* جلسه سیزدهم : یکشنبه : ۸۲/۱/۳۱

* خطای حالت دائمی :

یادآوری . ورودی پله :

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) \Rightarrow e_{ss} = \frac{1}{1+G(0)} = \frac{1}{1+K_p}$$

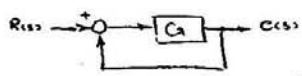
$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s)$$: ثابت خطای موقعیت

دیگر گفتیم :

$$G(s) = K \cdot \frac{(1+T_{z_1})\cdots(1+T_{z_m})}{s^N(1+T_{p_1})\cdots(1+T_{p_n})}$$

و نوع سیستم را نیز تعریف کردیم .

اکنون ورودی شیب را بررسی می کنیم :



$$r(t) = t \rightarrow R(s) = \frac{1}{s^2}$$

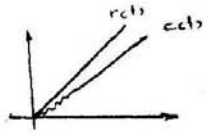
$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)} \cdot R(s) = \frac{1}{1+G(s)} \cdot \frac{1}{s^2} \qquad e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+G(s)} \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{sG(s)}$$

ثابت خطای سرعت $K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) \rightarrow e_{ss} = \frac{1}{K_v}$

$$\begin{cases} N=0 \rightarrow K_v = 0 \rightarrow e_{ss} = \infty \\ N=1 \rightarrow K_v = K \rightarrow e_{ss} = \frac{1}{K} \\ N \geq 2 \rightarrow K_v = \infty \rightarrow e_{ss} = 0 \end{cases}$$

$N=1 \rightarrow r(t) = t$

$c(t) = r(t) - \frac{1}{K}$



$$\frac{dr(t)}{dt} = 1$$

$$\frac{dc(t)}{dt} = 1$$

سرعت خطا ندارد .

ورودی شتاب (سهمی) :

$$r(t) = \frac{t^2}{2} \rightarrow R(s) = \frac{1}{s^3}$$

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)} \cdot \frac{1}{s^3} \rightarrow e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2+s^2G(s)}$$

ثابت خطای شتاب $K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s)$

$$\Rightarrow \begin{cases} N=0 \rightarrow K_a=0 \rightarrow e_{ss}=\infty \\ N=1 \rightarrow K_a=0 \rightarrow e_{ss}=\infty \\ N=2 \rightarrow K_a=K \rightarrow e_{ss}=\frac{1}{K} \\ N\geq 3 \rightarrow K_a=\infty \rightarrow e_{ss}=0 \end{cases} \qquad \Rightarrow e_{ss}=\frac{1}{K_a} \Rightarrow$$

. نتیجه‌گیری :

برای تعقیب ورودی شتاب و با خطای حالت ماندگار صفر، باید حداقل ۳ عدد انتگرال‌گیر در حلقه داشته باشیم

برای تعقیب ورودیهای با تغییر بیشتر و سریعتر، باید تعداد انتگرال‌گیر بیشتری داشته باشیم.

⇐ مزیت انتگرال‌گیر: کاهش خطا

و اما معایب انتگرال‌گیر:

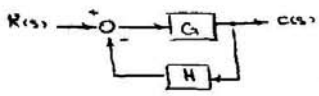
(۱) تأخیر می‌دهد.

(۲) باعث ناپایداری می‌شود.

تأخیر فاز انتگرال‌گیر: $\measuredangle \frac{1}{s}=-90^\circ$

$\measuredangle \frac{1}{s^2}=-180^\circ$: " " ۲ " "

خطای حالت دائم سیستم با فیدبک غیرواحد:



$E(s) \neq E_a(s)$

$$\frac{E_a(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+GH} \Rightarrow E_a(s)=\frac{1}{1+G(s)H(s)}\cdot R(s)$$

فرمولهای بخش پیش تنها برای $E_a(s)$ جوابگو خواهند بود نه $E(s)$:

$$E(s)=R(s)-C(s)=R(s)-T(s)\cdot R(s) \Rightarrow$$

$$E(s)=\frac{1+GH-G}{1+GH}\cdot R(s) \qquad (*)$$

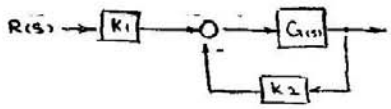
خطای حالت دائم یعنی ارزیابی سیستم در فرکانس صفر.

اگر $H(0)=1$ (مثلاً $G(s)=\frac{1}{1+\tau s}$) ⇐ از رابطه (*) دیده می‌شود که همان فرمولهای قبلی معتبرند.

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\frac{1+G(0)H(0)-G(0)}{1+G(0)H(0)}=\frac{1}{1+G(0)}$$

⇐ تمام مطالب پیش در مورد انتگرال‌گیر ... برقرار است.

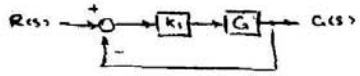
• حالت خاص:



H(s) تنها یک گین است.

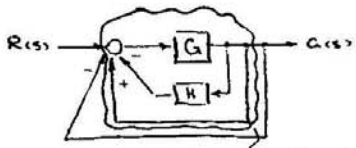
به این صورت به فیدبک واحد تبدیل می‌شود:

$K_1 = K_2 \Rightarrow$

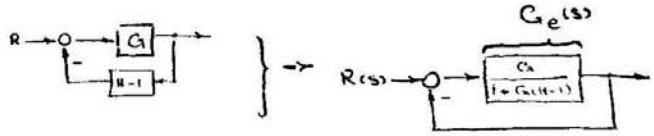


روابط و قوانین قبلی معتبر است. $\Rightarrow$

• روش دیگری نیز موجود است:



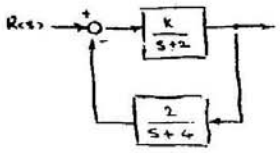
یک فیدبک مثبت و یک فیدبک منفی اضافه می‌کنیم.



$$\Rightarrow G_e(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)(H(s)-1)} \quad \Rightarrow \quad E(s) = E_e(s) = \frac{1}{1+G_e(s)} \cdot R(s)$$

$\Rightarrow$ تمام روابط قبلی، با قرار دادن $G_e(s)$ به جای G برقرار است.

• مثال:



Find K s.t $e_{ss} = 0$

$R(s) = \frac{1}{s}$

حل: از روش $G_e(s)$ نمی‌رویم. از روش محاسبه بطور متعارف استفاده می‌کنیم:

$$T(s) = \frac{\frac{K}{s+2}}{1+\frac{K}{s+2}\cdot\frac{2}{s+4}} = \frac{K(s+4)}{(s+2)(s+4)+2K}$$

رابطه کلی خطا: $E(s) = R(s) - C(s) = R(s) - T(s)\cdot R(s) = (1-T(s))\cdot R(s)$

$$E(s) = (1-T(s))\cdot\frac{1}{s} \qquad e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = 1 - \lim_{s\to 0} T(s)$$

$\Rightarrow$ برای صفر شدن e_{ss} باید $\lim_{s\to 0} T(s) = 1$ باشد یعنی:

$$T(0) = \frac{4K}{8+2K} = 1 \rightarrow K = 4$$

مشاهده میکنید با وجود آنکه انتگرال گیری وجود نداشت و K هم محدود بود، اما سیستم توانایی تعقیب ورودی پله را با خطای ماندگار صفر دنبال می کند.

* با توجه به مشکلات انتگرال گیر، چرا همیشه از روش فوق استفاده نکنیم؟

پاسخ: اگر G_d را داشته باشیم، با فرض $H(s)$ مناسب انجام پذیر است، که خطای حالت دائم صفر شود، اما مشکل اینجاست که G_d را دقیقاً نمی شناسیم. (با شناخت دقیق سیستم است که قطبها، صفرها و کمی بدست می آید)

و با وجود انتگرال گیر، علیرغم حضور تغییرات سیستم، کماکان خطا صفر خواهد شد. (کمی ۵ انتگرال گیر، ۵ است)

* پایداری:

پایداری یکی از مهمترین پارامترهای سیستم کنترل است.

پایداری { مطلق: یعنی اینکه پایدار است یا خیر
نسبی: یعنی سیستم چقدر نزدیکی مرز پایداری است. یعنی سیستم پایدار چگونه ناپایدار می شود و سیستم ناپایدار چگونه پایدار می شود

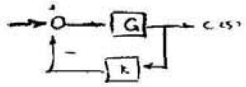
پایداری { BIBO: هر ورودی محدود، خروجی محدود نتیجه می دهد.
Internal Stability (پایداری داخلی): تمام سیگنالهای سیستم باید محدود باشند.

شرط پایداری { BIBO: قطبهای سیستم اکیداً سمت چپ محور موهومی باشند
داخلی: مقادیر ویژه ماتریس A سمت چپ محور موهومی باشد.

اگر حذف صفر قطب سمت راست نداشته باشیم، پایداری داخلی و BIBO معادل یکدیگر هستند.

یعنی: در این صورت مقادیر ویژه ماتریس A، همان قطبهای سیستم است.

• پایداری BIBO : همه قطبهای سیستم سمت چپ محور s می باشد.



$$G = \frac{n_p}{d_p} \qquad H = \frac{n_h}{d_h} \qquad T(s) = \frac{G(s)}{1 + H(s)G(s)}$$

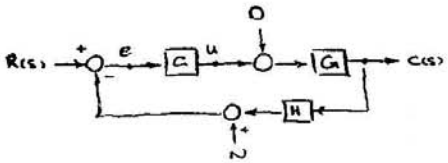
$$\rightarrow T(s) = \frac{\frac{n_p}{d_p}}{1 + \frac{n_p}{d_p}\cdot\frac{n_h}{d_h}} = \frac{n_p \cdot d_h}{d_p d_h + n_p n_h} \qquad \Delta(s) = d_p \cdot d_h + n_p h_p = 0$$

ریشه‌های معادله مشخصه، قطبهای سیستم CL (Closed loop) است.

* شرط پایداری داخلی: سمت راست صفحه s

اگر حذف صفر و قطب در RHP در طول حلقه صورت نگرفته باشد ← این دو نوع پایداری یکی هستند.

یعنی باید ریشه‌های $\Delta(s)$ را بررسی کنیم.

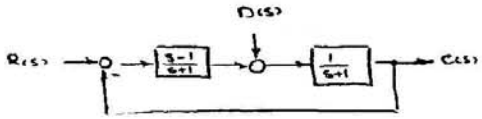


حالت کلی:

• برای پایداری داخلی: (۱) باید حذف صفر و قطب در RHP نداشته باشیم

(۲) ریشه‌های $\Delta(s)$ باید اکیداً سمت چپ محور s باشند.

* کوپنر:



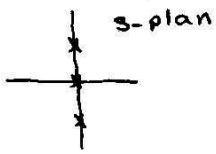
$\frac{C(s)}{R(s)}$ پایدار است $\qquad$ $\frac{C(s)}{D(s)}$: پایدار نیست

نکته: چون در سیستمهای غیرپایدار، اغتشاش (distortion) وجود دارد ← باید پایداری داخلی بحث شود.

یعنی حالت حذف صفر و قطب در RHP را به عنوان راه فراری برای ایجاد پایداری BIBO استفاده نمی‌کنیم

* پایداری مرزی:

پایداری مرزی یعنی، قطبهای ساده روی محور s می‌باشند.



(یعنی ناپایداری نمایی وجود ندارد).

- یعنی با اندکی تغییر در ورودی، یا دارد پایداری BIBO می‌شویم یا سیستم ناپایدار می‌شود.

بعضی از صفحه‌های محدود در پایداری مرزی، می‌توانند سیستم را ناپایدار کنند:

مثال:

$R(s) = \frac{1}{s} \longrightarrow C(s) = \frac{1}{s^2}$ (unbounded)

$G(s) = \frac{1}{s}$ (ب)

مثال:

$R(s) = \frac{K}{s^2+\omega^2}$

$G(s) = \frac{\omega}{\omega^2+s^2}$

$\longrightarrow C(s) = \frac{K\omega}{(\omega^2+s^2)^2} \longrightarrow \mathcal{L}^{-1} \longrightarrow c(t) = Kt\sin\omega t$

- تذکر: اگر قطب مکرر روی محور jω باشد، سیستم ناپایدار است.

این ناپایداری به دلیل نمایی بودن نیست. به دلیل ایجاد عامل t است.

* جلسهٔ چهاردهم : سه‌شنبه : ۸۲/۲/۲

... ادامهٔ مباحث پایداری:

پایداری:
- BIBO : ← ریشه‌های معادله مشخصه، اکیداً سمت چپ ($\Delta(s)$)
- Internal : No RHP Pole-Zero Cancellation → $\Delta(s)$ →

در این جلسه می‌خواهیم بدون حل کردن معادلهٔ $\Delta(s)=0$ ، درمورد ریشه‌های آن بحث کنیم:

$$\Delta(s)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\dots+a_1s+a_0=0$$

به شکل فاکتور r_i :

$$i=1,2,\dots,n$$

$$\Delta(s)=(s-r_1)(s-r_2)\dots(s-r_n)$$

$$\Delta(s)=s^n-(r_1+r_2+\dots+r_n)s^{n-1}+(r_1r_2+\dots+r_{n-1}r_n)s^{n-2}+\dots+(-1)^n(r_1r_2\dots r_n)$$

پایداری یعنی: مقادیر حقیقی r_iها، باید منفی باشد.

شرط لازم (ولی ناکافی): همه ضرایب $\Delta(s)$ مثبت باشد. ($a_i>0$) (همه ضرایب متحدالعلامت باشد)

همه ضرایب $\Delta(s)$ باید وجود داشته باشد.

* مثال:

$$\Delta(s)=s^3+s^2+2s+8$$

$$\rightarrow \Delta(s)=(s+2)(s^2-s+4)$$

$$=(s+2)\left(s-\left(\frac{-1\pm\sqrt{15}j}{2}\right)\right)$$

شرط لازم را دارد ولی 2 ریشه سمت راست دارد.

... بررسی شرایط لازم و کافی:

* معیار راث هورویتز:

این روش براساس تشکیل یک جدول یا ماتریس است.

و درایه‌های این ماتریس بطور مستقیم یا غیر مستقیم از ضرایب $\Delta(s)$ یافته می‌شود:

$$\Delta(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

* آرایه راث:

$$\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
\vdots & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\
s^1 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
s^0 = 1 & & & &
\end{array}$$

- دو سطر اول مستقیماً از $\Delta(s)$ بدست می‌آید.

- سطرهای بعدی از ضرایب دو سطر ماقبل یافته می‌شود به این صورت:

$$b_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} \qquad b_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} \qquad b_3 = \cdots$$

$$c_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} \qquad c_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1} \qquad c_3 = \cdots$$

$$\vdots$$

بعد از این که سطرهای جدول راث تکمیل شد، داریم:

* شرط لازم و کافی برای آنکه ریشه‌های $\Delta(s)$ همگی سمت چپ محور $j\omega$ باشند، آنستکه در ستون تحت جدول تغییر علامتی مشاهده نشود.

* تعداد ریشه‌های سمت راست = تعداد تغییر علامتها در ستون اول آرایه راث است.

هنگام برگردان آرایه‌های جدول راث، سه حالت ممکن است اتفاق بیفتد:

(۱) جدول بدون مشکل کامل شود (هیچ صفری در ستون اول صفر نشود)

(۲) یکی از درایه‌های ستون اول صفر شود.

(۳) تمام درایه‌های یک سطر صفر شوند.

اکنون به بررسی این سه حالت می‌پردازیم:

حالت اول: جدول بصورت ordinary پر شود.

مثال: سیستم درجه ۲:

$$\Delta(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

می‌دانیم در سیستم درجه ۲، اگر تمام ضرایب مثبت باشند، سیستم پایدار است.

s^2	a_2	a_0
s^1	a_1	0
s^0	a_0	

$$\left.\begin{array}{l} a_2>0 \\ a_1>0 \\ a_0>0 \end{array}\right\} \text{پایداری}$$

مثال: سیستم درجه ۳:

$$\Delta(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

s^3	a_3	a_1
s^2	a_2	a_0
s^1	$\frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_2}$	0
s^0	a_0	

$$\left.\begin{array}{l} a_3, a_2, a_0>0 \\ a_2 a_1 > a_0 a_3 \end{array}\right\} \text{شرط پایداری}$$

مثال:

$$\Delta(s) = s^3 + s^2 + 2s + 24$$

s^3	1	2
s^2	1	24
s^1	-22	0
s^0	24	

در ریشه سمت راست داریم ← ناپایدار است

برای آنکه ریشه در صفر باشد، باید $a_0 = 0$ باشد.

چون معادله اخیر درجه ۲ بود و دو ریشه سمت راست داریم، ریشه‌ای که روی محور $j\omega$ باشد نداریم. (چون اینگونه ریشه‌ها باید فرد درج باشد) ولی در معادله درجه ۳ حداکثر ۳ ریشه داریم).

حالت دوم: یکی از درایه‌های ستون اول، صفر باشد:

- راه حل (۱): عنصر صفر را با ε جایگزین نموده و محاسبات را ادامه می‌دهیم (ε عدد مثبت کوچکی می‌باشد). در پایان ε را به سمت صفر میل می‌دهیم و تغییر علامتها را بررسی می‌کنیم.

- راه حل (۲): در یک فاکتور $(s+\alpha_i)$ که $\alpha_i > 0$ ضرب می‌کنیم (غالباً جواب می‌دهد).

مثال:

$$\Delta(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10$$

s^5	1	2	11
s^4	2	4	10
s^3	$0^{\to\varepsilon}$	6	0
s^2	b_1	b_2	
s^1	c_1	0	
s^0	10		

$$b_1 = \frac{4\varepsilon - 12}{\varepsilon} = 4 - \frac{12}{\varepsilon} \simeq -\frac{12}{\varepsilon}$$

$$b_2 = \frac{10\varepsilon - 0}{\varepsilon} = 10$$

$$c_1 = \frac{6b_1 - 10\varepsilon}{b_1} = 6 - \frac{10\varepsilon}{b_1} \simeq 6$$

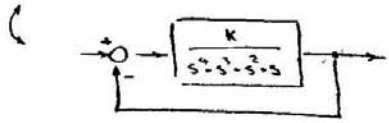
$$\lim_{\varepsilon \to 0} b_1 = -\frac{12}{\varepsilon} < 0$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} c_1 = 6 > 0$$

$\Rightarrow$ 2 تغییر علامت دارد $\Rightarrow$ دو ریشه سمت راست دارد.

مثال:

$$\Delta(s) = s^4 + s^3 + s^2 + s + K$$



s^4	1	1	K	$+\varepsilon$	1
s^3	1	1	0	0	
s^2	$0^{\to\varepsilon}$	K	0		
s^1	$\frac{\varepsilon - K}{\varepsilon}$	0			
s^0	K				

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon - k}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} 1 - \frac{k}{\varepsilon} = \begin{cases} -\infty & ; k>0 \\ +\infty & ; k<0 \end{cases}$$

$k>0$ ← تغییر علامت در دو ریشه سمت راست.

$k<0$ ← یک تغییر علامت در یک ریشه سمت راست.

$k=0$ ← $\Delta(s)$ یک ریشه در مبداء دارد.

حالت سوم: وقتی همه خرایب یک سطر صفر شوند:

(۱) یعنی فاکتور مشترک در تقسیمات متوالی وجود دارد. (همواره خرایی که بدست می‌آیم از تقسیمات متوالی بدست آمده‌اند).

(۲) نشاندهنده ریشه‌های متقارن است.

مثال:

$$\Delta(s) = 2s^4 + 4s^2 + 1$$

همانطور که دیده می‌شود، ریشه‌ها متقارن خواهند بود.

$$\begin{array}{lll} \Delta_1 : & s^4 & 2 \quad 4 \quad 1 \\ \Delta_2 : & s^3 & 0 \quad 0 \quad 0 \\ & s^2 & \end{array}$$

$\Delta(s) = \Delta_1(s) + \Delta_2(s)$

(۳) معادله کمکی از سطر ماقبل تشکیل می‌دهیم. (که ریشه‌های آن متقارن است)

هر دو در سطر زوج، صفر خواهد شد:

$$\begin{array}{lll} s^5 & 2 & 4 \quad 1 \\ s^4 & 0 & 0 \quad 0 \end{array}$$

$$\Delta(s) = 2s^2 + 4s^3 + s = 6(2s^4 + 4s^2 + 1)$$

(۴) ریشه‌های معادله کمکی، ریشه‌های معادله اصلی نیز هستند.

(۵) معادله کمکی زوج است.

* در حالت سوم جدول را چگونه ادامه دهیم؟

- از سطر ماقبل، یک معادله کمکی تشکیل می‌دهیم: $A(s)$ ← Auxilary

زوج

ریشه‌های متقارن که ریشه‌های $\Delta(s)$ نیز هستند.

- ضرایب مشتق $A(s)$ را به جای سطر کاملاً صفر قرار می‌دهیم: $P(s) = \frac{dA(s)}{ds}$

و جدول را ادامه می‌دهیم.

- اکنون تعداد تغییر علامت‌ها متناظر با تعداد ریشه‌های سمت راست خواهد بود.

- مثال: محدوده پایداری: $\Delta(s) = s^3 + 2s^2 + 4s + K$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 4 \\ s^2 & 2 & K \\ s^1 & \frac{8-K}{2} & 0 \\ s^0 & K & \end{array}$$

شرط پایداری: $\left.\begin{array}{l} 8-K>0 \\ K>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{0<K<8}_{\text{Range پایداری}}$

به ازای $K=8$ در مرز پایداری هستیم.

اگر $K=8$ ← داریم:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 4 \\ s^2 & 2 & 8 \\ s^1 & 0 & 0 \\ s^0 & 8 & \end{array} \rightarrow \underbrace{A(s) = 2s^2 + 8}_{\text{معادله کمکی}} \rightarrow \underbrace{s = \pm 2j}_{\text{ریشه‌های متقارن}}$$

$$\frac{dA(s)}{ds} = 4s \quad (*) \rightarrow \begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 4 \\ s^2 & 2 & 8 \\ s^1 & 4 & 0 \\ s^0 & 8 & \end{array}$$

چون تغییر علامت نداریم ← ریشه سمت راست نداریم.

از طرفی می‌دانیم به ازای $K=8$، ریشه موهومی در سمت چپ‌تر نیست.

پس برای اینکه متقارن باشد، ← ریشه‌های روی محور $j\omega$ هستند.

- مثال:

$$\begin{array}{c|ccccc} s^9 & & & & & \\ s^8 & & & & & \\ s^7 & & & & & \\ s^6 & & & & & \\ \vdots & & & & & \end{array}$$

$A(s) \rightarrow$ s^8, s^7, s^6

بقیه ریشه‌های $\Delta(s)$ را مشخص می‌کند

تغییر علامت از اینجا به بعد، ریشه‌های $A(s)$ را مشخص می‌کند

$$\sim \begin{array}{c|c} s^9 & 2 \\ s^8 & 1 \\ s^7 & 2 \\ & -3 \\ & 3 \\ & \vdots \\ s^0 & 3 \end{array}$$

توضیحات:

چون ۲ تغییر علامت داریم ← ۲ ریشه سمت راست داریم.

به علت تقارن ریشه‌ها، دو ریشه هم در سمت چپ باید داشته باشیم

چون مجموعاً ۸ ریشه مربوط به $A(s)$ است ← ۶ ریشه هم روی محور $j\omega$ خواهیم داشت.

در این سیستم ۹ ریشه دارد، ۱ ریشه باقیمانده مربوط به $B(s)$ است که سمت چپ است.

(البته توجه کنید که از s^9 به s^8 تغییر علامت نداشته‌ایم).

نتیجه‌گیری: اطلاعاتی که بدست می‌آوریم:

(۱) تعداد ریشه‌های سمت راست

(۲) تعداد ریشه‌های سمت چپ

(۳) تعداد ریشه‌های روی محور $j\omega$

تذکر و یادآوری: اگر تعداد ریشه‌های سمت راست صفر باشد ولی روی $j\omega$ ریشه داشته باشیم، یا ناپایدار است و یا پایدار مرزی: که بستگی به مکرر بودن یا نبودن ریشه‌های روی محور $j\omega$ دارد.

اگر مکرر باشد، ناپایدار است و اگر ساده باشد، پایدار مرزی خواهد بود.

* جلسه پانزدهم: یکشنبه: ۸۲/۲/۷

* مثال:

$$A(s) = s^5 + 4s^4 + 8s^3 + 8s^2 + 7s + 4$$

s^5	1	8	7
s^4	4	8	4
s^3	6	6	0
s^2	4	4	0
s^1	$\varepsilon \to 8$	0	0
s^0	4		

$A(s) = 4s^2 + 4 \to s = \pm j$

$P(s) = \frac{dA(s)}{ds} = 8s$

چون در کل جدول تغییر علامت نداریم به غیر از دو ریشه $A(s)$ که بر روی محور $j\omega$ قرار دارد، بقیه ریشه‌ها سمت چپ است

این سیستم در مرز پایداری است

* مثال:

$$A(s) = s^5 + s^4 + 4s^3 + 24s^2 + 3s + 63$$

s^5	1	4	3
s^4	1	24	63
s^3	-20	-60	0
s^2	21	63	0
s^1	$\varepsilon \to 42$	0	0
s^0	63		

$A(s) = 21s^2 + 63 \to s = \pm\sqrt{3}\,j$

$P(s) = A'(s) = 42s$

این سیستم دو ریشه سمت راست محور $j\omega$ دارد.

دو ریشه متقارن روی محور $j\omega$ دارد. و باقیمانده ریشه‌ها سمت چپ خواهد بود.

$$\begin{cases} 2: RHP \\ 2: j\omega \\ 1: LHP \end{cases}$$

* مثال: ریشه‌های مکرر روی محور $j\omega$:

$$A(s) = s^5 + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + 1$$

s^5	1	2	1
s^4	1	2	1
s^3	$\varepsilon \to 4$	$\varepsilon \to 4$	0
s^2	1	1	
s^1	$\varepsilon \to 2$	0	
s^0	1		

$A_1(s) = s^4 + 2s^2 + 1 = (s^2+1)^2$

$P_1(s) = 4s^3 + 4s = 2s(s^2+1)$

جزء جمله‌ای متقارن

$A_2(s) = s^2 + 1 \qquad P_2(s) = 2s$

* وقتیکه ریشه مکرر روی محور موهومی داشته باشیم، جزء از یک سطر صفر خواهد شد. به هر تعداد ریشه مکرر داشته باشیم، به همان تعداد سطر صفر خواهیم داشت.

سیستم مثال اخیر ناپایدار است (نه پایدار مرزی) چون روی محور موهومی ریشه مکرر دارد.

* مثال: (مرتبه DC)

- حذف قطبهای غیر مسلط:

ثابت زمانی الکتریکی

$$\begin{cases} \tau_a = 0.0003\ S & L_a = 0.003H \\ \tau_m = 0.01333\ S \end{cases}$$

ثابت زمانی مکانیکی

$$G(s) = \frac{4500K}{S(S+361.2)} \Rightarrow T = \frac{G}{1+G}$$

$$T = \frac{4500K}{S^2+361.2S+4500K} \qquad \Delta(s) = S^2+361.2S+4500K$$

این سیستم ساده شده به ازای هر K پایدار است.

البته نمی توان گفت سیستم واقعی هم با این شرط پایدار است چون درجه ۳ خواهد بود:

$$G(s) = \frac{1.5\times10^7 K}{S(S+400.26)(S+3008)} \Rightarrow T(s) = \frac{1.5\times10^7 K}{S(S+400.26)(S+3008)+1.5\times10^7 K}$$

$$\Delta(s) = S^3+3408.3S^2+1{,}204{,}000S+1.5\times10^7 K$$

S^3	1	1204000
S^2	3408.3	$1.5\times10^7 K$
S^1	b_1	0
S^0	$1.5\times10^7 K$	

$$b_1 = \frac{3408.3\times1204000 - 1.5\times10^7 K}{3408.3}$$

شرط پایداری:

$$K>0 \quad b>0 \Rightarrow K < \frac{3408.3\times1204000}{1.5\times10^7}$$

$$\Rightarrow 0 < K < 273.57$$

← پس حذف قطب غیر مسلط ما را به تعبیر درستی در مورد پایداری سیستم واقعی نمی رساند.

* پایداری نسبی: فاصله ریشه‌ها تا محور jω چقدر است؟

$$\Delta(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

معیار راث تعداد ریشه‌های سمت چپ jω را به ما می‌دهد.

حال اگر محور jω را به سمت چپ شیفت بدهیم (مثلاً روی خط $\sigma = k$) و معیار راث را پیاده کنیم، تعداد ریشه‌های سمت چپ و راست این خط جدید یافته می‌شود.

$$S_n = S + \alpha \qquad \alpha > 0$$

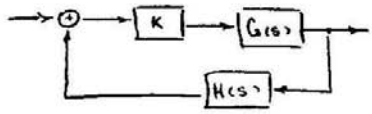
• معیار راث را اندیس می‌کنیم:

- اگر تعداد تغییر علامت داشت، ← ریشه‌ها سمت راست α هستند ← α را کوچکتر می‌کنیم
- اگر تغییر علامت نداشت ← ریشه‌ها سمت چپ α هستند ← α را بزرگتر می‌کنیم.
- ریشه‌ها روی خط α قرار گیرد.

* مکان هندسی ریشه‌ها: فصل ۷:

هدف: بررسی تغییرات ریشه‌های معادله مشخصه و اثر پارامتر خاص روی پایداری

بررسی تغییرات ریشه‌های معادله مشخصه نسبت به تغییرات یک پارامتر خاص (که لزوماً K نیست)



$$\Delta(s) = 1 + KGH(s) = 0$$

$$T(s) = \frac{KG(s)}{1 + KGH(s)}$$

$$\Delta(s) = 1 + KGH(s) = 0 \quad \rightarrow \quad KGH(s) = -1$$

شرط اندازه

$$\begin{cases} |KGH(s)| = 1 \\ \measuredangle GH(s) = \pm 180(2q+1) \quad , \quad q = 0, 1, \dots \end{cases}$$

شرط زاویه

مضارب فرد 180°

مکان هندسی یعنی تغییر ریشه‌های $\Delta(s)$ به ازای تغییرات K

اگر نقطه s^* در $GH(s)$ قرار داده شود و فاز $\measuredangle GH(s^*)$ مضارب فرد 180 باشد

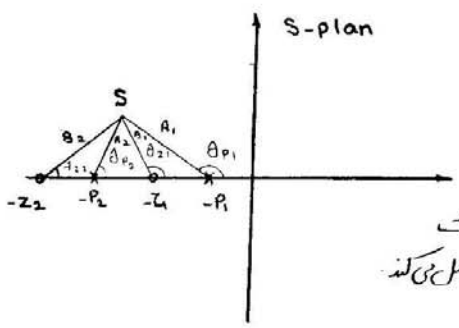
این به ازاء یک K خاص جزو ریشه‌های معادله مشخصه خواهد بود. به ازای چه Kی؟ Kی که شرط اندازه را تحقق کند.

$$GH(s) = \frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

برای سیستمهای فیزیکی $n \geq m$

برای حالت $m > n$ حداقل یک قطب در بینهایت خواهیم داشت.

- دیاگرام قطب × و صفر ○ در صفحه s:



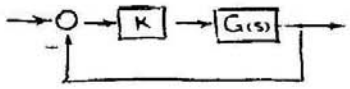
$$\begin{cases} s+z_i = (s-(-z_i)) \\ s+p_i \end{cases}$$

نشاندهنده بردارهایی است که z_i (یا p_i) را به s وصل می‌کند.

$$\measuredangle GH(s) = \sum_{i=1}^{m} \measuredangle (s+z_i) - \sum_{i=1}^{n} \measuredangle (s+p_i)$$

$$\begin{cases} \measuredangle GH(s) = \theta_{z_1} + \theta_{z_2} - (\theta_{p_1} + \theta_{p_2}) \\ |GH(s)| = \dfrac{B_1 B_2}{A_1 A_2} \end{cases}$$

* مثال :



$A(s) = 1 + KG(s)$

$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$

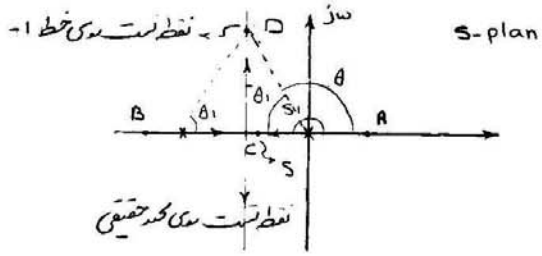
$A(s) = 0 \rightarrow s(s+2) + K = 0 \rightarrow s^2 + 2s + K = 0 \rightarrow s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-K}$

$\begin{cases} s_1 = -1 + \sqrt{1-K} \\ s_2 = -1 - \sqrt{1-K} \end{cases}$ $\qquad K = 0 \rightarrow \begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = -2 \end{cases}$

$0 < K < 1 \rightarrow \begin{cases} s_1 \text{ منفی تر} \\ s_2 \text{ مثبت تر} \end{cases}$

$K = 1 \rightarrow s_1 = s_2 = -1$

$K > 1 \rightarrow s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{K-1} \rightarrow$ اندازه ثابت و فاز تغییر می کند



$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$

نقاط حقیقی: نقاط روی محور حقیقی بین ۰ و ۲-

نقطه C $\begin{cases} \measuredangle s_1 = 180 \\ \measuredangle s_2 = 0 \end{cases}$

$\measuredangle GH(s) = -(\measuredangle s_1 + \measuredangle s_2) = -180 \leftarrow$

$\leftarrow$ خود مکان هست.

نقطه D $\begin{cases} \theta = 180 - \theta_1 \\ \measuredangle GH = -(180 - \theta_1 + \theta_1) = -180 \rightarrow \end{cases}$

شرط زاویه ارضا می شود $\leftarrow$ خود مکان هست.

نقطه A : $\measuredangle GH = 0$

نقطه B : $\measuredangle GH = -360$

$\leftarrow$ شرط زاویه ارضا نمی شود $\leftarrow$ خود مکان نیستند.

* مراحل یافتن تابع تبدیل حلقه باز را به صورت فاکتورهای آن می نویسیم :

$$GH(s) = \frac{(s+z_1)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)\cdots(s+p_n)}$$

(۲) دیاگرام قطب، صفر تابع تبدیل حلقه باز را رسم می‌کنیم.

تعداد شاخه‌های مکان:

شاخه یعنی مسیری که یک قطب با تغییرات پارامتر طی می‌کند ($0 < K < \infty$) که برابر n می‌باشد،

(تعداد قطبهای سیستم حلقه باز)

(۳) تقارن نسبت به محور حقیقی:

مکان نسبت به محور حقیقی متقارن است.

چون ریشه‌ها مختلط، مزدوج آن نیز جزء مکان است.

(۴) نقطه شروع و انتها:

ریشه‌های $A(s)$ به ازای $K=0$ کجا هستند؟ با قطبهای $GH(s)$ برابر هستند.

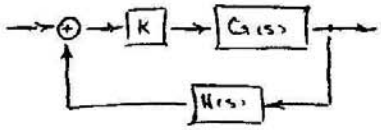
ریشه‌های $A(s)$ به ازای $K=\infty$ کجا هستند؟ با صفرهای $GH(s)$ برابر هستند.

$$GH(s) = \frac{N_{gh}}{D_{gh}}$$

$$1 + KGH(s) = 0 \Rightarrow K = \frac{-1}{GH(s)} \Rightarrow \begin{cases} K=0 \Rightarrow GH(s)=\infty \sim \text{قطبهای } GH(s) \\ K=\infty \Rightarrow GH(s)=0 \sim \text{صفرهای } GH(s) \end{cases}$$

اگر K به سمت صفر میل کند (بسیار کوچک باشد):

سیستم حلقه باز و حلقه بسته اندرهم عمل می‌کنند.



* جلسه شانزدهم: سه شنبه : ۸۲/۲/۹

* مکان هندسی ریشه‌ها :

بررسی رفتار سیستم حلقه بسته با تغییرات یک یا چند پارامتر خاص رفتار سیستم رابطه قطبها مشخص می‌شود و قطبها ریشه‌های معادله مشخصه هستند.

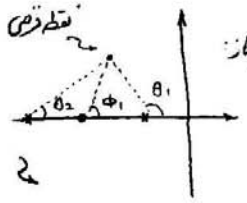
و هدف یافتن رفتار سیستم حلقه بسته از روی مشخصات سیستم حلقه باز است، بدون حل معادله مشخصه.

(← با داشتن تابع تبدیل سیستم حلقه باز و داشتن صفرها و قطبهای آن))

$$\Delta(s) = 1 + KGH(s) = 0$$

$$\Delta(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \rightarrow \Delta(s) = 1 + \frac{a_{n-1}s^{n-1}}{s^n + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_0}$$

$$0 < K < \infty \qquad KGH(s) = -1 \Rightarrow \begin{cases} |KGH(s)| = 1 \\ \measuredangle KGH(s) = (2q+1)180^\circ \quad , \quad q = 0, 1, \dots \end{cases}$$



نمودار قطب صفر سیستم حلقه باز: $GH(s)$

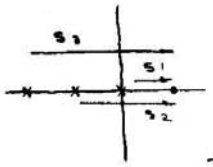
$$GH(s) = \frac{(s+z_1)\cdots(s+z_n)}{(s+p_1)\cdots(s+p_n)}$$

$$\measuredangle GH(s) = \phi_1 - \theta_1 - \theta_2$$

- ترسیم دیاگرام صفر و قطب
- تعداد شاخه‌ها : n
- تقارن نسبت به محور حقیقی
- نقاط شروع و انتها : $K=0 \qquad K=\infty$

. نقاط روی محور حقیقی عضو مکان :

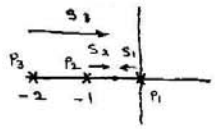
$$GH(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$



$$\measuredangle s_1 = \measuredangle s_2 = \measuredangle s_3 = 0 \rightarrow$$

$\measuredangle GH(s) = 0 \Rightarrow$ شرط زاویه ارضا نمی‌شود

← نقاط سمت راست همگی حذف می‌شوند و خود مکان هستند

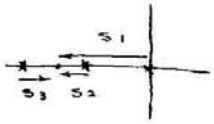


$\measuredangle s_1 = 180$

$\measuredangle s_2 + \measuredangle s_3 = 0$

$\rightarrow \measuredangle GH(s) = -180 \rightarrow OK \rightarrow$

نقاط میان P_1 و P_2 عضو مکان هستند.



$\measuredangle GH(s) = -(180 + 180 + 0) = -360^\circ \rightarrow$ Cancel $\rightarrow$

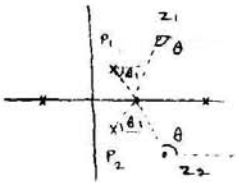
نقاط میان P_2 و P_3 عضو مکان نیستند.

$\measuredangle GH(s) = -(3 \times 180) = -540^\circ \rightarrow OK \rightarrow$

نقاط سمت چپ P_3 خود مکان هستند.

نتیجه‌گیری: نقاط سمت چپ تعداد فرد صفر و قطب روی محور حقیقی خود مکان هستند.

اکنون قطبهای مختلط را بررسی می‌کنیم:



$\measuredangle z_1 = 360 - \theta$

$\measuredangle z_2 = \theta$

$\rightarrow \measuredangle z_1 + \measuredangle z_2 = 360^\circ \rightarrow$ تأثیری روی فاز ندارد.

$\measuredangle P_1 = 360 - \theta_1$

$\measuredangle P_2 = \theta_1$

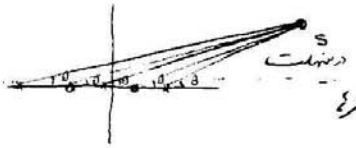
$\rightarrow \measuredangle P_1 + \measuredangle P_2 = 360^\circ \rightarrow$ تأثیری بر فاز ندارد

← قطب و صفرهای مختلط تأثیری بر فاز ندارند.

رفتار در بینهایت: (مجانبها):

مکان از قطبهای سیستم حلقه باز شروع می‌شود و به صفرهای سیستم حلقه باز ختم می‌شود.

$$GH(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 2s} \rightarrow s \to \infty \rightarrow GH(s) \simeq \frac{1}{s^3}$$



$$(m-n)\theta = (2q+1)180^\circ \rightarrow \theta = \frac{2q+1}{m-n} \cdot 180^\circ$$

q ← تعداد صفرها

m ← تعداد قطبها

اکنون باید دنبال خطوطی هستیم که ریشه‌ها در $s \to \infty$ روی این خط قرار می‌گیرند. (خطوط مجانب)

$$GH(s) = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

$$\Delta(s) = 1 + K \cdot \frac{s^m + \dots + b_0}{s^n + \dots + a_0} \quad (I) \rightarrow$$ تقریب در نهایت : $$\Delta(s) \cong 1 + K \cdot \frac{1}{(s-\sigma)^{n-m}}$$

$$\Delta(s) = 1 + \frac{K}{(s-\sigma)^{n-m}} = 0 \quad (II) \rightarrow$$

(۱) نشان می‌دهیم، s هایی که رابطهٔ (II) را ارضا می‌کنند روی یک خط قرار دارند.

(۲) نشان می‌دهیم چگونه در $s \to \infty$ ، رابطهٔ II از رابطهٔ I بدست می‌آید.

بررسی (۱) :

$$1 + \frac{K}{(s-\sigma_0)^N} = 0 \leftarrow \quad n - m = N$$

$$\rightarrow \frac{K}{(s-\sigma_0)^N} = -1 \rightarrow (s-\sigma_0)^N = -K \rightarrow s - \sigma_0 = (-K)^{1/N}$$

$$-1 = e^{j\pi} \rightarrow (-1)^N = e^{j\pi N} \qquad \rightarrow s - \sigma_0 = (+K)^{1/N} \cdot e^{j \cdot \frac{2q+1}{N} \cdot \pi}$$

$$s = \sigma + j\omega \rightarrow \qquad \sigma + j\omega - \sigma_0 = (K)^{1/N} \cdot e^{j \cdot \frac{2q+1}{N} \cdot \pi}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sigma - \sigma_0 = |K|^{1/N} \cos\left(\frac{2q+1}{N} \cdot \pi\right) & (III) \\ \omega = |K|^{1/N} \cdot \sin\left(\frac{2q+1}{N} \cdot \pi\right) & (IV) \end{cases}$$

اکنون رابطهٔ III را بر IV تقسیم می‌کنیم :

$$\frac{\omega}{\sigma - \sigma_0} = \overbrace{tg\left(\frac{2q+1}{N} \cdot \pi\right)}^{m}$$

$$\rightarrow \omega = m(\sigma - \sigma_0)$$

← قسمت حقیقی موهومی s هایی که رابطهٔ II را ارضا می‌کنند، روی خط با شیب m و در نقطهٔ σ_0 قرار می‌گیرند.

$$\rightarrow \begin{cases} \phi = \frac{(2q+1)\pi}{n-m} \quad ; q = 0, 1, \dots \\ \sigma_0 = ? \end{cases}$$

بررسی (۲) :

اکنون می‌خواهیم σ_0 را بیابیم :

می‌دانیم: $b_{m-1} = \sum$ همهٔ صفرها $\qquad a_{n-1} = \sum$ همهٔ قطبها

صورت و مخرج رابطه (I) را بر $s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0$ تقسیم می‌کنیم ←

$$\Delta = 1 + \frac{K}{\dfrac{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}} \rightarrow \Delta = 1 + \frac{K}{s^{n-m} + (a_{n-1} - b_{m-1})s^{n-m-1} + \dots} = 0 \qquad (V)$$

← در نظر گرفتن در جمله تحت

اکنون تقسیم معادله II را نیز با در نظر گرفتن در جمله انجام می‌دهیم:

$$1 + \frac{K}{(s-\sigma_0)^{n-m}} = 0 \rightarrow \quad 1 + \frac{K}{s^{n-m} - (n-m)\sigma_0 s^{n-m-1} + \dots} = 0 \qquad (VI)$$

با مساوی قرار دادن روابط V و VI داریم:

$$-(n-m)\sigma_0 = a_{n-1} - b_{m-1}$$

$$\sigma_0 = \frac{\sum \text{قطبها} - \sum \text{صفرها}}{n-m}$$

$$\begin{cases} \Phi_A = \dfrac{2q+1}{n-m} \cdot 180 \quad : q = 0, 1, 2, \dots & \text{زاویه مجانب‌ها} \\ \sigma_A = \dfrac{\sum \text{قطبها} - \sum \text{صفرها}}{n-m} & \text{مرکز مجانب‌ها} \end{cases}$$

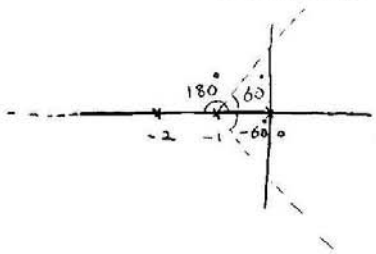
* مثال:

$\sigma_A = -2 - 0 - (-1) = -1$

$n = 2$
$m = 1 \rightarrow n - m = 1$

* مثال:

$$G_{OL}(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$



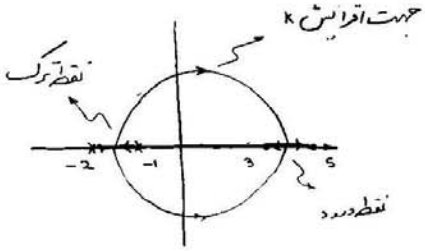
$n = 3$
$m = 0 \rightarrow n - m = 3 \Rightarrow \Phi_A = \dfrac{2q+1}{n-m} \times 180^\circ \Rightarrow \Phi_A = \begin{cases} 60 & : q = 0 \\ 180 & : q = 1 \\ -60 & : q = 2 \end{cases}$

$$\sigma_A = \frac{\sum \text{قطبها} - \sum \text{صفرها}}{n-m} = \frac{(-1-2-0)-0}{3} = -1$$

. نقاط ترک و ورود به محور حقیقی :

مثال:

$$GH(s) = \frac{(s-3)(s-5)}{(s+1)(s+2)}$$



مکان از قطبها شروع شده و به صفرها ختم می گردد.

مجانب نداریم $\leftarrow n-m=0 \leftarrow$ $n=2$, $m=2$

سپس نقاط روی محور حقیقی را مشخص می کنیم

اکنون می خواهیم نقاط ترک و ورود را بیابیم:

- تذکر: در نقاط ترک یا ورود، ریشه های مکرر داریم، بسته به اینکه چند شاخه به هم رسیده باشد.

$\Rightarrow$ میان نقاط -1 و -2، در نقطه ترک σ_1، K بیشترین مقدار خود را دارد.

مکان در بینهایت به سمت صفرها می رود، و در صفر از قطبها شروع می شود

بین نقاط 3 و 5، K مقدار می نیمم خود را دارد.

به کمک مفاهیم فوق:

$$\left.\frac{dK}{ds}\right|_{=0}$$

نقاط ترک یا ورود

راه نخست: روش عددی: امتحان K در نقاط مختلف.

راه دوم: مشتق گیری:

$$\Delta = 1 + KGH(s) = 0 \rightarrow K = \frac{-1}{GH(s)} \rightarrow \frac{dK}{ds} = 0$$

$$\Rightarrow S_{B.in}, S_{B.away} : OK$$

اگر این نقاط یافته شده روی مکان بودند $\leftarrow$ نقاط ترک و ورود هستند.

برای مختلط ها: $K = \frac{-1}{GH(s)}$ قرار می دهیم. اگر حقیقی بود همانا ترک یا ورود است.

راه سوم: از اینکه ریشه در نقاط ترک یا مضاعف مکرر است. بهره می‌گیریم:

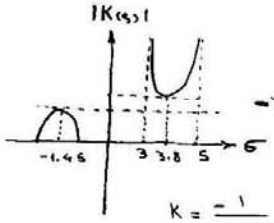
ریشه مکرر یعنی: $\Delta(s_0)=0$ و $\frac{d\Delta(s_0)}{ds}=0$

اثبات: در نقاط ترک یا مضاعف:

$$\frac{dKGH(s)}{ds}=0 \rightarrow \frac{dGH(s)}{ds}=0$$

$$K=\frac{-1}{GH(s)} \rightarrow \frac{dK}{ds}=\frac{\frac{dGH(s)}{ds}}{(GH(s))^2}=0 \rightarrow \frac{dGH(s)}{ds}=0$$

بازمی‌گردیم به حل مثال:



→ تندرو نیستیم سمت راست از کسیم سمت چپ باید بیشتر باشد.

$$K=\frac{-1}{GH(s)} \qquad s\in[-2,-1] \rightarrow$$

• روش نخست: عددی

σ	K		σ	K
-1.41	0.008557		3.3	44.686
-1.42	0.008585		3.4	37.125
-1.45	0.008623	→ Max	3.8	29 → Min
-1.46	0.008622		3.9	2.200

• روش دوم:

$$K=\frac{-1}{GH(s)}=\frac{-(s+2)(s+1)}{(s-3)(s-5)}$$

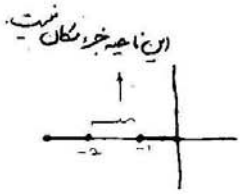
$$\frac{dK}{ds}=0 \rightarrow \frac{d}{ds}\left(\frac{s^2+3s+2}{s^2-8s+15}\right)=0 \rightarrow \dots \rightarrow \begin{cases} s_1=-1.45 \\ s_2=3.82 \end{cases}$$

• مثال:

$$K=-(s^3+3s^2+2s)$$

$$\frac{dK}{ds}=0 \rightarrow 3s^2+6s+2=0 \rightarrow s_{1,2}=-1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

تذکر مهم: $-1-\frac{\sqrt{3}}{3}$ جزو مکان نیست. چون:



$-1-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ← جزو مکان نیست ← نقطه ترک هم نیست.

ولی نقطه $-1+\frac{\sqrt{3}}{3}$ جزو مکان می باشد. $\sigma_b = -1+\frac{\sqrt{3}}{3}$

• نقطه قطع محور $j\omega$:

چرا باید بدانیم که مکان محور $j\omega$ را قطع می کند یا خیر؟

پاسخ: چون محور $j\omega$ مرز پایداری است و باید بدانیم مکان به ازای چه K ها پایدار است.

برای تشخیص آنکه مکان چه زمانی محور $j\omega$ را قطع می کند، یک راه آنست که بجای s، مقدار $j\omega$ قرار دهیم:

$$\Delta(s)\Big|_{s=j\omega} = Re(\omega)+jIm(\omega) = 0 \rightarrow \begin{cases} Re(\omega)=0 \\ Im(\omega)=0 \end{cases}$$

روش دیگر: معیار راث: اگر سطر صفر داشت، احتمال قطع می باشد که هم ω و هم K داده می شود.

• جلسه نهم: یکشنبه: ۸۲/۲/۴

... ادامه مباحث مکان هندسی ریشه ها:

• تغییرات قطبهای سیستم حلقه بسته نسبت به یک پارامتر ($K>0$):

$$\Delta(s) = 1+KGH(s) = 0$$

$$\begin{cases} \text{شرط اندازه}: |KGH(s)| = 1 \\ \text{شرط زاویه}: \measuredangle KGH(s) = (2q+1)180^\circ \end{cases}$$

$q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

- تقارن نسبت به محور حقیقی
- نقاط شروع و انتها
- رفتار در بینهایت
- نقاط ترک و ورود
- نقطه قطع محور $j\omega$
- نقاط روی محور حقیقی روی مکان

محل تقاطع روی محور $j\omega$:

خواهیم داشت: (۱) $s = j\omega \rightarrow \Delta(j\omega) = 0 \rightarrow$

$$\Delta(j\omega) = Real(\omega) + j\,Im(\omega)$$

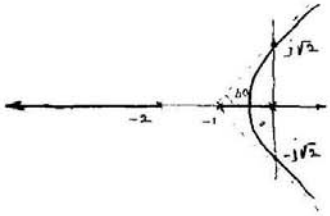
$$Re(\omega) = 0$$

(۲) معیار راث:

یک سطر صفر (نشان دهنده دو ریشه متقارن) ← احتمال اینکه ریشه روی $j\omega$ باشد وجود دارد

*مثال:

$$GH(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$



(دلیل گام: رسم دیاگرام صفر و قطب:

$$\left.\begin{matrix} n = 3 \\ m = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \quad \Phi_A = \frac{2q+1}{n-m} \cdot 180 \rightarrow \begin{cases} 60 \\ -60 \\ 180 \end{cases}$$

$$\sigma_A = \frac{\text{مجموع صفرها} - \text{مجموع قطبها}}{n-m} = -1$$

$$\frac{dGH(s)}{ds} = 0 \cdot \frac{dK}{ds} = 0 \rightarrow s = \begin{cases} -0.57 & : OK \\ -1.57 \rightarrow \text{چون خود نشان نمی باشد} \end{cases}$$

$$\Delta(s) = 1 + K\,GH(s) = 0 \rightarrow$$

$$s(s+1)(s+2) + K = 0 \rightarrow s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0 \rightarrow$$

s^3	1	2
s^2	3	K
s^1	$\frac{6-K}{3}$	0
s^0	K	

$\rightarrow$ تنها سطری که ممکن است صفر شود

به ازای $K=6$ صفر می‌شود: ← معادله کمکی:

$$3s^2+\overset{K}{6}=0 \rightarrow$$

$$3(s^2+2)=0 \rightarrow s=\pm j\sqrt{2} \rightarrow$$ محل قطع مکان با محور $j\omega$

روش دوم:

$$Re(\omega)+jIm(\omega)=0 \qquad \Delta(s)\Big|_{s=j\omega}=0$$

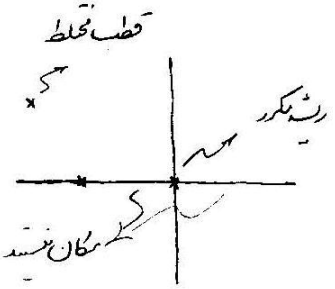
$$\rightarrow (j\omega)^3+3(j\omega)^2+2(j\omega)+K=0 \rightarrow$$

$$-j\omega^3-3\omega^2+2j\omega+K=0 \rightarrow$$

$$\underbrace{(K-3\omega^2)}_{Re(\omega)}+j\underbrace{(2\omega-\omega^3)}_{Im(\omega)}=0 \rightarrow Im(\omega)=0 \rightarrow 2\omega-\omega^3=0 \rightarrow \begin{cases}\omega=0\\ \omega=\pm\sqrt{2}\end{cases}$$

$$Re(\omega)=0 \rightarrow K-3\omega^2 \rightarrow \left.\begin{matrix}K=3\omega^2\\ \omega=\pm\sqrt{2}\end{matrix}\right\} \rightarrow K=6$$

* زاویه خروج از قطب (مخلط) یا زاویه ورود به صفر (مخلط):

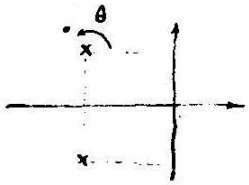


مثال: $G(s)=\dfrac{1}{s^2(s+1)}$

- یک نقطه در همسایگی قطب مورد نظر انتخاب می‌کنیم.

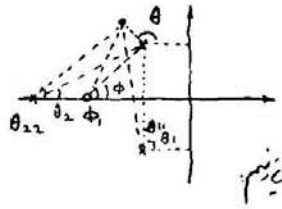
- زاویه این نقطه با قطب مورد نظر را θ می‌نامیم (θ مجهول است)

- این نقطه اگر جزء مکان باشد ← باید شرط زاویه برای آن محقق شود



جلسه سی و هفتم: سه شنبه: ۸۲/۲/۱۶

... زاویه خروج (ورود) از (به) قطب (صفر):



زاویه تست با قطب مورد نظر را θ می نامیم مجهول فرض می کنیم:

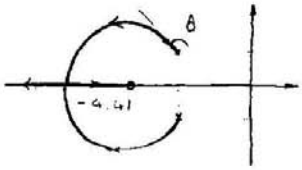
زاویه بقیه صفر و قطبهای GH(s) با نقطه تست را با زاویه قطب و صفر همسایه تقریب می زنیم:

$$\Phi_1 - \theta_{11} - \theta_{22} - \theta = 180$$

$$\Phi_1 \simeq \Phi \quad \theta_{11} \simeq \theta_1 \quad \theta_{22} \simeq \theta_2 \quad \Big\} \rightarrow$$ θ بدست می آید

مثال:

$$GH(s) = \frac{s+3}{s^2+4s+5} \rightarrow \begin{cases} z = -3 \\ P_1, P_2 = -2 \pm j1 \end{cases}$$



گام (۱): رسم دیاگرام صفر-قطب

گام (۲): یافتن نقاط حقیقی روی محور

گام (۳): مجانبها (تعداد، زاویه و مرکزشان):

- تعداد: $n - m = 1$

- زاویه: $\Phi_A = \frac{2q+1}{n-m}\pi, \quad q = 0, 1, 2, \ldots \rightarrow \Phi_A = +180^\circ$

- مرکز: $\sigma_A = \frac{\sum \text{قطب} - \sum \text{صفر}}{n-m} = 1$

گام (۴): نقطه برگشت و ورود به محور حقیقی:

$$\frac{dk}{ds} = 0, \quad \frac{dGH(s)}{ds} = 0$$

$$K = -\frac{1}{GH(s)} = -\left[\frac{s^2+4s+5}{s+3}\right]$$

$$\frac{dK}{ds} = 0 \rightarrow \frac{(2s+4)(s+3) - (s^2+4s+5)(1)}{(s+3)^2} = 0$$

$$\rightarrow (2s^2+10s+12)-(s^2+4s+5)=0 \rightarrow s^2+6s+7=0 \rightarrow s=-3\pm\sqrt{9-7} \rightarrow$$

$$s=-3\pm\sqrt{2} \rightarrow s=\begin{cases} -3-\sqrt{2} \rightarrow \text{مسیر خود نگان} \\ -3+\sqrt{2} \rightarrow \text{خود نگان نیست} \end{cases} \qquad -3-\sqrt{2}=4.41$$

$$K=\frac{-1}{GH(-4.41)}=4.84$$

گام نهایی: یافتن زاویه خروج:

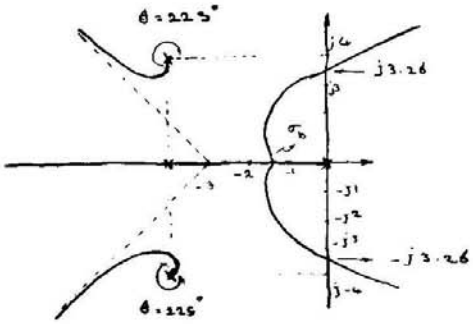
$$\phi-\theta_1-\theta=180 \rightarrow -\underbrace{90}_{\theta_1}+\underbrace{45}_{\phi}-\theta=180 \rightarrow \theta=-225^\circ=135^\circ$$

یادآوری: نگان نسبت به محور حقیقی متقارن است.

مثال:

$$GH(s)=\frac{1}{s^4+12s^3+64s^2+128s}$$

رسم دیاگرام صفر و قطب:



$P_1=0$

$P_2=-4$

$P_3=-4+j4$

$P_4=-4-j4$

نقاط روی محور حقیقی: OK

مجانب ها:

(a) تعداد:

تعداد مجانبها برای اختلاف درجه صورت و مخرج است ← ۴ مجانب دارد.

توضیح دیگر: این سیستم ۴ صفر در بینهایت دارد. نگان از قطبها شروع شده و به صفرها ختم میشود ← ۴ مجانب دارد.

- زوایا:

$$\phi_A = \frac{2q+1}{n-m}\cdot\pi \rightarrow \phi_A = \frac{2q+1}{4}\cdot 180 \rightarrow \phi_A = \begin{cases} 45 \\ -45 \\ 135 \\ -135 \end{cases}$$

$q = 0, 1, 2, \ldots$

- مرکز مجانب:

$$\sigma_A = \frac{\sum P - \sum Z}{n-m} = \frac{(0-4-4-4)-0}{4} = -3$$

- تذکر: برای آنکه بفهمیم مکان از پایین به مجانب نزدیک می‌شود یا از بالا، باید نقطه قطع محور حقیقی را بیابیم؛

- نقطه برگشت محور حقیقی:

$$\frac{dGH(s)}{ds} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{dK}{ds} = 0 \qquad K = \frac{-1}{GH(s)}$$

$$\frac{dK}{ds} = -(4s^3 + 30s^2 + 128s + 128) = 0$$

چون ماشین حساب نداریم (!) ← باید از روش عددی کمک بگیریم:

می‌خواهیم $\frac{dK}{ds} = 0$ باشد ← $K(s)$ باید ماکسیمم باشد: ← به تابع $K(s) = \frac{-1}{GH(s)}$ عدد می‌دهیم.

s	0	-1	-1.6	-2	-2.5	-3	-4
K	-	75	85	80	68.5	51	0

Max

$$\rightarrow \begin{cases} \sigma_b = -1.5 \\ K_b = 85 \end{cases} \quad \text{b: Brake Away (!?)}$$

- نقطه قطع محور $j\omega$:

(۱) معیار راث

(۲) از پایه $\Delta(s)$ در $s = j\omega$

$$\Delta(s) = s^4 + 12s^3 + 64s^2 + 128s + K$$

s^4	1	64	K
s^3	12	128	0
s^2	b_1	K	
s^1	c_1	0	
s^0	K		

$$b_1 = \frac{12\times 64 - 128}{12} = 53.33$$

$$c_1 = \frac{128 b_1 - 12K}{b_1}$$

(سطر فرد باید صفر باشد): $c_1 = 0 \rightarrow K = \frac{53.33\times 128}{12} = 568.85$

برای K به دست آمده اخیراً سیستم در مرز پایداری خواهد بود.

معادله کمکی

$\rightarrow A(s) = 53.33\, s^2 + 568.85 = 0$

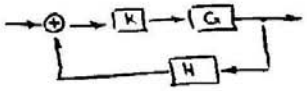
$\rightarrow s = \pm j\sqrt{\dfrac{568.85}{53.33}} \rightarrow s_{1,2} = \pm j\, 3.26$ ← نقاط تقاطع با محور موهومی

- زاویه خروج از قطب مخلوط:

$-135 - 90 - 90 - \theta = 180 \rightarrow$

$\theta = -135^\circ - 360^\circ = -135^\circ \rightarrow$ ۲۲

کوییز: برای فیدبک مثبت، قوانین مکان چگونه اصلاح می‌شود؟



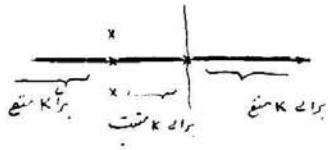
تذکر: فیدبک مثبت با گین مثبت = فیدبک منفی با گین منفی

- قوانین اصلاح شده برای فیدبک مثبت:

$$KGH(s) = 1 \Rightarrow \begin{cases} |KGH(s)| = 1 \\ \angle GH(s) = 2k\pi \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

(۱) تعادل نسبت به محور حقیقی برقرار است

(۲) نقاط روی محور حقیقی: سمت چپ تعداد زوج صفر و قطب



- نتیجه: اگر K را در بازه $(-\infty, +\infty)$ در نظر بگیریم ← کل محور حقیقی جزء مکان خواهد بود.

(۳) نقطه ترک محور حقیقی، تعادل نمی کند (چون از بالا به پایین ندارد)

(۴) مجانبها: - تعداد: قانون آن تعادل نمی کند.

- مرکز: عوض نمی شود.

- زاویه: عوض می شود: $\Phi_A = \frac{2q\pi}{n-m}$ ، $q = 0, 1, 2, \ldots$

(۵) زاویه دو عدد خروج: تغییر می کند: برای مضارب زوج 180° نوشته می شود: $2q\pi$

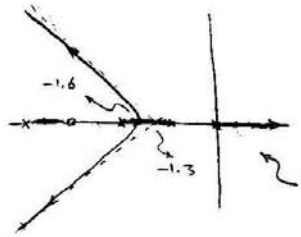
(۶) نقطه قطع محور $j\omega$: قانون تغییر نمی کند: معیار اث یا بررسی $\Delta(s)$ به ازای $s = j\omega$

* مثال: با فرض فیدبک مثبت:

$$G_1H(s) = \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)(s+4)}$$

$$\begin{cases} z = -3 \\ p_1 = 0 \\ p_2 = -1 \\ p_3 = -2 \\ p_4 = -4 \end{cases}$$

- رسم دیاگرام هندسه ریشه:



فیدبک مثبت، ذاتاً ناپایدار است

مجانبها: - اختلاف درجه صورت و مخرج: ۳

- $\Phi_A = \frac{2K}{3} \cdot 180 \Rightarrow 0, 120, -120$

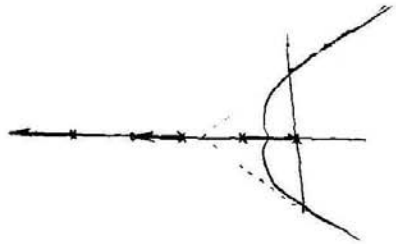
- $\sigma_A = \frac{\sum p - \sum z}{n-m} = \frac{-4}{3} = -1.3$

- تذکر: در سیستم های درجه پایین عموماً، مجانبها وسط مکان قطع نمی شوند.

- نقطه ترک:

$$\frac{dK}{ds} = 0 \rightarrow \sigma_b = -1.6$$

* تذکر: اگر فیدبک منفی (دو تیر $K<0$) بود، مکان بصورت زیر در می آید:



Matlab Code: Rlocus(n,d)

* تأثیر اضافه کردن قطب و صفر روی مکان :

اگر تنها هدف رسم مکان بود، از PC کمک می‌گرفتیم. اما مکان هندسی ریشه‌ها برای طراحی و تنظیم پارامترهای سیستم برای دستیابی به پاسخ مطلوب کاربرد دارد.

طراحی : - تنظیم پاسخ به صورت پاسخ مطلوب بکمک تغییر پارامترهای سیستم.
- آیا میتوان پاسخ مطلوب گرفت؟
- اگر نمی‌توان، چگونه عمل کنیم؟

همین مثال اخیر را بررسی می‌کنیم : (مثالی که مکان هندسی ریشه‌های آن در بالای صفحه رسم شده است)

- شاخه‌های مسلط، شاخه‌های نزدیک محور موهومی هستند.

قیدها : $T_s < 4\,(s)$ ، $P.O < 10\%$ $\Big\} \leftarrow$ ؟ $\leftarrow$ $s_{1,2} = \underbrace{0.5 \pm j1}_{S_d}$

S_d : ریشه مطلوب.

اکنون باید ببینیم این ریشه خود مکان هست یا خیر؟

اگر هست $\leftarrow$ $K = \dfrac{-1}{GH(s_d)}$

اگر نیست $\leftarrow$ باید شکل مکان را به گونه‌ای تغییر دهیم که از نقطه مطلوب عبور کند.

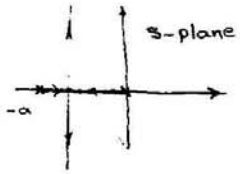
پس از این مقدمه در جلسه آینده این بحث دنبال خواهد شد.

* جلسهٔ نوزدهم : یکشنبه : ۸۲/۲/۲۱

... در واقع ، هدف ، شکل دهی مکان برای عبور از یک نقطه (نقاط) خاص است.

* مثال : تأثیر قطب :

$$GH(s) = \frac{1}{s(s+a)} \quad , \quad a>0$$

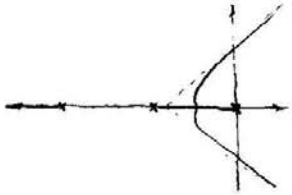


$\Rightarrow$ پایدار

$\Phi_A = \pm 90$

$$\begin{cases} s_{1,2} = -0.5 \pm j\omega_1 \\ s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\beta \\ T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 8 \ (s) \end{cases}$$

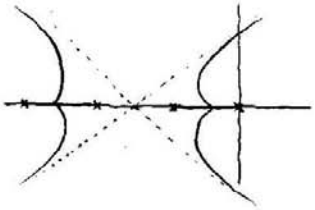
$$GH(s) = \frac{1}{s(s+a)(s+b)} \quad , \quad |a|<|b| \quad a>0 \quad b>0$$



$$\begin{cases} \Phi_A = \frac{2q+1}{3} \cdot 180 = 60 , -60 , 180 \\ \sigma_A = \frac{-(a+b)}{3} \end{cases}$$

اثر : ناپایداری - خم شدن مکان به سمت راست.

$$GH(s) = \frac{1}{s(s+a)(s+b)(s+c)}$$



$n-m=4$

$$\begin{cases} \Phi_A = \frac{2q+1}{4} \times 180 = \pm 45 , \pm 135 \\ \sigma_A = \frac{-(a+b+c)}{4} \end{cases}$$

$\Leftarrow$ مکان شیر به سمت راست می رود $\Leftarrow$

« قطب به پایداری کمک نمی کند و سیستم را به سمت ناپایداری می برد . »

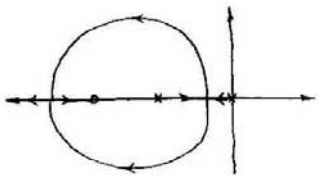
* مثال: - تأثیر صفر:

$$GH(s) = \frac{1}{s(s+a)}$$

$$GH(s) = \frac{(s+b)}{s(s+a)}$$

$n-m=1$

$$\phi_A = \frac{2q+1}{1} \cdot 180 = 180$$



مکان به سمت چپ منحرف می‌شود.

صفر اثر پایدارکننده (پایدارسازی) دارد.

- تذکر: صفر راست باعث ناپایداری می‌شود.

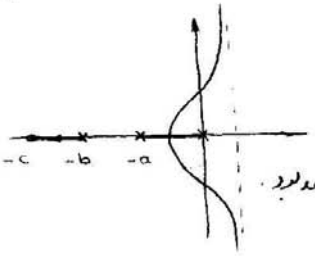
* مثال:

$$GH(s) = \frac{s+c}{s(s+a)(s+b)}$$

$n-m=2$

$$\phi_A = \frac{2q+1}{2} \cdot 180 = \pm 90$$

$$\sigma_A = \frac{c-(a+b)}{2}$$



به ازای $c < a+b$ سیستم همواره پایدار خواهد بود.

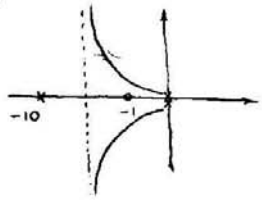
- تأثیر موقعیت قطب روی مکان ریشه‌ها:

$$GH(s) = \frac{s+1}{s^2(s+a)}$$

$$\phi_A = \pm 90$$

$$\sigma_A = \frac{-a+1}{2}$$

فرض: $a=10$



شکل را نمی‌دانیم بطور دقیق رسم کنیم مگر اینکه نقطه قطع محور حقیقی را پیدا کنیم.

$$\frac{dGH(s)}{ds} = \frac{(3s^2+2as)(s-1)-s^3-as^2}{(s^2(s+a))^2} = 0$$

$\Rightarrow 2s^3+(a+3)s^2+2as=0 \rightarrow s(2s^2+(a+3)s+2a)=0$

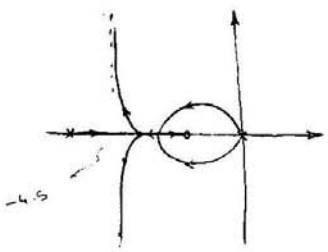
که همواره $s=0$ یک نقطه ترک است.

$$s=\frac{-(a+3)\pm\sqrt{(a+3)^2-16a}}{4}$$

زیر رادیکال نمی‌تواند منفی باشد، چون سیستم درجهٔ ۳ است. در سیستم درجه ۲ می‌تواند.

$$\left.\begin{array}{l}(a+3)^2-16a>0\\ a^2-10a+9=0\\ (a-1)(a-9)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{c}a\geq 9\\ \text{or}\\ a\leq 1\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta\geq 0$$

$a=10 \Rightarrow s=-4,\ -2.5$



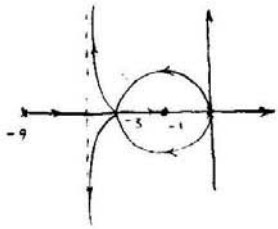
برازای $a=1$ و $a=9$ نقطه ترک تکرار داریم.

برازای $a<1$ ، $a>9$ نقطه قطع و عود داریم.

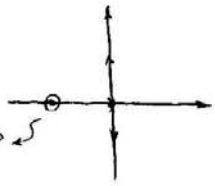
برازای $1<a<9$ نقطه قطع و عود نداریم.

$a=9 \Rightarrow s_{2,3}=-3$

نقطه قطع مکرر (هم ترک هم عود)

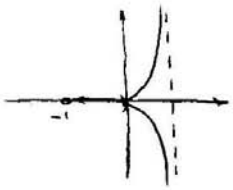


$a=1 \Rightarrow G.H(s)=\frac{s+1}{s^2(s+1)}=\frac{1}{s^2}$



که هر قطب دو صفر (از ۱- خارج شده و به آن وارد می‌شود)

$a<1 \Rightarrow$



* تعمیم مکان هندسی ریشه‌ها :

$1+KGH(s)=0$

$\Delta(s)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\dots+a_1s+a_0=0$

تغییرات ریشه‌های $\Delta(s)$ مثلاً با تغییرات a_1 :

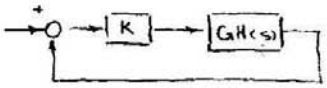
مثلاً به شکل $1+a_1GH(s)$ در بیاوریم :

بر جملات فاقد a_1 تقسیم می‌کنیم :

$$1+\frac{a_1s}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\dots+a_2s^2+a_0}$$

* مثال :

$K=10 \qquad G(s)=\dfrac{1}{(s+2)(s+P)}$

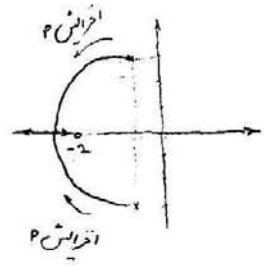


$$\Delta(s)=1+KGH(s)=1+\frac{K}{(s+2)(s+P)}=0$$

$$\Rightarrow (s+2)(s+P)+K=0 \rightarrow s^2+(P+2)s+2P+10=0 \rightarrow s^2+2s+P(s+2)+10=0$$

$$\rightarrow 1+\frac{P(s+2)}{s^2+2s+10}=0$$

جدید $GH(s)=\dfrac{s+2}{s^2+2s+10} \rightarrow$



$n-m=1 \qquad \phi_A=180$

اینکه در P خیلی بزرگ است به سمت 2- می‌رود اگر کلاً G(s) هم می‌توانستیم بیاوریم : با بزرگ شدن P می‌توان از ترم (s+P) در مقابل (s+2) صرفنظر کرد.

مطرح ریشه :

$K_1K_2=K$

$\Delta(s)=P(s)+K_1Q_1(s)+K_2Q_2(s)$

ابتدا K_2 را برابر صفر قرار می‌دهیم :

$\Delta(s)=P(s)+K_1Q_1(s)$

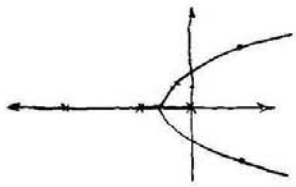
مکان را برای K_1 ترسیم می‌کنیم:

بر P تقسیم می‌کنیم:

$$1+K_1\cdot\frac{Q_1(s)}{P(s)}=0$$

$$\rightarrow 1+K_1\,G_1H_1(s)=0$$

K_1 را Fix می‌کنیم:



معادله مشخصه را می‌نویسیم:

$$\Delta(s)=P(s)+K_1Q_1(s)+K_2Q_2(s)$$

- مکان را نسبت به K_2 رسم می‌کنیم:

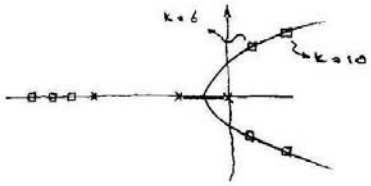
- $\Delta(s)$ را بر $P(s)+K_1Q_1(s)$ تقسیم می‌کنیم:

قطبهای G_1H_2 همان ریشه‌های $P(s)+K_1Q_1(s)$

$$\Delta(s)=1+\frac{K_2Q_2(s)}{P(s)+K_1Q_1(s)}=1+K_2G_2H_2(s)$$

$G_1H_2(s)$

نمایانگر یک سطح:



- مثال:

$$G_1H_1(s)=\frac{K(1+Ts)}{s(s+1)(s+2)}$$

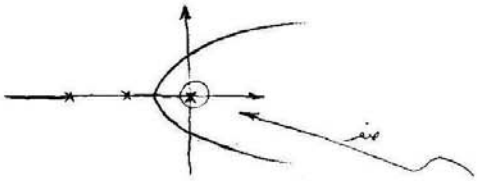
$K_1=K$

$K_2=KT$

$$\Delta(s)=s(s+1)(s+2)+K(1+Ts)$$

$$T=0 \Rightarrow \Delta(s)=\underbrace{s^3+3s^2+2s+K}_{P(s)} \rightarrow \Delta(s)=1+\frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

- K را Fix می‌کنیم.



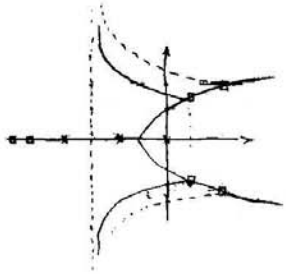
- مکان را برحسب T می‌نویسیم:

$n-m=2$

$\phi_A=\pm 90$

$$\Delta(s)=s(s+1)(s+2)+K+KTs \rightarrow \Delta(s)=1+\frac{KTs}{s(s+1)(s+2)+K}$$

$\sigma_A=\frac{-3}{2} \leftarrow$ مجموع ریشه‌ها $=$ مجموع قطبها $=-3$



* جلسه بیستم : سه شنبه : ۸۲/۲/۲۳

حساسیت ریشه‌ها : (هرچقدر کمتر باشد بهتر است)

قبلاً داشتیم : $S_G^T = \frac{\partial T}{\partial G} \cdot \frac{G}{T}$

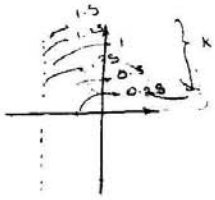
اکنون : $S_K^s = \frac{\partial s}{\partial K} \cdot \frac{K}{s}$

نقاط قطع محور حقیقی :

$$\frac{\partial K}{\partial s} = 0 \rightarrow \frac{\partial s}{\partial K} = \infty \Rightarrow S_K^s \rightarrow \infty$$

* مثال :

$$\Delta(s) = s(s+1) + K = 0$$



تغییرات K از ۰ تا ∞ با گام 0.25 (Matlab)

حل تحلیلی :

$$\Delta(s) = s^2 + s + K = 0 \Rightarrow K = -s(s+1)$$

$$\Rightarrow 2s \cdot \frac{\partial s}{\partial K} + \frac{\partial s}{\partial K} + 1 = 0$$

$$\frac{\partial s}{\partial K} \cdot (2s+1) = -1 \Rightarrow \frac{\partial s}{\partial K} = \frac{-1}{2s+1} \Rightarrow S_K^s = \frac{-1}{2s+1} \cdot \frac{K}{s}$$

$$S_K^s = \frac{s+1}{2s+1}$$

$2s+1 = 0 \rightarrow s = -1/2 \Rightarrow$ حساسیت بینهایت است. $(s = -0.5)$

* تمرین : با Matlab گام K را چنان بیابید که پاسخ پله سیستم واضح باشد. $\Delta(s) = s^2(s+1)^2 + K(s+2) = 0$

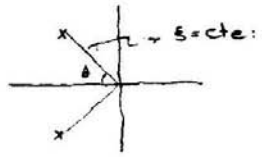
Rlocus (num , den , K)

ضرایب صورت — ضرایب مخرج — سیستم

* یافتن تقاطع خط $\xi = cte$ با مکان هندسی ریشه‌های سیستم:

$$\begin{cases} s_{1,2} = -\xi w_n \pm j w_n \beta \\ \theta = \cos^{-1}\xi \end{cases}$$

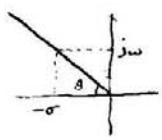
For Example: $\begin{cases} \xi = .707 \\ \theta = \cos^{-1} .707 = 45^\circ \end{cases}$



اهمیت مطلب در اینجاست که overshoot را فقط ξ تعیین می‌کند.

For example: $P.O < 10\% \Rightarrow \xi > 0.45$

Matlab: ginput



$$\begin{cases} \text{خط } \xi = \cos\theta = \text{ثابت} \\ \Delta(s) = s^n + \cdots + a_1 s + a_0 \end{cases}$$

$$s = -\sigma + j\omega$$

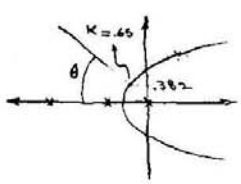
$$tg\theta = \frac{\omega}{\sigma} \Rightarrow \sigma = \frac{\omega}{tg\theta} \qquad \Rightarrow s = -\frac{\omega}{tg\theta} + j\omega \Rightarrow s = \omega\left(\frac{-1}{tg\theta} + j1\right)$$

$\theta = 45^\circ$ مثلاً: $\Rightarrow s = \omega(-1+j)$

* مثال: تقاطع خط $\xi = 0.707$ را با مکان هندسی ریشه‌های سیستم را پیدا کنید.

$\Delta(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + K$

$$1 + \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = 0$$



$\theta = \cos^{-1}\xi = 45^\circ \Rightarrow tg\theta = 1$

$\Rightarrow s = \omega(-1+j)$

در $\Delta(s)$ جایگزین می‌کنیم:

$$s^2 = \omega^2(-1+j)^2 = -2j\omega^2$$

$$s^3 = -2j\omega^3(-1+j) = 2\omega^3(1+j)$$

$$\Rightarrow 2\omega^3(1+j) - 6j\omega^2 + 2\omega(-1+j) + K = 0$$

$$Re: \quad K - 2\omega + 2\omega = 0$$

$$Im: \quad 2\omega^3 - 6\omega^2 + 2\omega = 0 \quad \rightarrow \quad 2\omega(\omega^2 - 3\omega + 1) = 0$$

$$\begin{cases} \omega = 0 \\ \omega = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \omega = .382 \\ \text{بکمک } Re : \; K = 0.65 \end{cases}$$

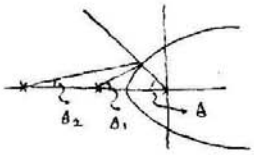
ریشه دیگر به ازای K منفی رخ می‌دهد.

* **راه حل سعی و خطا (گرافیکی)** : (چندان مطلوب نیست فقط به درد امتحان می‌خورد)

یک نقطه بطول r روی خط $s = cte$ انتخاب می‌کنیم (از روی شکل کیفی مکان)

سپس شرط مکان را تست می‌کنیم. اگر ارضا شد، یعنی همان نقطه جزء مکان هست.

اگر نه، طول r را بسته به نوع جواب زاویه کم یا زیاد می‌کنیم:



* **پاسخ فرکانسی** :

- مزیتهای پاسخ فرکانسی به حوزه لاپلاس:

(۱) مفهوم بهره‌ای باند و فیلترینگ

(۲) تست ساده پاسخ فرکانسی بدون نیاز به تابع تبدیل

(۳) برخورد با سیستم‌های تأخیردار

(کلاس خاصی از سیستمهای غیرخطی)

- عیب:

. تحلیل پاسخ زمانی از روی پاسخ فرکانسی، به راحتی بدست نمی‌آید. مگر برای سیستم درجه ۲ استاندارد.

* ترسیم منحنی های پاسخ فرکانسی (تابع تبدیل sin)

پاسخ فرکانسی، پاسخ سیستم به ورودی سینوسی است.

تابع تبدیل سینوسی $G(j\omega) \leftarrow G(s)$: تابع تبدیل لاپلاس

* پاسخ فرکانسی برای چه سیستمهایی می تواند بیان شود؟

$$G(j\omega) = G(s)\Big|_{s=j\omega}$$

برای سیستمهای علّی، سیستمهایی که محدود باشد خود ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس آن باشد. یعنی سیستم پایدار باشد.

- ناحیه همگرایی: سمت راست آخرین قطب ← آخرین قطب باید سمت چپ محور j باشد.

$$\frac{1}{s-2} \not\rightarrow \frac{1}{j\omega-2}$$

* نمایش $G(j\omega)$:

$$G(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

$$\begin{cases} R(\omega) = Re\{G(j\omega)\} \\ X(\omega) = Im\{G(j\omega)\} \end{cases}$$

$$G(j\omega) = M(\omega) . e^{j\phi(\omega)}$$

$$\begin{cases} M(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)} \\ \phi(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{X(\omega)}{R(\omega)}\right) \end{cases}$$

* منحنی های پاسخ فرکانسی :

(۱) منحنی قطبی یا نایکوئیست

خود موهومی و حقیقی در صفحه $G(j\omega)$

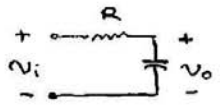
(۲) منحنی های بودی:

دامنه و فاز در دو منحنی جدا بر حسب فرکانس (راحت تر است اما برای همه سیستم ها نمی توان یافت)

(۳) لگاریتم اندازه - فاز:

(بدست آوردن مشخصه حلقه بسته از روی حلقه باز)

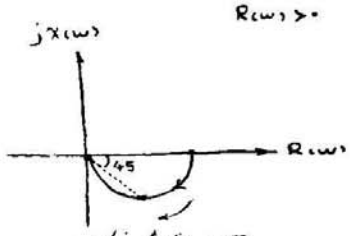
* منحنی های قطبی : Polar-Plot



$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{\frac{1}{Cs}}{R+\frac{1}{Cs}} = \frac{1}{1+RCs}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega RC} \qquad \left.\begin{array}{l}\tau = RC \\ \omega_1 = \frac{1}{RC}\end{array}\right\} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{1+j\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)} = \frac{1-j\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}$$

$$G(j\omega) = \underbrace{\frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}}_{R(\omega)>0} + j\,\underbrace{\frac{-\frac{\omega}{\omega_1}}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}}_{X(\omega)<0}$$



جهت افزایش فرکانس

$$\Leftarrow \begin{cases} \omega = 0 \rightarrow R(\omega) = 1,\ X(\omega) = 0 \\ \omega = \infty \rightarrow R(\omega) = 0,\ X(\omega) = 0 \\ \omega = \omega_1 \rightarrow R(\omega) = 0.5,\ X(\omega) = -0.5 \end{cases}$$

فاز و اندازه :

$$\begin{cases} M(\omega) = \dfrac{1}{\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right)^{1/2}} \\ \phi(\omega) = -tg^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right) \end{cases}$$

$$\omega = 0 \Rightarrow \begin{cases} M = 1 \\ \phi = 0 \end{cases}$$

$$\omega = \infty \Rightarrow \begin{cases} M = 0 \\ \phi = -90^\circ \end{cases}$$

* مثال:

$$G(s)=\frac{K}{s(1+\tau s)}$$

$$G(j\omega)=\frac{K}{j\omega(1+\tau j\omega)}=\frac{K}{(j\omega-\omega^2\tau)}$$

$$\begin{cases} M(\omega)=\dfrac{K}{((\omega^2\tau)^2+\omega^2)^{1/2}} \\ \phi(\omega)=-tg^{-1}\left(\dfrac{\omega}{-\omega^2\tau}\right)=-tg^{-1}\left(\dfrac{-1}{\omega\tau}\right) \end{cases}$$

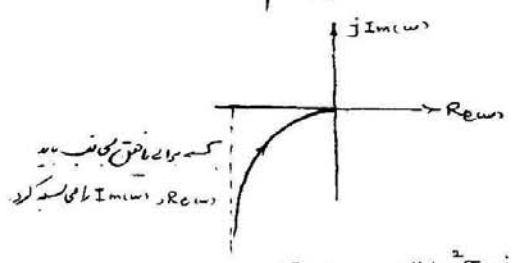
- باید دقت کنیم کدام ربع مثلثاتی است.
- بهتر است فاکتورها را جدا در نظر گرفته فاز آنها را جمع کنیم:

$$\phi(\omega)=-(\phi(j\omega)+\phi(1+j\omega\tau))$$

$$\rightarrow \phi(\omega)=-90-tg^{-1}(\omega\tau)$$

$$\omega=0 \rightarrow \begin{cases} M=\infty \\ \phi=-90 \end{cases} \qquad \omega=\infty \rightarrow \begin{cases} M=0 \\ \phi=-180 \end{cases}$$

فاز نمی‌تواند از 180- منفی باشد و تیر نمی‌تواند مثبت مگر 90- باشد ← در ربع سوم قرار دارد:



کسر برای ما فرق نمی‌کند باید Re(ω) و Im(ω) را محاسبه کرد

$$G(j\omega)=\frac{K}{-\omega^2\tau+j\omega}$$

$$G(j\omega)=\frac{-K(\omega^2\tau+j\omega)}{\omega^4\tau^2+\omega^2} \rightarrow \begin{cases} Re=\dfrac{-K\omega^2\tau}{\omega^4\tau^2+\omega^2} \\ Im=\dfrac{-K\omega}{\omega^4\tau^2+\omega^2} \end{cases}$$

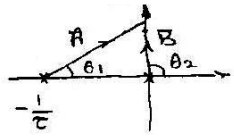
$\omega=0$ مجانب $R(0)=-K\tau$

$X(0)=-\infty$

روش سوم: از روی دیاگرام قطب و صفر:

$$G(s)=\frac{K}{s(1+\tau s)} \qquad G(s)=\frac{K/\tau}{s(s+\frac{1}{\tau})} \Rightarrow G(j\omega)=\frac{K/\tau}{j\omega(j\omega+\frac{1}{\tau})}$$

دیاگرام قطب و صفر:



S-plane

بردارهایی که از $-\frac{1}{\tau}$ به $j\omega$ وصل می‌شود $\longrightarrow$ $j\omega+\frac{1}{\tau}$

$$G(j\omega)=\frac{K/\tau}{j\omega(j\omega+\frac{1}{\tau})} \qquad \begin{cases} A=j\omega \\ B=j\omega+\frac{1}{\tau} \end{cases}$$

$$\begin{cases} M(\omega)=\dfrac{K(\tau)^{-1}}{|A||B|} \\ \phi(\omega)=-\theta_1-\theta_2 \end{cases}$$

$$\omega=0 \longrightarrow \begin{cases} |A|=\frac{1}{\tau} \quad |B|=0 \\ \theta_1=0 \ , \ \theta_2=+90 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} M(\omega)=\infty \\ \phi(\omega)=-90 \end{cases}$$

$$\omega=\infty \longrightarrow \begin{cases} |A|=|B|=\infty \\ \theta_1=\theta_2=+90 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} M(\omega)=0 \\ \phi(\omega)=-180 \end{cases}$$

تذکر: قطبهای سمت راست را نیز با این Trick میتوان بررسی کرد.

* در منحنی پاسخ فرکانسی اضافه کردن هر فاکتور، منجر به انجام محاسبات میشود.
و حذف فاکتور نیز دیده نمی‌شود.

در جلسه بعد از لگاریتم استفاده می‌کنیم: $(\log : \times \longrightarrow +)$

• جلسه بیست و یکم : یکشنبه : ۸۲/۲/۲۸

• دیاگرام بودی : (Bode-diagram) :

در این دیاگرام منحنی اندازه و فاز برحسب ω رسم میشود.

$20\log|G| - \omega$

$\phi(\omega) - \omega$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega\tau} \rightarrow |G(j\omega)| = \frac{1}{(1+\omega^2\tau^2)^{1/2}} \quad , \quad \phi(\omega) = -\tan^{-1}\omega\tau$$

$\phi(\omega)$ با پیش فرض نکرده، ولی برای دامنه:

$$20\log|G(j\omega)| = -10\log(1+\omega^2\tau^2)$$

بهترین کاربرد : یافتن مجانب ها:

$\omega \ll \frac{1}{\tau} \Rightarrow 20\log|G(j\omega)| \simeq 0\ dB \rightarrow$ مجانب فرکانس پایین

در مجانب بالا و پایین در $\omega = \frac{1}{\tau}$ به هم می رسند $\omega = \frac{1}{\tau} \Rightarrow -10\log 2 = -3dB \rightarrow$ فرکانس گوشه - فرکانس قطع

$\omega \gg \frac{1}{\tau} \Rightarrow -20\log(\omega\tau) \rightarrow$ مجانب فرکانس بالا

مجانب فرکانس بالا : $-20\log(\omega\tau) = -20\log\omega - \overbrace{20\log\tau}^{cte}$

← اگر محور افقی را بصورت لگاریتمی مدرج کنیم، تبدیل به یک خط میشود

تعریف : بازهٔ $[\omega_1, \omega_2]$ یک decade (دهه) تلقی میشود اگر: $\omega_2 = 10\omega_1$

شیب مجانب فرکانس بالا : $-20\log\omega_1\tau - (-20\log\omega_2\tau) = -20\log\frac{\omega_1}{\omega_2} = +20\ dB/decade$

تعریف : بازه $[\omega_1, \omega_2]$ یک Octave (آکتاو) تلقی میشود اگر: $\omega_2 = 2\omega_1$

شیب بخش فرکانس بالا : $-20\log \omega_1\tau + 20\log \omega_2\tau = -20\log \frac{\omega_1}{\omega_2} = -6\ dB/Octave$

نکته مهم: هر فاکتور درجه 1 ، معادل شیب $20\ dB/decade$ است و نمی‌توان 90° از فاز کم کند.

ترسیم دیاگرام بودی: (Bode Plot):

$$G(j\omega) = \frac{K_b \prod_{i}^{Q}(1+j\omega\tau_i)}{(j\omega)^N \prod_{m=1}^{M}(1+j\omega\tau_m)\prod_{k=1}^{R}\left(1+\left(\frac{2\xi_k}{\omega_{nk}}\right)j\omega+\left(\frac{j\omega}{\omega_{nk}}\right)^2\right)}$$

$$\phi(\omega) = \angle G(j\omega) = \angle K_b + \sum_{i}^{Q} tg^{-1}\omega\tau_i - 90N - \sum_{m=1}^{M} tg^{-1}\omega\tau_m - \sum_{k=1}^{R} tg^{-1}\frac{2\xi_k(\omega/\omega_{nk})}{1-(\omega/\omega_{nk})^2}$$

$$20\log|G(j\omega)| = +20\log|K_b| + \sum_{i}^{Q} 20\log|1+j\omega\tau_i| - 20^N\log\omega$$

$$-\sum_{m=1}^{M} 20\log|1+j\omega\tau_m| + \sum_{k=1}^{R} 20\log|\ \ \text{اعبارت درجه 2}$$

• هدف از دیاگرام بودی این بود که فاکتورهایش را جدا جدا بسنیم.

(1) فاکتور گین: K_b :

$G(j\omega) = K_b$

$20\log|G| = 20\log K_b$

$K_b > 0 \rightarrow \angle G(j\omega) = 0$

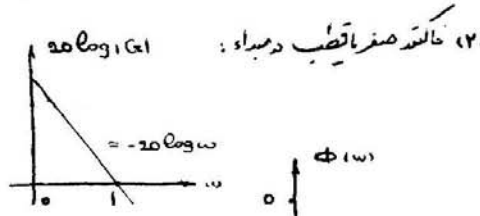
$K_b < 0 \rightarrow \angle G(j\omega) = 180$

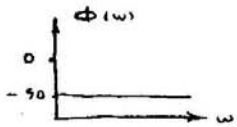
(2) فاکتور صفر یا قطب در مبداء :

$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$

$20\log|G| = -20\log\omega \rightarrow$

$\angle G(j\omega) = -90$





شیب خط: $-20\ dB/decade$

* تأخیر فاکتورگین است که فقط شیفت میدهد و لی فاز تأخیر دارد با زاویه 180° جهت را عوض میکند.

* اگر داشتیم:

$$G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^N}$$

$$\rightarrow 20\log|G| = -20N\log\omega \rightsquigarrow 20N\ \text{dB/decade}$$

کاهش

$$\Phi(\omega) = -90N$$

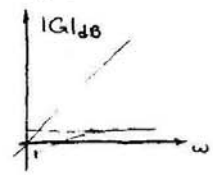
اگر صفر داشتیم (قاعدتاً سیستمهای فیزیکی در مبداء صفر ندارند) (چون سیستمهای فیزیکی غالباً پایین گذرند).

مثال:

$$G(j\omega) = (j\omega)^N$$

$$20\log|G| = 20N\cdot\log\omega \rightsquigarrow 20N\ \text{dB/decade}$$: افزایش

$$\Phi(\omega) = +90N$$



(۳) فاکتور صفر قطب ساده:

۳-۱: قطب ساده:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega\tau}$$

$\omega \ll \frac{1}{\tau}$: مجانب فرکانس پایین $\rightarrow |G| = \frac{1}{(1+\omega^2\tau^2)^{1/2}} \rightarrow 20\log|G| = 0$

$\omega \gg \frac{1}{\tau}$: مجانب فرکانس بالا $\rightarrow 20\log|G| = -20\log(\omega\tau) \rightsquigarrow$ کاهش 20 dB/decade

فرکانس قطع: $\omega = \frac{1}{\tau} \rightarrow 20\log|G| = -3\,dB$ ← خطا Max

* خطا در یک اکتاو زیر فرکانس قطع:

مجانب

$\omega\tau = 1/2$ خطا $|G|_{dB}^{Actual} - |G|_{dB}^{Asym} \rightarrow$ مجانب صفر

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20\log(1+\omega^2\tau^2)^{1/2}$$

اصلی

$$= -20\log\sqrt{1+1/4} = -0.97\,dB$$

* خطای در یک اکتاو بالای فرکانس قطع:

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20\log(1+\omega^2\tau^2)^{1/2} + 20\log(\omega\tau) = -20\log\frac{\sqrt{2}}{2} = -0.97\ dB$$

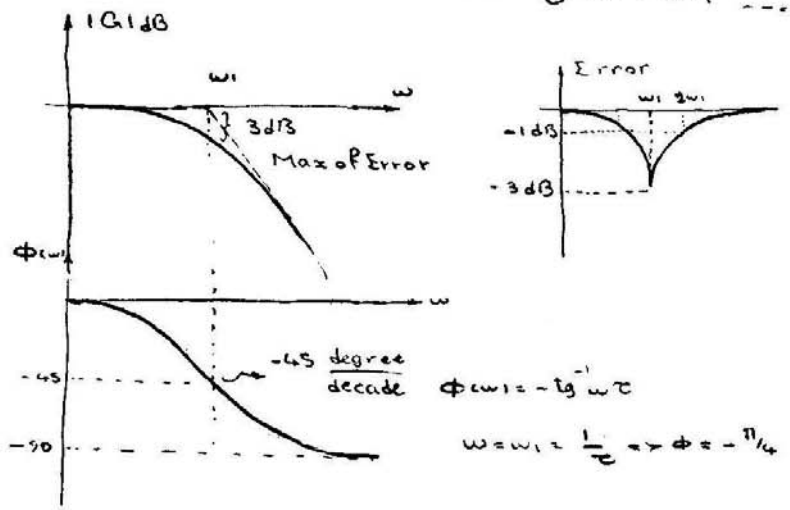
⇐ خطا متعادل است.

* حداکثر خطا را در فرکانس قطع داریم ($\omega_c\tau = 1$) و برابر است با $-3dB$

$\omega\tau = 0.1$ ← یک دهم زیر فرکانس قطع : ← $-0.04\ dB$

$\omega\tau = 10$ ← یک دهم بالای فرکانس قطع : ← $\mp 0.04\ dB$

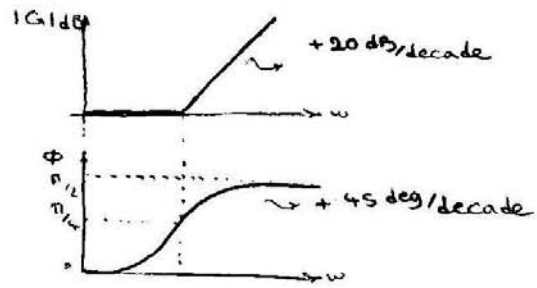
← خطا در یک دهم پایین و بالای فرکانس قطع از حدود $0.04dB$ است.



۲-۳) صفر ساده:

$G(j\omega) = 1 + j\omega\tau$

عکس همان حالت:



(۴) نمودار قطب و صفر محاط :

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \quad , \quad 0<\xi<1$$

بصورت ثابت زمانی تصویر میکنیم : $G(s)=\dfrac{1}{1+\frac{2\xi s}{\omega_n}+\frac{s^2}{\omega_n^2}}$

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+2\xi j\cdot\frac{\omega}{\omega_n}+\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\rightarrow |G|=\frac{1}{\left[\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^{1/2}}$$

$$20\log|G|=-10\log\left[\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)^2\right]$$

مجانب فرکانس پایین : $\omega \ll \omega_n$: $20\log|G|=0\,dB$

مجانب فرکانس بالا : $\omega \gg \omega_n$: $-20\log\frac{\omega}{\omega_n}$ ← با شیب $40\,\frac{dB}{dec}$ افت میکند.

مشاهده میشود هیچگونه بستگی‌ای به ξ ندارند.

ولی سیستمهای دارای میرایی، پیکی دارند. اگر سیستمی را با فرکانس قطعش تحریک کنیم، تشدید رخ میدهد.

$$u \triangleq \frac{\omega}{\omega_n} \rightarrow |G|^2=\frac{1}{(1-u^2)^2+(2\xi u)^2}$$

$$dG/du=0 \rightarrow \cdots \rightarrow u=\sqrt{1-2\xi^2}$$

فرکانس تشدید $\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$

resonance frequency

$$\begin{cases} \xi=0 \rightarrow \omega_r=\omega_n \\ \xi>0 \rightarrow \omega_r<\omega_n \\ \xi>\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \text{تشدید نداریم} \end{cases}$$

$$|G|^2_{u_r}=\frac{1}{(1-u^2)^2+4\xi^2u^2} \qquad u_r=\sqrt{1-2\xi^2}$$

$$M_{p\omega} = |G(j\omega_r)| \rightarrow \dots$$

ماکزیمم پیک

$$M_{p\omega} = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

$M_{p\omega}$ تنها تابع میرایی سیستم است.

بدازای $\xi = 0$ ، این پیک با فرکانس بینهایت ∞ است و در $\omega = \omega_0$ رخ می دهد.

* جلسهٔ بیست و دوم: سه‌شنبه: ۸۲/۲/۳۰

Makeup Class tentative Next Thursday, Khordad: 8, 2PM

پاسخ فرکانسی:

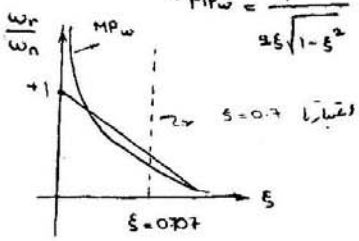
قطب مضاعف مختلط: $G(j\omega) = \dfrac{1}{1+2\xi\left(\frac{j\omega}{\xi_n}\right)+\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}$ $\quad 0<\xi<1$

منحنی کنار هم اندازه و فاز برحسب فرکانس (منحنی های بودی) (Bode diagram

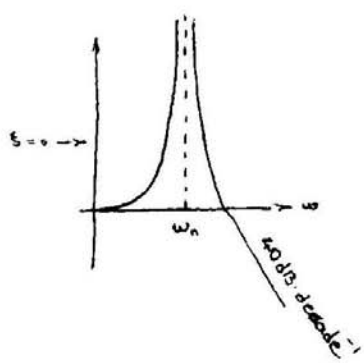
Mallab Code: nyquist(sys,w) : قطبی

[mag, ph] = bode(sys, w) : بودی

$$|G|_{dB} \rightarrow \begin{cases} \omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \\ M_{P\omega} = \dfrac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \end{cases} \qquad \xi\uparrow \Rightarrow \begin{cases} \omega_r \downarrow \\ M_{P\omega} \downarrow \end{cases}$$

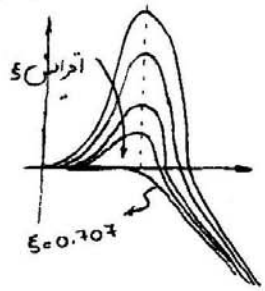


اکنون با در دست داشتن پاسخ فرکانسی، می‌خواهیم با پارامترهای سیستم درجه ۲ را بیابیم:



به ازای ξ های مختلف، پاسخ فرکانسی را رسم می‌کنیم:

$\xi = 0.5 \rightarrow$ $M_{P\omega}$, $\omega_n \rightarrow$ کم می‌شود



بعد از $\xi > 0.707$ دیگر تشدید نخواهیم داشت.

$M_{P\omega}$ تنها تابع میرایی سیستم (ξ) است.

بررسی منحنی فاز:

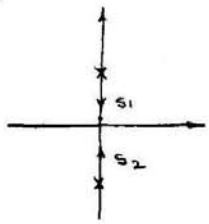
$$u = \frac{\omega}{\omega_n} \qquad G(j\omega) = \frac{1}{1-u^2+j2\xi u}, \quad \phi(\omega) = \measuredangle G(j\omega)$$

$$\phi(\omega) = -tg^{-1}\left(\frac{2\xi u}{1-u^2}\right)$$

$$\begin{cases} u=0 \Rightarrow G(j\omega)=0 \\ u=\infty \Rightarrow \phi(\omega)=-180^\circ \\ u=1 \Rightarrow \phi(\omega)=-90^\circ \end{cases}$$

$u=1 \rightarrow \omega=\omega_n$

مقادیر دسته منحنی‌های فاز برای $u=0,1,\infty$ از مقادیر $\Rightarrow$ ثابتی (بدون وابستگی به ξ) عبور می‌کند.



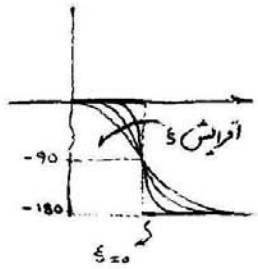
$$\xi=0 \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{1+\frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

$$P_1, P_2 = \pm j\omega_n$$

$0<\omega<\omega_n \rightarrow \measuredangle s_1 = -90 \quad \measuredangle s_2 = +90 \rightarrow G(j\omega) = -(-90+90) = 0$

$\omega_n<\omega \rightarrow \measuredangle s_1 = +90 \quad \measuredangle s_2 = +90 \rightarrow G(j\omega) = -(90+90) = -180$

به ازای $\xi=0$ منحنی فاز گسسته است:



* سیستمهای مینیمم فاز و نامینیمم فاز: (Minimum and Non-minimum Phase Systems)

سیستمهایی که صفر یا قطب سمت راست دارند، نامینیمم فاز هستند.

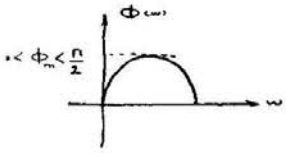
غلط مصطلح: به سیستمهای دارای صفر سمت راست، نامینیمم فاز گویند

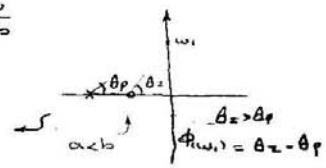
برای منحنی دامنه داده شده، فقط یک تابع تبدیل وجود دارد که منحنی فاز آن در مقایسه با بقیه توابع تبدیلی که دارای منحنی دامنه مشابه هستند، ولی فاز متفاوت دارند، تابع تبدیل مینیمم فاز اطلاق می‌شود و به بقیه سیستمهای نامینیمم فاز مینیمم است، به آن

* مثال: $A(j\omega)$ ، $|A(j\omega)| = 1$ ← $G_2(j\omega) = \dfrac{j\omega - a}{j\omega + b}$ ، $G_1(j\omega) = \dfrac{j\omega + a}{j\omega + b}$

$$\begin{cases} |G_1| = \dfrac{(a^2+\omega^2)^{1/2}}{(b^2+\omega^2)^{1/2}} \\ |G_2| = \dfrac{(a^2+\omega^2)^{1/2}}{(b^2+\omega^2)^{1/2}} \end{cases} \rightarrow |G_1| = |G_2|$$

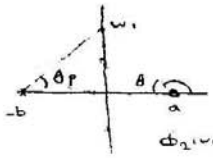
$$\measuredangle G_1 = \phi_1(\omega) = tg^{-1}\frac{\omega}{a} - tg^{-1}\frac{\omega}{b}$$



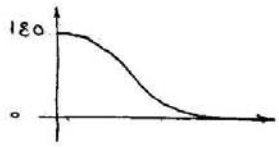


$$\measuredangle G_2 = \phi_2(\omega)$$

$$\begin{cases} \omega = 0 \rightarrow \phi_2(\omega) = 180 \\ \omega = \infty \rightarrow \phi_2(\omega) = 0 \end{cases}$$



$$\phi_2(\omega) = \theta_z - \theta_p = 180 - \theta - \theta_p$$



فاز سیستم قبلی 90 و 0 بود درحالیکه فاز سیستم دوم 180-0 است.

سیستم ⊥ مینیمم فاز بود.

G_1 و G_2 مشخصه دامنه یکسانی داشتند، ← باید شباهتی با یکدیگر داشته باشند

$$G_2(j\omega) = \frac{j\omega - a}{j\omega + b} \times \frac{j\omega + ba}{j\omega + a} \rightarrow G_2(j\omega) = \frac{j\omega + a}{j\omega + b} \cdot \frac{j\omega - a}{j\omega + a} \rightarrow$$

$$G_2(j\omega) = \underbrace{\frac{j\omega - a}{j\omega + a}}_{A(j\omega)} \cdot G_1(j\omega)$$

می‌خواهیم بفهمیم چگونه تابع تبدیل نامینیمم را از تابع تبدیل مینیمم بسازیم؟

$A(\omega) \Rightarrow \forall \omega : |A(\omega)| = 1 \quad \rightarrow$ All Pass Filter

$A(\omega)$ تابع تبدیلی بصورت all-pass-filter است که تابع تبدیلی حقیقی گویا است و تمام صفر و قطبهایش نسبت به محور $j\omega$ قرینه است.

* مثال: تابع تبدیل تأخیر انتقال تمام گذر است:

$$A(s) = e^{-\tau s}$$

$$\rightarrow A(j\omega) = e^{-\tau j\omega} \Rightarrow |A(j\omega)| = 1$$

$$\phi(\omega) = -\omega\tau$$

- تذکر: تابع تبدیل تأخیر انتقال حقیقی گویا نیست و بی دخل وجود دارد.

* فاکتورهای all-pass که به سیستم اضافه می شود باعث می شوند که از یک فرکانس به بعد $|G| = 1$ شود. فاکتورهای all-pass روی منحنی اندازه بی اثرند و تنها روی منحنی فاز موثرند.

به کمک منحنی فاز می توان به نوع فاکتور all-pass پی برد.

نتیجه: اگر سیستم مینیمم فاز باشد، از روی مشخصه دامنه، مشخصه فاز را می دانیم یا هم.

توضیح: برای سیستم مینیمم فاز $A(\omega) = 1$ است. اما وقتی سیستم نامینیمم فاز است نمی دانیم چه تابع تمام گذری ضرب شده است ← بدون منحنی فاز نمی توانیم آنرا تشخیص دهیم.

و چون تعداد نامحدود تابع all-pass وجود دارد که همان منحنی اندازه ولی منحنی فاز متفاوت می دهد.

- ضرر سمت راست دارای تأخیر می باشد.

. قضیه بود: (Bode Theorem)

برای توابع تبدیل مینیمم فاز، فاز تابع تبدیل بطور یکتا، توسط منحنی اندازه می تواند بدست آید. در واقع در هر فرکانس، اندازه و فاز بطور یکتا توسط جفت تبدیل هیلبرت به هم مرتبط می شوند ولی برای توابع نامینیمم فاز درست نیست. زیرا ضرب یک تابع تمام گذر در تابع تبدیل، منحنی اندازه را تغییر نمی دهد ولی منحنی فاز را تغییر می دهد.

$$\measuredangle G(j\omega_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\ln|G|}{dv} \ln \coth\frac{|v|}{2}\, dv + \measuredangle \prod_{i=1}^{K}\left(\frac{j\omega_0 + z_i}{j\omega_0 - z_i}\right) \quad , \quad v = \ln\frac{\omega}{\omega_0}$$

* تشخیص سیستم مینیمم فاز:

$$G(s) = \frac{s^m + \cdots}{s^n + \cdots}$$

اگر بدانیم کسر سره است

$$G(s) = \frac{1}{s^{n-m}} \quad : s \to \infty$$

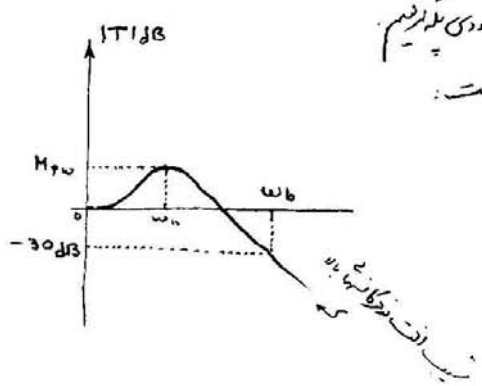
$$\omega \to \infty \Rightarrow \measuredangle G(j\omega) = -90(n-m)$$

اگر سیستم مینیمم فاز باشد، در نهایت $\phi(\omega) = -90(n-m)$

* تذکر: برای همه سیستمها در فرکانسهای بالا، منحنی اندازه با شیب $-20(n-m)\frac{dB}{decade}$ افت می‌کند.

* اندازه‌های عملکرد برحسب پاسخ فرکانسی:

به یاد دارید که برای سیستم زمانی، پاسخ زمانی سیستم درجه ۲ در دو دسته بررسی شد.
در حوزه فرکانس هم، پاسخ فرکانسی مطلوب سیستم درجه ۲ است:



$T_r \downarrow \Rightarrow T_s \uparrow \Leftarrow \xi \downarrow$

سرعت سیستم

* اندازه‌های عملکرد:

(۱) $M_{p\omega}$: پیک پاسخ فرکانسی

(۲) ω_b : پهنای باند

(۳) cut-off rate : شیب افت پاسخ فرکانسی در فرکانسهای بالا

- تذکر: وقتی طراحی دامنه فرکانس است (مثل طراحی فیلتر) ← اندازه‌های عملکرد دامنه فرکانس در اختیار است.

اما وقتی می‌خواهیم سیستم زمانی طراحی کنیم، اما ابزاری که در اختیار داریم، فرکانسی است باید به معیارهای پایداری و سرعت توجه کنیم. و اکنون رابطه این معیارها با حوزه فرکانس را باید بیابیم:

پایداری در زمان به P.O بستگی دارد (چون PO فقط به ζ بستگی دارد و اگر ζ بیشتر باشد ← پایداری نسبی بیشتر است)
(چون از محور jω دور می‌شویم)

دامنه فرکانس پایداری مربوط است به $M_{P\omega}$

← یک پاسخ فرکانسی معیاری از پایداری است. M_P: اگر یعنی پایداری نسبی کمتر زیرا ζ کوچکتر است.

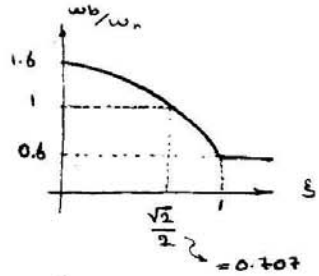
معیار سرعت دامنه فرکانس، پهنای باند است.

پهنای باند معیاری است از سرعت، زیرا سیستمی با پهنای باند بیشتر می‌تواند فرکانس‌های بالاتری عبور دهد ← سریعتر است.

- تذکر: بنابه تعریف، ω_b فرکانسی است که در آن دامنه به $-3dB$ می‌رسد.

$$|T|_{dB} = -3dB \rightarrow |T| = 0.707 \rightarrow \omega_b = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2+\sqrt{2-4\zeta^2(1-\zeta^2)}}$$

رسم منحنی $\frac{\omega_b}{\omega_n}$ برحسب ζ:



نتیجه: در $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ← $\omega_b = \omega_n$

* در ζ ثابت، با افزایش ω_n، ω_b هم زیاد می‌شود ← سرعت سیستم زیاد می‌شود ← درست است که پهنای باند معیاری از سرعت است.

* در ω_n ثابت، برای افزایش ω_b، باید ζ را کم کنیم.

* سرعت را متناسب با T_r و T_p تعریف می‌کنیم (نه T_s)

* جلسه بیست و سوم: یکشنبه: ۸۲/۳/۴

پاسخ فرکانسی: منحنی‌های بودی:

از روی پاسخ فرکانسی می‌توان نوع سیستم را یافت:

تعداد انتگرال‌گیرها حلقه

از روی دیاگرام اندازه پاسخ فرکانسی می‌توان نوع سیستم را یافت:

$$GH(s) = \frac{K(1+T_{z_1}s)(1+T_{z_2}s)\cdots(1+T_{z_m}s)}{s^N(1+T_{p_1}s)(T_{p_2}s+1)\cdots(1+T_{p_n}s)}$$

در فرکانسهای پایین، با انحنای منحنی در حوالی فرکانس صفر می‌توان N را از روی شیب فرکانس یافت.

ثابت خطای موقعیت نیز با انحنای منحنی اندازه در حوالی فرکانسهای صفر بدست می‌آید:

$$N=0 \rightarrow \lim_{s\to 0} GH(s) = K$$

برای هر سیستم تنها یک ثابت خطا غیر صفر و غیر بینهایت وجود دارد که آن از شیب اندازه پاسخ فرکانسی می‌توان یافت.

$$N=1 \rightarrow \lim_{s\to 0} GH(s) = \frac{K}{s} \quad \text{or} \quad \lim_{\omega\to 0} GH(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$$

← منحنی اندازه پاسخ فرکانسی (البته منحنی بودی آن) یک خط صاف با شیب $-20\,dB/decade$ است.

باید بتوانیم ثابت خطای سرعت را بیابیم:

$$K_v = \lim_{s\to 0} sGH(s)$$

منحنی اندازه در فرکانسهای پایین را ادامه میدهیم تا خط 0dB در ($\omega = \omega_1$):

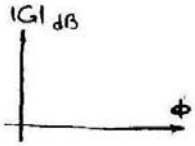
$$20\log\frac{K}{\omega_1} = 0 \rightarrow \underbrace{K = \omega_1}_{\text{ثابت خطای سرعت}}$$

برای Nهای بزرگتر به همین صورت عمل میکنیم.

* دیاگرام لگاریتم اندازه - فاز:

- اکنون دو دسته منحنی داشتیم:
  - قطبی: $G(j\omega)$
  - بعدی:
    - لگاریتم اندازه برحسب فرکانس
    - لگاریتم فاز برحسب فرکانس

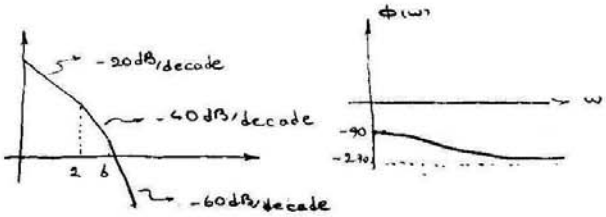
دیاگرام لگاریتم اندازه - فاز:



- اطلاعات اندازه و فاز از روی دیاگرام بعدی بدست می آید.

* مثال:

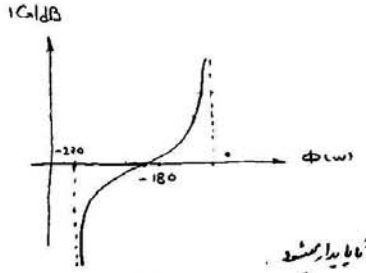
$$G(j\omega) = \frac{5}{j\omega(1+0.5j\omega)(1+\frac{j\omega}{6})}$$



توضیح: - در شروع منحنی |G| با شیب -20dB/decade افت میکند.

- اولین شکست در $1+0.5\omega = 0 \rightarrow \omega_{c1} = 2$ می رسیم و شیب افت 40 میشود.

- برای منحنی فاز، ω از مخرج یک فاز $\frac{\pi}{2}$ دائمی دارد. و هر ریشه درجه 1 (قطب درجه 1) حداکثر $\frac{\pi}{2}$ افت فاز دارد.



بررسی پایداری:

فرضا $T = \frac{1}{1+G}$ ← اگر $\begin{cases} |G| = 1 \\ \measuredangle G = 180 \end{cases}$ ← T ناپایدار میشود.

در بررسی پایداری باید دید که: $\begin{cases} |G|_{dB} = 0 \\ \Phi = -180 \end{cases}$ ←

- در $\Phi = -180$: منحنی اندازه چقدر با صفر فاصله دارد.
- در $|G|_{dB} = 0$ ، منحنی فاز چقدر با 180 فاصله دارد

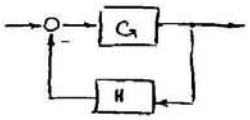
• پایداری در حوزهٔ فرکانس:

• هدف: از روی پاسخ فرکانسی حلقه باز سیستم، پایداری سیستم حلقه بسته را تشخیص دهیم.

• تذکر: برای سیستمهای خطی، کلی ترین معیار پایداری، پایداری در حوزهٔ فرکانس است.

(چون در بعضی موارد مکان هندسی ریشه‌ها و یا معیار راث جوابگو نیستند)

• پیش از ورود به این بحث، باید موارد زیر مشخص شود:



$$T = \frac{G}{1+GH}$$

(a) ارتباط قطبهای $1+GH$ با قطبهای GH

(b) ارتباط قطبهای T با صفرهای $1+GH$

(c) مفهوم نگاشت نقاط

(d) مفهوم نگاشت کانتور

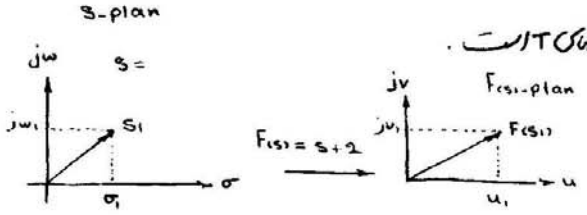
- فرض:

$$H = \frac{N_H}{D_H} \qquad G = \frac{N_g}{D_g}$$

$$T = \frac{G}{1+GH} = \frac{\frac{N_g}{D_g}}{1+\frac{N_g N_h}{D_g D_h}} = \frac{\frac{N_g}{D_g}}{\frac{N_g N_h + D_g D_h}{D_g D_h}} \Big\} \leftarrow 1+GH$$

← قطبهای $1+GH$ همان قطبهای GH است.

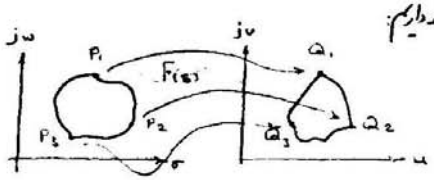
← صفرهای $1+GH$ همان قطبهای T است.



$S_1 = \sigma_1 + j\omega_1$ $\qquad$ $F(s_1) = u_1 + jv_1$

← $F(s)$ نگاشت s_1 است تحت تابع $F(s)$

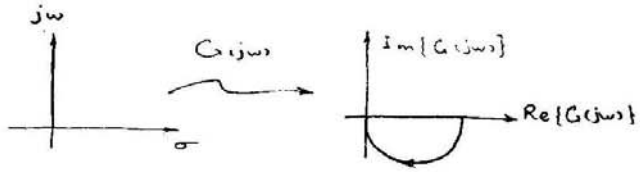
- اکنون به فرض در صفحه s به جای یک نقطه، مجموعه نقاط داریم:



کانتور: مجموعه نقاط پیوسته

کانتور بسته: مجموعه نقاط پیوسته بسته

- مرکز: اگر کانتور در صفحه s پیوسته باشد، وقتی کانتور در صفحه $F(s)$ پیوسته است که: کانتور صفحه s از صفر قطبهای $F(s)$ عبور نکند.



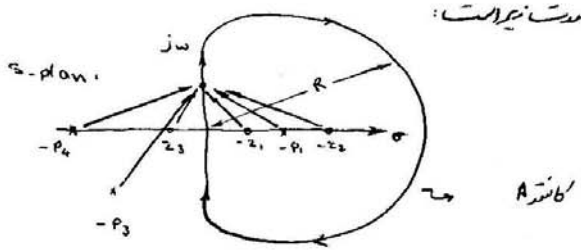
* مثال: از نگاشت کانتور:

جهت کانتور: جهت افزایش فرکانس (جهت عقربه‌های ساعت)

پس از مقدمه، میپردازیم به بحث پایداری در حوزه فرکانس:

$$F(s) = K \cdot \frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots}{(s+P_1)(s+P_2)\cdots}$$

با فرض دیاگرام صفر قطب $F(s)$ به صورت زیر است:



. کانتور A : نیمدایره‌ای شامل کل محور $j\omega$ با شعاع $R \to \infty$ ← کانتور A : نیمصفحه سمت راست شامل محور $j\omega$

بردارهای $s+z_1$ ، $s+z_2$ و $s+p_1$ ، هنگامیکه کانتور A یکبار در جهت کانتور طی میکنیم، 360° تغییر فاز میدهند

(یکبار کامل میچرخند)

← چرخش خالص بردارهای $s+z_3$ ، $s+p_4$ ، $s+p_2$ ، $s+p_3$ صفر است ←

وقتی کانتور را یکبار در جهت کانتور طی کنیم، تغییر خالص فاز آنها صفر است.

تعمیم:

(a) در چرخش در جهت کانتور، بردارهای درون کانتور یکبار کامل میچرخند

(b) در چرخش روی کانتور در جهت آن، بردارهای خارج کانتور، چرخش خالص صفر دارند.

* تغییر زاویه قطبها − تغییر زاویه صفرها = تغییر زاویه خالص $F(s)$

$= 2(360) - 1(360)$ برای مدار اخیر

Z : تعداد صفرهای $F(s)$ که در داخل کانتور هستند.

P : تعداد قطبهای $F(s)$ که در داخل کانتور هستند

تعریف میکنیم: $N = Z - P$ (N میتواند مثبت باشد یا منفی)

← تغییر خالص زاویه $F(s)$ = $N \times 360^\circ$ = تعداد دفعاتی که $F(s)$ مبدا صفحه $F(s)$ را دور میزند

اگر $N > 0$ باشد ← $F(s)$ در جهت کانتور دور میزند

* قضیه آرگومانها: (Principle of Arguments)

اگر تابع $F(s)$ دارای Z صفر و P قطب درون کانتور بسته A باشد و کانتور A از هیچ صفر یا قطب $F(s)$ عبور نکند

آنگاه به ازای تغییرات s در طول کانتور A، منحنی $F(s)$ مبدا صفحه مختصات را به تعداد $N = Z - P$ بار دور خواهد زد.

(اثبات در کتاب آگاتا - Page 584)

• پایداری: فرض کنیم $F(s) = 1 + GH(s) = A(s)$

برای پایداری $T = \frac{C_0}{F}$ باید T قطبی در RHP نداشته باشد ← F(s) نباید صفری در RHP داشته باشد

و چون RHP، همان داخل کانتور A است ←

برای پایداری، F(s) نباید صفری درون کانتور A داشته باشد: یعنی: $Z = 0$ باشد

از طرف P نیز معلوم است. (چون قطبهای F(s) (همان P)، همان قطبهای GH هستند)

← P = تعداد قطبهای سمت راست تابع GH(s) *

* نتیجه: اگر نگاشت کانتور A تحت F(s) را در صفحه F(s) ترسیم کنیم و تعداد دورها را بشماریم:

اگر $N = -P$ باشد ← سیستم حلقه بسته (T) پایدار است.

تذکر: (۱) $N = -P$ یعنی: در خلاف جهت عقربه‌های ساعت، به اندازه P بار دور بزند.

(۲) بیان کردیم که P نیز معلوم است.

• قضیه نایکوئیست:

اگر تابع تبدیل حلقه باز سیستم (GH(s)) دارای P قطب سمت راست باشد، برای پایداری یک منحنی F(s) باید (به ازای تغییرات s در طول کانتور A) به تعداد P بار دور صفحه F(s) را دور بزند.

یعنی P بار در جهت عکس عقربه‌های ساعت.

تذکر: می‌خواستیم از روی منحنی GH(s) پایداری را اندازه بگیریم نه از روی F(s):

$F(s) = 1 + GH(s)$

مبداء صفحه F(s) به نقطه (-1,0) در صفحه GH(s) مربوط است. ← می‌توان قضیه را به فرم زیر بیان کرد:

* اگر تابع تبدیل حلقه باز سیستم ($GH(s)$) دارای P قطب سمت راست باشد، برای پایداری باید منحنی $GH(s)$ ، (به ازای تغییرات s در طول کانتور A)، به تعداد P - بار، نقطه $(-1,0)$ را در صفحه $GH(s)$ دور بزند. یعنی P بار در عکس جهت عقربه‌های ساعت.

* منحنی نایکوئیست: منحنی $GH(s)$ است (به ازای تغییرات s در کانتور A) در صفحه $GH(s)$.

* شرط پایداری نایکوئیست:

سیستم فیدبک پایدار است، اگر و فقط اگر تعداد چرخشهای دیاگرام نایکوئیست (منحنی) در جهت CCW حول نقطه $(-1,0)$ مساوی باشد با تعداد قطبهای $GH(s)$ در RHP.

یعنی حلقه بسته

یعنی در جهت خلاف عقربه‌های ساعت

اگر $P=0$ باشد: سیستم فیدبک پایدار است اگر دیاگرام نایکوئیست $(-1,0)$ را دور نزند.

* کانتور A سه قسمت دارد:

(۱) $\omega > 0$: دیاگرام قطبی (پاسخ فرکانسی)

(۲) $\omega < 0$: قرینهٔ دیاگرام قطبی

(۳) $s \to \infty$: در طول نیم‌دایرهٔ بزرگ

$$GH(s) = \frac{\prod^{m}(s+z_i)}{\prod^{n}(s+P_i)} \times K$$

در طول نیم‌دایرهٔ بزرگ

$$\begin{cases} m=n \to s \to \infty : & GH(s) = K \\ m<n : \to s \to \infty , & GH(s) = 0 \end{cases}$$

* قسمت اصلی منحنی نایکوئیست همان بخش $\omega > 0$ است.