{xy} = -G\left[\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial x}\right] \qquad (۱۲\text{پ}-۴-۸)$$

که البته نتایج حاصل از معادلهٔ ۸-۴-۱۱ نیز بهره گرفته شده است. معادلات غیرجزئی تعادل در جهات x و y هستند. با استفاده از مؤلفه‌های تنش تعریف شده در معادلهٔ ۸-۴-۱۲ شرایط تعادل برقرار می‌شود:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = G\left[\frac{\partial X}{\partial x}\nabla^۲ X + \frac{\partial Y}{\partial x}\nabla^۲ Y\right] \qquad (۱۳\text{الف}-۴-۸)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} = G\left[\frac{\partial X}{\partial y}\nabla^{\mathsf{T}} X + \frac{\partial Y}{\partial y}\nabla^{\mathsf{T}} Y\right] \qquad (۸-۴-۱۳ب)$$

شرط تراکم‌ناپذیری به صورت زیر نیز نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x} = ۱ \qquad (۸-۴-۱۴)$$

معادلات ۸-۴-۱۳ و ۸-۴-۱۴ سه معادلهٔ دیفرانسیل جزئی غیرخطی هستند که باید برای تضمین تعادل و قید تراکم‌ناپذیری تأمین شوند. برای حل کامل یک مسئله، راهی باید پیدا کرد که شرایط مرزی مناسب را تأمین کند. اغلب راهی که صورت می‌گیرد این است که با فرض شکلی خاص برای $X(x,y)$ و $Y(x,y)$ نشان داده می‌شود که معادلات مذکور تأمین شده‌اند. به دنبال آن، شرایط مرزی تعریف و اثبات و حل کامل می‌شود. تا اندازه‌ای، این موضوع مشابه روش نیمه معکوس بحث‌شده در فصل ششم است. حدس فرض شده از شکل تابعی $X(x,y)$ و $Y(x,y)$ نیازمند برخی تجارب و یا آشنایی نزدیک با مسئله است. اینجا، یک شکل تابع به دنبال حل یک نمونه لاستیک مستطیلی که در جهت x فشرده می‌شود فرض خواهد شد. وجوه نمونه به طور کامل به صفحه‌های صلب متصل شده است. در این حالت، فرض می‌شود که $X = f(x)$ بعد از مقدار به نسبت کمی کار، نشان داده خواهد شد که این به حل ماده نئو-هوکین فشرده شده بین صفحات صلب منجر می‌شود. جایگذاری شکل فرض شده X در معادلهٔ تراکم‌ناپذیری، معادلهٔ ۸-۴-۱۴، به معادلهٔ دیفرانسیل معمولی منجر می‌شود.

$$f'\frac{\partial Y}{\partial y} = ۱ \qquad (۸-۴-۱۵)$$

که علامت پریم f بیانگر مشتق نسبت به x است. با تعریف، $q(x) = [f'(x)]^{-۱}$ از معادله ۸-۴-۱۵ می‌توان انتگرال و به دست آورد که:

$$Y = q(x)y + g(x) \qquad (۸-۴-۱۶)$$

که تابع $g(x)$ یک تابع دلخواه نامعین انتگرال‌گیری است.

با استفاده از توابع داده شده X و Y، شرط تراکم‌ناپذیری تأمین می‌شود و معادلات تعادل

را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = G[f'f'' + (yq' + g')(yq'' + g'')] \qquad (۸-۴-۱۷\text{الف})$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} = G[q(yq'' + g'')] \qquad (۸-۴-۱۷\text{ب})$$

که دوباره پریم‌های بعد از هر نماد بیانگر دیفرانسیل نسبت به x است. دومین معادله، ۸-۴-۱۷ب، به راحتی برای به دست آوردن عبارتی برای Π انتگرال گرفته می‌شود.

$$\frac{\Pi}{G} = \frac{۱}{۲} qq''y^۲ + qg''y + M(x) \qquad (۸-۴-۱۸)$$

که $M(x)$ تابع انتگرال‌گیری است. دیفرانسیل‌گیری از معادلهٔ ۸-۴-۱۸ نسبت به x به معادله‌ای منجر می‌شود که باید موافق با معادلهٔ ۸-۴-۱۷الف باشد. این مقایسه به سه معادلهٔ دیفرانسیل معمولی زیر منجر می‌شود:

$$\frac{۱}{۲} \frac{d}{dx}(qq'') = q'q'' \qquad (۸-۴-۱۹\text{الف})$$

$$\frac{d}{dx}(qq'') = g'q'' + q'g'' \qquad (۸-۴-۱۹\text{ب})$$

$$M'(x) = f'f'' + g'g'' \qquad (۸-۴-۱۹\text{پ})$$

معادلهٔ ۸-۴-۱۹الف باز شده و انتگرال‌گیری می‌شود، در نتیجه $q'' = k^۲q$ که تابع $q(x)$ براساس ثابت‌های A و B تعیین می‌شود.

$$q(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx} \qquad (۸-۴-۲۰)$$

معادلات ۸-۴-۱۹الف و ب را می‌توان ترکیب و در خصوص این واقعیت که $q''=k^۲q$ تابع $g(x)$ را به دست آورد

$$g(x) = Ce^{kx} + De^{-kx} \qquad (۸-۴-۲۱)$$

که C و D ثابت‌اند. حال که توابع $f(x)$ و $g(x)$ به دست آمدند، نوشتن توابع $X(x,y)$ و $Y(x,y)$ به صورت زیر امکان‌پذیر است:

$$X = \int \frac{dx}{Ae^{kx} + Be^{-kx}} \qquad (۸ - ۴ - ۲۲\text{الف})$$

$$Y = (Ae^{kx} + Be^{-kx})y + Ce^{kx} + De^{-kx} \qquad (۸ - ۴ - ۲۲\text{ب})$$

در پیگیری حل لاستیک مستطیلی فشرده شده، ثابت‌های C و D به طور یکسان صفر و ثابت‌های A و B مساوی هم گرفته می‌شوند، بنابراین

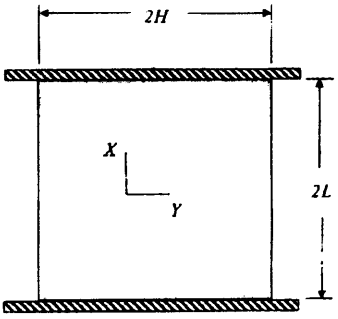
$$X = (kA)^{-1}[\tan^{-1}(e^{kx}) + C'] \qquad (۸ - ۴ - ۲۳\text{الف})$$

$$Y = ۲Ay \cosh kx \qquad (۸ - ۴ - ۲۳\text{ب})$$

که K، A و C' ثابت‌هایی‌اند که باید تعیین شوند. تغییر شکل مذکور، مرتبط با لاستیک لوزی شکل به طور متقارن حول مبدأ هر دو سیستم مختصات مرجع و تغییر شکل یافته بود. (شکل ۸-۵الف و ب)، بنابراین قرار دادن $X = ۰$ وقتی که $x = ۰$، برای حصول ثابت C' از معادله ۸-۴-۲۳الف، که مقدار $۰/۲۵\pi$ را نتیجه می‌دهد. از آنجا که صفحات به نمونه ثابت شده‌اند، $Y=y$ روی صفحات $x = \pm ۱$ است که از آن ثابت A به دست می‌آید که $A = \frac{۱}{۲}[\cosh(kl)]^{-۱}$؛ سرانجام، ثابت K برحسب عباراتی از طول‌های تغییریافته و تغییرنیافته l و L محاسبه می‌شود:

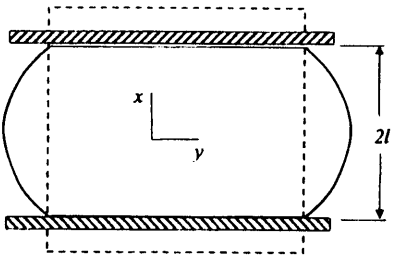
$$kL = ۲ \cosh(kl)\left[\tan^{-1}(e^{kl}) - \frac{\pi}{۴}\right] \qquad (۸ - ۴ - ۲۴)$$

برای رسیدن به حل دقیق باید نشان داده شود که سطح بشکه‌ای شده که در ابتدا در $Y = \pm H$ قرار داشته، در شکل تغییر یافته، رها از تنش هستند و متأسفانه برای این مسئله امکان‌پذیر نیست، در عوض، یک شرط مرزی آسان شده با وابستگی نیروی حاصل روی مرز مساوی صفر به جای داشتن کشش صفر در هر نقطه تأمین می‌شود.



شکل ۸ - ۵الف

نمونه لاستیک لوزی‌گون در شکل مرجع آن



شکل ۸ - ۵ ب

نمونه لاستیک لوزی‌گون در شکل تغییریافته آن. خط‌چین شکل تغییرنیافته را نشان می‌دهد.

با مشخص شدن همهٔ ثابت‌های معادلهٔ ۸-۴-۲۴، مؤلفه‌های تنش به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\sigma_{xx} = -p + \frac{1}{2} G \frac{\cosh^2(kx)}{\cosh^2(kl)} \qquad (۸-۴-۲۵\text{الف})$$

$$\sigma_{yy} = -p + G\left[k^2 y^2 \frac{\sinh^2(kx)}{\cosh^2(kl)} + 4 \frac{\cosh^2(kl)}{\cosh^2(kx)}\right] \qquad (۸-۴-۲۵\text{ب})$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{1}{2} G k y \frac{\sinh^2(2kx)}{\cosh^2(kl)} \qquad (۸-۴-۲۵\text{پ})$$

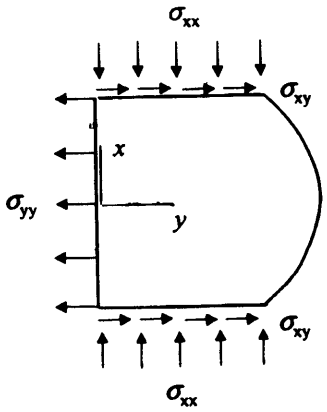
در این مکان، تنش‌ها در درون عبارت فشار اضافه شده p شناخته‌شده هستند. با انتخاب p به گونه‌ای که نیروی متوسط روی لبهٔ خمره‌ای صفر باشد، حل کامل می‌شود.

تقارن در تغییر شکل امکان می‌دهد که در تعیین شرط برای تنش حاصل صفر روی سطح بالای خمره شده، تنها به نصفهٔ بالایی $y \geq 0$ بنگریم. (شکل ۸-۶). با انتگرال‌گیری از تنش‌ها داریم:

$$\int_0^l \sigma_{yy}\Big|_{y=0} dx = \int_0^H \sigma_{xy}\Big|_{x=l} dy \qquad (۸-۴-۲۶)$$

یا

$$p = \frac{1}{4} \frac{GkH^2}{l} \frac{\sinh(2kl)}{\cosh^2(kl)} - \frac{4G}{k} \cosh^2(kl)\tanh(kl) \qquad (۸-۴-۲۷)$$



شکل ۸ - ۶

تنش روی نمونه لاستیک تغییر شکل یافته

با دانستن عبارت فشار، نیروی فشاری به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$F = \int_{0}^{H} \sigma_{xx}\Big|_{x=l} dy \qquad (۲۸ - ۴ - ۸)$$

مراجع

Carroll, M.M. (1988), "Finite strain solutions in compressible isotropic elasticity," *J. Elas.*, pp. 65-92.

Kao, B.G. and L. Razgunas (1986), "On the Determination of Strain Energy Functions of Rubbers," *Proceedings of the Sixth Intl. Conference on Vehicle Structural Dynamics* P-178, Society of Automotive Engineering, Warrendale, PA.

McCrum, N. G., Buckley, C. P., and Bucknall, C. B. (1997), *Principles of Polymer Engineering*, Second Edition, Oxford University Press, Oxford, U.K.

Mooney, M. (1940), "A Theory of Large Elastic Deformation," *J. Appl. Phys.*, Vol. 11, pp. 582-592.

Rivlin, R.S. (1948), "Large Elastic Deformations of Isotropic Materials: IV. Further Developments of the General Theory," *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A241, pp. 379-397.

Rivlin, R.S. (1949), "Large Elastic Deformations of Isotropic Materials: VI. Further Results in the Theory of Torsion, Shear and Flexure," *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A242, pp. 173-195.

Rivlin, R.S. and Sawyers, K.N. (1976), "The Strain-Energy Function for Elastomers," *Trans. of the Society of Rheology*, 20:4, pp. 545-557.

Sperling, L. H. (1992), *Introduction to Physical Polymer Science*, Second Edition, Wiley & Sons, Inc., New York.

Ward, I. M. and Hadley, D. W. (1993), *An Introduction to the Mechanical Properties of Solid Polymers*, Wiley & Sons, Inc., Chichester, U.K.

مسائل

۸ - ۱ براساس محورهای اصلی، پایاهای تانسور تغییر شکل گرین C_{AB} به صورت زیرند:

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$
$$I_2 = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_1^2\lambda_3^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2$$
$$I_3 = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2$$

برای ماده ایزوترپیک و تراکم‌ناپذیر نشان دهید که:

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2\lambda_2^2}$$

$$I_2 = \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \lambda_1^2\lambda_2^2$$

۸ - ۲ روابط زیر را بین پایاهای I_1 و I_2 و I_3 و گرادیان تغییر شکل C_{AB} استنتاج کنید:

الف) $$\frac{\partial I_1}{\partial C_{AB}} = 2\delta_{AB}$$

ب) $$\frac{\partial I_2}{\partial C_{AB}} = I_1\delta_{AB} - C_{AB}$$

ج) $$\frac{\partial I_3}{\partial C_{AB}} = I_3 C_{AB}^{-1}$$

۸ - ۳ با استفاده از تعریف I_1 و I_2 برحسب کشش‌های اصلی λ_1 λ_2 و λ_3 نشان دهید:

الف) $$\frac{\partial W}{\partial \lambda_1} = \frac{2}{\lambda_1}(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda_2^2\frac{\partial W}{\partial I_2}\right)$$

ب) $$\frac{\partial W}{\partial \lambda_2} = \frac{2}{\lambda_2}(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda_2^2\frac{\partial W}{\partial I_2}\right)$$

۸ - ۴ با در نظر گرفتن انرژی کرنشی بر واحد حجم به صورت $W(I_1,I_2,I_3)$ برای یک ماده همگن و ایزوتروپیک، نشان دهید که می‌توان مؤلفه‌های تنش پیلا-کرشوف را به صورت زیر نوشت:

$$P_{iA} \equiv \frac{\partial W}{\partial F_{ia}} = 2\frac{\partial W}{\partial I_1} + 2\frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1\delta_{ij} - B_{ij})F_{jA} + 2I_3\frac{\partial W}{\partial I_3}F_{iA}^{-1}$$

۸ - ۵ تنش کشی به صورت زیر داده شده است:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{J} F_{jA} P_{iA}$$

با شروع از نتیجهٔ مسئله ۸-۴ نشان دهید که:

$$\sigma_{ij} = \frac{2}{J}\left[\frac{\partial W}{\partial I_1} B_{ij} + \frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1\delta_{ij} - B_{ik})B_{jk} + I_3 \frac{\partial W}{\partial I_3}\delta_{ij}\right]$$

۸ - ۶ انرژی کرنشی به شکل زیر را در نظر بگیرید:

$$W = w(\lambda_1) + w(\lambda_2) + w\left(\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}\right)$$

برای مادهٔ ایزوتروپیک و تراکم‌ناپذیر نشان دهید که:

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_1^2 \partial \lambda_2} = \lambda_2 \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_2^2 \partial \lambda_1}$$

۸ - ۷ برای بارگذاری دو محوری یک صفحه نازک لاستیک ولکانیز شده انرژی کرنشی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) + C_3(I_2 - 3)^2$$

(ریولین و ساندرس ***Saunders***، ۱۹۵۱)

(الف) با استفاده از تعریف پایاهای J_1 J_2 و J_3 برحسب کشش‌های λ_1 λ_2 و λ_3 نشان دهید که:

$$(I_2 - 3)^2 = \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_3^2} + 2I_1 - 6I_2 + 9$$

(ب) با جایگذاری نتایج حاصل از الف در انرژی کرنشی بالا به دست آورید:

$$w(\lambda_1) = (C_1 + 2C_2)\lambda_1^2 + (C_2 - 6C_3)\lambda_1^{-2} + C_3\lambda_1^{-4}$$

$$- (C_1 + C_2 - 3C_3)$$

که:

$$W = w(\lambda_1) + w(\lambda_2) + w\left(\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}\right)$$

۸ - ۸ ماده‌ای را در نظر بگیرید که دارای مختصات شکل مرجع $(R\ ,\ \Theta\ ,\ Z)$ و مختصات شکل جاری (r,θ,z) است. حرکتی را که به صورت زیر تعریف شده است، در نظر گرفته

$$r = \frac{R}{g(\Theta)}, \quad \theta = f(\Theta), \quad z = Z$$

و F_{iA} و B_{ij} را برحسب جملاتی از g' ،g و f' تعیین کنید.

پاسخ:

$$F_{iA} = \begin{bmatrix} \frac{1}{g} & -\frac{g'}{g^2} & 0 \\ 0 & \frac{f'}{g} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{g^2} + \left(\frac{g'}{g^2}\right)^2 & -\frac{f'g'}{g^2} & 0 \\ -\frac{f'g'}{g^2} & \left(\frac{f'}{g}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۸ - ۹ نشان دهید که

$$\sigma_{11} = 2(\lambda_1^2 - \lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2})\frac{\partial W}{\partial I_1} - 2(\lambda_1^{-2} - \lambda_1^2\lambda_2^2)\frac{\partial W}{\partial I_2}$$

$$\sigma_{22} = 2(\lambda_2^2 - \lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2})\frac{\partial W}{\partial I_1} - 2(\lambda_2^{-2} - \lambda_1^2\lambda_2^2)\frac{\partial W}{\partial I_2}$$

مؤلفه‌های تنش غیرصفر کوشی برای بارگذاری کششی دو محوری در ماده همگن، ایزوتروپیک و تراکم‌ناپذیر، لاستیک گونه هستند. به وسیلهٔ حل برای فشار نامعین p از این حقیقت که $\sigma_{33} = 0$.

۸ - ۱۰ داده‌های نیروی فشاری - تغییر شکل که به دنبال مشاهده می‌کنید برای لاستیک به طور کامل اشباع پلی بوتادین به دست آمده است. این لاستیک دارای طول سنجه اولیه $0/490in$ و سطح مقطع تغییر شکل نیافته $1in^2$ است.

Displ. (in)	Force (lb)
-8.95E-04	-7.33E+00
-5.45E-03	-4.15E+01
-8.06E-03	-7.57E+01
-1.13E-02	-1.29E+02
-1.44E-02	-1.83E+02
-1.80E-02	-2.52E+02
-2.55E-02	-3.93E+02
-2.94E-02	-4.62E+02
-3.28E-02	-5.35E+02
-4.00E-02	-6.72E+02
-4.39E-02	-7.40E+02
-4.75E-02	-8.13E+02
-5.46E-02	-9.45E+02
-5.80E-02	-1.01E+03
-6.58E-02	-1.15E+03
-7.30E-02	-1.28E+03
-7.69E-02	-1.35E+03
-8.05E-02	-1.42E+03
-8.80E-02	-1.56E+03
-9.19E-02	-1.63E+03
-9.55E-02	-1.70E+03
-1.03E-01	-1.86E+03
-1.06E-01	-1.93E+03
-1.17E-01	-2.20E+03
-1.28E-01	-2.50E+03
-1.38E-01	-2.85E+03
-1.50E-01	-3.26E+03
-1.60E-01	-3.73E+03
-1.71E-01	-4.22E+03
-1.77E-01	-4.42E+03
-1.83E-01	-4.48E+03

الف) نمودار تنش - کشش را رسم کنید؛

ب) با استفاده از نرم‌افزار صفحه گسترده یا هر ابزار مناسب دیگر، نشان دهید که مونی - ریولین ساده $C_1 = ۱/۵۵۰$ و $C_2 = -۵۰۰$ ماده را در محدوده و نوع بارگذاری داده شده بـه تـصویر می‌کشند؛

پ) مجموعه‌ای از ثابت‌های به طور مشخص متفاوت از C_1 و C_2 که ممکن است بـه طور یکسان ماده را در این محدوده و نوع بارگذاری به خوبی مدل کنند، تولید کرده و نشان دهید که C_1 و C_2 یکتا نیستند.

۹ ویسکوالاستیسیته خطی

۹ - ۱ مقدمه

در فصل‌های گذشته بیشتر به معادلات اساسی مرتبط با دو نوع متفاوت از رفتار ماده، یعنی پاسخ الاستیک جامدات و جریان ویسکوز سیالات توجه شده است. مثال‌هایی از موادی که رفتار الاستیک در دماهای متوسط و تحت بارهای نسبتاً کم دارند، فلزهایی چون فولاد، آلومینیوم، مس، پلیمرهای خاص، و حتی استخوان بیرونی هستند. مثال‌هایی از جریان ویسکوز شامل محدودهٔ متنوعی از سیالات آب تا پلیمرها تحت شرایط خاص دمایی و بارگذاری است، بویژه پلیمرها جالب توجه‌اند، زیرا به صورت الاستیک یا ویسکوز و یا حتی ترکیبی از دو حالت رفتار می‌کنند. در دما و بارگذاری به نسبت متوسط، پلیمری چون پلی‌متال متاکریلیت (*PMMA, Plexiglass*)، به صورت کارا به وسیلهٔ معادلهٔ اساسی الاستیک خطی، مدل می‌شود. با وجود این، در دمایی به تقریب بالا چنین ماده‌ای ممکن است به عنوان سیال ویسکوز، مدل شود.

پلیمرها به هیچ وجه تنها موادی که رفتار متفاوتی تحت دمای متغیر و شرایط متناوب از خود نشان می‌دهند، نیستند. فولاد و همچنین آلومینیوم، مس و فلزهای دیگر در دماهای زیاد گداخته و ذوب می‌شوند و در قالب‌ها ریخته شده و به شکل شمش‌های خام درمی‌آیند. علاوه بر این، در یک نرخ تغییر شکل به اندازهٔ کافی زیاد برای مثال، در تصادف یک وسیله نقلیه با سرعت $\frac{km}{hr}$ ۴۸، فولاد به طور قابل توجهی خصوصیات سختی متغیری از خود نشان خواهد داد.

مکانیک محیط‌های پیوسته هم به عنوان بنای مدل‌های اساسی به طور مجزا در جامدات الاستیک (قوانین تنش - کرنش) و سیالات ویسکوز (قوانین نرخ کرنش - تنش) است و هم به عنوان بنای روابط اساسی که رفتار ماده را در محدوده‌ای از دما و فرکانس و زمان تشریح می‌کند نیز کاربرد دارد. یکی از ساده‌ترین مدل‌ها برای این رفتار ترکیبی، ویسکوالاستیسیته خطی است.

۹ - ۲ معادلات اساسی ویسکوالاستیک در شکل اپراتور دیفرانسیل خطی

یکی از خصوصیات اصلی رفتار الاستیک، توانایی و ظرفیت ذخیرهٔ انرژی مکانیکی برای مواد است، هنگامی که به وسیلهٔ بارگذاری تغییر شکل می‌دهند و به طور کلی آزاد کردن این انرژی وقتی بارها برداشته می‌شوند. برعکس، در جریان ویسکوز، انرژی مکانیکی بدون هیچ ذخیره‌ای به طور پیوسته تلف می‌شود. تعدادی از مواد مهم مهندسی به طور همزمان هنگامی که در معرض نیروهای اعمالی قرار می‌گیرند، انرژی مکانیکی را ذخیره و تلف می‌کنند. در واقع، همهٔ مواد حقیقی به طور متفاوتی انرژی را در چرخهٔ بارگذاری و باربردای، ذخیره و یا تلف می‌کنند. این رفتار به ویسکوالاستیک منسوب است. به طور کلی، رفتار ویسکوالاستیک ممکن است به صورت طیفی از یک سو با تغییر شکل الاستیک و از سوی دیگر جریان ویسکوز و با تغییر ترکیب‌های این دو حالت در محدودهٔ میان آنها تصور شود، بنابراین معادلات اساسی معتبر برای رفتار ویسکوالاستیک که به عنوان حالات خاصی تغییر شکل الاستیک و جریان ویسکوز را دربر دارد، و به طور همزمان الگوهای پاسخی که رفتارهای ترکیبی از آن دو هستند را فراهم می‌کند. به طور ذاتی، چنین معادلاتی هم شامل تنش و کرنش و هم شامل نرخ‌های زمانی هر دو تنش و کرنش نیز خواهند بود.

در توسعهٔ شکل *اپراتور دیفرانسیل خطی* معادلات اساسی برای رفتار ویسکوالاستیک، همان طور که در معادلهٔ ۵-۱۲-۶ نشان داده شده است، یک جفت از معادلات اساسی برای رفتار الاستیک ترتیب دادیم (معادلهٔ ۶-۲-۱۲) که اینجا تکرار شده است.

$$S_{ij} = ۲G\eta_{ij} \qquad (۹ - ۲ - ۱\text{الف})$$

$$\sigma_{ii} = ۳K\varepsilon_{ii} \qquad (۹ - ۲ - ۱\text{ب})$$

به علاوه، برای جریان ویسکوز نیز (معادلهٔ ۷-۱-۱۵)،

$$S_{ij} = ۲\mu^{*}\beta_{ij} \qquad (۹ - ۲ - ۲\text{الف})$$

$$\sigma_{ii} = -۳(p - \kappa^{*}D_{ii}) \qquad (۹ - ۲ - ۲\text{ب})$$

که هر یک برحسب پاسخ‌های انحراف و کروی بیان شده‌اند. این معادلات فقط برای محیط ایزوتروپیک معتبرند. برای تئوری ویسکوالاستیک خطی فرض می‌کنیم که گرادیان‌های تغییر مکان $u_{i,A}$ کوچک هستند و همان طور که در معادلهٔ ۴-۱۰-۱۸ نشان داده شد، منجر می‌شود به:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} \approx D_{ij} \qquad (۹-۲-۳\text{الف})$$

و از آن فوری نتیجه می‌شود که:

$$\dot{\varepsilon}_{ii} \approx D_{ii} \qquad (۹-۲-۳\text{ب})$$

بنابراین حال از معادلات ۴-۷-۲۰ و ۷-۱-۱۳ب

$$\dot{\eta}_{ij} \approx \beta_{ij} \qquad (۹-۲-۴)$$

اگر فشار pدر معادلهٔ ۹-۲-۲ب به نسبت کوچک و قابل صرف‌نظرکردن باشد، یا اگر به فشار به عنوان نیروی حجمی یکنواخت کروی که در صورت لزوم ممکن است به اثر کروی نرخ تغییر شکل D_{ii} اضافه شود، توجه کنیم، معادلهٔ ۹-۲-۲ نظر به معادلهٔ ۹-۲-۳ و معادلهٔ ۹-۲-۴ ممکن است اصلاح و به صورت زیر استنباط شود:

$$S_{ij} = ۲\mu^* \dot{\eta}_{ij} \qquad (۹-۲-۵\text{الف})$$

$$\sigma_{ii} = ۳\kappa^* \dot{\varepsilon}_{ii} \qquad (۹-۲-۵\text{ب})$$

مقایسهٔ معادلات ۹-۲-۵ و ۹-۲-۱ نشان می‌دهد که آنها در ثابت‌های فیزیکی فهرست شده و این حقیقت که تانسورهای تنش برحسب عباراتی از نرخ‌های کرنش بیان شده‌اند، اختلاف دارند، بنابراین تعمیمی از هر دو مجموعهٔ معادلات با معرفی اپراتورهای دیفرانسیل خطی به شکلی که در معادلهٔ ۵-۱۲-۷ داده شده به جای ثابت‌های فیزیکی G، K، μ^* و κ^* میسر می‌شود. به منظور کامل کردن این تعمیم، اپراتورهای دیفرانسیلی مشابه‌ای را به سمت چپ معادله اضافه می‌کنیم تا به دست آوریم.

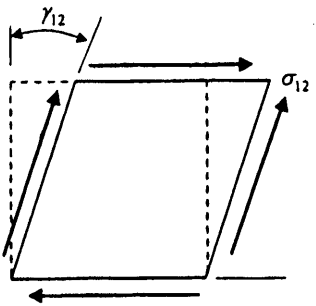
$$\{P\}S_{ij} = ۲\{Q\}\eta_{ij} \qquad (۹-۲-۶\text{الف})$$

$$\{M\}\sigma_{ii} = ۳\{N\}\varepsilon_{ii} \qquad (۹-۲-۶\text{ب})$$

که فاکتورهای عددی برای سادگی در ارتباط با معادلات قبلی الاستیسیته و جریان ویسکوز نگه داشته شده است. همان طور که ذکر شد، اپراتورهای دیفرانسیل خطی زمان ؛ $\{P\}$، $\{Q\}$، $\{M\}$ و $\{N\}$ هم شکل با ضرایب m_i q_i p_i و n_i در معادلهٔ ۵-۱۲-۷ بوده که بیانگر خصوصیات فیزیکی مادهٔ تحت بررسی است. اگرچه این ضرایب ممکن است در حالت کلی، توابعی از دما و یا پارامترهای دیگری باشند، در تئوری سادهٔ خطی که اینجا تشریح می‌شود آنها به صورت ثابت‌هایی در نظر گرفته می‌شوند. همان طور که در ابتدا بیان شد، بررسی می‌کنیم که برای انتخاب‌های خاصی از اپراتورهای $\{P\} = ۱$ ، $\{Q\} = G$ ، $\{M\} = ۱$ و $\{N\} = K$ معادلات ۹-۲-۶ رفتار الاستیک را تعریف می‌کنند، در صورتی که برای $\{P\} = ۱$ ، $\{Q\} = \mu^* \frac{\partial}{\partial t}$ ، $\{M\} = ۱$ و $\{N\} = \kappa^* \frac{\partial}{\partial t}$، رفتار خطی ویسکوز نشان داده می‌شود.

آزمایش‌های گسترده نشان داده است که در عمل همهٔ مواد مهندسی در انبساط به صورت

الاستیک رفتار می‌کنند، بنابراین بدون از دست دادن جدی عمومیت مسئله می‌توانیم فرض کنیم که معادلات اساسی پایه برای رفتار ویسکوالاستیک خطی در شکل اپراتور دیفرانسیلی به صورت :



شکل ۹ - ۱

المان برش ساده که ماده مکعبی تحت بار برشی خالص را نشان می‌دهد.

$$\{P\}S_{ij} = ۲\{Q\}\eta_{ij} \qquad (۹ - ۲ - ۷\text{الف})$$

$$\sigma_{ii} = ۳K\varepsilon_{ii} \qquad (۹ - ۲ - ۷\text{ب})$$

برای محیط ایزوتروپیک باشند. برای یک رفتار ایزوتروپیک، اپراتورهای $\{P\}$ و $\{Q\}$ باید با جمع اپراتورها تا مقدار دوازده گسترش یابند، همان طورکه $\{P_i\}$ و $\{Q_i\}$ با اندیس i که از ۱ تا ۶ تغییر می‌کند، نشان می‌دهد، بنابراین معادلهٔ ۹-۲-۷الف به شش معادلهٔ مجزا تبدیل می‌شود.

۹ - ۳ تئوری یک بعدی، مدل‌های مکانیکی

بسیاری از ایده‌های بنیادی ویسکوالاستیسیته در محتوی حالتی یک بعدی از تنش معرفی می‌شوند و چون پاسخ ویسکوالاستیک ماده به طور مستقیم مرتبط با پاسخ انحراف است، همان طورکه در رسیدن به معادلهٔ ۹-۲-۷ اشاره شد، ما حالت برشی ساده از تنش را به عنوان منطقی واحد برای توضیح ایده‌های بنیادی، انتخاب می‌کنیم، بنابراین یک مکعب از ماده راکه تحت برش ساده قرار گرفته، در نظر می‌گیریم، همان طورکه در شکل ۹-۱ نشان داده شده، برای این حالت توجه می‌کنیم که معادلهٔ ۹-۲-۷ به یک معادله کاهش می‌یابد.

$$\{P\}\sigma_{۱۲} = ۲\{Q\}\eta_{۱۲} = ۲\{Q\}\varepsilon_{۱۲} = \{Q\}\gamma_{۱۲} \qquad (۹ - ۳ - ۱)$$

که $\gamma_{۱۲}$ کرنش برشی مهندسی است، همان طورکه در شکل ۹-۱ نشان داده شده است. اگر پاسخ تغییر مکانی مادهٔ مکعبی به طور خطی الاستیک باشد، اپراتورهای $\{P\}$ و $\{Q\}$ در معادلهٔ ۹-۳-۱ ثابت‌اند ($Q = G\,,\ P = ۱$) و آن معادله به صورت زیر مشخص می‌شود:

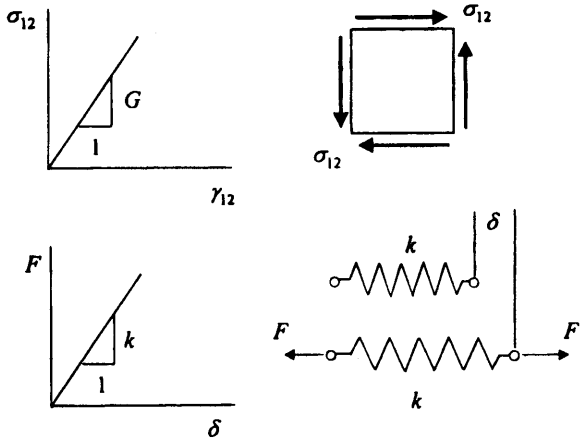
$$\sigma_{12} = G\gamma_{12} \qquad (۹-۳-۲)$$

که G مدول برشی الاستیک است. این معادله شبیه حالتی است که ازدیاد طول (یا کاهش طول) δ فنر مکانیکی خطی به نیروی اعمال شده F مرتبط است و به صورت معادلهٔ زیر داده می‌شود:

$$F = k\delta \qquad (۹-۳-۳)$$

که k ثابت فنر است، چون معادلات ۹-۳-۲ و ۹-۳-۳ در شکل یکسانند، فنر خطی به عنوان مشابه مکانیکی برش الاستیک ساده اتخاذ شده است که فرض می‌شود k نقش G را دارد. این مشابه‌سازی به صورت گرافیکی به وسیلهٔ نمودار در شکل ۹-۲ رسم شده است.

با روشی مشابه، اگر پاسخ مادهٔ مکعبی، جریان ویسکوز باشد، معادلهٔ ۹-۳-۱ نوشته می‌شود:



شکل ۹ - ۲

قیاس مکانیکی برای برش ساده.

$$\sigma_{12} = \mu^* \dot{\gamma}_{12} \qquad (۹-۳-۴\text{الف})$$

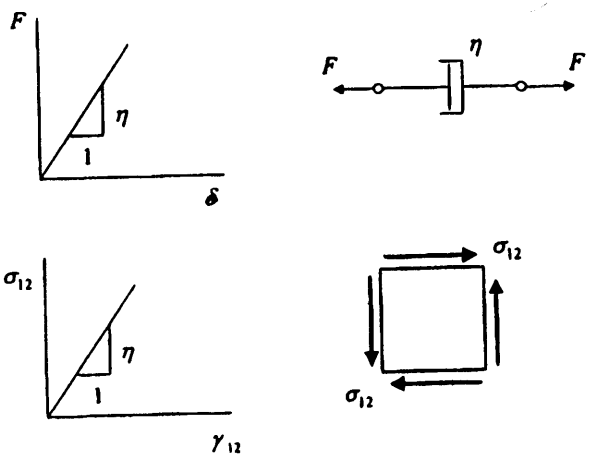
که μ^* ضریب ویسکوزیته است. در تئوری ویسکوالاستیک عرف است که ضریب ویسکوزیته با نماد η نشان داده می‌شود، و این عرف حفظ می‌شود و از این پس ما از اسکالر η برای ضریب ویسکوزیته استفاده می‌کنیم، بنابراین معادلهٔ ۹-۳-۴الف به صورت :

$$\sigma_{12} = \eta \dot{\gamma}_{12} \qquad (۹-۳-۴\text{ب})$$

در همهٔ بخش‌های بعدی از این فصل می‌شود. مشابه مکانیکی این حالت، ضربه‌گیر (یک پیستون دارای لقی که درون سیلندری پر شده از سیالی ویسکوز می‌لغزد) بوده که در معرض نیروی محوری F است، در این صورت :

$$F = \eta\,\dot{\delta} \qquad (۵-۳-۹)$$

که $\dot{\delta}$ نرخ زمانی انبساط است. این شباهت در شکل ۹-۳ نشان داده شده است.



شکل ۹ - ۳

قیاس جریان ویسکوز.

براساس دو اصل بنیادی که در بالا توضیح داده شد، بنا ساختن مدل‌های ویسکوالاستیک به وسیلهٔ ترکیبی مناسب از این جفت، اصول ساده است. دو ترکیب سادهٔ خاص فوری به ذهن می‌رسد. نخستین ترکیب فنر و ضربه‌گیر به صورت موازی است، شکل ۹-۴الف، که جامد کلوین را توصیف و به تصویر می‌کشد و در این حالت معادلهٔ ۹-۳-۱ می‌شود:

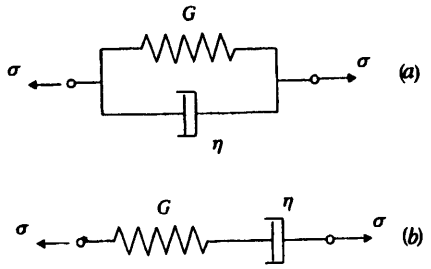
$$\sigma_{12} = \{G + \eta\,\partial_t\}\gamma_{12} \qquad (۶-۳-۹)$$

که مشتق جزئی نسبت به زمان به وسیلهٔ $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$ بیان شده است. دوم، فنر و ضربه‌گیر به صورت سری به هم متصل شده است، شکل ۹-۴ب، بیانگر سیال ماکسول و دارای معادهٔ اساسی به شکل زیر است:

$$\left\{\partial_t + \frac{1}{\tau}\right\}\sigma_{12} = \{G\,\partial_t\}\,\gamma_{12} \qquad (۷-۳-۹)$$

که $\tau = \frac{\eta}{G}$ (اسکالر τ نباید با مؤلفه‌های تانسور تنش برشی τ_{ij} اشتباه شود). مدل‌های ترکیب شده از بیش از دو المان نیز به آسانی ایجاد می‌شود. وقتی یک واحد کلوین با یک جزء فنر خطی به صورت سری ترکیب شود، شکل ۹-۵الف، مدل حاصل گفته می‌شود که بیانگر جامد خطی

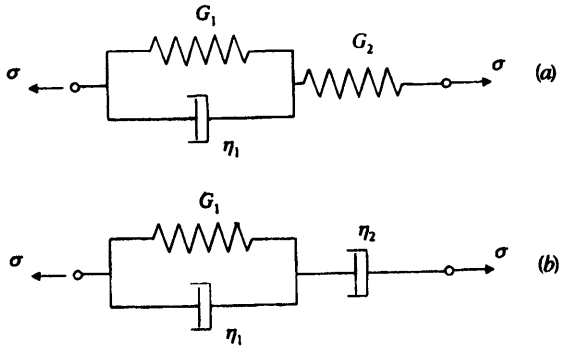
استاندارد است. اگر همان واحد کلوین با یک ضربه‌گیر به صورت سری ترکیب شود، شکل ۹-۵ب این مدل یک سیال سه پارامتری را نشان می‌دهد. به طور کلی، مدلی از یک سیال، یک ضربه‌گیر آزاد را به عنوان یکی از جزءهایش دارد. مدل‌های سه پارامتری دیگر نیز به آسانی قابل تصورند، برای مثال، یک واحد ماکسول که موازی با یک فنر یا یک ضربه‌گیر باشد.



شکل ۹ - ۴

ارائه مدل‌های کلوین و ماکسول به ترتیب برای یک جامد و سیال ویسکوالاستیک.

مدل‌های چهار پارامتری و مرتبه‌های بالاتر نیز ممکن است ساخته شوند. دو الگوی اساسی برای طراحی مدل‌های مرتبه بالاتر به طور اصولی وجود دارد. نخست، به مدل تعمیم یافته کلوین که n واحد کلوین به صورت سری دارد، منجر می‌شود (شکل ۹-۶الف). دوم، شامل n واحد ماکسول به صورت موازی است که به آن مدل تعمیم یافتهٔ ماکسول می‌گویند (شکل ۹-۶ب).



شکل ۹ - ۵

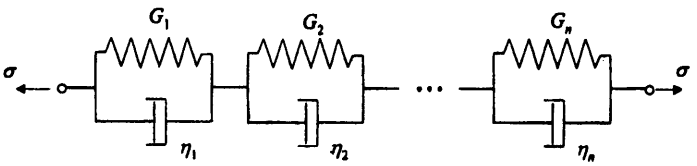
مدل‌های جامد و سیال استاندارد خطی سه پارامتری.

برای این مدل‌ها معادلات اساسی (معادله ۹-۳-۱) در شکل اپراتوری به صورت زیر است:

$$\gamma_{12} = \frac{\sigma_{12}}{G_1 + \eta_1 \partial_t} + \frac{\sigma_{12}}{G_2 + \eta_2 \partial_t} + \ldots + \frac{\sigma_{12}}{G_N + \eta_N \partial_t}$$ کلوین (۹ - ۳ - ۸الف)

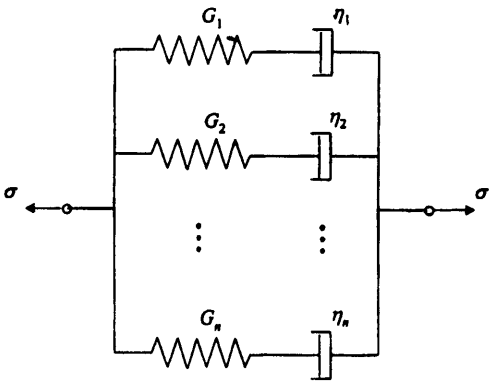
$$\sigma_{12} = \frac{G_1 \gamma_{12}}{\partial_t + \frac{1}{\tau_1}} + \frac{G_2 \gamma_{12}}{\partial_t + \frac{1}{\tau_2}} + \ldots + \frac{G_N \gamma_{12}}{\partial_t + \frac{1}{\tau_N}}$$ ماکسول (۹ - ۳ - ۸ب)

در این معادلات، مدل تعمیم یافته ممکن است به منظور نشان دادن رفتار ماده‌ای ویژه به یکی یا بیشتر از ثابت‌های G_i و η_i مقدار صفر یا ∞ اختصاص داده شود، بنابراین با η_2 و تمام ثابت‌هایی که به دنبال آن در مجموعهٔ معادلهٔ ۹-۳-۸الف می‌آید، مساوی صفر، معادلهٔ اساسی برای جامد استاندارد، شکل ۹-۵الف، داده خواهد شد.



شکل ۹ - ۶الف

مدل تعمیم یافته کلوین



شکل ۹ - ۶ب

مدل تعمیم یافته ماکسول.

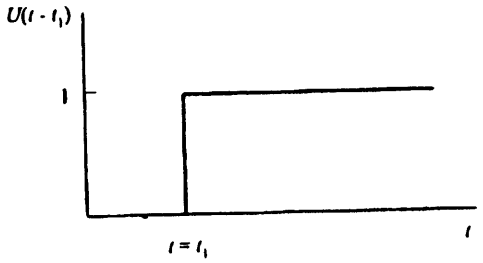
۹ - ۴ خزش و وارفتگی

بینش بیشتر درون ذات ویسکوالاستیک ماده‌ای که از مکعب نشان داده شده، در شکل ۹-۱ ساخته شده است، به وسیلهٔ دو آزمایش، تست خزش و تست و وارفتگی تنش میسر است.

تست خزش شامل قرار دادن مادهٔ مکعبی تحت یک تنش برشی ساده σ_{12} با بزرگی σ_0 و ثابت نگه داشتن آن و به طور فوری اندازه‌گیری کرنش برشی به عنوان تابعی از زمان است. به کرنش حاصل $\gamma_{12}(t)$ خزش گفته می‌شود. در تست وارفتگی تنش یک کرنش برشی لحظه‌ای γ_{12} به مقدار γ_0 به مکعب اعمال شده و در آن مقدار نگه داشته می‌شود و به طور همزمان تنش حاصل $\sigma_{12}(t)$ به عنوان تابعی از زمان ثبت می‌شود. کاهش در مقدار تنش، طی مدت آزمایش به وارفتگی تنش نسبت داده می‌شود. بیان این تست بارگذاری‌ها به صورت ریاضی به وسیلهٔ استفاده از تابع پلهٔ واحد $u(t - t_1)$ صورت می‌گیرد که به صورت معادلهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$u(t - t_1) = \begin{cases} 1 & t > t_1 \\ 0 & t \le t_1 \end{cases} \qquad (۹ - ۴ - ۱)$$

و در نمودار شکل ۹-۷ نشان داده شده است. اگر بارگذاری خزش در زمان $t = 0$ اعمال شود، تنش به صورت زیر نوشته می‌شود:



شکل ۹ - ۷

نمایش نمودار تابع پله‌ای

$$\sigma_{12} = \sigma_0\, u(t) \qquad (۹ - ۴ - ۲)$$

با دخالت دادن این تنش در معادلهٔ اساسی برای یک مدل کلوین ماده (معادلهٔ ۹-۳-۶)، معادلهٔ دیفرانسیلی حاصل

$$\sigma_0 u(t) = G\,\gamma_{12} + \eta\,\dot{\gamma}_{12} \qquad (۹ - ۴ - ۳)$$

و برای رسیدن به پاسخ خزش می‌توان انتگرال‌گیری کرد:

$$\gamma_{۱۲}(t) = \sigma_{۰}(۱ - e^{-t/\tau}) \frac{u(t)}{G} \qquad (۴ - ۴ - ۹)$$

که e مبنای لگاریتم طبیعی سیستم است. جالب است توجه شود که وقتی $t \to \infty$ کرنش به مقدار نهایی $\frac{\sigma_{۰}}{G}$ می‌رسد، همچنین زمانی که $t = ۰$ نرخ کرنش $\dot{\gamma}_{۱۲}$ برابر $\frac{\sigma_{۰}}{\eta}$ است و اگر خزش در این نرخ ادامه می‌داشت به مقدار نهایی‌اش در زمان $t = \tau$ می‌رسید. به این دلیل، به τ زمان تأخیر گفته می‌شود. معادلهٔ ۹-۴-۴، همچون هر پاسخ خزش، همیشه به صورت عمومی نوشته می‌شود:

$$\gamma_{۱۲}(t) = J(t)\sigma_{۰}u(t) \qquad (۵ - ۴ - ۹)$$

که در آن $J(t)$ تابع خزش گفته می‌شود، بنابراین برای جامد کلوین، تابع خزش به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$J(t) = \frac{۱ - e^{-t/\tau}}{G} = J(۱ - e^{-t/\tau}) \qquad (۶ - ۴ - ۹)$$

که ثابت J عکس مدول برشی G، مطلوبیت برشی گفته می‌شود. به عنوان یک قاعدهٔ کلی، تابع خزش از هر مدل ویسکوالاستیک جمع توابع خزش واحدهایش است که به صورت سری به هم متصل‌اند، بنابراین برای جامد خطی استاندارد شکل ۹-۵الف

$$J(t) = J_{۱}(۱ - e^{-t/\tau}) + J_{۲} \qquad (۷ - ۴ - ۹)$$

و برای مدل تعمیم یافته کلوین شکل ۹-۶الف

$$J(t) = \sum_{i=۱}^{N} J_i(۱ - e^{-t/\tau_i}) \qquad (۸ - ۴ - ۹)$$

در ارتباط با بارگذاری خزش برای مدل ماکسول، معادلهٔ ۹-۴-۲ در معادلهٔ اساسی (معادلهٔ ۹-۳-۷) جایگذاری شده و نتیجه به صورت معادلهٔ دیفرانسیل زیر است:

$$\gamma_{۱۲} = \sigma_{۰} \frac{\delta(t)}{G} + \sigma_{۰} \frac{u(t)}{\eta} \qquad (۹ - ۴ - ۹)$$

که $\delta(t)$ تابع دلتاست، و مشتق زمانی تابع پلهٔ واحد است. به طور کلی،

$$\delta(t - t_1) = \frac{d\, u(t - t_1)}{dt} \qquad (۹ - ۴ - ۱۰)$$

که با معادلات زیر تعریف می‌شود:

$$\delta(t - t_1) = ۰\,, \qquad t \neq t_1 \qquad (۹ - ۴ - ۱۱\text{الف})$$

$$\int_{t_1^-}^{t_1^+} \delta(t - t_1)dt = ۱ \qquad (۹ - ۴ - ۱۱\text{ب})$$

و می‌توان نشان داد که

$$\int_{-\infty}^{t} f(t')\delta(t' - t_1)dt' = f(t_1)u(t - t_1) \quad \text{برای} \quad t > t_1 \qquad (۹ - ۴ - ۱۲)$$

برای هر تابع پیوسته $f(t)$ برقرار است. براین اساس، از معادلهٔ ۹-۴-۹ انتگرال‌گیری شده تا به پاسخ خزش ماکسول برسیم:

$$\gamma_{۱۲}(t) = \sigma_{۰} J\left(۱ + \frac{t}{\tau}\right)u(t) \qquad (۹ - ۴ - ۱۳)$$

که از آن تابع خزش ماکسول

$$J(t) = J\left(۱ + \frac{t}{\tau}\right) \qquad (۹ - ۴ - ۱۴)$$

است.

توسعهٔ جزئیات مرتبط با تست وارفتگی تنش به دقت از تست خزش نتیجه می‌شود. با یک کرنش اعمالی در زمان $t = ۰$

$$\gamma_{۱۲} = \gamma_{۰}\, u(t) \qquad (۹ - ۴ - ۱۵)$$

تنش حاصل مرتبط با رفتار کلوین به طور مستقیم به وسیلهٔ جایگذاری $\dot{\gamma}_{۱۲} = \gamma_{۰}\delta(t)$ در معادلهٔ ۹-۳-۶ داده می‌شود که نتیجهٔ آن :

$$\sigma_{۱۲}(t) = \gamma_{۰}[Gu(t) + \eta\, \delta(t)] \qquad (۹ - ۴ - ۱۶)$$

تابع دلتا در این معادله بیانگر آن است که تنش محدودی در زمان $t = 0$ برای ایجاد کرنش همزمان γ_0 نیاز خواهد بود. برای رفتار ماکسول، زمانی که کرنش همزمان، معادلهٔ ۹-۴-۱۵، در معادلهٔ ۹-۳-۷ جایگذاری شود، وارفتگی تنش، حل معادلهٔ دیفرانسیل

$$\dot{\sigma}_{12} + \frac{1}{\tau}\sigma_{12} = G\,\gamma_0\,\delta(t) \qquad (۹-۴-۱۷)$$

است که انتگرال‌گیری از بالا و استفاده از معادلهٔ ۹-۴-۱۲ نتیجه می‌دهد که:

$$\sigma_{12}(t) = \gamma_0\,G\,e^{-t/\tau}u(t) \qquad (۹-۴-۱۸)$$

مشاهده می‌شود که نرخ زمانی اولیهٔ تضعیف این تنش $\frac{\gamma_0 G}{\tau}$ می‌باشد، که اگر ادامه می‌یافت در زمان $t=\tau$ تنش به صفر کاهش پیدا می‌کرد، بنابراین τ زمان وارفتگی برای مدل ماکسول گفته می‌شود.

مشابه تابع خزش $J(t)$ مرتبط با تست خزش، تابع وارفتگی تنش $G(t)$ را برای هر ماده‌ای به وسیلهٔ عمومی‌ترین شکل $\sigma_{12}(t)$ تعریف می‌کنیم.

$$\sigma_{12}(t) = G(t)\,\gamma_0\,u(t) \qquad (۹-۴-۱۹)$$

از معادلهٔ ۴-۹-۱۸، تابع وارفتگی تنش برای مدل ماکسول

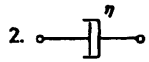
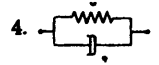
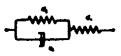
$$G(t) = G\,e^{-t/\tau} \qquad (۹-۴-۲۰)$$

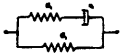
است و برای مدل تعمیم یافته ماکسول به صورت زیر است:

$$G(t) = \sum_{i=1}^{N} G_i\,e^{-t/\tau_i} \qquad (۹-۴-۲۱)$$

مدول‌های مطلوبیت خزش و وارفتگی برای برخی از مدل‌های ویسکوالاستیک ساده در جدول ۹-۴-۱ داده شده است. معادلات دیفرانسیلی حاکم بر مدل‌های مختلف نیز در این جدول داده شده است.

جدول ۹ - ۴ - ۱ پاسخ‌های خزشو وارفتگی برای مدل‌های ویسکوالاستیک مختلف.

مدل	نام	معادلهٔ اساسی	مطلوبیت خزشی، $J(t)$	مدول وارفتگی $G(t)$
1.	جامد الاستیک	$\sigma = G\varepsilon$	$\frac{1}{G} = J = \frac{u(t)}{G}$	$G(t) = G\,u(t)$
2. 	سیال ویسکوز	$\sigma = \eta\dot{\sigma}$ $\sigma = \eta\dot{\varepsilon}$	$\frac{t}{\eta} = \frac{t}{G\eta}$	$\eta\delta(t)$
3.	ماکسول (سیال)	$\dot{\sigma} + J\dot{\pi} = G\dot{\gamma}$ $\left\{\partial_t + \frac{1}{\tau}\right\}\sigma = \{G\partial_t\}\gamma$	$\frac{1}{G} + \frac{t}{\eta} = \frac{\tau + t}{\eta}$	$Ge^{-t/\tau}$
4. 	کلوین (جامد)	$\sigma = G\gamma + h\dot{g}$ $\sigma = \{G + \partial_t\eta\}\gamma$ $\frac{1}{\eta}\sigma = \left\{\frac{1}{\tau} + \partial_t\right\}\gamma$	$\frac{1}{G}\left(1 - e^{-t/\tau'}\right)$	$G + \eta\delta(t)$
5. 	جامد سه پارامتری	$G_1G_2\gamma + G_1\eta_2\dot{\gamma} =$ $(G_1 + G_2)\sigma + \eta_2\dot{\sigma}$	$\frac{e^{-t/\tau}}{G_1} + \frac{G_1 + G_2}{G_1G_2}\left(1 - e^{-t/\tau_2}\right)$ یا $\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$	$G_1e^{-t/\tau'} + \frac{G_1G_2}{G_1 + G_2}\left(1 - e^{-t/\tau'}\right)$ یا $\frac{G_1}{G_1 + G_2}\left(G_2 + G_1e^{-t/\tau'}\right)$ $\tau' = \frac{\eta_2}{G_1 + G_2}$

6. 

$$\sigma + \frac{\sigma}{\tau_2} = (G_1 + G_2)\dot{\gamma} + \frac{G_1}{\tau_2}\sigma$$

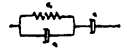
$$\frac{e^{-t/\tau'}}{G_1 + G_2} + \frac{1}{G_1}(1 - e^{-t/\tau'})$$

$$G_1 + G_2 e^{-t/\tau_2}$$

$$G_1 + G_2 e^{-t/\tau_2}$$

$$\frac{1}{G_1} - \frac{G_2}{G_1(G_1 + G_2)} e^{-t/\tau'}$$

$$\tau' = \left(\frac{G_1 + G_2}{G_1}\right)\tau_2$$

7. 

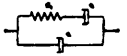
$$G_2\eta_1\dot{\gamma} + \eta_1\eta_2\ddot{\gamma} = G_2\sigma + (\eta_1 + \eta_2)\dot{\sigma}$$

$$\frac{1}{G_1}(1 - e^{-t/\tau'}) + t/\eta_1$$

$$\frac{\eta_1\eta_2}{\eta_1 + \eta_2}\delta(t) + \frac{G_2}{\eta_1 + \eta_2}\left(\eta_1 + \frac{\eta_1\eta_2}{\eta_1 + \eta_2}\right)e^{\tau'}$$

$$\ddot{\gamma} + \frac{\dot{\gamma}}{\tau_2} = \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1\eta_2}\dot{\sigma} + \frac{\sigma}{\gamma_2\eta_1}$$

$$\tau' = \frac{\eta_1 + \eta_2}{G_2}$$

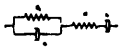
8. 

$$\dot{\sigma} + \frac{\sigma}{\tau_2} + \left(G_2 + \frac{\eta_1}{\tau_2}\right)\dot{\gamma} + \eta_1\ddot{\gamma}$$

$$\frac{t}{\eta_1 + \eta_2} + \frac{1}{G_2}\left(\frac{\eta_2}{\eta_1 + \eta_2}\right)^2(1 - e^{-\lambda_t})$$

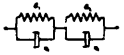
$$\eta_1\delta(t) + G_2 e^{-t/\tau_2}$$

$$\lambda = \frac{G_2(\eta_1 + \eta_2)}{\eta_1\eta_2}$$

9. 

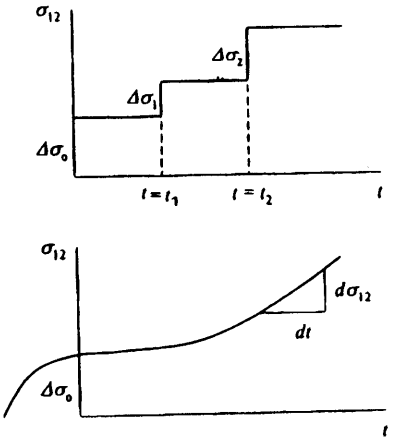
$$\ddot{\sigma} + \frac{\dot{\sigma}}{\tau_2} = \frac{\ddot{\sigma}}{G_1} + \left(\frac{1}{\eta_2} + \frac{1}{G_1\tau_2} + \frac{1}{\eta_1}\right)\dot{\sigma} + \frac{1}{\eta_1\tau_2}\sigma$$

$$\frac{1}{G_1} + \frac{t}{\eta_1} + \frac{1}{G_2}(1 - e^{-t/\tau_2})$$

10. 

$$(\eta_1 + \eta_2)\dot{\sigma} + (G_1 + G_2)\sigma = G_1G_2\sigma + (\eta_2G_1 + \eta_1G_2)\dot{\sigma} + \eta_1\eta_2\ddot{\gamma}$$

$$\frac{1}{\eta_1 + \eta_2}\{\eta_1\eta_2(\delta(t) - \frac{e^{-t/\tau'}}{\tau'})\} + (\eta_1G_2 + \eta_2G_1)e^{-t/\tau'} + G_1G_2\tau'(1 - e^{-t/\tau'})$$



شکل ۹ - ۸

پیشینه‌های تنش اعمال شده: الف) تنش پله‌ای ؛ ب) تنش دلخواه

۹ - ۵ اصل برهم‌نهی، انتگرال‌های توارثی

برای ویسکوالاستیسیته خطی، همچون الاستیسیته اصل برهم‌نهی معتبر است. در محتوی روابط تنش - کرنش مورد بحث در اینجا این اصل ادعا می‌کند که کرنش کل (تنش کل) حاصل از اعمال مجموعه‌ای از تنش‌ها (کرنش‌ها) مساوی جمع کرنش‌های (تنش‌های) ایجاد شده به وسیلهٔ تنش‌های (کرنش‌های) منفرد است، بنابراین برای پیشینهٔ تنش پله‌ای در برش ساده که در شکل ۹-۸الف نشان داده شده است، اگر به ماده‌ای که دارای یک تابع خزش $J(t)$ است، اعمال شود، کرنش حاصل، خواهد بود:

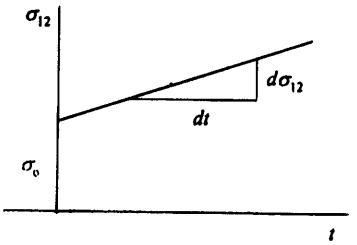
$$\gamma_{12}(t) = \Delta\sigma_0\, J(t) + \Delta\sigma_1\, J(t - t_1) + \Delta\sigma_2\, J(t - t_2) = \sum_{i=0}^{2} \Delta\sigma_i\, J(t - t_i) \qquad (۹ - ۵ - ۱)$$

و به وسیلهٔ تعمیمی آشکار برای بارگذاری تنش دلخواهی که به صورت بسیار کوچک بارگذاری‌های پله‌ای بسیار کوچک در نظر گرفته می‌شود، (شکل ۹-۸ب)، کرنش به صورت :

$$\gamma_{12}(t) = \int_{-\infty}^{t} J(t - t') \left[\frac{d\sigma_{12}(t')}{dt'}\right] dt' \qquad (۹ - ۵ - ۲)$$

داده می‌شود که به آن انتگرال توارثی گفته می‌شود، زیرا بیانگر کرنش در زمان t به صورت تابعی

از همهٔ پیشینهٔ تنش از زمان $t = -\infty$ است. اگر ناپیوستگی اولیه در تنش در زمان $t = 0$ وجود داشته باشد، و اگر تنش تا آن زمان ($t = 0$) صفر باشد (شکل ۹-۹)، کرنش خواهد شد:



شکل ۹ - ۹

پیشینهٔ تنش با یک ناپیوستگی اولیه.

$$\gamma_{12}(t) = \sigma_0 J(t) + \int_0^t J(t - t')\left[\frac{d\sigma_{12}(t')}{dt'}\right]dt' \qquad (۹ - ۵ - ۳)$$

با انتگرال‌گیری از انتگرال معادلهٔ بالا به صورت جزء به جزء و اعمال حدود اتخاذ شدهٔ انتگرال، شکل دیگر

$$\gamma_{12}(t) = J_0 \sigma_{12}(t) + \int_0^t \sigma_{12}(t')\left[\frac{dJ(t - t')}{d(t - t')}\right]dt' \qquad (۹ - ۵ - ۴)$$

به دست می‌آید که $J_0 = J(0)$ است.

به روشی به طور کامل مشابه، می‌توانیم انتگرال‌های توارثی بیانگر تنش برحسب نتیجه‌ای از کرنش‌های دلخواه را توسعه دهیم. شکل‌های اساسی به صورت دنبال هستند:

$$\sigma_{12}(t) = \int_{-\infty}^{t} G(t - t')\left[\frac{d\gamma_{12}(t')}{dt'}\right]dt' \qquad (۹ - ۵ - ۵\text{الف})$$

$$\sigma_{12}(t) = \gamma_0 G(t) + \int_0^t G(t - t')\left[\frac{d\gamma_{12}(t')}{dt'}\right]dt' \qquad (۹ - ۵ - ۵\text{ب})$$

$$\sigma_{12}(t) = \gamma_{12}(t) G_0 + \int_0^t \gamma_{12}(t')\left[\frac{dG(t - t')}{d(t - t')}\right]dt' \qquad (۹ - ۵ - ۵\text{ج})$$

که $G_\infty = G(\infty)$ است.

انتگرال توارثی معادلهٔ ۹-۵-۲، که براساس برش ساده استنتاج شد، حالت خاصی از معادلات اساسی ویسکوالاستیک عمومی در شکل انتگرال توارثی است، همان طور که به وسیلهٔ جفت عبارات زیر برحسب پاسخ‌های اعوجاج و انبساطی داده شده است:

$$۲\,\eta_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{t} J_s(t-t')\left[\frac{\partial S_{ij}(t')}{\partial t'}\right]dt' \qquad (۹-۵-۶\text{الف})$$

$$۳\,\varepsilon_{kk}(t) = \int_{-\infty}^{t} J_v(t-t')\left[\frac{\partial \sigma_{kk}(t')}{\partial t'}\right]dt' \qquad (۹-۵-۶\text{ب})$$

که J_s مطلوبیت برشی و J_V مطلوبیت حجمی است، همچنین معادلهٔ ۹-۵-۵الف شکل برش ساده از معادلات کلی

$$S_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{t} ۲G_S(t-t')\left[\frac{\partial\,\eta_{ij}(t')}{\partial t'}\right]dt' \qquad (۹-۵-۷\text{الف})$$

$$\sigma_{kk}(t) = \int_{-\infty}^{t} ۳G_V(t-t')\left[\frac{\partial\,\varepsilon_{kk}(t')}{\partial t'}\right]dt' \qquad (۹-۵-۷\text{الف})$$

است که G_S مدول وارفتگی در برش و G_V مدول وارفتگی در انبساط است. از آنجا که رفتار را در انبساط به صورت الاستیک فرض کرده‌ایم، $J_v = \frac{۱}{G_v} = K$ و هر دو معادلهٔ ۹-۵-۶ب و ۹-۵-۷ب به شکل $\sigma_{kk} = ۳K\,\varepsilon_{kk}$ مطابق معادلهٔ ۹-۲-۷ب کاهش می‌یابد.

۹ - ۶ بارگذاری‌های هارمونیک، مدول مختلط، مطلوبیت مختلط

رفتار اجسام ویسکوالاستیک زمانی که تحت تنش یا کرنش هارمونیک قرار داده می‌شوند، بخش مهم دیگر تئوری ویسکوالاستیسیته است. برای بررسی این جنبه از تئوری، توجه خود را به پاسخ مکعب مادی نشان داده شده در شکل ۹-۱ که تحت یک کرنش برشی هارمونیک با فرکانس ω قرار گرفته، جلب می‌کنیم. این کرنش به صورت :

$$\gamma_{۱۲}(t) = \gamma_۰ \sin \omega t \qquad (۹-۶-۱\text{الف})$$

یا به وسیلهٔ

$$\gamma_{12}(t) = \gamma_0 \cos \omega t \qquad (۹-۶-۱ب)$$

بیان می‌شود.

از نظر ریاضی ترکیب کردن این دو با فرض شکل مختلط کرنش مفید است.

$$\gamma_{12}(t) = \gamma_0(\cos \omega t + i \sin \omega t) = \gamma_0 e^{i\omega t} \qquad (۹-۶-۲)$$

که $i = \sqrt{-1}$ است. بدیهی است که از نظر فیزیکی بخش حقیقی تنش حاصل منطبق بر بخش حقیقی کرنش اعمالی، و نیز بخش‌های موهومی هر یک به طور مستقیم به هم مرتبط‌اند. تنش حاصل از تحریک مقرر شده به وسیلهٔ معادلهٔ ۹-۶-۲ فرکانس یکسان ω را همچون کرنش اعمالی خوهد داشت، بنابراین تنش به صورت

$$\sigma_{12}(t) = \sigma^* e^{i\omega t} \qquad (۹-۶-۳)$$

بیان می‌شود که σ^* مختلط است. پاسخ از دو قسمت تشکیل شده است، نخست حالت پایا که تابعی از فرکانس ω خواهد بود و دوم گذرا که به صورت نمایی نسبت به زمان، میرا می‌شود. در ادامهٔ این بخش تنها پاسخ حالت پایاست که به آن می‌پردازیم.

با جایگذاری معادلهٔ ۹-۶-۲ و معادلهٔ ۹-۶-۳ در معادلهٔ اساسی ویسکوالاستیک پایه که به وسیلهٔ معادلهٔ ۹-۳-۱ داده می‌شود، و در نظر داشتن شکل اپراتورهای $\{P\}$ و $\{Q\}$ همان طور که در معادلهٔ ۵-۱۲-۷ فهرست شده، به دست می‌آوریم:

$$\sum_{k=0}^{N} \sigma^* p_k (i\omega)^k e^{i\omega t} = \sum_{k=0}^{N} \gamma_0 q_k (i\omega)^k e^{i\omega t} \qquad (۹-۶-۴)$$

با حذف فاکتورهای مشابه $e^{i\omega t}$ از طرفین و حل برای نسبت

$$\frac{\sigma^*}{\gamma_0} = \frac{\sum_{k=0}^{N} p_k (i\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} q_k (i\omega)^k} \qquad (۹-۶-۵)$$

که به عنوان مدول مختلط، $G^*(i\omega)$، آن را تعریف و به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\frac{\sigma^*}{\gamma_0} = G^*(i\omega) = G'(\omega) + iG''(\omega) \qquad (۹-۶-۶)$$

قسمت حقیقی، $G'(\omega)$، این مدول وابسته به مقدار انرژی ذخیره شده در مکعب، طی یک سیکل کامل بارگذاری است و مدول ذخیره گفته می‌شود. قسمت موهومی، $G''(\omega)$، مرتبط است با انرژی تلف شده به ازای سیکل و مدول اتلاف گفته می‌شود. برحسب مدول مختلط، تنش σ_{12} که در معادلهٔ ۹-۶-۳ فرض شده را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\sigma_{12} = G^*(i\omega)\,\gamma_0 e^{i\omega t} = [G'(\omega) + iG''(\omega)]\gamma_0 e^{i\omega t} \qquad (۹-۶-۷)$$

و با تعریف مدول مطلق $\tilde{G}(\omega)$ به عنوان اندازه $G^*(i\omega)$ به صورت:

$$\tilde{G}(\omega) = \sqrt{[G'(\omega)]^2 + [G''(\omega)]^2} \qquad (۹-۶-۸)$$

به علاوه تانژانت زاویهٔ اتلاف، δ بین $\tilde{G}(\omega)$ و $G'(\omega)$ به صورت زیر داده می‌شود:

$$\tan\delta = \frac{G''(\omega)}{G'(\omega)} \qquad (۹-۶-۹)$$

حال تنش σ_{12} (معادلهٔ ۹-۶-۷) به صورت:

$$\sigma_{12} = \tilde{G}(\omega)e^{i\delta}\gamma_0 e^{i\omega t} = \tilde{G}(\omega)\gamma_0 e^{i(\omega t+\delta)} \qquad (۹-۶-۱۰)$$

نوشته می‌شود.

از این معادله مشاهده می‌شود که مقدار حداکثر تنش

$$\sigma_0 = \tilde{G}(\omega)\gamma_0 \qquad (۹-۶-۱۱)$$

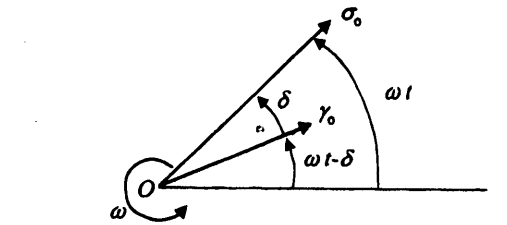
است.

و کرنش دارای تأخیر فازی به مقدار زاویهٔ اتلاف δ نسبت به تنش است. شکل ۹-۱۰ تعبیر نموداری این پدیده را ارائه می‌دهد. در شکل ۹-۱۰الف، دو مقدار ثابت بردارهای تنش و کرنش که با زاویهٔ ثابت δ جدا شده‌اند، حول مبدأیی ثابت با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخند. تصویر عمودی این بردارها که بیانگر مقادیر فیزیکی تنش و کرنش است، نسبت به زمان در شکل

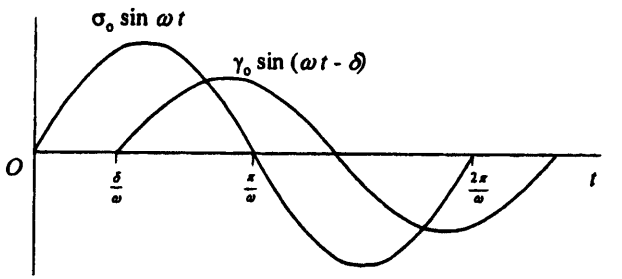
۹-۱۰ب رسم شده است. از شکل ۹-۱۰ب به صورت فازی سهم تنش در کرنش $\sigma_. \cos\delta$ است و به کمک معادلهٔ ۹-۶-۱۱ به علاوه معادلهٔ ۹-۶-۹، مدول ذخیره به صورت زیر بیان می‌شود:

$$G' = \frac{\sigma_. \cos\delta}{\gamma_.} \qquad (۹-۶-۱۲\text{الف})$$

به طور مشابه، مدول اتلاف نوشته می‌شود:



(a)



(b)

شکل ۹ - ۱۰

تأخیر برش در ماده ویسکوالاستیک: الف) دوران بردارهای پیشرو و پیرو ؛ ب) منحنی‌های زمانی تنش - کرنش

$$G'' = \frac{\sigma_. \sin\delta}{\gamma_.} \qquad (۹-۶-۱۲\text{ب})$$

در ارتباط با دوگانگی موجود در همهٔ تئوری ویسکوالاستیک، نقش‌های تنش و کرنش در قسمت‌های قبلی این بخش به منظور تعریف مطلوبیت مختلط، $J^*(i\omega)$ در خصوص قسمت‌های حقیقی و موهومی‌اش جابه‌جا شد. به طور مختصر، یک تنش اعمالی را فرض کردیم:

$$\sigma_{۱۲} = \sigma_. e^{i\omega t} \qquad (۹-۶-۱۳)$$

به علاوه کرنش حاصل

$$\gamma_{۱۲} = \gamma^* e^{i\omega t} \qquad (۱۴ - ۶ - ۹)$$

که وقتی در معادلهٔ ۹-۳-۱ جایگذاری شوند، منجر می‌شود به

$$\frac{\gamma^*}{\sigma_۰} = J^*(i\omega) = J'(\omega) - iJ''(\omega) \qquad (۱۵ - ۶ - ۹)$$

که علامت منفی بیانگر حقیقت تأخیر فاز کرنش نسبت به تنش به وسیلهٔ زاویهٔ اتلاف δ است که در این حالت به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\tan\delta = \frac{J''(\omega)}{J'(\omega)} \qquad (۱۶ - ۶ - ۹)$$

در مقایسه‌ای با مؤلفه‌های مدول مختلط، $J'(\omega)$ مطلوبیت ذخیره و $J''(\omega)$ مطلوبیت اتلاف نامیده می‌شود و

$$\tilde{J}(\omega) = \sqrt{[J'(\omega)]^۲ + [J''(\omega)]^۲} = \frac{\gamma_۰}{\sigma_۰} \qquad (۱۷ - ۶ - ۹)$$

مطلوبیت مطلق که در آن $\gamma_۰$ مقدار حداکثر کرنش است به صورت زیر داده می‌شود:

$$\gamma_۰ = \tilde{J}(\omega)\sigma_۰ \qquad (۱۸ - ۶ - ۹)$$

براساس تعاریف G^* و J^* واضح است که این کمیت‌های مختلط معکوس یکدیگرند، بنابراین

$$G^*(i\omega)J^*(i\omega) = ۱ \qquad (۱۹ - ۶ - ۹)$$

فرایندی ساده برای محاسبهٔ G^* (یا J^*) در یک مدل یا مادهٔ خاص این است که اپراتور دیفرانسیل جزئی ∂_t را در معادلهٔ اساسی ماده با $i\omega$ جایگزین و معادلهٔ جبری حاصل را برای نسبت $\frac{\sigma_{۱۲}}{\gamma_{۱۲}}=G^*$ (یا $J^* = \frac{\gamma_{۱۲}}{\sigma_{۱۲}}$ اگر آن کمیت مورد نیاز باشد.) حل کنیم. براین اساس، از معادلهٔ ۹-۳-۶ برای جامد کلوین، معادلهٔ اساسی $\sigma_{۱۲} = \{G + \eta\,\partial_t\}\gamma_{۱۲}$ می‌شود $\sigma_{۱۲} = (G + i\eta\omega)\gamma_{۱۲}$ که نتیجه می‌شود $\sigma_{۱۲}/\gamma_{۱۲} = G(۱ + i\tau\omega) = G^*$. به طور مشابه، از معادلهٔ ۹-۳-۷ برای سیال ماکسول، $\{\partial_t + \frac{۱}{\tau}\}\sigma_{۱۲} = \{G\partial_t\}\gamma_{۱۲}$ می‌شود $(i\omega + \frac{۱}{t})\sigma_{۱۲} = (Gi\omega)\gamma_{۱۲}$ که از آن:

$$\frac{\sigma_{۱۲}}{\gamma_{۱۲}}=G(\tau^۲\omega^۲+i\omega\tau)/(۱+\tau^۲\omega^۲)=G^*.$$

در توسعهٔ فرمول‌ها برای مدول مختلط و مطلوبیت مختلط، از شکل اپراتور دیفرانسیلی معادلات اساسی ویسکوالاستیک مبنا استفاده کرده‌ایم. عبارات معادلی برای این کمیت‌های مختلط با استفاده از شکل انتگرال توارثی معادلات اساسی نیز استنباط می‌شود. به این منظور معادلهٔ ۹-۶-۲ را در معادلهٔ ۹-۵-۵الف جایگذاری می‌کنیم. با وجود این،

قبل از این جایگذاری، لازم است که تابع وارفتگی تنش به دو قسمت به صورت زیر تجزیه شود:

$$G(t) = G_{\circ}[1 - \phi(t)] \qquad (۹-۶-۲۰)$$

که $G_{\circ} = G(\circ)$، مقدار $G(t)$ در زمان $t = \circ$ است. به دنبال این تجزیه و جایگذاری ذکر شده، معادلهٔ ۹-۵-۵الف می‌شود:

$$\sigma_{12}(t) = i\omega\gamma_{\circ} G_{\circ} \int_{-\infty}^{t} e^{i\omega t'} G_{\circ}[1 - \phi(t - t')]dt' \qquad (۹-۶-۲۱)$$

در این معادله، قرار دهید $\xi = t - t'$ بنابراین $dt' = -d\xi$ و داریم در $t'=t$ و $\xi=\circ$ و وقتی $t'=\infty$ و $\xi = \infty$ حال داریم:

$$\sigma_{12}(t) = i\omega t\, G_{\circ}\left\{\frac{e^{i\omega t}}{i\omega} - \int_{\circ}^{\infty} e^{i\omega\xi} e^{i\omega t} \phi(\xi)\, d\xi\right\} \qquad (۹-۶-۲۲)$$

که به صورت زیر کاهش می‌یابد:

$$\sigma_{12}(t) = \gamma_{\circ}\left\{G_{\circ} - G_{\circ} \int_{\circ}^{\infty} (i\omega \cos\omega\xi + \omega \sin\omega\xi)\phi(\xi)d\xi\right\} e^{i\omega t} \qquad (۹-۶-۲۳)$$

اما از معادلهٔ ۹-۶-۷، $\sigma_{12}(t) = \gamma_{\circ}[G'(\omega) + iG'(\omega)]e^{i\omega t}$ بنابراین از معادلهٔ ۹-۶-۲۳:

$$G'(\omega) = G_{\circ} - \omega\, G_{\circ} \int_{\circ}^{\infty} \sin\omega\xi\, \phi(\xi)d\xi \qquad (۹-۶-۲۴\text{الف})$$

$$G''(\omega) = -\omega\, G_{\circ} \int_{\circ}^{\infty} \cos\omega\xi\, \phi(\xi)d\xi \qquad (۹-۶-۲۴\text{ب})$$

برای یک مادهٔ کلوین، $G(t) = G[1 + \tau\,\delta(t)]$ به طوری که $G_{\circ} = G$ و $\phi(t) = -\tau\delta(t)$.

بنابراین، برای یک جامد کلوین، معادلات ۹-۶-۲۴ نتیجه می‌دهند:

$$G'(\omega) = G - G\omega \int_{0}^{\infty} -\tau(\xi) \sin \omega\xi \, d\xi = G$$

$$G''(\omega) = -G\,\omega \int_{0}^{\infty} -\tau\dot{\phi}(\xi) \cos \omega\xi \, d\xi = G\omega\tau = \omega\eta$$

برای یک مادهٔ ماکسول، $G(t) = G[1 - (1 - e^{-t/\tau})]$، به طوری که $G_0 = G$ و $\phi(t)=1-e^{-t/\tau}$
بنابراین برای یک سیال ماکسول، معادلات ۹-۶-۲۴ نتیجه می‌دهند:

$$G'(\omega) = G - G\,\omega \int_{0}^{\infty} \left(1 - e^{\xi/\tau}\right) \sin \omega\xi \, d\xi$$

$$= G - G\,\omega \left[\frac{1}{\omega} - \frac{\omega\tau^2}{1 + \tau^2\omega^2}\right] = \frac{G\omega^2\tau^2}{1 + \tau^2\omega^2}$$

$$G''(\omega) = -G\,\omega \int_{0}^{\infty} \left(1 - e^{-\xi/\tau}\right) \cos \omega\xi \, d\xi = \frac{G\,\omega\,\tau}{1 + \omega^2\tau^2}$$

این مقادیر برای G' و G'' برای مدل‌های کلوین و ماکسول در توافق با آنهایی هستند که در پاراگراف قبلی محاسبه شده‌اند. در حالتی به طور کامل مشابه، اگر شکل توارثی معادلهٔ ۹-۵-۲ به عنوان انتخاب معادلهٔ اساسی را اتخاذ کنیم، و در آن معادله $\sigma_{12}=\sigma_0 e^{i\omega t}$ را جایگذاری، به علاوه $J(t)$ را به صورت $J(t) = J_0[1 + \psi(t)]$ تجزیه کنیم، به دست می‌آوریم:

$$\gamma_{12} = \int_{-\infty}^{t} J_0[1 + \psi(t - t')]i\omega\, \sigma_0 e^{i\omega t'} dt' \qquad (۹ - ۶ - ۲۵)$$

طبق تغییر متغیر مشابه‌ای در متغیر انتگرال‌گیری، $t - t' = \xi$ این معادله می‌شود:

$$\gamma_{12} = \sigma_0\left[J_0 + J_0\omega \int_{0}^{\infty} \sin \omega\xi\psi(\xi)\, d\xi + iJ_0\omega \int_{0}^{\infty} \cos \omega\xi\psi(\xi) d\xi\right] e^{i\omega t} \quad (۹ - ۶ - ۲۶)$$

که به واسطهٔ آن داریم:

$$J'(\omega) = J_{\cdot} + J_{\cdot}\omega \int_{\cdot}^{\infty} \sin \omega\xi\psi(\xi)\, d\xi \qquad (۹-۶-۲۷\text{الف})$$

$$J''(\omega) = -J_{\cdot}\omega \int_{\cdot}^{\infty} \cos \omega\xi\psi(\xi)\, d\xi \qquad (۹-۶-۲۷\text{ب})$$

این عبارات برای به دست آوردن $J'(\omega)$ و $J''(\omega)$ برای هر مادهٔ خاص با تابع خزش $J(t)$ معلوم، اختصاص می‌یابند.

۹ - ۷ مسائل سه بعدی، اصل تطابق

معادلات اساسی ویسکوالاستیک مبنا در شکل اپراتور دیفرانسیل به وسیلهٔ معادلات ۹-۲-۶ به طور مجزا و متمایز شده بین پاسخ اعوجاجی (تغییر در شکل در حجم ثابت مرتبط با بخش انحرافی تنش اعمال شده، معادلهٔ ۹-۲-۶الف) و پاسخ انبساطی (تغییر در حجم بدون تغییر در شکل مرتبط با بخش کروی تنش اعمال شده، معادلهٔ ۹-۲-۶ب) بیان شده‌اند. گواه آزمایش‌های گسترده دلالت بر ان دارد که بویژه مواد مهندسی مهم در حالت انبساطی به صورت الاستیک رفتار می‌کنند، و به این دلیل شکل کاهش یافتهٔ معادلهٔ ۹-۲-۶ که به صورت معادلهٔ ۹-۲-۷ داده شده، در این کتاب استفاده می‌شود. در شکل مؤلفه‌های بسط یافته، این معادلات به صورت زیر نمایان می‌شوند:

$$\{P\}(\sigma_{۱۱} - \frac{۱}{۳}\sigma_{ii}) = ۲\{Q\}(\varepsilon_{۱۱} - \frac{۱}{۳}\varepsilon_{ii}) \qquad (۹-۷-۱\text{الف})$$

$$\{P\}(\sigma_{۲۲} - \frac{۱}{۳}\sigma_{ii}) = ۲\{Q\}(\varepsilon_{۲۲} - \frac{۱}{۳}\varepsilon_{ii}) \qquad (۹-۷-۱\text{ب})$$

$$\{P\}(\sigma_{۳۳} - \frac{۱}{۳}\sigma_{ii}) = ۲\{Q\}(\varepsilon_{۳۳} - \frac{۱}{۳}\varepsilon_{ii}) \qquad (۹-۷-۱\text{پ})$$

$$\{P\}\sigma_{۱۲} = ۲\{Q\}\varepsilon_{۱۲} \qquad (۹-۷-۱\text{ت})$$

$$\{P\}\sigma_{۲۳} = ۲\{Q\}\varepsilon_{۲۳} \qquad (۹-۷-۱\text{ث})$$

$$\{P\}\sigma_{۳۱} = ۲\{Q\}\varepsilon_{۳۱} \qquad (۹-۷-۱\text{ج})$$

$$\sigma_{ii} = ۳K\varepsilon_{ii} \qquad (۹-۷-۱ج)$$

براساس حالت خاص تنش اعمال شده، برخی از معادلهٔ ۹-۷-۱ ممکن است به طور کامل تأمین شود. برای مثال، حالت برش ساده در صفحهٔ $x_۱x_۲$ که در اوایل برای توسعهٔ مفاهیم اساسی رفتار ویسکوالاستیک معرفی شد، به کاهش معادلهٔ ۹-۷-۱ به تک معادلهٔ ۹-۷-۱ت، همان طور که به وسیلهٔ معادلهٔ ۹-۳-۱ بیان شد، منجر می‌شود. به طور مشابه، برای حالت هیدرواستاتیک تنش با $\sigma_{۱۱} = \sigma_{۲۲} = \sigma_{۳۳} = p.$ و $\sigma_{۱۲} = \sigma_{۲۳} = \sigma_{۳۱} = ۰$ (یا برای یک تنش سه محوری یکنواخت که دارای $\sigma_{۱۱} = \sigma_{۲۲} = \sigma_{۳۳} = \sigma.$ با $\sigma_{۱۲} = \sigma_{۲۳} = \sigma_{۳۱} = ۰$ است)، رفتار الاستیک است. به عبارت دیگر برای کشش سادهٔ یک بعدی یا فشار در یکی از جهات مختصات، برخی از معادلهٔ ۹-۷-۱ همچنان که در پاراگراف بعدی بحث خواهد شد، وارد تحلیل می‌شوند.

جهت $x_۱$ روی عضوی است که دارای سطح مقطع ثابتی عمود بر آن جهت است، بنابراین $\sigma_{۱۱} = \sigma.U(t)$ و همهٔ عناصر دیگر را مساوی صفر گذاشته که نتیجهٔ آن $\sigma_{ii} = \sigma.u(t)$ است، چنانکه از معادلهٔ ۹-۷-۱ج، $\varepsilon_{ii} = \sigma.u(t)/۳K$ است. برای این حالت سه معادلهٔ اول از معادلهٔ ۹-۷-۱ می‌شود:

$$\{P\}[\sigma.u(t) - \frac{۱}{۳}\sigma.u(t)] = ۲\{Q\}\left[\varepsilon_{۱۱} - \frac{\sigma.u(t)}{۹K}\right] \qquad (۹-۷-۲الف)$$

$$\{P\}[-\frac{۱}{۳}\sigma.u(t)] = ۲\{Q\}\left[\varepsilon_{۲۲} - \frac{\sigma.u(t)}{۹K}\right] \qquad (۹-۷-۲ب)$$

$$\{P\}[-\frac{۱}{۳}\sigma.u(t)] = ۲\{Q\}\left[\varepsilon_{۳۳} - \frac{\sigma.u(t)}{۹K}\right] \qquad (۹-۷-۲پ)$$

و سه معادلهٔ دیگر از مجموعه، بیانگر کرنش‌های برشی صفرند. آشکارا، از معادلهٔ ۹-۷-۲ب و ۹-۷-۲ج مشاهده می‌شود $\varepsilon_{۳۳} = \varepsilon_{۲۲}$ است. علاوه بر این، معادلهٔ ۹-۷-۲الف ممکن است به طور مستقیم برای $\varepsilon_{۱۱}$ حل شود.

$$\varepsilon_{۱۱} = \sigma.u(t)\frac{۳K\{P\} + \{Q\}}{۹K\{Q\}} = \frac{\sigma.U(t)}{\{E\}} \qquad (۹-۷-۳)$$

که $\{E\} = ۹K\{Q\}/(۳K\{P\} + \{Q\})$ شکل اپراتوری E مدول یانگ است. به طور مشابه، از

معادلهٔ ۹-۷-۲ و با استفاده از $\varepsilon_{۳۳} = \varepsilon_{۲۲}$ در می‌یابیم که:

$$\frac{\varepsilon_{۲۲}}{\varepsilon_{۱۱}} = \frac{\varepsilon_{۳۳}}{\varepsilon_{۱۱}} = -\frac{۳K\{P\} - ۲\{Q\}}{۶K\{P\} + ۲\{Q\}} = -\{\nu\} \qquad (۴-۷-۹)$$

که شکل اپراتوری نسبت پواسون ν را تعیین می‌کند.

به منظور محاسبهٔ حلی مفصل و همراه با جزئیات برای ماده‌ای خاص، به شکل ویژه‌ای از اپراتورهای $\{P\}$ و $\{Q\}$ برای آن ماده نیاز داریم. که با مثال آورده شده، توضیح داده می‌شود.

مثال ۹ ـ ۷ ـ ۱: تنش $\sigma_{۱۱} = \sigma_{۰}u(t)$ به طور یکنواخت به میله‌ای با سطح مقطع ثابت که از مادهٔ کلوین ساخته و در راستای محور $x_۱$ قرار گرفته، اعمال می‌شود. $\varepsilon_{۱۱}$ و $\varepsilon_{۲۲}$ را به عنوان توابعی از زمان تعیین کنید.

حل: از معادلهٔ اساسی برای یک مادهٔ کلوین، معادلهٔ ۹-۳-۶، در نظر می‌گیریم که $\{P\} = ۱$ و $\{Q\} = \{G + \eta\partial_t\}$، که وقتی درون معادلهٔ ۹-۷-۲الف قرار داده شود (بعد از مقداری عملیات جبری)، به صورت معادلهٔ دیفرانسیل زیر نتیجه می‌شود:

$$\dot{\varepsilon}_{۱۱} + \frac{\varepsilon_{۱۱}}{\tau} = \sigma_{۰}u(t)\left[\frac{۳K + G}{۹KG}\right] + \frac{\sigma_{۰}\delta(t)}{۹K} \qquad (۵-۷-۹)$$

این معادلهٔ دیفرانسیل با روش‌های استاندارد حل می‌شود که نتیجهٔ آن:

$$\varepsilon_{۱۱}(t) = \sigma_{۰}u(t)\left\{\frac{۳K + G}{۹KG}\left(۱ - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + \frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{۹K}\right\} \qquad (۶-۷-۹)$$

وقتی $t = ۰$ $\varepsilon_{۱۱} = \sigma_{۰}\dfrac{u(t)}{۹K}$ که حاصل رفتار الاستیک در حجم است. همچنان که $t \to \infty$ $\varepsilon_{۱۱} \to \sigma_{۰}|(۳K + G)/۹KG| = \dfrac{\sigma_{۰}}{E}$ پاسخ الاستیک حدی است.

از معادلهٔ ۹-۷-۲ب معادلهٔ‌دیفرانسیل حاکم برای تعیین $\varepsilon_{۲۲}$ (وقتی در شکل استانداردش بیان شود) به صورت:

$$\dot{\varepsilon}_{۲۲} + \frac{\varepsilon_{۲۲}}{\tau} = \sigma_{۰}u(t)\left[\frac{G}{۹K} - \frac{۱}{۶}\right]\frac{۱}{\eta} + \frac{\sigma_{۰}\delta(t)}{۹K} \qquad (۷-۷-۹)$$

که طی انتگرال‌گیری و ساده‌سازی نتیجه می‌شود:

$$\varepsilon_{۲۲}(t) = -\sigma_{۰}u(t)\frac{۳K - ۲G}{۱۸KG}\left(۱ - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + \sigma_{۰}u(t)\frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{۹K} \qquad (۸-۷-۹)$$

وقتی $t = ۰$ $\sigma_{۲۲} = \frac{\sigma_{۰}}{۹K}$ که براساس اثر انبساط الاستیک، مشابه مقدار اولیه $\varepsilon_{۱۱}$ است. وقتی $t\to\infty$ $\varepsilon_{۲۲} \to (۲G - ۳K)/۱۸GK$.

تا به حال در این بخش مسائل سه بعدی از نظر معادلات اساسی به شکل اپراتور دیفرانسیلی بحث شده است، اما تحلیل ما می‌تواند به همان خوبی براساس شکل انتگرال توارثی معادلات اساسی همان طور که با معادلهٔ ۹-۵-۶ یا معادلهٔ ۹-۵-۷ داده شده، توسعه داده شود. طبق بارگذاری تنش تک محوری تحلیل شده در بالا، معادلهٔ ۹-۵-۶الف، (فرض رفتار الاستیک در انبساط با $\sigma_{KK} = ۳K\varepsilon_{KK}$ و $\varepsilon_{ii} = \sigma_{۰}u(t)/۳K$ به علاوه تنش صفر در زمان $t=۰$) به معادلات زیر منجر می‌شود:

$$۲\left[\varepsilon_{۱۱} - \frac{\sigma_{۰}u(t)}{۹K}\right] = \int_{۰}^{t}\left(\sigma_{۰} - \frac{\sigma_{۰}}{۳}\right)\delta(t')J_S(t-t')dt' \quad (۹-۷-۹\text{الف})$$

$$۲\left[\varepsilon_{۲۲} - \frac{\sigma_{۰}u(t)}{۹K}\right] = \int_{۰}^{t}\left(-\frac{\sigma_{۰}}{۳}\right)\delta(t')J_S(t-t')dt' \quad (۹-۷-۹\text{ب})$$

$$۲\left[\varepsilon_{۳۳} - \frac{\sigma_{۰}u(t)}{۹K}\right] = \int_{۰}^{t}\left(-\frac{\sigma_{۰}}{۳}\right)\delta(t')J_S(t-t')dt' \quad (۹-۷-۹\text{پ})$$

از این معادلات دوباره آشکار است که $\varepsilon_{۲۲} = \varepsilon_{۳۳}$ و به منظور توسعهٔ جزئیات حل برای ماده‌ای خاص، نیازمند عبارتی برای J_s مطلوبیت برشی ماده هستیم. همان طوری که در مثال زیر نشان داده شده است:

مثال ۹ ــ ۷ ــ ۲: حل مسئلهٔ مثال ۹-۷-۱ را با استفاده از شکل انتگرال توارثی معادلات اساسی برای میله‌ای را که در اعوجاج کلوین و در انبساط الاستیک است، توسعه دهید.

حل: برای یک مادهٔ کلوین، مطلوبیت برشی (خزش)، معادلهٔ ۹-۴-۶، $J_s = (۱ - e^{-t/\tau})/G$ است، طوری که معادلهٔ ۹-۷-۹الف برای $\sigma_{۱۱} = \sigma_{۰}u(t)$ می‌شود:

$$۲\left[\varepsilon_{۱۱} - \frac{\sigma_{۰}u(t)}{۹K}\right] = \int_{۰}^{t} \frac{۲\sigma_{۰}\delta(t')}{۳G}\left(۱ - e^{-\frac{t-t'}{\tau}}\right)dt' \qquad (۹-۷-۱۰)$$

که ممکن است به طور مستقیم انتگرال‌گیری شود و با استفاده از معادلهٔ ۹-۴-۱۲ نتیجه می‌شود:

$$\varepsilon_{۱۱}(t) = \sigma_{۰}u(t)\left[\frac{۱ - e^{-\frac{t}{\tau}}}{۳G} + \frac{۱}{۹K}\right] \qquad (۹-۷-۱۱)$$

و یا با تجدید آرایش ساده:

$$\varepsilon_{۱۱}(t) = \sigma_{۰}u(t)\left[\frac{۳K + G}{۹KG} - \frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{۳G}\right] \qquad (۹-۷-۱۲)$$

در توافق با معادلهٔ ۹-۷-۶. به طور مشابه، از معادلهٔ ۹-۷-۹ب برای این بارگذاری بـه دست می‌آوریم:

$$۲\left[\varepsilon_{۲۲} - \frac{\sigma_{۰}u(t)}{۹K}\right] = \int_{۰}^{t} -\frac{\sigma_{۰}\delta(t')}{۳G}\left(۱ - e^{-\frac{t-t'}{\tau}}\right)dt'$$

که با انتگرال‌گیری مستقیم و استفاده از معادلهٔ ۹-۴-۱۲ نتیجه می‌شود:

$$\varepsilon_{۲۲}(t) = -\sigma_{۰}u(t)\left[\frac{۱ - e^{-\frac{t}{\tau}}}{۶G} + \frac{۱}{۹K}\right] \qquad (۹-۷-۱۳)$$

و در توافق با معادلهٔ ۹-۷-۸ است.

به طور یقین تعداد مسائلی که در ویسکوالاستیسیته بـه روش انـتگرال‌گـیری مسـتقیم همچون مثال‌های بالا بتوان حل کرد، محدود است. بـرای حـالاتی شـامل مـیدان‌هـای تـنش عمومی‌تر، و یا برای اجسامی با هندسهٔ پیچیده‌تر، اصل تطابق ممکن است به صورت مـفید استفاده شود. این روش متکی بر تشابه بین معادلات اساسی مسئله‌ای واحد در الاستیسیته و تبدیل لاپلاس معادلات مبنای مسئلهٔ ویسکوالاستیک تحت بررسی است. برای حالت مسائل شبه استاتیک ویسکوالاستیک که ممکن است نیروهای اینرسی مرتبط با تغییر مکان‌ها ناچیز باشند، و برای اجسام الاستیک و ویسکوالاستیک که هندسهٔ یکسانی دارند، روش تـطابق بـه همان طور که در زیر توضیح داده می‌شود، سر راست است. در یک جسم الاستیک تحت بـار ثابت، تنش‌ها کرنش‌ها، و تغییر مکان‌ها مسـتقل از زمـان هسـتند، در صـورتی کـه در مسـئلهٔ

ویسکوالاستیک مشابه، اگرچه بارگذاری ثابت یا به آرامی به صورت تابعی از زمان تغییر کند، معادلات حاکم وابسته به زمان هستند و به لاپلاس تبدیل می‌شوند. طبق تعریف، تبدیل لاپلاس یک تابع پیوسته دلخواه وابسته به زمان، برای مثال تنش $\sigma_{ij}(x,t)$، به وسیلهٔ

$$\bar{\sigma}_{ij}(\mathbf{x},s) = \int_0^\infty \sigma_{ij}(\mathbf{x},t)e^{-st}dt \qquad (۹-۷-۱۴)$$

داده می‌شود که در آن S متغیر تبدیل و کمیت‌های دارای علامت بار، بیانگر تبدیل‌اند.

کتاب‌های درسی استاندارد در تبدیل لاپلاس، جداول تبدیل‌های لاپلاس توابع وابسته به زمان متنوعی را فهرست کرده‌اند. اهمیت ابتدایی بحث زیر، تبدیل لاپلاس مشتقات یک تابع داده شدهٔ اساسی‌اند، بنابراین برای دو مشتق اول تنش:

$$\int_0^\infty \frac{d\sigma_{ij}(\mathbf{x},t)}{dt} e^{-st}dt = -\sigma_{ij}(0) + s\bar{\sigma}_{ij}(\mathbf{x},s) \qquad (۹-۷-۱۵\text{الف})$$

$$\int_0^\infty \frac{d^2\sigma_{ij}(\mathbf{x},t)}{dt^2} e^{-st}dt = -\sigma_{ij}(0) - s\sigma_{ij}(0) + s^2\bar{\sigma}_{ij}(\mathbf{x},s) \qquad (۹-۷-۱۵\text{ب})$$

و به همین ترتیب برای مشتقات مراتب بالاتر. توجه کنید که در این معادلات مقدار تنش و مشتق‌های آن در زمان $t = 0$ قسمتی از تبدیل‌اند، همان طور که شرایط اولیه برای حل بنا شده‌اند.

حال می‌توانیم جزئیات اصل تطابق را به وسیلهٔ انطباق بین معادلات اساسی الاستیسیته امتحان کنیم (همان طور که در فصل ۶ فهرست شده در اینجا تکرار می‌شود).

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{x}) + b_i(\mathbf{x}) = 0 \qquad (۶-۴-۱)\text{تعادل}$$

$$2\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) = u_{i,j}(\mathbf{x}) + u_{j,i}(\mathbf{x}) \qquad (۶-۴-۲)\text{کرنش - تغییرمکان}$$

$$S_{ij}(\mathbf{x}) = 2G\eta_{ij}(\mathbf{x}) \qquad (۶-۲-۱۲\text{الف})\text{روابط اساسی}$$

$$\sigma_{ii}(\mathbf{x}) = 3K\varepsilon_{ii}(\mathbf{x}) \qquad (۶-۲-۱۲\text{ب})$$

و تبدیل لاپلاس هم ارز معادلات ویسکوالاستیک وابسته به زمان:

$$\bar{\sigma}_{ij,j}(\mathbf{x},s) + \bar{b}_i(\mathbf{x},s) = 0 \qquad (۹-۷-۱۶\text{الف})\text{تعادل}$$

$$۲\bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{x},s) = \bar{u}_{i,j}(\mathbf{x},s) + \bar{u}_{j,i}(\mathbf{x},s) \qquad (۹-۷-۱۶\text{ب})\text{کرنش-تغییرمکان}$$

$$\bar{P}(s)\,\bar{S}_{ij}(\mathbf{x},s) = ۲\bar{Q}(s)\bar{\eta}_{ij}(\mathbf{x},s) \qquad (۹-۷-۱۶\text{پ})\text{روابط اساسی}$$

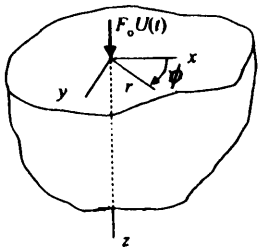
$$\bar{\sigma}_{ii}(\mathbf{x},s) = ۳K\,\bar{\varepsilon}_{ii}(\mathbf{x},s) \qquad (۹-۷-۱۶\text{ت})$$

که کمیت‌های دارای علامت بار تبدیل‌ها هستند و در آن $\bar{P}(s)$ و $\bar{Q}(s)$ چند جمله‌ای‌هایی برحسب متغیر تبدیل s برطبق معادلهٔ ۹-۷-۱۵ هستند. مقایسه‌ای از معادلات ۹-۷-۱۶، که روابطی جبری و مستقل از زمان هستند، با معادلات الاستیسیتهٔ ذکر شده بیانگر تشابه‌ای کامل میان ماهیت‌های دارای علامت بار و بدون علامت بار است، اگر معادل نسبت $\bar{Q}(s)/\bar{P}(s)$ به مدول برشی G اختصاص داده شود، این اجازه را به ما می‌دهد که اصل تطابق را به صورت دنبال بیان کنیم: اگر حل مسئله‌ای در الاستیسیته شناخته شده باشد، تبدیل لاپلاس حل مسئله هم ارز ویسکوالاستیک با جایگذاری نسبت $\bar{Q}(s)/\bar{P}(s)$ که چند جمله‌ای‌هایی برحسب اپراتور تبدیل‌اند به جای مدول برشی G، و بارگذاری‌های وابسته به زمان واقعی با تبدیل‌های لاپلاس آنها ایجاد می‌شود. از آنجا که بسیاری از حل‌های الاستیسیته برحسب مدول یانگ، E و نسبت پواسون، ν نوشته شده‌اند، مفید است که از معادلات ۹-۷-۳ و ۹-۷-۴ جایگزین‌های انتقال این ثابت‌ها را استخراج کنیم که به صورت زیرند:

$$\bar{E}(s) \to \frac{۹K\bar{Q}}{۳K\bar{P} + \bar{Q}} \qquad (۹-۷-۱۷)$$

$$\bar{\nu}(s) \to \frac{۳K\bar{P} - ۲\bar{Q}}{۶K\bar{P} + ۲\bar{Q}} \qquad (۹-۷-۱۸)$$

با شرح اینکه چگونه اصل تطابق عمل می‌کند، به مسئلهٔ زیر توجه می‌کنیم:



شکل مثال ۹ - ۷ - ۳

نیروی متمرکز F_0 اعمال شده بر مبدأ فضای نیمه بسیار کوچک.

مثال ۹ ــ ۷ ــ ۳: تنش شعاعی σ_{rr} در نیمه فضای الاستیک، تحت نیروی اعمالی که یک نیروی متمرکز ثابت F_0 در مبدأست و در شکل نشان داده شده به صورت

$$\sigma_{rr}(r,z) = \frac{F_0}{2\pi}\left[(1-2\nu)A(r,z) - B(r,z)\right]$$

است که $A(r,z)$ و $B(r,z)$ توابع معلومی برحسب مختصات‌اند. تنش ویسکوالاستیک وابسته به زمان $\sigma_{rr}(r,z,t)$ برای نیم فضایی راکه در برش کلوین و در انبساط الاستیک است، تعیین کنید. اگر نیرو در مبدأ به وسیلهٔ بارگذاری پله‌ای $F(t) = F_0u(t)$ داده شود.

حل: از معادلهٔ ۹-۷-۱۸ برای $\bar{V}(s)$ می‌توانیم به طور مستقیم تبدیل لاپلاس عبارت ۲ν-۱ ظاهر شده در حل الاستیک را به صورت $3\bar{Q}/(3K\bar{P}+\bar{Q})$ محاسبه کنیم. تبدیل لاپلاس تابع بار $F_0u(t)$ به صورت $\frac{F_0}{s}$ داده می‌شود، بنابراین تبدیل لاپلاس حل ویسکوالاستیک هم‌ارز به صورت

$$\bar{\sigma}_{rr}(r,z,s) = \frac{F_0}{2\pi s}\left[\frac{3\bar{Q}A(r,z)}{3K\bar{P}+\bar{Q}} - B(r,z)\right]$$

است. از معادلهٔ اساسی مدل کلوین، معادلهٔ ۹-۳-۶، داریم $\{Q\}/\{P\}=\{G+\eta\partial_t\}$ که از آن $\frac{\bar{Q}(s)}{\bar{P}(s)} = G + \eta s$ به طوری که

$$\bar{\sigma}_{rr}(r,z,s) = \frac{F_0}{2\pi s}\left[\frac{3(G+\eta s)A(r,z)}{3K+G+\eta} - B(r,z)\right]$$

این عبارت ممکن است به کمک جدول انتقال‌ها از هر متن استانداردی در زمینهٔ تبدیل‌های لاپلاس معکوس شده تا حل ویسکوالاستیک وابسته به زمان، حاصل شود:

$$\sigma_{rr}(r,z,t) = \frac{F_{\circ}}{2\pi}\left\{\left[\frac{\frac{3G}{3K+G} + 9Ke^{-\frac{(3K+G)t}{\eta}}}{3K+G}\right]A(r,z) - B(r,z)\right\}$$

توجه کنید که وقتی $t = \circ$

$$\sigma_{rr}(r,z,\circ) = \frac{F_{\circ}}{2\pi}\left[3A(r,z) - B(r,z)\right]$$

و وقتی $t \to \infty$

$$\sigma_{rr}(r,z,t \to \infty) = \frac{F_{\circ}}{2\pi}\left[\frac{3GA(r,z)}{3K+G} - B(r,z)\right]$$

که حل الاستیک است.

منابع

Ferry, J. D. (1961), *Viscoelastic Properties of Polymers*, Wiley and Sons, New York.

Findley, W. N., Lai, J. S., and Onanran, O. (1976), *Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials*, North-Holland Publishing Company, London.

Flugge, W. (1967), *Viscoelasticity*, Blaisdell Publishing Company, Waltham, MA.

Fried, J.R. (1995), *Polymer Science and Technology*, Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ.

McCrum, N. G., Buckley, C. P., and Bucknall, C. B. (1997), *Principles of Polymer Engineering*, Second Edition, Oxford University Press, New York.

Pipkin, A. C. (1972), *Lectures on Viscoelasticity Theory*, Springer-Verlag, New York.

مسائل

۹ - ۱ با جایگذاری $S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{۱}{۳}\delta_{ij}\sigma_{kk}$ و $\eta_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{۱}{۳}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}$ در معادلهٔ ۹-۲-۷ و ترکیب آن دو معادلات، عباراتی به شکل اپراتوری برای:

الف) ثابت لامه، λ

ب) مدول یانگ E

ج) نسبت پواسون ν

تعیین کنید.

پاسخ:

الف) $$|\lambda| = K - ۲\{Q\}/۳\{P\}$$

ب) $$|E| = ۹K\{Q\}/(۳K\{P\} + \{Q\})$$

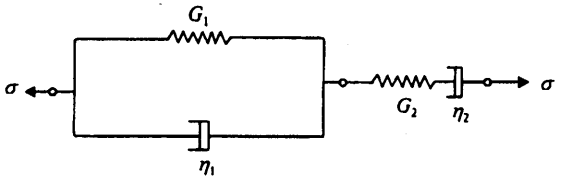
ج) $$|\nu| = (۳K\{P\} - ۲\{Q\})/(۶K\{P\} + ۲\{Q\})$$

۹ - ۲ مطلوبیت‌ها مدول‌های معکوس‌اند، بنابراین در تئوری الاستیسیته $D = \frac{۱}{E}$، $J = \frac{۱}{G}$ و $B \frac{=۱}{K}$ است.

نشان دهید که از معادلات تنش - کرنش یک کشش سادهٔ یک‌بعدی داریم که:

$$D = \frac{۱}{۳}J + \frac{۱}{۹}B$$

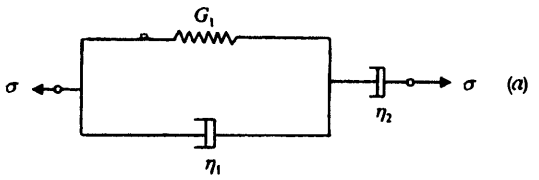
۹ - ۳ مدل چهار پارامتری نشان داده شده از یک واحد کلوین به صورت سری با واحد ماکسول تشکیل شده است. با دانستن اینکه $\gamma_{\text{مدل}} = \gamma_{\text{کلوین}} + \gamma_{\text{ماکسول}}$ به علاوهٔ معادلات اپراتوری (معادلات ۹-۳-۶ و ۹-۳-۷)، معادلهٔ اساسی برای این مدل را تعیین کنید.

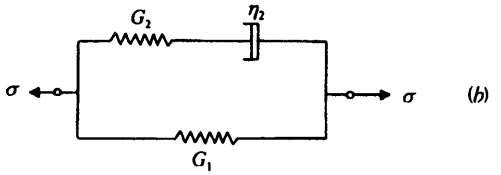


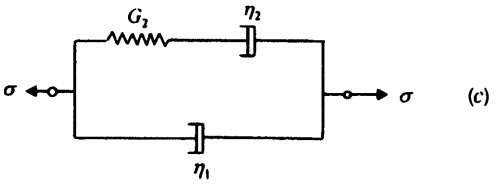
پاسخ:

$$G_۲\eta_۱\ddot{\gamma} + G_۱G_۲\dot{\gamma} = \eta_۱\ddot{\sigma} + (G_۱ + G_۲ + \eta_۱ / \tau_۲)\dot{\sigma} + (G_۱ / \tau_۲)\sigma$$

۹ - ۴ معادلات اساسی را برای مدل‌های سه پارامتری نشان داده شده توسعه دهید.







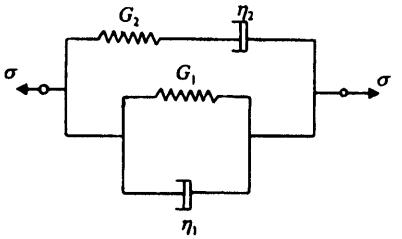
پاسخ:

الف) $$\ddot{\gamma} + \dot{\gamma} / \tau_1 = [(\eta_1 + \eta_2) / \eta_1 h_2]\dot{\sigma} + (1/\tau_1\eta_2)\sigma$$

ب) $$\dot{\sigma} + \sigma / \tau_2 = (G_2 + G_1)\dot{\gamma} + (G_1 / \tau_2)\gamma$$

ج) $$\dot{\sigma} + \sigma / \tau_2 = \eta_1\ddot{\gamma} + (G_2 + \eta_1 / \tau_2)\dot{\gamma}$$

۹ - ۵ یک مدل پیشنهادی از یک واحد کلوین به صورت موازی با یک واحد ماکسول تشکیل شده است. برای این مدل، معادلهٔ اساسی را تعیین کنید.



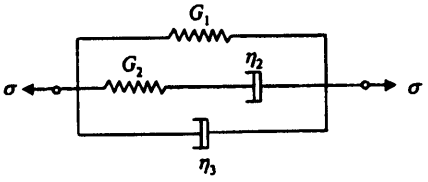
پاسخ:

$$\dot{\sigma} + \sigma / \tau_2 = \eta_1\ddot{\gamma} + (G_1 + G_2 + \eta_1 / \tau_2)\dot{\gamma} + (G_1 / \tau_2)\gamma$$

۹ - ۶ برای مدل چهار پارامتری نشان داده شده، تعیین کنید.

الف) معادلهٔ اساسی

ب) تابع وارفتگی، $G(t)$ [توجه کنید که $G(t)$ حاصلجمع $G(t)$های واحدهای متصل شده به صورت موازی است].



پاسخ:

الف) $\dot{\sigma} + \sigma / \tau_2 = \eta_2\ddot{\gamma} + (G_1 + G_2 + \eta_2/\tau_2)\dot{\gamma} + (G_1/\tau_2)\gamma$

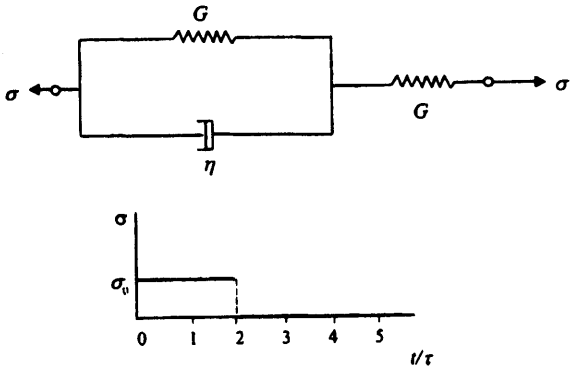
ب) $G(t) = G_1 + G_2 e^{-t/\tau_2} + \eta_2\delta(t)$

۹ - ۷ برای مدل نشان داده شده پیشینهٔ تنش به وسیلهٔ نمودار همراه آن داده شده است. کرنش $\gamma(t)$ را برای این بارگذاری طی بازه‌های زیر تعیین کنید:

الف) $0 \le t/\tau \le 2$

ب) $0 \le t/\tau \le 4$

با استفاده از برهم‌نهی جواب (ب) را به دست آورید.



پاسخ:

الف) $\gamma(t) = \sigma_0 J(2 - e^{-t/\tau})u(t)$

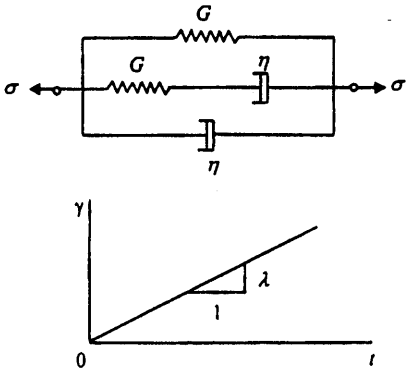
ب) $\gamma(t) = \sigma_0 J(2 - e^{-t/\tau})u(t) - \sigma_0 J(2 - e^{-(t-2\tau)/\tau})u(t-2\tau)$

۹ - ۸ برای مدل نشان داده شده تعیین کنید:

الف) معادلهٔ اساسی

ب) تابع وارفتگی، $G(t)$.

ج) تنش، $\sigma(t)$ برای $0 \le t \le t_1$، به طوری که کرنش به وسیلهٔ نمودار ضمیمه داده شده است.



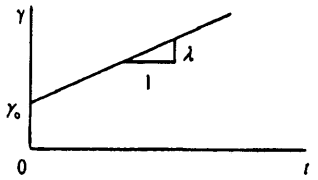
پاسخ:

الف) $\dot{\sigma} + \sigma / \tau = \eta\ddot{\gamma} + 3G\dot{\gamma} + (G / \tau)\gamma$

ب) $G(t) = \gamma\delta(t) + G(1 + e^{-t/\tau})$

ج) $\sigma(t) = \lambda(2\eta - \eta e^{-t/\tau} + Gt)u(t)$

۹ - ۹ برای مدل نشان داده شده در مسئله ۹-۸، $\sigma(t)$ را زمانی که $\gamma(t)$ به صورت نمودار نشان داده شده در اینجا تعیین شده باشد، مشخص کنید.



پاسخ:

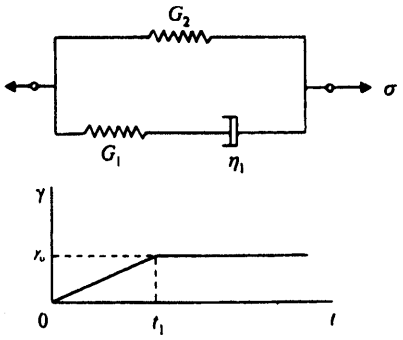
$$\sigma(t) = \gamma_0 [\eta\delta(t) + G(1 + e^{-t/\tau})]u(t) + \lambda [\eta(2 - e^{-t/\tau}) + Gt]u(t)$$

۹ - ۱۰ مدل سه پارامتری نشان داده شده تحت کرنشی که پیشینهٔ آن در نمودار کشیده شده، قرار داده شده است. با استفاده از برهم‌نهی $\sigma(t)$ را برای $t \ge t_1$ از $\sigma(t)$ برای $t \le t_1$ به دست آورید. $\frac{\gamma_0}{t_1} = 2$ قرار دهید.

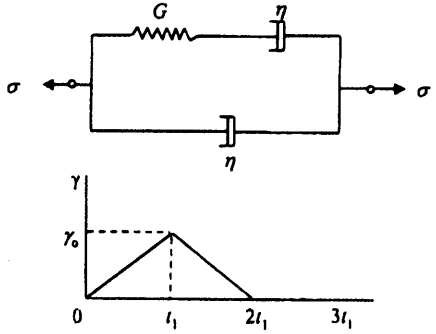
پاسخ:

$$For\ t \le t_1\ ;\ \sigma(t) = \lambda[\eta_1(1 - e^{-t/\tau_1}) + G_2 t]u(t)$$

$$For\ t \ge t_1\ ;\ \sigma(t) = \lambda[\eta_1(1 - e^{-t/\tau_1}) + G_2 t]u(t)$$
$$\lambda[\eta_1(1 - e^{-(t-t_1)/\tau_1}) + G_2(t-t)]u(t-t_1)$$



۹ - ۱۱ برای مدل نشان داده شده تنش $\sigma(t)$ را در الف) $t=t_1$ ب) $t=2t_1$ و ج) $t=3t_1$ تعیین کنید. اگر کرنش اعمال شده به وسیلهٔ نمودار داده شده باشد، از برهم‌نهی برای ب و پ استفاده کنید.



پاسخ:

الف) $$\sigma(t_1) = (\gamma_0\eta / t_1)[2 - e^{-t_1/\tau}]$$

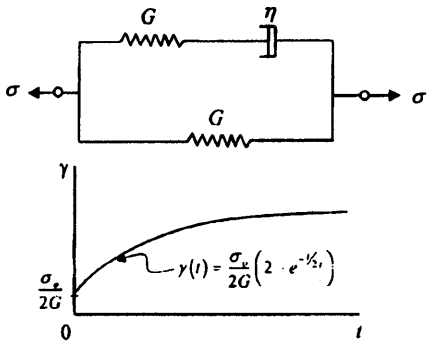
ب) $$\sigma(2t_1) = (\gamma_0\eta / t_1)[-2 + 2e^{-t_1/\tau} - e^{-2t_1/\tau}]$$

ج) $$\sigma(3t_1) = (\gamma_0\eta / t_1)[-e^{-t_1/\tau} + 2e^{-2t_1/\tau} - e^{-3t_1/\tau}]$$

۹ - ۱۲ اگر مدل نشان داده شده در تصویر تحت کرنشی با پیشینهٔ $\gamma(t)=(\gamma_0/2G)[2-e^{-t/2\tau}]u(t)$، همان طور که در نمودار کشیده شده است، قرار گیرد، تنش $\sigma(t)$ را تعیین کنید.

پاسخ:

$$\sigma(t) = \gamma_0 u(t)$$



۹ - ۱۳ برای انتگرال توارثی، معادلهٔ ۹-۵-۲

$$\gamma(t) = \int_{-\infty}^{t} J(t - t')(d\sigma(t')/dt')dt'$$

فرض کنید $\sigma(t) = e^{st}$ که S ثابت است. با قرار دادن $T = t - t'$ به عنوان زمان سقوط بار اعمالی نشان دهید که $\sigma(t) = Se^{st}\bar{J}(s)$ که $\bar{J}(s)$ تبدیل لاپلاس $J(t)$ است.

۹ - ۱۴ با استفاده از $\sigma(t) = e^{st}$ همچون مسئله ۹-۱۳، به اضافهٔ انتگرال توارثی معادلهٔ ۹-۵-۵الف

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} G(t - t')(d\gamma(t')/dt')dt'$$

و نتیجهٔ مسئله ۹-۱۳ نشان دهید که $\bar{G}(s)\bar{J}(s) = \frac{1}{s^2}$ که $\bar{G}(s)$ تبدیل لاپلاس $G(t)$ است، فرض کنید s حقیقی است.

۹ - ۱۵ با در نظر گرفتن انتگرال‌های توارثی برای رفتار ویسکوالاستیک در شکل معادلهٔ ۹-۵-۴

$$\gamma(t) = J_0\sigma(t) + \int_{0}^{t} \sigma(t')[dJ(t - t')/d(t - t')]dt'$$

و معادلهٔ ۹-۵-۵ج

$$\sigma(t) = G_0\gamma(t) + \int_{0}^{t} \gamma(t')[dG(t - t')/d(t - t')]dt'$$

نشان دهید که برای بارگذاری تنش $\sigma(t) = e^{st}$ و با $T = t - t'$ عبارت

$$G_0\bar{A}(s) + J_0\bar{B}(s) + \bar{A}(s)\bar{B}(s) = 0$$

حاصل می‌شود، که در اینجا

$$\bar{A}(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-sT}(dJ / dT)dT$$

و

$$\bar{B}(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-sT}(dG / dT)dT$$

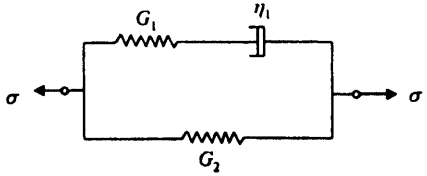
است.

۹ - ۱۶ فرض کنید که تابع وارفتگی تنش به صورت $G(t) = a(b/t)^m$ داده شده باشد که a و b و m ثابت و t زمان است. نشان دهید که تابع خزش برای این ماده $J(t) = \frac{1}{am\pi} \sin m\pi \left(\frac{t}{b}\right)^m$ با $m < 1$ است. از اتحاد $\bar{G}(s)\bar{J}(s) = 1/s^2$ استفاده کنید که کمیت‌های دارای علامت بار، تبدیل‌های لاپلاس هستند.

۹ - ۱۷ یک جامد سه پارامتری، مدلی همچون مدل نشان داده شده دارد. برای این مدل، معادلهٔ اساسی را استخراج کنید و از آن برای مدل تعیین کنید.

الف) تابع وارفتگی

ب) تابع خزش



پاسخ:

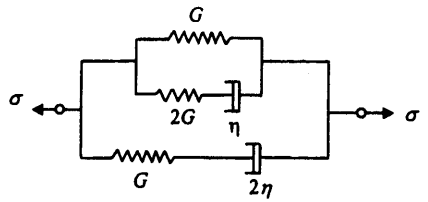
الف) $$G(t) = G_2 + G_1 e^{-t/\tau_1}$$

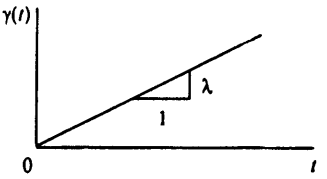
ب) $$J(t) = (1/(G_1 + G_2))e^{-t/\tau_1^*} + (1/G_2)(1 - e^{-t/\tau_1^*})$$

$$\tau_1^* = (G_1 + G_2)\tau_1 / G_2$$

۹ - ۱۸ ماده‌ای همچون طرح نشان داده شده، مدل شده است. الف) برای این مدل تابع وارفتگی $G(t)$ را تعیین کنید.

ب) اگر کرنشی که دارای تابع شیب‌داری همچون نمودار نشان داده شده است به مدل اعمال شود، با استفاده از انتگرال توارثی مناسبی که شامل $G(t)$ باشد، تنش را تعیین کنید.



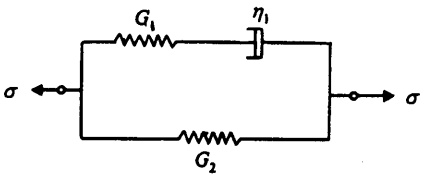


پاسخ:

الف) $$G(t) = G + ۲Ge^{-۲t/\tau} + Ge^{-t/۲\tau}$$

ب) $$\sigma(t) = G\lambda[t + ۳\tau - \tau e^{-۲t/\tau} - ۲\tau e^{-t/۲\tau}]u(t)$$

۹ - ۱۹ مدول مختلط $G^*(i\omega)$ را برای مدل نشان داده شده با استفاده از جایگذاری $i\omega$ برای ∂_t در معادلهٔ اساسی تعیین کنید.



پاسخ:

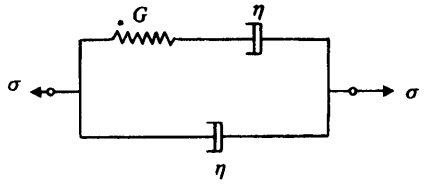
$$G^*(i\omega) = [G_۲ + (G_۱ + G_۲)\tau_۱^۲\omega^۲ + iG_۱\tau_۱\omega]/(۱ + \tau_۱^۲\omega^۲)$$

۹ - ۲۰ نشان دهید که به طور کلی، $J' = \frac{۱}{G'}(۱ + tg^۲\delta)$ است، همچنین بررسی کنید که G' و J' برای مدل کلوین این اتحاد را تأمین می‌کنند (راهنمایی: با $G^*J^* = ۱$ شروع کنید).

۹ - ۲۱ در نظر بگیرید که ویسکوزیته مختلط (که در اینجا با $\eta^*(i\omega)$ نشان داده شده است) طی معادلهٔ زیر تعریف شده باشد:

$$\sigma_۰e^{i\omega t} = \eta^*[i\omega\gamma_۰e^{i\omega t}]$$

$\eta^*(i\omega)$ را برحسب $G^*(i\omega)$ (معادلهٔ ۹-۶-۶ را ببینید.) تعیین کنید و $\eta^*(i\omega)$ را برای مدل نشان داده شده در زیر محاسبه کنید.



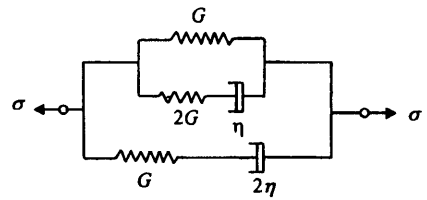
پاسخ:

$$\eta^*(i\omega) = [\eta(2 + \omega^2\tau^2) - i\tau\eta\omega] / (1 + \omega^2\tau^2)$$

۹ - ۲۲ از معادلهٔ ۹-۶-۱۲الف که در آن $G' = \frac{\sigma_0 \cos\delta}{\gamma_0}$ و معادلهٔ ۹-۶-۱۲ب که در آن $G'' = \frac{\sigma_0 \sin\delta}{\gamma_0}$ نشان دهید که $J' = \frac{\gamma_0 \cos\delta}{\sigma_0}$ و $J'' = \frac{\gamma_0 \sin\delta}{\sigma_0}$ از $G^*J^* = 1$ استفاده کنید.

۹ - ۲۳ با محاسبهٔ انتگرال $\int \sigma d\gamma$ روی یک سیکل کامل و با فرض $\sigma(t) = \sigma_0 \sin \omega t$ نشان دهید که انرژی تلف شده در هر سیکل به طور مستقیم به مطلوبیت اتلاف J'' مرتبط است.

۹ - ۲۴ برای مدل به نسبت پیچیدهٔ نشان داده شده در اینجا، معادلهٔ اساسی و از آن $G^*(i\omega)$ را تعیین کنید. تعداد کمی از نقاط را در منحنی G'' در مقابل $\ln(\omega\tau)$ رسم کنید.



پاسخ:

$$\ddot{\sigma} + (5/2\tau)\dot{\sigma} + (1/\tau^2)\sigma = 4G\ddot{\gamma} + (11G/2\tau)\dot{\gamma} + (G/\tau^2)\gamma$$

$$G^*(i\omega) = G' + iG'' \text{ where}$$

$$G' = G[1 + (35/4)\tau^2\omega^2 + 4\tau^4\omega^4] / [1 + (17/4)\tau^2\omega^2 + \tau^4\omega^4]$$

$$G'' = G[3\tau\omega + (9/2)\tau^3\omega_2] / [1 + (17/4)\tau^2\omega^2 + \tau^4\omega^4]$$

برای $\ln(\omega\tau) = 0$, $G'' = 1/2G$

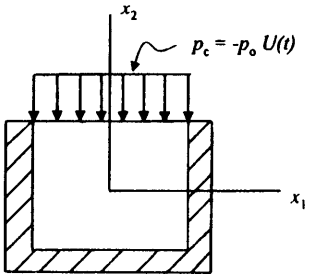
برای $\ln(\omega\tau) = 1$, $G'' = 1/13G$

برای $\ln(\omega\tau) = 2$, $G'' = 0/5722G$

برای $\ln(\omega\tau) = \infty$, $G'' = 0$

۹ - ۲۵ یک بلوک از ماده‌ای ویسکوالاستیک به شکل یک مکعب به راحتی درون مخزنی صلب جای

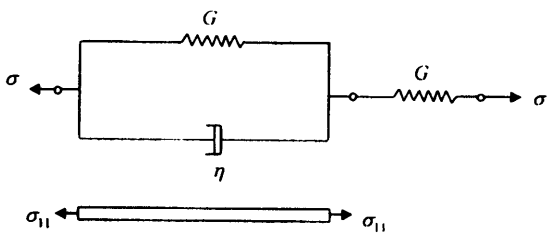
گرفته است. یک بار توزیع شده به طور یکنواخت $P = -P_0 u(t)$ بر سطح بالای مکعب اعمال می‌شود. اگر ماده در برش ماکسول و در انبساط الاستیک باشد، مؤلفهٔ تنش $\sigma_{11}(t)$ را با استفاده از معادلهٔ ۹-۷-۱ تعیین کنید. $\sigma_{11}(0)$ و $\sigma_{11}(\infty)$ را محاسبه کنید.



پاسخ:

$$\sigma_{11}(t) = -p_0[1 - (6G / 3K + 4G))]e^{-(3K/(3K+4G)\tau)t}]u(t)$$
$$\sigma_{11}(0) = -p_0[(3K - 2G) / (3K + 4G)]$$
$$\sigma_{11}(\infty) = -p_0$$

۹ - ۲۶ یک مفتول باریک ویسکوالاستیک تحت بارگذاری کشش ساده با تنش $\sigma_{11}(t)=\sigma_0 u(t)$ قرار گرفته است. ماده ممکن است به صورت جامد خطی استاندارد مدل شود که در برش، مدل نشان داده شده را دارد و به صورت الاستیک در انبساط مدل شود. با استفاده از انتگرال‌های توارثی، معادلهٔ ۹-۵-۶، کرنش محوری $\varepsilon_{11}(t)$ و کرنش جانبی $\varepsilon_{22}(t)$ را تعیین کنید.

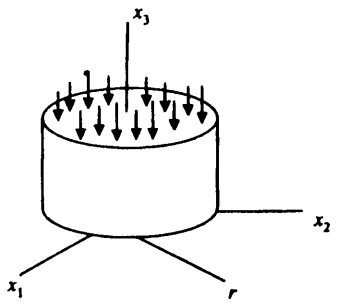


پاسخ:

$$\varepsilon_{11}(t) = \sigma_0\{[(6K + G) / 3K - e^{-t/\tau}]/3G\}u(t)$$
$$\varepsilon_{22}(t) = \sigma_0[(1 / 9K)-(2 - e^{-t/\tau})/6G)]u(t)$$

۹ - ۲۷ یک استوانه از ماده‌ای ویسکوالاستیک به راحتی درون مخزنی صلب قرار گرفته، به طوری که $\varepsilon_{11}=\varepsilon_{22}=\varepsilon_{rr}=0$ است. (هیچ تنش شعاعی وجود ندارد). جسم در انبساط الاستیک و دارای

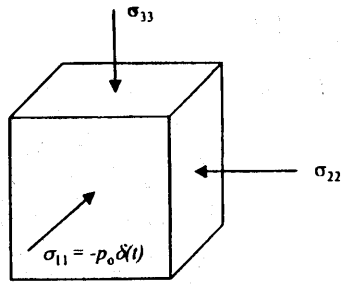
مطلوبیت خزشی $J_s=J_0(1+t)$ بوده که در آن J_0 ثابت است. اگر (ثابت) $\dot{\varepsilon}_{33}=A$ آنگاه $\sigma_{33}(t)$ را تعیین کنید.



پاسخ:

$$\sigma_{33}(t) = \{A|Kt + 4(1 - e^{-t})|/3J_0\}u(t)$$

۹ - ۲۸ جسمی ویسکوالاستیک به شکل بلوکی در حالت انبساط الاستیک بوده و در اعوجاج از قانون ماکسول پیروی می‌کند. بلوک تحت فشار ضربه‌ای $\sigma_{11} = -p_0\delta(t)$ که به طور یکنواخت روی سطح x_1 توزیع شده، قرار گرفته است. اگر بلوک مقید باشد، طوری که $\varepsilon_{33}=\varepsilon_{22} = 0$ آنگاه $\varepsilon_{11}(t)$ و $\sigma_{22}(t)$ را تعیین کنید.

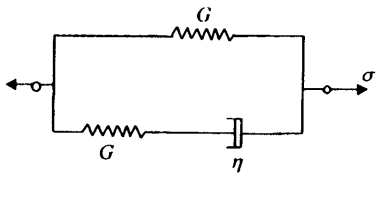


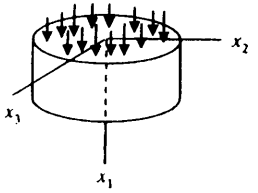
پاسخ:

$$\sigma_{22}(t) = p_0|(2G-3K)\delta(t) / (3K + 4G)-(6G / (3K + 4G))e^{|-3K/(3K+4G)\tau|t}|u(t)$$
$$\sigma_{11}(t) = p_0|3\delta(t) / (3K + 4G)-(4G / (3K + 4G)e^{|-3K/(3K+4G)\tau|t}|u(t)$$

۹ - ۲۹ یک استوانه ویسکوالاستیک به خوبی درون فضای خالی یک مخزن صلب قرار داده شده است. یک پلانجر صاف و هموار روی سطح $x_1 = 0$ استوانه قرار داده شده و به سمت پایین در یک نرخ کرنش ثابت $\dot{\varepsilon}_{11}=\varepsilon_0$ نیرو وارد می‌کند. اگر ماده به صورت جامد سه پارامتری نشان داده شده در برش، و به صورت الاستیک در انبساط مدل شود، $\sigma_{11}(t)$ و $\sigma_{22}(t)$ را طی حرکت پلانجر به

سمت پایین تعیین کنید.

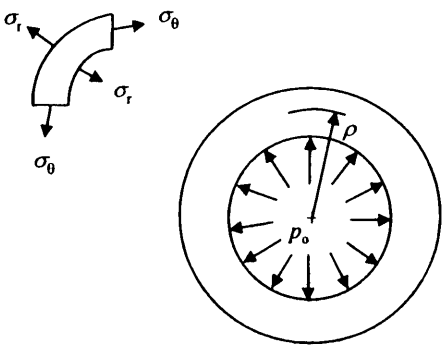




پاسخ:

$$\sigma_{11}(t) = -\varepsilon_0[(4G\tau/3)(1-e^{-t/\tau}) + (K + 4G/3)t]u(t)$$
$$\sigma_{22}(t) = \varepsilon_0[(2G\tau/3)(1-e^{-t/\tau}) + (-K + 2G/3)t]u(t)$$

۹ - ۳۰ برای یک استوانه جدار ضخیم الاستیک تحت فشار داخلی p_0 تنش‌ها به صورت $\sigma_r = A - \frac{B}{r^2}$؛ $\sigma_\theta = A + \frac{B}{r^2}$ بوده و تغییر مکان شعاعی به صورت $u = \frac{1+\nu}{E}[A(1-2\nu)r + B/r]$ داده می‌شود که A و B ثابت‌هایی شامل E مدول یانگ، و γ نسبت پواسون است. p u σ_θ σ_r را برای استوانه ویسکوالاستیک با ابعاد مشابه را که در برش کلوین و در انبساط الاستیک است اگر $p = p_0 u(t)$ تعیین کنید.



پاسخ:

$\sigma_r = p_0 u(t)$ همان حل الاستیک با این تفاوت که حالا p_0 می‌شود

$\sigma_\theta = p_0 u(t)$ همان حل الاستیک با این تفاوت که حالا p_0 می‌شود

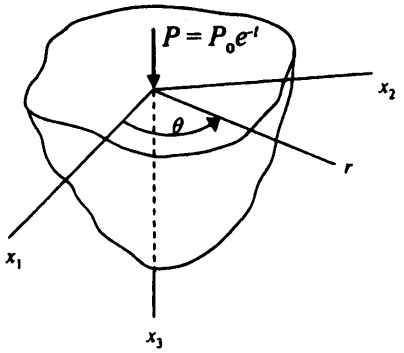
$$u(t) = (3Ar/(6K + 2G))(1-e^{-(2K+G)t/G\tau})u(t) + (B/2Gr)(1-e^{-t/\tau})u(t)$$

۹ - ۳۱ یک فضای نیمه بسیار کوچک ویسکوالاستیک به صورت کلوین در برش، و الاستیک در انبساط مدل شده است. اگر نیروی نقطه‌ای $p = p_0 e^{-t}$ در مبدأ مادهٔ بدون تنش در زمان $t = 0$ اعمال

شود، $\sigma_{rr}(t)$ را با دانستن اینکه برای فضایی نیمه بسیار کوچک الاستیک تنش شعاعی به صورت

$$\sigma_{rr} = P_{\circ}[(1-2\nu)A-B]/2\pi$$

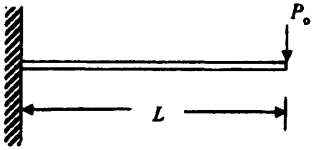
را که A و B توابعی تنها وابسته به مختصات هستند، تعیین کنید.



پاسخ:

$$\sigma_{rr} = (P_{\circ}/2\pi)[(3(G-\eta)e^{-t} + 9Ke^{-(2K+G)t/\eta}]A / (3K+G-\eta) - e^{-t}B$$

۹ - ۳۲ برای یک تیر الاستیک یک سرگیردار تحت بار انتهایی، خیز در $x=L$ برابر $w=\frac{P_{\circ}L^3}{3EI}$ است. اگر $P=P_{\circ}u(t)$ باشد، خیز $w(L,t)$ را برای تیر ویسکوالاستیک با همان ابعاد با فرض الف) تحلیل یک بعدی براساس ماده کلوین، و ب) تحلیل سه بعدی با تیری با مادهٔ کلوین در برش و الاستیک در انبساط را تعیین کنید. در هر حالت $w(L,\infty)$ را کنترل کنید.

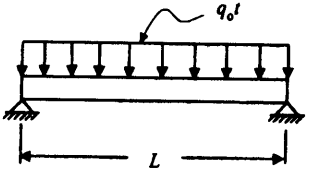


پاسخ:

الف)
$$w(L,t) = (P_{\circ}L^3EI)(1 - e^{-t/\tau_E})u(t),\ \tau^E = \eta/E$$
$$w(L,\infty) = (P_{\circ}L^3 / 3EI),\ \text{خیز الاستیک}$$

ب)
$$w(L,t) = (P_{\circ}L^3 / 3EI)[(1 - e^{-t/\tau}) + (1/9K)e^{-t/\tau}]u(t)$$
$$w(L,\infty) = (P_{\circ}L^3 / 3EI),\ \text{خیز الاستیک}$$

۹ - ۳۳ تیری دو سر مفصل ویسکوالاستیک تحت بارگذاری وابسته به زمان $f(x,t) = q.t$ که $q.$ یک ثابت و t زمان است قرار گرفته است. خیز تیر $w(x,t)$ را برحسب شکل تیر الاستیک $x(t)$ تعیین کنید، در صورتی که ماده تیر فرض شود که الف) کلوین و یک بعدی، و ب) سه بعدی و کلوین در برش، الاستیک در انبساط باشد، نتایج را مقایسه کنید.



پاسخ:

الف) $$w(\mathbf{x},t) = \mathrm{X}(\mathbf{x})[t - \tau_E(1 - e^{-t/\tau_E})]u(t)$$

ب) $$w(\mathbf{x},t) = \mathrm{X}(\mathbf{x})[t - (3K\tau_E/(3K + G))(1 - e^{-t/\tau})]u(t)$$

به طوری که $\tau_E = \eta / E$

فهرست راهنما

اتساع مکعبی، ۱۴۷، ۳۲۵
اصل بقای انرژی، ۲۱۳
اصل بقای جرم، ۲۰۰
اصل تطابق، ۳۹۶، ۴۰۰، ۴۰۱، ۴۰۲
اصل جمع آثار، ۲۷۲، ۲۷۴، ۳۳۸
اصل حضور هماهنگ، ۲۲۲
الاستواستاتیک، ۲۷۲، ۲۷۵، ۲۷۸، ۲۷۹، ۳۰۵
الاستودینامیک، ۲۷۲، ۲۷۵، ۳۲۰
الاستیسیته صفحه‌ای، ۲۷۵، ۲۸۶
انتقال متعامد، ۲۹، ۳۵، ۴۷، ۴۸، ۱۶۱، ۲۶۱، ۳۱۵
انتگرال‌های توارثی، ۳۸۷، ۳۸۸، ۴۱۰، ۴۱۴
انحراف تنش، ۳۳۰، ۳۴۰
اندازه حرکت خطی، ۵۸، ۵۹، ۶۳، ۲۱۲، ۲۱۷
اندازه حرکت زاویه‌ای، ۲۱۲، ۲۴۷
انرژی تحریف، ۳۱۴، ۳۱۵
انرژی جنبشی، ۲۱۳، ۲۱۴، ۲۱۵، ۲۴۸
انرژی حرارتی، ۲۱۵، ۲۱۶، ۲۱۷
انرژی داخلی، ۲۱۵، ۲۱۶، ۲۱۷، ۲۱۸، ۲۱۹، ۲۲۱، ۲۲۲، ۲۵۸، ۳۴۹
انرژی کرنشی، ۲۵۵، ۲۵۸، ۲۵۹، ۲۶۰، ۲۶۹، ۲۷۰، ۳۱۴، ۳۱۸، ۳۲۱، ۳۴۵، ۳۵۲، ۳۵۵، ۳۵۶، ۳۵۷، ۳۵۸، ۳۵۹، ۳۶۰، ۳۶۸، ۳۶۹
بردار چرخش، ۱۵۱، ۱۵۲، ۱۶۸، ۱۸۴، ۱۸۷، ۱۹۲، ۱۹۳، ۳۰۶، ۳۴۱
بردار موقعیت، ۴۳، ۵۰، ۵۲، ۶۸، ۱۲۱، ۱۲۲، ۱۲۳، ۱۳۴، ۱۳۵، ۳۱۰
بردار ویژه، ۳۸
بردار یکه، ۱۰، ۱۳، ۳۲، ۳۸، ۳۹، ۱۴۳، ۱۵۱، ۱۵۳، ۱۵۴، ۱۶۸، ۱۸۱، ۱۹۴، ۲۰۷، ۳۱۲
بیان تنش، ۵۸، ۶۴، ۷۳، ۸۳، ۸۶، ۹۱، ۹۳، ۹۵، ۹۷، ۹۸، ۱۰۶، ۱۱۱، ۱۱۳، ۱۱۴، ۲۸۱
پاسخ‌های ذاتی، ۲۱۷، ۲۲۲
پایاهای تنش، ۷۵، ۷۹، ۹۹، ۱۱۶
پایاهای کرنش، ۱۴۲، ۱۴۳
پیکربندی اولیه، ۱۲۰، ۱۲۳، ۱۲۷، ۱۳۲
پیکربندی جاری، ۱۲۰، ۱۲۱، ۱۲۲، ۱۲۹، ۱۵۵، ۱۵۸، ۱۶۵، ۱۹۱، ۱۹۳، ۲۰۰، ۲۰۵
پیکربندی مرجع، ۱۲۰، ۱۲۱، ۱۲۲، ۱۲۳، ۱۲۴، ۱۲۶، ۱۲۷، ۱۲۹، ۱۳۲، ۱۳۵، ۱۴۵، ۱۴۶، ۱۵۸، ۱۶۹، ۱۷۰، ۱۷۲، ۱۷۳، ۱۷۹، ۱۹۰، ۱۹۱، ۱۹۸، ۲۰۰، ۲۰۵، ۲۰۶، ۲۰۸، ۲۰۹
تابع تاب برداشتگی، ۲۹۹

تابع تنش ایری، ۲۸۲، ۲۸۴، ۲۸۶، ۲۸۸، ۳۱۳، ۳۲۱، ۳۲۲
تابع فشار، ۳۳۴
تانسور تغییرشکل، ۱۳۷
تانسور تغییر شکل، ۳۵۷، ۳۶۸
تانسور تنش چسبنده، ۳۲۷، ۳۲۸
تانسور قائم، ۲۹
تانسور کرنش محدود، ۱۳۷، ۱۷۹، ۱۸۲
تانسور مرتبه صفر، ۱۵
تجزیه قطبی، ۱۵۸، ۱۶۰
ترموالاستیسیته، ۲۸۰، ۳۲۱
تغییرشکل همگن، ۱۵۵، ۱۶۰، ۱۷۹، ۱۸۱، ۱۸۵، ۱۸۶، ۱۹۴، ۱۹۶
تغییرمکان جسم صلب، ۱۱۹، ۱۳۸، ۱۵۱، ۱۵۴
تغییرناپذیری، ۲۲۶، ۲۲۷، ۲۳۸، ۲۴۰
تقارن الاستیک، ۲۶۱، ۲۶۶، ۲۶۷، ۲۶۹، ۲۷۰، ۳۱۷، ۳۱۸
تنش برشی، ۶۴، ۸۴، ۸۵، ۸۸، ۹۵، ۹۸، ۱۰۱، ۱۰۲، ۱۱۱، ۱۱۲، ۱۱۴، ۱۱۵، ۱۱۶، ۱۱۷، ۲۲۶، ۲۴۲، ۲۸۶، ۲۹۸، ۳۲۴، ۳۲۷، ۳۷۸، ۳۸۱
تنش صفحه‌ای، ۹۳، ۹۴، ۹۵، ۹۶، ۹۷، ۱۴۸، ۲۶۷، ۲۷۵، ۲۷۶، ۲۷۷، ۲۷۸، ۲۸۰، ۲۸۲، ۳۲۰، ۳۲۱
تنش کوپل، ۵۷
تنش‌های اصلی، ۷۳، ۷۵، ۷۶، ۷۹، ۸۳، ۸۵، ۹۳، ۹۴، ۱۱۱، ۱۱۷، ۳۱۶
توصیف اولری، ۱۲۷، ۱۷۶، ۱۷۹، ۳۳۰
توصیف لاگرانژی، ۱۲۶، ۱۲۷، ۱۷۶، ۱۷۸
توصیف مادی، ۱۲۷، ۱۲۹، ۱۳۰، ۱۳۱، ۱۳۸، ۱۷۶، ۲۰۲
ثابت‌های الاستیک، ۲۴۲، ۲۵۷، ۲۶۱، ۲۶۶، ۲۶۷، ۲۶۹، ۲۷۰، ۳۱۵، ۳۱۷، ۳۱۸
ثابت‌های لامه، ۲۶۲، ۲۷۰، ۳۲۰
جریان پتانسیل، ۳۳۳، ۳۳۷، ۳۳۸
جریان غیرچرخشی، ۳۳۳، ۳۳۷، ۳۳۸، ۳۳۹
جریان یکنواخت، ۳۳۳، ۳۳۴، ۳۳۵، ۳۳۶، ۳۳۸، ۳۴۱
جمع بردارها، ۶، ۹
جهت‌های اصلی، ۳۲، ۳۴، ۳۵، ۳۷، ۳۹، ۴۸، ۵۰، ۷۳، ۷۶، ۸۰، ۱۴۷، ۱۵۶، ۱۵۸، ۱۶۷، ۲۶۲، ۲۶۳
چرخش، ۱۰، ۲۹، ۳۰، ۳۲، ۴۷، ۵۰، ۷۰، ۷۱، ۹۵، ۱۵۱، ۱۵۲، ۱۵۸، ۱۵۹، ۱۶۸، ۱۸۲، ۱۸۴، ۱۸۷، ۱۸۸، ۱۹۲، ۲۳۲، ۲۴۶، ۲۹۶، ۳۰۶، ۳۴۱
چگالی جرم، ۵۵، ۲۰۰
حرکت ایزوکریک، ۲۴۶
حرکت تهی، ۲۲۸
حرکت یکنواخت، ۳۳۹، ۳۴۱
خزش، ۲۴۳، ۳۸۰، ۳۸۱، ۳۸۲، ۳۸۳، ۳۸۴، ۳۸۷، ۳۹۶، ۴۱۱
دایره‌های مور برای تنش، ۸۵، ۸۷
دایره‌های مور برای کرنش، ۱۴۷
دترمینان ژاکوبی، ۱۲۴، ۱۷۴
دلتای کرانکر، ۹، ۱۰، ۱۸، ۳۳، ۷۳، ۹۹،

۱۳۶، ۲۸۰، ۳۱۵
دیاد، ۱۲، ۱۳، ۲۸
رفتار الاستیک، ۲۴۹، ۲۵۵، ۲۵۶، ۲۵۹، ۲۶۰، ۲۶۲، ۲۸۰، ۳۷۳، ۳۷۴، ۳۷۵، ۳۹۷، ۳۹۸، ۳۹۹
زیرحالت ترمودینامیکی، ۲۱۸
شاخص، ۶، ۸، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۹، ۳۹، ۵۷، ۶۸، ۶۹، ۸۶، ۸۸، ۱۲۱، ۱۲۸، ۱۴۳، ۱۴۸، ۱۵۲، ۲۷۵
شاره استوکسی، ۳۲۸
شاره باروتروپیک، ۳۳۴، ۳۳۸، ۳۳۹، ۳۴۱، ۳۴۲
شاره تراکم‌ناپذیر، ۳۴۱
شاره غیرچسبنده، ۳۳۳
شاره کامل، ۳۳۳
شرایط متعامد، ۲۹
شرط استوکس، ۳۳۲، ۳۴۰
صلبیت پیچشی، ۳۰۰، ۳۰۴، ۳۲۴
ضرایب چسبندگی، ۲۴۲، ۳۲۹
ضرب خارجی، ۱۵
ضرب داخلی، ۱۵، ۱۶، ۱۹، ۲۷، ۳۲، ۴۱، ۷۶، ۱۶۵
ضرب ماتریس‌ها، ۱۹
ضربه‌گیر، ۳۷۷، ۳۷۸، ۳۷۹
ضریب حجمی، ۳۲۹
فشار ترمودینامیکی، ۳۳۰
فشار هیدرواستاتیک، ۲۶۶، ۳۲۷
قانون اول ترمودینامیک، ۱۹۷، ۲۱۷
قانون عمومیت داده شده هوک، ۲۵۷
قانون مثلث، ۶
قضیه استوکس، ۳۳۹
قضیه انتگرال، ۳۳۹
قضیه دیورژانس، ۵۳، ۶۸، ۱۹۹، ۲۰۷، ۲۰۸، ۲۱۲، ۲۱۴، ۲۲۰، ۲۴۵
قضیه کلوین، ۳۳۸، ۳۳۹
قوانین تعادل، ۱۹۷
کرنش برشی، ۱۴۵، ۱۴۷، ۱۵۶، ۱۹۱، ۲۵۷، ۳۷۶، ۳۸۱، ۳۸۹
کرنش صفحه‌ای، ۱۴۸، ۱۴۹، ۱۵۲، ۲۷۵، ۲۷۶، ۲۷۸، ۲۷۹، ۲۸۰، ۲۸۲، ۳۲۱، ۳۶۱، ۳۶۲
کرنش‌های اصلی، ۱۴۲، ۳۱۶
گاز ایده‌آل، ۲۱۸، ۳۳۳
گرادیان تغییرشکل، ۱۳۶، ۱۳۹، ۱۵۸، ۱۶۴، ۱۷۳، ۱۷۹، ۳۱۴
گرادیان تغییرمکان، ۱۴۱، ۱۴۲، ۱۵۱
گرادیان سرعت، ۱۶۲، ۱۶۳، ۱۶۹، ۱۷۲، ۱۷۳، ۲۲۳، ۲۲۴، ۲۳۳، ۲۳۴، ۲۳۹، ۲۴۰
ماتریس برگردان، ۱۸، ۲۷
ماتریس صفر، ۱۸
ماتریس متعامد، ۲۳، ۴۷، ۷۰، ۱۵۹
ماتریس معکوس، ۲۳
ماتریس واحد، ۲۲، ۳۷، ۴۶، ۴۷
مبنای متعامد، ۷
محورهای اصلی، ۳۴، ۳۵، ۳۷، ۳۹، ۵۰، ۷۷، ۷۸، ۸۱، ۸۴، ۸۵، ۹۳، ۹۵، ۹۷، ۹۸، ۱۱۰، ۱۴۳، ۱۵۷، ۱۵۹، ۱۶۱، ۱۶۸، ۱۶۹، ۲۶۲، ۳۱۶، ۳۵۳، ۳۵۸، ۳۶۸

محورهای قائم مستطیلی، ۲۵
مختصات فضایی، ۱۲۲، ۱۲۳، ۱۲۷، ۱۷۴، ۱۹۰
مختصات مادی، ۱۲۱، ۱۲۲، ۱۲۳، ۱۲۴، ۱۲۹، ۱۳۱، ۱۴۲، ۱۷۴، ۲۰۶، ۲۰۸
مدول اتلاف، ۳۹۱، ۳۹۲
مدول برشی، ۲۶۴، ۲۶۶، ۳۵۱، ۳۵۷، ۳۵۹، ۳۶۰، ۳۷۷، ۳۸۲، ۴۰۲
مدول حجمی، ۲۴۳، ۲۶۴، ۲۶۶
مدول ذخیره، ۳۹۱، ۳۹۲
مدول صلبیت، ۲۶۴
مدول یانگ، ۲۶۴، ۳۹۷، ۴۰۲، ۴۰۵، ۴۱۶
مشتق مادی، ۱۳۰، ۱۳۱، ۱۳۲، ۱۶۴، ۱۶۵، ۱۶۷، ۱۶۹، ۱۷۱، ۱۷۳، ۱۷۷، ۱۷۸، ۱۹۲، ۱۹۴، ۱۹۸، ۲۰۰، ۲۰۱، ۲۰۳، ۲۱۳، ۲۱۴، ۲۴۵، ۲۴۶، ۲۴۷، ۳۳۳، ۳۳۹، ۳۴۱، ۳۴۲
مطلوبیت برشی، ۳۸۲، ۳۸۹، ۳۹۹
معادلات اولر، ۳۳۱
معادلات تعادل، ۶۷، ۶۸، ۱۰۶، ۱۰۷، ۱۱۷، ۲۰۵، ۲۰۷، ۲۰۸، ۲۷۲، ۲۷۴، ۲۷۷، ۲۷۸، ۲۸۱، ۲۸۲، ۳۰۵، ۳۱۲، ۳۱۳، ۳۱۹، ۳۲۱، ۳۶۰، ۳۶۳
معادلات حالت، ۲۴۳
معادلات حرکت، ۱۲۶، ۱۲۷، ۱۲۸، ۱۲۹، ۱۳۲، ۱۳۳، ۲۰۴، ۲۰۵، ۲۰۷، ۲۱۲، ۲۱۳، ۲۱۶، ۲۴۴، ۲۴۷، ۲۵۰، ۲۷۴، ۳۳۰، ۳۳۳، ۳۳۵، ۳۵۷، ۳۶۰
معادلات سازگاری، ۱۵۲، ۲۷۴، ۲۷۷، ۲۷۸، ۲۸۲، ۲۹۶، ۳۰۵، ۳۰۶
معادلات میدان، ۲، ۱۹۷، ۲۴۱، ۲۴۳، ۲۷۲، ۲۷۳، ۲۷۴، ۲۷۸، ۲۷۹، ۲۸۲، ۳۳۰، ۳۳۱، ۳۳۲
معادلات ناویر، ۲۷۴، ۲۷۵، ۳۰۵، ۳۰۶، ۳۰۷، ۳۰۸، ۳۱۰، ۳۱۱، ۳۳۰، ۳۳۱، ۳۳۲، ۳۳۳، ۳۳۴، ۳۴۰، ۳۴۱
معادله برنولی، ۳۳۸، ۳۳۹، ۳۴۱، ۳۴۲
معادله پیوستگی، ۲۰۰، ۲۰۱، ۲۰۲، ۲۰۳، ۲۴۳، ۲۴۴، ۲۴۶، ۲۴۷، ۲۵۸، ۲۵۹، ۳۱۴، ۳۳۰، ۳۳۲، ۳۳۳، ۳۳۵، ۳۳۷، ۳۳۸، ۳۴۱، ۳۵۳
معادله دینامیک گازها، ۳۳۸
معادله لاپلاس، ۳۳۸، ۳۴۱
معادله موج، ۳۳۷
معادله هارمونیک دوتایی، ۲۸۳، ۳۲۱
مقادیر اصلی، ۳۲، ۳۵، ۳۶، ۳۷، ۳۹، ۴۹، ۵۰، ۷۳، ۱۰۰، ۱۰۱، ۱۱۵، ۱۵۹، ۱۶۷، ۱۸۱، ۱۸۲، ۱۸۷، ۱۸۸، ۱۹۱، ۲۶۲
مقدار ویژه، ۳۳، ۷۳، ۸۳، ۱۰۰، ۱۵۸، ۲۶۲
مواد قطبی، ۲۱۲
مواد هایپرالاستیک، ۲۵۹
میدان برداری، ۴۲
میدان تانسوری، ۳۹، ۴۰، ۴۱، ۱۱۷
میدان سرعت، ۵۹، ۱۲۰، ۱۲۴، ۱۳۲، ۱۳۳، ۱۶۲، ۱۶۳، ۱۷۶، ۱۹۰، ۱۹۲، ۱۹۳، ۱۹۴، ۱۹۶، ۲۰۴، ۲۰۵، ۲۳۲، ۲۴۶، ۲۴۸، ۳۳۰، ۳۳۴، ۳۳۷، ۳۳۸، ۳۴۱
نرخ برشی، ۱۶۶، ۱۶۷
نرخ تغییرشکل، ۱۶۲، ۱۶۳، ۱۶۵، ۱۶۷،

۱۹۰، ۱۹۱، ۱۹۲، ۲۴۹، ۳۲۸، ۳۲۹، ۳۳۱،
۳۳۵
نرخ کشش، ۱۶۶
نرخ کشیدگی، ۱۶۵، ۱۹۰، ۱۹۱
نسبت پواسون، ۲۶۴، ۳۵۹، ۳۹۸، ۴۰۲،
۴۰۵، ۴۱۶
نسبت کشیدگی، ۱۵۳، ۱۶۴، ۳۵۲
نماد جایگشت، ۱۰، ۱۱، ۱۶، ۲۱، ۴۵،
۲۱۲، ۲۶۱، ۳۱۲
نمادگذاری شاخصی، ۵، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۲۱،
۲۴، ۳۲، ۴۰، ۴۱، ۵۱، ۵۲، ۱۲۱، ۱۳۱،
۱۹۱، ۲۴۳
نیروهای سطحی، ۵۵، ۵۷، ۲۱۲، ۲۱۳،
۲۴۸
وارفتگی، ۳۸۰، ۳۸۱، ۳۸۳، ۳۸۴، ۳۸۵،
۳۸۹، ۳۹۴، ۴۰۷، ۴۱۱
ولکانیزاسیون، ۳۴۳

واژه‌نامه اصطلاحات علمی

آدیاباتیک - بی‌دررو	*adiabatic*
آرام - لایه‌ای	*lanair*
آنتالپی ایستایی	*stagnation enthalpy*
اتساع	*dilatation*
اتساع مکعبی	*cubuical dilatation*
اثر تانسور	*trace of a tensor*
اصل تطابق	*Correspondence principle*
اصل حضور هماهنگ	*principle of equipresence*
انتگرال‌های توارثی	*Hereditary Integrals*
انحراف	*deviator*
انقباض	*contraction*
ایزوترمال - حرارت همسانی	*isothermal*
ایستایی	*stationary*
بردار تصویر	*image vector*
بردار چرخش	*vorticity vector*
بردار دوگان	*dual vector*
بردار دوگان	*dual vector*
بردار ساختگی	*preuds vector*
بردار کشش	*traction vector*
بردار ویژه	*eigen vector*
برگردان یک تانسور	*transpore of a tensor*
بقای جرم	*conservation of mars*
پاسخ‌های ذاتی	*Constitutive responses*
پایداری	*invariance*
پراکندگی	*dissipation*
پیکربندی	*configuration*
پیکربندی	*confiquration*
تابع اتلاف	*discipation function*
تابع تاب برداشتگی	*warping lunction*
تابع تنش ایری	*airy stren function*
تابع چند مقداره	*multiple - valued function*
تابع نقش‌بندی	*mapping function*
تانسور چرخش	*spin tensor*
تانسور متعامد	*orthogonal tensor*
تانسور مرتبه دوم	*second - order tensor*
تجزیه قطبی	*polar decomposition*
تحریف	*distortion*
تغییرشکل	*deformation*
تغییرناپذیری	*Invariance*
تکثر	*multiplicity*
تنش انحراف	*deniatoric stress*
توصیف فضایی	*spatial description*
توصیف لاگرانژی	*lagrangian description*
توصیف مادی	*material dexcription*
توصیف مرجع	*reference description*
جریان بالادستی	*upstream*
جهت‌های اصلی	*principal direction*
چرخش	*vorticity*
چرخشی	*ratotional*

چسبندگی	*viscosity*
چهاروجهی	*tetrahedron*
حافظه‌کارانه	*conservative*
حجم کنترل	*control volume*
حرکت تهی (پوچ)	*null motion*
حل غیرصفر	*nontrivial solution*
خزش	*creep*
خط جریان	*stream line*
خط مسیر	*path line*
دیورژانس	*divergence*
زیرحالت ترمودینامیکی	*thermodynamic substate*
سنجش - اندازه	*measure*
شاخص آزاد	*free index*
شاخص کاذب	*dummy indices*
شار	*flux*
شاره	*fluid*
شبه	*pseudo*
صفحه برگزیده	*designated plane*
صلبیت پیچشی	*torsional rigidity*
ضرب دیادیک	*dyadic product*
ضربه‌گیر	*dashpot*
ضریب پخش حرارتی	*thermal abffusivity*
ضریب چسبندگی - ضریب لزجی	*coefficient of vesosity*
غیر چسبنده	*inviscid*
غیرمتقارن	*antisymmetric*
کرل	*curl*
کشیدگی	*stretch*

کشیدگی	*stretch*
کهاد دترمینان	*minor of determinent*
ماتریس پس ضرب	*postfactor matrix*
ماتریس پیش ضرب	*prefactor matrix*
ماتریس مجاور	*adjoint matrix*
ماتریس واحد	*idencity matrix*
مبنای متعامد	*arthogonal basis*
متعامد	*orthonormal*
مختصات مادی	*materail coordinates*
مدول اتلاف	*Loss modulus*
مدول حجمی	*bulk modules*
مدول حجمی	*bulk modules*
مدول ذخیره	*storage modulus*
مشتق مادی	*materail derivative*
مضرب	*multipler*
مطلوبیت برشی	*Shear compliance*
معادلات اساسی	*constitution equations*
معادلات بنیادین	*fundamental equations*
معادلات سازگاری	*compatibility equations*
معادله پیوستگی	*equation of continuity*
معادله مشخصه	*characterstic equation*
مقادیر اصلی	*principal values*
مقتضی	*approperate*
مقدار ویژه	*eigen value*
ممان حجمی	*body moment*
مناسب	*proper*
مناسب	*proper*
منحصر بفرد	*unique*

orientation	موقعیت
multiply - connected region	ناحیه چند پارچه
imperoper	نامناسب
anisotropic	ناهمسانگرد
rate of change	نرخ تغییرات
rate of deformation	نرخ تغییرشکل
rate of extension	نرخ کشش
rate of extension	نرخ کشش
rate of stretching	نرخ کشیدگی
indicial notation	نمادگذاری شاخصی
symbolic notation	نمادگذاری نمادین
uncrement	نَمو
nonion	نُه‌تایی
body fore	نیروی حجمی
relaxation	وارفتگی
Vulcanization	ولکانیزاسیون
thermal conductivity	هدایت حرارتی
actahedral	هشت‌وجهی
homogeneous	همگن
steady	یکنواخت - پایدار