۷ انرژی جنبشی و کار

پودمان ۷-۱ انرژی جنبشی

۱ پروتونی (به‌جرم $m = 1/67\times10^{-27}$ kg) در یک شتاب‌دهنده در طول یک خط راست با شتاب $3/6\times10^{15}\,m/s^2$ حرکت می‌کند. اگر پروتون با تندی آغازی $2/4\times10^{7}\,m/s$ مسافت $3/5\,cm$ را بپیماید، (الف) تندی پایانی آن و (ب) افزایش انرژی جنبشی آن، چقدر است؟

حل: (الف) از جدول ۲-۱ داریم $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$. پس، تندی پایانی پروتون برابر است با

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2a\Delta x}$$
$$= \sqrt{(2/4\times10^{7}\,m/s)^2 + 2(3/6\times10^{15}\,m/s^2)(0/035\,m)}$$
$$= 2/9\times10^{7}\,m/s$$

(ب) انرژی جنبشی آغازی پروتون برابر است با

$$K_i = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(1/67\times10^{-27}\,kg)(2/4\times10^{7}\,m/s)^2$$
$$= 4/8\times10^{-13}\,J$$

و انرژی جنبشی پایانی پروتون برابر است با

$$K_f = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(1/67\times10^{-27}\,kg)(2/9\times10^{7}\,m/s)^2$$
$$= 6/9\times10^{-13}\,J$$

در نتیجه تغییر انرژی جنبشی پروتون به صورت زیر است

$$\Delta K = 6/9\times10^{-13}\,J - 4/8\times10^{-13}\,J = 2/1\times10^{-13}\,J$$

۲ اگر جرم ترکیب موشک ساتورن ۵ و فضاپیمای آپولو متصل به آن $2/9\times10^{5}$ kg باشد و تندی‌اش به $11/2\,km/s$ برسد، انرژی جنبشی آن چقدر خواهد شد؟

حل: برای تندی $v = 11200\,m/s$ داریم

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(2/9\times10^{5}\,kg)(11200\,m/s)^2 = 1/8\times10^{13}\,J$$

۳ در ۱۰ اوت سال ۱۹۷۲ (۱۹ مرداد سال ۱۳۵۱) شهاب سنگ بزرگی از جوّ بالای باختر ایالات متحد آمریکا و کانادا، درست مانند سنگی که در سطح آب سُر بخورد، عبور کرد. سنگ مانند یک گوی آتشین چنان فروزان بود که در روز هم در آسمان دیده می‌شد و از دنباله‌ی شهاب سنگ معمولی روشن‌تر بود. شهاب سنگ در حدود 4×10^{6} kg جرم داشت و تندی آن در حدود $15\,km/s$ بود. اگر سنگ در راستای قائم به جوّ زمین وارد می‌شد، تقریباً با همان تندی به سطح زمین برخورد می‌کرد. (الف) مقدار تلف شدن انرژی جنبشی شهاب سنگ (برحسب ژول) را در صورتی که به طور قائم به زمین برخورد می‌کرد حساب کنید. (ب) این انرژی را به صورت مضربی از انرژی انفجار یک مگا تن TNT، که برابر با $4/2\times10^{15}\,J$ است، بیان کنید. (پ) انرژی حاصل از انفجار بمب اتمی در روی شهر هیروشیما (ژاپن)، هم‌ارز با ۱۳ کیلو تن TNT بود. انرژی برخورد شهاب‌سنگ به زمین هم‌ارز با چند بمب هیروشیما است؟

حل: (الف) تغییر انرژی جنبشی برای شهاب سنگ برابر است با

$$\Delta K = K_f - K_i = -K_i = -\frac{1}{2}m_i v_i^2$$
$$= -\frac{1}{2}(4\times10^{6}\,kg)(15\times10^{3}\,m/s)^2 = -5\times10^{14}\,J$$

یا $|\Delta K| = 5\times10^{14}\,J$. علامت منفی نشان می‌دهد که انرژی جنبشی تلف شده است.

(ب) انرژی تلف شده برحسب مگاتن TNT برابر است با

$$-\Delta K = (5\times10^{14}\,J)\left(\frac{1\,\text{TNT مگاتن}}{4/2\times10^{15}\,J}\right) = 0/1\,\text{TNT مگاتن}$$

(پ) تعداد بمب‌های N که با انرژی برخورد شهاب سنگ به زمین هم‌ارز است، از رابطه‌ی کیلوتن ۱۰۰۰ = مگاتن و محاسبه‌ی نسبت زیر تعیین می‌شود

$$N = \frac{0/1\times1000\,\text{TNT کیلوتن}}{13\,\text{TNT کیلوتن}} = 8$$

۴ * هر انفجاری در سطح زمین صورت گیرد، دهانه‌ای با قطری متناسب با انرژی انفجار به توان $\frac{1}{3}$ به جا می‌گذارد؛ قطر دهانه‌ی حاصل از انفجار یک مگاتن TNT برابر با $1\,km$ است. به‌نظر می‌رسد در فرودست دریاچه‌ی هیورن در میشیگان قطر دهانه‌ی انفجار یک برخورد قدیمی $50\,km$ باشد. انرژی جنبشی مربوط به این برخورد، برحسب (الف) مگاتن TNT (انرژی حاصل از یک مگاتن TNT، $4.2\times10^{15}\,J$ است) و (ب) بمب هیروشیما (معادل ۱۳ کیلوتن TNT)، چقدر است؟ (برخورد شهاب‌سنگ‌ها و دنباله‌دارها ممکن است آب و هوای کره‌ی زمین را به مقدار قابل توجهی تغییر داده و به انقراض نسل دایناسورها و شکل‌های دیگر حیات منجر شده باشد).

حل: (الف) نسبت زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{50\,km}{1\,km}=\left(\frac{E}{\text{یک مگاتن}}\right)^{1/3}$$

و $E=(50)^3\approx 1\times10^5$ مگاتن TNT را به دست می‌آوریم.

(ب) می‌دانیم که ۱۵ کیلوتن معادل ۰٫۰۱۵ مگاتن است. از تقسیم کردن نتیجه‌ی قسمت (الف) به ۰٫۰۱۳، پاسخ تقریبی ده میلیون بمب به دست می‌آید.

۵ ** انرژی جنبشی پدر دونده‌ای نصف انرژی جنبشی پسرش با جرمی برابر با نصف جرم پدر است. پدر تندی‌اش را به اندازه‌ی $1.0\,m/s$ افزایش می‌دهد و در نتیجه انرژی جنبشی او با انرژی جنبشی پسرش برابر می‌شود. تندی‌های آغازی (الف) پدر و (ب) پسر، چقدر است؟

حل: جرم پدر را با m و تندی آغازی او را با v_i نشان می‌دهیم. انرژی جنبشی آغازی پدر برابر است با

$$K_i=\frac{1}{2}K_{\text{پسر}}$$

و انرژی جنبشی پایانی او (هنگامی که تندی‌اش $v_f=v_i+1.0\,m/s$ است)، $K_f=K_{\text{پسر}}$ است. برای حل مسئله از این رابطه‌ها همراه با معادله‌ی ۷-۱ استفاده می‌کنیم.

(الف) رابطه‌ی بالا نشان می‌دهد که $K_i=\frac{1}{2}K_f$، در نتیجه داریم

$$\frac{1}{2}mv_i^2=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}m(v_i+1.0\,m/s)^2\right]$$

جرم حذف می‌شود و یک معادله‌ی درجه دوم برای v_i به‌دست می‌آید:

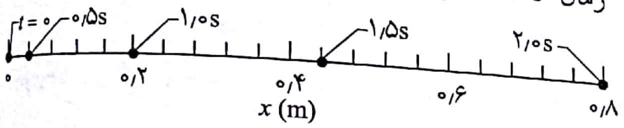
ریشه‌ی مثبت این معادله $v_i=2.4\,m/s$ است.

(ب) از رابطه‌ی اول بالا ($K_i=\frac{1}{2}K_{\text{پسر}}$) داریم

$$\frac{1}{2}mv_i^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(m/2)v_{\text{پسر}}^2\right)$$

بعد از حذف کردن m و ضریب $\frac{1}{2}$، مقدار $v_{\text{پسر}}=2v_i=4.8\,m/s$ به دست می‌آید.

۶ ** مُهره‌ای به جرم $1.8\times10^{-2}\,kg$ در طول یک سیم و در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. این مُهره که در زمان $t=0$ حرکت را آغاز می‌کند، در هنگام عبور با تندی $12\,m/s$ از مکان $x=0$ تحت تأثیر یک نیروی ثابت قرار می‌گیرد. شکل ۷-۲۴ مکان مُهره را در چهار زمان $t_0=0$، $t_1=1.0\,s$، $t_2=2.0\,s$ و $t_3=3.0\,s$، نشان می‌دهد. مُهره در زمان $t=3.0\,s$ در یک لحظه متوقف می‌شود. انرژی جنبشی مُهره در زمان $t=10\,s$ چقدر است؟



شکل ۷-۲۲ مسئله‌ی ۶.

حل: از معادله‌ی $x(t)=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2$ در جدول ۲-۱ استفاده می‌کنیم. چون در لحظه‌ی $t=0$ داریم $x_0=0$ و $v_0=12\,m/s$، معادله‌ی فوق به صورت زیر ساده می‌شود

$$x(t)=12t+\frac{1}{2}at^2$$

به ازای $x=10\,m$ در لحظه‌ی $t=1.0\,s$، شتاب مساوی با $a=-4.0\,m/s^2$ به دست می‌آید. شرط $a<0$ ایجاب می‌کند که مهره دارای شتاب کند کننده باشد. بنابراین، مکان با تابع $x(t)=12t-2.0t^2$ توصیف می‌شود. از تابع x نسبت به زمان t مشتق می‌گیریم:

$$v(t)=\frac{dx}{dt}=12-4.0t$$

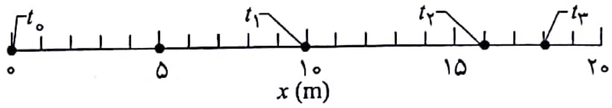
در واقع در لحظه‌ی $t=3.0\,s$، داریم $v(t=3.0)=0$ و مهره به طور لحظه‌ای متوقف می‌شود. تندی در لحظه‌ی $t=10\,s$ مساوی با $v(t=10)=-28\,m/s$ است و انرژی جنبشی متناظر با آن برابر

است با

$$K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}(1{,}8\times10^{-2}\,kg)(-28\,m/s)^2=7{,}1\,J$$

پودمان ۷-۲ کار و انرژی جنبشی

* ۷ جسمی به جرم $3{,}0\,kg$، در حالی که روی یک تخت هـوای افقی بی‌اصطکاک ساکن است، یک‌نیروی افقی ثابت $\vec{F}$ درجهت مثبت محور x در راستای تخت هوا به آن وارد می‌شود. شـکل ۷-۲۵ نمودار چند درخشی مکان جسم را در حـال لغزیـدن بـه سمت راست نشان می‌دهد. نیروی $\vec{F}$ در زمان $t=0$ به جسـم وارد شده است و نمودار، مکـان جسـم را در بـازه‌هـای زمـانی ۰٫۵۰ ثانیه نمایش می‌دهد. نیروی وارد شده $\vec{F}$، در مدت زمان بین $t=0$ و $t=2{,}0\,s$ چقدر کار روی جسم انجام داده است؟



شکل ۷-۲۵ مسئله‌ی ۷.

حل: چون مسئله مربوط به حرکت با شتاب ثابت است، می‌توانیم از معادلات جدول ۲-۱، مانند $x=v_0t+\frac{1}{2}at^2$ (که در آن $x_0=0$) استفاده کنیم. ما نقاط سوم و پنجم را برای تجزیه و تحلیل انتخاب می‌کنیم:

$$0{,}2\,m=v_0(1{,}0\,s)+\frac{1}{2}a(1{,}0\,s)^2$$

$$0{,}8\,m=v_0(2{,}0\,s)+\frac{1}{2}a(2{,}0\,s)^2$$

از حل هم‌زمان این دو معادله، $v_0=0$ و $a=0{,}40\,m/s^2$ به‌دست می‌آیند. اکنون دو راه برای پایان دادن به راه حل مسئله وجـود دارد. یک راه برای محاسبه‌ی نیرو از $F=ma$ و راه دیگر محاسبه‌ی کار از معادله‌ی ۷-۷ است. راه دیگر، پیدا کردن ΔK با روش محاسبه‌ی W (بر طبـق معادلـه‌ی ۷-۱۰) اسـت. در روش آخـر، سـرعت در لحظه‌ی $t=2{,}0\,s$ را از معادله‌ی $v=v_0+at$ به دست می‌آوریـم ($v=0{,}80\,m/s$). در نتیجه کار انجام شده برابر است با

$$W=\Delta K=\frac{1}{2}(3{,}0\,kg)(0{,}80\,m/s)^2=0{,}96\,J$$

* ۸ قطعه یخ شناوری بر اثر نیـروی $\vec{F}=(210\,N)\hat{i}-(150\,N)\hat{j}$ که به خاطر حرکت سریع آب به آن وارد می‌شود در طـول یـک خط راست جابه‌جایی $\vec{d}=(15\,m)\hat{i}-(12\,m)\hat{j}$ را انجام می‌دهد. در این جابه‌جایی نیرو روی یخ چه مقدار کار انجام می‌دهد؟

حل: با استفاده از معادله‌ی ۷-۸ (و معادله‌ی ۳-۲۳)، کار انجام شده توسط آب بر روی قطعه یخ را پیدا می‌کنیم:

$$W=\vec{F}\cdot\vec{d}=[(210\,N)\hat{i}-(150\,N)\hat{j}]\cdot[(15\,m)\hat{i}-(12\,m)\hat{j}]$$

$$=(210\,N)(15\,m)+(-150\,N)(-12\,m)=4{,}9\times10^3\,J$$

* ۹ بزرگی تنها نیروی وارد به یک قوطی ۲٫۰ کیلوگرمی، کـه در صفحه‌ی xy حرکت می‌کند، $5{,}0\,N$ است. قوطی دارای سرعت آغازی $4{,}0\,m/s$ در جهت مثبت محور x، و چند لحظه بعـد، دارای سرعت $6{,}0\,m/s$ در جهت مثبت محور y است. در این مدت نیروی ۵٫۰ نیوتونی چقدر کار روی قوطی انجام می‌دهد؟

حل: از قضیه‌ی کار ـ انرژی داریم

$$W=\Delta K=\frac{1}{2}mv_f^2-\frac{1}{2}mv_i^2$$

$$=\frac{1}{2}(2{,}0\,kg)((6{,}0\,m/s)^2-(4{,}0\,m/s)^2)=20\,J$$

توجه می‌کنیم که جهت‌های $\vec{v}_f$ و $\vec{v}_i$ نقشی در محاسبه ندارند.

* ۱۰ سکه‌ای بر اثر یک نیروی ثابت روی یک سطح بی‌اصطکاک واقـع در دسـتگاه مختصـات x و y از مبـداء تـا نقطـه‌ای بـا مختصات ($3{,}0\,m$ و $4{,}0\,m$) حرکت می‌کند. ایـن نیـرو دارای بزرگی $2{,}0\,N$ و زاویه‌ی ۱۰۰ درجه در جهـت پادسـاعت‌گـرد نسبت به محور مثبت x است. در این جابـه‌جـایی چقـدر کـار توسط این نیرو بر روی سکه انجام می‌شود؟

حل: از معادله‌ی ۷-۸ داریم

$$W=F_x\,\Delta x+F_y\,\Delta y$$

$$=(2{,}0\,N)\cos(100°)(3{,}0\,m)+(2{,}0\,N)\sin(100°)(4{,}0\,m)=6{,}86\,J$$

** ۱۱ یک نیروی ۱۲٫۰ نیوتونی با سمت‌گیری ثابـت، بـر روی ذره‌ای طی جابـه‌جـایی $\vec{d}=(2{,}00\hat{i}-4{,}00\hat{j}+3{,}00\hat{k})\,m$ در یک دستگاه مختصات سه بعدی، کار انجام می‌دهـد. اگـر تغییـر انـرژی جنبشـی ذره (الـف) $+30{,}0\,J$ و (ب) $-30{,}0\,J$، باشـد زاویه‌ی میان نیرو و جابه‌جایی چیست؟

حل: با استفاده از قضیه‌ی کار ـ انرژی داریم

$$\Delta K=W=\vec{F}\cdot\vec{d}=Fd\cos\phi$$

علاوه بر این، $F=12\,N$ و

$$d=\sqrt{(2{,}00\,m)^2+(-4{,}00\,m)^2+(3{,}00\,m)^2}=5{,}39\,m$$

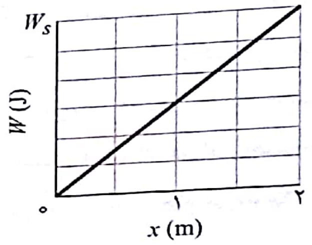
(الف) اگر $\Delta K = +۳۰٫۰\ J$ باشد، زاویه‌ی میان نیرو و جابه‌جایی برابر است با

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{\Delta K}{Fd}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{۳۰٫۰\ J}{(۱۲٫۰\ N)(۵٫۳۹\ m)}\right) = ۶۲٫۳^\circ$$

(ب) $\Delta K = -۳۰٫۰\ J$، پس

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{\Delta K}{Fd}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-۳۰٫۰\ J}{(۱۲٫۰\ N)(۵٫۳۹\ m)}\right) = ۱۱۸^\circ$$

** ۱۲ در تعمیرگاهی، یک قوطی محتوی پیچ و مُهره را با دسته‌ی بلند جارو به اندازه‌ی $۲٫۰۰\ m$ در طول محور x بر روی کف چرب (بی‌اصطکاک) تعمیرگاه هُل می‌دهند. شکل ۷-۲۶ تغییرات W، کار انجام شده روی قوطی توسط نیروی افقی ثابت ناشی از دسته‌ی جارو را برحسب مکان x قوطی نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم شکل با مقدار $W_s = ۶٫۰\ J$ مشخص شده است. (الف) بزرگی نیرو چقدر است؟ (ب) اگر قوطی دارای انرژی جنبشی آغازی $۳٫۰۰\ J$ باشد و در جهت مثبت محور x حرکت کند، انرژی جنبشی آن در پایان جابه‌جایی $۲٫۰۰\ m$ چقدر است؟



شکل ۷-۲۷ مسئله‌ی ۱۲.

حل: (الف) از معادله‌ی ۷-۶، بزرگی نیرو $F = W/x = ۳٫۰۰\ N$ به دست می‌آید که همان شیب نمودار است.

(ب) از معادله‌ی ۷-۱۰ داریم

$$K = K_i + W = ۳٫۰۰\ J + ۶٫۰۰\ J = ۹٫۰۰\ J$$

** ۱۳ سورتمه‌ای با سرنشین آن به جرم کل $۸۵\ kg$، از یک سرازیری با تندی آغازی $۳۷\ m/s$ به یک مسیر راست افقی وارد می‌شود. اگر سورتمه با شتاب ثابت و کُند کننده‌ی $۲٫۰\ m/s^2$ متوقف شود، (الف) برای این کار بزرگی نیروی کُند کننده F، چقدر باید باشد، (ب) مسافت پیموده شده d، توسط سورتمه در حرکت با شتاب کُند کننده چقدر است، و (پ) کار انجام شده W، توسط این نیروی کُند کننده چیست؟ اگر شتاب کُند کننده $۴٫۰\ m/s^2$ باشد، (ت) نیروی F، (ث) مسافت d، و (ج) کار W، چقدر است؟

حل: محور $+x$ را در جهت حرکت انتخاب می‌کنیم (در نتیجه $\vec{a}$ و $\vec{F}$ دارای مقادیر منفی هستند).

(الف) از قانون دوم نیوتون داریم $\vec{F} = (۸۵\ kg)(-۲٫۰\ m/s^2)$، در نتیجه خواهیم داشت

$$F = |\vec{F}| = ۱٫۷ \times ۱۰^۲\ N$$

(ب) از معادله‌ی ۲-۱۶ (به ازای $v = ۰$) داریم

$$۰ = v_0^2 + ۲a\Delta x \Rightarrow \Delta x = -\frac{(۳۷\ m/s)^2}{۲(-۲٫۰\ m/s^2)} = ۳٫۴ \times ۱۰^۲\ m$$

به جای این کار می‌توان از قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی نیز استفاده کرد.

(پ) چون $\vec{F}$ درخلاف جهت حرکت واردمی‌شود (درنتیجه زاویه‌ی ϕ بین $\vec{F}$ و $\vec{d} = \Delta x$، مساوی با ۱۸۰° است)، از معادله‌ی ۷-۷ می‌توان کار انجام شده را به‌صورت $W = -F\Delta x = -۵٫۸ \times ۱۰^۴\ J$ پیدا کرد.

(ت) در این حالت، از قانون دوم نیوتون داریم $|\vec{F}| = (۸۵\ kg)(-۴٫۰\ m/s^2)$ و در نتیجه خواهیم داشت

$$F = |\vec{F}| = ۳٫۴ \times ۱۰^۲\ N$$

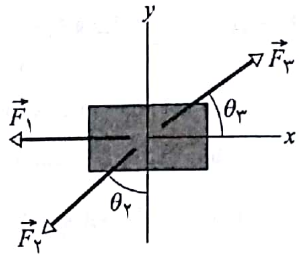
(ث) از معادله‌ی ۲-۱۶ داریم

$$\Delta x = -\frac{(۳۷\ m/s)^2}{۲(-۴٫۰\ m/s^2)} = ۱٫۷ \times ۱۰^۲\ m$$

(ج) نیروی $\vec{F}$ باز هم در خلاف جهت حرکت وارد می‌شود (یعنی زاویه‌ی ϕ باز هم ۱۸۰° است)، در نتیجه از معادله‌ی ۷-۷ می‌توان مقدار کار را به‌صورت $W = -F\Delta x = -۵٫۸ \times ۱۰^۴\ J$ حساب کرد. مساوی بودن این نتیجه با کار حساب شده در قسمت (پ) ایجاب می‌کند که به مفهوم کار دقت شود.

** ۱۴ شکل ۷-۲۷ نمودار سه‌نیروی افقی را، با دید از بالا، نشان می‌دهد که به یک قوطی در حال سکون اثر می‌کنند و قوطی روی یک سطح افقی بی‌اصطکاک در حال حرکت است. نیروها دارای بزرگی $F_1 = ۳٫۰۰\ N$، $F_2 = ۴٫۰۰\ N$ و $F_3 = ۱۰٫۰\ N$ و زاویه‌های نشان داده شده $\theta_2 = ۵۰٫۰^\circ$ و $\theta_3 = ۳۵٫۰^\circ$،

هستند. کار خالص انجام شده توسط این نیروها روی قوطی در طی $۴٫۰۰\,\mathrm{m}$ نخست جابه‌جایی چیست؟



شکل ۷–۲۷ مسئله‌ی ۱۴.

حل: همه‌ی نیروها ثابت‌اند، در نتیجه کار کل انجام شده توسط آن‌ها از رابطه‌ی $W = F_{\mathrm{net}}\Delta x$ به دست می‌آید که در آن F_{net} بزرگی نیروی برایند و Δx بزرگی جابه‌جایی است. سه بردار را با هم جمع می‌کنیم تا مؤلفه‌های x و y نیروی برایند به دست آید:

$$F_{\mathrm{net},x} = -F_۱ - F_۲ \sin ۵۰٫۰^\circ + F_۳ \cos ۳۵٫۰^\circ$$
$$= -۳٫۰۰\mathrm{N} - (۴٫۰۰\mathrm{N})\sin ۵۰٫۰^\circ + (۱۰٫۰\mathrm{N})\cos ۳۵٫۰^\circ = ۲٫۱۳\mathrm{N}$$
$$F_{\mathrm{net},y} = -F_۲ \cos ۵۰٫۰^\circ + F_۳ \sin ۳۵٫۰^\circ$$
$$= -(۴٫۰۰\,\mathrm{N})\cos ۵۰٫۰^\circ + (۱۰٫۰\,\mathrm{N})\sin ۳۵٫۰^\circ = ۳٫۱۳\,\mathrm{N}$$

بزرگی نیروی برایند برابر است با

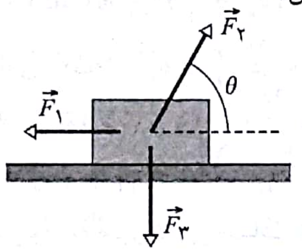
$$F_{\mathrm{net}} = \sqrt{F_{\mathrm{net},x}^۲ + F_{\mathrm{net},y}^۲}$$
$$= \sqrt{(۲٫۱۳\,\mathrm{N})^۲ + (۳٫۱۳\,\mathrm{N})^۲} = ۳٫۸\,\mathrm{N}$$

کار انجام شده توسط این نیروی برایند برابر است با

$$W = F_{\mathrm{net}}d = (۳٫۸\,\mathrm{N})(۴٫۰۰\,\mathrm{m}) = ۱۵٫۲\,\mathrm{J}$$

در این‌جا از این واقعیت استفاده کرده‌ایم که $\vec{d}$ بر $\vec{F}_{\mathrm{net}}$ عمود است (علت امر این است که قوطی از حال سکون به راه افتاده و تحت اثر نیروهای افقی به طور افقی حرکت کرده است ـ نتیجه‌ی تأثیر این نیروها با $\vec{F}_{\mathrm{net}}$ مشخص شده است).

**** ۱۵** شکل ۷–۲۸ سه نیرو را نشان می‌دهد که به صندوقی وارد می‌شوند و آن را به اندازه‌ی $۳٫۰۰\,\mathrm{m}$ روی یک سطح افقی بی‌اصطکاک به سمت چپ جابه‌جا می‌کنند. این نیروها دارای بزرگی $F_۱ = ۵٫۰۰\,\mathrm{N}$، $F_۲ = ۹٫۰۰\,\mathrm{N}$ و $F_۳ = ۳٫۰۰\,\mathrm{N}$ هستند و زاویه‌ی نشان داده شده $\theta = ۶۰٫۰^\circ$ است. در طی این جابه‌جایی، (الف) کار خالص انجام شده توسط سه نیرو روی صندوق چقدر است، و (ب) آیا انرژی جنبشی صندوق افزایش می‌یابد یا کاهش؟



شکل ۷–۲۸ مسئله‌ی ۱۵.

حل: (الف) نیروها ثابت‌اند، در نتیجه کار انجام شده توسط هر یک از آن‌ها از رابطه‌ی $W = \vec{F}\cdot\vec{d}$ به دست می‌آید ($\vec{d}$ جابه‌جایی است). نیروی $\vec{F}_۱$ در جهت جابه‌جایی اثر می‌کند، در نتیجه داریم

$$W_۱ = F_۱ d \cos\phi_۱ = (۵٫۰۰\,\mathrm{N})(۳٫۰۰\,\mathrm{m})\cos ۰^\circ = ۱۵٫۰\,\mathrm{J}$$

نیروی $\vec{F}_۲$ زاویه‌ی ۱۲۰° با جابه‌جایی تشکیل می‌دهد، در نتیجه داریم

$$W_۲ = F_۲ d \cos\phi_۲ = (۹٫۰۰\,\mathrm{N})(۳٫۰۰\,\mathrm{m})\cos ۱۲۰^\circ = -۱۳٫۵\,\mathrm{J}$$

نیروی $\vec{F}_۳$ بر جابه‌جایی عمود است، در نتیجه داریم

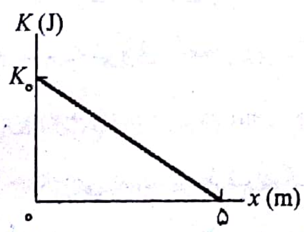
$$W_۳ = F_۳ d \cos\phi_۳ = ۰ \qquad \text{زیرا } \cos ۹۰^\circ = ۰$$

کار انجام شده‌ی خالص توسط سه نیرو برابر است با

$$W = W_۱ + W_۲ + W_۳ = ۱۵٫۰\,\mathrm{J} - ۱۳٫۵\,\mathrm{J} + ۰ = +۱٫۵۰\,\mathrm{J}$$

(ب) اگر نیروی دیگری بر صندوق وارد نشود، انرژی جنبشی آن در هنگام جابه‌جا شدن به اندازه‌ی $۱٫۵۰\,\mathrm{J}$ افزایش پیدا می‌کند.

**** ۱۶** شیئی به جرم $۸٫۰\,\mathrm{kg}$ در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. این شیء در هنگام عبور از نقطه‌ی $x = ۰$ تحت تأثیر یک نیروی ثابت در راستای محور قرار می‌گیرد. شکل ۷–۲۹ تغییرات انرژی جنبشی جسم K، را برحسب مکان x از $x = ۰$ تا $x = ۵٫۰\,\mathrm{m}$ نشان می‌دهد و $K_۰ = ۳۰٫۰\,\mathrm{J}$. در حالی که اثر نیرو ادامه دارد، هنگام برگشتن شیء به نقطه‌ی $x = -۳٫۰\,\mathrm{m}$ تندی آن v، چقدر است؟



شکل ۷–۲۹ مسئله‌ی ۱۶.

حل: تغییر انرژی جنبشی را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\Delta K = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) = \frac{1}{2}m(2a\Delta x) = ma\Delta x$$

در این جا از معادله‌ی $v_f^2 = v_i^2 + 2a\Delta x$ در جدول ۲-۱ استفاده کرده‌ایم. شکل نشان می‌دهد که وقتی $\Delta x = +5\,m$ است، داریم

$$\Delta K = (0-30)\,J = -30\,J$$

بنابراین شتاب را می‌توان به صورت زیر حساب کرد

$$a = \frac{\Delta K}{m\Delta x} = \frac{(-30\,J)}{(8.0\,kg)(5.0\,m)} = -0.75\,m/s^2$$

علامت منفی نشان می‌دهد که به صندوق شتاب کند کننده وارد می‌شود. با توجه به شکل، می‌بینیم که وقتی $x = 5\,m$ است انرژی جنبشی صفر می‌شود، یعنی صندوق به طور موقت متوقف می‌شود. در نتیجه داریم

$$v_0^2 = v^2 - 2a\Delta x = 0 - 2(-0.75\,m/s^2)(5.0\,m) = 7.5\,m^2/s^2$$

یا $v_0 = 2.7\,m/s$. به ازای $x = -3.0\,m$، تندی صندوق برابر است با

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2a\Delta x} = \sqrt{7.5\,m^2/s^2 + 2(-0.75\,m/s^2)(-3.0\,m)} = 3.5\,m/s$$

پودمان ۷-۳ کار انجام شده توسط نیروی گرانشی

* ۱۷ هلیکوپتری یک فضانورد به جرم ۷۲kg را به وسیله‌ی یک کابل به طور قائم تا ارتفاع ۱۵ متری سطح دریا به بالا می‌کشد. شتاب فضانورد $g/10$ است. چه مقدار کار روی فضانورد توسط (الف) چرخ بال و (ب) نیروی گرانشی، انجام می‌شود؟ درست پیش از رسیدن به چرخ بال، (پ) انرژی جنبشی و (ت) تندی فضانورد، چقدر است؟

حل: فرض می‌کنیم $\vec{F}$ نیروی رو به بالایی باشد که کابل به فضانورد وارد می‌کند. جهت نیروی کابل به طرف بالا و جهت نیروی گرانش mg به طرف پایین است. علاوه بر این، شتاب فضانورد $a = g/10$ به طرف بالا است.

بنابر قانون دوم نیوتون، نیرو از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$F - mg = ma \Rightarrow F = m(g+a) = \frac{11}{10}mg$$

این نیرو در جهت جابه‌جایی است. از طرف دیگر، بزرگی نیروی گرانشی $F_g = mg$ و جهت آن در خلاف جهت جابه‌جایی است.

(الف) چون نیروی کابل $\vec{F}$ و جابه‌جایی $\vec{d}$ هم‌جهت‌اند، کار انجام شده توسط $\vec{F}$ برابر است با

$$W_F = Fd = \frac{11mgd}{10} = \frac{11(72\,kg)(9.8\,m/s^2)(15\,m)}{10} = 1.164\times10^4\,J \approx 1.2\times10^4\,J$$

(ب) کار انجام شده توسط گرانش را از معادله‌ی ۷-۷ حساب می‌کنیم:

$$W_g = -F_g d = -mgd = -(72\,kg)(9.8\,m/s^2)(15\,m) = -1.058\times10^4\,J \approx -1.1\times10^4\,J$$

چون فضانورد از حال سکون حرکت می‌کند، قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی نشان می‌دهد که این مقدار انرژی جنبشی پایانی آن است.

(ت) چون $K = \frac{1}{2}mv^2$، در نتیجه تندی پایانی فضانورد برابر است با

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2(1.06\times10^3\,J)}{72\,kg}} = 5.4\,m/s$$

توجه: برای شتاب روبه بالای a، کار خالص انجام شده برابر است با

$$W_{net} = W_F + W_g = Fd - F_g d = m(g+a)d - mgd = mad$$

چون $W_{net} = \Delta K = mv^2/R$، از قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی می‌توان تندی فضانورد را به صورت $v = \sqrt{2ad}$ به دست آورد که مستقل از جرم فضانورد است.

* ۱۸ (الف) در سال ۱۹۷۵/۱۳۵۴ سقف سالن دوچرخه‌سواری مونترآل به وزن ۳۶۰kN را به اندازه‌ی ۱۰cm بلند کردند تا مرکز آن تنظیم شود. نیروهای بلند کننده‌ی سقف چقدر کار روی آن انجام دادند؟ (ب) در سال ۱۹۶۰/۱۳۳۹ روزنامه‌ها نوشتند که خانم ماکسول راجرز از شهر تامپا در ایالت فلوریدا، یک طرف ماشین خود را که به علت خرابی جک روی پسرش افتاده بود، بلند کرد. اگر نیروی بالا برنده‌ی همراه با اضطراب او بتواند بار ۴۰۰۰N (در حدود $\frac{1}{4}$ وزن خودرو) را به اندازه‌ی ۵٫۰cm بالا ببرد، او چقدر کار روی خودرو انجام داده است؟

حل: در هر دو حالت، شتاب وجود ندارد، در نتیجه نیروی بالابرنده با وزن جسم برابر است.

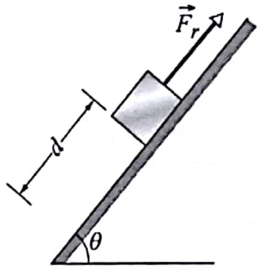
(الف) از معادله‌ی ۷-۸ داریم

$$W = \vec{F}\cdot\vec{d} = (360\,kN)(0.10\,m) = 36\,kJ$$

(ب) در این حالت، داریم

$$W = (4000\,N)(0.050\,m) = 2.0\times10^2\,J$$

** ۱۹ در شکل ۷-۳۰، قالب یخی از یک شیب‌راهه‌ی بی‌اصطکاک با زاویه‌ی شیب $\theta = ۵۰^\circ$ به پایین می‌لغزد، در حالی که کارگری با نیروی $\vec{F}_r$ به بزرگی ۵۰N قالب یخ را (به کمک یک طناب) به سمت بالای شیب‌راهه می‌کشد. وقتی یخ مسافت $d = ۰/۵۰\,m$ را بر روی شیب‌راهه می‌پیماید انرژی جنبشی‌اش به اندازه‌ی ۸۰J افزایش می‌یابد. اگر طناب به قالب یخ وصل نمی‌شد انرژی جنبشی یخ چقدر افزایش می‌یافت؟



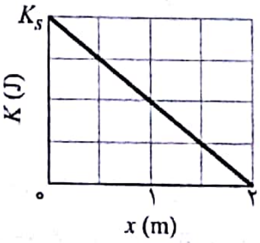
شکل ۷-۳۰ مسئله‌ی ۱۹.

حل: از معادله‌ی ۷-۱۵ می‌توان استفاده کرد، اما صورت مسئله پیشنهاد می‌کند که فقط کار انجام شده توسط طناب را (که در معادله‌ی ۷-۱۵ با جمله‌ی «W_a» مشخص می‌شود) بررسی کنیم:

$$W_a = -(۵۰\,N)(۰/۵۰\,m) = -۲۵\,J$$

(علامت منفی به این علت وارد شده است که نیروی کشش طناب در خلاف جهت حرکت قالب یخ است). بنابراین، اگر طناب به قالب وصل نشده باشد (و همان جابه‌جایی انجام شود)، انرژی جنبشی یخ به اندازه‌ی ۲۵J افزایش می‌یافت.

** ۲۰ جسمی بر روی یک شیب راهه‌ی بی‌اصطکاک که در طول آن محور x به سمت بالا امتداد دارد، به بالا هُل داده می‌شود. شکل ۷-۳۱ نمودار انرژی جنبشی جسم را برحسب مکان x نشان می‌دهد؛ مقیاس محور قائم شکل با $K_s = ۴۰/۰\,J$ مشخص شده است. اگر جسم دارای تندی آغازی $۴/۰۰\,m/s$ باشد، نیروی عمودی وارد به آن چقدر است؟



شکل ۷-۳۱ مسئله‌ی ۲۰.

حل: با توجه به شکل، انرژی جنبشی (برحسب ژول) را می‌توان به‌صورت تابعی از x نوشت:

$$K = K_s - ۲۵x = ۴۰ - ۲۵x$$

چون $W = \Delta K = \vec{F}_x \cdot \Delta\vec{x}$، مؤلفه‌ی نیرو در راستای محور $+x$ برابر است با $F_x = dK/dx = -۲۵\,N$. نیروی عمودی وارد شده به جسم $F_N = F_y$ است، که رابطه‌اش با نیروی گرانشی به‌صورت زیر است

$$mg = \sqrt{F_x^۲ + (-F_y)^۲}$$

(توجه کنید که جهت F_N در خلاف جهت مؤلفه‌ی نیروی گرانشی است). با داشتن انرژی جنبشی آغازی $K_s = ۴۰/۰\,J$ و $v_۰ = ۴/۰۰\,m/s$، جرم جسم برابر است با

$$m = \frac{۲K_s}{v_۰^۲} = \frac{۲(۴۰/۰\,J)}{(۴/۰۰\,m/s)^۲} = ۵/۰۰\,kg$$

بنابراین، نیروی عمودی برابر است با

$$F_y = \sqrt{(mg)^۲ - F_x^۲}$$
$$= \sqrt{(۵/۰\,kg)^۲(۹/۸\,m/s^۲)^۲ - (۲۵\,N)^۲} = ۴۲\,N$$

** ۲۱ برای آنکه بتوانیم جسمی به جرم M را در راستای قائم با شتاب ثابت $g/۴$ پایین ببریم، از یک ریسمان استفاده می‌کنیم. پس از پایین آمدن جسم به اندازه‌ی d، مطلوب است تعیین (الف) کار انجام شده توسط ریسمان روی جسم، (ب) کار انجام شده توسط نیروی گرانشی روی جسم، (پ) انرژی جنبشی جسم، و (ت) تندی جسم.

حل: بزرگی نیرویی را که ریسمان به جسم وارد می‌کند با F نشان می‌دهیم. جهت این نیرو به طرف بالا و در خلاف جهت نیروی گرانش (با بزرگی $F_g = Mg$) است و اجازه نمی‌دهد جسم سقوط آزاد انجام دهد. شتاب $\vec{a} = \vec{g}/۴$ به طرف پایین است. اگر جهت رو به پایین را مثبت در نظر بگیریم، از قانون دوم نیوتون داریم

$$\vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a} \Rightarrow Mg - F = M\left(\frac{g}{۴}\right)$$

در نتیجه $F = ۳Mg/۴$ به دست می‌آید که در خلاف جهت جابه‌جایی است. از طرف دیگر، نیروی گرانش $F_g = mg$ در جهت جابه‌جایی است.

(الف) چون جهت جابه‌جایی به طرف پایین است، کار انجام شده توسط نیروی کشش ریسمان با استفاده از معادله‌ی ۷-۷ برابر است با

$$W_F = -Fd = -\frac{۳}{۴}Mgd$$

(ب) به‌طور مشابه، کار انجام‌شده توسط گرانش $W_g = F_g d = Mgd$ است.

(پ) کار کل انجام شده روی جسم از جمع این دو کار به دست می‌آید:

$$W_{\text{net}} = W_F + W_g = -\frac{۳}{۴}Mgd + Mgd = \frac{۱}{۴}Mgd$$

چون جسم از حال سکون شروع به حرکت می‌کند، با استفاده از معادله‌ی ۷-۱۵ نتیجه می‌گیریم که $Mgd/۴$ انرژی جنبشی جسم در لحظه‌ای است که به اندازه‌ی d پایین رفته است.

(ت) چون $K = \frac{۱}{۲}Mv^۲$، در نتیجه تندی جسم در لحظه‌ای که جسم به اندازه‌ی d پایین رفته است، برابر است با

$$v = \sqrt{\frac{۲K}{M}} = \sqrt{\frac{۲(Mgd/۴)}{M}} = \sqrt{\frac{gd}{۲}}$$

** ۲۲ یک گروه نجات، غارنورد مصدومی را با استفاده از کابلی که با موتور کشیده می‌شود، از حفره‌ای مستقیماً به بالا می‌کشند. عمل کشیدن در سه مرحله و هر مرحله به ارتفاع قائم ۱۰٫۰m اجرا می‌شود: (الف) غارنورد که در آغاز ساکن بود، تا تندی ۵٫۰۰m/s شتاب پیدا می‌کند؛ (ب) سپس او با تندی ثابت ۵٫۰۰m/s به بالا کشیده می‌شود؛ (پ) سرانجام، تندی او با شتاب کُند کننده به صفر می‌رسد. در هر مرحله در حین بالا کشیدن غارنورد مصدوم به جرم ۸۵٫۰kg، چقدر کار روی او انجام می‌شود؟

حل: بزرگی جابه‌جایی غارنورد در هر مرحله را با d نشان می‌دهیم. جرم غارنورد $m = ۸۵٫۰kg$ است. کار نیروی بالابرنده را با W_i نشان می‌دهیم که برای سه مرحله $i = ۱,۲,۳$ است. از قضیه‌ی کار ـ انرژی، معادله‌ی ۷-۱۵ استفاده می‌کنیم.

(الف) برای مرحله‌ی ۱، $W_۱ - mgd = \Delta K_۱ = \frac{۱}{۲}mv_۱^۲$، که در آن $v_۱ = ۵٫۰۰m/s$ و از آن‌جا داریم

$$W_۱ = mgd + \frac{۱}{۲}mv_۱^۲$$

$$=(۸۵٫۰kg)(۹٫۸۰m/s^۲)(۱۲٫۰m)+\frac{۱}{۲}(۸۵٫۰kg)(۵٫۰۰m/s)^۲$$

$$=۱٫۱۱\times۱۰^۴ J$$

(ب) برای مرحله‌ی ۲، $W_۲ - mgd = \Delta K_۲ = ۰$، در نتیجه داریم

$$W_۲ = mgd = (۸۵٫۰kg)(۹٫۸۰m/s^۲)(۱۲٫۰m)$$

$$=۱٫۰۰\times۱۰^۴ J$$

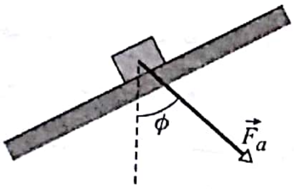
(پ) برای مرحله‌ی ۳، $W_۳ - mgd = \Delta K_۳ = -\frac{۱}{۲}mv_۱^۲$، که از آن‌جا داریم

$$W_۳ = mgd - \frac{۱}{۲}mv_۱^۲$$

$$=(۸۵٫۰kg)(۹٫۸۰m/s^۲)(۱۲٫۰m)-\frac{۱}{۲}(۸۵٫۰kg)(۵٫۰۰m/s)^۲$$

$$=۸٫۹۳\times۱۰^۳ J$$

** ۲۳ در شکل ۷-۳۲، یک نیروی ثابت $\vec{F}_a$ به بزرگی ۸۲٫۰N تحت زاویه‌ی $\phi = ۵۳٫۰°$ به یک جعبه‌ی کفش ۳٫۰۰ وارد می‌شود. این نیرو جعبه را با تندی ثابت به سمت بالای یک شیب‌راهه‌ی بی‌اصطکاک حرکت می‌دهد. در حین طی شدن مسافت قائم $h = ۰٫۱۵۰m$ توسط جعبه، $\vec{F}_a$ چقدر کار روی جعبه انجام می‌دهد؟



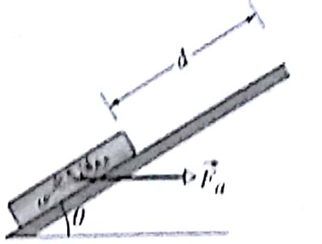
شکل ۷-۳۲ مسئله‌ی ۲۳.

حل: چون نیروی اعمال شده‌ی $\vec{F}_a$ باعث می‌شود جعبه در روی سطح شیب‌دار بی‌اصطکاک با تندی ثابت به طرف بالا حرکت کند، تغییر خالص در انرژی جنبشی صورت نمی‌گیرد: $\Delta K = ۰$. بنابراین، کار انجام شده توسط $\vec{F}_a$ باید با منفی کار انجام شده توسط گرانش برابر باشد: $W_a = -W_g$. چون جعبه به طور قائم و به اندازه‌ی $h = ۰٫۱۵۰m$ به طرف بالا جابه‌جا می‌شود، داریم

$$W_a = +mgh = (۳٫۰۰kg)(۹٫۸۰m/s^۲)(۰٫۱۵۰m) = ۴٫۴۱J$$

** ۲۴ در شکل ۷-۳۳، نیروی افقی $\vec{F}_a$ به‌بزرگی ۲۳٫۰N به یک کتاب روان‌شناسی ۳٫۰۰ کیلوگرمی وارد می‌شود و کتاب مسافت $d = ۰٫۵۸۰m$ را به سمت بالای یک شیب‌راهه‌ی بی‌اصطکاک با زاویه‌ی شیب $\theta = ۳۰٫۰°$ می‌پیماید. (الف) درطول این جابه‌جایی، کار خالص انجام شده توسط $\vec{F}_a$، نیروی گرانشی و نیروی عمودی بر روی کتاب چقدراست؟ (ب) اگر

انرژی جنبشی کتاب در لحظه‌ی آغاز جابه‌جایی صفر باشد تندی آن در پایان جابه‌جایی چقدر است؟



شکل ۷-۳۳ مسئله‌ی ۲۴.

حل: (الف) با استفاده از نمادگذاری بزرگی ـ زاویه (از معادله‌ی ۷-۸) داریم:

$$W = \text{dot}([۲۳,۰\angle۰] + [۰, -(۳,۰۰)(۹,۸)], [۰,۵۸۰\angle۳۰,۰°])$$
$$= ۱۳,۰۳\,\text{J}$$

در این‌جا منظور از dot، حاصل‌ضرب نقطه‌ای است.

(ب) از معادله‌ی ۷-۱۰ (همراه با معادله‌ی ۷-۱) داریم

$$v = \sqrt{۲(۱۳,۰۳\,\text{J})/(۳,۰۰\,\text{kg})} = ۱,۴۲\,\text{m/s}$$

*** ۲۵ در شکل ۷-۳۴، قالب پنیری به جرم $۰,۲۵۰\,\text{kg}$ در کف اتاقک آسانسوری به جرم $۹۰۰\,\text{kg}$ قرار دارد. اتاقک توسط یک کابل به اندازه‌ی $d_1 = ۲,۴۰\,\text{m}$ و سپس به اندازه‌ی $d_2 = ۱۰,۵\,\text{m}$ به بالا کشیده می‌شود. (الف) در فاصله‌ی d_1، اگر بزرگی نیروی عمودی وارد به پنیر از سوی کف اتاقک مقدار ثابت $F_N = ۳,۰۰\,\text{N}$ باشد کار انجام شده توسط نیروی کابل بر روی اتاقک چقدر است؟ (ب) در فاصله‌ی d_2، اگر کار انجام شده توسط نیروی (ثابت) کابل بر روی اتاقک $۹۲,۶۱\,\text{kJ}$ باشد، بزرگی F_N چقدر است؟

شکل ۷-۳۴ مسئله‌ی ۲۵.

حل: (الف) نیروی رو به بالای برایند از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$F + F_N - (m+M)g = (m+M)a$$

که در آن $m = ۰,۲۵۰\,\text{kg}$ جرم پنیر، $M = ۹۰۰\,\text{kg}$ جرم اتاقک آسانسور، F نیرویی‌که کابل وارد می‌کند، و $F_N = ۳,۰۰\,\text{N}$ نیروی عمودی وارد بر پنیر است. فقط در مورد قالب پنیر تنها داریم

$$F_N - mg = ma \Rightarrow$$

$$a = \frac{۳,۰۰\,\text{N} - (۰,۲۵۰\,\text{kg})(۹,۸۰\,\text{m/s}^۲)}{۰,۲۵۰\,\text{kg}} = ۲,۲۰\,\text{m/s}^۲$$

بنابراین، نیروی کابل برابر است با

$$F = (m+M)(a+g) - F_N = ۱,۰۸\times۱۰^۴\,\text{N}$$

و کار انجام شده توسط کابل بر روی اتاقک برابر است با

$$W = Fd_1 = (۱,۰۸\times۱۰^۴\,\text{N})(۲,۴۰\,\text{m}) = ۲,۵۹\times۱۰^۴\,\text{J}$$

(ب) اگر $W = ۹۲,۶۱\,\text{kJ}$ و $d_2 = ۱۰,۵\,\text{m}$ باشد، بزرگی نیروی عمودی برابر است با

$$F_N = (m+M)g - \frac{W}{d_2}$$

$$= (۰,۲۵۰\,\text{kg} + ۹۰۰\,\text{kg})(۹,۸۰\,\text{m/s}^۲) - \frac{۹,۲۶۱\times۱۰^۴\,\text{J}}{۱۰,۵\,\text{m}} = ۲,۴۵\,\text{N}$$

پودمان ۷-۴ کار انجام شده توسط نیروی فنر

* ۲۶ در شکل ۷-۱۰، باید نیرویی به بزرگی $۸۰\,\text{N}$ وارد کنیم تا جسم در مکان $x = -۲,۰\,\text{m}$ ساکن بماند. جسم را از آن مکان به بعد به آرامی حرکت می‌دهیم تا نیروی وارد شده روی دستگاه جسم ـ فنر کار $+۴,۰\,\text{J}$ را انجام دهد؛ در این حالت باز هم جسم ساکن است. مکان جسم کجاست؟ (*راهنمایی:* دو پاسخ وجود دارد).

حل: از معادلات ۷-۲۵ و ۷-۲۸ استفاده می‌کنیم زیرا جسم پیش و پس از جابه‌جایی، ساکن است. کار انجام شده توسط نیروی اعمال شده را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$W_a = -W_s = \frac{۱}{۲}k(x_f^۲ - x_i^۲)$$

ثابت فنری $k = (۸۰\,\text{N})/(۲,۰\,\text{cm}) = ۴,۰\times۱۰^۳\,\text{N/m}$ است. به‌ازای $W_a = ۴,۰\,\text{J}$ و $x_i = -۲,۰\,\text{cm}$، داریم

$$x_f = \pm\sqrt{\frac{۲W_a}{k} + x_i^۲}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{۲(۴,۰\,\text{J})}{(۴,۰\times۱۰^۳\,\text{N/m})} + (-۰,۰۲۰\,\text{m})^۲} = \pm۰,۰۴۹\,\text{m} = \pm۴,۹\,\text{cm}$$

* ۲۷ یک فنر و یک جسم آرایشی مطابق شکل ۷-۱۰ تشکیل می‌دهند. هنگام کشیدن جسم به مکان $x = +۴,۰\,\text{cm}$ باید نیرویی به بزرگی $۳۶۰\,\text{N}$ وارد کنیم تا جسم را در آنجا نگه داریم. جسم را به مکان $x = ۱۱\,\text{cm}$ می‌کشیم و سپس رها می‌کنیم. وقتی جسم از مکان $x_i = +۵,۰\,\text{cm}$ به مکان‌های زیر کشیده می‌شود، فنر روی جسم چقدر کار انجام می‌دهد (الف)

$x=+3{,}0\,\text{cm}$، (ب) $x=-3{,}0\,\text{cm}$، (پ) $x=-5{,}0\,\text{cm}$، و (ت) $x=-9{,}0\,\text{cm}$؟

حل: معادله‌ی ۷-۲۵ نشان می‌دهد که کار انجام شده توسط نیروی فنر برابر است با

$$W_s=\frac{1}{2}k\left(x_i^2-x_f^2\right)$$

چون نیروی $360\,\text{N}$ باید اعمال شود تا جسم را به مکان $x=+4{,}0\,\text{cm}$ بکشد، پس ثابت فنری برابر است با

$$k=\frac{360\,\text{N}}{4{,}0\,\text{cm}}=90\,\text{N/cm}=9{,}0\times10^{3}\,\text{N/m}$$

(الف) وقتی جسم از $x_i=+5{,}0\,\text{cm}$ تا $x=+3{,}0\,\text{cm}$ حرکت می‌کند، داریم

$$W_s=\frac{1}{2}(9{,}0\times10^{3}\,\text{N/m})[(0{,}050\,\text{m})^2-(0{,}030\,\text{m})^2]=7{,}2\,\text{J}$$

(ب) وقتی جسم از $x_i=5{,}0\,\text{cm}$ تا $x=-3{,}0\,\text{cm}$ حرکت می‌کند، کار انجام شده توسط فنر برابر است با

$$W_s=\frac{1}{2}(9{,}0\times10^{3}\,\text{N/m})[(0{,}050\,\text{m})^2-(-0{,}030\,\text{m})^2]=7{,}2\,\text{J}$$

(پ) وقتی جسم از $x=+5{,}0\,\text{cm}$ تا $x=-5{,}0\,\text{cm}$ حرکت می‌کند، داریم

$$W_s=\frac{1}{2}(9{,}0\times10^{3}\,\text{N/m})[(0{,}050\,\text{m})^2-(-0{,}050\,\text{m})^2]=0\,\text{J}$$

(ت) وقتی جسم از $x=+5{,}0\,\text{cm}$ تا $x=-9{,}0\,\text{cm}$ حرکت می‌کند، داریم

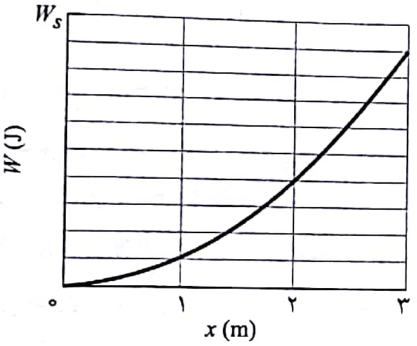
$$W_s=\frac{1}{2}(9{,}0\times10^{3}\,\text{N/m})[(0{,}050\,\text{m})^2-(-0{,}090\,\text{m})^2]=-25\,\text{J}$$

* ۲۸ در ترم بهاره‌ی دانشگاه MIT، دانشجویان ساختمان‌های موازی در خوابگاه‌های خاوری با تیر و کمان‌های بزرگی که از لوله‌های لاستیکی جراحی متصل به قاب پنجره ساخته شده بودند، با هم مبارزه می‌کردند. برای این کار، بادکنکی پر از آب رنگین را در یک کیسه‌ی متصل به لوله‌ی لاستیکی قرار می‌دادند و لوله‌ی لاستیکی را تا حد پهنای اتاق می‌کشیدند. فرض کنید کشش لوله‌ی لاستیکی از قانون هوک پیروی می‌کند و ثابت فنری لوله $100\,\text{N/m}$ است. اگر لوله‌ی لاستیکی به اندازه‌ی $5{,}00\,\text{m}$ کشیده و سپس رها شود، تا مدتی که لوله به حالت آرامش خود برمی‌گردد، نیروی آن چقدر کار روی بادکنک درون کیسه انجام می‌دهد؟

حل: ثابت فنری $k=110\,\text{N/m}$ و بیشترین کشیدگی $x_i=5{,}00\,\text{m}$ است. با استفاده از معادله‌ی ۷-۲۵ به ازای $x_f=0$، کار انجام شده روی بادکنک برابر است با

$$W=\frac{1}{2}kx_i^2=\frac{1}{2}(100\,\text{N/m})(5{,}00\,\text{m})^2=1{,}25\times10^{3}\,\text{J}$$

** ۲۹ در آرایش شکل ۷-۱۰، جسم را به آرامی از $x=0$ تا $x=+3{,}0\,\text{cm}$ می‌کشیم تا در آنجا به حال سکون در آید. شکل ۷-۳۵ نمودار تغییرات کار انجام شده روی جسم توسط نیرو را نشان می‌دهد و مقیاس محور قائم شکل با $W_s=1{,}0\,\text{J}$ مشخص شده است. سپس، جسم را تا $x=+5{,}0\,\text{cm}$ می‌کشیم و آن را از حال سکون رها می‌کنیم. در هنگام کشیدن جسم از $x_i=+5{,}0\,\text{cm}$ تا مکان‌های زیر فنر چقدر کار روی جسم انجام می‌دهد (الف) $x=+4{,}0\,\text{cm}$، (ب) $x=-2{,}0\,\text{cm}$، و (پ) $x=-5{,}0\,\text{cm}$.



شکل ۷-۳۵ مسئله‌ی ۲۹.

حل: کاری که نیروی فنر انجام می‌دهد، از معادله‌ی ۷-۲۵ به‌صورت $W_s=\frac{1}{2}k\left(x_i^2-x_f^2\right)$ به دست می‌آید. ثابت فنری k را می‌توان از شکل به دست آورد که مقدار کار انجام شده برای کشیدن جسم از $x=0$ تا $x=3{,}0\,\text{cm}$ را نشان می‌دهد. سهمی $W_a=kx^2/2$ شامل نقاط $(0,0)$، $(2{,}0\,\text{cm},0{,}40\,\text{J})$ و $(3{,}0\,\text{cm},0{,}90\,\text{J})$ است. بنابراین، با توجه به داده‌ها، $k=2{,}0\times10^{3}\,\text{N/m}$ است.

(الف) وقتی جسم از $x_i=+5{,}0\,\text{cm}$ تا $x=+4{,}0\,\text{cm}$ حرکت می‌کند، داریم

$$W_s=\frac{1}{2}(2{,}0\times10^{3}\,\text{N/m})[(0{,}050\,\text{m})^2-(0{,}040\,\text{m})^2]=0{,}90\,\text{J}$$

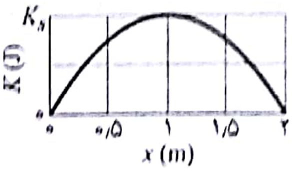
(ب) وقتی جسم از $x_i=+5{,}0\,\text{cm}$ تا $x=-2{,}0\,\text{cm}$ حرکت می‌کند، داریم

$$W_s=\frac{1}{2}(2{,}0\times10^{3}\,\text{N/m})[(0{,}050\,\text{m})^2-(-0{,}020\,\text{m})^2]=2{,}1\,\text{J}$$

(پ) وقتی جسم از $x_i = +۵٫۰\,\text{cm}$ تا $x_f = -۵٫۰\,\text{cm}$ حرکت می‌کند، داریم

$$W_s = \frac{۱}{۲}(۲٫۰ \times ۱۰^۳\,\text{N/m})[(۰٫۰۵۰\,\text{m})^۲ - (-۰٫۰۵۰\,\text{m})^۲] = ۰$$

** ۳۰ در شکل ۷-۱۰ الف، جسمی به جرم m روی یک سطح افقی بی‌اصطکاک قرار دارد. این جسم به یک سر یک فنر افقی (با ثابت فنر k) که سر دیگرش ثابت شده وصل شده است. جسم در حالی که در آغاز در وضعیت فنر کشیده نشده ($x = ۰$) به حال سکون است، تحت اثر نیروی افقی ثابت $\vec{P}$ در جهت مثبت محور x قرار می‌گیرد. نمودار تغییرات انرژی جنبشی به‌دست آمده توسط جسم برحسب مکان x در شکل ۷-۳۶ نشان داده شده است. مقیاس محور قائم شکل با $K_s = ۴٫۰\,\text{J}$ مشخص شده است. (الف) بزرگی $\vec{P}$ چقدر است؟ (ب) مقدار k چیست؟



شکل ۷-۳۶ مسئله‌ی ۳۰.

حل قانون هوک و کار انجام شده توسط یک فنر در این فصل کتاب مورد بحث قرار گرفته‌اند. از قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی به صورت $\Delta K = W_a + W_s$ برای نقاط روی شکل ۷-۳۵ در $x = ۱٫۰\,\text{m}$ و $x = ۲٫۰\,\text{m}$ استفاده می‌کنیم. کار «انجام شده‌ی» W_a از نیروی ثابت $\vec{P}$ ناشی شده است:

$$۴\,\text{J} = P(۱٫۰\,\text{m}) - \frac{۱}{۲}k\,(۱٫۰\,\text{m})^۲$$

$$۰ = P(۲٫۰\,\text{m}) - \frac{۱}{۲}k\,(۲٫۰\,\text{m})^۲$$

(الف) از حل هم‌زمان معادلات بالا $P = ۸\,\text{N}$ به دست می‌آید.

(ب) به طور مشابه، $k = ۸\,\text{N/m}$ به دست می‌آید.

** ۳۱ تنها نیروی وارد به یک جسم ۲٫۰ کیلوگرمی هنگام حرکت کردن در جهت مثبت محور x دارای مؤلفه‌ی $F_x = -۶x\,\text{N}$ است، که در آن x برحسب متر است. سرعت جسم در مکان $x = ۳٫۰\,\text{m}$ برابر با $۸٫۰\,\text{m/s}$ است. (الف) سرعت جسم در مکان $x = ۴٫۰\,\text{m}$ چقدر است؟ (ب) به ازای چه مقدار مثبت x، سرعت جسم $۵٫۰\,\text{m/s}$ خواهد بود؟

حل (الف) وقتی جسم در راستای محور x از $x_i = ۳٫۰\,\text{m}$ تا $x_f = ۴٫۰\,\text{m}$ حرکت می‌کند، کار انجام شده توسط نیرو برابر است با

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x\,dx$$

$$= \int_{x_i}^{x_f} -۶x\,dx = -۳(x_f^۲ - x_i^۲) = -۳(۴٫۰^۲ - ۳٫۰^۲) = -۲۱\,\text{J}$$

بر طبق قضیه‌ی کار ـ انرژی، این کار باعث تغییر انرژی جنبشی زیر می‌شود

$$W = \Delta K = \frac{۱}{۲}m\,(v_f^۲ - v_i^۲)$$

که در آن v_i سرعت آغازی (در x_i) و v_f سرعت پایانی (در x_f) است. بنابراین، سرعت جسم در مکان $x = ۴٫۰\,\text{m}$ برابر است با

$$v_f = \sqrt{\frac{۲W}{m} + v_i^۲} = \sqrt{\frac{۲(-۲۱\,\text{J})}{۲٫۰\,\text{kg}} + (۸٫۰\,\text{m/s})^۲} = ۶٫۶\,\text{m/s}$$

(ب) در $x = x_f$ سرعت ذره $v_f = ۵٫۰\,\text{m/s}$ است. برای پیدا کردن x_f از قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی استفاده می‌کنیم. کار خالص انجام شده روی ذره $W = -۳(x_f^۲ - x_i^۲)$ است، در نتیجه از قضیه‌ی کار ـ انرژی داریم

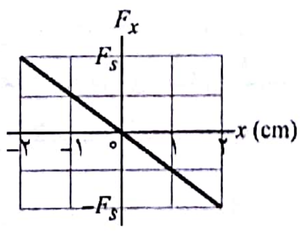
$$-۳(x_f^۲ - x_i^۲) = \frac{۱}{۲}m\,(v_f^۲ - v_i^۲)$$

و از آن‌جا داریم

$$x_f = \sqrt{-\frac{m}{۶}(v_f^۲ - v_i^۲) + x_i^۲}$$

$$= \sqrt{-\frac{۲٫۰\,\text{kg}}{۶\,\text{N/m}}((۵٫۰\,\text{m/s})^۲ - (۸٫۰\,\text{m/s})^۲) + (۳٫۰\,\text{m})^۲} = ۴٫۷\,\text{m}$$

** ۳۲ شکل ۷-۳۷ نمودار تغییرات F_x نیروی فنر را برحسب مکان x برای آرایش جسم ـ فنر شکل ۷-۱۰ نشان می‌دهد. مقیاس قائم شکل با $F_s = ۱۶۰٫۰\,\text{N}$ مشخص شده است. جسم را در مکان $x = ۱۲\,\text{cm}$ رها می‌کنیم. وقتی جسم از $x_i = +۸٫۰\,\text{cm}$ تا مکان‌های زیر حرکت می‌کند، فنر روی آن چقدر کار انجام می‌دهد (الف) $x = +۵٫۰\,\text{cm}$، (ب) $x = -۵٫۰\,\text{cm}$، (پ) $x = -۸٫۰\,\text{cm}$ و (ت) $x = -۱۰٫۰\,\text{cm}$.



شکل ۷-۳۷ مسئله‌ی ۳۲.

حل: کاری که نیروی فنر انجام می‌دهد از معادله‌ی ۷-۲۵ به صورت ($W_s = \frac{۱}{۲}k(x_i^۲ - x_f^۲)$) به دست می‌آید. چون $F_x = -kx$، در نتیجه شیب نمودار شکل ۷-۳۶ ثابت فنری k را به دست می‌دهد. مقدار این ثابت $k = ۸۰\,N/cm = ۸/۰ \times ۱۰^۳\,N/m$ است.

(الف) جسم از $x_i = +۸/۰\,cm$ تا $x = +۵/۰\,cm$ حرکت می‌کند و داریم

$$W_s = \frac{۱}{۲}(۸/۰ \times ۱۰^۳\,N/m)[(۰/۰۸۰m)^۲ - (۰/۰۵۰m)^۲]$$
$$= ۱۵/۶\,J \approx ۱۶\,J$$

(ب) جسم از $x_i = +۸/۰\,cm$ تا $x = -۵/۰\,cm$ حرکت می‌کند وداریم

$$W_s = \frac{۱}{۲}(۸/۰ \times ۱۰^۳\,N/m)[(۰/۰۸۰m)^۲ - (-۰/۰۵۰m)^۲]$$
$$= ۱۵/۶\,J \approx ۱۶\,J$$

(پ) جسم از $x_i = +۸/۰\,cm$ تا $x = -۸/۰\,cm$ حرکت می‌کند و داریم

$$W_s = \frac{۱}{۲}(۸/۰ \times ۱۰^۳\,N/m)[(۰/۰۸۰m)^۲ - (-۰/۰۸۰m)^۲] = ۰\,J$$

(ت) جسم از $x_i = +۸/۰\,cm$ تا $x = -۱۰/۰\,cm$ حرکت می‌کند و داریم

$$W_s = \frac{۱}{۲}(۸/۰ \times ۱۰^۳\,N/m)[(۰/۰۸۰m)^۲ - (-۰/۱۰m)^۲]$$
$$= -۱۴/۴\,J \approx -۱۴\,J$$

*** ۳۳ در شکل ۷-۱۹ الف، جسمی روی یک سطح افقی بی‌اصطکاک قرار دارد و ثابت فنر $۵۰\,N/m$ است. در آغاز فنر در حالت آرامش خود قرار دارد و جسم در مکان $x = ۰$ ساکن است. سپس، نیرویی به بزرگی ثابت $۳/۰\,N$ وارد می‌شود و جسم را در جهت مثبت محور x می‌کشد. در نتیجه، فنر کشیده و جسم متوقف می‌شود. وقتی جسم به این نقطه‌ی توقف می‌رسد، (الف) مکان جسم کجاست؟ (ب) چه کاری روی جسم توسط نیروی وارد شده انجام شده است؟ (پ) چه کاری روی جسم توسط نیروی فنر انجام شده است؟ در حین جابه‌جا شدن جسم، (ت) در چه مکانی انرژی جنبشی جسم بیشینه است و (ث) مقدار این انرژی جنبشی بیشینه چقدر است؟

حل: (الف) در این وضعیت معادله‌ی ۷-۲۸ به کار می‌رود، در نتیجه داریم

$$Fx = \frac{۱}{۲}kx^۲ \Rightarrow (۳/۰\,N)x = \frac{۱}{۲}(۵۰\,N/m)x^۲$$

از این‌جا پاسخ مناسب $x = (۳/۰/۲۵)m = ۰/۱۲m$ به‌دست می‌آید.

(ب) کار انجام شده توسط نیروی اعمال شده برابر است با

$$W_a = Fx = (۳/۰N)(۰/۱۲m) = ۰/۳۶\,J$$

(پ) بلافاصله از معادله‌ی ۷-۲۸ داریم: $W_s = -W_a = -۰/۳۶\,J$.

(ت) مقدار $K_f = K$ را به عنوان متغیر در نظر می‌گیریم و به ازای $K_i = ۰$ از معادله‌ی ۷-۲۷ داریم $K = Fx - \frac{۱}{۲}kx^۲$. از K نسبت به x مشتق می‌گیریم و نتیجه را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا مکان x_c متناظر با مقدار بیشینه‌ی K به دست آید:

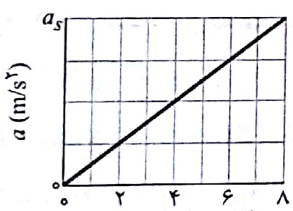
$$x_c = \frac{F}{k} = (۳/۰/۵۰)m = ۰/۰۶۰\,m$$

توجه کنید که در نقطه‌ی x_c نیروی اعمال شده و نیروی فنر «به تعادل» می‌رسند.

(ث) در نقطه‌ی x_c داریم $K = K_{max} = ۰/۰۹۰\,J$.

پودمان ۷-۵ کار انجام شده توسط نیروی متغیر

* ۳۴ آجری به جرم $۱۰kg$ در راستای محور x حرکت می‌کند. در شکل ۷-۳۸، نمودار تغییرات شتاب آجر برحسب مکان آن نشان داده شده و مقیاس محور قائم شکل با $a_s = ۲۰m/s^۲$ مشخص شده است. وقتی آجر از $x = ۰$ تا $x = ۸/۰m$ حرکت می‌کند، کار خالص انجام شده توسط نیرویی به وجود آورنده‌ی شتاب چیست؟



شکل ۷-۳۸ مسئله‌ی ۳۴.

حل: نمودار نشان می‌دهد که شتاب a به طور خطی با مختصه‌ی x تغییر می‌کند. بنابراین می‌توانیم بنویسیم $a = \alpha x$، که در آن α شیب نمودار است. از نظر عددی داریم

$$\alpha = \frac{۲۰\,m/s^۲}{۸/۰\,m} = ۲/۵\,s^{-۲}$$

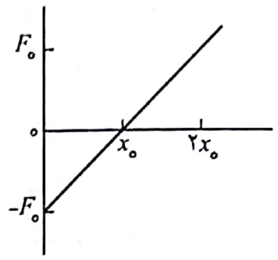
نیرویی که به آجر وارد می‌شود در جهت x مثبت است، و بر طبق قانون دوم نیوتون، بزرگی آن $F = ma = m\alpha x$ است. اگر x_f مختصه‌ی پایانی باشد، کار انجام شده توسط این نیرو برابر است با

$$W = \int_{0}^{x_f} F\,dx = ma\int_{0}^{x_f} x\,dx = \frac{ma}{۲}x_f^{۲}$$

$$= \frac{(۱۰\,\mathrm{kg})(۳/۰\,\mathrm{s^{-۲}})}{۲}(۸/۰\,\mathrm{m})^{۲} = ۸/۰\times۱۰^{۲}\,\mathrm{J}$$

* ۳۵ نیرویی که در راستای محور x به یک ذره اثر می‌کند از رابطه‌ی $F = F_0(\frac{x}{x_0}-۱)$ به دست می‌آید. مطلوب است تعیین کار انجام شده توسط این نیرو هنگام حرکت کردن ذره از $x=۰$ تا $x=۲x_0$، (الف) با ترسیم نمودار $F(x)$ و اندازه‌گیری کار از روی نمودار، و (ب) با انتگرال‌گیری از تابع $F(x)$.

حل: با داشتن نیروی یک بعدی $F(x)$، کار انجام شده با مساحت زیر نمودار برابر است: $W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx$.



(الف) نمودار $F(x)$ در بالا نشان داده شده است. در این‌جا x_0 را مثبت در نظر می‌گیریم. وقتی جسم از $x=۰$ تا $x=x_0$ حرکت می‌کند کار منفی و وقتی جسم از $x=x_0$ تا $x=۲x_0$ حرکت می‌کند کار مثبت است.

چون مساحت مثلث با قاعده ضربدر نصف ارتفاع برابر است، کار انجام شده از $x=۰$ تا $x=x_0$ برابر است با

$$W_۱ = -(x_0)(F_0)/۲$$

و کار انجام شده از $x=x_0$ تا $x=۲x_0$ برابر است با

$$W_۲ = (۲x_0 - x_0)(F_0)/۲ = (x_0)(F_0)/۲$$

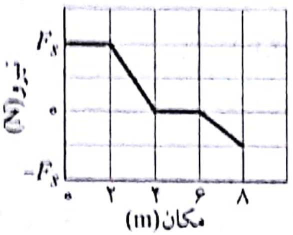
کار کل انجام شده با جمع این دو کار برابر است:

$$W = W_۱ + W_۲ = -\frac{۱}{۲}F_0x_0 + \frac{۱}{۲}F_0x_0 = ۰$$

(ب) انتگرال کار برابر است با

$$W = \int_{0}^{۲x_0} F_0\left(\frac{x}{x_0}-۱\right)dx = F_0\left(\frac{x}{۲x_0}-x\right)\Big|_{0}^{۲x_0} = ۰$$

* ۳۶ جسمی به جرم $۵/۰\,\mathrm{kg}$ بر اثر نیرویی که نمودار تغییرات آن برحسب مکان مطابق شکل ۷-۳۹ است، روی یک سطح افقی بی‌اصطکاک در خط راست حرکت می‌کند. مقیاس محور قائم شکل با $F_s = ۱۰/۰\,\mathrm{N}$ مشخص شده است. وقتی جسم از مبداء مختصات تا مکان $x = ۸/۰\,\mathrm{m}$ حرکت می‌کند، کار انجام شده توسط این نیرو چقدر است؟

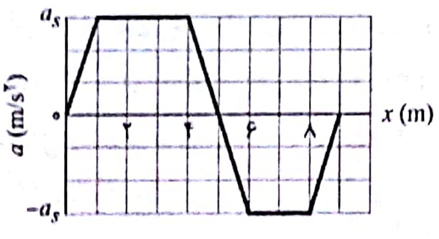


شکل ۷-۳۹ مسئله‌ی ۳۶.

حل: معادله‌ی ۷-۳۲ نشان می‌دهد که «مساحت» زیر نمودار با کار انجام شده برابر است. اگر این مساحت (مستطیل + مثلث) را پیدا کنیم، داریم

$$W = W_{۰<x<۲} + W_{۲<x<۴} + W_{۴<x<۶} + W_{۶<x<۸}$$
$$= (۲۰+۱۰+۰-۵)\,\mathrm{J} = ۲۵\,\mathrm{J}$$

** ۳۷ شکل ۷-۴۰ نمودار تغییرات شتاب ذره‌ای به جرم $۲/۰۰\,\mathrm{kg}$ را، که از حال سکون تحت اثر نیروی $\vec{F}_a$ در راستای محور x از $x=۰$ تا $x=۹/۰\,\mathrm{m}$ حرکت می‌کند، نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم شکل با $a_s = ۶/۰\,\mathrm{m/s^۲}$ مشخص شده است. در هنگام رسیدن ذره به مکان‌های زیر نیرو چقدر کار بر روی ذره انجام داده است (الف) $x = ۴/۰\,\mathrm{m}$، (ب) $x = ۷/۰\,\mathrm{m}$، و (پ) $x = ۹/۰\,\mathrm{m}$؟ در هنگام رسیدن به مکان‌های زیر، تندی ذره و جهت آن چیست (ت) $x = ۴/۰\,\mathrm{m}$، (ث) $x = ۷/۰\,\mathrm{m}$، و (ج) $x = ۹/۰\,\mathrm{m}$؟



شکل ۷-۴۰ مسئله‌ی ۳۷.

حل: (الف) ابتدا محور قائم را در جرم ضرب می‌کنیم تا به نمودار نیروی اعمال شده تبدیل شود. اکنون مساحت مستطیل و مثلث در

نمودار را (برای $۴ \le x \le ۰$) با هم جمع می‌کنیم تا کار انجام شده $۴۲\,J$ به دست آید.

(ب) «مساحت» زیر محور را منفی در نظر می‌گیریم، در نتیجه (برای $۷ \le x \le ۰$) در مکان $x = ۷/۰\,m$ کار انجام شده‌ی $۳۰\,J$ به دست می‌آید.

(پ) در $x = ۹/۰\,m$ کار انجام شده برابر با $۱۲\,J$ است.

(ت) از معادله‌ی ۷-۱۰ (همراه با معادله‌ی ۷-۱)، تندی $v = ۶/۵\,m/s$ در مکان $x = ۴/۰\,m$ به دست می‌آید. با توجه به نمودار اصلی (که a برحسب x رسم شده است) معلوم می‌شود که (چون ذره از حال سکون شروع به حرکت کرده است) ذره فقط در جهت $+x$ تا مکان $x = ۴/۰\,m$ دارای شتاب تند کننده است و در نتیجه بردار سرعت آن در $x = ۴/۰\,m$ در جهت $+x$ است.

(ث) اکنون با استفاده از نتیجه‌ی قسمت (ب) و معادله‌ی ۷-۱۰ (همراه با معادله‌ی ۷-۱) تندی در $x = ۷/۰\,m$ را مساوی با $۵/۵\,m/s$ به دست می‌آوریم. اگرچه ذره در بازه‌ی $۷ \le x \le ۰$ دارای شتاب کند کننده است، اما جهت بردار سرعت آن هنوز در جهت $+x$ است.

(ج) سرانجام، با استفاده از نتیجه‌ی قسمت (پ) و معادله‌ی ۷-۱۰ (همراه با معادله‌ی ۷-۱) تندی ذره در $x = ۹/۰\,m$ مساوی با $v = ۳/۵\,m/s$ به دست می‌آید. مطمئناً در بازه‌ی $۹ \le x \le ۰$ ذره دارای شتاب کند کننده‌ی قابل توجه بوده است، اما جهت بردار سرعت آن **هنوز هم** در جهت $+x$ است.

** ۳۸ جسمی ۱/۵ کیلوگرمی در حالی که روی یک سطح افقی بی‌اصطکاک ساکن است، تحت اثر یک نیروی افقی در جهت مثبت محور x قرار می‌گیرد. این نیرو از رابطه‌ی $F(x) = (۲/۵ - x^۲)\hat{i}\,N$ به دست می‌آید، که در آن x برحسب متر و مکان آغازی جسم $x = ۰$ است. (الف) جسم درحین عبور از مکان $x = ۲/۰\,m$ انرژی جنبشی‌اش چقدر است؟ (ب) بیشینه‌ی انرژی جنبشی جسم در فاصله‌ی $x = ۰$ تا $x = ۲/۰\,m$ چیست؟

حل: (الف) با استفاده از قضیه‌ی کار ـ انرژی داریم

$$K_f = K_i + \int_۰^{۲/۰} (۲/۵ - x^۲)dx$$

$$= ۰ + (۲/۵)(۲/۰) - \frac{۱}{۳}(۲/۰)^۳ = ۲/۳\,J$$

(ب) برای نقطه‌ی انتهایی متغیر (درفاصله‌ی $x = ۰$ تا $x = ۲/۰\,m$)، K_f را به صورت تابعی از x داریم که می‌توان از آن مشتق گرفت و مقدار بیشینه‌ی آن را به دست آورد، اما معادل آن می‌توان x را به ازای $F = ۰$ پیدا کرد:

$$F = ۰ \Rightarrow ۲/۵ - x^۲ = ۰$$

بنابراین، به‌ازای $x = \sqrt{۲/۵} \approx ۱/۶\,m$ مقدار K فرین است و داریم

$$K_f = K_i + \int_۰^{\sqrt{۲/۵}} (۲/۵ - x^۲)dx$$

$$= ۰ + (۲/۵)(\sqrt{۲/۵}) - \frac{۱}{۳}(\sqrt{۲/۵})^۳ = ۲/۶\,J$$

با توجه به پاسخ قسمت (الف)، واضح است که این مقدار فرین یک مقدار بیشینه است.

** ۳۹ در هنگام حرکت کردن یک ذره در راستای محور x به آن نیروی $\vec{F} = (cx - ۳/۰۰x^۲)\hat{i}$ وارد می‌شود. در این رابطه $\vec{F}$ برحسب نیوتون، x برحسب متر و c یک مقدار ثابت است. انرژی جنبشی ذره در مکان $x = ۰$، برابر با $۲۰/۰\,J$ و در مکان $x = ۳/۰۰\,m$، برابر با $۱۱/۰\,J$ است. مقدار c را پیدا کنید.

حل: وقتی ذره در راستای محور x از $x_i = ۰$ تا $x_f = ۳/۰۰\,m$ حرکت می‌کند، کار انجام شده توسط نیرو برابر است با

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x\,dx = \int_{x_i}^{x_f} (cx - ۳/۰۰x^۲)dx$$

$$= \left(\frac{c}{۲}x^۲ - x^۳\right)_۰^۳ = \frac{c}{۲}(۳/۰۰)^۲ - (۳/۰۰)^۳ = ۴/۵۰c - ۲۷/۰$$

اما از قضیه‌ی کار ـ انرژی داریم

$$W = \Delta K = (۱۱/۰ - ۲۰/۰) = -۹/۰۰\,J$$

پس می‌توان نوشت:

$$۴/۵۰c - ۲۷/۰ = -۹/۰۰$$

که از آن‌جا $c = ۴/۰۰\,N/m$ به دست می‌آید.

** ۴۰ یک قوطی ماهی ساردین با نیرویی به بزرگی $F = \exp(-۴x^۲)$، که در آن x برحسب متر و F برحسب نیوتون است، بر روی محور x از $x = ۰/۲۵\,m$ تا $x = ۲/۲۵\,m$ حرکت داده می‌شود. (در اینجا exp نماد تابع نمایی است). این نیرو چقدر کار روی قوطی انجام می‌دهد؟

حل: با استفاده از معادله‌ی ۷-۳۲ داریم

$$W = \int_{۰/۲۵}^{۲/۲۵} e^{-۴x^۲}dx = ۰/۲۱\,J$$

که در آن نتیجه را به روش عددی به دست آورده‌ایم. البته بعضی ماشین حساب‌ها یا بسته‌های نرم‌افزاری ریاضی می‌توانند چنین انتگرالی را حل کنند.

** ۴۱ تک نیرویی به‌شیئی به‌جرم ۳٫۰kg وارد می‌شود. معادله‌ی تغییرات مکان شیء به صورت $x = ۳٫۰t - ۴٫۰t^۲ + ۱٫۰t^۳$ است، که در آن x برحسب متر و t برحسب ثانیه است. مطلوب است تعیین کار انجام شده توسط نیرو روی شیء در مدت $t = ۰$ تا $t = ۴٫۰\,s$.

حل: این مسئله را با استفاده از معادله‌ی ۷-۱۰ (قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی) حل می‌کنیم. برای پیدا کردن انرژی‌های جنبشی آغازی و پایانی، باید تندی‌ها را داشته باشیم:

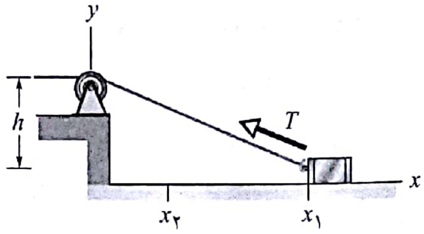
$$v = \frac{dx}{dt} = ۳٫۰ - ۸٫۰t + ۳٫۰t^۲$$

بنابراین، تندی آغازی $v_i = ۳٫۰\,m/s$ و تندی در لحظه‌ی $t = ۴\,s$ مساوی با $v_f = ۱۹\,m/s$ است. در نتیجه برای جسمی به جرم $m = ۳٫۰\,kg$، تغییر انرژی جنبشی برابر است با

$$\Delta K = \frac{۱}{۲}m(v_f^۲ - v_i^۲) = ۵۲۸\,J$$

با استفاده از قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی می‌توان نتیجه گرفت که کار انجام شده $W = ۵٫۳ \times ۱۰^۲\,J$ است.

*** ۴۲ شکل ۷-۴۱ طناب متصل به صندوقی را نشان می‌دهد که می‌تواند در راستای محور x بر روی یک ریل افقی بی‌اصطکاک بلغزد. انتهای سمت چپ این طناب واقع در ارتفاع $h = ۱٫۲۰\,m$ از روی قرقره‌ای با جرم و اصطکاک ناچیز طوری کشیده می‌شود که صندوق از $x_۱ = ۳٫۰۰\,m$ تا $x_۲ = ۱٫۰۰\,m$ بر روی ریل می‌لغزد. در طول حرکت نیروی کشش طناب دارای مقدار ثابت ۲۵٫۰N است. انرژی جنبشی صندوق در طول حرکت چه تغییری می‌کند؟



شکل ۷-۴۱ مسئله‌ی ۴۲.

حل: این مسئله را با استفاده از قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی حل می‌کنیم که می‌گوید تغییر انرژی جنبشی با کار انجام شده توسط نیروی اعمال شده برابر است: $\Delta K = W$. در این مسئله کار انجام شده $W = Fd$ است که F نیروی کشش طناب و d طول طناب کشیده شده از $x_۱$ تا $x_۲$ است. با توجه به شکل داریم

$$d = \sqrt{x_۱^۲ + h^۲} - \sqrt{x_۲^۲ + h^۲}$$
$$= \sqrt{(۳٫۰۰\,m)^۲ + (۱٫۲۰\,m)^۲} - \sqrt{(۱٫۰۰\,m)^۲ + (۱٫۲۰\,m)^۲}$$
$$= ۳٫۲۳\,m - ۱٫۲۰\,m = ۲٫۰\,m$$

و از آنجا $\Delta K = Fd = (۲۵٫۰N)(۲٫۰m) = ۵۰J$ به‌دست می‌آید.

پودمان ۷-۶ توان

* ۴۳ یک نیروی ۵٫۰ نیوتونی به جسمی به جرم ۱۵kg، که در آغاز ساکن است، وارد می‌شود. مطلوب است محاسبه‌ی کار این نیرو (الف) در ثانیه‌ی اول، (ب) در ثانیه‌ی دوم و (پ) در ثانیه‌ی سوم، هم‌چنین، (ت) توان لحظه‌ای ناشی از این نیرو در پایان ثانیه‌ی سوم.

حل: (الف) توان از رابطه‌ی $P = Fv$ به دست می‌آید و کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ از لحظه‌ی $t_۱$ تا لحظه‌ی $t_۲$ برابر است با

$$W = \int_{t_۱}^{t_۲} P\,dt = \int_{t_۱}^{t_۲} Fv\,dt$$

چون $\vec{F}$ نیروی برایند است، بزرگی شتاب $a = F/m$ است و چون سرعت آغازی $v_۰ = ۰$ است، سرعت به صورت تابعی از زمان $v = v_۰ + at = (F/m)t$ است. بنابراین، داریم

$$W = \int_{t_۱}^{t_۲} (F^۲/m)t\,dt = \frac{۱}{۲}(F^۲/m)(t_۲^۲ - t_۱^۲)$$

به ازای $t_۱ = ۰$ و $t_۲ = ۱٫۰\,s$، داریم

$$W = \frac{۱}{۲}\left(\frac{(۵٫۰\,N)^۲}{۱۵\,kg}\right)(۱٫۰\,s)^۲ = ۰٫۸۳\,J$$

(ب) به ازای $t_۱ = ۱٫۰\,s$ و $t_۲ = ۲٫۰\,s$، داریم

$$W = \frac{۱}{۲}\left(\frac{(۵٫۰\,N)^۲}{۱۵\,kg}\right)[(۲٫۰\,s)^۲ - (۱٫۰\,s)^۲] = ۲٫۵\,J$$

(پ) به ازای $t_۱ = ۲٫۰\,s$ و $t_۲ = ۳٫۰\,s$، داریم

$$W = \frac{۱}{۲}\left(\frac{(۵٫۰\,N)^۲}{۱۵\,kg}\right)[(۳٫۰\,s)^۲ - (۲٫۰\,s)^۲] = ۴٫۲\,J$$

(ت) با قرار دادن $v = (F/m)t$ در $P = Fv$، رابطه‌ی

$P = F^2 t / m$ برای توان در هر مدت زمان t به دست می‌آید. در پایان ثانیه‌ی سوم داریم

$$P = \left(\frac{(۵/۰\,N)^۲(۳/۰\,s)}{۱۵\,kg}\right) = ۵/۰\,W$$

* ۴۴ اسکی‌بازی به وسیله‌ی طنابی روی یک سطح شیب‌دار بی‌اصطکاک و با زاویه‌ی شیب ۱۲ درجه نسبت به افق به سمت بالا کشیده می‌شود. طناب با تندی ثابت $۱/۰\,m/s$ به موازات سطح حرکت می‌کند. نیروی طناب برای کشیدن اسکی‌باز روی سطح شیب‌دار به اندازه‌ی $۸/۰\,m$ کاری برابر با $۹۰۰\,J$ انجام می‌دهد. (الف) اگر طناب با تندی ثابت $۲/۰\,m/s$ حرکت کند، نیروی طناب برای حرکت دادن اسکی‌باز به اندازه‌ی $۸/۰\,m$ بر روی سطح شیب‌دار، چقدر کار انجام می‌دهد؟ وقتی طناب با تندی (ب) $۱/۰\,m/s$ و (پ) با تندی $۲/۰\,m/s$ حرکت می‌کند، نیروی طناب با چه آهنگی روی اسکی‌باز کار انجام می‌دهد؟

حل: (الف) چون تندی ثابت است، پس $\Delta K = ۰$، در نتیجه بر طبق معادله‌ی ۷-۱۵، $W_a = -W_g$. چون W_g در هر دو حالت یکسان است (همان وزن و همان مسیر)، درنتیجه داریم $W_a = ۸/۸\times۱۰^۲\,J$.

(ب) چون تندی $۱/۰\,m/s$ ثابت است، مسافت $۸/۰$ متر در $۸/۰$ ثانیه پیموده می‌شود. با استفاده از معادله‌ی ۷-۴۲، و دانستن این نکته که توان متوسط، توان در حالتی است که کار با آهنگ پایا انجام می‌شود، داریم

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{۹۰۰\,J}{۸/۰\,s} = ۱/۱۲\times۱۰^۲\,W$$

(پ) چون تندی $۲/۰\,m/s$ ثابت است، مسافت $۷/۰\,m$ در مدت $۴/۵$ ثانیه پیموده می‌شود. با استفاده از معادله‌ی ۷-۴۲، به جای ***توان متوسط***، ***توان*** را قرار می‌دهیم و داریم

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{۹۰۰\,J}{۴/۰\,s} = ۲۲۵\,W$$

* ۴۵ جسمی به جرم $۱۰۰\,kg$ به وسیله‌ی یک نیروی ۱۲۲ نیوتونی، که راستایش در بالای افق زاویه‌ی ۳۷ درجه می‌سازد، با تندی ثابت $۵/۰\,m/s$ روی یک سطح افقی کشیده می‌شود. این نیرو با چه آهنگی روی جسم کار انجام می‌دهد؟

حل: توان مربوط به نیروی $\vec{F}$ از رابطه‌ی $P = \vec{F}\cdot\vec{v}$ به دست می‌آید که در آن $\vec{v}$ سرعت جسمی است که نیرو به آن وارد می‌شود. بنابراین داریم

$$P = \vec{F}\cdot\vec{v} = Fv\cos\phi$$
$$= (۱۲۲\,N)(۵/۰\,m/s)\cos ۳۷^\circ = ۴/۹\times۱۰^۲\,W$$

* ۴۶ جرم اتاقک آسانسوری با بار درون آن $۳/۰\times۱۰^۳\,kg$ است. اتاقک در مدت ۲۳ ثانیه با تندی ثابت به اندازه‌ی $۲۱۰\,m$ به سمت بالا حرکت می‌کند. نیروی کشش کابل با چه آهنگ متوسطی روی اتاقک کار انجام می‌دهد؟

حل: می‌دانیم که نیروی کشش کابل باید با وزن کل برابر باشد (زیرا شتاب وجود ندارد) و از معادله‌ی ۷-۴۷ داریم

$$P = Fv\cos\theta = mg\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)$$

در این‌جا از این واقعیت استفاده کرده‌ایم که $\theta = ۰^\circ$ است (جهت نیروی کابل و جهت حرکت آسانسور هر دو به طرف بالا است). در نتیجه داریم

$$P = (۳/۰\times۱۰^۳\,kg)(۹/۸\,m/s^۲)\left(\frac{۲۱۰\,m}{۲۳\,s}\right) = ۲/۷\times۱۰^۵\,W$$

** ۴۷ ماشینی یک بسته‌ی ۴/۰ کیلوگرمی را از مکان آغازی $\vec{d}_i = (۰/۵۰\,m)\hat{i} + (۰/۷۵\,m)\hat{j} + (۰/۲۰\,m)\hat{k}$ در زمان $t = ۰$ به مکان پایانی $\vec{d}_f = (۷/۵۰\,m)\hat{i} + (۱۲/۰\,m)\hat{j} + (۷/۲۰\,m)\hat{k}$ در زمان $t = ۱۲$ می‌برد. نیروی ثابت وارد به بسته از سوی ماشین $\vec{F} = (۲/۰۰\,N)\hat{i} + (۴/۰۰\,N)\hat{j} + (۶/۰۰\,N)\hat{k}$ است. برای انجام دادن این جابه‌جایی، مطلوب است تعیین (الف) کار انجام شده روی بسته توسط نیروی ماشین و (ب) توان متوسط نیروی ماشین وارد به بسته.

حل: (الف) از معادله‌ی ۷-۸ داریم

$$W = F_x\Delta x + F_y\Delta y + F_z\Delta z$$
$$= (۲/۰۰\,N)(۷/۵\,m - ۰/۵۰\,m) + (۴/۰۰\,N)(۱۲/۰\,m - ۰/۷۵\,m) +$$
$$+ (۶/۰۰\,N)(۷/۲\,m - ۰/۲۰\,m)$$
$$= ۱۰۱\,J \approx ۱/۰\times۱۰^۲\,J$$

(ب) این نتیجه را به $۱۲\,s$ تقسیم می‌کنیم (معادله‌ی ۷-۴۲ را ببینید) که $P = ۸/۴\,W$ به دست می‌آید.

** ۴۸ ملاقه‌ای به جرم $۰/۳۰\,\mathrm{kg}$ که در حال لغزیدن روی یک سطح افقی بی‌اصطکاک است، به یک سر فنری افقی (با ثابت فنر $k = ۵۰۰\,\mathrm{N/m}$) وصل شده و سر دیگر فنر ثابت است. وقتی که ملاقه از مکان تعادل خود (نقطه‌ای که در آن نیروی فنر صفر است) می‌گذرد، انرژی جنبشی‌اش $۱۰\,\mathrm{J}$ است. (الف) هنگام عبور کردن ملاقه از مکان تعادل، فنر با چه آهنگی روی آن کار انجام می‌دهد؟ (ب) وقتی فنر به اندازه‌ی $۰/۱۰\,\mathrm{m}$ متراکم و ملاقه از مکان تعادل دور می‌شود، فنر با چه آهنگی روی آن کار انجام می‌دهد؟

حل: (الف) چون نیرویی که فنر به جرم وارد می‌کند در هنگام عبور جرم از مکان تعادل فنر صفر است، آهنگ انجام کار توسط فنر بر روی جرم در آن لحظه نیز صفر است.

(ب) آهنگ انجام کار از رابطه‌ی $P = \vec{F}\cdot\vec{v} = -Fv$ به‌دست می‌آید، که در آن علامت منفی مربوط به مخالف بودن جهت $\vec{F}$ و جهت $\vec{v}$ است. بزرگی نیرو برابر است با

$$F = kx = (۵۰۰\,\mathrm{N/m})(۰/۱۰\,\mathrm{m}) = ۵۰\,\mathrm{N}$$

تندی v از پایسته بودن انرژی دستگاه فنر ـ جرم به دست می‌آید

$$E = K + U = ۱۰\,\mathrm{J} = \frac{۱}{۲}mv^۲ + \frac{۱}{۲}kx^۲$$

$$= \frac{۱}{۲}(۰/۳۰\,\mathrm{kg})v^۲ + \frac{۱}{۲}(۵۰۰\,\mathrm{N/m})(۰/۱۰\,\mathrm{m})^۲$$

که در نتیجه $v = ۷/۰\,\mathrm{m/s}$ به دست می‌آید. پس آهنگ انجام کار برابراست با

$$P = -Fv = -(۵۰\,\mathrm{N})(۷\,\mathrm{m/s}) = -۳/۵\times۱۰^۲\,\mathrm{W}$$

** ۴۹ اتاقک کاملاً بارگیری شده‌ی آسانسوری که به آرامی حرکت می‌کند، با محموله‌ی خود دارای جرم کل $۱۲۰۰\,\mathrm{kg}$ است. می‌خواهیم آسانسور از حالت سکون در مدت $۳/۰$ دقیقه مسافت $۵۴\,\mathrm{m}$ را به سمت بالا بپیماید و سپس متوقف شود. جرم وزنه‌ی تعادل آسانسور فقط $۹۵۰\,\mathrm{kg}$ است. در نتیجه، برای کشیدن آسانسور به سمت بالا باید موتور به آن کمک کند. توان متوسطی که لازم است نیروی موتور ازطریق کابل به آسانسور بدهد، چقدر است؟

حل: آسانسور بارگیری شده با تندی ثابت به طرف بالا حرکت می‌کند. نیروهای دخیل عبارت‌اند از: نیروی گرانشی وارد بر آسانسور، نیروی گرانشی وارد بر وزنه‌ی تعادل، و نیرویی که موتور از طریق کابل وارد می‌کند. کار کل انجام شده با جمع کار انجام شده توسط گرانش بر روی آسانسور، کار انجام شده توسط گرانش بر روی وزنه‌ی تعادل، و کار انجام شده توسط موتور بر روی دستگاه، برابر است:

$$W = W_e + W_c + W_m$$

چون آسانسور با سرعت ثابت حرکت می‌کند، انرژی جنبشی آن تغییر نمی‌کند و بر طبق قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی، کار کل انجام شده صفر است، یعنی $W = \Delta K = ۰$.

آسانسور مسافت $۵۴\,\mathrm{m}$ را ***به طرف بالا*** می‌پیماید، در نتیجه کار انجام شده توسط گرانش بر روی آسانسور برابر است با

$$W_e = -m_e gd = -(۱۲۰۰\,\mathrm{kg})(۹/۸۰\,\mathrm{m/s^۲})(۵۴\,\mathrm{m})$$
$$= -۶/۳۵\times۱۰^۵\,\mathrm{J}$$

وزنه‌ی تعادل همان مسافت را ***به طرف پایین*** می‌پیماید، در نتیجه کار انجام شده توسط گرانش بر روی آن برابر است با

$$W_c = m_c gd = (۹۵۰\,\mathrm{kg})(۹/۸۰\,\mathrm{m/s^۲})(۵۴\,\mathrm{m})$$
$$= ۵/۰۲\times۱۰^۵\,\mathrm{J}$$

چون $W = ۰$، پس کار انجام شده توسط موتور بر روی دستگاه برابر است با

$$W_m = -W_e - W_c = ۶/۳۵\times۱۰^۵\,\mathrm{J} - ۵/۰۳\times۱۰^۵\,\mathrm{J}$$
$$= ۱/۳۲\times۱۰^۵\,\mathrm{J}$$

این کار در بازه‌ی زمانی $\Delta t = ۳/۰\,\mathrm{min} = ۱۸۰\,\mathrm{s}$ انجام شده است، در نتیجه توانی که موتور برای بالا بردن آسانسور تولید می‌کند برابر است با

$$P = \frac{W_m}{\Delta t} = \frac{۱/۳۲\times۱۰^۵\,\mathrm{J}}{۱۸۰\,\mathrm{s}} = ۷/۴\times۱۰^۲\,\mathrm{W}$$

** ۵۰ (الف) یک شیء ذره مانند که در زمان معینی تحت تأثیر نیروی $\vec{F} = (۴/۰\,\mathrm{N})\hat{i} - (۲/۰\,\mathrm{N})\hat{j} + (۹/۰\,\mathrm{N})\hat{k}$ قرار دارد، سرعتش $\vec{v} = -(۲/۰\,\mathrm{m/s})\hat{i} + (۴/۰\,\mathrm{m/s})\hat{k}$ است. این نیرو با چه آهنگ لحظه‌ای روی شیء کار انجام می‌دهد؟ (ب) در زمان دیگری سرعت شیء فقط دارای مؤلفه‌ی y است. اگر نیرو تغییر نکند و توان لحظه‌ای $-۱۲\,\mathrm{W}$ باشد، سرعت شیء در آن زمان چیست؟

حل: (الف) با استفاده از معادلات ۷-۴۸ و ۳-۲۳ داریم

$$P=\vec{F}\cdot\vec{v}=(4.0\,N)(-2.0\,m/s)+(9.0\,N)(4.0\,m/s)=28\,W$$

(ب) باز هم از معادلات ۷-۴۸ و ۳-۲۳، اما با یک مؤلفه‌ی سرعت $\vec{v}=v\hat{j}$، داریم

$$P=\vec{F}\cdot\vec{v}\Rightarrow -10\,W=(-2.0\,N)v$$

که در نتیجه $v=5.0\,m/s$ به دست می‌آید.

** ۵۱ نیروی $\vec{F}=(3.00\,N)\hat{i}+(7.00\,N)\hat{j}+(7.00\,N)\hat{k}$ به شیء متحرکی به‌جرم ۲٫۰۰kg وارد می‌شود و در مدت ۴٫۰۰s از مکان آغازی $\vec{d}_i=(3.00\,m)\hat{i}-(2.00\,m)\hat{j}+(5.00\,m)\hat{k}$ به مکان پایانی $\vec{d}_f=-(5.00\,m)\hat{i}+(4.00\,m)\hat{j}+(7.00\,m)\hat{k}$ حرکت می‌کند. مطلوب است تعیین (الف) کار انجام شده توسط این نیرو در بازه‌ی زمانی ۴٫۰۰s بر روی شیء، (ب) توان متوسط ناشی از نیرو در این بازه‌ی زمانی، و (پ) زاویه‌ی میان بردارهای $\vec{d}_i$ و $\vec{d}_f$.

حل: (الف) جابه‌جایی جسم برابر است با

$$\vec{d}=\vec{d}_f-\vec{d}_i=(-8.00\,m)\hat{i}+(6.00\,m)\hat{j}+(2.00\,m)\hat{k}$$

در نتیجه از معادله‌ی ۷-۸ داریم

$$W=\vec{F}\cdot\vec{d}=(3.00\,N)(-8.00\,m)+(7.00\,N)(6.00\,m)+(7.00\,N)(2.00\,m)=32.0\,J$$

(ب) توان متوسط از معادله‌ی ۷-۴۲ به دست می‌آید:

$$P_{avg}=\frac{W}{t}=\frac{32.0}{4.00}=8.00\,W$$

(پ) فاصله از مبداء مختصات تا مکان آغازی برابر است با

$$d_i=\sqrt{(3.00\,m)^2+(-2.00\,m)^2+(5.00\,m)^2}=6.16\,m$$

و بزرگی فاصله از مبداء مختصات تا مکان پایانی برابر است با

$$d_f=\sqrt{(-5.00\,m)^2+(4.00\,m)^2+(7.00\,m)^2}=9.49\,m$$

حاصل‌ضرب نقطه‌ای این دو مقدار برابر است با

$$\vec{d}_i\cdot\vec{d}_f=(3.00\,m)(-5.00\,m)+(-2.00\,m)(4.00\,m)+(5.00\,m)(7.00\,m)=12.0\,m^2$$

بنابراین، زاویه‌ی بین دو بردار برابر است با

$$\phi=\cos^{-1}\left(\frac{\vec{d}_i\cdot\vec{d}_f}{d_i d_f}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{12.0}{(6.16)(9.49)}\right)=78.2^\circ$$

*** ۵۲ یک خودرو ویژه از حالت سکون شتاب می‌گیرد و در حالی که موتور آن با توان ثابت P کار می‌کند، مسافت معینی را در زمان T می‌پیماید. اگر راننده بتواند توان موتور خودرو را به مقدار جزئی dP افزایش دهد، مدت پیمودن همان مسافت چقدر تغییر می‌کند؟

حل: بنابر قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی، توان خودرو برابر است با

$$P=\frac{dW}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=mv\frac{dv}{dt}=\text{ثابت}$$

از رابطه‌ی بالا $dt=mv\,dv/P$ به دست می‌آید که می‌توان از آن انتگرال گرفت:

$$\int_0^T dt=\int_0^{v_T}\frac{mv\,dv}{P}\Rightarrow T=\frac{mv_T^2}{2P}$$

در این‌جا v_T تندی خودرو در لحظه‌ی $t=T$ است. از طرف دیگر، مسافت کل پیموده شده را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$L=\int_0^T v\,dt=\int_0^{v_T} v\frac{mv\,dv}{P}=\frac{m}{P}\int_0^{v_T} v^2\,dv=\frac{mv_T^3}{3P}$$

طرفین رابطه‌ی L را به توان دو می‌رسانیم و مقدار T را در آن قرار می‌دهیم:

$$L^2=\left(\frac{mv_T^3}{3P}\right)^2=\frac{8P}{9m}\left(\frac{mv_T^2}{2P}\right)^3=\frac{8PT^3}{9m}$$

در نتیجه داریم

$$PT^3=\frac{9}{8}mL^2=\text{ثابت}$$

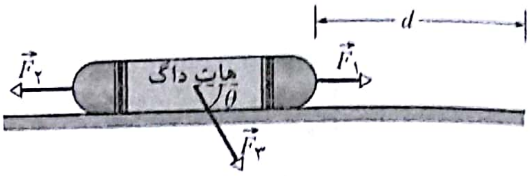
از این معادله مشتق می‌گیریم که در نتیجه خواهیم داشت

$$dP\,T^3+3PT^2\,dT=0\Rightarrow dT=-\frac{T}{3P}dP$$

مسئله‌های بیشتر

۵۳ شکل ۷-۴۲ یک بسته‌ی سرد هات داگ را نشان می‌دهد که تحت اثر سه نیرو روی یک سطح افقی بی‌اصطکاک به سمت راست می‌لغزد و مسافت $d=20.0\,cm$ را می‌پیماید. دو تا از این نیروها افقی و دارای بزرگی $F_1=5.00\,N$ و $F_2=1.00\,N$ هستند؛ نیروی سوم تحت زاویه‌ی $\theta=60.0^\circ$ به سمت پایین وارد می‌شود و بزرگی‌اش $F_3=4.00\,N$ است. (الف) در طی این جابه‌جایی ۲۰٫۰cm، ***کار خالص*** انجام شده روی بسته توسط سه نیروی وارد شده، نیروی گرانشی وارد به بسته و نیروی عمودی وارد به بسته، چیست؟ (ب) اگر بسته دارای جرم

۲٫۰kg و انرژی جنبشی آغازی صفر باشد، تندی آن در پایان این جابه‌جایی چقدر است؟



شکل ۷-۴۲ مسئله‌ی ۵۳.

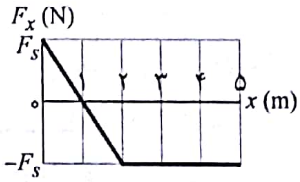
حل: (الف) چون مؤلفه‌ی x نیروی سوم به صورت $F_{3x} = (4.00\,\text{N})\cos(60°)$ است، از معادله‌ی ۷-۸ استفاده می‌کنیم:

$$W = [5.00\,\text{N} - 1.00\,\text{N} + (4.00\,\text{N})\cos 60°](0.20\,\text{m}) = 1.20\,\text{J}$$

(ب) در نتیجه از معادله‌ی ۷-۱۰ (همراه با معادله‌ی ۷-۱) داریم

$$v = \sqrt{2W/m} = 1.10\,\text{m/s}$$

۵۴ هنگام حرکت کردن جسمی به جرم ۲٫۰kg در راستای محور x، تنها نیروی مؤثر بر آن طبق نمودار شکل ۷-۴۳، تغییر می‌کند. مقیاس محور قائم شکل با $F_s = 4.0\,\text{N}$ مشخص شده است. سرعت جسم در مکان $x = 0$ برابر با $4.0\,\text{m/s}$ است. (الف) انرژی جنبشی جسم در مکان $x = 3.0\,\text{m}$ چقدر است؟ (ب) انرژی جنبشی جسم به ازای چه مقدار x برابر با $8.0\,\text{J}$ است؟ (پ) بیشینه‌ی انرژی جنبشی جسم در فاصله‌ی $x = 0$ تا $x = 5.0\,\text{m}$ چقدر است؟



شکل ۷-۴۳ مسئله‌ی ۵۴.

حل: از معادله‌ی ۷-۳۲ معلوم می‌شود که «مساحت» زیر نمودار با کار انجام شده برابر است. این مساحت شامل یک مستطیل و یک مثلث است و ما از قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی استفاده می‌کنیم. نقطه‌ی آغازی را $x = 0$ در نظر می‌گیریم که در آن‌جا $v_0 = 4.0\,\text{m/s}$ است.

(الف) به ازای $K_i = \frac{1}{2}mv_0^2 = 16\,\text{J}$ داریم

$$K_3 - K_0 = W_{0<x<1} + W_{1<x<2} + W_{2<x<3} = -4.0\,\text{J}$$

بنابراین K_3 (انرژی جنبشی در $x = 3.0\,\text{m}$) مساوی با $12\,\text{J}$ است.

(ب) کار $W_{3<x<x_f}$ را به صورت تابع $F_x\,\Delta x = (-4.0\,\text{N})(x_f - 3.0\,\text{m})$ در نظر می‌گیریم و از قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی استفاده می‌کنیم:

$$K_{x_f} - K_3 = W_{3<x<x_f}$$

$$K_{x_f} - 12 = (-4)(x_f - 3.0)$$

درنتیجه به‌ازای $x = 4.0\,\text{m}$ انرژی جنبشی برابربا $K_{x_f} = 8.0\,\text{J}$ است.

(پ) مادامی که کار مثبت است، انرژی جنبشی افزایش می‌یابد. نمودار نشان می‌دهد که این وضعیت تا $x = 1.0\,\text{m}$ برقرار است. در آن مکان، انرژی جنبشی برابر است با

$$K_1 = K_0 + W_{0<x<1} = 16\,\text{J} + 2.0\,\text{J} = 18\,\text{J}$$

۵۵ اسبی با تندی $6.0\,\text{mi/h}$ حرکت می‌کند و ارابه‌ای را با نیروی $40\,\text{lb}$ تحت زاویه‌ی ۳۰ درجه بالای راستای افقی می‌کشد. (الف) اسب در مدت ۱۰ دقیقه چقدر کار انجام می‌دهد؟ (ب) توان متوسط این نیرو (برحسب قوه اسب) چقدر است؟

حل: اسب ارابه را با نیروی $\vec F$ می‌کشد. وقتی ارابه به اندازه‌ی $\vec d$ جابه‌جا می‌شود، کار انجام شده توسط $\vec F$ برابر است با $W = \vec F \cdot \vec d = Fd\cos\phi$، که ϕ زاویه‌ی بین $\vec F$ و $\vec d$ است.

(الف) در مدت ۱۰ دقیقه ارابه مسافت زیر را می‌پیماید

$$d = v\Delta t = \left(6.0\,\frac{\text{mi}}{\text{h}}\right)\left(\frac{5280\,\text{ft/mi}}{60\,\text{min/h}}\right)(10\,\text{min}) = 5280\,\text{ft}$$

بنابراین از معادله‌ی ۷-۷ داریم

$$W = Fd\cos\phi = (40\,\text{lb})(5280\,\text{ft})\cos 30° = 1.8\times10^5\,\text{ft}\cdot\text{lb}$$

(ب) توان متوسط از معادله‌ی ۷-۴۲ به دست می‌آید. به ازای $\Delta t = 10\,\text{min} = 600\,\text{s}$ داریم

$$P_{\text{avg}} = \frac{W}{\Delta t} = \frac{1.8\times10^5\,\text{ft}\cdot\text{lb}}{600\,\text{s}} = 305\,\text{ft}\cdot\text{lb/s}$$

که (با استفاده از ضریب تبدیل $1\,\text{hp} = 550\,\text{ft}\cdot\text{lb/s}$) مساوی با $P_{\text{avg}} = 0.55\,\text{hp}$ است.

۵۶ شیئی به جرم ۲٫۰kg در روی یک سطح افقی از حالت سکون با شتاب ثابت شروع به حرکت می‌کند و پس از ۳٫۰

ثانیه تندی‌اش به $10 \, m/s$ می‌رسد. (الف) در بازه‌ی زمانی $3/0$ ثانیه نیروی شتاب دهنده چقدر کار روی شیء انجام می‌دهد؟ توان لحظه‌ای ناشی از نیرو، (ب) در پایان این بازه‌ی زمانی، و (پ) در پایان نیمه‌ی اول این بازه‌ی زمانی، چقدر است؟

حل: شتاب ثابت است، لذا از معادلات جدول ۲-۱ می‌توان استفاده کرد. جهت حرکت را در جهت $+x$ در نظر می‌گیریم و توجه می‌کنیم که در این مسئله جابه‌جایی همان مسافت پیموده شده است. نیرویی را که (فرض می‌کنیم یگانه است) در راستای x به جرم $m = 2/0 \, kg$ وارد می‌شود، F می‌نامیم.

(الف) به‌ازای $v_0 = 0$ از معادله‌ی ۲-۱۱ داریم $a = v/t$ و از معادله‌ی ۲-۱۷، داریم $\Delta x = \frac{1}{2} vt$. در این‌جا قانون دوم نیوتون به‌صورت $F = ma$ نوشته می‌شود. بنابراین، کار از معادله‌ی ۷-۸ به‌دست می‌آید

$$W = F\Delta x = m\left(\frac{v}{t}\right)\left(\frac{1}{2}vt\right) = \frac{1}{2}mv^2$$

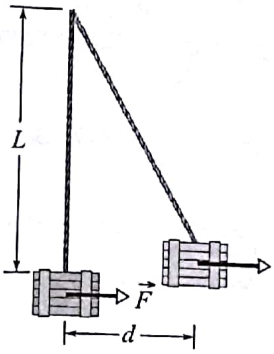
از قضیه‌ی کار - انرژی جنبشی نیز همین انتظار را داریم. به ازای $v = 10 \, m/s$، کار برابر است با $W = 1/0 \times 10^2 \, J$.

(ب) توان لحظه‌ای با معادله‌ی ۷-۴۸ تعریف شده است. به ازای $t = 3/0 \, s$ داریم

$$P = Fv = m\left(\frac{v}{t}\right)v = 67 \, W$$

(پ) در لحظه‌ی $t' = 1/5 \, s$، سرعت $v' = at' = 5/0 \, m/s$ است. در نتیجه توان برابر است با $P' = Fv' = 33/3 \, W$.

۵۷ صندوقی به جرم $230 \, kg$ به انتهای طنابی به‌طول $L = 12/0 \, m$ آویخته شده است. این صندوق را با نیروی متغیر $\vec{F}$ به طور افقی هُل می‌دهیم تا به اندازه‌ی مسافت $d = 4/00 \, m$ به یک طرف حرکت کند (شکل ۷-۴۴). (الف) وقتی صندوق در این مکان پایانی قرار می‌گیرد بزرگی نیروی $\vec{F}$ چقدر است؟ در حین جابه‌جا شدن، (ب) کار کل انجام شده روی صندوق، (پ) کار انجام شده روی صندوق توسط نیروی گرانشی، و (ت) کار انجام شده روی صندوق توسط نیروی کشش طناب، چقدر است؟ (ث) با دانستن اینکه صندوق پیش و پس از جابه‌جا شدن بی‌حرکت است، از پاسخ‌های قسمت‌های (ب)، (پ) و (ت) استفاده کنید و کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ بر روی صندوق را پیدا کنید. (ج) چرا کار این نیرو برابر با حاصل‌ضرب جابه‌جایی افقی در نیروی پاسخ قسمت (الف) نیست؟



شکل ۷-۴۴ مسئله‌ی ۵۷.

حل: (الف) برای نگه داشتن صندوق به حال تعادل در وضعیت پایانی، بزرگی $\vec{F}$ باید با بزرگی مؤلفه‌ی افقی نیروی کشش طناب، $T \sin\theta$، برابر باشد (θ زاویه‌ی بین طناب در وضعیت پایانی و راستای قائم است):

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{4/00}{12/0}\right) = 19/5°$$

اما مؤلفه‌ی قائم نیروی کشش طناب، وزن صندوق را تحمل می‌کند: $T \cos\theta = mg$. بنابراین نیروی کشش طناب برابر است با

$$T = (230 \, kg)(9/80 \, m/s^2) / \cos 19/5° = 2391 \, N$$

و $F = (2391 \, N) \sin 19/5° = 797 \, N$.

راه حل دیگر این است که یک مثلث برداری (برای نیروها) در وضعیت پایانی رسم کنیم و سریعاً به جواب برسیم.

(ب) چون انرژی جنبشی تغییر نمی‌کند، کار خالص صفر است.

(پ) کار انجام شده توسط گرانش $W_g = \vec{F}_g \cdot \vec{d} = -mgh$ است که در آن $h = L(1 - \cos\theta)$ مؤلفه‌ی قائم جابه‌جایی است. به ازای $L = 12/0 \, m$، داریم $W_g = -1/55 \, kJ$.

(ت) بردار نیروی کشش در همه جا بر راستای حرکت عمود است، در نتیجه کار آن صفر است (زیرا $\cos 90° = 0$).

(ث) تأکید سه قسمت قبلی بر این است که کار ناشی از $\vec{F}$ مساوی با $-W_g$ است (در نتیجه کار خالص صفر است). پس، داریم $W_F = -W_g = 1/55 \, kJ$.

(ج) چون بزرگی $\vec{F}$ ثابت نیست، نمی‌توانیم از معادله‌ی ۷-۸ استفاده کنیم.

۵۸ کارگری برای کشیدن صندوق ۵۰ کیلوگرمی بر روی یک سطح افقی بی‌اصطکاک، یک نیروی ۲۱۰ نیوتونی تحت زاویه‌ی ۲۰ درجه در بالای افق، وارد می‌کند. وقتی صندوق به اندازه‌ی $۳/۰ \mathrm{m}$ حرکت می‌کند، چه مقدار کار روی صندوق توسط، (الف) نیروی کارگر، (ب) نیروی گرانشی، و (پ) نیروی عمودی وارد شده به صندوق از سوی سطح، انجام می‌شود؟ (ت) کار کل انجام شده روی صندوق چقدر است؟

حل: نیرویی که کارگر به صندوق وارد می‌کند ثابت است، در نتیجه کاری که انجام می‌دهد $W_F = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd \cos\phi$ است که در آن $\vec{F}$ نیرو $\vec{d}$ جابه‌جایی صندوق، و ϕ زاویه‌ی بین نیرو و جابه‌جایی است. در این‌جا $F = ۲۱۰ \mathrm{N}$، $d = ۳ \mathrm{m}$، و $\phi = ۲۰°$ است. در نتیجه داریم

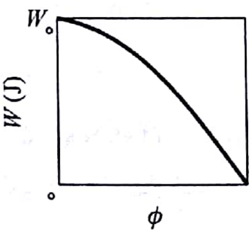
$$W_F = (۲۱۰ \mathrm{N})(۳/۰ \mathrm{m}) \cos ۲۰° = ۵۹۲ \mathrm{J}$$

(ب) جهت نیروی گرانش به طرف پایین، و بر جابه‌جایی صندوق عمود است. زاویه‌ی بین این نیرو و جابه‌جایی $۹۰°$ و $\cos ۹۰° = ۰$ است، در نتیجه کار انجام شده توسط نیروی گرانش صفر است.

(پ) نیروی عمودی وارد شده به صندوق از سوی سطح، نیز بر جابه‌جایی عمود است، در نتیجه کار انجام شده توسط این نیرو نیز صفر است.

(ت) این‌ها تنها نیروهایی هستند که به صندوق وارد می‌شوند، بنابراین کار کل انجام شده روی آن $۵۹۲ \mathrm{J}$ است.

۵۹ مُهره‌ای تحت اثر نیروی $\vec{F}_a$ در طول یک سیم راست به اندازه‌ی $+۵/۰ \mathrm{cm}$ جابه‌جا می‌شود. بزرگی $\vec{F}_a$ به مقدار معینی در نظر گرفته می‌شود، اما ϕ، زاویه‌ی میان $\vec{F}_a$ و جابه‌جایی مُهره را می‌توان انتخاب کرد. شکل ۷-۴۵ نمودار W، کار انجام شده توسط $\vec{F}_a$ روی مُهره را برای گستره‌ای از مقادیر ϕ نشان می‌دهد و $W_0 = ۲۵ \mathrm{J}$. کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}_a$ به ازای (الف) $\phi = ۶۴°$ و (ب) $\phi = ۱۴۷°$، چقدر است؟



شکل ۷-۴۵ مسئله‌ی ۶.

حل: کاری که نیروی اعمال شده انجام می‌دهد از رابطه‌ی $W = \vec{F}_a \cdot \vec{d} = F_a d \cos\phi$ به دست می‌آید. با توجه به شکل، معلوم می‌شود که به‌ازای $\phi = ۰$ و $d = ۵/۰ \mathrm{cm}$ داریم $W = ۲۵ \mathrm{J}$. بنابراین بزرگی $\vec{F}_a$ برابر است با

$$F_a = \frac{W}{d} = \frac{۲۵ \mathrm{J}}{۰/۰۵۰ \mathrm{m}} = ۵/۰ \times ۱۰^۲ \mathrm{N}$$

(الف) به ازای $\phi = ۶۴°$، داریم

$$W = F_a d \cos\phi = (۵/۰ \times ۱۰^۲ \mathrm{N})(۰/۰۵ \mathrm{m}) \cos ۶۴° = ۱۱ \mathrm{J}$$

(ب) به ازای $\phi = ۱۴۷°$، داریم

$$W = F_a d \cos\phi = (۵/۰ \times ۱۰^۲ \mathrm{N})(۰/۰۵۰ \mathrm{m}) \cos ۱۴۷° = -۲۱ \mathrm{J}$$

۶۰ یک بچه‌ی کم جرأت در حین پایین لغزیدن از یک سُرسُره‌ی بی‌اصطکاک، توسط مادرش مراقبت و مهار می‌شود. اگر نیروی وارد به بچه از سوی مادرش $۱۰۰ \mathrm{N}$ به سمت بالای سُرسُره باشد، انرژی جنبشی بچه پس از پیمودن مسافت $۱/۸ \mathrm{m}$ به‌سمت پایین به‌اندازه‌ی $۳۰ \mathrm{J}$ افزایش می‌یابد. (الف) در حین پایین آمدن بچه به اندازه‌ی $۱/۸ \mathrm{m}$، نیروی گرانشی چقدر کار بر روی او انجام می‌دهد؟ (ب) اگر بچه توسط مادرش مراقبت نشود، انرژی جنبشی‌اش در طی همان مسافت $۱/۸ \mathrm{m}$ به‌سمت پایین، چقدر افزایش می‌یابد؟

حل: (الف) در قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی، هر دو مقدار کار ناشی از نیروی اعمال شده، W_a، و کار انجام شده توسط گرانش، W_g، را در نظر می‌گیریم تا کمیت دوم را پیدا کنیم:

$$\Delta K = W_a + W_g \Rightarrow ۳۰ \mathrm{J} = (۱۰۰ \mathrm{N})(۱/۸ \mathrm{m}) \cos ۱۸۰° + W_g$$

در نتیجه $W_g = ۱/۸ \times ۱۰^۲ \mathrm{J}$ به دست می‌آید.

(ب) مقدار W_g به دست آمده در قسمت (الف) هنوز معتبر است زیرا وزن و مسیر حرکت بچه تغییر نکرده است، در نتیجه $\Delta K = W_g = ۱/۸ \times ۱۰^۲ \mathrm{J}$ است.

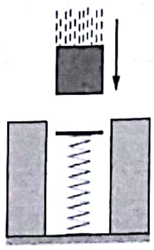
۶۱ کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F} = (۲x\mathrm{N})\hat{\mathrm{i}} + (۳\mathrm{N})\hat{\mathrm{j}}$ (که در آن x برحسب متر است) هنگام حرکت دادن یک ذره از مکان $\vec{r}_i = (۲\mathrm{m})\hat{\mathrm{i}} + (۳\mathrm{m})\hat{\mathrm{j}}$، به مکان $\vec{r}_f = -(۴\mathrm{m})\hat{\mathrm{i}} - (۳\mathrm{m})\hat{\mathrm{j}}$ چقدر است؟

حل: یک راه حل این است که فرض کنیم «مسیر» از $\vec{r}_i$ تا $\vec{r}_f$ است و از انتگرال خطی استفاده کنیم. راه حل دیگر این است که از معادله‌ی ۷-۳۶ به صورت زیر استفاده کنیم

$$W=\int_{x_i}^{x_f}F_x\,dx+\int_{y_i}^{y_f}F_y\,dy$$
$$=\int_{2}^{-4}(2x)\,dx+\int_{3}^{-3}(3)\,dy$$

در نتیجه خواهیم داشت $W=12\,\mathrm{J}-18\,\mathrm{J}=-6\,\mathrm{J}$.

۶۲ جسمی به جرم ۲۵۰ گرم روی یک فنر قائم در حال آرامش با ثابت فنر $k=2{,}5\,\mathrm{N/cm}$ می‌افتد (شکل ۷-۴۶). جسم به فنر وصل و پیش از توقف لحظه‌ای به اندازه‌ی $12\,\mathrm{cm}$ متراکم می‌شود. در حین متراکم شدن فنر، چقدر کار روی جسم توسط، (الف) نیروی گرانشی وارد به جسم، و (ب) نیروی فنر، انجام می‌شود؟ (پ) تندی جسم درست پیش از برخورد به فنر چقدر است؟ (فرض کنید اصطکاک قابل چشم‌پوشی است). (ت) اگر تندی برخورد جسم به فنر دو برابر شود، بیشینه‌ی تراکم فنر چقدر می‌شود؟



شکل ۷-۴۶ مسئله‌ی ۶۲.

حل: (الف) میزان تراکم فنر $d=0{,}10\,\mathrm{m}$ است. کار انجام شده توسط نیروی گرانش (که به جسم وارد می‌شود)، از معادله‌ی ۷-۱۲ برابر است با

$$W_1=mgd=(0{,}250\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m/s^2})(0{,}12\,\mathrm{m})=0{,}29\,\mathrm{J}$$

(ب) کار انجام شده توسط فنر، از معادله‌ی ۷-۲۶ به دست می‌آید:

$$W_2=-\frac{1}{2}kd^2=-\frac{1}{2}(250\,\mathrm{N/m})(0{,}12\,\mathrm{m})^2=-1{,}8\,\mathrm{J}$$

(پ) تندی v_i جسم درست پیش از برخورد به فنر، از قضیه‌ی کار - انرژی جنبشی (معادله‌ی ۷-۱۵) به دست می‌آید:

$$\Delta K=0-\frac{1}{2}mv_i^2=W_1+W_2$$

که از آن‌جا داریم

$$v_i=\sqrt{\frac{(-2)(W_1+W_2)}{m}}=\sqrt{\frac{(-2)(0{,}29\,\mathrm{J}-1{,}8\,\mathrm{J})}{0{,}250\,\mathrm{kg}}}=3{,}5\,\mathrm{m/s}$$

(ت) اکنون اگر $v_i'=7{,}0\,\mathrm{m/s}$ باشد، مراحل بالا را معکوس می‌کنیم و d' را به‌دست می‌آوریم. با استفاده از قضیه‌ی کار - انرژی داریم

$$0-\frac{1}{2}mv_i'^2=W_1'+W_2'=mgd'-\frac{1}{2}kd'^2$$

اگر ریشه‌ی مثبت را انتخاب کنیم، داریم

$$d'=\frac{mg+\sqrt{m^2g^2+mkv_i'^2}}{k}$$

در نتیجه d' به دست می‌آید. برای به دست آوردن این نتیجه، می‌توان از ارقام معنی‌دار بیشتری استفاده کرد.

۶۳ برای هُل دادن صندوقی به جرم $25{,}0\,\mathrm{kg}$ به سمت بالای یک سطح شیب‌دار بی‌اصطکاک با زاویه‌ی شیب $25{,}0^\circ$ درجه نسبت به افق، کارگری نیروی $209\,\mathrm{N}$ را به موازات سطح شیب‌دار به صندوق وارد می‌کند. وقتی صندوق به اندازه‌ی $1{,}5\,\mathrm{m}$ به سمت بالا می‌لغزد چقدر کار توسط (الف) نیروی وارد شده از سوی کارگر، (ب) نیروی گرانشی وارد به صندوق، و (پ) نیروی عمودی وارد به صندوق از سوی سطح شیب‌دار، انجام می‌شود؟ (ت) کار کل انجام شده روی صندوق چقدر است؟

حل: صندوق به طرف بالای سطح شیب‌دار هل داده می‌شود. نیروهای دخیل عبارت‌اند از: نیروی گرانشی وارد بر صندوق، نیروی عمودی وارد بر صندوق، و نیروی اعمال شده توسط کارگر. کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ بر روی جسمی که جابه‌جایی $\vec{d}$ را انجام می‌دهد، $W=\vec{F}\cdot\vec{d}=Fd\cos\phi$ است که در آن ϕ زاویه‌ی بین $\vec{F}$ و $\vec{d}$ است.

(الف) نیروی اعمال شده با سطح شیب‌دار موازی است. در نتیجه با استفاده از معادله‌ی ۷-۶ می‌توان کار انجام شده روی صندوق توسط نیروی کارگر را حساب کرد:

$$W_a=Fd\cos 0^\circ=(209\,\mathrm{N})(1{,}50\,\mathrm{m})\approx 314\,\mathrm{J}$$

(ب) با استفاده از معادله‌ی ۷-۱۲، کار انجام شده توسط نیروی گرانشی را پیدا می‌کنیم:

$$W_g = F_g d \cos(۹۰^\circ + ۲۵^\circ) = mgd \cos ۱۱۵^\circ$$

$$= (۲۵/۰\,\mathrm{kg})(۹/۸\,\mathrm{m/s^2})(۱/۵۰\,\mathrm{m}) \cos ۱۱۵^\circ \approx -۱۵۵\,\mathrm{J}$$

(پ) زاویه‌ی بین نیروی عمودی و جهت حرکت در تمام مدت ۹۰° است، لذا کار انجام شده صفر است:

$$W_N = F_N d \cos ۹۰^\circ = ۰$$

(ت) کار کل انجام شده روی صندوق با مجموع سه کار برابر است:

$$W = W_a + W_g + W_N = ۳۱۴\,\mathrm{J} + (-۱۵۵\,\mathrm{J}) + ۰\,\mathrm{J} = ۱۵۸\,\mathrm{J}$$

توجه: با توجه به قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی، اگر صندوق ابتدا ساکن باشد، انرژی جنبشی آن پس از پیمودن مسافت $۱/۵۰\,\mathrm{m}$ به طرف بالای سطح شیب‌دار، مساوی با $K = W = ۱۵۸\,\mathrm{J}$ خواهد بود، و تندی صندوق در آن لحظه برابر است با

$$v = \sqrt{۲K/m} = \sqrt{۲(۱۵۸\,\mathrm{J})/۲۵/۰\,\mathrm{kg}} = ۳/۵۶\,\mathrm{m/s}$$

۶۴ در انباری برای انتقال جعبه‌ها از جایی به جای دیگر از تسمه نقاله‌ای استفاده می‌شود که با تندی ثابت $۰/۵۰\,\mathrm{m/s}$ حرکت می‌کند. تسمه نقاله در یک جا به اندازه‌ی $۲/۰\,\mathrm{m}$ از یک شیب ۱۰ درجه نسبت به افق بالا می‌رود، سپس یک فاصله‌ی ۲/۰ متری را به طور افقی می‌پیماید و، سرانجام، به اندازه‌ی $۲/۰\,\mathrm{m}$ متر از یک شیب ۱۰ درجه نسبت به افق پایین می‌رود. فرض کنید جعبه‌ای به جرم $۲/۰\,\mathrm{kg}$ بدون لغزیدن روی تسمه قرار گرفته است. در حالت‌های زیر نیروی تسمه با چه آهنگی روی جعبه کار انجام می‌دهد؟ (الف) هنگام بالا رفتن جعبه از شیب ۱۰ درجه، (ب) هنگام حرکت کردن جعبه به طور افقی، و (پ) هنگام پایین رفتن جعبه از شیب ۱۰ درجه.

حل: (الف) نیروی $\vec{F}$ روی سطح شیب‌دار ترکیبی از نیروی عمودی و نیروی اصطکاک است که تمایل جعبه به سقوط به طرف پایین (به خاطر وزن $۱۹/۶\,\mathrm{N}$ آن) را «خنثی» می‌کند. در این قسمت از مسئله، زاویه‌ی ϕ بین تسمه و $\vec{F}$ مساوی با ۸۰° است. از معادله‌ی ۷–۴۷ داریم

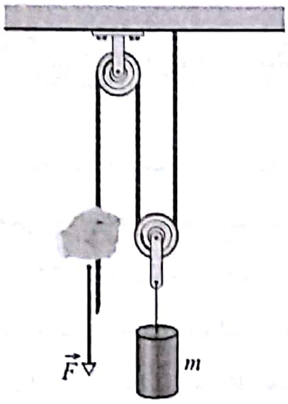
$$P = Fv\cos\phi = (۱۹/۶\,\mathrm{N})(۰/۵۰\,\mathrm{m/s})\cos ۸۰^\circ = ۱/۷\,\mathrm{W}$$

(ب) اکنون زاویه‌ی بین تسمه و $\vec{F}$، ۹۰° است و در نتیجه $P = ۰$.

(پ) در این قسمت، زاویه‌ی بین تسمه و $\vec{F}$، ۱۰۰° است و در نتیجه داریم

$$P = (۱۹/۶\,\mathrm{N})(۰/۵۰\,\mathrm{m/s})\cos ۱۰۰^\circ = -۱/۷\,\mathrm{W}$$

۶۵ در شکل ۷–۴۷، ریسمانی از دو قرقره‌ی بی‌اصطکاک و با جرم ناچیز عبور کرده است. یک قوطی به‌جرم $m = ۲۰\,\mathrm{kg}$ از قرقره‌ی متحرکی آویزان است و نیروی $\vec{F}$ با دست به سر آزاد ریسمان وارد می‌شود. (الف) اگر بخواهیم قوطی باتندی ثابت بالا کشیده شود، بزرگی نیروی $\vec{F}$ چقدر باید باشد؟ (ب) برای بالا بردن قوطی به‌اندازه‌ی $۲/۰\,\mathrm{cm}$، سر آزاد ریسمان چه‌اندازه باید کشیده شود؟ در حین بلند کردن قوطی کار انجام شده روی آن (پ) توسط نیروی دست (از طریق ریسمان) و (ت) توسط نیروی گرانشی وارد به قوطی، چقدر است؟ (*راهنمایی:* وقتی ریسمان مطابق شکل به دور قرقره‌ی متحرک پیچیده می‌شود، قرقره با نیروی دو برابر نیروی کشش ریسمان به بالا کشیده می‌شود).



شکل ۷–۴۷ مسئله‌ی ۶۵.

حل: شتاب وجود ندارد، در نتیجه نیروی بالا برنده با وزن جسم برابر است. می‌دانیم که نیروی کشش شخص $\vec{F}$، از نظر بزرگی با نیروی کشش ریسمان برابر است.

(الف) همان‌طور که در قسمت راهنمایی صورت مسئله آمده است، نیروی کشش ریسمان دو برابر نیروی بلند کننده‌ی قوطی است: $۲T = mg$. چون $|\vec{F}| = T$، در نتیجه $|\vec{F}| = ۹۸\,\mathrm{N}$.

(ب) برای بلند کردن جرم $۰/۰۲۰\,\mathrm{m}$، دو قسمت ریسمان (شکل ۷–۴۷ را ببینید) باید مقداری کوتاه شود. بنابراین، مقداری از ریسمان که از سر آزاد به پایین کشیده می‌شود (این مقدار همان بزرگی $\vec{d}$، جابه‌جایی دست به طرف پایین است) برابر است با $d = ۰/۰۴۰\,\mathrm{m}$.

(پ) چون (در سر آزاد ریسمان، طرف چپ) جهت هر دو بردار $\vec{F}$ و $\vec{d}$ به طرف پایین است، از معادله‌ی ۷-۷ داریم

$$W=\vec{F}\cdot\vec{d}=(۹۸\,\mathrm{N})(۰/۰۴۰\,\mathrm{m})=۳/۹\,\mathrm{J}$$

(ت) چون نیروی گرانش $\vec{F}_g$ (با بزرگی mg) در خلاف جهت جابه‌جایی قوطی (به طرف بالا)، $\vec{d}_c=۰/۰۲۰\,\mathrm{m}$، اثر می‌کند، از معادله‌ی ۷-۷ داریم

$$W=\vec{F}_g\cdot\vec{d}_c=-(۱۹۶\,\mathrm{N})(۰/۰۲۰\,\mathrm{m})=-۳/۹\,\mathrm{J}$$

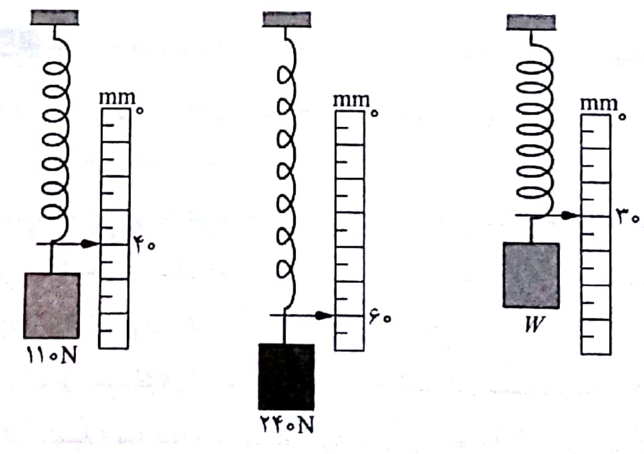
این نتیجه با معادله‌ی ۷-۱۵ سازگار است زیرا انرژی جنبشی تغییر نمی‌کند.

۶۶ اگر خودرویی به جرم $۱۲۰۰\,\mathrm{kg}$ در بزرگ‌راهی با تندی $۱۲۰\,\mathrm{km/h}$ حرکت کند، انرژی جنبشی‌اش که توسط یک شخص ایستاده در کنار بزرگ‌راه معین می‌شود، چقدر است؟

حل: پس از تبدیل یکای تندی: $v=۱۲۰\,\mathrm{km/h}=۳۳/۳\,\mathrm{m/s}$، داریم

$$K=\frac{۱}{۲}mv^۲=\frac{۱}{۲}(۱۲۰۰\,\mathrm{kg})(۳۳/۳\,\mathrm{m/s})^۲=۶/۷\times۱۰^۵\,\mathrm{J}$$

۶۷ فنری‌که عقربه‌ای به آن وصل‌شده درکنار یک‌مقیاس درجه‌بندی شده بر حسب میلی‌متر آویخته شده است. سه بسته‌ی مختلف را، مطابق شکل ۷-۴۸، به نوبت به این فنر می‌آویزیم. (الف) وقتی هیچ بسته‌ای به فنر آویخته نشده است، عقربه چه عددی را نشان می‌دهد؟ (ب) وزن بسته‌ی سوم W، چقدر است؟



شکل ۷-۴۸ مسئله‌ی ۶۷.

حل: بنابر قانون هوک، نیروی فنر برابر است با

$$F_x=-k(x-x_۰)=-k\Delta x$$

در این‌جا Δx جابه‌جایی نسبت به مکان تعادل است. بنابراین، برای دو وضعیت اول در شکل ۷-۴۶ می‌توان نوشت:

$$-۱۱۰\,\mathrm{N}=-k(۴۰\,\mathrm{mm}-x_۰)$$

$$-۲۴۰\,\mathrm{N}=-k(۶۰\,\mathrm{mm}-x_۰)$$

از حل این دو معادله، ثابت فنری k و هم‌چنین $x_۰$ (طول آزاد فنر وقتی که جرمی به آن آویخته نشده است) به دست می‌آیند.

(الف) دو معادله‌ی بالا را با هم جمع می‌کنیم:

$$۲۴۰\,\mathrm{N}-۱۱۰\,\mathrm{N}=k(۶۰\,\mathrm{mm}-۴۰\,\mathrm{mm})$$

در نتیجه $k=۶/۵\,\mathrm{N/mm}$ به دست می‌آید. نتیجه را در معادله‌ی اول قرار می‌دهیم و داریم

$$x_۰=۴۰\,\mathrm{mm}-\frac{۱۱۰\,\mathrm{N}}{k}=۴۰\,\mathrm{mm}-\frac{۱۱۰\,\mathrm{N}}{۶/۵\,\mathrm{N/mm}}=۲۳\,\mathrm{mm}$$

(ب) با استفاده از نتایج قسمت (الف) برای تحلیل شکل آخر، وزن بسته به دست می‌آید

$$W=k(۳۰\mathrm{mm}-x_۰)=(۶/۵\,\mathrm{N/mm})(۳۰\mathrm{mm}-۲۳\mathrm{mm})=۴۵\,\mathrm{N}$$

توجه: یک روش جایگزین برای محاسبه‌ی W در شکل سوم این است که مقدار کشیده‌شدگی فنر با وزن بسته‌ی آویخته شده به آن متناسب است و داریم $\frac{W}{W'}=\frac{\Delta x}{\Delta x'}$. با استفاده از این رابطه برای شکل‌های دوم و سوم، وزن W به دست می‌آید:

$$W=\left(\frac{\Delta x_۳}{\Delta x_۲}\right)W_۲=\left(\frac{۳۰\,\mathrm{mm}-۲۳\,\mathrm{mm}}{۶۰\,\mathrm{mm}-۲۳\,\mathrm{mm}}\right)(۲۴۰\,\mathrm{N})=۴۵\,\mathrm{N}$$

که با نتیجه‌ی قسمت (ب) سازگار است.

۶۸ یک قایق یخ‌پیما، که بر روی دریاچه‌ی یخ‌زده‌ی بی‌اصطکاکی ساکن است، ناگهان تحت تأثیر نیروی ثابت $۲۰۰\,\mathrm{N}$ یک باد در حال وزیدن به سوی خاور قرار می‌گیرد. در اثر زاویه‌ی مناسب بادبان، باد قایق را در یک خط راست تحت زاویه‌ی ۲۰ درجه‌ی شمال محور خاوری به اندازه‌ی $۸/۰\,\mathrm{m}$ می‌لغزانند. انرژی جنبشی قایق یخ‌پیما در پایان مسافت $۸/۰\,\mathrm{m}$ چقدر است؟

حل: با استفاده از معادله‌ی ۷-۷ داریم $W=Fd\cos\phi=۱۵۰۳\,\mathrm{J}$

سپس به کمک قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی، انرژی جنبشی را به صورت $K_f=K_i+W=۰+۱۵۰۳\,\mathrm{J}$ به دست می‌آوریم

بنابراین، پاسخ $۱/۵\,\mathrm{kJ}$ است.

۶۹ اگر یک بالابر اسکی ۱۰۰ اسکی‌باز، هر یک با وزن متوسط $۶۶۰\,N$ را با تندی ثابت در مدت $۶۰{,}۰$ ثانیه تا ارتفاع $۱۵۰\,m$ بالا ببرد، توان متوسط لازم نیروی بالابرنده چقدر است؟

حل: وزن کل $(۱۰۰)(۶۶۰\,N) = ۶{,}۶۰\times۱۰^{۴}\,N$ است و عبارت «با تندی ثابت ... به بالا ببرد» نشان می‌دهد که شتاب صفر است، در نتیجه نیروی بالابرنده با وزن کل برابر است. پس، توان متوسط برابر است با

$$P = Fv = (۶{,}۶۰\times۱۰^{۴})(۱۵۰\,m/۶۰{,}۰\,s) = ۱{,}۶۵\times۱۰^{۵}\,W$$

۷۰ نیروی $\vec{F} = (۴{,}۰\,N)\hat{i} + c\hat{j}$ به ذره‌ای در حال جابه‌جا شدن به اندازه‌ی $\vec{d} = (۳{,}۰\,m)\hat{i} - (۲{,}۰\,m)\hat{j}$ وارد می‌شود. (نیروهای دیگری هم به این ذره وارد می‌شوند). اگر کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ روی ذره (الف) صفر، (ب) $۱۷\,J$، و (پ) $-۱۸\,J$ باشد، مقدار c چیست؟

حل: از معادله‌ی ۷-۸ داریم

$$W = (۴{,}۰)(۳{,}۰) - c(۲{,}۰) = ۱۲ - ۲c$$

(الف) اگر $W = ۰$ باشد، آن‌گاه $c = ۶{,}۰\,N$ است.

(ب) اگر $W = ۱۷\,J$ باشد، آن‌گاه $c = -۲{,}۵\,N$ است.

(پ) اگر $W = -۱۸\,J$ باشد، آن‌گاه $c = ۱۵\,N$ است.

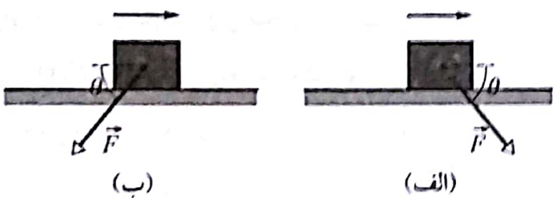
۷۱ نیروی ثابتی به بزرگی $۱۰\,N$، که با محور x مثبت زاویه‌ی ۱۵۰ درجه (در جهت پادساعت‌گرد) تشکیل می‌دهد، به جسمی به جرم $۲{,}۰\,kg$ در حال حرکت در صفحه xy وارد می‌شود. هرگاه جسم از مبداء مختصات تا نقطه‌ی مشخص شده با بردار مکان $(۲{,}۰\,m)\hat{i} - (۴{,}۰\,m)\hat{j}$ حرکت کند، این نیرو چقدر کار روی جسم انجام می‌دهد؟

حل: با استفاده از معادله‌ی ۷-۸ داریم

$$W = \vec{F}\cdot\vec{d} = (F\cos\theta\,\hat{i} + F\sin\theta\,\hat{j})\cdot(x\,\hat{i} + y\,\hat{j})$$
$$= Fx\cos\theta + Fy\sin\theta$$

که در آن $x = ۲{,}۰\,m$، $y = -۴{,}۰\,m$، $F = ۱۰\,N$، و $\theta = ۱۵۰^\circ$ است. در نتیجه $W = -۳۷\,J$ به دست می‌آید. توجه کنید که مقدار جرم $(۲{,}۰\,kg)$ در این محاسبه وارد نشده است.

۷۲ در شکل ۷-۴۹ (الف)، یک نیروی ۲٫۰ نیوتونی تحت زاویه‌ی رو به پایین θ به جسمی به جرم $۴{,}۰\,kg$ وارد می‌شود و جسم را به اندازه‌ی $۱{,}۰\,m$ بر روی یک سطح بی‌اصطکاک به سمت راست حرکت می‌دهد. مطلوب است تعیین رابطه‌ی مربوط به تندی پایانی v_f این جسم در انتهای مسافت پیموده شده، به شرط آنکه سرعت آغازی جسم (الف) صفر و (ب) $۱{,}۰\,m/s$ به سمت راست، باشد. (پ) وضعیت نشان داده شده در شکل ۷-۴۹ ب، مشابه حالتی است که جسم در آغاز با تندی $۱{,}۰\,m/s$ به سمت راست حرکت می‌کند، اما نیروی $۲{,}۰\,N$ به سمت چپ و رو به پایین است. رابطه‌ی مربوط به تندی v_f جسم در انتهای مسافت پیموده شده‌ی $۱{,}۵\,m$ را به دست آورید. (ت) نمودار هر سه رابطه‌ی به دست آمده برای v_f را برحسب زاویه‌ی رو به پایین θ از $\theta = ۰^\circ$ تا $\theta = ۹۰^\circ$ رسم کنید. این نمودارها را توضیح دهید.



شکل ۷-۴۹ مسئله‌ی ۷۲.

حل: (الف) از معادله‌ی ۷-۱۰ (همراه با معادلات ۷-۱ و ۷-۷) داریم

$$v_f = (۲\frac{d}{m}F\cos\theta)^{1/2} = (۱{,}۵\cos\theta)^{1/2}$$

در این‌جا $F = ۲{,}۰\,N$، $m = ۴{,}۰\,kg$ و $d = ۱{,}۰\,m$ را قرار داده‌ایم.

(ب) به ازای $v_i = ۱$، و با انجام مراحل مشابه، داریم

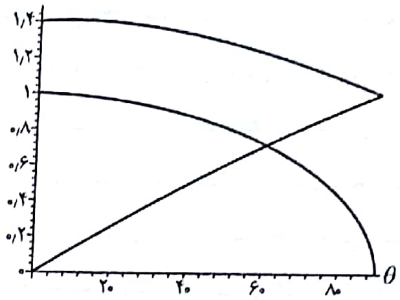
$$v_f = (۱ + ۱{,}۰\cos\theta)^{1/2}$$

(پ) به جای θ مقدار $۱۸۰^\circ - \theta$ را قرار می‌دهیم و باز هم به ازای $v_i = ۱$ داریم

$$v_f = [۱ + ۱{,}۰\cos(۱۸۰^\circ - \theta)]^{1/2} = (۱ - ۱{,}۰\cos\theta)^{1/2}$$

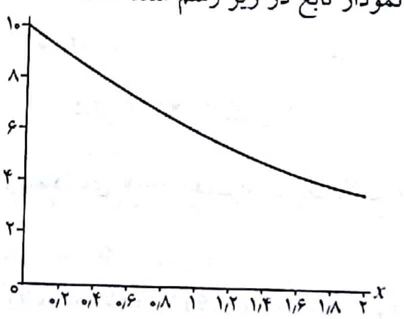
(ت) نمودارها در زیر رسم شده‌اند. توجه کنید که وقتی θ در قسمت‌های (الف) و (ب) افزایش پیدا می‌کند، نیرو شتاب مثبت کمتر و کمتری را تولید می‌کند. بالاترین منحنی که به آرامی از ۱٫۴ تا ۱ کاهش می‌یابد، منحنی مربوط به قسمت (ب) است؛ منحنی در

حال کاهش دیگر (که از ۱ شروع و به صفر می‌رسد)، مربوط به قسمت (الف) است. منحنی در حال بالا رفتن مربوط به قسمت (پ) است؛ این منحنی به ازای $\theta = ۹۰^\circ$ به ۱ می‌رسد.



۷۳ نیروی $\vec{F}$ در جهت مثبت محور x به جسمی وارد و آن را در راستای محور حرکت می‌دهد. اگر بزرگی این نیرو $F = ۱۰(e^{-x/۲,۰})\text{N}$ و x برحسب متر باشد، کار انجام شده توسط نیرو روی جسم را در حالتی که جسم از $x = ۰$ تا $x = ۲,۰\,\text{m}$ حرکت می‌کند، (الف) با ترسیم نمودار $F(x)$ و برآورد کردن مساحت زیر منحنی، و (ب) با انتگرال گرفتن از تابع $F(x)$ برای تعیین کار به روش تحلیلی، پیدا کنید.

حل: (الف) نمودار تابع در زیر رسم شده است.



برای پاسخ دادن، مساحت زیر منحنی در گستره‌های مورد نظر را براورد می‌کنیم. این براوردها از ۱۱J تا ۱۴J است.

(ب) از براورد کار به صورت تحلیلی (با استفاده از معادله‌ی ۷-۳۲) داریم:

$$W = \int_۰^۲ ۱۰e^{-x/۲}dx = -۲۰e^{-x/۲}\Big|_۰^۲ = ۱۲,۶\,\text{J} \approx ۱۳\,\text{J}$$

۷۴ ذره‌ای تحت تأثیر نیروی $\vec{F} = (۲\text{N})\hat{i} - (۴\text{N})\hat{j}$ در طول یک مسیر راست جابه‌جایی $\vec{d} = (۸\text{m})\hat{i} + c\hat{j}$ را انجام می‌دهد. (نیروهای دیگری هم به این ذره وارد می‌شوند). مقدار c را به‌گونه‌ای معین کنید که کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ روی ذره، (الف) صفر، (ب) مثبت و (پ) منفی باشد.

حل: (الف) با استفاده از معادله‌ی ۷-۸ داریم

$$W = \vec{F}\cdot\vec{d} = (۲\hat{i} - ۴\hat{j})\cdot(۸\hat{i} + c\hat{j}) = ۱۶ - ۴c$$

که اگر آن را مساوی صفر قرار دهیم، $c = ۱۶/۴ = ۴\,\text{m}$ به دست می‌آید.

(ب) اگر $W > ۰$ باشد، آن‌گاه $۱۶ > ۴c$ یا $c < ۴\,\text{m}$ است.

(پ) اگر $W < ۰$ باشد، آن‌گاه $۱۶ < ۴c$ یا $c > ۴\,\text{m}$ است.

۷۵ اتاقک آسانسوری $۴۵۰۰\,\text{kg}$ جرم دارد و می‌تواند حداکثر بار $۱۸۰۰\,\text{kg}$ را حمل کند. اگر این اتاقک با بار کامل با تندی $۳,۸۰\,\text{m/s}$ به سمت بالا حرکت کند، توان نیروی وارد شده چقدر باید باشد تا این تندی حفظ شود؟

حل: راه حل مناسب، استفاده از معادله‌ی ۷-۴۸ است:

$$P = Fv = (۱۸۰۰\,\text{kg} + ۴۵۰۰\,\text{kg})(۹,۸\,\text{m/s}^۲)(۳,۸۰\,\text{m/s}) = ۲۳۵\,\text{kW}$$

توجه کنید که نیروی اعمال شده را با وزن مساوی قرار دادیم تا سرعت ثابت (شتاب صفر) بماند.

۷۶ قطعه‌ی یخی به جرم $۴۵\,\text{kg}$ از سطح شیب‌دار بی‌اصطکاکی به طول $۱,۵\,\text{m}$ و به ارتفاع $۰,۹۱\,\text{m}$ به پایین می‌لغزد. کارگری به موازات سطح شیب‌دار و به سمت بالا به یخ طوری نیرو وارد می‌کند که یخ با تندی ثابت به پایین می‌لغزد. (الف) بزرگی نیروی وارد شده از سوی کارگر را پیدا کنید. چه مقدار کار روی یخ توسط (ب) نیروی کارگر، (پ) نیروی گرانشی، (ت) نیروی عمودی وارد به یخ از سوی سطح شیب‌دار، و (ث) نیروی برایند وارد به یخ، انجام می‌شود؟

حل: (الف) مؤلفه‌ی نیروی گرانش که در راستای سطح شیب‌دار به قطعه یخ وارد می‌شود، $mg\sin\theta$ است که در آن $\theta = \sin^{-۱}(۰,۹۱/۱,۵)$ زاویه‌ی سطح شیب‌دار را به دست می‌دهد. چون قطعه یخ با سرعت یکنواخت به پایین می‌لغزد، کارگر باید نیروی $\vec{F}$ به طرف بالا با بزرگی مساوی با $mg\sin\theta$ را اعمال کند. در نتیجه داریم

$$F = mg\sin\theta = (۴۵\,\text{kg})(۹,۸\,\text{m/s}^۲)\left(\frac{۰,۹۱\,\text{m}}{۱,۵\,\text{m}}\right) = ۲,۷\times۱۰^۲\,\text{N}$$

(ب) چون جابه‌جایی «به طرف پایین سطح شیب‌دار» در خلاف جهت $\vec{F}$ صورت می‌گیرد، کار انجام شده توسط کارگر برابر است با

$$W_1 = -(2.7\times10^{2}\,\mathrm{N})(1.5\,\mathrm{m}) = -4.0\times10^{2}\,\mathrm{J}$$

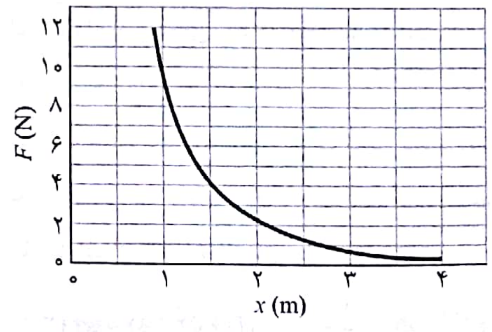
(پ) چون جابه‌جایی یک مؤلفه‌ی رو به پایین قائم با بزرگی $0.85\,\mathrm{m}$ (در همان جهت نیروی گرانش) دارد، کار انجام شده توسط گرانش برابر است با

$$W_2 = (45\,\mathrm{kg})(9.8\,\mathrm{m/s^2})(0.91\,\mathrm{m}) = 4.0\times10^{2}\,\mathrm{J}$$

(ت) چون $\vec{F}_N$ بر راستای حرکت جسم عمود است، و $\cos 90° = 0$، در نتیجه کار انجام شده توسط نیروی عمودی بر طبق معادله‌ی ۷-۷ برابر است با $W_3 = 0$.

(ث) نیروی برایند $\vec{F}_{net}$ صفر است زیرا شتاب وجود ندارد. بنابراین، کار آن صفر است و مجموع $W_1 + W_2 + W_3 = 0$ نیز آن را تأیید می‌کند.

۷۷ ذره‌ای در حال حرکت در طول محور x تحت تأثیر نیرویی در جهت مثبت این محور قرار می‌گیرد. شکل ۷-۵۰، نمودار تغییرات بزرگی نیروی F برحسب مکان ذره x، را نشان می‌دهد. معادله‌ی این نمودار به صورت $F = \frac{a}{x^2}$ به ازای $a = 9.0\,\mathrm{N\cdot m^2}$ است. کار انجام شده توسط نیرو روی ذره‌ی در حال حرکت از $x = 1.0\,\mathrm{m}$ تا $x = 3.0\,\mathrm{m}$ را، (الف) با برآورد کردن کار از روی نمودار و (ب) با انتگرال‌گیری از تابع نیرو، پیدا کنید.



شکل ۷-۵۰ مسئله‌ی ۷۷.

حل: (الف) برای برآورد مساحت زیر منحنی در بین $x = 1\,\mathrm{m}$ و $x = 3\,\mathrm{m}$ (که باید مقدار کار انجام شده را به دست بدهد)، می‌توان تعداد مربع‌ها (یا نیمه مربع‌ها یا ثلث مربع‌ها) در بین منحنی و محور را شمرد. در این روش تقریبی، برآورد بین $5\,\mathrm{J}$ و $8\,\mathrm{J}$ قابل قبول است.

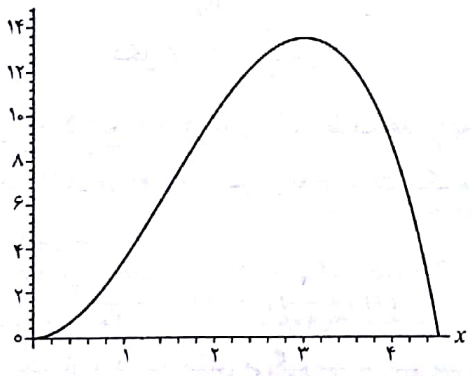
(ب) از معادله‌ی ۷-۳۲ داریم

$$\int_1^3 \frac{a}{x^2}\,dx = \frac{a}{3} - \frac{a}{1} = 6\,\mathrm{J}$$

که در آن $a = -9\,\mathrm{N\cdot m^2}$ در صورت مسئله داده شده است.

۷۸ یک قاب لوح فشرده (CD) بر روی کف اتاق در جهت مثبت محور x می‌لغزد و نیروی $\vec{F}_a$ به آن وارد می‌شود. این نیرو با معادله‌ی $F_{ax} = 9x - 3x^2$ در طول محور x اثر می‌کند، که در آن x برحسب متر و نیرو برحسب نیوتون است. این قاب از حال سکون و از مکان $x = 0$ به راه می‌افتد و حرکت می‌کند تا دوباره ساکن شود. (الف) نمودار تغییرات کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}_a$ روی قاب را برحسب x رسم کنید. (ب) در چه مکانی کار انجام شده بیشینه است، و (پ) این مقدار کار بیشینه چقدر است؟ (ت) در چه مکانی کار انجام شده به صفر کاهش یافته است؟ (ث) قاب در چه مکانی دوباره در حال سکون است؟

حل: (الف) با استفاده از معادله‌ی ۷-۳۲، کار به صورت $W = \frac{9}{2}x^2 - x^3$ به دست می‌آید. نمودار مربوط در زیر رسم شده است.



(ب) با توجه به نمودار معلوم می‌شود که قله‌ی نمودار در $x = 3.00\,\mathrm{m}$ قرار دارد. برای اثبات این امر می‌توانیم از W مشتق بگیریم و نتیجه را مساوی صفر قرار دهیم، یا از این واقعیت استفاده کنیم که نیرو در قله صفر است.

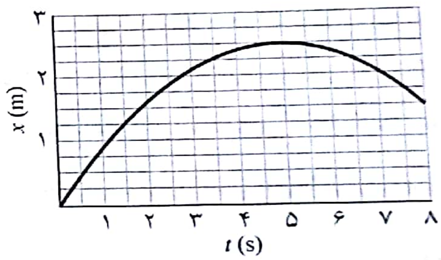
(پ) مقدار بیشینه برابر است با

$$W = \frac{9}{2}(3.00)^2 - (3.00)^3 = 13.50\,\mathrm{J}$$

(ت) نمودار (یا رابطه‌ی تحلیلی ما) نشان می‌دهد که در مکان $x = ۴/۵۰\,\mathrm{m}$، $W = ۰$ است.

(ث) قالب در مکانی در حال سکون است که $v = ۰$ باشد. چون $W = \Delta K = mv^۲/۲$، لذا با شرط $W = ۰$، $v = ۰$ است و این امر در مکان $x = ۴/۴۵\,\mathrm{m}$ صورت می‌گیرد.

۷۹ یک ظرف غذا به جرم $۲/۰\,\mathrm{kg}$ بر روی سطح بی‌اصطکاکی در جهت مثبت محور x لغزانده می‌شود. هنگامی که ظرف در زمان $t = ۰$ شروع به حرکت می‌کند وزش باد نیرویی در جهت منفی محور x به آن وارد می‌کند. شکل ۷–۵۱، نمودار تغییرات مکان ظرف غذا x، را برحسب زمان t در هنگامی که توسط باد هُل داده می‌شود، نشان می‌دهد. با استفاده از این نمودار انرژی جنبشی ظرف غذا را در زمان (الف) $t = ۱/۰\,\mathrm{s}$ و (ب) $t = ۵/۰\,\mathrm{s}$ برآورد کنید. (پ) در بازه‌ی زمانی $t = ۱/۰\,\mathrm{s}$ تا $t = ۵/۰\,\mathrm{s}$، نیروی باد چقدر کار روی ظرف غذا انجام می‌دهد؟



شکل ۷–۵۱ مسئله‌ی ۷۹.

حل: شکل ۷–۵۱ تابع $x(t)$، یعنی مکان ظرف غذا را به صورت تابعی از زمان نشان می‌دهد. این نمودار به صورت یک سهمی با تقعر رو به پایین است:

$$x(t) = \frac{۱}{۱۰}t(۱۰ - t) = t - \frac{۱}{۱۰}t^۲$$

از این تابع یک بار و دو بار مشتق می‌گیریم، تا سرعت و شتاب ظرف غذا به دست آید:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = ۱ - \frac{t}{۵}(\mathrm{m/s}),$$

$$a = \frac{d^۲x}{dt^۲} = -\frac{۱}{۵} = -۰/۲(\mathrm{m/s^۲})$$

از این معادله‌ها سرعت آغازی ظرف $v_i = v(۰) = ۱/۰\,\mathrm{m/s^۲}$ به‌دست می‌آید، و نیروی ثابت باد برابر است با

$$F = ma = (۲/۰\,\mathrm{kg})(-۰/۲\,\mathrm{m/s^۲}) = -۰/۴۰\,\mathrm{N}$$

کار انجام شده روی ظرف برابر است با

$$W(t) = F.x(t) = -۰/۰۴t(۱۰ - t)$$

انرژی جنبشی آغازی ظرف غذا برابر است با

$$K_i = \frac{۱}{۲}mv_i^۲ = \frac{۱}{۲}(۲/۰\,\mathrm{kg})(۱/۰\,\mathrm{m/s})^۲ = ۱/۰\,\mathrm{J}$$

با توجه به رابطه‌ی $\Delta K = K_f - K_i = W$، انرژی جنبشی در زمان بعدی برابر است با

$$K(t) = K_i + W = ۱ - ۰/۰۴t(۱۰ - t)$$

(الف) به ازای $t = ۱/۰\,\mathrm{s}$، داریم

$$K(۱\mathrm{s}) = ۱ - ۰/۰۴(۱)(۱۰ - ۱) = ۱ - ۰/۳۶ = ۰/۶۴ \approx ۰/۶\,\mathrm{J}$$

(ب) به ازای $t = ۵/۰\,\mathrm{s}$، داریم

$$K(۵/۰\,\mathrm{s}) = ۱ - ۰/۰۴(۵)(۱۰ - ۵) = ۱ - ۱ = ۰$$

(پ) کار انجام شده توسط نیروی باد در بازه‌ی زمانی $t = ۱/۰\,\mathrm{s}$ تا $t = ۵/۰\,\mathrm{s}$ برابر است با

$$W = K(۵/۰) - K(۱/۰\,\mathrm{s}) = ۰ - ۰/۶ \approx -۰/۶\,\mathrm{J}$$

۸۰ ***انتگرال‌گیری عددی.*** یک ظرف نان را با وارد کردن نیرویی به بزرگی $F = \exp(-۲x^۲)$ در طول محور x از $x = ۰/۱۵\,\mathrm{m}$ تا $x = ۱/۲۰\,\mathrm{m}$ حرکت می‌دهیم. در این رابطه x برحسب متر و F برحسب نیوتون است. (در اینجا exp نماد تابع نمایی است). این نیرو چقدر کار بر روی ظرف نان انجام می‌دهد؟

حل: در این مسئله از یکاهای SI استفاده شده است، لذا نتیجه (با توجه به معادله‌ی ۷–۲۳) برحسب ژول است. اگر محاسبه را به صورت عددی با استفاده از نرم‌افزار مناسب انجام دهیم، عدد تقریبی $۰/۴۷\,\mathrm{J}$ به دست می‌آید. دانشجویان علاقه‌مند می‌توانند جواب «دقیق» را با استفاده از «تابع خطا» به دست آورند:

$$\int_{۰/۱۵}^{۱/۲} e^{-۲x^۲}dx = \frac{۱}{۴}\sqrt{۲\pi}[\mathrm{erf}(۶\sqrt{۲}/۵) - \mathrm{erf}(۳\sqrt{۲}/۲۰)]$$