ریاضی عمومی ۲

ریاضی ۲

فصل اول

هندسه تحلیلی و جبر خطی

تعریف: اگر A ماتریس $n \times n$ باشد و ماتریس $B_{n\times n}$ موجود باشد که $AB = BA = I$
می‌گوئیم A وارون پذیر است و $B = A^{-1}$

قضیه: A وارون‌پذیر است $\Leftrightarrow$ $\det(A) = |A| \neq 0$ فرمول محاسبه
A^{-1} عبارت است از $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$

$[N_{ij}]_{n\times n}$ = N ماتریس همسازه

$N_{ij} = (-1)^{i+j}$ (دترمینان ماتریس حاصل از حذف سطر i و ستون j ام A)

$A^* = adj(A) = N^t$ ماتریس الحاق ترانهاده

نحوه محاسبه $\det A$ (روش بسط دترمینان)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

بسط سطر اول

$$|A| = a_{11} \times N_{11} + a_{12} \times N_{12} + \cdots + a_{1n} \times N_{1n}$$

$\frac{11}{96}$ $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ عضو سطر سوم و ستون دوم A^{-1} را بیابید؟

$$(A^{-1})_{3,2}=\frac{A^{*}_{3,2}}{|A|}=\frac{N_{2,3}}{|A|}=\frac{(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{-3}=\frac{-5}{-3}=\frac{5}{3}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}=\underbrace{2(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}_{-6}+\underbrace{3(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}_{+3}=-6+3=-3$$

روش دیگر $|A|$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}\xrightarrow{r_3-2r_1}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -4 \end{vmatrix}\xrightarrow{r_3-\frac{5}{2}r_2}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix}=1\times 2\times -\frac{3}{2}=-3$$

در ماتریس های بالا مثلثی یا پایین مثلثی دترمینان برابر ضرب اعضای قطر اصلی می باشد

$\frac{27}{34}$ مساحت مثلث به رئوس زیر را بیابید

$A(0,0,0)$

$B(1,0,2)$, $C(2,-2,0)$

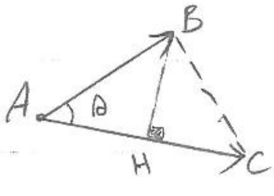
$\overrightarrow{AB}=B-A=(1,0,2)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC}=C-A=(2,-2,0)$

$\vec{i}=(1,0,0)$ $\qquad$ $\vec{j}=(0,1,0)$ $\qquad$ $\vec{k}=(0,0,1)$

ضرب خارجی

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}=(4)i-(-4)j+(-2)k=4i+4j-2k$$

$=(4,4,-2)$



اندازه بردار $|AB\times AC|=\sqrt{4^2+4^2+(-2)^2}=\sqrt{36}=6$

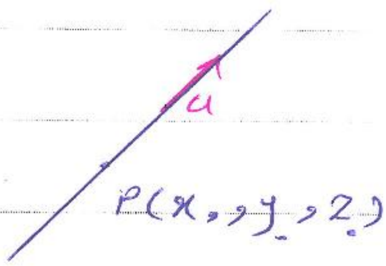
$$\text{مساحت مثلث}=\frac{1}{2}|BH||AC|=\frac{1}{2}\underbrace{|AB||AC|\sin\theta}_{|AB\times AC|}=\frac{1}{2}|AB\times AC|=\frac{6}{2}=3$$

نکته: مهمترین ویژگی ضرب خارجی دو بردار این است که هر دو بردار تشکیل دهنده عمود بر آن می باشند

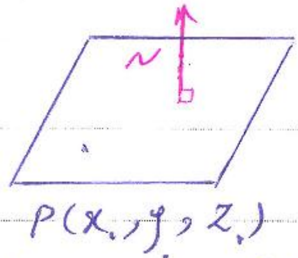
معادله خط و صفحه

$\vec{u}=(a,b,c)$ بردار هادی

معادله خط $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}=t$



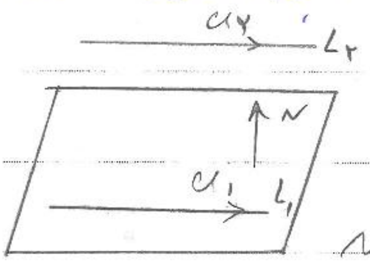
معادله پارامتری
$$\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$$



$\vec{n}=(a,b,c)$ نرمال (قائم)

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
معادله صفحه

۳۸/۴۳ معادله صفحه‌ای که از $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-4}{-2}$ بگذرد و موازی خط $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z+2}{1}$ باشد را بیابید.



$\vec{u}_1=(3,2,-2)$ و $\vec{u}_2=(2,-4,1)$

$n\perp u_1$ و $n\perp u_2$

$\vec{n}=u_1\times u_2=(-6,-7,-16)$ نرمال صفحه

P روی صفحه است $\leftarrow$ $P(1,4,4)$ روی L_1

معادله صفحه $-6(x-1)-7(y-4)-16(z-4)=0$

۴۳/۲ج۶۷۷ فصل مشترک دو صفحه $x-y-5z=2$ و $x+y-z=5$ با خط $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{x+4}{1}$ چه وضعی دارد؟

$$\begin{cases} n=(1,1,-1) \\ n'=(1,-1,-5) \end{cases} \longrightarrow \vec{u}_1=n\times n'=(-6,4,-2)$$

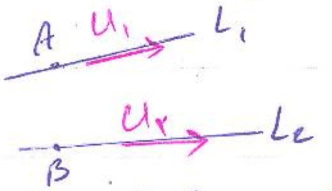
$\vec{u_2} = (3, -2, 1) = -\frac{1}{2}\vec{u_1}$

$\to u_1 \parallel u_2 \to$ موازی اند ، منطبق اند

برای بررسی این مطلب نقطه ای دلخواه $P \in L_2$ انتخاب کرده و در L_1 امتحان می‌کنیم

$P(-1, 3, -4) \xrightarrow{\text{در } L_1} \begin{cases} -1+3+4=5 \to P \notin L_1 \to \text{موازی اند} \\ -1-3+20=2 \end{cases}$

نکته : خط L_1 با هادی $\vec{u_1}$ و گذرنده A و خط L_2 با هادی u_2 گذرنده از B مفروض است

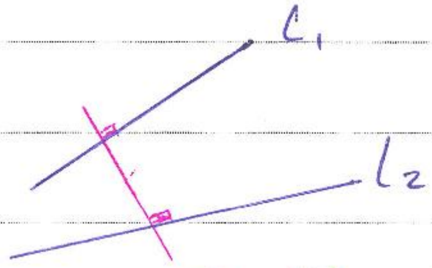


الف : اگر $u_1 \parallel u_2$ ← موازی یا منطبق هستند

ب : اگر $u_1 \nparallel u_2$ و $\vec{AB} \cdot (u_1 , u_2) = 0$ ← متقاطع اند

ج : $\vec{AB} \cdot (u_1 \times u_2) \neq 0$ ← متنافرند

نکته : طول عمود مشترک یا فاصله بین دو خط متنافر عبارت است از :



$$\text{فاصله} = \frac{|\vec{AB} \cdot (u_1 \times u_2)|}{|u_1 \times u_2|}$$

$\vec{u_1} \times \vec{u_2} =$ هادی عمود مشترک

فاصله دو خط متنافر زیر را بیابید عمران ۹۱ $\qquad \frac{1}{۲ ج.۶۷}$

$L_1 : \frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{-5}$

$L_2 : \frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+3}{-2}$

$\frac{x+1}{4} = \frac{2-y}{3} = -\frac{z}{5}$

$\frac{x+2}{2} = \frac{3-y}{1} = \frac{-z-3}{2}$

$\vec{u_1} = (4, -3, -5)$ و $A(-1, 2, 0)$

$\vec{u_2} = (2, -1, -2)$ و $B(-2, 3, -3)$ و

$u_1 \times u_2 = (1, -2, 2)$

و $\vec{AB} = (-1, 1, -3)$

$$\overrightarrow{AB}\cdot(u_1\times u_2) = -1-2-6=-9$$

$$\text{فاصله} = \frac{|\overrightarrow{AB}\cdot(u_1\times u_2)|}{|u_1\times u_2|} = \frac{9}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = 3$$

نکته: فرض کنید $A(x_1, y_1, z_1)$ داده شده است

الف) فاصله A از صفحه $ax+by+cz+d=0$ عبارت است از $\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

ب) فاصله A از خط گذرنده از نقطه B با بردار هادی $\vec{u}$ عبارت است از $\text{فاصله} = \frac{|\overrightarrow{AB}\times u|}{|u|}$

۳۵/۳۹ فاصله نقطه $(-1,3,-1)$ از خط زیر $x=2t+1$ و $y=1$ و $z=t$

$t=0$ ؛ $\overrightarrow{AB}=B-A=(2,-2,1)$ ، $\vec{u}=(2,0,1)$ و $B(1,1,0)$ روی خط

$$\overrightarrow{AB}\times u=(-2,0,4) \qquad \text{فاصله}=\frac{|AB\times u|}{|u|}=\frac{\sqrt{4+16}}{\sqrt{4+1}}=\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}=2$$

دستگاه های خطی

۱۰/۲ ج ۱۹۸ برای چه مقدار a دستگاه زیر بی نهایت جواب دارد

$$\begin{cases} x-y+az=0 \\ 3x-y+2z=0 \\ 6x-4y+5z=0 \end{cases} \longleftrightarrow Ax=b$$

$$\text{ماتریس ضرایب } A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 3 & -1 & 2 \\ 6 & -4 & 5 \end{pmatrix} \text{ و } x=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

$$\text{طرف دوم } b=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

بی‌نهایت جواب $\Longleftrightarrow |A|=0$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & a\\ 3 & -1 & 2\\ 4 & -4 & 5\end{vmatrix} \xrightarrow[R_3-4R_1]{R_2-3R_1} \begin{vmatrix}1 & -1 & a\\ 0 & 2 & 2-3a\\ 0 & 2 & 5-4a\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3-R_2} \begin{vmatrix}1 & -1 & a\\ 0 & 2 & 2-3a\\ 0 & 0 & 3-3a\end{vmatrix} = 2(3-3a)=0 \longrightarrow a=1$$

$A_{n\times n}x=b$:
- $|A|\neq 0 \rightarrow$ دستگاه جواب یکتا دارد
- $|A|=0 \rightarrow$ دستگاه فاقد جواب است / دستگاه بی‌نهایت جواب دارد

$Ax=0$:
- $|A|\neq 0 \rightarrow$ فقط جواب صفر (بدیهی) دارد
- $|A|=0 \rightarrow$ دستگاه بی‌نهایت جواب دارد (دستگاه جواب غیربدیهی دارد)

وابسته خطی، مستقل خطی

تعریف: بردارهای $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ و ... و $\vec{u}_k \in \mathbb{R}^n$ را مستقل خطی می‌نامیم هرگاه از رابطه $c_1\vec{u}_1+c_2\vec{u}_2+\dots+c_k\vec{u}_k=0$ نتیجه شود که $c_1=c_2=\dots=c_k=0$ و در غیر اینصورت آنها را وابسته خطی می‌نامیم.

نکته ۱: در فضای $\mathbb{R}^3$:

الف) دو بردار مستقلند $\Longleftrightarrow$ موازی نباشند

ب) سه بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستقلند $\Longleftrightarrow$ در یک صفحه نباشند

$u\cdot(v\times w)\neq 0 \Longleftrightarrow$

نکته ۲: برای بررسی مستقل یا وابسته بودن $\vec{u}_1$ و ... و $\vec{u}_k$ آنها را در سطرهای یک ماتریس قرار می‌دهیم و با عملیات سطری (افزودن مضربی از یک سطر به سطر) اعضای زیر قطر A (یعنی قطر اصلی) را صفر می‌کنیم. حال اگر سطر صفر ایجاد شود، بردارها وابسته اند و در غیر اینصورت مستقل می‌باشند.

$$A = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{bmatrix}_{k \times n}$$

نکته ۳: چنانچه $k = n$ آنگاه بردارها مستقل هستند $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

۲۳ / ۲۶.۷۲۸ — α چقدر باشد تا بردارهای زیر وابسته خطی شوند

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & \alpha \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

$$\rightarrow |A| = (\alpha - 2)^2 = 0 \rightarrow \alpha = 2$$

تعریف: اگر $A_{m\times n}$، حداکثر تعداد سطرهای مستقل خطی (به شرط آنکه هر سطر را یک بردار در نظر بگیریم)، رتبه ماتریس می‌گوئیم و با نماد $Rank(A)$ نمایش می‌دهیم.

روش محاسبه رتبه: برای تعیین $Rank(A)$ با عملیات سطری اعضای زیر A_{ii} را صفر می‌کنیم. تعداد سطرهای غیر صفر به وجود آمده برابر $Rank(A)$ می‌باشد.

۴۰ / ۲۶.۵۴۲ — رتبه ماتریس زیر را بیابید.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 + r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 + 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{غیرصفر} \\ \rightarrow \text{غیرصفر} \\ \rightarrow \text{صفر} \end{array} \rightarrow Rank(A) = 2$$

بردار و مقدار ویژه

تعریف: فرض کنید A ماتریس $n\times n$ باشد و بردار غیرصفر $\vec{v}$ و عدد λ موجود باشند که $AV=\lambda V$ آنگاه $\vec{v}$ بردار ویژه و λ مقدار ویژه نامیده می‌شود

$$Av=\lambda v \to Av-\lambda v=0 \to (A-\lambda I)v=0$$

شرط لازم و کافی برای آنکه دستگاه همگن بالا دارای جواب v غیرصفر باشد آن است که

$\det(A-\lambda I)=0 \longrightarrow$ محاسبه مقدار ویژه

و برای محاسبه بردار ویژه متناظر λ دستگاه همگن زیر را حل می‌کنیم

$(A-\lambda I)v=0 \longrightarrow$ محاسبه بردار ویژه

نکته: اگر A ماتریس $n\times n$ باشد آنگاه:

۱) $\lambda_1+\dots+\lambda_n=tr(A)$ جمع اعضای قطر اصلی

۲) $\lambda_1+\dots+\lambda_n=\det(A)$

$\frac{40}{54}$ بردار ویژه متناظر بزرگترین مقدار ویژه ماتریس زیر

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 6 & 4\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & -6 & -3\end{pmatrix}$$

ابتدا مقادیر ویژه A را می‌یابیم

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 6 & 4\\ 0 & 4-\lambda & 2\\ 0 & -6 & -3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\lambda I=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

$$=(-1-\lambda)\begin{vmatrix}4-\lambda & 2\\ -6 & -3-\lambda\end{vmatrix}=(-1-\lambda)(\lambda^2-\lambda)=0$$

$$\to \lambda=-1,0,1 \longrightarrow \lambda_{max}=1$$

محاسبه بردار ویژه $\lambda=1$: $v=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$$(A-\lambda I)v=\begin{pmatrix}-2 & 6 & 4\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & -6 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{cases}-2x+6y+4z=0\\ 3y+2z=0\end{cases}$$

$$\xrightarrow{z=3\ \text{آزاد}} y=-2\ ,\ x=0 \rightarrow v=\begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix}$$ بردار ویژه

همه بردار ویژه‌های متناظر $\lambda=1$: $\rightarrow av=\begin{pmatrix}0\\-2a\\3a\end{pmatrix}$ ، $a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$

$\frac{d3}{d2}$ میدانیم $\lambda_1=2$ مقدار ویژه $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ -1 & 5 & -1\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$ می‌باشد، $|A|=36$ دو مقدار ویژه دیگر را بیابید.

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=tr(A)=11 & \lambda_2+\lambda_3=9\\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3=36 & \lambda_2\lambda_3=18 \Rightarrow \lambda_2=3\ ,\ \lambda_3=6\end{cases}$$

تعریف: ماتریس $A_{n\times n}$ را قطری شونده می‌نامیم هرگاه ماتریس وارون پذیر P موجود باشد که $P^{-1}AP=B$ که B ماتریس قطری است.

نکته ۱: مقادیر ویژه ماتریس A همان مقادیر ویژه B هستند ولذا مقادیر ویژه A در روی قطر اصلی B قرار می‌گیرند (B : فرم قطری نامیده می‌شود.)

نکته ۲: ثابت می‌شود بردارهای ویژه مستقل A روی ستونهای P قرار می‌گیرند

نکته ۳: شرط لازم و کافی برای آن که ماتریس A قطری شود آن است که n بردار ویژه مستقل داشته باشد.

نکته *: اگر در ماتریس $A_{n\times n}$ مقادیر ویژه $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ متمایز باشند آنگاه بردارهای ویژه $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ مستقل خطی می‌شوند و لذا A قطری می‌شود و

$$P = [\,\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\,]_{n\times n}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = B$$

۱۰ ۲۶ ج د ۲۸ — اگر $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ و $C^{-1}AC$ قطری باشد، ماتریس C را بیابید

ستون‌های C بردارهای ویژه هستند پس ابتدا مقادیر ویژه A را می‌یابیم

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \to \lambda = 2, 5$$

$$\lambda = 2 \to (A-\lambda I)v = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to 2x - y = 0$$

$$\xrightarrow{x=1 \text{ آزاد}} y = 2 \to v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 5 \to (A-\lambda I)v = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to -x - y = 0$$

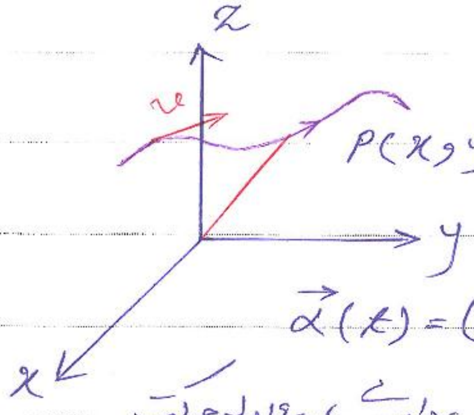
$$\xrightarrow{y=-1 \text{ آزاد}} v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{یا} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{درایه‌های قطری} \begin{pmatrix} 2 & \\ & 5 \end{pmatrix}$$

هم ترتیب را می‌توان تغییر داد و می‌توان در هر ستون عددی را ضرب کرد با این که متفاوت باشند

فصل دوم

خم و رویه



$$\vec{\alpha}(t) = (x(t), y(t), z(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

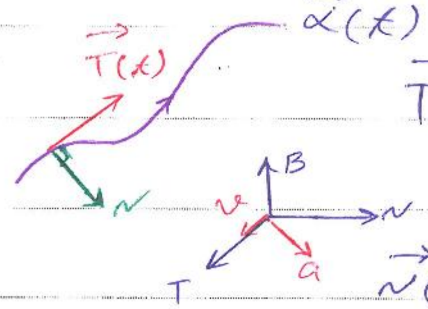
خم پارامتری ، تابع برداری ، معادله حرکت

$$\vec{OP} = \vec{\alpha}(t)$$ بردار مکان شعاع حامل

سرعت
$$\vec{V}(t) = \alpha'(t) = (x', y', z')$$
مماس بر مسیر حرکت

$$|v(t)| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$ تندی

$$\vec{a}(t) = v'(t) = (x'', y'', z'')$$



$$\vec{T}(t) = \frac{v(t)}{|v(t)|}$$ یکه مماس

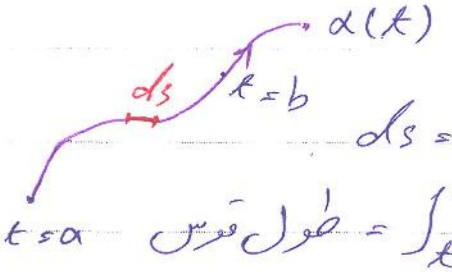
$$\vec{N}(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|}$$ قائم واحد اول (اصلی)

$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)$$ قائم واحد دوم

تعریف : صفحه موازات $\vec{T}$ و $\vec{N}$ را صفحه بوسان می‌نامیم

نکته: ثابت می‌شود که $$\vec{B} = \frac{v \times a}{|v \times a|}$$

طول قوس :



$$ds = |v|\, dt = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt$$

$$\text{طول قوس} = \int_{t=a}^{t=b} ds$$

$\frac{11}{118}$ معادله صفحه عمود بر منحنی $\begin{cases} x=\sin t \\ y=\sin t \\ z=\cos 2t \end{cases}$ در نقطه متناظر $t=\frac{\pi}{4}$ را بیابید

$\vec{\alpha}(t)=(\sin t,\sin t,\cos 2t)$ $\quad$ $\alpha(\frac{\pi}{4})=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)$ نقطه

نرمال صفحه عمود $\vec{V}=\alpha'=(\cos t,\cos t,-2\sin 2t)$

نرمال $V(\pi/4)=(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2,-2)$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{\sqrt{2}}{2})+\sqrt{2}/2(y-\frac{\sqrt{2}}{2})-2(z-0)=0$$

$\frac{12}{118}$ معادله صفحه بوسان منحنی $\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \\ z=t^3 \end{cases}$ در نقطه متناظر $t=1$ را بیابید

$\vec{\alpha}(t)=(t,t^2,t^3)\rightarrow\alpha(1)=(1,1,1)$ نقطه

نرمال صفحه بوسان $V\times a$ است $\quad$ $\vec{V}=\alpha'=(1,2t,3t^2)=(1,2,3)$

$\vec{a}=V'=(0,2,6t)=(0,2,6)\longrightarrow\vec{V}\times\vec{a}=(6,-6,2)$ نرمال صفحه بوسان

$$6(x-1)-6(y-1)+2(z-1)=0$$

$\frac{36}{2ج\,281}$ بردار قائم یکه اصلی یعنی $\vec{N}$ را برای خم زیر بیابید $R(t)=\cos t\vec{i}+\sin t\vec{j}+t\vec{k}$

$R(t)=(\cos t,\sin t,t)$

$\vec{V}=R'=(-\sin t,\cos t,1)$

$|V|=\sqrt{\sin^2t+\cos^2t+1^2}=\sqrt{2}$

$\vec{T}=\frac{V}{|V|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t,\cos t,1)$

$\vec{T'}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t,-\sin t,0)\rightarrow|T'|=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\cos^2t+\sin^2t+0}$

$|T'|=\frac{1}{\sqrt{2}}\longrightarrow\vec{N}=\frac{T'}{|T'|}=(-\cos t,-\sin t,0)\rightarrow\vec{N}=(-\cos t\vec{i}-\sin t\vec{j})$

۲۹ / ۲ج،۲۸ متحرکی در صفحه طوری حرکت می‌کند که در نقطه‌ای که $r=4$ و $\theta=\frac{\pi}{6}$ داریم $\frac{dr}{dt}=\sqrt{3}/2$ و $\frac{d\theta}{dt}=-1/2$ اندازه تصویر بردار سرعت روی محور قطبی را بیابید.

تصویر $\vec{v}$ روی محور x $\Longleftrightarrow$ مولفه اول $\vec{v}$ یعنی $\frac{dx}{dt}$

$$x=r\cos\theta \rightarrow \frac{dx}{dt}=\frac{dr}{dt}\cos\theta+r\left(-\sin\theta\cdot\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+4\left(-1/2\times\frac{-1}{2}\right)=\frac{1}{2}+1=3/2$$

انحنا یا خمیدگی

تعریف: برای خم $\alpha(t)$ انحنا (خمیدگی) عبارت است از

$$k(t)=\frac{|v\times a|}{|v|^3}$$

و به عکس آن $\rho(t)=\frac{1}{k(t)}$ شعاع انحنا می‌گوییم

حالات خاص

۱) برای خم $\alpha(t)=(x(t),y(t))$ داریم، $k(t)=\frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}$

۲) برای خم $y=f(x)$ داریم $\vec{\alpha}(x)=(x,y)$
$$k(x)=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

۳) انحنای دایره به شعاع R در هر نقطه $\frac{1}{R}$ است

فرمول شتاب

اگر $|v|=\frac{ds}{dt}$ آنگاه: $\vec{a}=\frac{d^2s}{dt^2}\vec{T}+k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\vec{N}$

$$\vec{N}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

نکته: چنانچه $|v(t)|$ مقدار ثابت باشد آنگاه

$a_T=\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{d}{dt}|v|$: مولفه مماسی شتاب

$a_N=k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=k|v|^2$: مولفه قائم شتاب

تاب (پیچش)

تعریف: تاب خم $\alpha(t)$ عبارت است از:

$$\tau(t)=\frac{(v\times a)\cdot a'}{|v\times a|^2}$$

نکته: اگر خم $\alpha(t)$ در یک صفحه واقع باشد آنگاه تاب در همه نقاط آن صفر می‌شود

$\frac{15}{121}$ اگر $0<w$ و b و a مطلوبست انحنای خم زیر؟

$$R(t)=(a\cos wt,\ a\sin wt,\ bwt)$$

$$\vec{v}=R'=w(-a\sin wt,\ a\cos wt,\ b)$$

$$\vec{a}=v'=aw^2(-\cos wt,\ -\sin wt,\ 0)$$

$$\vec{v}\times\vec{a}=aw^3(b\sin wt,\ -b\cos wt,\ a)$$

$$|\vec{v}\times\vec{a}|=aw^3\sqrt{b^2+a^2}\ ,\ |\vec{v}|=w\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\to k(t)=\frac{|v\times a|}{|v|^3}=\frac{aw^3\sqrt{a^2+b^2}}{(w\sqrt{a^2+b^2})^3}=\frac{a}{a^2+b^2}$$

مثال: مولفه‌های قائم و مماسی شتاب خم زیر را بیابید.

$$R(t)=(a\cos wt,\ a\sin wt,\ bwt)$$

مولفه مماسی شتاب $=\frac{d}{dt}|\vec{v}|=\frac{d}{dt}(w\sqrt{a^2+b^2})=0$

مولفه قائم شتاب $=k|\vec{v}|^2=\frac{a}{a^2+b^2}(w\sqrt{a^2+b^2})^2=aw^2$

$f(t) = (\sin t - t\cos t \,,\, \cos t + t\sin t)$ انحنا را در $t=\pi/3$ بیابید $\frac{43}{2\text{ج}113}$

$$\begin{cases} x' = t\sin t \\ y' = t\cos t \end{cases} \qquad \begin{cases} x'' = \sin t + t\cos t \\ y'' = \cos t - t\sin t \end{cases}$$

صورت $= |x'y'' - x''y'| = |-t^2\sin^2 t - t^2\cos^2 t| = |-t^2| = t^2$

مخرج $= (x'^2 + y'^2)^{3/2} = (\underbrace{t^2\sin^2 t + t^2\cos^2 t}_{t^2})^{3/2} = (t^2)^{3/2} = |t|^3$

$$\to K(t) = \frac{t^2}{|t|^3} = \frac{1}{|t|} \to K(\pi/3) = 3/\pi$$

ماکزیمم مقدار خمیدگی $y = e^x$ در نقطه‌ای با کدام x رخ می‌دهد و چقدر است $\frac{14}{2\text{ج}286}$ (بهمن ۹۰)

$y' = e^x \,,\, y'' = e^x$

$$K(x) = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} \to K(x) = \frac{e^x}{(1+e^{2x})^{3/2}}$$

$$\to \ln K(x) = x - \tfrac{3}{2}\ln(1+e^{2x}) \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{K'}{K} = 1 - \frac{3e^{2x}}{1+e^{2x}} = \frac{1-2e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب در } K(x)} K'(x) = \frac{e^x(1-2e^{2x})}{(1+e^{2x})^{5/2}} = 0$$

$$\to 2e^{2x} = 1 \to e^{2x} = 1/2 \to 2x = \ln 1/2 = -\ln 2 \quad x = -\tfrac{1}{2}\ln 2$$

حال برای یافتن مقدار ماکزیمم $-\tfrac{1}{2}\ln 2$ در $K(x)$ جایگذاری می‌کنیم

$$\max(K) = K(-\tfrac{1}{2}\ln 2) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\ln 2}}{(1+e^{-\ln 2})^{3/2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\ }$$

تاب خم $x = 10t^2 \,,\, y = 1 - 3t^3 \,,\, z = 4t^3 - 4$ را در $t=1$ بیابید. $\frac{35}{139}$

$\vec{\alpha} = (10t^2, 1-3t^3, 4t^3-4) \qquad \vec{v} = (20t, -9t^2, 12t^2) = (20, -9, 12)$

$\vec{a} = v' = (20, -18t, 24t) = (20, -18, 24) \qquad a' = (0, -18, 24)$

$\to (v \times a)\cdot a' = 0$ باجابجایی سطر $\qquad \tau = \frac{(v\times a)\cdot a'}{|v \times a|^2} = 0$

مشتق از ضرب بردارها

$\vec{\alpha}(t) , \vec{\beta}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

۱) $\frac{d}{dt}(\alpha \cdot \beta) = \alpha' \cdot \beta + \alpha \cdot \beta'$

۲) $\frac{d}{dt}(\alpha \times \beta) = \alpha' \times \beta + \alpha \times \beta'$

نکته: $\vec{\alpha}(t) \cdot \vec{\alpha}(t) = |\alpha(t)|^2$

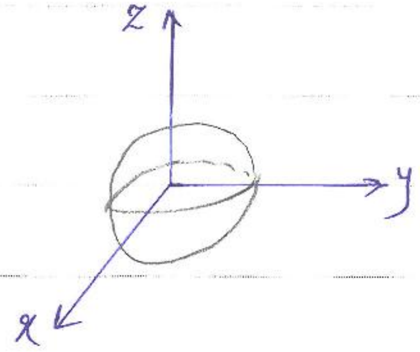
$\frac{d}{dt}|\alpha(t)|^2 = \frac{d}{dt}(\alpha \cdot \alpha) = \alpha' \cdot \alpha + \alpha \cdot \alpha' = 2\alpha \cdot \alpha'$

$\rightarrow \frac{d}{dt}|\vec{\alpha}(t)|^2 = 2\vec{\alpha}(t) \cdot \vec{\alpha}'(t)$

نکته: $|\alpha(t)|$ عدد ثابت است $\Leftrightarrow$ $\alpha(t)$ و $\alpha'(t)$ برهم عمود باشند

نتیجه: چون اندازه بردارهای $\vec{T}(t)$ و $\vec{N}(t)$ و $\vec{B}(t)$ عدد ثابت است و اندازه آنها یک می‌باشد) پس $N \perp N'$, $B \perp B'$, $T \perp T'$

سطح رویه



$x^2+y^2+z^2=1$ در IR^3

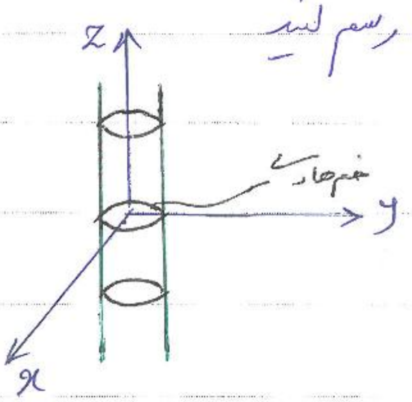
۲ بعدی $\Longleftrightarrow$ دو متغیر آزاد

$\Longleftrightarrow$ سطح (رویه)

سطح (رویه) $\Longleftrightarrow$ $f(x,y,z)=0$ در IR^3

۱) استوانه

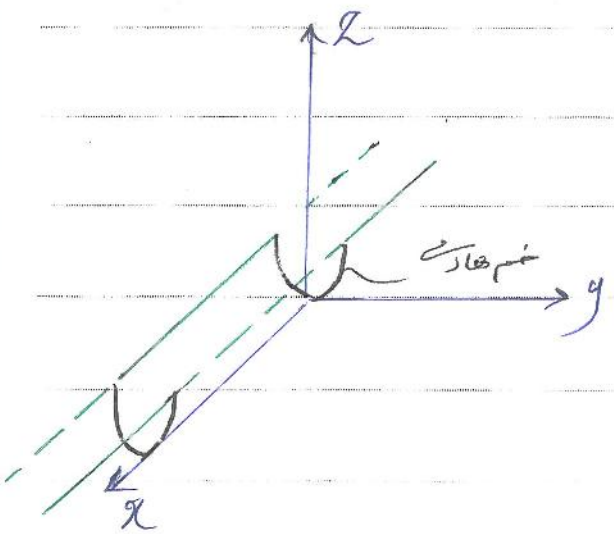
مثال: نمودار معادله $z^2+y^2=1$ را در IR^3 رسم کنید



$z = 0 ,\ 1/2 ,\ k$

استوانه در راستای محور zها

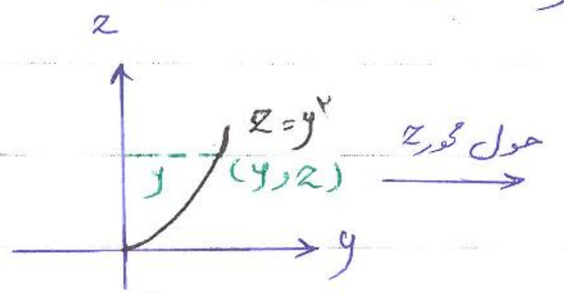
مثال: نمودار $z=y^2$ را در IR^3 رسم کنید

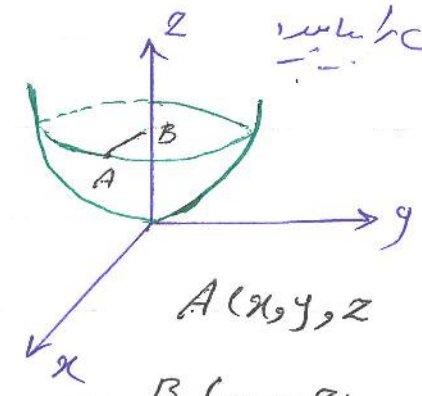


استوانه در راستای محور xها

۲- سطوح حاصل از دوران

مثال: اگر سهمی $z=y^2$ در صفحه yz حول محور z دوران کند، معادله سطح حاصل را بیابید





شعاع دوران $= y = \sqrt{z}$

$A(x,y,z)$

شعاع دوران $= |AB| = \sqrt{x^2+y^2}$

$B(0,0,z)$

$\to \sqrt{z}=\sqrt{x^2+y^2} \to z=x^2+y^2$: معادله سطح

$$z=y^2 \xrightarrow{\text{حول محور zها}} z=x^2+y^2$$

$$\begin{cases} z\to z \\ y\to\sqrt{y^2+x^2} \end{cases}$$

مثال: اگر منحنی $z=1+e^{x^2}$ در صفحه xz حول یکی از محورهای زیر دوران کند معادله سطح حاصل را بیابید

الف) حول محور zها، معادله سطح: $z=1+e^{x^2} \xrightarrow{\begin{cases} z\to z \\ x\to\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}} z=1+e^{x^2+y^2}$

ب) حول محور xها، معادله سطح: $z=1+e^{x^2} \xrightarrow{\begin{cases} x\to x \\ z\to\sqrt{z^2+y^2}\end{cases}} \sqrt{z^2+y^2}=1+e^{x^2}$

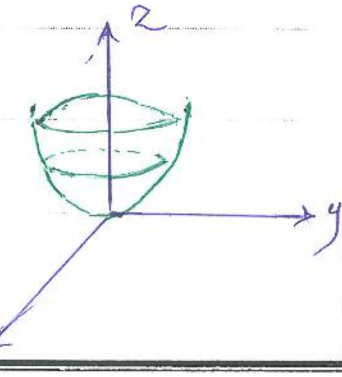
۳- سطوح درجه دوم

معادلاتی در $\mathbb{R}^3$ که برحسب x و y و z چندجمله‌ای درجه دوم باشند یعنی

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dx+Ey+Fz+G=0$$

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

صفحه ۱۰۸ و ۱۰۹ کتاب شکلها را حفظ نمایید



فصل سوم

توابع چند متغیره

$f(x) = e^x : IR \to IR$ یک متغیره

$f(x,y) = x^2+y^2 : IR^2 \to IR$ دو متغیره

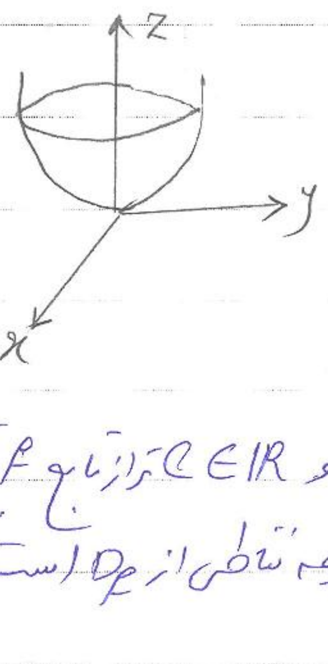
$(x,y) \xrightarrow{f} f(x,y)$

دامنه: IR^2 و برد: $[0, +\infty)$

$\underbrace{f \text{ نمودار}}_{\text{سطح (رویه)}} = \{(x,y,z) : z = f(x,y)\} \subseteq IR^3$

مثال: نمودار تابع $f(x,y) = x^2+y^2$ را رسم کنید

$z = x^2+y^2$



تعریف: اگر $f: R^n \to R$ و $c \in IR$ تراز تابع f متناظر با عدد c که آن را با $f^{-1}(c)$ نمایش می‌دهیم، مجموعه نقاطی از D_f است که به ازای آن تابع مساوی c شود

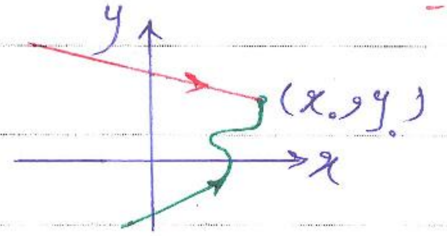
مثال: ترازهای تابع زیر را تعیین کنید $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+1$

$f(x,y,z) = c \to x^2+y^2+z^2+1 = c \to x^2+y^2+z^2 = c-1$

کره به مرکز مبدا به شعاع $\sqrt{c-1}$ ← $c-1>0$ ، نقطه مبدا مختصات ← $c-1=0$ ، تهی ← $c-1<0$

حد و پیوستگی

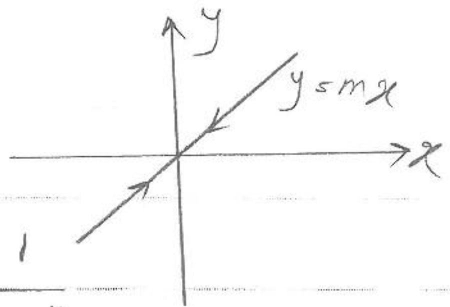
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$



و چنانچه $f(x_0,y_0) = L$ می‌گوییم f در (x_0,y_0) پیوسته می‌باشد

۱) اگر بر دو مسیر مختلف اعداد متفاوتی برای حد بدست آید حد وجود ندارد

مثال: $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$



$$y=mx \to \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{1}{1+m^2}$$

چون جواب به پارامتر m وابسته است ← حد وجود ندارد

۲) حدود مکرر $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$

$$\begin{cases} \displaystyle \lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x,y) = L_1 \\ \displaystyle \lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x,y) = L_2 \end{cases}$$

چنانچه L_1 و L_2 دو عدد نابرابر باشند آنگاه حد وجود ندارد (اما اگر $L_1 = L_2$ باشد هیچ نتیجه‌ای نمی‌توان گرفت)

مثال: $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3 + x\sin x}{y^2 - x^2}$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0} \frac{y^3}{y^2} = 0 = L_1$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim \frac{x\sin x}{-x^2} = -1 = L_2$$

چون $L_1 \neq L_2$ پس حد وجود ندارد

۳) مختصات قطبی

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \rightarrow x^2+y^2=r^2$$

$(x,y) \rightarrow (0,0) \leftrightarrow r \rightarrow 0$ (θ آزاد است)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \overset{\text{قطبی}}{=} \lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = ?$$

چنانچه مستقل از θ حد بالا جواب حاصل می‌گردد ← جواب قابل قبول

شروط استفاده از مختصات قطبی

a: مخرج $(x^2+y^2)^k$

b: $(x,y)\rightarrow(0,0)$

مثال:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \overset{\text{قطبی}}{=} \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta\, r^2\sin^2\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} r^2\cos^2\theta\sin^2\theta = 0$$

مثال:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \overset{\text{قطبی}}{=} \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

وجود ندارد

نکته: اگر درجه صورت کمتر یا مساوی درجه مخرج باشد حد وجود ندارد و اگر درجه صورت بیشتر از درجه مخرج باشد جواب حد صفر می‌باشد (لازم به ذکر است که نکته در شرایط مختصات قطبی صدق می‌کند)

مثال:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{1389}y}{(x^2+y^2)^5} = 0$$

درجه صورت $= 1390$

درجه مخرج $= 10$

مثال: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(2x^2y)}{x^4+y^2} \overset{\text{هم‌ارز}}{=} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} \overset{u=x^2}{=} \lim\limits_{(u,y)\to(0,0)} \frac{2uy}{u^2+y^2}$ وجود ندارد

مثال: a را طوری بیابید که تابع زیر در $(1,0)$ پیوسته باشد

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)y}{x^2+y^2-2x+1} & (x,y)\neq(1,0)\\ a & (x,y)=(1,0)\end{cases}$$

$$a=f(1,0)=\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{(x-1)y}{(x-1)^2+y^2}\overset{u=x-1}{=}\lim_{(u,y)\to(0,0)}\frac{uy}{u^2+y^2}$$ وجود ندارد

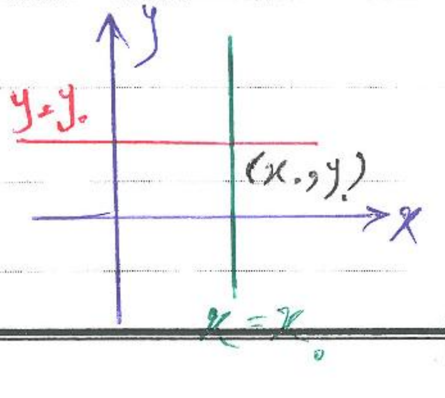
هیچ مقداری برای a بدست نمی‌آید

مشتق پاره‌ای (جزئی، نسبی)

چنانچه در $f(x,y)$ دقیقاً نسبت به یکی از متغیرها مشتق بگیریم به آن مشتق پاره‌ای می‌گوییم. اگر نسبت به x مشتق بگیریم آن را با نماد $\frac{\partial f}{\partial x}$ و f'_x و f_x نمایش می‌دهند.

تعریف: برای محاسبه $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ در ضابطه f قرار می‌دهیم $y=y_0$ و از تابع حاصل $g(x)=f(x,y_0)$ نسبت به x در $x=x_0$ مشتق می‌گیریم و لذا $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=g'(x_0)$

پس:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$



تذکر: معمولاً برای محاسبه $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ابتدا از ضابطه f نسبت به x مشتق می‌گیریم و سپس $x=x_0$ و $y=y_0$ را جایگذاری می‌کنیم

مثال: $f(x,y)=xe^y+xy^2$ مطلوبست $\frac{\partial f}{\partial y}(2,0)$

روش اول (تعریف) در ضابطه $x=2$ را جایگذاری می‌کنیم

$$f(2,y)=2e^y+2y^2 \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(2,0)=2e^y+4y\Big|_{y=0}=2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=xe^y+2xy \xrightarrow[y=0]{x=2} \frac{\partial f}{\partial y}(2,0)=2$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2\cos x-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\[2mm] 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$ $\frac{10}{143}$

مطلوبست $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ و $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ — از تعریف استفاده می‌کنیم

محاسبه $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$:

$$y=0 \longrightarrow f(x,0)=\begin{cases}\cos x & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}=g(x)$$

چون $g(0)=0$ و $\lim_{x\to 0} g(x)=1$ پس g ناپیوسته و مشتق ناپذیر است و لذا $f_x(0,0)$ وجود ندارد

محاسبه $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ با تعریف:

$$x=0 \longrightarrow f(0,y)=\begin{cases}-y & y\neq 0\\ 0 & y=0\end{cases}=h(y)$$

$$\xrightarrow[\text{پیوسته است}]{h \text{ در } y=0} \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=h'(0)=-1$$

۷ / ۲ج۶،۹

برای تابع زیر $f_x(0,0)$ و $f_y(0,0)$ را بیابید.

$$f(x,y)=\begin{cases}-1+x+y & x\geq 0\\ -1+x^2+y^2 & x<0\end{cases}$$

از تعریف محاسبه می‌کنیم

$$f_y(0,0)\ \xrightarrow{x=0}\ f(0,y)=-1+y=h(y)\rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=h'(0)=1$$

$$f_x(0,0)\ \xrightarrow{y=0}\ f(x,0)=\begin{cases}-1+x & x\geq 0\\ -1+x^2 & x<0\end{cases}=g(x)$$

$$\xrightarrow{\text{پیوسته است}}\ g'_+(0)=1 \quad \text{و}\quad g'_-(0)=2x\Big|_{x=0}=0$$

چون مشتق چپ و راست نابرابر است ← $g'(0)$ وجود ندارد پس $f_x(0,0)$ وجود ندارد

تعریف: تابع $f(x,y)$ را همگن از درجه α می‌نامیم هرگاه:

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{\alpha}f(x,y)$$

قضیه: اگر $f(x,y)$ همگن از درجه α باشد آنگاه:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=\alpha f(x,y)$$

مثال: در تابع $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^5+y^5}$ مطلوبست $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}$

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{\lambda x\,\lambda^2y^2}{\lambda^5(x^5+y^5)}=\lambda^{-2}\frac{xy^2}{x^5+y^5}=\lambda^{-2}f(x,y)$$

پس f همگن از درجه -2 می‌باشد

مثال: $f(x,y) = \boxed{x^2y^3} + \frac{x}{x-y}$ مطلوبست

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 5x^2y^3 + \frac{2x^3}{x-y}$$

$$xf_x + yf_y = x(g_x + h_x) + y(g_y + h_y) = (xg_x + yg_y) + (xh_x + yh_y)$$

نکته: اگر $u = u(x,y)$ همگن از درجه α باشد و $z = f(u)$ باشد آنگاه

$$xz_x + yz_y = \alpha u f'(u) = \alpha u \frac{dz}{du}$$

۶۹ — ۲ج۶۱: اگر $z = \sin^{-1}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ مطلوبست $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$

همگن $\alpha = 2$ است $u = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

۱) $2\sin z$ ۲) $\cos z$ ۳) $2\tan z$ ۴) $\cot z$

$$xz_x + yz_y = \alpha u\frac{dz}{du} = 2u\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{2\sin z}{\sqrt{\cos^2 z}} = 2\tan z$$

مشتق مراتب بالاتر

اگر از تابع $f(x,y)$ نسبت به هر یک از متغیرها x و y دوبار مشتق بگیریم، ۴ مشتق مرتبه دوم ایجاد می‌شود

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

مثال: $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ مطلوبست $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(1,2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{-(2y)(2x)}{(x^2+y^2)^2}$$

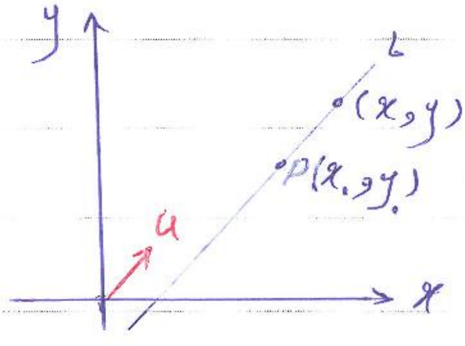
$$\xrightarrow[y=2]{x=1}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(1,2)=-\frac{8}{25}$$

نکته: چنانچه در نقطه (x,y) ضابطه f مشکل نداشته باشد آنگاه مخلوط ها مساویند: $f_{xy}(P)=f_{yx}(P)$

مشتق جهتی (سویی)

تعریف: اگر $\vec{u}=(u_1,u_2)$ برداری یکه باشد و تابع f در نقطه $P(x,y)$ مفروض باشند، اگر خط L به موازات $\vec{u}$ و گذرنده از P باشد، به مشتق f در امتداد خط L مشتق جهتی می‌گوییم و آن را با نماد $D_u f(P)$ یا $\frac{\partial f}{\partial u}(P)$ نمایش می‌دهیم

معادله خط L را بدست می‌آوریم



$$\frac{x-x_0}{u_1}=\frac{y-y_0}{u_2}=t,\ t\in\mathbb{R}$$

$$\to x=x_0+tu_1,\ y=y_0+tu_2$$

به ازای $t=0$ نقطه $P(x_0,y_0)$ را خواهیم داشت

ضابطه $f(x,y)$ در امتداد L عبارت است از: $g(t)=f(x_0+tu_1,y_0+tu_2)$

ولذا $g'(0)$ برابر مشتق جهتی f در P و در جهت $\vec{u}$ خواهد بود یعنی $D_u f(P)=g'(0)$

پس: $D_u f(x_0,y_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+tu_1,y_0+tu_2)-f(x_0,y_0)}{t}$

تذکر: توجه کنید که مشتق جهتی در حالت خاص به مشتق پاره‌ای تبدیل می‌شود

$$u = i \longrightarrow D_u f(P) = \frac{\partial f}{\partial x}(P)$$

$$u = j \longrightarrow D_u f(P) = \frac{\partial f}{\partial y}(P)$$

مثال: برای تابع $f(x,y) = xy + 3x$ مشتق جهتی در $(x_0, y_0) = (0,0)$ و در جهت بردار $\vec{a} = i - j$ را بیابید

$$\vec{a} = i - j = (1,-1) \longrightarrow |a| = \sqrt{2}$$

$$\vec{u} = \frac{a}{|a|} = \left(\underbrace{\tfrac{1}{\sqrt{2}}}_{u_1}, \underbrace{-\tfrac{1}{\sqrt{2}}}_{u_2}\right)$$

$$D_u f(0,0) = \lim \frac{f\left(\frac{t}{\sqrt{2}}, -\frac{t}{\sqrt{2}}\right) - f(0,0)}{t} = \lim \frac{-\frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{\sqrt{2}}t}{t} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$\frac{43}{2\text{ج}\ 6/14}$ مشتق سوئی تابع زیر در مبدأ و در جهت $\vec{v} = 3i + 4j$ را بیابید

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2y^3}{|x| + |y|} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\vec{v} = (3,4) \longrightarrow |v| = \sqrt{9+16} = 5$$

$$\vec{u} = \frac{v}{|v|} = \left(\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}\right)$$

$$D_u f(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(\frac{3}{5}t, \frac{4}{5}t\right) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\dfrac{\frac{9}{25}t^2 + 2\left(\frac{4}{5}\right)^3 t^3}{\frac{3}{5}|t| + \frac{4}{5}|t|}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{9}{25}t^2}{\frac{7}{5}\,t\,|t|}$$

اگر $t \to 0^+$ و $t \to 0^-$ چون $|t|$ برابر t و $-t$ می‌شود حد چپ و راست نابرابرند

$\longleftarrow D_u f(0,0)$ وجود ندارد

تعریف: فرض $IR^2 \to IR$: $f(x,y)$ بردار گرادیان f عبارت است از:

$$\nabla f = grad(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

قضیه: اگر مشتقات پاره‌ای مرتبه اول f در نقطه P پیوسته باشند آنگاه:

$$D_u f(P) = \vec{\nabla} f(P) \cdot \vec{u}$$

۳۱/۱۷۸ مشتق جهتی $f(x,y) = e^x tg\, y + 2x^2 y$ در نقطه $(0, \frac{\pi}{4})$ و در جهت $\vec{a} = i - j$ را بیابید

$$\vec{a} = (1, -1),\ |a| = \sqrt{2} \longrightarrow \vec{u} = \frac{a}{|a|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\nabla f = (f_x, f_y) = (e^x tg\, y + 4xy,\ e^x(1+tg^2 y) + 2x^2)$$

$$\nabla f(0, \pi/4) = (1, 2) \qquad D_u f = \nabla f \cdot u = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

تذکر: اگر در یک تابع $f(x,y)$ به ازای نقطه $P(x,y)$ و در جهت $\vec{u}$ داشته باشیم

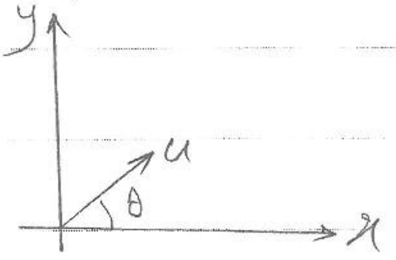
1) $D_u f(P) > 0$

یعنی مقدار f در جهت $\vec{u}$ در نقطه P صعودی است

2) $D_u f(P) < 0$

یعنی مقدار f در جهت $\vec{u}$ در نقطه P نزولی است

$\frac{۳۵}{۱۷۶}$ مشتق جهتی $f(x,y)=2x^2-3xy+5y^2$ در نقطه $(1,2)$ و در جهت $\vec{u}$ که با محور xها جهت مثبت زاویه ۴۵ درجه می‌سازد چقدر است



$$\vec{u}=(\cos\tfrac{\pi}{4},\sin\tfrac{\pi}{4})=(\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}})$$

$$\nabla f=(4x-3y,\,-3x+10y)$$

$$\rightarrow \nabla f(1,2)=(-2,17) \qquad D_u f=\nabla f\cdot u=\frac{-2}{\sqrt{2}}+\frac{17}{\sqrt{2}}=\frac{15}{\sqrt{2}}$$

$\frac{۵۲}{۱۱۴\ \text{ج}۲}$ اگر f در نقطه (a,b) مشتق‌پذیر و مشتق در جهت $i+j$ برابر $3\sqrt{2}$ و در جهت $3i-4j$ برابر ۵ باشد گرادیان f در (a,b) را بیابید

$$\nabla f=(f_x,f_y) \qquad \vec{A}=(1,1)\rightarrow|\vec{A}|=\sqrt{2}\rightarrow\vec{u}=\frac{A}{|A|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$$

$$\vec{B}=(3,-4)\rightarrow|\vec{B}|=5\rightarrow\vec{v}=\frac{B}{|B|}=\frac{1}{5}(3,-2)$$

$$\begin{cases}3\sqrt{2}=D_u f=\nabla f\cdot u=\frac{1}{\sqrt{2}}(f_x+f_y)\\ 5=D_v f=\nabla f\cdot v=\frac{1}{5}(3f_x-4f_y)\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}f_x+f_y=6\\ 3f_x-4f_y=25\end{cases}$$

$$7f_x=49\rightarrow f_x=7\rightarrow f_y=-1 \qquad \nabla f=(7,-1)$$

نکته: حداکثر مقدار مشتق جهتی f در P برابر $|\nabla f(P)|$ است و در جهت بردار گرادیان یعنی $\frac{\nabla f(P)}{|\nabla(P)|}$ بدست می‌آید

نکته: حداقل مقدار مشتق جهتی f در P برابر $-|\nabla f(P)|$ است و در خلاف جهت گرادیان $-\frac{\nabla f(P)}{|\nabla(P)|}$ بدست می‌آید

مثال: برای تابع $f(x,y,z)=xe^y+xz^2$ در نقطه $(-1,0,1)$ حداقل مقدار مشتق جهتی و جهت آن را بیابید.

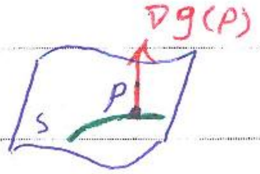
$$\nabla f=(f_x,f_y,f_z)=(e^y+z^2,\ xe^y,\ 2xz)$$

$$\nabla f(-1,0,1)=(2,-1,-2) \to |\nabla f|=\sqrt{4+1+4}=3$$

حداقل مشتق جهتی $= -|\nabla f| = -3$ ، جهت حداقل $= -\dfrac{\nabla f}{|\nabla f|}=\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$

کاربرد هندسی گرادیان

۱) سطح S به معادله $g(x,y,z)=0$ و نقطه P روی آن مفروض است. بردار گرادیان یعنی $\vec{\nabla} g(P)$ بردار عمود بر سطح در P می‌باشد.

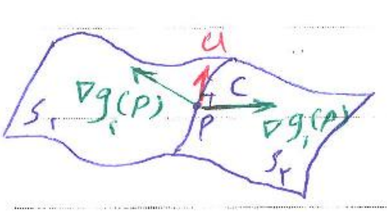


الف) بردار نرمال سطح در P برابر $\vec{\nabla} g(P)$ می‌باشد

ب) بردار هادی خط قائم بر سطح در P برابر $\vec{\nabla} g(P)$ می‌باشد

ج) بردار نرمال صفحه مماس بر سطح در P برابر $\vec{\nabla} g(P)$ می‌باشد

۲) اگر خم C تقاطع (فصل مشترک) دو سطح $g_1(x,y,z)=0$ و $g_2(x,y,z)=0$ باشد و نقطه $P\in C$ داده شود:



$\vec{u}$ را بردار مماس بر C در P می‌گیریم آنگاه

$$\vec{u}=\nabla g_1(P)\times\nabla g_2(P)$$

الف) بردار مماس بر خم C در P برابر $\vec{u}$ است

ب) هادی خط مماس بر خم در P برابر $\vec{u}$ است

ج) نرمال صفحه قائم بر خم در P برابر $\vec{u}$ است

$\frac{۱۱۳}{۲ج۴۷۵}$ معادله صفحه مماس بر سطح زیر در (۲و۰و۱) را بیابید

$z = x^2 + y^4 + e^{xy} \qquad g = x^2 + y^4 + e^{xy} - z = 0$

$\nabla g = (2x + y e^{xy},\ 4y^3 + x e^{xy},\ -1)$

$\rightarrow \nabla g(1,0,2) = (2,1,-1)$ نرمال

$\rightarrow 2(x-1) + (y-0) - (z-2) = 0$

$\frac{۳۲}{۲ج۳۸}$ معادله خط مماس بر فصل مشترک سطوح زیر در (۱و۱و۱) را بیابید

$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6 \qquad xyz = 1$

$g_1 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6 = 0$ و $g_2 = xyz - 1 = 0$

$\nabla g_1 = (2x, 4y, 6z) = (2,4,6)$

$\nabla g_2 = (yz, xz, xy) = (1,1,1)$

$\rightarrow \vec{u} = \nabla g_1 \times \nabla g_2 = (-2,4,-2)$ هادی

$\rightarrow \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{-2}$ خط مماس

$\frac{۷}{۲ج۱۵}$ در چه نقاطی از سطح زیر قائم بر آن با هر سه محور مختصات زوایای مساوی می‌سازند

$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + z^2 = 1$

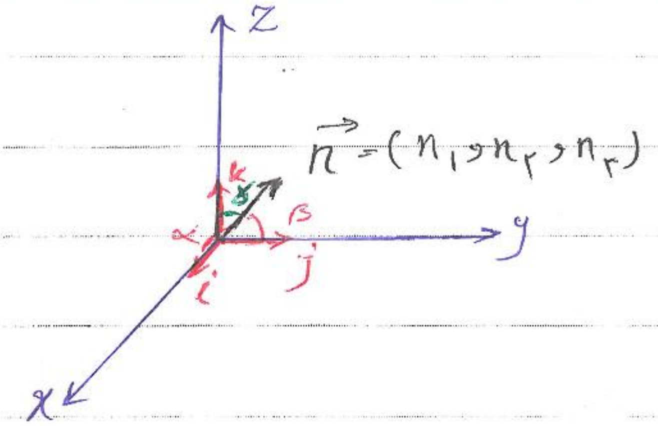
$g = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + z^2 - 1 = 0$

چون بردار هادی خط قائم ∇g است پس باید هر سه مولفه ∇g با هم مساوی باشند

$\nabla g = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, 2z) \rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = 2z \quad \begin{cases} x = 4z \\ y = 4z \end{cases}$ در معادله

$4z^2 + 4z^2 + z^2 - 1 = 0 \rightarrow 9z^2 = 1 \rightarrow z^2 = \frac{1}{9} \rightarrow z = \pm\frac{1}{3}$

نقاط $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ یا $(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{1}{3})$



$$\cos\alpha=\frac{\vec{n}\cdot\vec{i}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{i}|}=\frac{n_1}{|\vec{n}|}$$

$$\cos\beta=\frac{\vec{n}\cdot\vec{j}}{|n|\cdot|j|}=\frac{n_2}{|n|}$$

$$\cos\gamma=\frac{\vec{n}\cdot\vec{k}}{|n|\cdot|k|}=\frac{n_3}{|n|}$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

$$\vec{n}=|\vec{n}|(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

شرط لازم وکافی برای آنکه $\vec{n}$ با هرسه محور زاویه مساوی بسازد آن است که هرسه مولفه مساوی شود

قاعده مشتق ترکیب توابع (مشتق زنجیره‌ای)

$z=f(y)\ ,\ y=g(x)\qquad z-\boxed{y}-x \rightarrow \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{dz}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}$

واسطه

$z=f(\underbrace{g(x)}_{\text{واسطه}}) \rightarrow z'=f'(g(x))\cdot g'(x)$

مشتق نسبت به x

مشتق نسبت به g

$$z\begin{cases} x & \begin{cases} r\\ s\\ t\end{cases}\\ \\ y & \begin{cases} r\\ s\\ t\end{cases}\end{cases}$$

z تابعی از r و s و t است

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

u و v و w توابعی از x و y است $z=f(u,v,w)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}f'_u+\frac{\partial v}{\partial x}\cdot f'_v+\frac{\partial w}{\partial x}f'_v$$

مثال: اگر $z=f(x,y)$ ، $x=r\cos\theta$ ، $y=r\sin\theta$ مطلوبست x و y را واسطه $\frac{\partial f}{\partial\theta}$

$$\frac{\partial f}{\partial\theta}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta}=-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

$\frac{21}{183}$ فرض کنید f تابعی از x و y است معادله $2\frac{\partial f}{\partial x}-3\frac{\partial f}{\partial y}=0$ با تغییر متغیرهای $r=2y-3x$ و $s=2y+3x$ به چه معادله‌ای تبدیل می‌شود

هدف این سوال یافتن مشتقات f برحسب متغیرهای جدید r و s است. همواره باید از قاعده مشتق زنجیره‌ای در تغییر متغیر استفاده کنیم و متغیر جدید (r و s) را واسطه بگیریم

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}=-3f_r+3f_s$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله}}2\frac{\partial f}{\partial x}-3\frac{\partial f}{\partial y}=-12f_r=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}=2f_r+2f_s$$

$$\to f_r=0\to\frac{\partial f}{\partial r}=0$$

$\frac{23}{184}$ اگر $w=f(u,v)$ دارای مشتقات مرتبه دوم پیوسته باشد با تغییر متغیر

$$\begin{cases}x=u+v\\ y=u-v\end{cases}$$

حاصل $\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}$ را بیابید

از قاعده مشتق زنجیره‌ای استفاده می‌کنیم و متغیرهای جدید x و y را واسطه می‌گیریم

$$\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}=w_x-w_y$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial x} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial u} w_x - \frac{\partial}{\partial u} w_y$$

$$= \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w_x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial w_y}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}\right)$$

$$= (w_{xx} + \cancel{w_{xy}}) - (\cancel{w_{yx}} + w_{yy}) = w_{xx} - w_{yy}$$

$$= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$\frac{۵۶}{۱۸۶}$ در تابع مشتق‌پذیر $z = y\phi(\underbrace{x^2 - y^2}_{\text{واسطه } t})$ مطلوبست

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = ?$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y(2x)\phi' \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \phi + y(-2y)\phi'$$

$$\frac{1}{x} z_x + \frac{1}{y} z_y = 2y\phi' + \frac{1}{y}\phi - 2y\phi' = \frac{1}{y}\phi = \frac{1}{y^2} z$$

مثال: اگر $w = f(y-x, x-y)$ مطلوبست $\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -1 \times f'_1 + 1 \times f'_2 = -f'_1 + f'_2$$

$$\rightarrow \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 1 \times f'_1 + (-1) \times f'_2 = f'_1 - f'_2$$

$\frac{۵۹}{۱۸۶}$ اگر $\vec{r} = (x, y, z)$ و $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ و f تابعی مشتق‌پذیر باشد مطلوبست $\nabla f(x)$

نکته ۱۹ کتاب

$$\nabla f(r) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(r), \frac{\partial}{\partial y} f(r), \frac{\partial}{\partial z} f(r)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(r) = \frac{\partial r}{\partial x} f'(r) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} f'(r) = \frac{x}{r} f'(r)$$

$$\nabla f(r) = \left(\frac{x}{r} f'(r), \frac{y}{r} f'(r), \frac{z}{r} f'(r)\right) = \frac{f'(r)}{r} \overbrace{(x, y, z)}^{\vec{r}} = f'(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

دیفرانسیل

تعریف: برای $f(x, y)$ دیفرانسیل کامل (کل) عبارت است از:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

و تقریب خطی عبارت است از: $P(x_0, y_0)$

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \simeq f(P) + \underbrace{f_x(P)\Delta x + f_y(P)\Delta y}_{df(P)}$$

$\frac{1}{281}$ مقدار تقریبی $f(x, y) = \sqrt{2x^2+e^{2y}}$ در نقطه $(2/2, -0/2)$ را بیابید.

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta x = 2/2 - 2 = 0/2 \\ \Delta y = -0/2 - 0 = -0/2 \end{cases}$$

$$f(2, 0) = 3 \qquad f_x(2, 0) = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2+e^{2y}}}\Big|_{(2,0)} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$f_y(2, 0) = \frac{2e^{2y}}{2\sqrt{2x^2+e^{2y}}}\Big|_{(2,0)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$f(2/2, -0/2) \simeq f(2,0) + f_x(2,0)\Delta x + f_y(2,0)\Delta y$$

$$= 3 + \frac{4}{3}(0/2) + \frac{1}{3}(-0/2) = 3/2$$

تعریف: فرض کنید $f(x, y)$ دارای مشتقات مرتبه دوم پیوسته باشد، دیفرانسیل دوم f عبارت است از:

$$d^2f = f_{xx}\underbrace{dx^2}_{(dx)^2} + 2f_{xy}dx\,dy + f_{yy}\underbrace{dy^2}_{(dy)^2}$$

ماتریس هسیان

و داریم:

$$d^2f = [dx \quad dy]_{1\times2}\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}_{2\times2}\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}_{2\times1}$$

نکته: اگر مشتقات مرتبه دوم f پیوسته باشند و A ماتریس متقارن باشد به طوری که:

$$A = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

آنگاه: $d^2f = [dx \quad dy]A\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$

۲۳ / ۲ج ۴۶۳

در تابع $z=\frac{x-2y}{xy}$ دیفرانسیل دوم z را در نقطه (۲ و ۱) به صورت $[dx \quad dy]\,A\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$ نوشتیم که A متقارن است. دترمینان A را بیابید

$$A=\begin{pmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{pmatrix} \qquad z_x=2x^{-2} \text{ و } z_y=-y^{-2}$$

$$\to z_{xx}=-4x^{-3}=-4 \text{ و } z_{xy}=0 \qquad z_{yy}=2y^{-3}=2(2)^{-3}=2\times 1/8=1/4$$

$$\to A=\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A=-1$$

دیفرانسیل مرتبه دوم z در (۲ و ۱):

$$d^2z=z_{xx}\,dx^2+2z_{xy}\,dx\,dy+z_{yy}\,dy^2=-4dx^2+1/4\,dy^2$$

مشتق ضمنی

$$F(x,y)=0 \xrightarrow[x\text{: مستقل}]{y\text{: تابع}} \frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

$F(x,y,z)=0$ z: تابع   x و y: مستقل

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

مشتق رابطه نسبت به تابع

مثال: از رابطه $xe^{w}+y^{2}z=x^{3}+w$ مطلوبست $\frac{\partial x}{\partial w}=?$ ضمنی

$F=xe^{w}+y^{2}z-x^{3}-w=0$ x: تابع

$$\frac{\partial x}{\partial w}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial w}}{\frac{\partial F}{\partial x}}=-\frac{xe^{w}-1}{e^{w}-3x^{2}}$$

۲۲ / ۱۷ج۲   f و g مشتق پذیرند $g(z-x)+f(y-z)=0$ مطلوبست $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$ ضمنی

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}+\left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{z}}\right)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{(-g'+0)+(0+f')}{g'+(-f')}$$

$$=\frac{g'-f'}{g'-f'}=1$$

فرمول برحسب مستقل=تابع   پاره‌استقیم

جهتی

فرمول با واسطه برحسب مستقل=تابع   زنجیره‌ای

فرمول بین تابع و مستقل بطور مخلوط باشد   ضمنی

۳۰ / ۲ج. ۴۷۸

اگر رابطه $xyz^2 = x^2+y^2$ متغیر z را به عنوان تابعی از x و y نزدیک $(\sqrt{2}, 1, 1)$ در نظر بگیرید مطلوبست $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,1,\sqrt{2})$

$$F = x^2+y^2-xyz^2 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{2y - xz^2}{-2xyz} \longrightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = x^{-1}z^{-1} - \frac{1}{2y}z$$

بافرض آنکه z تابع باشد از رابطه $\frac{\partial}{\partial x}$ می‌گیریم

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -x^{-2}z^{-1} + x^{-1}\left(-z^{-2}\frac{\partial z}{\partial x}\right) - \frac{1}{2y}\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2x - yz^2}{-2xyz}\bigg|_{(1,1,\sqrt{2})} = 0$$

$$\xrightarrow[z=\sqrt{2}]{x=1,\ y=1} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,1,\sqrt{2}) = -(\sqrt{2})^{-1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

تعریف: برای توابع $F(x,y)$ و $G(x,y)$ ژاکوبین عبارت است از:

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}$$

۲۲
۲ج۱۹۹

اگر $\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = xy \end{cases}$ و $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ مطلوبست: $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)}$

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 = r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = r^2\cos 2\theta \\ v = xy = (r\cos\theta)(r\sin\theta) = \frac{1}{2} r^2 \sin 2\theta \end{cases}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} u_r & u_\theta \\ v_r & v_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2r\cos 2\theta & -2r^2\sin 2\theta \\ r\sin 2\theta & r^2\cos 2\theta \end{vmatrix}$$

$$= 2r^3\cos^2 2\theta + 2r^3\sin^2 2\theta = 2r^3$$

تعمیم مشتق ضمنی

فرض کنید از دستگاه $\begin{cases} F(x,y,z,w) = 0 \\ G(x,y,z,w) = 0 \end{cases}$ متغیرهای z و x تابع برحسب متغیرهای w و y باشند آنگاه:

$$\frac{\partial x}{\partial w} = - \frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(w,z)}}{\boxed{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}}$$

ژاکوبین رابطه‌ها نسبت به تابع

نکته: در یک دستگاه ضمنی شرط آنکه برخی متغیرها تابع برحسب سایر متغیرها باشند آن است که ژاکوبین رابطه‌ها نسبت توابع مخالف صفر باشد.

۱۱
۲ج۲۱۰

در دستگاه $\begin{cases} 2x = v^2 - u^2 \\ y = uv \end{cases}$ اگر u و v تابع و x و y مستقل باشند $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ مطلوبست

روش اول: با فرض آنکه u و v تابع باشند از دستگاه $\dfrac{\partial}{\partial x}$ می‌گیریم

$$\begin{cases} 2v\dfrac{\partial v}{\partial x} - 2u\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2 \\ u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

دستگاه ۲ معادله و دو مجهول

دستگاه را با روش کرامر حل می‌کنیم

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix} 2v & 2 \\ u & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2v & -2u \\ u & v \end{vmatrix}}=\frac{-2u}{2(v^2+u^2)}=-\frac{u}{u^2+v^2}$$

روش دوم

$F=v^2-u^2-2x=0$ و $G=uv-y=0$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(v,x)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(v,u)}}=-\frac{\begin{vmatrix} 2v & -2 \\ u & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2v & -2u \\ u & v \end{vmatrix}}=-\frac{2u}{2(v^2+u^2)}=-\frac{u}{u^2+v^2}$$

۷۴/۱۹۵ نزدیک کدام نقطه (تحت چه شرطی تبدیل $\begin{cases} x=r^2+2s \\ y=s^2-2r \end{cases}$ را می‌توان برای r و s به عنوان تابعی از x و y حل نمود؟

۱) $rs=-1$ ✓۲) $rs\neq -1$

۳) $s+r=0$ ۴) $s^3+r^3\neq 0$

$F=r^2+2s-x=0$ و $G=s^2-2r-y=0$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(r,s)}=\begin{vmatrix} 2r & 2 \\ -2 & 2s \end{vmatrix}=4(rs+1)\neq 0$$

$\to rs+1\neq 0 \to rs\neq -1$

نکته: در دستگاه $\begin{cases} F(x,y,z,w)=0 \\ G(x,y,z,w)=0 \end{cases}$ داریم:

$$\frac{\partial(z,w)}{\partial(x,y)}=(-1)^{\overset{\text{تعداد رابطه‌ها}}{2}}\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,w)}}$$

۷۱
۱۹۴

اگر $\begin{cases} u = x+y+z \\ uv = y+z \\ uvw = z \end{cases}$ مطلوبست $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$

روش اول: x و y و z را برحسب u و v و w محاسبه می‌کنیم

$x = u - uv$, $y = uv - uvw$, $z = uvw$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} 1-v & -u & 0 \\ v-vw & u-uw & -uv \\ vw & uw & uv \end{vmatrix} = u^2 v$$

روش دوم:

$F = u - x - y - z = 0$

$G = uv - y - z = 0$

$H = uvw - z = 0$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = (-1)^3 \frac{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}}{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v & u & 0 \\ vw & uw & uv \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}} = -\frac{u^2 v}{-1} = u^2 v$$

اکسترمم نسبی

کاندیدای اکسترمم نسبی
- گرادیان صفر شود $\longleftrightarrow$ نقطه بحرانی
- گرادیان موجود نباشد $\longleftrightarrow$ نقطه ازولهٔ $\times$

تعریف: اگر $f(x,y)$ دارای مشتقات مرتبه ۲ پیوسته باشد ماتریس هسیان عبارت است از

$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$ مبین $\Delta = \det H = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$

آزمون مشتق دوم: اگر P نقطه بحرانی $f(x,y)$ و مشتقات مرتبه دوم f در P پیوسته باشد:

الف) $\Delta(P)>0$ و $f_{xx}(P)>0 \xleftarrow{\text{تقعر رو به بالا}}$ P نقطه مینیمم نسبی

ب) $\Delta(P)>0$ و $f_{xx}(P)<0 \xleftarrow{\text{تقعر رو به پائین}}$ P نقطه ماکزیمم نسبی

ج) $\Delta(P)<0$ آنگاه P نه max و نه min و لذا نقطه P زینی می باشد

$\frac{124}{25}$ نقطه $(1,1)$ برای $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ چه نوع نقطه ای است

$$\nabla f=(f_x,f_y)=(3x^2-3y\,,\,3y^2-3x)$$

$$\nabla f(1,1)=(0,0)\longrightarrow (1,1) \text{ بحرانی است}$$

$$\Delta=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=(6x)(6y)-(-3)^2 \qquad \overset{①}{\Delta(1,1)}=36-9>0$$

$$② \; f_{xx}(1,1)=6>0 \qquad ①,② \longrightarrow (1,1) \text{ مینیمم نسبی}$$

$\frac{25}{54}$ نقاط بحرانی $f(x,y)=4xy-x^4-y^4$ و نوع آنها

$$\nabla f=(4y-4x^3\,,\,4x-4y^3)=(0,0)\rightarrow\begin{cases}4y-4x^3=0\\4x-4y^3=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}y=x^3\\x=y^3\end{cases}$$

$$\rightarrow y=x^3=y^9 \longrightarrow \begin{cases} y=0\rightarrow x=0 \\ y\neq 0\rightarrow y^8=1\rightarrow y=\pm 1\end{cases}$$

$(0,0)$ ، $(1,1)$ و $(-1,-1)$

$$\Delta=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=(-12x^2)(-12y^2)-(4)^2$$

$(0,0)\longrightarrow\Delta(0,0)=-16<0\longrightarrow (0,0)$ زینی

$(1,1)\rightarrow\begin{cases}\Delta(1,1)>0\\f_{xx}(1,1)=-12<0\end{cases}\longrightarrow (1,1)$ ماکزیمم نسبی

$(-1,-1)\longrightarrow\begin{cases}\Delta(-1,-1)>0\\f_{xx}(-1,-1)=-12<0\end{cases}\longrightarrow (-1,-1)$ ماکزیمم نسبی

اکسترمم مطلق مقید (روش ضرایب لاگرانژ)

هدف یافتن اکسترمم (مطلق) تابع پیوسته $f(x,y,z)$ تحت قید (شرط) $g(x,y,z)=0$ می‌باشد.

قضیه: اگر اکسترمم مطلق تابع پیوسته f تحت قید $g=0$ در نقطه A رخ دهد فقط در دو دستگاه زیر صدق کند:

$$\begin{cases} \nabla f = \underbrace{\lambda}_{\text{ضریب لاگرانژ}} \nabla g \\ g=0 \end{cases}$$

۵ (۲ج.۳۷۷) ماکزیمم مقدار $f(x,y,z)=x-2y+2z$ بر کره $x^2+y^2+z^2=1$ را بیابید.

$g=x^2+y^2+z^2-1=0$

روش اول: $\nabla f=(1,-2,2)$ و $\nabla g=(2x,2y,2z)$

$$\nabla f=\lambda\nabla g \quad \begin{cases} 1=2\lambda x \longrightarrow x=\frac{1}{2\lambda} \\ -2=2\lambda y \longrightarrow y=\frac{-2}{2\lambda} \text{ و } z=\frac{2}{2\lambda} \\ 2=2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{در قید}} \frac{1+4+4}{4\lambda^2}=1 \longrightarrow 4\lambda^2=9 \longrightarrow \lambda=\pm\frac{3}{2}$$

کاندیدای اکسترمم $f\left(\frac{1}{2\lambda},\frac{-2}{2\lambda},\frac{2}{2\lambda}\right)=\frac{1+4+4}{2\lambda}=\begin{cases} 3 & ; \lambda=\frac{3}{2} \\ -3 & ; \lambda=-\frac{3}{2} \end{cases}$

$\longrightarrow max(f)=3$ و $min(f)=-3$

روش دوم: $\vec{u}=(x,y,z)$, $\vec{v}=(1,-2,2)$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=x-2y+2z=f$

$$|u\cdot v|\leq|u||v| \longrightarrow |f|\leq\sqrt{x^2+y^2+z^2}\times\sqrt{1+4+4} \longrightarrow \underbrace{-3}_{min}\leq f\leq \underbrace{3}_{max}$$

نکته: $|\vec{u}\cdot\vec{v}| = |u||v||\cos\theta| \leq |u||v|$

$|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq |\vec{u}||\vec{v}|$ کوشی شوارتز

تساوی رخ می‌دهد $\Leftrightarrow$ $\vec{u} \parallel \vec{v}$

۸۹/۲۰۹ کوتاهترین و بیشترین فاصله مبدأ از خم $x^2+xy+y^2=16$

فاصله (x,y) از مبدأ برابر $\sqrt{x^2+y^2}$ است بهتر است مربع فاصله از مبدأ یعنی $f(x,y)=x^2+y^2$ تحت قید $g=x^2+xy+y^2-16=0$ را بدست آوریم

$\nabla f=(2x,2y)$ و $\nabla g=(2x+y, x+2y)$

$$\nabla f=\lambda\nabla g \quad \begin{cases} 2x=\lambda(2x+y) \\ 2y=\lambda(x+2y) \\ x^2+xy+y^2=16 \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم کنید}} \frac{x}{y}=\frac{2x+y}{x+2y} \to x^2=y^2 \to y=\pm y$$

$$\begin{cases} y=x \xrightarrow{\text{در قید}} 3x^2=16 \longrightarrow x=\pm\frac{4}{\sqrt{3}}=y \\ y=-x \xrightarrow{\text{در قید}} x^2=16 \longrightarrow x=\pm 4=-y \end{cases}$$

$f\left(\frac{4}{\sqrt{3}},\frac{4}{\sqrt{3}}\right)=\frac{32}{3}$ و $f\left(-\frac{4}{\sqrt{3}},-\frac{4}{\sqrt{3}}\right)=\frac{32}{3}$

$f(4,-4)=32$ و $f(-4,4)=32$

$\longrightarrow \max(\text{فاصله})=\sqrt{32}$ و $\min(\text{فاصله})=\sqrt{\frac{32}{3}}$

۱۳/۲ج، ۶۷۶ در صفحه xy کمترین فاصله مبدأ از منحنی $x^2y=54$ را بیابید

فاصله (x,y) از مبدأ $=\sqrt{x^2+y^2}$

کافی است مربع فاصله از مبدأ یعنی $f(x,y)=x^2+y^2$ را تحت قید $x^2y=54$ اکسترمم کنید

روش اول (ضرایب لاگرانژ) $g = x^2y - 54 = 0$

$\nabla f = (2x, 2y)$ و $\nabla g = (2xy, x^2)$

$$\nabla f = \lambda \nabla g \begin{cases} 2x = 2\lambda y & (1) \\ 2y = \lambda x^2 & (2) \\ x^2 y = 54 & (3) \end{cases}$$

در معادله (۱) دو حالت داریم: $\xrightarrow{\text{حالت اول}} x = 0 \xrightarrow{(3)} 0 = 54$ ← جواب ندارد

$\xrightarrow{\text{حالت دوم}} x \neq 0 \xrightarrow{(1)} \lambda = 1/y \xrightarrow{(2)} 2y = \frac{x^2}{y} \rightarrow x^2 = 2y^2$

$\xrightarrow{(3)} 54 = x^2y = (2y^2)y = 2y^3 \rightarrow y = 3 \rightarrow x^2 = 2y^2 = 18$

$\rightarrow \min(f) = x^2 + y^2 = 18 + 9 = 27 \rightarrow$ کمترین فاصله $= \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

روش دوم: از قید داریم $x^2 = \frac{54}{y}$ پس:

$f(x,y) = x^2 + y^2 = \frac{54}{y} + y^2 = \frac{54}{y} + y^2 = h(y)$

$\rightarrow h'(y) = -\frac{54}{y^2} + 2y = 0 \longrightarrow 2y^3 = 54$

$\rightarrow y = 3 \rightarrow h(3) = 18 + 9 = 27 \rightarrow$ کمترین فاصله $= \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

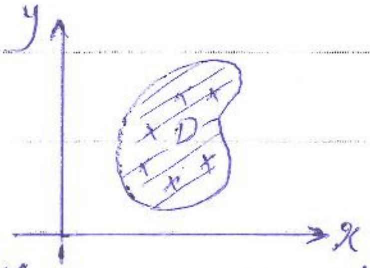
روش سوم $54 = x^2y = x^2 (y^2)^{1/2}$

$\xrightarrow{\min} \frac{x^2}{1} = \frac{y^2}{1/2} \longrightarrow x^2 = 2y^2$

مانند حالت روش اول ← کمترین فاصله: $3\sqrt{3}$

اکسترمم مطلق (روی ناحیه)

تابع پیوسته $f(x,y)$ روی ناحیه $D \subseteq \mathbb{R}^2$ مفروض است که ناحیه D محدود و بسته (یعنی شامل مرز خود است) باشد آنگاه f الزاماً روی D اکسترمم مطلق دارد



روش محاسبه: با مقایسه مقادیر f در نقاط زیر:

۱- نقطه بحرانی را ایزوله داخل D

۲- نقاط مرزی ناحیه D (باید اکسترمم f را روی مرز بیابیم که معمولاً با ضرایب لاگرانژ انجام می‌شود)

$\frac{۹۴}{۲۱۳}$ مقادیر اکسترمم مطلق $f(x,y)=3x^2+2y^2-4y+1$ روی $x^2+y^2 \le 16$ بدست آورید

۱) بحرانی، ایزوله $\nabla f=(6x, 4y-4)=(0,0) \longrightarrow x=0, y=1$

$\longrightarrow (0,1)$ بحرانی $f(0,1)=-1$

۲) مرز ناحیه $x^2+y^2=16$ است که باید اکسترمم f را روی آن بیابیم با روشهای زیر

روش اول (ضرایب لاگرانژ) $g=x^2+y^2-16=0$

$$\nabla g=(2x,2y) \qquad \nabla f=\lambda \nabla g \qquad \begin{cases} 6x=2\lambda x & (1)\\ 4y-4=2\lambda y & (2)\\ x^2+y^2=16 & (3)\end{cases}$$

حالت اول $x=0 \xrightarrow{(3)} y=\pm 4 \qquad f(0,4)=17 \,,\, f(0,-4)=49$

حالت دوم $x\neq 0 \xrightarrow{(1)} \lambda=3 \xrightarrow{(2)} 4y-4=6y \longrightarrow y=-2 \xrightarrow{(3)}$

$x^2=16-y^2=12 \longrightarrow x=\pm\sqrt{12} \longrightarrow f(\pm\sqrt{12},-2)=53$

روی مرز $\longrightarrow \max = 53$ و $\min = 17$

روش دوم: از معادله مرز داریم $0 \leq x^2 = 16 - y^2 \rightarrow 16 - y^2 \geq 0$

$\rightarrow y^2 \leq 16 \rightarrow -4 \leq y \leq 4$

روی مرز $f = 3(16-y^2) + 2y^2 - 4y + 1 = -y^2 - 4y + 49$

حال باید اکسترمم $h(y) = -y^2 - 4y + 49$ را روی $-4 \leq y \leq 4$ بیابیم

$h'(y) = -2y - 4 = 0 \longrightarrow y = -2$

y	-2	4	-4
$h(y)$	53	17	49

روی مرز $\rightarrow \max = 53$ و $\min(f) = 17$

با مقایسه مقادیر داریم: $\max(f) = 53$ و $\min(f) = -1$

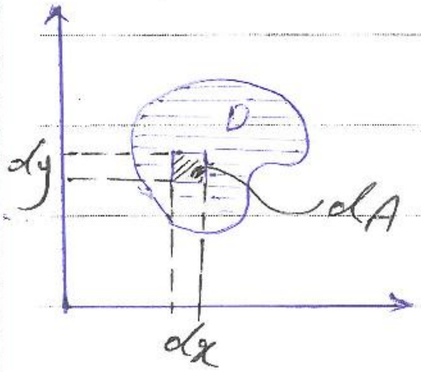
مثال: مقادیر اکسترمم مطلق $f(x, y) = -x + 4y + 1$ روی ناحیه مثلثی شکل با اضلاع زیر را بیابید $y = x$ و $y + x = 2$ و $y = 0$

رأس	$(1,1)$	$(0,0)$	$(2,0)$
f	4	1	-1

$\longrightarrow \max(f) = 4 \quad \min(f) = -1$

نکته: اگر $f(x,y) = ax + by + c$ و ناحیه چندضلعی باشد (یعنی همه اضلاع ناحیه خط باشند) آنگاه اکسترمم مطلق در رئوس ناحیه رخ می دهد (کاندیدای اکسترمم مطلق)

فصل چهارم
انتگرال توابع چند متغیره

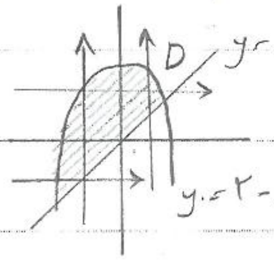


$D \subseteq \mathbb{R}^2$ یک ناحیه باشد و $f(x,y)$ پیوسته باشد

$dA = dy\,dx = dx\,dy$ المان سطح انتگرال

$\iint_D f(x,y)\,dA =$ دوگانه f روی D

$\frac{1}{287}$ D ناحیه محدود بین $y=x$ و $y=2-x^2$ است مطلوبست $\iint_D x\,dA$



روش اول $x = 2-x^2 \to x = -2, 1$

روش اول $\iint_D x\,dy\,dx = \int_{-2}^{1}\int_{x}^{2-x^2} x\,dy\,dx$

$= \int_{-2}^{1} xy\Big|_{x}^{2-x^2} dx = \int_{-2}^{1} \left(x(2-x^2) - x^2\right) dx$

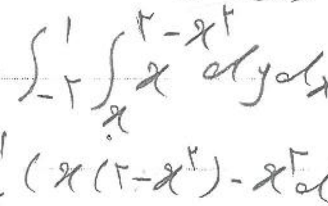
$\to \iint_D x\,dy\,dx = -9/4$

روش دوم: $y = 2-x^2 \to x = \pm\sqrt{2-y}$

$\iint_D x\,dA = \int_{1}^{2}\int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} x\,dx\,dy + \int_{-2}^{1}\int_{-\sqrt{2-y}}^{y} x\,dx\,dy = -9/4$

$\frac{12}{293}$ اگر D ناحیه $0<y<b$ و $x+y<0$ مطلوبست $\iint_D e^{x/y}\,dy\,dx$

$x+y=0 \to x=-y$



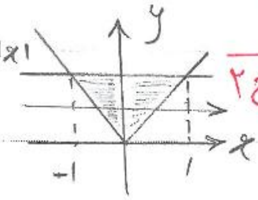
$\iint_D e^{x/y}\,dy\,dx = \int_0^b \left(\int_{-\infty}^{-y} e^{x/y}\,dx\right) dy$

$= \int_0^b y\,e^{x/y}\Big|_{-\infty}^{-y} dy = \int_0^b \left(y e^{-1} - \cancel{y e^{-\infty}}\right) dy = e^{-1}\int_0^b y\,dy$

$= \frac{1}{2} b^2 e^{-1}$

$$\int_{-1}^{1}\int_{|x|}^{1} e^{y^2}\,dy\,dx$$

ناحیه $\begin{cases} |x|<y<1 \\ -1\le x\le 1 \end{cases}$ $\quad y=|x|$

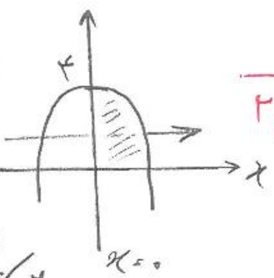


۱۳۴ / ۲ج.۵۵۴

انتگرال $= \int_0^1\int_{-y}^{y} e^{y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 2y e^{y^2}\,dy = e^{y^2}\Big|_0^1 = e-1$

$$\int_0^2\int_0^{4-x^2} \frac{x e^{2y}}{4-y}$$

ناحیه $\begin{cases} 0\le y\le 4-x^2 \\ 0\le x\le 2 \end{cases}$ $\quad x=\sqrt{4-y}$, $\quad y=0$



۲ / ۲ج ۳۷۷

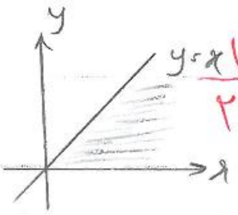
انتگرال $= \int_0^4\int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{e^{2y}}{4-y}\,x\,dx\,dy = \frac12\int_0^4 \frac{e^{2y}}{4-y}\,x^2\Big|_0^{\sqrt{4-y}}dy$

$= \frac12\int_0^4 e^{2y}\,dy = \frac14 e^{2y}\Big|_0^4 = \frac14(e^8-1)$

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{x} x e^{-x^2/y}\,dy\,dx = \int_0^{+\infty}\int_y^{+\infty} x e^{-x^2}\,dx\,dy$$

$= \int_0^{+\infty} -\frac{y}{2} e^{-x^2/y}\Big|_y^{+\infty}dy = \int_0^{+\infty}\frac12 y e^{-y}\,dy$

$= \frac12\int_0^{+\infty} y^1 e^{-y}\,dy = \frac12\Gamma(2) = \frac12$



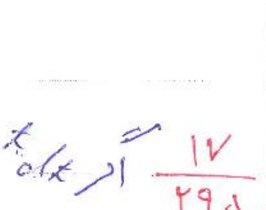
۱۹ / ۲۹۶

اگر $F(x)=\int_1^x e^{t^2}dt$ مطلوبست $I=\int_0^1 F(x)\,dx$ — ۱۷ / ۲۹۵

توجه کنید که باید از $F(x)$ برای $0<x<1$ انتگرال بگیریم ولذا در $F(x)$ کران بالا از پایین کوچکتر است پس : $F(x)=-\int_x^1 e^{t^2}dt$

$I=\int_0^1 F(x)\,dx = -\int_0^1\int_x^1 e^{t^2}\,dt\,dx = -\int_0^1\int_0^t e^{t^2}\,dx\,dt$

$= -\int_0^1 t e^{t^2}\,dt = -\frac12 e^{t^2}\Big|_0^1 = -\frac12(e-1)$



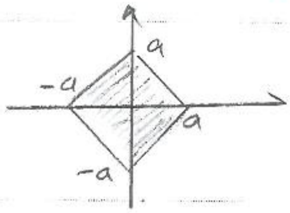
نکته : اگر تابع پیوسته f نسبت به متغیری فرد باشد و معادله مرز ناحیه نسبت به همان متغیر زوج باشد انتگرال تابع f روی آن ناحیه صفر می‌شود

$\iint_R (x^3\cos^2 y+3\sin y-\pi)\,dA=?$ $\quad R: |x|+|y|\le 1$ ۳۷ / ۲ج ۶/۱۳

انتگرال $=\iint_R x^3\cos^2 y\,dA+\iint_R 3\sin y\,dA-\pi\iint_R dA$

که نسبت به y فرد است — که تابع نسبت به x فرد است

معادله ناحیه نسبت به y زوج است — معادله ناحیه نسبت به x زوج است



انتگرال $=-\pi\iint_R dA=-2\pi$

که مساحت ناحیه R

$(a\sqrt{2})^2=2a^2=2$

تغییر متغیر (مختصات قطبی)

معمولاً وقتی معادله مرز ناحیه دایره یا قسمتی از دایره باشد برای محاسبه انتگرال از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم

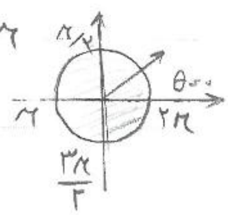
$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \longrightarrow dA=r\,dr\,d\theta \\ x^2+y^2=r^2 \end{cases}$$

$\iint_R e^{-(x^2+y^2)}\,dA \xrightarrow{\text{قطبی}} \int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta$ $\quad R: x^2+y^2\le 1$ ۲۸ / ۳،۱

$=\left(\int_0^1 r e^{-r^2}dr\right)\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)=-\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_0^1\times 2\pi$

2π

$=\pi(1-e^{-1})$

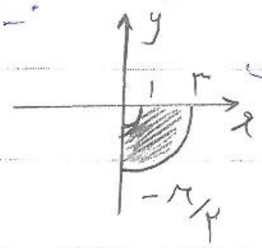


نکته: $\int_a^b\int_c^d f(x)g(y)\,dx\,dy=\left(\int_a^b g(y)\,dy\right)\left(\int_c^d f(x)\,dx\right)$

a و b و c و d عدد

$g(x)\times f(x)$

مثال: اگر D ناحیه محدود بین دو دایره $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=9$ در ربع چهارم باشد مطلوبست



$$\iint_D \frac{dA}{x^2+y^2} = \int_{-\pi/2}^{0}\int_1^3 \frac{r}{r^2}\,dr\,d\theta$$

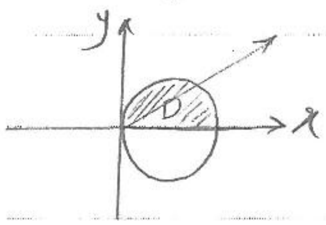
$$= \left(\int_1^3 \frac{dr}{r}\right)\left(\int_{-\pi/2}^{0} d\theta\right) = \frac{\pi}{2}\ln 3$$

۳۱/۳.۲ D ناحیه درون دایره $x^2+y^2=ax$ $(a>0)$ مطلوبست

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = 2\iint_{D'} \frac{dA}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{a\cos\theta}\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}\,d\theta = 2\int_0^{\pi/2} -\sqrt{a^2-r^2}\Big|_0^{a\cos\theta}$$

$$= -2\int_0^{\pi/2}(a\sin\theta - a)\,d\theta = -2(-a\cos\theta - a\theta)\Big|_0^{\pi/2}$$

چون تابع تحت انتگرال ومعادله ناحیه هر دو نسبت به y زوج هستند پس D در $y>0$ وجواب را در ۲ ضرب می‌کنیم



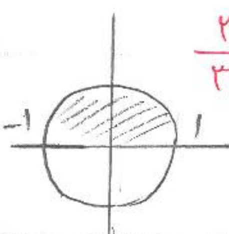
$r=a\cos\theta$

$$\int\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}} \xrightarrow[du=-2r\,dr]{u=a^2-r^2} \int -\tfrac{1}{2}u^{-1/2}\,du = -u^{1/2} = -\sqrt{a^2-r^2}$$

۳۲/۳.۲

$$\int_{-1}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}}(x^2+y^2)^{3/2}\,dy\,dx$$

ناحیه $\begin{cases} 0\le y\le\sqrt{1-x^2} \\ -1\le x\le 1\end{cases}$



$y=\sqrt{1-x^2} \to x^2+y^2=1 \to r=1$

انتگرال $= \int_0^{\pi}\int_0^1 r^3\, r\,dr\,d\theta = \left(\int_0^{\pi} d\theta\right)\left(\int_0^1 r^4\,dr\right) = \frac{\pi}{5}$

تغییر متغیر در حالت کلی

۳۵
۳.۶

D ناحیه محصور به $x-2y=1$ و $x-2y=2$ و $x+2y=1$ و $x+2y=3$
مطلوبست

$$\iint_D \left(\frac{x-2y}{x+2y}\right)^3 dx\,dy$$

$$\begin{cases} u = x-2y \\ v = x+2y \end{cases} \quad , \quad D: \begin{cases} 1 \le u \le 2 \\ 1 \le v \le 3 \end{cases}$$

$$\frac{1}{J} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \quad |J| = \frac{1}{4}$$

$$\text{انتگرال} = \int_1^3\int_1^2 \left(\frac{u}{v}\right)^3 \left(\frac{1}{4} du\,dv\right) = \left(\frac{1}{4}\int_1^3 \frac{dv}{v^3}\right)\left(\int_1^2 u^3 du\right) = \cdots$$

نکته:

$$dA = |J|\,du\,dv = |J|\,dv\,du$$

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \longrightarrow \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{J}$$

***

۳۶
۳.۶

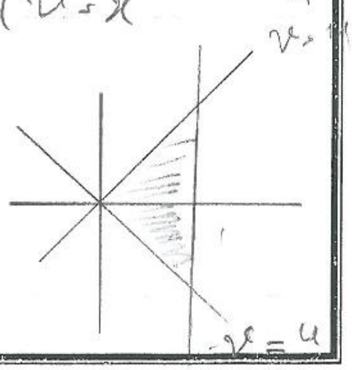
D ناحیه محدود به $x+y=1$ و $x=0$ و $y=0$ مطلوبست

$$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\, dx\,dy \qquad \begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$$

$$x+y=1 \rightarrow u=1$$

$$x=0 \begin{cases} u=y \\ v=-y \end{cases} \rightarrow v=-u \qquad y=0 \longrightarrow \begin{cases} u=x \\ v=x \end{cases} \rightarrow v=u$$

$$\frac{1}{J} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \quad |J| = \frac{1}{2}$$



$$\text{انتگرال} = \int_0^1\int_{-u}^{u} e^{v/u}\left(\tfrac{1}{2} dv\,du\right) = \tfrac{1}{2}\int_0^1 u\,e^{\frac{v}{u}}\Big|_{-u}^{u} du$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^1 u(e^1 - e^{-1})\,du = \tfrac{1}{4}(e - e^{-1})$$

۳۷
۳.۷
R ناحیه محدود به منحنی‌های $xy=4$ و $xy=2$ ، $y^2=3x$ و $x=y^2$ می‌باشد مطلوبست

$$\iint_R \frac{x^2}{y^4}\,dx\,dy \qquad \begin{cases} u=xy & u=2\ ,\ u=4 \\ v=y^2/x & v=1\ ,\ v=3 \end{cases}$$

$$\frac{1}{J}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x}\end{vmatrix}=\frac{3y^2}{x}=3v \longrightarrow |J|=\frac{1}{3v}$$

$$\iint_R \frac{x^2}{y^4}\,dA=\iint_R \left(\frac{x}{y^2}\right)^2 dA=\int_1^3\int_2^4 \frac{1}{v^2}\,\frac{1}{3v}\,du\,dv$$
$$=\left(\frac13\int_1^3 \frac{dv}{v^3}\right)\left(\int_2^4 du\right)=\cdots$$

نکته: هرگاه ناحیه داخل بیضی باشد قرار می‌دهیم

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\begin{cases} x=ar\cos\theta \\ y=br\sin\theta \end{cases} \longrightarrow J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=abr \qquad 0\le r\le 1,\quad 0\le\theta\le 2\pi$$

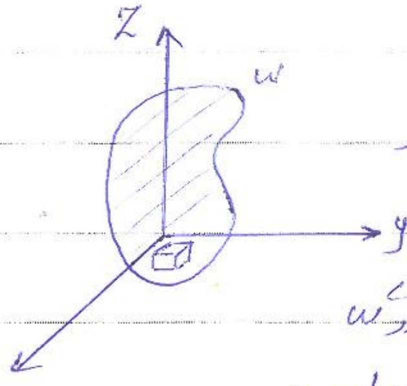
۸۰
۲ج۲۹۴
R ناحیه داخل $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{9}=1$ است مطلوبست

$$\iint_R (x^2+y^2)\,dA \qquad a=1\ ,\ b=3 \rightarrow \begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=3r\sin\theta \end{cases} \rightarrow J=3r$$

$$r^2(\cos^2\theta+9\sin^2\theta)$$

$$\text{انتگرال}=\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^2\cos^2\theta+9r^2\sin^2\theta)\times 3r\,dr\,d\theta$$
$$=\left(3\int_0^{2\pi}(1+8\sin^2\theta)\,d\theta\right)\left(\int_0^1 r^3\,dr\right)=\frac34\int_0^{2\pi}(5-4\cos2\theta)\,d\theta$$
$$=\frac34\left(\overset{10\pi}{5\theta}-\cancel{2\sin2\theta}\right)\Big|_0^{2\pi}=\frac{15\pi}{2}$$

انتگرال سه‌گانه



$f(x,y,z)$ پیوسته و $W \subseteq \mathbb{R}^3$ یک ناحیه می‌باشد

۶ حالت: $dV = dz\,dy\,dx = dx\,dy\,dz = \dots$ المان حجم

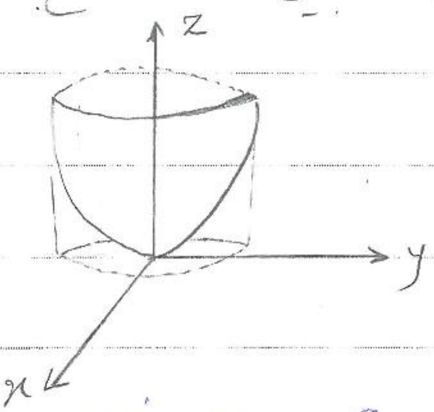
$\iiint_W f(x,y,z)\,dV$ = انتگرال سه‌گانه f روی W

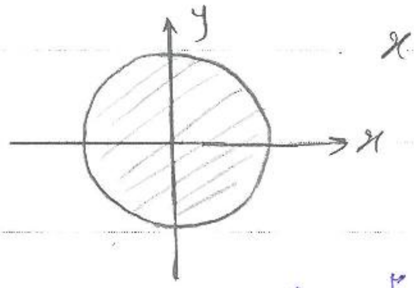
تذکر: چنانچه $f=1$ حاصل انتگرال بالا برابر حجم W است

مثال: W را ناحیه محدود به سطح $z = x^2+y^2$ و صفحه $z=1$ می‌گیریم انتگرالی بنویسید که حجم ناحیه را با المان $dV = dz\,dx\,dy$ توصیف کنید.

$$\text{حجم} = \iiint dV = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{x^2+y^2}^{1} dz\,dx\,dy$$

همواره برای حدود x و y ناحیه W را بر صفحه xy تصویر کرده و آن را در دوگانه توصیف می‌نمائیم. برای تصویر کردن کافی است متغیر z را بین معادله سطوح حذف نمائیم تا $x^2+y^2=1$ به عنوان مرز تصویر بدست آید

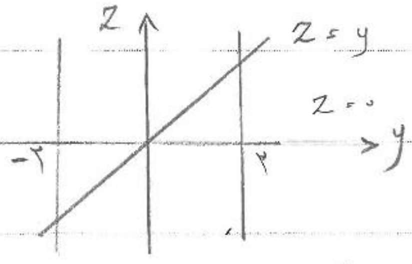




$x^2+y^2=1$

$x=\pm\sqrt{1-y^2}$

۱۱۶ — حجم ناحیه محدود به $x = 4 - y^2$ و $z = y$ و $z=0$ و $x=0$ در ناحیه $z>0$



$4 - y^2 = 0 \longrightarrow y = \pm 2$

$$\text{حجم} = \iiint dV = \int_0^2\int_0^y\int_0^{4-y^2} dx\,dz\,dy$$

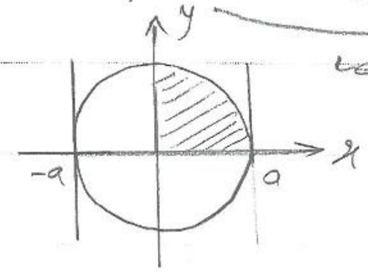
$$= \int_0^2\int_0^y (4-y^2)\,dz\,dy = \int_0^2 y(4-y^2)\,dy = \left(2y^2 - \frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^2 = 4$$

$\frac{۴۶}{۳۱۲}$ حجم ناحیه محدود به استوانه‌های زیر را بیابید $x^2+y^2=a^2$ و $x^2+z^2=a^2$
۱۰

روش اول: چون تابع و همه معادله مرزها نسبت به x و y و z زوج هستند پس
$x\geq 0$ و $y\geq 0$ و $z\geq 0$ و جواب را در ۸ ضرب می‌کنیم

$\frac{1}{8}$ اول فضا

$$\begin{cases} x^2+z^2=a^2 \to z=\sqrt{a^2-x^2} \\ x^2+y^2=a^2 \\ x=0,\ y=0,\ z=0 \end{cases}$$



$$y=\sqrt{a^2-x^2} \to x^2+y^2=a^2$$

$$\text{حجم} = \iiint_{\text{کل ناحیه}} dv = 8\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dz\,dy\,dx$$

$$=\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2}\,dy\,dx = 8\int_0^a (a^2-x^2)\,dx = \frac{16}{3}a^3$$

روش دوم: (حل بدون تقارن)

$$\text{حجم} = \iiint dv = \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dz\,dy\,dx = \frac{16}{3}a^3$$

مختصات (تغییر متغیر) استوانه‌ای

هرگاه تصویر بر صفحه xy را در قطبی بنویسیم، مختصات حاصل استوانه‌ای می‌گوییم

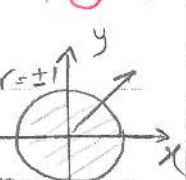
$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \to dv = r\,dz\,dr\,d\theta \\ z=z \end{cases} \qquad \to \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}$$

همواره حدود r و θ با تصویر ناحیه بر صفحه xy را در قطبی می‌نویسیم

مثال: حجم ناحیه محدود به $z=x^2+y^2$ و $z=1$ را بیابید

$$\text{حجم} = \iiint dv = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^1 r\,dz\,dr\,d\theta$$

حذف z ← $r^2=1$ و $r=\pm1$



$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r-r^3)\,dr\,d\theta = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^1 (r-r^3)\,dr\right) = \frac{\pi}{2}$$

نکته: حجم ناحیه محدود به سهمی‌گون (۰،۰،۰) راس $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ یا $z=k-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ (۰،۰،k) راس

وصفحه عمود بر محور آن یعنی $z=\alpha$ برابر است با

حجم = $\frac{1}{2}$ × قاعده مساحت × ارتفاع

فاصله راس تا صفحه — مساحت شکل حاصل از حذف z

$\frac{۴۸}{۳۱۶}$ حجم ناحیه محدود بالا صفحه xy و بین $z=x^2+y^2$ و استوانه $x^2+y^2=a^2$ را بیابید

$$\text{حجم} = \iiint dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{r^2} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} r^3\,dr\,d\theta$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{a} r^3\,dr\right) = \frac{\pi}{2}a^4$$

$\frac{۴}{۲ج ۱،۹}$ حجم ناحیه محدود به $z=x^2+y^2$ و $z=\sqrt{x^2+y^2}$

$$\begin{cases} z=r^2 \\ z=r \end{cases} \to r^2=r \to r=0,1 \to r\leq 1 \quad \text{داخل}$$

$$\text{حجم} = \int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_{r^2}^{r} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{1}(r^2-r^3)\,dr\,d\theta$$

$$= \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)}_{2\pi}\underbrace{\left(\int_0^{1}(r^2-r^3)\,dr\right)}_{1/12} = \frac{\pi}{6}$$

$\frac{۴}{۲ج ۴۶۱}$ R ناحیه محدود داخل کره $x^2+y^2+z^2=4a^2$ و خارج استوانه $x^2+y^2=a^2$ می‌باشد مطلوبست

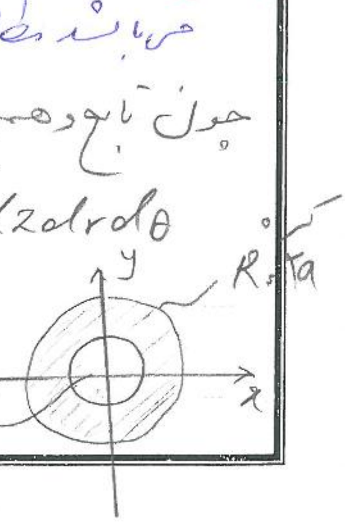
$$\iiint_R (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$$

چون تابع و هم مرزها نسبت به متغیر z زوج هستند پس $z\geq 0$ و جواب را در ۲ ضرب می‌کنیم

$$\text{انتگرال} = 2\iiint_R \underbrace{(x^2+y^2)}_{r^2}\,dv = 2\int_0^{2\pi}\int_a^{2a}\int_0^{\sqrt{4a^2-r^2}} r^2 \cdot r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_a^{2a} r^3\sqrt{4a^2-r^2}\,dr\,d\theta \qquad z=\sqrt{4a^2-r^2}$$

$$= \left(2\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_a^{2a} r^3\sqrt{4a^2-r^2}\,dr\right) =$$



$$= 4\pi \int_{3a^2}^{0} (4a^2 - u)\, u^{1/2} \left(-\tfrac{1}{2}\, du\right) = -2\pi \left(\frac{8}{3} a^2 u^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_{3a^2}^{0}$$

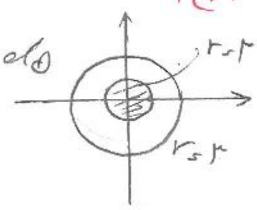
$$= \frac{44}{5}\pi\sqrt{3}\, a^5 = \text{جواب}$$

$$\begin{cases} u = 4a^2 - r^2 \\ du = -2r\,dr \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r = a \rightarrow u = 3a^2 \\ r = 2a \rightarrow u = 0 \end{cases}$$

۱۸ (۲ج۱۷) حجم ناحیه محدود به $z = 9 - x^2 - y^2$ و صفحه $z = 0$ و داخل $x^2 + y^2 = 4$ را بیابید

$$\text{حجم} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{9-r^2} r\, dz\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{2} r(9 - r^2)\, dr\, d\theta$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{2} (9r - r^3)\, dr\right) = 28\pi$$



۲۱ (۲ج۳۷۹) حجم ناحیه محدود بین $z = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25}$ و $z = 10$ را بیابید

روش اول: ۱۰ = ارتفاع $\longleftarrow$ $(0,0,0)$ راس

$$\text{حذف } z \longrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 10 \longrightarrow \frac{x^2}{160} + \frac{y^2}{250} = 1$$

$$\pi ab = \pi(\sqrt{160})(\sqrt{250}) = 200\pi = \text{مساحت قاعده}$$

$$\text{حجم} = \tfrac{1}{2} \times \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع} = 1000\pi$$

روش دوم:

$$\text{حجم} = \iint_D \int_{\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}}^{10} dz\, dA = \iint_D \left(10 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25}\right) dA$$

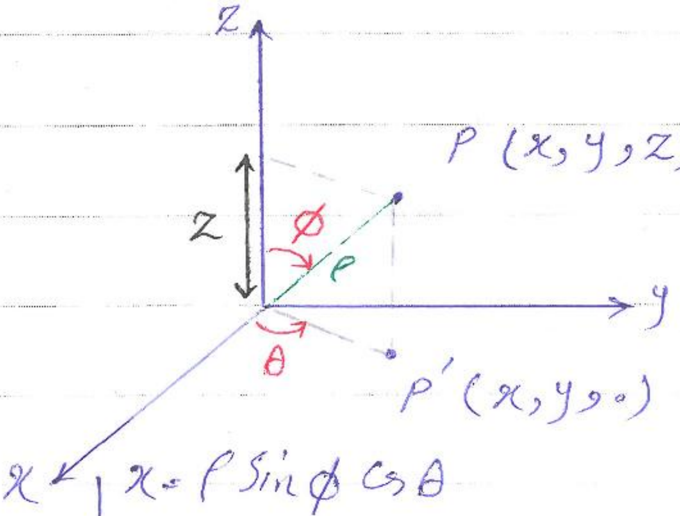
D تصویر ناحیه بر صفحه xy یعنی داخل بیضی $\underbrace{\frac{x^2}{160}}_{a^2} + \underbrace{\frac{y^2}{250}}_{b^2} = 1$ می‌باشد

$$\begin{cases} x = ar\cos\theta = \underbrace{\sqrt{160}}_{4\sqrt{10}}\, r\cos\theta \\ y = br\sin\theta = \underbrace{\sqrt{250}}_{5\sqrt{10}}\, r\sin\theta \end{cases} \rightarrow J = abr = 200r$$

$$\text{حجم} = \int_0^{2\pi}\int_0^{1} (10 - 10r^2)(200\, r\, dr\, d\theta) = \left(2000\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^1 r(1 - r^2)\, dr\right)$$

$$1000\pi = \text{حجم}$$

مختصات (تغییر متغیر) کروی



$P(x,y,z) \leftrightarrow (\rho,\phi,\theta)$

$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\rho\sin\phi=\sqrt{x^2+y^2}$

$$\begin{cases} x=\rho\sin\phi\cos\theta \\ y=\rho\sin\phi\sin\theta \\ z=\rho\cos\phi \end{cases}$$

$\rho\geq 0$

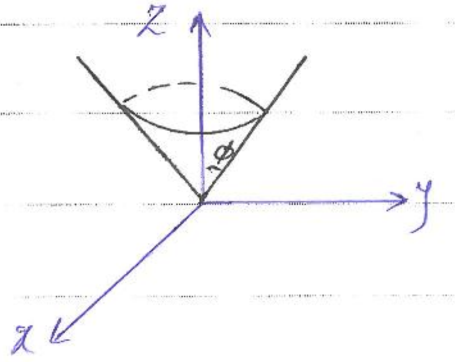
$0\leq\phi\leq\pi$

$0\leq\theta\leq 2\pi$ یا $-\pi\leq\theta\leq\pi$

نکته: ۱) $\rho=a>0 \leftrightarrow x^2+y^2+z^2=a^2$ کره به مرکز مبدأ و شعاع a

۲) $\phi=\phi_0 \rightarrow$ مخروط

$\phi_0\neq 0,\pi,\pi/2$



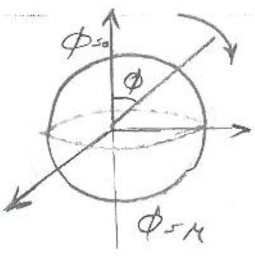
$$dV=\underbrace{\rho^2\sin\phi}_{\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)}}\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$\frac{۵۸}{۳۲۴}$ داخل کره $x^2+y^2+z^2=1$ مطلوبست

$$\iiint e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dV=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1}e^{\rho^3}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$=\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^{\pi}\sin\phi\,d\phi\right)\left(\int_0^{1}\rho^2e^{\rho^3}d\rho\right)$$

$$=2\pi\times 2\times\frac{1}{3}e^{\rho^3}\Big|_0^1=\frac{4\pi}{3}(e-1)$$



مثال: ω را ناحیه محدود بین $x^2+y^2+z^2=1$ و $x^2+y^2+z^2=4$ در فضای $0 \geq x$ و $0 \geq y$ و $0 \geq z$ می‌گیریم مطلوبست $\iiint \frac{dv}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$z \geq 0 \to 0 \leq \phi \leq \pi/2$ $\quad x \leq 0$ و $y \geq 0 \xrightarrow{\text{ربع دوم}} \pi/2 \leq \theta \leq \pi$

$$= \int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{\pi/2}\int_1^2 \frac{\rho^2 \sin\phi}{\rho \sin\phi}\, d\rho\, d\phi\, d\theta = \left(\int_{\pi/2}^{\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/2} d\phi\right)\left(\int_1^2 \rho\, d\rho\right)$$

$$= \pi/2 \times \pi/2 \times 3/2 = \frac{3\pi^2}{8}$$

مثال: مطلوبست $\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0}\int_0^{+\infty} \frac{y}{x^2+y^2+z^2} e^{-(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$

$x \geq 0$ و $y \leq 0 \xrightarrow[\text{ربع چهارم}]{} -\pi/2 \leq \theta \leq 0$ $\quad z \leq 0 \to \pi/2 \leq \phi \leq \pi$

چون ρ در معادله مرزها دیده نمی‌شود پس $0 \leq \rho$

$$\text{انتگرال} = \int_{-\pi/2}^{0}\int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\rho \sin\phi \sin\theta}{\rho^2} e^{-\rho}\rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= \left(\int_{-\pi/2}^{0} \sin\theta\, d\theta\right)\left(\int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2\phi\, d\phi\right)\left(\int_0^{+\infty} \cancel{\rho} e^{-\rho} \cancel{\rho^2}\, d\rho\right)$$

$-1 \qquad \sin^2\phi = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2\phi)$

$$-\tfrac{1}{2} e^{-\rho}\Big|_0^{+\infty} = \tfrac{1}{2}$$

$\frac{۲۱}{\text{ج ۲ ص ۴۷۴}}$ D ناحیه بالای مخروط $z = \sqrt{x^2+y^2}$ و داخل کره $x^2+y^2+z^2=1$ $(\rho=1)$ می‌باشد مطلوبست $\iiint_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dv$

$$z = \sqrt{x^2+y^2} \to \rho\cos\phi = \rho\sin\phi \to \phi = \pi/4$$

$$\text{انتگرال} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^1 \rho\,\rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/4} \sin\phi\, d\phi\right)\left(\int_0^1 \rho^3 d\rho\right) = 2\pi\left(-\cos\phi\Big|_0^{\pi/4}\right)\left(\tfrac{1}{4}\right)$$

$$= \pi/2\left(-\sqrt{2}/2 + 1\right)$$

تغییر متغیر خاص در سه گانه

۱) برای ناحیه داخل $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ قرار دهید

$$\begin{cases} x=a\rho\sin\phi\cos\theta \\ y=b\rho\sin\phi\sin\theta \\ z=c\rho\cos\phi \end{cases} \rightarrow J=abc\rho^2\sin\phi$$

ناحیه داخل بیضی گون به ناحیه داخل کره $\rho=1$ فرستاده می شود و لذا داریم

$$\begin{cases} 0\leq\rho\leq 1 \\ 0\leq\phi\leq\pi \\ 0\leq\theta\leq 2\pi \end{cases}$$

وضمناً:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\rho^2 \\ \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}=\rho\sin\phi \end{cases}$$

مثال: اگر S ناحیه داخل بیضی گون $x^2+4y^2+z^2=4$ باشد مطلوب است

$$\iiint_S \sqrt{x^2+4y^2+z^2}\,dv$$

بیضی گون $\rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}+\frac{z^2}{4}=1 \qquad a=2,\ b=1,\ c=2$

$$\rightarrow J=abc\rho^2\sin\phi=4\rho^2\sin\phi$$

$$\sqrt{x^2+4y^2+z^2}=\sqrt{4\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}+\frac{z^2}{4}\right)}=2\rho$$

انتگرال $=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 2\rho\,(4\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta)$

$$=\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^{\pi}\sin\phi\,d\phi\right)\left(\int_0^1 8\rho^3\,d\rho\right)=8\pi$$

۲) ممکن است با توجه به معادله مرزهای ناحیه و تابع تحت انتگرال به متغیرهای u و v و w را برحسب x و y و z تعیین کنیم و با تغییر متغیر انتگرال را محاسبه نماییم

$dV=|J|\,du\,dv\,dw$

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\longrightarrow\frac{1}{J}=\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$$

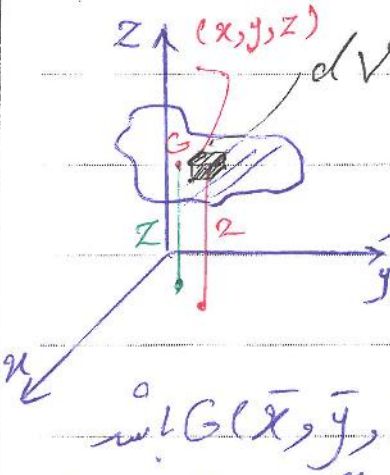
۱۴ / ۲ج ۶۷۶ — حجم ناحیه محدود به سطح زیر را بیابید

$$\overbrace{(5x+2y+z)^2}^{u}+\overbrace{(y-z+5)^2}^{v}+\underbrace{(5z+3)^2}_{w}=25$$

$$\text{حجم}=\iiint_D dV=\iiint\frac{1}{25}\,du\,dv\,dw=\frac{1}{25}\times(\text{حجم ناحیه در دستگاه جدید})=\frac{1}{25}\times\frac{4\pi}{3}(5)^3=\frac{20\pi}{3}$$

سطح $\longrightarrow u^2+v^2+w^2=25\longrightarrow$ کره

$$\frac{1}{J}=\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix}5&2&1\\0&1&-1\\0&0&5\end{vmatrix}=25\longrightarrow|J|=\frac{1}{25}$$



کاربردهای انتگرال

فرض کنید $W\subseteq\mathbb{R}^3$ یک ناحیه باشد به طوریکه در هر نقطه (x,y,z) از آن چگالی برابر $\delta(x,y,z)=\delta$ می‌باشد

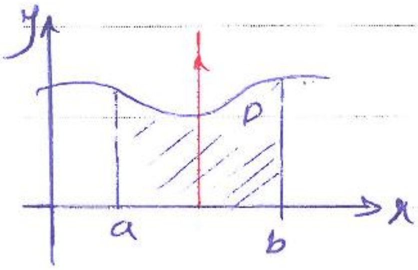
جرم : $M=\iiint_W \delta\,dV$

و چنانچه نقطه تعادل (مرکز جرم، مرکز ثقل) نقطه $G(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ باشد

$M_{xy}=\iiint_W \overset{\text{فاصله}}{z}\,\underbrace{\delta\,dV}_{\text{جرم}}$: گشتاور نسبت به صفحه xy

$$\bar{z}=\frac{M_{xy}}{M}=\frac{\iiint_W z\,\delta\,dV}{\iiint_W \delta\,dV}$$

و چنانچه در روابط بالا $\delta=1$ فرض شود، حاصل برابر مرکز هندسی ناحیه خواهد بود



تذکر: مرکز هندسی ناحیه $G(\bar{x},\bar{y})$ می باشد

$$\bar{x}=\frac{\iint_D x\,dA}{\iint_D dA}=\frac{\int_a^b\int_0^{f(x)} x\,dy\,dx}{\int_a^b\int_0^{f(x)} dy\,dx}=\frac{\int_a^b x f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$$

$$\bar{y}=\frac{\iint_D y\,dA}{\iint_D dA}=\frac{\int_a^b\int_0^{f(x)} y\,dy\,dx}{\int_a^b\int_0^{f(x)} dy\,dx}=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$$

۲۸ / ۲ج ۲۸۷ فاصله مرکز ثقل جسم همگن محدود به $Z=x^2+y^2$ و $Z=4$ از صفحه xy چقدر است

$Z=r^2$

جسم همگن: جسمی که چگالی آن در همه نقاط عدد ثابت باشد و لذا می توان فرض کرد

$\delta=1 \rightarrow$ مرکز هندسی

$$Z=\frac{\iiint_W z\,dv}{\iiint_W dv}=\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r^2}^4 z\,r\,dz\,dr\,d\theta}{\frac{1}{2}\times\text{ارتفاع}\times\text{مساحت قاعده}}=\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^2 (8r-\frac{1}{2}r^5)\,dr\,d\theta}{8\pi}$$

$$Z=\frac{\frac{64\pi}{3}}{8\pi}=\frac{8}{3}$$

چون معادله مرزهای ناحیه نسبت به x زوج هستند پس ناحیه نسبت به صفحه $x=0$ متقارن است و لذا $\bar{x}=0$ با استدلال مشابه $\bar{y}=0$

فصل پنجم

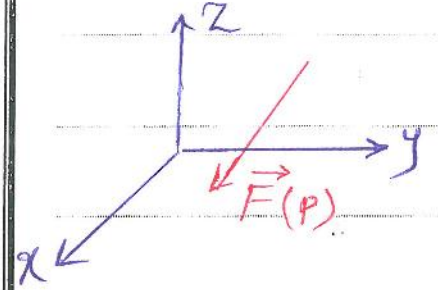
انتگرال روی خم و سطح

میدان برداری

تعریف: هر تابع به شکل $\vec{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(n=2,3)$ را میدان برداری می‌نامیم و به توابع $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ میدان اسکالر (عددی) می‌گوییم

$$f(x,y,z) = xyz : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$f(x,y,z) = (xyz, -e^x, xy - z^2) \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$



نیرو $\longleftrightarrow$ میدان بردار

تعریف: $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ میدان بردار، $\phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ میدان اسکالر و عملگر نابلا $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ می‌باشد.

دیورژانس

1) $$\operatorname{div}(F) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

کرل (چرخش)

2) $$\operatorname{curl}(F) = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

3) $$\underbrace{\Delta \phi = \nabla^2 \phi = \operatorname{div}(\nabla \phi)}_{\text{لاپلاسین } \phi} = \phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

و چنانچه $\nabla^2 \phi = 0$ می‌گوییم ϕ تابعی همساز (هارمونیک) می‌باشد.

۲۷/۲ج۶۷۸ اگر $\vec{F}=x^2\vec{i}+(2x-y)\vec{j}+yz\vec{k}$ مطلوبست $curl F$

$$curl F=\nabla\times F=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & 2x-y & yz \end{vmatrix}=(z,0,2)=z\vec{i}+2\vec{k}$$

۳۸/۲ج۱۹ مقادیر α و β را طوری بیابید که تابع زیر همساز باشد

$$u(x,y)=x^3+\alpha x^2y+\beta xy^2+y^3$$

می‌دانیم شرط همساز بودن آن است که $\nabla^2 u=0$

$$\nabla u=(u_x,u_y)=(3x^2+2\alpha xy+\beta y^2,\ \alpha x^2+2\beta xy+3y^2)$$

$$\nabla^2 u=div(\nabla u)=(6x+2\alpha y)+(2\beta x+6y)=(6+2\beta)x$$

$$+(6+2\alpha)y=0 \longrightarrow \begin{cases} 6+2\beta=0 \\ 6+2\alpha=0 \end{cases} \longrightarrow \alpha=-3,\ \beta=-3$$

نکته: اگر $\phi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ و $\vec{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ دارای مشتقات جزئی پیوسته از مرتبه دوم پیوسته باشند آنگاه:

1) $curl(\nabla\phi)=\vec{0}$

2) $div(curl F)=0$

3) $div(\phi\vec{F})=\nabla\cdot(\phi\vec{F})=\nabla\phi\cdot F+\phi(\nabla\cdot F)$

4) $curl(\phi\vec{F})=\nabla\times(\phi\vec{F})=\nabla\phi\times F+\phi(\nabla\times F)$

مثال: فرض کنید $\vec{r}=(x,y,z)$ ، $r=|\vec{r}|$ و n عدد حقیقی است

مطلوبست: 1) $div(r^n\vec{r})=\nabla\cdot(r^n\vec{r})=\nabla r^n\cdot\vec{r}+r^n(\nabla\cdot\vec{r})$

$$=\nabla r^n\cdot\vec{r}+r^n(\nabla\cdot\vec{r})=nr^{n-1}\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{r}+3r^n=(n+3)r^n$$

$\rightarrow div(r^n \vec{r}) = (n+3) r^n$

۲) $curl(r^n \vec{r}) = \nabla \times (r^n \vec{r}) = \nabla r^n \times \vec{r} + r^n \underbrace{\cancel{(\nabla \times \vec{r})}}_{\vec{0}}$

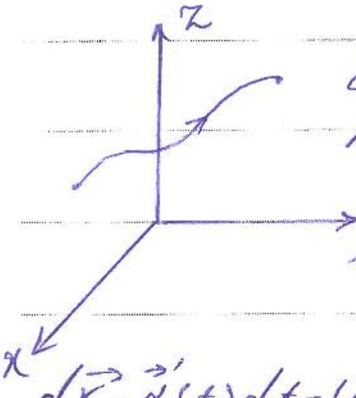
$= n r^{n-1} \frac{\vec{r}}{r} \times \vec{r} + \vec{0} = \vec{0}$

$\rightarrow curl(r^n \vec{r}) = \vec{0}$ این میدان غیرچرخشی است

$$\nabla \times \vec{r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = (0,0,0) = \vec{0}$$

نکته: $div(r^n \vec{r}) = (n+3) r^n$

انتگرال میدان برداری روی خم (انتگرال کار)



فرض کنید $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ میدان برداری و خم پارامتری

به معادله $\begin{cases} \vec{\alpha}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \\ a \leq t \leq b \end{cases}$ مفروض است

و جابجایی دیفرانسیلی عبارت است از: $d\vec{r} = \vec{\alpha}'(t)dt = (dx, dy, dz)$

$\underbrace{\text{انتگرال (کار) } \vec{F} \text{ روی خم } \alpha}_{\text{چرخش } \vec{F} \text{ روی خم } \alpha} = \int_\alpha \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\alpha F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$

روش محاسبه: $\int_\alpha \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \vec{\alpha}'(t) dt$

در واقع برای محاسبه انتگرال کار باید از معادله خم در ضابطه $\vec{F}$ جایگذاری شود

۱۳/۳۸۰ انتگرال میدان (کار) $\vec F(x,y,z)=(xy,yz,zx)$ روی خم $x=t$ و $y=t^2$ و $z=t^3$ و $0\le t\le 1$ را بیابید

انتگرال کار $=\int_\alpha F\cdot dr$

$\alpha(t)=(t,t^2,t^3) \longrightarrow \vec F(\alpha(t))=(t^3,t^5,t^4)$

$\alpha'=(1,2t,3t^2) \longrightarrow F\cdot\alpha'=t^3+5t^6$

انتگرال کار $=\int_\alpha F\cdot dr=\int F\cdot\alpha' dt=\int_0^1(t^3+5t^6)dt=?$

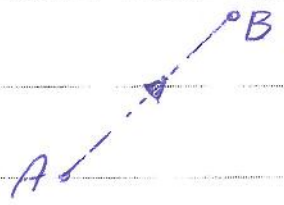
۸۱/۲ج۱۸۳ c پاره‌خط واصل از $(0,1,-1)$ به $(1,2,1)$ است مطلوبست

$\int_C y\,dx+z\,dy-x\,dz$

$\vec{AB}=B-A=(1,1,2) \longrightarrow \alpha(t)=A+t\vec{AB}=(\overset{x}{t},\overset{y}{1+t},\overset{z}{2t-1})$

$\int_C y\,dx+z\,dy-x\,dz=\int_0^1(1+t)dt+(2t-1)dt-2t\,dt$

$=\int_0^1 t\,dt=1/2$



نکته: معادله پارامتری پاره‌خط واصل از A به نقطه B عبارت است از $\vec\alpha(t)=A+t\vec{AB}$, $0\le t\le 1$

میدان‌های کنسرواتیو

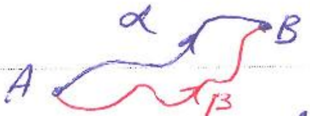
تعریف: میدان برداری $\vec F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ را کنسرواتیو (پایسته، اتلافی) می‌نامیم هرگاه $\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ موجود باشد که $\nabla\phi=F$ و تابع ϕ را تابع پتانسیل $\vec F$ می‌نامیم.

نکته: شرط لازم برای آنکه $\vec F$ اتلافی باشد آن است که

$$\operatorname{curl} F=\vec 0 \xleftrightarrow{F=(F_1,F_2)} \frac{\partial F_2}{\partial x}=\frac{\partial F_1}{\partial y}$$

نکته ۲: اگر دامنه $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ برابر $\mathbb{R}^n$ باشد: $\text{Curl } F=\vec{0} \Leftrightarrow F$ ابقایی است

قضیه: اگر میدان $\vec{F}$ ابقایی با تابع پتانسیل ϕ باشد آنگاه:



الف: کار $\vec{F}$ مستقل از مسیر است یعنی:

$$\int_A^B F\cdot dr = \int_\alpha F\cdot dr = \int_\beta F\cdot dr = \overset{\text{انتها}}{\phi(B)} - \overset{\text{ابتدا}}{\phi(A)}$$

ب: کار $\vec{F}$ روی هر خم بسته صفر است

تذکر: اگر $\vec{F}(x,y)=(F_1,F_2)$ آنگاه:

$$\text{Curl } F=\nabla\times F=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & 0 \end{vmatrix}=\left(0,0,\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

مثال: تابع پتانسیل میدان $F(x,y)=(y+2x,\ x+3y^2)$ را در صورت وجود بیابید

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}=1 \ \text{و}\ \frac{\partial F_1}{\partial y}=1 \xrightarrow[\text{دامنه}=\mathbb{R}^2]{\text{مساوی اند}} \vec{F} \ \text{ابقایی است}$$

ولذا تابع $\phi=\phi(x,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ به عنوان پتانسیل موجود است

طرز محاسبه پتانسیل: $\left(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)=\nabla\phi=F=(F_1,F_2)$

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial x}=F_1=y+2x & (1) \\ \frac{\partial\phi}{\partial y}=F_2=x+3y^2 & (2) \end{cases}$$

با حل دستگاه بالا تابع پتانسیل بدست می‌آید

$$(1)\xrightarrow{\int dx}\phi=\phi(x,y)=xy+x^2+\underbrace{f(y)}$$ عدد ثابت نسبت به x

برای محاسبه $f(y)$ کافی است از ϕ نسبت به y مشتق گرفته و با معادله (۲) مقایسه کنیم

$$x+3y^2\overset{(2)}{=}\frac{\partial\phi}{\partial y}=x+0+f'(y)\to f'(y)=3y^2$$

$\rightarrow f(y) = \int 3y^2 dy = y^3 + \overset{\text{عدد ثابت}}{c}$ و $c \in \mathbb{R}$

$\rightarrow \phi(x,y) = xy + x^2 + y^3 + c$

نکته: اگر $\vec{F} = (F_1, F_2)$ ابقایی باشد آنگاه تابع پتانسیل عبارت است از:

1) $\phi(x,y) = \int F_1 dx + \int F_2^* dy$

$F_2^* =$ جملاتی از F_2 است که x ندارد (جملاتی از F_2 که مشتق آن نسبت به x صفر شود)

2) $\phi(x,y) = \int F_2 dy + \int F_1^* dx$

$F_1^* =$ جملاتی از F_1 که y ندارد (جملاتی از F_1 که مشتق آن نسبت به y صفر شود)

$\frac{10}{385}$ $\vec{F} = (2xy - z^2, 2yz + x^2, y^2 - 2xz + e^z)$ تابع پتانسیل را بیابید

$\text{curl } F = \nabla \times F = \vec{0} \longrightarrow$ F ابقایی است

$\phi(x,y,z) = \int F_1 dx + \int F_2^* dy + \int F_3^* dz = x^2 y - xz^2 + e^z + c$

$\frac{5}{2ج \, 285}$ کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F} = (x, y, z)$ روی $R(t) = (\cos t, \sin t, t)$ و $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ بیابید

$\text{curl } \vec{F} = \vec{0} \longrightarrow$ F ابقایی است

$R(0) = (1,0,0)$: نقطه ابتدا و $R(\frac{\pi}{2}) = (0, 1, \frac{\pi}{2})$: نقطه انتها

$\phi(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}$

$\text{کار} = \int F \cdot dr = \phi(0, 1, \frac{\pi}{2}) - \phi(1,0,0) = (0 + \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{8}) - (\frac{1}{2} + 0 + 0) = \frac{\pi^2}{8}$

$\frac{۲۶}{۳۸۹}$ روی مسیر $\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{4}=1$ در ربع اول صفحه مختصات مطلوبست

$$\int F\cdot dr=\int_{(2,0)}^{(0,3)} \underbrace{(-2x+3y)}_{F_1}dx+\underbrace{(3x+2y)}_{F_2}dy$$

$F=(F_1,F_2)$; $\frac{\partial F_2}{\partial x}=3=\frac{\partial F_1}{\partial y} \longrightarrow$ F ابقایی است

$$\phi(x,y)=\int F_1dx+\int F_2^*dy=-x^2+3xy+y^2$$

انتگرال (کار) $=\phi(0,3)-\phi(2,0)=13$

$\frac{۲۸}{۲ج۲۰}$ روی خم $2x^2+3y^2=6$ مطلوبست

$$\int \underbrace{(x+2xy)}_{F_1}dx+\underbrace{(x^2-y)}_{F_2}dy=\int F\cdot dr=0$$

$F=(F_1,F_2) \longrightarrow \frac{\partial F_2}{\partial x}=2x=\frac{\partial F_1}{\partial y} \longrightarrow$ F ابقایی است

چون F ابقایی است و خم یک بیضی و لذا بسته می‌باشد پس انتگرال کار صفر می‌شود

$\frac{۲۴}{۲ج۳۵۱}$ می‌دانیم انتگرال زیر مستقل از مسیر است. مطلوبست $a+b+c$

$$\int (x+2y+az)dx+(bx-3y-z)dy+(4x+cy+2z)dz$$

$\text{curl}\,F=\vec{0} \Longleftrightarrow$ F ابقایی است $\Longleftrightarrow$ مستقل از مسیر بودن یا روی هر خم بسته صفر شود

$$\text{curl}\,F=\nabla\times F=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}=(c+1,-4+a,b-2)=(0,0,0)$$

$c+1=0 \longrightarrow c=-1$ $\quad -4+a=0 \longrightarrow a=+4$

$b-2=0 \longrightarrow b=2$ $\quad a+b+c=5$

میدان های برداری خاص

اگر دامنه میدان $F: IR^n \to IR^n$ برابر IR^n نباشد ولی $curl\,F = \vec{0}$ ممکن است $\vec F$ ابقایی یا غیر ابقایی باشد. می توان نوشت: $\phi(x,y,z) = \int F_1 dx + \int F_2^* dy + \int F_3^* dz$ و داریم $F = \nabla\phi$ حال چنانچه دامنه تابع ϕ برابر دامنه $\vec F$ باشد آنگاه $\vec F$ ابقایی و ϕ پتانسیل آن است و در غیر این صورت $\vec F$ ابقایی نیست.

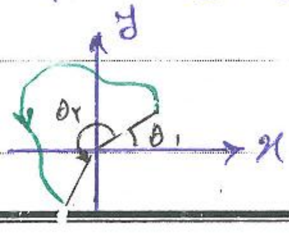
۱) برای میدان $F(x,y) = \left(\overbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}^{F_1}, \overbrace{\frac{y}{x^2+y^2}}^{F_2}\right)$ دامنه برابر $IR^2 - \{(0,0)\}$ است و داریم $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$ یعنی $curl\,F = \vec{0}$ و داریم: $\phi(x,y) = \int F_1 dx + \int F_2^* dy = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$
چون $F = \nabla\phi$ و دامنه ϕ برابر $IR^2 - \{(0,0)\}$ یعنی دامنه F می باشد پس $\vec F$ ابقایی است و ϕ تابع پتانسیل می باشد.

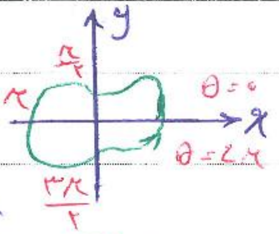
نتیجه: میدان $\vec F = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ ابقایی و تابع پتانسیل آن $\phi(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ می باشد.

۲) برای میدان $\vec F(x,y) = \left(\overbrace{\frac{-y}{x^2+y^2}}^{F_1}, \overbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}^{F_2}\right)$ دامنه برابر $IR^2 - \{(0,0)\}$ و داریم $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$ یعنی $curl\,F = \vec{0}$ و $\phi(x,y) = \int F_2 dy + \int F_1^* dx = tg^{-1}\frac{y}{x} = \theta$
اگر θ را زاویه در مختصات قطبی بگیریم یعنی $tg\theta = \frac{y}{x}$ آنگاه $\nabla\theta = F$ اما چون دامنه θ برابر $IR^2 - \{$محور y ها$\}$ و با دامنه $\vec F$ برابر نیست پس $\vec F$ ابقایی نمی باشد.

نکته: برای میدان $F = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ اگر θ زاویه در قطبی باشد یعنی $tg\theta = \frac{y}{x}$ داریم $\vec F = \nabla\theta$ اما $\vec F$ ابقایی نیست. برای محاسبه $\int_c \vec F \cdot d\vec r$ حاصل برابر اختلاف θ در ابتدا و انتها است به شرط آنکه به ازای هر بار چرخش حول مبدا در جهت مثلثاتی 2π به زاویه اضافه نمائیم پس:

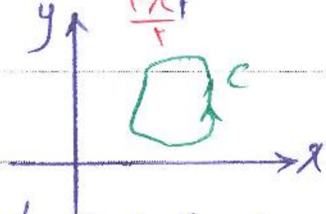
الف) $\int_c F\cdot dr = \theta_2 - \theta_1$





ب) C یکبار در جهت مثلثاتی حول مبدأ باشد

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 2\pi$$



ج) اگر C بسته و حول مبدأ نباشد

$$\int_C F\cdot dr = 0$$

$\frac{۳۰}{۳۹۰}$ اگر C قوس از دایره $x^2+y^2=4$ از $A(\sqrt{2},\sqrt{2})$ به $(-2,0)$ باشد مطلوبست

$$\int_C \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = \int \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

انتگرال بالا برابر کار میدان $\nabla\theta$ است

ابتدا $A(\sqrt{2},\sqrt{2}) \longrightarrow tg\theta_1 = \frac{y}{x} = 1 \longrightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{4}$

انتها $B(-2,0) \longrightarrow tg\theta_2 = \frac{y}{x} = 0 \longrightarrow \theta_2 = \pi$

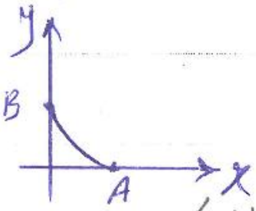
انتگرال کار $= \theta_2 - \theta_1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$\frac{۱۲۰}{۲ج۶۲۳}$ C دایره به مرکز مبدأ به شعاع e در جهت مثبت می‌باشد مطلوبست

$$\int_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = 2\pi$$

چون خم C بسته و حول مبدأ است پس انتگرال (کار) 2π می‌شود

$\frac{۴}{۲ج۶۷۵}$ C منحنی $\left(\frac{x}{3}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{2}\right)^{2/3} = 1$ از نقطه $A(3,0)$ به $B(0,2)$ می‌باشد مطلوبست عمران ۹۱



$$\int_C \frac{x-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}dy$$

انتگرال کار $= \underbrace{\left(\int_C \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy\right)}_{\text{کار میدان گرادیان}} + \underbrace{\left(\int_C \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy\right)}_{\text{کار میدان } \nabla\theta}$

$\phi = \frac{1}{2}Ln(x^2+y^2)$

انتگرال اول (کار) $= \phi(0,2) - \phi(3,0) = \frac{1}{2}\ln 2^2 - \frac{1}{2}\ln 3^2$

$= \ln 2 - \ln 3 = \ln \frac{2}{3}$

انتگرال دوم (کار) $= \theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$

جواب انتگرال $= \frac{\pi}{2} + \ln\frac{2}{3}$

قضیه گرین:

فرض کنید C خم بسته در صفحه xy باشد که یکبار در جهت مثلثاتی طی می‌شود و میدان $\vec{F}(x,y) = (F_1, F_2)$ دارای مشتقات مرتبه اول پیوسته در ناحیه D باشد آنگاه:

$$\oint_C F\cdot dr = \oint_C F_1\,dx + F_2\,dy = \iint_D \underbrace{\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)}_{(\text{curl} F\cdot\vec{k})}$$

مولفه سوم کرل $= (\text{curl}F\cdot\vec{k})$

$\frac{34}{396}$ روی بیضی $C: x^2+4y^2=1$ مطلوبست

$$\int_C \underbrace{y}_{F_1}\,dx + \underbrace{3x}_{F_2}\,dy = \iint_D 2\,dA =$$

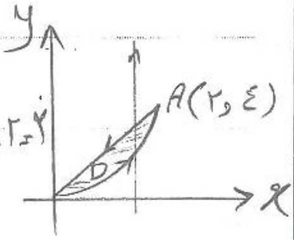
$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 3-1=2$$

$\frac{37}{396}$ اگر C عبارت از سهمی $y=x^2$ از مبدأ به $A(2,4)$ و پاره خط واصل از A به مبدأ باشد. مطلوبست:

$$\int_C 2y\,dx + 4x\,dy = \iint_D 2\,dA = \int_0^2\int_{x^2}^{2x} 2\,dy\,dx$$

$$= \int_0^2 2(2x-x^2)\,dx = \frac{8}{3}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 4-2=2$$

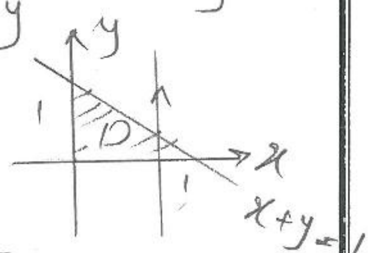


۲.۸
۲ج۴۱

c پیرامون مثلث محدود به محورهای مختصات و $x+y=1$ می‌باشد مطلوبست

$$\int_c \underbrace{y^2}_{F_1}dx + \underbrace{x^2}_{F_2}dy$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2x-2y$$



انتگرال خط $= \iint_D (2x-2y)\,dA = \int_0^1\int_0^{1-x}(2x-2y)\,dy\,dx$

$$=\int_0^1 \left(2x(1-x)-(1-x)^2\right)dx = (-x^3+2x^2-x)\Big|_0^1 = 0$$

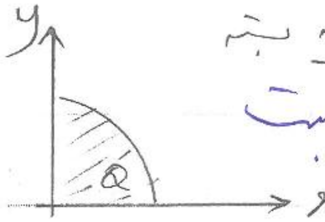
۱
۴د۹

c مرز در جهت مثبت ناحیه زیر است

$Q: 0\le x^2+y^2\le a^2 \,,\; x\ge 0 \,,\; y\ge 0$

مرز ناحیه بسته

مطلوبست



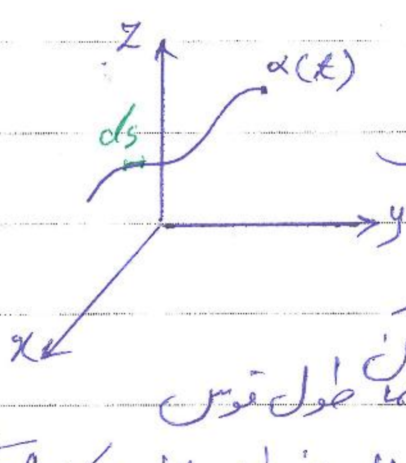
$$\int_c (x-y^3)\,dx + (y^3+x^3)\,dy$$

انتگرال خط $= \iint_Q 3(x^2+y^2)\,dA \overset{\text{قطبی}}{=} \int_0^{\pi/2}\int_0^{a} 3r^2\, r\,dr\,d\theta$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 3x^2-(-3y^2)=3(x^2+y^2)$$

$$=\left(\int_0^{\pi/2}3\,d\theta\right)\left(\int_0^a r^3\,dr\right) = \frac{3\pi}{8}a^4$$

انتگرال میدان اسکالر روی خم



$f(x,y,z): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ تابع پیوسته و خم پارامتری

$\vec{\alpha}(t) = (x(t), y(t), z(t))$
$a\le t\le b$
مفروض هستند

المان طول قوس: $ds = |\vec{\alpha}'(t)|\,dt$

$\int_\alpha f(x,y,z)\,ds$ = انتگرال (خط) میدان اسکالر f روی خم α

نحوه محاسبه: $\int_\alpha f\,ds = \int_a^b \underbrace{f(\alpha(t))}_{f\text{ روی خم }\alpha}|\alpha'(t)|\,dt$

مثال: اگر $R(t)=(\cos t, t, \sin t)$ و $0\le t\le 1$ مطلوبست

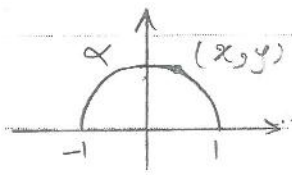
$$\int_R (y+x^2+z^2)\,ds=\int (t+\cos^2 t+\sin^2 t)(\sqrt{2}\,dt)$$

$$=\sqrt{2}\int_0^1 (t+1)\,dt=\tfrac{3}{2}\sqrt{2}$$

$$R'(t)=(-\sin t, 1, \cos t)\to |R'|=\sqrt{\sin^2 t+1+\cos^2 t}=\sqrt{2}$$

$$\to ds=|R'|\,dt=\sqrt{2}\,dt$$

۱۱ / ۲ج ۲۸۶ — مرکز جرم سیمی با چگالی $\delta=2(1-y)$ به شکل نیم دایره که در نقاط $(\pm1,0)$ به محور x بسته شده است و در نیمه بالایی صفحه قرار دارد را بیابید.



$\alpha: x^2+y^2=1 \quad y\ge 0$ مرکز جرم $G(\bar x,\bar y)=?$

$$\bar y=\frac{\int_\alpha y\,\delta\, ds}{\int_\alpha \delta\, ds}=\frac{2\int_\alpha y(1-y)\,ds}{2\int_\alpha (1-y)\,ds}=\frac{\int_0^\pi \sin t(1-\sin t)\,dt}{\int_0^\pi (1-\sin t)\,dt}=\frac{4-\pi}{2(\pi-2)}$$

$$\vec\alpha(t)=(\cos t, \sin t),\quad 0\le t\le \pi$$

$$\vec\alpha'(t)=(-\sin t, \cos t)\to |\alpha'|=1\to ds=|\alpha'|\,dt=dt$$

چون سیم (خم) و چگالی هر دو نسبت به x زوج هستند پس مرکز جرم روی $x=0$ (محور yها) قرار دارد و $\bar x=0$ و لذا $G\left(0, \frac{4-\pi}{2(\pi-2)}\right)$

نکته: استوانه $\alpha(x,y)=0$ در راستای محور zها مفروض است مساحت (جانبی) قسمتی از این استوانه که بین دو سطح $z=f(x,y)$ و $z=g(x,y)$ قرار دارد، برابر است با:

$$\text{مساحت جانبی}=\int_{\alpha\ \text{خم}} \underbrace{|f-g|}_{\text{ارتفاع}}\,ds$$

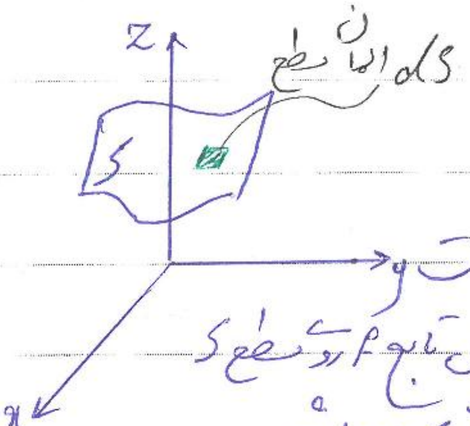
مثال: مساحت قسمتی از استوانه $x^2+y^2=4$ که بین دو سطح $z_1=x+1$ و $z_2=x+y+6$ قرار دارد را بیابید.

$\alpha: x^2+y^2=4 \ ,\ z=0$: خم هادی

مساحت استوانه $=\int_\alpha |z_2-z_1|\,ds=\int_\alpha |5+y|\,ds=\int_0^{2\pi}|5+2\sin t|(2dt)=20\pi$

$\alpha(t)=(2\cos t, 2\sin t) \ ,\ 0\leq t\leq 2\pi$

$\alpha'(t)=(-2\sin t, 2\cos t)$ $\qquad ds=|\alpha'|\,dt=2dt$



انتگرال میدان اسکالر روی سطح

سطح S به معادله $g(x,y,z)=0$ و تابع پیوسته $f(x,y,z):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ مفروض است و

$\iint_S f(x,y,z)\,dS$ = انتگرال تابع f روی سطح S

تذکر: چنانچه $f=1$، حاصل انتگرال بالا، برابر مساحت S می‌باشد

روش محاسبه انتگرال روی سطح:

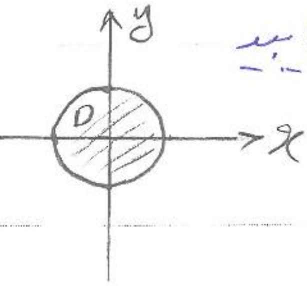
۱) ابتدا سطح را بر یکی از سه صفحه مختصات تصویر می‌کنیم و آن را D می‌نامیم (که معمولاً صفحه xy است)

۲) (محاسبه dS) اگر معادله سطح $g=0$ و بردار یکه صفحه تصویر برابر $\vec{p}$ باشد

$$dS=\frac{|\nabla g|}{|\nabla g\cdot\vec{p}|}\,dA$$

۳) dS را در انتگرال جایگذاری کنید و روی D انتگرال دوگانه بگیرید

مثال: مساحت قسمتی از $z=x^2+y^2$ که زیر صفحه $z=1$ قرار دارد را بیابید



مساحت سطح $=\iint_S ds$

z حذف $\to x^2+y^2=1$

$g=x^2+y^2-z=0 \to \nabla g=(2x,2y,-1)$

$\vec{P}=\vec{k} \to \nabla g\cdot P=\nabla g\cdot k=-1$

$$ds=\frac{|\nabla g|}{|\nabla g\cdot\vec{P}|}dA=\sqrt{4x^2+4y^2+1}\,dA$$

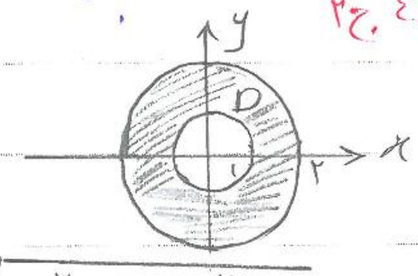
مساحت سطح $=\iint_D\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,dA \xrightarrow{\text{قطبی}} \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\sqrt{1+4r^2}\,dr\,d\theta$

مساحت سطح $=\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^1 r\sqrt{1+4r^2}\,dr\right)=2\pi\times\frac{1}{8}\times\frac{2}{3}(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1$

$=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$

۳۲
ج۲، ۴۶۴

مساحت بخشی از مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ قرار دارد را بیابید



مساحت سطح $=\iint_S ds$

$g=\sqrt{x^2+y^2}-z=0$

$$\nabla g=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},-1\right)$$

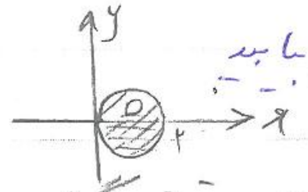
$$|\nabla g|=\sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}+1}=\sqrt{2}$$

$P=\vec{k} \to \nabla g\cdot P=\nabla g\cdot k=-1$

$$ds=\frac{|\nabla g|}{|\nabla g\cdot P|}dA=\sqrt{2}\,dA$$

مساحت سطح $=\iint_S ds=\iint_D\sqrt{2}\,dA=\sqrt{2}\times \underbrace{D \text{ مساحت}}_{4\pi-\pi}=3\pi\sqrt{2}$

$\frac{20}{484}$ استوانه $x^2+y^2=2x$ نیمه بالایی مخروط $z^2=x^2+y^2$ یک سطح را جدا کند. مقدار انتگرال $f(x,y)=x^4-y^4+z^2y^2-z^2x^2+1$ را روی سطح بیابید



انتگرال f = $\iint_S f\,ds$

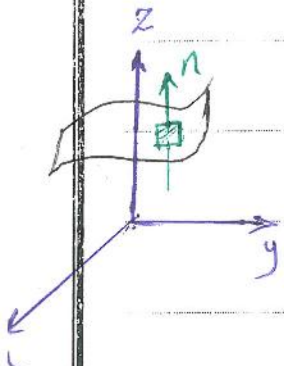
$ds=\sqrt{2}\,dA$ ← محاسبات تست قبل

چنانچه در تابع تحت انتگرال یا ds متغیر z مشاهده شود آن را از معادله سطح اصلی (S) جایگذاری می‌کنیم

$$z^2=x^2+y^2 \to f=x^4-y^4+\underbrace{z^2}_{y^2-x^2}(y^2-x^2)+1=1$$

$$\text{انتگرال}=\iint_S f\,ds=\iint_D(\sqrt{2}\,dA)=\sqrt{2}\times \underset{\pi}{D}\text{ مساحت}=\sqrt{2}\pi$$

انتگرال میدان برداری روی سطح (انتگرال شار)



فرض کنید $\vec F(x,y,z)=(F_1,F_2,F_3)$ ، $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ میدان برداری پیوسته و S سطح به معادله $g(x,y,z)$ می‌باشد. $\vec n=\frac{\nabla g}{|\nabla g|}$ بردار یکه عمود بر سطح می‌باشد

انتگرال (شار) F روی سطح S $=\iint_S \vec F\cdot\vec n\,ds=\iint_S \vec F\cdot d\vec s$

در واقع $d\vec s=\vec n\,ds$ که بردار دیفرانسیل سطح است

چنانچه بردار یکه $\vec n$ با جهت مثبت محور x ها و y و z به ترتیب زوایای α و β و γ را بسازد آنگاه $\vec n=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ پس:

$$\iint_S F\cdot n\,ds=\iint_S(F_1\cos\alpha+F_2\cos\beta+F_3\cos\gamma)\,ds$$

و نماد دیگر انتگرال شار: F شار $=\iint_S F_1\,dy\,dz+F_2\,dx\,dz+F_3\,dx\,dy$

نحوه محاسبه $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds$

۱) سطح را بر یکی از سه صفحه مختصات تصویر کرده و آن را D می‌نامیم

۲) اگر معادله سطح $g=0$ و $\vec{D}$ قائم تصویر باشد $\vec{n}\cdot ds = \pm\frac{\nabla g}{|\nabla g|}\, dA$

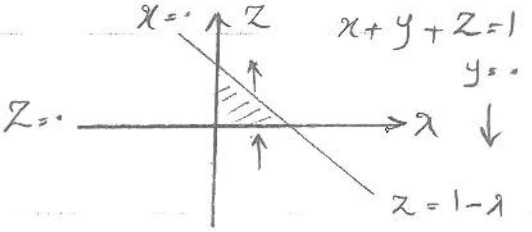
۳) $n\, ds$ را در انتگرال جایگذاری و پس از محاسبه $F\cdot n\, ds$ روی تصویر (D) انتگرال می‌گیریم

مثال: S را قسمتی از صفحه $x+y+z=1$ می‌گیریم که $x\geq 0$ و $y\geq 0$ و $z\geq 0$ و $\vec{n}$ بردار عمود بر سطح رو به پایین است مطلوبست

$$\iint_S \overset{F_2}{x}\,dx\,dz + \overset{F_3}{(y+z)}\,dx\,dy + \overset{F_1}{y}\,d\ dz$$

محاسبه شار با استفاده از تعریف

فرض می‌شود که تصویر روی چه صفحه‌ای باشد ما فرض می‌کنیم که تصویر روی صفحه xz باشد



$\vec{F}=(y, x, y+z)$

مرز $x=0$, $y=0$, $z=0$

$S: g = x+y+z-1=0$

$\nabla g(1,1,1) \quad \vec{P}=\vec{j} \to \vec{\nabla g}\cdot\vec{P}=0$

$\to \vec{n}\cdot ds = \pm\frac{\nabla g}{|\nabla g\cdot\vec{P}|}\, dA = \pm(1,1,1)\, dA$

چون n باید رو به پایین باشد پس مولفه سوم منفی است

$n\, ds = -(1,1,1)\, dA = (-1,-1,-1)\, dA \to \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds = -(y+x+y+z)\, dA$

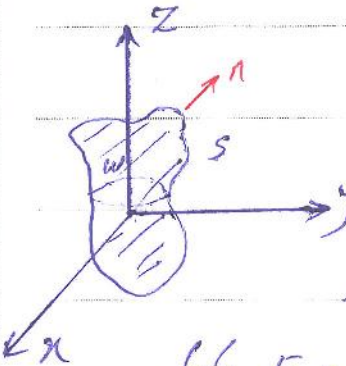
دقت وارد مرحله سوم می‌شویم نباید غیر مولفه‌ها تصویر مولفه دیگر داشته باشیم پس y را از طریق معادله سطح جایگذین می‌کنیم

$\vec{F}\cdot\vec{n}\, ds = -(2-x-z)\, dA$

انتگرال شار $= \iint_S = -\iint_D \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds = -\iint_D (2-x-z)\, dz\, dA = -\int_0^1\int_0^{1-x}(2-x-z)\, dz\, dx$

$= \int_0^1 (2-x)z - \frac{z^2}{2}\Big|_0^{1-x} dx$ (از نظر ریاضی شار می‌تواند عدد مثبت، منفی و صفر باشد)

قضیه دیورژانس



فرض کنید S سطح بسته باشد و $\vec{n}$ قائم یکه بر سطح رو به سمت بیرون و میدان بردار $\vec{F}=(F_1, F_2, F_3)$ ، F دارای مشتقات پاره‌ای مرتبه اول و پیوسته در ناحیه W باشد آنگاه:

$$\iint_S F\cdot n\,ds = \iiint_W \operatorname{div} F\,dv$$

$$\operatorname{div} F = \nabla\cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}$$

$\frac{6}{۲ج ۶۷۵}$ فرض کنید میدان F $\vec{F}(3x+e^{y^2}+z,\ 3y+\sin z^2,\ e^{\cos xy}-4z)$ و F سطح بسته‌ای که استوانه $0\le z\le 3$ ، $x^2+y^2\le 9$ را محدود می‌سازد مطلوبست

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint_S \vec{F}\cdot n\,ds = \iiint_W \operatorname{div}F\,dv = 2\times \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع}$$

$\operatorname{div}\vec{F} = 3+3-4=2$ $\qquad = 2\times 9\pi\times 3 = 54\pi$

$\frac{109}{۲ج ۶۸۸}$ S مرز ناحیه محدود به مخروط $x=\sqrt{y^2+z^2}$ و صفحه $z=2$ باشد و $\vec{n}$ بردار یکانی به سمت خارج رو $F=(3x+tg\,yz)\vec{i}+(y+xz)\vec{j}+(2z+e^{xy})\vec{k}$ حاصل $\iint_S \vec{F}\cdot n\,ds$ را بیابید

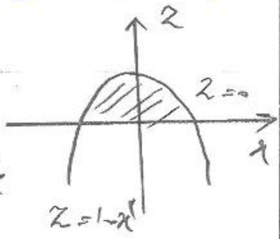
$\operatorname{div}\vec{F}=3+1+2=6$ $\qquad x=\sqrt{y^2+z^2}$ $\qquad x=2$ شعاع دایره و $z=2$ ارتفاع

$$\iint_S \vec{F}\cdot n\,ds = \iiint_W \operatorname{div}F\,dv = (6\times \underbrace{4\pi}_{\text{مساحت قاعده}}\times \overset{\text{ارتفاع}}{2})\times 1/3 = 16\pi$$

حجم مخروط = ۱/۳ حجم استوانه $\qquad$ مساحت قاعده $=\pi R^2 = 4\pi$

۳۰ / ۲ج ۶/۱۲ فرض کنید که S رویه محصور کننده ناحیه W باشد که به وسیله $z=0$ و $y=0$ و $y=e$ و $z=1-x^2$ محدود می شود و $\vec{n}$ قائم یکه برون سو و میدان F

$\vec{F}=(x+\cos y\,,\ y+\cosh z\,,\ z+e^{-x^2})$ ، $\iint_S \vec{F}.\vec{n}\,ds$ مطلوبست



$div F = 1+1+1=3$

$\iint_S F.n\,ds = \iiint_W div F.\,dv = \int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2}\int_0^{e} dy\,dz\,dx$

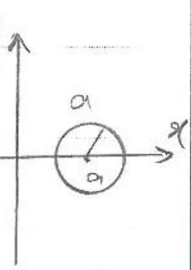
$=3\int_{-1}^{1}\int e\,dz\,dx = 6\int_0^1 e(1-x^2)\,dx = 4e$

نکته: چنانچه خم بسته در یک صفحه حول محوری در همان صفحه دوران کند خم دوار یک سطح بسته ایجاد می کند

۳۲ / ۲ج ۶/۱۲ انتگرال سطح تابع برداری $\vec{F}(x\,,\ z^2\,,\ -2y)$ روی سطح حاصل از دوران دایره $(x-a)^2+y^2=b^2$ که $a>b>0$ حول محور y را بدست آورید

$\iint_S F.n\,ds = \iiint_W div F.\,dv = (\pi b^2)(2\pi a) = 2\pi^2 a b^2$

قضیه اول پاپوس = مساحت ناحیه $\times 2\pi d$ $\qquad d=a \leftarrow G(a,0)$

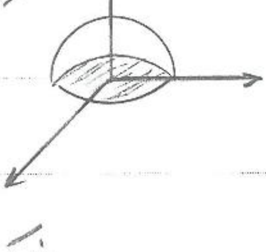


$a>b>0$

۳۰ / ۲۸۸ S نیمکره $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ همراه با صفحه $z=0$ می باشد مطلوبست

$\iint_S \underbrace{xz^2}_{F_1}\,dy\,dz + \underbrace{(x^2y-z)}_{F_2}\,dx\,dz + \underbrace{(xy+y^2z)}_{F_3}\,dx\,dy$

$\vec{F}=(xz^2\,,\ x^2y-z\,,\ xy+y^2z)$ $\qquad x^2+y^2+z^2=a^2 \quad z\geq 0$



$div F = z^2+x^2+y^2$

$\iint_S F.n\,ds = \iiint_W div F.\,dv = \iiint_W (z^2+x^2+y^2)\,dv$

مختصات کروی $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{a} \rho^2.\rho\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta = \frac{2\pi}{5}a^5$ نیمکره

نکته : چنانچه سطح S بسته نباشد برای محاسبه $\iint_S F\cdot n\,ds$ مراحل زیر را انجام می‌دهیم

(S' را دایره $x^2+y^2=1$ در صفحه xoz می‌گیریم که قائم آن $\vec{n}=-\vec{k}$ می‌باشد)

۱- سطح S' را طوری می‌یابیم که S∪S' بسته باشد

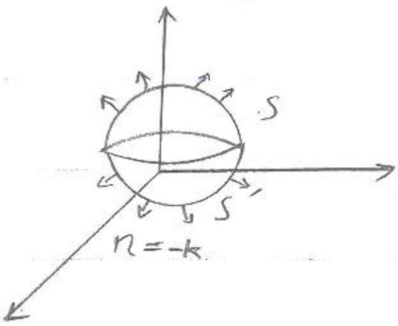
با قضیه دیورژانس شار روی S∪S' را محاسبه می‌کنیم

شار روی سطح S' را جداگانه استفاده می‌کنیم و حاصل را از هم کم می‌کنیم

$\frac{۵}{۲ج ۶۷۵}$ شار گذرنده برون سو میدان $\vec{F}=(e^{x^2+y^2}, e^{x^2+z^2}, e^{x^2+y^2})$ از سطح بالایی نیمکره $x^2+y^2+z^2=1$ را بیابید

$ds=\bigcirc\,dA$

این عدد ضریب است وقتی که تصویر با خودش برابر باشد ضریب ۱ می‌شود



شار $\iint_{S\cup S'} F\cdot n\,ds=\iiint_W \overset{\text{صفر}}{\operatorname{div}F}\,dv=0$

شار روی S' $=\iint_{S'} F\cdot \overset{-k}{n}\,\overset{1dA}{ds}=-\iint e^{x^2+y^2}\,dA$

$=\int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{r^2}\,r\,dr\,d\theta=2\pi\times\frac{1}{2}e^{r^2}\Big]_0^1=-\pi(e-1)$

$\xrightarrow{\text{با مختصات قطبی}}\iint_S F\cdot n\,ds=\iint_{S\cup S'}-\iint_{S'}=0-(-\pi(e-1))=\pi(e-1)$

$\frac{۷۴}{۴۲۳}$ کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$ مطلوبست $\iint_S (x^2+y^2)\,ds$

چون که سطح بسته است اگر میدان مناسب F $F(F_1,F_2,F_3)$ طوری بیابیم که $F\cdot n$

$F\cdot n=x^2+y^2$ که n قائم بر سطح است (برونسو) با استفاده از قضیه دیورژانس مسئله را حل می‌کنیم

$g=x^2+y^2+z^2-a^2=0$ $\quad \nabla g(2x,2y,2z)$ $\quad |\nabla g|=2\sqrt{x^2+y^2+z^2}=2a$

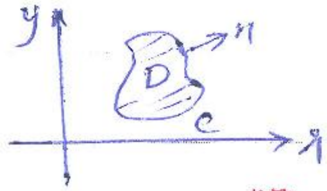
$\vec{n}=\pm\frac{\nabla g}{|\nabla g|}=+\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a}\right)$

$F=(ax,ay,0)\cdot\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a}\right)=x^2+y^2$ $\quad \operatorname{div}F=a+a=2a$

$\iint_S (x^2+y^2)\,ds=\iiint_W \underbrace{\operatorname{div}F}_{2a}\,dv=2a\times\frac{4\pi}{3}a^3=\frac{8\pi}{3}a^4$

تذکر: اگر C یک خم بسته در صفحه و $\vec n$ قائم یکه رو به بیرون و $F(F_1, F_2)$ دارای مشتقات مرتبه اول پیوسته داخل D باشد آنگاه:

شار $\vec F$ روی خم $= \int \vec F \cdot \vec n \, ds = \iint_D \operatorname{div} F \, dA$



۲۳ / ۲ج ۲۸۷

شار برون سوی میدان $\vec F = (x-y)\vec i + x\vec j$ گذرنده از دایره $\underbrace{y=\sin t \quad x=\cos t}_{x^2+y^2=1}$ $\underbrace{0 \le t \le 2\pi}_{\text{دایره با یک دور کامل}}$ را بیابید

$\operatorname{div} F = 1+0 = 1$

شار $F = \int_C F \cdot n \, ds = \iint_D \operatorname{div} F \, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 1 \times r \, dr \, d\theta$

$= 2\pi \times \frac{r^2}{2}\Big]_0^1 = \pi \rightarrow$ مساحت

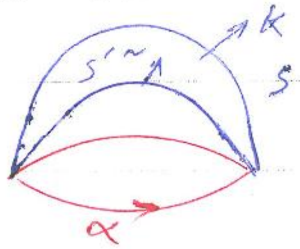
قضیه استوکس

فرض کنید که S یک سطح با قائم یکه رو به بیرون $\vec n$ باشد و C مرز آن یک خم بسته و یک بار پیموده شده در جهت مثلثاتی باشد و مشتقات پاره‌ای مرتبه اول میدان $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ و روی S پیوسته باشند آنگاه:

$$\oint \vec F \cdot d\vec r = \iint_S \operatorname{curl} F \cdot n \, ds$$

انتگرال کار میدان F روی خم — انتگرال شار کرل F روی سطح S

نتیجه: اگر S و S' دو سطح با مرز مشترک باشند آنگاه:



$$\iint_S \operatorname{curl} F \cdot n \, ds = \iint_{S'} \operatorname{curl} F \cdot n \, ds = \oint_C \vec F \cdot d\vec r$$

$\frac{45}{2ج\ 113}$ اگر میدان F مساوی $\vec{F}(z-y\,,\, z+x\,,\, -x-y)$ و سطح S سهمی گون $z=1-x^2-y^2 \geq 0$ باشد مطلوبست $\iint_S \operatorname{curl} F\cdot n\,ds$

روش اول: با جایگذاری $z=0$ در معادله سهمی گون $x^2+y^2=1$ در صفحه $z=0$ می باشد

$$\iint_S \operatorname{curl} F\cdot n\,ds = \oint_C F\cdot dr = \int_0^{2\pi} F\cdot\alpha'\,dt = 2\pi$$

$$\vec{\alpha}(t)=(\cos t\,,\,\sin t\,,\,0) \qquad 0\leq t\leq 2\pi$$

$$F(\alpha(t))=(0-\sin t\,,\, 0+\cos t\,,\, -\cos t-\sin t)$$

$$\alpha'(t)=(-\sin t\,,\,\cos t\,,\,0) \qquad F\cdot\alpha' = \sin^2 t+\cos^2 t+0=1$$

روش دوم: همواره S را داخل هم مرزی میگیریم یعنی S داخل دایره $x^2+y^2=1$ در صفحه $z=0$ می باشد

$$\operatorname{curl} F\cdot\vec{k} = \frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y} = 1-(-1)=2$$

$$\iint_S \operatorname{curl} F\cdot n\,ds = \iint_{S'} \operatorname{curl} F\cdot \underbrace{k\,ds}_{dA} = \iint_{S'} 2\,dA = 2\pi$$

$\frac{76}{428}$ شار برون سوی $\iint_S \operatorname{curl} \vec{F}\cdot n\,ds$ از قسمتی از کره $x^2+y^2+(z-2)^2=8$ در بالا صفحه xy برای میدان زیر

$$F=(y^2\cos(xz)\,,\, x^3e^{yz}\,,\, e^{-xyz})$$

S' داخل دایره $x^2+y^2=4$ در صفحه $z=0$ می باشد $\xrightarrow[\text{در کره}]{z=0} x^2+y^2=4$ هم مرزی

$$\operatorname{curl} F = \frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y} = 3x^2e^{yz}-2y\cos(xz) = 3x^2-2y$$

$$\iint_S \operatorname{curl} F\cdot n\,ds = \iint_{S'} \operatorname{curl} F\cdot k\,\overset{dA}{ds} = \iint (3x^2-2y)\,dy\,dx$$

$$= \int 3x^2\,dx - 2\underbrace{\int y\,dy}_{=0} = \int 3r^2\cos^2\theta\, r\,dr\,d\theta$$

تابع فرد - بازه متقارن — و در نتیجه صفر

$$=3\int_0^{2\pi} \underbrace{\cos^2\theta\,d\theta}_{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} \times \int_0^2 r^3\,dr = \tfrac{3}{2}\left(\theta+\tfrac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big]_0^{2\pi} \times \frac{r^4}{4}\Big]_0^2 = 6\times 2\pi = 12\pi$$

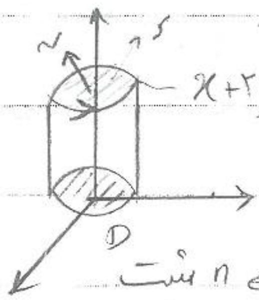
$\frac{15}{2ج 476}$ اگر میدان $\vec F=(-2y+e^{x^2}, 3x+\cos y^2, e^{z^2})$ و c فصل مشترک استوانه $x^2+y^2=1$ و $x+2y+z=7$ باشد و جهت آن طوری باشد که تصویر آن بر صفحه xy در جهت خلاف عقربه‌های ساعت باشد مطلوبست

$$\int_C \vec F\cdot d\vec r$$

توجه کنید که خم c بسته است و لذا از قضیه استوکس استفاده می‌کنیم همواره سطح s را داخل خم می‌گیریم s قسمتی از صفحه $x+2y+z-7=0$ می‌باشد که داخل استوانه $x^2+y^2=1$ قرار دارد پس از قضیه داریم

$$\oint_D F\cdot dr=\iint_S \text{curl}F\cdot n\,ds$$

D تصویر s در صفحه xy یعنی داخل دایره $x^2+y^2=1$ می‌باشد



$\nabla g(1,2,1)$ $\quad \nabla g\cdot \vec k=1$

$$n\,ds=\pm\frac{\nabla g}{|\nabla g\cdot p|}dA=\pm(1,2,1)\,dA$$

با توجه به شکل قائم n رو به بالاست و $n\cdot ds=(1,2,1)\,dA \Leftarrow$ n مثبت

لذا باید مولفه سوم مثبت باشد پس علامت مثبت را انتخاب می‌کنیم

$$\text{curl}F=\nabla\times F=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_1 & F_2 & F_3\end{vmatrix}=(0,0,5)$$

$$\text{curl}F\cdot n\,ds=5\,dA$$

$$\oint_C F\cdot dr=\iint_S \text{curl}F\cdot n\,ds=\iint_D 5\,dA=5\times \text{مساحت}=5\pi$$