۱۰ دوران

پودمان ۱۰-۱ متغیرهای حرکت دورانی

* ۱ یک توپ‌انداز خوب بیسبال می‌تواند توپ بیسبال را با تندی $۸۵\,\mathrm{mi/h}$ که با تندی زاویه‌ای $۱۸۰۰\,\mathrm{rev/min}$ می‌چرخد، به‌سوی گوشه‌ی هدف پرتاب کند. این توپ تا رسیدن به‌هدف چند دور می‌زند؟ برای آسانی مسیر ۶۰ فوتی را راست‌خط درنظر بگیرید.

حل: در مسئله فرض شده است که v_{com} و ω ثابت‌اند. برای سازگاری ابعاد کمیت‌ها می‌نویسیم:

$$v_{\mathrm{com}} = (۸۵\,\mathrm{mi/h})\left(\frac{۵۲۸۰\,\mathrm{ft/mi}}{۶۰\,\mathrm{min/h}}\right) = ۷۴۸۰\,\mathrm{ft/min}$$

بنابراین به ازای $\Delta x = ۶۰\,\mathrm{ft}$، مدت زمان پرواز توپ برابر است با

$$t = \Delta x / v_{\mathrm{com}} = (۶۰\,\mathrm{ft})(۷۴۸۰\,\mathrm{ft/min}) = ۰٫۰۰۸۰۲\,\mathrm{min}$$

در این مدت جابه‌جایی زاویه‌ای یک نقطه از سطح توپ برابر است با

$$\theta = \omega t = (۱۸۰۰\,\mathrm{rev/min})(۰٫۰۰۸۰۲\,\mathrm{min}) = ۱۴\,\mathrm{rev}$$

* ۲ در یک دستگاه ساعت، که به صورت قیاسی (مانسته) کار می‌کند تندی زاویه‌ای (الف) عقربه‌ی ثانیه شمار، (ب) عقربه‌ی دقیقه شمار، و (پ) عقربه‌ی ساعت شمار، چیست؟ پاسخ‌ها را برحسب رادیان بر ثانیه بیان کنید.

حل: (الف) عقربه‌ی ثانیه شمار در هر $۶۰\,\mathrm{s}$ زاویه‌ی ۲π رادیان را طی می‌کند. پس داریم

$$\omega = \frac{۲\pi}{۶۰} = ۰٫۱۰۵\,\mathrm{rad/s}$$

(ب) عقربه‌ی دقیقه شمار در هر $۳۶۰۰\,\mathrm{s}$ زاویه‌ی ۲π رادیان را طی می‌کند. در نتیجه داریم

$$\omega = \frac{۲\pi}{۳۶۰۰} = ۱٫۷۵\times ۱۰^{-۳}\,\mathrm{rad/s}$$

(پ) عقربه‌ی ساعت شمار زاویه‌ی ۲π رادیان را در مدت $۴۳۲۰۰\,\mathrm{s}$ طی می‌کند. در نتیجه داریم

$$\omega = \frac{۲\pi}{۴۳۲۰۰} = ۱٫۴۵\times ۱۰^{-۴}\,\mathrm{rad/s}$$

** ۳ وقتی یک قطعه نان برشته را، که روی آن کره مالیده شده ناگهان به طرف کناره‌ی پیشخوان آشپزخانه هُل می‌دهیم، درحین افتادن می‌چرخد. اگرفاصله‌ی پیشخوان تا کف آشپزخانه $۷۶\,\mathrm{cm}$ باشد و قطعه نان کمتر از یک دور بچرخد، (الف) کمترین و (ب) بیشترین تندی زاویه‌ای که به ازای آن سطح کره مالیده شده‌ی نان به کف آشپزخانه برخورد می‌کند، چیست؟

حل: سقوط آزاد نوعی حرکت با شتاب ثابت است که در فصل ۲ کتاب مطالعه شد. مدت زمانی که طول می‌کشد تا نان کره‌مالیده شده به کف آشپزخانه برخورد کند، برابر است با

$$\Delta t = \sqrt{\frac{۲h}{g}} = \sqrt{\frac{۲(۰٫۷۶\,\mathrm{m})}{۹٫۸\,\mathrm{m/s^۲}}} = ۰٫۳۹۴\,\mathrm{s}$$

(الف) کمترین زاویه‌ای که به ازای آن سطح کره مالیده شده‌ی نان می‌چرخد و به کف آشپزخانه برخورد می‌کند، $\Delta\theta_{\mathrm{min}} = ۰٫۲۵\,\mathrm{rev} = \pi/۲\,\mathrm{rad}$ است. تندی زاویه‌ای متناظر با این زاویه برابر است با

$$\omega_{\mathrm{min}} = \frac{\Delta\theta_{\mathrm{min}}}{\Delta t} = \frac{\pi/۲\,\mathrm{rad}}{۰٫۳۹۴\,\mathrm{s}} = ۴٫۰\,\mathrm{rad/s}$$

(ب) بیشترین زاویه‌ای (کمتر از یک دور کامل) که به ازای آن سطح کره مالیده شده به کف آشپزخانه برخورد می‌کند، $\Delta\theta_{\mathrm{min}} = ۰٫۷۵\,\mathrm{rev} = ۳\pi/۲\,\mathrm{rad}$ است. تندی زاویه‌ای متناظر با این زاویه برابر است با

$$\omega_{\mathrm{max}} = \frac{\Delta\theta_{\mathrm{max}}}{\Delta t} = \frac{۳\pi/۲\,\mathrm{rad}}{۰٫۳۹۴\,\mathrm{s}} = ۱۲٫۰\,\mathrm{rad/s}$$

** ۴ مکان زاویه‌ای نقطه‌ای از یک چرخ دوار، از رابطه‌ی $\theta = ۲٫۰ + ۴٫۰t^۲ + ۲٫۰t^۳$ به دست می‌آید، که در آن θ

برحسب رادیان و t برحسب ثانیه است. در زمان $t = ۰$، (الف) مکان زاویه‌ای نقطه، و (ب) سرعت زاویه‌ای آن، چقدر است؟ (پ) سرعت زاویه‌ای نقطه در زمان $t = ۴٫۰\,\text{s}$ چیست؟ (ت) شتاب زاویه‌ای نقطه را در زمان $t = ۲٫۰\,\text{s}$ حساب کنید. (ث) آیا شتاب زاویه‌ای نقطه ثابت است؟

حل: اگر یکاها را به طور صریح وارد کنیم، تابع به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\theta = ۲٫۰\,\text{rad} + (۴٫۰\,\text{rad}/\text{s}^۲)t^۲ + (۲٫۰\,\text{rad}/\text{s}^۳)t^۳$$

(الف) تابع θ را به ازای $t = ۰$ حساب می‌کنیم و $\theta_۰ = ۲٫۰\,\text{rad}$ را به دست می‌آوریم.

(ب) سرعت زاویه‌ای به صورت تابعی از زمان از معادله‌ی ۱۰-۶ به‌دست می‌آید

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = (۸٫۰\,\text{rad}/\text{s}^۲)t + (۶٫۰\,\text{rad}/\text{s}^۳)t^۲$$

در نتیجه به ازای $t = ۰$ داریم $\omega_۰ = ۰$.

(ب) به‌ازای $t = ۴٫۰\,\text{s}$، از تابع به‌دست آمده در قسمت قبلی داریم

$$\omega_۴ = (۸٫۰)(۴٫۰) + (۶٫۰)(۴٫۰)^۲ = ۱۲۸\,\text{rad}/\text{s}$$

(ت) شتاب زاویه‌ای به صورت تابعی از زمان از معادله‌ی ۱۰-۸ به دست می‌آید:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = ۸٫۰\,\text{rad}/\text{s}^۲ + (۱۲\,\text{rad}/\text{s}^۳)t$$

در نتیجه به ازای $t = ۲٫۰\,\text{s}$ داریم

$$\alpha_۲ = ۸٫۰ + (۱۲)(۲٫۰) = ۳۲\,\text{rad}/\text{s}^۲$$

(ث) شتاب زاویه‌ای که در قسمت قبلی به دست آمد، به زمان بستگی دارد، لذا ثابت نیست.

** ۵ شیرجه‌رویی در فاصله‌ی میان سکوی ۱۰ متری شیرجه و سطح آب در هوا ۲٫۵ پشتک می‌زند. با فرض آنکه مؤلفه‌ی قائم سرعت آغازی صفر باشد، سرعت زاویه‌ای متوسط شیرجه‌رو را حساب کنید.

حل: معادله‌ی ۲-۱۵ را برای محور قائم (جهت رو به پایین $+y$) به‌کار می‌بریم و مدت زمان سقوط آزاد را به دست می‌آوریم:

$$\Delta y = v_{۰y}t + \frac{۱}{۲}gt^۲ \Rightarrow t = \sqrt{\frac{۲(۱۰\,\text{m})}{۹٫۸\,\text{m}/\text{s}^۲}} = ۱٫۴\,\text{s}$$

بنابراین، بزرگی سرعت زاویه‌ای متوسط با استفاده از معادله‌ی ۱۰-۵ برابر است با

$$\omega_{\text{avg}} = \frac{(۲٫۵\,\text{rev})(۲\pi\,\text{rad}/\text{rev})}{۱٫۴\,\text{s}} = ۱۱\,\text{rad}/\text{s}$$

** ۶ مکان زاویه‌ای یک نقطه‌ی واقع بر کناره‌ی یک چرخ دوار از رابطه‌ی $\theta = ۴٫۰t - ۳٫۰t^۲ + t^۳$ به دست می‌آید، که در آن θ برحسب رادیان و t برحسب ثانیه است. سرعت زاویه‌ای نقطه در زمان‌های (الف) $t = ۲٫۰\,\text{s}$ و (ب) $t = ۴٫۰\,\text{s}$ چقدر است؟ (پ) دربازه‌ی زمانی‌ای که از $t = ۲٫۰\,\text{s}$ آغاز و در $t = ۴٫۰\,\text{s}$ پایان می‌یابد، شتاب زاویه‌ای متوسط چقدر است؟ شتاب زاویه‌ای لحظه‌ای در (ت) لحظه‌ی آغازی و (ث) در لحظه‌ی پایانی این بازه‌ی زمانی، چقدر است؟

حل: اگر یکاهای کمیت‌ها را به طور صریح بیان کنیم، تابع داده شده به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\theta = (۴٫۰\,\text{rad}/\text{s})t - (۳٫۰\,\text{rad}/\text{s}^۲)t^۲ + (۱٫۰\,\text{rad}/\text{s}^۳)t^۳$$

البته، معمولاً در محاسبات خود ضرایب را با رقم‌های معنی‌دار مناسب نمی‌نویسیم.

(الف) از معادله‌ی ۱۰-۶ داریم

$$\omega = \frac{d}{dt}(۴t - ۳t^۲ + t^۳) = ۴ - ۶t + ۳t^۲$$

در نتیجه به ازای $t = ۲\,\text{s}$، $\omega_۲ = ۴٫۰\,\text{rad}/\text{s}$ به دست می‌آید.

(ب) رابطه‌ی به دست آمده در قسمت (الف) را به ازای $t = ۴\,\text{s}$ حساب می‌کنیم که داریم $\omega_۴ = ۲۸\,\text{rad}/\text{s}$.

(پ) شتاب زاویه‌ای متوسط را از معادله‌ی ۱۰-۷ به دست می‌آوریم:

$$\alpha_{\text{avg}} = \frac{\omega_۴ - \omega_۲}{۴ - ۲} = ۱۲\,\text{rad}/\text{s}^۲$$

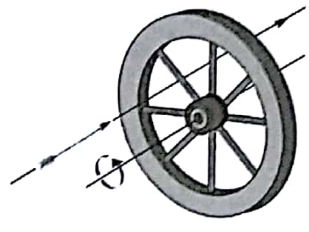
(ت) شتاب لحظه‌ای برابر است با

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(۴ - ۶t + ۳t^۲) = -۶ + ۶t$$

که به ازای $t = ۲\,\text{s}$، مقدار $\alpha_۲ = ۶٫۰\,\text{rad}/\text{s}^۲$ حاصل می‌شود.

(ث) رابطه‌ی به دست آمده در قسمت (ت) را به ازای $t = ۴\,\text{s}$ حساب می‌کنیم و $\alpha_۴ = ۱۸\,\text{rad}/\text{s}^۲$ را به دست می‌آوریم. توجه کنید که پاسخ α_{avg} با مقدار میانگین حسابی $\alpha_۲$ و $\alpha_۴$ برابر است، اما همیشه این طور نیست.

*** ۷ چرخ شکل ۱۰-۳۰، هشت پره به فاصله‌های مساوی دارد و شعاع آن $۳۰\,cm$ است. چرخ روی محور ثابتی سوار شده است و با سرعت $۲/۵\,rev/s$ می‌چرخد. می‌خواهیم پیکانی به طول $۲۰\,cm$ را به موازات محور دوران طوری پرتاب کنیم که بدون برخورد با هیچ پره‌ای از چرخ بگذرد. فرض می‌کنیم پیکان و پره‌ها به قدر کافی باریک‌اند. (الف) کمینه‌ی تندی پیکان چقدر باید باشد؟ (ب) آیا مهم است که چه نقطه‌ای را در فاصله‌ی میان محور و کناره‌ی چرخ نشانه بگیریم؟ اگر این موضوع مهم است، بهترین نقطه کجاست؟



شکل ۱۰-۳۰ مسئله‌ی ۷.

حل: (الف) برای آن‌که پیکان به پره‌ها برخورد نکند، باید در مدت کمتر از

$$\Delta t = \frac{۱/۸\,rev}{۲/۵\,rev/s} = ۰/۰۵۰\,s$$

از چرخ عبور کند. پس، تندی کمینه‌ی پیکان برابر است با

$$v_{\min} = \frac{۲۰\,cm}{۰/۰۵۰\,s} = ۴۰۰\,cm/s = ۴/۰\,m/s$$

(ب) خیر، محاسبات بالا ربطی به نقطه‌ی نشانه‌گیری ندارند.

*** ۸ شتاب زاویه‌ای یک چرخ $\alpha = ۶/۰t^۴ - ۴/۰t^۲$ است، که در آن α برحسب رادیان بر مجذور ثانیه و t برحسب ثانیه است. این چرخ در زمان $t = ۰$ دارای سرعت زاویه‌ای $+۲/۰\,rad/s$ و مکان زاویه‌ای $+۱/۰\,rad$ است. رابطه‌های مربوط به (الف) سرعت زاویه‌ای (برحسب rad/s) و (ب) مکان زاویه‌ای (برحسب rad) را به صورت تابعی از زمان (برحسب ثانیه) بنویسید.

حل: (الف) از رابطه‌ی $\alpha = ۶/۰t^۴ - ۴/۰t^۲$ نسبت به زمان انتگرال می‌گیریم، و در نظر می‌گیریم که سرعت زاویه‌ای آغازی $۲/۰\,rad/s$ است. سرعت زاویه‌ای برابر است با

$$\omega = ۱/۲t^۵ - ۱/۳۳t^۳ + ۲/۰$$

(ب) اکنون یک بار دیگر انتگرال می‌گیریم (و به یاد داریم که $\theta_۰ = ۱$ است):

$$\theta = ۰/۲۰t^۶ - ۰/۳۳t^۴ + ۲/۰t + ۱/۰$$

پودمان ۱۰-۲ حرکت دورانی با شتاب زاویه‌ای ثابت

* ۹ استوانه‌ای با سرعت زاویه‌ای $۱۲/۶۰\,rad/s$ به دور محور مرکزی‌اش می‌چرخد. اگر این استوانه با آهنگ ثابت $۴/۲۰\,rad/s^۲$ حرکت دورانی‌اش کند شود، (الف) چه مدت طول می‌کشد و (ب) چهزاویه‌ای را طی می‌کند، تا متوقف شود؟

حل: (الف) به‌ازای $\omega = ۰$ و $\alpha = -۴/۲\,rad/s^۲$ ازمعادله‌ی ۱۰-۱۲ داریم $t = -\omega_۰/\alpha = ۳/۰۰\,s$.

(ب) از معادله‌ی ۱۰-۴ داریم $\theta - \theta_۰ = -\omega_۰^۲/۲\alpha = ۱۸/۹\,rad$.

* ۱۰ قرصی از حال سکون شروع به حرکت می‌کند و با شتاب زاویه‌ای ثابت به‌دور محور مرکزی‌اش می‌چرخد. قرص در مدت ۵/۰ ثانیه به اندازه‌ی ۲۰ رادیان می‌چرخد. در این مدت، بزرگی (الف) شتاب زاویه‌ای و (ب) سرعت زاویه‌ای متوسط قرص، چقدر است؟ (پ) در پایان مدت ۵/۰ ثانیه سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای قرص چقدر است؟ (ت) اگرشتاب زاویه‌ای تغییر نکند، در مدت ۵/۰ ثانیه‌ی بعدی قرص تحت چه زاویه‌ای می‌چرخد؟

حل: جهت دوران را مثبت در نظر می‌گیریم، یعنی (چون قرص از حال سکون شروع به دوران می‌کند) مقدار کمیت‌ها (جابه‌جایی زاویه‌ای، شتاب‌ها، و غیره) مثبت است.

(الف) شتاب زاویه‌ای از معادله‌ی ۱۰-۱۳ به دست می‌آید:

$$۲۰\,rad = \frac{۱}{۲}\alpha(۵/۰\,s)^۲ \Rightarrow \alpha = ۱/۶\,rad/s^۲$$

(ب) سرعت زاویه‌ای متوسط از معادله‌ی ۱۰-۵ به دست می‌آید:

$$\omega_{\text{avg}} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{۲۰\,rad}{۵/۰\,s} = ۴/۰\,rad/s$$

(پ) سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای در زمان $t = ۵/۰\,s$ با استفاده از معادله‌ی ۱۰-۱۲ برابر است با

$$\omega = (۱/۶\,rad/s^۲)(۵/۰\,s) = ۸/۰\,rad/s$$

(ت) بر طبق معادله‌ی ۱۰-۱۳، جابه‌جایی زاویه‌ای در مدت زمان $t = ۱۰\,s$ برابر است با

$$\theta = \omega_0 + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 0 + \frac{1}{2}(1.6\,rad/s^2)(10\,s)^2 = 80\,rad$$

بنابراین، جابه‌جایی در بین لحظات $t = 5\,s$ و $t = 10\,s$ برابر است با: $\Delta\theta = 80\,rad - 8.0\,rad = 72\,rad$.

*** ۱۱** حرکت قرصی که در آغاز در حال دوران با تندی زاویه‌ای $120\,rad/s$ است، با شتاب زاویه‌ای ثابت $4.0\,rad/s^2$ کُند می‌شود. (الف) قرص پس از چه مدت متوقف می‌شود؟ (ب) در این مدت قرص تحت چه زاویه‌ای چرخیده است؟

حل: جهت دوران آغازی را مثبت در نظر می‌گیریم. در نتیجه به‌ازای $\omega_0 = +120\,rad/s$ و $\omega = 0$ (زیرا قرص در لحظه‌ی t متوقف می‌شود)، مقدار شتاب زاویه‌ای («شتاب کند کننده») منفی خواهد بود: $\alpha = -4.0\,rad/s^2$.

(الف) برای پیدا کردن t از معادله‌ی ۱۰-۱۲ استفاده می‌کنیم:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow t = \frac{0 - 120\,rad/s}{-4.0\,rad/s^2} = 30\,s$$

(ب) از معادله‌ی ۱۰-۱۵ داریم

$$\theta = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t = \frac{1}{2}(120\,rad + 0)(30\,s) = 1.8\times10^3\,rad$$

البته اگر بخواهیم فقط از اطلاعات داده شده استفاده کنیم، می‌توانیم معادله‌ی ۱۰-۱۴ را نیز به کار ببریم و برای به دست آوردن θ، از نتیجه‌ی قسمت (الف) استفاده نکنیم. اگر بتوانیم از نتیجه‌ی قسمت (الف) استفاده کنیم، در آن صورت هر معادله‌ی زاویه‌ای در جدول ۱۰-۱ (به جز معادله‌ی ۱۰-۱۲) را می‌توان برای پیدا کردن θ به‌کار ببریم.

*** ۱۲** تندی زاویه‌ای موتور یک خودرو با آهنگی ثابت در مدت ۱۲ ثانیه از $1200\,rev/min$ به $3000\,rev/min$ افزایش می‌یابد. (الف) شتاب زاویه‌ای موتور برحسب دور بر مجذور دقیقه چقدر است؟ (ب) در این بازه‌ی زمانی ۱۲ ثانیه موتور چند دور چرخیده است؟

حل: (الف) جهت دوران موتور را مثبت در نظر می‌گیریم. با استفاده از معادله‌ی ۱۰-۱۲ داریم

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow \alpha = \frac{(3000 - 1200)\,rev/min}{(12/60)\,min} = 9.0\times10^3\,rev/min^2$$

(ب) و از معادله‌ی ۱۰-۱۵ داریم

$$\theta = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t = \frac{1}{2}(1200\,rev/min + 3000\,rev/min)\left(\frac{12}{60}\,min\right) = 4.2\times10^2\,rev$$

**** ۱۳** چرخ لنگری از تندی زاویه‌ای $1.5\,rad/s$ تا توقف کامل، ۴۰ دور می‌زند. (الف) با فرض ثابت بودن شتاب زاویه‌ای، چه مدت طول می‌کشد تا چرخ متوقف شود؟ (ب) شتاب زاویه‌ای چرخ چقدر است؟ (پ) مدت زمان چرخیدن ۲۰ دور اول چرخ از ۴۰ دور چقدر است؟

حل: سرعت زاویه‌ای چرخ در لحظه‌ی $t = 0$، $\omega_0 = +1.5\,rad/s = +0.239\,rev/s$، و مقدار شتاب زاویه‌ای آن ثابت و $\alpha < 0$ است، که انتخاب جهت مثبت را نشان می‌دهد. در مدت زمان t_1 جابه‌جایی زاویه‌ای چرخ (نسبت به سمتگیری آن در لحظه‌ی $t = 0$)، $\theta_1 = +20\,rev$ و در مدت زمان t_2 جابه‌جایی زاویه‌ای آن $\theta_2 = +40\,rev$ و سرعت زاویه‌ای آن $\omega_2 = 0$ است.

(الف) مقدار t_2 را از معادله‌ی ۱۰-۱۵ به دست می‌آوریم:

$$\theta_2 = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega_2)t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{2(40\,rev)}{0.239\,rev/s} = 335\,s$$

$$t_2 \approx 3.4\times10^2\,s$$

(ب) از هر معادله‌ای در جدول ۱۰-۱ که شامل α است می‌توان برای پیدا کردن شتاب زاویه‌ای استفاده کرد، که ما معادله‌ی ۱۰-۱۶ را انتخاب می‌کنیم:

$$\theta_2 = \omega_2 t_2 - \frac{1}{2}\alpha t_2^2$$

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{2(40\,rev)}{(335\,s)^2} = -7.12\times10^{-4}\,rev/s^2$$

$$\alpha = -4.5\times10^{-3}\,rad/s^2$$

(پ) با استفاده از معادله‌ی $\theta_1 = \omega_0 t_1 + \frac{1}{2}\alpha t_1^2$ (معادله‌ی ۱۰-۱۳) و فرمول معادله‌ی درجه دوم، داریم

$$t_1 = \frac{-\omega_0 \pm \sqrt{\omega_0^2 + 2\theta_1\alpha}}{\alpha}$$

$$= \frac{-(0.239\,rev/s) \pm \sqrt{(0.239\,rev/s)^2 + 2(20\,rev)(-7.12\times10^{-4}\,rev/s^2)}}{-7.12\times10^{-4}\,rev/s^2}$$

در نتیجه دو ریشه‌ی مثبت خواهیم داشت: $98\,s$ و $572\,s$. چون پرسش مربوط به حالت $t_1 < t_2$ است، لذا نتیجه‌ی درست $t_1 = 98\,s$ است.

۱۴ ●● قرصی از حال سکون به حرکت در می‌آید و با شتاب زاویه‌ای ثابت به دور محور مرکزی‌اش می‌چرخد. قرص در یک زمان با تندی زاویه‌ای $10\,rev/s$ می‌چرخد و ۶۰ دور بعد تندی زاویه‌ای‌اش به $15\,rev/s$ می‌رسد. مطلوب است محاسبه‌ی (الف) شتاب زاویه‌ای، (ب) زمان لازم برای پیمودن ۶۰ دور بعدی، (پ) زمان لازم برای رسیدن به تندی زاویه‌ای $10\,rev/s$، و (ت) عده‌ی دورهایی که قرص از حال سکون تا زمان رسیدن به تندی زاویه‌ای $10\,rev/s$ می‌زند.

حل: قرص از حال سکون ($\omega_0=0$) در لحظه‌ی $t=0$ شروع به دوران می‌کند و دارای شتاب یکنواخت $\alpha>0$ می‌شود، که ما جهت دوران قرص را مثبت در نظر می‌گیریم. در لحظه‌ی t_1 سرعت زاویه‌ای قرص $\omega_1=+10\,rev/s$، و در لحظه‌ی t_2 سرعت زاویه‌ای آن $\omega_2=+15\,rev/s$ است. در بین لحظات t_1 و t_2، یعنی $\Delta t=t_2-t_1$، قرص به اندازه‌ی $\Delta\theta=60\,rev$ می‌چرخد.

(الف) شتاب زاویه‌ای α را از معادله‌ی ۱۰-۱۴ به دست می‌آوریم

$$\omega_2^2=\omega_1^2+2\alpha\Delta\theta$$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{(15\,rev/s)^2-(10\,rev/s)^2}{2(60\,rev)}=1.04\,rev/s^2\approx 1.0\,rev/s^2$$

(ب) مقدار Δt را از معادله‌ی ۱۰-۱۵ به دست می‌آوریم:

$$\Delta\theta=\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)\Delta t\Rightarrow \Delta t=\frac{2(60\,rev)}{10\,rev/s+15\,rev/s}=4.8\,s$$

(پ) مقدار t_1 را از معادله‌ی ۱۰-۱۲ به دست می‌آوریم:

$$\omega_1=\omega_0+\alpha t_1\Rightarrow t_1=\frac{10\,rev/s}{1.04\,rev/s^2}=9.6\,s$$

(ت) از هر معادله‌ای در جدول ۱۰-۱ که شامل θ است می‌توان برای پیدا کردن θ_1 (جابه‌جایی زاویه‌ای در بازه‌ی زمانی $0\le t\le t_1$) استفاده کرد: ما معادله‌ی ۱۰-۱۴ را انتخاب می‌کنیم:

$$\omega_1^2=\omega_0^2+2\alpha\theta_1\Rightarrow \theta_1=\frac{(10\,rev/s)^2}{2(1.04\,rev/s^2)}=48\,rev$$

۱۵ ●● شتاب زاویه‌ای ثابت چرخی $3.0\,rad/s^2$ است. این چرخ در یک بازه‌ی زمانی ۴٫۰ ثانیه زاویه‌ای به اندازه‌ی ۱۲۰ رادیان می‌پیماید. چرخ با این فرض که از حال سکون شروع به چرخش کرده باشد، تا آغاز بازه‌ی زمانی ۴٫۰ ثانیه چه مدت در حال حرکت بوده است؟

حل: چرخی داریم که با شتاب زاویه‌ای ثابت می‌چرخد. بنابراین برای تحلیل حرکت این چرخ می‌توانیم از معادلات جدول ۱۰-۱ استفاده کنیم.

چون چرخ از حال سکون به راه می‌افتد، جابه‌جایی زاویه‌ای آن برحسب زمان، به صورت $\theta=\frac{1}{2}\alpha t^2$ است. فرض می‌کنیم t_1 لحظه‌ی شروع بازه‌ی زمانی باشد، در نتیجه $t_2=t_1+4.0\,s$ است. در این مدت‌ها جابه‌جایی‌های زاویه‌ای متناظر عبارت‌اند از

$$\theta_1=\frac{1}{2}\alpha t_1^2\,,\ \theta_2=\frac{1}{2}\alpha t_2^2$$

چون $\Delta\theta=\theta_2-\theta_1$ معلوم است، t_1 را می‌توان به دست آورد که نشان می‌دهد چرخ تا شروع بازه‌ی زمانی $4.0\,s$ در حرکت بوده است. از ترکیب دو رابطه‌ی بالا داریم

$$\Delta\theta=\theta_2-\theta_1=\frac{1}{2}\alpha(t_2^2-t_1^2)=\frac{1}{2}\alpha(t_2+t_1)(t_2-t_1)$$

که به ازای $\Delta\theta=120\,rad$، $\alpha=3.0\,rad/s^2$ و $t_2-t_1=4.0\,s$، داریم

$$t_2+t_1=\frac{2(\Delta\theta)}{\alpha(t_2-t_1)}=\frac{2(120\,rad)}{(3.0\,rad/s^2)(4.0\,s)}=20\,s$$

از حل دو معادله، $t_2=12.0\,s$ و $t_1=8.0\,s$ به دست می‌آیند. بنابراین، چرخ تا آغاز بازه‌ی زمانی ۴٫۰ ثانیه، به مدت $8.0\,s$ در حال حرکت بوده است.

توجه: ما می‌توانیم این نتیجه را از محاسبه‌ی صریح θ_1 و θ_2 نیز به دست آوریم:

$$\theta_1=\frac{1}{2}\alpha t_1^2=\frac{1}{2}(3.0\,rad/s^2)(8.0\,s)^2=96\,rad$$

$$\theta_2=\frac{1}{2}\alpha t_2^2=\frac{1}{2}(3.0\,rad/s^2)(12.0\,s)^2=216\,rad$$

در واقع تفاضل این دو مقدار $\Delta\theta=\theta_2-\theta_1=120\,rad$ است.

۱۶ ●● یک چرخ و فلک از حال سکون با شتاب زاویه‌ای $1.50\,rad/s^2$ می‌چرخد. چه مدت طول می‌کشد تا (الف) ۲٫۰۰ دور اول و (ب) ۲٫۰۰ دور بعدی، را بزند؟

حل: (الف) از معادله ۱۰-۱۳ داریم

$$\theta-\theta_0=\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2=0+\frac{1}{2}(1.5\,rad/s^2)t_1^2$$

در این‌جا $\theta-\theta_0=(2\,rev)(2\pi\,rad/rev)$ است. در نتیجه $t_1=4.10\,s$ به دست می‌آید.

(ب) ما می‌توانیم مدت زمان چهار دور کامل را (با استفاده از همان معادله برای پیدا کردن زمان t_2 جدید) پیدا کنیم و سپس نتیجه‌ی به دست آمده در قسمت (الف) برای t_1 را از آن کم کنیم تا پاسخ مورد نظر به دست آید:

$$(4\,rev)(2\pi\,rad/rev) = 0 + \frac{1}{2}(1.5\,rad/s^2)t_2^2 \Rightarrow t_2 = 5.80\,s$$

بنابراین، پاسخ برابر است با $5.80\,s - 4.10\,s \approx 1.7\,s$.

** ۱۷ در زمان $t = 0$، یک چرخ لنگر دارای سرعت زاویه‌ای $4.7\,rad/s$، شتاب زاویه‌ای ثابت $-0.25\,rad/s^2$ و زاویه‌ی خط مرجع $\theta_0 = 0$ است. (الف) زاویه‌ی بیشینه‌ی θ_{max}، که خط مرجع در جهت مثبت می‌پیماید، چقدر است؟ در چه زمان‌هایی خط مرجع، (ب) برای اولین بار و (پ) برای دومین بار در مکان $\theta = \frac{1}{2}\theta_{max}$ قرار می‌گیرد؟ (ت) درچه زمان منفی و (ث) در چه زمان مثبت، خط مرجع در مکان $\theta = 10.5\,rad$ خواهد بود؟ (ج) نمودار θ برحسب t را رسم و پاسخ‌های (الف) تا (ث) را بر روی نمودار مشخص کنید.

حل: در این مسئله جهت مثبت (به طور ضمنی) در جهت دوران انتخاب شده است. بزرگی شتاب زاویه‌ای $0.25\,rad/s^2$ در جهت منفی، در یک بازه‌ی زمانی طولانی، از جمله مقادیر منفی زمان (t)، ثابت فرض شده است.

(الف) مقدار θ_{max} را متناظر با شرط $\omega = 0$ در نظر می‌گیریم (موقعی $\omega = 0$ می‌شود که حرکت چرخ در جهت مثبت معکوس می‌شود و چرخ در جهت منفی می‌چرخد). مقدار θ_{max} را از معادله‌ی ۱۰-۱۴ به دست می‌آوریم:

$$\theta_{max} = -\frac{\omega_0^2}{2\alpha} = -\frac{(4.7\,rad/s)^2}{2(-0.25\,rad/s^2)} = 44\,rad$$

(ب) ما مقادیر t_1 مربوط به جابه‌جایی زاویه‌ای $\theta_1 = 22\,rad$ (یا مقدار دقیق $\theta = 22.09\,rad$) را (نسبت به سمتگیری چرخ در نقطه‌ی $t = 0$) پیدا می‌کنیم. با استفاده از معادله‌ی ۱۰-۱۳ و فرمول معادله‌ی درجه‌ی دوم، داریم

$$\theta_1 = \omega_0 t_1 + \frac{1}{2}\alpha t_1^2 \Rightarrow t_1 = \frac{-\omega_0 \pm \sqrt{\omega_0^2 + 2\theta_1\alpha}}{\alpha}$$

در نتیجه دو ریشه‌ی $5.5\,s$ و $32\,s$ به دست می‌آیند. بنابراین، اولین بار که خط مرجع در مکان $\theta_1 = 22\,rad$ قرار می‌گیرد، مربوط به زمان $t = 5.5\,s$ است.

(پ) دومین بار که خط مرجع در مکان $\theta_1 = 22\,rad$ قرار می‌گیرد، مربوط به زمان $t = 32\,s$ است.

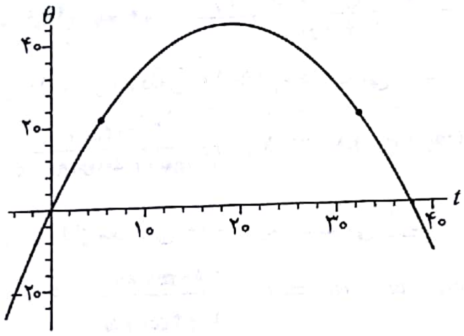
(ت) ما مقادیر t_2 مربوط به جابه‌جایی زاویه‌ای $\theta_2 = -10.5\,rad$ (نسبت به سمتگیری چرخ در لحظه‌ی $t = 0$) را پیدا می‌کنیم. با استفاده از معادله‌ی ۱۰-۱۳ و مول معادله‌ی درجه دوم، داریم

$$\theta_2 = \omega_0 t_2 + \frac{1}{2}\alpha t_2^2 \Rightarrow t_2 = \frac{-\omega_0 \pm \sqrt{\omega_0^2 + 2\theta_2\alpha}}{\alpha}$$

در نتیجه دو ریشه‌ی $-2.1\,s$ و $40\,s$ به دست می‌آیند. بنابراین در لحظه‌ی $t = -2.1\,s$ خط مرجع در مکان $\theta_2 = -10.5\,rad$ قرار می‌گیرد.

(ث) در لحظه‌ی $t = 40\,s$، خط مرجع در مکان $\theta_2 = -10.5\,rad$ قرار می‌گیرد.

(ج) نمودار θ برحسب t در زیر نشان داده شده است (نقطه‌های پیدا شده در قسمت‌های قبلی را با نقطه‌های کوچک مشخص کرده‌ایم).



*** ۱۸ تپ اختر یک ستاره‌ی نوترونی در حال چرخش تند است که، مانند گسیل باریکه‌ی نور توسط فانوس دریایی، باریکه‌ای از موج‌های رادیویی گسیل می‌کند. در هر دور این ستاره در روی زمین یک تپ دریافت می‌شود. دوره‌ی تناوب دوران، T، با اندازه‌گیری زمان بین تپ‌ها به دست می‌آید. در حال حاضر، دوره‌ی تناوب دوران تپ اختر واقع در سحابی خرچنگ $T = 0.033\,s$ است و این مقدار با آهنگ $1.26 \times 10^{-5}\,s/y$ در حال افزایش است. (الف) شتاب زاویه‌ای تپ اختر α، چقدر است؟ (ب) اگر α ثابت باشد، دوران تپ اختر چند سال دیگر متوقف خواهد شد؟ (پ) این تپ اختر از

انفجار یک ابرنواختر در سال ۱۰۵۴/۴۳۳ به وجود آمده است. با فرض ثابت بودن α، T آغازی را پیدا کنید.

حل: (الف) یک دور کامل معادل جابه‌جایی زاویه‌ای $\Delta\theta = 2\pi\ \text{rad}$ است، در نتیجه سرعت زاویه‌ای از رابطه‌ی $\omega = \Delta\theta / T = 2\pi / T$ به دست می‌آید. شتاب زاویه‌ای برابر است با

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{2\pi}{T^2}\frac{dT}{dt}$$

برای تپ اختر معرفی شده در این مسئله، داریم

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1.26\times10^{-5}\ \text{s/y}}{3.16\times10^{7}\ \text{s/y}} = 4.00\times10^{-13}$$

در نتیجه شتاب زاویه‌ای برابر است با

$$\alpha = -\left(\frac{2\pi}{(0.033\text{s})^2}\right)(4.00\times10^{-13}) = -2.3\times10^{-9}\ \text{rad/s}^2$$

علامت منفی نشان می‌دهد که شتاب زاویه‌ای در خلاف جهت سرعت زاویه‌ای است و سرعت تپ اختر کاهش می‌یابد.

(ب) از رابطه‌ی $\omega = \omega_0 + \alpha t$ و به ازای $\omega = 0$، مدت زمان لازم برای توقف تپ اختر را به دست می‌آوریم

$$t = -\frac{\omega_0}{\alpha} = -\frac{2\pi}{\alpha T} = -\frac{2\pi}{(-2.3\times10^{-9}\ \text{rad/s}^2)(0.033\text{s})}$$

$$= 8.3\times10^{10}\ \text{s} \approx 2.6\times10^{3}\ \text{سال}$$

(پ) این تپ اختر $1992 - 1054 = 938$ سال پیش به وجود آمده است که معادل $(938\text{y})(3.16\times10^{7}\ \text{s/y}) = 2.90\times10^{10}\ \text{s}$ است. در آن زمان سرعت زاویه‌ای آن

$$\omega = \omega_0 + \alpha t + \frac{2\pi}{T} + \alpha t$$

$$= \frac{2\pi}{0.033\text{s}} + (-2.3\times10^{-9}\ \text{rad/s}^2)(-2.96\times10^{10}\ \text{s}) = 258\ \text{rad/s}$$

و دوره‌ی تناوب آن به صورت زیر بوده است.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{258\ \text{rad/s}} = 2.4\times10^{-2}\ \text{s}$$

پودمان ۱۰-۳ رابطه‌ی میان متغیرهای خطی و زاویه‌ای

* ۱۹ فضاپیمایی مسیری دایره‌ای به شعاع $3220\ \text{km}$ را با تندی $29000\ \text{km/h}$ می‌پیماید. بزرگی (الف) سرعت زاویه‌ای، (ب) شتاب شعاعی، و (پ) شتاب مماسی فضاپیما، چقدر است؟

حل: (الف) سرعت زاویه‌ای (که مثبت فرض می‌شود) از معادله‌ی ۱۰-۱۸ به دست می‌آید

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{(2.90\times10^{4}\ \text{km/h})(1.000\text{h}/3600\text{s})}{3.22\times10^{3}\ \text{km}}$$

$$= 2.50\times10^{-3}\ \text{rad/s}$$

(ب) شتاب شعاعی (یا مرکزگرا) از معادله‌ی ۱۰-۲۳ حساب می‌شود

$$a_r = \omega^2 r = (2.50\times10^{-3}\ \text{rad/s})^2(3.22\times10^{6}\ \text{m}) = 20.2\ \text{m/s}^2$$

(پ) با فرض ثابت بودن سرعت زاویه‌ای، شتاب زاویه‌ای و شتاب مماسی صفرند، زیرا

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 0 \quad \text{و} \quad a_t = r\alpha = 0$$

* ۲۰ شیئی به دور محور ثابتی می‌چرخد و مکان زاویه‌ای یک خط مرجع روی شیء از رابطه‌ی $\theta = 0.40e^{2t}$ به دست می‌آید، که در آن θ برحسب رادیان و t برحسب ثانیه است. نقطه‌ای را بر روی شیء به فاصله‌ی $6.0\ \text{cm}$ از محور دوران در نظر بگیرید. در زمان $t = 0$، بزرگی (الف) مؤلفه‌ی مماسی شتاب و (ب) مؤلفه‌ی شعاعی شتاب نقطه، چیست؟

حل: تابع $\theta = \xi e^{\beta t}$ که در آن $\xi = 0.40\ \text{rad}$ و $\beta = 2\ \text{s}^{-1}$ است، مختصه‌ی زاویه‌ای یک خط (همه‌ی نقاط روی این خط در یک زمان تحت یک زاویه قرار دارند) روی شیئی را توصیف می‌کنند. مشتقات این تابع نسبت به زمان عبارت‌اند از

$$\frac{d\theta}{dt} = \xi\beta e^{\beta t} \quad \text{و} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \xi\beta^2 e^{\beta t}.$$

(الف) با استفاده از معادله‌ی ۱۰-۲۲ داریم

$$a_t = \alpha r = \frac{d^2\theta}{dt^2} r = 9.6\ \text{cm/s}^2$$

(ب) با استفاده از معادله‌ی ۱۰-۲۳ داریم

$$a_r = \omega^2 r = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 r = 4.8\ \text{cm/s}^2$$

* ۲۱ در بین سال‌های ۱۹۱۱ و ۱۹۹۰، نوک برج کج پیزا در ایتالیا با آهنگ متوسط $1.2\ \text{mm/y}$ به سمت جنوب حرکت کرد. ارتفاع برج ۵۵ متر است. تندی زاویه‌ای متوسط نوک برج به دور پایه‌ی آن، برحسب رادیان بر ثانیه، چقدر است؟

حل: آهنگ معلوم $1.2\times10^{-3}\ \text{m/y}$ را تندی خطی نوک برج در نظر می‌گیریم؛ این مقدار را مؤلفه‌ی افقی تندی خطی برج نیز

می‌توان در نظر گرفت، اما اختلاف بین این تعبیرها ناچیز است. بنابراین، از معادله‌ی ۱۰-۱۸ داریم

$$\omega = \frac{1.2\times10^{-3}\ m/y}{55\,m} = 2.18\times10^{-3}\ rad/y$$

چون هر سال تقریباً معادل 3.16×10^{7} ثانیه است، داریم

$$\omega = 6.9\times10^{-13}\ rad/s$$

* ۲۲ فضانوردی درون یک دستگاه مرکز گریز مورد آزمون قرار می‌گیرد. شعاع دستگاه $10\,m$ است و دستگاه طبق رابطه‌ی $\theta = 0.30t^2$، که در آن t برحسب ثانیه و θ برحسب رادیان است، شروع به دوران می‌کند. در زمان $t = 5.0\,s$، بزرگی (الف) سرعت زاویه‌ای، (ب) سرعت خطی، (پ) شتاب مماسی، و (ت) شتاب شعاعی فضانورد، چیست؟

حل: (الف) با استفاده از معادله‌ی ۱۰-۶، سرعت زاویه‌ای فضانورد در لحظه‌ی $t = 5.0\,s$ به دست می‌آید

$$\omega = \left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{t=5.0} = \left.\frac{d}{dt}(0.30t^2)\right|_{t=5.0} = 2(0.30)(5.0) = 3.0\ rad/s$$

(ب) تندی خطی در لحظه‌ی $t = 5.0\,s$ از معادله‌ی ۱۰-۱۸ به‌دست می‌آید

$$v = \omega r = (3.0\ rad/s)(10\,m) = 30\ m/s$$

(پ) شتاب زاویه‌ای فضانورد از معادله‌ی ۱۰-۸ به دست می‌آید

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(0.60t) = 0.60\ rad/s^2$$

بنابراین، شتاب مماسی در لحظه‌ی $t = 5.0\,s$ از معادله‌ی ۱۰-۲۲ حساب می‌شود

$$a_t = r\alpha = (10\,m)(0.60\ rad/s^2) = 6.0\ m/s^2$$

(ت) شتاب شعاعی (مرکزگرا) را از معادله‌ی ۱۰-۲۳ حساب می‌کنیم:

$$a_r = \omega^2 r = (3.0\ rad/s)^2(10\,m) = 90\ m/s^2$$

* ۲۳ چرخ لنگری به قطر $1.20\,m$ با تندی زاویه‌ای $200\ rev/min$ می‌چرخد. (الف) تندی زاویه‌ای چرخ برحسب رادیان بر ثانیه چقدر است؟ (ب) تندی خطی یک نقطه‌ی واقع بر کناره‌ی چرخ چقدر است؟ (پ) چه شتاب زاویه‌ای ثابتی (برحسب دور بر مجذور دقیقه) باعث می‌شود تندی زاویه‌ای چرخ در مدت 60.0 ثانیه به $1000\ rev/min$ برسد؟ (ت) چرخ در این مدت 60.0 ثانیه چند دور می‌زند؟

حل: رابطه‌ی تندی خطی چرخ و تندی زاویه‌ای آن به صورت $v = \omega r$ است، که در آن r شعاع چرخ است. وقتی چرخ شتاب می‌گیرد، تندی زاویه‌ای آن در هر لحظه‌ی بعدی برابر است با $\omega = \omega_0 + \alpha t$.

(الف) تندی زاویه‌ای چرخ برابر است با

$$\omega_0 = \frac{(200\ rev/min)(2\pi\ rad/rev)}{60\ s/min} = 20.9\ rad/s$$

(ب) تندی خطی چرخ به ازای $r = (1.20\,m)/2 = 0.60\,m$ از معادله‌ی ۱۰-۱۸ به دست می‌آید

$$v = r\omega_0 = (0.60\,m)(20.9\ rad/s) = 12.5\ m/s$$

(پ) به ازای $t = 1\,min$، $\omega = 1000\ rev/min$ و $\omega_0 = 200\ rev/min$، شتاب مورد نظر را از معادله‌ی ۱۰-۱۲ به‌دست می‌آوریم

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = 800\ rev/min^2$$

(ت) با استفاده از همان مقادیر به کار رفته در قسمت (پ)، از معادله‌ی ۱۰-۱۵ داریم

$$\theta = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$$

$$= \frac{1}{2}(200\,rev/min + 1000\,rev/min)(1.0\,min) = 600\ rev$$

توجه: روش دیگر برای حل کردن قسمت (ت)، استفاده کردن از معادله‌ی ۱۰-۱۳ است

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$= 0 + (200\,rev/min)(1.0\,min) + \frac{1}{2}(800\,rev/min^2)(1.0\,min)^2$$

$$= 600\ rev$$

* ۲۴ وقتی یک صفحه‌ی گرامافون از جنس وینیل با چرخیدن به‌کار می‌افتد، یک شیار تقریباً دایره‌ای روی صفحه در زیر یک سوزن می‌لغزد. برآمدگی‌های موجود در این شیار سبب می‌شوند سوزن در درون شیار نوسان کند. دستگاه گرامافون این نوسان‌ها را به سیگنال‌های الکتریکی و سپس به صوت تبدیل می‌کند.

فرض کنید صفحه با آهنگ $\text{۳۳}\frac{\text{۱}}{\text{۳}}\,\text{rev/min}$ می‌چرخد، شعاع شیار ۱۰٫۰cm است، و فاصله‌ی یکنواخت برآمدگی‌های شیار ۱٫۸۵ mm است. این برآمدگی‌ها با چه آهنگی (عده‌ی برخورد بر ثانیه) به سوزن برخورد می‌کنند؟

حل: مقدار $\text{۳۳}\frac{\text{۱}}{\text{۳}}\,\text{rev/min}$ را به رادیان بر ثانیه تبدیل می‌کنیم: $\omega = \text{۳٫۴۹ rad/s}$. رابطه‌ی $v = \omega r$ (معادله‌ی ۱۰-۱۸) را با $\Delta t = d/v$ که Δt مدت زمان بین افتادن سوزن در برآمدگی‌ها (به فاصله‌ی d از یکدیگر) ترکیب می‌کنیم و آهنگ برخورد برآمدگی به سوزن را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\text{۱}}{\Delta t} = \frac{\omega r}{d} \approx \text{۱۸۹/s}$$

** ۲۵ (الف) تندی زاویه‌ای ω، برای نقطه‌ای از سطح زمین که در عرض جغرافیایی ۴۰ درجه‌ی شمالی به دور محور قطبی زمین می‌چرخد، چقدر است؟ (ب) تندی خطی این نقطه v، چقدر است؟ برای نقطه‌ای از استوا، (پ) مقدار ω و (ت) مقدار v، چیست؟

حل: تندی خطی نقطه‌ای از سطح زمین به فاصله‌ی آن نقطه تا محور دوران بستگی دارد. برای به دست آوردن این تندی خطی، از رابطه‌ی $v = \omega r$ استفاده می‌کنیم که r شعاع مدار است. نقطه‌ای از سطح زمین در عرض جغرافیایی ۴۰° در روی یک مسیر دایره‌ای به شعاع $r = R\cos \text{۴۰}^\circ$ حرکت می‌کند که در آن R شعاع زمین $(\text{۶٫۴}\times\text{۱۰}^{\text{۶}}\,\text{m})$ است. از طرف دیگر در استوا $r = R$ است.

(الف) زمین در هر شبانه‌روز یک دور کامل می‌زند و هر شبانه‌روز برابر است با $\text{۸٫۶۴}\times\text{۱۰}^{\text{۴}}\,\text{s} = (\text{۲۴h})(\text{۳۶۰۰s/h})$، در نتیجه تندی زاویه‌ای زمین برابر است با

$$\omega = \frac{\text{۲}\pi\,\text{rad}}{\text{۸٫۶۴}\times\text{۱۰}^{\text{۴}}\,\text{s}} = \text{۷٫۳}\times\text{۱۰}^{-\text{۵}}\,\text{rad/s}$$

(ب) در عرض جغرافیایی ۴۰°، تندی خطی زمین برابر است با

$$v = \omega(R\cos\text{۴۰}^\circ)$$

$$= (\text{۷٫۳}\times\text{۱۰}^{-\text{۵}}\,\text{rad/s})(\text{۶٫۴}\times\text{۱۰}^{\text{۶}}\,\text{m})\cos\text{۴۰}^\circ = \text{۳٫۵}\times\text{۱۰}^{\text{۲}}\,\text{m/s}$$

(پ) در استوا (و در تمام نقاط دیگر روی زمین) مقدار ω یکسان $(\text{۷٫۳}\times\text{۱۰}^{-\text{۵}}\,\text{rad/s})$ است.

(ت) عرض جغرافیایی در استوا ۰° و تندی خطی در آن‌جا برابر است با

$$v = \omega R = (\text{۷٫۳}\times\text{۱۰}^{-\text{۵}}\,\text{rad/s})(\text{۶٫۴}\times\text{۱۰}^{\text{۶}}\,\text{m}) = \text{۴٫۶}\times\text{۱۰}^{\text{۲}}\,\text{m/s}$$

توجه: تندی خطی در قطب‌های زمین صفر است زیرا $r = R\cos\text{۹۰}^\circ = \text{۰}$.

** ۲۶ چرخ لنگر ماشین بخاری با سرعت زاویه‌ای ثابت ۱۶۰ rev/min می‌چرخد. وقتی بخار قطع می‌شود، اصطکاک یاتاقان‌ها و مقاومت هوا سبب می‌شود چرخ پس از مدت ۲٫۲ ساعت متوقف شود. (الف) شتاب زاویه‌ای ثابت چرخ در حین کند شدن حرکت، برحسب دور بر مجذور دقیقه، چقدر است؟ (ب) چرخ پیش از توقف چند دور می‌زند؟ (پ) در لحظه‌ای که چرخ با تندی زاویه‌ای ۷۵ rev/min می‌چرخد، مؤلفه‌ی مماسی شتاب خطی نقطه‌ای از چرخ به فاصله‌ی ۵۰ cm از محور دوران چقدر است؟ (ت) بزرگی شتاب خطی برایند نقطه‌ی مربوط به قسمت (پ) چقدر است؟

حل: (الف) شتاب زاویه‌ای برابر است با

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\text{۰} - \text{۱۶۰ rev/min}}{(\text{۲٫۲ h})(\text{۶۰ min/۱h})} = -\text{۱٫۲۱ rev/min}^{\text{۲}}$$

(ب) به ازای $t = (\text{۲٫۲})(\text{۶۰}) = \text{۱۳۲ min}$، تعداد دورها از معادله‌ی ۱۰-۱۳ به دست می‌آید:

$$\theta = \omega_{\circ} t + \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\alpha t^{\text{۲}}$$

$$= (\text{۱۶۰rev/min})(\text{۱۳۲ min}) + \frac{\text{۱}}{\text{۲}}(-\text{۱٫۲۱ rev/min}^{\text{۲}})(\text{۱۳۲ min})^{\text{۲}}$$

$$= \text{۵٫۴}\times\text{۱۰}^{\text{۳}}\,\text{rev}$$

(پ) شتاب مماسی به ازای $r = \text{۵۰۰ mm}$ برابر است با

$$a_t = \alpha r = (-\text{۱٫۲۱ rev/min}^{\text{۲}})\left(\frac{\text{۲}\pi\,\text{rad}}{\text{۱rev}}\right)\left(\frac{\text{۱min}}{\text{۶۰s}}\right)^{\text{۲}}(\text{۵۰۰ mm})$$

در نتیجه $a_t = -\text{۱٫۰۶ mm/s}^{\text{۲}}$ به دست می‌آید. توجه کنید که این شتاب به سرعت زاویه‌ای داده شده بستگی ندارد.

(ت) تندی زاویه‌ای چرخ لنگر برابر است با

$$\omega = (\text{۷۵rev/min})(\text{۲}\pi\,\text{rad/rev})(\text{۱min/۶۰s})$$

$$= \text{۷٫۸۵rad/s}$$

به ازای $r = \text{۰٫۵۰ m}$، شتاب شعاعی (یا مرکزگرا) از معادله‌ی ۱۰-۲۳ به دست می‌آید

$$a_r = \omega^{\text{۲}} r = (\text{۷٫۸۵ rad/s})^{\text{۲}}(\text{۰٫۵۰ m}) \approx \text{۳۱ m/s}^{\text{۲}}$$

این شتاب بسیار بزرگ‌تر از شتاب a_t است. در نتیجه بزرگی شتاب برابر است با

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_r^2+a_t^2}\approx a_r=31\,\mathrm{m/s^2}$$

** ۲۷ صفحه‌ی یک گرامافون با تندی زاویه‌ای $33\frac{1}{3}\,\mathrm{rev/min}$ می‌چرخد. یک تخم هندوانه به فاصله‌ی $6.0\,\mathrm{cm}$ از محور دوران بر روی صفحه قرار داده شده است. (الف) شتاب تخم را با این فرض که نمی‌لغزد، حساب کنید. (ب) اگر بخواهیم تخم نلغزد، کمینه‌ی مقدار ضریب اصطکاک ایستایی میان تخم و صفحه چقدر باید باشد؟ (پ) فرض کنید صفحه با شتاب ثابت از حال سکون شروع به دوران می‌کند و پس از ۰٫۲۵ ثانیه به این تندی زاویه‌ای می‌رسد. کمینه‌ی مقدار ضریب اصطکاک ایستایی لازم را برای آنکه تخم در مدت شتاب گرفتن نلغزد، حساب کنید.

حل: (الف) تندی زاویه‌ای برحسب $\mathrm{rad/s}$ برابر است با

$$\omega=\left(33\frac{1}{3}\,\mathrm{rev/min}\right)\left(\frac{2\pi\,\mathrm{rad/rev}}{60\,\mathrm{s/min}}\right)=3.49\,\mathrm{rad/s}$$

در نتیجه، شتاب شعاعی (مرکزگرا) با استفاده از معادله‌ی ۱۰-۲۳ برابر است با

$$a=\omega^2 r=(3.49\,\mathrm{rad/s})^2(6.0\times10^{-2}\,\mathrm{m})=0.73\,\mathrm{m/s^2}$$

(ب) با استفاده از روش‌های فصل ۶ داریم $ma=f_s\le f_{s,\max}=\mu_s mg$، که برای به دست آوردن (کم‌ترین مقدار ممکن) ضریب اصطکاک به کار می‌رود

$$\mu_{s,\min}=\frac{a}{g}=\frac{0.73}{9.8}=0.075$$

(پ) شتاب شعاعی تخم هندوانه $a_r=\omega^2 r$ است، در حالی که شتاب مماسی آن $a_t=\alpha r$ است. در نتیجه داریم

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_r^2+a_t^2}=\sqrt{(\omega^2 r)^2+(\alpha r)^2}=r\sqrt{\omega^4+\alpha^2}$$

اگر بخواهیم تخم هندوانه هرگز نلغزد، باید داشته باشیم

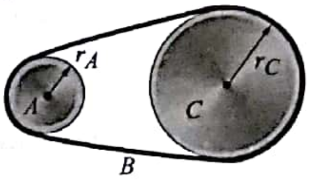
$$f_{s,\max}=\mu_s mg=ma_{\max}=mr\sqrt{\omega_{\max}^4+\alpha^2}$$

بنابراین، چون $\alpha=\omega/t$ (معادله‌ی ۱۰-۱۲)، داریم

$$\mu_{s,\min}=\frac{r\sqrt{\omega_{\max}^4+\alpha^2}}{g}=\frac{r\sqrt{\omega_{\max}^4+(\omega_{\max}/t)^2}}{g}$$

$$=\frac{(0.060)\sqrt{3.49^4+(3.4/0.25)^2}}{9.8}=0.11$$

** ۲۸ در شکل ۱۰-۳۱، چرخ A به شعاع $r_A=10\,\mathrm{cm}$، به وسیله‌ی تسمه‌ی B به چرخ C به شعاع $r_C=25\,\mathrm{cm}$ وصل شده است. تندی زاویه‌ای چرخ A از حال سکون با آهنگ ثابت $1.6\,\mathrm{rad/s^2}$ افزایش می‌یابد. با این فرض که تسمه نمی‌لغزد، مدت زمانی را که لازم است تا تندی زاویه‌ای چرخ C به $100\,\mathrm{rev/min}$ برسد، معین کنید. (*راهنمایی:* اگر تسمه نلغزد، تندی خطی نقطه‌های واقع بر کناره‌های دو چرخ با هم مساوی‌اند).



شکل ۱۰-۳۱ مسئله‌ی ۲۸.

حل: چون تسمه نمی‌لغزد، شتاب مماسی هر نقطه از لبه‌ی چرخ C با شتاب مماسی هر نقطه از لبه‌ی چرخ A برابر است. یعنی: $\alpha_A r_A=\alpha_C r_C$، که α_A شتاب زاویه‌ای چرخ A و α_C شتاب زاویه‌ای چرخ C است. در نتیجه داریم:

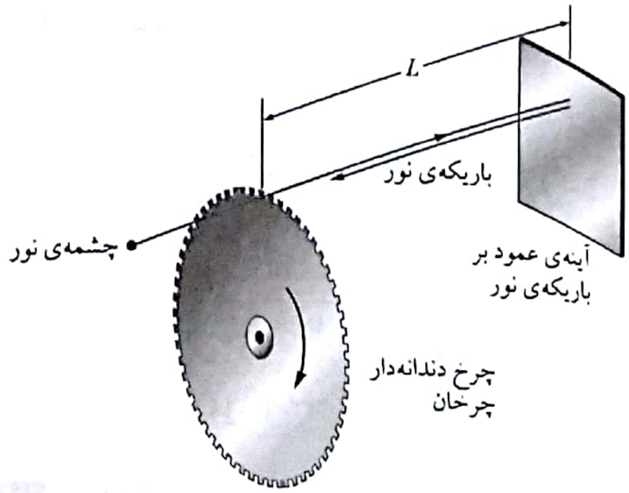
$$\alpha_C=\frac{r_A}{r_C}\alpha_C=\left(\frac{10\,\mathrm{cm}}{25\,\mathrm{cm}}\right)(1.6\,\mathrm{rad/s^2})=0.64\,\mathrm{rad/s^2}$$

تندی زاویه‌ای چرخ C از رابطه‌ی $\omega_C=\alpha_C t$ به دست می‌آید، در نتیجه مدت زمان لازم برای آن که تندی زاویه‌ای چرخ C از حال سکون به $100\,\mathrm{rev/min}=10.5\,\mathrm{rad/s}$ برسد، برابر است با

$$t=\frac{\omega_C}{\alpha_C}=\frac{10.5\,\mathrm{rad/s}}{0.64\,\mathrm{rad/s^2}}=16.4\,\mathrm{s}$$

** ۲۹ در یکی از روش‌های اندازه‌گیری تندی نور از یک چرخ دندانه‌دار چرخان استفاده شده است. در این روش، باریکه‌ی نوری از شکاف میان دندانه‌های کناره‌ی بیرونی چرخ، مطابق شکل ۱۰-۳۲، می‌گذرد، به آینه‌ای که در فاصله‌ای دور قرار دارد می‌تابد و چنان به طرف چرخ برمی‌گردد که درست از شکاف بعدی چرخ عبور می‌کند. چرخ دندانه‌داری دارای شعاع $5.0\,\mathrm{cm}$ است و در کناره‌ی آن ۵۰۰ دندانه وجود دارد. اندازه‌گیری مربوط به وقتی که فاصله‌ی آینه از چرخ $L=500\,\mathrm{m}$ بوده

است، تندی نور را $۳٫۰\times۱۰^{۵}\,km/s$ نشان می‌دهد. (الف) تندی زاویه‌ای (ثابت) چرخ دندانه‌دار چقدر است؟ (ب) تندی خطی یک نقطه‌ی واقع بر کناره‌ی چرخ چقدر است؟



شکل ۱۰-۳۲ مسئله‌ی ۲۹.

حل: (الف) در مدت زمانی که طول می‌کشد تا نور به آینه بتابد و برگردد، چرخ به اندازه‌ی زاویه‌ی $\theta = ۲\pi/۵۰۰ = ۱٫۲۶\times۱۰^{-۲}\,rad$ می‌چرخد. این مدت زمان برابر است با

$$t = \frac{۲l}{c} = \frac{۲(۵۰۰\,m)}{۲٫۹۹۸\times۱۰^{۸}\,m/s} = ۳٫۳۴\times۱۰^{-۶}\,s$$

بنابراین سرعت زاویه‌ای چرخ برابر است با

$$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{۱٫۲۶\times۱۰^{-۲}\,rad}{۳٫۳۴\times۱۰^{-۶}\,s} = ۳٫۸\times۱۰^{۳}\,rad/s$$

(ب) اگر r شعاع چرخ باشد، تندی خطی یک نقطه از لبه‌ی آن برابر است با

$$v = \omega r = (۳٫۸\times۱۰^{۳}\,rad/s)(۰٫۰۵۰\,m) = ۱٫۹\times۱۰^{۲}\,m/s$$

**۳۰ چرخ لنگر ژیروسکوپی به‌شعاع $۲٫۸۳\,cm$ باشتاب زاویه‌ای $۱۴٫۲\,rad/s^{۲}$ از حال سکون شروع به چرخش می‌کند و تندی زاویه‌ای‌اش به $۲۷۶۰\,rev/min$ می‌رسد. (الف) شتاب مماسی یک نقطه‌ی واقع بر کناره‌ی ژیروسکوپ در طی فرایند شتاب گرفتن چقدر است؟ (ب) وقتی که ژیروسکوپ با تندی نهایی می‌چرخد، شتاب شعاعی این نقطه چقدر است؟ (پ) در مدت شتاب گرفتن چرخ، نقطه‌ی واقع بر کناره چه مسافتی می‌پیماید؟

حل: (الف) شتاب مماسی از معادله‌ی ۱۰-۲۲ به دست می‌آید:

$$a_t = \alpha r = (۱۴٫۲\,rad/s^{۲})(۲٫۸۳\,cm) = ۴۱\,cm/s^{۲}$$

(ب) سرعت زاویه‌ای $\omega = (۲۷۶۰)(۲\pi/۶۰) = ۲۸۹\,rad/s$ است، در نتیجه داریم

$$a_r = \omega^{۲} r = (۲۸۹\,rad/s)^{۲}(۰٫۰۲۸۳\,m) = ۲٫۳۶\times۱۰^{۳}\,m/s^{۲}$$

(پ) جابه‌جایی زاویه‌ای از معادله‌ی ۱۰-۱۴ به دست می‌آید

$$\theta = \frac{\omega^{۲}}{۲\alpha} = \frac{(۲۸۹\,rad/s)^{۲}}{۲(۱۴٫۲\,rad/s^{۲})} = ۲٫۹۴\times۱۰^{۳}\,rad$$

در نتیجه مسافت پیموده شده با استفاده از معادله‌ی ۱۰-۱ برابر است با

$$s = r\theta = (۰٫۰۲۸۳\,m)(۲٫۹۴\times۱۰^{۳}\,rad) = ۸۳٫۲\,m$$

**۳۱ می‌خواهیم قرصی به شعاع $۰٫۲۵\,m$ مانند یک چرخ و فلک از حال سکون شروع به چرخش کند و زاویه‌ی $۸۰۰\,rad$ را بپیماید. این قرص درچرخش $۴۰۰\,rad$ اول تندی زاویه‌ای‌اش را با شتاب ثابت α_1 افزایش می‌دهد و سپس تندی زاویه‌ای‌اش را با شتاب ثابت $-\alpha_1$ کاهش می‌دهد تا دوباره متوقف شود. بزرگی شتاب مرکزگرای هر بخش از این قرص نباید از $۴۰۰\,m/s^{۲}$ تجاوز کند. (الف) کمترین زمان مورد نیاز برای این چرخش چقدراست؟ (ب) مقدار α_1 متناظر با این زمان چیست؟

حل: (الف) حد بالاتر برای شتاب مرکزگرا (همچنین برای شتاب شعاعی ـ معادله‌ی ۱۰-۲۳ را ببینید) متناظر با حد بالاتر برای چرخش (سرعت زاویه‌ای ω) برای یک نقطه‌ی واقع بر لبه‌ی قرص $(r = ۰٫۲۵\,m)$ است. بنابراین، $\omega_{max} = \sqrt{\alpha/r} = ۴۰\,rad/s$.
اکنون، از معادله‌ی ۱۰-۱۵ برای نیمه‌ی اول حرکت (که در آن $\omega_۰ = ۰$ است) استفاده می‌کنیم:

$$\theta - \theta_۰ = \frac{۱}{۲}(\omega_۰ + \omega)t \Rightarrow ۴۰۰\,rad = \frac{۱}{۲}(۰ + ۴۰\,rad/s)t$$

در نتیجه $t = ۲۰\,s$ به دست می‌آید. نیمه‌ی دوم حرکت نیز در مدت زمان مساوی صورت می‌گیرد (این فرایند، معکوس حالت اول است)؛ بنابراین مدت زمان کل مورد نیاز برای چرخش $۴۰\,s$ است.
(ب) باز هم نیمه‌ی اول حرکت را در نظر می‌گیریم و از معادله‌ی ۱۰-۱۱ داریم

$$\omega = \omega_۰ + \alpha t \Rightarrow \alpha = \frac{۴۰\,rad/s}{۲۰\,s} = ۲٫۰\,rad/s^{۲}$$

**۳۲ خودرویی از حال سکون شروع به حرکت می‌کند و یک مسیر دایره‌ای به شعاع $۳۰٫۰\,m$ را دور می‌زند. تندی این

خودرو با آهنگ ثابت $۰٫۶۰۰ \mathrm{m/s^2}$ افزایش می‌یابد. (الف) بزرگی شتاب خطی برایند خودرو پس از $۱۵٫۰\mathrm{s}$ چقدر است؟ (ب) زاویه‌ی این بردار شتاب برایند با بردار سرعت خودرو در این لحظه چیست؟

حل: (الف) تندی خطی در لحظه‌ی $t = ۱۵٫۰\mathrm{s}$ برابر است با

$$v = a_t t = (۰٫۶۰۰ \mathrm{m/s^2})(۱۵٫۰\mathrm{s}) = ۹٫۰۰ \mathrm{m/s}$$

شتاب شعاعی (مرکزگرا) در آن لحظه برابر است با

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{(۹٫۰۰ \mathrm{m/s})^2}{۳۰٫۰ \mathrm{m}} = ۲٫۷ \mathrm{m/s^2}$$

پس، بزرگی شتاب برایند برابر است با

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = \sqrt{(۰٫۶۰۰ \mathrm{m/s^2})^2 + (۲٫۷ \mathrm{m/s^2})^2} = ۲٫۷۷ \mathrm{m/s^2}$$

(ب) می‌دانیم که $\vec{v} \parallel \vec{a}_t$، درنتیجه زاویه‌ی بین $\vec{v}$ و $\vec{a}$ برابر است با

$$\tan^{-1}\left(\frac{a_r}{a_t}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{۲٫۷}{۰٫۶۰۰}\right) = ۷۶٫۷°$$

بنابراین جهت بردار بیشتر به طرف مرکز مسیر متمایل است تا جهت حرکت خودرو.

پودمان ۱۰-۴ انرژی جنبشی دورانی

* **۳۳** لختی دورانی چرخی را حساب کنید که انرژی جنبشی‌اش در موقع دوران با تندی $۶۰۲ \mathrm{rev/min}$، برابر با $۲۴۴۰۰ \mathrm{J}$ باشد.

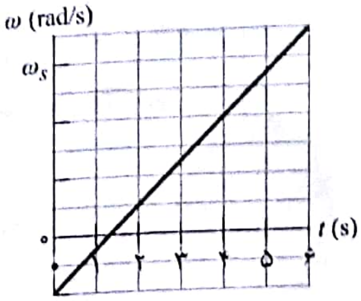
حل: انرژی جنبشی چرخ (برحسب ژول) از رابطه‌ی $K = \frac{1}{2} I \omega^2$ به دست می‌آید که در آن I لختی دورانی (برحسب $\mathrm{kg.m^2}$) و ω سرعت زاویه‌ای (برحسب $\mathrm{rad/s}$) است. پس، سرعت زاویه‌ای چرخ برابر است با

$$\omega = \frac{(۶۰۲ \mathrm{rev/min})(۲\pi \mathrm{rad/rev})}{۶۰ \mathrm{s/min}} = ۶۳٫۰ \mathrm{rad/s}$$

در نتیجه لختی دورانی چرخ برابر است با

$$I = \frac{۲K}{\omega^2} = \frac{۲(۲۴۴۰۰ \mathrm{J})}{(۶۳٫۰ \mathrm{rad/s})^2} = ۱۲٫۳ \mathrm{kg.m^2}$$

* **۳۴** شکل ۱۰-۳۳ نمودار تندی زاویه‌ای مربوط به‌میله‌ی باریکی را برحسب زمان نشان می‌دهد، که به دور یک سر میله دوران می‌کند. مقیاس محور قائم شکل ω، با مقدار $\omega_s = ۶٫۰ \mathrm{rad/s}$ مشخص شده است. (الف) بزرگی شتاب زاویه‌ای میله چقدر است؟ (ب) در زمان $t = ۴٫۰\mathrm{s}$ انرژی جنبشی دورانی میله $۱٫۶۰ \mathrm{J}$ است. انرژی جنبشی میله در زمان $t = ۰$ چیست؟



شکل ۱۰-۳۳ مسئله‌ی ۳۴.

حل: (الف) معادله‌ی ۱۰-۱۲ نشان می‌دهد که شتاب زاویه‌ای α باید با شیب منحنی ω برحسب t برابر باشد. در نتیجه داریم: $\alpha = ۹/۶ = ۱٫۵ \mathrm{rad/s^2}$.

(ب) با توجه به معادله‌ی ۱۰-۳۴، K با ω^2 متناسب است. چون سرعت زاویه‌ای در لحظه‌ی $t = ۰$ مساوی با $-۲ \mathrm{rad/s}$ (و مربع این مقدار مساوی با ۴) است و سرعت زاویه‌ای در لحظه‌ی $t = ۴\mathrm{s}$ مساوی با $۴ \mathrm{rad/s}$ (و مربع این مقدار مساوی با ۱۶) است، در نتیجه نسبت انرژی‌های جنبشی متناظر برابر است با

$$\frac{K_۰}{K_۴} = \frac{۴}{۱۶} \Rightarrow K_۰ = K_۴/۴ = ۰٫۴۰ \mathrm{J}$$

پودمان ۱۰-۵ محاسبه‌ی لَختی دورانی

* **۳۵** دو استوانه‌ی صُلب یکنواخت به دور محور مرکزی (طولی) خود می‌چرخند. استوانه‌ها دارای جرم یکسان $۱٫۲۵ \mathrm{kg}$ هستند و با تندی زاویه‌ای یکسان $۲۳۵ \mathrm{rad/s}$، اما با شعاع‌های متفاوت، می‌چرخند. انرژی جنبشی دورانی، (الف) استوانه‌ی کوچک‌تر به شعاع $۰٫۲۵ \mathrm{m}$، و (ب) استوانه‌ی بزرگ‌تر به شعاع $۰٫۷۵ \mathrm{m}$، چقدر است؟

حل: چون لختی دورانی استوانه $I = \frac{1}{2} MR^2$ (جدول ۱۰-۲ پ) است، انرژی جنبشی دورانی آن برابر است با

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{4} MR^2 \omega^2$$

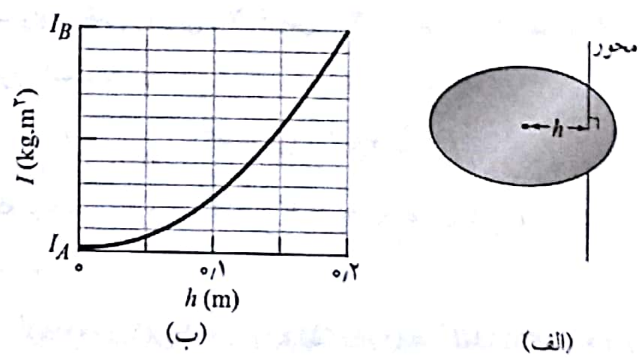
(الف) برای استوانه‌ی کوچک‌تر داریم

$$K_{۱} = \frac{۱}{۴}(۱٫۲۵\,kg)(۰٫۲۵\,m)^{۲}(۲۳۵\,rad/s)^{۲}$$
$$= ۱٫۰۸\times۱۰^{۳}\,J \approx ۱٫۱\times۱۰^{۳}\,J$$

(ب) برای استوانه‌ی بزرگ‌تر داریم

$$K_{۲} = \frac{۱}{۴}(۱٫۲۵\,kg)(۰٫۷۵\,m)^{۲}(۲۳۵\,rad/s)^{۲}$$
$$= ۹٫۷۱\times۱۰^{۳}\,J \approx ۹٫۷\times۱۰^{۳}\,J$$

* ۳۶ شکل ۱۰-۳۴ الف قرصی را نشان می‌دهد که می‌تواند به دور یک محور واقع در فاصله‌ی شعاعی h از مرکز قرص بچرخد. شکل ۱۰-۳۴ ب نمودار لختی دورانی قرص I، نسبت به این محور را به صورت تابعی از h، از مرکز تا لبه‌ی قرص نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم شکل I، با مقادیر $I_B = ۰٫۱۵۰\,kg\cdot m^{۲}$ و $I_A = ۰٫۰۵۰\,kg\cdot m^{۲}$ مشخص شده‌اند. جرم قرص چقدر است؟



شکل ۱۰-۳۴ مسئله‌ی ۳۶.

حل: قضیه‌ی محور موازی (معادله‌ی ۱۰-۳۶) نشان می‌دهد که I با h افزایش پیدا می‌کند. عبارت «تا لبه‌ی قرص» در صورت مسئله تأکید می‌کند که h بیشینه در نمودار، همان شعاع R قرص است. بنابراین $R = ۰٫۲۰\,m$ است. اکنون می‌توانیم مثلاً $h = ۰$ را امتحان کنیم و از فرمول I (جدول ۱۰-۲ پ) برای یک قرص صلب استفاده کنیم و به ازای $h = ۰$ و $h = h_{max} = R$ مقدار I را به‌دست آوریم و اختلاف آن‌ها را پیدا کنیم [که این اختلاف مساوی با $M(h_{max})^{۲} = ۰٫۱۰\,kg.m^{۲}$ خواهد بود]. در هر دو حالت مقدار $M = ۲٫۵\,kg$ به دست می‌آید.

* ۳۷ لختی دورانی یک خط‌کش چوبی یک متری به جرم ۰٫۵۶ kg را نسبت به محور عمود بر خط‌کش و واقع در روی علامت ۲۰cm حساب کنید. (خط‌کش را به صورت تخته‌ای باریک در نظر بگیرید).

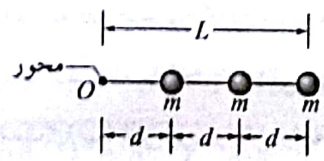
حل: از قضیه‌ی محور موازی استفاده می‌کنیم: $I = I_{com} + Mh^{۲}$، که در آن I_{com} لختی دورانی حول مرکز جرم (جدول ۱۰-۲ ت را ببینید)، M جرم، و h فاصله‌ی محور دوران تا مرکز جرم است. مرکز جرم در مرکز قرص واقع است، در نتیجه داریم $h = ۰٫۵۰m - ۰٫۲۰m = ۰٫۳۰m$. لختی دورانی خط‌کش حول مرکز جرم آن برابر است با

$$I_{com} = \frac{۱}{۱۲}ML^{۲} = \frac{۱}{۱۲}(۰٫۵۶kg)(۱٫۰m)^{۲}$$
$$= ۴٫۶۷\times۱۰^{-۲}\,kg.m^{۲}$$

در نتیجه از قضیه‌ی محور موازی داریم

$$I = ۴٫۶۷\times۱۰^{-۲}\,kg.m^{۲} + (۰٫۵۶kg)(۰٫۳۰m)^{۲}$$
$$= ۹٫۷\times۱۰^{-۲}\,kg.m^{۲}$$

* ۳۸ شکل ۱۰-۳۵ سه ذره، هر یک به جرم ۰٫۰۱۰۰kg را نشان می‌دهد، که به میله‌ای به طول $L = ۸٫۰۰\,cm$ و به جرم ناچیز، چسبیده‌اند. این مجموعه می‌تواند به دور یک محور عمودی گذرنده از نقطه‌ی O واقع در انتهای چپ میله دوران کند. اگر یک ذره (که ۳۳ درصد جرم را تشکیل می‌دهد) حذف شود، لختی دورانی مجموعه نسبت به محور دوران در حالت‌های زیر چند درصد کاهش می‌یابد: (الف) نزدیک‌ترین ذره، و (ب) دورترین ذره، به محور دوران؟



شکل ۱۰-۳۵ مسئله‌های ۳۸ و ۶۲.

حل: (الف) از معادله‌ی ۱۰-۳۳ داریم

$$I_{\text{کل}} = md^{۲} + m(۲d)^{۲} + m(۳d)^{۲} = ۱۴md^{۲}$$

اگر نزدیک‌ترین ذره به محور دوران حذف شود، خواهیم داشت: $m(۲d)^{۲} + m(۳d)^{۲} = ۱۳md^{۲}$. درصد کاهش لختی دورانی برابر است با $(۱۴-۱۳)/۱۴ = ۰٫۰۷۱۴ \approx ۷٫۱\%$.

(ب) حال اگر دورترین ذره تا محور دوران حذف شود، خواهیم

داشت $md^{۲} + m(۲d)^{۲} = ۵md^{۲}$. در این حالت، درصد کاهش لختی دورانی برابر است با $۰٫۶۴۳ \approx ۶۴\%$.

۳۹ کامیون‌ها را با انرژی ذخیره شده در یک چرخ لنگر، که توسط یک موتور الکتریکی به چرخش در می‌آید و به بالاترین تندی زاویه‌ای $۲۰۰\pi \text{ rad/s}$ می‌رسد، می‌توان به حرکت در آورد. چنین چرخ لنگری یک استوانه‌ی یکنواخت توپر به جرم ۵۰۰kg و شعاع ۱٫۰m است. (الف) انرژی جنبشی چرخ لنگر پس از انرژی‌گذاری، چقدر است؟ (ب) اگر توان متوسط مصرفی کامیون ۸٫۰kW باشد، در بین دومرحله‌ی انرژی‌گذاری کامیون چند دقیقه می‌تواند کار کند؟

حل: (الف) با توجه به جدول ۱۰-۲ پ و معادله‌ی ۱۰-۳۴، انرژی جنبشی دورانی برابر است با

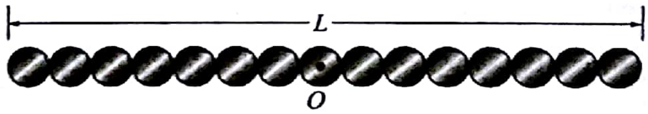
$$K = \frac{۱}{۲} I\omega^{۲} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}MR^{۲}\right)\omega^{۲}$$

$$= \frac{۱}{۴}(۵۰۰\text{kg})(۲۰۰\pi \text{ rad/s})^{۲}(۱٫۰\text{m})^{۲} = ۴٫۹\times۱۰^{۷}\text{ J}$$

(ب) مدت زمان کار کامیون را از رابطه‌ی $P = K(t)$ (P توان متوسط است) به دست می‌آوریم:

$$t = \frac{K}{P} = \frac{۴٫۹\times۱۰^{۷}\text{ J}}{۸٫۰\times۱۰^{۳}\text{ W}} = ۶٫۲\times۱۰^{۳}\text{ s} \approx ۱٫۰\times۱۰^{۲}\text{ min}$$

۴۰ شکل ۱۰-۳۶ آرایشی از ۱۵ قرص مشابه را نشان می‌دهد که به گونه‌ای میله مانند به طول $L = ۱٫۰۰۰۰\text{ m}$ و جرم (کل) $M = ۱۰۰٫۰\text{ mg}$ به یکدیگر چسبانده شده‌اند. این آرایش قرص‌ها می‌تواند به دور محور گذرنده از قرص مرکزی در نقطه‌ی O دوران کند. (الف) لختی دورانی این آرایش نسبت به محور چقدر است؟ (ب) اگر این آرایش را به طور تقریبی مانند میله‌ای یکنواخت به جرم M و طول L در نظر بگیریم، در هنگام استفاده کردن از فرمول جدول ۱۰-۲ ث برای محاسبه‌ی لختی دورانی، چند درصد مرتکب خطا می‌شویم؟



شکل ۱۰-۳۶ مسئله‌ی ۴۰.

حل: (الف) سه تا از قرص‌ها را (که از نقطه‌ی O شروع می‌شوند) در نظر می‌گیریم: ⊕○○. قرص اول (واقع در نقطه‌ی O) دارای لختی دورانی $I = \frac{۱}{۲}mR^{۲}$ است (به جدول ۱۰-۲ پ رجوع کنید). لختی دورانی قرص بعدی (با استفاده از قضیه‌ی محور موازی) برابر است با

$$I = \frac{۱}{۲}mR^{۲} + mh^{۲}$$

در این‌جا $h = ۲R$ است. لختی دورانی قرص سوم $I = \frac{۱}{۲}mR^{۲} + m(۴R)^{۲}$ است. اگر پنج قرص ○○⊕○○ را در نظر بگیریم که قرص وسطی در نقطه‌ی O قرار دارد، لختی دورانی کل برابر می‌شود با

$$I = ۵\left(\frac{۱}{۲}mR^{۲}\right) + ۲\left(m(۲R)^{۲} + m(۴R)^{۲}\right)$$

اکنون با توجه به تشابه، می‌توانیم لختی دورانی پانزده قرص را پیدا کنیم:

$$I = ۱۵\left(\frac{۱}{۲}mR^{۲}\right) + ۲\left(m(۲R)^{۲} + m(۴R)^{۲} + m(۶R)^{۲} + \dots + m(۱۴R)^{۲}\right) = \frac{۲۲۵۵}{۲}mR^{۲}$$

بنابراین لختی دورانی N قرص (N را عدد فرد در نظر می‌گیریم) برابر است با

$$I = \frac{۱}{۶}(۲N^{۲} + ۱)NmR^{۲}$$

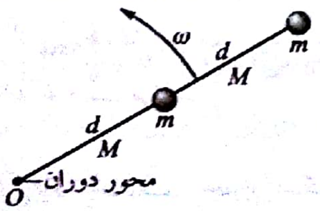
که برحسب جرم کل $(m = M/۱۵)$ و طول کل $(R = L/۳۰)$ داریم

$$I = ۰٫۰۸۳۵۱۹ML^{۲} \approx (۰٫۰۸۳۵۲)(۰٫۱۰۰۰\text{kg})(۱٫۰۰۰۰\text{m})^{۲}$$

$$= ۸٫۳۵۲\times۱۰^{-۳}\text{ kg.m}^{۲}$$

(ب) اگر این مقدار را با مقدار به دست آمده از فرمول (ث) در جدول ۱۰-۲ (که از آن $I = ۰٫۰۸۳۳۳ML^{۲}$ به دست می‌آید) مقایسه کنیم، متوجه می‌شویم که پاسخ به دست آمده برای قسمت (الف) به اندازه‌ی ۰٫۲۲% کمتر است.

۴۱ در شکل ۱۰-۳۷، دو گلوله هریک به جرم $m = ۰٫۸۵\text{ kg}$، به وسیله‌ی دو میله‌ی باریک، هر یک به طول $d = ۵٫۶\text{ cm}$ و جرم $M = ۱٫۲\text{ kg}$، به یکدیگر و به محور دوران واقع در نقطه‌ی



شکل ۱۰-۳۷ مسئله‌ی ۴۱.

O، وصل شده‌اند. این ترکیب با تندی زاویه‌ای $\omega = ۰/۳۰\,\mathrm{rad/s}$ به دور محور می‌چرخد. (الف) لختی دورانی و (ب) انرژی جنبشی این ترکیب نسبت به نقطه‌ی O چیست؟

حل: گلوله‌ها را به صورت «نقطه» در نظر می‌گیریم تا بتوانیم لختی دورانی آن‌ها را از معادله‌ی ۱۰-۳۳، و لختی دورانی میله‌ها را از جدول ۱۰-۲ ث و قضیه‌ی محور موازی (معادله‌ی ۱۰-۳۶) به‌دست آوریم.

(الف) نزدیک‌ترین میله به محور را با پانویس ۱ و دورترین گلوله را با پانویس ۴ مشخص می‌کنیم، در نتیجه داریم

$$I = I_۱+I_۲+I_۳+I_۴ = \left(\frac{۱}{۱۲}Md^۲ + M\left(\frac{۱}{۲}d\right)^۲\right)+md^۲$$

$$+\left(\frac{۱}{۱۲}Md^۲+M\left(\frac{۳}{۲}d\right)^۲\right)+m(۲d)^۲ = \frac{۸}{۳}Md^۲+۵md^۲$$

$$=\frac{۸}{۳}(۱/۲\,\mathrm{kg})(۰/۰۵۶\,\mathrm{m})^۲+۵(۰/۸۵\,\mathrm{kg})(۰/۰۵۶\,\mathrm{m})^۲$$

$$=۰/۰۲۳\,\mathrm{kg.m^۲}$$

(ب) با استفاده از معادله‌ی ۱۰-۳۴ داریم

$$K=\frac{۱}{۲}I\omega^۲=\left(\frac{۴}{۳}M+\frac{۵}{۲}m\right)d^۲\omega^۲$$

$$=\left[\frac{۴}{۳}(۱/۲\,\mathrm{kg})+\frac{۵}{۲}(۰/۸۵\,\mathrm{kg})\right](۰/۰۵۶\,\mathrm{m})^۲(۰/۳۰\,\mathrm{rad/s})^۲$$

$$=۱/۱\times ۱۰^{-۳}\,\mathrm{J}$$

۴۲ ٭٭ جرم‌ها و مختصات چهار ذره عبارت‌اند از: ۵۰g، $x = ۲/۰\,\mathrm{cm}$، $y=۲/۰\,\mathrm{cm}$؛ ۲۵g، $x=۰$، $y=۴/۰\,\mathrm{cm}$؛ ۲۵g، $x=-۳/۰\,\mathrm{cm}$، $y=-۳/۰\,\mathrm{cm}$؛ ۳۰g، $x=-۲/۰\,\mathrm{cm}$، $y=۴/۰\,\mathrm{cm}$. لختی دورانی این مجموعه نسبت به محورهای (الف) x، (ب) y، و (پ) z، چیست؟ (ت) فرض کنید پاسخ قسمت‌های (الف) و (ب)، به ترتیب، A و B است. در این صورت، پاسخ قسمت (پ) برحسب A و B چیست؟

حل: (الف) از معادله‌ی ۱۰-۳۳ استفاده می‌کنیم:

$$I_x = \sum_{i=۱}^{۴} m_i y_i^۲$$

$$=[۵۰(۲/۰)^۲+(۲۵)(۴/۰)^۲+۲۵(-۳/۰)^۲+۳۰(۴/۰)^۲]\,\mathrm{g.cm^۲}$$

$$=۱/۳\times۱۰^۳\,\mathrm{g.cm^۲}$$

(ب) برای دوران حول محور y داریم

$$I_y = \sum_{i=۱}^{۴} m_i x_i^۲$$

$$=۵۰(۲/۰)^۲+(۲۵)(۰)^۲+۲۵(۳/۰)^۲+۳۰(۲/۰)^۲=$$

$$=۵/۵\times۱۰^۲\,\mathrm{g.cm^۲}$$

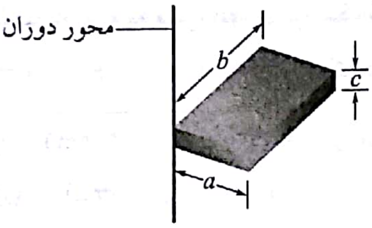
(پ) برای دوران حول محور z (با توجه به این که فاصله تا محور z برابر است با $\sqrt{x^۲+y^۲}$) داریم

$$I_z = \sum_{i=۱}^{۴} m_i(x_i^۲+y_i^۲)=I_x+I_y$$

$$=۱/۳\times۱۰^۳+۵/۵\times۱۰^۲=۱/۹\times۱۰^۲\,\mathrm{g.cm^۲}$$

(ت) واضح است که پاسخ قسمت (پ) برابر است با $A+B$.

۴۳ ٭٭ جسم صُلب با توزیع جرم یکنواخت شکل ۱۰-۳۸، دارای جرم $۰/۱۷۲\,\mathrm{kg}$ و ضلع‌های $a=۳/۵\,\mathrm{cm}$، $b=۸/۴\,\mathrm{cm}$ و $c=۱/۴\,\mathrm{cm}$ است. لختی دورانی این جسم را نسبت به محور گذرنده از یکی از گوشه‌ها و عمود بر وجه‌های بزرگ، حساب کنید.



شکل ۱۰-۳۸ مسئله‌ی ۴۳.

حل: چون محور دوران از مرکز جسم عبور نمی‌کند، از قضیه‌ی محور موازی برای حساب کردن لختی دورانی استفاده می‌کنیم. بر طبق جدول ۱۰-۲ خ، لختی دورانی برِه‌ی یکنواخت حول محور گذرنده از مرکز آن و عمود بر وجه بزرگ آن برابر است با $I_{\mathrm{com}}=\frac{M}{۱۲}(a^۲+b^۲)$. فاصله‌ی محور موازی گذرنده از گوشه‌ی جسم تا مرکز جسم $h=\sqrt{(a/۲)^۲+(b/۲)^۲}$ است. در نتیجه داریم

$$I=I_{\mathrm{com}}+Mh^۲=\frac{M}{۱۲}(a^۲+b^۲)+\frac{M}{۴}(a^۲+b^۲)$$

$$=\frac{M}{۳}(a^۲+b^۲)$$

به ازای $M=۰/۱۷۲\,\mathrm{kg}$، $a=۳/۵\,\mathrm{cm}$، و $b=۸/۴\,\mathrm{cm}$، داریم

$$I=\frac{M}{۳}(a^۲+b^۲)=\frac{۰/۱۷۲\,\mathrm{kg}}{۳}[(۰/۰۳۵\,\mathrm{m})^۲+(۰/۰۸۴\,\mathrm{m})^۲]$$

$$=۴/۷\times۱۰^{-۴}\,\mathrm{kg.m^۲}$$

** ۴۴ چهار ذره‌ی مشابه، هریک به‌جرم $۰٫۵۰\,kg$، در رأس‌های یک مربع $۲٫۰\,m \times ۲٫۰\,m$ قرار دارند و به وسیله‌ی چهار میله‌ی بی‌جرم که ضلع‌های مربع را تشکیل می‌دهند، به هم وصل شده‌اند. لختی دورانی این‌جسم صُلب را نسبت به‌محور گذرنده، (الف) از وسط ضلع‌های متقابل و واقع در صفحه‌ی مربع، (ب) از وسط یکی از ضلع‌ها و عمود برصفحه‌ی مربع، و (پ) از قطر وصل کننده‌ی دو ذره و واقع در صفحه‌ی مربع، حساب کنید.

حل: (الف) شکل مقابل چهار ذره و محور دوران (خط افقی باریک) را نشان می‌دهد.

فاصله‌ی هر یک از ذره‌ها تا محور دوران $r = ۱٫۰\,m$ است. بنابراین با استفاده از معادله‌ی ۱۰-۲۶ داریم

$$I = \sum m_i r_i^2 = ۴(۰٫۵۰\,kg)(۱٫۰\,m)^2 = ۲٫۰\,kg.m^2$$

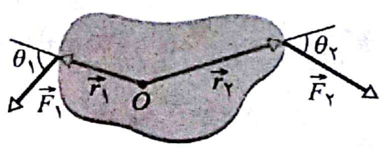
(ب) در این حالت، دو ذره به محور دوران نزدیک‌اند و فاصله‌ی آن‌ها تا محور $r = ۱٫۰\,m$ است، اما دو ذره‌ی دیگر دورتر از محور و به فاصله‌ی $r = \sqrt{(۱٫۰\,m)^2 + (۲٫۰\,m)^2}$ از آن قرار دارند. بنابراین از معادله‌ی ۱۰-۳۳ داریم

$$I = \sum m_i r_i^2 = ۲(۰٫۵۰\,kg)(۱٫۰\,m)^2 + ۲(۰٫۵۰\,kg)(\sqrt{۵}\,m)^2$$
$$= ۶٫۰\,kg.m^2$$

(پ) در این حالت، دو ذره در روی محور دوران $(r = ۰)$ قرار دارند و فاصله‌ی دوذره‌ی دیگر از آن محور $r = \sqrt{(۱٫۰\,m)^2 + (۱٫۰\,m)^2}$ است. در این حالت $I = ۳\,kg.m^2$ است.

پودمان ۱۰-۶ گشتاور نیرو

* ۴۵ جسم نشان داده شده در شکل ۱۰-۳۹، می‌تواند به دور نقطه‌ی چرخشگاه O بچرخد و دو نیرو، مطابق شکل، به آن وارد می‌شوند. به ازای $r_1 = ۱٫۳۰\,m$، $r_2 = ۲٫۱۵\,m$، $F_1 = ۴٫۲۰\,N$، $F_2 = ۴٫۹۰\,N$، $\theta_1 = ۷۵٫۰°$ و $\theta_2 = ۶۰٫۰°$، گشتاور نیروی برایند نسبت به نقطه‌ی O چیست؟



شکل ۱۰-۳۹ مسئله‌ی ۴۵.

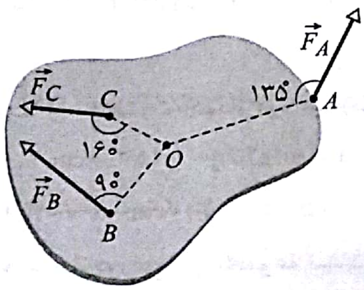
حل: گشتاور نیرویی را که می‌خواهد جسم را از حال سکون در جهت پادساعتگرد بچرخاند، مثبت و گشتاور در جهت ساعتگرد را منفی در نظر می‌گیریم. در نتیجه، بزرگی گشتاور مثبت ناشی از نیروی $\vec{F}_1$ به صورت $r_1 F_1 \sin\theta_1$، و بزرگی گشتاور منفی ناشی از نیروی $\vec{F}_2$ به صورت $r_2 F_2 \sin\theta_2$ است. گشتاور نیروی برایند برابر است با

$$\tau = r_1 F_1 \sin\theta_1 - r_2 F_2 \sin\theta_2$$

اگر مقادیر معلوم را در این رابطه قرار دهیم، خواهیم داشت

$$\tau = (۱٫۳۰\,m)(۴٫۲۰\,N)\sin ۷۵° - (۲٫۱۵\,m)(۴٫۹۰\,N)\sin ۶۰°$$
$$= -۳٫۸۵\,N.m$$

* ۴۶ جسم نشان داده شده در شکل ۱۰-۴۰، می‌تواند به دور نقطه‌ی چرخشگاه O بچرخد. این جسم، مطابق شکل، تحت اثر سه نیرو قرار می‌گیرد: $F_A = ۱۰\,N$ در نقطه‌ی A، به فاصله‌ی $۸٫۰\,m$ از نقطه‌ی O؛ $F_B = ۱۶\,N$ در نقطه‌ی B، به‌فاصله‌ی $۴٫۰\,m$ از نقطه‌ی O؛ $F_C = ۱۹\,N$ در نقطه‌ی C، به‌فاصله‌ی $۳٫۰\,m$ از نقطه‌ی O. گشتاور نیروی برایند نسبت به نقطه‌ی O چیست؟



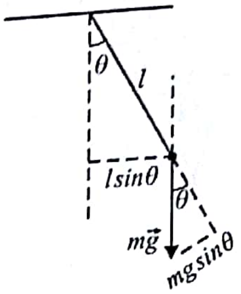
شکل ۱۰-۴۰ مسئله‌ی ۴۶.

حل: گشتاور نیروی برایند برابر است با

$$\tau = \tau_A + \tau_B + \tau_C$$
$$= F_A r_A \sin\phi_A - F_B r_B \sin\phi_B + F_C r_C \sin\phi_C$$
$$= (۱۰)(۸٫۰)\sin ۱۳۵° - (۱۶)(۴٫۰)\sin ۹۰° + (۱۹)(۳٫۰)\sin ۱۶۰°$$
$$= ۱۲\,N.m$$

* ۴۷ گلوله‌ی کوچکی به جرم $۰٫۷۵\,kg$ به یک سر میله‌ی بی‌جرمی به طول $۱٫۲۵\,m$ وصل شده و سر دیگر میله به یک نقطه‌ی چرخشگاه آویخته شده است. وقتی که آونگ حاصل به

اندازه‌ی ۳۰ درجه نسبت به وضعیت قائم منحرف می‌شود، بزرگی گشتاور نیرو نسبت به نقطه‌ی چرخشگاه چقدر است؟



حل: دو نیرو به گلوله وارد می‌شود: نیروی میله و نیروی گرانش. نیروی ناشی از میله هیچ گشتاوری را حول نقطه چرخشگاه وارد نمی‌کند، زیرا این نیرو در راستای خط واصل گلوله و نقطه چرخشگاه اثر می‌کند.

همان‌طور که شکل نشان می‌دهد، مؤلفه‌ی نیروی گرانش عمود بر میله، $mg\sin\theta$ است. اگر l طول میله باشد، بزرگی گشتاور ناشی از این نیرو برابر است با

$$\tau = mg\, l\sin\theta = (۰/۷۵)(۹/۸)(۱/۲۵)\sin ۳۰^\circ = ۴/۶\,\text{N.m}$$

برای وضعیت نشان داده شده، جهت گشتاور نیرو در جهت پادساعتگرد است.

* ۴۸ طول بازوی رکاب دوچرخه‌ای $۰/۱۵۲\,\text{m}$ است و یک نیروی رو به پایین ۱۱۱ نیوتونی از پای دوچرخه‌سوار به رکاب وارد می‌شود. بزرگی گشتاور این نیرو نسبت به نقطه‌ی چرخشگاه بازوی رکاب وقتی که این بازو با امتداد قائم زاویه‌ی، (الف) ۳۰ درجه، (ب) ۹۰ درجه و (پ) ۱۸۰، درجه می‌سازد، چقدر است؟

حل: گشتاورهای نیرو را با استفاده از رابطه‌ی $\tau = rF\sin\phi$ حساب می‌کنیم.

(الف) برای زاویه‌ی $\phi = ۳۰^\circ$ داریم:

$$\tau_a = (۰/۱۵۲\,\text{m})(۱۱۱\,\text{N})\sin ۳۰^\circ = ۸/۴\,\text{N.m}$$

(ب) برای زاویه‌ی $\phi = ۹۰^\circ$ داریم:

$$\tau_b = (۰/۱۵۲\,\text{m})(۱۱۱\,\text{N})\sin ۹۰^\circ = ۱۷\,\text{N.m}$$

(پ) برای زاویه‌ی $\phi = ۱۸۰^\circ$ داریم:

$$\tau_c = (۰/۱۵۲\,\text{m})(۱۱۱\,\text{N})\sin ۱۸۰^\circ = ۰$$

پودمان ۱۰-۷ قانون دوم نیوتون در حرکت دورانی

* ۴۹ شیرجه‌رویی در حین شیرجه رفتن از تخته تندی زاویه‌ای‌اش به دور مرکز جرمش در مدت $۲۲۰\,\text{ms}$ از صفر تا $۶/۲۰\,\text{rad/s}$ افزایش می‌یابد. لختی دورانی شیرجه‌رو نسبت به مرکز جرمش $۱۲/۰\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$ است. در حین پرش، بزرگی (الف) شتاب زاویه‌ای متوسط شیرجه‌رو و (ب) گشتاور نیروی خارجی متوسط وارد به او از سوی تخته‌ی شیرجه، چقدر است؟

حل: (الف) از معادله‌ی $\omega = \omega_\circ + \alpha t$ استفاده می‌کنیم که در آن $\omega_\circ$ سرعت زاویه‌ای آغازی، ω سرعت زاویه‌ای پایانی، α شتاب زاویه‌ای و t مدت زمان پرش است. پس، شتاب زاویه‌ای متوسط شیرجه رو برابر است با

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_\circ}{t} = \frac{۶/۲۰\,\text{rad/s}}{۲۲۰\times۱۰^{-۳}\,\text{s}} = ۲۸/۲\,\text{rad/s}^2$$

(ب) اگر I لختی دورانی شیرجه رو باشد، بزرگی گشتاور نیروی وارد بر او برابر است با

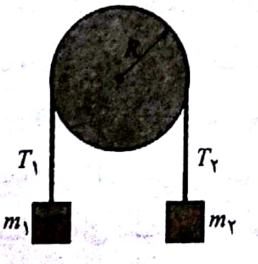
$$\tau = I\alpha = (۱۲/۰\,\text{kg.m}^2)(۲۸/۲\,\text{rad/s}^2) = ۳/۳۸\times۱۰^2\,\text{N.m}$$

* ۵۰ اگر یک چرخ با وارد شدن گشتاور نیروی $۳۲/۰\,\text{N}\cdot\text{m}$ به آن شتاب زاویه‌ای $۲۵/۰\,\text{rad/s}^2$ را پیدا کند، لختی دورانی چرخ چیست؟

حل: لختی دورانی از معادله‌ی ۱۰-۴۵ به دست می‌آید:

$$I = \frac{\tau}{\alpha} = \frac{۳۲/۰}{۲۵/۰} = ۱/۲۸\,\text{kg.m}^2$$

** ۵۱ در شکل ۱۰-۴۱، قطعه‌ی ۱ دارای جرم $m_1 = ۴۶۰\,\text{g}$ و قطعه‌ی ۲ دارای جرم $m_2 = ۵۰۰\,\text{g}$ است و قرقره‌ی سوار شده روی یک محور افقی بی‌اصطکاک دارای شعاع $R = ۵/۰۰\,\text{cm}$ است. وقتی قطعه‌ی ۲ از حال سکون رها می‌شود در مدت $۵/۰۰\,\text{s}$ به اندازه‌ی $۷۵/۰\,\text{cm}$ سقوط می‌کند بی‌آنکه ریسمان بر روی قرقره بلغزد. (الف) بزرگی شتاب قطعه‌ها چقدر است؟ (ب) نیروی کشش T_2 و (پ) نیروی کشش T_1 چقدر است؟ (ت) بزرگی شتاب زاویه‌ای قرقره چیست؟ (ث) لختی دورانی قرقره چقدر است؟



شکل ۱۰-۴۱ مسئله‌های ۵۱ و ۸۳

حل: (الف) ازسینماتیک شتاب ثابت استفاده می‌کنیم. اگرجهت روبه پایین را مثبت درنظر بگیریم و a شتاب قطعه‌ی سنگین‌تر $m_۲$ باشد، در آن صورت مختصه‌ی آن از رابطه‌ی $y=\frac{۱}{۲}at^۲$ به دست می‌آید:

$$a=\frac{۲y}{t^۲}=\frac{۲(۰/۷۵۰\text{m})}{(۵/۰۰\text{s})^۲}=۶/۰۰\times۱۰^{-۲}\text{m/s}^۲$$

شتاب قطعه‌ی ۱، $۶/۰۰\times۱۰^{-۲}\text{m/s}^۲$ به طرف بالا است.

(ب) قانون دوم نیوتون برای قطعه‌ی ۲ به صورت $m_۲g-T_۲=m_۲a$ نوشته می‌شود، که در آن $m_۲$ جرم و $T_۲$ نیروی کشش است. در نتیجه داریم

$$T_۲=m_۲(g-a)$$
$$=(۰/۵۰۰\text{kg})(۹/۸\text{m/s}^۲-۶/۰۰\times۱۰^{-۲}\text{m/s}^۲)=۴/۸۷\text{N}$$

(پ) قانون دوم نیوتون برای قطعه‌ی ۱ به صورت $m_۱g-T_۱=-m_۱a$ نوشته می‌شود، که در آن $T_۱$ نیروی کشش وارد بر قطعه‌ی ۱ و برابر است با

$$T_۱=m_۱(g+a)$$
$$=(۰/۴۶۰\text{kg})(۹/۸\text{m/s}^۲+۶/۰۰\times۱۰^{-۲}\text{m/s}^۲)=۴/۵۴\text{N}$$

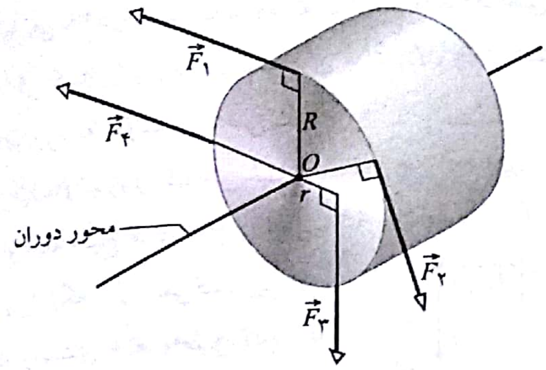
(ت) چون ریسمان بر روی قرقره نمی‌لغزد، شتاب مماسی هر نقطه از لبه‌ی قرقره باید با شتاب قطعه‌ها مساوی باشد:

$$\alpha=\frac{a}{R}=\frac{۶/۰۰\times۱۰^{-۲}\text{m/s}^۲}{۵/۰۰\times۱۰^{-۲}\text{m}}=۱/۲۰\text{rad/s}^۲$$

(ث) گشتاور نیروی برایند وارد بر قرقره، $\tau=(T_۲-T_۱)R$ است. این مقدار را مساوی با $I\alpha$ قرار می‌دهیم و لختی دورانی را به‌دست می‌آوریم:

$$I=\frac{(T_۲-T_۱)R}{\alpha}=\frac{(۴/۸۷\text{N}-۴/۵۴\text{N})(۵/۰۰\times۱۰^{-۲}\text{m})}{۱/۲۰\text{rad/s}^۲}$$
$$=۱/۳۸\times۱۰^{-۲}\text{kg.m}^۲$$

** **۵۲** در شکل ۱۰-۴۲، استوانه‌ای به جرم ۲/۰ kg می‌تواند به دور محور مرکزی خود که از نقطه‌ی O می‌گذرد، بچرخد. نیروهای وارد شده مطابق شکل، عبارت‌اند از: $F_۱=۶/۰\text{N}$، $F_۲=۴/۰\text{N}$، $F_۳=۲/۰\text{N}$، و $F_۴=۵/۰\text{N}$. هم‌چنین، داریم $r=۵/۰\text{cm}$ و $R=۱۲\text{cm}$. مطلوب است تعیین (الف) بزرگی و (ب) جهت شتاب زاویه‌ای استوانه (در حین دوران، نیروها زاویه‌ی خود را نسبت به استوانه حفظ می‌کنند).



شکل ۱۰-۴۲ مسئله‌ی ۵۲.

حل: بنابر علامت قراردادی به کار رفته برای استوانه، بزرگی گشتاور نیروی برایند وارد شده به استوانه‌ای به جرم m و شعاع R برابر است با

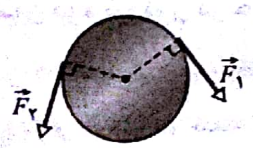
$$\tau_{\text{net}}=F_۱R-F_۲R-F_۳r$$
$$=(۶/۰\text{N})(۰/۱۲\text{m})-(۴/۰\text{N})(۰/۱۲\text{m})-(۲/۰\text{N})(۰/۰۵۰\text{m})$$
$$=۰/۱۴\text{N.m}$$

(الف) شتاب زاویه‌ای استوانه (به ازای $I=\frac{۱}{۲}MR^۲$ بر طبق جدول ۱۰-۲ پ) برابر است با

$$\alpha=\frac{\tau_{\text{net}}}{I}=\frac{۰/۱۴\text{N.m}}{\frac{۱}{۲}(۲/۰\text{kg})(۰/۱۲\text{m})^۲}=۹/۷\text{rad/s}^۲$$

(ب) جهت شتاب زاویه‌ای (با مثبت در نظر گرفتن جهت دوران) در جهت پادساعتگرد است.

** **۵۳** شکل ۱۰-۴۳ قرص یکنواختی را نشان می‌دهد، که مانند یک چرخ و فلک می‌تواند به دور مرکزش دوران کند. قرص با شعاع ۲/۰۰ cm و جرم ۲۰/۰ گرم در آغاز ساکن است. در زمان شروع دوران $t=۰$، دو نیرو، مطابق شکل، به طور مماس بر کناره‌ی قرص وارد می‌شوند، به گونه‌ای که سرعت زاویه‌ای پادساعت‌گرد قرص در زمان $t=۱/۲۵\text{s}$، برابر با ۲۵۰ rad/s می‌شود. نیروی $F_۱$ دارای بزرگی ۰/۱۰۰ N است. بزرگی $F_۲$ چقدر است؟

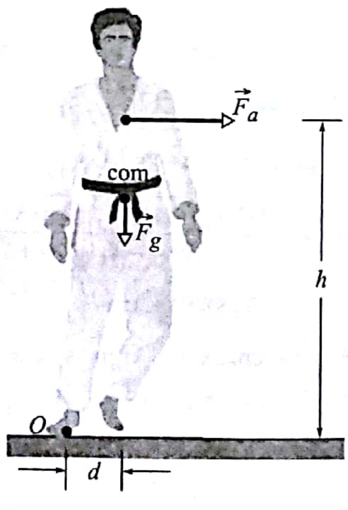


شکل ۱۰-۴۳ مسئله‌ی ۵۳

حل: از ترکیب معادله‌ی ۴۵-۱۰ ($\tau_{net} = I\alpha$) با معادله‌ی ۳۸-۱۰ داریم $RF_۲ - RF_۱ = I\alpha$، که در آن $\alpha = \omega / t$ (با استفاده از معادله‌ی ۱۲-۱۰ به ازای $\omega_۰ = ۰$) است. با توجه به جدول ۲-۱۰ بزرگی $F_۲$ برابر است با

$$F_۲ = \frac{MR\omega}{۲t} + F_۱ = \frac{(۰/۰۲)(۰/۰۲)(۲۵۰)}{۲(۱/۲۵)} + ۰/۱ = ۰/۱۴۰\,N$$

** ۵۴ در حرکت پاروبی مسابقه‌ی جودو، جودوکار پای چپ حریف را از زیر بدنش در حالی می‌روبد که لباس او را به همان طرف می‌کشد. در نتیجه، حریف روی پای راستش می‌چرخد و بر روی تشک می‌افتد. شکل ۴۴-۱۰ نمودار ساده شده‌ی حریف را در حالتی در مقابل جودوکار نشان می‌دهد که پای چپ حریف روبیده شده است. محور دوران از نقطه‌ی O می‌گذرد. نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ وارد شده به او به طور مؤثر به مرکز جرمش اثر می‌کند، که فاصله‌ی آن از نقطه‌ی O، $d = ۲۸\,cm$ است. جرم حریف $۷۰\,kg$ و لختی دورانی او نسبت به نقطه‌ی O برابر با $۶۵\,kg \cdot m^۲$ است. بزرگی شتاب زاویه‌ای آغازی او نسبت به نقطه‌ی O در حالت‌های زیر چقدراست؟ نیروی کشش $\vec{F}_a$ وارد شده به‌لباس حریف (الف) ناچیز است و (ب) افقی و به بزرگی $۳۰۰\,N$ است، که در ارتفاع $h = ۱/۴\,m$ به حریف وارد می‌شود.



شکل ۴۴-۱۰ مسئله‌ی ۵۴.

حل: (الف) در این حالت، نیرو $mg = (۷۰kg)(۹/۸\,m/s^۲)$، و «بازوی اهرم» (فاصله‌ی عمودی از نقطه‌ی O تا خط اثر نیرو) $۰/۲۸\,m$ است. بنابراین گشتاور نیرو (به صورت مقدار مطلق) برابر است با $(۷۰kg)(۹/۸\,m/s^۲)(۰/۲۸\,m)$. چون گشتاور لختی $I = ۶۵\,kg.m^۲$ است، از معادله‌ی ۴۵-۱۰ داریم

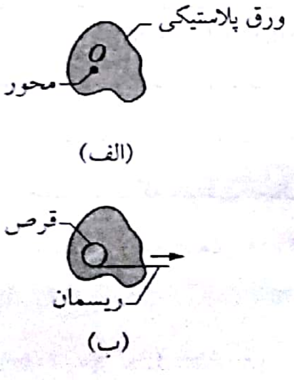
$$|\alpha| = ۲/۹۶\,rad/s^۲$$

(ب) اکنون گشتاور نیروی دیگری $(۱/۴\,m \times ۳۰۰\,N)$ به گشتاور نیروی برایند اضافه می‌شود:

$$|\tau_{net}| = (۷۰kg)(۹/۸\,m/s^۲)(۰/۲۸\,m) + (۱/۴\,m)(۳۰۰\,N) = (۶۵\,kg.m^۲)|\alpha|$$

که در نتیجه $|\alpha| = ۹/۴۲\,rad/s^۲$ به دست می‌آید.

** ۵۵ در شکل ۴۵-۱۰ الف، یک ورق پلاستیکی با شکل نامنظم و با ضخامت و چگالی (جرم یکای حجم) یکنواخت قرار است به دور یک محور عمود بر وجه ورق و گذرنده از نقطه‌ی O بچرخد. لختی دورانی این ورق نسبت به محور را با روش زیر اندازه می‌گیریم. قرصی دایره‌ای به جرم $۰/۵۰۰\,kg$ و شعاع $۲/۰۰\,cm$ را طوری به این ورق می‌چسبانیم که مرکزش در نقطه‌ی O باشد (شکل ۴۵-۱۰ ب). ریسمانی را به دور لبه‌ی قرص به مانند یک فرفره می‌پیچانیم و سپس ریسمان را به مدت $۵/۰۰\,s$ می‌کشیم. در نتیجه، قرص و ورق با نیروی ثابت $۰/۴۰۰\,N$ که به صورت مماس بر لبه‌ی قرص وارد شده است، می‌چرخد. تندی زاویه‌ای حاصل $۱۱۴\,rad/s$ است. لختی دورانی ورق نسبت به محور چیست؟



شکل ۴۵-۱۰ مسئله‌ی ۵۵.

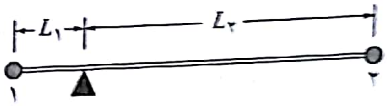
حل: از ترکیب معادلات ۳۴-۱۰ و ۴۵-۱۰ داریم $RF = I\alpha$، که $\alpha = \omega / t$ (بر طبق معادله‌ی ۱۲-۱۰ به ازای $\omega_۰ = ۰$) است. در ضمن می‌دانیم که

$$I = I_{\text{ورق}} + I_{\text{قرص}}$$

در این‌جا $I = \frac{1}{2}MR^2$ قرص I (مطابق جدول ۱۰-۲ پ) است. در نتیجه داریم

$$I_{\text{ورق}} = \frac{RFt}{\omega} - \frac{1}{2}MR^2 = 2.51\times10^{-4}\ \mathrm{kg.m^2}$$

** ۵۶ شکل ۱۰-۴۶ دو ذره‌ی ۱ و ۲، هر یک به جرم m، را نشان می‌دهد. دو ذره به دو سر یک میله‌ی صُلب بی‌جرم به طول $L_1 + L_2$، که $L_1 = 20\,\mathrm{cm}$ و $L_2 = 80\,\mathrm{cm}$، وصل شده‌اند. میله را به طول افقی روی تکیه‌گاه نگه می‌داریم و سپس آن را رها می‌کنیم. بزرگی شتاب آغازی (الف) ذره‌ی ۱، و (ب) ذره‌ی ۲، چقدر است؟



شکل ۱۰-۴۶ مسئله‌ی ۵۶.

حل: اگر جهت مثبت را در جهت پادساعتگرد انتخاب کنیم، شتاب زاویه‌ای α برای هر دو جرم در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند

$$\tau = mgL_1 - mgL_2 = I\alpha = (mL_1^2 + mL_2^2)\alpha$$

این رابطه از ترکیب معادلات ۱۰-۴۵ با ۱۰-۳۹ و ۱۰-۳۳ به دست آمده است. در نتیجه داریم

$$\alpha = \frac{g(L_1 - L_2)}{L_1^2 + L_2^2}$$

$$= \frac{(9.8\,\mathrm{m/s^2})(0.20\,\mathrm{m} - 0.80\,\mathrm{m})}{(0.20\,\mathrm{m})^2 + (0.80\,\mathrm{m})^2} = -8.65\,\mathrm{rad/s^2}$$

در این‌جا علامت منفی نشان می‌دهد که دستگاه در جهت ساعتگرد می‌چرخد. بزرگی بردار شتاب، (فعلاً) مؤلفه‌ی شعاعی ندارد زیرا در لحظه‌ی $t = 0$ حساب شده است که سرعت لحظه‌ای در آن لحظه صفر است. بنابراین، با استفاده از معادله‌ی ۱۰-۲۲ برای دو جرم داریم:

(الف) $|\vec{a}_1| = |\alpha| L_1 = (8.65\,\mathrm{rad/s^2})(0.20\,\mathrm{m}) = 1.7\,\mathrm{m/s}$

(ب) $|\vec{a}_2| = |\alpha| L_2 = (8.65\,\mathrm{rad/s^2})(0.80\,\mathrm{m}) = 6.9\,\mathrm{m/s^2}$

*** ۵۷ قرقره‌ای با شعاع $10\,\mathrm{cm}$ و لختی دورانی $1.0\times10^{-3}\,\mathrm{kg\cdot m^2}$ نسبت به محورش تحت تأثیر نیرویی به‌طور مماس بر کناره‌ی قرقره قرار می‌گیرد. بزرگی این نیرو برحسب زمان طبق معادله‌ی $F = 0.50t + 0.30t^2$ تغییر می‌کند، که در آن F برحسب نیوتون و t برحسب ثانیه است. قرقره در آغاز ساکن است. در زمان $t = 3.0\,\mathrm{s}$، (الف) شتاب زاویه‌ای و (ب) تندی زاویه‌ای قرقره، چقدر است؟

حل: چون نیرو به صورت مماس در $r = 0.10\,\mathrm{m}$ اثر می‌کند، شتاب زاویه‌ای (که مثبت فرض می‌شود) برابر است با

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{Fr}{I} = \frac{(0.5t + 0.3t^2)(0.10)}{1.0\times10^{-3}} = 50t + 30t^2$$

(الف) در لحظه‌ی $t = 3\,\mathrm{s}$، از رابطه‌ی بالا داریم

$$\alpha = 4.2\times10^2\,\mathrm{rad/s^2}$$

(ب) از رابطه‌ی بالا و با در نظر گرفتن $\omega_0 = 0$ انتگرال می‌گیریم و تندی زاویه‌ای در لحظه‌ی $t = 3\,\mathrm{s}$ را به دست می‌آوریم

$$\omega = \int_0^3 \alpha\,dt = (25t^2 + 10t^3)\Big|_0^3 = 5.0\times10^2\,\mathrm{rad/s}$$

پودمان ۱۰-۸ کار و انرژی جنبشی دورانی

* ۵۸ (الف) در شکل ۱۰-۱۹، داریم $R = 12\,\mathrm{cm}$، $M = 400\,\mathrm{g}$ و $m = 50\,\mathrm{g}$. تندی جسم را پس از پایین آمدن از حال سکون به اندازه‌ی $50\,\mathrm{cm}$، پیدا کنید. این مسئله را با استفاده از اصل پایستگی انرژی حل کنید. (ب) محاسبه‌ی قسمت (الف) را به‌ازای $R = 5.0\,\mathrm{cm}$ تکرار کنید.

حل: (الف) تندی v جرم m پس از پایین آمدن به اندازه‌ی $d = 50\,\mathrm{cm}$، از رابطه‌ی $v^2 = 2ad$ (معادله‌ی ۲-۱۶) به دست می‌آید. در نتیجه به ازای $g = 980\,\mathrm{cm/s^2}$ داریم

$$v = \sqrt{2ad} = \sqrt{\frac{2(2mg)d}{M + 2m}} = \sqrt{\frac{4(50)(980)(50)}{400 + 2(50)}}$$

$$= 1.96\times10^2\,\mathrm{cm/s}$$

(ب) پاسخ باز هم $1.96\times10^2\,\mathrm{cm/s} = 1.96\,\mathrm{m/s}$ است زیرا ربطی به R ندارد.

* ۵۹ میل‌لنگ خودرویی در حالی که با تندی زاویه‌ای $1800\,\mathrm{rev/min}$ می‌چرخد، انرژی را با آهنگ ۱۰۰ قوه اسب (مساوی با $74.6\,\mathrm{kW}$) از موتور به محور منتقل می‌کند. گشتاور نیروی منتقل شده توسط میل‌لنگ (برحسب نیوتون - متر) چقدر است؟

حل: به ازای $\omega = (۱۸۰۰)(۲\pi / ۶۰) = ۱۸۸{,}۵ \text{rad/s}$ از معادله‌ی ۱۰-۵۵ داریم

$$P = \tau\omega \Rightarrow \tau = \frac{۷۴۶۰۰ \text{W}}{۱۸۸{,}۵ \text{rad/s}} = ۳۹۶ \text{N.m}$$

* ۶۰ میله‌ی باریکی به طول $۰{,}۷۵ \text{m}$ و جرم $۰{,}۴۲ \text{kg}$ از یک سر به‌طور آزاد آویخته شده است. سر دیگر میله را به یک طرف می‌کشیم و سپس آن را رها می‌کنیم تا در حالی که از پایین‌ترین مکان با تندی زاویه‌ای $۴{,}۰ \text{rad/s}$ می‌گذرد، مانند یک آونگ تاب بخورد. با چشم‌پوشی از اصطکاک و مقاومت هوا، (الف) انرژی جنبشی میله را در پایین‌ترین مکان پیدا کنید. (ب) مرکز جرم میله نسبت به پایین‌ترین مکان، چه اندازه بالا می‌رود؟

حل: (الف) از معادله‌ی ۱۰-۳۴ استفاده می‌کنیم:

$$K = \frac{۱}{۲}I\omega^۲ = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۳}mL^۲\right)\omega^۲ = \frac{۱}{۶}mL^۲\omega^۲$$

$$= \frac{۱}{۶}(۰{,}۴۲\text{kg})((۰{,}۷۵\text{m})^۲(۴{,}۰\text{rad/s})^۲) = ۰{,}۶۳\text{J}$$

(ب) از تبدیل انرژی مکانیکی داریم $K = mgh$. در نتیجه مقدار بالا رفتن مرکز جرم میله برابر است با

$$h = \frac{K}{mg} = \frac{mL^۲\omega^۲}{۶mg} = \frac{L^۲\omega^۲}{۶g}$$

$$= \frac{(۰{,}۷۵\text{m})^۲(۴{,}۰\text{rad/s})^۲}{۶(۹{,}۸\text{m/s}^۲)} = ۰{,}۱۵\text{m}$$

* ۶۱ چرخی به جرم $۳۲{,}۰ \text{kg}$ که به شکل طوقه‌ای باریک به شعاع $۱{,}۲۰ \text{m}$ است، با تندی ۲۸۰rev/min می‌چرخد. این چرخ باید در مدت ۱۵٫۰ ثانیه متوقف شود. (الف) چقدر کار باید برای متوقف کردن چرخ انجام شود؟ (ب) توان متوسط لازم چقدر است؟

حل: تندی زاویه‌ای آغازی به صورت زیر است

$$\omega = (۲۸۰\text{rev/min})(۲\pi/۶۰) = ۲۹{,}۳\text{rad/s}$$

(الف) چون لختی دورانی (جدول ۱۰-۲ الف) به صورت $I = (۳۲\text{kg})(۱{,}۲\text{m})^۲ = ۴۶{,}۱\text{kg.m}^۲$ است، کار انجام شده برابر است با

$$W = \Delta K = ۰ - \frac{۱}{۲}I\omega^۲$$

$$= -\frac{۱}{۲}(۴۶{,}۱\text{kg.m}^۲)(۲۹{,}۳\text{rad/s})^۲ = -۱{,}۹۸\times۱۰^۴\text{J}$$

(ب) توان متوسط (به صورت مقدار مطلق) برابر است با

$$|P| = \frac{|W|}{\Delta t} = \frac{۱۹{,}۸\times۱۰^۳}{۱۵} = ۱{,}۳۲\times۱۰^۳\text{ W}$$

** ۶۲ در شکل ۱۰-۳۲، سه ذره، هر یک به جرم $۰{,}۰۱۰۰\text{kg}$، به میله‌ای به طول $L = ۶{,}۰۰\text{cm}$ و به جرم ناچیز چسبیده‌اند و میله می‌تواند به دور محوری عمود و گذرنده از نقطه‌ی O واقع در یک سر میله بچرخد. چقدر کار برای تغییر دادن تندی زاویه‌ای دوران ω، (الف) از صفر تا $۲۰{,}۰\text{rad/s}$، (ب) از $۲۰{,}۰\text{rad/s}$ تا $۴۰{,}۰\text{rad/s}$، و (پ) از $۴۰{,}۰\text{rad/s}$ تا $۶۰{,}۰\text{rad/s}$، لازم است؟ (ت) شیب نمودار انرژی جنبشی دستگاه (برحسب ژول) نسبت به $\omega^۲$ (برحسب مجذور رادیان بر مجذور ثانیه) چیست؟

حل: (الف) از معادله‌ی ۱۰-۳۳ داریم

$$I_{\text{کل}} = md^۲ + m(۲d)^۲ + m(۳d)^۲ = ۱۴md^۲$$

در این‌جا $d = ۰{,}۰۲۰\text{m}$ و $m = ۰{,}۰۱۰\text{kg}$ است. کار انجام شده برابر است با

$$W = \Delta K = \frac{۱}{۲}I\omega_f^۲ - \frac{۱}{۲}I\omega_i^۲$$

که در آن $\omega_f = ۲۰\text{rad/s}$ و $\omega_i = ۰$ است. در نتیجه $W = ۱۱{,}۲\text{mJ}$ به دست می‌آید.

(ب) در این حالت، $\omega_f = ۴۰\text{rad/s}$ و $\omega_i = ۲۰\text{rad/s}$ است و $W = ۳۳{,}۶\text{mJ}$ به دست می‌آید.

(پ) در این حالت، $\omega_f = ۶۰\text{rad/s}$ و $\omega_i = ۴۰\text{rad/s}$ است، در نتیجه کار انجام شده به صورت $W = ۵۶{,}۰\text{mJ}$ به دست می‌آید.

(ت) معادله‌ی ۱۰-۳۴ نشان می‌دهد که شیب باید مساوی با $\frac{۱}{۲}I$ باشد. در نتیجه داریم

$$۷md^۲ = ۲{,}۸۰\times۱۰^{-۵}\text{J.s}^۲/\text{rad}^۲$$

** ۶۳ یک خط‌کش چوبی یک متری را به طور قائم از یک سرش بر روی زمین نگه می‌داریم و سپس آن را رها می‌کنیم تا بیفتد. تندی سر دیگر خط‌کش را هنگام برخورد به سطح زمین، با این فرض که سر پایینی آن بر روی سطح نمی‌لغزد، پیدا کنید. (*راهنمایی:* خط‌کش را به صورت یک میله‌ی باریک در نظر بگیرید و از اصل پایستگی انرژی استفاده کنید).

حل: طول خط‌کش را با l نشان می‌دهیم. چون مرکز جرم آن به فاصله‌ی $l/۲$ از هر انتها قرار دارد، انرژی پتانسیل آغازی آن $\frac{۱}{۲}mgl$ است. انرژی جنبشی آغازی خط‌کش صفر است. انرژی پتانسیل پایانی خط‌کش صفر، و انرژی جنبشی پایانی آن $\frac{۱}{۲}I\omega^{۲}$ است که در آن I لختی دورانی خط‌کش حول محور گذرنده از یک انتهای خط‌کش و ω سرعت زاویه‌ای خط‌کش پیش از برخورد به زمین است. از تبدیل انرژی‌ها به یکدیگر داریم

$$\frac{۱}{۲}mgl = \frac{۱}{۲}I\omega^{۲} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}}$$

فاصله‌ی انتهای آزاد خط‌کش از محور دوران، l است و تندی آن در لحظه برخورد به زمین (از معادله‌ی ۱۰-۱۸) برابر است با

$$v = \omega l = \sqrt{\frac{mgl^{۳}}{I}}$$

با استفاده از جدول ۱۰-۲ و قضیه‌ی محور موازی، لختی دورانی $I = \frac{۱}{۳}ml^{۲}$ است، و درنتیجه تندی سر دیگر خط‌کش برابراست با

$$v = \sqrt{۳gl} = \sqrt{۳(۹/۸\text{m/s}^{۲})(۱/۰۰\text{m})} = ۵/۴۲\text{m/s}$$

** ۶۴ استوانه‌ی یکنواختی به شعاع ۱۰cm و جرم ۲۰kg طوری قرار داده شده است که می‌تواند به دور محوری افقی موازی با محور طولی مرکزی استوانه و به فاصله‌ی ۵/۰cm از این محور، بچرخد. (الف) لختی دورانی استوانه نسبت به این محور دوران چقدر است؟ (ب) اگر استوانه ازحال سکون طوری رها شود که محور طولی مرکزی‌اش با محور دوران استوانه هم ارتفاع باشد، تندی زاویه‌ای استوانه هنگام عبور از پایین‌ترین مکان چقدر است؟

حل: (الف) برای پیدا کردن لختی دورانی از قضیه‌ی محور موازی استفاده می‌کنیم

$$I = I_{com} + Mh^{۲} = \frac{۱}{۲}mR^{۲} + Mh^{۲}$$

$$= \frac{۱}{۲}(۲۰\text{kg})(۰/۱۰\text{m})^{۲} + (۲۰\text{kg})(۰/۰۵\text{m})^{۲} = ۰/۱۵\text{kg.m}^{۲}$$

(ب) با توجه به پایسته بودن انرژی داریم $Mgh = \frac{۱}{۲}I\omega^{۲}$، که در آن ω تندی زاویه‌ای استوانه در هنگام عبور از پایین‌ترین مکان است. بنابراین داریم

$$\omega = \sqrt{\frac{۲Mgh}{I}} = \sqrt{\frac{۲(۲۰\text{kg})(۹/۸\text{m/s}^{۲})(۰/۰۵۰\text{m})}{۰/۱۵\text{kg.m}^{۲}}} = ۱۱/۴\text{rad/s}$$

*** ۶۵ یک دودکش بلند استوانه‌ای شکل پایه‌اش در هم می‌شکند و سرنگون می‌شود. دودکش را به صورت میله‌ی باریکی به‌طول ۵۵/۰ m در نظر بگیرید. در لحظه‌ای که دودکش در حین افتادن با راستای قائم زاویه‌ی ۳۵/۰ درجه می‌سازد، (الف) شتاب شعاعی نوک دودکش، و (ب) شتاب مماسی نوک دودکش چیست؟ (*راهنمایی:* از روش‌های انرژی استفاده کنید نه گشتاور نیرو). (پ) به ازای کدام زاویه‌ی θ شتاب مماسی با g برابر است؟

حل: (الف) از پایستگی انرژی مکانیکی برای پیدا کردن رابطه‌ی $\omega^{۲}$ برحسب زاویه‌ی دودکش با راستای قائم، θ، استفاده می‌کنیم. انرژی پتانسیل دودکش از رابطه‌ی $U = Mgh$ به دست می‌آید که در آن M جرم و h ارتفاع مرکز جرم از سطح زمین است. وقتی دودکش با راستای قائم زاویه‌ی θ می‌سازد، $h = (H/۲)\cos\theta$ است. در آغاز انرژی پتانسیل $U_i = Mg(H/۲)$ و انرژی جنبشی صفر است. وقتی دودکش با راستای قائم زاویه‌ی θ می‌سازد، انرژی جنبشی $\frac{۱}{۲}I\omega^{۲}$ است که در آن I لختی دورانی دودکش حول لبه‌ی پایینی است. در نتیجه از اصل پایستگی انرژی داریم

$$MgH/۲ = Mg(H/۲)\cos\theta + \frac{۱}{۲}I\omega^{۲}$$

$$\Rightarrow \omega^{۲} = (MgH/I)(۱-\cos\theta)$$

لختی دورانی دودکش حول پایه‌ی آن $I = MH^{۲}/۳$ است (با استفاده از جدول ۱۰-۲ و قضیه‌ی محور موازی). در نتیجه داریم

$$\omega = \sqrt{\frac{۳g}{H}(۱-\cos\theta)} = \sqrt{\frac{۳(۹/۸۰\text{m/s}^{۲})}{۵۵/۰\text{m}}(۱-\cos ۳۵/۰^{\circ})}$$

$$= ۰/۳۱۱\text{rad/s}$$

(ب) مؤلفه‌ی شعاعی شتاب نوک دودکش از رابطه‌ی $a_r = H\omega^{۲}$ به دست می‌آید:

$$a_r = ۳g(۱-\cos\theta) = ۳(۹/۸۰\text{m/s}^{۲})(۱-\cos ۳۵/۰^{\circ})$$

$$= ۵/۳۲\text{m/s}^{۲}$$

(پ) مؤلفه‌ی مماسی شتاب نوک دودکش از رابطه‌ی $a_t = H\alpha$ به‌دست می‌آید که α شتاب زاویه‌ای است. در این‌جا ما نمی‌توانیم از جدول ۱۰-۱ استفاده کنیم زیرا شتاب یکنواخت نیست. بنابراین، از رابطه‌ی

$$\omega^{۲} = (۳g/H)(۱-\cos\theta)$$

نسبت به زمان مشتق می‌گیریم و به‌جای $d\omega/dt$ مقدار α و به‌جای $d\theta/dt$ مقدار ω را قرار می‌دهیم:

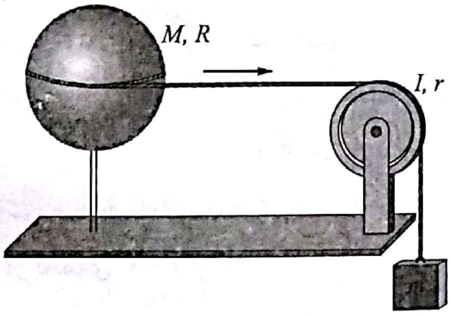
$$\frac{d\omega^{۲}}{dt}=۲\omega\alpha=(۳g/H)\omega\sin\theta \Rightarrow \alpha=(۳g/۲H)\sin\theta$$

در نتیجه داریم

$$a_t=H\alpha=\frac{۳g}{۲}\sin\theta=\frac{۳(۹٫۸۰\,m/s^{۲})}{۲}\sin ۳۵٫۰^\circ=۸٫۴۳\,m/s^{۲}$$

(ت) در رابطه‌ی بالا $a_t=g$ را قرار می‌دهیم و به نتیجه‌ی $\frac{۳g}{۲}\sin\theta=g$ می‌رسیم. در نتیجه $\sin\theta=۲/۳$ و $\theta=۴۱٫۸^\circ$ به دست می‌آید.

*** ۶۶ پوسته‌ی کروی یکنواختی به جرم $M=۴٫۵\,kg$ و شعاع $R=۸٫۵\,cm$ روی یاتاقان‌های بی‌اصطکاکی به دور یک محور قائم می‌چرخد (شکل ۱۰–۴۷). ریسمان بی‌جرمی به دور استوای پوسته‌ی کروی پیچیده شده و پس از عبور از روی قرقره‌ای با لختی دورانی $I=۳٫۰\times۱۰^{-۳}\,kg\cdot m^{۲}$ و شعاع $r=۵٫۰\,cm$، به شیء کوچکی به جرم $m=۰٫۶۰\,kg$ وصل شده است. محور قرقره اصطکاک ندارد و ریسمان بر روی قرقره نمی‌لغزد. تندی شیء پس از سقوط از حالت سکون به اندازه‌ی ۸۲ cm، چقدر است؟ از روش انرژی استفاده کنید.



شکل ۱۰–۴۷ مسئله‌ی ۶۶.

حل: با توجه به جدول ۱۰–۲، لختی دورانی پوسته‌ی کروی $۲MR^{۲}/۳$ است، لذا انرژی جنبشی شیئی (پس از سقوط به اندازه‌ی h) برابر است با

$$K=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۲}{۳}MR^{۲}\right)\omega^{۲}_{\text{کره}}+\frac{۱}{۲}I\omega^{۲}_{\text{قرقره}}+\frac{۱}{۲}mv^{۲}$$

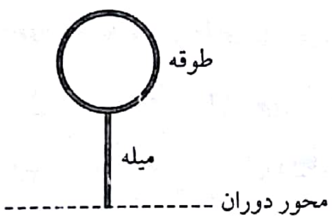
چون شیئی از حال سکون سقوط می‌کند، این انرژی (در غیاب اصطکاک) باید با انرژی پتانسیل mgh آغازی برابر باشد. به جای تندی زاویه‌ای قرقره مقدار v/r و به جای تندی زاویه‌ای کره مقدار v/R را قرار می‌دهیم و v را حساب می‌کنیم:

$$v=\sqrt{\frac{mgh}{\frac{۱}{۲}m+\frac{۱}{۲}\frac{I}{r^{۲}}+\frac{M}{۳}}}=\sqrt{\frac{۲gh}{۱+(I/mr^{۲})+(۲M/۳m)}}$$

$$=\sqrt{\frac{۲(۹٫۸)(۰٫۸۲)}{۱+۳٫۰\times۱۰^{-۳}/((۰٫۶۰)(۰٫۰۵۰)^{۲})+۲(۴٫۵)/۳(۰٫۶۰)}}$$

$$=۱٫۴\,m/s$$

*** ۶۷ شکل ۱۰–۴۸ مجموعه‌ی صُلبی از یک طوقه‌ی باریک (به جرم m و شعاع $R=۰٫۱۵۰\,m$) و میله‌ی شعاعی باریکی (به جرم m و طول $L=۲٫۰۰R$) را نشان می‌دهد. این مجموعه به طور قائم قرار گرفته است، اما اگر ضربه‌ی کوچکی به آن بزنیم، به دور یک محور افقی واقع در صفحه‌ی میله و طوقه و گذرنده از انتهای پایینی میله می‌چرخد. با این فرض که انرژی داده شده به مجموعه از طریق ضربه ناچیز است، تندی زاویه‌ای مجموعه به دور محور دوران وقتی که از وضعیت رو به زیر (وارون) عبور می‌کند، چیست؟



شکل ۱۰–۴۸ مسئله‌ی ۶۷.

حل: با استفاده از قضیه‌ی محور موازی و بخش‌های ث و ح در جدول ۱۰–۲، لختی دورانی برابر است با

$$I=\frac{۱}{۱۲}mL^{۲}+m(L/۲)^{۲}+\frac{۱}{۲}mR^{۲}+m(R+L)^{۲}=۱۰٫۸۳mR^{۲}$$

در این‌جا $L=۲R$ را قرار داده‌ایم. اگر قاعده‌ی میله را در مبداء مختصات $(x=۰,\ y=۰)$ در نظر بگیریم، مکان مرکز جرم عبارت است از

$$y=\frac{mL/۲+m(L+R)}{m+m}=۲R$$

از مقایسه‌ی مکان مرکز جرم نشان داده شده در شکل صورت مسئله با مکان مرکز جرم در حالت وارون، نشان می‌دهد که مقدار مطلق تغییر مکان مرکز جرم $|\Delta y|=۴R$ است. انرژی پتانسیل گرانشی

تلف شده به انرژی جنبشی تبدیل شده است. در نتیجه با استفاده از معادله‌ی ۱۰-۳۴ داریم

$$K = (۲m)g(۴R) \Rightarrow \omega = ۹/۸۲\ \mathrm{rad/s}$$

مسئله‌های بیشتر

۶۸ دو کره‌ی توپر یکنواخت دارای جرم یکسان $۱/۶۵\,\mathrm{kg}$ هستند، اما شعاع یکی از آن‌ها $۰/۲۲۶\,\mathrm{m}$ و شعاع دیگری $۰/۸۵۴\,\mathrm{m}$ است. هر کره می‌تواند به دور یک محور گذرنده از مرکزش دوران کند. (الف) بزرگی گشتاور نیروی لازم τ، برای آنکه کره‌ی کوچک‌تر در مدت ۱۵/۵ ثانیه از حال سکون به تندی زاویه‌ای $۳۱۷\,\mathrm{rad/s}$ برسد، چقدر است؟ (ب) بزرگی نیروی F که باید به طور مماس بر دایره‌ی استوای کره وارد شود تا این مقدار گشتاور نیرو را ایجاد کند، چیست؟ همین مقادیر (پ) τ و (ت) F، برای کره‌ی بزرگ‌تر چه باید باشند؟

حل: جهت‌های $\pm$ را طوری انتخاب می‌کنیم که سرعت زاویه‌ای آغازی $\omega_۰ = -۳۱۷\,\mathrm{rad/s}$ و مقادیر α، τ و F مثبت باشند.

(الف) از ترکیب معادلات ۱۰-۱۲ و ۱۰-۴۵ و استفاده از جدول ۱۰-۲ ج (و قرار دادن $\omega = ۰$)، به رابطه‌ی زیر می‌رسیم

$$\tau = \left(\frac{۲}{۵}MR^۲\right)\left(-\frac{\omega_۰}{t}\right) = -\frac{۲}{۵}\frac{MR^۲\omega_۰}{t}$$

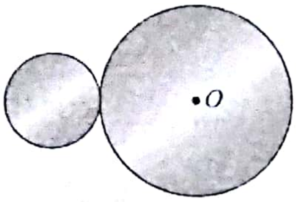
به ازای $M = ۱/۶۵\,\mathrm{kg}$، $R = ۰/۲۲۶\,\mathrm{m}$، $t = ۱۵/۵\,\mathrm{s}$ داریم $\tau = ۰/۶۸۹\,\mathrm{N.m}$.

(ب) از معادله‌ی ۱۰-۴۰ مقدار $F = \tau/R = ۳/۰۵\,\mathrm{N}$ به دست می‌آید.

(پ) باز هم از رابطه‌ی به دست آمده در قسمت (الف) استفاده می‌کنیم، اما این بار $R = ۰/۸۵۴\,\mathrm{m}$ را قرار می‌دهیم و $\tau = ۹/۸۴\,\mathrm{N.m}$ را به دست می‌آوریم.

(ت) در این حالت، $F = \tau/R = ۱۱/۵\,\mathrm{N}$ است.

۶۹ در شکل ۱۰-۴۹، یک قرص کوچک به شعاع $r = ۲/۰۰\,\mathrm{cm}$ به لبه‌ی یک قرص بزرگ به شعاع $R = ۴/۰۰\,\mathrm{cm}$ به گونه‌ای چسبیده است که قرص‌ها در یک صفحه قرار دارند. این قرص‌ها می‌توانند به دور یک محور عمودی گذرنده از نقطه‌ی O واقع در مرکز قرص بزرگ بچرخند. این دو قرص دارای چگالی (جرم یکای حجم) یکنواخت $۱/۴۰\times۱۰^۳\,\mathrm{kg/m^۳}$ و ضخامت یکنواخت $۵/۰۰\,\mathrm{mm}$ هستند. لختی دورانی مجموعه‌ی دو قرص نسبت به محور دوران گذرنده از نقطه‌ی O چیست؟



شکل ۱۰-۴۹ مسئله‌ی ۶۹.

حل: حجم هر قرص $\pi r^۲ h$ است که h معرف ضخامت (مساوی با $۰/۰۰۵۰۰\,\mathrm{m}$) است. اگر R معرف شعاع قرص بزرگ‌تر (مساوی با $۰/۰۴۰۰\,\mathrm{m}$) و r معرف شعاع قرص کوچک‌تر (مساوی با $۰/۰۲۰۰\,\mathrm{m}$) باشد، جرم آن‌ها $m = \rho\pi r^۲ h$ و $M = \rho\pi R^۲ h$ است که $\rho = ۱۴۰۰\,\mathrm{kg/m^۳}$ چگالی هر قرص است. اکنون از قضیه‌ی محور موازی و همچنین از جدول ۱۰-۲ پ برای به دست آوردن لختی دورانی مجموعه‌ی دو قرص استفاده می‌کنیم:

$$I = \frac{۱}{۲}MR^۲ + \frac{۱}{۲}mr^۲ + m(r+R)^۲$$

$$= \rho\pi h\left[\frac{۱}{۲}R^۴ + \frac{۱}{۲}r^۴ + r^۲(r+R)^۲\right] = ۶/۱۶\times۱۰^{-۵}\,\mathrm{kg.m^۲}$$

۷۰ چرخی از حال سکون با شتاب زاویه‌ای ثابت $۲/۰۰\,\mathrm{rad/s^۲}$ شروع به چرخیدن می‌کند. این چرخ در یک بازه‌ی زمانی معین $۳/۰۰\,\mathrm{s}$ به‌اندازه‌ی $۹۰/۰\,\mathrm{rad}$ می‌چرخد. (الف) سرعت زاویه‌ای چرخ در شروع بازه‌ی زمانی $۳/۰۰\,\mathrm{s}$ چقدر است؟ (ب) این چرخ تا شروع بازه‌ی زمانی $۳/۰۰\,\mathrm{s}$ چه زاویه‌ای را طی می‌کند؟

حل: چرخ در لحظه‌ی $t = ۰$ از حال سکون $(\omega_۰ = ۰)$ شروع به چرخیدن می‌کند و شتاب یکنواخت آن $\alpha = ۲/۰۰\,\mathrm{rad/s^۲}$ است. این چرخ در بین لحظات $t_۱$ و $t_۲$ زاویه‌ی $\Delta\theta = ۹۰/۰\,\mathrm{rad}$ را می‌پیماید و $t_۲ - t_۱ = \Delta t = ۳/۰۰\,\mathrm{s}$ است. ابتدا قسمت (ب) را حل می‌کنیم.

(ب) از معادله‌ی ۱۰-۱۳ (با تغییر جزئی در نمادگذاری) برای توصیف حرکت در بازه‌ی زمانی $t_۱ \le t \le t_۲$ استفاده می‌کنیم:

$$\Delta\theta = \omega_۱\Delta t + \frac{۱}{۲}\alpha(\Delta t)^۲ \Rightarrow \omega_۱ = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} - \frac{\alpha\Delta t}{۲}$$

این مقدار را در معادله‌ی ۱۰-۱۲ قرار می‌دهیم تا حرکت در بازه‌ی $t_1 \leq t \leq 0$ توصیف شود:

$$\omega_1 = \omega_0 + \alpha t_1 \Rightarrow \frac{\Delta\theta}{\Delta t} - \frac{\alpha \Delta t}{2} = \alpha t_1$$

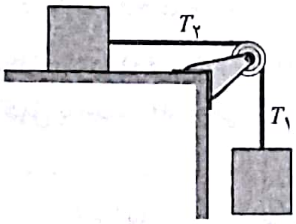
$$\Rightarrow \frac{۹۰/۰}{۳/۰۰} - \frac{(۲/۰۰)(۳/۰۰)}{۲} = (۲/۰۰)t_1$$

در نتیجه $t_1 = ۱۳/۵\,s$ به دست می‌آید.

(الف) مقدار ω_1 را با استفاده از قسمت (ب) به صورت زیر به‌دست می‌آوریم

$$\omega_1 = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} - \frac{\alpha\Delta t}{2} = \frac{۹۰/۰}{۳/۰۰} - \frac{(۲/۰۰)(۳/۰۰)}{۲} = ۲۷\,rad/s$$

۷۱ در شکل ۱۰-۵۰، دو قطعه، هر یک به جرم $۶/۲۰\,kg$، با یک ریسمان بی‌جرم که از روی قرقره‌ای به شعاع $۲/۴۰\,cm$ و لختی دورانی $۷/۴۰\times۱۰^{-۴}\,kg\cdot m^2$ گذشته است، به هم وصل شده‌اند. این ریسمان بر روی قرقره نمی‌لغزد و ما نمی‌دانیم که آیا بین میز و قطعه‌ی در حال لغزیدن بر روی آن اصطکاک وجود دارد یا نه، اما محور قرقره بی‌اصطکاک است. هرگاه این دستگاه را از حال سکون رها کنیم، قرقره درمدت $۹۱/۰\,ms$ به‌اندازه‌ی زاویه‌ی $۰/۱۳۰\,rad$ می‌چرخد و شتاب دو قطعه ثابت است. (الف) بزرگی شتاب زاویه‌ای قرقره، (ب) بزرگی شتاب هر قطعه، (پ) نیروی کشش ریسمان T_1، و (ت) نیروی کشش ریسمان T_2، چیست؟



شکل ۱۰-۵۰ مسئله‌ی ۷۱.

حل: جهت مثبت محورهای مختصات را طوری انتخاب می‌کنیم (حالت‌های مختلف وجود دارد) که شتاب قطعات مثبت باشد تا بتوانیم از رابطه‌ی $a_2 = a_1 = R\alpha$ (برای سهولت، شتاب‌های a_2 و a_1 را با a نشان می‌دهیم) استفاده کنیم. بنابراین، برای $m_2 = M$ (قطعه واقع در روی میز) جهت مثبت را به طرف راست، و برای $m_1 = M$ (قطعه‌ی آویزان در انتهای ریسمان) جهت مثبت را به طرف پایین انتخاب می‌کنیم و (تا حدی به صورت غیرمعمول) جهت مثبت دوران را در جهت ساعتگرد در نظر می‌گیریم. منظور این است که مقدار کمیت داده شده برای θ در صورت مسئله مثبت است. با استفاده از قانون دوم نیوتون برای m_1، m_2 و (به صورت معادله‌ی ۱۰-۴۵) برای M، به سه معادله‌ی زیر می‌رسیم (فرض می‌شود نیروی اصطکاک f_2 به قطعه‌ی m_2 وارد می‌شود):

$$m_1 g - T_1 = m_1 a_1$$

$$T_2 - f_2 = m_2 a_2$$

$$T_1 R - T_2 R = I\alpha$$

(الف) از معادله‌ی ۱۰-۱۳ (به ازای $\omega_0 = 0$) داریم

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow \alpha = \frac{2\theta}{t^2} = \frac{۲(۰/۱۳۰\,rad)}{(۰/۰۹۱۰\,s)^2} = ۳۱/۴\,rad/s^2$$

(ب) چون $a = R\alpha$ (که در بالا توضیح داده شد)، در نتیجه داریم

$$a = \frac{2R\theta}{t^2} = \frac{۲(۰/۰۲۴\,m)(۰/۱۳۰\,rad)}{(۰/۰۹۱۰\,s)^2} = ۰/۷۵۴\,m/s^2$$

(پ) با استفاده از معادله اول (سه معادله) داریم

$$T_1 = m_1(g - a_1) = M\left(g - \frac{2R\theta}{t^2}\right)$$

$$= (۶/۲۰\,kg)\left(۹/۸۰\,m/s^2 - \frac{۲(۰/۰۲۴\,m)(۰/۱۳۰\,rad)}{(۰/۰۹۱۰\,s)^2}\right) = ۵۶/۱\,N$$

(ت) نیروی کشش T_2 از معادله‌ی آخر (سه معادله) به‌دست می‌آید:

$$T_2 = T_1 - \frac{I\alpha}{R}$$

$$= ۵۶/۱\,N - \frac{(۷/۴۰\times۱۰^{-۴}\,kg.m^2)(۳۱/۴\,rad/s^2)}{۰/۰۲۴\,m} = ۵۵/۱\,N$$

۷۲ دو گلوله‌ی کوچک، هر یک به جرم $۱/۰۶\,kg$، به هر سر یک میله‌ی فولادی باریک به طول $۱/۲۰\,m$ و جرم $۶/۴۰\,kg$، وصل شده‌اند. این میله محدود به چرخیدن در صفحه‌ای افقی به دور یک محور قائم گذرنده از وسط میله است. میله در لحظه‌ای خاص با تندی زاویه‌ای $۳۹/۰\,rev/s$ در حال چرخیدن است، اما به خاطر وجود اصطکاک حرکتش کند و پس از گذشت $۳۲/۰\,s$ متوقف می‌شود. با فرض ثابت بودن گشتاور نیروی کُند کننده‌ی وارد شده، مطلوب است محاسبه‌ی (الف) شتاب زاویه‌ای، (ب) گشتاور نیروی کُند کننده، (پ) انرژی کل تبدیل شده از صورت مکانیکی به صورت گرمایی بر اثر اصطکاک، و (ت) عده‌ی دورهایی که میله در مدت $۳۲/۰\,s$ می‌زند. (ث) اکنون، فرض کنید که می‌دانیم گشتاور نیروی کُند کننده ثابت

نیست. در صورت امکان، هر یک از کمیت‌های مربوط به قسمت‌های (الف)، (ب)، (پ) و (ت) را بدون در دست داشتن اطلاعات اضافی حساب کنید.

حل: (الف) برای محاسبه‌ی شتاب زاویه‌ای α می‌توان از سینماتیک شتاب زاویه‌ای ثابت استفاده کرد. اگر $\omega_\circ$ سرعت زاویه‌ای آغازی و t مدت زمان لازم برای توقف میله باشد، داریم $\circ = \omega_\circ + \alpha t$ و شتاب برابر است با

$$\alpha = -\frac{\omega_\circ}{t} = -\frac{۳۹/\circ rev/s}{۳۲/\circ s} = -۱/۲\circ rev/s^۲ = -۷/۵۴ rad/s^۲$$

(ب) از رابطه‌ی $\tau = I\alpha$ استفاده می‌کنیم که لختی دورانی و τ گشتاور نیرو است. لختی دورانی میله $I = Ml^۲/۱۲$ (جدول ۱۰-۲ ث) است که در آن M جرم و l طول میله است. لختی دورانی گلوله $m(l/۲)^۲$ است که m جرم یک گلوله است. لختی دورانی کل برابر است با

$$I = \frac{Ml^۲}{۱۲} + ۲\frac{ml^۲}{۴}$$

$$= \frac{(۶/۴kg)(۱/۲\circ m)^۲}{۱۲} + \frac{(۱/\circ۶kg)(۱/۲\circ m)^۲}{۲}$$

در نتیجه $I = ۱/۵۳ kg.m^۲$ به دست می‌آید. بنابراین گشتاور نیرو برابر است با

$$\tau = (۱/۵۳ kg.m^۲)(-۷/۵۴ rad/s^۲) = -۱۱/۵ N.m$$

(پ) چون دستگاه متوقف می‌شود، انرژی مکانیکی تبدیل شده به انرژی گرمایی همان انرژی جنبشی آغازی است:

$$K_i = \frac{۱}{۲}I\omega_\circ^۲ = \frac{۱}{۲}(۱/۵۳kg.m^۲)((۲\pi)(۳۹)rad/s)^۲$$

$$= ۴/۶۱\times۱\circ^۴ J$$

(ت) از معادله‌ی ۱۰-۱۳ استفاده می‌کنیم:

$$\theta = \omega_\circ t + \frac{۱}{۲}\alpha t^۲$$

$$= ((۲\pi)(۳۹)rad/s)(۳۲/\circ s) + \frac{۱}{۲}(-۷/۵۴ rad/s^۲)(۳۲/\circ s)^۲$$

در نتیجه مقدار جابه‌جایی زاویه‌ای θ مساوی با ۳۹۷۷rad یا (تقسیم بر ۲π) مساوی با ۶۳۳ دور به دست می‌آید.

(ث) فقط انرژی مکانیکی تبدیل شده به انرژی گرمایی را بدون در دست داشتن اطلاعات اضافی می‌توان حساب کرد. این مقدار $۴/۳۲\times۱\circ^۴ J$ است و تا متوقف شدن دستگاه، ربطی به تغییر τ ندارد.

۷۳ پره‌ی یکنواخت چرخانه‌ی یک بالگرد به طول ۷/۸۰m دارای جرم ۱۱۰kg است و با یک تک پیچ به محور چرخانه وصل شده است. (الف) وقتی چرخانه با تندی ۳۲۰rev/min می‌چرخد، بزرگی نیرویی که محور به پیچ وارد می‌کند چقدر است؟ (*راهنمایی:* برای انجام دادن این محاسبه پره را می‌توان به صورت جرمی نقطه‌ای واقع در مرکز جرمش در نظر گرفت. چرا؟) (ب) گشتاور نیروی لازم را که باید به چرخانه وارد شود تا پره در مدت ۶/۷۰s به تندی نهایی برسد، حساب کنید. از مقاومت هوا چشم‌پوشی کنید. (در این حالت، برای انجام دادن این محاسبه پره را نمی‌توان به صورت جرمی نقطه‌ای در نظر گرفت. چرا؟ توزیع جرم را به صورت یک میله‌ی باریک یکنواخت فرض کنید). (پ) گشتاور نیرو چقدر کار روی پره انجام می‌دهد تا پره به تندی زاویه‌ای ۳۲۰rev/min برسد؟

حل: راهنمایی ارائه شده در صورت مسئله، محاسبه‌ی قسمت (الف) را بسیار ساده می‌کند (نیازی به انتگرال‌گیری نیست)، اما اگر راهنمایی مبهم باشد یا بخواهیم جزئیات محاسبه را بدانیم، لازم است از انتگرال‌گیری استفاده کنیم.

(الف) نیروی (مرکزگرای) وارد شده به بخش بی‌نهایت کوچکی از پره به جرم dm واقع در فاصله‌ی r از محور دوران (بر طبق قانون دوم نیوتون)، $dF = (dm)\omega^۲ r$ است که dm را می‌توان به‌صورت $(M/L)dr$ نوشت و تندی زاویه‌ای پره برابر است با

$$\omega = (۳۲\circ)(۲\pi/۶\circ) = ۳۳/۵rad/s$$

بنابراین برای پره‌ی کامل به جرم M و طول L، نیروی کل برابر است با

$$F = \int dF = \int \omega^۲ r dm = \frac{M}{L}\int_\circ^L \omega^۲ r dr = \frac{M\omega^۲ L}{۲}$$

$$= \frac{(۱۱\circ kg)(۳۳/۵rad/s)^۲(۷/۸\circ m)}{۲} = ۴/۸۱\times۱\circ^۵ N$$

(ب) گشتاور لختی پره حول مرکز جرمش (بر طبق جدول ۱۰-۲ ث)، $I = ML^۲/۱۲$ است و با استفاده از قضیه‌ی محور موازی برای «بردن» محور دوران به نقطه‌ی انتهایی میله، لختی دورانی به‌صورت $I = ML^۲/۳$ به دست می‌آید. گشتاور نیرو (که ثابت فرض می‌شود) به صورت زیر از معادله‌ی ۱۰-۴۵ به دست می‌آید

$$\tau = I\alpha = \left(\frac{۱}{۳}ML^۲\right)\left(\frac{\Delta\omega}{\Delta t}\right)$$

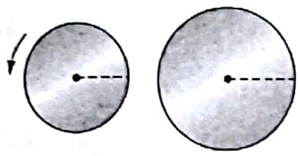
$$= \frac{۱}{۳}(۱۱۰\,\mathrm{kg})(۷{,}۸\,\mathrm{m})^۲\left(\frac{۳۳{,}۵\,\mathrm{rad/s}}{۶{,}۷\mathrm{s}}\right) = ۱{,}۱۲\times۱۰^۴\ \mathrm{N.m}$$

(ب) کار انجام شده از معادله‌ی ۱۰-۵۲ به دست می‌آید:

$$W = \Delta K = \frac{۱}{۲}I\omega^۲ - ۰ = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۳}ML^۲\right)\omega^۲$$

$$= \frac{۱}{۶}(۱۱۰\,\mathrm{kg})(۷{,}۸۰\,\mathrm{m})^۲(۳۳{,}۵\,\mathrm{rad/s})^۲ = ۱{,}۲۵\times۱۰^۶\ \mathrm{J}$$

۷۴ ***قرص‌های مسابقه دهنده.*** شکل ۱۰-۴۹ دو قرص را نشان می‌دهد که مانند یک چرخ و فلک می‌توانند به دور مرکزهای خود بچرخند. در زمان $t=۰$ خط‌های مرجع دو قرص هم‌خط هستند. قرص A از پیش با سرعت زاویه‌ای ثابت $۹{,}۵\,\mathrm{rad/s}$ در حال چرخیدن است. قرص B ساکن بوده است، اما حالا با شتاب زاویه‌ای ثابت $۲{,}۲\,\mathrm{rad/s^۲}$ شروع به چرخش می‌کند. (الف) در چه زمان t، خط‌های مرجع دو قرص در یک لحظه دارای جابه‌جایی زاویه‌ای یکسان و مساوی θ می‌شوند؟ (ب) آیا این زمان t نخستین بار پس از زمان $t=۰$ خواهد بود که خط‌های مرجع در یک لحظه هم‌خط می‌شوند؟



شکل ۱۰-۵۱ مسئله‌ی ۷۴.

حل: جابه‌جایی زاویه‌ای قرص‌های A و B عبارت‌اند از

$$\theta_A = \omega_A t\ ,\ \theta_B = \frac{۱}{۲}\alpha_B t^۲$$

(الف) به ازای $\theta_A = \theta_B$، زمان مورد نظر به دست می‌آید

$$\omega_A t = \frac{۱}{۲}\alpha_B t^۲ \Rightarrow t = \frac{۲\omega_A}{\alpha_B} = \frac{۲(۹{,}۵\,\mathrm{rad/s})}{(۲{,}۲\,\mathrm{rad/s^۲})} = ۸{,}۶\mathrm{s}$$

(ب) اختلاف جابه‌جایی‌های زاویه‌ای برابر است با

$$\Delta\theta = \theta_A - \theta_B = \omega_A t - \frac{۱}{۲}\alpha_B t^۲ = ۹{,}۵t - ۱{,}۱t^۲$$

برای آن‌که خط‌های مرجع در یک لحظه در راستای یکدیگر قرار گیرند، باید $\Delta\theta = ۲\pi N$ باشد که N یک عدد درست است. از حل معادله‌ی درجه دوم بالا داریم

$$t_N = \frac{۹{,}۵ \pm \sqrt{(۹{,}۵)^۲ - ۴(۱{,}۱)(۲\pi N)}}{۲(۱{,}۱)}$$
$$= \frac{۹{,}۵ \pm \sqrt{۹۰{,}۲۵ - ۲۷{,}۶N}}{۲{,}۲}$$

پاسخ $t_۰ = ۸{,}۶۳\mathrm{s}$ (ریشه‌ی مثبت را در نظر می‌گیریم) با پاسخ به دست آمده در قسمت (الف) برابر است، در حالی که $t_۰ = ۰$ (با در نظر گرفتن ریشه‌ی منفی) لحظه‌ای را نشان می‌دهد که هر دو قرص شروع به چرخش می‌کنند. در واقع، به ازای $N = ۰,۱,۲,۳$، دو پاسخ وجود دارد.

۷۵ بندبازها همیشه تلاش می‌کنند مرکز جرم خود را در روی بند (سیم یا طناب) نگه‌دارند. بندباز برای حفظ کردن توازن، معمولاً، یک تیر سنگین و بلند را با خود حمل می‌کند. اگر به‌عنوان مثال او به‌سمت راست کج شود (مرکزجرمش به‌سمت راست حرکت کند) و درمعرض چرخش به‌دور بند قرار گیرد تیر را به‌سمت چپ خود حرکت می‌دهد (مرکز جرمش به سمت چپ حرکت می‌کند) تا چرخش را کُند و برای حفظ کردن توازن فرصت پیدا کند. فرض کنید بندباز دارای جرم $۷۰{,}۰\,\mathrm{kg}$ و لختی دورانی $۱۵{,}۰\,\mathrm{kg\cdot m^۲}$ نسبت به‌بند است. اگرمرکز جرم بندباز به‌اندازه‌ی $۵{,}۰\,\mathrm{cm}$ به طرف راست بند برود بزرگی شتاب زاویه‌ای او به دور بند در حالت‌های زیر: بندباز (الف) هیچ تیری را حمل نمی‌کند و (ب) تیری به جرم $۱۴{,}۰\,\mathrm{kg}$ حمل می‌کند که مرکز جرمش به‌اندازه‌ی $۱۰\,\mathrm{cm}$ درسمت چپ بند واقع است، چیست؟

حل: بزرگی گشتاور نیرو با حاصل‌ضرب بزرگی نیرو و فاصله‌ی نقطه‌ی آویز تا خط اثر نیرو برابر است. در این مسئله، خط اثر نیروی گرانشی از مرکز جرم بندباز عبور می‌کند. در نتیجه داریم

$$\tau = I\alpha = rF = rmg$$

(الف) اگر از تیر استفاده نشود، به ازای $I = ۱۵\,\mathrm{kg.m^۲}$، شتاب زاویه‌ای برابر است با

$$\alpha = \frac{rF}{I} = \frac{rmg}{I} = \frac{(۰{,}۰۵۰\,\mathrm{m})(۷۰\,\mathrm{kg})(۹{,}۸\,\mathrm{m/s^۲})}{۱۵\,\mathrm{kg.m^۲}}$$
$$= ۲{,}۳\,\mathrm{rad/s^۲}$$

(ب) وقتی بندباز تیر سنگین را با خود حمل می‌کند، گشتاور نیروی ناشی از نیروی گرانش وارد شده به مرکز جرم تیر، با گشتاور نیروی ناشی نیروی گرانش وارد شده به مرکز جرم بندباز مخالفت می‌کند:

$$\tau_{net} = \sum_i r_i F_i = (۰{,}۰۵۰\,\mathrm{m})(۷۰\,\mathrm{kg})(۹{,}۸\,\mathrm{m/s^۲}) -$$
$$-(۰{,}۱۰\,\mathrm{m})(۱۴\,\mathrm{kg})(۹{,}۸\,\mathrm{m/s^۲}) = ۲۰{,}۵۸\ \mathrm{N.m}$$

در نتیجه شتاب زاویه‌ای حاصل برابر است با

$$\alpha = \frac{\tau_{net}}{I} = \frac{۲۰/۵۸\,\mathrm{N.m}}{۱۵\,\mathrm{kg.m^۲}} \approx ۱/۴\,\mathrm{rad/s^۲}$$

۷۶ چرخی در زمان $t = ۰$ از حال سکون با شتاب زاویه‌ای ثابت شروع به چرخیدن می‌کند. در زمان $t = ۲/۰\,\mathrm{s}$ سرعت زاویه‌ای چرخ $۵/۰\,\mathrm{rad/s}$ است. این شتاب تا زمان $t = ۲۰\,\mathrm{s}$ ادامه دارد و در آن لحظه ناگهان قطع می‌شود. چرخ در بازه‌ی زمانی $t = ۰$ تا $t = ۴۰\,\mathrm{s}$ تحت چه زاویه‌ای می‌چرخد؟

حل: این حرکت در دو مرحله صورت می‌گیرد. مرحله‌ی اول در بازه‌ی زمانی $۰ \le t \le ۲۰\,\mathrm{s}$ با شتاب زاویه‌ای ثابتی انجام می‌شود که برابر است با

$$\alpha = \frac{۵/۰\,\mathrm{rad/s}}{۲/۰\,\mathrm{s}} = ۲/۵\,\mathrm{rad/s^۲}$$

مرحله‌ی دوم در بازه‌ی زمانی $۲۰ < t \le ۴۰\,\mathrm{s}$ با سرعت زاویه‌ای ثابت $\omega = \Delta\theta/\Delta t$ صورت می‌گیرد. جابه‌جایی زاویه‌ای در مرحله‌ی اول برابر است با

$$\theta_۱ = \frac{۱}{۲}\alpha t^۲\Big|_{t=۲۰} = ۵۰۰\,\mathrm{rad}\ ,\ \omega = \alpha t\Big|_{t=۲۰} = ۵۰\,\mathrm{rad/s}$$

جابه‌جایی زاویه‌ای در مرحله‌ی دوم برابر است با

$$\theta_۲ = \theta_۱ + \omega\Delta t = ۵۰۰\,\mathrm{rad} + (۵۰\,\mathrm{rad/s})(۲۰\,\mathrm{s}) = ۱/۵\times۱۰^۳\,\mathrm{rad}$$

۷۷ صفحه‌ی $۳۳\frac{۱}{۳}\,\mathrm{rev/min}$ گرامافونی پس از خاموش کردن دستگاه حرکتش کند و ۳۰ ثانیه بعد متوقف می‌شود. (الف) شتاب زاویه‌ای (ثابت) صفحه را برحسب دور بر مجذور دقیقه پیدا کنید. (ب) صفحه در این مدت چند دور چرخیده است؟

حل: جهت چرخش آغازی را مثبت در نظر می‌گیریم. در نتیجه به ازای $\omega_۰ > ۰$ و $\omega = ۰$ (زیرا چرخ در لحظه‌ی t متوقف می‌شود)، مقدار شتاب زاویه‌ای منفی است.

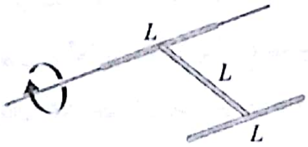
(الف) شتاب زاویه‌ای ثابت است، در نتیجه می‌توانیم از معادله‌ی ۱۰-۱۲ ($\omega = \omega_۰ + \alpha t$) استفاده کنیم. پس شتاب زاویه‌ای برابر است با

$$\alpha = -\frac{۳۳/۳۳\,\mathrm{rev/min}}{۰/۵۰\,\mathrm{min}} = -۶۶/۷\,\mathrm{rev/min^۲} \approx -۶۷\,\mathrm{rev/min^۲}$$

(ب) از معادله‌ی ۱۰-۱۳ استفاده می‌کنیم:

$$\theta = \omega_۰ t + \frac{۱}{۲}\alpha t^۲ = (۳۳/۳۳\,\mathrm{rev/min})(۰/۵۰\,\mathrm{min}) + \frac{۱}{۲}(-۶۶/۷\,\mathrm{rev/min^۲})(۰/۵۰\,\mathrm{min})^۲ = ۸/۳\,\mathrm{rev}$$

۷۸ جسم صُلبی از سه میله‌ی باریک مشابه، هر یک به طول $L = ۰/۶۰۰\,\mathrm{m}$، که به صورت حرف H به هم وصل شده‌اند، ساخته شده است (شکل ۱۰-۵۲). این جسم می‌تواند آزادانه به دور محور افقی گذرنده از یکی از ساق‌های حرف H بچرخد. جسم را رها می‌کنیم تا از حال سکون و از وضعیتی که صفحه‌ی H به صورت افقی است، سقوط کند. تندی زاویه‌ای جسم در موقعی که صفحه‌ی H به حالت قائم قرار می‌گیرد، چقدر است؟



شکل ۱۰-۵۲ مسئله‌ی ۷۸.

حل: از پایستگی انرژی مکانیکی استفاده می‌کنیم. مرکز جرم در وسط میله‌ی افقی H قرار دارد و به اندازه‌ی $L/۲$ سقوط می‌کند، که L طول هر یک از ساق‌ها است. انرژی پتانسیل گرانشی به اندازه‌ی $MgL/۲$ کاهش می‌یابد، که M جرم کل جسم H است. انرژی جنبشی آغازی صفر و انرژی جنبشی پایانی $\frac{۱}{۲}I\omega^۲$ است که در آن I لختی دورانی جسم و ω سرعت زاویه‌ای آن در حالت قائم است. در نتیجه داریم

$$۰ = -MgL/۲ + \frac{۱}{۲}I\omega^۲ \Rightarrow \omega = \sqrt{MgL/I}$$

چون میله‌ها باریک‌اند، میله‌ای که در راستای محور دوران قرار دارد اثری در لختی دورانی ندارد. تمام نقاط روی ساق دیگر به فاصله‌ی مساوی از محور دوران قرار دارند، در نتیجه لختی دورانی آن $(M/۳)L^۲$ است که $M/۳$ جرم ساق است. میله‌ی وسطی حول یک انتهایش می‌چرخد، لذا لختی دورانی آن $(M/۳)L^۲/۳ = ML^۲/۹$ است. بنابراین، لختی دورانی کل برابر است با

$$I = (ML^۲/۳) + (ML^۲/۹) = ۴ML^۲/۹$$

و سرعت زاویه‌ای برابر است با

$$\omega = \sqrt{\frac{MgL}{I}} = \sqrt{\frac{MgL}{۴ML^۲/۹}} = \sqrt{\frac{۹g}{۴L}} = \sqrt{\frac{۹(۹/۸۰۰\,\mathrm{m/s^۲})}{۴(۰/۶۰۰\,\mathrm{m})}} = ۶/۰۶\,\mathrm{rad/s}$$

۷۹ (الف) نشان دهید که لختی دورانی یک استوانه‌ی توپر به جرم M و شعاع R نسبت به محور مرکزی‌اش برابر است با لختی دورانی یک طوقه‌ی نازک به جرم M و شعاع $R/\sqrt{۲}$ نسبت به‌محور مرکزی آن. (ب) نشان دهید که لختی دورانی I جسمی به جرم M نسبت به هر محور برابر است با لختی دورانی یک **طوقه‌ی هم‌ارز** نسبت به همان محور، به شرطی که جرم طوقه همان M باشد و شعاع آن k، از رابطه‌ی زیر به‌دست آید

$$k=\sqrt{\frac{I}{M}}$$

شعاع طوقه‌ی هم‌ارز k، را **شعاع چرخش** جسم مورد نظر می‌نامند.

حل: (الف) با توجه به جدول ۱۰-۲، فرمول‌های لختی دورانی استوانه (به شعاع R) و حلقه یا طوقه‌ی نازک (به شعاع r) عبارت‌اند از

$$I_C=\frac{۱}{۲}MR^{۲} \quad \text{و} \quad I_H=Mr^{۲}$$

چون جرم هر دو جسم یکسان است، لختی دورانی آن‌ها به شرطی برابر است که داشته باشیم:

$$R^{۲}/۲=R_H^{۲} \rightarrow R_H=R/\sqrt{۲}$$

(ب) لختی دورانی را به صورت $I=Mk^{۲}$ می‌نویسیم که در آن M جرم جسم و k شعاع «طوقه‌ی هم‌ارز» است. از این رابطه نتیجه می‌گیریم که $k=\sqrt{I/M}$ است.

۸۰ قرصی درمدت ۶٫۰۰s با شتاب زاویه‌ای ثابت ازمکان زاویه‌ای $\theta_۱=۱۰٫۰\,\text{rad}$ تا مکان زاویه‌ای $\theta_۲=۷۰٫۰\,\text{rad}$ می‌چرخد. سرعت زاویه‌ای قرص درمکان زاویه‌ای $\theta_۲$ برابر با $۱۵٫۰\,\text{rad/s}$ است. (الف) سرعت زاویه‌ای قرص در مکان $\theta_۱$ چقدر بوده است؟ (ب) شتاب زاویه‌ای قرص چقدر است؟ (پ) این قرص ابتدا در کدام مکان زاویه‌ای ساکن بوده است؟ (ت) نمودار θ برحسب t و نیز نمودار تندی زاویه‌ای ω برحسب t مربوط به قرص را، از آغاز حرکت (پس از زمان $t=۰$) رسم کنید.

حل: (الف) با استفاده از معادله‌ی ۱۰-۱۵ داریم

$$۶۰٫۰\,\text{rad}=\frac{۱}{۲}(\omega_۱+\omega_۲)(۶٫۰۰\text{s})$$

به ازای $\omega_۲=۱۵٫۰\,\text{rad/s}$ مقدار $\omega_۱=۵٫۰۰\,\text{rad/s}$ به دست می‌آید.

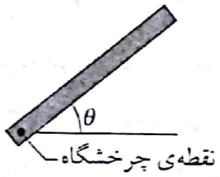
(ب) از معادله‌ی ۱۰-۱۲ داریم

$$\alpha=(۱۵٫۰\,\text{rad/s}-۵٫۰\,\text{rad/s})/(۶٫۰۰\text{s})=۱٫۷۰\,\text{rad/s}^{۲}$$

(پ) اکنون ω را $\omega_۱$ و θ را $\theta_۱=۱۰٫۰\,\text{rad}$ (و $\omega_۰=۰$) می‌نامیم و از معادله‌ی ۱۰-۱۴ داریم

$$\theta_۰=-\frac{\omega_۱^{۲}}{۲\alpha}+\theta_۱=-۲٫۶\,\text{rad}$$

۸۱ میله‌ی یکنواخت باریک نشان داده شده در شکل ۱۰-۵۳، ۲٫۰m طول دارد و می‌تواند به دور یک نقطه‌ی چرخشگاه بی‌اصطکاک افقی واقع در یک سرش بچرخد. این میله از حال سکون تحت زاویه‌ی $\theta=۴۰^\circ$ در بالای افق رها می‌شود. با استفاده کردن از اصل پایستگی انرژی تندی زاویه‌ای میله را در هنگام عبور از حالت افقی معین کنید.



شکل ۱۰-۵۳ مسئله‌ی ۸۱

حل: موقعی که دستگاه رها می‌شود، مرکز جرم ابتدا در ارتفاع $h=\frac{L}{۲}\sin ۴۰^\circ$ قرار دارد ($L=۲٫۰\text{m}$). انرژی پتانسیل متناظر Mgh است (که در آن $M=۱٫۵\,\text{kg}$) که وقتی میله از وضعیت افقی عبور می‌کند، به انرژی جنبشی دورانی $\frac{۱}{۲}I\omega^{۲}$ تبدیل می‌شود (I لختی دورانی حول چرخشگاه است). از جدول ۱۰-۲ ث و قضیه‌ی محور موازی داریم

$$I=\frac{۱}{۱۲}ML^{۲}+M(L/۲)^{۲}=\frac{۱}{۳}ML^{۲}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$Mg\frac{L}{۲}\sin ۴۰^\circ=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۳}ML^{۲}\right)\omega^{۲}\Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{۳g\sin ۴۰^\circ}{L}}$$

$$=۳٫۱\,\text{rad/s}$$

۸۲ جورج واشینگتن گیل فریس که دانش آموخته‌ی مهندسی عمران از انستیتو پلی تکنیک رنسلر بود، نخستین چرخ و فلک با محور افقی را برای نمایشگاه جهانی سال ۱۸۹۳ کلمبیا در شیکاگو ساخت. این چرخ و فلک که در آن زمان ساختار

مهندسی شگفت‌آوری بود، ۳۶ کالسکه‌ی چوبی داشت که هر کدام تا ۶۰ مسافر را در خود جای می‌داد و کالسکه‌ها روی دایره‌ای به قطر $76\,\mathrm{m}$ می‌چرخیدند. هر بار ۶ کالسکه به طور هم‌زمان مسافرگیری می‌کردند و پس از آن که ظرفیت هر ۳۶ کالسکه کامل می‌شد چرخ و فلک یک دور کامل را با تندی زاویه‌ای ثابت در مدتی در حدود $2\,\mathrm{min}$ می‌پیمود. مقدار کار لازم را برای آنکه این دستگاه فقط بتواند مسافرها را بچرخاند، برآورد کنید.

حل: لختی دورانی مسافرها (با تقریب خوب) از معادله‌ی ۱۰-۵۳ به‌دست می‌آید: $I = \sum mR^2 = NmR^2$ که در آن N تعداد افراد و m جرم (تقریبی) هر فرد است. با استفاده از معادله‌ی ۱۰-۵۲ داریم

$$W = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}NmR^2\omega^2$$

در این‌جا $R = 38\,\mathrm{m}$ و $N = 36\times 60 = 2160$ تعداد نفرات است. آهنگ دوران ثابت است به طوری که از رابطه‌ی $\omega = \theta/t$ مقدار $\omega = 2\pi/120 = 0{,}052\,\mathrm{rad/s}$ به دست می‌آید. جرم یک مسافر متوسط احتمالاً در گستره‌ی $100 \le m \le 50$ قرار دارد، لذا گستره‌ی کار لازم به صورت زیر است

$$\frac{1}{2}(2160)(50)(38)^2(0{,}052)^2 \le W$$

$$\le \frac{1}{2}(2160)(100)(38)^2(0{,}052)^2$$

$$2\times 10^5\,\mathrm{J} \le W \le 4\times 10^5\,\mathrm{J}$$

۸۳ در شکل ۱۰-۴۱، دو قطعه به جرم‌های $m_1 = 400\,\mathrm{g}$ و $m_2 = 600\,\mathrm{g}$ با یک ریسمان بی‌جرم پیچیده شده به دور یک قرص یکنواخت به جرم $M = 500\,\mathrm{g}$ و شعاع $R = 12{,}0\,\mathrm{cm}$، به هم وصل شده‌اند. این قرص می‌تواند بی‌اصطکاک به دور یک محور افقی ثابت گذرنده از مرکزش بچرخد؛ ریسمان نمی‌تواند بر روی قرص بلغزد. این دستگاه را از حال سکون رها می‌کنیم. (الف) بزرگی شتاب قطعه‌ها، (ب) نیروی کشش T_1 در ریسمان سمت چپ و (پ) نیروی کشش T_2 در ریسمان سمت راست، را پیدا کنید.

حل: جهت مثبت محورهای مختصات را طوری انتخاب می‌کنیم که شتاب قطعات مثبت باشد تا بتوانیم از رابطه‌ی $a_1 = a_2 = R\alpha = a$ استفاده کنیم. جهت مثبت برای m_1 را به طرف بالا، جهت مثبت برای m_2 را به‌طرف پایین، و جهت دوران قرص را (اگرچه غیرمعمول است) در جهت ساعتگرد در نظر می‌گیریم. با استفاده از قانون دوم نیوتون برای m_1 و m_2 (به شکل معادله‌ی ۱۰-۴۵) برای M، به سه معادله‌ی زیر می‌رسیم

$$T_1 - m_1 g = m_1 a_1$$

$$m_2 g - T_2 = m_2 a_2$$

$$T_2 R - T_1 R = I\alpha$$

(الف) لختی دورانی قرص $I = \frac{1}{2}MR^2$ (جدول ۱۰-۲ پ) است، لذا معادله‌ی سوم را به R تقسیم می‌کنیم، سپس هرسه را باهم جمع می‌کنیم و از مساوی قرار دادن شتاب‌ها، به نتیجه‌ی زیر می‌رسیم

$$m_2 g - m_1 g = \left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M\right)a$$

در نتیجه $a = \frac{4}{25}g = 1{,}57\,\mathrm{m/s^2}$ به دست می‌آید.

(ب) مقدار به دست آمده برای a را در معادله‌ی اول قرار می‌دهیم:

$$T_1 = \frac{29}{25}m_1 g = 4{,}55\,\mathrm{N}$$

(پ) به طور مشابه، $m_2 = 0{,}60\,\mathrm{kg}$ است و داریم

$$T_2 = \frac{5}{6}m_2 g = 4{,}94\,\mathrm{N}$$

۸۴ در ساعت ۷:۱۴ صبح روز ۳۰ ژوئن سال ۱۹۰۸ (۹ تیر سال ۱۲۸۷) انفجار مهیبی در بالای منطقه‌ی سیبری مرکزی در عرض جغرافیایی ۶۱ درجه‌ی شمالی و طول جغرافیایی ۱۰۲ درجه‌ی خاوری، رخ داد؛ آتشین گوی تولید شده روشن‌ترین درخشی بود که پیش از استفاده از سلاح‌های هسته‌ای مشاهده شده بود. ***حادثه‌ی تانگوسکا***، که بنا به اظهار یک شاهد عینی «بخش عظیمی از آسمان را پوشانده بود»، به احتمال، حاصل انفجار یک ***سیارک سنگی*** به پهنای حدود $140\,\mathrm{m}$ بوده است. (الف) فقط با در نظر گرفتن دوران زمین، معین کنید این سیارک تا چه مدت اگر دیرتر می‌رسید، انفجار در بالای شهر هلسینکی (فنلاند) در طول جغرافیایی ۲۵ درجه‌ی خاوری روی می‌داد و هلسینکی را نابود می‌کرد. (ب) اگر سیارک یک ***سیارک فلزی*** می‌بود، می‌توانست به سطح زمین برسد. این سیارک چه مدت باید دیرتر می‌رسید تا در سطح اقیانوس اطلس در طول جغرافیایی ۲۰ درجه‌ی باختری به زمین برخورد کند؟ (سونامی یا

دریالرزه‌ی حاصل از این برخورد می‌توانست تمدن کرانه‌های دو طرف اقیانوس اطلس را محو کند.

حل: (الف) اختلاف طول جغرافیایی بین هلسینکی و محل انفجار $\Delta\theta = 102^\circ - 25^\circ = 77^\circ$ است. سرعت زاویه‌ای زمین ثابت و برابر است با

$$\omega = \frac{1\,\text{rev}}{1\,\text{day}} = \frac{360^\circ}{24\,\text{h}}$$

بنابراین، جابه‌جایی زاویه‌ای $\Delta\theta$ متناظر با بازه‌ی زمانی زیر است

$$\Delta t = (77^\circ)\left(\frac{24\,\text{h}}{360^\circ}\right) = 5.1\,\text{h}$$

(ب) در این حالت $\Delta\theta = 102^\circ - (-20^\circ) = 122^\circ$ است و زمان لازم برای انجام این جابه‌جایی برابر است با

$$\Delta t = (122^\circ)\left(\frac{24\,\text{h}}{360^\circ}\right) = 8.1\,\text{h}$$

۸۵ یک توپ گلف تحت زاویه‌ی ۲۰ درجه نسبت به افق با تندی $60\,\text{m/s}$ و آهنگ دوران $90\,\text{rad/s}$ پرتاب می‌شود. با چشم‌پوشی از نیروی پسار هوا، عده‌ی دورهایی را که توپ تا رسیدن به ارتفاع بیشینه می‌زند، معین کنید.

حل: برای پیدا کردن مدت زمان رسیدن توپ به ارتفاع بیشینه، از معادله‌ی ۴-۲۳ استفاده می‌کنیم و طرف چپ معادله را مساوی با صفر قرار می‌دهیم. در نتیجه داریم

$$t = \frac{(60\,\text{m/s})\sin(20^\circ)}{9.8\,\text{m/s}^2} = 2.094\,\text{s}$$

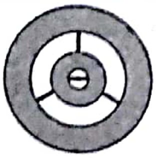
سپس (با فرض $\alpha = 0$) از معادله‌ی ۱۰-۱۳ داریم

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t = (90\,\text{rad/s})(2.094\,\text{s}) = 188\,\text{rad}$$

این زاویه معادل ۳۰ دور است.

۸۶ شکل ۱۰-۵۴ ساختاری تخت از دو حلقه‌ی دایره‌ای هم‌مرکز را نشان می‌دهد که با سه میله‌ی با جرم ناچیز به هم وصل شده‌اند. این ساختار که در آغاز در حال سکون است، می‌تواند (مانند یک چرخ و فلک) به دور مرکز مشترک، که در آن میله‌ی دیگری با جرم ناچیز قرار دارد، بچرخد. جرم، شعاع درونی، و شعاع بیرونی حلقه‌ها در جدول زیر داده شده‌اند. یک نیروی مماسی با بزرگی $12.0\,\text{N}$ به مدت $0.300\,\text{s}$ به لبه‌ی خارجی حلقه‌ی بیرونی وارد می‌شود. تغییر تندی زاویه‌ای این ساختار در این بازه‌ی زمانی چقدر است؟

حلقه	جرم (kg)	شعاع درونی (m)	شعاع بیرونی (m)
۱	۰/۱۲۰	۰/۰۱۶۰	۰/۰۴۵۰
۲	۰/۲۴۰	۰/۰۹۰۰	۰/۱۴۰۰



شکل ۱۰-۵۴ مسئله‌ی ۸۶

حل: در محاسبات زیر، M_1 و M_2 جرم‌های حلقه‌ها، R_{1i} و R_{2i} شعاع‌های داخلی آن‌ها، و R_{1o} و R_{2o} شعاع‌های خارجی آن‌ها هستند. با استفاده از جدول ۱۰-۲ ب داریم

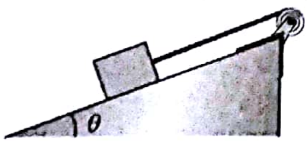
$$I = \frac{1}{2}M_1(R_{1i}^2 + R_{1o}^2) + \frac{1}{2}M_2(R_{2i}^2 + R_{2o}^2) = 0.00346\,\text{kg.m}^2$$

در نتیجه با استفاده از معادله‌ی ۱۰-۳۸ ($\tau = rF$ که در آن $r = R_{2o}$ است) و معادله‌ی ۱۰-۴۵ ($\tau = I\alpha$) داریم

$$\alpha = \frac{(0.140)(12.0)}{0.00346} = 485\,\text{rad/s}^2$$

بالاخره از معادله‌ی ۱۰-۱۲ مقدار $\omega = \alpha t = 145.5\,\text{rad/s}$ به دست می‌آید.

۸۷ در شکل ۱۰-۵۵، چرخی به‌شعاع $0.20\,\text{m}$ بر روی یک محور افقی بی‌اصطکاک نصب شده است. یک ریسمان بی‌جرم پیچیده شده به دور این چرخ به جعبه‌ای به جرم $2.0\,\text{kg}$ واقع بر روی سطح شیب‌دار بی‌اصطکاکی با زاویه‌ی $\theta = 20^\circ$ نسبت به افق، وصل شده است. این جعبه با شتاب $2.0\,\text{m/s}^2$ به پایین سطح حرکت می‌کند. لختی دورانی چرخ نسبت به محور چقدر است؟



شکل ۱۰-۵۵ مسئله‌ی ۸۷

حل: جهت مثبت محورهای مختصات را طوری انتخاب می‌کنیم که شتاب مثبت باشد تا بتوانیم از رابطه‌ی $a_{\text{جعبه}} = R\alpha = a$ استفاده کنیم. بنابراین، جهت به طرف پایین سطح شیب‌دار را برای جعبه‌ی

$m = ۲/۰\,\text{kg}$ مثبت و (به طور معمول) جهت دوران چرخ را در جهت پادساعتگرد انتخاب می‌کنیم. با استفاده از قانون دوم نیوتون برای جعبه و (به شکل معادله‌ی ۱۰-۴۵) برای چرخ، به دو معادله‌ی زیر می‌رسیم ($\theta = ۲۰^\circ$ زاویه‌ی شیب است و جابه‌جایی زاویه‌ای چرخ نیست):

$$mg \sin\theta - T = ma$$

$$TR = I\alpha$$

چون شتاب $a = ۲/۰\,\text{m/s}^۲$ است، نیروی کشش از معادله‌ی اول به صورت $T = m(g\sin\theta - a) = ۲/۷\,\text{N}$ به دست می‌آید. این مقدار و $R = ۰/۲۰\,\text{m}$ را (همراه با $\alpha = a/R$) در معادله‌ی دوم قرار می‌دهیم و لختی دوران را به دست می‌آوریم

$$I = TR^۲/a = ۰/۰۵۴\,\text{kg.m}^۲$$

۸۸ شعاع یک پوسته‌ی کروی نازک $۱/۹۰\,\text{m}$ است. با وارد کردن یک گشتاور نیروی $۹۶۰\,\text{N}\cdot\text{m}$ پوسته دارای شتاب زاویه‌ای $۶/۲۰\,\text{rad/s}^۲$ به دور محور گذرنده از مرکزش می‌شود. (الف) لختی دورانی پوسته نسبت به این محور و (ب) جرم پوسته، چقدر است؟

حل: (الف) از رابطه‌ی $\tau = I\alpha$ استفاده می‌کنیم که τ گشتاور نیروی وارد بر پوسته‌ی کروی و I لختی دورانی آن، و α شتاب زاویه‌ای آن است. در نتیجه داریم

$$I = \frac{\tau}{\alpha} = \frac{۹۶۰\,\text{N.m}}{۶/۲۰\,\text{rad/s}^۲} = ۱۵۵\,\text{kg.m}^۲$$

(ب) لختی دورانی پوسته‌ی کروی از رابطه‌ی $I = (۲/۳)MR^۲$ (جدول ۱۰-۲) به دست می‌آید. در نتیجه داریم

$$M = \frac{۳I}{۲R^۲} = \frac{۳(۱۵۵\,\text{kg.m}^۲)}{۲(۱/۹۰\,\text{m})^۲} = ۶۴/۴\,\text{kg}$$

۸۹ دوچرخه سواری به جرم $۷۰\,\text{kg}$ در هنگام رکاب زدن در یک سر بالایی کل جرمش را روی رکابی اعمال می‌کند که در حال رفتن به سمت پایین است. قطر دایره‌ای را که تحت آن رکاب می‌چرخد $۰/۴۰\,\text{m}$ بگیرید، و بزرگی گشتاور نیروی بیشینه‌ای را که دوچرخه‌سوار نسبت به محور دوران رکاب‌ها وارد می‌کند، معین کنید.

حل: از معادله‌ی ۱۰-۴۰ داریم

$$\tau = mgr = (۷۰\,\text{kg})(۹/۸\,\text{m/s}^۲)(۰/۲۰\,\text{m}) = ۱/۴\times۱۰^۲\,\text{N.m}$$

۹۰ چرخ لنگر یک موتور باتندی $۲۵/۰\,\text{rad/s}$ می‌چرخد. وقتی موتور خاموش می‌شود چرخ لنگر حرکتش با آهنگ ثابت کُند و پس از $۲۰/۰\,\text{s}$ متوقف می‌شود. مطلوب است محاسبه‌ی (الف) شتاب زاویه‌ای چرخ لنگر، (ب) زاویه‌ی پیموده شده توسط چرخ تا لحظه‌ی توقف، و (پ) عده‌ی دورهایی که چرخ لنگر تا لحظه‌ی توقف می‌زند.

حل: (الف) از معادله‌ی ۱۰-۱۲ داریم

$$\alpha = -\omega_۰/t = -(۲۵/۰\,\text{rad/s})/(۲۰/۰\,\text{s}) = -۱/۲۵\,\text{rad/s}^۲$$

(ب) از معادله‌ی ۱۰-۱۵ داریم

$$\theta = \frac{۱}{۲}\omega_۰ t = \frac{۱}{۲}(۲۵/۰\,\text{rad/s})(۲۰/۰\,\text{s}) = ۲۵۰\,\text{rad}$$

(پ) نتیجه‌ی قبلی را به ۲π تقسیم می‌کنیم: $\theta = ۴۰/۰\,\text{rev}$.

۹۱ در شکل ۱۰-۱۹ الف، چرخی به شعاع $۰/۲۰\,\text{m}$ بر روی یک محور افقی بی‌اصطکاک سوار شده است. لختی دورانی چرخ نسبت به محور $۰/۴۰\,\text{kg}\cdot\text{m}^۲$ است. ریسمان بی‌جرمی که به دور محیط چرخ پیچیده شده به جعبه‌ای به جرم $۶/۰\,\text{kg}$ وصل شده است. این دستگاه از حال سکون رها می‌شود. وقتی انرژی جنبشی جعبه $۶/۰\,\text{J}$ است، (الف) انرژی جنبشی دورانی چرخ و (ب) مسافتی که طی آن جعبه سقوط می‌کند، چقدر است؟

حل: در این‌جا از روش‌های انرژی استفاده می‌کنیم. بنابراین جهت‌ها اهمیتی ندارند.

(الف) رابطه‌ی تندی جعبه و تندی زاویه‌ای چرخ به صورت $v = R\omega$ است و انرژی جنبشی جعبه برابر است با

$$K_{\text{جعبه}} = \frac{۱}{۲}m_{\text{جعبه}}v^۲ \Rightarrow v = \sqrt{\frac{۲K_{\text{جعبه}}}{m_{\text{جعبه}}}} = ۱/۴۱\,\text{m/s}$$

در نتیجه تندی زاویه‌ای $\omega = ۱/۴۱/۰/۲۰ = ۰/۷۱\,\text{rad/s}$ به دست می‌آید. پس، انرژی جنبشی دورانی چرخ $\frac{۱}{۲}I\omega^۲ = ۱۰/۰\,\text{J}$ است.

(ب) چون جعبه از حال سکون (مکان مرجع برای انرژی پتانسیل) رها شده است، از اصل پایستگی انرژی داریم

$$K_۰ + U_۰ = K + U \Rightarrow ۰ + ۰ = (۶/۰ + ۱۰/۰) + m_{\text{جعبه}}\,g(-h)$$

در نتیجه $h = ۱۶/۰/۵۸/۸ = ۰/۲۷\,\text{m}$ به دست می‌آید.

۹۲ خورشید به اندازه‌ی $۲/۳\times۱۰^{۴}\,\text{ly}$ (ly نماد سال نوری است) از مرکز کهکشان راه شیری فاصله دارد و با تندی $۲۵۰\,\text{km/s}$ روی دایره‌ای به دور این مرکز حرکت می‌کند. (الف) چه مدت طول می‌کشد تا خورشید به دور مرکز کهکشان یک دور بچرخد؟ (ب) از حدود $۴/۵\times۱۰^{۹}$ سال پیش تاکنون، خورشید چند دور به دور این مرکز چرخیده است؟

حل: (الف) مدت زمان یک دور از تقسیم محیط مدار به تندی v خورشید به دست می‌آید: $T=۲\pi R/v$، که در آن R شعاع مدار است. یکای شعاع را به صورت زیر تبدیل می‌کنیم

$$R=(۲/۳\times۱۰^{۴}\,\text{ly})(۹/۴۶\times۱۰^{۱۲}\,\text{km/ly})=۲/۱۸\times۱۰^{۱۷}\,\text{km}$$

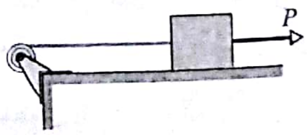
برای این تبدیل از پیوست ت کتاب درسی استفاده شده است. بنابراین داریم

$$T=\frac{۲\pi(۲/۱۸\times۱۰^{۱۷}\,\text{km})}{۲۵۰\,\text{km/s}}=۵/۵\times۱۰^{۱۵}\,\text{s}$$

(ب) تعداد دورها N، از تقسیم زمان کل t به مدت زمان یک دور به دست می‌آید: $N=t/T$. زمان کل را از سال به ثانیه تبدیل می‌کنیم و داریم

$$N=\frac{(۴/۵\times۱۰^{۹}\,\text{y})(۳/۱۶\times۱۰^{۷}\,\text{s/y})}{۵/۵\times۱۰^{۱۵}\,\text{s}}=۲۶$$

۹۳ چرخی به شعاع $۰/۲۰\,\text{m}$ روی محور افقی بی‌اصطکاکی سوار شده است. لختی دورانی چرخ نسبت به محور $۰/۰۵۰\,\text{kg}\cdot\text{m}^{۲}$ است. ریسمان بی‌جرمی که به دور چرخ پیچیده شده، به قطعه‌ای $۲/۰$ کیلوگرمی وصل شده است و این قطعه روی یک سطح افقی بی‌اصطکاک می‌لغزد. اگر یک نیروی افقی به بزرگی $P=۳/۰\,\text{N}$، مطابق شکل ۱۰-۵۶، به قطعه وارد شود، بزرگی شتاب زاویه‌ای چرخ چقدر است؟ فرض کنید ریسمان بر روی چرخ نمی‌لغزد.



شکل ۱۰-۵۶ مسئله‌ی ۹۳.

حل: نیروی اعمال شده‌ی P باعث می‌شود جسم شتاب پیدا کند. علاوه بر این، گشتاور نیرویی تولید می‌کند که باعث می‌شود چرخ دارای شتاب زاویه‌ای بشود. ما جهت مثبت برای جسم را به طرف راست و جهت منفی برای چرخ را در جهت ساعتگرد انتخاب می‌کنیم. با این قرارداد، جهت شتاب مماسی چرخ در خلاف جهت شتاب جسم (a) است؛ یعنی $a_t=-a$. با استفاده از قانون دوم نیوتون برای جسم داریم $P-T=ma$، که در آن T نیروی کشش ریسمان است. به طور مشابه، قانون دوم برای دوران چرخ را به صورت $-TR=I\alpha$ می‌نویسیم. می‌دانیم که $R\alpha=a_t=-a$. طرفین این رابطه را در R ضرب می‌کنیم:

$$-TR^{۲}=-I\alpha\Rightarrow T=a\frac{I}{R^{۲}}$$

این رابطه را با معادله‌ی بالا (برای جسم) جمع می‌کنیم تا $P=(m+I/R^{۲})a$ به دست آید. بنابراین شتاب زاویه‌ای برابر است با

$$\alpha=-\frac{a}{R}=-\frac{P}{(m+I/R^{۲})R}$$

به ازای $m=۲/۰\,\text{kg}$، $I=۰/۰۵۰\,\text{kg.m}^{۲}$، $P=۳/۰\,\text{N}$ و $R=۰/۲۰\,\text{m}$ داریم

$$\alpha=-\frac{P}{(m+I/R^{۲})R}$$
$$=-\frac{۳/۰\,\text{N}}{[۲/۰\,\text{kg}+(۰/۰۵۰\,\text{kg.m}^{۲})/(۰/۲۰\,\text{m})^{۲}](۰/۲۰\,\text{m})}$$
$$=-۴/۶\,\text{rad/s}^{۲}$$

یا $|\alpha|=۴/۶\,\text{rad/s}^{۲}$، علامت منفی α را نباید با شتاب کند کننده اشتباه کرد (این علامت جهت، حرکت چرخ در جهت ساعتگرد را نشان می‌دهد).

* ۹۴ اگر هواپیمایی با تندی $۴۸۰\,\text{km/h}$ نسبت به زمین پرواز کند و ملخ آن با سرعت $۲۰۰۰\,\text{rev/min}$ بچرخد، تندی خطی یک نقطه‌ی واقع بر نوک ملخ، در فاصله‌ی $۱/۵\,\text{m}$ از محور دوران، (الف) از دید خلبان و (ب) از دید ناظر روی زمین، چقدر است؟ سرعت هواپیما با محور دوران ملخ موازی است.

حل: ابتدا یکای سرعت زاویه‌ای را تبدیل می‌کنیم:

$$\omega=(۲۰۰۰\,\text{rev/min})(۲\pi/۶۰)=۲۰۹\,\text{rad/s}$$

همچنین، یکای تندی هواپیما را تبدیل می‌کنیم:

$$(۴۸۰)(۱۰۰۰/۳۶۰۰)=۱۳۳\,\text{m/s}$$

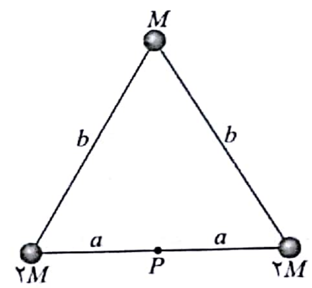
برای قسمت (الف) از معادله‌ی ۱۰-۱۸ و برای قسمت (ب) از معادله‌ی ۴-۳۹ (به طور ضمنی) استفاده می‌کنیم.

(الف) تندی نوک ملخ هواپیما از دید خلبان $v_t = \omega r = (209\,\text{rad/s})(1.5\,\text{m}) = 314\,\text{m/s}$ است که (چون شعاع فقط با دو رقم با معنی داده شده است) آن را به صورت $v_t = 3.1\times 10^2\,\text{m/s}$ می‌نویسیم.

(ب) سرعت هواپیما $\vec{v}_p$ و سرعت نوک ملخ $\vec{v}_t$ (در چارچوب هواپیما) در هرمکان ملخ، باید بریکدیگر عمود باشند. بنابراین، تندی خطی یک نقطه از نوک ملخ از دید ناظر روی زمین برابر است با

$$v = \sqrt{v_p^2 + v_t^2} = \sqrt{(133\,\text{m/s})^2 + (314\,\text{m/s})^2} = 3.4\times 10^2\,\text{m/s}$$

۹۵ جسم صُلب نشان داده شده در شکل ۱۰-۵۷، شامل سه ذره است که با میله‌های بی‌جرم به هم وصل شده‌اند. می‌خواهیم این جسم را به دور یک محور عمود بر صفحه‌ی آن و گذرنده از نقطه‌ی P بچرخانیم. به ازای $M = 0.40\,\text{kg}$، $a = 30\,\text{cm}$ و $b = 50\,\text{cm}$، چقدر کار لازم است انجام شود تا جسم از حال سکون به تندی زاویه‌ای $5.0\,\text{rad/s}$ برسد؟



شکل ۱۰-۵۷ مسئله‌ی ۹۵.

حل: فاصله‌ی ذره‌ها تا نقطه‌ی P عبارت‌اند از

$r_1 = a$ برای $m_1 = 2M$ (پایین ـ چپ)

$r_2 = \sqrt{b^2 - a^2}$ برای $m_2 = M$ (بالا)

$r_3 = a$ برای $m_1 = 2M$ (پایین ـ راست)

لختی دورانی دستگاه حول نقطه‌ی P برابر است با

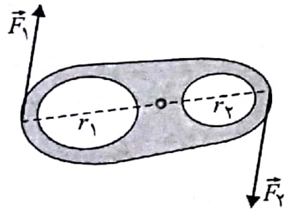
$$I = \sum_{i=1}^{3} m_i r_i^2 = (3a^2 + b^2)M$$

که به ازای $M = 0.40\,\text{kg}$، $a = 0.30\,\text{m}$، و $b = 0.50\,\text{m}$، مقدار $I = 0.208\,\text{kg.m}^2$ به دست می‌آید. با استفاده از معادله‌ی ۱۰-۵۲ داریم

$$W = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}(0.208\,\text{kg.m}^2)(5.0\,\text{rad/s})^2 = 2.6\,\text{J}$$

۹۶ ***مهندسی نوشابه‌ها.*** ساخت دَر قوطی نوشابه که با کشیدن حلقه‌ای باز می‌شود، پیشرفت بزرگی در طراحی مهندسی قوطی‌های نوشابه بوده است. تکیه‌گاه حلقه روی کشوی مرکزی دَر قوطی قرار دارد. وقتی یک‌سر حلقه را بالا می‌کشیم سر دیگر آن در محلی که روی دَر قوطی خط‌دار شده است به‌سمت پایین فشرده می‌شود. اگر حلقه را با نیروی $10\,\text{N}$ به‌طرف بالا بکشیم، بزرگی تقریبی نیروی وارد شده به قسمت خط‌دار شده چقدر است؟ (لازم است یک‌قوطی بازشونده با حلقه را آزمایش کنیم).

حل: در شکل زیر قسمت باز کننده‌ی در قوطی نوشابه نشان داده شده است. چون این قسمت نقطه‌ی اتکا دارد، وقتی یک انتهای آن با نیروی $\vec{F}_1$ به بالا کشیده می‌شود، نیروی $\vec{F}_2$ به انتهای دیگر آن وارد می‌شود. گشتاور نیروی تولید شده توسط $\vec{F}_1$ باید با گشتاور نیروی تولید شده با $\vec{F}_2$ برابر باشد تا در نچرخد.



رابطه‌ی این دو نیرو به صورت زیر است

$$r_1 F_1 = r_2 F_2$$

در این‌جا $r_1 \approx 1.8\,\text{cm}$ و $r_2 \approx 0.73\,\text{cm}$ است. بنابراین اگر $F_1 = 10\,\text{N}$ باشد، داریم

$$F_2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)F_1 \approx \left(\frac{1.8\,\text{cm}}{0.73\,\text{cm}}\right)(10\,\text{N}) \approx 25\,\text{N}$$

۹۷ شکل ۱۰-۵۸ یک پره‌ی ملخی را نشان می‌دهد، که با تندی $2000\,\text{rev/min}$ به دور یک محور عمودی گذرنده از نقطه‌ی B می‌چرخد. نقطه‌ی A در نوک بیرونی پره و در فاصله‌ی شعاعی $1.50\,\text{m}$ قرار دارد. (الف) اختلاف بین بزرگی‌های a شتاب مرکزگرای نقطه‌ی A و یک نقطه‌ی واقع در فاصله‌ی شعاعی $0.150\,\text{m}$ چقدر است؟ (ب) شیب نمودار تغییرات a برحسب فاصله‌ی شعاعی در طول پره را پیدا کنید.

شکل ۱۰-۵۸   مسئله‌ی ۹۷.

حل: شتاب مرکزگرا در نقطه‌ی P به فاصله‌ی r از محور دوران برابر است با $a = v^۲/r = \omega^۲ r$، که در آن $v = \omega r$ و $\omega = ۲۰۰۰ \text{rev/min} \approx ۲۰۹/۴ \text{rad/s}$ است.

(الف) اگر نقاط A و P در فاصله‌ی شعاعی $r_A = ۱/۵۰\text{m}$ و $r = ۰/۱۵۰\text{m}$ از محور قرار داشته باشند، اختلاف شتاب آن‌ها برابر است با

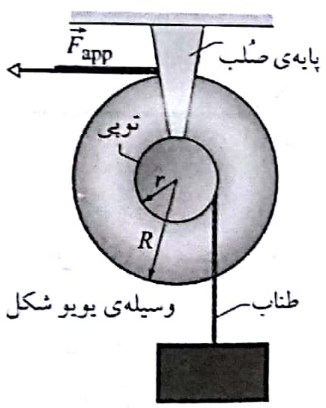
$$\Delta a = a_A - a = \omega^۲ (r_A - r)$$

$$= (۲۰۹/۴ \text{rad/s})^۲ (۱/۵۰\text{m} - ۰/۱۵۰\text{m}) \approx ۵/۹۲\times۱۰^۴ \text{m/s}^۲$$

(ب) شیب نمودار تغییرات a برحسب فاصله‌ی شعاعی برابراست با

$$a/r = \omega^۲ = ۴/۳۹\times۱۰^۴ /\text{s}^۲$$

۹۸ وسیله‌ای یویو شکل، که بر روی یک محور بی‌اصطکاک افقی سوار شده است، برای بلند کردن یک جعبه‌ی ۳۰ کیلوگرمی، مطابق شکل ۱۰-۵۹، به کار می‌رود. این وسیله دارای شعاع بیرونی $R = ۰/۵۰\text{m}$ و شعاع توپی $r = ۰/۲۰\text{m}$ است. هرگاه یک نیروی افقی ثابت $\vec{F}_{app}$ به بزرگی ۱۴۰N را به طناب پیچیده شده به دور قسمت بیرونی وسیله وارد کنیم، جعبه‌ی آویخته شده از طناب پیچیده شده به دور توپی دارای شتاب رو به بالای $۰/۸۰\text{m/s}^۲$ می‌شود. لختی دورانی این وسیله نسبت به محور دوران آن چقدر است؟



شکل ۱۰-۵۹   مسئله‌ی ۹۸.

حل: فرض‌کنید T نیروی کشش طناب است. ازقانون‌دوم نیوتون داریم

$$T - mg = ma \Rightarrow T = m(g + a)$$

چون جعبه دارای شتاب رو به بالای $a = ۰/۸۰\text{m/s}^۲$ است، نیروی کشش برابر است با

$$T = (۳۰\text{kg})(۹/۸\text{m/s}^۲ + ۰/۸\text{m/s}^۲) = ۳۱۸\text{N}$$

چرخش دستگاه با رابطه‌ی $F_{app}R - Tr = I\alpha = Ia/r$ توصیف می‌شود. گشتاور لختی را می‌توان به صورت زیر به دست آورد

$$I = \frac{r(F_{app}R - Tr)}{a}$$

$$= \frac{(۰/۲۰\text{m})[(۱۴۰\text{N})(۰/۵۰\text{m}) - (۳۱۸\text{N})(۰/۲۰\text{m})]}{۰/۸۰\text{m/s}^۲} = ۱/۶\text{kg.m}^۲$$

۹۹ گلوله‌ی کوچکی به جرم $۱/۳۰\text{kg}$ در یک سر میله‌ای به طول $۰/۷۸۰\text{m}$ و با جرم ناچیز قرار داده شده است. این دستگاه با تندی زاویه‌ای ۵۰۱۰rev/min در روی دایره‌ای افقی به دور سر دیگر میله می‌چرخد. (الف) لختی دورانی این دستگاه را نسبت به محور دوران حساب کنید. (ب) نیروی پسار هوا که برابر با $۲/۳۰\times۱۰^{-۲}\text{N}$ است، در خلاف جهت حرکت به گلوله وارد می‌شود. چه گشتاور نیرویی باید به دستگاه وارد شود تا آن را با تندی ثابت بچرخاند؟

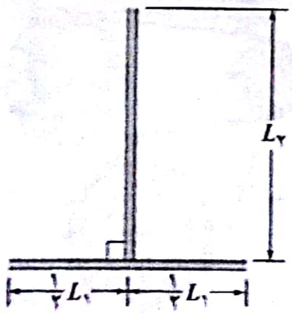
حل: (الف) به ازای $r = ۰/۷۸۰\text{m}$، لختی دورانی برابر است با

$$I = Mr^۲ = (۱/۳۰\text{kg})(۰/۷۸۰\text{m})^۲ = ۰/۷۹۱\text{kg.m}^۲$$

(ب) گشتاور نیرویی که باید اعمال شود تا اثر پس کشی (پسار) را خنثی کند، برابر است با

$$\tau = rf = (۰/۷۸۰\text{m})(۲/۳۰\times۱۰^{-۲}\text{N}) = ۱/۷۹\times۱۰^{-۲}\text{N.m}$$

۱۰۰ دو میله‌ی باریک (هر یک به جرم $۰/۲۰\text{kg}$) به هم وصل شده‌اند تا جسم صُلب نشان داده شده در شکل ۱۰-۵۶ را تشکیل دهند. طول یکی از میله‌ها $L_۱ = ۰/۴۰\text{m}$ و طول میله‌ی دیگر $L_۲ = ۰/۵۵\text{m}$ است. لختی دورانی این جسم صُلب



شکل ۱۰-۵۶   مسئله‌ی ۱۰۰.

نسبت به (الف) محور عمود بر صفحه‌ی شکل و گذرنده از مرکز میله‌ی کوتاه‌تر و (ب) محور عمود بر صفحه‌ی شکل و گذرنده از مرکز میله‌ی بلندتر، چیست؟

حل: از جدول ۱۰-۲ ث و همچنین قضیه‌ی محور موازی، یعنی معادله‌ی ۱۰-۳۴، استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم l (به عنوان پانویس) معرف میله‌ی بلند و s معرف میله‌ی کوتاه باشد.

(الف) لختی دورانی برابر است با

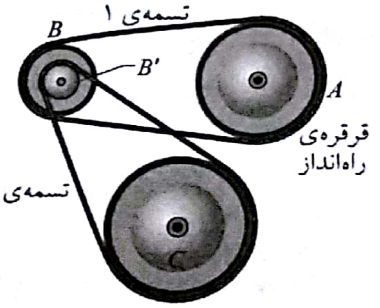
$$I = I_s + I_l = \frac{۱}{۱۲} m_s L_s^۲ + \frac{۱}{۳} m_l L_l^۲ = ۰/۰۲۳ \text{kg.m}^۲$$

(ب) می‌دانیم که مرکز میله‌ی کوتاه به فاصله‌ی $h = ۰/۲۷۵\text{ m}$ از محور قرار دارد. در نتیجه لختی دورانی آن برابر است با

$$I = I_s + I_l = \frac{۱}{۱۲} m_s L_s^۲ + m_s h^۲ + \frac{۱}{۱۲} m_l L_l^۲$$

که باز هم $I = ۰/۰۲۳\text{ kg.m}^۲$ به دست می‌آید که مانند پاسخ قسمت (الف) است.

۱۰۱ در شکل ۱۰-۶۱، چهار قرقره با دو تسمه به یکدیگر وصل شده‌اند. قرقره‌ی A (به شعاع ۱۵ cm) قرقره‌ی راه‌انداز است و با تندی زاویه‌ای ۱۰ rad/s می‌چرخد. قرقره‌ی B (به شعاع ۱۰ cm) با تسمه‌ی ۱ به قرقره‌ی A وصل شده است. قرقره‌ی B' (به شعاع ۵ cm) با قرقره‌ی B هم مرکز و به آن محکم وصل شده است. قرقره‌ی C (به شعاع ۲۵ cm) با تسمه‌ی ۲ به قرقره‌ی B' وصل شده است. مطلوب است محاسبه‌ی (الف) تندی خطی یک نقطه از تسمه‌ی ۱، (ب) تندی زاویه‌ای قرقره‌ی B، (پ) تندی زاویه‌ای قرقره‌ی B'، (ت) تندی خطی یک نقطه از تسمه‌ی ۲، و (ث) تندی زاویه‌ای قرقره‌ی C. (*راهنمایی:* اگر تسمه‌ی بین دو قرقره نلغزد، تندی‌های خطی در کناره‌های آن دو قرقره باید یکسان باشند).



شکل ۱۰-۶۱ مسئله‌ی ۱۰۱.

حل: (الف) تندی خطی یک نقطه از تسمه‌ی ۱ برابر است با

$$v_۱ = r_A \omega_A = (۱۵\text{cm})(۱۰\text{rad/s}) = ۱/۵ \times ۱۰^۲ \text{ cm/s}$$

(ب) تندی زاویه‌ای قرقره‌ی B برابر است با

$$r_B \omega_B = r_A \omega_A \Rightarrow \omega_B = \frac{r_A \omega_A}{r_B} = \left(\frac{۱۵\text{ cm}}{۱۰\text{ cm}}\right)(۱۰\text{ rad/s})$$
$$= ۱۵\text{ rad/s}$$

(پ) چون هر دو قرقره محکم به یکدیگر وصل شده‌اند، تندی زاویه‌ای قرقره‌ی B' با تندی زاویه‌ای قرقره‌ی B برابر است: $\omega'_B = ۱۵\text{ rad/s}$.

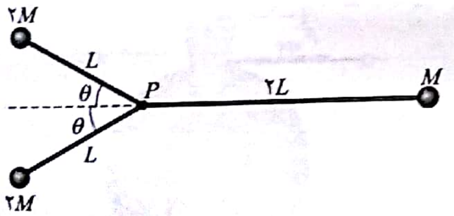
(ت) تندی خطی یک نقطه از تسمه‌ی ۲ برابر است با

$$v_۲ = r_B{'} \omega'_B = (۵\text{cm})(۱۵\text{rad/s}) = ۷۵\text{ cm/s}$$

(ث) تندی زاویه‌ای قرقره‌ی C برابر است با

$$r_C \omega_C = r_B{'} \omega'_B \Rightarrow \omega_C = \frac{r_B{'}\omega'_B}{r_C} = \left(\frac{۵\text{ cm}}{۲۵\text{ cm}}\right)(۱۵\text{ rad/s})$$
$$= ۳/۰\text{ rad/s}$$

۱۰۲ شیء صُلب نشان داده شده در شکل ۱۰-۶۲، شامل سه گلوله و سه میله‌ی اتصال با مشخصات $M = ۱/۶\text{ kg}$، $L = ۰/۶۰\text{ m}$ و $\theta = ۳۰^\circ$ است. گلوله‌ها را می‌توان به صورت ذره در نظر گرفت و جرم میله‌های اتصال ناچیز است. مطلوب است تعیین انرژی جنبشی دورانی جسم در هنگام دوران با تندی زاویه‌ای $۱/۲\text{ rad/s}$ به دور محور گذرنده از نقطه‌ی P، در حالت‌هایی که، (الف) محور عمود بر صفحه‌ی شکل، و (ب) محور عمود بر میله‌ی با طول $۲L$ و واقع در صفحه‌ی شکل، است.



شکل ۱۰-۶۲ مسئله‌ی ۱۰۲.

حل: (الف) لختی دورانی نسبت به محور تعیین شده برابر است با

$$I = \sum m_i r_i^۲ = (۲M)L^۲ + (۲M)L^۲ + M(۲L)^۲$$

که باید مساوی با $I = ۴/۶\text{ kg.m}^۲$ باشد. در نتیجه به ازای $\omega = ۱/۲\text{ rad/s}$، انرژی جنبشی از معادله‌ی ۱۰-۳۴ به دست می‌آید

$$K = \frac{۱}{۲} I \omega^۲ = ۳/۳\text{ J}$$

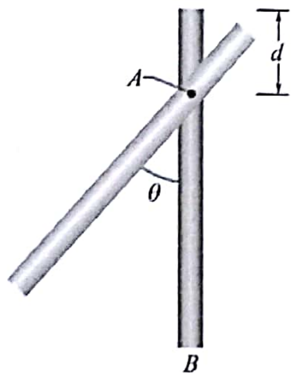
(ب) در این حالت، محور دوران به صورت محور y استاندارد که مبداء آن در P قرار دارد، ظاهر می‌شود. فاصله‌ی هر یک از گلوله‌های $۲M$ از آن محور $r = L\cos ۳۰^\circ$ است. بنابراین، لختی دورانی در این حالت برابر است با

$$I = \sum m_i r_i^۲ = (۲M)r^۲ + (۲M)r^۲ + M(۲L)^۲$$

که باید مساوی با $I = ۴{,}۰\,\mathrm{kg.m^۲}$ باشد. باز هم از معادله‌ی ۱۰-۳۴ انرژی جنبشی به صورت زیر به دست می‌آید

$$K = \frac{۱}{۲} I\omega^۲ = ۲{,}۹\,\mathrm{J}$$

۱۰۳ در شکل ۱۰-۶۳، میله‌ی یکنواخت باریکی (به جرم $۳{,}۰\,\mathrm{kg}$ و به طول $۴{,}۰\,\mathrm{m}$) آزادانه به دور محور افقی A می‌چرخد. محور A عمود بر میله و گذرنده از نقطه‌ای به فاصله‌ی $d = ۱{,}۰\,\mathrm{m}$ از انتهای میله است. انرژی جنبشی میله در هنگام عبور از مکان قائم $۲۰\,\mathrm{J}$ است. (الف) لختی دورانی میله نسبت به محور A چقدر است؟ (ب) تندی (خطی) نقطه‌ی B انتهای میله در هنگام عبور میله از مکان قائم چیست؟ (پ) میله به‌ازای چه زاویه‌ای از θ در هنگام تاب خوردن به بالا به طور لحظه‌ای متوقف می‌شود؟



شکل ۱۰-۶۳ مسئله‌ی ۱۰۳.

حل: از جدول ۱۰-۲ ث و قضیه‌ی محور موازی استفاده می‌کنیم.

(الف) گشتاور لختی برابر است با

$$I = \frac{۱}{۱۲} ML^۲ + Mh^۲$$

$$= \frac{۱}{۱۲}(۳{,}۰\,\mathrm{kg})(۴{,}۰\,\mathrm{m})^۲ + (۳{,}۰\,\mathrm{kg})(۱{,}۰\,\mathrm{m})^۲ = ۷{,}۰\,\mathrm{kg.m^۲}$$

(ب) انرژی جنبشی دورانی برابر است با

$$K_{rot} = \frac{۱}{۲} I\omega^۲ \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{۲K_{rot}}{I}} = \sqrt{\frac{۲(۲۰\,\mathrm{J})}{۷\,\mathrm{kg.m^۲}}} = ۲{,}۴\,\mathrm{rad/s}$$

تندی خطی انتهای B میله از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$v_B = \omega r_{AB} = (۲{,}۴\,\mathrm{rad/s})(۳{,}۰۰\,\mathrm{m}) = ۷{,}۲\,\mathrm{m/s}$$

که در آن r_{AB} فاصله‌ی بین نقاط A و B است.

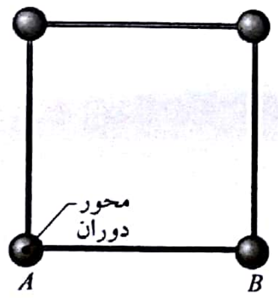
(پ) زاویه‌ی بیشینه‌ی θ موقعی حاصل می‌شود که همه‌ی انرژی جنبشی دورانی به انرژی پتانسیل تبدیل شود. با رفتن از مکان قائم $(\theta = ۰)$ به زاویه‌ی بیشینه‌ی θ، مرکز جرم به اندازه‌ی $\Delta y = d_{AC}(۱-\cos\theta)$ بالا می‌رود، که در آن $d_{AC} = ۱{,}۰۰\,\mathrm{m}$ فاصله‌ی بین A و مرکز جرم میله است. در نتیجه تغییر انرژی پتانسیل برابر است با

$$\Delta U = mg\Delta y = mgd_{AC}(۱-\cos\theta)$$

$$\Rightarrow ۲۰\,\mathrm{J} = (۳{,}۰\,\mathrm{kg})(۹{,}۸\,\mathrm{m/s^۲})(۱{,}۰\,\mathrm{m})(۱-\cos\theta)$$

که از آن‌جا $\cos\theta = ۰{,}۳۲$ یا $\theta \approx ۷۱^\circ$ به دست می‌آید.

۱۰۴ چهار ذره، هر یک به جرم $۰{,}۲۰\,\mathrm{kg}$، در گوشه‌های یک مربع به ضلع $۰{,}۵۰\,\mathrm{m}$ قرار دارند. این ذره‌ها با چهار میله به جرم ناچیز به یکدیگر وصل شده‌اند. جسم صُلب تشکیل شده می‌تواند در یک صفحه‌ی قائم به دور محور افقی A، گذرنده از یکی از ذره‌ها بچرخد. این جسم را در حالی که میله‌ی AB افقی است (شکل ۱۰-۶۴)، از حال سکون رها می‌کنیم. (الف) لختی دورانی جسم نسبت به محور A چیست؟ (ب) تندی زاویه‌ای جسم به دور محور A، در هنگامی که میله‌ی AB به حالت قائم قرار دارد، چقدر است؟



شکل ۱۰-۶۴ مسئله‌ی ۱۰۴.

حل: (الف) برای ذره‌ی واقع در نقطه‌ی A، نسبت به محور دوران، $r = ۰$ است. ذره‌ی B در فاصله‌ی $r = L = ۰{,}۵۰\,\mathrm{m}$ از محور قرار دارد؛ برای ذره‌ی واقع در بالای A نیز همین‌طور است. برای ذره‌ای که به طور قطری در روبه‌روی ذره‌ی A قرار دارد، فاصله تا

محور $r=\sqrt{۲}L=۰{,}۷\ \text{m}$ است. بنابراین داریم

$$I=\sum m_i r_i^{۲}=۲mL^{۲}+m(\sqrt{۲}L)^{۲}=۰{,}۲۴\ \text{kg.m}^{۲}$$

(ب) فرض کنید شکل (حول نقطه‌ی A) به اندازه‌ی ۹۰° در جهت ساعتگرد می‌چرخد و مرکز جرم به اندازه‌ی L سقوط می‌کند. اگـر مکان مرجع پتانسیل گرانشی، ارتفاع مرکز جرم در هنگام عبور AB از راستای قائم باشد، داریم

$$K_{\circ}+U_{\circ}=K+U\Rightarrow ۰+(۴m)gh_{\circ}=K+۰$$

چون $h_{\circ}=L=۰{,}۵۰\ \text{m}$، مقدار $K=۳{,}۹۲\ \text{J}$ به دست می‌آید. در نتیجه با استفاده از معادله‌ی ۱۰-۳۴ داریم

$$K=\frac{۱}{۲}I_A\omega^{۲}\Rightarrow\omega=۵{,}۷\ \text{rad/s}$$