«فصل اول»

اصول ایستایی

الف ـ مکانیک : علمی را گویند که اجسام را کــه در وضعیتــهای سـکون و یـا حرکـت تحـت تـأثیر نیروهای وارده بررسی و تحلیل نماید:

علم مکانیک به سه قسمت زیر تقسیم می شود:

۱-مکانیک اجسام صلب (جامد) ← یستائی(استاتیک) :اجسام ساکن مورد بررسی قرار می گیرد.
← پویایی «دینامیک »اجسام متحرک مورد بررسی قرار می گیرد

۲-مکانیک اجسام تغییر شکل پذیر

۳- مکانیک شاره ها(سیالات)

ب ـ مفاهیم پایه:

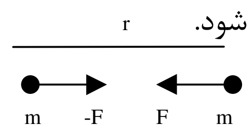
مفاهیم بنیادی که در مکانیک به کار برده می شوند عبارتند از :

۱-فضا: مکان هندسی نقاطی است که در آن میدان سه بعدی برای نقاط به کار برده می شود.

۲- زمان :علاوه بر مکان یک جسم،زمان وقوع یک جسم نیز مورد نظر است که واحدآن ثانیه است.

۳- شبکه مرجع: موقعیت نقاط در فضا نسبت به یک دستگاه هندسی مرجـــع و بـا فواصـل و زوایـا مشخص می شود.

۴- نیرو:تأثیر یک جسم روی جسم دیگر رانیروگویند.نیرو با نقطه اثر بزرگی و جــهت اش مشـخص می شود.



۵- ماده: ماده عبارت است از جسمی که فضاگیر می باشد . یک جسم ماده ای توسـط یـک سـطح بسته محصور شده است.

۶ - مانده (لختی) :خاصیتی از ماده است که تمایل دارد در برابر تغیــیر در حرکـت ایجـاد مقـاومت نماید.

۷جرم:؛ معیاری کمی از ماند (لختی)است. جرم همچنین خاصیتی از هر جسم است که همـ واره با جاذبه متقابل آن جسم نسبت به اجسام دیگر همواره است.

۸- جسم صلب: جسمی است که بین ذراتش هیچ جابجائی نسبی موجود نباشد.

ج) کمیت های عددی و برداری :

کمیتهایی که در استاتیک بکار می آید بر دو نوعند.

۱- کمیت های عددی ۲- کمیت های برداری

۱- کمیت های عددی آنهائی هستند که فقط مقدار دارند مانند: زمان ،جرم و..

۲- کمیت های برداری علاوه بر مقدار دارای امتداد نیز می باشند نیرو

قانون متوازی الاضلاع برای جمع بردارها:

همانطوری که گفته شده در صورتی که به یک ذره دو نیرو تأثیر کند با توجه به اینکه نیروها بردار می باشند می بایستی از قانون جمع متوازی الاضلاع برداری یک نیرو به نام برآیند قراردارد که از رسم قطعه متوازی الاضلاع بدست می آید که در بخشهای بعد به تفضیل ذکر خواهدشد.

اصل قابلیت انتقال:

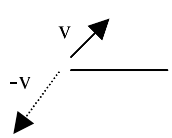
اگر نیروی وارد بر نقطه معلومی از یک جسم صلب را بوسیله نیروی دیگری که یا اولی از لحاظ مقدار و جهت برابر ولی نقطه اثر آن متناوب است جایگزین کنیم وضعیت تعادل یا حرکت جسم تغییر نمی کند.

نحوه نمایش یک کمیت برداری:

یک کمیت برداری v توسط یک پاره خط که دارای راستای بردار بوده و بوسیله یک علامت پیکان جهت آن مشخص می شود نشان داده می شود.

بردار $\vec{U}$, $\underline{U}=U$

اندازه $|U|=U$



دـ قوانین نیوتن :

۱- قانون اول:

هرگاه برآیند نیروهای وارد بر یک ذره صفر شود اگر در حال سکون باشد ساکن مـــی مـاند. واگر در حال حرکت باشد به حرکت خود ادامه می دهد.

قانون دوم:

شتاب یک ذره متناسب با برآیند نیروهائی ست که به آن وارد می گردند.

جرم ذره

$F=ma$

برآیند نیروهای   شتاب ذره

قانون سوم:

نیروهای عمل و عکس العمل میان دو جسم از نظر مقدار برابرند و در خلاف جـــهت یکدیـگر عمل می نمایند و در روی یک راستا واقع می باشند .

طبق قانون گرانش نیوتن که می گویند دو ذره به جرمهای m و M یکدیگررا با نیروهای مساوی و مختلف الجهت $(F,-F)$جذب می کنند بزرگی این نیروه (F) از فرمول زیر بدست می آید که آن r فاصله بین دو ذره و G ثابت عمومی ؟؟؟؟؟ثابت گرانش است.

$$F = G.\frac{Mm}{r^2}$$

نتیجتاً مقدار (W) وزن یک ذره به جرم m را می شود به صورت زیر بیان کرد.

$$w=m.g \qquad g = 9.81 {m}/{s}^2$$

سیستمهای یکاها:

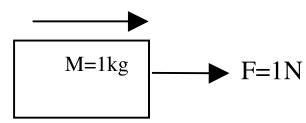
سیستمهای بین المللی یکاها (یکاهای SI)

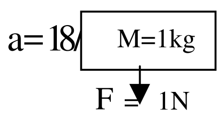
در طی سالها اخیرتقریباً کلیه کشورهای جهان سیستم بین المللی آحاد یا بـــه زبـان فرانســه (Systeme International) که مخفف آن SI می باشد را برای تمامی کارهای مهندسی و علوم انتخاب

کردند. در این سیستم یکالهای اصلی ،یکالهای طول،جرم و زمان هستند که آنها را به ترتیب متر (M)و کیلوگرم (Kg)و ثانیه (s)می نامند.

یکای نیرو در این سیستم یک یکای فرعی است که به آن نیوتن (N) می گویند و بنا به تعریف یک نیوتن نیرویی است که به یک جرم یک کیلوگرمی شتابی برابر با $1 m/s^2$ بدهد.

$$a = 1 m/s^2 \qquad 1N = (1kg)(1 m/s^2) = 1kg - m/s^2$$





پیشوند واحد

نماد	پیشوند	مضرب (مقدار)
G	گیگا	$1000000000 = 10^9$
M	مگا	$1000000 = 10^6$
K	کیلو	$1000 = 10^3$
m	میلی	$0.001 = 10^{-3}$
μ	میکرو	$0.000001 = 10^{-6}$
n	نانو	$0.000000001 = 10^{-9}$

1Mg=1000kg   1mm=0.001m   1km=1000m

1KN=1000N   1g=0.001kg

$3.82 KN = 3082 \times 10^3 mm$ 3.82Km=3820m ,47.2mm=0.0472m

$47.2mm = 47.2 \times 10^{-3}$ mm

حالا جمع بیش از سه بردار را در نظر می گیریم.

شرکت پذیری P+Q+S=(P+Q)+S=P+(Q+S)

با توجه به جمع بردارهای صفحه قبل نتیجه می گیریم:

۱- جمع بردارها دارای خاصیت جابه جایی است.

۲- جمع بردارها دارای خاصیت شرکت پذیری است.

ضرب اسکالر در یک بردار

$$P + P = 2P \Rightarrow P_1 + P_2 + \ldots + P_n = np$$

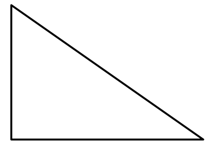
$$P_1 = P_2 = \ldots = P_n$$

برآیند چند نیروی همرس .

تجزیه یک نیرو به مولفه های آن.

$$BC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$$

$$COS\theta = \frac{AC}{BC}$$



$$Sin\theta = \frac{AB}{BC}$$

$$Tan\theta = \frac{AB}{AC}$$

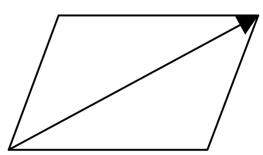
$$P_X = PCos\theta, Py = P\sin\theta$$

در امتداد محور xها و yها مثبت دو بردار واحد اختیار می کنیم به این بردارها بردار یکه می گویند و آنها را به ترتیب به روی محورهای x و y با i وj نشان می دهند. با توجه به ضرب یک اسکالر در بردار خواهیم داشت مؤلفه های قائم p_x و p_y یک نیروی p را می شود از طریق ضرب بردارهای i و j در اسکالرهای مناسب بدست آورد.

$$p_{x=p_{xi}}, \quad p_y = p_{yj}, \qquad p = p_{xi} + p_{yj}$$

$$p_x = p\cos\theta, \quad p_y = p\sin\theta$$

<u>قانون متوازی الاضلاع :</u>



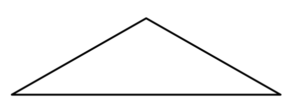
$$\begin{aligned} \vec{p} &= p_{xi} + p_{yi} \\ \vec{Q} &= Q_{xi} + Q_{jk} \end{aligned} \Rightarrow \vec{P} + \vec{Q} = (P_{xi} + p_{yi}) + (Q_{xi} + Q_{jk})$$

$$\vec{R} = (P_x + Q_x)i + (p_y + Q_y)j$$

نتیجه می گیریم که مؤلفه های اسکالر R_X و R_Y در برآیند(R) چند نیروی وارد بر یک ذره از جمع جبری مؤلفه های اسکالر متناظر آن نیروها بدست می آید.

یا با استفاده از حل مثلثاتی خواهیم داشت:

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQCOS\theta$$



$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQCOS\theta$$

طبق قانون سینوسها

$$\frac{R}{Sinr} = \frac{p}{\sin a} = \frac{Q}{Sin\beta}$$

مثال ۱:

مطلوبست برآیند دو نیروی 30N و 40N وارد بر شکل زیر را با استفاده از

الف) قانون متوازی الاضلاع　　　　ب) جمع برداری

$$R^2 = 30^2 + 40 + 2 \times 30 \times 40 \quad Cos110 \Rightarrow$$

$$R \cong 41N$$

ب: $\theta + \gamma = 180 - 70° = 110 \Rightarrow \beta + a + 40 = 70$

$$\theta + \gamma + 40 + = 70° \Rightarrow \beta + 40 + a = 70$$

$$R/S : n70° = \frac{30}{\sin \beta} \begin{cases} \beta + 40 + a = 70 \\ \beta + a + 40 + 70 = 180 \end{cases}$$

$$\vec{p} = -30\cos 40° i + 30 \sin 40 j° = -22.98 i + 19.28 j$$

$$\vec{Q} = -40 \cos 70° i - 40 \sin 70° j = -13.68 i - 37.59 j$$

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} = (-22.98 - 13.68) i + (19.28 - 37.59) j$$

$$\vec{R} = -36.66 i - 18 - 31 j, R = \sqrt{36.66^2 + 18.31^2} \cong 41N$$

مثال ۲:

دکل AB توسط دو نیروی منظور شده در نقطه A تحت فشار می باشد تعیین برآیند و جهت آن ناشی از این دو نیرو و در نقطه A را:

$$R_x = \sum F_X = 45 \cos 30° i - 20 \cos 12° i = 38.97 i - 19.56 i = 19.41 i$$

$$p_Y = \sum F_y = -45 \sin 30° i - 20 \sin 12° i = -22.5 j - 4.16 j = -26.66 j$$

$$R = \sqrt{19.4^2 + 26.66^2} = 32.97$$

$$\theta = \tan^{-1}(\frac{19.4}{28.66}) = 36.\theta 4°$$

روش دوم:

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PCOS\theta = 20^2 + 45^2 + 2\times 20\times 45\times COS138 = 32.97$$

تعادل یک ذره:

طبق قانون اول نیوتن در حالتی که تأثیر نیروها صفر است می گویند ذره در حـــال تعـادل است پس می توان گفت: وقتی برآیند کلیه نیروهای وارد بر یک ذره صفر باشد ذره در حال تعـــادل است.

$$R = \sum F = 0 \Rightarrow R = \sum(Fxi + Fyj) = 0 \text{ یا } (\sum Fx)i + (\sum Fy)j = 0$$

$$1)\sum Fx = 0 \Rightarrow -300 + 400\cos 60° + 200\sin 30° = -300 + 200 + 100 = 0$$

مثال :

در شکل روبرو کنش در کابلهای AB و AC را بدست آورید.

$$a = \tan^{-1}(\frac{690}{280}) = 73.74°$$

$$\sum Fy = 0 \Rightarrow (TABSin73.74) - 960 + 640Sin37° = 0 \Rightarrow 0.96TAB - 960 + 385.16 = 0 \Rightarrow$$

$$TAB = \frac{574.84}{0.96} = 598.79N$$

$$\sum Fx = 0 \Rightarrow TAC + 598.79\cos 73.74 - 640\cos 37 = 0 \Rightarrow TAC = 343.47N$$

نیروها در فضا :

مولفه عمودی $Fy = F\cos\theta y$

مولفه افقی $Fh = F\sin\theta y$

θy=زاویه نیروی F با محور Y

ϕ= زاویه صحفه قائم ABC با صفحه xy

$$Fx = Fh\cos\phi = F\sin\theta y\cos\phi$$

$$Fz = Fh\sin\phi = F\sin\theta y\sin\phi$$

طبق قانون فیثاغورث :

$$F^2 = (0A)^2 = (0B)^2 + (BA)^2 = F^2y + F^2h$$

$$F^2h = (0c)^2 = (OD)^2 + (DC)^2 = Fx^2 + Fz^2$$

$$F = \sqrt{F^2x + F^2y + F^2z}$$

$$\vec{F} = \vec{F}x + \vec{F}y + \vec{F}z \qquad (۱)$$

$$F = \sqrt{F^2x + F^2y + F^2z}$$

$$Fx = FCos\theta x$$

$$Fy = FCos\theta y$$

$$Fz = FCos\theta z$$

نیروی F را می توان با تعریف برداریکه های i و j و K و

که به ترتیب در امتداد محورهای x و y قرار دارند

به صورت زیر بیان کرد.

$$F = Fxi + Fyi + Fzk \qquad (3)$$

$$(1,2) \Rightarrow F = F(COSxi + \cos\theta_{yj} + Cos\theta_z^{\ k}) \qquad (4)$$

نتیجتاً می توان نیروی F را به صورت ضرب اسکالر F و بردار

$$\lambda = \cos\theta xi + \cos\theta yj + \cos\theta_z k \qquad (5)$$

بیان کرد که λ مولفه یک بردار F گویند

$$\lambda x = \cos\theta x, \qquad \lambda y = \cos\theta y, \qquad \lambda_z = \cos\theta_z \qquad (6)$$

$$\lambda^2 x + \lambda^2 y + \lambda^2 z = \lambda \qquad (7)$$

مجموع مربعات مولفه های یک بردار برابر با مربع بزرگی آن است.

$$(6),(7) \Rightarrow \cos^2\theta x + \cos^2\theta y + \cos^2\theta z = 1$$

$$\vec{F} = F.\lambda$$

$$(2) \Rightarrow F = \frac{Fx}{\cos\theta y} = \frac{Fy}{\cos\theta y} = \frac{Fz}{\cos\theta z}$$

پیدا کردن بردار واحد امتداد که از دو نقطه می گذرد:

$$B\left|\begin{array}{l} x_B \\ y_B \\ z_B \end{array}\right.$$

$$\vec{r}B/_B = A\vec{B} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

$$A\vec{B} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

$$\lambda_F = \frac{\vec{F}}{|F|}$$

مثال ۴:

دکل مخابراتی نشان داده در شکل زیر به جرم

120kgبوسیله سه کابل به زمین متصل شده است مطلوبست

محاسبه نیروهای کششی درکابلهای مذکور را.

$$A\begin{vmatrix}-3\\0\\-2\end{vmatrix}\quad B\begin{vmatrix}0\\0\\2\end{vmatrix}\quad C\begin{vmatrix}3\\0\\-2\end{vmatrix}\quad D\begin{vmatrix}0\\6\\0\end{vmatrix}$$

دیاگرم آزاد جسم

$$W = m.g = 120 \times 10 = 1200N$$

$$AD = (XD - XA)\vec{i} + (YD - YA)\vec{J} + (ZD - ZA)\vec{k}$$

$$\vec{AD} = 3\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$|AD| = \sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2} = 7$$

$$\vec{\lambda}AD = \frac{\vec{AD}}{|AD|} = \frac{3}{7}\vec{i} + \frac{6}{7}\vec{i} + \frac{2}{7}\vec{k}$$

$$\vec{BD} = 4\vec{j} - 2\vec{k}, |BD| = \sqrt{40}, \vec{\lambda}BD = \frac{\vec{BD}}{|BD|} = \frac{6}{\sqrt{40}}\vec{j} - \frac{2}{40}\vec{k}$$

$$\vec{CD} = -3\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}, |CD| = 7, \vec{\lambda}CD = -\frac{3}{7}\vec{i} + \frac{6}{7}\vec{j} + \frac{2}{7}\vec{k}$$

$$\vec{F}AD = F_{AD}.\vec{\lambda}AD = F_{AD}(\frac{3}{7}i + \frac{6}{7}j + \frac{2}{7}k)$$

$$\vec{F}CD = F_{CD} - \lambda_{CD} = F_{CD}(-\frac{3}{7}i + \frac{6}{7}j + \frac{2}{7}k)$$

$$\vec{F}BD = FBD.\lambda_{BD} = FBD(\frac{6}{\sqrt{40}}i - \frac{2}{\sqrt{40}}k)$$

$$\sum F = 0 \rightarrow \sum Fx = 0, \sum Fy = 0, \sum Fz = 0$$

$$(1)\frac{3}{7}FAD - \frac{3}{7}FCD = 0 \qquad (1) \Rightarrow FAD = FCD$$

$$(2)\frac{6}{7}FAD + 7FCD - 1200 = 0$$

فصل سوم:

اجسام صلب:

نیروهایی که به اجسام صلب وارد می شوند به دو دسته اند:

الف ـ نیروهای خارجی :نماینده تأثیر سایر اجسام بر روی جسم صلب هستند و این نیروهـا رفتار خارجی جسم صلب را توجیه می کنند.

ب ـ نیروهای داخلی: نیروهایی هستند که ذرات تشکیل دهنده جسم صلب را در کنار هم نگه مـی دارند.

ضرب بردارها:

الف ـ ضرب برداری دو بردار و ضرب خارجی

خواص حاصلضرب برداری دو بردار Q وP که یک بردار Uاست به قرار زیر است:

۱- بردار حاصلضرب Uبر صفحه Pو Qعمود می باشد که جهت آن با استفاده از قانون دست راسـت بدست می آید بدین صورت که چهار انگشت در امتداد بردار اول (بردار P) و جهت بسته شـدن انگشتان در جهت بردار دیگر بردار (Q) می باشد جهت انگشت شصت جهت بردار Uمی باشد.

۲- مقدار حاصلضرب برابر است با حاصلضرب مقادیر عددی Pو Qدر سینوس زاویه بین آندو

$$U = PQ\sin\theta \qquad \rightarrow \theta = 0 \rightarrow \sin\theta = 0 \rightarrow U = 0$$

$$U = 0 \leftarrow P = Q \qquad \rightarrow \theta = 180 \rightarrow \sin\theta = 0 \rightarrow U = 0$$

P و q موازی در راستای هم

۱- قانون جابجایی در مورد ضرب خارجی صادق نیست

زاویه بین pو Qدر جهت مثلثاتی باید باشد. $Q \times P = -(P \times Q)$

PQ×P= بر روی Qبیاید . $Q = Q \times P$بر روی Pبیاید.

۲- خاصیت توزیع پذیری در مورد ضرب خارجی صادق است.

$$P\times(Q_1+Q_2)=P\times Q_1+P\times Q_2$$

حاصلضرب برداری بر حسب مؤلفه های قائم

$$\vec{A}\times\vec{A}=0 \qquad i\times i=0 \qquad i\times j=k \qquad i\times k=j$$

$$j\times i=-k \qquad j\times j=0 \qquad j\times k=i$$

$$k\times i=j \qquad k\times j=-i \qquad k\times k=0$$

$$\vec{P}=(P_{xi}+P_{yi}+P_{zk}),\vec{Q}=(Q_{xi}+Q_{yj}+Q_{zk})$$

$$\vec{P}*\vec{Q}=(P_{xi}+P_{yj}+P_{zk})*(Q_{xi}+Q_{yj}+Q_{zk})$$

$$=P_x(Q_x i.i+Q_y i.j+Q_z i.k)=P_xQ_yk-P_xQ_zj$$

$$=P_y(Q_x j.i+Q_y j.j+Q_z j.k)=P_yQ_xk+Q_yQ_zi$$

$$=P_z(Q_x k.i+Q_{yi}k.j+Q_z.k.k)=P_zQ_x.xjP_zQ_x$$

$$\vec{P}*\vec{Q}=(P_yQ_z-P_zQ_y)i-(P_xQ_z-P_zQ_x)j+(P_xQ_Y-P_yQ_x)k$$

اگر به رابطه قبل نگاه کنیم که جمله های طرف راست آن نمـــاینده بسـط یـک دترمینان هست پس حاصلضرب (u) را می توانیم به صورت زیر بیان کنیم که راحت تر به خاطر سپرده شود.

$$u=\begin{vmatrix} i & j & k \\ p_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_Y & Q_z \end{vmatrix} \qquad =(pyQz-pzQy)i-(pxQz-pzQx)i+(P_xQ_y-P_yQ_z)^k$$

$$i(-j)^{1+2}=-j^3,(-k)^{1+3}=k$$

<u>ضرب دو عددی دو بردار و ضرب داخلی:</u>

مقصود ازضرب عددی دوبرابر $\vec{p}$ در بردار $\vec{a}$ که با هم زاویه θ ساخته انـد تعییـن عددی است که مقدار آن برابر $w = \vec{p} \times \vec{Q}$ باشد.

وقتی گفته می شود بردار Qرا روی Pتصویر کنید یعنی ضرب داخلی

$$U = \vec{A}.\vec{A} = A \times ACso\theta = A^2$$

از تعریف ضـرب داخلـی دو برابـر نتیجـه مـی شـود کـه بردارهـای pو Qدر صورتیکـه حاصلضرب داخلی شان برابر با صفر بعنوان متعامد می باشند. $P.Q = 0 \Rightarrow P \perp Q$

بعنوان مثال کار دو بردار هستند که بر هم عمودند(d,f)

i.i1=1	j.j=0	i.k=0
j.i=0	j.j=1	j-k=0
K.i1=0	k.j=0	k-k=1

حاصلضرب بردارهای یکه یا صفر است یا یک

$$\vec{P} = P_{xi} + P_{yj} + P_{xk} \quad \text{و} \quad \vec{Q} = Q_{xi} + Q_{yj} + Q_{zk}$$

$$\vec{P}.\vec{Q} = (P_{xi} + P_{yi} + P_{zk})(Q_{xi} + Q_{yj} + Q_{zk})$$

$$= (P_x Q_x i.i + P_x Q_y i.j + P_x Q_z i.k$$

$$+ (P_y Q_x j.i + P_y Q_y j.j + P_y Q_z j.k$$

$$+ (P_z Q_x k.i + P_z Q_y k.j + P_z Q_z k.k) = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z$$

تعیین زاویه بین دو بردار :

$$\vec{P}.\vec{Q} = PQ\cos\theta = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z \Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{P}.\vec{Q}}{PQ}$$

$$\cos\theta = \frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{PQ} = \frac{P_x}{PQ}.\frac{Q_x}{PQ} + \frac{P_y}{PQ}.\frac{Q_Y}{pQ} + \dots$$

$\frac{P_x}{PQ} = l_1 \qquad \frac{Q_x}{PQ} = l_1$

$\Rightarrow \cos\theta = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$

که در آن L و m و n کسینوس هاویهای (شیب) بردارها هستند. همچنین مشاهده مـی گردد که هر دو بار در صورتیکه کسینوس هادی آنها در رابطه زیر صدق کنند متصـــاهد می باشند. $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$

خواص ضرب داخلی بردارها :

۱- قانون جابجائی صادق است $\vec{P}.\vec{Q} = \vec{Q}.\vec{P}$

۲- قانون توزیع پذیری صادق است $\vec{P}.(\vec{Q} + \vec{R}) = \vec{P}.\vec{Q} + \vec{P}.\vec{R}$

مثال

دو بردار $\vec{A} = 10i + 20j + 3k$ و $\vec{B} = -10j + 12k$ مفروضند.

الف ـ حاصلضرب داخلی دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را محاسبه نمائید .

ب ـ زاویه بین دو بردار

ج) تصویر بردار $\vec{A}$ روی امتداد بردار $\vec{B}$

د ـ بردار $\vec{A}$ روی امتداد بردار $\vec{B}$

الف) $U - \vec{A}.\vec{B} = (10i + 20j + 3k)(-10j + 12k) = (10 \times 0) + (20)(-10) + (3)(12) = -164$

ب) $|A| = \sqrt{10^2 + 20^2 + 3^2} = 22.56 \qquad |B| = \sqrt{(-10)^2 + (12)^2} = 15.67$

$U = A.B\cos\theta \Rightarrow -164 = 22.56 \times 15.62\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{-164}{22.5 \times 15.62}$

$\theta = 117071° \rightarrow 1170710$

ج) $\vec{C} = A\cos \propto = 22.5\cos 117.71 = -10.46$

د) $\lambda = \frac{\vec{B}}{B} = -\frac{10j + 12k}{15.62} \vec{\lambda} = cn - 10.46(\frac{-10j + 12k}{15.62}) = 6.7j - 8k$

گشتاور یک نیرو حول نقطه :

فرض کنیم نیروی F بر یک جسم صلب اثر کند این نیرو با بردار نشان داده مـی شود.

مکان A را می شود با بردار r که نقطه ثابت مرجع (O) را به Aمتصل می کند مشـخص کرد که به آن بردار مکان A گویند.

حال می خواهیم گشتاور نیروی F را حول O به صورت برداری r و fتعریف کنیم.

$$MO = r \times f = rF \sin\theta = Fr \sin\theta = Fd$$

که d فاصله عمودی 0 تا خط اثر F می باشد. نیروی F علاوه بر آنکه در جسم تمایل بـه حرکت در امتداد خط اثر نیرو ایجاد می کند. همچنیـن تمـایل بـه چرخـش حـول هـر محوری که خط اثر نیرو را قطع نمی کند و با آن نیز موازی نمی باشد در جســم ایجـاد می کند. این گرایش را گشتاور M نیرو حول محور داده شده نامند.

در سیستم های یکالهای (SI) نیرو بر حسب نیوتن و فاصله بر حسب متر (m) بیان مـی شود، گشتاور نیرو بر حسب نیوتن ـ متر (N.M)بیان می شود.

قضیه وارینون و یا اصل گشتاور:

برای نیروهائی که در یک صفحه واقعند بدین صورت بیان می شود که گشتاور یک نیرو حول هر نقطه برابر حاصل جمع گشتاورهای مؤلفه های نیرو حول همان نقطه می باشد.

$$m_1 + m_2 = r \times F_1 + r \times F_2$$

$$m = r \times (F_1 + F_2)$$

مثال:

نیروی P=100N در امتداد قطر AB مربعی به اضلاع 200

میلیمتر اعمال شده است. مطلوب محاسبه مولفه P'

از نیروی P در امتداد OC با جهت مثبت از O به طرف C

کسینوس هادیهای بردار $\vec{OC}$:

$$O\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix} \qquad C\begin{vmatrix}0.2\\0.1\end{vmatrix} \qquad \vec{OC} = (0.2.0)i + (0.1-0)j$$

$$L = \frac{0.2}{\sqrt{0.04+0.01}} = \frac{0.2}{\sqrt{0.05}} = 0.894 \quad \text{و} \quad m = \frac{0.1}{\sqrt{0.05}} = 0.447$$

$$noc = 0.89\vec{4}i + 0.447j$$

کسینوس هادیهای بردار $\vec{AB}$:

$$A\begin{vmatrix}0.2\\0\end{vmatrix} \qquad B\begin{vmatrix}0\\0.2\end{vmatrix} \qquad \vec{AB} = (0-0.2)i + (0.2-0)j$$

$$a = \frac{-0.2}{\sqrt{0.04+0.04}} = \frac{-0.2}{\sqrt{0.08}} = -0.707, \qquad B = \frac{0.2}{\sqrt{0.08}} = 0.707$$

$$n\vec{AB} = (-0.707i + 0.707j)$$

$$FA\vec{B} = \vec{F}nA\vec{B} = 100\times) - 0.707i + 0.707j) = -7.07i + 7.07j$$

$$Fo\vec{c} = FA\vec{B}noc = (-7.07i + 7.07j) \times (0 - 894i + 0.447j)$$

$$= (-7.07 \times 0.894 + 7.07 \times 0.447) = -3.16N$$

مؤلفه های قائم گشتاور یک نیرو:

اگر نقطه B بر مبدأ منطبق باشد ⟵

$$mo = r \times F$$
$$r = xi + yj + zk$$
$$F = F_{xi} + F_{yj} + F_{zk}$$

با جایگذاری در رابطه moداریم:

$$mo = mxi + myj + mzk$$
$$mx = yFz - zFy$$
$$my = ZFx - xFz$$
$$mz = xFy - yFx$$

$$mB = r - \times F = (r_A - r_B) \times F$$

$$MF = \begin{vmatrix} i & j & k \\ xA/B & yA/B & ZA/B \\ Fx & Fy & Fz \end{vmatrix} \qquad mo = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & z & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$xA/B = XA - XB, \qquad YA/B = YA - YB, \qquad ZA/B = ZA - ZB$$

در مسایل دو بعدی Z,FZ=0

$$MO = (XFy - YFx)k$$

مثبت بودن moحاکی از این است که بردار moبه طرف خارج از صفحه کتاب است(تمایل به چرخاندن جسم حول oدر جهت پادساعتگرددارد)منفی بودن mo به طرف داخل صفحه کتاب است و تمایل به چرخاندن

جسم حول o در جهت ساعتگرد را دارد)

$$MB = rA/B \times F$$

$$MB = (XA - XB)Fy - (YA - YB)Fx$$

مثال :

مطلوبست گشت آور نیروی 260N حول نقطه A را

الف) بوسیله تجزیه نیروی محور X و Y وارد بر نقطه B

ب) بوسیله تجزیه نیروی محورهای X و Y در نقطه C

جواب

الف)

$$Fx = -\frac{12}{13}(260N) = 240n$$
$$Fy = \frac{5}{13}(260N) = 100N$$

b) ابتدا نیروی 260N رادر امتداد خط اثرش امتداد داده تا نقطه C وارد شود.

$$F_y = \frac{5}{13}260 = 240N$$
$$F_x = \frac{12}{13}260 = 100N$$
$$MA = F_y \times 3.3 + F_x \times 0 = 100 \times 3.3 = 330N.M$$

ویا

$$C\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix} \quad \text{و} \quad B\begin{vmatrix}4.8\\20\end{vmatrix} \quad \text{و} \quad A\begin{vmatrix}3.3\\0\end{vmatrix}$$

$$FBC = FBC - \lambda BC = 260 \times \frac{48i + 20j}{\sqrt{48^2 + 20^2} = 52} = 240i + 100j$$
$$r\, B/_A = (4.8 - 3.3)i + 2j = 1.5i + 2j$$
$$M_A = r \times F = (240i + 100j) \times (1.5i + 2j) = -240 \times 20k + 100 \times 1.5k = -330nom$$

ضرب سه گانه مختلط سه بردار:

حاصلضرب داخلی سه بردار:

ضرب سه گانه مختلط عبارت است از حاصلضرب داخلــی دو بـردار کـه یکـی از آندو توسط حاصلضرب خارجی دو بردار دیــگر بیــان شــده باشـد. ایــن حــاصلضرب کـه کمیتی عددی می باشد،توسط هر یک از روابط معادل زیر قابل بیان است:

$$(P \times Q).R = R.(P \times Q) = -R.(Q \times P)$$

در حقیقت رعایت پرانتزها در عبارت فوق الذکر لازم نمی باشد،چون نوشتن حـاصلضرب صورت $P \times (Q.R)$ بدون مفهوم است همچنین می توان ثابت کرد که :

$$P \times Q.R = P.Q \times R$$

که قانون جابجائی نقطه و ضربدر را در حاصلضرب سه بردار بدون اینکه تغییری در نتیجه عددی حاصلضرب حاصل شود مشخص می کند. بعلاوه می توان با استفاده از بسط دادن نشانداد که:

$$P \times e.R = \begin{vmatrix} P_x P_y P_z \\ Q_x Q_y Q_z \\ R_x R_y R_z \end{vmatrix}$$

حاصلضرب خارجی سه بردار:

عبارتست از حاصلضرب خارجی دو بردار که یکی از آندو خود توسط حـاصلضرب خارجی دو بردار دیگر بیان شده باشد حاصل یک بردار بــوده و توسـط یکـی از عبـارت معادل زیر بیان می شود.

$$(P \times Q) \times R = -R \times (P \times Q) = R \times (Q \times P)$$

در اینجا وجود پرانتز ضرورت دارد، زیرا درابطــه ای مـانند $P \times Q \times R$ بعلـت نامشـخص بودن اینکه کدام دو بردار در هم ضرب شده اند، مبهم است. مــی تـوان ثـابت کـرد کـه حاصلضرب سه گانه خارجی معادل عبارت زیر است:

$$(P \times Q) \times R = R.PQ - R.QP$$
$$P \times (Q \times R) = P.RQ - P.QR$$

<u>گشتاور یک نیرو حول یک محور</u>:

گشتاور نیروی F حول نقطه Oبرابر MO می باشد حال اگر محور OL را در نظر بگیریم گشتاور mol نیروی F حول محور OL را به صورت تصویر گشتاور mo بر روی olتعریف می کنیم.

اگر بردار یکه در امتداد ol را با λ نشان دهیم خواهیم داشت .

$$mol = \underbrace{\lambda - mo}_{\text{تصویر یک بردار بر روی یک محور}} = \lambda.\underbrace{(r \times F)}_{\text{گشتاور یک نیرو}}$$

که گشتاور نیروی F حول OL اسکالر است و از ضرب سه گانه مختلط F, r, λ بدســت مـی آید و با

$$MOL = \begin{vmatrix} \lambda X & \lambda y & \lambda z \\ X & Y & Z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$\lambda z, \lambda y, \lambda x$ = کسینوس هادیهای بردار ol

Z,Y,X= مختصات نقطه اثر نیروی F

Fz,Fy,Fx= مؤلفه های نیروی F

$$MBL = \lambda.MB = \lambda - (rA/B \times F)$$
$$rA/B = rA - rB$$

نماینده برداری است که از B به A رسم می شود.

$$MB = \begin{vmatrix} \lambda x & \lambda y & \lambda z \\ xA/B & yA/B & ZA/B \\ Fx & Fy & Fz \end{vmatrix}$$

مثال :

کابلی که انتهای فوقانی یک دیرک صلب در نقطه A را به

نقطه B متصل می کند تحت کشش T=10KN می باشد. مطلوبست

گشتاور Mz نیروی T حول محور Z ها که مار بر پایه دیرک می باشد.

حل:

$$A\begin{vmatrix} 0 \\ 15 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad B\begin{vmatrix} 12 \\ 0 \\ 9 \end{vmatrix}$$

بردار MO عمود بر صفحه ای است که T و نقطه O را در بر می گیرد.

$$\vec{r} = 15j(m)$$

$$n = \frac{\vec{AB}}{AB} = \frac{(12-0)i + (0-15)j + (9-0)^k}{\sqrt{12^2 + 15^2 + 9^2}} 0.566i - 0.707j + 0.424k$$

$$\vec{T} = 10n = 5.66i - 7.07j + 4024k$$

$$MO = \vec{r} \times \vec{T} = (15j) \times (5.66i - 7.07j + 4.24k)$$

$$= (-15 \times 5.66k + 15 \times 4.24i)$$

$$\mathrm{mz = mo.k = (ENglish).kz = -۸۴.۹kN.m}$$

علامت منفی معرف آن است که Mz در خلاف جهت محور zها عمل می کند.

کوپل یا زوج نیرو

گشتاور حاصل از دو نیروی مساوی ،موازی و مختلف الجـهت کـه در امتـداد یـک خـط واقع نیستند کوپل خوانده می شود.

$$m = r_A \times (F) + r_B \times (+F) = (r_A + r_B) \times F$$
$$r = (r_A + r_B)$$
$$m = r \times F$$
$$\mathrm{m} = \mathrm{rFsin}\,\theta = \mathrm{Fd}$$

که d فاصله عمودی میان خط اثرهای F و **F** است. جهت M از روی قاعده دست راست تعیین می شود.

کوپلهای معادل:

با تغییر یافتن مقادیر F و d یک کوپل مفروض مشروط بر آن که حاصلضرب آنها ثابت بماند ،تغییری در آن کوپل بوجود نخواهد آمد . بهمین ترتیب مقدار یک کوپل ثابت می ماند بدون توجه به اینکه زوج نیرو در کدامیک از صفحات موازی یکدیگر عمل می نماید. شکلهای زیر چهار حالات مختلف یک کوپل ثابت M را نشان می دهد.

جمع بستن کوپلها:

کوپل هائی را که در صفحات غیر موازی با یکدیگر عمل می کنند می توان با قانون عادی ترکیب بردارها جمع کرد. مثلاً در شکل (a) کوپل M_1 در اثر نیروهای F_1 و کوپل M_2 در اثر نیروهای F_2 در دو صفحه بصورت نشانداده شده عمل می کنند این

دو کوپل را می توان با حاصل جمع بردارشان (M) بصورتی که در شکل (b) نشانداده شده است تعویض کرد. این تعویض را می توان از طریق ایجاد کوپل M از نیروی F که ترکیب برداری F_2, F_1 می باشد تأئید کرد.

انتقال بردار نیرو:

یک کوپل مشخص و یک نیرو را که در صفحه کوپل واقع است را می توان به یک نیرو واحد تبدیل کرد.

برآیند مجموعه های نیرو:

در شکل نشان داده شده در زیر هر نیروی F را می توان بموازات خود به نقطه دلخواه O انتقال داد. مشروط بر اینکه اندازه نیرو ثابت مانده و یک کوپل Fd که در آن d بازوی گشتاور از o تا موقت ابتدائی F می باشد به آن اضافه گردد.

$$R = \sum F = F_1 + F_2 + \dots$$
$$M = \sum m = m_1 + m_2 + \dots = \sum (r \times F)$$

مجموعه نیروهای متوازی:

واضح است که برآیند نیروهای متوازی دارای مقداری برابر با حاصل جمع عددی مجموعه نیروها می باشد. موقعیت خط اثر برآیند با استفاده از قضیه وارینیون بدست می آید. چون گشتاور بر آیند حول هر محوری می باید برابر حاصل جمع گشتاوری مؤلفه های آن حول همان محور باشد.

$$R = F_1 + F_2 + F_3$$

$$XR = F_1 X_1 + F_2 X_3 + F_3 X_3$$
$$YR = F_1 Y_1 + F_2 Y_2 + F_3 Y_3$$

$$R = \sum F$$
$$X = \frac{\sum (Fx)}{R}$$
$$Y = \frac{\sum (Fy)}{R}$$

برآیند پیچ گوشتی دار:

در صورتی که بردار برآیند کوپل ها Mبموازات بـر آینـد نیروهـا باشـد. برآینـد حاصل برآیند پیچ گوشتی دار که در امتداد خط اثر منحصر به فردی عمـل مـی کنـد ، تبدیل کرد.

مثال : بر تیر مشبکی بوزن 40KN دو کابل که نیروی کششی هر کدام برابر با 18KN می باشد مطابق شکل اثر می کند. مطلوبست برآیند نیروی وارد بر تیر مشبک و نقطه تقاطع امتداد اثر برآیند با خط AB.

$$F_1 = F_2 = 15.59i - 9j$$

$$r = \sum F = 40j + 15.59i - 9j + 15 - 59j - 9j = 31 - 2i - 58 - 0j$$

$$R = \sqrt{(31.2)^2 + (580)^2} = 65.86KN$$

$$\theta = \tan^{-1}(\frac{58}{31.2}) = 61.7°$$

$$M_A^R = \sum r \times F = (8)i \times (-40)j + (39)j \times (15.59i - 9j) + (7i + 24j) \times (15.59i - 9j)$$

$$M_A^R = (-320 - 561 - 63 - 374)K = (-1.318KN)K$$

$$r \times R = M_A^R \Rightarrow (X)i \times (31.2i - 58.0j) = -1.318k$$

$$-58XK = -1.318k \rightarrow x = 22 - 7M$$

مثال :

سیستم کوپل ـ نیرو در نقطه A شامل نیروی F بمقدار ۲۵ نیوتن و کوپل MA به گشت آور 250NM می باشند این سیستم کوپل ـ نیرو را به سیستم کوپل ـ نـیروی معـادل در نقطه D جایگزین کند.

$$AB = 9i + 20j - 12k, \qquad AB = 25m$$

$$A\left|\begin{array}{l}0\\0\\12\end{array}\right. \qquad B\left|\begin{array}{l}9\\20\\0\end{array}\right. \qquad C\left|\begin{array}{l}9\\0\\0\end{array}\right. \qquad D\left|\begin{array}{l}12\\6\\0\end{array}\right. \quad F = 9i + 20j - 12k, \qquad F = 25N$$

$$AC = 9i - 12K, \qquad AC = 15M$$

$$M_A = 150i - 200k, \qquad MA = 250N.M$$

$$M_D = M_A + S \times F$$

$$S = \vec{DA} = 12i - 6j + 12k$$

$$MD = MA + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 12 & -6 & 12 \\ 9 & +20 & -12 \end{vmatrix} = MA + (+72 - 240)i + (108 - 144)j + (-240 + 54)k$$

کوپل های نیروی سیستم در نقطه D

$$MD = (1500i - 200k) - 168i - 36j - 186k$$

$$\begin{cases} MD = -18i - 36j - 386k \\ F = 9i + 20j - 12k \end{cases}$$

فصل چهارم

تعادل اجسام صلب :

مفهوم مفهومی تعادل و یا سکون آنست که ذره و یا جسم مادی حرکتی نداشته باشد لذا وقتی که نیروهای خارجی یک سیستم معادل با صفر تشکیل می دهند می

گویند که جشم صلب در حال تعادل است. بنا براین شرط لازم و کافی برای تعادل یـک جسم صلب به صورت زیر نوشته می شود.

$$\sum F = 0, \qquad M_0(r \times F) = 0$$
$$\sum Fx = 0 \qquad \sum \mathrm{Fy} = o \qquad \sum Fz = 0$$
$$\sum Mx = 0 \qquad \sum \mathrm{my} = o \qquad \sum mz = 0$$

نمودار جسم آزاد:

نمودارهای جسم آزاد را در فصول قبل به کرات به کار بردیم. به خـاطر اهمیـت این نمودارها به طور خلاصه دروش ترسیم را در زیر می آوریم .

۱-جسم آزاد منتخب را به طور مشخص تعیین می کنیم و پس ایــن جســم را از بیـن تمام اجسام دیگر جدا می کنیم و بعد طرح کلی جدا شده را ترسیم می کنیم .

۲-همه نیروهای خارجی را روی نمودار جســم آزاد نشـان مـی دهیـم بـه صورتـی کـه بزرگی و راستای نیروهای خارجی مشخص باشد.

۳-نیروهای خارجی مجهول که معمولاً عکس العملهائی هســتند کـه اجسـام دیـگر بـا مخالفت با حرکت جسم آزاد از خود نشان می دهند را بر روی جسم آزاد نشان مــی دهیم.

نیروهای اتصالی و تکیه گاهی

نوع تکیه گاه	اثر بر روی جزء منفصل شده	تعداد مجهولات
۱- تکیه گاه غلتکی	تکیه گاههای غلتکی ،چرخی، ساچمه ای و سایر انواع که در شکل نشان داده شده است نیروئی فشاری و عمود بر سطح تماس را انتقال می دهند. *	۱
۲- اتصال مفصلی با خار مغزی	یک اتصال مفصلی که آزادی گردش داشته باشد می تواند نیروئی در هر امتداد و جهت در صفحه عمود بر محور خار را انتقال دهد لولائی که آزادی گردش نداشته باشد می تواند تحت تأثیر یک کوپل نیز باشد. *	۲
۳- اتصال گیردار	یک اتصال گیر می تواند نیروئی محوری Fو نیروئی (برشی) VC و کوپل M که در مقابل چرخش مقاومت می کند را تحمل کند. *	۳
۴- کابل، قفسه ،زنجیر و یا ریسمان قابل انعطاف پذیر	نیروئی که توسط یک کابل انعطاف پذیر اعمال می شود. همیشه بصورت یک نیروی کششی در جهت گریز از جسم و در امتداد مماس بر کابل می باشد. *	۱

نوع تکیه گاه	اثر بر روی جزء منفصل شده	تعداد
سطوح صیقلی	نیروی تماس همواره فشاری است و عمود بـــر ســطح تماس *	۱
سطوح زبر	سطوح زبر قابلیت تحمل یک مولفه مماس نیرو یعنی F (نیروی اصطحکاک)از برآیند نــیروی تمــاس R را نیز علاوه بر مولفه عمودی Nدارا می باشد. *	۲
اتصال ساچمه ای	یک اتصال ساچمه ای نیروئی رادر هر جـــهت تحمـل می نماید. یک اتصال جوش شده ساچمــه ای بعـلاوه یک کوپل را نیز تحمل می کند. *	۳
عمل فنر	نیروی وارد بر فنر در صورتیکه کشیده شـود کششــی و در صورتیکه فشرده شود فشاری اســت. بـرای یـک فنر ارتجاعی با الا ستیسیته خطی ،سختی kعبــارت است از نیروی لازم طول آن به اندازه واحد *	۱

نمونه هائی از ترسیم آزاد:

نمودار جسم آزاد	مجموعه سازه
	۱-خرپای سطح
	۲- دکل فضائی
	۳-تیر
	۴-یک مجموعه سازه صلب متشکل از چند عضو

عکس العمل های نا معین از لحاظ استاتیکی ـ تیرهای ناقص

=R مجهولات   =3 معادلات

$R > 3 \Rightarrow$ نامعین $R = 4 > 3 \to n = 4 - 3 = 1$

$R < 3 \Rightarrow$ ناپایدار (مقید ناقص)

$R = 3 \Rightarrow$ معین $R = 2 > 3$

$R = 3 = \to n = 3 - 3 = 0$

در حالت سه بعدی تعداد معادلات ۶ عدد است که اگر کمتر از ۶ مجهول داشته باشیم استحکام ناقص است و اگر مجهولات بیشتر از ۶ عدد باشد استحکام نامعین است اگر تعداد مجهولات ۶عدد یعنی مساوی معادلات باشد معین است.

$R = 6 \to$ معین

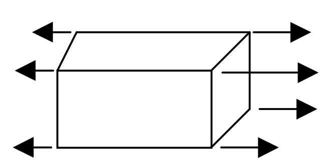
$R > 6 \to$ نا معین

$R < 6 \to$ ناپایدار

در صورتی که مجهولات شش عدد باشد ولی همه موازی باشند یعنی در صفحه قرار دارد و این کابل قابل قبول نیست .

<u>برای یک جسم صلب دو بعدی :</u>

عکس العملهای تکیه گاهی می توانند بسته به نوع تکیه گاه یک یا دو ویا سه مجهولی باشند.



لذا برای حل معادلات زیررا می نویسیم . اما چند جور دستگاه معادله وجود دارد

۱-سه معادله تعادل

$$\sum Fx = 0, \sum MA = 0, \sum MB = 0, \sum FX = 0, \sum Fy = 0. \sum MO = 0$$

مثال:

تیر یکنواخت ۹متری دارای جرمی برابر ۲۰۰کیلو گرم می باشد.

و در صفحه قائم توسط نیروهای موازی بصورت نشانداده شده

در شکل بازگذاری شده است. عکس العمل های تکیه گاههای مفصلی

متحرک در A و B را محاسبه کنید.

$$W = m.g = 200 \times 10 = 2000N = 2KN$$

$$+\sum MA = 0 \rightarrow$$

$$-By \times 3 + 2 \times 3.5 - 2 \times 6 + 1 \times 8 - 3 \times 5 = 0 \rightarrow By = 6KN$$

$$\xrightarrow{+} \sum Fx = 0 \rightarrow Ax = 0$$

$$\xrightarrow{+} \sum FY = 0 \rightarrow -AY + 6 - 2 - 3 + 2 - 1 = 0$$

$$Cont = \sum mb = 0 \rightarrow -2 \times 3 + 2 \times 0 - 5 + 3 \times 2 - 2 \times 3 + 1 \times 5 = 0$$

$0.k$

مثال :

تیر تلفنی به وزن 300Lb برای نگهداری در انتهای سیم بکار برده شده . کشش در سیم

چپ 80 پوند و امتداد آن با افق زاویه $10°$ می سازد (a) هر گاه کشش سیم T_2 صفر

باشند، معین کنید عکس العمل در نقطه A را (b) بیشترین و کمـــترین مقـدار T_2 را هرگاه مقدار کوپل وارد بر نقطه A بیش از 400L b-ft نباشد.

$aT_2 = 0$

$\xrightarrow{+} \sum Fx = 0Ax - 80\cos 10° = 0 \to Ax = 78.8Lb \to$

$+\uparrow \sum Fy = 0AY - 300 - 80\sin 10° = 0 \to AY = 314Lb \uparrow$

$\sum MA = 0MA + 80\cos 10° \times (16Ft) = 0$

$b)T2 \neq 0, MA = 2600Lb.FT$

$MA = -1260Lb.FT$

$+MA = 0.(80\cos 10°)(16ft) - (T_2 \cos 20°)(16FT) + Ma = 0$

$1260 - T_2 \cos 20° \times 16 \pm 600Lb.Ft = 0$

$T_2 = 43.9Lb, T_2 = 1273.7Lb$

گشت آور حول نقطه A کوچکتر از +600Lb.ft است وقتی که

$43.9Lb \leq T_2$

معادلات تعادل برای یک جسم صلب دوبعدی :

$\xrightarrow{+} \sum Fx = 0 \Rightarrow Ax = 0$

$+\uparrow \sum Fy = 0 \Rightarrow Ay + P/2 - P = 0 \Rightarrow Ay = P/2 \uparrow$

$\sum MA = 0 \Rightarrow By \times L - P \times L/2 = \upsilon \Rightarrow B/2 = P/2 \uparrow$

عکس العملهای تکیه گاهی می توانند بسته به نوع تکیه گاه ـ یک یا دو و یا سه مجهولی باشند لذا برای حل معادلات را بصورت زیر می نویسیم.

۱- سه معادله تعادل:

$$\sum Fx = o, \qquad \sum Fy = 0, \qquad \sum MA = 0$$
$$Ax = 0, \qquad ay + p/2 - p = 0 + BY \times L - \ P \times L/2 = 0 \rightarrow$$

$$AY = P/2 \uparrow \qquad BY = P/2 \uparrow$$

اما بغیر از این حالت چند جور معادله تعادل دیگر نیز می توان نوشت .

$$\sum FX = 0, \sum MA = 0, \sum MB = 0$$

مثال:

صفحه ای همگن به ابعاد۵×۸ بوزن 270N در

نقطه A بر روی کاسه ساچمه ای متکی بوده و

بوسیله دو کابل نگهداری می شود، تعیین کنید

کشش در هر کابل و عکس العمل در نقطه A را.

$$A\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix} \quad B\begin{vmatrix}8\\0\\0\end{vmatrix} \quad C\begin{vmatrix}0\\-5\\0\end{vmatrix} \quad D\begin{vmatrix}8\\-5\\0\end{vmatrix} \quad E\begin{vmatrix}6\\0\\0\end{vmatrix} \quad F\begin{vmatrix}0\\3\\2\end{vmatrix} \quad G\begin{vmatrix}0\\4\\-8\end{vmatrix}$$

$$T_{EF} = T_{EF}(-\frac{6}{7}i + \frac{3}{7}j + \frac{2}{7}k)$$

$$T_{BC} = T_{BG}(-\frac{8}{12}i + \frac{4}{12}j - \frac{8}{12}k) = T_{BG}(-\frac{2}{3}i + \frac{1}{3}j - \frac{2}{3}k)$$

$$\uparrow + \sum MA = 0 \rightarrow (4i) \times (-270j) + (6i) \times (-\frac{6}{7}i + \frac{3}{7}j + \frac{2}{7}K)T_{EF}$$

$$+ (8i) \times (-\frac{2}{3}i + \frac{1}{3}j - \frac{2}{3}k)T_{BG} = 0$$

$$\Rightarrow -1080K + \frac{18}{7}T_{EF}K - \frac{12}{7}T_{EF}J + \frac{8}{3}T_{BG}K + \frac{16}{3}T_{BG}J = 0$$

$$-\frac{12}{7}T_{EF} + \frac{16}{3}F_{BG} = 0$$

$$T_{EF} = 315N$$

$$T_{EF} = 101.3N$$

$$\frac{18}{7}T_{EF} + \frac{8}{3}T +_{BG} - 1080 = 0$$

$$\sum F = 0, \ \ A + T_{EF} + T_{BG} - 270j = 0$$

$$A_{xi} + a_{YI} + A_{ZK} + 315(-\frac{6}{7}i + \frac{3}{7}j + \frac{2}{7}k)$$

$$+(101.3)(-\frac{2}{3}i + \frac{1}{3}j - 2/3k) - 270j = 0$$

$$AX - \frac{6}{7} \times 315 - \frac{2}{3}(101.3)]i + [AY + \frac{3}{7} - 315 + \frac{1}{3} \times 101.3 - 270]j$$

$$+[AZ + \frac{2}{7}(315) - \frac{2}{3}(101.3)]K = 0$$

$$Ax - 270 - 67.5 = 0, \ \ Ax = 338LbN$$

$$Ay + 135 + 33.8 - 270 = 0, \ \ Ay = 101.2N$$

$$Az + 90 - 67.5 = 0, \ \ Az = -22.5N$$

مثال :

معین کنید مولفه های نیروی تکیه گاهی وارد بر قاب مشبک زیر

$$+\sum MA = 0$$

$$-600 \times 3 - 300 \times 9 + GY \times 9 = 0$$

$$GY = 500N \uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0$$

$$GY + AY = 0 \rightarrow AY = -500 \rightarrow AY = 500N \downarrow$$

cont:

$$+\sum MC = 0$$

$$300 \times 9 + 600 \times 3.500 \times 9 = 0.K$$

نیروهای گسترده : مرکزهای هندسی و مرکزهای گرانی

کرانیگاه جسم دو بعدی

گرانیگاه یک صفحه:

یک ورق تخت افقی را در نظر مـی گیریـم ایـن ورق را مـی توانیـم بـه ۸ جـزء کوچک تقسیم کنیم مختصات جزء اول را با X و Y و مختصات جزء دوم را با X_2 و Y_2 نشان می دهیم و به همین ترتیب نیروهای ناشی از اثر زمین بر اجزای ورق را به ترتیب با

$\Delta W_1, \Delta W_2, \Delta W_n$ نشان می دهیم.

$$\rightarrow W = \Delta w_1 + \Delta w_2 + \ldots + \Delta w_n$$

$$\sum MY : \bar{X}W = \sum X\Delta W, \quad \sum Mx : \bar{Y}W = \sum YW$$

$$\sum MY : \bar{X}W = X_1\Delta W_1 + X_2\Delta W_2 + \ldots + X_n\Delta W_n$$

$$\sum Mx : \quad \bar{y}w = Y_1\Delta W_1 + Y_2\Delta W_2 + \ldots + Y_n\Delta W_n$$

اگر تعداداجزاء افزایش یابد و اندازه هر جزء را کاهش بدهیـم عبارتـهای زیـر بـه دسـت می آید.

$$W = \int dw, \quad \bar{X}W = \int xdw, \quad \bar{y}w = \int ydw$$

گرانیگاه یک سیم :

$$\sum my = \bar{x}w = \sum x\Delta w$$

$$\sum mx, \bar{y}w = \sum y\Delta w$$

مرکزهای هندسی سطوح و خطوط

$$\sum my : \bar{x}A = X_1\Delta A_1 + X_2\Delta A_2 + \ldots + X_n\Delta_n$$

$$\sum mx : \bar{y}A = Y_1\Delta A_1 + Y_2\Delta A_2 + \ldots + Y_n\Delta_n$$

$$\bar{x}A = \int XdA \; \bar{Y}A = \int ydA$$

$$\bar{X}L = \int XdL \qquad \bar{Y}L = \int YdL$$

گشتاورهای اول سطوح و خطوط

$$Q_Y = \int XdA \qquad Q_X = \int YdA$$

$$Q_Y = \bar{X}A \qquad Q_X = \bar{Y}A$$

وقتی سطحی مانند A یا خطی مانند L دارای یک محور تقارن باشد، گشتاور اول آن نسبت به آن محور برابر صفر می باشد و مرکـز هندسـی اش بـر روی آن محـور قرار دارد

اگر سطحی یا خطی دارای دو محور تقارن باشد مرکز هندسی اش (C) بـاید در محـل تلاقی دو محور تقارن قرار داشته باشد.

سطح A را نسبت به مرکز O متقارن می گویند اگر متناظر با هر جــزء سـطح da بـه مختصات x و y یک جزء سطح dA' یه مختصات (X) و (Y)وجــود داشــته باشـد در اینصورت QX=QY=0

نام شکل	شکل	$\bar{X}$	$\bar{Y}$	مساحت
مثلث	*	$\frac{a+b}{3}$ *	$\frac{h}{3}$ *	$\frac{6h}{2}$ *
ربع دایره	*	$4r/3\pi$	$4r/3\pi$	$\pi r^2/4$
نیم دایره		0	$4r/3\pi$	$\pi r^2/\pi$
مستطیل	*	$b/2$ *	$h/2$ *	b.h *
نیم سهمی	*	$3a/8$	$2h/5$	$2a^h/3$
سهمی		0	$3h/5$	$4a^h/3$
اسپاندرال سهمی	*	$3a/4$	$3h/10$	$a^h/3$

مثال :

مختصات مرکز سطحی صفحه زیر را تعیین کنید:

سطح	A	$\bar{X}$	$\bar{Y}$	$\bar{X}A$	$\bar{Y}A$
I	8	0.5	4	4	32
II	4	3	0.5	12	2
$\sum$	12	_	-	16	34

$$\bar{X}\sum A=\sum \bar{X}A \rightarrow \bar{X})(12)=16 \rightarrow \bar{X}=1.33m$$

$$\bar{Y}\sum A=\sum \bar{Y}A \rightarrow \bar{Y}(12)=34 \rightarrow \bar{Y}=2.83m$$

مثال:

مختصات مرکز سطحی صفحه زیر را تعیین کنید.

بعلت تقارن $\bar{X}=0$

سطح	A	$\bar{Y}$	$\bar{Y}A$
I	56.06	2.54	144
II	48	-2	-96
$\sum$	104.6		48

$$\bar{Y}\sum A=\sum \bar{Y}A$$

$$\bar{Y}(104.6) \rightarrow: 48$$

$$\bar{Y}=0.459m$$

مثال :

بعلت تقارن $\bar{x}=0$

سطح	A	$\bar{Y}$	$\bar{y}A$
I	60*15=900	7.5	6750
II	45*45=202*5	$(54/_{2}+15)=37.5$	75937.5
III	-25*35=-875	$(35/_{2}+15)=32.5$	-28437.5
$\sum$			24250

$$\bar{Y}\sum A=\sum YA \rightarrow \bar{Y}*2050=5450 \rightarrow Y=26.46CM$$

مثال :

10CM 40CM 10CM

مثال بعلت تقارن $\bar{X}=0$

سطح	A	$\bar{Y}$	$\bar{y}A$
I	60*30=1800	15	27000
II	$-2*10*\frac{12}{2}=-100$	$\frac{10}{3}=3.33$	-333.3
III	15*30=450	15+30=45	20250
IV	80*10=800	5+60=65	52000
$\sum$	2950		98916.7

$$\bar{Y}\sum A=\sum YA \Rightarrow \bar{Y}*2950=98916.7 \quad \bar{Y}=33.53Cm$$

$$\bar{y}=\frac{\sum YA}{\sum A}$$

تعیین مرکزهای هندسی به روش انتگرال گیری:

مرکز سطح مثلثی شکل:

موفقیت مرکز مساحت مثلثی بقاعده b را به ارتفاع hرا مشخص کنید.

محورها Xها منطبق بر قاعده مثلث فرض می شود و نوار متشکله

مساحت بصورت xdy فرض می شود. با استفاده از روابط مثلثهای

مشابه داریم: $\frac{x}{(h-y)}=\frac{b}{h}\Rightarrow$

$$A\bar{Y}=\int YdA \Rightarrow b\frac{h}{2}\bar{y}=\int_0^h Y\frac{b(h-y)}{h}dy=\frac{bh^2}{6}$$

$$\Rightarrow \bar{y}=\frac{h}{3}$$

یک عنصر قائم به مساحت Da=Ydx مطابق شکل سمت چپ نشان داده شـده در بـالا انتخاب می شود. مختصات xمرکز به صورت زیر بدست می آید.

$$A\bar{X}=\int XdA \Rightarrow \bar{X}\int_0^a ydx=\int_0^a xydx$$

با جانشین کردن $Y=(x/k)^{1/3}$ و $k=(a/b)^3$ و انتگرال گیری خواهیم داشت:

$$3\frac{ad}{4}\bar{\times}\frac{a^2b}{7},\ \ \bar{X}=A/_{\Lambda}{}^{a}$$

$$A\bar{Y}=\int YdA \Rightarrow 3\frac{ab}{4}\bar{Y}=\int_0^a(\frac{y}{2})ydx$$

با جایگزینی $y=b(\frac{x}{a})\,1/_{2}$ و انتگرال گیری :

از عنصر افقی نشان داده شده در قسمت سمت راست شکل می توان بجای عنصــر قـائم استفاده نمود. در محاسبه $\int xdA$ مختصات X مرکز عنصر باید برای X'' بکار گرفته شود این فاصله برابر است با $\frac{(a+x)}{2} = X + \frac{(a-x)}{2}$ در نتیجه :

$$A\overline{X} = \int xdA \Rightarrow \overline{X}\int_0^b (a - x \_ dy = \int_0^b (\frac{a+x}{2})(\tilde{\ } - x)dy$$

مقدار $\overline{y}$ از معادله زیر بدست می آید.

$$A\overline{Y} = \int YdA \Rightarrow Y\int_0^b (a-x)dy = \int_0^b y(a-x)dy$$

بارها گسترده روی تیرها:

بار گسترده وارد بر تیر حسب N/M بیان می گردد لذا بزرگی وارد بر یک جـزء تــیر بـه طول dx برابر است با

$$W = \int_0^L WdX\,(1) \qquad wdx = dA(2) \qquad (2),(1) \Rightarrow W = \int dA = A$$

حال باید ببینیم که این بار متمرکز W به کجای تیر و برآیند بارهای گســترده C وارد می گردد برای بدست آوردن نقطه اثر P بار معادل متمرکز W گشتاور W حول نقطـه O را برابر با مجموع گشتاورهای بارهای جزئی dw حول نقطه o قرار می دهیم:

$$(OP)W = \int xdW \qquad (1\ )$$

$$dw = wdx = dA, \quad W = A \qquad (2\ )$$

$$(1),(2) \Rightarrow (op)A = \int_0^L XdA \Rightarrow \overline{X}A = \int_0^L XdA$$

بنابراین به جای بارگسترده وارد بر تیر می شود یک بار متمرکز قرار دارد،بزرگی این بـار متمرکز برابر با سطح زیر منحنی بار است و خط اثرش از مرکز هندسی آن سطح عبـــور می کند.

مثال :

مطلوبست محاسبه عکس العمل های تکیه گاهی تیرهای زیر را ؟

$$+\sum MA = 0 \rightarrow BY \times L - WL \times \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow BY = W\, {}^{L}\!/\!{}_{L} \uparrow$$

$$\rightarrow \sum Fx = 0^{+} \rightarrow Ax = 0$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \rightarrow AY + W\frac{1}{2} - W = 0 \rightarrow \bar{A}Y = W\frac{1}{2} \uparrow$$

$$+\downarrow COnt : +\sum MB = 0 \Rightarrow W\frac{L}{2} \times L \times -WL \times \frac{L}{2} = 0.K$$

$$+)\sum \ MA = 0$$

$$+16 * 2 - MA = 0 \rightarrow MA = 32N.m$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \rightarrow AY - 16 = 0 \rightarrow AY = 16N \uparrow$$

$$+\sum Fx = 0 \rightarrow Ax = 0$$

$$+\downarrow \sum MA = 0 \Rightarrow -2 * 3 - 1 * \frac{2}{3} * 2 - 1.5 * 6 + BY * 5 = 0$$

$$BY = 3.27KN \uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \rightarrow AY + 3.27 - 1 - 2 - 1.5 = 0 \Rightarrow AY = 1.23KN$$

Cont:0

$$+\sum MB = 0$$

$$-1.23 * Y + 1 * 4.3 + 2 * 2 - 1.5 * 1 = 010.K$$

فصل ششم

تحلیل سازه ها:

در فصول گذشته با تعادل یک جسم صلب تنها سرو کار داشتیم که نقطه نیروهای خارجی وارد بر جسم صلب را در بر می گرفتند . حالا می خواهیم مسئله های را در نظر بگیریم که با تعادل سازه های متشکل از چند قسمت متصل به هم سروکار دارند. در این مسئله ها نه تنها باید نیروهای خارجی وارد بر سازه را تعیین کرد بلکه باید نیروهایی را هم که قسمتهای مختلف سازه را به هم متصل نگه می دارند بدست آورد. اگر کل سازه را در نظر بگیریم ، این نیروهای داخلی می نامند.

انواع سازه های مهندسی مورد بررسی

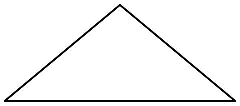
۱- خرپاها　　　۲- قابها　　　۳- ماشینها

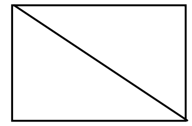
انواع خرپاها:

۱-خرپاهای ساده : سازه هائی که از زیر مجموعه بنیادی مثلثی تشکیل شده اند مجموعه های مفصلی و یا خرپاهای ساده خوانده می شوند.

۲-خرپاهای مرکب: از تشکیل یکسری خرپای ساده که بوسیله یکسری اعضاء به یکدیگر متصل گردیده اند.

۳-خرپاهای مبهم (پیچیده): خرپاهائی که نه ساده می باشند ونه مرکب.





معادل ت مجهولا

$$\begin{aligned} &1) M + R < 2J \rightarrow D = (M + R) - 2j \\ &2) M + R < 2J \rightarrow N = 0 \\ &3) M + R > 2J \rightarrow N < 0 \end{aligned}$$

نا معین از نظر داخل

ناپایدار

$$M + 3 < 2j \qquad 4 + 3 < 8$$

$$M = 4 \quad R = 3 \quad j = 4$$

$$M = 3 \quad j = 3 \quad R = 3 \quad M + 3 < 2j$$

روشهای آنالیز خرپاها:

۱-روش مفصل و تعادل مفاصل

در میله های خرپا در یک عضو یا نیروی کششی وجود دارد و یا نیروی فشاری، بعبـارت دیگر فقط یک نیروی در امتداد میله وجود داردو میله لنگر را تحمل نمی کند.

$$M = 9, J = 6, R = 3 \Rightarrow M + 3 = 2j \Rightarrow 9 + 3 = 12 = 2 \times 6 = 12$$

معین داخلی را از لحاظ خارجی نیز معین است.

$$\begin{cases} \rightarrow \sum Fx = 0^{+} \Rightarrow Ax = 0 \\ +(MA = 0 \Rightarrow -10 \times 5 + (Y \times 10 = 0 \Rightarrow CY = 5N \uparrow \\ +\uparrow FY = 0 \Rightarrow AY + 5 - 10 = 0 \Rightarrow [AY = 5N \uparrow \\ cont := (\sum MB = 0 \Rightarrow 5 \times 10 - 10 \times 5 = 0, 0.K \end{cases}$$

تعادل برقرار است

فشاری $+\uparrow \sum FY = 0 \rightarrow -AF \sin 60° + 5 = 0 \Rightarrow AF = 5.77N$ گروهA

کششی $+\sum FX = 0 \rightarrow -FA \sin 60° + ab = 0 \Rightarrow AB = 2.88N$ گروه F

کششی

$$+\uparrow \sum FY = 0 \rightarrow 5.77 \sin 60° - FB \sin 60° = 0 \Rightarrow FB = 5.77N$$

$$\xrightarrow{+} \sum FY = 0 \rightarrow FA \sin 60° - FB \sin 60° - FB = 0 \Rightarrow$$

فشاری $2 \times 5.77 \times \sin 60° - EF = 0 \Rightarrow EF = 10N$

فشاری $+\uparrow \sum FY = 0 \rightarrow FB - 10 = 0 \Rightarrow EB = 10N$ گروه E

فشاری $\xrightarrow{+}\sum FX=0\rightarrow -ED+FE=0\Rightarrow -ED+10=0\Rightarrow ED=10N$

$$+\rightarrow\sum FY=0\rightarrow BF\sin 60°+BD\sin 60°-BE=0\Rightarrow$$

گروه B

$$5-77*0.87+BD*0.87-10=0\Rightarrow$$

کششی $BD=5.77N$

$$\xrightarrow{+}\sum FX=0\ ₽\ BF\cos 60°+BC\cos 60°+BC-BA=0$$

$$-5.77Cos60°+5.77Cos60°+BC-2.82=0\Rightarrow$$

$$BC=2.88N$$

مثال:

عکس العمل ها:

$$+\uparrow\sum FY=0\Rightarrow -Ax-150=0\rightarrow Ax=150N\uparrow$$

کششی $+\uparrow\sum FY=0\rightarrow 5(5-3)*3/٤-156=0\Rightarrow F(5-3)=250N$

Chemical Engineering
che-eng-pnu.blogfa.com