۴ حرکت‌های دو بعدی و سه بعدی

پودمان ۴-۱ مکان و جابه‌جایی

* ۱ بردار مکان یک الکترون به صورت زیر است

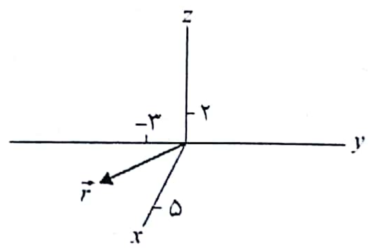
$$\vec{r} = (5{,}0\,\text{m})\,\hat{i} - (3{,}0\,\text{m})\,\hat{j} + (2{,}0\,\text{m})\,\hat{k}$$

(الف) بزرگی $\vec{r}$ را پیدا کنید. (ب) این بردار را در یک دستگاه مختصات راست ـ دست رسم کنید.

حل: (الف) بزرگی بردار $\vec{r}$ برابر است با

$$|\vec{r}| = \sqrt{(5{,}0\,\text{m})^2 + (-3{,}0\,\text{m})^2 + (2{,}0\,\text{m})^2} = 6{,}2\,\text{m}$$

(ب) بردار در شکل زیر رسم شده است. مقادیر مختصات برحسب متر هستند.



* ۲ مختصات مکان یک تخم هندوانه عبارت است از: $x = -5{,}0\,\text{m}$، $y = 8{,}0\,\text{m}$ و $z = 0\,\text{m}$. بردار مکان آن را (الف) با استفاده از نمادگذاری بردارهای یکه، و به صورت (ب) بزرگی، و (پ) زاویه نسبت به محور x مثبت، پیدا کنید. (ت) این بردار را در یک دستگاه مختصات راست ـ دست رسم کنید. اگر تخم به مکان با مختصات x، y و z ($3{,}00\,\text{m}$، $0\,\text{m}$ و $0\,\text{m}$) برود، جابه‌جایی آن را، (ث) با استفاده از نمادگذاری بردارهای یکه و به صورت (ج) بزرگی، و (چ) زاویه نسبت به محور x مثبت، پیدا کنید.

حل: (الف) بردار مکان بر طبق معادله‌ی ۴-۱ عبارت است از

$$\vec{r} = (-5{,}0\,\text{m})\,\hat{i} + (8{,}0\,\text{m})\,\hat{j}$$

(ب) بزرگی بردار مکان برابر است با

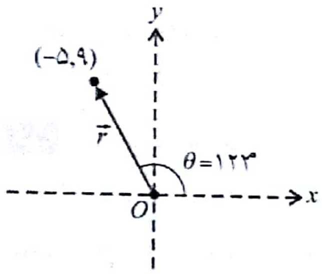
$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{(-5{,}0\,\text{m})^2 + (8{,}0\,\text{m})^2 + (0\,\text{m})^2} = 9{,}4\,\text{m}$$

(پ) بردار مکان در صفحه‌ی xy قرار دارد و با استفاده از معادله‌ی ۳-۶ داریم

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{8{,}0\,\text{m}}{-5{,}0\,\text{m}}\right) = -58^\circ \quad \text{یا} \quad 122^\circ$$

در اینجا زاویه‌ی 122° در جهت پادساعتگرد نسبت به محور x را می‌پذیریم، زیرا علامت مؤلفه‌ها نشان می‌دهد که بردار مکان در ربع دوم دستگاه مختصات قرار دارد.

(ت) نمودار در مقابل رسم شده است. بردار تحت زاویه‌ی 122° در جهت پادساعتگرد نسبت به محور $+x$ رسم شده است.



(ث) جابه‌جایی $\Delta\vec{r} = \vec{r}\,' - \vec{r}$ است که در آن $\vec{r}$ در قسمت (الف) داده شده و $\vec{r} = 3{,}0\,\hat{i}$ است. در نتیجه داریم $\Delta\vec{r} = (8{,}0\,\text{m})\,\hat{i} + (-8{,}0\,\text{m})\,\hat{j}$.

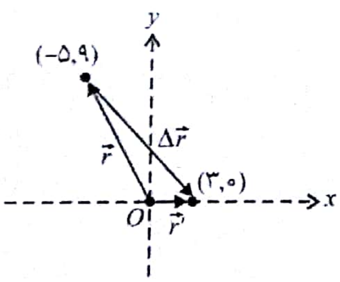
(ج) بزرگی بردار جابه‌جایی برابر است با

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(8{,}0\,\text{m})^2 + (-8{,}0\,\text{m})^2} = 11{,}3\,\text{m}$$

(چ) زاویه‌ی جابه‌جایی با استفاده از معادله‌ی ۳-۶ برابر است با

$$\tan^{-1}\left(\frac{8{,}0\,\text{m}}{-8{,}0\,\text{m}}\right) = -45^\circ \quad \text{یا} \quad 135^\circ$$

زاویه‌ی ۴۵- را می‌پذیریم (-45°، یا 45° در جهت ساعتگرد نسبت به $+x$) زیرا علامت مؤلفه‌ها نشان می‌دهد که بردار در ربع چهارم دستگاه مختصات قرار دارد. نمودار $\Delta\vec{r}$ را در زیر رسم کرده‌ایم.



* ۳ یک پوزیترون جابه‌جایی $\Delta\vec{r} = ۲/۰\hat{i} - ۳/۰\hat{j} + ۶/۰\hat{k}$ را انجام می‌دهد و بردار مکان پایانی آن برحسب متر به صورت $\vec{r} = ۳/۰\hat{j} - ۴/۰\hat{k}$ است. بردار مکان آغازی این پوزیترون چیست؟

حل: بردار مکان اولیه‌ی پوزیترون $\vec{r}_0$ در رابطه‌ی $\vec{r} - \vec{r}_0 = \Delta\vec{r}$ صدق می‌کند، در نتیجه داریم:

$$\vec{r}_0 = \vec{r} - \Delta\vec{r} = (۳/۰\hat{j} - ۴/۰\hat{k})\,m - (۲/۰\hat{i} - ۳/۰\hat{j} - ۶/۰\hat{k})\,m$$
$$= (-۲/۰\,m)\hat{i} + (-۶/۰\,m)\hat{j} + (-۱۰\,m)\hat{k}$$

** ۴ طول عقربه‌ی دقیقه‌شمار یک ساعت دیواری، از نوک تا محوری‌که به گرد آن می‌چرخد، ۱۰cm است. می‌خواهیم بزرگی و زاویه‌ی بردار جابه‌جایی نوک این عقربه را برای سه بازه‌ی زمانی معین کنیم. (الف) بزرگی و (ب) زاویه، از یک ربع تا نیم‌ساعت بعد، (پ) بزرگی و (ت) زاویه برای نیم‌ساعت بعدی، و (ث) بزرگی و (ج) زاویه برای یک‌ساعت پس از آن، چیست؟

حل: یک دستگاه مختصات را طوری انتخاب می‌کنیم که مبداء آن در مرکز ساعت و محور $+x$ آن به طرف راست (به طرف مکان ساعت «۳:۰۰») و محور $+y$ آن به طرف بالا (به طرف ساعت «۱۲:۰۰») باشد.

(الف) برحسب بردارهای یکه داریم $\vec{r}_1 = (۱۰\,cm)\hat{i}$ و $\vec{r}_2 = (-۱۰\,cm)\hat{j}$. در نتیجه از معادله‌ی ۴-۲ خواهیم داشت:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (-۱۰\,cm)\hat{i} + (-۱۰\,cm)\hat{j}$$

بزرگی این جابه‌جایی برابر است با

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(-۱۰\,cm)^۲ + (-۱۰\,cm)^۲} = ۱۴\,cm$$

(ب) زاویه با استفاده از معادله‌ی ۳-۶ به دست می‌آید:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-۱۰\,cm}{-۱۰\,cm}\right) = ۴۵° \quad \text{یا} \quad -۱۳۵°$$

ما زاویه‌ی $-۱۳۵°$ را انتخاب می‌کنیم زیرا زاویه‌ی خواسته شده در ربع سوم دستگاه مختصات قرار دارد.

برحسب نمادگذاری بزرگی ـ زاویه، داریم

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (-۱۰\,cm)\hat{i} + (-۱۰\,cm)\hat{j}$$

(پ) در حالت فعلی داریم: $\vec{r}_1 = (-۱۰\,cm)\hat{j}$ و $\vec{r}_2 = (۱۰\,cm)\hat{j}$، و $\Delta\vec{r} = (۲۰\,cm)\hat{j}$. در نتیجه بزرگی بردار جابه‌جایی $|\Delta\vec{r}| = ۲۰\,cm$ است.

(ت) زاویه با استفاده از معادله‌ی ۳-۶ به دست می‌آید:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{۲۰\,cm}{۰\,cm}\right) = ۹۰°$$

(ث) برای پیمایش یک ساعت کامل، عقربه به جای اولیه‌ی خود برمی‌گردد، و جابه‌جایی صفر است.

(ج) زاویه‌ی متناظر برای پیمایش یک ساعت کامل نیز صفر است.

پودمان ۴-۲ سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای

* ۵ قطاری به مدت ۴۰/۰ دقیقه با تندی ثابت $۶۰/۰\,km/h$ به سمت خاور، سپس به مدت ۲۰/۰ دقیقه در جهت ۵۰/۰ درجه‌ی خاور محور شمالی، و سرانجام، به مدت ۵۰/۰ دقیقه به سمت باختر می‌رود. (الف) سرعت متوسط قطار در این سفر چیست؟ (ب) زاویه‌ی جابه‌جایی کل نسبت به خاور چقدر است؟

حل: سرعت متوسط در این سفر از معادله‌ی ۴-۸، یعنی $\vec{v}_{avg} = \Delta\vec{r}/\Delta t$ به دست می‌آید، که در آن جابه‌جایی کل $\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_2 + \Delta\vec{r}_3$ با مجموع سه جابه‌جایی (که هر کدام از سرعت ثابت در یک زمان معین به دست آمده است) برابر است و $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3$ مقدار کل زمان مسافرت است. از دستگاه مختصاتی استفاده می‌کنیم که محور $+x$ آن به طرف خاور و محور $+y$ آن به طرف شمال است.

(الف) با استفاده از نمادگذاری بردارهای یکه، جابه‌جایی اول به‌صورت زیر به دست می‌آید

$$\Delta\vec{r}_1 = \left(۶۰/۰\,\frac{km}{h}\right)\left(\frac{۴۰/۰\,min}{۶۰\,min/h}\right)\hat{i} = (۴۰/۰\,km)\hat{i}$$

بزرگی جابه‌جایی دوم $\left(۶۰/۰\,\frac{km}{h}\right)\left(\frac{۲۰/۰\,min}{۶۰\,min/h}\right)\hat{i} = ۲۰/۰\,km$ و جهت آن تحت زاویه‌ی $۴۰°$ شمال خاوری است. بنابراین، داریم

$$\Delta\vec{r}_2 = (۲۰/۰\,km)\cos(۴۰/۰°)\,\hat{i} + (۲۰/۰\,km)\sin(۴۰/۰°)\,\hat{j}$$
$$= (۱۵/۳\,km)\hat{i} + (۱۲/۹\,km)\hat{j}$$

به طریق مشابه می‌توان جابه‌جایی سوم را به دست آورد:

$$\Delta\vec{r}_3 = -\left(۶۰/۰\,\frac{km}{h}\right)\left(\frac{۵۰/۰\,min}{۶۰\,min/h}\right)\hat{i} = (-۵۰/۰\,km)\hat{i}$$

بنابراین، جابه‌جایی کل برابر است با

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_2 + \Delta\vec{r}_3 = (۴۰/۰\,km)\hat{i} + (۱۵/۳\,km)\hat{i} + (۱۲/۹\,km)\hat{j} - (۵۰/۰\,km)\hat{i} = (۵/۳۰\,km)\hat{i} + (۱۲/۹\,km)\hat{j}$$

مدت زمان مسافرت $\Delta t = (۴۰/۰ + ۲۰/۰ + ۵۰/۰)\,min = ۱۱۰\,min$.

معادل $۱٫۸۳\,h$ است. پس، سرعت متوسط از معادله‌ی ۴ـ۸ به‌دست می‌آید.

$$\vec{v}_{avg} = \frac{(۵٫۳۰\,km)\,\hat{j} + (۱۲٫۹\,km)\,\hat{i}}{۱٫۸۳\,h}$$

$$= (۲٫۹۰\,km/h)\,\hat{i} + (۷٫۰۱\,km/h)\,\hat{j}$$

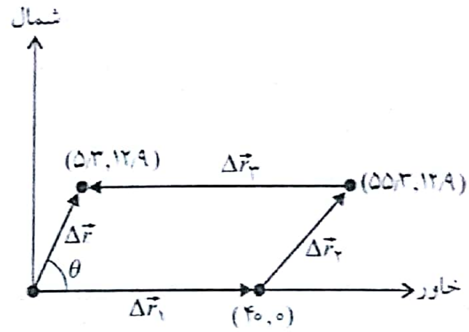
بزرگی $\vec{v}_{avg}$ برابر است با

$$|\vec{v}_{avg}| = \sqrt{(۲٫۹۰\,km/h)^۲ + (۷٫۰۱\,km/h)^۲} = ۷٫۵۹\,km/h$$

(ب) زاویه از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\theta = \tan^{-۱}\left(\frac{v_{avg,y}}{v_{avg,x}}\right) = \tan^{-۱}\left(\frac{۷٫۰۱\,km/h}{۲٫۹۰\,km/h}\right) = ۶۷٫۵^\circ \text{ (شمال باختر)}$$

یا تحت زاویه‌ی $۲۲٫۵^\circ$ باختر محور شمالی. نمودار جابه‌جایی قطار در شکل زیر رسم شده است.



توجه کنید که جابه‌جایی برایند $\Delta\vec{r}$ از مجموع بردارهای $\Delta\vec{r}_۱$، $\Delta\vec{r}_۲$ و $\Delta\vec{r}_۳$ به دست می‌آید.

* ۶ مکان الکترونی با بردار $\vec{r} = ۳٫۰۰t\,\hat{i} - ۴٫۰۰t^۲\,\hat{j} + ۲٫۰۰\,\hat{k}$ معین می‌شود، که در آن t برحسب ثانیه و $\vec{r}$ برحسب متر است. (الف) سرعت الکترون $\vec{v}(t)$، با استفاده از نمادگذاری بردارهای یکه چیست؟ به ازای $t = ۲٫۰۰\,s$، بردار سرعت $\vec{v}$، (ب) با نمادگذاری بردارهای یکه و به صورت (پ) بزرگی، و (ت) زاویه، نسبت به محور x مثبت، چیست؟

حل: برای تأکید روی این واقعیت که سرعت الکترون تابع زمان است، تابع $v(t)$ به صورت dx/dt تعریف می‌شود.

(الف) از معادله‌ی ۴ـ۱۰ داریم

$$v(t) = \frac{d}{dt}(۳٫۰۰t\,\hat{i} - ۴٫۰۰t^۲\,\hat{j} + ۲٫۰۰\,\hat{k})$$

$$= (۳٫۰۰\,m/s)\,\hat{i} - (۸٫۰۰t\,m/s)\,\hat{j}$$

(ب) این بردار به ازای $t = ۲\,s$ برابر است با

$$\vec{v} = (۳٫۰۰\,\hat{i} - ۱۶٫۰\,\hat{j})\,m/s$$

(پ) تندی الکترون در لحظه‌ی $t = ۲\,s$ برابر است با

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{(۳٫۰۰\,m/s)^۲ + (-۱۶٫۰\,m/s)^۲} = ۱۶٫۲\,m/s$$

(ت) زاویه‌ی بردار $\vec{v}$ در این لحظه برابر است با

$$\tan^{-۱}\left(\frac{-۱۶٫۰\,m/s}{۳٫۰۰\,m/s}\right) = -۸۶٫۴^\circ \text{ یا } ۹۳٫۶^\circ$$

زاویه‌ی اول را می‌پذیریم (زاویه‌ی $۸۶٫۴^\circ$ در جهت **ساعتگرد** نسبت به محور $+x$ یا $۲۷۳٫۶^\circ$ در جهت پادساعتگرد نسبت به محور $+x$ اندازه‌گیری می‌شود) زیرا علامت مؤلفه‌ها نشان می‌دهد که بردار در ربع چهارم دستگاه محورهای مختصات قرار دارد.

* ۷ بردار مکان یک یون به صورت $\vec{r} = ۵٫۰\,\hat{i} - ۶٫۰\,\hat{j} + ۲٫۰\,\hat{k}$ و ۱۰ ثانیه بعد به صورت $\vec{r} = -۲٫۰\,\hat{i} + ۸٫۰\,\hat{j} - ۲٫۰\,\hat{k}$، برحسب متر، است. سرعت متوسط یون، $\vec{v}_{avg}$ در مدت این ۱۰ ثانیه برحسب نمادگذاری بردارهای یکه چیست؟

حل: با استفاده از معادله‌ی ۴ـ۳ و معادله‌ی ۴ـ۸، داریم

$$\vec{v}_{avg} = \frac{(-۲٫۰\,\hat{i} + ۸٫۰\,\hat{j} - ۲٫۰\,\hat{k})\,m - (۵٫۰\,\hat{i} - ۶٫۰\,\hat{j} + ۲٫۰\,\hat{k})\,m}{۱۰\,s}$$

$$= (-۰٫۷۰\,\hat{i} + ۱٫۴۰\,\hat{j} - ۰٫۴۰\,\hat{k})\,m/s$$

** ۸ هواپیمایی از شهر A به سمت خاور پرواز می‌کند و پس از پیمودن مسافت $۴۸۳\,km$ در مدت ۴۵٫۰ دقیقه به شهر B می‌رسد و سپس از شهر B به سمت جنوب پرواز می‌کند و پس از پیمودن مسافت $۹۶۶\,km$ در مدت $۱٫۵۰\,h$ به شهر C وارد می‌شود. در کل مسافرت، (الف) بزرگی و (ب) جهت جابه‌جایی هواپیما، (پ) بزرگی و (ت) جهت سرعت متوسط هواپیما، و (ث) تندی متوسط هواپیما، چیست؟

حل: در دستگاه مختصات ما $\hat{i}$ در جهت خاور و $\hat{j}$ در جهت شمال است. جابه‌جایی اول مساوی با $\vec{r}_{AB} = (۴۸۳\,km)\,\hat{i}$ و جابه‌جایی دوم مساوی با $\vec{r}_{BC} = (-۹۶۶\,km)\,\hat{j}$ است.

(الف) جابه‌جایی برایند برابر است با

$$\vec{r}_{AC} = \vec{r}_{AB} + \vec{r}_{BC} = (۴۸۳\,km)\,\hat{i} - (۹۶۶\,km)\,\hat{j}$$

که از آنجا داریم

$$|\vec{r}_{AC}| = \sqrt{(۴۸۳\,km)^۲ + (-۹۶۶\,km)^۲} = ۱٫۰۸ \times ۱۰^۳\,km$$

(ب) زاویه‌ی جهت جابه‌جایی هواپیما برابر است با

$$\theta = \tan^{-۱}\left(\frac{-۹۶۶\,km}{۴۸۳\,km}\right) = -۶۳٫۴^\circ$$

مشاهده می‌کنیم که زاویه را می‌توان به صورت $۶۳{,}۴^\circ$ جنوب محور خاوری، یا $۲۶{,}۶^\circ$ خاور محور جنوبی بیان کرد.

(پ) از تقسیم بزرگی $\vec{r}_{AC}$ به زمان کل $(۲{,}۲۵\,\mathrm{h})$، داریم

$$\vec{v}_{avg}=\frac{(۴۸۳\,\mathrm{km})\hat{i}-(۹۶۶\,\mathrm{km})\hat{j}}{۲{,}۲۵\,\mathrm{h}}=(۲۱۵\,\mathrm{km/h})\hat{i}-(۴۲۹\,\mathrm{km/h})\hat{j}$$

در نتیجه مقدار سرعت متوسط برابر است با

$$|\vec{v}_{avg}|=\sqrt{(۲۱۵\,\mathrm{km/h})^۲+(-۴۲۹\,\mathrm{km/h})^۲}=۴۸۰\,\mathrm{km/h}$$

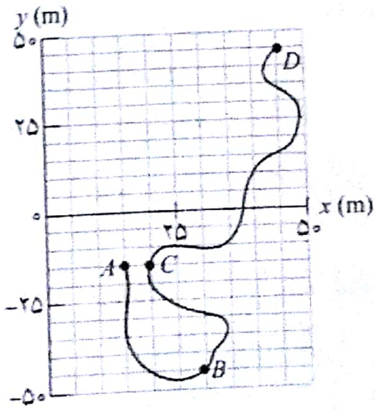
(ت) جهت سرعت متوسط $\vec{v}_{avg}$، $۲۶{,}۶^\circ$ خاور محور جنوبی [مانند قسمت (ب)] است. برحسب نمادگذاری بزرگی - زاویه می‌توان نوشت

$$\vec{v}_{avg}=(۴۸۰\,\mathrm{km/h}\angle -۶۳{,}۴^\circ)$$

(ث) با این فرض که مسیر AB به صورت یک خط راست است، مسیر BC نیز همین‌طور است و $|\vec{r}_{AB}|$ مسافت پیموده شده در سفر AB، و $|\vec{r}_{BC}|$ مسافت پیموده در سفر BC است. چون تندی متوسط از تقسیم مسافت کل به زمان کل به دست می‌آید، داریم

$$\frac{۴۸۳\,\mathrm{km}+۹۶۶\,\mathrm{km}}{۲{,}۲۵\,\mathrm{h}}=۶۴۴\,\mathrm{km/h}$$

** ۹ شکل ۴-۳۰، مسیر حرکت سنجابی را نشان می‌دهد که روی زمین تخت از نقطه‌ی A (در زمان $t=۰$) به سمت نقطه‌ی B (در زمان $t=۵{,}۰۰\,\mathrm{min}$)، سپس به نقطه‌ی C (در زمان $t=۱۰{,}۰\,\mathrm{min}$)، و سرانجام، به نقطه‌ی D (در زمان $t=۱۵{,}۰\,\mathrm{min}$) می‌رود. سرعت‌های متوسط سنجاب را از نقطه‌ی A تا هر یک از سه نقطه‌ی دیگر در نظر می‌گیریم. با استفاده از این سرعت‌ها (الف) بزرگی و (ب) زاویه‌ی مربوط به سرعت با کمترین بزرگی و (پ) بزرگی و (ت) زاویه‌ی مربوط به سرعت با بیشترین بزرگی را مشخص کنید.



شکل ۴-۳۰ مسئله‌ی ۹.

حل: مختصات (x,y) نقطه‌ها عبارت‌اند از: $A=(۱۵,-۱۵)$، $B=(۳۰,-۴۵)$، $C=(۲۰,-۱۵)$، و $D=(۴۵,۴۵)$. زمان‌های مربوط به این نقطه‌ها نیز عبارت‌اند از: $t_A=۰$، $t_B=۳۰۰\,\mathrm{s}$، $t_C=۶۰۰\,\mathrm{s}$، و $t_D=۹۰۰\,\mathrm{s}$. سرعت متوسط بر طبق معادله‌ی ۴-۸ تعریف می‌شود. هریک از جابه‌جایی‌های $\Delta\vec{r}$ ازمبداء شروع می‌شود.

(الف) سرعت متوسط با کمترین بزرگی $(۵{,}۰\,\mathrm{m}/۶۰۰\,\mathrm{s})$ مربوط به جابه‌جایی از مبداء تا نقطه‌ی C است: $|\vec{v}_{avg}|=۰{,}۰۰۸۳\,\mathrm{m/s}$.

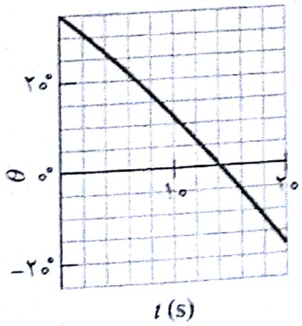
(ب) جهت $\vec{v}_{avg}$ تحت زاویه‌ی صفر (در جهت پادساعتگرد نسبت به محور $+x$) است.

(پ) سرعت متوسط با بیشترین بزرگی $(\sqrt{(۱۵\,\mathrm{m})^۲+(۳۰\,\mathrm{m})^۲}/۳۰۰\,\mathrm{s})$ مربوط به جابه‌جایی از مبداء تا نقطه‌ی B است:

$$|\vec{v}_{avg}|=۰{,}۱۱\,\mathrm{m/s}$$

(ت) زاویه‌ی مربوط به سرعت متوسط با بیشترین بزرگی ۲۹۷° (در جهت پادساعتگرد نسبت به محور $+x$) یا -۶۳° (که معادل زاویه‌ی ۶۳° در جهت ***ساعتگرد*** نسبت به محور $+x$) است.

*** ۱۰ بردار مکان $\vec{r}=۵{,}۰۰t\,\hat{i}+(et+ft^۲)\hat{j}$ محل یک ذره را به صورت تابعی از زمان t مشخص می‌کند. بزرگی بردار $\vec{r}$ برحسب متر و t برحسب ثانیه است و ضریب‌های e و f ثابت‌اند. شکل ۴-۳۱، تغییرات θ، زاویه‌ی جهت حرکت ذره را به‌صورت تابعی از t نشان می‌دهد (θ نسبت به محور x مثبت اندازه‌گیری شده است). مقادیر (الف) e و (ب) f را همراه با یکاهای آن‌ها معین کنید.



شکل ۴-۳۱ مسئله‌ی ۱۰.

حل: از رابطه‌ی $\vec{r}=۵{,}۰۰t\,\hat{i}+(et+ft^۲)\hat{j}$ مشتق می‌گیریم.

(الف) سرعت حرکت ذره از مشتق $\vec{r}$ به دست می‌آید:

$$\vec{v}=۵{,}۰۰\hat{i}+(e+۲ft)\hat{j}$$

زاویه‌ی جهت حرکت برابر است با

$$\theta = \tan^{-1}(v_y / v_x) = \tan^{-1}[(e + ۲ft)/۵٫۰۰]$$

نمودار نشان می‌دهد که $\theta_0 = ۳۵٫۰^\circ$ است، در نتیجه پارامتر e به صورت زیر به دست می‌آید

$$e = (۵٫۰۰\,m/s)\tan(۳۵٫۰^\circ) = ۳٫۵۰\,m/s$$

(ب) نمودار نشان می‌دهد که در لحظه‌ی $t = ۱۴٫۰s$، $\theta = ۰$ است. بنابراین، در آن لحظه $e + ۲ft = ۰$ است. از اینجا پارامتر f به‌دست می‌آید:

$$f = \frac{-e}{۲t} = \frac{-۳٫۵\,m/s}{۲(۱۴٫۰s)} = -۰٫۱۲۵\,m/s^۲$$

پودمان ۴-۳ شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای

* ۱۱ معادله‌ی مکان یک‌ذره $\vec r$، که درصفحه‌ی xy حرکت می‌کند، به‌صورت $\vec r = (۲٫۰۰t^۳ - ۵٫۰۰t)\hat i + (۶٫۰۰ - ۷٫۰t^۴)\hat j$، است که در آن بزرگی $\vec r$ برحسب متر و t برحسب ثانیه است. بردارهای (الف) $\vec r$، (ب) $\vec v$ و (پ) $\vec a$ را به ازای $t = ۲٫۰۰s$ برحسب نمادگذاری بردارهای یکه حساب کنید. (ت) زاویه‌ی بین محور مثبت x و خط مماس بر مسیر ذره در زمان $t = ۲٫۰۰s$ چیست؟

حل: در قسمت‌های (ب) و (پ) از معادله‌ی ۴-۱۰ و معادله‌ی ۴-۱۶ استفاده می‌کنیم. در قسمت (ت) جهت سرعت به دست آمده در قسمت (الف) را حساب می‌کنیم، که خط مماس بر مسیر ذره را نشان می‌دهد.

(الف) مقادیر داده شده را در رابطه‌ی ارائه شده قرار می‌دهیم:

$$\vec r\Big|_{t=۲٫۰۰} = [۲٫۰۰(۸) - ۵٫۰۰(۲)]\hat i + [۶٫۰۰ - ۷٫۰۰(۱۶)]\hat j = (۶٫۰۰\hat i - ۱۰۶\hat j)\,m$$

(ب) از رابطه‌ی داده شده مشتق می‌گیریم:

$$\vec v(t) = (۶٫۰۰t^۲ - ۵٫۰۰)\hat i - ۲۸٫۰t^۳\hat j$$

در اینجا $v(t)$ را نوشته‌ایم تا تأکید کنیم که سرعت وابسته به زمان است. در نتیجه در لحظه‌ی $t = ۲٫۰۰s$ داریم:

$$\vec v = (۱۹٫۰\hat i - ۲۲۴\hat j)\,m/s$$

(پ) از تابع $\vec v(t)$ به دست آمده نسبت به t مشتق می‌گیریم. در نتیجه رابطه‌ی شتاب به دست می‌آید که به ازای $t = ۲٫۰۰s$ داریم

$$\vec a = (۲۴٫۰\hat i - ۳۳۶\hat j)\,m/s^۲$$

(ت) زاویه‌ی بردار $\vec v$ نسبت به محور $+x$ برابر است با

$$\tan^{-1}\left(\frac{-۲۲۴\,m/s}{۱۹٫۰\,m/s}\right) = -۸۵٫۲^\circ \text{ یا } ۹۴٫۸^\circ$$

در اینجا زاویه‌ی اول ($-۸۵٫۲^\circ$ که معادل ۲۷۵° در جهت پادساعتگرد نسبت به محور $+x$) را انتخاب می‌کنیم، زیرا علامت مؤلفه‌ها نشان می‌دهند که بردار در ربع چهارم دستگاه محورهای مختصات قرار دارد.

* ۱۲ دوچرخه‌سواری در زمانی که به نقطه‌ای در فاصله‌ی ۳۰٫۰ متری خاور میله‌ی یک پرچم در بوستانی می‌رسد، با تندی ۱۰٫۰m/s به‌سمت جنوب درحال حرکت است. دوچرخه‌سوار ۳۰٫۰s بعد در نقطه‌ای به فاصله‌ی ۴۰٫۰m در شمال میله‌ی پرچم می‌رسد که با تندی ۱۰٫۰m/s به سوی خاور حرکت می‌کند. در این بازه‌ی زمانی ۳۰٫۰s، (الف) بزرگی و (ب) جهت جابه‌جایی دوچرخه‌سوار، (پ) بزرگی و (ت) جهت سرعت متوسط دوچرخه‌سوار، و (ث) بزرگی و (ج) جهت شتاب متوسط دوچرخه‌سوار، چیست؟

حل: یک دستگاه محورهای مختصات را طوری انتخاب می‌کنیم که $\hat i$ به طرف خاور و $\hat j$ به طرف شمال باشد؛ میله‌ی پرچم در مبداء مختصات قرار دارد. اطلاعات داده شده را به صورت زیر به نمادگذاری بردارهای یکه تبدیل می‌کنیم:

$$\vec r_0 = (۳۰٫۰m)\hat i \quad \text{و} \quad \vec v_0 = (-۱۰٫۰m/s)\hat j$$

$$\vec r = (۴۰٫۰m)\hat j \quad \text{و} \quad \vec v = (۱۰٫۰m/s)\hat i$$

(الف) جابه‌جایی $\Delta\vec r$ را با استفاده از معادله‌ی ۴-۲ به دست می‌آوریم:

$$\Delta\vec r = \vec r - \vec r_0 = (-۳۰٫۰m)\hat i + (۴۰٫۰m)\hat j$$

بزرگی این جابه‌جایی برابر است با

$$|\Delta\vec r| = \sqrt{(-۳۰٫۰m)^۲ + (۴۰٫۰m)^۲} = ۵۰٫۰m$$

(ب) جهت جابه‌جایی دوچرخه‌سوار، $\Delta\vec r$، به صورت زیر مشخص می‌شود

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{۴۰٫۰m}{-۳۰٫۰m}\right) = -۵۳٫۱^\circ \text{ یا } ۱۲۷^\circ$$

چون زاویه‌ی خواسته شده در ربع دوم دستگاه مختصات قرار دارد، زاویه‌ی ۱۲۷° (مساوی با ۵۳° شمال محور باختری) را انتخاب می‌کنیم. توجه کنید که این جابه‌جایی را می‌توان به صورت

$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_\circ = (50.0 \angle 127^\circ)$ برحسب نمادگذاری بزرگی - زاویه نوشت.

(پ) بزرگی $\vec{v}_{avg}$ از تقسیم بزرگی جابه‌جایی به زمان ($\Delta t = 30.0\,s$) به دست می‌آید. بنابراین، بزرگی سرعت متوسط برابر است با

$$(50.0\,m)/(30.0\,s) = 1.67\,m/s$$

(ت) معادله‌ی ۴-۸ نشان می‌دهد که $\vec{v}_{avg}$ با $\Delta\vec{r}$ هم‌جهت است، یعنی $\vec{v}_{avg}$ نیز در جهت 127° (53° شمال محور باختری) است.

(ث) با استفاده از معادله‌ی ۴-۱۵ داریم

$$\vec{a}_{avg} = \frac{v - v_\circ}{\Delta t} = (0.333\,m/s^2)\hat{i} + (0.333\,m/s^2)\hat{j}$$

بزرگی بردار شتاب متوسط برابر است با

$$|\vec{a}_{avg}| = \sqrt{(0.333\,m/s^2)^2 + (0.333\,m/s^2)^2} = 0.471\,m/s^2$$

(ج) جهت $\vec{a}_{avg}$ عبارت است از:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{0.333\,m/s^2}{0.333\,m/s^2}\right) = 45^\circ \text{ یا } -135^\circ$$

چون زاویه‌ی خواسته شده در ربع اول دستگاه محورهای مختصات قرار دارد، زاویه‌ی 45° را انتخاب می‌کنیم، و جهت $\vec{a}_{avg}$ به طرف شمال محور خاوری است.

* ۱۳ ذره‌ای طوری حرکت می‌کند که معادله‌ی مکان آن (برحسب متر) به صورت تابعی از زمان (برحسب ثانیه) به صورت $\vec{r} = \hat{i} + 4t^2\hat{j} + t\hat{k}$ است. معادله‌های (الف) سرعت، و (ب) شتاب ذره را، برحسب زمان، به دست آورید.

حل: چون بردار مکان $\vec{r}(t)$ معلوم است، سرعت و شتاب ذره را می‌توان با مشتق گرفتن نسبت به زمان، به دست آورد:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

(الف) مشتق بردار مکان $\vec{r}(t) = \hat{i} + (4t^2)\hat{j} + t\hat{k}$ نسبت به زمان (برحسب m/s) برابر است با

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(\hat{i} + 4t^2\hat{j} + t\hat{k}) = 8t\hat{j} + \hat{k}$$

(ب) مشتق رابطه‌ی سرعت نسبت به زمان (برحسب m/s^2) برابر است با

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(8t\hat{j} + \hat{k}) = 8\hat{j}$$

ذره با شتاب ثابت در جهت محور $+y$ حرکت می‌کند.

* ۱۴ پروتونی در آغاز دارای سرعت $\vec{v} = 4.0\hat{i} - 2.0\hat{j} + 3.0\hat{k}$ و ۴٫۰ ثانیه بعد دارای سرعت $\vec{v} = -2.0\hat{i} - 2.0\hat{j} + 5.0\hat{k}$ (بر حسب متر بر ثانیه) است. در مدت این ۴٫۰ ثانیه، (الف) شتاب متوسط پروتون $\vec{a}_{avg}$ با استفاده از نمادگذاری بردارهای یکه، (ب) بزرگی $\vec{a}_{avg}$، و (پ) زاویه‌ی میان $\vec{a}_{avg}$ و محور مثبت x، را به دست آورید.

حل: از معادله‌ی ۴-۱۵ استفاده می‌کنیم و $\vec{v}_1$ را سرعت آغازی و $\vec{v}_2$ را سرعت بعدی می‌نامیم.

(الف) شتاب متوسط پروتون در بازه‌ی زمانی $\Delta t = 4\,s$ برابر است با

$$\vec{a}_{avg} = \frac{(-2.0i - 2.0j + 5.0k)m/s - (4.0i - 22j + 3.0k)m/s}{4s}$$

$$= (-1.5\,m/s^2)\hat{i} + (0.5\,m/s^2)\hat{k}$$

(ب) بزرگی $\vec{a}_{avg}$ برابر است با

$$\sqrt{(-1.5\,m/s^2)^2 + (0.5\,m/s^2)^2} = 1.6\,m/s^2$$

(پ) زاویه‌ی شتاب در صفحه‌ی xz (نسبت به محور $+x$) برابر است با

$$\tan^{-1}\left(\frac{0.5\,m/s^2}{-1.5\,m/s^2}\right) = -18^\circ \text{ یا } 162^\circ$$

در اینجا زاویه‌ی 162° را انتخاب می‌کنیم، زیرا علامت مؤلفه‌ها نشان می‌دهند که بردار شتاب در ربع دوم دستگاه محورهای مختصات قرار دارد.

** ۱۵ ذره‌ای با سرعت آغازی $\vec{v} = (3.00\hat{i})m/s$ و شتاب ثابت $\vec{a} = (-1.00\hat{i} - 0.500\hat{j})m/s^2$ از مبداء مختصات شروع به حرکت می‌کند. ذره وقتی به مختصه‌ی x بیشینه می‌رسد، (الف) بردار سرعت و (ب) بردار مکان آن چیست؟

حل: چون شتاب $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} = (-1.0\,m/s^2)\hat{i} + (-0.50\,m/s^2)\hat{j}$ در هر دو جهت x و y ثابت است، می‌توانیم از جدول ۲-۱ برای حرکت در هر جهت استفاده کنیم. این کار را به طور مجزا یا با هم (برای x و y) می‌توان انجام داد (برای $\Delta\vec{r}$). ذره از مبداء شروع به حرکت می‌کند، لذا مختصات ذره در هر لحظه‌ی t از رابطه‌ی $\vec{r} = \vec{v}_\circ t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$ به دست می‌آید. سرعت ذره در هر لحظه‌ی t از رابطه‌ی $\vec{v} = \vec{v}_\circ + \vec{a}t$ به دست می‌آید که $v_\circ$ سرعت آغازی و $\vec{a}$ شتاب (ثابت) است. در راستای محور x داریم:

$$x(t) = v_{\circ x}t + \frac{1}{2}a_x t^2, \quad v_x(t) = v_{\circ x} + a_x t$$

به طور مشابه، برای راستای y می‌توان نوشت:

$$y(t) = v_{۰y} t + \frac{۱}{۲} a_y t^{۲} \,,\quad v_y(t) = v_{۰y} + a_y t$$

(الف) با داشتن $v_{۰x} = ۳٫۰\,\mathrm{m/s}$، $v_{۰y} = ۰$، $a_x = -۱٫۰\,\mathrm{m/s^{۲}}$ و $a_y = -۰٫۵\,\mathrm{m/s^{۲}}$، مؤلفه‌های سرعت به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$v_x(t) = v_{۰x} + a_x t = (۳٫۰\,\mathrm{m/s}) - (۱٫۰\,\mathrm{m/s^{۲}})t$$

$$v_y(t) = v_{۰y} + a_y t = -(۰٫۵۰\,\mathrm{m/s^{۲}})t$$

وقتی ذره در لحظه‌ی $t = t_m$ به مختصه‌ی x بیشینه‌ی خود می‌رسد، باید $v_x = ۰$ باشد. بنابراین، $۳٫۰ - ۱٫۰ t_m = ۰$ یا $t_m = ۳٫۰\,\mathrm{s}$. مؤلفه‌ی y سرعت در این لحظه برابر است با

$$v_y(t = ۳٫۰\,\mathrm{s}) = -(۰٫۵۰\,\mathrm{m/s^{۲}})(۳٫۰) = -۱٫۵\,\mathrm{m/s}$$

در نتیجه داریم $\vec{v}_m = (-۱٫۵\,\mathrm{m/s})\hat{j}$.

(ب) در لحظه‌ی $t = ۳٫۰\,\mathrm{s}$، مؤلفه‌های مکان عبارت‌اند از:

$$x(t = ۳٫۰\,\mathrm{s}) = v_{۰x} t + \frac{۱}{۲} a_x t^{۲}$$

$$= (۳٫۰\,\mathrm{m/s})(۳٫۰\,\mathrm{s}) + \frac{۱}{۲}(-۱٫۰\,\mathrm{m/s^{۲}})(۳٫۰\,\mathrm{s})^{۲} = ۴٫۵\,\mathrm{m}$$

$$y(t = ۳٫۰\,\mathrm{s}) = v_{۰y} t + \frac{۱}{۲} a_y t^{۲}$$

$$= ۰ + \frac{۱}{۲}(-۰٫۵\,\mathrm{m/s^{۲}})(۳٫۰\,\mathrm{s})^{۲} = -۲٫۲۵\,\mathrm{m}$$

با استفاده از نمادگذاری بردارهای یکه، نتایج را می‌توان به صورت $\vec{r}_m = (۴٫۵۰\,\mathrm{m})\hat{i} - (۲٫۲۵\,\mathrm{m})\hat{j}$ نوشت.

** ۱۶ بردار سرعت ذره‌ای که در صفحه‌ی xy حرکت می‌کند، به‌صورت $\vec{v} = (۶٫۰t - ۴٫۰t^{۲})\hat{i} + ۸٫۰\hat{j}$ است، که در آن $\vec{v}$ برحسب متر بر ثانیه و t (بزرگ‌تر از صفر) برحسب ثانیه است. (الف) شتاب ذره در زمان $t = ۳٫۰\,\mathrm{s}$ چیست؟ (ب) در چه زمانی (در صورت امکان) شتاب ذره صفر است؟ (پ) در چه زمانی (در صورت امکان) سرعت ذره صفر است؟ (ت) در چه زمانی (در صورت امکان) تندی ذره برابر با $۱۰\,\mathrm{m/s}$ است؟

حل: از معادله‌ی ۴-۱۶ استفاده می‌کنیم.

(الف) شتاب به‌صورت تابعی از زمان، در دستگاه SI، برابر است با

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}((۶٫۰t - ۴٫۰t^{۲})\hat{i} + ۸٫۰\hat{j}) = (۶٫۰ - ۸٫۰t)\hat{i}$$

بنابراین، بردار شتاب در زمان $t = ۳\,\mathrm{s}$ برابر است با

$$(۶٫۰ - ۸٫۰(۳))\hat{i} = (-۱۸\,\mathrm{m/s^{۲}})\hat{i}$$

(ب) معادله‌ی شتاب به صورت $\vec{a} = (۶٫۰ - ۸٫۰t)\hat{i} = ۰$ است؛ در نتیجه $t = ۰٫۷۵\,\mathrm{s}$ به دست می‌آید.

(پ) چون مؤلفه‌ی y سرعت، یعنی $v_y = ۸٫۰\,\mathrm{m/s}$ هرگز صفر نمی‌شود، سرعت نمی‌تواند صفر بشود.

(ت) چون تندی بزرگی سرعت است، داریم

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{(۶٫۰t - ۴٫۰t^{۲})^{۲} + (۸٫۰)^{۲}} = ۱۰$$

برای پیدا کردن t، ابتدا طرفین معادله‌ی بالا را به توان دو می‌رسانیم و نتیجه را به صورت زیر می‌نویسیم

$$(۶٫۰t - ۴٫۰t^{۲})^{۲} + ۶۴ = ۱۰۰ \Rightarrow (۶٫۰t - ۴٫۰t^{۲})^{۲} = ۳۶$$

از طرفین این رابطه جذر می‌گیریم:

$$۶٫۰t - ۴٫۰t^{۲} = \pm ۶٫۰ \Rightarrow ۴٫۰t^{۲} - ۶٫۰t \pm ۶٫۰ = ۰$$

بالاخره با استفاده از حل معادله‌ی درجه دوم، داریم

$$t = \frac{۶٫۰ \pm \sqrt{۳۶ - ۴(۴٫۰)(\pm ۶٫۰)}}{۲(۸٫۰)}$$

پاسخ واقعی باید مثبت باشد، لذا $t = ۲٫۲\,\mathrm{s}$ است.

** ۱۷ ارابه ای بر روی صفحه‌ی xy با شتابی با مؤلفه‌های $a_x = ۴٫۰\,\mathrm{m/s^{۲}}$ و $a_y = -۲٫۰\,\mathrm{m/s^{۲}}$ به پیش رانده می‌شود. مؤلفه‌های سرعت آغازی ارابه $v_{۰x} = ۸٫۰\,\mathrm{m/s}$ و $v_{۰y} = ۱۲\,\mathrm{m/s}$ هستند. سرعت ارابه درهنگام رسیدن به‌بیشترین مختصه‌ی y برحسب نمادگذاری بردارهای یکه چیست؟

حل: با استفاده از معادله‌ی ۲-۱۱ برای حرکت در راستای محور y (مقدار $v_y = ۰$ معرف $y = y_{\max}$ است) داریم

$$۰ = (۱۲\,\mathrm{m/s}) + (-۲٫۰\,\mathrm{m/s^{۲}})t \Rightarrow t = ۶٫۰\,\mathrm{s}$$

سپس برای به دست آوردن پاسخ، از معادله‌ی ۲-۱۱ برای حرکت در راستای محور x استفاده می‌کنیم:

$$v_x = (۸٫۰\,\mathrm{m/s}) + (۴٫۰\,\mathrm{m/s^{۲}})(۶٫۰\,\mathrm{s}) = ۳۲\,\mathrm{m/s}$$

بنابراین، سرعت ارابه در هنگام رسیدن به $y = y_{\max}$، برابر است با $(۳۲\,\mathrm{m/s})\hat{i}$.

** ۱۸ باد معتدلی بر روی صفحه‌ی افقی xy به سنگ‌ریزه‌ای شتاب $\vec{a} = (۵٫۰۰\,\mathrm{m/s^{۲}})\hat{i} + (۷٫۰۰\,\mathrm{m/s^{۲}})\hat{j}$ می‌دهد. در زمان

$t=۰$ سرعت سنگ‌ریزه $(۴٫۰۰\,m/s)\hat{i}$ است. هنگامی که سنگ‌ریزه به اندازه‌ی $۱۲٫۰\,m$ به موازات محور x جابه‌جا می‌شود، (الف) بزرگی و (ب) زاویه‌ی سرعت آن چیست؟

حل: مدت زمان t را از معادله‌ی $\Delta x = x_۰ + v_{۰x}t + \frac{۱}{۲}a_x t^۲$ به‌دست می‌آوریم

$$۱۲٫۰\,m = ۰ + (۴٫۰۰\,m/s)t + \frac{۱}{۲}(۵٫۰۰\,m/s^۲)t^۲$$

در اینجا از مقادیر $\Delta x = ۱۲٫۰\,m$، $v_x = ۴٫۰۰\,m/s$، و $a_x = ۵٫۰۰\,m/s^۲$ استفاده کرده‌ایم. از حل معادله‌ی درجه دوم بالا مقدار $t = ۱٫۵۳\,s$ به دست می‌آید. این مقدار را در معادله‌ی ۲-۱۱ قرار می‌دهیم تا سرعت باد (به ازای $\Delta x = ۱۲٫۰۰\,m$) به دست آید:

$$\vec{v} = \vec{v}_۰ + \vec{a}t = (۴٫۰۰\,m/s)\hat{i} + (۵٫۰۰\,m/s^۲)(۱٫۵۳\,s)\hat{i} + (۷٫۰۰\,m/s^۲)(۱٫۵۳\,s)\hat{j} = (۱۱٫۶۵\,m/s)\hat{i} + (۱۰٫۷\,m/s)\hat{j}$$

بنابراین، بزرگی سرعت باد برابر است با:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(۱۱٫۶۵\,m/s)^۲ + (۱۰٫۷\,m/s)^۲} = ۱۵٫۸\,m/s$$

(ب) زاویه‌ی سرعت باد نسبت به محور $+x$ برابر است با

$$\tan^{-۱}\left(\frac{۱۰٫۷\,m/s}{۱۱٫۶۵\,m/s}\right) = ۴۲٫۶°$$

*** **۱۹** شتاب ذره‌ای که فقط در صفحه‌ی افقی xy حرکت می‌کند $\vec{a} = ۳t\hat{i} + ۴t\hat{j}$ است، که در آن بزرگی $\vec{a}$ برحسب متر بر مجذور ثانیه و t برحسب ثانیه است. در زمان $t=۰$، بردار مکان $\vec{r} = (۲۰٫۰\,m)\hat{i} + (۴۰٫۰\,m)\hat{j}$ محل ذره را معین می‌کند و بردار سرعت ذره $\vec{v} = (۵٫۰۰\,m/s)\hat{i} + (۲٫۰۰\,m/s)\hat{j}$ است. در زمان $t = ۴٫۰۰\,s$، (الف) بردار مکان ذره برحسب نمادگذاری بردارهای یکه و (ب) زاویه‌ی میان راستای حرکت ذره و محور x مثبت، چیست؟

حل: از معادلات ۴-۱۶ و ۴-۱۰ استفاده می‌کنیم. با استفاده از معادله‌ی $a = ۳t\hat{i} + ۴t\hat{j}$ داریم:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_۰ + \int_۰^t \vec{a}\,dt = (۵٫۰۰\hat{i} + ۲٫۰۰\hat{j}) + \int_۰^t (۳t\hat{i} + ۴t\hat{j})dt$$
$$= (۵٫۰۰ + ۳t^۲/۲)\hat{i} + (۲٫۰۰ + ۲t^۲)\hat{j}$$

با انتگرال‌گیری از معادله‌ی ۴-۱۰ داریم

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_۰ + \int_۰^t \vec{v}\,dt = (۲۰٫۰\hat{i} + ۴۰٫۰\hat{j}) + \int_۰^t [(۵٫۰۰ + ۳t^۲/۲)\hat{i} + (۲٫۰۰ + ۲t^۲)\hat{j}]dt$$
$$= (۲۰٫۰\hat{i} + ۴۰٫۰\hat{j}) + (۵٫۰۰t + t^۳/۲)\hat{i} + (۲٫۰۰t + ۲t^۳/۳)\hat{j}$$
$$= (۲۰٫۰ + ۵٫۰۰t + t^۳/۲)\hat{i} + (۴۰٫۰ + ۲٫۰۰t + ۲t^۳/۳)\hat{j}$$

(الف) بردار مکان ذره در لحظه‌ی $t = ۴٫۰۰\,s$ برابر است با

$$\vec{r}(t = ۴٫۰۰\,s) = (۷۲٫۰\,m)\hat{i} + (۹۰٫۷\,m)\hat{j}$$

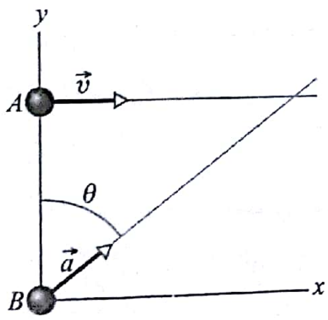
(ب) بردار سرعت ذره به صورت زیر است:

$$\vec{v}(t = ۴٫۰۰\,s) = (۲۹٫۰\,m/s)\hat{i} + (۳۴٫۰\,m/s)\hat{j}$$

پس، زاویه میان راستای حرکت و محور x مثبت، که در جهت پادساعتگرد اندازه‌گیری می‌شود، برابر است با

$$\theta = \tan^{-۱}[(۳۴٫۰\,m/s)/(۲۹٫۰\,m/s)] = ۴۹٫۵°$$

*** **۲۰** در شکل ۴-۳۲، ذره‌ی A با سرعت ثابت $\vec{v}$ به بزرگی $۳٫۰\,m/s$ به موازات محور x و در راستای خط $y = ۳۰\,m$ حرکت می‌کند. در لحظه‌ای که ذره‌ی A از محور y عبور می‌کند ذره‌ی B از مبداء مختصات با تندی آغازی صفر و با شتاب ثابت $\vec{a}$ به بزرگی $۰٫۴۰\,m/s^۲$ به حرکت در می‌آید. در هنگام برخورد دو ذره، θ زاویه‌ی میان $\vec{a}$ و محور مثبت y چیست؟



شکل ۴-۳۲ مسئله‌ی ۲۰.

حل: چون شتاب ثابت است لذا پیشنهاد می‌شود از جدول ۲-۱ (برای حرکت در هر دو راستای x و y) استفاده شود. در هر جایی که یکاها قید نشده‌اند، از یکاهای SI استفاده می‌شود. برای آن‌که ذرات A و B با هم برخورد بکنند، لازم است دو شرط برقرار شود. اولاً حرکت ذره‌ی B در راستای محور y (با استفاده از معادله‌ی ۲-۱۵ و اندازه‌گیری θ نسبت به محور y) باید بر طبق رابطه‌ی زیر صورت گیرد:

$$y = \frac{۱}{۲}a_y t^۲ \Rightarrow ۳۰\,m = \frac{۱}{۲}[(۰٫۴۰\,m/s^۲)\cos\theta]t^۲$$

ثانیاً مسافتی که ذرات A و B در راستای محور x طی می‌کنند باید با هم برابر باشند:

$$vt=\frac{۱}{۲}a_x t^۲ \Rightarrow (۳{,}۰\,m/s)t=\frac{۱}{۲}[(۰{,}۴۰\,m/s^۲)\sin\theta]t^۲$$

ضریب t را از طرفین رابطه‌ی بالا حذف و معادله را حل می‌کنیم:

$$t=\frac{۲v}{a_x}=\frac{۲(۳{,}۰\,m/s)}{(۰{,}۴۰\,m/s^۲)\sin\theta}$$

این مقدار را در معادله‌ی قبلی قرار می‌دهیم:

$$۳۰\,m=\frac{۱}{۲}[(۰{,}۴۰\,m/s^۲)\cos\theta]\left(\frac{۲(۳{,}۰\,m/s)}{(۰{,}۴۰\,m/s^۲)\sin\theta}\right)^۲$$

با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\sin^۲\theta=۱-\cos^۲\theta$ داریم

$$۳۰=\frac{۹{,}۰}{۰{,}۲۰}\frac{\cos\theta}{۱-\cos^۲\theta}\Rightarrow ۱-\cos^۲\theta=\frac{۹{,}۰}{(۰{,}۲۰)(۳۰)}\cos\theta$$

مقدار (مثبت) $\cos\theta$ را از این معادله‌ی درجه دوم به‌دست می‌آوریم:

$$\cos\theta=\frac{-۱{,}۵+\sqrt{۱{,}۵^۲-۴(۱{,}۰)(-۱{,}۰)}}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

پس، زاویه‌ی میان $\vec{a}$ و محور مثبت y برابر است با:

$$\theta=\cos^{-۱}(\frac{۱}{۲})=۶۰^\circ$$

پودمان ۴-۴ حرکت پرتابه‌ای

* ۲۱ یک نیزک با تندی آغازی $۱۰\,m/s$ به طور افقی به سمت نقطه‌ی P، مرکز دایره‌ی هدف واقع بر روی تخته‌ی نیزک، پرتاب می‌شود. نیزک پس از ۰٫۱۹ ثانیه، به نقطه‌ی Q واقع بر محیط دایره‌ی هدف و درست در زیر نقطه‌ی P برخورد می‌کند. (الف) فاصله‌ی PQ چقدر است؟ (ب) تخته‌ی نیزک در چه فاصله‌ای از نقطه‌ی رها شدن نیزک قرار دارد؟

حل: جهت مثبت را مطابق متن کتاب درسی انتخاب می‌کنیم، لذا معادلاتی مانند ۴-۲۲ را به همان صورت می‌توان به کار برد. سرعت آغازی افقی است، لذا داریم $v_{۰y}=۰$ و $v_{۰x}=v_۰=۱۰\,m/s$.

(الف) نقطه‌ی آغازی حرکت (محل جدا شدن نیزک از دست پرتاب کننده) را در مبداء محورهای مختصات انتخاب می‌کنیم، در نتیجه مختصه‌ی y نیزک از رابطه‌ی $y=-\frac{۱}{۲}gt^۲$ به دست می‌آید و داریم

$$y=-PQ\Rightarrow PQ=\frac{۱}{۲}(۹{,}۸\,m/s^۲)(۰{,}۱۹\,s)^۲=۰{,}۱۸\,m$$

(ب) فاصله‌ی تخته‌ی نیزک از نقطه‌ی رها شدنش برابر است با

$$x=v_۰t\Rightarrow x=(۱۰\,m/s)(۰{,}۱۹\,s)=۱{,}۹\,m$$

* ۲۲ گلوله‌ی کوچکی که بر روی یک‌میز افقی به ارتفاع $۱{,}۲۰\,m$ می‌غلتد، از لبه‌ی میز پایین می‌افتد و در فاصله‌ی افقی $۱{,}۵۲\,m$ از لبه به زمین برخورد می‌کند. (الف) گلوله چه مدت در هوا می‌ماند؟ (ب) تندی گلوله در لحظه‌ی جدا شدن از لبه‌ی میز چقدر است؟

حل: جهت مثبت را مطابق متن کتاب درسی انتخاب می‌کنیم، لذا مستقیماً می‌توان از معادله‌ی ۴-۲۲ استفاده کرد.

(الف) نقطه‌ی آغازی (لبه‌ی میز) را در مبداء محورهای مختصات انتخاب می‌کنیم، در نتیجه مختصه‌ی y گلوله از رابطه‌ی $y=-\frac{۱}{۲}gt^۲$ به دست می‌آید. اگر t مدت زمان پرواز گلوله در هوا و $y=-۱{,}۵۰\,m$ ارتفاع برخورد گلوله به زمین باشد، داریم

$$t=\sqrt{\frac{۲(-۱{,}۲۰\,m)}{-۹{,}۸۰\,m/s^۲}}=۰{,}۴۹\,s$$

(ب) سرعت آغازی گلوله $\vec{v}=v_۰\hat{i}$ است. چون $x=۱{,}۵۲\,m$ مختصه‌ی افقی نقطه‌ی برخورد با زمین است، داریم $x=v_۰t$. بنابراین، تندی گلوله در لحظه‌ی جدا شدن از لبه‌ی میز برابر است با

$$v_۰=\frac{x}{t}=\frac{۱{,}۵۲\,m}{۰{,}۴۹\,s}=۳{,}۱\,m/s$$

* ۲۳ گلوله‌ای از تفنگی که $۴۵{,}۰\,m$ بالاتر از زمین قرار دارد، با تندی آغازی $۲۵۰\,m/s$ به طور افقی شلیک می‌شود. این گلوله (الف) چه مدت در هوا می‌ماند؟ (ب) در چه فاصله‌ی افقی از نقطه‌ی شلیک شدن به زمین برخورد می‌کند؟ (پ) بزرگی و مؤلفه‌ی قائم سرعت گلوله در هنگام برخورد به زمین چیست؟

حل: (الف) مدت زمان پرواز گلوله در هوا از معادله‌ی ۴-۲۲ (به‌ازای $\theta_۰=۰$) به دست می‌آید:

$$t=\sqrt{\frac{۲h}{g}}=\sqrt{\frac{۲(۴۵{,}۰\,m)}{۹{,}۸۰\,m/s^۲}}=۳{,}۰۳\,s$$

(ب) فاصله‌ی افقی پیموده شده از معادله‌ی ۴-۲۱ به دست می‌آید:

$$\Delta x=v_۰t=(۲۵۰\,m/s)(۳{,}۰۳\,s)=۷۵۸\,m$$

(پ) بزرگی مؤلفه‌ی قائم سرعت گلوله در هنگام برخورد به زمین، از معادله‌ی ۴-۲۳ به دست می‌آید:

$$|v_y|=gt=(۹{,}۸۰\,m/s^۲)(۳{,}۰۳\,s)=۲۹{,}۷\,m/s$$

* ۲۴ در مسابقات جهانی دو و میدانی سال ۱۹۹۱/۱۳۷۰ در توکیو، مایک پاول در پرش طول $۸{,}۹۵\,m$ پرید و رکورد

۲۳ساله‌ی پرش طول متعلق به باب بیمون را به اندازه‌ی ۵ سانتی‌متر بهبود بخشید. فرض کنید سرعت پاول در لحظه‌ی بلند شدن از زمین $9{,}5\,m/s$ (در حدود سرعت قهرمانان دو سرعت) و در توکیو $g = 9{,}80\,m/s^2$ بوده است. برد افقی پاول نسبت به برد افقی بیشینه‌ی ذره‌ای که با همان سرعت پرتاب می‌شود، چقدر کمتر بوده است؟

حل: برای مقایسه با پرش طول مایک پاول، از معادله‌ی ۴-۲۶ استفاده می‌کنیم:

$$R_{max} = \left(\frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta_0\right)_{max} = \frac{v_0^2}{g} = \frac{(9{,}50\,m/s)^2}{9{,}80\,m/s^2}$$

$$= 9{,}209\,m \approx 9{,}21\,m$$

اختلاف پرش طول مایک پاول نسبت به R_{max} برابر است با

$$\Delta R = (9{,}21\,m - 8{,}95\,m) = 0{,}259\,m$$

* **۲۵** رکورد جهانی فعلی پرش با موتور سیکلت $77{,}0\,m$ و متعلق به جیسون رنی است. فرض کنید او شیب راهه‌ی خیزش را با زاویه‌ی ۱۲٫۰ درجه نسبت به راستای افقی ترک می‌کند و ارتفاع‌های خیزش و فرود یکسان‌اند. با چشم‌پوشی از نیروی پسار هوا تندی خیزش رنی را پیدا کنید.

حل: با توجه به معادله‌ی ۴-۲۶، تندی خیزش برابر است با

$$v_0 = \sqrt{\frac{gR}{\sin 2\theta_0}} = \sqrt{\frac{(9{,}80\,m/s^2)(77{,}0\,m)}{\sin 2(12{,}0^\circ)}} = 43{,}1\,m/s$$

* **۲۶** سنگی در مبداء زمان با سرعت آغازی $20{,}0\,m/s$ تحت زاویه‌ی ۴۰٫۰ درجه نسبت به راستای افقی پرتاب می‌شود. در زمان $t = 1{,}10\,s$، (الف) بزرگی مؤلفه‌ی افقی، و (ب) بزرگی مؤلفه‌ی قائم جابه‌جایی سنگ چقدر است؟ همین محاسبه‌ها را به ازای $t = 1{,}80\,s$، برای (پ) مؤلفه‌ی افقی، و (ت) مؤلفه‌ی قائم جابه‌جایی، و به ازای $t = 5{,}00\,s$، برای (ث) مؤلفه‌ی افقی، و (ج) مؤلفه‌ی قائم جابه‌جایی سنگ، انجام دهید.

حل: جهت حرکت را مطابق متن کتاب درسی انتخاب می‌کنیم تا بتوانیم مستقیماً از معادلاتی مانند ۴-۲۲ استفاده کنیم. مبداء مختصات را در نقطه‌ی پرتاب سنگ (مکان اولیه‌ی سنگ) در نظر می‌گیریم. مؤلفه‌ی x سرعت اولیه $v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$ و مؤلفه‌ی y آن $v_{0y} = v_0 \sin\theta_0$ است که در آن‌ها $v_0 = 20\,m/s$ تندی آغازی سنگ و $\theta_0 = 40{,}0^\circ$ زاویه‌ی پرتاب سنگ است.

(الف) در لحظه‌ی $t = 1{,}10\,s$، مختصه‌ی x برابر است با

$$x = v_0 t \cos\theta_0 = (20{,}0\,m/s)(1{,}10\,s)\cos 40{,}0^\circ = 16{,}9\,m$$

(ب) مختصه‌ی y سنگ در آن لحظه برابر است با

$$y = v_0 t \sin\theta_0 - \frac{1}{2}gt^2 = (20{,}0\,m/s)(1{,}10\,s)\sin 40{,}0^\circ - \frac{1}{2}(9{,}80\,m/s^2)(1{,}10\,s)^2 = 8{,}2\,m$$

(پ) در لحظه‌ی $t' = 1{,}80\,s$، مختصه‌ی x برابر است با

$$x = (20{,}0\,m/s)(1{,}80\,s)\cos 40{,}0^\circ = 27{,}6\,m$$

(ت) مختصه‌ی y سنگ در لحظه‌ی t' از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$y = (20{,}0\,m/s)(1{,}80s)\sin 40{,}0^\circ - \frac{1}{2}(9{,}80\,m/s^2)(1{,}80s^2)$$

$$= 7{,}26\,m$$

(ث) سنگ پیش از لحظه‌ی $t = 5{,}0\,s$ به زمین برخورد می‌کند. برای پیدا کردن زمان برخورد سنگ به زمین، t را از معادله‌ی $y = v_0 t \sin\theta_0 - \frac{1}{2}gt^2 = 0$ به دست می‌آوریم:

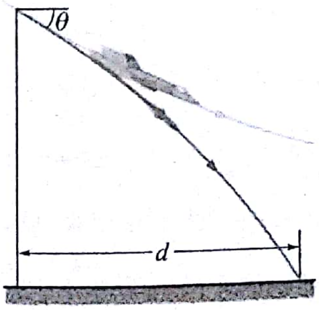
$$t = \frac{2v_0}{g}\sin\theta_0 = \frac{2(20{,}0\,m/s)}{9{,}8\,m/s^2}\sin 40^\circ = 2{,}62\,s$$

مختصه‌ی x سنگ در هنگام برخورد به زمین برابر است با

$$x = v_0 t \cos\theta_0 = (20{,}0\,m/s)(2{,}62\,s)\cos 40^\circ = 40\,m$$

(ج) با این فرض که سنگ در هنگام برخورد به زمین در همان نقطه می‌ماند، مؤلفه‌ی قائم در لحظه‌ی $t = 5{,}00\,s$ برابر است با $y = 0$.

** **۲۷** هواپیمایی با تندی $290{,}0\,km/h$ تحت زاویه‌ی $\theta = 30{,}0^\circ$ زیر راستای افقی شیرجه می‌رود و در همین حال خلبان یک تله‌ی راداری رها می‌کند (شکل ۴-۳۳). فاصله‌ی افقی میان نقطه‌ی رها شدن تله و محل برخورد آن به زمین $d = 700\,m$ است. این تله، (الف) چه مدت در هوا بوده است؟ (ب) از چه ارتفاعی رها شده است؟



شکل ۴-۳۳ مسئله‌ی ۲۷.

حل: جهت مثبت را مطابق متن کتاب درسی انتخاب می‌کنیم تا بتوانیم مستقیماً از معادله‌ی ۴-۲۲ استفاده کنیم. مبداء مختصات در سطح زمین و درست در زیر نقطه‌ی رها شدن تله قرار دارد. زاویه را $\theta_0 = -۳۰٫۰°$ انتخاب می‌کنیم زیرا زاویه‌ی نشان داده شده در شکل در جهت ساعتگرد نسبت به افق اندازه‌گیری شده است. می‌دانیم که تندی آغازی تله با تندی هواپیما در لحظه‌ی رها شدن برابر است، در نتیجه داریم

$$v_0 = ۲۹۰\ km/h = (۲۹۰)(۱۰۰۰/۳۶۰۰) = ۸۰٫۶\ m/s$$

(الف) برای تعیین زمان از معادله‌ی ۴-۱۲ استفاده می‌کنیم:

$$\Delta x = (v_0 \cos\theta_0)t \Rightarrow t = \frac{۷۰۰\ m}{(۸۰٫۶\ m/s)\cos(-۳۰٫۰°)} = ۱۰٫۰\ s$$

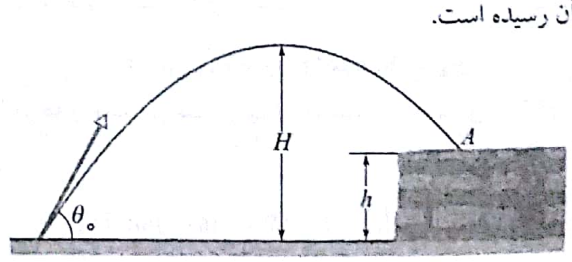
(ب) برای به دست آوردن ارتفاع اولیه‌ی y_0 از معادله‌ی ۴-۲۲ استفاده می‌کنیم:

$$y - y_0 = (v_0 \sin\theta_0)t - \frac{۱}{۲}gt^۲ \Rightarrow$$

$$۰ - y_0 = (-۴۰٫۳\ m/s)(۱۰٫۰\ s) - \frac{۱}{۲}(۹٫۸۰\ m/s^۲)(۱۰٫۰\ s)^۲$$

در نتیجه $y_0 = ۸۹۷\ m$ به دست می‌آید.

** ۲۸ در شکل ۴-۳۴، سنگی به سوی صخره‌ای به ارتفاع h با تندی آغازی $۴۲٫۰\ m/s$ تحت زاویه‌ی $\theta_0 = ۶۰٫۰°$ نسبت به راستای افقی پرتاب شده است. این سنگ $۵٫۵۰s$ پس از پرتاب به نقطه‌ی A برخورد می‌کند. مطلوب است تعیین (الف) ارتفاع صخره h، (ب) تندی سنگ درست پیش از برخورد به نقطه‌ی A، و (پ) ارتفاع بیشینه‌ی بالای زمین H، که سنگ به آن رسیده است.



شکل ۴-۳۴ مسئله‌ی ۲۸.

حل: (الف) با استفاده از دستگاه مختصات به کار رفته در معادله‌ی ۴-۲۲، به ازای $y = h$ داریم

$$h = y_0 + v_0 \sin\theta_0 t - \frac{۱}{۲}gt^۲$$

در نتیجه به ازای $y_0 = ۰$، $v_0 = ۴۲٫۰\ m/s$، $\theta_0 = ۶۰٫۰°$، $t = ۵٫۵۰s$، ارتفاع صخره مساوی با $h = ۵۱٫۸\ m$ به دست می‌آید.

(ب) حرکت افقی پایا است، لذا $v_x = v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$، اما مؤلفه‌ی قائم سرعت بر طبق معادله‌ی ۴-۲۳ تغییر می‌کند. بنابراین، تندی برخورد سنگ برابر است با

$$v = \sqrt{(v_0 \cos\theta_0)^۲ + (v_0 \sin\theta_0 - gt)^۲} = ۲۷٫۴\ m/s$$

(پ) از معادله‌ی ۴-۲۴ به‌ازای $v_y = ۰$ و $y = H$ استفاده می‌کنیم:

$$H = \frac{(v_0 \sin\theta_0)^۲}{۲g} = ۶۷٫۵\ m$$

** ۲۹ تندی پرتاب پرتابه‌ای پنج برابر تندی آن در ارتفاع بیشینه است. زاویه‌ی پرتاب θ را پیدا کنید.

حل: جهت مثبت را مطابق متن کتاب درسی انتخاب می‌کنیم، لذا از معادلاتی مانند ۴-۲۲ می‌توان مستقیماً استفاده کرد. مبداء مختصات در مکان آغازی پرتابه (محل پرتاب) قرار دارد. در ارتفاع بیشینه، $v_y = ۰$ و $v_x = v$ است (که مساوی با v_{0x} نیز هست). بنابراین، چون $v_0 = ۵v$. $v_0 \cos\theta_0 = v_{0x} = v$، لذا معادله‌ای حاصل می‌شود که θ_0 از آن به دست می‌آید:

$$(۵v)\cos\theta_0 = v \Rightarrow \theta_0 = \cos^{-1}(\frac{۱}{۵}) = ۷۸٫۵°$$

** ۳۰ یک بازیکن فوتبال از زمین با تندی آغازی $۱۹٫۵\ m/s$ تحت زاویه‌ی ۴۵ درجه به توپی ضربه می‌زند. در همان لحظه بازیکن دیگری از فاصله‌ی ۵۵ متری به سوی محل زدن توپ شروع به دویدن می‌کند تا به توپ برسد. تندی متوسط این بازیکن چقدر باید باشد تا بتواند درست پیش از برخورد توپ به زمین به آن برسد؟

حل: برای تعیین محل برخورد توپ به زمین، می‌توان از معادله‌ی ۴-۲۶ استفاده کرد، اما ما از معادلات ۴-۲۱ و ۴-۲۲ (برای توپ) استفاده می‌کنیم زیرا این معادله‌ها اطلاعاتی در مورد محل و زمان برخورد به دست می‌دهند و اساسی‌تر از معادله‌ی ۴-۲۶ هستند. به‌ازای $\Delta y = ۰$ داریم

$$\Delta y = (v_0 \sin\theta_0)t - \frac{۱}{۲}gt^۲ \Rightarrow$$

$$t = \frac{(۱۹٫۵\ m/s)\sin ۴۵٫۰°}{(۹٫۸۰\ m/s^۲)/۲} = ۲٫۸\ s$$

اکنون از معادلـه‌ی ۴-۲۱ داریـم: $\Delta x = (v_\circ \cos\theta_\circ)t = ۳۸/۶\ \mathrm{m}$. بنابراین با استفاده از معادله‌ی ۴-۸، سرعت متوسط بازیکن فوتبال باید برابر باشد با

$$\vec{v}_{\mathrm{avg}} = \frac{\Delta \vec{r}\,'}{\Delta t} = \frac{(۳۸/۶\ \mathrm{m})\hat{\mathrm{i}} - (۵۵\ \mathrm{m})\hat{\mathrm{i}}}{۲/۸\ \mathrm{s}} = (-۵/۹\ \mathrm{m/s})\hat{\mathrm{i}}$$

یعنی تندی متوسط او (با این شرط که فقط در یک جهت مـی‌دود)، $۵/۹\ \mathrm{m/s}$ است.

** ۳۱ یک بازیکن والیبال در حین زدن آبشار پرشی، تـوپ را از بالای سر به کف زمین مقابل مـی‌کوبـد. کنتـرل زاویـه‌ی آبشـار مشکل است. فـرض کنیـد تـوپی از ارتفـاع $۲/۳۰\ \mathrm{m}$ بـا تنـدی آغازی $۲۰/۰\ \mathrm{m/s}$ تحت زاویه‌ی $۱۸/۰۰^\circ$ زیـر راسـتای افقـی زده می‌شود. اگر زاویه‌ی زیر راستای افقی $۸/۰۰^\circ$ مـی‌بـود، ایـن توپ چقدر دورتر در زمین مقابل به زمین برخورد می‌کرد؟

حل: ابتدا مدت زمانی را پیدا می‌کنیم که طول می‌کشد تا تـوپ بـه زمین برخورد کند.

با استفاده از معادله‌ی ۴-۲۲ داریم

$$y - y_\circ = (v_\circ \sin\theta_\circ)t - \frac{۱}{۲}gt^۲ \Rightarrow$$

$$۰ - ۲/۳۰\ \mathrm{m} = (-۲۰/۰\ \mathrm{m/s})\sin(۱۸/۰^\circ)t - \frac{۱}{۲}(۹/۸۰\ \mathrm{m/s^۲})t^۲$$

که از آنجا $t = ۰/۳۰\ \mathrm{s}$ به دست می‌آید. بنـابراین، بـرد تـوپ برابـر است با

$$R = (v_\circ \cos\theta_\circ)t = (۲۰/۰\ \mathrm{m/s})\cos ۱۸/۰^\circ(۰/۳۰\ \mathrm{s}) = ۵/۷۱\ \mathrm{m}$$

از طرف دیگر، وقتی زاویه به مقدار $\theta'_\circ = ۸/۰۰^\circ$ تغییر می‌کنـد، بـا استفاده از همان روش قبلی داریم

$$y - y_\circ = (v_\circ \sin\theta'_\circ)t' - \frac{۱}{۲}gt'^۲ \Rightarrow$$

$$۰ - ۲/۳۰\ \mathrm{m} = (-۲۰/۰\ \mathrm{m/s})\sin(۸/۰۰^\circ)t' - \frac{۱}{۲}(۹/۸۰\ \mathrm{m/s^۲})t'^۲$$

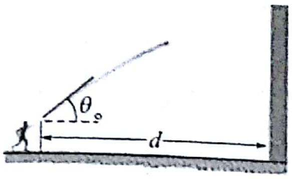
در نتیجه $t' = ۰/۴۶\ \mathrm{s}$ به دست می‌آید و برد توپ برابر است با

$$R' = (v_\circ \cos\theta_\circ)t' = (۲۰/۰\ \mathrm{m/s})\cos ۱۸/۰^\circ(۰/۴۶\ \mathrm{s}) = ۹/۰۶\ \mathrm{m}$$

بنابراین، توپ مسافت اضافی زیر را طی می‌کند

$$\Delta R = R' - R = ۹/۰۶\ \mathrm{m} - ۵/۷۱\ \mathrm{m} = ۳/۳۵\ \mathrm{m}$$

** ۳۲ توپی را با تندی $۲۵/۰\ \mathrm{m/s}$ تحت زاویـه‌ی $\theta_\circ = ۴۰/۰^\circ$ نسبت به راستای افقی به سوی دیواری پرتاب مـی‌کنـیم (شـکل ۴-۳۵). فاصله‌ی دیوار تا نقطه‌ی رها شدن تـوپ $d = ۲۲/۰\ \mathrm{m}$ است. (الف) توپ در چه فاصله‌ای بالاتر از نقطـه‌ی پرتـاب بـه دیوار برخورد می‌کند؟ (ب) مؤلفه‌ی افقی و (پ) مؤلفـه‌ی قـائم سرعت توپ در لحظه‌ی برخورد به دیوار چقدر است؟ (ت) آیا توپ هنگام برخورد به دیوار از بالاترین نقطه‌ی مسیر خود عبور کرده است؟



شکل ۴-۳۵ مسئله‌ی ۳۲.

حل: با انتخاب جهت مثبت مطـابق مـتن کتـاب درسـی، مـی‌تـوان مستقیماً از معادله‌ی ۴-۲۲ استفاده کرد. مبداء مختصـات در نقطـه‌ی پرتاب شدن توپ قرار دارد و $\theta_\circ$ زاویـه‌ی پرتـاب (مطـابق شـکل) است. چون مؤلفه‌ی افقی سرعت تـوپ $v_x = v_\circ \cos ۴۰/۰^\circ$ است، مدت زمانی که طول می‌کشد تا توپ به دیوار برخـورد کنـد، برابـر است با

$$t = \frac{\Delta x}{v_x} = \frac{۲۲/۰\ \mathrm{m}}{(۲۵/۰\ \mathrm{m/s})\cos ۴۰/۰^\circ} = ۱/۱۵\ \mathrm{s}$$

(الف) ارتفاع نقطه‌ی برخورد توپ برابر است با

$$\Delta y = (v_\circ \sin\theta_\circ)t - \frac{۱}{۲}gt^۲ = (۲۵/۰\ \mathrm{m/s})\sin ۴۰/۰^\circ(۱/۱۵\ \mathrm{s}) -$$

$$-\frac{۱}{۲}(۹/۸۰\ \mathrm{m/s^۲})(۱/۱۵\ \mathrm{s})^۲ = ۱۲/۰\ \mathrm{m}$$

(ب) مؤلفه‌ی افقی سرعت در هنگام برخورد توپ بـه دیـوار تغییـر نمی‌کند و همان مقدار آغازی است:

$$v_x = v_\circ \cos ۴۰/۰^\circ = ۱۹/۲\ \mathrm{m/s}$$

(پ) مؤلفه‌ی قائم سرعت توپ (با استفاده از معادله‌ی ۴-۲۳) برابـر است با

$$v_y = v_\circ \sin\theta_\circ - gt = (۲۵/۰\ \mathrm{m/s})\sin ۴۰/۰^\circ$$

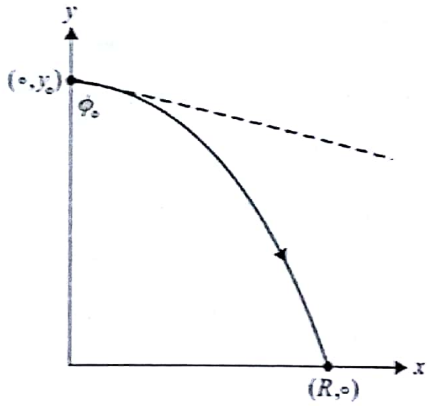
$$-(۹/۸۰\ \mathrm{m/s^۲})(۱/۱۵\ \mathrm{s}) = ۴/۸۰\ \mathrm{m/s}$$

(ت) وقتی توپ به دیوار برخورد می‌کند، $v_y > ۰$ است، لذا تـوپ از بالاترین نقطه‌ی مسیر خود عبور نکرده است.

** ۳۳ هواپیمایی که تحت زاویه‌ی $۵۳/۰^\circ$ درجه نسبت به خط قائم در حال شیرجه رفتن به پایین است، پرتابه‌ای را از ارتفاع

۷۳۰ متری رها می‌کند. پرتابه ۵/۰۰ ثانیه پس از رها شدن به زمین می‌خورد. (الف) تندی هواپیما چقدر بوده است؟ (ب) در این مدت پرتابه در راستای افقی چه مسافتی پیموده است؟ (پ) مؤلفه‌ی افقی و (ت) مؤلفه‌ی قائم سرعت پرتابه درست پیش از برخورد به زمین، چقدر است؟

حل: جهت مثبت را مطابق متن کتاب درسی انتخاب می‌کنیم تا بتوانیم مستقیماً از معادله‌ی ۴-۲۲ استفاده کنیم. مبداء مختصات را در سطح زمین و درست در زیر نقطه‌ی رها شدن پرتابه در نظر می‌گیریم. زاویه‌ی اندازه‌گیری شده نسبت به محور xهای مثبت، $\theta_0 = -۳۷/۰^\circ$ است زیرا زاویه‌ی $\phi_0 = ۵۳/۰^\circ$ داده شده در مسئله، نسبت به جهت $-y$ اندازه‌گیری شده است. وضعیت آغازی مسئله در شکل زیر نشان داده شده است.



(الف) تندی آغازی پرتابه همان تندی هواپیما در لحظه‌ی رها شدن پرتابه است. با توجه به مقادیر معلوم $y_0 = ۷۳۰\,m$ و $y = ۰$ در لحظه‌ی $t = ۵/۰۰\,s$، و با استفاده از معادله‌ی ۴-۲۲ برای پیدا کردن v_0، داریم

$$y - y_0 = (v_0 \sin\theta_0)t - \frac{۱}{۲}gt^۲ \Rightarrow$$

$$۰ - ۷۳۰\,m = v_0 \sin(-۳۷/۰^\circ)(۵/۰۰\,s) - \frac{۱}{۲}(۹/۸۰\,m/s^۲)(۵/۰۰\,s)^۲$$

در نتیجه $v_0 = ۲۰۲\,m/s$ به دست می‌آید.

(ب) مسافت افقی پیموده شده توسط پرتابه برابر است با

$$R = v_x t = (v_0 \cos\theta_0)t$$
$$= [(۲۰۲\,m/s)\cos(-۳۷/۰^\circ)](۵/۰۰\,s) = ۸۰۶\,m$$

(پ) مؤلفه‌ی x سرعت پرتابه (درست پیش از برخورد) برابر است با

$$v_x = v_0 \cos\theta_0 = (۲۰۲\,m/s)\cos(-۳۷/۰^\circ) = ۱۶۱\,m/s$$

(ت) مؤلفه‌ی y سرعت پرتابه (درست پیش از برخورد) برابر است با

$$v_y = v_0 \sin\theta_0 - gt = (۲۰۲\,m/s)\sin(-۳۷/۰^\circ) -$$
$$-(۹/۸۰\,m/s^۲)(۵/۰۰\,s) = -۱۷۱\,m/s$$

توجه کنید که در این مسئله سینماتیک در جهت‌های قائم و افقی را به طور مجزا تحلیل کردیم، زیرا اثری روی یکدیگر ندارند. مؤلفه‌ی x سرعت، $v_x = v_0 \cos\theta_0$، در سرتاسر حرکت بدون تغییر می‌ماند زیرا شتاب افقی وجود ندارد.

** ۳۴ منجنیق ماشین پرتاب کننده‌ای بود که برای حمله به دیوارهای یک دژ محاصره شده ساخته شده بود. این ماشین می‌توانست یک سنگ بزرگ به طرف دیواری پرتاب و بخشی از آن را ویران کند. منجنیق را در کنار دیوار قرار نمی‌دادند زیرا در آن صورت تیرهای پرتاب شده از دیوار دژ می‌توانستند به آن برخورد کنند. اما آن را طوری قرار می‌دادند که سنگ در نیمه‌ی دوم مسیر پروازش به دیوار دژ برخورد کند. فرض کنید سنگی با تندی $v_0 = ۲۸/۰\,m/s$ تحت زاویه‌ی $\theta_0 = ۴۰/۰^\circ$ پرتاب می‌شود. تندی برخورد این سنگ به دیوار (الف) درست در لحظه‌ی رسیدن به بالاترین ارتفاع مسیر سهمی شکلش و (ب) در لحظه‌ای که تا نصف این ارتفاع پایین آمده، چقدر است؟ (پ) تندی سنگ در قسمت (ب) نسبت به قسمت (الف) چند درصد بیشتر است؟

حل: (الف) چون مؤلفه‌ی y سنگ در بالاترین نقطه‌ی مسیر صفر است، تندی سنگ برابر است با

$$v = \sqrt{v_x^۲ + v_y^۲} = v_x = v_0 \cos\theta_0$$
$$= (۲۸/۰\,m/s)\cos ۴۰/۰^\circ = ۲۱/۴\,m/s$$

(ب) چون در ارتفاع بیشینه (y_{max})، $v_y = ۰$ است لذا مدت زمانی که طول می‌کشد تا سنگ به ارتفاع y_{max} برسد، از معادله‌ی ۴-۲۳ به دست می‌آید:

$$۰ = v_y = v_0 \sin\theta_0 - gt \Rightarrow t = \frac{v_0 \sin\theta_0}{g}$$

با جانشانی مقدار t در معادله‌ی ۴-۲۲، ارتفاع بیشینه به دست می‌آید:

$$y_{max} = (v_0 \sin\theta_0)t - \frac{۱}{۲}gt^۲ = v_0 \sin\theta_0\left(\frac{v_0 \sin\theta_0}{g}\right) -$$
$$-\frac{۱}{۲}g\left(\frac{v_0 \sin\theta_0}{g}\right)^۲ = \frac{v_0^۲ \sin^۲\theta_0}{۲g}$$

برای پیدا کردن مدت زمانی که طول می‌کشد تا سنگ به ارتفاع $y = y_{max}/۲$ برسد، معادله‌ی درجه دوم داده شده به صورت معادله‌ی ۴-۲۳ را حل کنیم:

$$y=\frac{۱}{۲}y_{max}=\frac{v_۰^۲\sin^۲\theta_۰}{۴g}=(v_۰\sin\theta_۰)t-\frac{۱}{۲}gt^۲$$

$$\Rightarrow t_\pm=\frac{(۲\pm\sqrt{۲})v_۰\sin\theta_۰}{۲g}$$

با انتخاب $t=t_+$ (برای پایین آمدن سنگ)، داریم

$$v_x=v_۰\cos\theta_۰=(۲۸٫۰\,m/s)\cos ۴۰٫۰^\circ=۲۱٫۴\,m/s$$

$$v_y=v_۰\sin\theta_۰-g\frac{(۲\pm\sqrt{۲})v_۰\sin\theta_۰}{۲g}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}v_۰\sin\theta_۰$$

$$=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}(۲۸٫۰\,m/s)\sin ۴۰٫۰^\circ=-۱۲٫۶\,m/s$$

بنابراین، تندی سنگ در هنگام رسیدن به ارتفاع $y=y_{max}/۲$، برابر است با

$$v=\sqrt{v_x^۲+v_y^۲}=\sqrt{(۲۱٫۴\,m/s)^۲+(-۱۲٫۶\,m/s)^۲}$$

$$=۲۴٫۸\,m/s$$

(پ) درصد اختلاف از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\frac{۲۴٫۸\,m/s-۲۱٫۴\,m/s}{۲۱٫۴\,m/s}=۰٫۱۶۱=۱۶\%$$

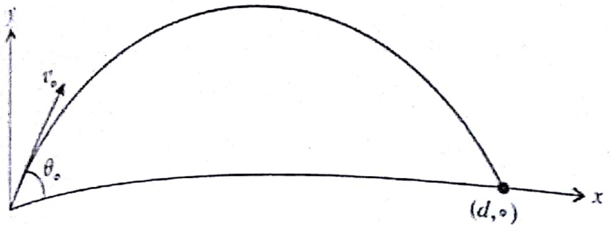
** ۳۵ تفنگی گلوله‌ای را با تندی $۴۶۰\,m/s$ به سوی هدفی واقع در فاصله‌ی ۴۵٫۷ متری نشانه‌گیری می‌کند. اگر مرکز هدف هم‌تراز با تفنگ باشد نوک لوله‌ی تفنگ با چه ارتفاعی نسبت به مرکز هدف باید نشانه‌گیری شود تا گلوله درست به مرکز هدف برخورد کند؟

حل: جهت مثبت حرکت را مطابق متن کتاب درسی انتخاب می‌کنیم تا بتوانیم مستقیماً از معادله‌ی ۴-۲۲ استفاده کنیم. مبداء مختصات را در انتهای لوله‌ی تفنگ (نقطه‌ی اولیه‌ی خروج گلوله برای انجام حرکت پرتابی) انتخاب می‌کنیم و فرض می‌کنیم $\theta_۰$ زاویه‌ی شلیک است. اگر هدف در فاصله‌ی d قرار داشته باشد، مختصات آن به صورت $x=d$ و $y=۰$ است. از معادلات حرکت پرتابی داریم

$$d=(v_۰\cos\theta_۰)t$$

$$۰=v_۰t\sin\theta_۰-\frac{۱}{۲}gt^۲$$

شکل مسئله به صورت بالا است.



مدت زمانی که طول می‌کشد تا گلوله به هدف برخورد کند $t=d/(v_۰\cos\theta_۰)$ است. با حذف کردن t داریم

$$۲v_۰^۲\sin\theta_۰\cos\theta_۰-gd=۰$$

با استفاده از اتحاد مثلثاتی ($\sin\theta_۰\cos\theta_۰=\frac{۱}{۲}\sin(۲\theta_۰)$) خواهیم داشت

$$v_۰^۲\sin(۲\theta_۰)=gd\Rightarrow\sin(۲\theta_۰)=\frac{gd}{v_۰^۲}=\frac{(۹٫۸۰\,m/s^۲)(۴۵٫۷\,m)}{(۴۶۰\,m/s)^۲}$$

که از آنجا $\sin(۲\theta_۰)=۲٫۱۱\times۱۰^{-۳}$ یا $\theta_۰=۰٫۰۶۰۶^\circ$ به دست می‌آید. اگر تفنگ به نقطه‌ای که به اندازه‌ی l بالاتر از هدف قرار دارد نشانه‌گیری شود، از رابطه‌ی $\tan\theta_۰=l/d$ خواهیم داشت

$$l=d\tan\theta_۰=(۴۵٫۷\,m)\tan(۰٫۰۶۰۶^\circ)=۰٫۰۴۸۴\,m$$

$$=۴٫۸۴\,cm$$

توجه کنید که به خاطر شتاب گرانشی رو به پایین، برای آن که گلوله به هدف برخورد کند باید تفنگ را به طرف نقطه‌ای (اندکی) بالاتر از هدف نشانه‌گیری کرد.

** ۳۶ تنیس بازی با راکت یک ضربه‌ی افقی در ارتفاع ۲٫۴۲ متری سطح زمین بازی به‌مرکزتوپ تنیس می‌زند و سرعت افقی $۲۳٫۶\,m/s$ را به توپ می‌دهد. تور در فاصله‌ی ۱۲ متری توپ قرار دارد و ارتفاع آن $۰٫۹۰\,m$ است. توپ هنگام رسیدن به تور، (الف) آیا از بالای آن عبور می‌کند؟ (ب) فاصله‌ی مرکز توپ تا لبه‌ی بالای تور چقدر است؟ اکنون، فرض کنیدضربه مانند پیش، اما تحت زاویه‌ی ۵٫۰۰ درجه زیر راستای افقی به توپ زده می‌شود. توپ هنگام رسیدن به تور، (پ) آیا از بالای آن عبور می‌کند؟ (ت) فاصله‌ی‌مرکز توپ تا لبه‌ی بالای تور چقدر است؟

حل: مستقیماً از معادله‌ی ۴-۲۲ استفاده می‌کنیم. مبداء مختصات در سطح زمین و درست در زیر نقطه‌ی برخورد راکت با توپ انتخاب می‌شود.

(الف) می‌خواهیم بدانیم که در نقطه‌ی $x=۱۲٫۰\,m$، ارتفاع توپ از بالای تور چقدر است. ابتدا زمان لازم برای عبور توپ از بالای تور

را از معادله‌ی ۴-۲۱ حساب می‌کنیم:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta_0} = \frac{۱۲/۰\,m}{(۲۳/۶\,m/s)\cos ۰°} = ۰/۵۰۸\,s$$

در این لحظه، توپ از ارتفاع

$$y = y_0 + (v_0 \sin\theta_0)t - \frac{۱}{۲}gt^۲ = ۱/۱۱\,m$$

عبور می‌کند که $۰/۹۰\,m$ بالاتر از تور است.

(ب) در لحظه‌ی $t = ۰/۵۰۸\,s$، فاصله‌ی مرکز توپ تا تور $(۱/۱۱\,m - ۰/۹۰\,m) = ۰/۲۱\,m$ است.

(پ) محاسبه قسمت (الف) را برای $\theta_0 = -۵/۰°$ تکرار می‌کنیم، که در نتیجه $t = ۰/۵۱۰\,s$ و $y = ۰/۰۹۷\,m$ به دست می‌آید، به روشنی نشان می‌دهد که توپ نمی‌تواند از بالای تور عبور کند.

(ت) در حالت مربوط به قسمت (پ)، فاصله‌ی بین لبه‌ی بالای تور و مرکز توپ در لحظه‌ی $t = ۰/۵۱۰\,s$ مساوی با $(۰/۹۰\,m - ۰/۰۹۷\,m) = ۰/۸۰\,m$ است.

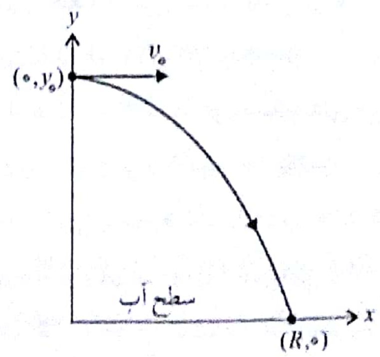
** ۳۷ شیرجه‌رویی از لبه‌ی سکوی شیرجه به ارتفاع $۱۰/۰\,m$ از سطح آب با تندی افقی $۲/۰۰\,m/s$ به پایین می‌پرد. (الف) شیرجه‌رو ۰/۸۰۰ ثانیه پس از پرش، در چه فاصله‌ی افقی از لبه‌ی سکوی شیرجه قرار دارد؟ (ب) در این لحظه فاصله‌ی قائم شیرجه‌رو از سطح آب چقدر است؟ (پ) شیرجه‌رو در چه فاصله‌ی افقی از لبه‌ی سکوی شیرجه به سطح آب برخورد می‌کند؟

حل: سرعت اولیه‌ی شیرجه‌رو مؤلفه‌ی قائم ندارد ($\theta_0 = ۰$)، بلکه فقط مؤلفه‌ی x دارد. معادلات ۴-۲۱ و ۴-۲۲ را می‌توان به صورت زیر ساده کرد:

$$x - x_0 = v_{0x} t$$

$$y - y_0 = v_{0y} t - \frac{۱}{۲}gt^۲ = -\frac{۱}{۲}gt^۲$$

در این معادله‌ها $x_0 = ۰$، $v_{0x} = v_0 = +۲/۰\,m/s$، و $y_0 = +۱۰/۰\,m$ است (سطح آب را در $y = ۰$ در نظر گرفته‌ایم). وضعیت مسئله در شکل زیر نشان داده شده است.



(الف) در لحظه‌ی $t = ۰/۸۰\,s$، فاصله‌ی افقی شیرجه‌رو از لبه‌ی سکو برابر است با

$$x = x_0 + v_{0x} t = ۰ + (۲/۰\,m/s)(۰/۸۰\,s) = ۱/۶۰\,m$$

(ب) به طور مشابه، با استفاده از معادله‌ی دوم برای حرکت قائم، داریم

$$y = y_0 - \frac{۱}{۲}gt^۲ = ۱۰/۰\,m - \frac{۱}{۲}(۹/۸۰\,m/s^۲)(۰/۸۰\,s)^۲ = ۶/۸۶\,m$$

(پ) در لحظه‌ای که شیرجه‌رو به سطح آب برخورد می‌کند، $y = ۰$ است. برای به دست آوردن t معادله‌ی $y = y_0 - \frac{۱}{۲}gt^۲ = ۰$ را حل می‌کنیم:

$$t = \sqrt{\frac{۲y_0}{g}} = \sqrt{\frac{۲(۱۰/۰\,m)}{۹/۸۰\,m/s^۲}} = ۱/۴۳\,s$$

در طول این مدت، جابه‌جایی x شیرجه‌رو برابر است با:

$$R = x = (۲/۰۰\,m/s)(۱/۴۳\,s) = ۲/۸۶\,m$$

توجه: با استفاده از معادله‌ی ۴-۲۵ به ازای $\theta_0 = ۰$، مسیر حرکت شیرجه‌رو به صورت زیر نوشته می‌شود

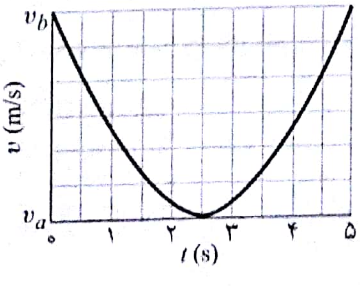
$$y = y_0 - \frac{gx^۲}{۲v_0^۲}$$

قسمت (پ) را با استفاده از این معادله نیز می‌توان حل کرد:

$$y = y_0 - \frac{gx^۲}{۲v_0^۲} = ۰ \Rightarrow x = R = \sqrt{\frac{۲v_0^۲ y_0}{g}}$$

$$= \sqrt{\frac{۲(۲/۰\,m/s)^۲(۱۰/۰\,m)}{۹/۸\,m/s^۲}} = ۲/۸۶\,m$$

** ۳۸ توپ گلفی را درنظربگیرید که از سطح زمین زده می‌شود. نمودار تندی توپ به صورت تابعی از زمان در شکل ۴-۳۶ نشان داده شده، که در آن $t = ۰$ زمان ضربه زدن به توپ است. مقیاس محور قائم شکل با $v_a = ۱۹\,m/s$ و $v_b = ۳۱\,m/s$



شکل ۴-۳۶ مسئله‌ی ۳۸.

مشخص شده است. (الف) توپ گلف پیش از برگشت به‌سطح زمین چه مسافتی را در راستای افقی می‌پیماید؟ (ب) ارتفاع بیشینه‌ای که توپ به آن می‌رسد چقدر است؟

حل: در این حرکت پرتابی، ثابت $= v_x = v_0$ و آنچه رسم شده، تابع $v=\sqrt{v_x^۲+v_y^۲}$ است. با توجه به نمودار معلوم می‌شود که در لحظه‌ی $t=۲/۵\,s$ گوی به ارتفاع بیشینه می‌رسد و در آنجا $v_y=۰$ و $v_x=۱۹\,m/s$ است.

(الف) در طول مدت $t=۵\,s$، مسافت افقی پیموده شده $x-x_0=v_x t=۹۵\,m$ است.

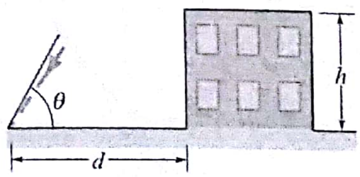
(ب) چون $\sqrt{(۱۹)^۲+v_{0y}^۲}=۳۱\,m/s$ است (اولین نقطه‌ی روی نمودار)، داریم $v_{0y}=۲۴/۵\,m/s$. پس، برای $t=۲/۵\,s$ می‌توانیم از رابطه‌ی $y_{max}-y_0=v_{0y}t-\frac{۱}{۲}gt^۲$ یا $v_y^۲=۰=v_{0y}^۲-۲g(y_{max}-y_0)$، $y_{max}-y_0=\frac{۱}{۲}(v_y+v_0)t$ استفاده کنیم. در اینجا ما از معادله‌ی آخری استفاده می‌کنیم:

$$y_{max}-y_0=\frac{۱}{۲}(v_y+v_{0y})t$$

$$\Rightarrow y_{max}=\frac{۱}{۲}(۰+۲۴/۵\,m/s)(۲/۵\,s)=۳۱\,m$$

در اینجا $y_0=۰$ را در سطح زمین در نظر گرفته‌ایم.

** ۳۹ در شکل ۴-۳۷، از لبه‌ی چپ پشت بام ساختمانی به ارتفاع h از سطح زمین، توپی به سمت چپ پرتاب شده است. این توپ پس از $۱/۵۰\,s$ در فاصله‌ی $d=۲۵/۰\,m$ از ساختمان و تحت زاویه‌ی $\theta=۶۰/۰^\circ$ نسبت به راستای افقی به زمین برخورد می‌کند. (الف) ارتفاع h را پیدا کنید. (*راهنمایی:* یک راه برای معکوس کردن حرکت، استفاده از یک دستگاه ویدئو است). (ب) بزرگی و (پ) زاویه‌ی سرعت پرتاب توپ نسبت به راستای افقی چقدر است؟ (ت) آیا این زاویه در بالای راستای افقی است یا در پایین راستای افقی؟



شکل ۴-۳۷ مسئله‌ی ۳۹.

حل: با توجه به راهنمایی، می‌توان مسئله را به این صورت در نظر گرفت که توپ از سطح زمین تحت زاویه‌ی ۶۰ در جهت پادساعتگرد نسبت به محور افقی به طرف راست پرتاب می‌شود. در این حالت بهتر است از دستگاه مختصات متعارف که جهت محور $+x$ به طرف راست است و زاویه‌های اندازه‌گیری شده در جهت پادساعتگرد مثبت هستند، استفاده کنیم.

(الف) از معادله‌ی مربوط به محور x (به ازای $x_0=۰$ و $x=۲۵/۰\,m$) داریم

$$۲۵/۰\,m=(v_0\cos ۶۰/۰^\circ)(۱/۵۰\,s)$$

در نتیجه $v_0=۳۳/۳\,m/s$ به دست می‌آید و در لحظه‌ی $t=۱/۵۰\,s$ به ازای $y_0=۰$ و $y=h>۰$، داریم $y-y_0=v_{0y}t-\frac{۱}{۲}gt^۲$، که در آن $v_{0y}=v_0\sin ۶۰/۰^\circ$ است. در نتیجه $h=۳۲/۳\,m$ به دست می‌آید.

(ب) برای پیدا کردن بزرگی سرعت پرتاب توپ داریم

$$v_x=v_{0x}=(۳۳/۳\,m/s)\cos ۶۰/۰^\circ=۱۶/۷\,m/s$$

$$v_y=v_{0y}-gt=$$

$$=(۳۳/۳\,m/s)\sin ۶۰/۰^\circ-(۹/۸۰\,m/s^۲)(۱/۵۰\,s)=۱۴/۲\,m/s$$

در نتیجه بزرگی $\vec{v}$ برابر است با

$$|\vec{v}|=\sqrt{v_x^۲+v_y^۲}=\sqrt{(۱۶/۷\,m/s)^۲+(۱۴/۲\,m/s)^۲}$$

$$=۲۱/۹\,m/s$$

(پ) زاویه‌ی سرعت پرتاب برابر است با

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{۱۴/۲\,m/s}{۱۶/۷\,m/s}\right)=۴۰/۴^\circ$$

(ت) این زاویه نشان می‌دهد که توپ با بزرگی سرعت $۲۱/۹\,m/s$ تحت زاویه‌ی $۴۰/۴^\circ$ (از لبه‌ی ساختمان به طرف چپ پرتاب می‌شود).

** ۴۰ در بازی گلف فرض کنید بازیکنی می‌تواند ضربه‌ای را در رده‌ی جهانی با تندی $v_0=۱۵/۰۰\,m/s$ و در ارتفاع $۲/۱۶۰\,m$ به توپ بزند. مسافتی که توپ در راستای افقی می‌پیماید به ازای زاویه‌ی پرتاب θ_0، برابر با (الف) ۴۵/۰۰ درجه و (ب) ۴۲/۰۰ درجه، چیست؟ این پاسخ‌ها نشان می‌دهند که در حرکت پرتابه‌ای در هنگام متفاوت بودن ارتفاع‌های پرتاب و فرود به ازای زاویه‌ی ۴۵ درجه برد بیشینه حاصل نمی‌شود.

حل: (الف) معادله‌ی درجه دوم ۴-۲۲ را حل می‌کنیم:

$$y - y_0 = (v_0 \sin\theta_0)t - \frac{1}{۲}gt^۲ \Rightarrow$$

$$۰ - ۲٫۱۶۰\,\mathrm{m} = (۱۵٫۰۰\,\mathrm{m/s})\sin(۴۵٫۰۰^\circ)t - \frac{۱}{۲}(۹٫۸۰۰\,\mathrm{m/s^۲})t^۲$$

از این معادله مدت زمان کل پرواز توپ در هوا مساوی با $t = ۲٫۳۵۲\,\mathrm{s}$ به دست می‌آید.

بنابراین، مسافت افقی پیموده شده برابر است با

$$R = (v_0\cos\theta_0)t = (۱۵٫۰۰\,\mathrm{m/s})\cos ۴۵٫۰۰^\circ(۲٫۳۵۲\,\mathrm{s}) = ۲۴٫۹۵\,\mathrm{m}$$

(ب) با استفاده از روش به کار رفته در قسمت (الف)، اما به ازای $\theta_0 = ۴۲٫۰۰^\circ$، داریم

$$y - y_0 = (v_0 \sin\theta_0)t - \frac{1}{۲}gt^۲ \Rightarrow$$

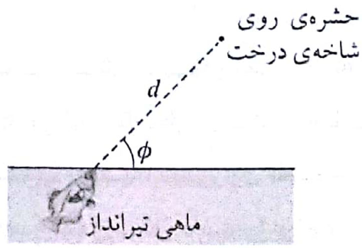
$$۰ - ۲٫۱۶۰\,\mathrm{m} = (۱۵٫۰۰\,\mathrm{m/s})\sin(۴۲٫۰۰^\circ)t - \frac{۱}{۲}(۹٫۸۰۰\,\mathrm{m/s^۲})t^۲$$

در نتیجه مدت زمان پرواز توپ $t = ۲٫۲۴۵\,\mathrm{s}$ به دست می‌آید.

پس، مسافتی که توپ می‌پیماید برابر است با

$$R = (v_0\cos\theta_0)t = (۱۵٫۰۰\,\mathrm{m/s})\cos ۴۲٫۰۰^\circ(۲٫۲۴۵\,\mathrm{s}) = ۲۵٫۰۲\,\mathrm{m}$$

** ۴۱ هنگامی که ماهی تیرانداز حشره‌ای را بر روی شاخه‌ی درخت آویخته شده‌ی در بالای آب می‌بیند، قطره‌های آب را به سویش پرتاب می‌کند تاحشره به درون آب بیفتد (شکل ۴-۳۸). اگرچه ماهی حشره را در امتداد یک خط راست تحت زاویه‌ی ϕ و فاصله‌ی d می‌بیند، باید قطره‌ی آب را تحت زاویه‌ی متفاوت θ_0 پرتاب کند تا مسیر سهمی شکل آن از مکان حشره‌ی واقع در روی شاخه بگذرد. به ازای $\phi = ۳۶٫۰^\circ$ و $d = ۰٫۹۰۰\,\mathrm{m}$، زاویه‌ی پرتاب θ_0 چقدر باید باشد تا قطره‌ی آب در بالاترین نقطه‌ی مسیر سهمی شکل به حشره برسد؟



شکل ۴-۳۸ مسئله‌ی ۴۱.

حل: ماهی را در مبداء مختصات در نظر می‌گیریم، در نتیجه مکان حشره با مختصات (x, y) مشخص می‌شود که $x = R/۲ = v_0^۲ \sin ۲\theta_0 / ۲g$، و y ارتفاع بیشینه‌ی مسیر سهمی، یعنی $y = y_{max} = v_0^۲ \sin^۲\theta_0 / ۲g$ است. با توجه به شکل داریم

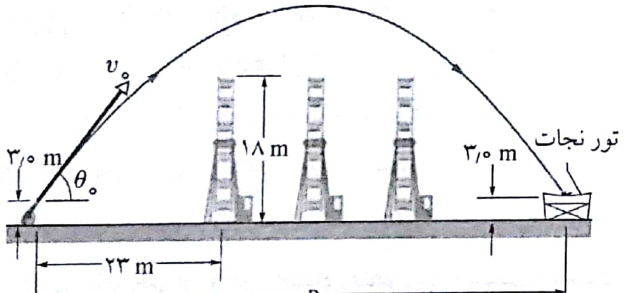
$$\tan\phi = \frac{y}{x} = \frac{v_0^۲ \sin^۲\theta_0 / ۲g}{v_0^۲ \sin ۲\theta_0 / ۲g} = \frac{۱}{۲}\tan\theta_0$$

به ازای زاویه‌ی معلوم $\phi = ۳۶٫۰^\circ$، زاویه‌ی پرتاب تیر به دست می‌آید:

$$\theta_0 = \tan^{-1}(۲\tan\phi) = \tan^{-1}(۲\tan ۳۶٫۰^\circ)$$
$$= \tan^{-1}(۱٫۴۵۳) = ۵۵٫۴۶^\circ \approx ۵۵٫۵^\circ$$

توجه کنید که θ_0 فقط به ϕ بستگی دارد و مستقل از d است.

** ۴۲ در سال ۱۹۳۹ یا سال ۱۹۴۰، امانوئل زاکینی به صورت یک گلوله‌ی توپ انسانی عمل کرد: او پس از شلیک شدن از یک توپ از فراز سه چرخ فلک عبور کرد و روی یک تور نجات افتاد (شکل ۴-۳۹). فرض کنید او با تندی $۲۶٫۵\,\mathrm{m/s}$ و تحت زاویه‌ی ۵۳٫۰ درجه پرتاب شده باشد. (الف) با در نظر گرفتن زاکینی به‌صورت یک ذره ارتفاع عبور او از بالای چرخ فلک اول را حساب کنید. (ب) اگر او در بالای چرخ فلک میانی به ارتفاع بیشینه رسیده باشد، با چه فاصله‌ای از بالای آن عبور کرده است؟ (پ) مرکز تور نجات در چه فاصله‌ای از توپ قرار داشته است (از نیروی پسار هوا چشم‌پوشی می‌شود)؟



شکل ۴-۳۹ مسئله‌ی ۴۲.

حل: (الف) چون شخص (به عنوان پرتابه) در بالای چرخ فلک میانی به ارتفاع بیشینه می‌رسد، پس $x = ۲۳\,\mathrm{m} + (۲۳/۲)\,\mathrm{m} = ۳۴٫۵\,\mathrm{m}$ و تندی پرتاب اولیه را از معادله‌ی ۴-۲۶ به دست می‌آوریم:

$$x = \frac{R}{۲} = \frac{v_0^۲ \sin ۲\theta_0}{۲g} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{۲gx}{\sin ۲\theta_0}}$$

$$= \sqrt{\frac{۲(۹٫۸\,\mathrm{m/s^۲})(۳۴٫۵\,\mathrm{m})}{\sin(۲٫۵۳^\circ)}} = ۲۶٫۵\,\mathrm{m/s}$$

با قرار دادن این مقدار x در معادله‌ی ۴-۲۵، داریم

$$y = y_0 + x\tan\theta_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta_0}$$

$$= ۳/۰\,m + (۲۳\,m)\tan ۵۳° - \frac{(۹/۸\,m/s^2)(۲۳\,m)^2}{۲(۲۶/۵\,m/s)^2(\cos ۵۳°)^2} = ۲۳/۳\,m$$

چون ارتفاع چرخ فلک $h_w = ۱۸\,m$ است، فاصله‌ی شخص از بالای چرخ فلک اول برابر است با:

$$\Delta y = y - h_w = ۲۳/۳\,m - ۱۸\,m = ۵/۳\,m$$

(ب) برای پیدا کردن ارتفاع شخص هنگام عبور از بالای چرخ‌فلک دوم، می‌توانیم از معادله‌ی ۴-۲۴ استفاده کنیم. چرخ فلک دوم در مکان $x = ۲۳\,m + (۲۳/۲)m = ۳۴/۵\,m$ قرار دارد، درنتیجه داریم:

$$y = y_0 + x\tan\theta_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta_0}$$

$$= ۳/۰\,m + (۳۴/۵\,m)\tan ۵۳° - \frac{(۹/۸\,m/s^2)(۳۴/۵\,m)^2}{۲(۲۶/۵۲\,m/s)^2(\cos ۵۳°)^2}$$

$$= ۲۵/۹\,m$$

بنابراین، فاصله‌ی شخص از بالای چرخ فلک دوم برابر است با

$$\Delta y = y - h_w = ۲۵/۹\,m - ۱۸\,m = ۷/۹\,m$$

(پ) فاصله‌ی مرکز تور از توپ، از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$0 = y - y_0 = x\tan\theta_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta_0} \Rightarrow$$

$$x = \frac{v_0^2\sin 2\theta_0}{g} = \frac{(۲۶/۵۲\,m/s)^2\sin(۲/۵۳°)}{۹/۸\,m/s^2} = ۶۹\,m$$

** ۴۳ توپی از زمین به هوا پرتاب شده است. سرعت آن در ارتفاع ۹/۱ متری، برابر است با $\vec{v} = (۷/۶\hat{i} + ۶/۱\hat{j})\,m/s$ ($\hat{i}$ در راستای افقی و $\hat{j}$ در راستای قائم و به سمت بالاست). (الف) توپ تا چه ارتفاع بیشینه‌ای بالا می‌رود؟ (ب) مسافت کل افقی پیموده شده توسط توپ چقدر است؟ (پ) بزرگی و (ت) زاویه‌ی (زیر راستای افقی) سرعت توپ درست پیش از برخورد به زمین چیست؟

حل: سرعت داده شده‌ی $v = ۷/۶\hat{i} + ۶/۱\hat{j}$ را $\vec{v}_1$، سرعت توپ در لحظه‌ی رسیدن به ارتفاع بیشینه را $\vec{v}_2$ و سرعت توپ هنگام برگشت به زمین را $\vec{v}_3$ و سرعت پرتاب را $\vec{v}_0$ می‌نامیم. مبداء مختصات را در نقطه‌ی پرتاب بر روی زمین انتخاب می‌کنیم.

(الف) این مسئله را با روش‌های مختلف می‌توان حل کرد، ولی بهتر است ابتدا سرعت اولیه در راستای y را با استفاده از معادله‌ی ۲-۱۶ پیدا کنیم:

$$v_{1y}^2 = v_{0y}^2 - 2g\Delta y$$

$$(۶/۱)^2 = v_{0y}^2 - ۲(۹/۸)(۹/۱)$$

در نتیجه $v_{0y} = ۱۴/۷\,m/s$ به دست می‌آید. چون می‌دانیم که v_{2y} باید صفر باشد، باز هم از معادله‌ی ۲-۱۶ به ازای $\Delta y = h$ برای ارتفاع بیشینه استفاده می‌کنیم:

$$v_{2y}^2 = v_{0y}^2 - 2gh$$

$$0 = (۱۴/۷)^2 - ۲(۹/۸)h$$

در نتیجه $h = ۱۱\,m$ به دست می‌آید.

(ب) از معادله‌ی ۴-۲۶ مشتق می‌گیریم و در آن به جای $v_0\sin\theta_0$ مقدار v_{0y} و به جای $v_0\cos\theta_0$ مقدار v_{0x} را قرار می‌دهیم:

$$0 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow R = v_{0x}t$$

در نتیجه $R = (2v_{0x}v_{0y})/g$ به دست می‌آید. چون $v_{0x} = v_{1x} = ۷/۶\,m/s$ است، با قرار دادن مقادیر در رابطه‌ی R، داریم:

$$R = ۲(۷/۶)(۱۴/۷)/۹/۸ = ۲۳\,m$$

(پ) چون $v_{3x} = v_{1x} = ۷/۶\,m/s$ و $v_{3y} = -v_{0y} = -۱۴/۷\,m/s$، پس داریم

$$v_3 = \sqrt{v_{3x}^2 + v_{3y}^2} = \sqrt{(۷/۶)^2 + (-۱۴/۷)^2} = ۱۷\,m/s$$

(ت) زاویه‌ی $\vec{v}_3$ (با افق) برابر است با

$$\tan^{-1}\left(\frac{-۱۴/۷}{۷/۶}\right) = -۶۳° \text{ یا } ۱۱۷°$$

زاویه‌ی $-۶۳°$ (یا معادل آن $۲۹۷°$) را انتخاب می‌کنیم، زیرا علامت مؤلفه‌ها نشان می‌دهد که این بردار در ربع چهارم قرار دارد.

** ۴۴ یک توپ بیسبال با تندی افقی $۱۶۱\,km/h$ از دست توپ‌انداز رها می‌شود. فاصله‌ی توپ‌انداز تا توپ زن $۱۸/۳\,m$ است. این توپ (الف) نیمه‌ی اول فاصله را در چه مدت می‌پیماید؟ (ب) نیمه‌ی بعدی فاصله را در چه مدت می‌پیماید؟ (پ) توپ در طی نیمه‌ی اول فاصله چقدر به طور آزاد سقوط می‌کند؟ (ت) توپ پس از پیمودن نیمه‌ی بعدی فاصله چقدر پایین می‌آید؟ (ث) چرا مقادیر به دست آمده در قسمت‌های (پ) و (ت) با هم برابر نیستند؟

حل: جهت مثبت حرکت را مطابق متن کتاب درسی انتخاب می‌کنیم تا بتوانیم مستقیماً از معادله‌ی ۴-۲۲ استفاده کنیم. سرعت اولیه‌ی گوی افقی است، در نتیجه $v_{0y}=0$ و $v_{0x}=v_0=161\,km/h=44.7\,m/s$.

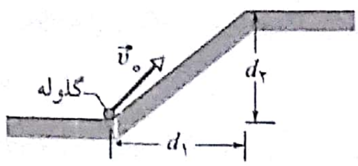
(الف) اگر مبداء مختصات را در نقطه‌ی اولیه (که گوی از دست گوی انداز رها می‌شود) در نظر بگیریم، مؤلفه‌ی y گوی، $y=-\frac{1}{2}gt^2$ و مؤلفه‌ی x آن، $x=v_0t$ است. از معادله‌ی اخیر معلوم می‌شود که تناسب ساده‌ای بین مسافت افقی پیموده شده و زمان وجود دارد، یعنی زمان لازم برای پیمودن نصف مسیر، با نصف زمان کل برابر است. مخصوصاً اگر $x=18.3/2\,m$ باشد، $t=(18.3/2)/44.7=0.205\,s$ خواهد بود.

(ب) مدت زمان لازم برای پیمودن نیمه‌ی بعدی مسیر، $18.3/2\,m$، باید $0.205\,s$ باشد. اگر معادله‌ی حرکت افقی را به صورت $\Delta x=v_0\Delta t$ بنویسیم. نتیجه کاملاً روشن می‌شود.

(پ) با استفاده از معادله‌ی $y=-\frac{1}{2}gt^2$ معلوم می‌شود که وقتی گوی به نیمه‌ی راه بین گوی انداز و گوی زن می‌رسد، گوی در ارتفاع $\left|-\frac{1}{2}(9.8)(0.205)^2\right|=0.206\,m$ قرار دارد.

(ت) ارتفاع گوی هنگام رسیدن به گوی زن، $-\frac{1}{2}(9.8)(0.430)^2=-0.906\,m$ است، اگر آن را از مقدار قبلی کم کنیم، معلوم می‌شود که گوی به اندازه‌ی $0.680\,m$ دیگر سقوط کرده است. چون مقدار y تناسب ساده‌ای با t ندارد، انتظار نداریم بازه‌های زمانی مربوط به تغییر ارتفاع مساوی، برابر باشند. از نظر فیزیکی علت امر این است که سرعت اولیه‌ی گوی در راستای y برای نیمه‌ی اول حرکت، با سرعت «اولیه‌ی» گوی در راستای y برای نیمه‌ی دوم حرکت، برابر نیست (مقادیر تقریبی‌اند).

** ۴۵ در شکل ۴-۴۰، گلوله‌ای با تندی $10.0\,m/s$ تحت زاویه‌ی $50.0°$ نسبت به راستای افقی پرتاب شده است. نقطه‌ی پرتاب در ابتدای یک شیب راهه به طول افقی $d_1=6.00\,m$ و ارتفاع $d_2=3.60\,m$ واقع است. در بالای شیب راهه یک سکو نیز وجود دارد. (الف) آیا گلوله بر روی شیب راهه فرود می‌آید یا بر روی سکو؟ هنگام فرود آمدن گلوله، (ب) بزرگی و (پ) زاویه‌ی جابه‌جایی آن نسبت به نقطه‌ی پرتاب چیست؟



شکل ۴-۴۰ مسئله‌ی ۴۵.

حل: (الف) فرض می‌کنیم $m=\frac{d_2}{d_1}=0.600$ شیب سطح شیب‌دار باشد، در نتیجه $y=mx$ است. مبداء مختصات را در نقطه‌ی پرتاب انتخاب و از معادله‌ی ۴-۲۵ استفاده می‌کنیم. در نتیجه داریم

$$y=\tan(50.0°)x-\frac{(9.80\,m/s^2)x^2}{2(10.0\,m/s)^2(\cos 50.0°)^2}=0.600x$$

از اینجا مقدار $x=4.99\,m$ به دست می‌آید. این مقدار از d_1 کمتر است، لذا گلوله از سطح شیب‌دار بالا ***نمی‌رود***.

(ب) با استفاده از مقدار x پیدا شده در قسمت (الف)، $y=mx=2.99\,m$ را به دست می‌آوریم. بنابراین، بزرگی جابه‌جایی از قضیه‌ی فیثاغورس به صورت $\sqrt{x^2+y^2}=5.82\,m$ به دست می‌آید.

(پ) زاویه‌ی جابه‌جایی همان زاویه‌ی سطح شیب‌دار است:

$$\tan^{-1}(m)=31.0°$$

** ۴۶ در بازی بسکتبال، **هنگ** (***معلق ماندن***) در هوا یک توهم است که در آن به نظر می‌رسد بازیکنی که به هوا پریده شتاب گرانشی را کاهش داده است. این توهم تا حد زیادی به توانایی یک بازیکن ماهر برای دست به دست کردن توپ در حال پرش در هوا بستگی دارد، اما ممکن است به این هم بستگی داشته باشد که فاصله‌ی افقی‌ای که بازیکن در قسمت بالاتر پرش می‌پیماید از فاصله‌ی متناظر در قسمت پایین‌تر پرش بیشتر باشد. اگر بازیکنی با تندی آغازی $v_0=7.00\,m/s$ تحت زاویه‌ی $\theta_0=35.0°$ به هوا بپرد، چه درصدی از برد پرش را در نیمه‌ی بالاتر پرواز (در بین ارتفاع بیشینه و نصف ارتفاع بیشینه) می‌پیماید؟

حل: وقتی بازیکن به ارتفاع بیشینه‌ی y_{max} می‌رسد، $v_y=0$ است و مدت زمانی که طول می‌کشد تا او از نقطه‌ی پرش به y_{max} برسد، از معادله‌ی ۴-۲۳ به دست می‌آید:

$$0=v_y=v_0\sin\theta_0-gt\Rightarrow t_{max}=\frac{v_0\sin\theta_0}{g}$$

این مقدار زمان را در معادله‌ی ۴-۲۲ قرار می‌دهیم و ارتفاع بیشینه را به دست می‌آوریم:

$$y_{max} = (v_0 \sin\theta_0)t_{max} - \frac{1}{2}g t_{max}^2$$

$$= v_0\sin\theta_0\left(\frac{v_0\sin\theta_0}{g}\right) - \frac{1}{2} g\left(\frac{v_0\sin\theta_0}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2\sin^2\theta_0}{2g}$$

برای پیدا کردن مدت زمانی که طول می‌کشد تا بازیکن به ارتفاع $y = y_{max}/2$ برسد، معادله‌ی درجه دوم داده شده در معادله‌ی ۴-۲۲ را حل می‌کنیم:

$$y = \frac{1}{2} y_{max} = \frac{v_0^2\sin^2\theta_0}{4g} = (v_0\sin\theta_0)t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\Rightarrow t_\pm = \frac{(2\pm\sqrt{2})v_0\sin\theta_0}{2g}$$

به ازای $t = t_-$ (برای پایین آمدن بازیکن)، مدت زمانی که بازیکن در ارتفاع $y \ge y_{max}/2$ در هوا می‌ماند، برابر است با

$$\Delta t = t_{max} - t_- = \frac{v_0\sin\theta_0}{g} - \frac{(2-\sqrt{2})v_0\sin\theta_0}{2g}$$

$$= \frac{v_0\sin\theta_0}{\sqrt{2} g} = \frac{t_{max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\Delta t}{t_{max}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

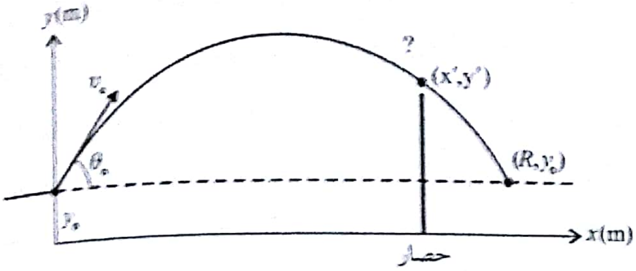
بنابراین، بازیکن در حدود ۷۰٫۷ درصد از زمان پرش را در نیمه‌ی بالاتر پرواز صرف می‌کند. توجه کنید که $\Delta t/t_{max}$ مستقل از v_0 و θ_0 است، اگرچه Δt و t_{max} به این کمیت‌ها بستگی دارند.

** ۴۷ در بازی بیسبال توپ زنی در حالی که مرکز توپ به اندازه‌ی ۱٫۲۲m بالاتر از سطح زمین قرار دارد به آن ضربه می‌زند. زاویه‌ی پرتاب توپ ۴۵ درجه و برد افقی آن (پس از برگشتن به تراز **پرتاب**) ۱۰۷m است. (الف) اگر توپ به حصاری به ارتفاع ۷٫۳۲m، که در فاصله‌ی افقی ۹۷٫۵ متری محل پرتاب قرار دارد، برسد آیا از روی حصار عبور می‌کند؟ (ب) فاصله‌ی میان لبه‌ی بالای حصار و مرکز توپ را به هنگام رسیدن به حصار پیدا کنید.

حل: مبداء مختصات را در سطح زمین و درست در زیر نقطه‌ی برخورد توپ و چوب در نظر می‌گیریم. وقتی حصار وجود ندارد، به ازای $\theta_0 = 45^\circ$، برد افقی توپ $R = 107\,m$ است. ما می‌خواهیم بدانیم که وقتی توپ به $x' = 97.5\,m$ می‌رسد، در چه ارتفاعی از زمین قرار دارد و برای این منظور باید سرعت اولیه را بدانیم. مسیر توپ بیسبال را می‌توان با معادله‌ی ۴-۲۵ توصیف کرد:

$$y - y_0 = (\tan\theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0\cos\theta_0)^2}$$

وضعیت مسئله مانند شکل زیر است (با مقیاس رسم نشده است):



(الف) ابتدا تندی v_0 را با استفاده از برد (به ازای $x = R$، $y = y_0$ است) و $\theta_0 = 45^\circ$، از معادله‌ی ۴-۲۵ داریم

$$v_0 = \sqrt{\frac{gR}{\sin 2\theta_0}} = \sqrt{\frac{(9.8\,m/s^2)(107\,m)}{\sin(2\times 45^\circ)}} = 32.4\,m/s$$

بنابراین، مدت زمان رسیدن توپ به بالای حصار عبارت است از

$$x' = (v_0\cos\theta_0)t' \Rightarrow t' = \frac{x'}{v_0\cos\theta_0}$$

$$= \frac{97.5\,m}{(32.4\,m/s)\cos 45^\circ} = 4.26\,s$$

در این لحظه، توپ در ارتفاع زیر (بالاتر از سطح زمین) قرار دارد:

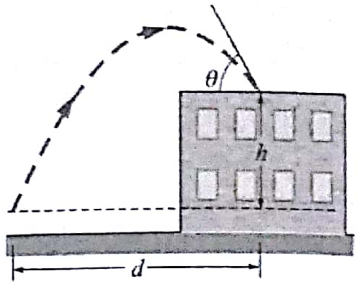
$$y' = y_0 + (v_0\sin\theta_0)t' - \frac{1}{2} g t'^2$$

$$= 1.22\,m + [(32.4\,m/s)\sin 45^\circ](4.26\,s) - \frac{1}{2}(9.8\,m/s^2)(4.26\,s)^2 = 9.88\,m$$

بنابراین توپ از بالای حصار (با ارتفاع ۷٫۳۲m) عبور می‌کند.

(ب) در لحظه‌ی $t' = 4.26\,s$، فاصله‌ی لبه‌ی بالایی حصار و مرکز توپ برابر است با $9.88\,m - 7.32\,m = 2.56\,m$.

** ۴۸ در شکل ۴-۴۱، توپی که به پشت بام ساختمانی پرتاب شده است ۴٫۰۰s بعد در نقطه‌ای به ارتفاع $h = 20.0\,m$ بالاتر از سطح پرتاب فرود می‌آید. زاویه‌ی مسیر توپ درست پیش از برخورد به پشت بام $\theta = 60.0^\circ$ است. (الف) مسافت افقی d را که این توپ می‌پیماید حساب کنید. (به راهنمایی مسئله‌ی ۳۹ رجوع کنید.) (ب) بزرگی و (پ) زاویه‌ی سرعت آغازی توپ (نسبت به راستای افقی) چقدر است؟



شکل ۴-۴۱ مسئله‌ی ۴۸.

حل: با توجه به راهنمایی مسئله، می‌توان فرض کرد که توپ از پشت بام به طرف چپ و تحت زاویه‌ی $۶۰°$ در جهت ساعتگرد نسبت به محور $+x$ (به طرف چپ) پرتاب شده است و زاویه‌های مثبت در جهت ساعتگرد اندازه‌گیری می‌شوند.

(الف) به ازای $y_۰ = ۲۰٫۰\,m$ و $y = ۰$ در لحظه‌ی $t = ۴٫۰\,s$، داریم $y - y_۰ = v_{۰y}t - \frac{۱}{۲}gt^۲$، که در آن $v_{۰y} = v_۰ \sin ۶۰°$ است. از اینجا $v_۰ = ۲۰٫۳\,m/s$ به دست می‌آید. این مقدار را در معادله‌ی $x - x_۰ = v_{۰x}t$ (به ازای $x_۰ = ۰$ و $x = d$) قرار می‌دهیم تا d به دست آید:

$$d = (۲۰٫۳\,m/s)\cos ۶۰°(۴٫۰\,s) = ۴۰٫۶\,m$$

(ب) مؤلفه‌های بزرگی سرعت توپ عبارت‌اند از

$$v_x = v_{۰x} = (۲۰٫۳\,m/s)\cos ۶۰٫۰° = ۱۰٫۲\,m/s$$

$$v_y = v_{۰y} - gt = (۲۰٫۳\,m/s)\sin ۶۰٫۰° - (۹٫۸۰\,m/s^۲)(۴٫۰\,s) = -۲۱٫۶\,m/s$$

بزرگی سرعت $\vec{v}$ برابر است با

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^۲ + v_y^۲} = \sqrt{(۱۰٫۲\,m/s)^۲ + (-۲۱٫۶\,m/s)^۲} = ۲۳٫۹\,m/s$$

(پ) زاویه‌ی سرعت توپ نسبت به افق برابر است با

$$\theta = \tan^{-۱}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \tan^{-۱}\left(\frac{-۲۱٫۶\,m/s}{۱۰٫۲\,m/s}\right) = -۶۴٫۷°$$

ما می‌توانیم این مؤلفه‌های راستگوشه را به صورت بزرگی ـ زاویه تبدیل کنیم:

$$\vec{v} = (۱۰٫۲ - ۲۱٫۶) \rightarrow (۲۳٫۹ \angle -۶۴٫۷°)$$

اکنون نتیجه را (بدون توجه به راهنمایی مسئله) می‌توان به این صورت تعبیر کرد که بزرگی سرعت آغازی $۲۳٫۹\,m/s$ و زاویه‌ی آن (به طرف راست و بالا) $۶۴٫۷°$ است.

*** **۴۹** در فوتبال آمریکایی بازیکنی می‌تواند با یک ضربه تندی آغازی $۲۵\,m/s$ را به توپ بدهد. اگر ارتفاع تیر افقی دروازه نسبت به زمین $۳٫۴۴\,m$ باشد و بازیکن بخواهد از فاصله‌ی ۵۰ متری مقابل دروازه توپ را از بالای تیر عبور بدهد، (الف) کوچک‌ترین و (ب) بزرگ‌ترین زاویه‌ای که تحت آن می‌تواند به توپ ضربه بزند، چقدر است؟

حل: در این مسئله به یک توپ فوتبال تندی اولیه داده می‌شود و توپ حرکت پرتابی انجام می‌دهد. ما می‌خواهیم کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین زاویه‌ای را پیدا کنیم که تحت آن توپ از بالای تیر افقی دروازه عبور می‌کند و گل می‌شود. ازمعادله‌ی ۴-۲۲ استفاده می‌کنیم و مبداء مختصات را در نقطه‌ی وارد شدن ضربه به آن در نظر می‌گیریم. مختصات توپ در دروازه را x و y می‌نامیم و زاویه(های) $\theta_۰$ را طوری تعیین می‌کنیم که به ازای $x = ۵۰\,m$، $y = ۳٫۴۴\,m$ باشد. معادلات سینماتیکی را برای حرکت پرتابی می‌نویسیم:

$$x = v_۰ \cos\theta_۰ \ , \ y = v_۰ t \sin\theta_۰ - \frac{۱}{۲}gt^۲$$

از معادله‌ی اول $t = x / v_۰ \cos\theta_۰$ را به دست می‌آوریم و در معادله‌ی دوم قرار می‌دهیم:

$$y = x\tan\theta_۰ - \frac{gx^۲}{۲v_۰^۲\cos^۲\theta_۰}$$

این معادله را می‌توان با روش تلاش و خطا حل کرد: یعنی مقادیری را برای $\theta_۰$ انتخاب می‌کنیم تا دو مقدار از آن‌ها در این معادله صدق کنند. اما با اندکی عملیات جبری می‌توان راه حل دیگری پیدا کرد: از اتحاد مثلثاتی $۱/\cos^۲\theta_۰ = ۱ + \tan^۲\theta_۰$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۲}\frac{gx^۲}{v_۰^۲}\tan^۲\theta_۰ - x\tan\theta_۰ + y + \frac{۱}{۲}\frac{gx^۲}{v_۰^۲} = ۰$$

این معادله‌ی درجه دوم برای $\tan\theta_۰$ است. برای ساده کردن راه حل، فرض می‌کنیم:

$$c = \frac{۱}{۲}gx^۲/v_۰^۲ = \frac{۱}{۲}(۹٫۸۰\,m/s^۲)(۵۰\,m)^۲/(۲۵\,m/s)^۲ = ۱۹٫۶\,m$$

در نتیجه معادله‌ی درجه دوم به صورت زیر ساده می‌شود:

$$c\tan^۲\theta_۰ - x\tan\theta_۰ + y + c = ۰$$

جواب‌های این معادله عبارت‌اند از

$$\tan\theta_۰ = \frac{x \pm \sqrt{x^۲ - ۴(y + c)c}}{۲c} = \frac{۵۰\,m \pm \sqrt{(۵۰\,m)^۲ - ۴(۳٫۴۴\,m + ۱۹٫۶\,m)(۱۹٫۶\,m)}}{۲(۱۹٫۶\,m)}$$

این دو جواب $\tan\theta_0 = ۱/۹۵$ و $\tan\theta_0 = ۰/۶۰۵$ هستند. زاویه‌های متناظر با این مقدارها (در ربع اول) $\theta_0 = ۶۳^\circ$ و $\theta_0 = ۳۱^\circ$ هستند. در نتیجه:

(الف) کوچک‌ترین زاویه $\theta_0 = ۳۱^\circ$ و

(ب) بزرگ‌ترین زاویه $\theta_0 = ۶۳^\circ$ است که اگر تحت این زاویه‌ها به توپ ضربه زده شود، توپ گل می‌شود.

●●● ۵۰ پرتابه‌ای پس از دو ثانیه پرتاب از سطح زمین، در راستای افقی به اندازه‌ی $۴۰\,m$ و در راستای قائم به اندازه‌ی $۵۳\,m$ نسبت به نقطه‌ی پرتاب جابه‌جا می‌شود. مؤلفه‌های (الف) افقی و (ب) قائم سرعت آغازی پرتابه چیست؟ (پ) پرتابه در لحظه‌ای که به ارتفاع بیشینه‌ی خود در بالای سطح زمین می‌رسد، نسبت به نقطه‌ی پرتاب در راستای افقی چقدر جابه‌جا شده است؟

حل: از معادلات ۴-۲۱، ۴-۲۲، و ۴-۲۳ استفاده می‌کنیم.

(الف) از رابطه‌ی $\Delta x = v_{0x} t$ داریم: $v_{0x} = ۴۰/۲ = ۲۰\,m/s$.

(ب) از رابطه‌ی $\Delta y = v_{0y} t - \frac{۱}{۲} g t^۲$ داریم

$$v_{0y} = (۵۳\,m + \frac{۱}{۲}(۹/۸\,m/s^۲)(۲s)^۲)/۲ = ۳۶/۳\,m/s$$

(پ) شرط رسیدن پرتابه به ارتفاع بیشینه، $v_y = ۰$ است، لذا از رابطه‌ی $v_y = v_{0y} - gt'$ مقدار $t' = (۳۶/۳\,m/s)/(۹/۸\,m/s^۲) = ۳/۷\,s$ به دست می‌آید. در طول این مدت زمان، حرکت در راستای محور x با تندی ثابت صورت می‌گیرد و در نتیجه $x' - x_0 = ۲۰ \times ۳/۷ = ۷۴\,m$ است.

●●● ۵۱ اسکی‌باز ماهر می‌داند که پیش از رسیدن به شیب رو به پایین در پیست اسکی باید به طرف بالا بپرد. پرشی را در نظر بگیرید که در آن تندی آغازی $v_0 = ۱۰\,m/s$ و زاویه‌ی پرتاب $\theta_0 = ۱۱/۳^\circ$ است. مسیر حرکت آغازی تقریباً تخت و زاویه‌ی شیب رو به پایین ۹/۰ درجه است. شکل ۴-۴۲ الف، یک **پیش پرش** را نشان می‌دهد که اجازه می‌دهد اسکی‌باز در بالاترین نقطه‌ی سرازیری فرود آید. شکل ۴-۴۲ ب، یک پرش از لبه‌ی سرازیری را نشان می‌دهد. در شکل ۴-۴۲ الف، اسکی‌باز تقریباً در همان تراز شروع پرش فرود می‌آید. (الف) در هنگام فرود آمدن زاویه‌ی بین مسیر اسکی‌باز ϕ، و سطح شیب‌دار پیست چقدر است؟ در شکل ۴-۴۲ ب، (ب) اسکی‌باز چقدر پایین‌تر از سطح آغازی پرش فرود می‌آید، و (پ) زاویه‌ی ϕ چقدر است؟ (هر چه ارتفاع سقوط و ϕ بیشتر باشد اسکی‌باز در هنگام فرود آمدن کمتر می‌تواند خود را کنترل کند).

(ب) (الف)

شکل ۴-۴۲ مسئله‌ی ۵۱.

حل: (الف) اسکی‌باز تحت زاویه‌ی $\theta_0 = ۹/۰^\circ$ نسبت به بالای افق به بالا می‌پرد و در نتیجه با همان بردار سرعت و تحت زاویه‌ی $۱۱/۳^\circ$ نسبت به زیر افق به سطح اولیه‌اش برمی‌گردد. اگر زاویه‌ی سطح برف نسبت به زیر افق $\alpha = ۹/۰^\circ$ باشد، زاویه‌ی بین شیب رو به پایین و بردار سرعت $\phi = \theta_0 - \alpha = ۱۱/۳^\circ - ۹/۰^\circ = ۲/۳^\circ$ است.

(ب) فرض کنید اسکی‌باز در فاصله‌ی d بر روی سطح شیب‌دار فرود می‌آید. با استفاده از معادله‌ی ۴-۲۵ به ازای $x = d\cos\alpha$ و $y = -d\sin\alpha$ (مبداء مختصات در لبه‌ی سرازیری انتخاب شده است)، داریم

$$-d\sin\alpha = d\cos\alpha\tan\theta_0 - \frac{g(d\cos\alpha)^۲}{۲v_0^۲\cos^۲\theta_0}$$

فاصله‌ی d را از این معادله به دست می‌آوریم:

$$d = \frac{۲v_0^۲\cos^۲\theta_0}{g\cos^۲\alpha}(\cos\alpha\tan\theta_0 + \sin\alpha)$$

$$= \frac{۲v_0^۲\cos\theta_0}{g\cos^۲\alpha}(\cos\alpha\sin\theta_0 + \cos\theta_0\sin\alpha)$$

$$= \frac{۲v_0^۲\cos\theta_0}{g\cos^۲\alpha}\sin(\theta_0 + \alpha)$$

با قرار دادن مقادیر داده شده، داریم

$$d = \frac{۲(۱۰\,m/s)^۲\cos(۱۱/۳^\circ)}{(۹/۸\,m/s^۲)\cos^۲(۹/۰^\circ)}\sin(۹/۰^\circ + ۱۱/۳^\circ)$$

$$= ۷/۰\,m$$

در نتیجه مقدار سقوط قائم اسکی‌باز برابر است با

$$y = -d\sin\alpha = -(۷/۰\,m)\sin(۹/۰^\circ) = -۱/۱\,m$$

(پ) مدت زمان پرواز اسکی‌باز برابر است با

$$t=\frac{x}{v_x}=\frac{d\cos\alpha}{v_0\cos\theta_0}=\frac{(7.0\,m)\cos(9.0°)}{(10\,m/s)\cos(11.3°)}=0.72\,s$$

با استفاده از معادله‌ی ۴-۲۳، مؤلفه‌های x و y سرعت در لحظه‌ی فرود به دست می‌آید:

$$v_x=v_0\cos\theta_0=(10\,m/s)\cos(11.3°)=9.8\,m/s$$

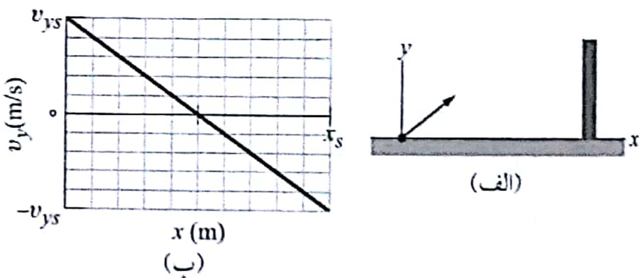
$$v_y=v_0\sin\theta_0-gt=(10\,m/s)\sin(11.3°)-(9.8\,m/s^2)(0.72\,s)=-5.5\,m/s$$

بنابراین، زاویه‌ی سرعت فرود نسبت به زیر افق برابر است با

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{-5.5\,m/s}{9.8\,m/s}\right)=-29.3°$$

این نتیجه‌ها نشان می‌دهند که زاویه‌ی بین مسیر حرکت اسکی‌باز و شیب سرازیری، $\phi=29.1°-11.3°=17.8°$ یا تقریباً $18°$ است.

*** ۵۲ می‌خواهیم توپی را از سطح زمین به سوی دیواری واقع در فاصله‌ی x پرتاب کنیم (شکل ۴-۴۳ الف). شکل ۴-۴۳ ب، مؤلفه‌ی v_y سرعت توپ را درست در لحظه‌ی رسیدن به دیوار به صورت تابعی از مسافت x نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم شکل با $v_{ys}=5.0\,m/s$ و $x_s=20\,m$ مشخص شده است. زاویه‌ی پرتاب چقدر است؟



شکل ۴-۴۳ مسئله‌ی ۵۲

حل: از معادله‌ی ۴-۲۱ داریم $t=x/v_{0x}$. بنابراین، از معادله‌ی ۴-۲۳ داریم:

$$v_y=v_{0y}-gt=v_{0y}-\frac{gx}{v_{0x}}$$

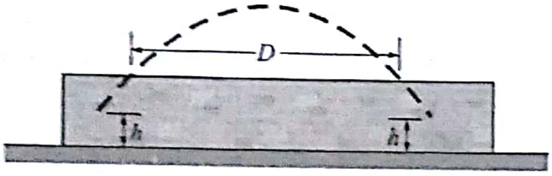
چون شیب نمودار ۰/۵۰۰- است، نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{g}{v_{0x}}=\frac{1}{2}\Rightarrow v_{0x}=19.6\,m/s$$

از نقطه‌ی تلاقی محور y با نمودار، $v_{0y}=5.00\,m/s$ به دست می‌آید. در نتیجه زاویه‌ی پرتاب توپ برابر است با

$$\theta_0=\tan^{-1}(v_{0y}/v_{0x})=14.3°\approx 14°$$

*** ۵۳ در شکل ۴-۴۴، به یک توپ بیسبال در ارتفاع $h=1.00\,m$ ضربه زده شده و سپس توپ در همان ارتفاع گرفته شده است. این توپ که به موازات دیواری حرکت می‌کند، $1.00\,s$ پس از دریافت ضربه از لبه‌ی بالای دیوار عبور می‌کند و ارتفاع مسیرش از ارتفاع دیوار بیشتر می‌شود. سپس، توپ با گذشت $4.00\,s$ دیگر و پیمودن فاصله‌ی افقی $D=50.0\,m$، از لبه‌ی دیوار به پایین عبور می‌کند. (الف) توپ از لحظه‌ی ضربه خوردن تا گرفته شدن چه فاصله‌ی افقی‌ای را می‌پیماید؟ (ب) بزرگی و (پ) زاویه‌ی سرعت توپ (نسبت به راستای افقی) درست در لحظه‌ی دریافت ضربه چقدر است؟ (ت) ارتفاع دیوار چقدر است؟



شکل ۴-۴۴ مسئله‌ی ۵۳

حل: در لحظه‌ای که به توپ ضربه زده می‌شود، فرض می‌کنیم $x_0=0$ و $y_0=h_0=1.00\,m$ است. $y_1=h$ ارتفاع دیوار و x_1 معرّف نقطه‌ی عبور توپ برای اولین بار از بالای دیوار، یک ثانیه پس از دریافت ضربه، است؛ به طور مشابه فرض می‌کنیم $y_2=h$ و x_2 معرف نقطه‌ی عبور توپ از بالای دیوار، چهار ثانیه پس از دریافت ضربه، باشد. در ضمن، در نقطه‌ی $x_f=R$، $y_f=1.00\,m$، توپ گرفته می‌شود.

(الف) می‌دانیم که v_x ثابت است، در نتیجه $x_2-x_1=50.0\,m=v_{1x}(4.00\,s)$ و از آنجا $v_{1x}=12.5\,m/s$ به دست می‌آید. در کل مدت زمانی که به توپ ضربه زده و سپس گرفته می‌شود، فاصله‌ی افقی پیموده شده برابر است با

$$x_f-x_0=R=v_x(6.00\,s)=75.0\,m$$

(ب) برای حرکت توپ در بالاتر از دیوار از رابطه‌ی $y-y_0=v_{0y}t-\frac{1}{2}gt^2$ استفاده می‌کنیم:

$$y_2-y_1=0=v_{1y}(4.00\,s)-\frac{1}{2}g(4.00\,s)^2$$

در نتیجه $v_{1y}=19.6\,m/s$ به دست می‌آید. یک ثانیه قبل، با استفاده از رابطه‌ی $v_{1y}=v_{0y}-g(1.00\,s)$ مقدار مؤلفه‌ی قائم

سرعت $v_{\circ y} = ۲۹/۴\,m/s$ به دست می‌آید. بنابراین، سرعت توپ درست پس از دریافت ضربه برابر است با

$$\vec{v} = v_{\circ x}\,\hat{i} + v_{\circ y}\,\hat{j} = (۱۲/۵\,m/s)\,\hat{i} + (۲۹/۴\,m/s)\,\hat{j}$$

بزرگی این سرعت برابر است با

$$|\vec{v}| = \sqrt{(۱۲/۵\,m/s)^۲ + (۲۹/۴\,m/s)^۲} = ۳۱/۹\,m/s$$

(پ) زاویه‌ی سرعت توپ درست پس از دریافت ضربه برابر است با

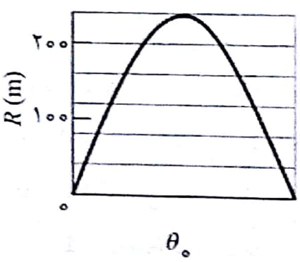
$$\theta = \tan^{-۱}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \tan^{-۱}\left(\frac{۲۹/۴\,m/s}{۱۲/۵\,m/s}\right) = ۶۷/۰^\circ$$

این نتیجه نشان می‌دهد که بزرگی سرعت $۳۱/۹\,m/s$ و زاویه‌ی آن (به طرف راست و بالای افق) $۶۷/۰^\circ$ است.

(ت) در طول $۱/۰۰\,s$ اول حرکت، از رابطه‌ی $y = y_\circ + v_{\circ y}t - \frac{۱}{۲}gt^۲$ داریم

$$h = ۱/۰\,m + (۲۹/۴\,m/s)(۱/۰۰\,s) - \frac{۱}{۲}(۹/۸\,m/s^۲)(۱/۰۰\,s)^۲$$
$$= ۲/۵۵\,m$$

***** ۵۴** می‌خواهیم توپی را با تندی معینی از سطح زمین شوت کنیم. شکل ۴-۴۵، تغییرات برد توپ R، را برحسب زاویه‌ی پرتاب $\theta_\circ$ نشان می‌دهد. مقدار $\theta_\circ$ مدت زمان پرواز توپ را مشخص می‌کند؛ فرض کنید t_{max} نمایشگر زمان پرواز بیشینه است. اگر $\theta_\circ$ به گونه‌ای انتخاب شود که مدت زمان پرواز توپ $۰/۵۰۰t_{max}$ باشد، کمترین تندی‌ای که توپ می‌تواند در طول پرواز داشته باشد چقدر است؟



شکل ۴-۴۵ مسئله‌ی ۵۴.

حل: به ازای $\Delta y = ۰$ از معادله‌ی ۴-۲۲ مقدار $t = ۲v_\circ \sin\theta_\circ / g$ به دست می‌آید که از آنجا $t_{max} = ۲v_\circ / g$ (برای شوت زدن با زاویه‌ی $\theta_\circ = ۹۰^\circ$) حاصل می‌شود. در نتیجه نصف مدت زمان بیشینه‌ی پرواز توپ برابر است با

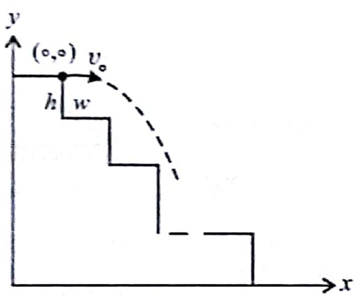
$$\frac{۱}{۲}t_{max} = v_\circ / g \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \sin\theta_\circ$$

از اینجا $\theta_\circ = ۳۰/۰^\circ$ به دست می‌آید. چون پرتابه کمترین سرعت را در بالاترین نقطه‌ی مسیر دارد، که برابر با مؤلفه‌ی x سرعت آغازی ($v_\circ \cos\theta_\circ = v_\circ \cos ۳۰^\circ$ برای نصف مدت زمان بیشینه‌ی پرواز) است، در نتیجه باید نمودار $v_\circ$ را رسم کنیم تا حل مسئله کامل شود. در نمودار داده شده به ازای $\theta_\circ = ۴۵/۰^\circ$ بُرد توپ $۲۴۰\,m$ است. در نتیجه از معادله‌ی ۴-۲۶ می‌توان تندی آغازی $v_\circ = ۴۸/۵\,m/s$ را به دست آورد. بنابراین کمترین تندی که توپ می‌تواند در طول پرواز داشته باشد، برابر است با

$$(۴۸/۵\,m/s)\cos ۳۰/۰^\circ = ۴۲/۰\,m/s$$

***** ۵۵** توپی از بالای پلکانی با سرعت افقی $۱/۵۲\,m/s$ به پایین می‌غلتد. ارتفاع و همچنین، پهنای هر پله $۲۰/۳\,cm$ است. توپ ابتدا با کدام پله برخورد می‌کند؟

حل: ارتفاع هر پله را h و پهنای آن را w می‌نامیم. برای آنکه توپ به پله‌ی nام برخورد کند، باید به اندازه‌ی ارتفاع قائم nh سقوط کند و مسافت افقی بین $(n-۱)w$ و nw را بپیماید. مبداء مختصات را در نقطه‌ی غلتیدن توپ از بالای پلکان در نظر می‌گیریم و محور y را به طرف بالا مثبت انتخاب می‌کنیم. (به شکل زیر توجه کنید).



مختصات توپ در لحظه‌ی t با روابط $x = v_{\circ x}t$ و $y = -\frac{۱}{۲}gt^۲$ (زیرا $v_{\circ y} = ۰$) مشخص می‌شود. مقدار y را با $-nh$ مساوی قرار می‌دهیم و زمان رسیدن توپ به پله‌ی nام را پیدا می‌کنیم:

$$t = \sqrt{\frac{۲nh}{g}}$$

پس، مختصه‌ی x محل برخورد توپ برابر است با

$$x = v_{\circ x}\sqrt{\frac{۲nh}{g}} = (۱/۵۲\,m/s)\sqrt{\frac{۲n(۰/۲۰۳\,m)}{۹/۸\,m/s^۲}} = (۰/۳۰۹\,m)\sqrt{n}$$

اکنون مقدار n را طوری معین می‌کنیم که x/w کوچکتر از n ولی بزرگتر از $n-۱$ باشد. برای $n = ۱$، $x = ۰/۳۰۹\,m$ و

$x/w = 1/52$ به دست می‌آید که از n بزرگتر است. برای $n = 2$، $x = 0/437\,m$ و $x/w = 2/15$ حاصل می‌شود که باز هم از n بزرگتر است. برای $n = 3$، $x = 0/535\,m$ و $x/w = 2/64$ بدست می‌آید که از n کوچکتر و از $n - 1$ بزرگتر است. لذا توپ به پله‌ی سوم برخورد می‌کند.

پودمان ۴-۵ حرکت دایره‌ای یکنواخت

* ۵۶ یک ماهواره‌ی زمینی در ارتفاع ۶۴۰ کیلومتری سطح زمین بر روی مداری دایره‌ای با دوره‌ی تناوب ۹۸/۰ دقیقه حرکت می‌کند. (الف) تندی، و (ب) بزرگی شتاب مرکزگرای ماهواره چقدر است؟

حل: از معادله‌ی ۴-۳۵ برای پیدا کردن تندی v و از معادله‌ی ۴-۳۴ برای پیدا کردن شتاب a استفاده می‌کنیم.

(الف) چون شعاع زمین $6/37 \times 10^6\,m$ است، شعاع مدار ماهواره برابر است با

$$r = (6/37 \times 10^6 + 640 \times 10^3)\,m = 7/01 \times 10^6\,m$$

بنابراین، تندی ماهواره برابر است با

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi(7/01 \times 10^6\,m)}{(98/0\,min)(60\,s/min)} = 7/61 \times 10^3\,m/s$$

(ب) بزرگی شتاب از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(7/49 \times 10^3\,m/s)^2}{7/01 \times 10^6\,m} = 8/00\,m/s^2$$

* ۵۷ یک چرخ فلک افقی شهر بازی با آهنگی ثابت به دور محوری قائم می‌چرخد. شخصی که روی لبه‌ی چرخ فلک ایستاده است دارای تندی ثابت $3/66\,m/s$ و شتاب مرکزگرای $\vec{a}$ به بزرگی $1/83\,m/s^2$ است. بردار مکان $\vec{r}$ محل این شخص را نسبت به محور دوران مشخص می‌کند. (الف) بزرگی $\vec{r}$ چقدر است؟ جهت $\vec{r}$ را در حالتی معین کنید که جهت $\vec{a}$ (ب) به سوی خاور و (پ) به سوی جنوب، باشد.

حل: بزرگی شتاب مرکزگرا $(a = v^2/r)$ و جهت آن (به طرف مرکز دایره) اساس این مسئله را تشکیل می‌دهند.

(الف) اگر شخص در این مکان تحت تأثیر شتاب $a = 1/83\,m/s^2$ در جهت **خاور** قرار گیرد، مرکز دایره در خاور این مکان قرار دارد و این فاصله مساوی است با

$$r = v^2/a = (3/66\,m/s)^2/(1/83\,m/s^2) = 7/32\,m$$

(ب) بنابراین، شخص در آن لحظه نسبت به مرکز چرخ به فاصله‌ی $7/32\,m$ به طرف باختر قرار دارد.

(پ) اکنون اگر جهت $\vec{a}$ که به شخص وارد می‌شود به طرف **جنوب** باشد ـ که نشان می‌دهد مرکز چرخ فلک در طرف جنوب او قرار دارد، شخص در آن لحظه در فاصله‌ی $7/32\,m$ به طرف شمال قرار دارد.

* ۵۸ یک بادبزن برقی در هر دقیقه ۱۲۰۰ دور کامل می‌زند. شعاع حرکت نوک پره‌ها را $0/15\,m$ در نظر بگیرید. (الف) نوک پره در هر دور چه مسافتی می‌پیماید؟ (ب) تندی نوک پره، و (پ) بزرگی شتاب آن چقدر است؟ (ت) دوره‌ی تناوب حرکت چقدر است؟

حل: (الف) محیط دایره‌ی نوک پره $c = 2\pi r = 2\pi(0/15\,m) = 0/94\,m$ است.

(ب) به ازای $T = (60\,s)/1200 = 0/050\,s$، تندی نوک پره $v = c/T = (0/94\,m)/(0/050\,s) = 18/8\,m/s$ است. برای این منظور از معادله‌ی ۴-۳۵ نیز می‌توان استفاده کرد.

(پ) بزرگی شتاب برابر است با

$$a = v^2/r = (18/8\,m/s)^2/(0/15\,m) = 2/36 \times 10^3\,m/s^2$$

(ت) دوره‌ی تناوب دوران $(1200\,rev/min)^{-1} = 8/3 \times 10^{-4}\,min$ است که در دستگاه SI معادل $T = 0/050\,s = 50\,ms$ است.

* ۵۹ زنی سوار یک چرخ فلک قائم شهر بازی با شعاع $15\,m$ می‌شود. این چرخ فلک در هر دقیقه پنج دور کامل به دور محور افقی‌اش می‌زند. (الف) دوره‌ی تناوب حرکت، (ب) بزرگی و (پ) جهت شتاب مرکزگرای زن در بالاترین نقطه، و (ت) بزرگی و (ث) جهت شتاب مرکزگرای او در پایین‌ترین نقطه چیست؟

حل: (الف) چون چرخ در هر دقیقه ۵ دور می‌زند، دوره‌ی تناوب آن $\frac{1}{5}$ دقیقه یا ۱۲/۰ ثانیه است.

(ب) بزرگی شتاب مرکزگرا از رابطه‌ی $a = v^2/R$ به دست می‌آید

که در آن R شعاع چرخ، و v تندی شخص است. چون شخص در هر دور مسافت $2\pi R$ را می‌پیماید، تندی او برابر است با

$$v = \frac{2\pi(15\,m)}{12\,s} = 7{,}85\,m/s$$

و شتاب مرکزگرای او $a = \frac{(7{,}85\,m/s)^2}{15\,m} = 4{,}1\,m/s^2$ است.

(پ) وقتی شخص در بالاترین نقطه قرار دارد، جهت شتاب مرکزگرای او به طرف پایین، به طرف مرکز مدار است.

(ت) در پایین‌ترین نقطه، شتاب مرکزگرا $a = 4{,}1\,m/s^2$، مانند قسمت (ب)، است.

(ث) جهت شتاب مرکزگرا به طرف بالا است.

* ۶۰ شخصی که به شتاب مرکزگرا عادت دارد، سوار وسیله‌ای با حرکت دایره‌ای یکنواخت با دوره‌ی تناوب $T = 2{,}0\,s$ و شعاع چرخش $r = 3{,}00\,m$ می‌شود. در زمان t_1 شتاب شخص $\vec{a} = (6{,}00\,m/s^2)\hat{i} + (-4{,}00\,m/s^2)\hat{j}$ است. در آن زمان، مقدار عبارت (الف) $\vec{v}\cdot\vec{a}$ و (ب) $\vec{r}\times\vec{a}$، چیست؟

حل: (الف) در حرکت دایره‌ای با تندی ثابت، بردار سرعت در هر لحظه بر بردار شتاب عمود است. پس، $\vec{v}\cdot\vec{a} = 0$.

(ب) در این بردار، جهت شتاب در هر لحظه به طرف مرکز دایره است، در حالی که جهت بردار مکان از مرکز دایره به طرف شخص در حال حرکت، است. بنابراین، زاویه‌ی بین $\vec{r}$ و $\vec{a}$ در هر لحظه $180°$ است، لذا $\vec{r}\times\vec{a} = 0$.

* ۶۱ وقتی یک ستاره‌ی بزرگ به ***ابرنواختر*** تبدیل می‌شود، هسته‌ی مرکزی‌اش چنان فشرده می‌شود که به یک ***ستاره‌ی نوترونی*** با شعاعی در حدود $20\,km$ (کره‌ای با مساحت تقریباً ۸ برابر مساحت شهر تهران) تبدیل می‌شود. اگر ستاره‌ی نوترونی در هر ثانیه یک دور بچرخد، (الف) تندی یک ذره‌ی واقع بر استوای ستاره، و (ب) بزرگی شتاب مرکزگرای ذره، چقدر است؟ (پ) اگر ستاره‌ی نوترونی تندتر بچرخد، آیا پاسخ قسمت‌های (الف) و (ب) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟

حل: از معادله‌ی ۴-۳۵ برای پیدا کردن تندی v و از معادله‌ی ۴-۳۴ برای پیدا کردن شتاب مرکزگرای a استفاده می‌کنیم.

(الف)

$$v = 2\pi r/T = 2\pi(20\,km)/1{,}0\,s = 126\,km/s = 1{,}3\times10^5\,m/s$$

(ب) بزرگی شتاب برابر است با

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(126\,km/s)^2}{20\,km} = 7{,}9\times10^5\,m/s^2$$

(پ) واضح است که اگر T کاهش یابد، هر دو مقدار v و a افزایش می‌یابند.

* ۶۲ بزرگی شتاب دونده‌ای که با تندی $10\,m/s$ پیچی به شعاع $25\,m$ را دور می‌زند، چیست؟

حل: بزرگی شتاب برابر است با

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(10\,m/s)^2}{25\,m} = 4{,}0\,m/s^2$$

** ۶۳ در زمان $t_1 = 2{,}00\,m$، شتاب یک ذره در حرکت دایره‌ای پادساعتگرد $(6{,}00\,m/s^2)\hat{i} + (4{,}00\,m/s^2)\hat{j}$ است. این ذره با تندی ثابت می‌چرخد. در زمان $t_2 = 5{,}00\,s$، شتاب ذره $(4{,}00\,m/s^2)\hat{i} + (-6{,}00\,m/s^2)\hat{j}$ است. اگر $t_2 - t_1$ از زمان یک دوره‌ی تناوب کمتر باشد، شعاع مسیر ذره چقدر است؟

حل: ابتدا توجه می‌کنیم که $\vec{a}_1$ (شتاب در زمان $t_1 = 2{,}00\,s$) و $\vec{a}_2$ (شتاب در زمان $t_2 = 5{,}00\,s$) برهم عمودند و حاصل‌ضرب نرده‌ای (نقطه‌ای) آن‌ها برابر است با

$$\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2 = [(6{,}00\,m/s^2)\hat{i} + (4{,}00\,m/s^2)\hat{j}]\cdot[(4{,}00\,m/s^2)\hat{i} + (-6{,}00\,m/s^2)\hat{j}] = 0$$

چون بردارهای شتاب در جهت (منفی) شعاع قرار دارند، فاصله‌ی دو مکان (در زمان‌های t_1 و t_2) به اندازه‌ی ربع دایره (یا سه ربع دایره، که به اندازه‌گیری در جهت ساعتگرد یا پادساعتگرد بستگی دارد) است. سریعاً می‌توان نتیجه گرفت که اگر ذره در جهت پادساعتگرد (بر طبق صورت مسئله) حرکت کند، سه ربع محیط دایره را از مکان مربوط به زمان t_1 تا مکان مربوط به t_2، طی می‌کند. اگر T دوره‌ی تناوب باشد، $t_2 - t_1 = 3{,}00\,s = 3T/4$. از اینجا $T = 4{,}00\,s$ به دست می‌آید. بزرگی شتاب برابر است با

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(6{,}00\,m/s^2)^2 + (4{,}00\,m/s^2)^2} = 7{,}21\,m/s^2$$

با استفاده از معادلات ۴-۳۴ و ۴-۳۵، داریم $a=۴\pi^۲ r/T^۲$، و شعاع مسیر ذره برابر است با

$$r=\frac{aT^۲}{۴\pi^۲}=\frac{(۷٫۲۱\,\text{m}/\text{s}^۲)(۴٫۰۰\,\text{s})^۲}{۴\pi^۲}=۲٫۹۲\,\text{m}$$

** ۶۴ ذره‌ای بر روی صفحه‌ی افقی xy حرکت دایره‌ای یکنواخت افقی انجام می‌دهد. در یک لحظه این ذره از نقطه‌ای با مختصات x و y (۴٫۰۰m و ۴٫۰۰m) با سرعت $-۵٫۰۰\hat{i}$ و شتاب $+۱۲٫۵\hat{j}\,\text{m}/\text{s}^۲$ عبور می‌کند. مختصه‌ی (الف) x و (ب) y، مرکز مسیر دایره‌ای چیست؟

حل: وقتی ذره با تندی ثابت حرکت دایره‌ای انجام می‌دهد، جهت بردار شتاب لحظه‌ای الزاماً به طرف مرکز دایره است. بنابراین، مرکز و نقطه‌ی مورد نظر در یک راستا قرار دارند.

(الف) چون مرکز در راستای نقطه‌ی (۴٫۰m,۴٫۰۰m) واقع است، مختصه‌ی x مرکز ۴٫۰۰m است.

(ب) برای پیدا کردن y مرکز مسیر دایره، باید شعاع دایره را پیدا کنیم. با استفاده از معادله‌ی ۴-۳۴ داریم

$$r=\frac{v^۲}{a}=\frac{(۵٫۰۰\,\text{m}/\text{s})^۲}{۱۲٫۵\,\text{m}/\text{s}^۲}=۲٫۰۰\,\text{m}$$

بنابراین، مختصه‌ی y مرکز ۲٫۰۰m + ۴٫۰۰m = ۶٫۰۰m است. در نتیجه مختصات نقطه‌ی مرکز به صورت $(x,y)=(۴٫۰۰\text{m},۶٫۰۰\text{m})$ است.

** ۶۵ در کف یک چرخ فلک افقی در حال دوران یک کیف زنانه در شعاع ۲٫۰۰m و یک کیف پول در شعاع ۳٫۰۰m حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام می‌دهند. کیف‌ها در راستای یک خط شعاعی قرار دارند. در یک لحظه، شتاب کیف زنانه $(۲٫۰۰\,\text{m}/\text{s}^۲)\hat{i}+(۴٫۰۰\,\text{m}/\text{s}^۲)\hat{j}$ است. در آن لحظه وبرحسب نمادگذاری بردارهای یکه، شتاب کیف پول چیست؟

حل: چون دوره‌ی تناوب حرکت دایره‌ای یکنواخت $T=۲\pi r/v$ است، که در آن r شعاع و v تندی است، شتاب مرکزگرا را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$a=\frac{v^۲}{r}=\frac{۱}{r}\left(\frac{۲\pi r}{T}\right)^۲=\frac{۴\pi^۲ r}{T^۲}$$

براساس این رابطه، بزرگی شتاب‌های کیف زنانه و کیف پول را با هم مقایسه می‌کنیم و نسبت آن‌ها را به دست می‌آوریم که همان نسبت rهای آن‌ها است. بنابراین، $a_{\text{کیف پول}}=۱٫۵a_{\text{کیف زنانه}}$. پس، بردار شتاب کیف پول به صورت زیر است

$$\vec{a}=۱٫۵۰[(۲٫۰۰\,\text{m}/\text{s}^۲)\hat{i}+(۴٫۰۰\,\text{m}/\text{s}^۲)\hat{j}]$$
$$=(۳٫۰۰\,\text{m}/\text{s}^۲)\hat{i}+(۶٫۰۰\,\text{m}/\text{s}^۲)\hat{j}$$

** ۶۶ ذره‌ای با تندی ثابت در یک مسیر دایره‌ای روی دستگاه مختصات افقی xy حرکت می‌کند. در زمان $t_۱=۴٫۰۰\text{s}$، این ذره با سرعت $(۳٫۰۰\,\text{m}/\text{s})\hat{j}$ و با شتاب در جهت مثبت محور x از نقطه‌ی با مختصات x و y (۵٫۰۰m و ۶٫۰۰m) عبور می‌کند. در زمان $t_۲=۱۰٫۰\text{s}$، سرعت ذره $(-۳٫۰۰\,\text{m}/\text{s})\hat{i}$ و شتاب آن در جهت محور y مثبت است. اگر $t_۲-t_۱$ از زمان یک دوره‌ی تناوب کمتر باشد، مختصه‌ی (الف) x و (ب) y مرکز مسیر دایره‌ای چیست؟

حل: این واقعیت که در لحظه‌ی $t_۱=۴٫۰۰\text{s}$ سرعت در جهت $+y$ و شتاب در جهت $+x$ است، ایجاب می‌کند که حرکت در جهت ساعتگرد باشد. مکان ذره متناظر با «ساعت ۹٫۰۰» است. از طرف دیگر مکان ذره در لحظه‌ی $t_۲=۱۰٫۰\text{s}$ متناظر با «ساعت ۶٫۰۰» است زیرا سرعت در جهت $-x$ و شتاب در جهت $+y$ است. بازه‌ی زمانی $\Delta t=۱۰٫۰\text{s}-۴٫۰۰\text{s}=۶٫۰۰\text{s}$ مساوی با ۳/۴ یک دوره‌ی تناوب است:

$$۴٫۰۰\text{s}=\frac{۳}{۴}T\Rightarrow T=۵٫۳\text{s}$$

در نتیجه از معادله‌ی ۴-۳۵ داریم

$$r=\frac{vT}{۲\pi}=\frac{(۳٫۰۰\,\text{m}/\text{s})(۵٫۳\,\text{s})}{۲\pi}=۲٫۵۵\,\text{m}$$

(الف) مختصه‌ی x مرکز مسیر دایره‌ای $x=۵٫۰۰\text{m}+۲٫۵۵\text{m}=۷٫۵۵\text{m}$ است.

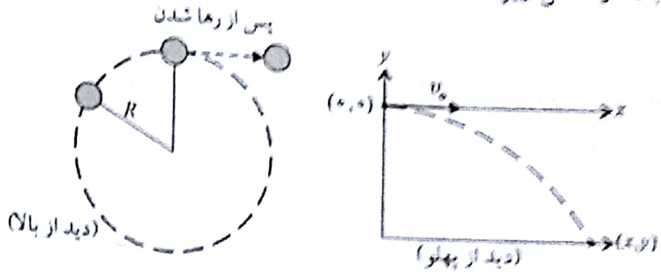
(ب) مختصه‌ی y مرکز مسیر دایره‌ای $y=۶٫۰۰\text{m}$ است.

به‌عبارت دیگر، مرکز دایره در نقطه‌ی $(x,y)=(۷٫۵۵\text{m},۶٫۰۰\text{m})$ واقع است.

*** ۶۷ پسر بچه‌ای سنگی را، که به ریسمانی به شعاع ۱٫۵m بسته شده است، بر روی دایره‌ای افقی در ارتفاع ۲٫۰ متری

زمین می‌چرخاند. در اثر پاره شدن ریسمان سنگ به طور افقی پرتاب می‌شود و پس از پیمودن مسافت افقی $10\,m$ به زمین می‌خورد. شتاب مرکزگرای سنگ در حین حرکت دایره‌ای چقدر است؟

حل: سنگ ابتدا در یک مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند (نمای دید از بالا در شکل زیر نشان داده شده است).



چون $a = v^2/R$، برای محاسبه‌ی شتاب مرکزگرای سنگ باید تندی آن در حرکت دایره‌ای را بدانیم (که همان تندی اولیه‌ی پرتاب سنگ است). از معادلات سینماتیکی حرکت پرتابی (بحث شده در بخش ۴-۶) برای پیدا کردن تندی استفاده می‌کنیم. جهت $+y$ را به طرف بالا انتخاب می‌کنیم و مبداء را در نقطه‌ی جدا شدن سنگ از مدار دایره‌ای در نظر می‌گیریم. در نتیجه مختصات سنگ در حین حرکت از روابط $x = v_0 t$ و $y = -\frac{1}{2}gt^2$ (زیرا $v_{0y} = 0$) به دست می‌آیند. سنگ در نقطه‌ای با مختصات $x = 10\,m$ و $y = -2.0\,m$ به زمین برخورد می‌کند.

معادله‌ی مؤلفه‌ی y را حل می‌کنیم تا زمان $t = \sqrt{-2y/g}$ به دست آید و سپس آن را در معادله‌ی اول قرار می‌دهیم:

$$v_0 = x\sqrt{-\frac{g}{2y}} = (10\,m)\sqrt{-\frac{9.8\,m/s^2}{2(-2.0\,m)}} = 15.7\,m/s$$

بنابراین، بزرگی شتاب مرکزگرا برابر است با

$$a = \frac{v_0^2}{R} = \frac{(15.7\,m/s)^2}{1.5\,m} = 160\,m/s^2$$

توجه: معادلات مذکور را می‌توان به صورت $a = \frac{gx^2}{-2yR}$ با هم ترکیب کرد. این معادله نشان می‌دهد که هر چه شتاب مرکزگرا زیاد باشد، تندی اولیه‌ی پرتابه نیز زیادتر، و مسافت پیموده شده توسط سنگ نیز بیشتر خواهد بود. این همان چیزی است که انتظار داشتیم.

••• ۶۸ گربه‌ای روی صفحه‌ی چرخانی سوار است که حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام می‌دهد. در زمان $t_1 = 2.00\,s$ سرعت گربه، که در یک دستگاه مختصات افقی xy اندازه‌گیری شده است، $\vec{v}_1 = (3.00\,m/s)\hat{i} + (4.00\,m/s)\hat{j}$ است. در زمان $t_2 = 5.00\,s$ سرعت گربه $\vec{v}_2 = (-3.00\,m/s)\hat{i} + (-4.00\,m/s)\hat{j}$ است. (الف) بزرگی و شتاب مرکزگرای گربه، و (ب) شتاب متوسط گربه درباره‌ی زمان $t_2 - t_1$، کمتر از یک‌دوره‌ی تناوب، چیست؟

حل: می‌دانیم که پس از گذشت سه ثانیه ($t_2 - t_1 = 3.00\,s$)، سرعت (برای این جسم در حرکت دایره‌ای با دوره‌ی تناوب T) معکوس می‌شود؛ بنابراین سه ثانیه طول می‌کشد تا جسم به طرف مخالف دایره برسد. درنتیجه $T = 2(3.00\,s) = 6.00\,s$ است.

(الف) با استفاده از معادله‌ی ۴-۳۵ داریم $r = vT/2\pi$، که در آن $v = \sqrt{(3.00\,m/s)^2 + (4.00\,m/s)^2} = 5.00\,m/s$ است و $r = 4.77\,m$ به دست می‌آید. پس، بزرگی شتاب مرکزگرای جسم $a = v^2/r = 5.24\,m/s^2$ است.

(ب) شتاب متوسط از معادله‌ی ۴-۱۵ به دست می‌آید:

$$\vec{a}_{avg} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

$$= \frac{(-3.00\hat{i} - 4.00\hat{j})m/s - (3.00\hat{i} + 4.00\hat{j})m/s}{5.00\,s - 2.00\,s}$$

$$= (-2.00\,m/s^2)\hat{i} + (-2.67\,m/s^2)\hat{j}$$

بنابراین بزرگی شتاب متوسط برابر است با

$$|\vec{v}_{avg}| = \sqrt{(-2.00\,m/s^2)^2 + (-2.67\,m/s^2)^2} = 3.33\,m/s^2$$

پودمان ۴-۶ حرکت نسبی یک بعدی

• ۶۹ فیلم‌برداری در حالی که بر روی خودرو روبازی سوار است با تندی $20\,km/h$ به سمت باختر حرکت می‌کند و از یک یوزپلنگ فیلم برمی‌دارد. یوزپلنگ با تندی $30\,km/h$ به سمت باختر می‌دود. یکی از اعضای گروه فیلم‌برداری که در کنار مسیر حرکت یوزپلنگ ایستاده است متوجه می‌شود که یوزپلنگ ناگهان می‌ایستد، برمی‌گردد و با تندی $45\,km/h$ به سمت خاور می‌دود. تغییر سرعت این حیوان ۲٫۰ ثانیه طول می‌کشد. (الف) بزرگی و (ب) جهت شتاب حیوان نسبت به فیلم‌بردار و (پ) بزرگی و (ت) جهت شتاب حیوان نسبت به عضو گروه چیست؟

حل: ابتدا با استفاده از سرعت‌ها نسبت به خودرو (که با t مشخص می‌شود) و سپس سرعت‌ها نسبت به زمین (که با g مشخص می‌شود)، معادله‌ی ۴-۱۵ را به کار می‌بریم. تندی‌ها عبارت‌اند از $۲۰\,km/h \rightarrow ۵/۶\,m/s$ ،$۳۰\,km/h \rightarrow ۸/۳\,m/s$، و $۴۵\,km/h \rightarrow ۱۲/۵\,m/s$. جهت شرق را در جهت $+\hat{i}$ انتخاب می‌کنیم.

(الف) سرعت یوزپلنگ (که با c مشخص می‌شود) نسبت به خودرو در انتهای بازه‌ی زمانی $۲/۰\,s$ (با استفاده از معادله‌ی ۴-۴۴) برابر است با

$$\vec{v}_{ct} = \vec{v}_{cg} - \vec{v}_{tg} = (۱۲/۵\,m/s)\hat{i} - (-۵/۶\,m/s)\hat{i}$$
$$= (۱۸/۱\,m/s)\hat{i}$$

چون سرعت یوزپلنگ نسبت به خودرو در ابتدای بازه‌ی زمانی $۲/۰\,s$ به صورت $(-۸/۳\,m/s)\hat{i}$ است، بردار شتاب (متوسط) نسبت به فیلم‌بردار (در داخل خودرو) برابر است با

$$\vec{a}_{avg} = \frac{(۱۸/۱\,m/s)\hat{i} - (-۸/۳\,m/s)\hat{i}}{۲/۰\,s} = (۱۳\,m/s^۲)\hat{i}$$

بزرگی این شتاب $|\vec{a}_{avg}| = ۱۳\,m/s^۲$ است.

(ب) جهت $\vec{a}_{avg}$ در جهت $+\hat{i}$ یا به طرف خاور است.

(پ) سرعت یوزپلنگ نسبت به زمین در ابتدای بازه‌ی زمانی $۲/۰\,s$ (با استفاده از معادله‌ی ۴-۴۴) برابر است با

$$\vec{v}_{\circ cg} = \vec{v}_{\circ ct} + \vec{v}_{\circ tg} = (-۸/۳\,m/s)\hat{i} + (-۵/۶\,m/s)\hat{i}$$
$$= (-۱۳/۹\,m/s)\hat{i}$$

بردار شتاب (متوسط) نسبت به عضو گروه (در روی زمین) برابر است با

$$\vec{a}_{avg} = \frac{(۱۲/۵\,m/s)\hat{i} - (-۱۳/۹\,m/s)\hat{i}}{۲/۰\,s} = (۱۳\,m/s^۲)\hat{i}$$
$$|\vec{a}_{avg}| = ۱۳\,m/s^۲$$

که با نتیجه‌ی قسمت (الف) برابر است.

(ت) جهت $\vec{a}_{avg}$ در جهت $+\hat{i}$ یا به طرف خاور است.

* ۷۰ قایقی با تندی $۱۴\,km/h$ نسبت به آب رودخانه در خلاف جهت آب و در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. آب با تندی $۹/۰\,km/h$ نسبت به زمین جریان دارد. (الف) بزرگی و (ب) جهت سرعت قایق نسبت به زمین چیست؟ کودکی در قایق با تندی $۶/۰\,km/h$ نسبت به قایق از قسمت جلو به سمت عقب راه می‌رود. (پ) بزرگی و (ت) جهت سرعت کودک نسبت به زمین چیست؟

حل: جهت مخالف جریان آب را در جهت $+\hat{i}$ انتخاب می‌کنیم و از معادله‌ی ۴-۴۴ استفاده می‌کنیم.

(الف) پانویس b معرف قایق، w معرف آب، و g معرف زمین است:

$$\vec{v}_{bg} = \vec{v}_{bw} + \vec{v}_{wg} = (۱۴\,km/h)\hat{i} + (-۹/۰\,km/h)\hat{i}$$
$$= (۵\,km/h)\hat{i}$$

پس، بزرگی سرعت قایق نسبت به زمین $|\vec{v}_{bg}| = ۶\,km/h$ است.

(ب) جهت $\vec{v}_{bg}$ در جهت $+x$ یا درخلاف جهت جریان آب است.

(پ) کودک را با حرف c مشخص می‌کنیم و سرعت کودک نسبت به زمین برابر است با

$$\vec{v}_{cg} = \vec{v}_{cb} + \vec{v}_{bg} = (-۶\,km/h)\hat{i} + (۵\,km/h)\hat{i} = (-۱\,km/h)\hat{i}$$

(ت) سرعت کودک نسبت به زمین، $-۱\,km/s$ است.

** ۷۱ شخص به ظاهر مشکوکی با حداکثر تندی‌ای که می‌تواند سرتاسر یک پیاده‌رو متحرک را در مدت $۲/۵۰\,s$ می‌دود. ناگهان مأمورین نگهبانی سر می‌رسند. او برمی‌گردد و سرتاسر پیاده‌رو متحرک را با همان سرعت و در مدت $۱۰/۰\,s$ می‌دود تا به نقطه‌ی آغاز حرکتش می‌رسد. نسبت تندی دویدن شخص به تندی پیاده‌رو متحرک چیست؟

حل: وقتی شخص در جهت حرکت پیاده‌رو متحرک می‌دود (مسافت d را نسبت به زمین در مدت $t_۱ = ۲/۵۰\,s$ طی می‌کند)، از معادله‌ی ۴-۴۴ داریم

$$\frac{d}{t_۱} = v_{\text{شخص}} + v_{\text{پیاده رو}}$$

وقتی او برمی‌گردد و در خلاف جهت حرکت پیاده‌رو می‌دود (که $t_۲ = ۱۰/۰\,s$ طول می‌کشد)، داریم

$$\frac{d}{t_۲} = v_{\text{شخص}} - v_{\text{پیاده رو}}$$

از تقسیم این دو معادله به یکدیگر، نسبت تندی دویدن شخص به تندی پیاده‌رو متحرک به دست می‌آید:

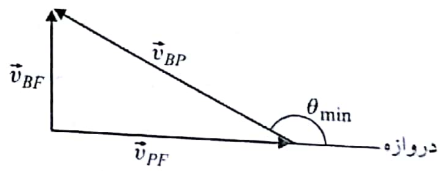
$$\frac{۱۲/۵}{۷/۵} = \frac{۵}{۳} = ۱/۶۷$$

پودمان ۴-۷ حرکت نسبی دو بعدی

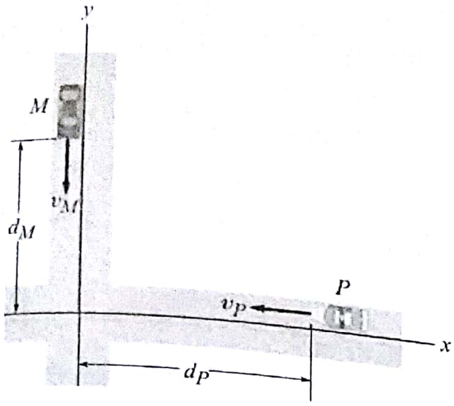
* ۷۲ یک بازیکن راگبی همراه با توپ یک راست به سمت دروازه‌ی مقابل در جهت مثبت محور x می‌دود. او بنا به مقررات می‌تواند توپ را به هم تیمی‌اش پاس بدهد به شرطی که سرعت توپ نسبت به زمین بازی مؤلفه‌ی x مثبت نداشته باشد. فرض کنید این بازیکن با تندی $4\,m/s$ نسبت به زمین بازی می‌دود و توپ را با سرعت $\vec{v}_{BP}$ نسبت به خود پاس می‌دهد. اگر بزرگی $\vec{v}_{BP}$ برابر با $6{,}0\,m/s$ باشد، کمترین زاویه‌ی پاس او بنا به مقررات چقدر می‌تواند باشد؟

حل: سرعت بازیکن را با $\vec{v}_{PF}$ و سرعت نسبی بین بازیکن و توپ را با $\vec{v}_{BP}$ نشان می‌دهیم. سپس سرعت $\vec{v}_{BF}$ توپ نسبت به زمین بازی را از رابطه‌ی $\vec{v}_{BF}=\vec{v}_{PF}+\vec{v}_{BP}$ به دست می‌آوریم. کوچک‌ترین زاویه‌ی θ_{min} مربوط به حالت $\vec{v}_{BF}\perp\vec{v}_{PF}$ است. بنابراین داریم

$$\theta_{min}=180^\circ-\cos^{-1}\left(\frac{|\vec{v}_{PF}|}{|\vec{v}_{BP}|}\right)=180^\circ-\cos^{-1}\frac{4\,m/s}{6{,}0\,m/s}=132^\circ$$



** ۷۳ دو بزرگ‌راه، مطابق شکل ۴-۴۶، یکدیگر را قطع می‌کنند. در لحظه‌ی نشان داده شده در شکل خودرو پلیس P، در فاصله‌ی $d_P=800\,m$ از محل تقاطع با تندی $v_P=80\,km/h$ در حال حرکت است. در همین زمان خودرو M در فاصله‌ی $d_M=600\,m$ از محل تقاطع با تندی $v_M=60\,km/h$ حرکت می‌کند. (الف) سرعت خودرو M نسبت به خودرو پلیس P، با نمادگذاری بردارهای یکه، چیست؟ (ب) در لحظه‌ی نشان داده شده در شکل ۴-۴۶، جهت سرعت پیدا شده در قسمت (الف) نسبت به خط دید وصل کننده‌ی دو خودرو چیست؟ (پ) اگر خودروها سرعت خود را حفظ کنند، در حین نزدیک شدن آن‌ها به محل تقاطع آیا پاسخ‌های قسمت‌های (الف) و (ب) تغییر می‌کنند؟



شکل ۴-۴۶ مسئله‌ی ۷۳.

حل: خودرو پلیس را با P و خودرو دیگر را با M نشان می‌دهیم. دستگاه محورهای مختصات در شکل ۴-۴۶ نشان داده شده است.

(الف) سرعت خودرو نسبت به خودرو پلیس برابر است با

$$\vec{v}_{MP}=\vec{v}_M-\vec{v}_P=(-60\,km/h)\,\hat{j}-(-80\,km/h)\,\hat{i}$$
$$=(80\,km/h)\,\hat{i}-(60\,km/h)\,\hat{j}$$

(ب) سرعت $\vec{v}_{MP}$ در راستای خط دید وصل کننده‌ی دو خودرو است. با توجه به شکل ۴-۴۶، بردار وصل کننده‌ی یک خودرو به خودرو دیگر به صورت $\vec{r}=(800\,m)\,\hat{i}-(600\,m)\,\hat{j}$ (از M به P) است. چون نسبت مؤلفه‌ها در بردار $\vec{r}$ مانند نسبت مؤلفه‌ها در بردار v_{MP} است، لذا آن‌ها باید هم‌جهت باشند.

(پ) خیر، تغییر نمی‌کنند.

** ۷۴ خلبان یک هواپیما پس از ۱۵ دقیقه پرواز در بادی که با تندی $42\,km/h$ تحت زاویه‌ی ۲۰ درجه نسبت به جنوب محور خاوری می‌وزد، به بالای شهری واقع در فاصله‌ی ۵۵ کیلومتری شمال نقطه‌ی شروع پروازش می‌رسد. تندی هواپیما نسبت به هوا چقدر است؟

حل: سرعت‌ها را ثابت در نظر می‌گیریم؛ در نتیجه سرعت هواپیما نسبت به زمین برابر است با

$$\vec{v}_{PG}=(55\,km)/(0{,}25\,h)\,\hat{j}=(220\,km/h)\,\hat{j}$$

علاوه بر این، داریم

$$v_{AG}=(42\,km/h)(\cos 20^\circ\hat{i}-\sin 20^\circ\hat{j})$$
$$=(39\,km/h)\,\hat{i}-(14\,km/h)\,\hat{j}$$

با استفاده از $\vec{v}_{PG} = \vec{v}_{PA} + \vec{v}_{AG}$ داریم

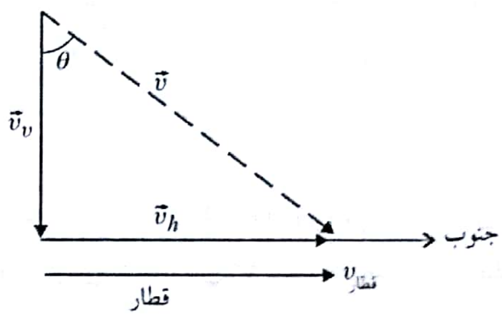
$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PG} - \vec{v}_{AG} = -(۳۹\,\mathrm{km/h})\hat{i} + (۱۴\,\mathrm{km/h})\hat{j} + ۲۲۰\hat{j}$$

در نتیجه تندی هواپیما نسبت به هوا برابر است با

$$|\vec{v}_{PA}| = ۲۳۷\,\mathrm{km/h}$$

** ۷۵ قطاری با تندی $۳۰\,\mathrm{m/s}$ (نسبت به زمین) به سمت جنوب حرکت می‌کند و قطره‌های باران به دلیل وزش باد متمایل به سوی جنوب فرو می‌ریزند. از دید ناظری که روی زمین ایستاده است، مسیر قطره‌های باران با راستای قائم زاویه‌ی ۷۰ درجه می‌سازند، اما از دید ناظری که در قطار نشسته است قطره‌های باران کاملاً به طور قائم می‌بارند. تندی قطره‌های باران را نسبت به زمین معین کنید.

حل: چون قطره‌های باران به طور قائم نسبت به قطار سقوط می‌کنند، مؤلفه‌ی افقی سرعت یک قطره‌ی باران، $v_h = ۳۰\,\mathrm{m/s}$، باید با تندی قطار مساوی باشد، یعنی $v_h = v_{\text{قطار}}$ (به شکل زیر نگاه کنید).



از طرف دیگر، اگر v_v مؤلفه‌ی قائم سرعت و θ زاویه‌ی بین جهت حرکت و راستای قائم باشد، در آن صورت داریم $\tan\theta = v_h / v_v$. با دانستن v_v و v_h، می‌توانیم تندی قطره‌های باران را تعیین کنیم.

به ازای $\theta = ۷۰^\circ$، مؤلفه‌ی قائم سرعت برابر است با

$$v_v = v_h / \tan\theta = (۳۰\,\mathrm{m/s}) / \tan ۷۰^\circ = ۱۰/۹\,\mathrm{m/s}$$

بنابراین، تندی یک قطره‌ی باران برابر است با

$$v = \sqrt{v_h^۲ + v_v^۲} = \sqrt{(۳۰\,\mathrm{m/s})^۲ + (۱۰/۹\,\mathrm{m/s})^۲} = ۳۲\,\mathrm{m/s}$$

توجه: تا زمانی که مؤلفه‌ی افقی سرعت قطره‌های باران با تندی قطار برابر است، مسافرهای نشسته در درون قطار خواهند دید که باران به طور کاملاً قائم فرو می‌ریزد.

** ۷۶ یک هواپیمای سبک با تندی $۵۰۰\,\mathrm{km/h}$ نسبت به هوا در حال پرواز کردن است. خلبان به قصد مکانی که در فاصله‌ی ۸۰۰ کیلومتری قرار دارد پرواز می‌کند، اما متوجه می‌شود که برای پرواز مستقیم به آن مکان باید هواپیما را تحت زاویه‌ی ۲۰/۰ درجه‌ی خاور محور شمالی هدایت کند. این هواپیما پس از $۲/۰۰\,\mathrm{h}$ به آن مکان می‌رسد. (الف) بزرگی و (ب) جهت سرعت باد چیست؟

حل: بردار جابه‌جایی هواپیما $\vec{D} = ۸۰۰\,\mathrm{km}\,\hat{j}$ است که در آن محور $+y$ به طرف شمال و محور $+x$ به طرف خاور است. این جابه‌جایی دو ساعت طول می‌کشد، لذا سرعت (ثابت) هواپیما (نسبت به زمین)، $\vec{v}_{pg} = (۴۰۰\,\mathrm{km/h})\hat{j}$ است. این سرعت باید با مجموع سرعت هواپیما نسبت به هوا [با مؤلفه‌های $(x, y) = (۵۰۰\cos ۷۰^\circ, ۵۰۰\sin ۷۰^\circ)$]، و سرعت هوا (باد) نسبت به زمین، $\vec{v}_{ag}$، برابر باشد:

$$(۴۰۰\,\mathrm{km/h})\hat{j} = (۵۰۰\,\mathrm{km/h})\cos ۷۰^\circ\hat{i} + (۵۰۰\,\mathrm{km/h})\sin ۷۰^\circ\hat{j} + \vec{v}_{ag}$$

از این رابطه داریم:

$$\vec{v}_{ag} = (-۱۷۱\,\mathrm{km/h})\hat{i} - (۲۰\,\mathrm{km/h})\hat{j}$$

(الف) بزرگی سرعت باد برابر است با

$$|\vec{v}_{ag}| = \sqrt{(-۱۷۱\,\mathrm{km/h})^۲ + (-۲۰\,\mathrm{km/h})^۲} = ۱۷۲\,\mathrm{km/h}$$

(ب) جهت سرعت باد برابر است با

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-۲۰\,\mathrm{km/h}}{-۱۷۱\,\mathrm{km/h}}\right) = ۶/۷^\circ \quad \text{(جنوب باختری)}$$

** ۷۷ دانه‌های برف در راستای قائم و با تندی ثابت $۸/۰\,\mathrm{m/s}$ می‌بارند. از دید راننده‌ای که در یک جاده‌ی افقی و مستقیم با تندی $۵۰\,\mathrm{km/h}$ حرکت می‌کند، دانه‌های برف تحت چه زاویه‌ای نسبت به راستای قائم سقوط می‌کنند؟

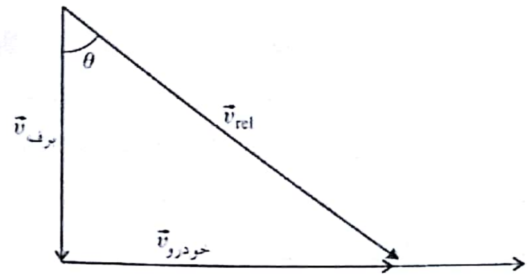
حل: این مسئله مربوط به حرکت نسبی در دو بعد است. دانه‌های برف که به طور قائم سقوط می‌کنند، به خاطر حرکت کردن ناظر، به نظر می‌رسد که تحت زاویه سقوط می‌کنند. سرعت دانه‌های برف نسبت به خودرو دارای یک مؤلفه‌ی قائم $v_v = ۸/۰\,\mathrm{m/s}$ و یک مؤلفه‌ی افقی $v_h = ۵۰\,\mathrm{km/h} = ۱۳/۹\,\mathrm{m/s}$ است. زاویه‌ی θ

نسبت به راستای قائم، از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

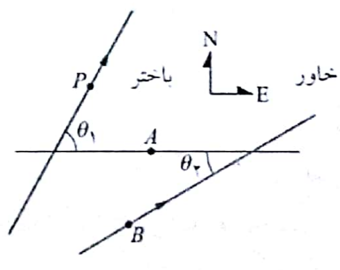
$$\tan\theta = \frac{v_h}{v_v} = \frac{۱۳٫۹\ m/s}{۸٫۰\ m/s} = ۱٫۷۴$$

که از آنجا $\theta = ۶۰°$ به دست می‌آید.

توجه: این مسئله را با نوشتن رابطه‌ی سرعت برحسب نمادگذاری برداری نیز می‌توان حل کرد: همان‌طور که شکل زیر نشان می‌دهد، $\vec v_{\mathrm{rel}} = \vec v_{خودرو} + \vec v_{برف}$ است.



** ۷۸ شکل ۴-۴۷، دو خودرو جیپ P و B را نشان می‌دهد که در طول خط‌های راست در زمینی تخت با هم مسابقه گذاشته‌اند و از کنار پست مرزبانی A می‌گذرند. خودرو B نسبت به مرزبانی با تندی ثابت $۲۰٫۰\ m/s$ تحت زاویه‌ی $\theta_2 = ۳۰٫۰°$ حرکت می‌کند. خودرو P نسبت به مرزبانی با شتاب ثابت $۰٫۴۰۰\ m/s^2$ از حال سکون و تحت زاویه‌ی $\theta_1 = ۶۰٫۰°$ به حرکت درمی‌آید. تندی خودرو P در زمان معینی از شتاب گرفتن $۴۰٫۰\ m/s$ است. در آن زمان، (الف) بزرگی و (ب) جهت سرعت خودرو P نسبت به خودرو B، و (پ) بزرگی و (ت) جهت شتاب خودرو P نسبت به خودرو B، چیست؟



شکل ۴-۴۷ مسئله‌ی ۷۸.

حل: از معادلات ۴-۴۴ و ۴-۴۵ استفاده می‌کنیم.

سرعت جیپ P نسبت به پست مرزبانی A در آن زمان برابر است با

$$\vec v_{PA} = (۴۰٫۰\ m/s)(\cos ۶۰°\hat i + \sin ۶۰°\hat j) = (۲۰٫۰\ m/s)\hat i + (۳۴٫۶\ m/s)\hat j$$

به طور مشابه، سرعت جیپ B نسبت به پست مرزبانی A در آن زمان برابر است با

$$\vec v_{BA} = (۲۰٫۰\ m/s)(\cos ۳۰°\hat i + \sin ۳۰°\hat j) = (۱۷٫۳\ m/s)\hat i + (۱۰٫۰\ m/s)\hat j$$

بنابراین، سرعت P نسبت به B برابر است با

$$\vec v_{PB} = \vec v_{PA} - \vec v_{BA} = (۲۰٫۰\hat i + ۳۴٫۶\hat j)\ m/s - (۱۷٫۳\hat i - ۱۰٫۰\hat j)\ m/s = (+۲٫۷\ m/s)\hat i + (۲۴٫۶\ m/s)\hat j$$

(الف) بزرگی $\vec v_{PB}$ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$|\vec v_{PB}| = \sqrt{(+۲٫۷\ m/s)^2 + (۲۴٫۶\ m/s)^2} = ۲۴٫۷\ m/s$$

(ب) جهت $\vec v_{PB}$ از رابطه‌ی زیر مشخص می‌شود

$$\theta = \tan^{-1}[(۲۴٫۷\ m/s)/(+۲٫۷۰\ m/s)] = ۸۳٫۷۶°$$

که ۸۵٫۶ درجه‌ی شمال محور خاوری است.

(پ) شتاب P برابر است با

$$\vec a_{PA} = (۰٫۴۰۰\ m/s^2)(\cos ۶۰٫۰°\hat i + \sin ۶۰٫۰°\hat j) = (۰٫۲۰۰\ m/s^2)\hat i + (۰٫۳۴۶\ m/s^2)\hat j$$

و داریم $\vec a_{PA} = \vec a_{PB}$. در نتیجه، $|\vec a_{PB}| = ۰٫۴۰۰\ m/s^2$ است.

(ت) جهت شتاب خودرو P نسبت به خودرو B تحت زاویه‌ی $۶۰٫۰°$ شمال محور خاوری (یا تحت زاویه‌ی $۳۰٫۰°$ خاور محور شمالی) است.

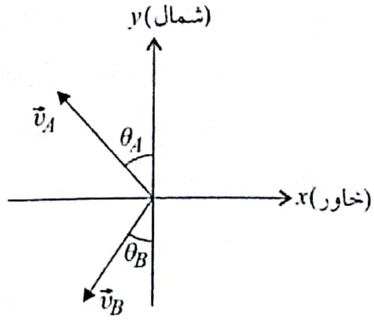
** ۷۹ دو کشتی A و B به طور همزمان بندری را ترک می‌کنند. کشتی A با تندی ۲۴ گره به سمت شمال باختری و کشتی B با تندی ۲۸ گره در جهت ۴۰ درجه‌ی باختر محور جنوبی حرکت می‌کند (یک گره برابر با یک مایل دریایی بر ساعت است، پیوست ت را ببینید). (الف) بزرگی و (ب) جهت سرعت کشتی A نسبت به کشتی B چیست؟ (پ) پس از چه مدت فاصله‌ی دو کشتی ۱۶۰ مایل دریایی خواهد بود (هر مایل دریایی $۱۸۵۳\ m$ است). (ت) در این لحظه کشتی B نسبت به کشتی A در چه جهتی (جهت مکان کشتی B) دیده می‌شود؟

حل: با معلوم بودن $\theta_A = ۴۵°$ و $\theta_B = ۴۰°$ مطابق شکل، بردارهای سرعت (نسبت به ساحل) برای کشتی‌های A و B عبارت‌اند از

$$\vec v_A = -(v_A\cos ۴۵°)\hat i + (v_A\sin ۴۵°)\hat j$$

$$\vec v_B = -(v_B\sin ۴۰°)\hat i - (v_B\cos ۴۰°)\hat j$$

در این رابطه‌ها گره ۲۴ = v_A و گره ۲۸ = v_B است. خاور در جهت $+\hat{i}$ و شمال در جهت $\hat{j}$ انتخاب شده است.



(الف) سرعت نسبی کشتی A نسبت به کشتی B برابر است با

$$\vec v_{AB} = \vec v_A - \vec v_B = (v_B \sin ۴۰° - v_A \cos ۴۵°)\hat i + (v_B \cos ۴۰° + v_A \sin ۴۵°)\hat j = (\text{۱٫۰۳ گره})\hat i + (\text{۳۸٫۴ گره})\hat j$$

بزرگی این سرعت برابر است با

$$|\vec v_{AB}| = \sqrt{(\text{۱٫۰۳ گره})^۲ + (\text{۳۸٫۴ گره})^۲} \simeq \text{۳۸٫۴ گره}$$

(ب) زاویه‌ی θ_{AB} که بردار $\vec v_{AB}$ با شمال می‌سازد از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\theta_{AB} = \tan^{-1}\left(\frac{v_{AB,x}}{v_{AB,y}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\text{۱٫۰۳ گره}}{\text{۳۸٫۴ گره}}\right) = ۱٫۵°$$

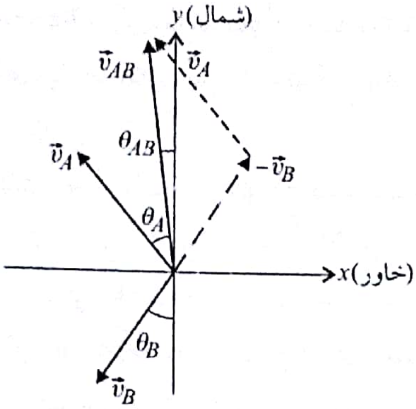
می‌توان گفت که $\vec v_{AB}$ به اندازه‌ی زاویه‌ی $۱٫۵°$ در خاور محور شمالی قرار دارد.

(پ) چون هر دو کشتی در یک زمان به راه افتاده‌اند، سرعت نسبی آن‌ها آهنگ افزایش فاصله را نشان می‌دهد. چون این آهنگ ثابت است، داریم

$$t = \frac{|\Delta r_{AB}|}{|\vec v_{AB}|} = \frac{\text{۱۶۰ گره دریایی}}{\text{۳۸٫۴ گره}} = ۴٫۲\,h$$

(ت) در این مسئله $\vec v_{AB}$ با زمان تغییر نمی‌کند، و $\vec r_{AB}$ در همان جهت $\vec v_{AB}$ است زیرا آن‌ها هم‌زمان به‌راه افتاده‌اند. اگر نقطه‌ی دید را معکوس کنیم، داریم $\vec v_{AB} = -\vec v_{BA}$، در نتیجه $\vec r_{AB} = -\vec r_{BA}$ (یعنی $۱۸۰°$ با هم اختلاف دارند). بنابراین، نتیجه می‌گیریم که در این مسافرت، کشتی B نسبت به کشتی A تحت زاویه‌ی $۱٫۵°$ در غرب محور جنوبی قرار دارد (از انحنای زمین چشم‌پوشی می‌شود).

توجه: سرعت نسبی در شکل بالا نشان داده شده است. وقتی حرکت نسبی را در دو بعد تحلیل می‌کنیم، نمودار برداری مانند آن‌چه نشان داده شده است بسیار کمک کننده خواهد بود.



** ۸۰ رودخانه‌ای به پهنای ۲۰۰m با تندی یکنواخت ۲٫۰m/s از میان جنگل به سمت خاور جاری است. قایقی با تندی ۸٫۰m/s نسبت به آب رودخانه از ساحل جنوبی در جهت ۳۰ درجه‌ی باختر محور شمالی به راه می‌افتد. (الف) بزرگی و (ب) جهت سرعت قایق نسبت به زمین چیست؟ (پ) چه مدت طول می‌کشد تا قایق پهنای رودخانه را بپیماید؟

حل: این یک مسئله‌ی کلاسیک در مورد حرکت نسبی دوبعدی است. محورهای مختصات را طوری انتخاب می‌کنیم که ***خاور*** در جهت $+x$ و ***شمال*** در جهت $+y$ باشد. معادله‌ی جمع برداری را به صورت $\vec v_{BG} = \vec v_{BW} + \vec v_{WG}$ می‌نویسیم. می‌دانیم که $\vec v_{WG} = (۲٫۵\angle ۰°)$ برحسب نمادگذاری بزرگی ـ زاویه و $\vec v_{WG} = ۲٫۰\hat i$ برحسب نمادگذاری بردارهای یکه است. هم‌چنین داریم $\vec v_{BW} = (۸٫۰\angle ۱۲۰°)$، که در آن زاویه در جهت پادساعتگرد نسبت به محور $+x$ اندازه‌گیری شده است، یا داریم:

$$\vec v_{BW} = (-۴٫۰\hat i + ۶٫۹\hat j)\,m/s$$

(الف) از معادله‌ی جمع برداری، $\vec v_{BG}$ را به دست می‌آوریم:

$$\vec v_{BG} = \vec v_{BW} + \vec v_{WG} = (۲٫۰\,m/s)\hat i + (-۴٫۰ i + ۶٫۹\hat j)\,m/s$$
$$= (-۲\,m/s)\hat i + (۶٫۹\,m/s)\hat j$$

در نتیجه $|\vec v_{BG}| = ۷٫۲\,m/s$ به دست می‌آید.

(ب) جهت $\vec v_{BG}$ عبارت است از $\theta = \tan^{-1}[(۶٫۹\,m/s)/(-۲\,m/s)] = ۱۰۶°$ (در جهت پادساعتگرد نسبت به محور $+x$)، یا $۱۶°$ در باختر محور شمالی.

(پ) سرعت ثابت است، و ما از رابطه‌ی $y - y_۰ = v_y t$ در یک چارچوب مرجع استفاده می‌کنیم. بنابراین، در چارچوب مرجع ***زمین*** داریم: $(۲۰۰\,m) = (۷٫۲\,m/s)\sin(۱۰۶°)t$ یا $t = ۲۹\,s$.

توجه: اگر عدد «۲۸s» را به دست بیاورید، احتمالاً مؤلفه‌ی y را به درستی به کار نبرده‌اید. (اشتباهی که معمولاً صورت می‌گیرد)

❀❀ ۸۱ کشتی A به فاصله‌ی ۴٫۰km در سمت شمال و به فاصله‌ی ۲٫۵km در سمت خاور کشتی B قرار دارد. سرعت کشتی A با بزرگی ۲۲km/h به سمت جنوب و سرعت کشتی B با بزرگی ۴۰km/h در جهت ۳۷° شمال محور خاوری است. (الف) سرعت A نسبت به B با نمادگذاری بردارهای یکه، که در آن $\hat{i}$ به سمت خاور است، چیست؟ (ب) رابطه‌ی مربوط به بردار مکان A نسبت به B را (برحسب $\hat{i}$ و $\hat{j}$) به صورت تابعی از t بنویسید. به‌ازای $t=۰$ کشتی‌ها در مکان‌های ذکر شده قرار دارند. (پ) در چه زمانی کشتی‌ها با هم کم‌ترین فاصله را دارند؟ (ت) مقدار این کم‌ترین فاصله چیست؟

حل: در اینجا آب را با W مشخص می‌کنیم. دستگاه محورهای مختصات را طوری انتخاب می‌کنیم که $+x$ به طرف خاور و $+y$ به طرف شمال باشد. بنابراین، زاویه‌ی مشخص کننده‌ی خاور، ۰° و زاویه‌ی مشخص کننده‌ی جنوب، ۹۰°- یا ۲۷۰° خواهد بود.

(الف) داریم $\vec{v}_{AW} = \vec{v}_{AB} + \vec{v}_{BW}$، در نتیجه با نمادگذاری بزرگی - زاویه خواهیم داشت

$$\vec{v}_{AB} = (۲۲^\circ\angle -۹۰^\circ) - (۴۰^\circ\angle ۳۷^\circ) = (۵۶^\circ\angle -۱۲۵^\circ)$$

این مقدار را به‌صورت مؤلفه‌های دستگاه محورهای متعامد می‌نویسیم:

$$\vec{v}_{AB} = (-۳۲\,\text{km/h})\hat{i} - (۴۶\,\text{km/h})\hat{j}$$

(ب) چون مؤلفه‌های سرعت ثابت هستند، از آن‌ها انتگرال می‌گیریم تا مکان مشخص شود ($\vec{r} - \vec{r}_\circ = \int \vec{v}dt$):

$$\vec{r} = (۲٫۵ - ۳۲t)\hat{i} + (۴٫۰ - ۴۶t)\hat{j}(\text{km})$$

(پ) بزرگی بردار $\vec{r}$ برابر است با

$$\vec{r} = \sqrt{(۲٫۵ - ۳۲t)^۲ + (۴٫۰ - ۴۶t)^۲}$$

برای پیدا کردن کم‌ترین مقدار، از این رابطه مشتق می‌گیریم و آن را مساوی با صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{۱}{۲}\frac{۶۲۸۶t - ۵۲۸}{\sqrt{(۲٫۵ - ۳۲t)^۲ + (۴٫۰ - ۴۶t)^۲}} = ۰$$

در نتیجه $t = ۰٫۰۸۴\,\text{h}$ به دست می‌آید.

(ت) این مقدار t را در رابطه‌ی فاصله‌ی بین کشتی‌ها (r) قرار می‌دهیم، در نتیجه $r = ۰٫۲\,\text{km}$ به دست می‌آید.

❀❀ ۸۲ در رودخانه‌ای به پهنای ۲۰۰m، که از میان جنگلی به سمت خاور عبور می‌کند، آب با تندی یکنواخت ۱٫۱m/s جریان دارد. کاوشگری می‌خواهد از یک جای بی‌درخت واقع در ساحل جنوبی رودخانه با قایقی تندرو با تندی ۴٫۰m/s نسبت به جریان آب، از رودخانه عبور کند. نقطه‌ی مورد نظر کاوشگر در آن سوی رودخانه نسبت به نقطه‌ی مقابل شروع حرکتش در ساحل جنوبی، به فاصله‌ی ۸۲m در بالادست جریان آب قرار دارد. (الف) کاوشگر قایق را در چه جهتی باید هدایت کند تا بتواند به خط راست از نقطه‌ی شروع حرکت به نقطه‌ی مورد نظر در ساحل شمالی برسد؟ (ب) چه مدت طول می‌کشد تا قایق از رودخانه بگذرد؟

حل: یک مثلث قائم‌الزاویه رسم می‌کنیم که از ساحل جنوبی شروع می‌شود، خط راستی (به طول ۲۰۰m) به طرف شمال (در نمودار، به طرف بالا) در عرض رودخانه رسم می‌کنیم، سپس یک خط به طرف باختر (در خلاف جریان آب، در نمودار به طرف چپ) در طول ساحل شمالی، به طول $(۸۲\,\text{m}) + (۱٫۱\,\text{m/s})t$ رسم می‌کنیم که در اینجا جمله ی مستقل از t، مسافتی است که آب رودخانه در مدت t قایق را در جهت آب حرکت می‌دهد. وتر این مثلث قائم‌الزاویه (نمودار با پیکان مشخص شده است)، به t و به تندی قایق (نسبت به آب) بستگی دارد، و بر طبق قضیه فیثاغورس با «مجموع» دو ضلع دیگر برابر است:

$$(۴٫۰)t = \sqrt{(۲۰۰)^۲ + (۸۲ + ۱٫۱t)^۲}$$

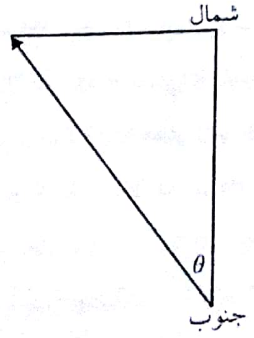
یا

$$۴۶۷۲۴ + ۱۸۰٫۴t - ۱۴٫۷۹t^۲ = ۰$$

(ب) از حل این معادله، مقدار مثبت $t = ۲۹٫۵۸\,\text{s}$ به دست می‌آید.

(الف) زاویه‌ی بین ضلع رو به شمال مثلث (۲۰۰ متر) و وتر (که به طرف باختر محور شمالی رسم شده است) برابر است با

$$\theta = \tan^{-۱}\left(\frac{۸۲ + ۱٫۱t}{۲۰۰}\right) = \tan^{-۱}\left(\frac{۱۳۵}{۲۰۰}\right) = ۳۴^\circ$$



مسئله‌های بیشتر

۸۳ شخصی می‌تواند یک قایق پارویی را در آب ساکن با تندی ۶٫۴km/h براند. او می‌خواهد از رودخانه‌ای مستقیم به پهنای ۶٫۴km، که در آن تندی جریان آب ۳٫۲km/h است، بگذرد. فرض کنید $\hat{i}$ در جهت پهنای رودخانه و $\hat{j}$ در جهت پایین رود باشد. اگر شخص بخواهد در یک خط راست به سوی نقطه‌ای درست در مقابل نقطه‌ی شروع حرکتش پارو بزند، (الف) قایق را باید تحت چه زاویه‌ای نسبت به $\hat{i}$ براند، و (ب) چه مدت طول می‌کشد تا پهنای رودخانه را بپیماید؟ (پ) اگر شخص ۳٫۲km ***در جهت پایین رود*** پارو بزند و سپس به نقطه‌ی شروع حرکتش برگردد، چه مدت طول می‌کشد؟ (ت) اگر او ۳٫۲km ***در جهت بالا رود*** پارو بزند و سپس به نقطه‌ی شروع حرکتش برگردد، چه مدت طول می‌کشد؟ (ث) اگر شخص بخواهد در کوتاه‌ترین زمان ممکن پهنای رودخانه را بپیماید، قایق را باید تحت چه زاویه‌ای نسبت به $\hat{i}$ براند؟ (ج) این کوتاه‌ترین زمان چقدر است؟

حل: محورهای مختصات را طوری انتخاب می‌کنیم که $\hat{i}$ در جهت پهنای رودخانه و به سوی نقطه‌ای درست در مقابل نقطه‌ی شروع حرکت (عمود بر جریان آب) و $\hat{j}$ در جهت جریان آب باشد. می‌دانیم که بزرگی (بنا به فرض ثابت) سرعت قایق نسبت به آب $|\vec{v}_{bw}| = ۶٫۴\ \text{km/h}$ است. زاویه‌ی این سرعت نسبت به محور x مساوی با θ است. سرعت آب (نسبت به زمین) $\vec{v}_{wg} = (۳٫۲\ \text{km/h})\hat{j}$ است.

(الف) رسیدن به نقطه‌ای درست در مقابل نقطه‌ی شروع حرکت به این معنی است که سرعت قایق نسبت به زمین باید $\vec{v}_{bg} = v_{bg}\hat{i}$ باشد که در آن $v_{bg} > ۰$ مجهول است. بنابراین، همه‌ی مؤلفه‌های $\hat{j}$ در جمع برداری $\vec{v}_{bw} + \vec{v}_{wg} = \vec{v}_{bg}$ باید اثر یکدیگر را خنثی کنند، یعنی $\vec{v}_{wg}\sin\theta = (-۳٫۲\ \text{km/h})\hat{j}$ و در نتیجه داریم:

$$\theta = \sin^{-1}[(-۳٫۲\ \text{km/h})/(۶٫۴\ \text{km/h})] = -۳۰^\circ$$

(ب) با استفاده از نتیجه‌ی قسمت (الف)، $v_{bg} = v_{bw}\cos\theta = ۵٫۵\ \text{km/h}$ به دست می‌آید. پس، مدت زمان لازم برای پیمودن مسافت $l = ۶٫۴\ \text{km}$ برابر است با

$$(۶٫۴\ \text{km})/(۵٫۵\ \text{km/h}) = ۱٫۱۵\ \text{h} = ۶۹\ \text{min}$$

(پ) اگر حرکت شخص به طور کامل در راستای محور y باشد (آن‌طور که از صورت مسئله برمی‌آید)، در آن صورت به ازای $v_{wg} = ۳٫۲\ \text{km/h}$ (تندی آب) و $D = ۳٫۲\ \text{km}$ داریم

$$t_{\text{کل}} = \frac{D}{v_{bw} + v_{wg}} + \frac{D}{v_{bw} - v_{wg}} = ۱٫۳۳\ \text{h}$$

این مقدار معادل ۸۰min است.

(ت) چون $\frac{D}{v_{bw}+v_{wg}} + \frac{D}{v_{bw}-v_{wg}} = \frac{D}{v_{bw}-v_{wg}} + \frac{D}{v_{bw}+v_{wg}}$

پاسخ مانند قسمت قبلی، یعنی $t_{\text{کل}} = ۸۰\text{min}$ است.

(ث) برای آن‌که زمان عبور از رودخانه کوتاه‌ترین باشد، باید $\theta = ۰^\circ$ باشد. برای نشان دادن این امر، در حالت کلی برای θ داریم

$$\vec{v}_{bg} = \vec{v}_{bw} + \vec{v}_{wg} = v_{bw}\cos\theta\,\hat{i} + (v_{bw}\sin\theta + v_{wg})\,\hat{j}$$

که در آن مؤلفه‌ی v_{bg} باید مساوی با l/t باشد. در نتیجه خواهیم داشت

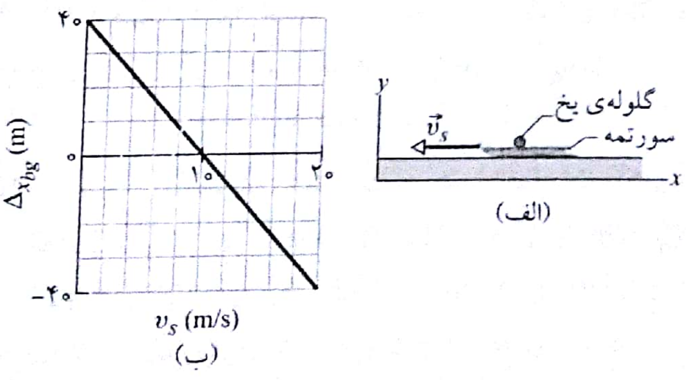
$$t = \frac{l}{v_{bw}\cos\theta}$$

که به ازای $dt/d\theta = ۰$ مقدار کوتاه‌ترین زمان به دست می‌آید.

(ج) رابطه‌ی بالا نشان می‌دهد که

$$t = (۶٫۴\ \text{km})/(۶٫۴\ \text{km/h}) = ۱٫۰\ \text{h} = ۶۰\ \text{min}$$

۸۴ در شکل ۴-۴۸ الف، از سورتمه‌ای که با تندی ثابت v_s در جهت منفی محور x حرکت می‌کند، یک گلوله‌ی یخ با سرعت $\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}$ نسبت به سورتمه پرتاب می‌شود. وقتی گلوله فرود می‌آید جابه‌جایی افقی‌اش Δx_{bg}، نسبت به زمین (یعنی از مکان پرتاب تا مکان فرود آمدن به زمین) اندازه‌گیری می‌شود. شکل ۴-۴۸ ب، نمودار تغییرات Δx_{bg} را به صورت تابعی از v_s نشان می‌دهد. فرض کنید گلوله‌ی یخ تقریباً در همان ارتفاعی که از آن پرتاب شده است، فرود می‌آید. مقادیر



شکل ۴-۴۸ مسئله‌ی ۸۴

(الف) $v_{\circ x}$ و (ب) $v_{\circ y}$ را معین کنید. جابه‌جایی گلوله Δx_{bs}، نسبت به سورتمه را نیز می‌توان اندازه‌گیری کرد. فرض کنید سرعت سورتمه در لحظه‌ی پرتاب گلوله تغییر نمی‌کند. مقدار Δx_{bs} به ازای مقادیر v_s برابر با (الف) ۵٫۰m/s و (ب) ۱۵m/s، چیست؟

حل: سرعت پرتاب نسبت به سورتمه $\vec{v}_{\circ rel} = \vec{v}_{\circ x}\,\hat{i} + \vec{v}_{\circ y}\,\hat{j}$ است. چون حرکت سورتمه با تندی v_s در جهت منفی صورت می‌گیرد (توجه کنید که ما v_s را به صورت یک عدد مثبت در نظر می‌گیریم، لذا سرعت سورتمه $-v_s\hat{i}$ است)، سرعت پرتاب نسبت به زمین $\vec{v}_\circ = (v_{\circ x} - v_\circ)\,\hat{i} + v_{\circ y}\,\hat{j}$ است. بنابراین جابه‌جایی افقی و قائم (نسبت به زمین) برابر است با

$$x_{\text{فرود}} - x_{\text{پرتاب}} = \Delta x_{bg} = (v_{\circ x} - v_s)\,t_{\text{پرواز}}$$

$$y_{\text{فرود}} - y_{\text{پرتاب}} = \circ = v_{\circ y}\,t_{\text{پرواز}} + \frac{۱}{۲}(-g)(t_{\text{پرواز}})^{۲}$$

از ترکیب این دو معادله داریم

$$\Delta x_{bg} = \frac{۲v_{\circ x}\,v_{\circ y}}{g} - \left(\frac{۲v_{\circ y}}{g}\right)v_s$$

جمله‌ی اول مربوط به «عرض از مبداء» در روی نمودار، و جمله‌ی دوم (در داخل پرانتزها) مربوط به بزرگی «شیب» است. با توجه به شکل داریم

$$\Delta x_{bg} = ۴۰ - ۴v_s$$

از این‌جا $v_{\circ y} = (۴٫\circ s)(۹٫۸\,m/s^{۲})/۲ = ۱۹٫۶\,m/s$ به دست می‌آید که اطلاعات کافی برای به‌دست آوردن $v_{\circ x}$ را به ما می‌دهد.

(الف) $v_{\circ x} = ۴\circ g/۲v_{\circ y} = (۴\circ m)(۹٫۸m/s^{۲})(۳۹٫۲m/s) = ۱\circ m/s$

(ب) همان‌طور که در بالا حساب شد، $v_{\circ y} = ۱۹٫۶\,m/s$ است.

(پ) جابه‌جایی Δx_{bs} نسبت به سورتمه به تندی سورتمه بستگی ندارد، لذا داریم $\Delta x_{bs} = v_{\circ x}\,t_{\text{پرواز}} = ۴\circ m$.

(ت) مانند قسمت (پ)، جابه‌جایی Δx_{bs} نسبت به سورتمه، به تندی سورتمه بستگی ندارد و $\Delta x_{bs} = v_{\circ x}\,t_{\text{پرواز}} = ۴\circ m$.

۸۵ عده‌ای از دانشجویان رشته‌ی علوم سیاسی (که از دست شما عصبانی شده‌اند، زیرا گفته‌اید علوم سیاسی یک علم واقعی به شمار نمی‌آید) شما را می‌ربایند. اگرچه آنها چشمان شما را بسته‌اند شما می‌توانید، تندی خودرو آن‌ها را (از صدای موتور)، مدت زمان حرکت را (با شمردن ذهنی ثانیه‌ها)، و جهت حرکت را (با گردش به چپ و راست خودرو در دستگاه مختصات راست‌گوشه‌ی خیابان‌ها)، حدس بزنید. بر پایه‌ی این سرنخ‌ها، شما تندی، مدت و مسیر حرکت را چنین برآورد می‌کنید:
۵۰km/h به مدت ۲٫۰min، گردش °۹۰ به سمت راست،
۲۰km/h به مدت ۴٫۰min، گردش °۹۰ به سمت راست،
۲۰km/h به مدت ۶۰s، گردش °۹۰ به سمت چپ،
۵۰km/h به مدت ۶۰s، گردش °۹۰ به سمت راست،
۲۰km/h به مدت ۲٫۰min، گردش °۹۰ به سمت چپ،
۵۰km/h به مدت ۳۰s. در آن نقطه، (الف) در چه فاصله‌ای از نقطه‌ی شروع حرکت قرار دارید، و (ب) در چه جهتی نسبت به جهت آغازی حرکت قرار دارید؟

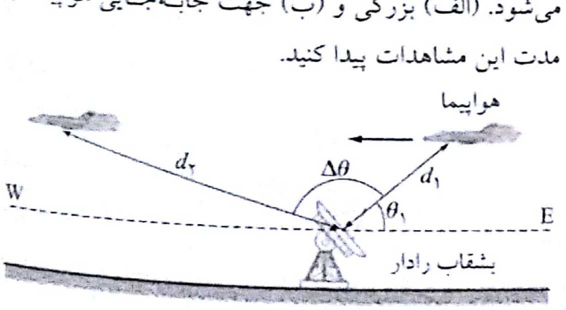
حل: با استفاده از رابطه‌ی زمان × سرعت = جابه‌جایی (برای هر قسمتی از مسیر حرکت که سرعت ثابت است)، جمع برداری زیر را داریم:

$$(۱۶۶۷\,m\angle ۰^\circ) + (۱۳۳۳\,m\angle -۹۰^\circ) + (۳۳۳\,m\angle ۱۸۰^\circ) +$$
$$+ (۸۳۳\,m\angle -۹۰^\circ) + (۶۶۷\,m\angle ۱۸۰^\circ) + (۴۱۷\,m\angle -۹۰^\circ)$$
$$= (۲۶۶۸\,m\angle -۷۶^\circ)$$

(الف) بنابراین، بزرگی جابه‌جایی برایند ۲٫۷km است.

(ب) جهت نسبت به جهت آغازی حرکت، تحت زاویه‌ی °۷۶ در جهت ساعتگرد است.

۸۶ در شکل ۴-۴۹، یک ایستگاه رادار متوجه می‌شود که هواپیمایی درست از جانب خاور در حال نزدیک شدن به ایستگاه است. در مشاهده‌ی اول هواپیما در فاصله‌ی $d_1 = ۳۶۰m$ و در جهت زاویه‌ی $\theta_1 = ۴۰^\circ$ بالای افق قرار دارد. آنگاه، هواپیما در صفحه‌ی قائم خاوری ـ باختری ردگیری و در فاصله‌ی $d_2 = ۷۹۰m$ تحت زاویه‌ی $\Delta\theta = ۱۲۳^\circ$ مشاهده می‌شود. (الف) بزرگی و (ب) جهت جابه‌جایی هواپیما را در مدت این مشاهدات پیدا کنید.



شکل ۴-۴۹ مسئله‌ی ۸۶

حل: از یک دستگاه محورهای مختصات که در آن $+x$ به طرف خاور و $+y$ به طرف بالا است، استفاده می‌کنیم.

(الف) متوجه می‌شویم که $۱۲۳°$ زاویه‌ی بین بردارهای مکان اولی و ثانوی است، لذا زاویه‌ی بردار مکان ثانوی نسبت به محور $+x$، $۴۰° + ۱۲۳° = ۱۶۳°$ است. بردارهای مکان برحسب بردارهای یکه عبارت‌اند از:

$$\vec{r}_1 = (۳۶۰\ \text{m})\cos(۴۰°)\,\hat{i} + (۳۶۰\ \text{m})\sin(۴۰°)\,\hat{j}$$

$$= (۲۷۶\ \text{m})\,\hat{i} + (۲۳۱\ \text{m})\,\hat{j}$$

$$\vec{r}_2 = (۷۹۰\ \text{m})\cos(۱۶۳°)\,\hat{i} + (۷۹۰\ \text{m})\sin(۱۶۳°)\,\hat{j}$$

$$= (-۷۵۵\ \text{m})\,\hat{i} + (۲۳۱\ \text{m})\,\hat{j}$$

در نتیجه با استفاده از معادله‌ی ۴-۳ داریم

$$\Delta\vec{r} = [(-۷۵۵\ \text{m}) - (۲۷۶\ \text{m})]\,\hat{i} + (۲۳۱\ \text{m} - ۲۳۱\ \text{m})\,\hat{j} = -(۱۰۳۱\ \text{m})\,\hat{i}$$

بزرگی بردار جابه‌جایی $\Delta\vec{r}$ مساوی با $|\Delta\vec{r}| = ۱۰۳۱\ \text{m}$ است.

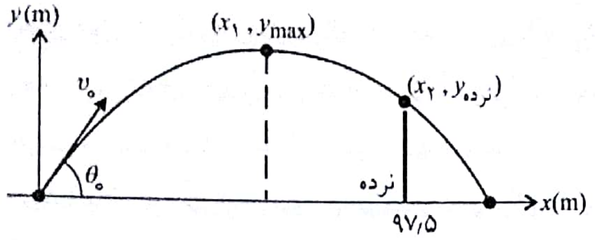
(ب) جهت $\Delta\vec{r}$ تحت زاویه‌ی صفر یا تقریباً $۱٫۴°$ به‌طرف شمال محورغربی است.

۸۷ توپ بیسبالی در اثر ضربه زدن از سطح زمین پرتاب می‌شود و $۳٫۰\text{s}$ پس از دریافت ضربه به ارتفاع بیشینه‌ی خود در بالای زمین می‌رسد. توپ $۲٫۵\text{s}$ پس از رسیدن به ارتفاع بیشینه با فاصله‌ی اندکی از روی نرده‌ای که $۹۷٫۵\ \text{m}$ تا نقطه‌ی ضربه خوردن فاصله دارد، عبور می‌کند. فرض کنید زمین تراز است. (الف) ارتفاع بیشینه‌ای که توپ به آن می‌رسد چقدر است؟ (ب) ارتفاع نرده چقدر است؟ (پ) توپ در چه فاصله‌ای از نرده به زمین برخورد می‌کند؟

حل: این مسئله مربوط به حرکت پرتابی بیسبال است. اطلاعات مربوط به مکان توپ در دو لحظه داده شده و تحلیل مسیر حرکت خواسته شده است.

مسیر حرکت توپ در شکل زیر نشان داده شده است. بر طبق صورت مسئله، در لحظه‌ی $t_1 = ۳٫۰\text{s}$، توپ به ارتفاع بیشینه‌ی y_{max} می‌رسد، و در لحظه‌ی $t_2 = t_1 + ۲٫۵\text{s} = ۵٫۵\text{s}$ از روی یک نرده‌ی واقع در $x_2 = ۹۷٫۵\ \text{m}$ عبور می‌کند. از معادله‌ی ۲-۱۵ برای حرکت قائم (محور y) و برای رسیدن به ارتفاع بیشینه (به‌ازای $t_1 = ۳٫۰\text{s}$ و $v_y = ۰$) استفاده می‌کنیم:

$$y_{max} - y_0 = v_y t - \frac{۱}{۲} g t^۲$$



(الف) سطح زمین را طوری در نظر می‌گیریم که $y_0 = ۰$ باشد و معادله‌ی بالا به صورت زیر در می‌آید

$$y_{max} = \frac{۱}{۲} g t_1^۲ = \frac{۱}{۲}(۹٫۸\ \text{m/s}^۲)(۳٫۰\ \text{s})^۲ = ۴۴٫۱\ \text{m}$$

(ب) بعد از لحظه‌ای که توپ به ارتفاع بیشینه رسید، به مدت $t_2 = t_1 + ۲٫۵\ \text{s} = ۵٫۵\ \text{s}$ فرود می‌آید و ارتفاع پایین رفتن آن $y_{\text{نرده}} - y_{max} = ۰ - \frac{۱}{۲} g (t_2 - t_1)^۲$ است. بنابراین، ارتفاع نرده برابر است با

$$y_{\text{نرده}} = y_{max} - \frac{۱}{۲} g (t_2 - t_1)^۲$$

$$= ۴۴٫۱\ \text{m} - \frac{۱}{۲}(۹٫۸\ \text{m/s}^۲)(۲٫۵\ \text{s})^۲ = ۱۳٫۴۸\ \text{m} \approx ۱۳\ \text{m}$$

(پ) چون مؤلفه‌ی افقی سرعت در مسئله حرکت پرتابی ثابت است (از مقاومت هوا چشمپوشی می‌شود)، از رابطه‌ی $۹۷٫۵\ \text{m} = v_{0x}(۵٫۵\ \text{s})$ مقدار $v_{0x} = ۱۷٫۷\ \text{m/s}$ به دست می‌آید. مدت زمان کل پرواز توپ $T = ۲t_1 = ۲(۳٫۰\ \text{s}) = ۶٫۰\ \text{s}$ است. بنابراین، برد توپ بیسبال برابر است با

$$R = v_{0x} T = (۱۷٫۷\ \text{m/s})(۶٫۰\ \text{s}) = ۱۰۶٫۴\ \text{m}$$

که نشان می‌دهد توپ پیش از برخورد به زمین، مسافت اضافی زیر را طی می‌کند

$$\Delta x = R - x_2 = ۱۰۶٫۴\ \text{m} - ۹۷٫۵\ \text{m} = ۸٫۸۶\ \text{m} \approx ۸٫۹\ \text{m}$$

توجه: قسمت (پ) را با توجه به این نکته نیز می‌توان حل کرد که توپ پس از عبور از بالای نرده، $۰٫۵\ \text{s}$ بعد به زمین برخورد می‌کند (به طوری که «زمان فرود» کامل با «زمان صعود» کامل برابر است). به ازای $v_{0x} = ۱۷٫۷\ \text{m/s}$، داریم

$$\Delta x = (۱۷٫۷\ \text{m/s})(۰٫۵۰\ \text{s}) = ۸٫۸۶\ \text{m}$$

۸۸ هواپیماها در پروازهای طولانی در عرض‌های جغرافیایی میانی در نیمکره‌ی شمالی با جریانی از هوا مواجه می‌شوند که به سمت خاور می‌وزد و می‌تواند روی تندی هواپیما نسبت به سطح زمین اثر بگذارد. اگر خلبان تندی هواپیما نسبت به هوا

(*تندی هوایی* هواپیما) را ثابت نگه دارد تندی هواپیما نسبت به سطح زمین (*تندی زمینی* هواپیما) در حالتی که پرواز در جهت جریان هوا باشد بیشتر از حالتی است که هواپیما در خلاف جهت جریان هوا پرواز می‌کند. یک پرواز رفت و برگشت بین دو شهر به فاصله‌ی $۵۰۰۰\,\mathrm{km}$ از یکدیگر را در نظر بگیرید، که در آن پرواز رفت در جهت جریان هوا و پرواز برگشت در خلاف جهت جریان هوا صورت می‌گیرد. رایانه‌ی شرکت هوایی برای این پرواز تندی هوایی $۱۰۰۰\,\mathrm{km/h}$ را پیشنهاد می‌کند، که در این صورت اختلاف زمان رفت و برگشت $۷۰٫۰\,\mathrm{min}$ خواهد بود. این رایانه برای تندی جریان هوا چه مقداری را در نظر گرفته است؟

حل: وقتی هواپیما در جهت جریان هوا (با تندی v_S) پرواز می‌کند، مدت زمان پرواز برابر است با

$$t_۱ = \frac{d}{v_{ja} + v_S}$$

که در آن $d = ۵۰۰۰\,\mathrm{km}$ فاصله‌ی بین دو شهر و v_{ja} تندی هواپیما جت نسبت به هوا $(۱۰۰۰\,\mathrm{km/h})$ است. وقتی هواپیما در خلاف جهت جریان هوا پرواز می‌کند، مدت زمان پرواز برابر است با

$$t_۲ = \frac{d}{v_{ja} - v_S}$$

می‌دانیم که $t_۲ - t_۱ = \frac{۷۰}{۶۰}\,\mathrm{h}$ است. از ترکیب این دو معادله و استفاده از حل معادله‌ی درجه دوم، پاسخ $v_S = ۱۱۵\,\mathrm{km/h}$ به‌دست می‌آید.

۸۹ ذره‌ای در زمان $t = ۰$ با سرعت $۸٫۰\hat{\mathrm{j}}\,\mathrm{m/s}$ از مبداء مختصات به‌راه می‌افتد و با شتاب ثابت $(۴٫۰\hat{\mathrm{i}} + ۲٫۰\hat{\mathrm{j}})\,\mathrm{m/s^۲}$ در صفحه‌ی xy حرکت می‌کند. وقتی مختصه‌ی x ذره، $۲۹\,\mathrm{m}$ است، (الف) مختصه‌ی y و (ب) تندی ذره چقدر است؟

حل: ذره با شتاب ثابت در یک صفحه‌ی دوبعدی حرکت می‌کند. چون مؤلفه‌های x و y شتاب ثابت‌اند، از جدول ۲-۱ برای حرکت در راستای هر دو محور استفاده می‌کنیم.

با استفاده از نمادگذاری برداری $\vec{r}_۰ = ۰$، مکان و سرعت ذره به‌صورت تابعی از زمان به ترتیب از روابط $\vec{r}(t) = \vec{v}_۰ t + \frac{۱}{۲}\vec{a}t^۲$ و $\vec{v}(t) = \vec{v}_۰ + \vec{a}t$ مشخص می‌شوند.

(الف) چون سرعت آغازی $\vec{v}_۰ = (۸٫۰\,\mathrm{m/s})\hat{\mathrm{j}}$ و شتاب $\vec{a} = (۴۰\,\mathrm{m/s^۲})\hat{\mathrm{i}} + (۲۰\,\mathrm{m/s^۲})\hat{\mathrm{j}}$ است، بردار مکان ذره عبارت است از

$$\vec{r} = \vec{v}_۰ t + \frac{۱}{۲}\vec{a}t^۲ = (۸٫۰\hat{\mathrm{j}})t + \frac{۱}{۲}(۴٫۰\hat{\mathrm{i}} + ۲٫۰\hat{\mathrm{j}})t^۲$$
$$= (۲٫۰t^۲)\hat{\mathrm{i}} + (۸٫۰t + ۱٫۰t^۲)\hat{\mathrm{j}}$$

بنابراین، به ازای $x = ۲۹\,\mathrm{m}$، مقدار زمان $t = ۳٫۸\,\mathrm{s}$ به دست می‌آید. مؤلفه‌ی y در آن زمان برابر است با

$$y = (۸٫۰\,\mathrm{m/s})(۳٫۸\,\mathrm{s}) + (۱٫۰\,\mathrm{m/s^۲})(۳٫۸\,\mathrm{s})^۲ = ۴۵\,\mathrm{m}$$

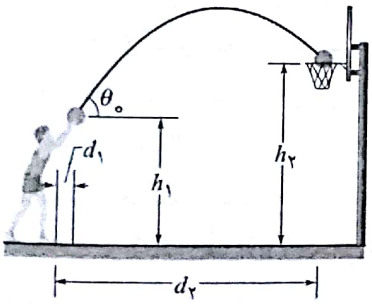
(ب) سرعت ذره از رابطه‌ی $\vec{v} = \vec{v}_۰ + \vec{a}t$ به دست می‌آید. بنابراین، در زمان $t = ۳٫۸\,\mathrm{s}$ سرعت ذره عبارت است از

$$\vec{v} = (۸٫۰\,\mathrm{m/s})\hat{\mathrm{j}} + ((۴٫۰\,\mathrm{m/s^۲})\hat{\mathrm{i}} + (۲٫۰\,\mathrm{m/s^۲})\hat{\mathrm{j}})(۳٫۸\,\mathrm{s})$$
$$= (۱۵٫۲\,\mathrm{m/s})\hat{\mathrm{i}} + (۱۵٫۶\,\mathrm{m/s})\hat{\mathrm{j}}$$

بزرگی این سرعت برابر است با

$$v = \sqrt{v_x^۲ + v_y^۲} = \sqrt{(۱۵٫۲\,\mathrm{m/s})^۲ + (۱۵٫۶\,\mathrm{m/s})^۲} = ۲۲\,\mathrm{m/s}$$

۹۰ در شکل ۴-۵۰، بازیکن بسکتبال توپ را با چه تندی آغازی‌ای تحت زاویه‌ی $\theta_۰ = ۵۵^\circ$ بالای افق پرتاب کند تا یک پرتاب موفق صورت گیرد؟ فاصله‌های افقی $d_۱ = ۱٫۰\,\mathrm{ft}$ و $d_۲ = ۱۴\,\mathrm{ft}$، و ارتفاع‌ها $h_۱ = ۷٫۰\,\mathrm{ft}$ و $h_۲ = ۱۰\,\mathrm{ft}$، هستند.



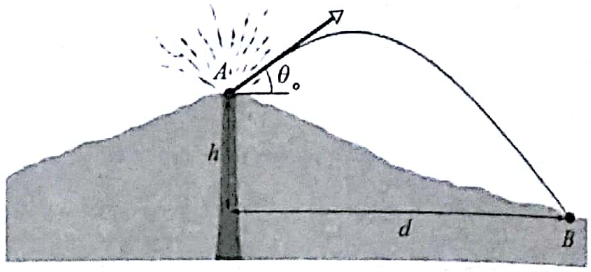
شکل ۴-۵۰ مسئله‌ی ۹۰.

حل: با استفاده از دستگاه مختصات فرضی به کار رفته برای معادله‌ی ۴-۲۵، تندی آغازی توپ به دست می‌آید

$$v_۰ = \frac{x}{\cos\theta_۰}\sqrt{\frac{g}{۲(x\tan\theta_۰ - y)}}$$

در نتیجه به ازای $g = ۳۲\,\mathrm{ft/s^۲}$، $x = ۱۳\,\mathrm{ft}$، $y = ۳\,\mathrm{ft}$ و $\theta_۰ = ۵۵^\circ$، داریم $v_۰ = ۲۳\,\mathrm{ft/s}$.

۹۱ در طی فوران‌های آتش‌فشانی، تکه‌های بزرگ سنگ‌های جامد می‌توانند از کوه به بیرون پرتاب شوند؛ این پرتابه‌ها را **بمب‌های آتش‌فشانی** می‌نامند. شکل ۴-۵۱، مقطع کوه فوجی را در ژاپن نشان می‌دهد. (الف) یک بمب با چه تندی آغازی‌ای تحت زاویه‌ی $\theta_0 = 35^\circ$ نسبت به راستای افقی باید پرتاب شود تا در نقطه‌ی B، واقع در بالای کوه، به فاصله‌ی قائم $h = 3.30\,\text{km}$ و فاصله‌ی افقی $d = 9.40\,\text{km}$ نسبت به نقطه‌ی درروِ A، فرود آید؟ در اینجا از اثرهای هوا بر روی حرکت بمب چشم‌پوشی می‌شود. (ب) مدت‌زمان پروازبمب چقدر است؟ (پ) آیا وجود اثرهای هوا پاسخ قسمت (الف) را افزایش می‌دهد یا کاهش؟



شکل ۴-۵۱ مسئله‌ی ۹۱.

حل: از معادله‌ی ۴-۲۵ استفاده می‌کنیم.

(الف) از ترتیب مجدد معادله‌ی ۴-۲۵، تندی آغازی بمب آتش‌فشانی به صورت زیر به دست می‌آید

$$v_0 = \frac{x}{\cos\theta_0}\sqrt{\frac{g}{2(x\tan\theta_0 - y)}}$$

که به ازای $x = 9400\,\text{m}$، $y = -3300\,\text{m}$، و $\theta_0 = 35^\circ$، تندی $v_0 = 255.5 \approx 2.6\times10^2\,\text{m/s}$ به دست می‌آید.

(ب) مدت زمان پرواز را از معادله‌ی ۴-۲۱ به دست می‌آوریم:

$$t = \frac{x}{v_0\cos\theta_0} = \frac{9400\,\text{m}}{(255.5\,\text{m/s})\cos 35^\circ} = 45\,\text{s}$$

(پ) ما انتظار داریم مقاومت هوا روی بمب اثر بگذارد، لذا تندی پرتاب باید بیشتر باشد تا بمب به همان هدف برسد.

۹۲ فضانوردی در داخل یک دستگاه آزمایش شتاب مرکزگریز افقی به شعاع $5.0\,\text{m}$ چرخانده می‌شود. (الف) اگر شتاب مرکزگرای فضانورد $7.0g$ باشد، تندی او چقدر است؟ (ب) این دستگاه در هر دقیقه چند دور باید بچرخد تا بتواند چنین شتابی را تولید کند؟ (پ) دوره‌ی تناوب حرکت چیست؟

حل: برای پیدا کردن تندی v از معادله‌ی ۴-۳۴ و برای پیدا کردن دوره‌ی تناوب T از معادله‌ی ۴-۳۵ استفاده می‌کنیم.

(الف) تندی برابر است با

$$v = \sqrt{ra} = \sqrt{(5.0\,\text{m})(7.0)(9.8\,\text{m/s}^2)} = 18.5\,\text{m/s}$$

(ب) مدت زمان یک دور کامل، $T = 2\pi r/v = 1.7\,\text{s}$ است. بنابراین، تعداد دورهایی که فضانورد در هر دقیقه $(t = 60\,\text{s})$ می‌زند برابر است با

$$\frac{t}{T} = \frac{60\,\text{s}}{1.7\,\text{s}} = 36$$

پس، برای تولید شتاب مرکزگرای $7g$ با شعاع دوران $5.0\,\text{m}$، تعداد دورهای دستگاه در هر دقیقه باید ۳۶ باشد.

(پ) دوره‌ی تناوب در قسمت (ب) مساوی با $T = 1.7\,\text{s}$ به‌دست آمد.

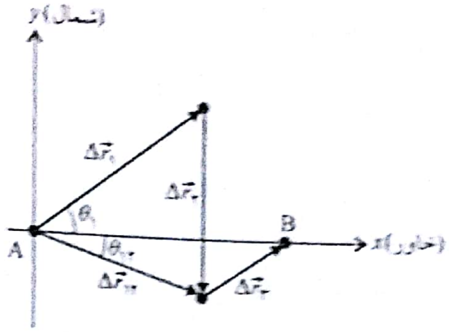
۹۳ آبادی A به فاصله‌ی $90\,\text{km}$ در باختر آبادی B قرار دارد. یک شتر بیابانی از آبادی A به راه می‌افتد و در مدت $50\,\text{h}$ مسافت $75\,\text{km}$ را در جهت ۳۷ درجه‌ی شمال محور خاوری می‌پیماید. سپس، شتر مسافت $65\,\text{km}$ را در مدت $35\,\text{h}$ به سمت جنوب می‌پیماید و پس از آن $5.0\,\text{h}$ استراحت می‌کند. (الف) بزرگی و (ب) جهت جابه‌جایی شتر در نقطه‌ی استراحت نسبت به آبادی A چیست؟ از لحظه‌ی ترک کردن آبادی A تا پایان استراحت، (پ) بزرگی و (ت) جهت سرعت متوسط و (ث) تندی متوسط شتر چیست؟ آخرین محل آب خوردن شتر در آبادی A بوده است، و حداکثر باید پس از $120\,\text{h}$ به آبادی B برسد تا دوباره آب بخورد. اگر شتر درست پس از این مدت به آبادی B برسد، (ج) بزرگی و (چ) جهت سرعت متوسط شتر پس از استراحت، چیست؟

حل: در این مسئله با حرکت دوبعدی یک شتر از آبادی A تا آبادی B سروکار داریم. در شکل زیر نحوه‌ی حرکت شتر را نشان داده‌ایم. با استفاده از جمع برداری، جابه‌جایی‌ها در دو بخش اول مسافرت را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\Delta\vec{r}_1 = (75\,\text{km})\cos(37^\circ)\,\hat{i} + (75\,\text{km})\sin(37^\circ)\,\hat{j}$$

$$\Delta\vec{r}_2 = (-65\,\text{km})\,\hat{j}$$

جابه‌جایی برایند $\Delta\vec{r}_{12} = \Delta\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_2$ است. همان‌طور که شکل نشان می‌دهد، برای رسیدن شتر به آبادی B، شتر باید جابه‌جایی اضافی $\Delta\vec{r}_3$ را انجام دهد.



(الف) جابه‌جایی‌های جداگانه را به صورت برداری با هم جمع می‌کنیم تا جابه‌جایی برایند شتر به دست آید:

$$\Delta\vec r_{12} = \Delta\vec r_1 + \Delta\vec r_2 = (60\,\mathrm{km})\hat i - (20\,\mathrm{km})\hat j$$

بزرگی جابه‌جایی برایند برابر است با

$$|\Delta\vec r_{12}| = \sqrt{(60\,\mathrm{km})^2 - (20\,\mathrm{km})^2} = 63\,\mathrm{km}$$

(ب) جهت جابه‌جایی برایند $\Delta\vec r_{12}$ به صورت $\theta_{12} = \tan^{-1}[(-20\,\mathrm{km})/(60\,\mathrm{km})] = -18^\circ$ یا تحت زاویه‌ی 18° جنوب محور خاوری است.

(پ) برای محاسبه‌ی سرعت متوسط در دو بخش اول مسافرت (شامل زمان استراحت)، از نتیجه‌ی قسمت (الف) در معادله‌ی ۴-۸ استفاده می‌کنیم و می‌دانیم که

$$\Delta t_{12} = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_{\text{استراحت}} = 50\,\mathrm{h} + 35\,\mathrm{h} + 5.0\,\mathrm{h} = 90\,\mathrm{h}$$

برحسب نمادگذاری بردارهای یکه داریم

$$\vec v_{12,avg} = \frac{(60\hat i - 20\hat j)\mathrm{km}}{90\,\mathrm{h}} = (0.67\hat i - 0.22\hat j)\,\mathrm{km/h}$$

که در نتیجه مقدار $|\vec v_{12,avg}| = 0.70\,\mathrm{km/h}$ به دست می‌آید.

(ت) جهت $\vec v_{12,avg}$ به صورت $\theta_{12} = \tan^{-1}[(-0.22\,\mathrm{km/h})/(0.67\,\mathrm{km/h})] = -18^\circ$ یا تحت زاویه‌ی 18° جنوب محور خاوری است.

(ث) تندی متوسط از این نظر با بزرگی سرعت متوسط متفاوت دارد که به مسافت کل پیموده شده بستگی دارد. چون شتر مسافت $140\,\mathrm{km}$ را طی می‌کند داریم

$$(140\,\mathrm{km})/(90\,\mathrm{h}) = 1.56\,\mathrm{km/h} \approx 1.6\,\mathrm{km/h}$$

(ج) جابه‌جایی برایند باید $90\,\mathrm{km}$ در شرق آبادی A تا B باشد. جابه‌جایی از محل استراحت تا آبادی B را با $\Delta\vec r_3$ نشان می‌دهیم. در نتیجه باید داشته باشیم

$$\Delta\vec r_1 + \Delta\vec r_2 + \Delta\vec r_3 = (90\,\mathrm{km})\hat i$$

در نتیجه $\Delta\vec r_3 = (30\,\mathrm{km})\hat i + (20\,\mathrm{km})\hat j$ به دست می‌آید که برحسب نمادگذاری بزرگی ـ زاویه به صورت $(36\angle 33^\circ)$ نوشته می‌شود بنابراین با استفاده از معادله‌ی ۴-۸ داریم

$$|\vec v_{3,avg}| = \frac{36\,\mathrm{km}}{(120-90)\,\mathrm{h}} = 1.2\,\mathrm{km/h}$$

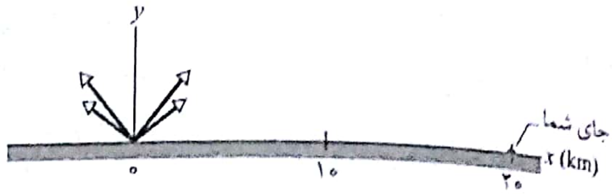
(ج) جهت $\vec v_{3,avg}$ در جهت $\Delta\vec r_3$ (یعنی تحت زاویه‌ی 33° شمال محور خاوری) است.

توجه: جمع برداری جابه‌جایی‌ها را به صورت زیر می‌توان نوشت

$$(75\angle 37^\circ) + (65\angle -90^\circ) = (63\angle -18^\circ)$$

۹۴ ***پوشش مرگبار.*** سیارک فلزی بزرگی به زمین برخورد می‌کند و بی‌درنگ با حفر شدن گودالی در ماده‌ی صخره‌ای زیر سطح زمین سنگ‌ها به بیرون پرتاب می‌شوند و پوششی از گرد و خاک در بالای زمین به وجود می‌آید. جدول زیر پنج دست تندی آغازی و زاویه‌ی پرتاب (نسبت به راستای افقی) را برای این نوع سنگ‌ها و بر مبنای مدل تشکیل شدن دهانه‌ی گودال‌ها نشان می‌دهد (سنگ‌های دیگری هم با تندی‌ها و زاویه‌های بین این مقادیر پرتاب می‌شوند). فرض کنید که در زمان $t=0$ سیارک در مکان $x=0$ به زمین برخورد می‌کند (شکل ۴-۵۲) و شما در فاصله‌ی $x = 20\,\mathrm{km}$ از آن محل قرار گرفته‌اید (الف) در زمان $t = 20\,\mathrm{s}$، مختصات x و y سنگ‌هایی را که با مشخصات پرتابی الف تا ث به طرف شما می‌آیند معین کنید (ب) نقطه‌های با این مختصات را روی دستگاه مختصات نشان‌گذاری کنید و سپس یک منحنی از این نقطه‌ها عبور دهید تا سنگ‌های با تندی‌ها و زاویه‌های پرتاب بین مقادیر را نیز شامل بشود. این منحنی می‌تواند به شما نشان دهد که وقتی به سنگ‌های در حال نزدیک شدن نگاه می‌کنید چه می‌بینید و نتیجه بگیرید که دایناسورها در گذشته‌های بسیار دور در حین برخورد سیارک‌ها به زمین چه دیده‌اند.

پرتاب	تندی (m/s)	زاویه‌ی پرتاب (درجه)
الف	۵۲۰	۱۴٫۰
ب	۶۳۰	۱۶٫۰
پ	۷۵۰	۱۸٫۰
ت	۸۷۰	۲۰٫۰
ث	۱۰۰۰	۲۲٫۰



شکل ۴-۵۲ مسئله‌ی ۹۴.

حل: (الف) زوج مختصات (x, y) را از $x=(v_0\cos\theta)t$ و $y=v_0\sin\theta t-\frac{۱}{۲}gt^۲$ به ازای $t=۲۰\,\mathrm{s}$ و تندی‌ها و زاویه‌های داده شده در مسئله، به دست می‌آوریم. در نتیجه داریم

$$(x_A, y_A)=(۱۰٫۱, ۰٫۵۵۶)\,\mathrm{km}$$

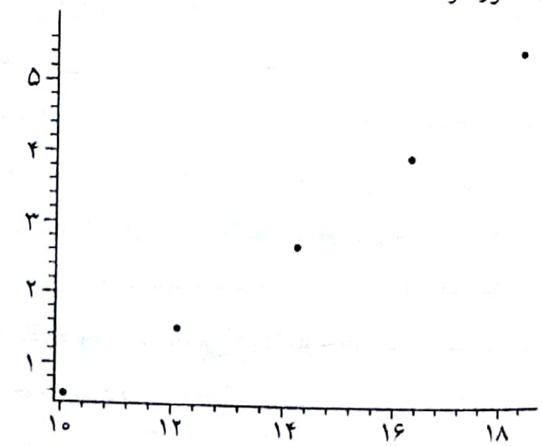
$$(x_B, y_B)=(۱۲٫۱, ۱٫۵۱)\,\mathrm{km}$$

$$(x_C, y_C)=(۱۴٫۳, ۲٫۶۸)\,\mathrm{km}$$

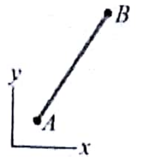
$$(x_D, y_D)=(۱۶٫۴, ۳٫۹۹)\,\mathrm{km}$$

و $(x_E, y_E)=(۱۸٫۵, ۵٫۵۳)\,\mathrm{km}$ که در قسمت بعدی رسم می‌کنیم.

(ب) محورهای قائم (y) و افقی (x) برحسب کیلومتر هستند. نمودار از مبداء مختصات شروع نمی‌شود. منحنی «منطبق» بر این داده‌ها رسم نشده است ولی می‌توان آن را (که پرده مرگ را تشکیل می‌دهد) تصور کرد.



۹۵ شکل ۴-۵۳، مسیر راست یک ذره را در دستگاه مختصات xy نشان می‌دهد. این ذره در بازه‌ی زمانی Δt_1 از حال سکون با شتابی ثابت به حرکت در آمده است. مختصات x و y مربوط به نقطه‌ی A به‌صورت ($۴٫۰۰\mathrm{m}$ و $۶٫۰۰\mathrm{m}$) و برای نقطه‌ی B به صورت ($۱۲٫۰\mathrm{m}$ و $۱۸٫۰\mathrm{m}$) است. (الف) نسبت مؤلفه‌های شتاب $\frac{a_y}{a_x}$، چقدر است؟ (ب) اگر حرکت ذره برای یک بازه‌ی زمانی دیگر Δt_1 ادامه پیدا کند، مختصات ذره کدام‌اند؟



شکل ۴-۵۳ مسئله‌ی ۹۵.

حل: (الف) به‌ازای $\Delta x=۸٫۰\,\mathrm{m}$، $t=\Delta t_1$، $a=a_x$ و $v_{0x}=۰$، از معادله‌ی ۲-۱۵ داریم

$$۸٫۰\,\mathrm{m}=\frac{۱}{۲}a_x(\Delta t_1)^۲$$

و رابطه‌ی متناظر برای حرکت در راستای محور y به‌صورت زیر است

$$\Delta y=۱۲\,\mathrm{m}=\frac{۱}{۲}a_y(\Delta t_1)^۲$$

رابطه‌ی دوم را به رابطه‌ی اول تقسیم می‌کنیم، در نتیجه $a_y/a_x=۳/۲=۱٫۵$ به دست می‌آید.

(ب) با فرض $t=۲\Delta t_1$، از معادله‌ی ۲-۱۵ داریم $\Delta x=(۸٫۰\,\mathrm{m})(۲)^۲=۳۲\,\mathrm{m}$، که مختصه‌ی x متناظر به صورت $(۴٫۰+۳۲)\mathrm{m}=۳۶\mathrm{m}$ است. به‌طور مشابه، $\Delta y=(۱۲\,\mathrm{m})(۲)^۲=۴۸\,\mathrm{m}$ است که مختصه‌ی y متناظر به‌صورت $(۶٫۰+۴۸)\mathrm{m}=۵۴\mathrm{m}$ است.

۹۶ در بازی والیبال بانوان ارتفاع لبه‌ی بالای تور تا سطح زمین $۲٫۲۴\mathrm{m}$ و ابعاد زمین در هر طرف تور $۹٫۰\mathrm{m}\times۹٫۰\mathrm{m}$ است. بازیکنی با استفاده از سرویس پرشی، در ارتفاع ۳٫۰ متری بالای زمین و به فاصله‌ی افقی ۸٫۰ متر از تور، به توپ ضربه می‌زند. اگر سرعت آغازی توپ افقی باشد، (الف) کمینه‌ی بزرگی سرعت چقدر باید باشد تا توپ از بالای تور عبور کند، و (ب) بیشینه‌ی بزرگی سرعت چقدر باید باشد تا توپ در طرف دیگر تور بر روی خط عرضی انتهای زمین فرود آید؟

حل: فرض می‌کنیم سرعت اولیه‌ی توپ بر سطح تور عمود است. دستگاه مختصات را طوری انتخاب می‌کنیم که $(x_0, y_0)=(۰, ۳٫۰)\mathrm{m}$ و $v_x>۰$ باشد (می‌دانیم‌که $v_{0y}=۰$ است).

(الف) برای آنکه توپ درست از بالای تور عبور کند، داریم

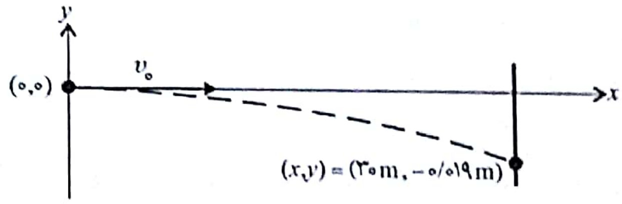
$$y-y_0=v_{0y}t-\frac{۱}{۲}gt^۲\Rightarrow ۲٫۲۴-۳٫۰=۰-\frac{۱}{۲}(۹٫۸)t^۲$$

در نتیجه توپ در لحظه‌ی $t=۰٫۳۹\mathrm{s}$ از بالای تور عبور می‌کند. این مقدار را در معادله‌ی x قرار می‌دهیم تا سرعت اولیه‌ی (کمینه) توپ $v_x=(۸٫۰\,\mathrm{m})/(۰٫۳۹\,\mathrm{s})=۲۰٫۵\,\mathrm{m/s}$ به دست آید.

(ب) در این حالت $y = 0$ است و t از معادله‌ی $y - y_0 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$ به دست می‌آید. این مقدار ($t = \sqrt{2(3.0)/9.8} = 0.78\,s$) را در معادله‌ی x قرار می‌دهیم تا سرعت اولیه‌ی (بیشینه) توپ به صورت $v_x = (16.0\,m)/(0.78\,s) = 20.5\,m/s$ به دست آید.

۹۷ تفنگی به طور افقی یک هدف واقع در فاصله‌ی ۳۰ متری را نشانه می‌گیرد. گلوله‌ی تفنگ به فاصله‌ی ۱٫۹cm پایین‌تر از نقطه‌ی نشانه‌گیری شده برخورد می‌کند. (الف) مدت زمان پرواز گلوله، و (ب) تندی خروج گلوله از لوله‌ی تفنگ، چقدر است؟

حل: مسیر گلوله در شکل زیر (بدون مقیاس) نشان داده شده است. توجه کنید که مبداء را در نقطه‌ی شلیک انتخاب کرده‌ایم. بنابراین، مختصه‌ی y گلوله از رابطه‌ی $y = -\frac{1}{2}gt^2$ به دست می‌آید. با دانستن مختصات (x, y) در نقطه‌ی هدف می‌توانیم مدت زمان کل پرواز و تندی گلوله را حساب کنیم.



(الف) اگر t زمان پرواز و $y = -0.019\,m$ معرّف محل برخورد گلوله به هدف باشد، داریم

$$t = \sqrt{\frac{-2y}{g}} = \sqrt{\frac{-2(-0.019\,m)}{9.8\,m/s^2}} = 6.2\times10^{-2}\,s$$

(ب) سرعت خروج گلوله از تفنگ، سرعت آغازی (افقی) گلوله است. چون $x = 30\,m$ مکان افقی هدف است، داریم $x = v_0 t$. پس، سرعت آغازی گلوله برابر است با

$$v_0 = \frac{x}{t} = \frac{30\,m}{6.3\times10^{-2}\,s} = 4.8\times10^{2}\,m/s$$

برای به دست آوردن سرعت آغازی از معادله‌ی ۴-۲۵ نیز می‌توان استفاده کرد. به ازای $\theta_0 = 0$ و $y_0 = 0$، معادله به صورت $y = -\frac{gx^2}{2v_0^2}$ ساده می‌شود و داریم

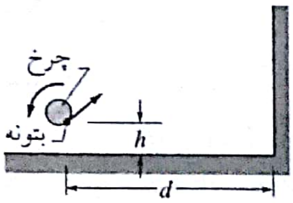
$$v_0 = \sqrt{-\frac{gx^2}{2y}} = \sqrt{\frac{(9.8\,m/s^2)(30\,m)^2}{2(-0.019\,m)}} = 4.8\times10^{2}\,m/s$$

که دقیقاً همان مقدار حساب شده در قسمت (ب) است.

۹۸ ذره‌ای که به دور مبداء مختصات xy حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام می‌دهد، با دوره‌ی تناوب ۹٫۰۰s در جهت ساعتگرد می‌چرخد. در یک لحظه، بردار مکان ذره (که نسبت به مبداء اندازه‌گیری می‌شود)، $\vec{r} = (2.00\,m)\hat{i} - (3.00\,m)\hat{j}$ است. در آن لحظه، سرعت ذره برحسب نمادگذاری بردارهای یکه چیست؟

حل: در حرکت دایره‌ای $\vec{v}$ باید بر $\vec{r}$ عمود باشد و (چون تندی ثابت است) بزرگی آن $v = 2\pi r/T$ است که در آن $r = \sqrt{(2.00\,m^2) + (-3.00\,m)^2}$ و $T = 9.00\,s$ است. بردار $\vec{r}$ (که در صورت مسئله داده شده است) نقطه‌ای در ربع چهارم دستگاه محورهای مختصات را مشخص می‌کند، و چون حرکت در جهت ساعتگرد صورت می‌گیرد، هر دو مؤلفه‌ی سرعت باید منفی باشند. نتیجه‌ی مورد نظر باید دارای این سه شرط باشد (که در نمادگذاری بردارهای یکه باید شرط $\vec{r}\cdot\vec{v} = 0$ برقرار باشد)، در نتیجه داریم $\vec{v} = (-2.09\,m/s)\hat{i} + (-1.40\,m/s)\hat{j}$.

۹۹ شکل ۴-۵۴، تکه‌ای بتونه‌ی خیس را نشان می‌دهد که روی لبه‌ی چرخی به شعاع ۲۰٫۰cm حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام می‌دهد و چرخ در جهت پادساعتگرد با دوره‌ی تناوب ۵٫۰۰ms می‌چرخد. بتونه وقتی به مکانی متناظر با ساعت ۵ (عدد ۵ روی صفحه‌ی یک ساعت) می‌رسد، از لبه‌ی چرخ به بیرون پرتاب می‌شود. جدا شدن بتونه از لبه‌ی چرخ در ارتفاع $h = 1.20\,m$ نسبت به سطح زمین و به فاصله‌ی $d = 2.50\,m$ از یک دیوار صورت می‌گیرد. بتونه در چه ارتفاعی به دیوار برخورد می‌کند؟



شکل ۴-۵۴ مسئله‌ی ۹۹.

حل: با استفاده از معادله‌ی ۴-۳۵، $v_0 = 2\pi(0.200\,m)/(0.00500\,s) \approx 251\,m/s$ تندی بتونه در حرکت دایره‌ای برای دوران کامل $\theta_0 = (1\,hr)(360°/12\,hr) = 30.0°$ است.

از معادله‌ی ۴-۲۵ داریم

$$y=(۲/۵۰\,\text{m})\tan ۳۰/۰^\circ-\frac{(۹/۸\,\text{m/s}^۲)(۲/۵۰\,\text{m})^۲}{۲(۲۵۱\,\text{m/s})^۲(\cos ۳۰/۰^\circ)^۲}\approx ۱/۴۴\,\text{m}$$

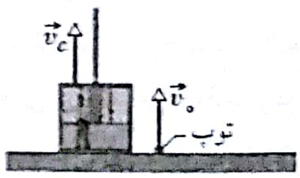
که نشان می‌دهد ارتفاع بتونه در حین برخورد به دیوار $۱/۴۴\,\text{m}+۱/۲۰\,\text{m}=۲/۶۴\,\text{m}$ است.

۱۰۰ یک قایق بادبانی یخ پیما با شتاب ثابت حاصل از وزیدن باد در روی سطح دریاچه‌ی یخ بسته‌ای حرکت می‌کند. در لحظه‌ی معینی سرعت قایق $(۶/۳۰\hat{i}-۸/۱۵\hat{j})\,\text{m/s}$ است. $۳/۰۰$ ثانیه بعد، قایق به خاطر تغییر کردن جهت باد به طور لحظه‌ای به حال سکون در می‌آید. شتاب متوسط قایق در این بازه‌ی زمانی $۳/۰۰$ ثانیه چقدر است؟

حل: چون $\vec{v}_۲=۰$، پس شتاب متوسط با استفاده از ۴-۱۵ برابر است با

$$\vec{a}_{avg}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۰-(۶/۳۰\hat{i}-۸/۱۵\hat{j})\,\text{m/s}}{۳\,\text{s}}=(-۲/۱\hat{i}+۲/۷\hat{j})\,\text{m/s}^۲$$

۱۰۱ در شکل ۴-۵۵ توپی با تندی آغازی $v_۰=۷/۰۰\,\text{m/s}$ یک راست از زمین به سمت بالا پرتاب می‌شود. در همین زمان، یک اتاقک بالابر ساختمانی با تندی ثابت $v_c=۳/۰۰\,\text{m/s}$ از زمین به سمت بالا شروع به حرکت می‌کند. این توپ به چه ارتفاع بیشینه‌ای نسبت به (الف) زمین و (ب) کف اتاقک، می‌رسد؟ تندی توپ نسبت به (پ) زمین و (ت) کف اتاقک، با چه آهنگی تغییر می‌کند؟



شکل ۴-۵۵ مسئله‌ی ۱۰۱.

حل: با استفاده از معادله‌ی ۲-۱۶ داریم $v^۲=v_۰^۲-۲gh$ یا $h=(v_۰^۲-v^۲)/۲g$.

(الف) چون در ارتفاع بیشینه‌ی حرکت به سمت بالا $v=۰$ است، به‌ازای $v_۰=۷/۰۰\,\text{m/s}$ داریم

$$h=(۷/۰۰\,\text{m/s})^۲/۲(۹/۸۰\,\text{m/s}^۲)=۲/۵۰\,\text{m}$$

(ب) تندی نسبی نسبت به کف اتاقک برابر است با

$$v_r=v_۰-v_c=۷/۰۰\,\text{m/s}-۳/۰۰\,\text{m/s}=۴/۰۰\,\text{m/s}$$

با استفاده از معادله‌ی بالا داریم

$$h=(۴/۰۰\,\text{m/s})^۲/۲(۹/۸۰\,\text{m/s}^۲)=۰/۸۲\,\text{m}$$

(پ) شتاب، یا آهنگ تغییر تندی توپ نسبت به زمین $۹/۸۰\,\text{m/s}^۲$ (به سمت پایین است).

(ت) چون اتاقک بالابر با سرعت ثابت حرکت می‌کند آهنگ تغییر تندی توپ نسبت به کف اتاقک نیز $۹/۸۰\,\text{m/s}^۲$ (به سمت پایین) است.

۱۰۲ میدان مغناطیسی می‌تواند یک ذره‌ی باردار را وادار به حرکت در یک مسیر دایره‌ای بکند. فرض کنید به الکترونی، که در میدان مغناطیسی معینی در یک مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند شتابی به بزرگی $۳\times ۱۰^{۱۴}\,\text{m/s}^۲$ داده شود. (الف) اگر شعاع مسیر دایره‌ای $۱۵\,\text{cm}$ باشد تندی الکترون چقدر است؟ (ب) دوره‌ی تناوب حرکت الکترون چیست؟

حل: (الف) به ازای $r=۰/۱۵\,\text{m}$ و $a=۳\times ۱۰^{۱۴}\,\text{m/s}^۲$ از معادله‌ی ۴-۳۴ داریم

$$v=\sqrt{ra}=۶/۷\times ۱۰^۶\,\text{m/s}$$

(ب) دوره‌ی تناوب حرکت الکترون از معادله‌ی ۴-۳۵ بدست می‌آید:

$$T=\frac{۲\pi r}{v}=۱/۵\times ۱۰^{-۷}\,\text{s}$$

۱۰۳ بالونی در مدت $۳/۵۰\,\text{h}$ پس از رها شدن از سطح زمین به اندازه‌ی $۲۱/۵\,\text{km}$ به سمت شمال، $۹/۷۰\,\text{km}$ به سمت خاور و $۲/۸۸\,\text{km}$ به سمت بالا حرکت می‌کند. مطلوب است تعیین (الف) بزرگی سرعت متوسط و (ب) زاویه‌ی سرعت متوسط بالون نسبت به راستای افقی.

حل: (الف) بزرگی بردار جابه‌جایی $\Delta\vec{r}$ برابر است با

$$\Delta\vec{r}=\sqrt{(۲۱/۵\,\text{km})^۲+(۹/۷\,\text{km})^۲+(۲/۸۸\,\text{km})^۲}=۲۳/۸\,\text{km}$$

در نتیجه داریم

$$|\vec{v}_{avg}|=\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}=\frac{۲۳/۸\,\text{km}}{۳/۵۰\,\text{h}}=۶/۷۹\,\text{km/h}$$

(ب) زاویه‌ی سرعت متوسط بالون نسبت به راستای افقی، θ، برابر است با

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{۲/۸۸\ \text{km}}{\sqrt{(۲۱/۵\ \text{km})^۲+(۹/۷\ \text{km})^۲}}\right) = ۶/۹۶^\circ$$

۱۰۴ گلوله‌ای از ارتفاع ۲۰ متری به طور افقی پرتاب می‌شود و با تندی‌ای سه برابر تندی آغازی به زمین برخورد می‌کند. تندی آغازی گلوله چقدر است؟

حل: بزرگی سرعت اولیه $v_۰$ است و چون سرعت افقی است، با مؤلفه‌ی افقی v_x سرعت برخورد به زمین برابر است. بنابراین، تندی برخورد برابر است با

$$\sqrt{v_۰^۲+v_y^۲} = ۳v_۰$$

که در آن $v_y = \sqrt{۲gh}$ و در معادله‌ی ۲-۱۶ به جای Δx مقدار $h = ۲۰\,\text{m}$ را قرار داده‌ایم. طرفین رابطه‌ی بالا را به توان دو می‌رسانیم که در نتیجه داریم

$$v_۰^۲+۲gh = (۳v_۰)^۲ \Rightarrow gh = ۴v_۰^۲$$

و از آن‌جا مقدار تندی آغازی گلوله مساوی با $v_۰ = \sqrt{(۹/۸\,\text{m/s}^۲)(۲۰\,\text{m})}\,/\,۲ = ۷\,\text{m/s}$ به دست می‌آید.

۱۰۵ پرتابه‌ای با تندی آغازی $۳۰\,\text{m/s}$ تحت زاویه‌ی ۶۰ درجه‌ی بالای افق پرتاب می‌شود. (الف) بزرگی و (ب) زاویه‌ی سرعت پرتابه $۲/۰\,\text{s}$ پس از پرتاب چیست، و (پ) این زاویه بالای افق است یا زیر افق؟ (ت) بزرگی و (ث) زاویه‌ی سرعت پرتابه $۵/۰\,\text{s}$ پس از پرتاب چقدر است، و (ج) این زاویه بالای افق است یا زیر افق؟

حل: محورهای افقی x و قائم y را طوری انتخاب می‌کنیم که هر دو مؤلفه‌ی $\vec{v}_۰$ مثبت باشند. زاویه‌های مثبت در جهت پادساعتگرد نسبت به محور $+x$ و زاویه‌های منفی در جهت ساعتگرد نسبت به آن محور انتخاب شده‌اند. برحسب نمادگذاری بردارهای یکه، سرعت در هر لحظه از حرکت پرتابی برابر است با

$$\vec{v} = v_۰\cos\theta_۰\hat{i} + (v_۰\sin\theta_۰ - gt)\hat{j}$$

(الف) به ازای $v_۰ = ۳۰\,\text{m/s}$ و $\theta_۰ = ۶۰^\circ$ و $t = ۲/۰\,\text{s}$ داریم

$$\vec{v} = (۱۵\hat{i} + ۶/۴\hat{j})\,\text{m/s}$$

بزرگی $\vec{v}$ برابر است با

$$|\vec{v}| = \sqrt{(۱۵\,\text{m/s})^۲ + (۶/۴\,\text{m/s})^۲} = ۱۶\,\text{m/s}$$

(ب) جهت $\vec{v}$ در جهت پادساعتگرد نسبت به محور $+x$ برابر است با

$$\theta = \tan^{-1}[(۶/۴\,\text{m/s})/(۱۵\,\text{m/s})] = ۲۳^\circ$$

(پ) چون زاویه مثبت است، لذا بالای افق است.

(ت) به ازای $t = ۵/۰\,\text{s}$، داریم $\vec{v} = (۱۵\hat{i} - ۲۳\hat{j})\,\text{m/s}$ و از آن‌جا تندی پرتابه به دست می‌آید:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(۱۵\,\text{m/s})^۲ + (-۲۳\,\text{m/s})^۲} = ۲۷\,\text{m/s}$$

(ث) جهت $\vec{v}$ برابر است با

$$\theta = \tan^{-1}[(-۲۳\,\text{m/s})/(۱۵\,\text{m/s})] = -۵۷^\circ$$

که در جهت ***ساعتگرد*** نسبت به محور $+x$ مساوی با ۵۷° است.

(ج) چون زاویه منفی است، زیر افق است.

۱۰۶ بردار مکان یک پروتون در آغاز $\vec{r} = ۵/۰\hat{i} - ۶/۰\hat{j} + ۲/۰\hat{k}$ و پس از مدتی $\vec{r} = -۲/۰\hat{i} + ۶/۰\hat{j} + ۲/۰\hat{k}$، برحسب متر، است. (الف) بردار جابه‌جایی پروتون چیست و (ب) این بردار با کدام صفحه‌ی دستگاه مختصات موازی است؟

حل: از معادلات ۴-۲ و ۴-۳ استفاده می‌کنیم.

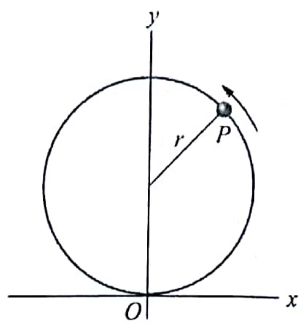
(الف) بردار مکان آغازی را $\vec{r}_۱$ و بردار مکان بعدی را $\vec{r}_۲$ می‌نامیم و از معادله‌ی ۴-۳ برای بردار جابه‌جایی، با نمادگذاری بردارهای یکه، داریم

$$\Delta r = [(-۲/۰\,\text{m}) - ۵/۰\,\text{m}]\hat{i} + [(۶/۰\,\text{m}) - (-۶/۰\,\text{m})]\hat{j} +$$
$$+ (۲/۰\,\text{m} - ۲/۰\,\text{m})\hat{k} = (-۷/۰\,\text{m})\hat{i} + (۱۲\,\text{m})\hat{j}$$

(ب) چون در این‌جا مؤلفه‌ی z وجود ندارد (یعنی ضریب $\hat{k}$ صفر است)، بردار جابه‌جایی در صفحه‌ی xy قرار دارد.

۱۰۷ ذره‌ی P با تندی ثابت بر روی دایره‌ای به‌شعاع $r = ۳/۰۰\,\text{m}$ می‌چرخد (شکل ۴-۵۶) و در مدت ۲۰/۰ ثانیه یک دور کامل می‌زند. ذره در زمان $t = ۰$ از نقطه‌ی O می‌گذرد. بردارهای خواسته شده‌ی زیر را به صورت نمادگذاری بزرگی - زاویه (نسبت به محور x مثبت) بیان کنید. بردار مکان ذره را در زمان‌های (الف) $۵/۰۰\,\text{s}$، (ب) $۷/۵۰\,\text{s}$، و (پ) $۱۰/۰\,\text{s}$، نسبت به نقطه‌ی O پیدا کنید.

(ت) جابه‌جایی ذره را در بازه‌ی زمانی ۵٫۰۰s، از پایان ثانیه پنجم تا پایان ثانیه‌ی دهم، معین کنید. (ث) سرعت‌متوسط ذره را در همان بازه‌ی زمانی پیدا کنید. سرعت ذره را (ج) در آغاز، و (چ) در پایان همان بازه‌ی زمانی ۵٫۰۰s بیابید. سپس، شتاب ذره را (ح) در آغاز، و (خ) در پایان همان بازه‌ی زمانی به‌دست آورید.



شکل ۴-۵۶ مسئله‌ی ۱۰۷.

حل: نتایج بزرگی ـ زاویه را به صورت $(R\angle\theta)$، فاصله را برحسب m، تندی را برحسب m/s و شتاب را برحسب $m/s^۲$ می‌نویسیم. تمام زاویه‌های θ را در جهت پادساعتگرد نسبت به محور $+x$ اندازه می‌گیریم، و گاهی زوایای ϕ را در جهت پادساعتگرد نسبت به خط قائم بین مرکز دایره و مبداء مختصات و خط رسم شده از مرکز دایره تا محل ذره (r در شکل) معین می‌کنیم. می‌دانیم که تندی ذره $v = ۲\pi r/T$ است که در آن $r = ۳٫۰۰m$ و $T = ۲۰٫۰s$ است؛ در نتیجه $v = ۰٫۹۴۲\,m/s$ به‌دست می‌آید. ذره در شکل ۴-۵۶ در جهت پادساعتگرد حرکت می‌کند.

(الف) در لحظه‌ی $t = ۵٫۰۰s$، ذره به اندازه‌ی

$$\frac{t}{T} = \frac{۵٫۰۰}{۲۰٫۰} = \frac{۱}{۴}$$

از یک دور کامل را (که از مبداء شروع می‌شود) می‌چرخد. بنابراین، ذره نسبت به مرکز دایره و نسبت به راستای قائم، تحت زاویه‌ی

$$\phi = \frac{۱}{۴}(۳۶۰^\circ) = ۹۰^\circ$$

قرار دارد. با توجه به شکل ۴-۵۶، معلوم می‌شود که این مکان «ساعت ۳» در روی دایره) نسبت به مبداء مختصات در مکان $x = ۳٫۰۰m$ و $y = ۳٫۰۰m$ قرار دارد. این مکان با نمادگذاری بزرگی ـ زاویه به صورت $(R\angle\theta) = (۴٫۲\angle۴۵^\circ)$ نشان داده می‌شود. اگرچه تجزیه و تحلیل این مکان بدون استفاده از روابط مثلثاتی آسان است (برای انجام محاسبات زیر)، باید توجه کرد که این مقادیر x و y نسبت به مبداء مختصات را با استفاده از روابط زیر و دانستن زاویه‌ی ϕ به دست می‌آیند:

$$x = r\sin\phi\ ,\ y = r - r\cos\phi$$

البته $R = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ و θ را می‌توان از $\tan^{-۱}(y/x)$ حساب کرد.

(ب) در لحظه‌ی $t = ۷٫۵۰s$، ذره به اندازه $۷٫۵۰/۲۰٫۰ = ۳/۸$ دور (که از مبداء شروع شده است) چرخیده است. بنابراین ذره نسبت به مرکز دایره و نسبت به راستای قائم، تحت زاویه‌ی $\phi = ۳/۸(۳۶۰^\circ) = ۱۳۵^\circ$ چرخیده است. با استفاده ازشکل ۴-۵۶، این مکان نسبت به مبداء مختصات، متناظر با

$$x = (۳٫۰۰\,m)\sin۱۳۵^\circ = ۲٫۱\,m$$

و

$$y = (۳٫۰\,m) - (۳٫۰\,m)\cos۱۳۵^\circ = ۵٫۱\,m$$

است. در نمادگذاری بزرگی ـ زاویه، این مکان به صورت

$$(R\angle\theta) = (۵٫۵\angle۶۸^\circ)$$

بیان می‌شود.

(پ) در لحظه‌ی $t = ۱۰٫۰s$، ذره به اندازه‌ی $۱۰٫۰/۲۰٫۰ = ۱/۲$ دور چرخیده است. ذره نسبت به مرکز دایره، تحت زاویه‌ی $\phi = ۱۸۰^\circ$ نسبت به محور قائم چرخیده است. با توجه به شکل ۴-۵۶، معلوم می‌شود که این مکان نسبت به مبداء مختصات، در $x = ۰$ و $y = ۶٫۰۰m$ قرار دارد. در نمادگذاری بزرگی ـ زاویه، این مکان به صورت $(R\angle\theta) = (۶٫۰\angle۹۰^\circ)$ بیان می‌شود.

(ت) بردار مکان در قسمت (الف) را از بردار مکان در قسمت (پ) کم می‌کنیم: $(۶٫۰\angle۹۰^\circ) - (۴٫۲\angle۴۵^\circ) = (۴٫۲\angle۱۳۵^\circ)$. اگر از نمادگذاری بردارهای یکه استفاده کنیم، داریم

$$\Delta\vec{R} = (۰ - ۳٫۰m)\hat{i} + (۶٫۰m - ۳٫۰m)\hat{j} = (-۳٫۰m)\hat{i} + (۳٫۰m)\hat{j}$$

در نتیجه $|\Delta\vec{R}| = ۴٫۲m$ و $\theta = ۱۳۵^\circ$ به دست می‌آید.

(ث) از معادله‌ی ۴-۸ داریم $\vec{v}_{avg} = \Delta\vec{R}/\Delta t$. به ازای $\Delta t = ۵٫۰s$ داریم

$$\vec{v}_{avg} = (-۰٫۶۰\,m/s)\hat{i} + (۰٫۶۰\,m/s)\hat{j}$$

در نتیجه $(۰٫۸۵\angle۱۳۵^\circ)$ برحسب نمادگذاری بزرگی ـ زاویه به‌دست می‌آید.

(ج) تندی $v = 0.94\ \mathrm{m/s}$ داده شده است، ولی جهت آن با توجه به شکل ۴–۵۶ معلوم می‌شود. بردار سرعت در «ساعت ۳» بر دایره مماس است [به قسمت (الف) رجوع کنید] و نشان می‌دهد که $\vec{v}$ قائم است. بنابراین، نتیجه‌ی حاصل به‌صورت $(0.94\angle 90^\circ)$ است.

(چ) باز هم تندی برابر با $v = 0.94\ \mathrm{m/s}$ است ولی جهت آن در شکل ۴–۵۶ دیده می‌شود. بردار سرعت در «ساعت ۱۲» بر دایره مماس است [به قسمت (پ) رجوع کنید] و نشان می‌دهد که $\vec{v}$ افقی است. بنابراین، نتیجه به‌صورت $(0.94\angle 180^\circ)$ به‌دست می‌آید.

(ح) بزرگی شتاب $a = v^2/r = 0.30\ \mathrm{m/s^2}$، و جهت آن در این لحظه [به قسمت (الف) توجه کنید] افقی (به سمت مرکز دایره) است. بنابراین، نتیجه به صورت $(0.30\angle 180^\circ)$ است.

(خ) باز هم $a = v^2/r = 0.30\ \mathrm{m/s^2}$ است، اما در این لحظه [به قسمت (پ) توجه کنید] جهت آن قائم (به سمت مرکزدایره) است. بنابراین، نتیجه به صورت $(0.30\angle 270^\circ)$ است.

۱۰۸ قطار تندرو فرانسوی به نام TGV (ترن با سرعت بالا) دارای تندی از پیش معین شده‌ی ۲۱۶ km/h است. (الف) اگر قطار با این تندی مسیر خمیده‌ای را دور بزند و بخواهیم بزرگی شتاب وارد به مسافر به ۰٫۰۵۰g محدود شود، کم‌ترین شعاع خمیدگی قابل تحمل ریل‌ها چقدر می‌تواند باشد؟ (ب) این قطار یک مسیر خمیده‌ای با شعاع ۱٫۰۰km را با چه تندی‌ای باید دور بزند تا به حد مجاز شتاب برسد؟

حل: معادله‌ی ۴–۳۴ تناسب معکوس r و a را نشان می‌دهد، لذا هر چه شعاع کوچکتر باشد، شتاب بزرگتر است. بنابراین، حد بالاتر شتاب a متناظر با حد پایین‌تر شعاع r است.

(الف) شعاع دوران کمینه‌ی قطار برابر است با

$$r_{\min} = \frac{v^2}{a_{\max}} = \frac{(216\ \mathrm{km/h})^2}{(0.050)(9.8\ \mathrm{m/s^2})} = 7.3\times10^{3}\ \mathrm{m}$$

(ب) تندی قطار باید برابر باشد با

$$v = \sqrt{a_{\max} r} = \sqrt{0.050(9.8\ \mathrm{m/s^2})(1.00\times10^{3}\ \mathrm{m})} = 22\ \mathrm{m/s} = 80\ \mathrm{km/h}$$

۱۰۹ (الف) اگر الکترونی با تندی $3.0\times10^{6}\ \mathrm{m/s}$ به طور افقی پرتاب شود، در هنگام پیمودن مسافت افقی ۱٫۰m چه مقدار سقوط خواهد کرد؟ (ب) اگر تندی آغازی الکترون افزایش یابد، پاسخ به دست آمده افزایش می‌یابد یا کاهش؟

حل: (الف) با استفاده از دستگاه محورهای مختصات به کار رفته برای معادله‌ی ۴–۲۵، داریم

اگر $\theta_0 = 0$ باشد، $y = x\tan\theta_0 - \dfrac{gx^2}{2(v_0\cos\theta_0)^2} = -\dfrac{gx^2}{2v_0^2}$

بنابراین، به ازای $v_0 = 3.0\times10^{6}\ \mathrm{m/s}$ و $x = 1.0\ \mathrm{m}$، داریم $y = -5.4\times10^{-13}\ \mathrm{m}$، که عملاً قابل اندازه‌گیری نیست (و نشان می‌دهد که چرا در قلمرو فیزیک اتمی و زیراتمی، فرایندهای گرانشی نقش ناچیزی دارند).

(ب) رابطه‌ی بالا نشان می‌دهد که اگر v_0 افزایش یابد، $|y|$ کاهش پیدا می‌کند.

۱۱۰ شخصی در مدت ۹۰s از یک پلکان برقی ساکن به طول ۱۵m بالا می‌رود. اگر شخص روی پلکان در حال حرکت بایستد، در مدت ۶۰s به بالا می‌رسد. چه مدت طول می‌کشد تا شخص روی پلکان در حال حرکت راه برود و به بالا برسد؟ آیا پاسخ به طول پلکان بستگی دارد؟

حل: وقتی پلکان ساکن است، تندی شخص $v_p = l/t$ است که l طول پلکان و t مدت زمان راه رفتن شخص بر روی آن است. این تندی برابر است با $v_p = (15\ \mathrm{m})/(90\ \mathrm{s}) = 0.167\ \mathrm{m/s}$. پلکان با تندی $v_e = (15\ \mathrm{m})/(60\ \mathrm{s}) = 0.250\ \mathrm{m/s}$ حرکت می‌کند. تندی شخص که در روی پلکان به طرف بالا حرکت می‌کند، برابر است با

$$v = v_p + v_e = 0.167\ \mathrm{m/s} + 0.250\ \mathrm{m/s} = 0.417\ \mathrm{m/s}$$

و زمان لازم برای پیمودن پلکان برابر است با

$$t = l/v = (15\ \mathrm{m})/(0.417\ \mathrm{m/s}) = 36\ \mathrm{s}$$

اگر این زمان‌ها مستقل از طول پلکان باشند، جواب نیز به طول پلکان بستگی نخواهد داشت. تندی شخص که بر روی پلکان ساکن راه می‌رود، برحسب l برابر با $l/90$ است، و تندی پلکان متحرک $l/60$ است، و تندی شخص که بر روی پلکان متحرک راه می‌رود، $v = (l/90) + (l/60) = 0.028l$ است. مدت زمان سپری شده $t = l/v = l/(0.028l) = 35.7\ \mathrm{s}$ و مستقل از l است.

۱۱۱ (الف) بزرگی شتاب مرکزگرای یک جسم واقع بر روی استوای زمین، که ازچرخش زمین ناشی می‌شود، چقدر است؟ (ب) برای اجسام واقع بر روی استوا با شتاب مرکزگرای به بزرگی $9/8 m/s^2$ دوره‌ی تناوب چرخش زمین چقدر است؟

حل: شعاع زمین در پیوست پ داده شده است.

(الف) تندی یک جسم در استوای زمین $v = 2\pi R/T$ است که R شعاع زمین $(6/37 \times 10^6 m)$ و T طول یک شبانه‌روز $(8/64 \times 10^4 s)$ است:

$$v = 2\pi(6/37\times10^6 m)/(8/64\times10^4 s) = 463 m/s$$

بزرگی شتاب برابر است با

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{(463 m/s)^2}{6/37\times10^6 m} = 0/034 m/s^2$$

(ب) اگر T دوره‌ی تناوب باشد، تندی به صورت $v = 2\pi R/T$ و بزرگی شتاب برابر است با

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{(2\pi R/T)^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

در نتیجه داریم

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{a}} = 2\pi\sqrt{\frac{6/37\times10^6 m}{9/8 m/s^2}} = 5/1\times10^3 s = 84 min$$

۱۱۲ بُرد یک پرتابه نه تنها به v_0 و θ_0، بلکه به مقدار g، شتاب سقوط آزاد نیز، که از جایی به جای دیگر تغییر می‌کند، بستگی دارد. در سال ۱۹۳۶/۱۳۱۵، در جریان بازی‌های المپیک برلین (که در آنجا $g = 9/8128 m/s^2$)، جِس اوونس رکورد جهانی پرش طول $8/09 m$ را به جا گذاشت. با این فرض که مقادیر v_0 و θ_0 تغییر نکنند، اگر او در بازی‌های المپیک ۱۹۵۶ ملبورن (که در آنجا $g = 9/7999 m/s^2$) مسابقه می‌داد، چه تغییری در رکوردش به وجود می‌آمد؟

حل: مقادیر $g_B = 9/8128 m/s^2$ و $g_M = 9/7999 m/s^2$ را در معادله‌ی ۴-۲۶ قرار می‌دهیم:

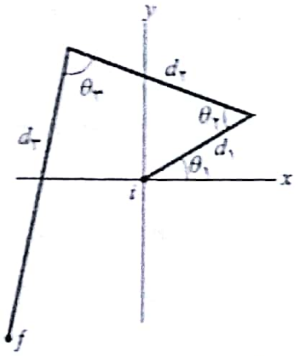
$$R_M - R_B = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g_M} - \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g_B}$$
$$= \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g_B}\left(\frac{g_B}{g_M} - 1\right)$$

در نتیجه داریم

$$R_M - R_B = R_B\left(\frac{9/8128 m/s^2}{9/7999 m/s^2} - 1\right)$$

با جاگذاری $R_B = 8/09 m$ داریم $R_M - R_B = 0/01 m = 1 cm$.

۱۱۳ شکل ۴-۵۷ مسیر حرکت فرد گیجی را نشان می‌دهد که در یک زمین تراز از نقطه‌ی آغازی i به نقطه‌ی پایانی f می‌رود. زاویه‌ها و فاصله‌ها در شکل عبارت‌اند از: $\theta_1 = 30/0°$، $\theta_2 = 50/0°$، و $\theta_3 = 80/0°$؛ $d_1 = 5/00 m$، $d_2 = 8/00 m$ و $d_3 = 12/0 m$. (الف) بزرگی و (ب) زاویه‌ی جابه‌جایی این فرد از i تا f چقدر است؟



شکل ۴-۵۷ مسئله‌ی ۱۱۳.

حل: با توجه به شکل، سه جابه‌جایی انجام شده را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\vec{d}_1 = d_1(\cos\theta_1 \hat{i} + \sin\theta_1 \hat{j}) = (5/00 m)(\cos 30° \hat{i} + \sin 30° \hat{j})$$
$$= (4/33 m)\hat{i} + (2/50 m)\hat{j}$$
$$\vec{d}_2 = d_2[\cos(180° + \theta_1 - \theta_2)\hat{i} + \sin(180° + \theta_1 - \theta_2)\hat{j}]$$
$$= (8/00 m)(\cos 160° \hat{i} + \sin 160° \hat{j}) = (-7/52 m)\hat{i} + (2/74 m)\hat{j}$$
$$\vec{d}_3 = d_3[\cos(360° - \theta_3 - \theta_2 + \theta_1)\hat{i} + \sin(360° - \theta_3 - \theta_2 + \theta_1)\hat{j}]$$
$$= (12/0 m)(\cos 260° \hat{i} + \sin 260° \hat{j}) = (-2/08 m)\hat{i} - (11/8 m)\hat{j}$$

در این رابطه‌ها زاویه‌ها نسبت به محور $+x$ اندازه‌گیری شده‌اند. جابه‌جایی برایند برابر است با

$$\vec{d} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2 + \vec{d}_3 = (-5/27 m)\hat{i} - (6/58 m)\hat{j}$$

(الف) بزرگی جابه‌جایی برایند برابر است با

$$|\vec{d}| = \sqrt{(-5/27 m)^2 + (-6/58 m)^2} = 8/43 m$$

(ب) جهت $\vec{d}$ برابر است با

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{d_y}{d_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-6/58 m}{-5/27 m}\right) = 51/3° \text{ یا } 231°$$

ما زاویه‌ی 231° (اندازه‌گیری شده در جهت پادساعتگرد نسبت به محور $+x$) را در نظر می‌گیریم زیرا زاویه‌ی خواسته شده در ربع سوم قرار دارد. پاسخ هم‌ارز -129° (اندازه‌گیری شده در جهت ساعتگرد نسبت به محور $+x$) است.

۱۱۴ بردار مکان ذره‌ای که در صفحه‌ی xy حرکت می‌کند، $\vec{r}=2t\hat{i}+2\sin\left[(\frac{\pi}{4}\,\mathrm{rad/s})t\right]\hat{j}$ است، که در آن بزرگی $\vec{r}$ برحسب متر و t برحسب ثانیه است. (الف) مؤلفه‌های x و y مکان ذره را در زمان‌های $t=1{,}0, 2{,}0, 3{,}0, 4{,}0\,\mathrm{s}$ حساب کنید و نمودار مسیر حرکت ذره را در صفحه‌ی xy برای بازه‌ی زمانی $0 \le t \le 4{,}0\,\mathrm{s}$ رسم کنید. (ب) مؤلفه‌های سرعت ذره را در زمان‌های $t=1{,}0, 2{,}0, 3{,}0\,\mathrm{s}$ حساب کنید. نشان دهید که بردار سرعت بر مسیر حرکت ذره مماس است و جهت آن در هر لحظه هم‌سو با حرکت ذره است، که از ترسیم بردارهای سرعت بر روی نمودار مسیر حرکت در قسمت (الف) مشخص می‌شود. (پ) مؤلفه‌های شتاب ذره را در زمان‌های $t=1{,}0, 2{,}0, 3{,}0\,\mathrm{s}$ حساب کنید.

حل: از رابطه‌ی $\vec{r}=2t\hat{i}+2\sin(\frac{\pi t}{4})\hat{j}$ مشتق می‌گیریم تا روابط سرعت و شتاب به دست آیند:

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=2\hat{i}+\frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{4})\hat{j}$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=-\frac{\pi^2}{8}\sin(\frac{\pi t}{4})\hat{j}$$

در نتیجه داریم:

		زمان (s)	۰/۰	۱/۰	۲/۰	۳/۰	۴/۰
(الف)	$\vec{r}$ مکان	x (m)	۰/۰	۲/۰	۴/۰	۶/۰	۸/۰
		y (m)	۰/۰	۱/۴	۲/۰	۱/۴	۰/۰
(ب)	$\vec{v}$ سرعت	v_x (m/s)		۲/۰	۲/۰	۲/۰	
		v_y (m/s)		۱/۱	۰/۰	−۱/۱	
(پ)	$\vec{a}$ شتاب	a_x (m/s²)		۰/۰	۰/۰	۰/۰	
		a_y (m/s²)		−۰/۸۷	−۱/۲	−۰/۸۷	

۱۱۵ الکترونی با سرعت آغازی افقی به بزرگی $1{,}00\times10^{9}\,\mathrm{cm/s}$ به ناحیه‌ای واقع در میان دو صفحه‌ی فلزی افقی دارای بار الکتریکی وارد می‌شود. در آن ناحیه الکترون با شتاب ثابت رو به پایین و به بزرگی $1{,}00\times10^{17}\,\mathrm{cm/s^2}$، که از میدان الکتریکی صفحه‌های باردار ناشی می‌شود، مسافت افقی $2{,}00\,\mathrm{cm}$ را می‌پیماید. مطلوب است تعیین (الف) مدت زمانی که الکترون مسافت افقی $2{,}00\,\mathrm{cm}$ را می‌پیماید، (ب) مسافت قائمی که الکترون در این مدت می‌پیماید، و بزرگی مؤلفه‌های (پ) افقی و (ت) قائم سرعت خروج الکترون از میان صفحه‌ها.

حل: چون در این مسئله بزرگی شتاب رو به پایین a ثابت است، حرکت پرتابی است و ما می‌توانیم از معادلات بخش ۴-۶ استفاده کنیم و به جای g مقدار a را قرار دهیم. جهت مثبت محورها را مطابق متن درس انتخاب می‌کنیم تا بتوانیم مستقیماً از معادله‌ی ۴-۲۲ استفاده کنیم. سرعت آغازی افقی است، در نتیجه $v_{0y}=0$ و داریم

$$v_{0x}=v_0=1{,}00\times10^{9}\,\mathrm{cm/s}$$

(الف) اگر l طول صفحه و t مدت زمانی باشد که الکترون در بین صفحات قرار دارد، $l=v_0 t$ و v_0 تندی آغازی است. درنتیجه داریم

$$t=\frac{l}{v_0}=\frac{2{,}00\,\mathrm{cm}}{1{,}00\times10^{9}\,\mathrm{cm/s}}=2{,}00\times10^{-9}\,\mathrm{s}$$

(ب) جابه‌جایی قائم الکترون برابر است با

$$y=-\frac{1}{2}at^2=-\frac{1}{2}(1{,}00\times10^{17}\,\mathrm{cm/s^2})(2{,}00\times10^{-9}\,\mathrm{s})^2$$

$$=-0{,}20\,\mathrm{cm}=-2{,}00\,\mathrm{mm}$$

یا $|y|=2{,}00\,\mathrm{mm}$.

(پ) مؤلفه‌ی x سرعت تغییر نمی‌کند:

$$v_x=v_0=1{,}00\times10^{9}\,\mathrm{cm/s}=1{,}00\times10^{7}\,\mathrm{m/s}$$

(ت) مؤلفه‌ی y سرعت برابر است با

$$v_y=a_y t=(1{,}00\times10^{17}\,\mathrm{cm/s^2})(2{,}00\times10^{-9}\,\mathrm{s})$$

$$=2{,}00\times10^{8}\,\mathrm{cm/s}=2{,}00\times10^{6}\,\mathrm{m/s}$$

۱۱۶ آسانسور روبازی با تندی ثابت $10\,\mathrm{m/s}$ بالا می‌رود. وقتی آسانسور به ارتفاع $30\,\mathrm{m}$ بالای زمین می‌رسد، پسربچه‌ای از درون آسانسور توپی را از ارتفاع $2{,}0$ متری کف آسانسور یک راست به سمت بالا پرتاب می‌کند. تندی آغازی توپ نسبت به آسانسور $20\,\mathrm{m/s}$ است. (الف) این توپ به چه ارتفاع بیشینه‌ای نسبت به زمین می‌رسد؟ (ب) چه مدت طول می‌کشد تا توپ به کف آسانسور برگردد؟

حل: از مقاومت هوا چشم‌پوشی می‌کنیم، یعنی در مدتی که توپ به هوا پرتاب شده است، $a=-g=-9/8\,\mathrm{m/s^2}$ (به سمت پایین در جهت $y-$) است. از معادلات جدول ۲-۱ استفاده می‌کنیم و به‌جای Δx مقدار Δy را قرار می‌دهیم، زیرا توپ با شتاب ثابت حرکت می‌کند. متغیرهای پریم‌دار (به جز t) را برای آسانسور با سرعت ثابت $(v'=10\,\mathrm{m/s})$، و متغیرهای بدون پریم را برای توپ (با سرعت آغازی $v_0=v'+20=30\,\mathrm{m/s}$ نسبت به زمین) در نظر می‌گیریم.

(الف) لحظه‌ای را که توپ پرتاب می‌شود، زمان صفر در نظر می‌گیریم و ارتفاع بیشینه‌ی y (نسبت به زمین) را از رابطه‌ی $v^2=v_0^2-2g(y-y_0)$ به ازای $v_0=0$ به دست می‌آوریم

$$y=y_0+\frac{v_0^2}{2g}=78\,\mathrm{m}$$

در این‌جا $y_0=y'_0+2=32\,\mathrm{m}$ (مقدار $y'_0=30\,\mathrm{m}$ در صورت مسئله داده شده است) و $v_0=30\,\mathrm{m/s}$ نسبت به زمین است.

(ب) دیدگاه‌های مختلفی در این مورد وجود دارد. یک دیدگاه این است که از همان دستگاه محورهای مختصات قسمت (الف) استفاده کنیم (زمین بدون حرکت است و مبداء مختصات به آن «وصل» شده است)؛ در این صورت حرت آسانسور با رابطه‌ی $y'=y'_0+v't$ و حرکت توپ با معادله‌ی ۲-۱۵ توصیف می‌شود و دو معادله را برای حالتی حل می‌کنیم که توپ و کف آسانسور در یک زمان و در یک نقطه به هم برسند. دیدگاه دیگر این است که از چارچوب مرجع آسانسور استفاده کنیم (پسربچه در داخل آسانسور ممکن است متوجه حرکت آسانسور نباشد زیرا شتاب ندارد) و ما همین روش را توضیح می‌دهیم:

$$\Delta y_e=v_{0e}t-\frac{1}{2}gt^2\Rightarrow t=\frac{v_{0e}+\sqrt{v_{0e}^2-2g\Delta y_e}}{g}$$

در این‌جا $v_{0e}=20\,\mathrm{m/s}$ سرعت آغازی توپ نسبت به آسانسور و $\Delta y_e=-2/0\,\mathrm{m}$ جابه‌جایی توپ نسبت به کف آسانسور است. ریشه‌ی مثبت معادله را انتخاب می‌کنیم تا مقدار مثبت برای t بدست آید: $t=4/2\,\mathrm{s}$.

۱۱۷ یک بازیکن فوتبال توپی را چنان شوت می‌کند که به مدت ۴/۵ ثانیه در هوا حرکت می‌کند و در فاصله‌ی ۴۶ متری به زمین می‌خورد. اگر توپ در ارتفاع ۱۵۰ سانتی‌متری سطح زمین از پای بازیکن جدا شود، (الف) بزرگی و (ب) زاویه‌ی سرعت آغازی توپ (نسبت به راستای افقی) چیست؟

حل: از معادله‌ی ۴-۲۲ استفاده می‌کنیم. مبداء مختصات را در مکان آغازی توپ فوتبال برای حرکت پرتابی در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم θ_0 زاویه‌ی سرعت آغازی نسبت به محور $+x$ است.

(الف) $x=46\,\mathrm{m}$ و $y=-1/5\,\mathrm{m}$ مختصات نقطه‌ی برخورد توپ به زمین هستند. توپ در لحظه‌ی $t=4/5\,\mathrm{s}$ به زمین برخورد می‌کند. چون $x=v_{0x}t$، در نتیجه داریم

$$v_{0x}=\frac{x}{t}=\frac{46\,\mathrm{m}}{4/5\,\mathrm{s}}=10/2\,\mathrm{m/s}$$

چون $y=v_{0y}t-\frac{1}{2}gt^2$، داریم

$$v_{0y}=\frac{y+\frac{1}{2}gt^2}{t}=\frac{(-1/5\mathrm{m})+\frac{1}{2}(9/8\mathrm{m/s^2})(4/5\mathrm{s})^2}{4/5\mathrm{s}}=21/7\,\mathrm{m/s}$$

بزرگی سرعت آغازی توپ برابر است با

$$v_0=\sqrt{v_{0x}^2+v_{0y}^2}=\sqrt{(10/2\,\mathrm{m/s})^2+(21/7\,\mathrm{m/s})^2}=24\,\mathrm{m/s}$$

(ب) زاویه‌ی آغازی $\theta_0=v_{0y}/v_{0x}$ است. در نتیجه داریم

$$\theta_0=\tan^{-1}[(21/7\,\mathrm{m/s})\div(10/2\,\mathrm{m/s})]=65^\circ$$

۱۱۸ پایانه‌ی یک فرودگاه دارای پیاده‌رو متحرکی است که تندی حرکت مسافران را در یک راهرو دراز افزایش می‌دهد. شخص L از این پیاده‌رو متحرک استفاده نمی‌کند و سرتاسر راهرو را در مدت $150\,\mathrm{s}$ پیاده می‌رود. شخص C، که روی پیاده‌رو متحرک ایستاده است، همان مسافت را در مدت $70\,\mathrm{s}$ می‌پیماید. شخص M که روی پیاده‌رو متحرک سوار شده است بر روی آن راه می‌رود. چه مدت طول می‌کشد تا M سرتاسر راهرو را بپیماید؟ فرض کنید تندی راه رفتن L و M یکسان است.

حل: سرعت شخص L مساوی با v_1 و سرعت شخص C مساوی با v_2 است. همچنین، طول راهرو را d می‌نامیم. اکنون مدت زمان عبور شخص L از راهرو $t_1=135\,\mathrm{s}$ (که باید مساوی با d/v_1 باشد) و مدت زمان عبور شخص C از راهرو $t_2=70\,\mathrm{s}$ (که باید مساوی با d/v_2 باشد) است. مدت زمانی که طول می‌کشد تا شخص M طول راهرو را طی کند برابر است با

$$t=\frac{L}{v_1+v_2}=\frac{1}{v_1/L+v_2/L}=\frac{1}{\frac{1}{150\,\mathrm{s}}+\frac{1}{70\,\mathrm{s}}}=50\,\mathrm{s}$$

۱۱۹ یک واگن باری با دیوارهای چوبی بر روی خط آهن مستقیمی با تندی v_1 حرکت می‌کند. تیراندازی با یک تفنگ پرقدرت گلوله‌ای را (با تندی آغازی v_2) به سمت واگن شلیک می‌کند. گلوله دو دیواره‌ی واگن را سوراخ می‌کند و وقتی از درون واگن نگاه می‌کنیم سوراخ‌های ورود و خروج گلوله را درست در مقابل هم می‌بینیم. این گلوله در چه راستایی نسبت به خط آهن شلیک شده است؟ فرض کنید گلوله در موقع ورود به واگن منحرف نمی‌شود، اما تندی آن به اندازه‌ی ۲۰ درصد کاهش می‌یابد. $v_1 = ۸۵\,\text{km/h}$ و $v_2 = ۶۵۰\,\text{m/s}$. (چرا نیازی به دانستن پهنای واگن نیست؟)

حل: سرعت واگن باری نسبت به زمین $\vec{v}_{cg} = v_1\hat{i}$ و سرعت گلوله نسبت به زمین، پیش از وارد شدن به واگن برابر است با

$$\vec{v}_{\circ bg} = v_2 \cos\theta\,\hat{i} + v_2 \sin\theta\,\hat{j}$$

(در این‌جا از اثرات گرانش بر روی گلوله چشم‌پوشی کرده‌ایم). سرعت گلوله در داخل واگن نسبت به زمین خارج واگن، برابر است با

$$\vec{v}_{bg} = ۰/۸\, v_2 \cos\theta\,\hat{i} + ۰/۸\, v_2 \sin\theta\,\hat{j}$$

(در صورت مسئله گفته شده است که تندی گلوله ۲۰ درصد کاهش می‌یابد). مسئله نشان می‌دهد که سرعت گلوله در داخل واگن ***نسبت به واگن*** (که v_3 نامیده می‌شود)، $\vec{v}_{bc} = v_3\hat{j}$ است. اکنون از معادله‌ی ۴-۴۴ داریم

$$\vec{v}_{bg} = \vec{v}_{bc} + \vec{v}_{cg} = ۰/۸ v_2 \cos\theta\,\hat{i} + ۰/۸ v_2 \sin\theta\,\hat{j} = v_3\hat{j} + v_1\hat{i}$$

بنابراین، با مساوی قرار دادن مؤلفه‌های x، می‌توان مقدار θ را حساب کرد. اگر بخواهیم v_3 را پیدا کنیم، می‌توانیم مؤلفه‌های y را مساوی قرار دهیم، و اگر پهنای واگن معلوم باشد، می‌توانیم مدت زمان عبور گلوله از داخل واگن را به دست آوریم اما چنین اطلاعاتی خواسته نشده است (به این دلیل نیازی به دانستن پهنای واگن نیست). بنابراین، از مساوی قرار دادن مؤلفه‌های x داریم

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{v_1}{۰/۸\, v_2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{۸۵\,\text{km/h}\left(\frac{۱۰۰۰\,\text{m/km}}{۳۶۰۰\,\text{s/h}}\right)}{۰/۸\,(۶۵۰\,\text{m/s})}\right)$$

در نتیجه زاویه‌ی ۸۷° برای جهت سرعت $\vec{v}_{bg}$ (نسبت به محور $\hat{i}$، که جهت حرکت واگن است) به دست می‌آید. در صورت مسئله پرسیده شده است که گلوله در چه راستایی نسبت به خط آهن شلیک شده است؟ یعنی پاسخ ۸۷° نیست، بلکه مکمل آن ۹۳° (اندازه‌گیری شده نسبت به جهت حرکت) است. در دستگاه مختصات ما سرعت گلوله در ربع اول تحت زاویه‌ی ۸۷° در جهت پادساعتگرد نسبت به محور $+x$ (جهت حرکت قطار) است، یعنی گلوله از ربع سوم (محل استقرار تفنگ) تحت زاویه‌ی -۹۳° (یعنی زاویه‌ی ۹۳° در جهت ساعتگرد نسبت به محور $+x$) شلیک شده است.