

## به نام خدا

تحویل: ۹۵/۷/۲۶

درس ریاضی فیزیک ۱

حل تمرین شماره: ۲

۱) بوسیله اتحاد رابطه  $\sum_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = A^{\gamma} B^{\gamma} - (\vec{A} \cdot \vec{B})^{\gamma}$$

را بدست آورید.

$$\begin{aligned}
(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= \left( \sum_{ijk} A_i B_j \epsilon_{ijk} \hat{e}_k \right) \cdot \left( \sum_{i'j'k'} A_{i'} B_{j'} \epsilon_{i'j'k'} \hat{e}_{k'} \right) \\
&= \sum_{ijk} \sum_{i'j'k'} A_i B_j A_{i'} B_{j'} \epsilon_{ijk} \epsilon_{i'j'k'} \delta_{kk'} \\
&= \sum_{ijk} \sum_{i'j'} A_i B_j A_{i'} B_{j'} \epsilon_{ijk} \epsilon_{i'j'k} \\
&= \sum_{ij} \sum_{i'j'} A_i B_j A_{i'} B_{j'} \left( \sum_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{i'j'k} \right) \\
&= \sum_{ij} \sum_{i'j'} A_i B_j A_{i'} B_{j'} (\delta_{ii'} \delta_{jj'} - \delta_{ij'} \delta_{ji'}) \\
&= \sum_{ij} A_i B_j A_{i'} B_{j'} - \sum_{ij} A_i B_j A_{i'} B_{i'} \\
&= \left( \sum_i A_i^{\gamma} \right) \left( \sum_j B_j^{\gamma} \right) - \left( \sum_i A_i B_i \right) \left( \sum_j A_j B_j \right) \\
&= A^{\gamma} B^{\gamma} - (\vec{A} \cdot \vec{B})^{\gamma}
\end{aligned}$$

۲) از رابطه  $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$  شروع کنید و نشان دهید که  $\vec{C} \times \vec{C} = 0$  منجر می‌شود به

$$\begin{aligned}
\vec{C} \times \vec{C} &= (\vec{A} + \vec{B}) \times (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{A} \times \vec{A} + \vec{A} \times \vec{B} + \vec{B} \times \vec{A} + \vec{B} \times \vec{B} \\
&= \vec{A} \times \vec{B} + \vec{B} \times \vec{A}
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

۳) نشان دهید که روابط

$$(\vec{A} - \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = A^{\gamma} - B^{\gamma}, \quad (\vec{A} - \vec{B}) \times (\vec{A} + \vec{B}) = 2 \vec{A} \times \vec{B}$$

برقرار است.

$$(\vec{A} - \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{B} - \vec{B} \cdot \vec{A} - \vec{B} \cdot \vec{B}$$

$$= A^{\gamma} - B^{\gamma}$$

و با توجه به سوال (۲)

$$(\vec{A} - \vec{B}) \times (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{A} \times \vec{A} + \vec{A} \times \vec{B} - \vec{B} \times \vec{A} - \vec{B} \times \vec{B}$$

$$= 2\vec{A} \times \vec{B}$$

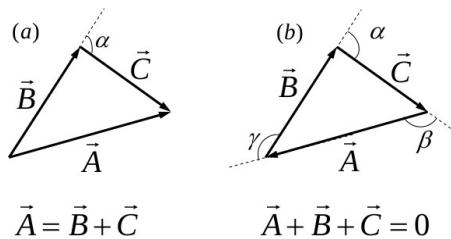
با استفاده از شکل (a) اتحاد کسینوسها

$$C^{\gamma} = A^{\gamma} + B^{\gamma} + 2AB \cos \alpha$$

و با استفاده از شکل (b) اتحاد سینوسها

$$\frac{\sin \alpha}{A} = \frac{\sin \beta}{B} = \frac{\sin \gamma}{C}$$

را بدست آورید.



اتحاد کسینوسها

$$C^{\gamma} = \vec{C} \cdot \vec{C} = (\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \vec{A} + \vec{B} \cdot \vec{B}$$

$$= A^{\gamma} + B^{\gamma} + 2\vec{A} \cdot \vec{B} = A^{\gamma} + B^{\gamma} + 2AB \cos \alpha$$

اتحاد سینوسها

$$\vec{C} + \vec{A} + \vec{B} = \bullet \quad (1)$$

اگر در طرفین تساوی بالا بردار  $\vec{A}$  را ضرب خارجی کنیم

$$\vec{A} \times (\vec{C} + \vec{A} + \vec{B}) = \bullet \Rightarrow \vec{A} \times \vec{C} + \vec{A} \times \vec{B} = \bullet \Rightarrow \vec{A} \times \vec{C} = -\vec{A} \times \vec{B}$$

با گرفتن اندازه عبارت بالا، داریم

$$|\vec{A} \times \vec{C}| = |\vec{A} \times \vec{B}| \Rightarrow AC \sin \beta = AB \sin \gamma$$

با تقسیم کردن  $ABC$  به عبارت بالا

$$\frac{AC \sin \beta}{ABC} = \frac{AB \sin \gamma}{ABC} \Rightarrow \frac{\sin \beta}{B} = \frac{\sin \gamma}{C}$$

اگر در طرفین عبارت (۱) را در بردار  $\vec{B}$  ضرب خارجی کنیم، داریم

$$\vec{B} \times (\vec{C} + \vec{A} + \vec{B}) = \bullet \Rightarrow \vec{B} \times \vec{A} + \vec{B} \times \vec{C} = \bullet \Rightarrow \vec{B} \times \vec{A} = -\vec{B} \times \vec{C}$$

با گرفتن اندازه عبارت بالا، داریم

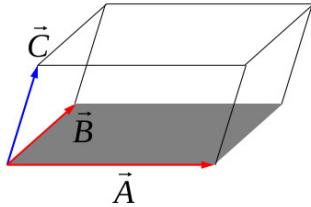
$$|\vec{B} \times \vec{A}| = |\vec{B} \times \vec{C}| \Rightarrow BA \sin \gamma = BC \sin \alpha$$

با تقسیم کردن  $ABC$  به عبارت بالا

$$\frac{BA \sin \gamma}{ABC} = \frac{BC \sin \alpha}{ABC} \Rightarrow \frac{\sin \gamma}{C} = \frac{\sin \alpha}{A}$$

- ۵) الف) مطابق شکل مساحت متوازیالاضلاع تشکیل شده بوسیله بردارهای  $\vec{A}$  و  $\vec{B}$  را بدست آورید.  
ب) مطابق شکل حجم متوازیالسطوح تشکیل شده بوسیله بردارهای  $\vec{B}$ ،  $\vec{A}$  و  $\vec{C}$  را بدست آورید و نشان دهید

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$



۶) بردار  $\vec{D}$  ترکیب خطی از سه بردار غیر هم سطح و نامتعامد بصورت

$$\vec{D} = \alpha \vec{A} + \beta \vec{B} + \gamma \vec{C}$$

$$\cdot \gamma = \frac{\vec{D} \cdot \vec{A} \times \vec{B}}{\vec{C} \cdot \vec{A} \times \vec{B}} \text{ و } \beta = \frac{\vec{D} \cdot \vec{C} \times \vec{A}}{\vec{B} \cdot \vec{C} \times \vec{A}}, \alpha = \frac{\vec{D} \cdot \vec{B} \times \vec{C}}{\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C}}$$

برای بدست آوردن  $\alpha$  طرفین بردار  $\vec{D} = \alpha \vec{A} + \beta \vec{B} + \gamma \vec{C}$  ضرب خارجی می‌کنیم

$$\vec{D} \times \vec{B} = \alpha \vec{A} \times \vec{B} + \beta \vec{B} \times \vec{B} + \gamma \vec{C} \times \vec{B}$$

و سپس در بردار  $\vec{C}$  ضرب داخلی می‌کنیم

$$\vec{D} \times \vec{B} \cdot \vec{C} = \alpha \vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C} + \gamma \vec{C} \times \vec{B} \cdot \vec{C}$$

باتوجه به اینکه بردارها غیر هم سطح و نامتعامد،  $\vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C} \neq 0$ ، بنابراین

$$\alpha = \frac{\vec{D} \times \vec{B} \cdot \vec{C}}{\vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C}} = \frac{\vec{C} \times \vec{D} \cdot \vec{B}}{\vec{C} \times \vec{A} \cdot \vec{B}} = \frac{\vec{B} \times \vec{C} \cdot \vec{D}}{\vec{B} \times \vec{C} \cdot \vec{A}}$$

برای بدست آوردن  $\beta$  طرفین بردار  $\vec{C}$  ضرب خارجی می‌کنیم

$$\vec{D} \times \vec{C} = \alpha \vec{A} \times \vec{C} + \beta \vec{B} \times \vec{C} + \gamma \vec{C} \times \vec{C}$$

و سپس در بردار  $\vec{A}$  ضرب داخلی می‌کنیم

$$\vec{D} \times \vec{C} \cdot \vec{A} = \alpha \vec{A} \times \vec{C} \cdot \vec{A} + \beta \vec{B} \times \vec{C} \cdot \vec{A}$$

باتوجه به اینکه بردارها غیر هم سطح و نامتعادم،  $\vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C} \neq 0$ ، بنابراین

$$\beta = \frac{\vec{D} \times \vec{C} \cdot \vec{A}}{\vec{B} \times \vec{C} \cdot \vec{A}} = \frac{\vec{A} \times \vec{D} \cdot \vec{C}}{\vec{C} \times \vec{A} \cdot \vec{B}} = \frac{\vec{C} \times \vec{A} \cdot \vec{D}}{\vec{B} \times \vec{C} \cdot \vec{A}}$$

کمیت  $\gamma$  نیز به همین ترتیب بدست می‌آید.

(۷) درستی اتحادهای

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{D})\vec{C} - (\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C})\vec{D}$$

را بررسی کنید.

عبارت  $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D})$  را می‌توان بصورت

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = \vec{D} \cdot [(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}] = -\vec{D} \cdot [\vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B})]$$

نوشت. با استفاده از اتحاد بک‌کب عبارت داخل کروشه برابر

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = -\vec{D} \cdot [\vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B})] = -\vec{D} \cdot [\vec{A}(\vec{C} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{C} \cdot \vec{A})]$$

$$= -(\vec{D} \cdot \vec{A})(\vec{C} \cdot \vec{B}) + (\vec{D} \cdot \vec{B})(\vec{C} \cdot \vec{A})$$

با استفاده از اتحاد بک‌کب  $\vec{v} = \vec{C}$ ،  $\vec{u} = \vec{A} \times \vec{B}$ ، واینکه در اینجا  $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{v}(\vec{u} \cdot \vec{w}) - \vec{w}(\vec{u} \cdot \vec{v})$  داریم

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D}) = \vec{C}[(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{D}] - \vec{D}[(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}]$$

$$= \vec{C}[(\vec{D} \times \vec{A}) \cdot \vec{B}] - \vec{D}[(\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B}]$$

$$= \vec{C}[(\vec{B} \times \vec{D}) \cdot \vec{A}] - \vec{D}[(\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \vec{A}]$$

(۸) با استفاده از اتحاد بک‌کب، نشان دهید

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A}) + \vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A}) + \vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) =$$

$$[\vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})] + [\vec{C}(\vec{B} \cdot \vec{A}) - \vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C})] + [\vec{A}(\vec{C} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{C} \cdot \vec{A})] = 0$$

۹) نشان دهید اپراتور گرادیان  $\vec{\nabla}$  یک بردار است (راهنمایی: برای این بررسی ناوردایی، بردار گرادیان را تحت چرخش دستگاه مختصات حول محور  $x$  بررسی کنید.)

تحت چرخش دستگاه مختصات حول محور  $x$ ، بردار مکان و بردارهای یکه دستگاه مختصات بصورت زیر تبدیل می‌شوند

$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' \cos \theta - z' \sin \theta \\ z = y' \sin \theta + z' \cos \theta \end{cases} \quad (2)$$

و

$$\begin{cases} \hat{i}' = \hat{i} \\ \hat{j}' = \hat{j} \cos \theta + \hat{k} \sin \theta \\ \hat{k}' = -\hat{j} \sin \theta + \hat{k} \cos \theta \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}' &= \hat{i}' \frac{\partial}{\partial x'} + \hat{j}' \frac{\partial}{\partial y'} + \hat{k}' \frac{\partial}{\partial z'} \\ &= \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + (\hat{j} \cos \theta + \hat{k} \sin \theta) \left( \frac{\partial y}{\partial y'} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y'} \frac{\partial}{\partial z} \right) + (-\hat{j} \sin \theta + \hat{k} \cos \theta) \left( \frac{\partial y}{\partial z'} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z'} \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + (\hat{j} \cos \theta + \hat{k} \sin \theta) \left( \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial z} \right) + (-\hat{j} \sin \theta + \hat{k} \cos \theta) \left( -\sin \theta \frac{\partial}{\partial y} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} = \vec{\nabla} \end{aligned}$$

۱۰) اگر  $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ ، کمیتهای زیر را بدست آورید (الف)  $|\vec{\nabla}f(x, y, z)|$  در نقطه  $(3, 2, 1)$ ، (ب) بزرگی گرادیان در نقطه  $(1, 2, 3)$  و (ج) کسینوسهای هادی  $\vec{\nabla}f(x, y, z)$  در نقطه  $(1, 2, 3)$ .

۱۱) بردار یکه عمود بر سطح سه‌می‌گون  $z = x^2 + y^2$  را در نقطه  $(1, 2, 1)$  محاسبه کنید و معادله صفحه مماس بر این سه‌می‌گون را در نقطه  $(1, 2, 1)$  بدست آورید.

۱۲) اگر  $\vec{F}(x, y, z, t)$  یک میدان بردار تابع مکان  $\vec{r}$  و زمان  $t$  باشد، نشان دهید

$$d\vec{F} = (d\vec{r} \cdot \vec{\nabla})\vec{F} + dt \frac{\partial}{\partial t}\vec{F}$$

اگر  $\phi(x, y, z, t)$  یک میدان اسکالر تابع مکان  $\vec{r}$  و زمان  $t$  باشد، در اینصورت

$$d\phi = dz \frac{\partial \phi}{\partial z} + dy \frac{\partial \phi}{\partial y} + dz \frac{\partial \phi}{\partial z} + dt \frac{\partial \phi}{\partial t} = (d\vec{r} \cdot \vec{\nabla})\phi + dt \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

اگر مولفه‌های بردار  $\vec{F}(x, y, z, t)$  را میدانهای اسکالر در نظر بگیریم، رابطه بالا برای هر یک از مولفه‌های بردار  $(F_x(x, y, z, t), F_y(x, y, z, t), F_z(x, y, z, t))$  صادق است، یعنی

$$\begin{aligned} dF_x &= (\vec{dr} \cdot \vec{\nabla}) F_x + dt \frac{\partial F_x}{\partial t} \\ dF_y &= (\vec{dr} \cdot \vec{\nabla}) F_y + dt \frac{\partial F_y}{\partial t} \\ dF_z &= (\vec{dr} \cdot \vec{\nabla}) F_z + dt \frac{\partial F_z}{\partial t} \end{aligned}$$

اگر  $\vec{dF} = \hat{i}dF_x + \hat{j}dF_y + \hat{k}dF_z$ ، بنابراین

$$d\vec{F} = (\vec{dr} \cdot \vec{\nabla})(\hat{i}F_x + \hat{j}F_y + \hat{k}F_z) + dt \frac{\partial}{\partial t}(\hat{i}F_x + \hat{j}F_y + \hat{k}F_z)$$

و

$$d\vec{F} = (\vec{dr} \cdot \vec{\nabla})\vec{F} + dt \frac{\partial}{\partial t}\vec{F}$$

۱۳) نشان دهید اگر  $\vec{F}(x, y, z, t)$  یک بردار باشد،  $\frac{d\vec{F}}{dt}$  نیز یک بردار است (راهنمائي: از مسئله قبل استفاده کنید و در نظر داشته باشید که گراديان  $\vec{\nabla}$  و  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$  نیز بردارند).

اگر  $\vec{F}(x, y, z, t)$  یک بردار باشد، در اینصورت رابطه بين مولفه های آن در دو دستگاه پريمدار و بدون پريم بصورت

$$F'_i = \sum_j \lambda_{ij} F_j$$

داده می شود، که در آن  $\lambda_{ij}$  کسینوس بين جهت مثبت دو محور  $i$  و  $j$  با يكديگر است. قصد داريم نشان دهيم که  $\frac{d\vec{F}}{dt}$  یک بردار است يعني

$$\frac{dF'_i}{dt} = \sum_j \lambda_{ij} \frac{dF_j}{dt}$$

از مسئله قبل داريم

$$\frac{dF'_i}{dt} = \vec{v}' \cdot \vec{\nabla}' F'_i + \frac{\partial}{\partial t} F'_i$$

$$\begin{aligned} \frac{dF'_i}{dt} &= \left( \sum_j \hat{e}_j v'_j \right) \cdot \left( \sum_k \hat{e}_k \partial'_k \right) F'_i + \frac{\partial}{\partial t} F'_i = \left( \sum_{jk} \delta_{jk} v'_j \partial'_k \right) F'_i + \frac{\partial}{\partial t} F'_i = \left( \sum_j v'_j \partial'_j \right) F'_i + \frac{\partial}{\partial t} F'_i \\ &\text{اگر گراديان و سرعت بردار باشند} \end{aligned}$$

$$\frac{dF'_i}{dt} = \left[ \sum_j \left( \sum_l \lambda_{jl} v_l \right) \left( \sum_m \lambda_{jm} \partial_m \right) \right] F'_i + \frac{\partial}{\partial t} F'_i$$

و

$$\frac{dF'_i}{dt} = \left[ \sum_{lm} \left( \sum_j \lambda_{jl} \lambda_{jm} \right) v_l \partial_m \right] F'_i + \frac{\partial}{\partial t} F'_i = \left( \sum_{lm} \delta_{lm} v_l \partial_m \right) F'_i + \frac{\partial}{\partial t} F'_i = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) F'_i + \frac{\partial}{\partial t} F'_i$$

و اگر  $\vec{F}$  نیز یک بردار باشد

$$\begin{aligned}\frac{dF'_i}{dt} &= (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) F'_i + \frac{\partial}{\partial t} F'_i = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \sum_k \lambda_{ik} F_k + \frac{\partial}{\partial t} \sum_k \lambda_{ik} F_k \\ &= \sum_k \lambda_{ik} \left( \vec{v} \cdot \vec{\nabla} F_k + \frac{\partial}{\partial t} F_k \right) = \sum_k \lambda_{ik} \frac{dF_k}{dt}\end{aligned}$$

(۱۴) با مشتق‌گیری از مولفه‌ها نشان دهید

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\vec{A} \cdot \vec{B}) &= \frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt} \\ \frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{B}) &= \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt}\end{aligned}$$

(راهنمایی: از مسئله (۱۲) برای بررسی اتحادها استفاده کنید.)  
ابتدا حاصلضرب دو میدان اسکالر  $f$  و  $g$  را بررسی کنیم، یعنی

$$\begin{aligned}d(fg) &= (d\vec{r} \cdot \vec{\nabla})(fg) + dt \frac{\partial}{\partial t}(fg) \\ &= dx \frac{\partial}{\partial x}(fg) + dy \frac{\partial}{\partial y}(fg) + dz \frac{\partial}{\partial z}(fg) + dt \frac{\partial}{\partial t}(fg) \\ &= dx \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) g + f \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right) \right] + dy \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) g + f \left( \frac{\partial g}{\partial y} \right) \right] + dz \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) g + f \left( \frac{\partial g}{\partial z} \right) \right] + dt \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right) g + f \left( \frac{\partial g}{\partial t} \right) \right] \\ &= g \left( dx \frac{\partial}{\partial x} f + dy \frac{\partial}{\partial y} f + dz \frac{\partial}{\partial z} f + dt \frac{\partial}{\partial t} f \right) g + f \left( dx \frac{\partial}{\partial x} g + dy \frac{\partial}{\partial y} g + dz \frac{\partial}{\partial z} g + dt \frac{\partial}{\partial t} g \right) \\ &= \left( d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} f + dt \frac{\partial}{\partial t} f \right) g + f \left( d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} g + dt \frac{\partial}{\partial t} g \right)\end{aligned}$$

و اگر  $v_z = \frac{dz}{dt}$  و  $v_x = \frac{dx}{dt}$ ،  $v_y = \frac{dy}{dt}$  باشد، بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(fg) &= (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})(fg) + \frac{\partial}{\partial t}(fg) \\ &= \left( \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f + \frac{\partial}{\partial t} f \right) g + f \left( \vec{v} \cdot \vec{\nabla} g + \frac{\partial}{\partial t} g \right) \\ &= \frac{df}{dt} g + f \frac{dg}{dt}\end{aligned}$$

برای ضرب داخلی دو بردار

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \sum_i A_i B_i &= \sum_i \left( \frac{d}{dt}(A_i B_i) \right) \\ &= \sum_i \left( \frac{dA_i}{dt} B_i + A_i \frac{dB_i}{dt} \right) \\ &= \sum_i \frac{dA_i}{dt} B_i + \sum_i A_i \frac{dB_i}{dt} \\ &= \frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt}\end{aligned}$$

## برای ضرب خارجی دو بردار

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \sum_{ijk} A_i B_j \epsilon_{ijk} \hat{e}_k &= \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \hat{e}_k \left( \frac{d}{dt} (A_i B_j) \right) \\
&= \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \hat{e}_k \left( \frac{dA_i}{dt} B_j + A_i \frac{dB_j}{dt} \right) \\
&= \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \hat{e}_k \frac{dA_i}{dt} B_j + \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \hat{e}_k A_i \frac{dB_j}{dt} \\
&= \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt}
\end{aligned}$$

( ۱۵ ) با استفاده از نمایش اندیسی بردارها، روابط زیر را بررسی کنید

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \\
\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) &= (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \partial_i (A_j B_k) = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} [(\partial_i A_j) B_k + A_j (\partial_i B_k)] \\
&= \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} (\partial_i A_j) B_k + \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} A_j (\partial_i B_k) \\
&= \sum_{ijk} \epsilon_{kij} B_k (\partial_i A_j) - \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} A_j (\partial_i B_k) \\
&= \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{\nabla} \times \left( \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} A_i B_j \hat{e}_k \right) = \sum_{ijklm} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lkm} \partial_l (A_i B_j) \hat{e}_m \\
&= \sum_{ijklm} ((\partial_l A_i) B_j + A_i (\partial_l B_j)) \left( \sum_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{lkm} \right) \hat{e}_m = \sum_{ijklm} ((\partial_l A_i) B_j + A_i (\partial_l B_j)) \left( - \sum_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} \right) \hat{e}_m \\
&= - \sum_{ijklm} ((\partial_l A_i) B_j + A_i (\partial_l B_j)) (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \hat{e}_m \\
&= - \sum_{ij} (\partial_i A_i) B_j \hat{e}_j - \sum_{ij} A_i (\partial_i B_j) \hat{e}_j + \sum_{ij} B_j (\partial_j A_i) \hat{e}_i + \sum_{ij} \hat{e}_i A_i (\partial_j B_j) \\
&= - \left( \sum_i \partial_i A_i \right) \left( \sum_j B_j \hat{e}_j \right) - \left( \sum_i A_i \partial_i \right) \left( \sum_j B_j \hat{e}_j \right) \\
&\quad + \left( \sum_j B_j \partial_j \right) \left( \sum_i A_i \hat{e}_i \right) + \left( \sum_i \hat{e}_i A_i \right) \left( \sum_j \partial_j B_j \right) \\
&= - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})
\end{aligned}$$

**مظفری**