

نیرو و حرکت - ۲

پودمان ۱-۶ اصطکاک

* ۱ کف یک واگن تخت راه آهن را با صندوق‌هایی بار کرده‌اند که ضریب اصطکاک ایستایی میان صندوق‌ها و کف ۰/۲۵ است. اگر قطار با تندی ۴۸ km/h در حال حرکت باشد در طی چه مسافت کوتاهی می‌تواند با شتاب ثابت متوقف شود بی‌آنکه صندوق‌ها بر کف واگن بلغزند؟

* ۲ در بازی شافل بورد در خوابگاه دانشگاه، دانشجویانی که از امتحانات نهایی عصبانی‌اند، برای به جلو راندن کتاب حسابان در راهرو خوابگاه از یک دسته‌ی جاروب استفاده می‌کنند. اگر این کتاب ۳/۵ کیلوگرمی با نیروی افقی ۲۵ N که دسته‌ی جاروب وارد می‌کند، از حال سکون به اندازه‌ی ۰/۹ m به جلو رانده شود و به تندی ۱/۶۰ m/s برسد، ضریب اصطکاک جنبشی میان کتاب و کف راهرو چقدر است؟

* ۳ یک کمد اتاق خواب به جرم ۴۵ kg، شامل کتوهای محتوی لباس، روی کف اتاق قرار دارد. (الف) اگر ضریب اصطکاک ایستایی میان کمد و کف اتاق ۰/۴۵ باشد، بزرگی کمینیه‌ی نیروی افقی لازم برای به حرکت درآوردن کمد چقدر است؟ (ب) اگر کتوهای محتوی لباس به جرم ۱۷ kg را از کمد خارج کنیم و سپس کمد را هل بدهیم، این بار بزرگی کمینیه‌ی نیرو چقدر می‌شود؟

* ۴ بیشترین شتاب کند کننده (با بزرگی a) توسط نیروی اصطکاک بیشینه (معادله‌ی ۱-۶، به ازای $F_N = mg$ در این حالت) تولید می‌شود. با استفاده از قانون دوم نیوتون داریم

$$a = f_{s,\max} / m = \mu_s g$$

سپس از معادله‌ی ۱۶-۲ می‌توان کوتاه‌ترین مسافت توقف را پیدا کرد: $|\Delta x| = v^2 / 2a = ۳۶ \text{ m}$. در این محاسبه، ابتدا باید یکای تندی را تبدیل کرد: $v = ۱۳ \text{ m/s}$.

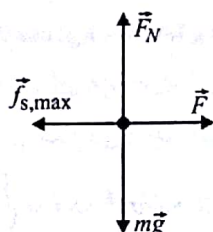
حل: نمودار جسم - آزاد کمد در زیر نشان داده شده است. فرض می‌کنیم کمد واژگون نمی‌شود و بر اثر نیروی هل دادن $\vec{F}$ در جهت $+x$ فقط حرکت افقی انجام می‌دهد. با استفاده از قانون دوم نیوتون برای محورهای x و y داریم

$$F - F_{s,\max} = ma$$

$$F_N - mg = 0$$

از معادله‌ی دوم نیروی عمودی $F_N = mg$ به دست می‌آید و نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه (از معادله‌ی ۱-۶) برابر است با $f_{s,\max} = \mu_s mg$. بنابراین معادله‌ی اول به صورت زیر نوشته می‌شود

$$F - \mu_s mg = ma = 0$$



حل: از قانون دوم نیوتون برای حرکت افقی به صورت $F - \mu_k mg = ma$ استفاده می‌کنیم، که در آن از معادله‌ی ۲-۶ با فرض $F_N = mg$ استفاده شده است (می‌توان فرض کرد که نیروی قائم ناشی از دسته‌ی جاروب ناچیز است). معادله‌ی ۱۶-۲ مسافت پیموده شده و تندی پایانی را به شتاب ربط می‌دهد:

حالت بی اصطکاک ($\mu_k = 0$) را با پریم مشخص می کنیم و نسبت زیر را به دست می آوریم

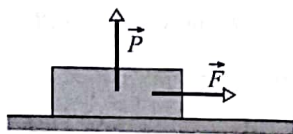
$$\frac{t}{t'} = \frac{\sqrt{2l/a}}{\sqrt{2l/a'}} = \sqrt{\frac{a'}{a}}$$

در نتیجه معلوم می شود که اگر $t/t' = 2$ باشد، $a' = 4a$ خواهد بود. اگر مقدارهای به دست آمده برای شتاب ها را در رابطه ی بالا قرار دهیم، خواهیم داشت

$$g \sin \theta = 4g (\sin \theta - \mu_k \cos \theta)$$

با استفاده از $\theta = 35^\circ$ ، $\mu_k = 0.53$ به دست می آید.

* ۵ جسمی به جرم 3.0 kg در آغاز روی یک سطح افقی ساکن است. این جسم، مطابق شکل ۱۷-۶، تحت تأثیر نیروی افقی $\vec{F}$ به بزرگی 6.0 N و نیروی قائم $\vec{P}$ ، قرار می گیرد. ضریب های اصطکاک میان جسم و سطح عبارت اند از $\mu_s = 0.40$ و $\mu_k = 0.25$. بزرگی $\vec{P}$ برابر با (الف) 8.0 N ، (ب) 1.0 N ، و (پ) 12 N ، معین کنید.



شکل ۱۷-۶ مسئله ۵.

حل: علاوه بر نیروهای نشان داده شده در شکل ۱۷-۶، نمودار جسم - آزاد می تواند شامل یک نیروی قائم (عمودی) رو به بالای $\vec{F}_N$ باشد که از کف به جسم وارد می شود، و یک نیروی رو به پایین $m\vec{g}$ که نیروی جاذبه ی گرانشی زمین را نشان می دهد، و یک نیروی فرضی $\vec{f}$ به طرف چپ برای اصطکاک جنبشی یا ایستایی، باشد. جهت $+x$ را به طرف راست و جهت $+y$ را به طرف بالا در نظر می گیریم. قانون دوم نیوتون را برای این محورها می نویسیم:

$$F - f = ma$$

$$P + F_N - mg = 0$$

در اینجا $F = 6.0 \text{ N}$ ، و $m = 3.0 \text{ kg}$ جرم جسم است.

(الف) در حالتی که $P = 8.0 \text{ N}$ است، داریم

$$F_N = (3.0 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) - 8.0 \text{ N} = 21.4 \text{ N}$$

با استفاده از معادله ی ۱-۶، $f_{s, \max} = \mu_s F_N = 8.6 \text{ N}$ ،

در اینجا $a = 0$ را قرار داده ایم تا نشان دهیم که اصطکاک ایستایی هنوز می تواند مانع حرکت کمد شود.

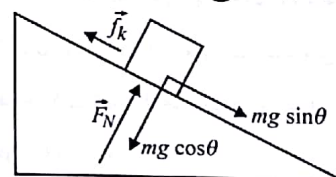
(الف) به ازای $\mu_s = 0.45$ و $m = 45 \text{ kg}$ ، از معادله ی بالا داریم $F = 198 \text{ N}$. برای به حرکت در آوردن کمد، شخص باید آن را با نیرویی بیش از 198 N هل دهد. بنابراین می توان گفت که کمترین نیرو برای هل دادن، $F = 2.0 \times 10^2 \text{ N}$ است.

(ب) با قرار دادن $m = 28 \text{ kg}$ به جای $m = 45 \text{ kg}$ ، $F = 1.2 \times 10^2 \text{ N}$ به دست می آید.

توجه: مقادیر پیدا شده در بالا، نیروی کمینه ی لازم برای مقابله با اصطکاک را نشان می دهند. اگر نیرویی بیشتر از $\mu_s mg$ وارد شود، یک نیروی برآیند در جهت محور $+x$ خواهیم داشت، در نتیجه شتاب صفر نخواهد بود.

* ۴ مدتی که طول می کشد تا خوک از یک سرسره ی با زاویه ی شیب 35° درجه به پایین بلغزد دو برابر مدت لغزیدن از سرسره ی بی اصطکاک با زاویه ی شیب 35° درجه است. ضریب اصطکاک جنبشی میان حیوان و سرسره چقدر است؟

حل: ابتدا نیروهای وارد شده به خوک (با جرم m) را تجزیه می کنیم. زاویه ی سرسره (سطح شیب دار) θ است.



جهت $+x$ را «به طرف پایین سرسره» انتخاب می کنیم. با استفاده از قانون دوم نیوتون برای محورهای x و y داریم

$$mg \sin \theta - f_k = ma$$

$$F_N - mg \cos \theta = 0$$

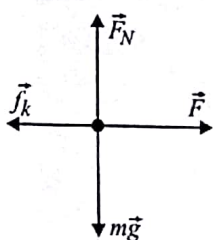
این معادله ها را همراه با معادله ی ۲-۶ ($f_k = \mu_k F_N$) حل می کنیم تا نتیجه ی زیر برای شتاب رو به پایین خوک در روی سرسره به دست آید:

$$a = g (\sin \theta - \mu_k \cos \theta)$$

برای محاسبه ی مدت زمان لغزیدن خوک از حال سکون و پیمودن مسافت رو به پایین l ، از معادله ی ۱۵-۲ استفاده می کنیم

$$l = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2l}{a}}$$

حل: نمودار جسم - آزاد صندوق در زیر نشان داده شده است. $\vec{F}$ نیروی افقی است که شخص (در جهت $+x$) به صندوق وارد می‌کند. $\vec{f}_k$ نیروی اصطکاک جنبشی (در جهت $-x$) است، F_N نیروی عمودی قائمی است که کف به



صندوق وارد می‌کند و $m\vec{g}$ نیروی گرانش است. بزرگی نیروی اصطکاک از معادله ۶-۲ به دست می‌آید

$$f_k = \mu_k F_N$$

با استفاده از قانون دوم نیوتون برای محوره‌های x و y داریم

$$F - f_k = ma$$

$$F_N - mg = 0$$

(الف) از معادله دوم نیروی عمودی $F_N = mg$ به دست می‌آید، در نتیجه نیروی اصطکاک برابر است با

$$\begin{aligned} f_k &= \mu_k F_N = \mu_k mg \\ &= (0.35)(55 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) = 1.9 \times 10^2 \text{ N} \end{aligned}$$

(ب) معادله اول به صورت زیر در می‌آید

$$F - \mu_k mg = ma$$

که (به ازای $F = 220 \text{ N}$) شتاب صندوق برابر است با

$$a = \frac{F}{m} - \mu_k g = 0.85 \text{ m/s}^2$$

توجه: برای شتاب گرفتن صندوق، شرط $F > f_k = \mu_k mg$ باید برقرار شود. همان‌طور که از معادله بالا دیده می‌شود، هرچه مقدار μ_k بیشتر باشد، شتاب حاصل از همان نیرو کوچک‌تر خواهد بود.

* ۸ سنگ‌های لغزان مرموز. در طول مسیر دور افتاده‌ی مسابقه‌ی پلایا در دره‌ی مرگ کالیفرنیا، گاهی سنگ‌ها از جای خود کنده می‌شوند و در بیابان حرکت می‌کنند، چنان‌که گویی مهاجرت کرده‌اند (شکل ۶-۱۸). این حرکت سنگ‌ها سال‌ها حس کنجکاوی مردم را برانگیخته بود. یک توجیه این عمل این بود که بادهای شدید همراه با رگبارهای ناگهانی سنگ‌های صاف را بر روی زمین نرم شده توسط باران، می‌کشند. وقتی صحرا خشک می‌شود آثار کشیده شدن سنگ‌ها بر جای می‌ماند. اندازه‌گیری‌ها نشان می‌دهند که ضریب اصطکاک جنبشی میان سنگ‌ها و زمین‌های خیس شده‌ی پلایا در حدود 0.80 است.

که از نیروی راست سوی 610 N بزرگ‌تر است - در نتیجه جسم (که در آغاز ساکن بود) حرکت نمی‌کند. با قرار دادن $a = 0$ در معادله اول بالا، نیروی اصطکاک ایستایی $f = P = 610 \text{ N}$ به دست می‌آید. (ب) در این حالت، $P = 10 \text{ N}$ است و نیروی عمودی برابر است با

$$F_N = (310 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) - 10 \text{ N} = 1915 \text{ N}$$

با استفاده از معادله ۶-۱، $f_{s, \max} = \mu_s F_N = 718 \text{ N}$ است، که از نیروی راست سوی 610 N بزرگ‌تر است - در نتیجه جسم (که در آغاز ساکن بود) حرکت نمی‌کند. با قرار دادن $a = 0$ در معادله اول بالا، نیروی اصطکاک ایستایی $f = P = 610 \text{ N}$ به دست می‌آید.

(پ) در حالت آخر، $P = 12 \text{ N}$ باعث می‌شود $F_N = 1714 \text{ N}$ باشد و $f_{s, \max} = \mu_s F_N = 710 \text{ N}$ است که از نیروی راست سوی 610 N بزرگ‌تر است - در نتیجه جسم (که در آغاز ساکن بود) حرکت نمی‌کند. با قرار دادن $a = 0$ در معادله اول بالا، نیروی اصطکاک ایستایی $f = P = 610 \text{ N}$ به دست می‌آید.

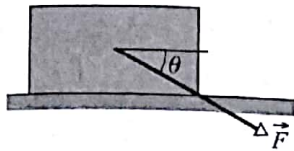
* ۶ یک بازیکن بیسبال به جرم $m = 79 \text{ kg}$ که در حال لغزیدن در پایگاه دوم است، تندی‌اش با نیروی اصطکاک به بزرگی 470 N کاهش پیدا می‌کند. ضریب اصطکاک جنبشی میان بازیکن و زمین μ_k ، چقدر است؟

حل: نمودار جسم - آزاد بازیکن در زیر نشان داده شده است. $\vec{F}_N$ نیروی عمودی زمین است که به بازیکن وارد می‌شود، $m\vec{g}$ نیروی گرانش و $\vec{f}$ نیروی اصطکاک است. رابطه‌ی نیروی اصطکاک با نیروی عمودی به صورت $f = \mu_k F_N$ است. از قانون دوم نیوتون

برای محور قائم استفاده می‌کنیم تا نیروی عمودی به دست آید. مؤلفه‌ی قائم شتاب صفر است، در نتیجه $F_N - mg = 0$ و $F_N = mg$ است. بنابراین، ضریب اصطکاک ایستایی برابر است با

$$\mu_s = \frac{470 \text{ N}}{(79 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)} = 0.60$$

* ۷ شخصی با نیروی افقی 220 N یک صندوق 55 کیلوگرمی را روی یک سطح تراز حرکت می‌دهد. ضریب اصطکاک جنبشی 0.35 است. بزرگی (الف) نیروی اصطکاک و (ب) شتاب صندوق، چیست؟



شکل ۱۹-۶ مسئله‌های ۹ و ۳۲.

حل: محور x را افقی و به طرف راست و محور y را به طرف بالا در نظر می‌گیریم و می‌بینیم که نیروی 15 N دارای مؤلفه‌های $F_x = F \cos \theta$ و $F_y = -F \sin \theta$ است.

(الف) قانون دوم نیوتون برای محور y را به صورت زیر می‌نویسیم

$$F_N - F \sin \theta - mg = 0$$

$$\Rightarrow F_N = (15\text{ N}) \sin 40^\circ + (3/5\text{ kg})(9/8\text{ m/s}^2) = 44\text{ N}$$

که به ازای $\mu_k = 0/25$ ، از معادله‌ی ۲-۶ مقدار $f_k = 11\text{ N}$ به دست می‌آید.

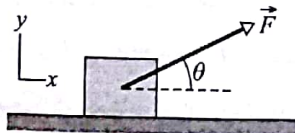
(ب) از قانون دوم نیوتون برای محور x داریم

$$F \cos \theta - f_k = ma$$

$$\Rightarrow a = \frac{(15\text{ N}) \cos 40^\circ - 11\text{ N}}{3/5\text{ kg}} = 0/14\text{ m/s}^2$$

چون مقدار به دست آمده مثبت است، جسم در جهت $+x$ (ب) طرف راست) شتاب می‌گیرد.

* ۱۰ شکل ۲۰-۶ جسمی به جرم m را نشان می‌دهد که در آغاز بر روی کف اتاق ساکن است. اکنون نیرویی به بزرگی $0/500mg$ تحت زاویه‌ی $\theta = 20^\circ$ به سمت بالا به این جسم وارد می‌شود. بزرگی شتاب جسم در کف اتاق را در حالت‌هایی پیدا کنید که ضریب‌های اصطکاک برابر باشند با: (الف) $\mu_s = 0/600$ و $\mu_k = 0/300$ و (ب) $\mu_s = 0/400$ و $\mu_k = 0/500$.



شکل ۲۰-۶ مسئله ۱۰.

حل: (الف) نمودار جسم - آزاد در زیر نشان داده شده است، که در آن $\vec{F}$ نیروی اعمال شده به جسم، $\vec{F}_N$ نیروی عمودی که کف به جسم وارد می‌کند، $m\vec{g}$ نیروی گرانش، و $\vec{f}$ نیروی اصطکاک است. جهت $+x$ را افقی و به طرف راست، و جهت $+y$ را به

نیروی افقی لازم برای آنکه سنگی به جرم 20 kg با وزیدن یک تندباد به حرکت در آید چقدر است؟ (دنباله‌ی موضوع در مسئله‌ی ۳۷ ادامه پیدا می‌کند).



شکل ۱۸-۶ مسئله ۸ چه چیزی سنگ‌ها را به حرکت در آورده است؟

حل: برای آن که سنگ به حرکتش ادامه دهد، یک نیروی افقی (در جهت $+x$) باید به آن وارد شود، اثر کند کنندگی اصطکاک جنبشی را خنثی کند. با استفاده از قانون دوم نیوتون برای محورهای x و y ، داریم

$$F - f_k = ma$$

$$F_N - mg = 0$$

از معادله‌ی دوم نیروی عمودی $F_N = mg$ به دست می‌آید، در نتیجه (با استفاده از معادله‌ی ۲-۶) نیروی اصطکاک جنبشی به صورت $f_k = \mu_k mg$ به دست می‌آید. بنابراین، معادله‌ی اول به صورت زیر نوشته می‌شود

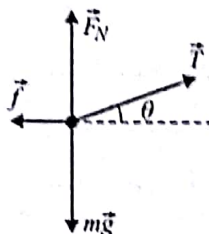
$$F - \mu_k mg = ma = 0$$

در این جا $a = 0$ را قرار می‌دهیم تا با ایده‌ی ثابت ماندن سرعت افقی سازگار باشد. به ازای $m = 20\text{ kg}$ ، $\mu_k = 0/80$ ، داریم

$$F = 1/6 \times 10^2\text{ N}$$

* ۹ جسمی $3/5$ کیلوگرمی با نیروی $\vec{F}$ به بزرگی 15 N تحت زاویه‌ی $\theta = 40^\circ$ نسبت به افق، روی سطحی افقی هل داده می‌شود (شکل ۱۹-۶). ضریب اصطکاک جنبشی میان جسم و سطح $0/25$ است. مطلوب است محاسبه‌ی بزرگی، (الف) نیروی اصطکاک که سطح به جسم وارد می‌کند، و (ب) شتاب جسم.

حل: (الف) نمودار جسم - آزاد صندوق در زیر نشان داده شده است. T نیروی کشش طناب است که به صندوق وارد می‌شود. F_N نیروی عمودی است که سطح به صندوق وارد می‌کند، mg نیروی گرانش، و f نیروی اصطکاک است. جهت $+x$ را افقی و به طرف راست و جهت $+y$ را به طرف بالا در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم صندوق به حرکت است. معادلات مؤلفه‌های x و y این نیرو بر طبق قانون دوم نیوتون برابرند با



$$T \cos \theta - f = 0$$

$$T \sin \theta + F_N - mg = 0$$

در این جا $\theta = 15^\circ$ زاویه بین طناب و راستای افقی است. از معادله‌ی اول داریم $f = T \cos \theta$ و از معادله‌ی دوم $F_N = mg - T \sin \theta$ به دست می‌آید. اگر بخواهیم صندوق ساکن بماند، f باید کمتر از $\mu_s F_N$ یا $\mu_s (mg - T \sin \theta)$ باشد. وقتی نیروی کشش کافی است و می‌تواند صندوق را در آستانه‌ی حرکت قرار دهد، باید داشته باشیم:

$$T \cos \theta = \mu_s (mg - T \sin \theta)$$

در نتیجه نیروی کشش به مقدار زیر به دست می‌آید

$$T = \frac{\mu_s mg}{\cos \theta + \mu_s \sin \theta} = \frac{(0.50)(68 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)}{\cos 15^\circ + 0.50 \sin 15^\circ} = 382 \text{ N}$$

(ب) قانون دوم نیوتون برای صندوق در حال حرکت به صورت زیر نوشته می‌شود

$$T \cos \theta - f = ma$$

$$F_N + T \sin \theta - mg = 0$$

اکنون $f = \mu_k F_N$ است و از معادله‌ی دوم مقدار $F_N = mg - T \sin \theta$ به دست می‌آید که $f = \mu_k (mg - T \sin \theta)$ را به دست می‌دهد. این مقدار را به جای f در معادله‌ی اول قرار می‌دهیم

$$T \cos \theta - \mu_k (mg - T \sin \theta) = ma$$

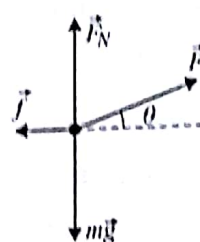
در نتیجه شتاب صندوق به دست می‌آید

$$a = \frac{T (\cos \theta + \mu_k \sin \theta)}{m} - \mu_k g$$

که مقدار عددی آن برابر است با

$$a = \frac{(304 \text{ N})(\cos 15^\circ + 0.35 \sin 15^\circ)}{68 \text{ kg}} - (0.35)(9.8 \text{ m/s}^2) = 1.3 \text{ m/s}^2$$

طرف بالا در نظر می‌گیریم. معادلات مربوط به مؤلفه‌های x و y نیرو، بر طبق قانون دوم نیوتون، عبارت‌اند از



$$F_N = T \cos \theta - f = ma$$

$$F_y = T \sin \theta + F_N - mg = 0$$

اکنون $f = \mu_k F_N$ است، و از معادله‌ی دوم $F_N = mg - F \sin \theta$ به دست می‌آید که در نتیجه $f = \mu_k (mg - F \sin \theta)$ حاصل می‌شود. این رابطه را به جای f در معادله‌ی اول قرار می‌دهیم:

$$F \cos \theta - \mu_k (mg - F \sin \theta) = ma$$

بنابراین، شتاب برابر است با

$$a = \frac{F}{m} (\cos \theta + \mu_k \sin \theta) - \mu_k g$$

(الف) اگر $\mu_s = 0.600$ و $\mu_k = 0.500$ باشد، بزرگی بیشینه‌ی f برابر است با

$$f_{s, \max} = \mu_s F_N = (0.600)(mg - 0.500 mg \sin 20^\circ) = 0.497 mg$$

از طرف دیگر داریم $F \cos \theta = 0.500 \cos 20^\circ = 0.470 mg$. بنابراین، $F \cos \theta < f_{s, \max}$ و جسم با شتاب $a = 0$ ساکن می‌ماند.

(ب) اگر $\mu_s = 0.400$ و $\mu_k = 0.300$ باشد، بزرگی بیشینه‌ی f برابر است با

$$f_{s, \max} = \mu_s F_N = (0.400)(mg - 0.500 mg \sin 20^\circ) = 0.332 mg$$

در این حالت $F \cos \theta = 0.500 mg \cos 20^\circ = 0.470 mg > f_{s, \max}$

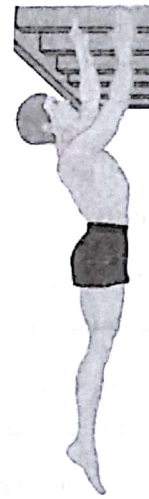
است. در نتیجه، شتاب جسم برابر است با

$$a = \frac{F}{m} (\cos \theta + \mu_k \sin \theta) - \mu_k g$$

$$= (0.500)(9.8 \text{ m/s}^2) [\cos 20^\circ + (0.300) \sin 20^\circ] - (0.300)(9.8 \text{ m/s}^2) = 2.17 \text{ m/s}^2$$

* ۱۱ یک صندوق ۶۸ کیلوگرمی با طنابی متصل به صندوق که زاویه‌ی آن نسبت به راستای افقی ۱۵ درجه است روی یک سطح افقی کشیده می‌شود. (الف) اگر ضریب اصطکاک ایستایی ۰/۵۰ باشد، بزرگی کمینه‌ی نیرویی که به طناب باید وارد شود تا صندوق به حرکت در آید، چقدر است؟ (ب) به ازای $\mu_k = 0.35$ ، بزرگی شتاب آغازی صندوق چقدر است؟

* ۱۲ در حدود سال ۱۹۱۵، هنری سینکوسکی از اهالی فیلادلفیا، با گرفتن تیر سقف اتاق، به طوری که انگشت شست هر دست در یک طرف تیر و انگشت‌های دیگر در طرف مقابل تیر قرار داشتند، خودش را به حالت آویخته نگه داشت (شکل ۶-۲۱). جرم سینکوسکی ۷۹ kg بود. اگر ضریب اصطکاک ایستایی میان دست و تیر ۰/۷۰ باشد، کمترین بزرگی نیروی عمودی که هر انگشت شست یا انگشت‌های مقابل به تیر وارد می‌کردند، چقدر است؟ (سینکوسکی پس از آویزان شدن خود را تا چانه بالا کشید و سپس با دست‌هایش در طول تیر حرکت کرد. اگر این کار سینکوسکی را قابل توجه نمی‌دانید، خودتان آن را امتحان کنید).



شکل ۶-۲۱ مسئله ۱۲.

حل: شتاب وجود ندارد، در نتیجه نیروهای اصطکاک ایستایی (رو به بالا) با بزرگی جاذبه گرانشی (رو به پایین) برابر است (در این جا چهار نیروی اصطکاک وجود دارد، یک نیرو برای هر انگشت و یک نیرو برای مجموعه چهار انگشت در طرف مقابل). با استفاده از معادله ۱-۶ داریم

$$4\mu_s F_N = mg = (79 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)$$

در نتیجه به ازای $\mu_s = 0.70$ ، مقدار $F_N = 2.18 \times 10^2 \text{ N}$ به دست می‌آید.

* ۱۳ کارگری یک صندوق ۳۵ کیلوگرمی را به طور افقی و با نیرویی به بزرگی ۱۱۰ N هل می‌دهد. ضریب اصطکاک ایستایی میان صندوق و سطح ۰/۳۷ است. (الف) در این شرایط مقدار $f_{s,\max}$ چقدر است؟ (ب) آیا صندوق حرکت می‌کند؟ (پ)

نیروی اصطکاک وارد به صندوق از سوی سطح چقدر است؟ (ت) اکنون، فرض کنید کارگر دیگری صندوق را به طور قائم به سمت بالا می‌کشد تا به کارگر اول کمک کرده باشد. کمترین مقدار نیروی قائم چقدر باید باشد تا کارگر اول با نیروی ۱۱۰ N بتواند صندوق را به حرکت در آورد؟ (ث) اگر کارگر دوم برای کمک کردن به کارگر اول صندوق را به طور افقی بکشد، کمترین مقدار نیروی کشش چقدر باید باشد تا صندوق حرکت کند؟

حل: بزرگی نیروی ۱۱۰ N را که کارگر به صندوق وارد می‌کند با F نشان می‌دهیم. بزرگی نیروی اصطکاک ایستایی می‌تواند در بین صفر و $f_{s,\max} = \mu_s F_N$ تغییر کند.

(الف) در این حالت، از کاربرد قانون دوم نیوتون در راستای قائم،

$$F_N = mg \quad \text{به دست می‌آید. در نتیجه داریم}$$

$$f_{s,\max} = \mu_s F_N = \mu_s mg$$

$$= (0.37)(35 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) = 1.3 \times 10^2 \text{ N}$$

که از F بزرگ‌تر است.

(ب) صندوق، که در آغاز ساکن است، ساکن می‌ماند زیرا

$$F < f_{s,\max} \quad \text{است. بنابراین، صندوق حرکت نمی‌کند.}$$

(پ) با استفاده از قانون دوم نیوتون برای راستای افقی، بزرگی

$$f_s = 1.1 \times 10^2 \text{ N} \quad \text{به دست می‌آید.}$$

(ت) نیروی رو به بالایی را که کارگر دوم به صندوق اعمال می‌کند،

$$F_y \quad \text{می‌نامیم، سپس با استفاده از قانون دوم نیوتون برای راستای}$$

$$\text{قائم،} \quad F_N = mg - F_y \quad \text{را به دست می‌آوریم. در نتیجه نیروی}$$

اصطکاک ایستایی بیشینه برابر است با

$$f_{s,\max} = \mu_s F_N = \mu_s (mg - F_y)$$

برای آن‌که صندوق حرکت کند، F باید در شرط

$$F > f_{s,\max} = \mu_s (mg - F_y) \quad \text{یا}$$

$$110 \text{ N} > (0.37)[(35 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) - F_y]$$

صدق کند. مقدار کمینه‌ی F_y که در این نامساوی صدق می‌کند

اندکی بزرگ‌تر از ۴۵/۷ N است، لذا پاسخ را به صورت

$$F_{y,\min} = 46 \text{ N} \quad \text{بیان می‌کنیم.}$$

(ث) در حالت آخر، برای به حرکت در آوردن صندوق، کارگر باید

با نیروی افقی بزرگ‌تر از نیروی اصطکاک ایستایی [که در قسمت

(الف) حساب شد] آن را هل دهد. در نتیجه، از قانون نیوتون برای

راستای افقی داریم

کمینه‌ی نیروی F که می‌تواند باعث لغزیدن قطعه به پایین صفحه‌ی بستر بشود، برابر است با

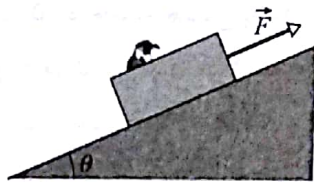
$$F = mg (\mu_s \cos \theta - \sin \theta) = 3,0 \times 10^7 \text{ N}$$

۱۵ * ضریب اصطکاک ایستایی میان تفلون ماهی‌تابه و تخم‌مرغ نیمرو شده، در حدود $0,04$ است. کمترین زاویه‌ی شیبی که به ماهی‌تابه می‌توان داد تا تخم‌مرغ‌ها بر روی کف آن بلغزند، چقدر است؟

حل: بحث بسیار خوب و اثبات معادله‌ی مربوط به این مسئله در مسئله نمونه تحت عنوان «اصطکاک، نیروی وارد شده تحت زاویه» صورت گرفته است. ما در این جا از نتیجه‌ی اصلی آن مسئله استفاده می‌کنیم:

$$\theta = \tan^{-1} \mu_s = \tan^{-1} 0,04 \approx 2^\circ$$

۱۶ * سورت‌مای حامل یک پنگون به وزن 80 N در روی سطح شیب‌داری با زاویه‌ی شیب 20° درجه نسبت به راستای افقی به حال سکون قرار دارد (شکل ۶-۲۳). ضریب اصطکاک ایستایی میان سورت‌مای و سطح شیب‌دار $0,25$ و ضریب اصطکاک جنبشی میان آن‌ها $0,15$ است. (الف) بزرگی کمترین نیروی $\vec{F}$ موازی با سطح شیب‌دار چقدر باید باشد تا مانع لغزیدن سورت‌مای به پایین سطح بشود؟ (ب) بزرگی کمینه‌ی F چقدر باید باشد تا سورت‌مای به سمت بالای سطح شروع به حرکت کند؟ (پ) مقدار نیروی لازم F برای حرکت کردن سورت‌مای به سمت بالای سطح شیب‌دار با سرعت ثابت، چقدر است؟



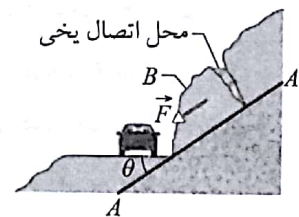
شکل ۶-۲۳ مسئله‌های ۱۶ و ۲۲.

حل: (الف) در این حالت، جهت $\vec{f}_s$ را به طرف بالای سطح شیب‌دار می‌گیریم و فرض می‌کنیم مقدار آن بیشینه است، در نتیجه می‌توان از رابطه‌ی $f_{s, \max} = \mu_s F_N$ استفاده کرد ($\mu_s = 0,25$). با استفاده از قانون دوم نیوتون برای جسمی به جرم $m = W/g = 8/2 \text{ kg}$ در راستاهای x و y ، داریم

$$F + F_f > f_{s, \max} \Rightarrow 110 \text{ N} + F_f > 126,9 \text{ N}$$

که از آن جا $F_{f, \min} = 17 \text{ N}$ به دست می‌آید.

۱۴ * شکل ۶-۲۲ مقطع جاده‌ای را نشان می‌دهد که در دامنه‌ی کوه ایجاد شده است. خط AA' سطحی را نشان می‌دهد که ممکن است در امتداد آن لغزش صورت بگیرد. قطعه‌ی B ، که در بالای جاده قرار دارد، با یک شکاف بزرگ (به نام محل اتصال) از تخته سنگ بالایی جدا شده است، به گونه‌ای که فقط اصطکاک میان قطعه‌ی B و صفحه‌ی بستر تخته سنگ مانع لغزیدن است. جرم قطعه‌ی B برابر با $1,8 \times 10^7 \text{ kg}$ ، زاویه‌ی میل صفحه‌ی بستر، θ ، برابر با 24° درجه و ضریب اصطکاک ایستایی میان قطعه و صفحه $0,63$ است. (الف) نشان دهید که در این شرایط قطعه‌ی B نخواهد لغزید. (ب) سپس آب به محل اتصال میان دو سنگ وارد و بر اثر انجماد منبسط می‌شود و یک نیروی $\vec{F}$ موازی با AA' به قطعه‌ی B وارد می‌کند. کمینه‌ی مقدار F که می‌تواند باعث لغزیدن قطعه به پایین صفحه‌ی بستر بشود، چقدر است؟



شکل ۶-۲۲ مسئله‌ی ۱۴.

حل: (الف) با استفاده از نتیجه‌ی به دست آمده در مسئله‌ی نمونه تحت عنوان «اصطکاک، نیروی وارد شده تحت زاویه»، زاویه‌ی بیشینه برای تأثیر نیروی اصطکاک ایستایی برابر است با $\theta_{\max} = \tan^{-1} \mu_s = \tan^{-1} 0,63 \approx 32^\circ$ این مقدار بزرگ‌تر از زاویه‌ی میل صفحه‌ی بستر است، در نتیجه قطعه نمی‌لغزد.

(ب) با استفاده از قانون دوم نیوتون داریم

$$F + mg \sin \theta - f_{s, \max} = ma = 0$$

$$F_N - mg \cos \theta = 0$$

همراه با معادله‌ی ۶-۱، ($f_{s, \max} = \mu_s F_N$)، اطلاعات کافی برای به‌دست آوردن F را داریم. به ازای $\theta = 24^\circ$ و $m = 1,8 \times 10^7 \text{ kg}$

۱۵ اگر بخواهیم جسم بلغزد، نیروی اصطکاک جنبشی را از معادله ۶-۲ حساب می‌کنیم. اگر جسم نلغزد، نیروی اصطکاک ایستایی را از قانون نیوتون، با شتاب صفر، در راستای محور x (به موازات سطح شیب‌دار) به دست می‌آوریم. بنابراین دانستن این‌که جسم می‌لغزد یا نمی‌لغزد، خیلی مهم است و همان‌طور که از معادله ۶-۱ حساب می‌شود، به نیروی اصطکاک ایستایی پیشینه بستگی دارد. نیروها در شکل ۶-۵ متن درس در دستگاه مختصات سطح شیب‌دار تجزیه شده‌اند. شتاب، اگر وجود داشته باشد، در راستای محور x است و ما جهت $+x$ را به طرف بالای سطح شیب‌دار در نظر می‌گیریم. پس، نیروی برآیند در راستای محور y صفر است، در نتیجه رابطه‌ی زیر را می‌توان نوشت

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow F_N = W \cos \theta$$

در این‌جا $W = 45 \text{ N}$ وزن جسم، و $\theta = 15^\circ$ زاویه‌ی سطح شیب‌دار است. پس، $F_N = 43.5 \text{ N}$ است و ایجاب می‌کند که نیروی اصطکاک ایستایی پیشینه مساوی با: $f_{s, \max} = (0.50)(43.5) = 21.7 \text{ N}$ باشد.

(الف) برای $\vec{P} = (-5.0 \text{ N}) \hat{i}$ به طرف پایین سطح شیب‌دار، از قانون دوم نیوتون برای محور x داریم

$$f - |P| - mg \sin \theta = ma$$

در این‌جا فرض می‌کنیم جهت $\vec{F}$ مطابق شکل ۶-۵، به طرف بالای سطح شیب‌دار است و اگر به طرف پایین باشد (که ممکن است)، در نتیجه مقدار f_s منفی خواهد بود. اگر $f = f_s$ باشد، در آن صورت $a = 0$ و داریم

$$f_s = |P| + mg \sin \theta = 5.0 \text{ N} + (43.5 \text{ N}) \sin 15^\circ = 17 \text{ N}$$

یا $f_s = (17 \text{ N}) \hat{i}$ ، که مجاز است زیرا از $f_{s, \max}$ کمتر است.

(ب) برای $\vec{P} = (-8.0 \text{ N}) \hat{i}$ ، مقدار $\vec{P} = (20 \text{ N}) \hat{i}$ (از همان معادله)

به دست می‌آید که هنوز مجاز است زیرا از $f_{s, \max}$ کمتر است.

(پ) اما برای $\vec{P} = (-15 \text{ N}) \hat{i}$ ، مقدار $f_s = 27 \text{ N}$ (از همان معادله)

به دست می‌آید که مجاز نیست زیرا از $f_{s, \max}$ بیشتر است.

بنابراین، نتیجه می‌گیریم که در این حالت اصطکاک موجود جنبشی است. نتیجه‌ی به دست آمده برای نیروی اصطکاک جنبشی برابر است با

$$\vec{f}_k = \mu_k F_N \hat{i} = (0.34)(43.5 \text{ N}) \hat{i} = (15 \text{ N}) \hat{i}$$

$$F_{\min 1} - mg \sin \theta + f_{s, \max} = ma = 0$$

$$F_N - mg \cos \theta = 0$$

که در نتیجه (به ازای $\theta = 20^\circ$) خواهیم داشت

$$F_{\min 1} - mg (\sin \theta + \mu_s \cos \theta) = 8.6 \text{ N}$$

(ب) اکنون جهت $\vec{f}_s$ را به طرف پایین سطح شیب‌دار و مساوی با مقدار پیشینه در نظر می‌گیریم، که در نتیجه می‌توان از رابطه‌ی $f_{s, \max} = \mu_s F_N$ استفاده کرد ($\mu_s = 0.25$). با استفاده از قانون دوم نیوتون برای جسمی به جرم $m = W/g = 8.2 \text{ kg}$ در راستاهای x و y ، داریم

$$F_{\min 2} = mg \sin \theta - f_{s, \max} = ma = 0$$

$$F_N - mg \cos \theta = 0$$

که در نتیجه (به ازای $\theta = 20^\circ$) داریم

$$F_{\min 2} = mg (\sin \theta + \mu_s \cos \theta) = 46 \text{ N}$$

مقداری که اندکی از این نتیجه‌ی «دقیق» بیشتر است، لازم است تا جسم به طرف بالای سطح شیب‌دار شتاب بگیرد، اما چون نتایج را با دو رقم بامعنی در نظر گرفته‌ایم، مقدار 46 N پاسخ «خوب» است. (پ) سرانجام از اصطکاک جنبشی (به طرف پایین سطح شیب‌دار) استفاده می‌کنیم:

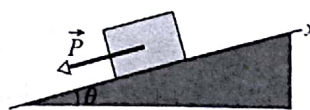
$$0 = F - mg \sin \theta - f_k = ma$$

$$0 = F_N - mg \cos \theta$$

با استفاده از $f_k = \mu_k F_N$ (که در آن $\mu_k = 0.15$)، داریم

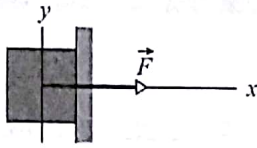
$$F = mg (\sin \theta + \mu_k \cos \theta) = 39 \text{ N}$$

*** ۱۷ در شکل ۶-۲۴، نیروی $\vec{P}$ به موازات یک سطح شیب‌دار با زاویه‌ی شیب 15° درجه، به جسمی به وزن 45 N که در آغاز ساکن است، وارد می‌شود. جهت مثبت محور x به سمت بالای سطح شیب‌دار است. ضریب‌های اصطکاک میان جسم و سطح عبارت‌اند از $\mu_s = 0.50$ و $\mu_k = 0.34$. نیروی اصطکاک وارد به جسم از سوی سطح شیب‌دار برحسب نمادگذاری بردارهای یک‌به‌ازای $\vec{P}$ برابر با (الف) $(-5.0 \text{ N}) \hat{i}$ ، (ب) $(-8.0 \text{ N}) \hat{i}$ و (پ) $(-15 \text{ N}) \hat{i}$ ، چیست؟



شکل ۶-۲۴ مسئله ۱۷.

میان آن‌ها 0.40 است. فرض کنید جسم در آغاز در حال حرکت نیست. (الف) آیا جسم حرکت می‌کند؟ (ب) نیروی وارد به جسم از سوی دیوار به صورت نمادگذاری بردارهای یک‌جهت چیست؟



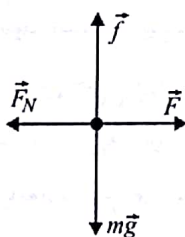
شکل ۶-۲۶ مسئله ۱۹.

حل: (الف) نمودار جسم - آزاد در زیر رسم شده است. F نیروی وارد شده، F_N نیروی عمودی دیوار که به جسم وارد می‌شود، f نیروی اصطکاک، و mg نیروی گرانش است. اگر جسم به پایین حرکت کند، بزرگی f نیروی اصطکاک باید آن را نگه دارد تا جسم بدون شتاب حرکت کند و باید نیروی عمودی دیوار را که به جسم وارد می‌کند، پیدا کنیم. سپس f و $\mu_s F_N$ را با هم مقایسه می‌کنیم. اگر $f < \mu_s F_N$ باشد، جسم بر روی دیوار نمی‌لغزد، اما اگر $f > \mu_s F_N$ باشد، جسم می‌لغزد. مؤلفه‌ی افقی قانون دوم نیوتون به صورت $F - F_N = 0$ است، در نتیجه $F_N = F = 12\text{ N}$ و داریم $\mu_s F_N = (0.60)(12\text{ N}) = 7.2\text{ N}$. مؤلفه‌ی قائم به صورت $f - mg = 0$ است، در نتیجه داریم $f = mg = 5.0\text{ N}$ چون $f < \mu_s F_N$ پس جسم حرکت نمی‌کند.

(ب) چون جسم حرکت نمی‌کند، $f = 5.0\text{ N}$ و $F_N = 12\text{ N}$ نیرویی که دیوار به جسم وارد می‌کند، برابر است با

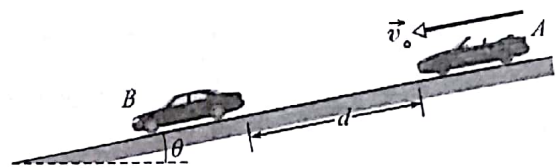
$$\vec{F}_w = -F_N \hat{i} + f \hat{j} = -(12\text{ N})\hat{i} + (5.0\text{ N})\hat{j}$$

محورها مانند شکل ۶-۲۶ متن درس انتخاب شده‌اند.



*** ۲۰ در شکل ۶-۲۷، در روی یک سطح افقی یک پاکت شیر (به جرم $m_C = 1.0\text{ kg}$) و یک قوطی روغن (به جرم $m_W = 3.0\text{ kg}$) با وارد کردن نیروی افقی $\vec{F}$ به پاکت شیر شتاب پیدا می‌کنند. بزرگی نیروی اصطکاک وارد به پاکت شیر 2.0 N و بزرگی نیروی اصطکاک وارد به قوطی روغن 4 N

*** ۱۸ شما را به عنوان یک کارشناس شاهد دعوت می‌کنند تا در مورد حادثه‌ای که در آن خودرو A از پشت به خودرو B در حال ایستادن در پشت چراغ قرمز در روی شیب یک تپه برخورد کرده است (شکل ۶-۲۵)، نظر بدهید. زاویه‌ی شیب این تپه $\theta = 12.0^\circ$ و فاصله‌ی میان خودروها در لحظه‌ی شروع سرخوردن خودرو A (که فاقد سیستم ضد قفل ترمز خودکار است) برابر است با $d = 24.0\text{ m}$. تندی خودرو A در لحظه‌ی ترمز کردن $v_0 = 18.0\text{ m/s}$ بوده است. اگر ضریب اصطکاک جنبشی (الف) 0.60 (سطح جاده‌ی خشک) و (ب) 0.10 (سطح جاده‌ی پر از برگ‌های خیس) باشد، خودرو A با چه تندی‌ای به خودرو B برخورد کرده است؟



شکل ۶-۲۵ مسئله ۱۸.

حل: (الف) قانون دوم نیوتون را برای جهت «رو به پایین سطح شیب‌دار» می‌نویسیم

$$mg \sin \theta - f = ma$$

اکنون با استفاده از معادله‌ی ۶-۱۱ داریم

$$f = f_k = \mu_k F_N = \mu_k mg \cos \theta$$

در نتیجه به ازای $\mu_k = 0.600$ داریم

$$a = g \sin \theta - \mu_k g \cos \theta = -3.72\text{ m/s}^2$$

چون جهت مثبت را در جهت حرکت (به طرف پایین سطح شیب‌دار) انتخاب کرده‌ایم، جهت بردار شتاب «به طرف بالای سطح شیب‌دار» است؛ یعنی شتاب کند کننده است. به ازای $v_0 = 18.0\text{ m/s}$ و $\Delta x = d = 24.0\text{ m}$ از معادله‌ی ۶-۲ داریم

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2ad} = 12.0\text{ m/s}$$

(ب) در این حالت، $a = +1.1\text{ m/s}^2$ و تندی مساوی با 19.4 m/s (در لحظه‌ی برخورد) به دست می‌آید.

*** ۱۹ جسمی به وزن 5.0 N با نیروی افقی 12 N به دیوار قائمی فشار داده می‌شود (شکل ۶-۲۶). ضریب اصطکاک ایستایی میان دیوار و جسم 0.60 و ضریب اصطکاک جنبشی

با قرار دادن $a = 0$ و $f = f_{s, \max} = \mu_s F_N$ ، جرم جعبه و شن (به صورت تابعی از زاویه) به دست می‌آید:

$$m = \frac{T}{g} \left(\sin \phi + \frac{\cos \phi}{\mu_s} \right)$$

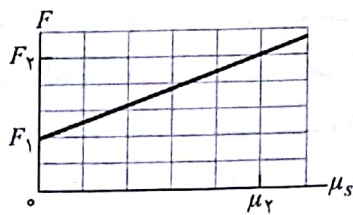
برای پیدا کردن زاویه‌ی ϕ_m متناظر با جرم بیشینه‌ای که می‌تواند توسط کابل کشیده شود، از معادله‌ی بالا نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{T}{g} \left(\cos \phi_m - \frac{\sin \phi_m}{\mu_s} \right) = 0$$

از این جا $\phi_m = \mu_s$ به دست می‌آید (به ازای $\mu_s = 0.35$) داریم $\phi_m = 19^\circ$.

(ب) مقدار به دست آمده برای ϕ_m را در معادله‌ی مربوط به جرم جعبه و شن قرار می‌دهیم تا $m = 340 \text{ kg}$ به دست آید. وزن مربوط به این جرم، $mg = 3.3 \times 10^3 \text{ N}$ است.

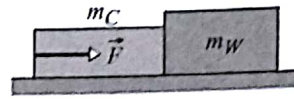
*** ۲۲ در شکل ۲۳-۶، سورتمه‌ای با کشیده شدن به وسیله‌ی یک طناب به سمت بالای سطح شیب‌دار بر روی سطح نگه داشته می‌شود. می‌خواهیم سورتمه در آستانه‌ی حرکت به سمت بالای سطح باشد. در شکل ۲۸-۶، نمودار تغییرات بزرگی نیروی F ، که لازم است از طناب به سورتمه وارد شود، بر حسب گستره‌ای از مقادیر ضریب اصطکاک ایستایی μ_s میان سورتمه و سطح شیب‌دار رسم شده است: $F_1 = 210 \text{ N}$ ، $F_2 = 510 \text{ N}$ و $\mu_2 = 0.5$. زاویه‌ی سطح شیب‌دار θ ، چقدر است؟



شکل ۲۸-۶ مسئله ۲۲.

حل: نمودار جسم - آزاد سورتمه در زیر رسم شده است، که در آن $\vec{F}$ نیروی وارد شده به سورتمه، $\vec{F}_N$ نیروی عمودی که سطح شیب‌دار به سورتمه وارد می‌کند، $m\vec{g}$ نیروی گرانش، و $\vec{f}$ نیروی اصطکاک است. جهت $+x$ را در راستای سطح شیب‌دار و جهت $+y$ را در جهت عمود بر آن انتخاب می‌کنیم. معادلات مؤلفه‌های

است. اگر بزرگی $\vec{F}$ برابر با 12 N باشد، بزرگی نیرویی که پاکت شیر به قوطی روغن وارد می‌کند، چقدر است؟



شکل ۲۷-۶ مسئله ۲۰.

حل: دو جسم را به صورت یک دستگاه واحد با جرم کل $410 \text{ kg} = 10 + 30$ در نظر می‌گیریم. بزرگی نیروی اصطکاک کل (به طرف چپ)، $6 \text{ N} = 4 + 2$ است، لذا از قانون نیوتون (با فرض $+x$ به طرف راست)، داریم

$$F - f_{\text{کل}} = m_{\text{کل}} a$$

$$1210 - 6 = (410)a$$

از این جا شتاب $a = 1.5 \text{ m/s}^2$ به دست می‌آید. اکنون جعبه‌ی بزرگ‌تر با جرم 30 kg را در نظر می‌گیریم و قانون دوم نیوتون را برای پیدا کردن نیروی تماسی F' که جعبه‌ی کوچک‌تر به آن وارد می‌کند، استفاده می‌کنیم:

$$F' - f_W = m_W a$$

$$F' - 410 = (30)(1.5)$$

در نتیجه نیروی تماسی برابر با $F' = 915 \text{ N}$ به دست می‌آید.

*** ۲۱ جعبه‌ای محتوی شن، که در آغاز ساکن است، به وسیله‌ی کابلی در روی سطح زمین کشیده می‌شود. نیروی کشش کابل نمی‌تواند از 1100 N تجاوز کند. ضریب اصطکاک ایستایی میان جعبه و سطح 0.35 است. (الف) زاویه‌ی کابل نسبت به راستای افقی چقدر باید باشد تا بیشترین مقدار ممکن شن جابه‌جا شود؟ (ب) در این حالت وزن شن و جعبه چقدر است؟

حل: شکل ۴-۶ در کتاب درسی وضعیت مشابهی را (با در نظر گرفتن ϕ برای زاویه‌ی نامعلوم) همراه با یک نمودار جسم - آزاد نشان می‌دهد. ما از همان دستگاه مختصات ارائه شده در شکل استفاده می‌کنیم.

(الف) قانون دوم نیوتون برای محور x و y به صورت زیر نوشته می‌شود

$$x: T \cos \phi - f = ma$$

$$y: T \sin \phi + F_N - mg = 0$$

$$m_2 g - T_{22} = m_2 a$$

$$T_{22} - \mu_k m_2 g - T_{12} = m_2 a$$

$$T_{12} - m_1 g = m_1 a$$

سه معادله را با هم جمع می‌کنیم و مقادیر $m_1 = M$

$$m_2 = m_3 = 2M$$

$$2Mg - 2\mu_k Mg - Mg = 5Ma$$

به ازای $a = 0.500 \text{ m/s}^2$ داریم $\mu_k = 0.372$. بنابراین، ضریب

اصطکاک جنبشی تقریباً $\mu_k = 0.37$ است.

*** ۲۴ یک جسم 4.10 کیلوگرمی بر روی کف اتاق با نیروی

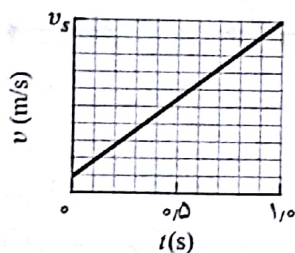
ثابت افقی به بزرگی 40.0 N هل داده می‌شود. شکل ۶-۳۰،

نمودار تغییرات تندی v ، بر حسب زمان t را در هنگام حرکت کردن

جسم در راستای محور x بر روی کف اتاق نشان می‌دهد.

مقیاس محور قائم شکل با مقدار $v_s = 5.0 \text{ m/s}$ مشخص شده

است. ضریب اصطکاک جنبشی میان جسم و کف اتاق چیست؟



شکل ۶-۳۰ مسئله ۲۴.

حل: شتاب جسم را از شیب نمودار (معادله ۲-۱۱) به دست

می‌آوریم که $a = 4.5 \text{ m/s}^2$ است. بنابراین، قانون دوم نیوتون

به صورت زیر نوشته می‌شود

$$F - \mu_k mg = ma$$

در این جا $F = 40.0 \text{ N}$ نیروی افقی ثابت اعمال شده است. به ازای

$$m = 4.1 \text{ kg}, \mu_k = 0.53 \text{ به دست می‌آید.}$$

*** ۲۵ در شکل ۶-۳۱، وزن جسم B برابر با 750 N است.

ضریب اصطکاک ایستایی میان جسم و میز 0.25 و زاویه θ

برابر با 30° درجه است. فرض کنید ریسمان میان B و گره به

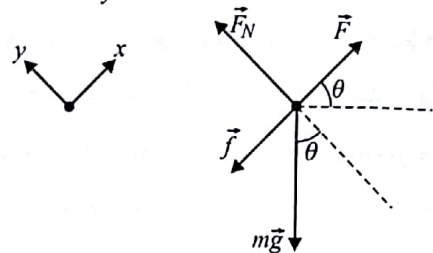
صورت افقی است. بیشینه وزن جسم A چقدر باید باشد تا

دستگاه به حال سکون باقی بماند؟

x و y نیرو بر طبق قانون دوم نیوتون عبارت‌اند از

$$F_x = F - f - mg \sin \theta = ma = 0$$

$$F_y = F_N - mg \cos \theta = 0$$



اکنون $f = \mu F_N$ است و از معادله دوم $F_N = mg \cos \theta$ و از

آن جا $f = \mu mg \cos \theta$ به دست می‌آید. این مقدار f را در معادله

اول قرار می‌دهیم:

$$F = mg (\sin \theta + \mu \cos \theta)$$

با توجه به شکل معلوم می‌شود که وقتی $F = 210 \text{ N}$ ، $\mu = 0$ است.

در نتیجه $mg \sin \theta = 210 \text{ N}$ و به طور مشابه می‌توان

را به ازای $\mu = 0.5$ به دست آورد:

$$510 \text{ N} = mg (\sin \theta + 0.5 \cos \theta) = 210 \text{ N} + 0.5 mg \cos \theta$$

از این رابطه $mg \cos \theta = 610 \text{ N}$ به دست می‌آید. از ترکیب دو

نتیجه به دست آمده داریم

$$\tan \theta = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow \theta = 18.4^\circ$$

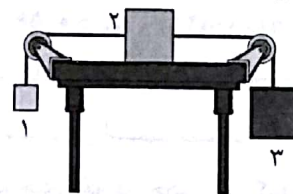
*** ۲۳ هرگاه سه جسم مربوط به شکل ۶-۲۹ را از حال سکون

رها کنیم، اجسام با شتاب 0.500 m/s^2 به حرکت در می‌آیند.

جسم ۱ دارای جرم M ، جسم ۲ دارای جرم $2M$ ، و جسم ۳

دارای جرم $2M$ است. ضریب اصطکاک جنبشی میان جسم ۲

و سطح میز چقدر است؟



شکل ۶-۲۹ مسئله ۲۳.

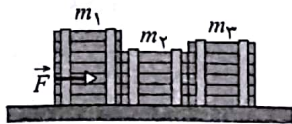
حل: نیروی کشش ریسمان وصل کننده m_2 و m_3 را T_{23} ، و

نیروی کشش ریسمان وصل کننده m_1 و m_2 را T_{12} می‌نامیم. با

استفاده از قانون دوم نیوتون (و معادله ۶-۲، به ازای

$$F_N = m_2 g \text{ در این حالت) برای دستگاه، داریم}$$

$m_3 = 20/0 \text{ kg}$ است. ضریب اصطکاک جنبشی میان سطح و هر صندوق $0/700$ است. (الف) بزرگی F_{32} ، نیروی وارد به صندوق ۳ از سوی صندوق ۲، چیست؟ (ب) اکنون، اگر این صندوق‌ها روی یک سطح صیقلی با ضریب اصطکاک جنبشی کمتر از $0/700$ بلغزند، آیا بزرگی F_{32} نسبت به بزرگی مربوط به حالت ضریب اصطکاک جنبشی $0/700$ بیشتر می‌شود، کمتر می‌شود یا به همان مقدار است؟



شکل ۳۲-۶ مسئله ۲۶.

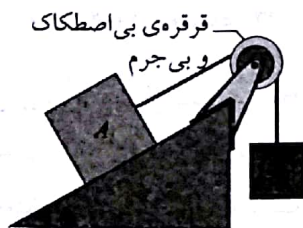
حل: (الف) با استفاده از قانون دوم نیوتون برای دستگاه (با جرم کل $M = 60/0 \text{ kg}$) و به کار بردن معادله‌ی ۲-۶ (به ازای $F_N = Mg$ در این حالت)، داریم

$$F - \mu_k Mg = Ma \Rightarrow a = 0/223 \text{ m/s}^2$$

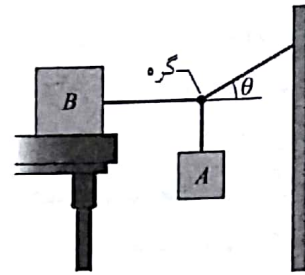
اکنون نیروهای وارد شده به m_3 را بررسی می‌کنیم و $F_{32} = m_3(a + \mu_k g) = 142 \text{ N}$ را به دست می‌آوریم. اگر عملیات جبری را به طور اصولی انجام دهیم، به رابطه‌ی جالبی می‌رسیم: $F_{32} = (m_3 / M) F$ (که مستقل از نیروی اصطکاک است!).

(ب) همان‌طور که در پایان راه حل قسمت (الف) گفتیم، نتیجه به پارامترهای اصطکاک بستگی ندارد. در این‌جا پاسخ همان پاسخ قسمت (الف) است.

**** ۲۷** در شکل ۳۳-۶، وزن جسم A برابر با 102 N و وزن جسم B برابر با 32 N است. ضریب‌های اصطکاک میان جسم A و سطح شیب‌دار $\mu_s = 0/56$ و $\mu_k = 0/25$ هستند. زاویه‌ی θ برابر با 40° درجه است. فرض می‌کنیم جهت محور x به سمت بالای سطح شیب‌دار است. شتاب جسم A را بر حسب نمادگذاری بردارهای یکه در حالتی پیدا کنید که جسم A در

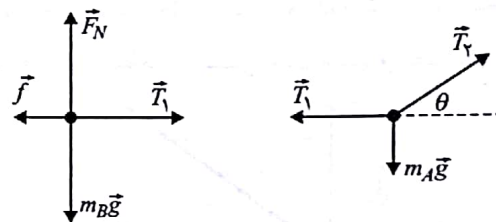


شکل ۳۳-۶ مسئله‌های ۲۷ و ۲۸.



شکل ۳۱-۶ مسئله ۲۵.

حل: نمودارهای جسم - آزاد برای جسم B و برای گره بالای جسم A در زیر رسم شده‌اند. T_1 نیروی کشش ریسمان کشنده‌ی جسم B یا کشنده‌ی گره، T_2 نیروی کشش ریسمان دوم (تحت زاویه‌ی $\theta = 30^\circ$) که به گره وارد می‌شود، T نیروی اصطکاک ایستایی که سطح افقی به جسم B وارد می‌کند، F_N نیروی عمودی که سطح به جسم B وارد می‌کند، W_A وزن جسم A (بزرگی $m_A g$ است)، و W_B وزن جسم B (بزرگی $W_B = 750 \text{ N}$ است) است.



برای هر جسم، محور $+x$ را به طور افقی به طرف راست و محور $+y$ را به طرف بالا در نظر می‌گیریم. با استفاده از قانون دوم نیوتون برای جسم B در راستاهای x و y و سپس انجام کار مشابه برای گره، چهار معادله به دست می‌آید:

$$T_1 - f_{s, \max} = 0$$

$$F_N - W_B = 0$$

$$T_2 \cos \theta - T_1 = 0$$

$$T_2 \sin \theta - W_A = 0$$

در این‌جا فرض می‌کنیم مقدار نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه است (در نتیجه می‌توانیم از معادله‌ی ۱-۶ استفاده کنیم). این معادله‌ها را به ازای $\mu_s = 0/25$ حل می‌کنیم و $W_A = 108 \text{ N} \approx 1/0 \times 10^2 \text{ N}$ را به دست می‌آوریم.

**** ۲۶** شکل ۳۲-۶ سه صندوق را نشان می‌دهد که با نیروی افقی F به بزرگی 425 N بر روی یک سطح بتونی هل داده می‌شوند. جرم صندوق‌ها $m_1 = 30/0 \text{ kg}$ ، $m_2 = 10/0 \text{ kg}$ و

در نتیجه داریم

$$f_{s, \max} = \mu_s F_N = (0.56)(78) = 44 \text{ N}$$

چون بزرگی f نیروی اصطکاک که جسم‌ها را بدون حرکت نگه می‌دارد از $f_{s, \max}$ کمتر است، جسم‌ها در حال سکون می‌مانند. پس، شتاب صفر است.

(ب) چون A از سطح شیب‌دار بالا می‌رود، نیروی اصطکاک به طرف پایین سطح شیب‌دار و بزرگی آن $f_k = \mu_k F_N$ است. از قانون دوم نیوتون با استفاده از همان دستگاه مختصات قسمت (الف)، برای هر دو جسم داریم

$$T - f_k - W_A \sin \theta = m_A a$$

$$F_N - W_A \cos \theta = 0$$

$$W_B - T = m_B a$$

از این معادله‌ها شتاب حرکت به دست می‌آید:

$$a = \frac{W_B - W_A \sin \theta - \mu_k W_A \cos \theta}{m_B + m_A} = \frac{32 \text{ N} - (102 \text{ N}) \sin 40^\circ - (0.25)(102 \text{ N}) \cos 40^\circ}{(32 \text{ N} + 102 \text{ N}) / (9.8 \text{ m/s}^2)} = -3.9 \text{ m/s}^2$$

جهت شتاب به طرف پایین سطح شیب‌دار است، یعنی $\vec{a} = (-3.9 \text{ m/s}^2) \hat{i}$ که باید گفت جسم‌ها در حال کند شدن هستند (زیرا سرعت آغازی به طرف بالای سطح شیب‌دار بود). باید توجه کرد که برای حساب کردن جرم‌ها در محاسبه‌ی بالا از $m = W/g$ استفاده کردیم.

(پ) اکنون جسم A ابتدا به طرف پایین سطح شیب‌دار حرکت می‌کند، در نتیجه جهت نیروی اصطکاک به طرف بالای سطح و بزرگی آن $f_k = \mu_k F_N$ است. در این حالت معادلات نیرو به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$T + f_k - W_A \sin \theta = m_A a$$

$$F_N - W_A \cos \theta = 0$$

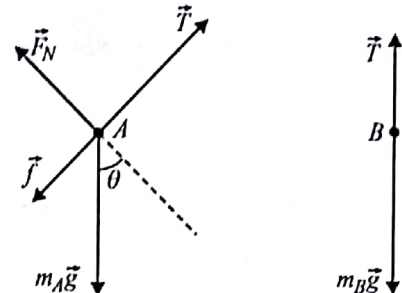
$$W_B - T = m_B a$$

از حل این معادله‌ها داریم

$$a = \frac{W_B - W_A \sin \theta + \mu_k W_A \cos \theta}{m_B + m_A} = \frac{32 \text{ N} - (102 \text{ N}) \sin 40^\circ + (0.25)(102 \text{ N}) \cos 40^\circ}{(32 \text{ N} + 102 \text{ N}) / (9.8 \text{ m/s}^2)} = -1.0 \text{ m/s}^2$$

جهت شتاب باز هم به طرف پایین سطح شیب‌دار است، یعنی $\vec{a} = (-1.0 \text{ m/s}^2) \hat{i}$ در این حالت جسم‌ها به طرف بالا سرعت می‌گیرند.

آغاز، (الف) در حال سکون باشد، (ب) به سمت بالای سطح شیب‌دار حرکت کند، و (پ) به سمت پایین سطح حرکت کند. **حل:** ابتدا بررسی می‌کنیم که آیا جسم‌ها شروع به حرکت می‌کنند یا خیر. فرض می‌کنیم جسم‌ها ساکن می‌مانند و نیروی اصطکاک (ایستایی) نگهدارنده‌ی آن‌ها را حساب می‌کنیم، و بزرگی آن را با مقدار بیشینه‌ی $\mu_s F_N$ مقایسه می‌کنیم. نمودارهای جسم - آزاد در زیر نشان داده شده‌اند.



T بزرگی نیروی کشش طناب، f بزرگی نیروی اصطکاک وارد بر جسم A ، F_N بزرگی نیروی عمودی وارد بر A از طرف سطح، $m_A \vec{g}$ نیروی گرانش وارد بر جسم A (با بزرگی $W_A = 102 \text{ N}$)، و $m_B \vec{g}$ نیروی گرانش وارد بر B (با بزرگی $W_B = 32 \text{ N}$) است. $\theta = 40^\circ$ زاویه‌ی سطح شیب‌دار است. ما نیروی اصطکاک f را نمی‌دانیم، ولی فرض می‌کنیم جهت آن به طرف پایین سطح شیب‌دار است. اگر جواب f منفی باشد، متوجه می‌شویم که نیروی اصطکاک به طرف بالای سطح شیب‌دار است.

(الف) برای جسم A جهت $+x$ را به طرف بالای سطح شیب‌دار و جهت $+y$ را در جهت نیروی عمودی انتخاب می‌کنیم. مؤلفه‌های x و y قانون دوم نیوتون عبارت‌اند از:

$$T - f - W_A \sin \theta = 0$$

$$N - W_A \cos \theta = 0$$

برای جسم B جهت رو به پایین را مثبت در نظر می‌گیریم و قانون دوم نیوتون را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$W_B - T = 0$$

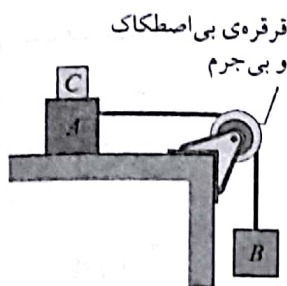
با حل کردن این سه معادله داریم:

$$f = W_B - W_A \sin \theta = 32 - 102 \sin 40^\circ = -34 \text{ N}$$

معلوم می‌شود که جهت نیروی اصطکاک به طرف بالای سطح شیب‌دار است. ضمناً داریم

$$F_N = W_A \cos \theta = 102 \cos 40^\circ = 78 \text{ N}$$

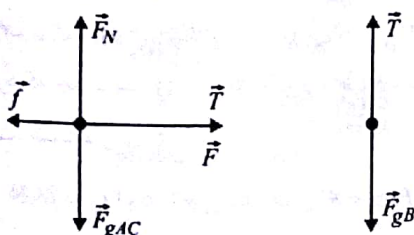
۲۸ * در شکل ۳۳-۶، دو جسم با طنابی که از روی قرقره‌ای گذشته است، به هم وصل شده‌اند. جرم جسم A برابر با ۱۵ kg و ضریب اصطکاک جنبشی میان جسم A و سطح شیب‌دار $۰/۲۰$ است. زاویه‌ی شیب سطح θ ، برابر با ۳۰° درجه است و جسم A با تندی ثابت از سطح به پایین می‌لغزد. جرم جسم B چقدر است؟



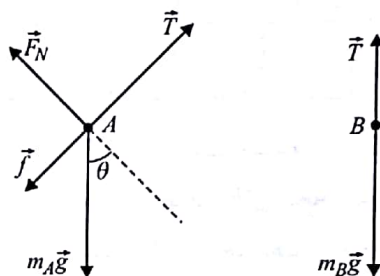
شکل ۳۴-۶ مسئله ۲۹.

حل: نمودار جسم - آزاد A و C را به صورت یک شینی واحد، و نمودار جسم - آزاد B را رسم می‌کنیم. T بزرگی نیروی کشش طناب، F_N بزرگی نیروی عمودی که میز به جسم A وارد می‌کند، f بزرگی نیروی اصطکاک، W_{AC} وزن مشترک جسم‌های A و C (بزرگی نیروی $\vec{F}_{gAC}$ در شکل نشان داده شده است)، و W_B وزن جسم B (بزرگی نیروی $\vec{F}_{gB}$ در شکل نشان داده شده است)، و W_B وزن جسم B (بزرگی نیروی $\vec{F}_{gB}$ نشان داده شده است). فرض می‌کنیم جسم‌ها حرکت نمی‌کنند. برای جسم‌های روی میز، جهت محور x را به طرف راست و جهت محور y را به طرف بالا انتخاب می‌کنیم. در نتیجه مؤلفه‌ی x قانون دوم نیوتون به صورت $T - f = 0$ و مؤلفه‌ی y آن به صورت $F_N - W_{AC} = 0$ است. برای جسم B ، جهت رو به پایین را مثبت در نظر می‌گیریم. در نتیجه قانون دوم نیوتون برای این جسم به صورت $W_B - T = 0$ نوشته می‌شود. از معادله‌ی سوم داریم $T = W_B$ و از معادله‌ی اول $f = T = W_B$ به دست می‌آید. از معادله‌ی دوم نیز $F_N = W_{AC}$ حاصل می‌شود. اگر بخواهیم لغزش صورت نگیرد، f باید از $\mu_s N$ کمتر باشد، یا $W_B < \mu_s W_{AC}$. کمترین مقدار W_{AC} که به ازای آن جسم‌ها ساکن می‌مانند، برابر است با

$$W_{AC} = W_B / \mu_s = (22\text{ N}) / (0.15) = 147\text{ N}$$



حل: نمودار جسم - آزاد در زیر رسم شده است. T بزرگی نیروی کشش طناب، f بزرگی نیروی اصطکاک وارد بر جسم A ، F_N بزرگی نیروی عمودی که سطح به جسم A وارد می‌کند، $m_A g$ نیروی گرانش وارد بر جسم A ($m_A = 15\text{ kg}$)، و $m_B g$ نیروی گرانش وارد بر جسم B است. $\theta = 30^\circ$ زاویه‌ی سطح شیب‌دار است. برای جسم A جهت $+x$ را به طرف بالای سطح شیب‌دار و $+y$ را در جهت نیروی عمود بر سطح در نظر می‌گیریم؛ برای جسم B جهت مثبت به طرف پایین انتخاب می‌شود.



چون جسم A به طرف پایین سطح شیب‌دار حرکت می‌کند، جهت نیروی اصطکاک به طرف بالای سطح و بزرگی آن $f_k = \mu_k F_N$ (که در آن $\mu_k = 0.20$) است. از قانون دوم نیوتون برای دو جسم A و B داریم:

$$T - f_k + m_A g \sin \theta = m_A a = 0$$

$$F_N - m_A g \cos \theta = 0$$

$$m_B g - T = m_B a = 0$$

در این معادله‌ها $a = 0$ زیرا سرعت ثابت است. از حل این معادله‌ها جرم جسم B به دست می‌آید:

$$m_B = m_A (\sin \theta - \mu_k \cos \theta) = 4.9\text{ kg}$$

۲۹ * در شکل ۳۴-۶، وزن اجسام A و B ، به ترتیب، ۲۲ N و $۰/۱۵$ است. (الف) اگر μ_s میان جسم A و میز $۰/۱۵$ باشد، کمینه‌ی مقدار وزنه‌ی C را طوری معین کنید که جسم

استفاده می‌کنیم. طناب بی‌جرم است لذا نیروی $\vec{F}$ که پسر بچه وارد می‌کند، با نیروی کشش یکنواخت طناب برابر است. مؤلفه‌های x و y نیروی $\vec{F}$ عبارت‌اند از $F \cos \theta$ و $F \sin \theta$. جهت نیروی اصطکاک ایستایی به طرف چپ است.

(الف) قانون دوم نیوتون را برای محور y ، که در آن راستا شتاب وجود ندارد، می‌نویسیم:

$$F_N + F \sin \theta - mg = 0$$

از این رابطه مقدار نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه به صورت $f_s = \mu(mg - F \sin \theta)$ به دست می‌آید. اگر $f_s = f_{s, \max}$ باشد، قانون دوم نیوتون برای محور x (که در آن راستا نیز $a = 0$ است حتی اگر صندوق در آستانه‌ی حرکت باشد) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$F \cos \theta - f_s = ma \Rightarrow F \cos \theta - \mu_s (mg - F \sin \theta) = 0$$

در نتیجه به ازای $\theta = 42^\circ$ و $\mu_s = 0.47$ مقدار $F = 89 \text{ N}$ به دست می‌آید.

(ب) معادله‌ی بالا را به صورت جبری برای F حل می‌کنیم (W وزن است):

$$F = \frac{\mu_s W}{\cos \theta + \mu_s \sin \theta} = \frac{(0.47)(200 \text{ N})}{\cos \theta + (0.47) \sin \theta}$$

$$= \frac{94 \text{ N}}{\cos \theta + (0.47) \sin \theta}$$

(پ) از رابطه‌ی F نسبت به زاویه‌ی θ مشتق می‌گیریم و مساوی صفر قرار می‌دهیم تا بر حسب مقدار کمینه‌ی F ، مقدار زاویه‌ی $\theta = \tan^{-1} \mu_s = 25^\circ$ به دست می‌آید.

(ت) مقدار $\theta = 25^\circ$ ، $\mu_s = 0.47$ و $W = 200 \text{ N}$ را در رابطه‌ی F قرار می‌دهیم تا $F = 85 \text{ N}$ به دست آید.

*** ۳۱ دو جسم به وزن‌های 3.6 N و 7.2 N با ریسمانی بی‌جرم به هم وصل شده‌اند و از سطح شیب‌داری با زاویه‌ی شیب 30° درجه به پایین می‌لغزند. ضریب اصطکاک جنبشی میان جسم سبک‌تر و سطح 0.10 و میان جسم سنگین‌تر و سطح 0.20 است. با این فرض که جسم سبک‌تر در جلو قرار دارد، مطلوب است تعیین، (الف) بزرگی شتاب اجسام و (ب) نیروی کشش ریسمان کشیده شده.

حل: نمودارهای جسم - آزاد برای دو جسم در زیر نشان داده شده‌اند. T بزرگی نیروی کشش ریسمان، F_{NA} نیروی عمودی

چون وزن جسم A مساوی با 24 N است، کمترین وزن C مساوی با $103 \text{ N} = 147 - 24$ خواهد بود.

(ب) معادلات قانون دوم عبارت‌اند از:

$$T - f = (W_A / g) a$$

$$F_N - W_A = 0$$

$$W_B - T = (W_B / g) a$$

علاوه بر این، $f = \mu_k F_N$ است. از معادله‌ی دوم داریم $F_N = W_A$ ، در نتیجه $f = \mu_k W_A$ به دست می‌آید. از معادله‌ی سوم $T = W_B - (W_B / g) a$ حاصل می‌شود. با قرار دادن این مقدار در معادله‌ی اول، داریم

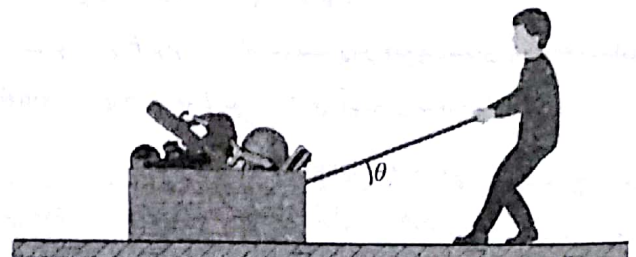
$$W_B - (W_B / g) a - \mu_k W_A = (W_A / g) a$$

بنابراین، شتاب جسم A برابر است با

$$a = \frac{g(W_B - \mu_k W_A)}{W_A + W_B}$$

$$= \frac{(9.8 \text{ m/s}^2)(22 \text{ N} - (0.15)(24 \text{ N}))}{44 \text{ N} + 22 \text{ N}} = 2.3 \text{ m/s}^2$$

*** ۳۰ وزن مجموع یک صندوق اسباب بازی و محتویات آن 200 N است. ضریب اصطکاک ایستایی میان صندوق و کف اتاق 0.47 است. در شکل ۶-۳۵ پسر بچه‌ای تلاش می‌کند با کشیدن طناب متصل به صندوق، آن را بر روی کف اتاق حرکت دهد. (الف) به ازای $\theta = 42^\circ$ ، بزرگی نیروی $\vec{F}$ که باید پسر بچه به طناب وارد کند تا صندوق در آستانه‌ی حرکت کردن قرار گیرد، چقدر است؟ (ب) رابطه‌ی مربوط به بزرگی F لازم برای قرار دادن صندوق در آستانه‌ی حرکت را به صورت تابعی از زاویه‌ی θ بنویسید. مطلوب است تعیین (پ) مقدار θ برای آنکه F کمینه شود و (ت) بزرگی این مقدار کمینه.

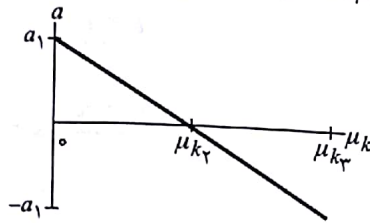


شکل ۶-۳۵ مسئله‌ی ۳۰.

حل: از محورهای افقی و قائم متعارف برای جهت‌های x و y

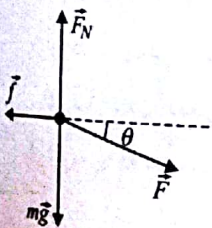
برابر باشند ($\mu_{kB} = \mu_{kA}$)، هر دو جسم مستقل از دیگری حرکت می‌کنند و نیروی کشش ریسمان صفر است. به طور مشابه، اگر $\mu_{kB} < \mu_{kA}$ باشد (جسم جلوی A دارای ضریب اصطکاک بیشتر از جسم B باشد)، ریسمان شل می‌شود و باز هم نیروی کشش صفر است.

*** ۳۲ جسمی بر روی کف اتاق با نیروی ثابتی که تحت زاویه‌ی رو به پایین θ (شکل ۶-۱۹) وارد شده است، هل داده می‌شود. شکل ۶-۳۶ نمودار تغییرات بزرگی شتاب a بر حسب گستره‌ای از مقادیر ضریب اصطکاک جنبشی میان جسم و کف μ_k را نشان می‌دهد: $a_1 = 3.0 \text{ m/s}^2$ ، $\mu_{k1} = 0.20$ و $\mu_{k2} = 0.40$. مقدار θ چقدر است؟



شکل ۶-۳۶ مسئله ۳۲.

حل: نمودار جسم - آزاد جسم در زیر رسم شده است. در این نمودار $\vec{F}$ نیروی اعمال شده به جسم، $\vec{F}_N$ نیروی عمودی وارد شده از کف به جسم، $m\vec{g}$ نیروی گرانش، و $\vec{f}$ نیروی کشش است. جهت $+x$ را افقی و به طرف راست و جهت $+y$ را به طرف



بالا انتخاب می‌کنیم. معادلات مؤلفه‌های x و y نیرو بر طبق قانون دوم نیوتون عبارت‌اند از:

$$F_x = F \cos \theta - f = ma$$

$$F_y = F_N - F \sin \theta - mg = 0$$

اکنون $f = \mu_k F_N$ است و از معادله‌ی دوم مقدار $F_N = mg + F \sin \theta$ به دست می‌آید، در نتیجه داریم

$$f = \mu_k (mg + F \sin \theta)$$

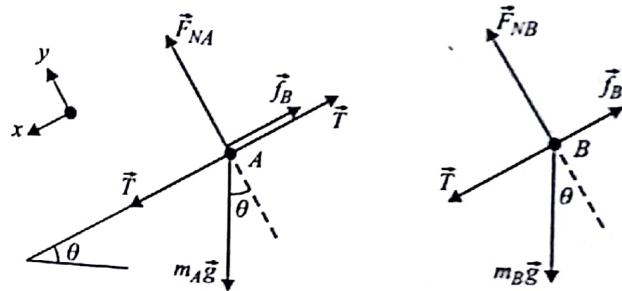
این مقدار f را در معادله‌ی اول قرار می‌دهیم:

$$F \cos \theta - \mu_k (mg + F \sin \theta) = ma$$

در نتیجه شتاب جسم برابر است با

$$a = \frac{F}{m} (\cos \theta - \mu_k \sin \theta) - \mu_k g$$

وارد بر جسم A (جسم جلوی)، $\vec{F}_{NB}$ نیروی عمودی وارد بر جسم B، $\vec{f}_A$ نیروی اصطکاک جنبشی وارد بر جسم A، $\vec{f}_B$ نیروی اصطکاک جنبشی وارد بر جسم B، است. هم‌چنین، m_A جرم جسم A ($W_A = 3.6 \text{ N}$ و $m_A = W_A / g$) و m_B جرم جسم B ($W_B = 7.2 \text{ N}$ و $m_B = W_B / g$) است. زاویه‌ی سطح شیب‌دار $\theta = 30^\circ$ است.



برای هر یک از جسم‌ها جهت $+x$ را به طرف پایین سطح شیب‌دار (که در این نمودارها به طرف چپ پایین است) و جهت $+y$ را در جهت نیروی عمودی انتخاب می‌کنیم. با استفاده از قانون دوم نیوتون برای جسم‌های A و B در راستاهای x و y ، چهار معادله‌ی زیر را می‌نویسیم

$$W_A \sin \theta - f_A - T = m_A a$$

$$F_{NA} - W_A \cos \theta = 0$$

$$W_B \sin \theta - f_B + T = m_B a$$

$$F_{NB} - W_B \cos \theta = 0$$

از ترکیب این معادله‌ها با معادله‌ی ۶-۲ ($f_A = \mu_{kA} F_{NA}$) که در آن $\mu_{kA} = 0.10$ و $\mu_{kB} = 0.20$ که در آن $f_B = \mu_{kB} F_{NB}$ است)، حرکت دستگاه تا زمانی که به طور کامل توصیف می‌شود که شتاب یکسان و $T > 0$ باشد.

(الف) از این معادله‌ها، شتاب به صورت زیر به دست می‌آید

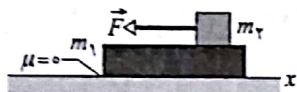
$$a = g \left(\sin \theta - \left(\frac{\mu_{kA} W_A + \mu_{kB} W_B}{W_A + W_B} \right) \cos \theta \right) = 3.5 \text{ m/s}^2$$

(ب) با استفاده از معادلات بالا نیروی کشش ریسمان به صورت زیر به دست می‌آید

$$T = \left(\frac{W_A W_B}{W_A + W_B} \right) (\mu_{kB} - \mu_{kA}) \cos \theta = 0.21 \text{ N}$$

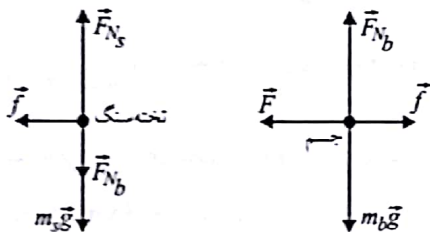
توجه: نیروی کشش ریسمان با $\mu_{kB} - \mu_{kA}$ ، یعنی اختلاف ضرایب اصطکاک جنبشی دو جسم متناسب است. اگر این ضرایب‌ها

*** ۳۴ در شکل ۶-۳۷، تخته سنگی به جرم $m_1 = 40 \text{ kg}$ روی یک سطح بی اصطکاک قرار گرفته و جسمی به جرم $m_2 = 12 \text{ kg}$ روی این تخته سنگ گذاشته شده است. ضریب اصطکاک ایستایی میان جسم و تخته سنگ 0.60 و ضریب اصطکاک جنبشی میان آن‌ها 0.40 است. یک نیروی افقی $\vec{F}$ به بزرگی 120 N ، مطابق شکل، جسم m_2 را به طور مستقیم می‌کشد. شتاب (الف) جسم و (ب) تخته سنگ، بر حسب نمادگذاری بردارهای یک، چیست؟



شکل ۶-۳۷ منتهی ۳۴.

حل: نمودارهای جسم - آزاد تخته سنگ و جسم در زیر رسم شده‌اند.



نیروی $\vec{F}$ 120 N است که به جسم وارد شده است، $\vec{F}_{Ns}$ نیروی عمودی است که کف به تخته سنگ وارد می‌کند، F_{Nb} بزرگی نیروی عمودی بین تخته سنگ و جسم است، f نیروی اصطکاک بین تخته سنگ و جسم است، m_s جرم تخته سنگ، و m_b جرم جسم است. برای هر دو جسم، جهت $+x$ را به طرف راست و جهت $+y$ را به طرف بالا در نظر می‌گیریم.

با استفاده از قانون دوم نیوتون برای تخته سنگ و جسم در راستای محورهای x و y ، چهار معادله به دست می‌آیند:

$$-f = m_s a_s$$

$$F_{Ns} - F_{Nb} - m_s g = 0$$

$$f - F = m_b a_b$$

$$F_{Nb} - m_b g = 0$$

از معادله‌ی چهارم می‌توان بزرگی نیروی اصطکاک بیشینه‌ی ممکن را به دست آورد

$$\mu_s F_{Nb} = \mu_s m_b g = (0.60)(12 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) = 71 \text{ N}$$

اکنون بررسی می‌کنیم که آیا جسم بر روی تخته سنگ می‌لغزد یا

با توجه به شکل معلوم می‌شود که به ازای $\mu_k = 0$ ، $a = 3.0 \text{ m/s}^2$ است. بنابراین، داریم

$$3.0 \text{ m/s}^2 = \frac{F}{m} \cos \theta$$

به ازای $\mu_k = 0.20$ نیز $a = 0$ است:

$$0 = \frac{F}{m} (\cos \theta - (0.20) \sin \theta) - (0.20)(9.8 \text{ m/s}^2)$$

$$= 3.0 \text{ m/s}^2 - 0.20 \frac{F}{m} \sin \theta - 1.96 \text{ m/s}^2$$

$$= 1.04 \text{ m/s}^2 - 0.20 \frac{F}{m} \sin \theta$$

در نتیجه $\frac{F}{m} \sin \theta = 5.2 \text{ m/s}^2$ به دست می‌آید. از ترکیب این دو نتیجه، داریم

$$\tan \theta = \left(\frac{5.2 \text{ m/s}^2}{3.0 \text{ m/s}^2} \right) = 1.73 \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

*** ۳۳ موتور یک قایق 1000 کیلوگرمی، در حالی که قایق با تندی 90 km/h در حال حرکت است، خاموش می‌شود. بزرگی نیروی اصطکاک میان قایق و آب، f_k ، طبق رابطه‌ی $f_k = 70v$ با تندی قایق v ، متناسب است؛ v بر حسب متر بر ثانیه و f_k بر حسب نیوتون است. چه مدت طول می‌کشد تا تندی قایق به 45 km/h برسد؟

حل: بزرگی نیروی اصطکاک را با av نشان می‌دهیم که در آن $a = 70 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ است. جهت حرکت قایق را مثبت در نظر می‌گیریم. از قانون دوم نیوتون داریم

$$-av = m \frac{dv}{dt}$$

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\frac{a}{m} \int_0^t dt$$

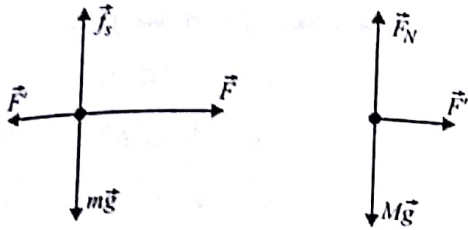
در نتیجه، در این جا v_0 سرعت در لحظه‌ی صفر و v سرعت در لحظه‌ی t است. بعد از انتگرال‌گیری خواهیم داشت

$$\ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -\frac{at}{m}$$

مقدار $v/v_0 = 0.5$ را قرار می‌دهیم و مدت زمان را به دست می‌آوریم:

$$t = -\frac{m}{a} \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -\frac{m}{a} \ln(0.50)$$

$$= -\frac{1000 \text{ kg}}{70 \text{ N} \cdot \text{s/m}} \ln(0.50) = 11.4 \text{ s}$$



دو جسم را به صورت یک دستگاه واحد در نظر می‌گیریم که بر روی سطح بدون اصطکاک می‌لغزد. با استفاده از قانون دوم نیوتون (با فرض $+x$ به طرف راست) برای پیدا کردن رابطه‌ای برای شتاب، داریم

$$F = m a \Rightarrow a = \frac{F}{m + M}$$

اگر دو جسم را به طور مجزا تحلیل کنیم و روابط حاصل را با هم ترکیب کنیم، همین رابطه برای شتاب a به دست می‌آید. اکنون جسم کوچک را به طور مجزا در نظر می‌گیریم و قانون دوم را برای محورهای x و y به کار می‌بریم. سپس مقدار a حاصل را در رابطه‌ی بالا قرار می‌دهیم و از معادله‌ی ۱-۶ استفاده می‌کنیم:

$$F - F' = ma \Rightarrow F' = F - m \left(\frac{F}{m + M} \right)$$

$$f_s - mg = 0 \Rightarrow \mu_s F' - mg = 0$$

این دو رابطه را با هم ترکیب می‌کنیم تا F' حذف شود و به نتیجه‌ی زیر می‌رسیم:

$$F = \frac{mg}{\mu_s \left(1 - \frac{m}{m + M} \right)} = 488 \text{ N}$$

پودمان ۲-۶ نیروی پसार و تندی حد

* ۳۶ تندی حد یک شیرجه‌رو در آسمان در وضعیت عقاب گشوده بال 160 km/h و در وضعیت سر به پایین 210 km/h است. فرض کنید ضریب پसार شیرجه‌رو C ، از وضعیتی به وضعیت دیگر تغییر نمی‌کند. نسبت مساحت مقطع مؤثر A را در وضعیت کندتر به مقدار آن در وضعیت تندتر، پیدا کنید.

حل: از معادله‌ی ۱۶-۶ مساحت مقطع مؤثر شیرجه رونده را به

$$A = \frac{2mg}{C \rho v_t^2}$$

دست می‌آوریم که به صورت A است و نشان می‌دهد

که مساحت و مربع تندی با هم نسبت عکس دارند. بنابراین، نسبت مساحت‌های وضعیت کندتر به وضعیت تندتر برابر است با

$$\frac{A_{\text{کندتر}}}{A_{\text{تندتر}}} = \left(\frac{210 \text{ km/h}}{160 \text{ km/h}} \right)^2 = 3.75$$

خیر. فرض می‌کنیم نمی‌لغزد، در نتیجه $a_s = a_b$ (که آن را a می‌نامیم) و f را به دست می‌آوریم:

$$f = \frac{m_s F}{m_s + m_b} = \frac{(40 \text{ kg})(120 \text{ N})}{40 \text{ kg} + 12 \text{ kg}} = 92 \text{ N}$$

این مقدار از $f_{s, \text{max}}$ بزرگ‌تر است، در نتیجه جسم بر روی تخته سنگ می‌لغزد (زیرا شتاب‌های آن‌ها متفاوت است).

(الف) با استفاده از رابطه‌ی $f = \mu_k F_N b$ ، از معادلات بالا داریم

$$a_b = \frac{\mu_k m_b g - F}{m_b} = \frac{(0.40)(12 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) - 120 \text{ N}}{12 \text{ kg}} = -6.1 \text{ m/s}^2$$

علامت منفی نشان می‌دهد که جهت شتاب به طرف چپ است.

$$\vec{a}_b = (-6.1 \text{ m/s}^2) \hat{i} \quad \text{یعنی}$$

(ب) همچنین داریم

$$a_s = -\frac{\mu_k m_b g}{m_s} = -\frac{(0.40)(12 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)}{40 \text{ kg}} = -1.2 \text{ m/s}^2$$

باز هم علامت منفی نشان می‌دهد که جهت شتاب به طرف چپ

$$\vec{a}_s = (-0.98 \text{ m/s}^2) \hat{i} \quad \text{یعنی}$$

*** ۳۵ در شکل ۳۸-۶، دو جسم نشان داده شده (به جرم‌های

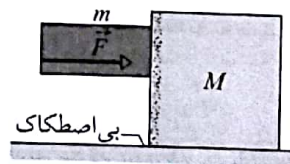
$m = 16 \text{ kg}$ و $M = 88 \text{ kg}$) به هم نچسبیده‌اند. ضریب

اصطکاک ایستایی میان دو جسم $\mu_s = 0.38$ و سطح زیر

جسم بزرگ‌تر بی‌اصطکاک است. بزرگی کمینه‌ی نیروی افقی

$\vec{F}$ چقدر باید باشد تا از لغزیدن جسم کوچک‌تر از کنار جسم

بزرگ‌تر به پایین جلوگیری شود؟



شکل ۳۸-۶ مسئله‌ی ۳۵.

حل: نمودارهای جسم - آزاد دو جسم را به طور مجزا برای

جرم‌های m و M رسم کرده‌ایم. نیروی تماسی بین دو جسم، و

نیروی اصطکاک ایستایی f_s' دارای مقدار بیشینه است (لذا از

معادله‌ی ۱-۶ داریم $f_s = f_{s, \text{max}} = \mu_s F'$ که در آن $\mu_s = 0.38$).

است. با حدس زدن جرم خلبان به نحوی پذیرفتنی و با استفاده از مقدار مناسب v_f از جدول ۶-۱، بزرگی (الف) نیروی پَسار وارد به خلبان + صندلی و (ب) شتاب کند کننده‌ی افقی (برحسب g) هر دوی آن‌ها را درست پس از پریدن از هواپیما برآورد کنید [نتیجه‌ی قسمت (الف) یک الزام فنی را نشان دهد: صندلی باید یک مانع حفاظتی برای منحرف کردن باد در ابتدا از بالای سر خلبان، باشد].

حل: (الف) از جدول ۶-۱ و معادله‌ی ۶-۱۶ داریم

$$v_f = \sqrt{\frac{2Fg}{C\rho A}} \Rightarrow C\rho A = \frac{2mg}{v_f^2}$$

که در آن $v_f = 60 \text{ m/s}$ است. جرم خلبان را در حدود $m = 70 \text{ kg}$ در نظر می‌گیریم. اکنون تندی $v = 360 \text{ m/s}$ ($1300(1000/3600) \approx 360$) را در معادله‌ی ۶-۱۴ قرار می‌دهیم:

$$D = \frac{1}{2}C\rho A v^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2mg}{v_f^2}\right)v^2 = mg\left(\frac{v}{v_f}\right)^2$$

در نتیجه $D = (70 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(360/60)^2 \approx 2 \times 10^4 \text{ N}$ به دست می‌آید.

(ب) جرم صندلی پرش را در حدود جرم خلبان در نظر می‌گیریم. بنابراین، از قانون دوم نیوتون (در راستای افقی) برای این دستگاه با جرم $2m$ ، بزرگی شتاب به دست می‌آید

$$|a| = \frac{D}{2m} = \frac{g}{2}\left(\frac{v}{v_f}\right)^2 = 18g$$

*** ۳۹ نسبت نیروی پَسار وارد به یک جت مسافری در حال پرواز با تندی 1000 km/h در ارتفاع 15 کیلومتری، به نیروی پَسار وارد به یک هواپیمای ملخ‌دار در حال پرواز با نصف تندی جت و در نصف آن ارتفاع را حساب کنید. در ارتفاع 10 کیلومتری چگالی هوا 0.38 kg/m^3 و در ارتفاع $5/0$ کیلومتری چگالی هوا 0.67 kg/m^3 است. فرض کنید دو هواپیما دارای مقطع مؤثر و ضریب پَسار C ، یکسان‌اند.

حل: برای جت مسافری، $D_j = \frac{1}{2}C\rho_j A v_j^2$ ، و برای هواپیمای

ملخ‌دار، $D_l = \frac{1}{2}C\rho_l A v_l^2$ است، که در آن‌ها ρ_1 و ρ_2 به ترتیب معرف چگالی هوا در ارتفاع 15 km و $5/0 \text{ km}$ است. بنابراین،

*** ۳۷ ادامه‌ی مسئله‌ی ۱ اکنون، فرض کنید که با استفاده از معادله‌ی ۶-۱۴ می‌توان نیروی پَسار هوا را که به یک سنگ 20 کیلوگرمی وارد می‌شود، به دست آورد. مساحت مقطع مؤثر سنگ در مقابل باد 0.40 m^2 و ضریب پَسار C برابر با 0.80 است. چگالی هوا را 1.21 kg/m^3 و ضریب اصطکاک جنبشی را 0.80 بگیرید. (الف) تندی باد V ، در سطح زمین، برحسب کیلومتر بر ساعت چقدر باید باشد تا سنگی را که شروع به حرکت کرده است در حال حرکت نگه دارد؟ چون حرکت باد در سطح زمین کند می‌شود، تندی‌های گزارش شده اغلب مربوط به اندازه‌گیری در ارتفاع 10 متری هستند. فرض کنید تندی باد $2/00$ برابر تندی آن در سطح زمین باشد. (ب) برای پاسخ دادن به قسمت (الف)، تندی باد گزارش شده‌ی مربوط به توفان چقدر است؟ (پ) آیا این مقدار برای بادهای تند قابل قبول است؟ (دنباله‌ی موضوع در مسئله‌ی ۶۵ ادامه پیدا می‌کند).

حل: در حل مسئله‌ی ۴ معلوم شد که نیروی باد باید $F = 157 \text{ N}$ باشد (که رقم آخر آن با معنی نیست).

(الف) با قرار دادن $F = D$ (برای نیروی پس‌کشی یا نیروی پَسار)، از معادله‌ی ۶-۱۴ برای پیدا کردن تندی v باد در سطح زمین (در واقع نسبت به سنگ در حال حرکت، ولی ما فرض می‌کنیم سنگ بسیار آرام حرکت می‌کند و این امر تأثیری در نتیجه‌ی محاسبه ندارد) استفاده می‌کنیم:

$$v = \sqrt{\frac{2F}{C\rho A}} = \sqrt{\frac{2(157 \text{ N})}{(0.80)(1.21 \text{ kg/m}^3)(0.40 \text{ m}^2)}} = 90 \text{ m/s} = 3/2 \times 10^2 \text{ km/h}$$

(ب) اگر نتیجه‌ی به دست آمده را دو برابر کنیم، تندی باد گزارش شده $6/5 \times 10^2 \text{ km/h}$ خواهد بود. (پ) این مقدار برای بادهای تند قابل قبول نیست. تندی یک تندباد درجه ۵ از مرتبه‌ی $2/6 \times 10^2 \text{ m/s}$ است.

*** ۳۸ فرض کنید معادله‌ی ۶-۱۴ نیروی پَسار وارد شده به یک خلبان و صندلی پرش او را پس از پریدن از یک هواپیمای در حال پرواز افقی با تندی 1300 km/h به دست می‌دهد. در ضمن، فرض کنید جرم صندلی برابر با جرم خلبان و ضریب پَسار برابر با ضریب پَسار یک چترباز در حال شیرجه رفتن

نسبت مورد نظر برابر است با

$$\frac{D_j}{D_l} = \frac{\rho_1 v_j^2}{\rho_2 v_l^2} = \frac{(0.38 \text{ km/m}^3)(1000 \text{ km/h})^2}{(0.67 \text{ kg/m}^3)(500 \text{ km/h})^2} = 2.3 \text{ s}$$

*** ۴۰ تندی یک اسکی باز در حین پایین رفتن از یک تپه توسط

نیروی پسار وارد به بدن او از سوی هوا و همچنین نیروی اصطکاک جنبشی وارد به چوب‌های اسکی، کند می‌شود. (الف) فرض کنید زاویه‌ی شیب تپه $\theta = 40.0^\circ$ ، برف خشک و ضریب اصطکاک جنبشی آن برابر است با $\mu_k = 0.104$ ، جرم اسکی باز و تجهیزاتش $m = 85.0 \text{ kg}$ ، مساحت مقطع مؤثر اسکی باز (به صورت خم شده) $A = 1.30 \text{ m}^2$ ، ضریب پسار $C = 0.150$ ، و چگالی هوا 1.20 kg/m^3 است. (الف) تندی حد چقدر است؟ (ب) اگر اسکی باز بتواند با تنظیم، مثلاً، حالت دست‌های خود C را به مقدار کم dC تغییر دهد، تغییر متناظر در تندی حد چقدر است؟

حل: در این مسئله از قانون دوم نیوتون برای حرکت در راستای یک سطح شیب‌دار استفاده می‌کنیم.

(الف) نیرو در راستای سطح شیب‌دار برابر است با

$$F_g = mg \sin \theta - \mu F_N = mg \sin \theta - \mu mg \cos \theta$$

$$= mg (\sin \theta - \mu \cos \theta)$$

$$= (85.0 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)[\sin 40.0^\circ - (0.104) \cos 40.0^\circ]$$

$$= 511 \text{ N}$$

در نتیجه، تندی حد اسکی باز برابر است با

$$v_l = \sqrt{\frac{2F_g}{C\rho A}} = \sqrt{\frac{2(510 \text{ N})}{(0.150)(1.20 \text{ kg/m}^3)(1.30 \text{ m}^2)}} = 66.0 \text{ m/s}$$

(ب) از نسبت به C مشتق می‌گیریم:

$$dv_l = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2F_g}{\rho A}} C^{-3/2} dC$$

$$= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2(510 \text{ N})}{(1.20 \text{ kg/m}^3)(1.30 \text{ m}^2)}} (0.150)^{-3/2} dC$$

$$= -(2.20 \times 10^2 \text{ m/s}) dC$$

پودمان ۳-۶ حرکت دایره‌ای یکنواخت

*** ۴۱ گربه‌ای روی یک چرخ و فلک افقی ساکن و در فاصله‌ی

5.4 m از مرکز چرخ در حال چرت زدن است. مسئول چرخ و فلک آن را به راه می‌اندازد تا تندی‌اش در هر $6/0$ ثانیه به یک دور کامل برسد. کمترین ضریب اصطکاک ایستایی میان گربه و چرخ و فلک چقدر باید باشد تا گربه بدون لغزیدن در جای خود بماند؟

حل: شاید تعجب کنید که معادلات به کار رفته در مسئله‌ی نمونه تحت عنوان «خودرو در حرکت دایره‌ای» دقیقاً در این‌جا صدق می‌کنند، البته از نظر منطقی اندکی متفاوت‌اند. در آن مسئله‌ی نمونه، خودرو در راستای یک جاده (ساکن) حرکت می‌کند، در حالی که در این مسئله گربه نسبت به چرخ و فلک افقی ساکن است. اما اصطکاک ایستایی نقش یکسانی در هر دو حالت دارد، زیرا پایین‌ترین نقطه‌ی لاستیک خودرو به طور لحظه‌ای نسبت به مسیر مسابقه ساکن است، هم‌چنین اصطکاک ایستایی در مورد سطح تماس بین گربه و چرخ و فلک وجود دارد. با استفاده از معادله‌ی ۳-۶ همراه با معادله‌ی ۴-۳۵، داریم

$$\mu_s = (\pi R / T)^2 / gR = \pi^2 R / gT^2$$

که به ازای $T = 6/0 \text{ s}$ و $R = 5.4 \text{ m}$ ، مقدار $\mu_s = 0.60$ به دست می‌آید.

*** ۴۲ فرض کنید ضریب اصطکاک ایستایی میان جاده و لاستیک‌های یک خودرو 0.6 است و خودرو نیروی برآر منفی ندارد. خودرو هنگامی که یک مسیر خمیده‌ی تراز به شعاع 30.5 m را دور می‌زند، چه تندی‌ای باید داشته باشد تا در آستانه‌ی لغزیدن قرار گیرد؟

حل: بزرگی شتاب خودرو هنگام دور زدن، از v^2/R به دست می‌آید که در آن v تندی خودرو و R شعاع مسیر خمیده است. چون جاده افقی است، فقط نیروی اصطکاک جاده می‌تواند باعث ایجاد چنین شتابی بشود. مؤلفه‌ی افقی قانون دوم نیوتون به صورت $f = mv^2/R$ نوشته می‌شود. اگر F_N نیروی عمودی باشد که جاده به خودرو وارد می‌کند و m جرم خودرو باشد، از مؤلفه‌ی قائم قانون دوم نیوتون داریم $F_N = mg$. بنابراین، با استفاده از معادله‌ی ۳-۶، مقدار بیشینه‌ی نیروی اصطکاک ایستایی $f_{s, \max} = \mu_s F_N = \mu_s mg$ به دست می‌آید. اگر خودرو نلغزد،

یعنی $f \leq \mu_s mg$

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{(26/8 \text{ m/s})^2}{7/6 \text{ m}} = 94/7 \text{ m/s}^2$$

این شتاب به صورت مضربی از g برابر است با

$$a' = \frac{a}{g} = \left(\frac{94/7 \text{ m/s}^2}{9/80 \text{ m/s}^2} \right) g = 9/7 g$$

۴۵ * * دانشجویی به وزن 667 N بر روی یک چرخ و فلک که با تندی ثابت می‌چرخد، سوار است (دانشجو راست نشسته است). در بالاترین نقطه‌ی مسیر بزرگی نیروی عمودی $\vec{F}_N$ وارد به دانشجو از سوی صندلی 556 N است. (الف) دانشجو در آنجا احساس «سبکی» می‌کند یا «سنگینی»؟ (ب) در پایین‌ترین نقطه‌ی مسیر بزرگی $\vec{F}_N$ چقدر است؟ (پ) اگر تندی چرخ دو برابر شود، بزرگی F_N (پ) در بالاترین نقطه و (ت) در پایین‌ترین نقطه، چقدر است؟

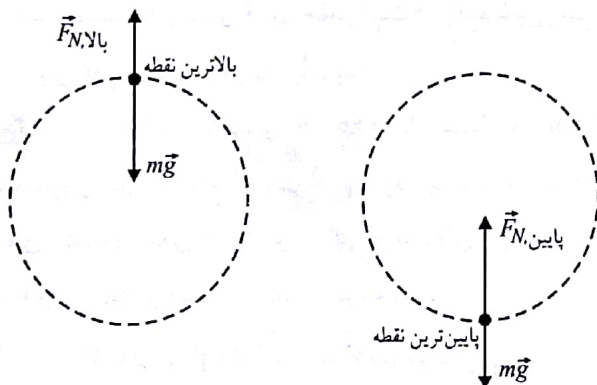
حل: نمودارهای جسم - آزاد دانشجو در بالاترین و پایین‌ترین نقطه‌ی چرخ و فلک در زیر رسم شده‌اند. در بالاترین نقطه (بالاترین نقطه در حرکت دایره‌ای) صندلی دانشجو را با نیروی بالا، F_N به بالا هل می‌دهد، در حالی که زمین او را با نیروی mg به پایین می‌کشد. از قانون دوم نیوتون برای راستای شعاعی داریم

$$mg - F_N, \text{ بالا} = \frac{mv^2}{R}$$

در پایین‌ترین نقطه‌ی حرکت، پایین، F_N بزرگی نیروی رو به بالایی است که صندلی به دانشجو وارد می‌کند. نیروی برآیند به طرف مرکز دایره (جهت رو به بالا را مثبت در نظر می‌گیریم) برابر است با

$$F_N, \text{ پایین} - mg = \frac{mv^2}{R}$$

چرخ و فلک به طور پایا می‌چرخد، در نتیجه مقدار $F_C = mv^2/R$ در همه جا یکسان است. وزن ظاهری دانشجو F_N است.



$$\frac{v^2}{R} \leq \mu_s g \Rightarrow v \leq \sqrt{\mu_s R g}$$

در نتیجه، تندی بیشینه‌ای که خودرو بدون لغزیدن، با آن تندی می‌تواند مسیر خمیده را دور بزند، برابر است با

$$v_{\max} = \sqrt{\mu_s R g} = \sqrt{(0/60)(30/5)(9/8)} = 13/4 \text{ m/s} \approx 48 \text{ km/h}$$

۴۳ * کمترین شعاع یک جاده‌ی بی‌شیب عرضی (تخت) چقدر باید باشد تا دوچرخه‌سواری بتواند با تندی 29 km/h دور بزند. ضریب اصطکاک ایستایی میان لاستیک‌ها و جاده برابر است با $\mu_s = 0/32$.

حل: بزرگی شتاب دوچرخه سوار هنگام دور زدن، از v^2/R به دست می‌آید که در آن v تندی دوچرخه‌سوار و R شعاع مسیر خمیده است. چون جاده افقی است، فقط نیروی اصطکاک جاده که به لاستیک‌ها وارد می‌شود، به وجود آمدن چنین شتابی را ممکن می‌کند. مؤلفه‌ی افقی قانون دوم نیوتون $f = mv^2/R$ است. اگر F_N نیروی عمودی باشد که جاده به دوچرخه‌سوار وارد می‌کند و m جرم دوچرخه‌سوار و دوچرخه باشد، مؤلفه‌ی قائم قانون دوم نیوتون، $F_N = mg$ است. بنابراین با استفاده از معادله‌ی ۱-۶، مقدار بیشینه‌ی نیروی اصطکاک ایستایی به صورت $f_{s, \max} = \mu_s F_N = \mu_s mg$ به دست می‌آید. اگر دوچرخه نلغزد، $f \leq \mu_s mg$ است، یعنی،

$$\frac{v^2}{R} \leq \mu_s g \Rightarrow R \geq \frac{v^2}{\mu_s g}$$

در نتیجه، شعاع کمینه‌ای که دوچرخه می‌تواند بدون لغزیدن، با سرعت $29 \text{ km/h} = 8 \text{ m/s}$ آن را دور بزند، برابر است با

$$R_{\min} = \frac{v^2}{\mu_s g} = \frac{(8)^2}{(0/32)(9/8)} = 20 \text{ m}$$

۴۴ * در حین مسابقه‌ی سورتمه سواری دو نفره‌ی المپیک اعضای تیم جامائیکا پیچی به شعاع $7/6 \text{ m}$ را با تندی $96/6 \text{ km/h}$ پیمودند. شتاب آن‌ها را بر حسب g حساب کنید.

حل: به ازای $v = 96/6 \text{ km/h} = 26/8 \text{ m/s}$ ، از معادله‌ی ۱۷-۶ داریم

(ب) زاویه‌ی نیروی برآیند

$$\tan^{-1}[(mv^2/R)/(mg)] = \tan^{-1}(v^2/Rg) = 9.5^\circ$$

است (که نسبت به محور قائم اندازه‌گیری شده است).

۴۷ *** شخصی به جرم 80 kg ، که به حرکت دایره‌ای عادت دارد، بر چرخ و فلکی سوار است. چرخ در دایره‌ای قائم به شعاع 10 m با تندی ثابت 6.1 m/s می‌چرخد. (الف) دوره‌ی تناوب این حرکت چقدر است؟ بزرگی نیروی عمودی وارد به شخص از سوی صندلی، (ب) در بالاترین نقطه‌ی مسیر دایره‌ای و (پ) در پایین‌ترین نقطه‌ی مسیر، چقدر است؟

حل: (الف) از معادله‌ی ۴-۳۵ داریم:

$$T = 2\pi R/v = 2\pi(10 \text{ m})/(6.1 \text{ m/s}) = 10.3 \text{ s}$$

(ب) این وضعیت مانند مسئله‌ی نمونه تحت عنوان «حلقه‌ی دایره‌ای قائم، دیاوولو» است، اما جهت نیروی عمودی معکوس شده است. با توجه به معادله‌ی ۶-۱۹ داریم

$$F_N = m(g - v^2/R) = 486 \text{ N} \approx 4.8 \times 10^2 \text{ N}$$

(پ) اکنون جهت نیروی عمودی و جهت شتاب را (نسبت به جهت نشان داده شده در مسئله‌ی نمونه‌ی فوق) معکوس می‌کنیم و معادله‌ی ۶-۱۹ را به کار می‌بریم. در نتیجه داریم

$$F_N = m(g + v^2/R) = 1082 \text{ N}$$

۴۸ *** جرم یک قطار هوایی تفریحی با ظرفیت کامل مسافر، 1200 kg است. وقتی قطار از بالاترین نقطه‌ی یک تپه‌ی دایره‌ای به شعاع 18 m عبور می‌کند تندی‌اش تغییر نمی‌کند. (الف) بزرگی F_N و (ب) جهت (به سمت بالا یا پایین) نیروی عمودی وارد به قطار در حال حرکت با تندی $v = 11 \text{ m/s}$ از سوی مسیر، چیست؟ (پ) F_N و (ت) جهت آن، به ازای $v = 14 \text{ m/s}$ ، چیست؟

حل: فرض می‌کنیم که جهت نیروی عمودی (وارد شده به قطار از طرف ریل) به طرف بالا است. توجه کنید که جهت نیروی گرانش به طرف پایین است و محور y به طرف بالا مثبت انتخاب شده است. هم‌چنین، جهت به طرف مرکز دایره (جهت شتاب مرکزگرا) به طرف پایین است. بنابراین، قانون دوم نیوتون به صورت زیر

$$F_N - mg = m\left(\frac{-v^2}{r}\right) \quad \text{نوشته می‌شود:}$$

(الف) در بالاترین نقطه، داریم $F_N = 556 \text{ N}$ ، $mg = 667 \text{ N}$. یعنی صندلی با نیرویی به بالا هل داده می‌شود که از وزن دانشجو کوچک‌تر است و می‌گوییم که «وزن ظاهری» دانشجو در بالاترین نقطه کم شده است. در نتیجه او احساس «سبکی» می‌کند.

(ب) از قسمت (الف) نیروی مرکزگرا را پیدا می‌کنیم:

$$F_c = \frac{mv^2}{R} = mg - F_N = 667 \text{ N} - 556 \text{ N} = 111 \text{ N}$$

بنابراین، نیروی عمودی در پایین‌ترین نقطه برابر است با

$$F_N = \frac{mv^2}{R} + mg = F_c + mg = 111 \text{ N} + 667 \text{ N} = 778 \text{ N}$$

(پ) اگر تندی دو برابر شود، داریم

$$F_c' = \frac{m(2v)^2}{R} = 4(111 \text{ N}) = 444 \text{ N}$$

بنابراین در بالاترین نقطه داریم

$$F_N' = mg - F_c' = 667 \text{ N} - 444 \text{ N} = 223 \text{ N}$$

(ت) به طور مشابه، نیروی عمودی در پایین‌ترین نقطه برابر است با

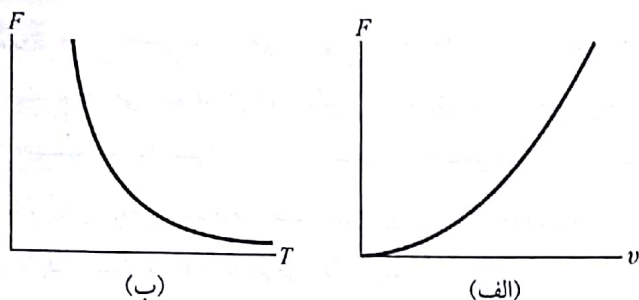
$$F_N' = F_c' + mg = 444 \text{ N} + 667 \text{ N} = 1111 \text{ N} \approx 1.11 \times 10^3 \text{ N}$$

توجه: در پایین‌ترین نقطه، وزن ظاهری دانشجو بیشترین و در بالاترین نقطه، وزن ظاهری او کمترین است. اگر $F_N = 0$ باشد، تندی $v = \sqrt{gR}$ خواهد بود و به این معنی است که در این تندی دانشجو در بالاترین نقطه «احساس بی‌وزنی» می‌کند.

۴۶ *** یک افسر پلیس در یک تعقیب و گریز سخت، خودرو خود را در یک پیچ دایره‌ای به شعاع 300 m با تندی ثابت 80.0 km/h می‌راند. جرم افسر 55.0 kg است. (الف) بزرگی و (ب) زاویه‌ی نیروی برآیند وارد به صندلی از سوی افسر (نسبت به راستای قائم) چقدر است؟ (راهنمایی: هر دو نیروی افقی و قائم را در نظر بگیرید).

حل: (الف) می‌دانیم که تندی 80.0 km/h معادل 22.2 m/s است. نیروی افقی که مانع لغزیدن او می‌شود باید با نیروی مرکزگرا مساوی باشد (معادله‌ی ۶-۱۸) و نیروی رو به بالای وارد شده بر او باید با وزن mg او مساوی باشد. در نتیجه داریم

$$F_{\text{net}} = \sqrt{(mg)^2 + (mv^2/R)^2} = 547 \text{ N}$$



شکل ۶-۲۰ مسئله ۵۰.

حل: نیروی مرکزگرای وارد بر مسافر $F = mv^2/r$ است.

(الف) به ازای $v = 8.30 \text{ m/s}$ شیب نمودار برابر است با

$$\left. \frac{dF}{dv} \right|_{v=8.30 \text{ m/s}} = \frac{2mv}{r} \bigg|_{v=8.30 \text{ m/s}} = \frac{2(85.0 \text{ kg})(8.30 \text{ m/s})}{3.50 \text{ m}} = 403 \text{ N} \cdot \text{s/m}$$

(ب) دوره‌ی تناوب حرکت دایره‌ای $T = 2\pi r/v$ است. در نتیجه داریم

$$F = \frac{mv^2}{r} = \frac{m}{r} \left(\frac{2\pi r}{T} \right)^2 = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}$$

و تغییرات F برحسب T با ثابت ماندن r ، به صورت زیر است

$$dF = -\frac{8\pi^2 mr}{T^3} dT$$

شیب نمودار در $T = 2.50 \text{ s}$ برابر است با

$$\left. \frac{dF}{dT} \right|_{T=2.50 \text{ s}} = -\frac{8\pi^2 mr}{T^3} \bigg|_{T=2.50 \text{ s}} = \frac{8\pi^2 (85.0 \text{ kg})(3.50 \text{ m})}{(2.50 \text{ s})^3} = -1.50 \times 10^3 \text{ N/s}$$

**** ۵۱** هواپیمایی با تندی 480 km/h (شکل ۶-۴۱) در روی

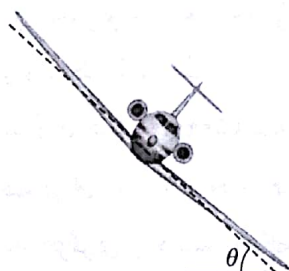
دایره‌ای افقی پرواز می‌کند. اگر بال‌های هواپیما نسبت به راستای

افقی دارای زاویه‌ی $\theta = 40^\circ$ باشد، شعاع دایره‌ی پرواز هواپیما

چقدر است؟ فرض کنید نیروی لازم برای نگهداشتن هواپیما

به‌طور کامل توسط یک «نیروی برآر آئرودینامیکی» عمود بر

سطح بال تأمین می‌شود.



شکل ۶-۴۱ مسئله ۵۱.

(الف) به ازای $v = 11 \text{ m/s}$ داریم $F_N = 3.7 \times 10^3 \text{ N}$

(ب) جهت F_N به طرف بالا است.

(پ) به ازای $v = 14 \text{ m/s}$ داریم $F_N = -1.3 \times 10^3 \text{ N}$

(ت) جهت F_N به طرف پایین است.

**** ۴۹** در شکل ۶-۳۹، خودرویی با تندی ثابت در بالای یک

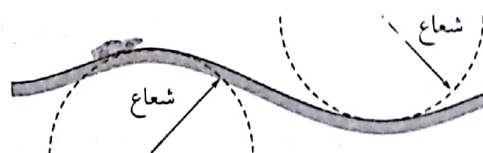
تپه‌ی دایره‌ای و سپس در دره‌ای دایره‌ای با همان شعاع، حرکت

می‌کند. در بالای تپه نیروی عمودی وارد به راننده از سوی

صندلی خودرو صفر است. جرم راننده 70 kg است. هنگام

عبور خودرو از ته دره بزرگی نیروی عمودی وارد به راننده از

سوی صندلی، چیست؟



شکل ۶-۳۹ مسئله ۴۹.

حل: در بالای تپه، وضعیت مانند مسئله‌ی نمونه تحت عنوان

«حلقه‌ی دایره‌ای قائم، دیاوولو» است، اما جهت نیروی عمودی

معکوس شده است. با استفاده از معادله‌ی ۶-۱۹ داریم

$$F_N = m(g - v^2/R)$$

چون در بالای تپه $F_N = 0$ است (بر طبق صورت مسئله)، در نتیجه

$v^2 = gR$ اما در ته دره، جهت نیروی عمودی و جهت شتاب را

(نسبت به آنچه در مسئله‌ی نمونه‌ی فوق نشان داده شده است)

معکوس می‌کنیم و معادله‌ی ۶-۱۹ را به کار می‌بریم. در نتیجه داریم

$$F_N = m(g + v^2/R) = 2mg = 1.37 \times 10^3 \text{ N}$$

**** ۵۰** مسافری به جرم 85.0 kg در مسیری دایره‌ای به شعاع

$r = 3.50 \text{ m}$ حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام می‌دهد. (الف)

شکل ۶-۴۰ الف، نمودار تغییرات بزرگی F نیروی برآیند

مرکزگرای لازم را در گستره‌ای از مقادیر ممکن مربوط به تندی

مسافر v ، نشان می‌دهد. شیب نمودار در تندی $v = 8.30 \text{ m/s}$

چقدر است؟ (ب) شکل ۶-۴۰ ب، نمودار تغییرات بزرگی F

مربوط به گستره‌ای از مقادیر ممکن دوره‌ی تناوب T را نشان

می‌دهد. شیب این نمودار به ازای $T = 2.50 \text{ s}$ چقدر است؟

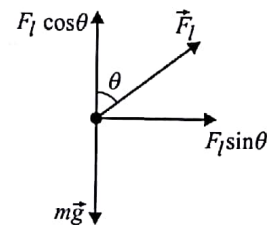
حل: نمودار جسم - آزاد هواپیمایی به جرم m در زیر رسم شده است. توجه می‌کنیم که در این شکل $\vec{F}_l$ نیروی برآر آئرو دینامیکی و جهت $\vec{a}$ به طرف راست است. در ضمن می‌دانیم که $|\vec{a}| = v^2 / R$. با استفاده از قانون دوم نیوتون برای محورهای $+x$ به طرف راست و $+y$ به طرف بالا، داریم

$$F_l \sin \theta = m \frac{v^2}{R}$$

$$F_l \cos \theta = mg$$

با حذف کردن جرم از این معادله‌ها، رابطه‌ی $\tan \theta = v^2 / Rg$ به دست می‌آید. از این رابطه می‌توانیم شعاع R را پیدا کنیم. به ازای $v = 600 \text{ km/h} = 167 \text{ m/s}$ و $\theta = 40^\circ$ ، داریم

$$R = \frac{v^2}{g \tan \theta} = \frac{(167 \text{ m/s})^2}{(9.8 \text{ m/s}^2) \tan 40^\circ} = 2.7 \times 10^3 \text{ m}$$



**** ۵۲** در یک پارک تفریحی خودرویی در یک دایره‌ی قائم، که در انتهای یک دایره صلب با جرم ناچیز قرار دارد، حرکت می‌کند. وزن مجموع خودرو و مسافران 5.0 kN و شعاع دایره‌ی مسیر 10 m است. در بالاترین نقطه‌ی دایره، (الف) بزرگی F_B و (ب) جهت آن (به سمت بالا یا پایین) نیروی وارد به خودرو از سوی دایره در تندی $v = 5.0 \text{ m/s}$ ، چیست؟ به ازای $v = 12 \text{ m/s}$ ، (پ) F_B و (ت) جهت آن، چیست؟

حل: وضعیت این مسئله تا حدی مانند مثال «حلقه در حلقه» ارائه شده در متن کتاب درسی (شکل ۶-۱۰) است، با این تفاوت که به جای نیروی عمودی رو به پایین، با نیروی دایره $\vec{F}_B$ وارد بر خودرو سروکار داریم، که می‌تواند در هر جهتی باشد. ما فرض می‌کنیم جهت این نیرو به طرف بالا است و قانون دوم نیوتون را برای خودرو (با وزن کل 5000 N) به کار می‌بریم: $F_B - W = ma$ ، که در آن $m = W/g$ و $a = -v^2/r$. توجه کنید که جهت شتاب مرکزگرای وارد شده به یک جسم در بالاترین نقطه‌ی مسیر دایره‌ای آن، به طرف پایین است (ما این جهت را منفی

در نظر گرفتیم).

(الف) اگر $r = 10 \text{ m}$ و $v = 5.0 \text{ m/s}$ باشد، داریم

$$F_B = 3.7 \times 10^3 \text{ N} = 3.7 \text{ kN}$$

(ب) جهت $\vec{F}_B$ به طرف بالا است.

(پ) اگر $r = 10 \text{ m}$ و $v = 12 \text{ m/s}$ باشد، داریم

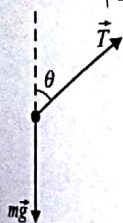
$$|F_B| = 2.3 \text{ kN} \text{ یا } F_B = -2.3 \times 10^3 \text{ N} = -2.3 \text{ kN}$$

(ت) علامت منفی نشان می‌دهد که جهت $\vec{F}_B$ به طرف پایین است.

**** ۵۳** یک اتوبوس برقی شهری قدیمی مسیر خمیده‌ی تختی به شعاع 9.1 m را با تندی 16 km/h می‌پیماید. دستگیره‌های آویخته شده از سقف اتوبوس تحت چه زاویه‌ای نسبت به راستای قائم قرار می‌گیرند؟

حل: نمودار جسم - آزاد (برای دستگیره‌هایی به جرم m) نمایی را نشان می‌دهد که اگر مسافر به طرف جلو نگاه کند و اتوبوس مسیر خمیده را به طرف راست دور بزند (جهت شتاب در شکل به طرف راست باشد)، آن نما را خواهد دید. می‌دانیم که $|\vec{a}| = v^2 / R$ و $v = 16 \text{ km/h} = 4.4 \text{ m/s}$

با استفاده از قانون دوم نیوتون برای محورهای $+x$ به طرف راست و $+y$ به طرف چپ، معادلات زیر را می‌نویسیم:



$$T \sin \theta = m \frac{v^2}{R}$$

$$T \cos \theta = mg$$

این معادله‌ها را به هم تقسیم می‌کنیم تا زاویه به دست آید

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{v^2}{Rg} \right)$$

در نتیجه $\theta = 12^\circ$ به دست می‌آید.

**** ۵۴** در طراحی وسایل سواری گردان در پارک‌های تفریحی مهندسان سازنده‌ی وسایل باید توجه کنند که تغییرات کوچک در برخی پارامترها می‌تواند نیروی برابند وارد به مسافران را تغییر دهد. مسافری به جرم m را در نظر بگیرید که سوار بر یک وسیله با تندی v در روی یک دایره‌ی افقی به شعاع r می‌چرخد. تغییر بزرگی نیروی برابند dF را در حالت‌های زیر پیدا کنید

۵۶ * بزرگراهی دایره‌ای با شیب عرضی، برای عبور وسایل نقلیه‌ی با تندی 60 km/h طراحی شده است. شعاع خمیدگی بزرگراه 200 m است. در یک روز بارانی خودروها با تندی 40 km/h از این بزرگراه عبور می‌کنند. ضریب اصطکاک کمینیه‌ی میان لاستیک‌ها و جاده چقدر باید باشد تا خودروها از جاده به بیرون نلغزند؟ (فرض کنید خودروها نیروی برآر منفی ندارند).

حل: توصیه می‌کنیم به مسئلای نمونه تحت عنوان «خودرو در یک پیچ دایره‌ای با شیب عرضی» رجوع کنید و از نتیجه‌ی مسئله‌ی ۶-۲۶ به ازای $v = 60 (1000/3600) = 16.7 \text{ m/s}$ و $R = 200 \text{ m}$ استفاده کنید:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{v^2}{gR} \right)$$

بنابراین زاویه‌ی شیب عرضی $\theta = 8^\circ$ است. اکنون خودرویی را در نظر بگیرید که با تندی $v' = 40 (1000/3600) = 11 \text{ m/s}$ در این مسیر خمیده حرکت می‌کند. شتاب (افقی) خودرو $a' = v'^2 / R$ است که یک مؤلفه‌ی موازی با سطح شیب‌دار و یک مؤلفه‌ی عمود بر آن دارد:

$$a_{\parallel} = a' \cos \theta = \frac{v'^2 \cos \theta}{R}$$

$$a_{\perp} = a' \sin \theta = \frac{v'^2 \sin \theta}{R}$$

قانون دوم نیوتون برای محورهای x و y به طرف پایین سطح شیب‌دار و y در خلاف جهت شیب را به صورت زیر و با توجه به مؤلفه‌های شتاب می‌نویسیم

$$mg \sin \theta - f_s = ma_{\parallel}$$

$$F_N - mg \cos \theta = ma_{\perp}$$

در نتیجه داریم

$$\frac{f_s}{F_N} = \frac{mg \sin \theta - mv'^2 \cos \theta / R}{mg \cos \theta + mv'^2 \sin \theta / R}$$

جرم را حذف می‌کنیم و مقدار $f_s / F_N = 0.103$ را به دست می‌آوریم. در این مسئله ایجاب می‌کند که از شرط $f_s = f_{s, \max}$ استفاده کنیم، در نتیجه به کمک معادله‌ی ۶-۱ مقدار $\mu_s = 0.103$ به دست می‌آید.

(الف) شعاع دوران به اندازه‌ی dr تغییر می‌کند اما v ثابت است، (ب) تندی به اندازه‌ی dv تغییر می‌کند اما r ثابت است، و (پ) دوره‌ی تناوب به اندازه‌ی dT تغییر می‌کند اما r ثابت است. **حل:** نیروی مرکزگرای وارد بر مسافر برابر است با $F = mv^2 / r$. (الف) تغییر F بر حسب r در حالی که v ثابت است، به صورت

$$dF = -\frac{mv^2}{r^2} dr$$

(ب) تغییر F بر حسب v در حالی که r ثابت می‌ماند، به صورت $dF = \frac{2mv}{r} dv$ است.

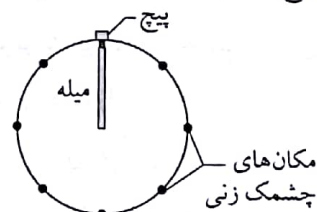
(پ) دوره‌ی تناوب حرکت دایره‌ای $T = 2\pi r / v$ است. در نتیجه داریم

$$F = \frac{mv^2}{r} = \frac{m}{r} \left(\frac{2\pi r}{T} \right)^2 = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}$$

و تغییر F بر حسب T در حالی که r ثابت می‌ماند، برابر است با

$$dF = -\frac{8\pi^2 mr}{T^3} dT = -8\pi^2 mr \left(\frac{v}{2\pi r} \right)^3 dT = -\left(\frac{mv^3}{\pi r^2} \right) dT$$

۵۵ * پیچی به یک سر میله‌ی افقی باریکی بسته شده است و میله به دور سر دیگر خود در سطحی افقی می‌چرخد. شخصی با تاباندن نور یک چراغ چشمک‌زن بر روی میله و پیچ، حرکت آن‌ها را مشاهده می‌کند و آهنگ چشمک‌زنی چراغ به گونه‌ای تنظیم می‌شود که میله و پیچ در هر دوران کامل در هشت مکان با فاصله‌ی یکسان ظاهر شوند (شکل ۶-۴۲). آهنگ چشمک‌زنی 2000 چشمک بر ثانیه است؛ پیچ 30 گرم جرم دارد و در فاصله‌ی $3/5 \text{ cm}$ از محور دوران واقع است. بزرگی نیروی وارد به پیچ از سوی میله چیست؟

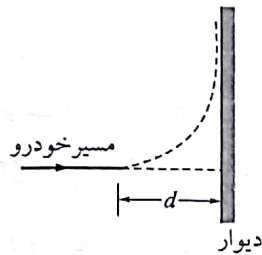


شکل ۶-۴۲ مسئله ۵۵.

حل: می‌دانیم که دوره‌ی تناوب T هشت برابر مدت زمان بین چشمک‌ها $(\frac{1}{2000} \text{ s})$ ، یعنی 0.004 s است. از ترکیب معادلات ۶-۱۸ و ۶-۳۵ داریم

$$F = -\frac{4m\pi^2 R}{T^2} = -2.6 \times 10^3 \text{ N}$$

برخورد می‌کند؟ برای جلوگیری از تصادف، راننده می‌تواند طوری دور بزند که خودرو، مطابق شکل، درست از کنار دیوار عبور کند. (ت) بزرگی نیروی اصطکاک لازم برای نگهداشتن خودرو بر روی یک مسیر دایره‌ای به شعاع d با تندی معین v ، چقدر باید باشد تا خودرو یک ربع دایره را بپیماید و سپس به موازات دیوار حرکت کند؟ (ث) آیا نیروی مورد نیاز برای امکان دایره‌ای شدن مسیر از $f_{s,max}$ کمتر است؟



شکل ۴۴-۶ مسئله ۵۸

حل: (الف) با استفاده از معادلات سینماتیک ارائه شده در جدول ۱-۲، شتاب کند کننده‌ی خودرو برابر است با

$$v^2 = v_0^2 + 2ad \Rightarrow 0 = (35 \text{ m/s})^2 + 2a(10.7 \text{ m})$$

در نتیجه $a = -5.72 \text{ m/s}^2$ به دست می‌آید. بنابراین، نیروی اصطکاک لازم برای متوقف شدن خودرو برابر است با

$$f = m|a| = (1400 \text{ kg})(5.72 \text{ m/s}^2) \approx 8.0 \times 10^3 \text{ N}$$

(ب) نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه می‌تواند برابر است با

$$f_{s,max} = \mu_s mg = (0.50)(1400 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2) \approx 6.9 \times 10^3 \text{ N}$$

(پ) اگر $\mu_k = 0.40$ باشد، در آن صورت $f_k = \mu_k mg$ شتاب کند کننده برابر با $a = -\mu_k g$ است. تندی خودرو در هنگام برخورد به دیوار برابر است با

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2ad} \Rightarrow$$

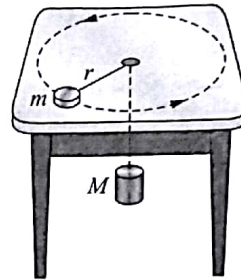
$$\sqrt{(35 \text{ m/s})^2 - 2(0.40)(9.8 \text{ m/s}^2)(10.7 \text{ m})} \approx 20 \text{ m/s}$$

(ت) نیروی لازم برای ماندن خودرو بر روی مسیر دایره‌ای از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$F_r = \frac{mv^2}{r} = \frac{(1400 \text{ kg})(20 \text{ m/s})^2}{10.7 \text{ m}} = 1.6 \times 10^4 \text{ N}$$

(ث) چون $F_r > f_{s,max}$ ، در نتیجه خودرو نمی‌تواند در روی مسیر دایره‌ای بماند.

**** ۵۷** قرصی به جرم $m = 1.50 \text{ kg}$ از طریق ریسمانی، که از سوراخ وسط میزی عبور کرده است، به استوانه‌ی آویخته‌ای به جرم $M = 2.50 \text{ kg}$ وصل شده است. این قرص در یک مسیر دایره‌ای به شعاع $r = 20.0 \text{ cm}$ بر روی سطح بی‌اصطکاک میز می‌لغزد (شکل ۴۳-۶). قرص با چه تندی‌ای باید بچرخد تا استوانه ساکن بماند؟



شکل ۴۳-۶ مسئله ۵۷

حل: برای آن که قرص ساکن بماند، بزرگی نیروی کشش ریسمان، T ، باید با نیروی گرانشی Mg وارد بر استوانه مساوی باشد.

نیروی کشش، نیروی مرکزگرای لازم برای دور زدن قرص در مدار دایره‌ای را تولید می‌کند، در نتیجه $T = mv^2/r$ است. از این جا

داریم $Mg = mv^2/r$ و تندی برابر است با

$$v = \sqrt{\frac{Mgr}{m}} = \sqrt{\frac{(2.50 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(0.200 \text{ m})}{1.50 \text{ kg}}} = 1.8 \text{ m/s}$$

**** ۵۸** ترمز کنیم یا دور بزنیم؟ شکل ۴۴-۶ مسیر حرکت

خودرویی را در هنگام حرکت به سمت یک دیوار، با دید از بالا،

نشان می‌دهد. فرض کنید راننده وقتی به فاصله‌ی $d = 10.7 \text{ m}$ از دیوار می‌رسد شروع به ترمز کردن می‌کند. جرم خودرو را

$m = 1400 \text{ kg}$ ، تندی آغازی خودرو را $v_0 = 35 \text{ m/s}$ و

ضریب اصطکاک ایستایی را $\mu_s = 0.50$ بگیرید. فرض کنید

وزن خودرو، حتی در هنگام ترمز کردن، به طور مساوی بر روی

چهار چرخ توزیع شده است. (الف) بزرگی نیروی اصطکاک

ایستایی لازم (میان لاستیک‌ها و جاده) چقدر باید باشد تا خودرو

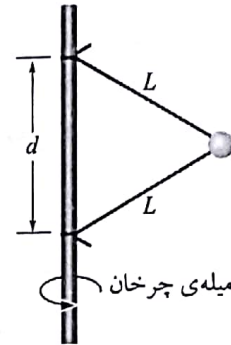
درست در هنگام رسیدن به دیوار متوقف شود؟ (ب) نیروی

اصطکاک ایستایی بیشینه می‌تواند $f_{s,max}$ چقدر است؟ (پ)

اگر ضریب اصطکاک جنبشی میان لاستیک‌ها (در حال لغزیدن)

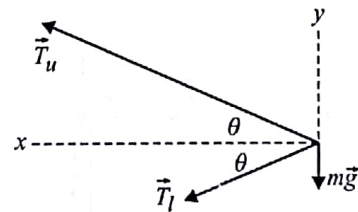
و جاده $\mu_k = 0.40$ باشد، خودرو با چه تندی‌ای به دیوار

۵۹ *** در شکل ۶-۴۵، گلوله‌ای به جرم $1/34 \text{ kg}$ با دو ریسمان بی جرم، هر یک به طول $L = 1/70 \text{ m}$ ، به یک میله ی قائم در حال دوران وصل شده است. ریسمان‌ها در دو نقطه به فاصله ی $d = 1/70 \text{ m}$ از یکدیگر، به میله بسته شده‌اند. نیروی کشش در ریسمان بالایی 35 N است. (الف) نیروی کشش در ریسمان پایین، (ب) بزرگی نیروی برآیند $\vec{F}_{\text{net}}$ وارد به گلوله، و (پ) تندی گلوله، چقدر است؟ (ت) جهت $\vec{F}_{\text{net}}$ چیست؟



شکل ۶-۴۵ مسئله ۵۹.

حل: نمودار جسم - آزاد گلوله در زیر رسم شده است.



T_u نیروی کشش ریسمان بالایی است که به گلوله وارد می‌شود. T_l نیروی کشش ریسمان پایینی، و m جرم گلوله است. کشش در ریسمان بالایی از کشش در ریسمان پایینی بیشتر است. نیروی کشش در ریسمان بالایی باید جاذبه ی رو به پایین گرانش و نیروی کشش ریسمان پایینی را خنثی کند.

(الف) جهت $+x$ را به طرف چپ (به طرف مرکز مدار دایره‌ای) و جهت $+y$ را به طرف بالا در نظر می‌گیریم. چون بزرگی شتاب $a = v^2 / R$ است، مؤلفه ی x قانون دوم نیوتون به صورت زیر است

$$T_u \cos \theta + T_l \cos \theta = \frac{mv^2}{R}$$

در این رابطه v تندی گلوله و R شعاع مدار آن است. مؤلفه ی y عبارت است از

$$T_u \sin \theta - T_l \sin \theta - mg = 0$$

از معادله ی دوم نیروی کشش ریسمان پایینی برابر با

است، پس $\theta = 30^\circ$ است. در نتیجه داریم

$$T_l = 35 - \frac{(1/34)(9/8)}{\sin 30^\circ} = 8/74 \text{ N}$$

(ب) بزرگی نیروی برآیند برابر است با

$F_{\text{net}} = (T_u + T_l) \cos \theta = (35 + 8/74) \cos 30^\circ = 37/9 \text{ N}$
(پ) شعاع مسیر دوران $R = [(1/70 \text{ m}) / 2] \tan 30^\circ = 147 \text{ m}$

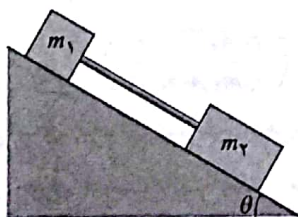
است. با استفاده از $F_{\text{net}} = mv^2 / R$ ، تندی گلوله به دست می‌آید:

$$v = \sqrt{\frac{RF_{\text{net}}}{m}} = \sqrt{\frac{(147 \text{ m})(37/9 \text{ N})}{1/34 \text{ kg}}} = 6/45 \text{ m/s}$$

(ت) جهت F_{net} ریسمان، به طرف چپ (به طور شعاعی به طرف داخل) است.

مسئله‌های بیشتر

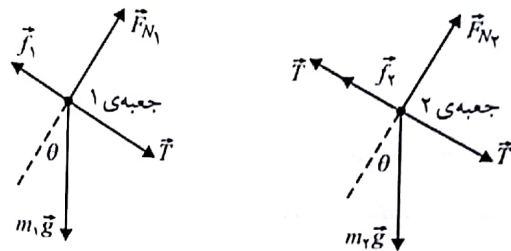
۶۰ در شکل ۶-۴۶، جعبه‌ای (به جرم $m_1 = 1/65 \text{ kg}$) با جعبه ی دیگر (به جرم $m_2 = 3/30 \text{ kg}$)، که به وسیله ی میله ی صلب بی جرمی به هم وصل شده‌اند، در روی سطح شیب‌داری به پایین می‌لغزند. زاویه ی شیب سطح برابر است با $\theta = 30/^\circ$. ضریب اصطکاک جنبشی میان جعبه ی بالایی و سطح شیب‌دار $\mu_1 = 0/226$ ، و میان جعبه ی پایینی و سطح شیب‌دار $\mu_2 = 0/113$ است. مطلوب است محاسبه ی، (الف) نیروی کشش میله و (ت) بزرگی شتاب مشترک دو جعبه. (پ) اگر جای دو جعبه را عوض کنیم، پاسخ‌های قسمت‌های (الف) و (ب) چگونه تغییر می‌کنند؟



شکل ۶-۴۶ مسئله ۶۰.

حل: نمودارهای جسم - آزاد جعبه‌ها را در صفحه ی بعد رسم کرده‌ایم. T بزرگی نیروی میله ی صلب (اگر $T > 0$ باشد می‌گوییم میله تحت کشش است و اگر $T < 0$ باشد میله تحت تراکم است)، $\vec{F}_{N1}$ نیروی عمودی وارد بر جعبه ی ۱، $\vec{F}_{N2}$ نیروی عمودی وارد بر جعبه ی ۲، $\vec{F}_{N1}$ نیروی اصطکاک جنبشی وارد بر جعبه ی ۱، و

$\vec{f}_2$ نیروی اصطکاک جنبشی وارد بر جعبه ۲ است. ضمناً،
جرم جعبه ۱ و $m_2 = 3.30 \text{ kg}$ و جرم جعبه ۲
است.



برای هر جعبه، جهت $+x$ را به طرف پایین سطح شیب‌دار (در این نمودارها به طرف پایین و راست است) و جهت $+y$ را در جهت نیروی عمودی در نظر می‌گیریم. با استفاده از قانون دوم نیوتون برای جهت‌های x و y ابتدا برای جعبه ۲ و سپس برای جعبه ۱، چهار معادله‌ی زیر به دست می‌آید:

$$m_2 g \sin \theta - f_2 - T = m_2 a$$

$$F_{N2} - m_2 g \cos \theta = 0$$

$$m_1 g \sin \theta - f_1 + T = m_1 a$$

$$F_{N1} - m_1 g \cos \theta = 0$$

این معادله‌ها همراه با معادله‌ی ۲-۶ به ازای $f_1 = \mu_1 F_{N1}$ و $f_2 = \mu_2 F_{N2}$ به ازای $\mu_2 = 0.113$ ، دینامیک دستگاه را به طور کامل توصیف می‌کنند.

(الف) از معادلات بالا مقدار کشش میله به دست می‌آید:

$$T = \left(\frac{m_2 m_1 g}{m_2 + m_1} \right) (\mu_1 - \mu_2) \cos \theta = 1.05 \text{ N}$$

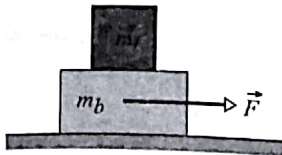
(ب) شتاب مشترک دو جعبه برابر است با

$$a = g \left(\sin \theta - \left(\frac{\mu_2 m_2 + \mu_1 m_1}{m_2 + m_1} \right) \cos \theta \right) = 3.62 \text{ m/s}^2$$

(پ) برای تعویض جای جعبه‌ها، اسم‌های آن‌ها را عوض می‌کنیم. با توجه به نتیجه‌ی جبری قسمت (الف) معلوم می‌شود که در این حالت مقدار T منفی می‌شود (بزرگی T همان مقدار قبلی است). پس، این حالت درست مانند حالت قبلی است با این تفاوت که در اینجا میله در حال تراکم (فشردگی) قرار دارد.

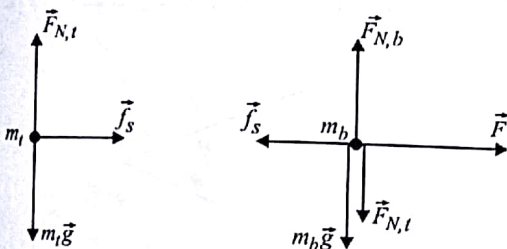
۶۱ جسمی به جرم $m_1 = 4.0 \text{ kg}$ روی جسم دیگری به جرم $m_2 = 5.0 \text{ kg}$ قرار داده شده است. برای لغزاندن جسم بالایی بر روی جسم پایینی، در حالی که جسم پایینی ثابت نگه داشته

شده است، باید دست کم یک نیروی افقی 12 N به جسم بالایی وارد شود. اکنون مجموعه‌ی این دو جسم را روی یک میز بی‌اصطکاک افقی قرار می‌دهیم (شکل ۶-۴۷). بزرگی (الف) نیروی افقی بیشینه‌ی $\vec{F}$ که باید به جسم پایینی وارد شود تا هر دو جسم با هم حرکت کنند و (ب) شتاب برابند دو جسم، چقدر است؟



شکل ۶-۴۷ مسئله‌ی ۶۱.

حله: دستگاه ما شامل دو جسم است، یکی در روی دیگری. اگر جسم پایینی را با شدت بکشیم، جسم بالایی بر روی جسم پایینی می‌لغزد. ما می‌خواهیم نیروی بیشینه‌ای را پیدا کنیم که می‌توان اعمال کرد تا هر دو جسم با هم حرکت کنند. نمودارهای جسم آزاد برای دو جسم را در زیر نشان داده‌ایم.



ابتدا ضریب اصطکاک ایستایی برای سطح بین دو جسم را حساب می‌کنیم. وقتی نیروی اعمال شده بیشینه است، نیروی اصطکاک بین دو جسم نیز بیشینه خواهد بود. چون $F_t = 12 \text{ N}$ به جسم بالایی وارد می‌شود تا بر روی جسم پایینی بلغزد، با استفاده از

$$\text{داریم } F_t = f_{s, \max} = \mu_s F_{N1} = \mu_s m_1 g$$

$$\mu_s = \frac{F_t}{m_1 g} = \frac{12 \text{ N}}{(4.0 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)} = 0.31$$

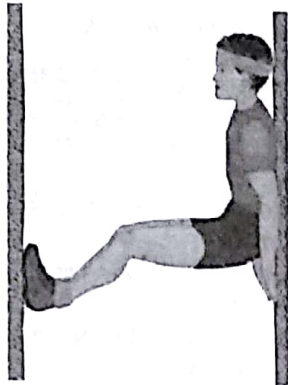
با استفاده از همان استدلال برای آن که دو جرم با هم حرکت کنند، نیروی اعمال شده‌ی بیشینه باید برابر باشد با

$$F = \mu_s (m_1 + m_2) g$$

(الف) با قرار دادن مقدار μ_s به دست آمده در بالا، بزرگی نیروی افقی بیشینه به دست می‌آید

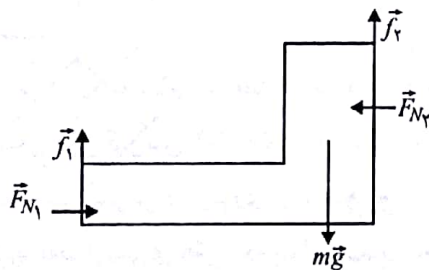
$$F = \mu_s (m_1 + m_2) g = (0.31)(4.0 \text{ kg} + 5.0 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) = 27 \text{ N}$$

و صخره ۱/۲، و میان پشت او و صخره ۰/۸۵ است. صخره نورد فشار به صخره را کم می کند تا پشت و کفش هایش در آستانه ی لغزیدن قرار گیرند. (الف) نمودار جسم - آزاد مربوط به صخره نورد را رسم کنید. (ب) او چه نیرویی به صخره وارد می کند؟ (پ) چه کسری از وزن او توسط نیروی اصطکاک وارد به کفش هایش تحمل می شود؟



شکل ۶-۴۹ مسئله ۶۳.

حل: (الف) نمودار جسم - آزاد صخره نورد (به صورت L) در شکل زیر نشان داده شده است. نیروهایی را که او به صخره ها وارد می کند، به طور مستقیم نشان نداده ایم (زیرا نمودار باید فقط نیروهای وارد بر سنگ نورد را نشان دهد)، اما این نیروها بر طبق قانون سوم نیوتون به نیروهای $\vec{F}_{N1}$ و $\vec{F}_{N2}$ که صخره ها به طور افقی به کفش ها و پشت سنگ نورد وارد می کنند، بستگی دارند. در قسمت (ب) نشان خواهیم داد که $\vec{F}_{N1} = \vec{F}_{N2}$ است، لذا در آنجا بدون ابهام می توانیم بگوییم که بزرگی نیروی هل دادن او F_{N2} است. نیروی رو به بالای کل ناشی از اصطکاک ایستایی (بیشینه)، $\vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2$ است که در آن، $f_1 = \mu_{s1} F_{N1}$ و $f_2 = \mu_{s2} F_{N2}$ است. در صورت مسئله مقادیر $\mu_{s1} = 1/2$ و $\mu_{s2} = 0/85$ داده شده اند.

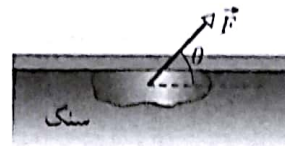


(ب) قانون دوم نیوتون را برای محورهای x و y به کار می بریم (جهت $+x$ به طرف راست و جهت $+y$ به طرف بالا است و در

(پ) شتاب بیشینه برابر است با

$$a_{\max} = \frac{F}{m_l + m_b} = \mu_s g = (0/31)(9.8 \text{ m/s}^2) = 3/0 \text{ m/s}^2$$

۶۲ سنگی به جرم $5/00 \text{ kg}$ بر روی سقف افقی ورودی یک غار کشیده می شود (شکل ۶-۴۸). اگر ضریب اصطکاک جنبشی $0/65$ و زاویه ی نیروی وارد به سنگ نسبت به راستای افقی $\theta = 70/0^\circ$ باشد، بزرگی این نیرو را طوری معین کنید که سنگ با سرعت ثابت حرکت کند.

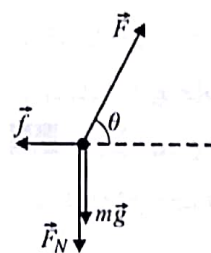


شکل ۶-۴۸ مسئله ۶۲.

حل: نمودار جسم - آزاد برای سنگ در زیر نشان داده شده است که در آن نیروی اعمال شده به سنگ، $\vec{F}_N$ نیروی عمودی رو به پایین که سقف به سنگ وارد می کند، mg نیروی گرانش، و $\vec{f}$ نیروی اصطکاک است. جهت $+x$ را افقی به طرف راست و جهت $+y$ را به طرف بالا انتخاب می کنیم. معادلات مربوط به مؤلفه های x و y بر طبق قانون دوم نیوتون عبارت اند از

$$F_x = F \cos \theta - f = ma$$

$$F_y = F \sin \theta - F_N - mg = 0$$



اکنون $f = \mu_k F_N$ و از معادله ی دوم داریم $F_N = F \sin \theta - mg$ که از آن جا $f = \mu_k (F \sin \theta - mg)$ به دست می آید. این مقدار f را در معادله ی اول قرار می دهیم

$$F \cos \theta - \mu_k (F \sin \theta - mg) = ma$$

به ازای $a = 0$ ، نیرو برابر است با

$$F = \frac{-\mu_k mg}{\cos \theta - \mu_k \sin \theta}$$

به ازای $\mu_k = 0/65$ ، $m = 5/0 \text{ kg}$ و $\theta = 70/0^\circ$ ، داریم $F = 118 \text{ N}$.

۶۳ در شکل ۶-۴۹، صخره نوردی به جرم 49 kg از یک تنوره ی سنگی بالا می رود. ضریب اصطکاک ایستایی میان کفش های او

(ب) با استفاده از معادله‌ی ۶-۱۸ خواهیم داشت:

$$v = \sqrt{\frac{FR}{m}} = \sqrt{\frac{(210)(470)}{510}} = 43.0 \text{ m/s}$$

۶۵ ادامه‌ی مسئله‌های ۸ و ۳۷. توجه دیگر در این باره این است که سنگ‌ها فقط وقتی حرکت می‌کنند که آب باریده شده در توفان در سطح وسیع به صورت ورقه‌ای نازک یخ بزند. سنگ‌ها در این ورقه‌ی یخ گیر می‌افتند. سپس، هنگامی که هوا بر اثر وزش باد از روی این ورقه عبور می‌کند، نیروهای پسار هوای وارد به ورقه و سنگ‌ها آن‌ها را حرکت می‌دهند و در نتیجه، سنگ‌ها از جای خود کشیده می‌شوند. بزرگی نیروی پسار هوا به این «کشتی بادبانی یخی» افقی وارد می‌شود، از رابطه‌ی $v^2 \rho A (\text{یخ}) = C (\text{یخ}) D$ به دست می‌آید، که در آن C (یخ) ضریب پسار (2.0×10^{-3}) ، ρ چگالی هوا (1.21 kg/m^3) ، A (یخ) مساحت افقی یخ و v تندی باد در سطح یخ است.

فرض‌های زیر را در نظر بگیرید: ابعاد ورقه 400 m در 500 m در 4.0 mm و ضریب اصطکاک جنبشی آن نسبت به زمین 0.10 و چگالی یخ 917 kg/m^3 است. هم‌چنین، فرض کنید 100 سنگ مشابه نظیر سنگ مربوط به مسئله‌ی ۸ در یخ‌گیر افتاده‌اند. برای ادامه‌ی حرکت ورقه تندی مورد نیاز باد، (الف) در نزدیکی ورقه و (ب) در ارتفاع 10 متری، چقدر است؟ (پ) آیا این مقادیر برای بادهای تند مربوط به یک توفان پذیرفتنی‌اند؟

حل: جرم لایه‌ی یخ برابر است با

$$m_{\text{یخ}} = (917 \text{ kg/m}^3)(400 \text{ m} \times 500 \text{ m} \times 0.0040 \text{ m})$$

$$= 7.34 \times 10^5 \text{ kg}$$

این جرم به جرم صد سنگ (هر کدام 20 kg) اضافه شده است:

$$m = 7.36 \times 10^5 \text{ kg}$$

(الف) با قرار دادن $F = D$ (برای نیروی پس‌کشی یا پسار)، از معادله‌ی ۶-۱۴ برای پیدا کردن تندی باد، v ، در سطح زمین (که در واقع نسبت به سنگ در حال حرکت است اما ما فرض می‌کنیم که سنگ آن قدر آرام حرکت می‌کند که اثر زیادی روی نتیجه ندارد) استفاده می‌کنیم:

هیچ یک از این جهت‌ها شتاب وجود ندارد:

$$F_{N1} - F_{N2} = 0$$

$$f_1 + f_2 - mg = 0$$

معادله‌ی اول نشان می‌دهد که نیروهای عمودی مساوی‌اند:

$$F_{N1} = F_{N2} = FN$$

$$f_1 = \mu_{s1} FN$$

$$f_2 = \mu_{s2} FN$$

و از آنجا نتیجه می‌گیریم:

$$f_1 = \left(\frac{\mu_{s1}}{\mu_{s2}} \right) f_2$$

بنابراین با توجه به رابطه‌ی $f_1 + f_2 - mg = 0$ داریم

$$\left(\frac{\mu_{s1}}{\mu_{s2}} + 1 \right) f_2 = mg$$

که به ازای $m = 49 \text{ kg}$ ، $f_2 = 199 \text{ N}$ به دست می‌آید. با توجه به این مقدار، $N = f_2 / \mu_{s2} = 234 \text{ N}$ حاصل می‌شود. این مقدار با بزرگی نیرویی که صخره‌نورد به صخره وارد می‌کند، برابر است.

(پ) با استفاده از محاسبات بالا، $f_1 = \mu_{s1} FN = 281 \text{ N}$ به دست می‌آید. بنابراین کسری از وزن صخره‌نورد که توسط نیروی اصطکاک وارد بر کفش‌هایش تحمل می‌شود، برابر است با

$$\frac{f_1}{W} = \frac{288}{(49)(9.8)} = 0.59$$

که ۵۹ درصد وزن صخره‌نورد است.

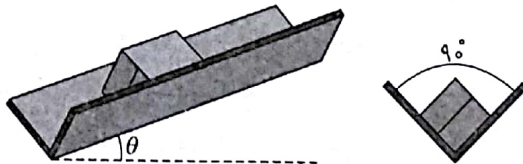
۶۴ قطار بسیار تند روی یک دایره‌ی افقی تخت به شعاع 450 m را با تندی ثابت دور می‌زند. بزرگی مؤلفه‌های افقی و قائم نیرویی که قطار به یک مسافر 510 kg می‌کند، به ترتیب، 210 N و 500 N است. (الف) بزرگی نیروی برابند (تمام نیروها) وارد به مسافر چقدر است؟ (ب) تندی قطار چقدر است؟

حل: (الف) نیروی رو به بالایی که قطار به مسافر وارد می‌کند، با نیروی رو به پایین گرانش ($W = 500 \text{ N}$) که به مسافر وارد می‌شود، برابر است. بنابراین در نیروی برابند هیچ نیروی قائمی دخیل نیست و فقط از نیروی افقی (که برای ادامه یافتن حرکت دایره‌ای لازم است) سهم می‌برد. در نتیجه داریم

$$|\vec{F}_{\text{net}}| = F = 210 \text{ N}$$

با قرار دادن این مقدار در یکی از معادله‌های بالا، نیروی کشش ریسمان $T = 9/8 \text{ N}$ به دست می‌آید.

۶۷ در شکل ۵۱-۶، صندوقی درون یک سطح شیب‌دار ناودانی با زاویه‌ی 90° درجه به پایین می‌لغزد. ضریب اصطکاک جنبشی میان صندوق و ناودان μ_k است. شتاب صندوق برحسب μ_k ، g و θ چیست؟



شکل ۵۱-۶ مسئله‌ی ۶۷.

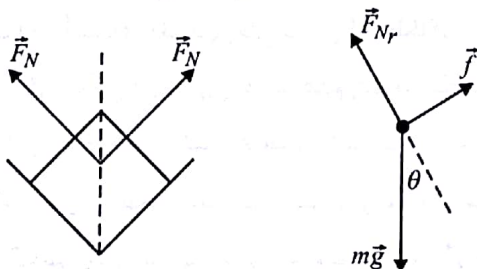
حل: هر سطح ناودان یک نیروی عمودی به صندوق وارد می‌کند. نمودار سمت چپ، مقطع ناودان و جهت نیروهای عمودی را نشان می‌دهد. نیروی برآیند در راستای خط‌چین اثر می‌کند. چون هر یک از این نیروهای عمودی با خط‌چین زاویه‌ی 45° می‌سازد، بزرگی نیروی عمودی برآیند به صورت زیر است

$$F_{Nr} = 2F_N \cos 45^\circ = \sqrt{2}F_N$$

نمودار سمت راست، نمودار جسم - آزاد صندوق است (از پهلوی و مانند تصویر اول شکل ۵۱-۶ دیده شده است). بزرگی نیروی گرانشی mg است که m جرم صندوق است، و بزرگی نیروی اصطکاک را با f نشان می‌دهیم. جهت $+x$ را به طرف پایین سطح شیب‌دار، و جهت $+y$ را در جهت $\vec{F}_{Nr}$ انتخاب می‌کنیم. مؤلفه‌های x و y قانون دوم نیوتون به صورت زیر است

$$mg \sin \theta - f = ma$$

$$F_{Nr} - mg \cos \theta = 0$$



چون صندوق حرکت می‌کند، هر وجه ناودان یک نیروی اصطکاک جنبشی وارد می‌کند، در نتیجه بزرگی نیروی اصطکاک کل

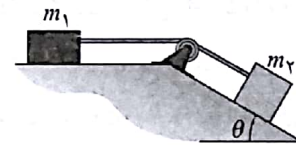
$$f = 2\mu_k F_N = 2\mu_k F_{Nr} / \sqrt{2} = \sqrt{2}\mu_k F_{Nr}$$

$$v = \sqrt{\frac{\mu_k mg}{4C_{ice}\rho A_{ice}}} = \sqrt{\frac{(0/10)(7/36 \times 10^5 \text{ kg})(9/8 \text{ m/s}^2)}{4(0/002)(1/21 \text{ kg/m}^3)(400 \times 500 \text{ m}^2)}} = 19 \text{ m/s} \approx 69 \text{ km/h}$$

(ب) با دو برابر کردن نتیجه‌ی قبلی، تندی گزارش شده 139 km/h خواهد بود.

(پ) این نتیجه برای بادهای تند پذیرفتنی است (تندی یک تندباد درجه ۵ از مرتبه‌ی $2/6 \times 10^2 \text{ m/s}$ است).

۶۶ در شکل ۵۰-۶، جسم ۱ به جرم $m_1 = 2/0 \text{ kg}$ و جسم ۲ به جرم $m_2 = 3/0 \text{ kg}$ با ریسمانی به جرم ناچیز به هم وصل شده و در آغاز در جای خود قرار داده شده‌اند. جسم ۲ روی یک سطح بی‌اصطکاک با زاویه‌ی شیب $\theta = 30^\circ$ قرار دارد. ضریب اصطکاک جنبشی میان جسم ۱ و سطح افقی $0/25$ است. جرم و اصطکاک قرقره ناچیز است. هنگامی که دو جسم را رها می‌کنیم و آن‌ها حرکت می‌کنند نیروی کشش ریسمان چه خواهد بود؟



شکل ۵۰-۶ مسئله‌ی ۶۶.

حل: چون ضریب اصطکاک داده نشده است، فرض می‌کنیم f_s در این محاسبه وارد نمی‌شود. قانون دوم نیوتون برای هر جسم در راستای محور x (که برای جرم m_1 به طرف راست مثبت و برای جرم m_2 به طرف بالای سطح شیب‌دار مثبت است) را می‌نویسیم:

$$T - f_k = m_1 a$$

$$m_2 g \sin \theta - T = m_2 a$$

از جمع این معادله‌ها شتاب را به دست می‌آوریم:

$$a = \frac{m_2 g \sin \theta - f_k}{m_1 + m_2}$$

که به ازای $f_k = \mu_k F_N = \mu_k m_1 g$ داریم

$$a = \frac{(3/0 \text{ kg})(9/8 \text{ m/s}^2) \sin 30^\circ - (0/25)(2/0 \text{ kg})(9/8 \text{ m/s}^2)}{3/0 \text{ kg} + 2/0 \text{ kg}} = 1/96 \text{ m/s}^2$$

است. این رابطه را با $F_{Nr} = mg \cos \theta$ ترکیب می‌کنیم و آن را در معادله مؤلفه x قرار می‌دهیم تا

$$mg \sin \theta - \sqrt{2} mg \cos \theta = ma$$

به دست آید. پس داریم: $a = g (\sin \theta - \sqrt{2} \mu_k \cos \theta)$

۶۸ طراحی یک پیچ بزرگ راه. اگر خودرویی با تندی زیاد به پیچ جاده‌ای وارد شود، به سمت بیرون پیچ سُر می‌خورد. در یک پیچ با شیب عرضی و اصطکاک به خودرو تندی یک نیروی اصطکاک وارد می‌شود تا مانع لغزیدن آن به بیرون پیچ شود. جهت این نیرو به طرف پایین شیب عرضی (در جهت حرکت آب‌های ناشی از باران) است. یک پیچ دایره‌ای به شعاع $R = 250 \text{ m}$ با شیب عرضی θ را در نظر بگیرید، که در آن ضریب اصطکاک ایستایی میان لاستیک‌ها و جاده μ_s است. یک خودرو (بدون نیروی برآر منفی) باید مطابق شکل ۱۱-۶ در این پیچ حرکت کند. (الف) رابطه‌ی مربوط به تندی خودرو $v_{\max}$ را به گونه‌ای پیدا کنید که خودرو در آستانه‌ی لغزیدن به بیرون پیچ قرار گیرد. (ب) نمودار تغییرات $v_{\max}$ برحسب زاویه‌ی θ را در گستره‌ای از زاویه‌های صفر تا 50° درجه، نخست به ازای $\mu_s = 0.60$ (جاده‌ی خشک) و سپس به ازای $\mu_s = 0.50$ (جاده خیس یا یخ زده)، برای همان شکل، رسم کنید. مقدار $v_{\max}$ را برحسب کیلومتر بر ساعت به ازای زاویه‌ی شیب عرضی $\theta = 10^\circ$ و به ازای (پ) $\mu_s = 0.60$ و (ت) $\mu_s = 0.50$ ، حساب کنید. (اکنون متوجه خواهید شد چرا در موقع لغزنده بودن پیچ جاده که برای راننده قابل تشخیص نیست و او می‌خواهد با تندی متعارف رانندگی کند، حادثه رخ می‌دهد.)

حل: (الف) در آستانه‌ی لغزیدن یعنی نیروی اصطکاک ایستایی با بیشترین بزرگی ممکن (به طوری که در صورت مسئله شرح داده شده است) «به طرف پایین شیب عرضی» اثر کند. ابتدا مجموع برداری $\vec{F}$ نیروی اصطکاک ایستایی (بیشینه) و نیروی عمودی را در نظر می‌گیریم. چون این نیروها بر هم عمودند و بزرگی‌های آنها با هم تناسب دارند (معادله‌ی ۱-۶)، معلوم می‌شود که $\vec{F}$ تحت زاویه‌ی $\phi = \theta + \theta_s$ (نسبت به محور قائم) اثر می‌کند و $\tan \theta_s = \mu_s$ است (با معادله‌ی ۱۳-۶ مقایسه کنید) و θ زاویه‌ی

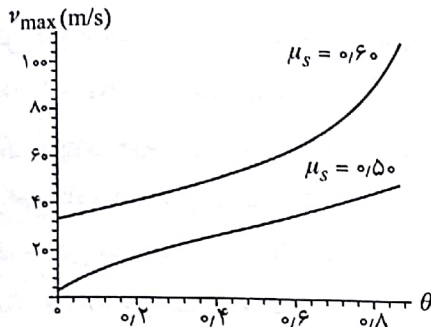
شیب عرضی (مطابق صورت مسئله) است. اکنون مجموع برداری $\vec{F}$ و جاذبه گرانشی رو به پایین ($m\vec{g}$) باید با نیروی مرکزگرای افقی (mv^2/R) مساوی باشد، که در نتیجه رابطه‌ی ساده‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\tan \phi = \frac{mv^2/R}{mg} = \frac{v^2}{Rg}$$

از این جا رابطه‌ی تندی بیشینه به دست می‌آید

$$v_{\max} = \sqrt{Rg \tan(\theta + \tan^{-1} \mu_s)} = \sqrt{\frac{Rg (\tan \theta + \mu_s)}{1 - \mu_s \tan \theta}}$$

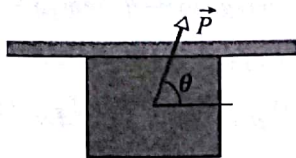
(ب) نمودار در زیر رسم شده است (θ برحسب رادیان است):



(پ) با برآورد تقریبی از این نمودار ($\mu_s = 0.60$ ، منحنی بالایی) یا محاسبه‌ی دقیق به ازای $\theta = 10^\circ = 0.175 \text{ rad}$ داریم $v = 46.1 \text{ m/s} = 104 \text{ km/h}$

(ت) به طور مشابه (برای $\mu_s = 0.50$ ، منحنی پایینی) به ازای $\theta = 10^\circ = 0.175 \text{ rad}$ داریم $v = 23.7 \text{ m/s} = 53 \text{ km/h}$

۶۹ یک دانشجوی عصبانی از امتحانات نهایی، جسمی 5.0 کیلوگرمی را با نیروی $\vec{P}$ به بزرگی 95 N تحت زاویه‌ی $\theta = 70^\circ$ بر روی سقف اتاقش هل می‌دهد (شکل ۵۲-۶). اگر ضریب اصطکاک جنبشی میان جسم و سقف 0.40 باشد، بزرگی شتاب جسم چقدر است؟



شکل ۵۲-۶ مسئله ۶۹

حل: برای سهولت، زاویه‌ی 70° را θ و بزرگی نیروی هل (95 N) را P می‌نامیم. نیروهای قائم وارد بر جسم عبارت‌اند از

حل: (الف) می‌دانیم که R (فاصله‌ی افقی گلوله تا محور دوران) از تقسیم محیط دایره به 2π ، یعنی $R = 0.94/2\pi = 0.15 \text{ m}$ به دست می‌آید. زاویه ریسمان با راستای افقی برابر است با

$$\theta = \cos^{-1}(R/L) = \cos^{-1}(0.15 \text{ m} / 0.90 \text{ m}) = 80^\circ$$

مؤلفه‌ی قائم نیروی کشش ریسمان $T \sin \theta$ است و باید با جاذبه‌ی گرانشی رو به پایین (mg) مساوی باشد، در نتیجه داریم

$$T = \frac{mg}{\sin \theta} = 0.50 \text{ N}$$

توجه کنید که از حرف T برای نیروی کشش استفاده کرده‌ایم (نه برای دوره‌ی تناوب).

(ب) مؤلفه‌ی افقی نیروی کشش ریسمان باید نیروی مرکزگرا (معادله‌ی ۶-۱۸) را تأمین کند، لذا می‌توان نوشت $T \cos \theta = mv^2/R$ از این‌جا تندی $v = 0.51 \text{ m/s}$ به دست می‌آید. از تقسیم این تندی به محیط دایره، مدت زمان یک دور به دست می‌آید: $0.94/0.51 = 1.8 \text{ s}$.

۷۱ یک جسم فولادی به جرم 8.0 kg در روی یک میز افقی به حال سکون قرار دارد. ضریب اصطکاک ایستایی میان جسم و میز 0.45 است. این جسم تحت تأثیر یک نیرو قرار می‌گیرد. بزرگی این نیرو را تا سه رقم با معنی به گونه‌ای معین کنید که جسم در شرایط زیر در آستانه‌ی لغزیدن قرار گیرد: (الف) راستای نیرو افقی است، (ب) نیرو به سمت بالا تحت زاویه‌ی 60° درجه نسبت به افق است، و (پ) نیرو به سمت پایین تحت زاویه‌ی 60° درجه نسبت به افق است.

حل: (الف) در آستانه‌ی لغزیدن به این معنی است که نیروی اعمال شده با نیروی اصطکاک ایستایی ممکن بیشینه (معادله‌ی ۶-۱)، در این حالت $(F_N = mg)$ برابر است:

$$f_{s, \max} = \mu_s mg = 35.3 \text{ N}$$

(ب) در این حالت، نیروی اعمال شده‌ی $\vec{F}$ به طور غیرمستقیم مقدار ممکن بیشینه‌ی نیروی اصطکاک را کاهش می‌دهد (زیرا مؤلفه‌ی y آن باعث کاهش نیروی عمودی می‌شود) و همچنین به طور مستقیم با خود نیروی اصطکاک مخالفت می‌کند (به خاطر مؤلفه‌ی x آن). در این‌جا نیروی عمودی برابر است با

$$F_N = mg - F \sin \theta$$

نیروی عمودی رو به پایین وارد به آن از طرف سقف، جاذبه‌ی گرانشی رو به پایین (با بزرگی mg) و مؤلفه‌ی قائم $\vec{P}$ (که جهت آن به طرف بالا و بزرگی آن $P \sin \theta$ است). چون در راستای قائم شتاب وجود ندارد، داریم

$$F_N = P \sin \theta - mg$$

در این حالت جهت نیروی اصطکاک جنبشی به طرف چپ و بزرگی آن برابر است با

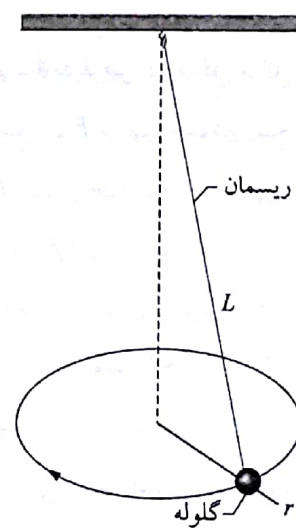
$$f_k = \mu_k (P \sin \theta - mg)$$

با انتخاب $+x$ به طرف راست، قانون دوم نیوتون به صورت زیر نوشته می‌شود

$$P \cos \theta - f_k = ma \Rightarrow a = \frac{P \cos \theta - \mu_k (P \sin \theta - mg)}{m}$$

که به ازای $\mu_k = 0.40$ و $m = 5.0 \text{ kg}$ ، شتاب $a = 3.3 \text{ m/s}^2$ به دست می‌آید.

۷۰ شکل ۶-۵۳ یک **آونگ مخروطی** را نشان می‌دهد که گلوله‌ی آن (جسم کوچک متصل به انتهای پایینی ریسمان) در روی یک دایره‌ی افقی با تندی ثابت حرکت می‌کند. (در هنگام چرخیدن گلوله ریسمان سطح جانبی یک مخروط را جارو می‌کند). جرم گلوله 0.050 kg ، جرم ریسمان ناچیز و طول آن $L = 0.90 \text{ m}$ است. گلوله در روی دایره‌ای با محیط 0.94 m حرکت می‌کند. (الف) نیروی کشش ریسمان و (ب) دوره‌ی تناوب حرکت آونگ چقدر است؟



شکل ۶-۵۳ مسئله‌ی ۷۰.

که در آن $\theta = 60^\circ$ است، در نتیجه از معادله‌ی قانون دوم نیوتون در راستای افقی داریم

$$F \cos \theta - f_{s, \max} = F \cos \theta - \mu_s (mg - F \sin \theta) = 0$$

$$\Rightarrow F = 39.2 \text{ N}$$

(پ) اکنون نیروی اعمال شده‌ی $\vec{F}$ به طور غیرمستقیم مقدار نیروی اصطکاک ممکن بیشینه را افزایش می‌دهد (زیرا مؤلفه‌ی y آن باعث کاهش نیروی عمودی می‌شود) و همچنین به طور مستقیم با خود نیروی اصطکاک مخالفت می‌کند (به خاطر مؤلفه‌ی x آن). در این حالت نیروی عمودی برابر است با

$$F_N = mg + F \sin \theta$$

که در آن $\theta = 60^\circ$ است، در نتیجه از معادله‌ی قانون دوم نیوتون در راستای افقی داریم

$$F \cos \theta - f_{s, \max} = F \cos \theta - \mu_s (mg + F \sin \theta) = 0$$

$$\Rightarrow F = 320 \text{ N}$$

۷۲ جعبه‌ای محتوی مواد غذایی در پیاده‌رو خیابانی شیب‌دار با شتاب 0.75 m/s^2 به سمت یک مغازه‌ی خواروبار فروشی می‌لغزد و پایین می‌رود. زاویه‌ی شیب‌راهِ نسبت به افق 40° درجه است. ضریب اصطکاک جنبشی میان جعبه و شیب‌راهِ چیست؟

حل: برای زاویه‌ی $\theta = 40^\circ$ ، قانون دوم نیوتون در جهت رو به پایین سطح شیب‌دار به صورت زیر (با استفاده از معادله‌ی ۶-۱۲) نوشته می‌شود

$$mg \sin \theta - f = ma$$

$$f = f_k = \mu_k F_N = \mu_k mg \cos \theta$$

در نتیجه داریم

$$a = 0.75 \text{ m/s}^2 = g (\sin \theta - \mu_k \cos \theta)$$

و از آن جا ضریب اصطکاک جنبشی به صورت $\mu_k = 0.73$ به دست می‌آید.

۷۳ در شکل ۶-۵۴، ضریب اصطکاک جنبشی میان جسم و سطح شیب‌دار 0.25 ، و زاویه‌ی θ برابر با 60° درجه است. (الف) بزرگی a و (ب) جهت شتاب جسم (به سمت بالا یا پایین سطح شیب‌دار) در حالی که جسم به پایین می‌لغزد، چیست؟

اگر جسم به سمت بالا لغزانده شود، (پ) بزرگی a و (ت) جهت آن چیست؟



شکل ۶-۵۴ مسئله‌ی ۷۳.

حل: (الف) به ازای $\theta = 60^\circ$ ، قانون دوم نیوتون در جهت رو به پایین سطح شیب‌دار به صورت زیر نوشته می‌شود

$$mg \sin \theta - f = ma$$

$$f = f_k = \mu_k F_N = \mu_k mg \cos \theta$$

در نتیجه داریم

$$a = g (\sin \theta - \mu_k \cos \theta) = 7.3 \text{ m/s}^2$$

(ب) جهت شتاب $\vec{a}$ به طرف پایین سطح شیب‌دار است.

(پ) اکنون جهت نیروی اصطکاک به طرف پایین سطح شیب‌دار

(جهت مثبت ما) است، در نتیجه بزرگی شتاب برابر است با

$$a = g (\sin \theta + \mu_k \cos \theta) = 9.7 \text{ m/s}^2$$

(ت) جهت شتاب به طرف پایین سطح شیب‌دار است.

۷۴ یک قرص هاک‌ی به جرم 110 kg به اندازه‌ی 15 m متر روی یخ می‌لغزد و به وسیله‌ی نیروی اصطکاک متوقف می‌شود. (الف) اگر تندی آغازی قرص 6.0 m/s باشد، بزرگی نیروی اصطکاک چقدر است؟ (ب) ضریب اصطکاک میان قرص و یخ چقدر است؟



حل: نمودار جسم - آزاد قرص در شکل مقابل

نشان داده شده است. $\vec{F}_N$ نیروی عمودی یخ

بر روی قرص، $\vec{f}$ نیروی اصطکاک (در جهت

$-x$)، و $m\vec{g}$ نیروی گرانش است.

(الف) از مؤلفه‌ی افقی قانون دوم نیوتون داریم $-f = ma$ ، و از

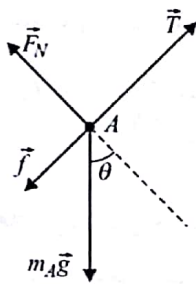
معادلات دینامیک با شتاب ثابت (جدول ۲-۱) می‌توان استفاده کرد

و شتاب را به دست آورد.

چون سرعت پایانی صفر است، از رابطه‌ی $v^2 = v_0^2 + 2ax$

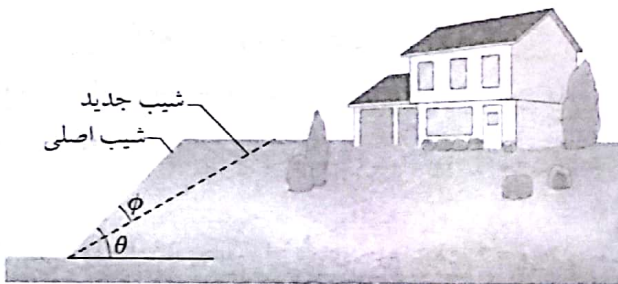
مقدار $a = -v_0^2 / 2x$ به دست می‌آید. با قرار دادن این مقدار در

معادله‌ی قانون دوم نیوتون داریم



مقدار $a = 0$ (بر طبق صورت مسئله) را در این رابطه قرار می‌دهیم و زاویه‌ی $\theta = 1/1^\circ$ را به دست می‌آوریم.

۷۶ خانه‌ای بر بالای تپه‌ای با شیب $\theta = 45^\circ$ ساخته شده است (شکل ۵۵-۶). مطالعات مهندسی نشان می‌دهند که این زاویه‌ی شیب باید کاهش یابد زیرا لایه‌های بالایی خاک ممکن است بر روی لایه‌های پایینی بلغزند. اگر ضریب اصطکاک ایستایی میان دو لایه‌ی خاک $0/5$ باشد، کمترین مقدار زاویه‌ی ϕ که به‌ازای آن شیب موجود تپه باید کاهش یابد تا لغزش خاک صورت نگیرد، چقدر است؟



شکل ۵۵-۶ مسئله ۷۶.

حل: بحث عالی و اثبات معادله‌ی مربوط، در مسئله‌ی نمونه تحت عنوان «اصطکاک، نیروی وارد شده تحت زاویه» صورت گرفته است. با استفاده از این نتیجه داریم

$$\theta = \tan^{-1} \mu_s = \tan^{-1} 0/5 = 26/6^\circ$$

بنابراین، کمترین مقدار زاویه‌ی ϕ که به‌ازای آن شیب تپه باید کاهش یابد، برابر است با

$$\phi = 45^\circ - 26/6^\circ \approx 18/4^\circ$$

۷۷ تندی حد یک گلوله‌ی کروی در حال سقوط آزاد به جرم $6/00 \text{ kg}$ ، شعاع $3/00 \text{ cm}$ و ضریب پسار $1/60$ ، چقدر است؟ چگالی هوای پیرامون گلوله‌ی در حال سقوط $1/20 \text{ kg/m}^3$ است.

$$f = \frac{mv_x^2}{2x} = \frac{(0/110 \text{ kg})(6/0 \text{ m/s})^2}{2(15 \text{ m})} = 0/13 \text{ N}$$

(ب) مؤلفه‌ی قائم قانون دوم نیوتون به صورت $F_N - mg = 0$ نوشته می‌شود، که $F_N = mg$ است و ایجاب می‌کند (با استفاده از معادله‌ی ۲-۶) که $f = \mu_k mg$ باشد. پس، ضریب اصطکاک برابر است با

$$\mu_k = \frac{f}{mg} = \frac{0/13 \text{ N}}{(0/110 \text{ kg})(9/8 \text{ m/s}^2)} = 0/16$$

۷۵ لوکوموتیوی ۲۵ واگن قطار را در روی یک ریل افقی می‌کشد. هر واگن $5/0 \times 10^4 \text{ kg}$ جرم دارد و تحت اثر نیروی اصطکاک $f = 250v$ است، که در آن v برحسب متر بر ثانیه و f برحسب نیوتون است. در لحظه‌ای که قطار دارای تندی 30 km/h است بزرگی شتاب آن $0/20 \text{ m/s}^2$ است. (الف) نیروی کشش جفت شدگی میان واگن اول و لوکوموتیو چقدر است؟ (ب) اگر این نیروی کشش برابر با بیشینه‌ی نیروی باشد که لوکوموتیو می‌تواند به قطار وارد کند، بیشترین شیب سطحی که روی آن لوکوموتیو می‌تواند قطار را با تندی 30 km/h به سمت بالا بکشد چقدر است؟

حل: همه‌ی ۲۵ واگن را به صورت یک جسم به جرم $m = 25 \times 5/0 \times 10^4 \text{ kg}$ در نظر می‌گیریم و (هنگامی که تندی $30 \text{ km/h} = 8/3 \text{ m/s}$ است) نیروی اصطکاک وارد بر آن برابر است با

$$f = 25 \times 250 \times 8/3 = 5/2 \times 10^4 \text{ N}$$

(الف) این جسم در روی ریل افقی تحت تأثیر نیروی افقی T لوکوموتیو قرار می‌گیرد که بر طبق قانون دوم نیوتون، مقدار آن از معادله‌ی زیر به دست می‌آید

$$T - f = ma \Rightarrow T = 5/2 \times 10^4 + (1/20 \times 10^6)(0/20) = 2/9 \times 10^5 \text{ N}$$

(ب) نمودار جسم - آزاد به صورت زیر است که در آن θ زاویه‌ی سطح شیب‌دار است. جهت $+x$ (تنها جهتی که قانون دوم نیوتون را به کار می‌بریم) به طرف بالای سطح شیب‌دار (در نمودار به طرف سمت راست و بالا) است. بنابراین، داریم

$$T - f - mg \sin \theta = ma$$

حل: از معادله ی ۶-۱۶ استفاده می کنیم، که (به ازای $C=۱/۶$) داریم

$$\sqrt{\frac{2mg}{C\rho\pi R^2}} = ۱۴۷ \text{ m/s}$$

۷۸ دانشجویی می خواهد ضریب های اصطکاک ایستایی و جنبشی میان یک جعبه و یک الوار را معین کند. او جعبه را روی الوار قرار می دهد و یک سر الوار را به تدریج بلند می کند. وقتی زاویه ی شیب الوار نسبت به راستای افقی به ۳۰° درجه می رسد. جعبه شروع به لغزیدن می کند و در مدت $۴/۰$ ثانیه با شتاب ثابت مسافتی به اندازه ی $۲/۵ \text{ m}$ به سمت پایین می لغزد. (الف) ضریب اصطکاک ایستایی و (ب) ضریب اصطکاک جنبشی میان جعبه و الوار چقدر است؟

حل: (الف) ضریب اصطکاک ایستایی برابر است با

$$\mu_s = \tan(\theta) = ۰/۵۷۷ \approx ۰/۵۸$$

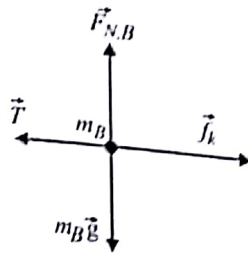
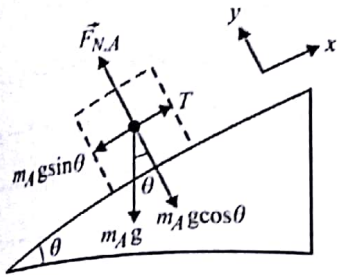
(ب) معادله ی قانون دوم نیوتون را به صورت زیر می نویسیم

$$mg \sin \theta - f = ma$$

$$f = f_k = \mu_k F_N = \mu_k mg \cos \theta$$

چون $a = ۲d/t^2$ (که در آن $d = ۲/۵ \text{ m}$ و $t = ۴/۰ \text{ s}$)، داریم $\mu_k = ۰/۵۴$

$$m_A g \sin \theta - T = m_A a$$



برای جسم B داریم

$$T - f_k = m_B a$$

نیروی اصطکاک از رابطه ی $f_k = \mu_k F_{N,B} = \mu_k m_B g$ به دست می آید. از معادلات بالا می توانیم نیروی کشش T و شتاب a را به دست آوریم.

(الف) معادلات بالا را با هم ترکیب می کنیم تا T به دست آید:

$$T = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} (\sin \theta + \mu_k) g$$

$$= \frac{(۴/۰ \text{ kg})(۲/۰ \text{ kg})}{۴/۰ \text{ kg} + ۲/۰ \text{ kg}} (\sin ۳۰^\circ + ۰/۵۰)(۹/۸۰ \text{ m/s}^2) = ۱۳ \text{ N}$$

(ب) به طور مشابه، شتاب دستگاه دو جسمی به دست می آید:

$$a = \left(\frac{m_A \sin \theta - \mu_k m_B}{m_A + m_B} \right) g$$

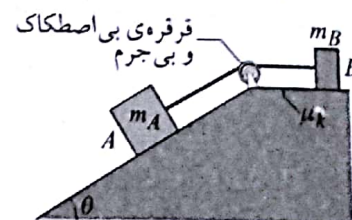
$$= \frac{(۴/۰ \text{ kg}) \sin ۳۰^\circ - (۰/۵۰)(۲/۰ \text{ kg})}{۴/۰ \text{ kg} + ۲/۰ \text{ kg}} (۹/۸۰ \text{ m/s}^2) = ۱/۶ \text{ m/s}^2$$

۸۰ نیروی پसार وارد به پرتابه ای به قطر ۵۳ cm را که در ارتفاع پایین با تندی ۲۵۰ m/s حرکت می کند، حساب کنید. چگالی هوا در این ارتفاع $۱/۲ \text{ kg/m}^3$ است و فرض کنید $C = ۰/۷۵$. **حل:** از معادله ی ۶-۱۴، یعنی $D = \frac{1}{\rho} C \rho A v^2$ استفاده می کنیم، که در آن چگالی هوا، A مساحت مقطع پرتابه، v تندی پرتابه، و C ضریب پसार (پس کشی) است. مساحت مقطع از رابطه ی $A = \pi R^2$ به دست می آید که در آن $R = ۰/۳۰۰ \text{ m}$ شعاع پرتابه است. در نتیجه داریم

$$D = \frac{1}{\rho} (۰/۷۵)(۱/۲ \text{ kg/m}^3) \pi (۰/۲۶۵ \text{ m})^2 (۲۵۰ \text{ m/s})^2 = ۶/۲ \times ۱۰^۳ \text{ N}$$

۸۱ دو چرخه سواری دایره ای به شعاع $۲۵/۰ \text{ m}$ را با تندی ثابت $۹/۰ \text{ m/s}$ دور می زنند. جرم دو چرخه و دو چرخه سوار

۷۹ در شکل ۶-۵۶، جسم A دارای جرم $m_A = ۴/۰ \text{ kg}$ و جسم B دارای جرم $m_B = ۲/۰ \text{ kg}$ است. ضریب اصطکاک جنبشی میان جسم B و سطح افقی $\mu_k = ۰/۵۰$ است. سطح شیب دار بی اصطکاک و زاویه ی شیب آن $\theta = ۳۰^\circ$ است. قرقره فقط جهت ریسمان وصل کننده ی دو جسم را تغییر می دهد و جرم ریسمان ناچیز است. (الف) نیروی کشش ریسمان و (ب) بزرگی شتاب اجسام را پیدا کنید.



شکل ۶-۵۶ مسئله ۷۹.

حل: نمودار جسم - آزاد اجسام A و B در زیر رسم شده اند. از قانون دوم نیوتون برای جسم A (که برای آن $\theta = ۳۰^\circ$ است)، داریم

عبارت‌اند از نیروی عمودی رو به بالایی که زمین به خودرو وارد می‌کند و جاذبه‌ی گرانشی رو به پایین. جهت $\hat{y}$ را به طرف پایین در نظر می‌گیریم، در نتیجه با استفاده از قانون دوم نیوتون داریم

$$mg - F_N = \frac{mv^2}{R}$$

برای پیدا کردن بیشترین تندی بدون بلند شدن خودرو از تپه، $F_N = 0$ را قرار می‌دهیم و v را پیدا می‌کنیم:

$$v = \sqrt{gR} = \sqrt{(9.8 \text{ m/s}^2)(250 \text{ m})} = 49.5 \text{ m/s} \\ = 49.5(3600/1000) \text{ km/h} = 178 \text{ km/h}$$

۸۳ قرار است یک صندوق را در کف یک بارانداز هل بدهید. وزن صندوق 165 N ، ضریب اصطکاک ایستایی میان صندوق و کف 0.510 و ضریب اصطکاک جنبشی 0.32 است. راستای نیروی وارد به صندوق افقی است. (الف) بزرگی نیروی وارد به صندوق چقدر باید باشد تا صندوق در آستانه‌ی لغزیدن قرار گیرد؟ (ب) بزرگی نیروی وارد شده چقدر باید باشد تا صندوق با سرعت ثابت حرکت کند؟ (پ) اکنون، اگر صندوق را با نیروی به دست آمده در قسمت (الف) هل بدهید، بزرگی شتاب صندوق چقدر خواهد بود؟

حل: (الف) نیروی هل دادن (برای به حرکت در آوردن صندوق) دست کم باید به اندازه‌ی $f_{s, \max} = \mu_s F_N$ (معادله‌ی ۶-۱، به ازای $F_N = mg$ در این حالت) باشد که ماوی با $(165 \text{ N})(0.51) = 84 \text{ N}$ است.

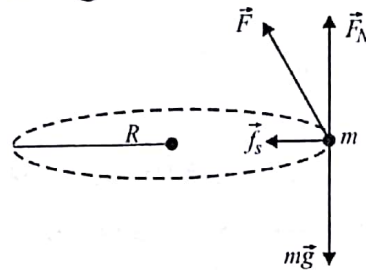
(ب) وقتی صندوق به حرکت درآمد، سرعت به شرطی ثابت می‌ماند (شتاب صفر) که نیروی هل دادن با نیروی اصطکاک جنبشی $f_k = \mu_k F_N = \mu_k mg = 52.8 \text{ N}$ برابر باشد.

(پ) می‌دانیم که جرم صندوق $165/9.8 = 16.8 \text{ kg}$ است. شتاب با استفاده از نیروی هل دادن در قسمت (الف)، برابر است با $a = (84 \text{ N} - 52.8 \text{ N}) / (16.8 \text{ kg}) \approx 1.86 \text{ m/s}^2$

۸۴ در شکل ۶-۵۸، نیروی $\vec{F}$ به صندوقی به جرم m ، واقع بر روی کف اتاق، وارد می‌شود. ضریب اصطکاک ایستایی میان صندوق و کف μ_s است. زاویه‌ی θ در آغاز صفر است، اما به تدریج افزایش می‌یابد، به گونه‌ای که بردار نیرو در شکل

$85/0 \text{ kg}$ است. مطلوب است محاسبه‌ی بزرگی، (الف) نیروی اصطکاک وارد به دوچرخه از سوی جاده، و (ب) نیروی برآیند وارد به دوچرخه از سوی جاده.

حل: بزرگی شتاب دوچرخه‌سوار در راستای مسیر دایره‌ای افقی، v^2/R است که در آن v تندی دوچرخه‌سوار و R شعاع مسیر دایره‌ای است.



مؤلفه‌ی افقی قانون دوم نیوتون به صورت $f_s = mv^2/R$ است که در آن f_s نیروی اصطکاک ایستایی است که زمین به طور افقی به لاستیک‌های دوچرخه وارد می‌کند. به طور مشابه، اگر F_N نیروی قائمی باشد که زمین به دوچرخه وارد می‌کند، و m جرم دوچرخه و دوچرخه‌سوار باشد، از مؤلفه‌ی قائم قانون دوم نیوتون، $F_N = mg = 833 \text{ N}$ به دست می‌آید.

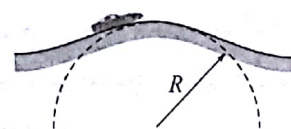
(الف) نیروی اصطکاک برابر است با

$$f_s = \frac{mv^2}{R} = \frac{(85/0 \text{ kg})(9/0 \text{ m/s})^2}{250 \text{ m}} = 275 \text{ N}$$

(ب) چون نیروی اصطکاک f_s و نیروی عمودی F_N که توسط جاده اعمال می‌شود، بر یکدیگر عمودند، در نتیجه بزرگی نیرویی که زمین به دوچرخه سوار وارد می‌کند برابر است با

$$F = \sqrt{f_s^2 + F_N^2} = \sqrt{(275 \text{ N})^2 + (833 \text{ N})^2} = 877 \text{ N}$$

۸۵ در شکل ۶-۵۷، راننده‌ای شیرین کار یک خودرو (بدون نیروی برآر منفی) را در بالای تپه‌ای می‌راند که مقطع آن را می‌توان به تقریب دایره‌ای به شعاع $R = 250 \text{ m}$ در نظر گرفت. بیشترین تندی خودرو در بالای تپه چقدر می‌تواند باشد تا خودرو از سطح جاده بلند نشود؟



شکل ۶-۵۷ مسئله‌ی ۸۵

حل: در بالای تپه، نیروهای قائمی که به خودرو وارد می‌شوند

به ازای $\mu_s = 0.70$ داریم

$$\theta_{inf} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\mu_s}\right) = 55^\circ$$

(پ) کاهش ضریب اصطکاک به معنی افزایش زاویه در شرط قسمت (ب) است.

(ت) به ازای $\mu_s = 0.60$ داریم

$$\theta_{inf} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\mu_s}\right) = 59^\circ$$

۸۵ در یک بعدازظهر، خودرویی در خیابانی متوقف شده است که روی تپه‌ای با زاویه‌ی شیب 35° درجه نسبت به افق قرار دارد. ضریب اصطکاک ایستایی میان لاستیک‌ها و سطح خیابان 0.725 است. شب هنگام بر اثر بارش برف و باران در منطقه، به خاطر یخ زدگی و تغییرات شیمیایی در سطح جاده در اثر کاهش دما، ضریب اصطکاک کاهش می‌یابد. ضریب اصطکاک چند درصد باید کاهش پیدا کند تا خودرو با خطر پایین لغزیدن از خیابان مواجه شود؟

حل: خودرو موقعی با خطر پایین لغزیدن مواجه می‌شود که

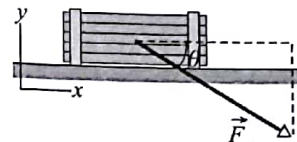
$$\mu_s = \tan \theta = \tan 35^\circ = 0.700$$

باشد. این مقدار 9.7% کاهش در ضریب اصطکاک داده شده‌ی 0.725 را نشان می‌دهد.

۸۶ شخصی یک قلوه سنگ به جرم 0.250 kg را در کیهی کوچک (به جرم 0.10 kg) یک قلاب سنگ قرار می‌دهد و آن را در یک دایره‌ی قائم به شعاع 0.650 m می‌چرخاند. جرم ریسمان میان کیسه و دست شخص ناچیز است و اگر ریسمان تحت نیروی کشش 23.0 N ، یا بیشتر، قرار گیرد پاره می‌شود. فرض کنید شخص سنگ‌انداز می‌تواند تندی سنگ را به تدریج افزایش دهد. (الف) آیا ریسمان در پایین‌ترین نقطه‌ی دایره‌ی مسیر پاره می‌شود یا در بالاترین نقطه؟ (ب) پاره شدن ریسمان به‌ازای چه تندی‌ای از سنگ صورت می‌گیرد؟

حل: (الف) در پایین‌ترین نقطه‌ی مسیر دایره‌ای، نیروی کشش ریسمان بیشترین مقدار را دارد. توجه کنید که در این جا تفاوت اساسی بین نیروی کشش T در این مسئله و نیروی عمودی F_N در مسئله‌ی نمونه تحت عنوان «حلقه‌ی دایره‌ای قائم، دیاوولو» وجود

به‌صورت ساعت‌گرد می‌چرخد. در حین چرخیدن نیرو، بزرگی F به طور پیوسته به گونه‌ای تنظیم می‌شود، که صندوق همیشه در آستانه‌ی لغزیدن قرار گیرد. به ازای $\mu_s = 0.70$ ، (الف) نمودار تغییرات نسبت $\frac{F}{mg}$ را برحسب θ رسم کنید، و (ب) زاویه‌ی θ_{inf} را، که به ازای آن این نسبت به یک مقدار بی‌نهایت میل می‌کند، معین کنید. (پ) آیا روغن‌کاری کف اتاق مقدار θ_{inf} را افزایش می‌دهد، کاهش می‌دهد، یا تغییر نمی‌دهد؟ (ت) به ازای $\mu_s = 0.60$ مقدار θ_{inf} چقدر است؟



شکل ۵۸-۶ مسئله‌ی ۸۴

حل: (الف) مؤلفه‌ی x نیروی $\vec{F}$ تلاش می‌کند صندوق را حرکت دهد در حالی که مؤلفه‌ی y آن به طور غیرمستقیم مانع تأثیر اصطکاک (با زیاد کردن نیروی عمودی) می‌شود. برطبق قانون دوم نیوتون داریم

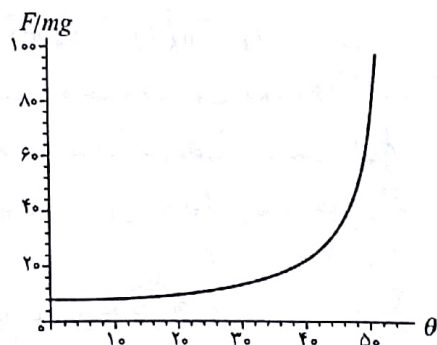
$$x : F \cos \theta - f_s = 0$$

$$y : F_N - F \sin \theta - mg = 0$$

«در آستانه‌ی لغزش بودن» به این معنی است که $f_s = f_{s, \max} = \mu_s F_N$ (در واقع نسبت F به mg) را به دست می‌آوریم:

$$\frac{F}{mg} = \frac{\mu_s}{\cos \theta - \mu_s \sin \theta}$$

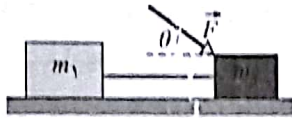
این تابع را در شکل زیر (θ برحسب درجه) رسم کرده‌ایم.



(ب) مخرج رابطه‌ی F/mg با شرط زیر حذف می‌شود

$$\cos \theta - \mu_s \sin \theta = 0 \Rightarrow \theta_{inf} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\mu_s}\right)$$

۸۸ در شکل ۵۹-۶، جسم ۱ به جرم $m_1 = 2.0 \text{ kg}$ و جسم ۲ به جرم $m_2 = 1.0 \text{ kg}$ با ریسمانی به جرم ناچیز به هم وصل شده‌اند. جسم ۲ را با نیروی F به بزرگی 20 N و تحت زاویه‌ی $\theta = 35^\circ$ هل می‌دهیم. ضریب اصطکاک جنبشی میان هر جسم و سطح افقی 0.20 است. نیروی کشش ریمان چقدر است؟



شکل ۵۹-۶ مسئله ۸۸

حل: از به کار بردن قانون دوم نیوتون برای جسم $m_2 = 1.0 \text{ kg}$ داریم

$$x: F \cos \theta - T - f_k = m_2 a$$

$$y: F_N - F \sin \theta - m_2 g = 0$$

چون $f_k = \mu_k F_N$ ، این معادله‌ها را می‌توان با هم ترکیب کرد و یک معادله برای a به دست آورد

$$F(\cos \theta - \mu_k \sin \theta) - T - \mu_k m_2 g = m_2 a$$

به طور مشابه (اما بدون هل دادن)، جسم $m_1 = 2.0 \text{ kg}$ را بررسی می‌کنیم:

$$x: T - f_k' = m_1 a$$

$$y: F_N' - m_1 g = 0$$

با استفاده از $f_k = \mu_k F_N'$ ، معادله‌های بالا را به صورت زیر با هم ترکیب می‌کنیم

$$T - \mu_k m_1 g = m_1 a$$

دو معادله‌ی مربوط به a را از هم کم می‌کنیم تا نیروی کشش به دست آید

$$T = \frac{m_1 (\cos \theta - \mu_k \sin \theta)}{m_1 + m_2} F = \frac{(2.0 \text{ kg}) [\cos 35^\circ - (0.20) \sin 35^\circ]}{2.0 \text{ kg} + 1.0 \text{ kg}} (20 \text{ N}) = 9.4 \text{ N}$$

۸۹ یک قفسه‌ی پرونده به وزن 556 N روی کف اتاق قرار دارد. ضریب اصطکاک ایستایی میان قفسه و کف 0.68 و ضریب اصطکاک جنبشی 0.56 است. برای حرکت دادن این قفسه در چهار بار مختلف آن را با نیروهای افقی (الف) 222 N ، (ب) 334 N ، (پ) 445 N و (ت) 556 N هل می‌دهیم. بزرگی نیروی اصطکاک وارد به قفسه از سوی کف اتاق را برای هر بار

ندارد. معادله‌ی ۱۹-۶ در آن مسئله‌ی نمونه، برای بالاترین نقطه‌ی مسیر دایره‌ای (که در آن جا F_N کمترین است) به کار رفت و اگر آن را برای پایین‌ترین نقطه‌ی مسیر دایره‌ای بنویسیم، خواهیم داشت

$$T = mg + mv^2/r$$

که در آن F_N بیشترین مقدار خود را دارد.

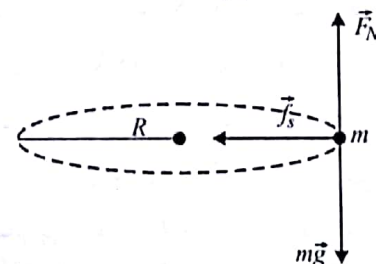
(ب) در نقطه‌ی قطع شدن ریمان، داریم

$$T = 33 \text{ N} = m(g + v^2/r)$$

که در آن $m = 0.26 \text{ kg}$ و $r = 0.65 \text{ m}$ است. از این رابطه تندی مربوط به پاره شدن ریمان (در پایین‌ترین نقطه‌ی مسیر) مساوی با 8.7 m/s به دست می‌آید.

۸۷ خودرویی به وزن 10.7 kN در حال حرکت با تندی 14.7 m/s و بدون نیروی برآر منفی، تلاش می‌کند در یک مسیر خمیده‌ی به شعاع 61.0 m و بی‌شیب عرضی دور بزند. (الف) بزرگی نیروی اصطکاک لاستیک‌ها چقدر باید باشد تا خودرو در روی مسیر دایره‌ای خود بماند؟ (ب) اگر ضریب اصطکاک ایستایی میان لاستیک‌ها و جاده 0.35 باشد آیا تلاش خودرو برای دور زدن روی جاده موفقیت‌آمیز است؟

حل: نمودار جسم - آزاد در زیر (بدون مقیاس) نشان داده شده است. جرم خودرو $m = (10700/9.80) \text{ kg} = 1.09 \times 10^3 \text{ kg}$ است. جهت افقی به طرف داخل مسیر دایره‌ای را مثبت در نظر می‌گیریم. نیروی عمودی در این حالت $F_N = mg$ ، و نیروی اصطکاک لازم $f_s = mv^2/R$ است.



(الف) نیروی اصطکاک ایستایی ممکن بیشینه از معادله‌ی ۱-۶ به دست می‌آید:

$$f_s = \frac{mv^2}{R} = 3.86 \times 10^3 \text{ N}$$

(ب) ضریب اصطکاک ایستایی بیشینه برابر است با:

$$f_{s, \max} = \mu_s mg = (0.35)(10700 \text{ N}) = 3.75 \times 10^3 \text{ N}$$

می‌بینیم که نیروی اصطکاک ایستایی به دست آمده در قسمت (الف)، از این مقدار بیشتر است در نتیجه تلاش خودرو برای دور زدن روی جاده موفقیت‌آمیز نیست.

حل: از تجزیه‌ی نیروها در راستای افقی (که شتاب نمی‌تواند وجود داشته باشد) نتیجه می‌گیریم که $F = F_N$ ؛ بزرگی نیروی عمودی 60 N است. بنابراین، نیروی اصطکاک ایستایی ممکن بیشینه $\mu_s F_N = 33\text{ N}$ و نیروی اصطکاک جنبشی $\mu_k F_N = 23\text{ N}$ است. (الف) در این حالت، $\vec{P} = 34\text{ N}$ به طرف بالا است. با این فرض که جهت $\vec{f}$ به طرف پایین است، از قانون دوم نیوتون برای محور y داریم

$$P - mg - f = ma$$

اگر $f = f_s$ و $a = 0$ باشد، داریم $f = (34 - 22)\text{ N} = 12\text{ N}$. این مقدار از $f_{s, \max}$ کوچک‌تر است و نشان می‌دهد که فرض ما در مورد جهت $\vec{f}$ درست است. در نتیجه پاسخ $f_s = 12\text{ N}$ به طرف پایین است.

(ب) در این حالت، $\vec{P} = 12\text{ N}$ به طرف بالا است. با همان فرض قسمت (الف)، از همان معادله داریم $f = (12 - 22)\text{ N} = -10\text{ N}$. بنابراین، $|f_s| < f_{s, \max}$ ، که باز هم فرض ما را تأیید می‌کند. یعنی جسم ساکن است اما مقدار منفی نیروی اصطکاک نشان می‌دهد که فرض اولیه‌ی ما درباره‌ی جهت نیروی $\vec{f}$ در این حالت درست نیست. بنابراین، پاسخ $f_s = 10\text{ N}$ به طرف بالا است.

(پ) در این حالت، $\vec{P} = 48\text{ N}$ به طرف بالا است. با همان فرض‌های قسمت (الف)، از معادله‌ی بالا مقدار $f = (48 - 22)\text{ N} = 26\text{ N}$ به دست می‌آید. بنابراین، باز هم $f_s < f_{s, \max}$ است و پاسخ $f_s = 26\text{ N}$ به طرف پایین است.

(ت) در این حالت، $\vec{P} = 62\text{ N}$ به طرف بالا است. با همان فرض‌های قسمت (الف)، از همان معادله $f = (62 - 22)\text{ N} = 40\text{ N}$ به دست می‌آید که از $f_{s, \max}$ بزرگ‌تر است، یعنی فرض‌های ما درست‌اند. بنابراین، $f = f_k$ و $a \neq 0$ را در معادله‌ی بالا قرار می‌دهیم؛ اگر بخواهیم مقدار a را پیدا کنیم، مثبت خواهد بود، که ما نیز چنین انتظاری را داریم. پاسخ $f_k = 23\text{ N}$ به طرف پایین است.

(ث) در این حالت $\vec{P} = 10\text{ N}$ به طرف پایین است. با همان فرض‌های قسمت (الف) و از همان معادله (اما به جای P مقدار $-\vec{P}$ را قرار می‌دهیم) مقدار $f = (-10 - 22)\text{ N} = -32\text{ N}$ به دست می‌آید. بنابراین، داریم $|f_s| < f_{s, \max}$ که فرض ما در مورد ساکن بودن جسم را تأیید می‌کند، اما مقدار منفی آن نشان می‌دهد که

هل دادن حساب کنید. (قفسه در آغاز ساکن است). (ث) در کدام یک از این چهار بار قفسه حرکت می‌کند؟
حل: از قانون دوم نیوتون (به صورت $ma = f - F_{\text{هل}}$) استفاده می‌کنیم. اگر $f < f_{\max}$ باشد، نتیجه می‌گیریم که قفسه حرکت نمی‌کند (یعنی شتاب a مساوی با صفر و $f = f_s$)، و اگر $a > 0$ به دست آید، قفسه حرکت می‌کند (در نتیجه $f = f_k$). برای $f_{\max}$ و f_k به ترتیب از معادلات ۶-۱ و ۶-۲ استفاده می‌کنیم، و در فرمول‌های آن‌ها بزرگی نیروی عمودی را 556 N قرار می‌دهیم. در نتیجه $f_{\max} = 378\text{ N}$ و $f_k = 311\text{ N}$ به دست می‌آید.

(الف) در این حالت $f_{\max} < F_{\text{هل}}$ که در نتیجه داریم

$$f = F_{\text{هل}} = 222\text{ N}$$

(ب) باز هم $f_{\max} < F_{\text{هل}}$ است که در نتیجه داریم

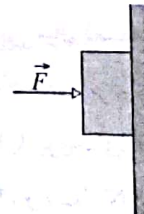
$$f = F_{\text{هل}} = 334\text{ N}$$

(پ) در این حالت $f_{\max} > F_{\text{هل}}$ ، یعنی قفسه حرکت می‌کند و $f = f_k = 311\text{ N}$

(ت) باز هم $f_{\max} > F_{\text{هل}}$ ، یعنی قفسه حرکت می‌کند و $f = f_k = 311\text{ N}$

(ث) در قسمت (پ) و در قسمت (ت) قفسه حرکت می‌کند.

۹۰ در شکل ۶-۶، جسمی به وزن 22 N با نیروی افقی $\vec{F}$ به بزرگی 60 N بر روی یک دیوار قائم نگه داشته می‌شود. ضریب اصطکاک ایستایی میان دیوار و جسم 0.55 و ضریب اصطکاک جنبشی میان آن‌ها 0.38 است. در شش بار آزمایش، نیروی دیگر $\vec{P}$ را به موازات دیوار با بزرگی‌ها و جهت‌های زیر به جسم وارد می‌کنیم: (الف) 34 N ، بالا، (ب) 12 N ، بالا، (پ) 48 N ، بالا، (ت) 62 N ، بالا، (ث) 10 N ، پایین، و (ج) 18 N ، پایین. در هر آزمایش بزرگی نیروی اصطکاک وارد به جسم چقدر است؟ در کدام آزمایش، جسم (ج) به سمت بالای دیوار و (ح) به سمت پایین دیوار، حرکت می‌کند؟ (خ) در کدام آزمایش جهت نیروی اصطکاک به سمت پایین دیوار است؟



شکل ۶-۶ مسئله ۹۰.

این دو معادله را ترکیب می‌کنیم تا $\mu_k = \tan \theta$ به دست آید. اکنون (برای قسمت دوم مسئله، که جسم به طرف بالای سطح شیب‌دار پرتاب می‌شود) جهت نیروی اصطکاک معکوس شده است (به شکل طرف راست نگاه کنید). از قانون دوم نیوتون برای حرکت به طرف بالای سطح شیب‌دار (و معادله‌ی ۶-۱۲) داریم

$$mg \sin \theta + f_k = mg \sin \theta + \mu_k F_N = ma_x$$

$$mg \cos \theta - F_N = ma_y = 0$$

توجه کنید که بر طبق قرارداد، $a_x > 0$ به این معنی است که جهت شتاب به طرف پایین سطح شیب‌دار است، در نتیجه وقتی جسم به طرف بالای سطح شیب‌دار حرکت می‌کند، تندی‌اش کم می‌شود:

(الف) با استفاده از روابط $\mu_k = \tan \theta$ و $F_N = mg \cos \theta$

مؤلفه‌ی x شتاب به دست می‌آید

$$a_x = g \sin \theta + \frac{\mu_k F_N}{m} = g \sin \theta + \frac{(\tan \theta)(mg \cos \theta)}{m} = 2g \sin \theta$$

مسافتی را که جسم پیش از متوقف شدن می‌پیماید می‌توان از معادله‌ی ۲-۱۶ یعنی $v_f^2 = v_0^2 - 2a_x \Delta x$ به دست آورد:

$$\Delta x = \frac{v_f^2}{2a_x} = \frac{v_0^2}{2(2g \sin \theta)} = \frac{v_0^2}{4g \sin \theta}$$

(ب) ما معمولاً انتظار داریم $\mu_s > \mu_k$ باشد (به بحث ارائه شده در بخش ۶-۱ رجوع کنید). «زاویه پاسخ» (زاویه‌ی کمینه‌ی لازم برای آن که یک جسم ساکن به طرف پایین سطح شیب‌دار بلغزد، (پاسخ) $\mu_s = \tan(\theta)$ است. بنابراین، انتظار داریم که در قسمت (الف) $\theta > \theta_{\text{پاسخ}}$ به دست آید. در نتیجه، وقتی جسم متوقف می‌شود، شیب سطح آن قدر زیاد نیست که باعث شود جسم بار دیگر به پایین سطح بلغزد.

۹۲ پیچ دایره‌ای یک بزرگراه برای حرکت وسایل نقلیه‌ی با تندی 60 km/h طراحی شده است. فرض کنید این وسایل نقلیه خودروهایی بدون نیروی برآر منفی هستند. (الف) اگر شعاع پیچ 150 m باشد زاویه‌ی صحیح شیب عرضی جاده چقدر است؟ (ب) اگر این پیچ شیب عرضی نداشته باشد، ضریب اصطکاک کمینه‌ی میان لاستیک‌ها و جاده چقدر باید باشد تا وسایل نقلیه در هنگام حرکت کردن با تندی 60 km/h به طرف بیرون پیچ نلغزند؟

فرض ما در مورد جهت $\vec{f}_s$ در این حالت درست نیست. در نتیجه پاسخ $\vec{f}_s = 32 \text{ N}$ به طرف بالا، است.

(ج) در این حالت $\vec{P} = 18 \text{ N}$ به طرف پایین است. با همان فرض‌های قسمت (الف) و از همان معادله، $f = (-18 - 22) = -40 \text{ N}$ به دست می‌آید که از $f_{s, \max}$ بزرگتر (مقدار مطلق آن) است و فرض‌های ما را نقض می‌کند. بنابراین، $f = f_k$ و $a \neq 0$ را در معادله‌ی بالا قرار می‌دهیم؛ اگر بخواهیم مقدار a را پیدا کنیم منفی به دست می‌آید که چنین انتظاری را داریم. پاسخ $\vec{f}_k = 23 \text{ N}$ به طرف بالا، است.

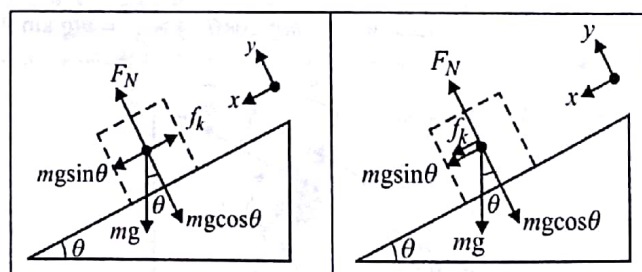
(چ) در حالت (ت) که $a > 0$ است، جسم به طرف بالای دیوار حرکت می‌کند.

(ح) در حالت (ج) که $a < 0$ است، جسم به طرف پایین دیوار حرکت می‌کند.

(خ) در حالت‌های (الف)، (پ) و (ت) جهت نیروی اصطکاک f_s' به طرف پایین است.

۹۱ جسمی با سرعت ثابت بر روی یک سطح شیب‌دار با زاویه‌ی شیب θ به پایین می‌لغزد. سپس این جسم با تندی آغازی v_0 به طرف بالای همان سطح شیب‌دار پرتاب می‌شود. (الف) این جسم پیش از متوقف شدن تا چه فاصله‌ای از سطح شیب‌دار بالا می‌رود؟ (ب) پس از متوقف شدن، آیا جسم دوباره به پایین می‌لغزد؟ برای توجیه پاسخ خود دلیل بیاورید.

حل: نمودار جسم - آزاد برای قسمت اول این مسئله (وقتی جسم با شتاب صفر از سطح شیب‌دار به پایین می‌لغزد)، در زیر (طرف چپ) نشان داده شده است.



از قانون دوم نیوتون داریم

$$mg \sin \theta - f_k = mg \sin \theta - \mu_k F_N = ma_x = 0$$

$$mg \cos \theta - F_N = ma_y = 0$$

حل: فرض کنید خودرو در آستانه‌ی لغزیدن قرار دارد، یعنی جهت نیروی اصطکاک ایستایی «به طرف پایین شیب عرضی» (یا «از نقطه‌ی نظر مورچه‌ای که روی سطح شیب عرضی نشسته است» به طرف پایین سطح شیب‌دار) و دارای بزرگی ممکن بیشینه است. ابتدا مجموع برداری $\vec{F}$ نیروی اصطکاک ایستایی (بیشینه) و نیروی عمود را در نظر می‌گیریم. چون این نیروها بر یکدیگر عمودند و بزرگی‌های آن‌ها با یکدیگر متناسب‌اند (معادله‌ی ۱-۶)، $\vec{F}$ را تحت زاویه $\phi = \theta + \theta_s$ (نسبت به محور قائم) به دست می‌آوریم که در آن $\tan \theta_s = \mu_s$ است (با معادله‌ی ۱۳-۶ مقایسه کنید) و θ زاویه‌ی شیب عرضی است. اکنون، مجموع برداری $\vec{F}$ و جاذبه‌ی گرانشی رو به پایین قائم (mg) باید با نیروی مرکزگرای افقی mv^2/R مساوی باشد، که در نتیجه رابطه‌ی شگفت‌انگیز زیر به دست می‌آید

$$\tan \phi = \frac{mv^2/R}{mg} = \frac{v^2}{Rg}$$

ما این رابطه را به عنوان رابطه‌ی تندی بیشینه نوشتیم و داریم

$$v_{\max} = \sqrt{Rg \tan(\theta + \tan^{-1} \mu_s)} = \sqrt{\frac{Rg(\tan \theta + \mu_s)}{1 - \mu_s \tan \theta}}$$

(الف) می‌دانیم که تندی داده شده تقریباً 16.7 m/s است. اگر بخواهیم نیروی اصطکاک ایستایی مانع لغزش بشود (یعنی اگر بخواهیم مؤلفه‌ی «به طرف پایین و عقب» گرانش کافی باشد)، در آن صورت می‌توانیم $\mu_s = 0$ را در رابطه‌ی بالا قرار دهیم و $v = \sqrt{Rg \tan \theta}$ را به دست آوریم. به ازای $R = 150 \text{ m}$ ، $\theta = 10.7^\circ$ به دست می‌آید.

(ب) اما اگر مسیر خمیده شیب عرضی نداشته باشد ($\theta = 0$ باشد) در آن صورت رابطه‌ی بالا به صورت زیر در می‌آید

$$v = \sqrt{Rg \tan(\tan^{-1} \mu_s)} = \sqrt{Rg \mu_s}$$

از حل کردن این رابطه ضریب اصطکاک ایستایی $\mu_s = 0.18$ به دست می‌آید.

۹۳ یک جعبه به جرم 1.5 kg در آغاز روی یک سطح افقی قرار دارد و در زمان $t = 0$ یک نیروی افقی $\vec{F} = (1/8t) \hat{i} \text{ N}$ (که t بر حسب ثانیه است) به این جعبه وارد می‌شود. شتاب جعبه بر حسب t ، در زمان‌های $0 \leq t \leq 2/8 \text{ s}$ به صورت $\vec{a} = 0$ و زمان‌های $t > 2/8 \text{ s}$ به صورت $\vec{a} = (1/2t - 2/4) \hat{i} \text{ m/s}^2$ است.

(الف) ضریب اصطکاک ایستایی میان جعبه و سطح چقدر است؟
(ب) ضریب اصطکاک جنبشی میان جعبه و سطح چقدر است؟
حل: تا لحظه‌ی $t = 2/8 \text{ s}$ جعبه حرکت نمی‌کند، در این لحظه نیروی اعمال شده‌ی $\vec{F}$ به مقدار $F = (1/8)(2/8) = 5/0 \text{ N}$ می‌رسد و نشان می‌دهد که $f_{s, \max} = 5/0 \text{ N}$ است. تجزیه‌ی نیروهای قائم وارد شده به جعبه نشان می‌دهد که بزرگی نیروی عمودی با وزن $F_N = mg = 15 \text{ N}$ برابر است. بنابراین، $\mu_s = f_{s, \max} / F_N = 0.34$

(ب) قانون دوم نیوتون را برای محور x افقی (جهت مثبت در جهت حرکت است) می‌نویسیم:

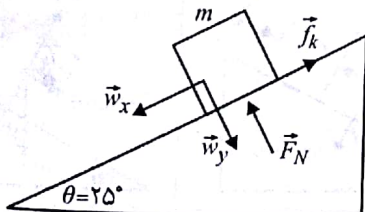
$$F - f_k = ma \Rightarrow 1/8t - f_k = (1/5)(1/2t - 2/4)$$

در نتیجه $f_k = 3/6 \text{ N}$ به دست می‌آید. بنابراین، داریم

$$\mu_k = f_k / F_N = 0.24$$

۹۴ کودکی به وزن 140 N در بالای سُرّره‌ای که با افق زاویه‌ی 25° درجه می‌سازد، ساکن است. این کودک برای جلوگیری از سُر خوردن کناره‌های دو طرف سُرّره را با دست‌های خود گرفته است. کودک پس از رها کردن کناره‌ها با شتاب ثابت 0.86 m/s^2 (البته به سمت پایین سُرّره) به حرکت در می‌آید. (الف) ضریب اصطکاک جنبشی میان کودک و سُرّره چقدر است؟ (ب) مقادیر داده شده در این مسئله با چه مقادیر بیشینه کمینه‌ی ضریب اصطکاک ایستایی میان کودک و سُرّره سازگار است؟

حل: در شکل زیر، $m = 140/9.8 = 14.3 \text{ kg}$ جرم کودک است. ما $\vec{w}_x$ و $\vec{w}_y$ را به عنوان مؤلفه‌های جاذبه‌ی گرانشی زمین بر روی کودک در نظر می‌گیریم؛ بزرگی این مؤلفه‌ها $w_x = mg \sin \theta$ و $w_y = mg \cos \theta$ است.



(الف) اگر جهت محور x به طرف بالای سطح شیب‌دار باشد (در نتیجه $a = -0.86 \text{ m/s}^2$)، از قانون دوم نیوتون داریم $f_k - 140 \sin 25^\circ = m(-0.86)$

حل: (الف) مؤلفه ی x نیروی $\vec{F}$ زمین شور را به حرکت درمی آورد در حالی که مؤلفه ی y آن به طور غیرمستقیم از تأثیر اصطکاک (با افزایش نیروی عمودی) جلوگیری می کند. در راستای y ، داریم $F \sin \theta - f_k = 0$ و در راستای x داریم $F_N - F \cos \theta - mg = 0$ (زیرا بر طبق صورت مسئله، زمین شور شتاب ندارد). هم چنین، از معادله ی ۲-۶ مقدار $f_k = \mu_k F_N$ به دست می آید. از این معادله ها F را به دست می آوریم

$$F = \frac{\mu_k mg}{\sin \theta - \mu_k \cos \theta}$$

(ب) وقتی $\theta = \theta_c = \tan^{-1} \mu_s$ ، نیروی F می تواند کله ی زمین شور را حرکت دهد.

۹۶ بچه ای سبد پیک نیک خود را روی کناره ی بیرونی یک چرخ و فلک افقی گذاشته است. چرخ و فلک دارای شعاع $4/6 \text{ m}$ است و در هر 30 ثانیه یک دور می زند. (الف) تندی یک نقطه از کناره ی چرخ و فلک چقدر است؟ (ب) کمترین مقدار ضریب اصطکاک ایستایی میان سبد پیک نیک و چرخ و فلک چقدر باید باشد تا سبد بر روی کناره باقی بماند؟

حل: (الف) مسافت پیموده شده در یک دور، $2\pi R = 2\pi(4/6 \text{ m}) = 29 \text{ m}$ است با $v = (29 \text{ m}) / (30 \text{ s}) = 0/97 \text{ m/s}$

(ب) از قانون دوم نیوتون (با استفاده از معادله ی ۱۷-۶ برای بزرگی شتاب) داریم

$$f_s = m \left(\frac{v^2}{R} \right) = m(0/20)$$

توجه کنید که در این حالت $F_N = mg$ ، و نیروی اصطکاک ایستایی ممکن بیشینه با استفاده از معادله ی ۱-۶، $f_{s, \max} = \mu_s mg$ است. این مقدار را با $f_s = m(0/20)$ مساوی قرار می دهیم و $\mu_s = 0/20 / 9/8 = 0/02$ را به دست می آوریم.

۹۷ یک کارگر انبار نیروی ثابتی به بزرگی 85 N را به یک جعبه ی 40 کیلوگرمی ساکن بر روی سطح افقی انبار وارد می کند. تندی این جعبه پس از پیمودن مسافت $1/4 \text{ m}$ به $1/0 \text{ m/s}$ می رسد. ضریب اصطکاک جنبشی میان جعبه و کف انبار چقدر است؟

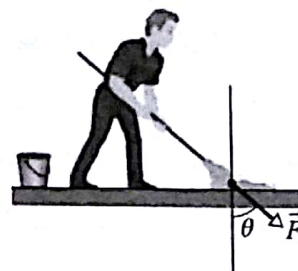
در نتیجه $f_k = 47 \text{ N}$ به دست می آید. قانون دوم نیوتون را برای محور y (عمود بر سطح شیب دار) که مؤلفه ی شتاب در آن جا صفر است، می نویسیم

$$F_N - 140 \cos 25^\circ = 0 \Rightarrow F_N = 127 \text{ N}$$

در نتیجه $\mu_k = f_k / F_N = 0/37$ به دست می آید.

(ب) با توجه به معادله ی اول در قسمت (الف) معلوم می شود که اگر مؤلفه ی نیروی وزن به طرف پایین سطح شیب دار نتواند نیروی اصطکاک را خنثی کند، کودک هرگز به پایین سر نمی خورد. بنابراین، باید $f_{s, \max} = \mu_s F_N > 140 \sin 25^\circ$ باشد که از آن جا $\mu_s > 0/47 = \tan 25^\circ$ به دست می آید. مقدار کمینه ی μ_s با μ_k برابر است. توصیه می شود به بخش ۱-۶ رجوع کنید. اگر μ_k از μ_s بیشتر باشد، وقتی نیروی اصطکاک ایستایی خنثی می شود (وقتی سطح شیب دار بلند می شود) کودک باید حرکت کند - که اگر f_k بزرگ تر از آن باشد که بتواند شتاب کند کننده ایجاد کند، حرکت کودک غیرممکن است. بنابراین گستره ی μ_s به صورت $0/47 > \mu_s > 0/37$ است.

۹۵ در شکل ۶-۶۱، یک کارگر وسواسی دسته ی زمین شو را با نیروی $\vec{F}$ در جهت دسته، به جلو هل می دهد. زاویه ی دسته ی زمین شو نسبت به راستای قائم θ است و μ_s و μ_k به ترتیب، ضریب های اصطکاک ایستایی و جنبشی میان کله ی زمین شو و کف اتاق هستند. جرم دسته را نادیده بگیرید و فرض کنید که کل جرم زمین شو m ، در کله ی آن متمرکز شده است. (الف) اگر کله ی زمین شو با سرعت ثابت در کف اتاق حرکت کند بزرگی F چقدر است؟ (ب) نشان دهید که اگر θ از مقدار معین θ_c کمتر باشد، در آن صورت $\vec{F}$ (که باز هم در جهت دسته است) نمی تواند کله ی زمین شو را حرکت دهد. مقدار θ_c را پیدا کنید.



شکل ۶-۶۱ مسئله ۹۵

حل: نمودار جسم - آزاد در زیر رسم شده است. جهت محور $+x$

را به طرف راست و جهت محور $+y$ را به طرف بالا در نظر می‌گیریم و نیروی افقی ۸۵ N کارگر را F می‌نامیم (و فرض می‌کنیم که جهت آن به طرف راست است). با به کار بردن قانون

دوم نیوتون برای محور x و محور y ، داریم

$$\begin{aligned} F - f_k &= ma_x \\ F_N - mg &= 0 \end{aligned}$$

از طرف دیگر، با استفاده از معادله‌ی ۱۶-۲، $(v^2 = v_0^2 + 2a_x \Delta x)$ ، شتاب را پیدا می‌کنیم:

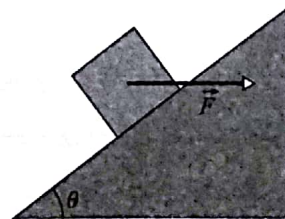
$$a_x = \frac{v^2 - v_0^2}{2\Delta x} = \frac{(1.0\text{ m/s})^2 - 0}{2(1.4\text{ m})} = 0.357\text{ m/s}^2$$

اکنون با استفاده از $f_k = \mu_k F_N$ ، ضریب اصطکاک جنبشی بین جعبه و کف انبار را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \mu_k &= \frac{f_k}{F_N} = \frac{F - ma_x}{mg} \\ &= \frac{85\text{ N} - (40\text{ kg})(0.357\text{ m/s}^2)}{(40\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)} = 0.18 \end{aligned}$$

۹۸ در شکل ۶-۶، یک جسم ۵۰ kg کیلوگرمی با وارد کردن

نیروی افقی $\vec{F}$ به بزرگی ۵۰ N از یک سطح شیب‌دار با زاویه‌ی شیب $\theta = 37^\circ$ به سمت بالا لغزانده می‌شود. ضریب اصطکاک جنبشی میان جسم و سطح 0.30 است. (الف) بزرگی و (ب) جهت شتاب جسم (به سمت بالا یا پایین سطح شیب‌دار) چیست؟ (پ) تندی آغازی جسم 4.0 m/s است. (ت) این جسم تا چه فاصله‌ای از سطح شیب‌دار بالا می‌رود؟ (ث) وقتی جسم به بالاترین نقطه می‌رسد، آیا در آنجا ساکن می‌ماند یا به سمت پایین سطح شیب‌دار می‌لغزد؟



شکل ۶-۶ مسئله ۹۸.

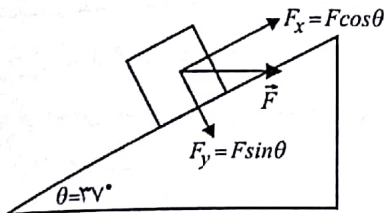
حل: نمودار جسم - آزاد در زیر نشان داده شده است. نیروی افقی را به دو مؤلفه‌ی مناسب تجزیه می‌کنیم. (الف) قانون دوم نیوتون را برای محور x (به طرف بالای سطح شیب‌دار) و برای محور y (عمود بر سطح شیب‌دار) می‌نویسیم

$$\begin{aligned} F \cos \theta - f_k - mg \sin \theta &= ma \\ F_N - F \sin \theta - mg \cos \theta &= 0 \end{aligned}$$

با استفاده از $f_k = \mu_k F_N$ ، از این معادله‌ها شتاب را به دست می‌آوریم

$$a = \frac{F}{m} (\cos \theta - \mu_k \sin \theta) - g (\sin \theta + \mu_k \cos \theta)$$

در نتیجه به ازای $\mu_k = 0.30$ ، $F = 50\text{ N}$ و $m = 5.0\text{ kg}$ ، شتاب $a = -2.1\text{ m/s}^2$ یا $|\vec{a}| = 2.1\text{ m/s}^2$ به دست می‌آید.



(ب) جهت $\vec{a}$ به طرف پایین سطح شیب‌دار است.

(پ) به ازای $v_0 = 4.0\text{ m/s}$ و $v = 0$ ، از معادله‌ی ۱۶-۲ داریم

$$\Delta x = -\frac{(4.0\text{ m/s})^2}{2(-2.1\text{ m/s}^2)} = 3.9\text{ m}$$

(ت) ما انتظار داریم $\mu_s \geq \mu_k$ باشد، به عبارت دیگر، یک جسم به محض شروع حرکت (پیش از پیدا کردن تندی!) تحت تأثیر شتاب کند کننده قرار می‌گیرد. در حالت مورد انتظار، $\mu_s = 0.30$ است، نیروی اصطکاک ایستایی ممکن بیش (ب) طرف پایین سطح شیب‌دار) یا با استفاده از معادله‌ی ۱۶-۲، برابر است با

$$f_{s, \max} = \mu_s F_N = \mu_s (F \sin \theta + mg \cos \theta)$$

که 21 N به دست می‌آید. اما برای آن که جسم در راستای محور x شتاب نداشته باشد، باید مقدار نیروی اصطکاک ایستایی برابر باشد با

$$f_s = F \cos \theta - mg \sin \theta = 10\text{ N}$$

(مثبت بودن این نتیجه نشان می‌دهد که فرض ما برای جهت روبه پایین f_s درست است). چون f_s از $f_{s, \max}$ کوچک‌تر است لذا جسم در آن جا ساکن می‌ماند.