

ریاضی عمومی ۱

صفحه	سرفصل
۲-۱	فصل اول : تابع ، دامنه و برد
۱۴-۳	فصل دوم : حد و پیوستگی
۳۱-۱۵	فصل سوم : مشتق
۶۴-۳۲	فصل چهارم : انتگرال
۷۱-۶۵	فصل پنجم : مختصات قطبی
۷۸-۷۲	فصل ششم : اعداد مختلط
۱۰۰-۷۹	فصل هفتم : دنباله و سری

برای دوره درس ریاضی عمومی در تابستان ۹۱ (در دوره ویژه ۸۵ ساعتی در آموزشگاههای نصیر و پژوهش که شامل ۲ جلسه در هر هفته است) برای کنکور کارشناسی ارشد و دکتری به مراجع زیر نیاز دارید:

- ۱) ریاضی عمومی ۱ (جلد اول و جلد دوم) - ویرایش سوم (انتشارات: نگاه دانش، مؤلف: مسعود آقاسی)
- ۲) ریاضی عمومی ۲ (جلد اول و جلد دوم) - ویرایش سوم (انتشارات: نگاه دانش، مؤلف: مسعود آقاسی)

جلد اول کتابها شامل درس و تست و جلد دوم فقط شامل تست با پاسخ تشریحی (تستهای سال ۸۳ تا ۹۱ رشته‌های مختلف در دانشگاه سراسری و آزاد) است و بنابراین جلد دوم باید در پایان دوره کلاسی تابستان و برای مرور و یادآوری مطالب درسی مورد استفاده قرار گیرد. در این کلاس مطالب از روی جلد اول مراجع بالا تدریس می‌شوند.

آنچه برای استفاده مفید از کلاس باید انجام دهید

برای استفاده مفید از کلاسی که در آن شرکت می‌کنید، ابتدا لازم است که اطلاعاتی در مورد ساختار کتاب داشته باشید.

هر فصل از جلد اول ریاضی ۱ و ۲ از پنج قسمت تشکیل شده است.^۱

- قسمت اول که فصل با آن شروع شده و به خلاصه نکات مهم ختم می‌شود و شامل درس و مثال و تست است. (مثلاً در فصل ۲ از صفحه ۶۱ تا ۹۴)

• قسمت دوم که تستهای تکمیلی سطح ۱ (تستهای ساده و متوسط) است. (مثلاً در فصل ۲ از صفحه ۹۵ تا ۱۰۸)

• قسمت سوم که تستهای تکمیلی سطح ۲ (تستهای سخت) است. (مثلاً در فصل ۲ از صفحه ۱۰۹ تا ۱۱۸)

• قسمت چهارم که خودآزمایی سطح ۱ (تستهای ساده و متوسط) است. (مثلاً در فصل ۲ از صفحه ۱۱۹ تا ۱۲۲)

• قسمت پنجم که خودآزمایی سطح ۲ (تستهای سخت) است. (مثلاً در فصل ۲ از صفحه ۱۲۳ تا ۱۲۴)

پس از پایان هر جلسه از کلاس برای جلسه بعدی کلاس موارد زیر را انجام دهید:

۱) مطالب درسی تدریس شده در کلاس را از روی جزوه خود به دقت مطالعه نمایید.

۲) همه مثال و تستهای مربوط به هر مبحث را از قسمت اول کتاب حل کنید. مثال و تستها را ابتدا خودتان حل کنید (بدون آنکه خود را ملزم به در نظر گرفتن زمان برای حل آنها نمایید)^۲ سپس به پاسخ کتاب مراجعه نمایید. توجه کنید که سوالات مطرح شده در قسمت اول، سوالات آموزشی هستند و برخی از آنها (خصوصاً سؤالاتی که دارای «کادر سایه دار» هستند) دارای ایده یا نکات خاصی برای حل هستند و لذا ممکن است قادر به پاسخگویی به آنها نباشید و بنابراین مرور پاسخ آنها کافی است.

^۱ برای اطلاعات کامتر به «راهنمای مطالعه کتاب» در مقدمه جلد اول ریاضی ۱ مراجعه نمایید.

^۲ به طور کلی برای حل هیچ یک از تستهای جلد اول کتاب نیازی به در نظر گرفتن زمان برای حل سؤال نیست. شما فعلاً در مرحله آموزش هستید و باید حین حل تستهای جلد اول قدرت تفکر و تجزیه و تحلیل و تجربه خود را در حل سؤالات بالا ببرید. پس از اتمام دوره تابستان برای بالا بردن سرعت حل تست و مرور مطالب باید تستهای جلد دوم را با در نظر گرفتن زمان حل نمایید.

۳) یک مرور کلی و سریع روی مطالبی که قرار است در جلسه بعدی کلاس تدریس شود، داشته باشید.

۴) در صورت داشتن وقت، سؤالات قسمت دوم تا پنجم را حل نمایید.

توجه ۱: اغلب مطالب مهم در جزوه درسی که در کلاس آنرا یادداشت نموده‌اید، وجود دارند و لذا:

نیازی به مطالعه درس کتاب در قسمت اول هر فصل نمی‌باشد.

توجه ۲: مراحل ۱ و ۲ و ۳ اجباری هستند و هر جلسه باید انجام شوند و به طور میانگین حدوداً دو برابر زمانی که در کلاس تدریس شده اند، باید برای آنها وقت بگذارید.^۲ اما مرحله ۴ (حل تستهای تکمیلی و خودآزمایی هر فصل) اختیاری است و فقط در صورتی که وقت اضافه داشتید، آنرا انجام دهید.

توضیح در مورد فصل اول ریاضی ۱

فصل اول ریاضی ۱ (تابع) در کلاس تدریس نمی‌شود و برخی مطالب مهم آن ضمن حل چند تست مورد بررسی قرار می‌گیرند. در واقع فصل تابع پیشنهاد سایر فصول است اما نیازی نیست که کلیه روابط و فرمولهای بیان شده در این فصل را حفظ نمایید. جزئیات این فصل به اندازه جزئیات کل کتاب است اما دانستن کلیات این فصل برای حل اکثر سؤالات آن کافی خواهد بود. لیستی از مهمترین مطالب و فرمولهای لازم در این فصل در صفحه ۴۳ و ۴۴ کتاب به عنوان خلاصه نکات مهم گردآوری شده است. مطالعه این موارد و مرور سریع مطالب بیان شده در این فصل کافی هستند. ضمناً نیازی به حل تمامی تستها و مثالهای موجود در این فصل نمی‌باشد. تستها و مثالهای مهمتر برای فصل ۱ و مطالب مهم و حذفی برای سایر فصول در منوی «اطلاعات مهم کنکور» ← روش بهینه مطالعه ریاضی عمومی» در صفحه نخست از سایت www.m-aghahi.ir قرار داده شده‌اند.

بودجه بندی سؤالات ریاضی در کنکور

یکی از مواردی که اکثر دانشجویان در مورد آن سؤال می‌پرسند، تعداد تستهایی است که از هر یک از فصلهای ریاضی عمومی در کنکور مطرح می‌شود. واقعیت آن است که سازمان سنجش قاعده مشخصی را در مورد تعداد تستهای هر فصل رعایت نمی‌کند. ممکن است از فصل خاصی در چندین سال متوالی سؤالی مطرح نشود، ولی این مورد نباید باعث شود که برای کنکور سال جاری آن فصل را حذف نمایید.^۴ کلیه مطالبی که در کلاس تدریس می‌شوند را برای کنکور مطالعه نمایید ولی چنانچه مطلبی در کنکور رشته شما به دفعات مورد سؤال بوده است، به آن توجه بیشتری نموده و در زمان نزدیک به کنکور سؤالات بیشتری از آن مبحث را حل نمایید. برای دستیابی به بودجه بندی سؤالات کنکور در سالهای ۸۵ تا ۹۱ به منوی «بودجه بندی سؤالات کنکور» در صفحه نخست از سایت www.m-aghahi.ir مراجعه نمایید. همچنین برای تجزیه و تحلیل آماری سؤالات کنکور ۸۷ تا ۹۱ در رشته های عمران و صنایع و MBA به منوی «بررسی کنکور ارشد ۸۷ تا ۹۱» در سایت مراجعه نمایید.

^۲ چنانچه فاصله بین دو جلسه کلاس کمتر از ۲ روز باشد، برای جلسه بعدی فقط مراحل ۱ و ۳ را انجام دهید و مرحله ۲ را برای هفته بعدی کلاس انجام دهید.

^۴ خصوصاً در اکثر رشته ها از جمله عمران و مکانیک و سیستم، سبک سؤالات در دو سال اخیر تغییرات محسوسی داشته است.

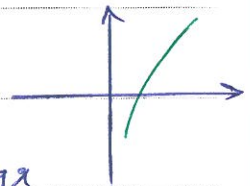
$$f(x) = \sqrt{\log(2x - x^2)}$$

باید دامنه تابع را پیدا کنیم ۱۴/۳۲

$$2x - x^2 > 0$$

$$\log(2x - x^2) > 0$$

$$\frac{\log x}{\text{صورت در پایه}} \rightarrow 2x + x^2 \geq 1$$



$$\rightarrow x^2 - 2x + 1 \rightarrow (x-1)^2 \rightarrow (x-1)^2 > 0 \rightarrow x \neq 1$$

$$y = \log_a x$$

$$\rightarrow D_f = \{1\} = [1, 1]$$

$$f(x) = \sqrt{\log(2x - x^2)}$$

مطلوبست برد تابع مقابل mBA ۱۵

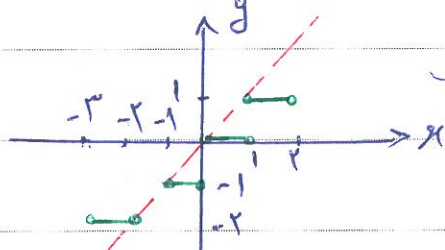
ابتدا دامنه f را می بینیم که $D_f = \{1\}$

$$\rightarrow R_f = \{f(1)\} = \{0\} = [0, 0]$$

$$f(x) = \sqrt{[x] - |x|}$$

دامنه تابع مقابل را پیدا کنیم ۲۲/۲ ج ۴۵۷

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



$[x] \leftarrow$ بزرگترین عدد صحیح کمتر یا مساوی x

$$[x] - |x| \geq 0$$

$$x < 0 \rightarrow [x] - (-x) = [x] + x \geq 0$$

$$x \geq 0 \rightarrow [x] - x \geq 0 \rightarrow [x] \geq x \rightarrow [x] = x$$

$$\rightarrow x \in \mathbb{Z} \text{ و } x = 0, 1, 2, 3, \dots \rightarrow D_f = \mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{N}$$

توابع هیپر بولید

$$e \approx 2,7$$

$$1) \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$2) \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$3) \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\text{آمار} \quad \cosh^2 x = \sinh^2 x + 1 \rightarrow \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$1) \sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$2) \cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$3) \tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$$\sinh x = 3/4 \rightarrow \tanh x = ?$$

$$\text{آمار} \quad \cosh^2 x = \sinh^2 x + 1 = (3/4)^2 + 1 = 25/16 \rightarrow \cosh x = \pm 5/4$$

$$\rightarrow \cosh x = 5/4 \rightarrow \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{3/4}{5/4} = 3/5$$

$$\text{ن} \quad \text{تعداد زوج مرتب‌ها در } (x, y) \text{ که در معادله زیر صدق می‌کند (معادله ۹۰)}$$

$$x^2 + \cosh(xy) (2x + \cosh(xy) + 1) - 1 = 0$$

$$2x \cosh(xy) + \cosh^2(xy) + \cosh(xy)$$

$$\rightarrow (x + \cosh(xy))^2 + (\cosh(xy) - 1) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x + \cosh(xy) = 0 \\ \cosh(xy) - 1 = 0 \end{array} \right. \rightarrow x = -1$$

$$\cosh(-y) = 1 \rightarrow y = 0 \quad (x, y) = (-1, 0) \quad \text{پنج جواب دارد}$$

فرض کنید $\sinh c = \frac{3}{4}$ و $\ln(e^x + \sqrt{e^{2x} + 1}) = c$ متناظر x را

بر حسب $\ln 2$ و $\ln 3$ بیابید (رمز ۹۱)

$$\left. \begin{aligned} \ln(e^x + \sqrt{e^{2x} + 1}) &= \sinh^{-1} e^x = c \\ \sinh c = \frac{3}{4} &\rightarrow c = \sinh^{-1} \frac{3}{4} \end{aligned} \right\} e^x = \frac{3}{4}$$

$$\rightarrow x = \ln \frac{3}{4} = \ln 3 - \ln 4 = \ln 3 - 2 \ln 2$$

فصل دوم: حد و پیوستگی

مثال ۱

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + \cos x}{x^2} = \frac{3}{0} = \text{وجود ندارد}$$

$$x \rightarrow 0$$

$$\frac{2 + \cos x}{x^2} \quad [x^2] = 0 \rightarrow 0 < x^2 < 1 \rightarrow -1 < x < 1$$

$$D_f = R - (-1, 1)$$

حد تابع فوق با توجه به اینکه در دامنه وجود ندارد وجود ندارد

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x + 2}{3x - 1} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$x \rightarrow 0^+$$

مثال ۲

$$\begin{cases} x \rightarrow a^+ \rightarrow f(x) \rightarrow L^+ \\ x \rightarrow a^- \rightarrow f(x) \rightarrow L^- \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \sqrt[4]{\cot x - 1} = \sqrt[4]{0^-} = \text{وجود ندارد}$$

$$x \rightarrow \pi/4$$

مثال ۳

حالات مبهم $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$x \rightarrow 0$$

هم ازن

هویت

تعریف هم ارز

۱- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ می‌گوئیم $f(x)$ و $g(x)$ در $x=a$ هم ارزند می‌نویسیم

$$f(x) \sim g(x) \\ x \rightarrow a$$

قواعد هم ارز در صفر $x \rightarrow 0$

- ۱) همه داراگر کسری توان هم از (۰) چند برابر است
- ۲) توابع زوج و معکوس آنها هم ارزند $\sin x, \tan x, \ln(x+1), e^x - 1, \sinh x, \tanh x$
- ۳) $1 - \cos^\alpha x \sim \frac{\alpha}{2} x^2$ ($\alpha \neq 0$)
- ۴) $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ ($\alpha \neq 0$) هم ارز برعکس

نکته: اگر $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ آنگاه در روابط هم ارز جای x می‌توان $g(x)$ را قرار داد

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + e^x + 3) \sin x^2}{(\tan x) \sinh 2x} \sim \frac{4x^2}{x \cdot 2x} = 2 \quad \text{مثال:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x^2}{\ln \cos x} \sim \frac{2x^2}{\cos x - 1} \sim \frac{2x^2}{-\frac{1}{2}x} = -4$$

$$\ln y \sim y - 1 \\ y \rightarrow 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) (3^x - 1)}{(\arcsin x)^2} \sim \frac{x \cdot x \ln 3}{x^2} = \ln 3 \quad \text{نکته:} \quad \frac{3^4}{2 \cdot 75} = 9.6$$

$$3^x = e^{x \ln 3} \quad 3^x - 1 = e^{x \ln 3} - 1 \sim x \ln 3$$

$$a^x - 1 = e^{x \ln a} - 1 \sim x \ln a \quad \leftarrow a^x = e^{x \ln a} \quad \text{نکته:}$$

فصل هارمک لورن

$$1) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$2) \lg x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots$$

$$3) e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$4) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

$$5) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

برای محاسبه حد قواعد ذیل باید رعایت گردد

۱- در جمع و تفریق مک لورن را تا آنجا می نویسیم که جمله آخر باقی بماند

۲- در جمع و تفریق هم توان را تا توان یکسان می نویسیم

۳- اگر فرج هم از x^n باشد کافی است مک لورن صورت را تا x^n بنویسیم

نکته: اگر پس از استفاده از ماعده شماره ۳ صورت کسر صفر شود آنگاه جواب صفر می باشد

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg x - \sin x}{x \sin x} = \frac{(x + \frac{x^3}{3}) - (x - \frac{x^3}{6})}{\frac{x \cdot x^2}{x^3}} = \frac{\frac{1}{2}x^3}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{نکته:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x + \cos x - 2}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1} = \frac{1}{3}x^2 \quad \frac{1}{3}$$

روش اول - مک لورن صورت را تا x^2 می نویسیم

$$\text{صورت} = \frac{(1+x+\frac{x^2}{2}) - (x + 0x^2) + (1 - \frac{x^2}{2}) - 2}{\frac{1}{3}x^2}$$

طبق نکته با توجه به اینکه صورت صفر می باشد جواب صفر می باشد

روش دوم - جواب درست $x = -\frac{3}{4}$

$$\frac{(e^x - 1) - \sin x + (\cos - 1)}{\frac{1}{3}x^2} = -\frac{3}{4}$$

(قاعدۀ شماره ۲ رعایت نشده است)

نکته: در سوالات جمع رتبه‌ی قطب از مد لورن استفاده می‌کنیم

قواعد هم‌ارز در بی‌نهایت $(x \rightarrow \pm\infty)$

۱) جمله‌دار بیشترین توان \sim جمله‌دار

۲) هم‌ارز رادیکال‌ها $\sqrt[n]{x^n + bx^{n-1} + \dots} \sim |x + b/n|$

۳) $[x] \sim x$

۴) قوانین رشد

تعریف: اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ می‌گوییم رشد $g(x)$ از $f(x)$ بیشتر است

$$g(x) \gg f(x)$$

$$x \rightarrow +\infty \quad b^x \gg a^x \gg x^a \gg (\ln x)^a$$

$$b > a > 1, a > 0$$

مثال ۱:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - \sqrt{9x^2 + 4x + 4} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - 2\sqrt{x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{4}{9}} \right)$$

$$= 2x - 2 \left(x + \frac{1}{3} \right) = 2x - 2x - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$$

مثال ۲:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 e^x}{e^{2x} + x^5 + (\ln x)^{10}} = \frac{x^2 e^x}{e^{2x}} = \frac{x^2}{e^x} = 0$$

زیرا رشد نمایی بیشتر از صورت است

حالات بی‌نهایت $\infty \times \infty$ و $\infty - \infty$

در حالات فوق تابع را با عملیات جبر تبدیل می‌کنیم به یکی از حالات $\frac{\infty}{\infty}$ یا $\frac{0}{0}$ و بار دیگر از قواعد لیمیت استفاده می‌کنیم تا به جواب برسیم.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x \xrightarrow{\infty \times 0} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \quad \text{مثال:}$$

$$\xrightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln 1/t}{t} = 0 \quad \text{زیرا رشد نمایی از سرعت بیشتر است}$$

$$\ln(0^+) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2} \cdot \sin \frac{1}{x} = \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \quad \text{(نشان ۸۹)} \quad \frac{1}{2} \text{ ج. ۶۵۵}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^2} \left[\frac{1}{e^{-1/x^2}} \right] \quad \text{(نشان ۸۴)} \quad \frac{145}{12} \text{ ج. ۱۲۲}$$

$$\begin{aligned} x &\rightarrow 0 & x = e^{-1/x^2} &\rightarrow e^{-\infty} = 0 \\ x = e^{-1/x^2} & & x &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right] = x \times \frac{1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{x}{x^2 + 1} \right] = x \times \left[\frac{1}{x} \right] = \frac{x}{x^2 + 1} \sim \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} = 0^+ \quad \frac{28}{2} \text{ ج. ۳۱۴}$$

مطلق $\infty \times \infty = \infty$ مطلق $\infty - \infty$ نیاز به قواعد لیمیت دارد و جواب مطلق است.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{x - \sin x} - \frac{4}{x^2} \right)$$

۳۲
۷۷

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3 - 4x + 4 \sin x}{(x - \sin x)x^2} \right) \sim \frac{x^3 - 4x + 4(x - x^3/4 + x^5/120)}{(x - (x - x^3/4))x^2}$$

$$= \frac{x^3 - 4x + 4(x - x^3/4 + x^5/120)}{x^3/4 \cdot x^2} = \frac{1/120 x^5}{1/4 x^5} = 3/1$$

نکته: در صورت مواجه با جمع و تفریق کسرها خارج مشترک می‌گیریم

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 x}{x^2} + \frac{a}{x^2} + b \right) = 0 \quad \text{اگر} \quad b > a \quad \text{مطلوبست} \quad ۳۴/۷۷$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 x + ax + bx^2}{x^2} \right) \sim \frac{x^2 - \frac{(2x)^2}{4} + ax + bx^2}{x^2}$$

$$= \frac{(a+2)x + (b-1/2)x^2}{x^2} \rightarrow (a+2)x + (b-1/2)x^2 = 0$$

$$\begin{cases} a+2=0 & a=-2 \\ b-1/2=0 & b=1/2 \end{cases}$$

حالات مهم نامتناهی (۰ و ۱ و ∞)

هر صورتی که استفاده از رابطه زیر و روبرو فرم این فرم دارند

$$u^v = e^{v \ln u}$$

نکته: چنانچه $f(x) \rightarrow 1$ و $g(x) \rightarrow \infty$ آنگاه

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sin^2 x \ln x} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin^2 x \ln x = 2x \ln x = 0$$

(مواد ۹۰)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\lg x)^{1/\ln x} = 0^{1/\infty} = 0^0 = e$$

$$e^{1/\ln x \ln(\lg x)} = e^{1/\ln x \ln x} = e$$

۱۲۹
۲ ج. ۷۶۲

(ضریب ۱۸)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x)^{1/x} = \infty^0 = e$$

۱۳
۲ ج. ۵۵

$$e^{1/x \ln(e^x - x)} = e^{\ln e^x} = e^{x \ln e} = e$$

روش اول

$$(e^x - x)^{1/x} = (e^x)^{1/x} = e$$

روش دوم

قرائن در

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + x + 2} \right)^x = 1^\infty = e^{x \left(\frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + x + 2} - 1 \right)} = e^{x \left(\frac{x - 3}{x^2 + x + 2} \right)}$$

$$= e^{\frac{x^2 - 3x}{x^2 + x + 2}} = e^{x^2/x^2} = e$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^{2x})^{1/x} = 1^\infty$$

(یکسند ۱۴)

۲۰
۲ ج ۱۱۰

$$x \rightarrow 0 \quad e^{1/x (x + e^{2x} - 1)} = e^{\frac{x + 1 + 2x - 1}{x}} = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x - \sin x + \cos 2x)^{x^{-2}} = 1^\infty$$

۱۸
۲ ج ۱۴۱ $x \rightarrow 0$

$$e^{x^{-2} (x - \sin x + \cos 2x - 1)} = e^{-2}$$

$$\frac{x - \sin x + \cos 2x - 1}{x^2} = \frac{x - x + (1 - (2x)^2/2) - 1}{x^2} = \frac{-2x^2}{x^2} = -2$$

محاسب

۱- محاسب قائم: هرگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ فرگونی $x=a$ محاسب قائم $f(x)$ است

۲- محاسب افقی: هرگاه $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$ فرگونی $y=b$ محاسب افقی $f(x)$ است

۳- محاسب مایل: $y = mx + h$ را محاسب مایل $f(x)$ فرنیسم هرگاه:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty, \quad h = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx)$$

نکته: اگر تابع حاصل تقسیم دو چند باشد در صورت یک واحد از

مخرج بیشتر باشد خارج قسمت تقسیم همان محاسب مایل خواهد بود

نکته: اگر $f(x) \sim mx + h$ آنگاه $y = mx + h$ محاسب است

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$

۱۵
۱۴ محاسب مایل

$$\left. \begin{array}{l} \text{محاسب قائم} \\ x=1 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{2}{2}$$

$$x=-1 \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \infty$$

$$\text{محاسب افقی} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \infty$$

محاسب افقی ندارد

مجاانب میل

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{x^3 - 1}{x(x^2 - 1)} = 1$$

روشن اول

$$h = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - m(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1 - x^3 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1 + x}{x^2 - 1} = 0$$

پس $y = x$ مجاانب میل

$$\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \mid \frac{x^2 - 1}{x}$$

مجاانب $y = x$

روشن دوم

باقی به نیت کافی است صورت را بر مخرج تقسیم نمائیم

$$\frac{-x^3 + x}{x - 1}$$

مثال: اسکالوسیت مجانبی/تابع روبرو مجاانب قائم ندارد $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 4x + 1}$

$$f(x) \sim x + |x + \frac{-4}{2}| = \begin{cases} x + x - 2 = 2x - 2 & x \rightarrow +\infty \\ x - (x - 2) = 2 & x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

مجاانب میل $y = 2x - 2$ مجاانب افقی $y = 2$

$$\sqrt{x^2 + bx + c} \leq |x + b/a|$$

موجک

تعریف: $f(x)$ در $x = a$ پیوسته است هرگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

قواعد پیوستگی

۱- توابع ذیل در هر نقطه از دامنه خود پیوسته اند a چند عدد ارها

ط. مثلثاتی e ، نمایی d ، لگاریتمی e ، هسپروئیک

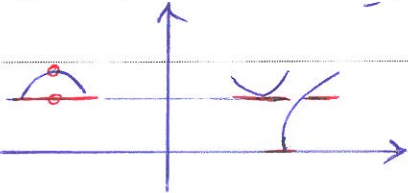
۲- معکوس توابع بالا نیز در دامنه خود (دامنه معکوس) پیوسته اند

۳- اعمال جدید و ترکیب بین توابع پیوسته نیز در دامنه پیوسته هستند

گفته فرض کنید $g(x)$ پیوسته باشد و $f(x) = [g(x)]$ آنگاه

(الف) $g(a) \notin \mathbb{Z}$ آنگاه f در a پیوسته می باشد

(ب) $g(a) \in \mathbb{Z}$ آنگاه f در a پیوسته است $\Leftrightarrow g$ در a منبسط نباشد



مثال: تعیین کنید تابع $f(x) = [x^2]$ در چند نقطه از بازه $(-2, 2)$ پیوسته است

$\sqrt{3}$ و $\sqrt{2}$ داده کاندیدان پیوستگی $0 < x^2 < 4$

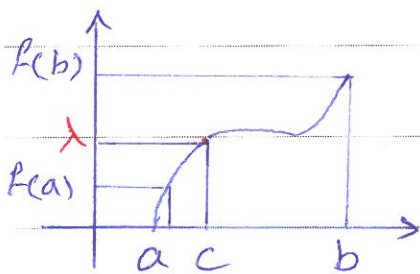
چون $g(x) = x^2$ در a منبسط می شود پس f در این

نقطه پیوسته است و چون در سایر نقاط g منبسط نیست پس f در $\sqrt{3}$ و $\sqrt{2}$

ناپیوسته می باشد و لذا دقیقاً در سه نقطه پیوسته است

گفته: در توابع برکتن کاندیدان پیوستگی نقاطی هستند که تابع داخل برکت صریح باشد

قضیه مقدار میانی



فرض کنید $f(x)$ در $[a, b]$ پیوسته باشد

$f(a) < \lambda < f(b)$ آنگاه $a < c < b$

موجود است که $f(c) = \lambda$

کاربرد: اگر $f(a) < f(b)$ و تابع f در $[a, b]$ پیوسته

باشد آنگاه بین a و b حداقل یک ریشه وجود دارد

مثال: آیا معادله $2^x = 5x$ در $[a, b]$ دارای جواب است

$$f(x) = 2^x - 5x \quad \text{پس بدین}$$

$$f(0) = 1 > 0 \quad \text{و} \quad f(1) = 2 - 5 = -3 < 0$$

پس f بین a و b حداقل یک ریشه دارد و پس معادله داده شده روبرای $[a, b]$ جواب دارد

نکته: اگر f پیوسته و یکنواخت باشد

الف: اگر $f(a) \cdot f(b) < 0$ آنگاه f در $[a, b]$ یک ریشه دارد

ب: اگر $f(a) \cdot f(b) > 0$ آنگاه f در $[a, b]$ فاقد ریشه است

فصل سوم مشتق

تعریف مشتق

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

و چنانچه $f'(a)$ عدد حقیقی شود و f در a مشتق پذیر استنکته: رابطه $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ وقتی برقرار است که(۱) f در a پیوسته باشد(۲) $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)$ وجود ندارد نباشد (عدد بی‌نهایت شود)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin 1/x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

مثال: آر $f(0)$ مطلوب است

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin 1/x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin 1/x = 0$$

روش اول: تعریف مشتق

روش دوم: (فرض بر مشتق) تابع f در صفر پیوسته است

$$f'(x) = 2x \sin 1/x - 1/x = 0 \quad \text{وجود ندارد}$$

$$x = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad \text{تابع کراندار}$$

نکته: در تقاطع تابع مورد دارد مشتق این است که از تعریف مشتق استفاده

حل می‌کنیم و در سایر موارد از فرمول مشتق استفاده می‌کنیم

مثال ۱: تعیین کنید $x \in \mathbb{Q}$ $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ در چه نقاط مشتق پذیر است.

پس تابع در $x=0$ نامیوست است. $x^2 \rightarrow 0 \rightarrow x$ پیوستگی

پس در $x \neq 0$ مشتق پذیر نیست اما باید مشتق پذیر در $x=0$ بررسی شود

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - 0}{x - 0} = \frac{x^2}{x} = x = 0$$

پس در $x=0$ مشتق پذیر است

نکته: توابعی مانند توابع مثال فوق فقط در نقاطی حد دارند و پیوسته اند که دو ضابطه مانور باشند

اگر f برابر تابع f باشد R راسته باشیم

۳۹
۲۵۵۳

$$f(x_1 + x_2) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{1 - f(x_1)f(x_2)} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

مکمل نیست $f'(x)$ (مانند ۸۸ و ۹۰)

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x) + f(h)}{1 - f(x)f(h)} - f(x)}{h}$$

$$= \frac{f(h) + f(x)f(h)}{h(1 - f(x)f(h))} = \frac{f(h)(1 + f(x))}{h(1 - f(x)f(h))} = (1 + f(x)) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} \cdot \frac{1}{1 - f(x)f(h)}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 1 \quad f(h) \sim h \rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(h) = 0$$

$$\rightarrow f'(x) = 1 + f(x)^2$$

مشتق تطبیقی

در موارد زیر برای محاسبه $F'(x)$ ابتدا $\ln F(x)$ را تشکیل داده و سپس مشتق می‌گیریم

(۱) $F(x) = u(x)^{v(x)}$

(۲) اگر تابع $F(x)$ صورت ضرب و تقسیم تعداد زیاد از توابع باشد

مثال (۹) مشتق $y = x^{\sqrt{x}}$ در $x=4$ را بیابید. ۲۵
۲ ج. ۷۵.

$$\ln y = \sqrt{x} \ln x \xrightarrow{\text{مشتق}} y'/y = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \sqrt{x}/x \rightarrow y'/y = \frac{1}{4} \ln 4 + \frac{1}{2}$$

$$y = 4^{\sqrt{4}} = 16 \rightarrow y' = 4 \ln 4 + 8 = 8(1 + \ln 2)$$

فرض کنید $F(x) = \frac{(x+2)^3(x^2+1)^4}{(x^3+1)^2}$ مطلوب است $F'(1)$ ۹
۲ ج. ۱۴.

$$\ln F(x) = 3 \ln(x+2) + 4 \ln(x^2+1) - 2 \ln(x^3+1)$$

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{3}{x+2} + \frac{8x}{x^2+1} - \frac{6x^2}{x^3+1} \quad \frac{F'(1)}{F(1)} = \frac{3}{3} + \frac{8}{2} - \frac{6}{2} = 2$$

$$F(1) = \frac{3^3 \times 2^4}{2^2} = 108 \quad F'(1) = 2 \times 108 = 216$$

مشتق از تابع معکوس

$$F(a) = b \iff (a, b) \in F \iff (b, a) \in F^{-1}$$

$$(F^{-1})'(b) = \frac{1}{F'(a)} \quad F'(a) \neq 0$$

مشتق ضمنی

$$F(x, y) = 0 \rightarrow y' = dy/dx = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = f(t) \\ y = g(t) \end{array} \right.$$

$$\rightarrow dy/dx = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

مشتق پارامتر

مطلوبت: $(f^{-1})'(-1)$

آر ۱۴/۱۳۵
 $f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \geq 0 \\ 1-x^3 & x < 0 \end{cases}$

$f(x) = -1$
 $\begin{cases} x \geq 0 : -x^2 = -1 \rightarrow x=1 \\ x < 0 : 1-x^3 = -1 \rightarrow x = \sqrt[3]{2} \end{cases} \rightarrow a=1$

$f(x) = -x^2 \rightarrow f'(x) = -2x \rightarrow f'(1) = -2$

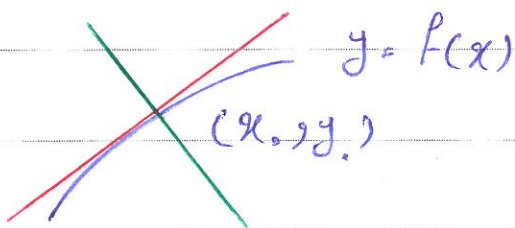
$(f^{-1})'(-1) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{-2 \times 1} = -\frac{1}{2}$

آر ۱۷/۱۳۵
 مطلوبت $\frac{dy}{dx}$ $\ln(x^2+y^2) + 2 \operatorname{tg}^{-1} x/y = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{\frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{2y}{1+(x/y)^2}}{\frac{2y}{x^2+y^2} + \frac{-2x/y^2}{1+(x/y)^2}} = -\frac{\frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{2y}{x^2+y^2}}{\frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{2x}{y^2+x^2}}$$

$$= -\frac{2x+2y}{2y-2x} = -\frac{x+y}{y-x}$$

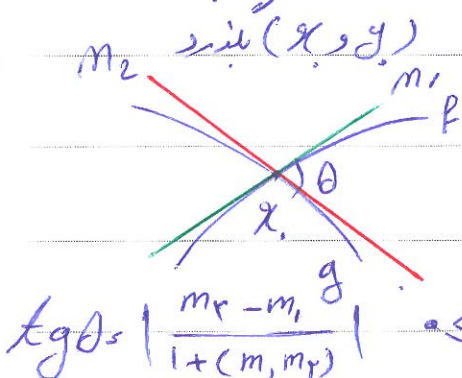
کاربرد هندسی متن



$f'(x_0)$ شیب مماس
 $\frac{1}{f'(x_0)}$ شیب قائم

معادله خط مماس در نقطه $y - y_0 = m(x - x_0)$

زاویه بین دو نمودار



زاویه بین دو نمودار (نقطه برخورد) عبارت است از کوچکترین زاویه بین خط مماس با آن دو نقطه برخورد

$\operatorname{tg} \theta = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + (m_1 m_2)} \right|$ $0 \leq \theta \leq \pi/2$

زاویه بین $y = e^x$ و $y = 1 - x^2$ در $x = 0$ را بیابید. ۱۲
۲۷.۱۴

$$y = e^x \rightarrow y'(0) = e^x|_{x=0} = 1 = m_1$$

$$y = 1 - x^2 \rightarrow y'(0) = (-2x)|_{x=0} = 0 = m_2$$

$$\tan \theta = \left| \frac{m_2 + m_1}{1 + m_1 m_2} \right| = 1 \rightarrow \theta = \pi/4$$

سنتی مراتب بالا

$$f(x) \rightarrow f'(x) \rightarrow f''(x) \rightarrow \dots f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}$$

$f'(0)$ و $f''(0)$ مربوط $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ۲۹
۱۴۵

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} \xrightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{-t^2}}{1/t} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{t}{e^{t^2}} = 0$$

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2/x^3 e^{-1/x^2}}{x} \xrightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{2t^3 e^{-t^2}}{1/t} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} 2t^4 e^{-t^2} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{2t^4}{e^{t^2}} = 0 \quad f''(0) = 0$$

$t \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{dy}{dx^2}$ مربوط $\begin{cases} x = t^2 - t \rightarrow \\ y = t^2 + t \end{cases}$ ۳۱
۱۳۶

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2t+1}{2t-1}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{\frac{-2}{(2t-1)^2}}{2t-1} = \frac{-2}{(2t-1)^3} = \frac{-2}{(2t-1)^3}$$

۴/۱۹۹ اگر $x^2 - y^2 = 1$ معلوم است $\frac{dy}{dx}$ را بیابید

$$F = x^2 - y^2 - 1 = 0 \quad y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x}{-2y} \rightarrow y' = \frac{x}{y}$$

بفرض تابع x مشتق میگیریم

$$\rightarrow y y' = x \quad y \cdot \frac{x}{y} = x \rightarrow y' = \frac{x}{y}$$

$$y'' = \frac{1 - (x/y)^2}{y} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = \frac{1}{y^3} = -y^{-3}$$

نکته: اگر $y = u$ و $x = v$

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^k v^{(n-k)} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad u^{(0)} = u, \quad u^{(1)} = u', \quad u^{(2)} = u''$$

مثال: اگر $f(x) = (2x+1)e^{4x}$ مشتق دهم این تابع را بیابید

$$f^{(1)}(x) = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} u^{(k)} v^{(1-k)}$$

$$= \binom{1}{0} u^{(0)} v^{(1)} + \binom{1}{1} u^{(1)} v^{(0)}$$

$$= 1 \cdot (2x+1) e^{4x} + 1 \cdot 2 \cdot 4 e^{4x}$$

نکته: برای تابع $f(x)$ داریم $f^{(n)}(x) = (f(x))^{(n)} \times n!$

مثال: مشتق تابع $f(x) = x^2 \ln(1+x)$ را در $x=0$ بیابید

باید که در f را تا x^5 منویسیم

$$f(x) = x^2 (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots)$$

$$= x^3 - \frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{3} x^5$$

$$f^{(5)}(0) = \frac{1}{3} \times 5! = \frac{1}{3} \times 120 = 40$$

نکته: اگر $f(a)$ برابر مشخص کردن مرتبه تکرار a آنقدر f در a مشتق می‌گیریم تا مشتق مخالف صفر شود آنگاه شماره یا مرتبه اولین مشتق نامصفر f در a ← مرتبه تکرار است

مثال: عدد $x = \pi$ ریشه یا چه مرتبه تکرار برابر $f(x) = 1 + \cos x$ است

$$f(\pi) = 0 \quad f'(x) = -\sin x \quad f'(\pi) = 0$$

$$f''(x) = -\cos x \quad f''(\pi) \neq 0$$

عدد $x = \pi$ ریشه یا تکرار دو است که اصطلاحاً ریشه مضاعف گویند

کلید مشتق

قضیه: اگر تابع $f(x)$ روی بازه I مشتق پذیر باشد.

الف) اگر $f'(x) > 0$ آنگاه $f(x)$ صعودی است

ب) اگر $f'(x) < 0$ آنگاه $f(x)$ نزولی است

ج) اگر $f(x)$ آنگاه $f'(x)$ مایعات است

التریم نوی (نقطه بحرانی)

۱- نقاطی که مشتق در آن صفر شود

۲- نقاطی که f مشتق پذیر نیست

آزمون مشتق اول

x	0
f'	$+$ \downarrow $-$
	max

x	0
f'	$-$ \downarrow $+$
	min

اگر $f(x)$ در a بحرانی و پیوسته باشد

$$f(x) = x^2 e^{-x^2}$$

۱۶/۱۵۰ برابر تابع رو بر باید تعداد عمران و نوع آن را

$$f'(x) = 2x e^{-x^2} - 2x^3 e^{-x^2} = 2x e^{-x^2} (1-x)(1+x) = 0$$

$$\rightarrow x = 0 \text{ و } -1 \text{ و } 1$$

x	-1	0	1
f'	+	0	-
	max	min	max

تذکره ص ۲

۲۹/۱۵۱ (عمران ۱۶) معادله $x^2 + \lg x = 2$ در $[0, \pi/4]$ چند جواب دارد؟

$$f(x) = x^2 + \lg x - 2 \quad f'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0 \quad \text{صورت اول}$$

$$f(0) = -2 < 0 \quad \text{و} \quad f(\pi/4) = 2 + (\pi/4)^2 - 2 > 0 \quad \text{پس } f \text{ دقیقاً یک ریشه دارد.}$$

۳۰/۱۵۱ معادله $x^2 - x \sin x - \cos x = 0$ در $(-\infty, +\infty)$ چند جواب دارد؟

$$f(x) = x^2 - x \sin x - \cos x \quad f'(x) = 2x - \sin x - x \cos x = x(2 - \cos x) = 0 \rightarrow x = 0 \quad \text{حالت اول}$$

$$f(0) = -1 < 0, \quad f(+\infty) = +\infty > 0 \quad \text{پس } f \text{ دقیقاً یک ریشه دارد}$$

x	0
f	-

۳۱/۱۵۱ معادله $x^2 - x \sin x - \cos x = 0$ در $(-\infty, +\infty)$ چند جواب دارد؟
 $f(-\infty) = +\infty > 0$ و $f(0) = -1 < 0$ پس f دقیقاً یک ریشه دارد
 حالت دوم $x < 0 \rightarrow$ نیز یک ریشه دارد
 نتیجه f دقیقاً دو ریشه دارد

نکته: جهت محاسبه تعداد ریشه هر تابع باید تعداد ریشه هر f را در بازه های که علامت f ثابت است (با یقین علامت f در دو سر بازه) محاسبه نماییم.

۳۵/۲۳۸۴۳ (مکانیک ۹۱) کدام گزینه درست است؟

(۱) $x > 0, \ln(1+x) > \frac{2x}{x+2}$ (۲) $x > 1, \ln(1+x) > \frac{2x}{x+2}$

(۳) $x > 2, \ln(1+x) < \frac{2x}{x+2}$ (۴) $x > -1, \ln(1+x) < \frac{2x}{x+2}$

روش اول: توجه کنید $\ln(1+x) > \frac{2x}{x+2}$ یا $\ln(1+x) < \frac{2x}{x+2}$ را از مشتق برابر می شود یعنی $f(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{x+2}$

فاندرست است که $f(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{x+2} \rightarrow 1 \rightarrow$ و $\ln(1+x) \rightarrow +\infty$ و $\frac{2x}{x+2} \rightarrow 1$

روش دوم: هدف بررسی این مطلب است که $\ln(1+x)$ بزرگتر است یا $\frac{2x}{x+2}$

تعریف می کنیم $f(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{x+2}$ و آن را تعیین علامت می کنیم

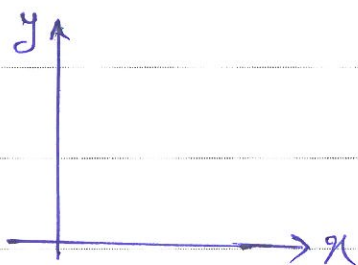
$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{(x+2)^2} = \frac{x^2}{(1+x)(x+2)^2} \quad x > -1$$

x	-1	0	$+\infty$
f'	+	0	+

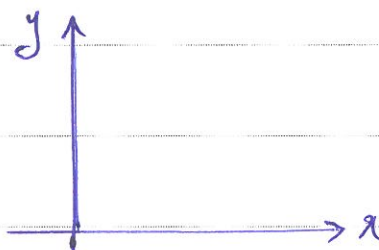
$$x > 0 \rightarrow f(x) > 0 \rightarrow \ln(1+x) > \frac{2x}{x+2}$$

$$-1 < x < 0 \rightarrow f(x) < 0 \rightarrow \ln(1+x) < \frac{2x}{x+2}$$

تعریف نقطه عطف



تقریب f رو به پایین است
 $f''(x) < 0$



تقریب f رو به بالا است
 $f''(x) > 0$

تعریف: نقطه عطف نقطه ای است که

(۱) تابع در آن نقطه مسطح دارد

(۲) تقریب حول آن تغییر کند

کامندیدار عطف

(۱) نقاطی که f'' صفر شود

(۲) نقاطی که f'' موجود نباشد

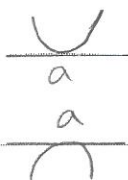
۲۳
۲۳۸۴۱
(۹۱ MBA) $y = \frac{1}{x} e^{-x^2}$ معلومست حول نقطه عطف

$$y' = \frac{1}{x^2} e^{-x^2} - 2e^{-x^2} = e^{-x^2} \left(\frac{1}{x^2} - 2 \right) \rightarrow y' = e^{-x^2} \left(\frac{1}{x^2} - 2 \right) + \frac{1}{x^3} e^{-x^2} = e^{-x^2} \left(\frac{1 - 2x^2 + 1}{x^3} \right) = 0 \rightarrow x = 0$$

$x=0$ کاندیدای عطف است و تغییر حول آن عوض می شود اما چون در دایره نیست پس مماس ندارد و عطف ندارد

آزمون مشتق دوم

فرض کنید $f(a)$ نقطه:



الف) اگر $f(a)$ نقطه a بیشم نیست

ب) اگر $f(a)$ نقطه a مانع نیست

تعمیم آزمون مشتق دوم

فرض کنید $f(a) \neq 0$ و $f^{(n)}(a) = 0$ و $f^{(n-1)}(a) \neq 0$ یعنی n اولین مرتبه مشتق غیر صفر f در a باشد نقطه:

$$f(x) \sim f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

$x \rightarrow a$

تعمیم: نمودار f و هم از آن حول $x=a$ بیان هستند:

الف) اگر n زوج و $f^{(n)}(a)$ نقطه a بیشم نیست

ب) اگر n زوج و $f^{(n)}(a)$ نقطه a مانع نیست

ج) اگر n فرد ($n > 1$) نقطه a عطف می باشد

مثال ۱: اگر $f(x) = x - \sin x$ در نقطه $x=0$ الف هم از f راییبید.

ب: نوع نقطه صفر را تعیین کنید.

$$f'(x) = \sin x, f'(0) = 0 \quad f''(x) = 1 - \cos x, f''(0) = 0 \quad \text{الف}$$

$$f'''(x) = \cos x, f'''(0) = 1 \neq 0 \rightarrow n=3 \quad f(x) \sim f(0) + \frac{f'''(0)}{3!} (x-0)^3$$

$$x \rightarrow 0$$

$$\rightarrow x - \sin x \sim \frac{1}{6} x^3$$

$$x \rightarrow 0$$

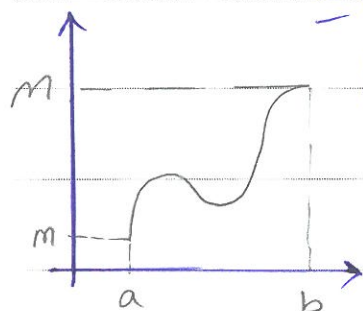
ب: چون $n=3$ فرد است پس $x=0$ نقطه است

الترمیم مطلق

تعیین: اگر تابع $f(x)$ در $[a, b]$ پیوسته باشد آنگاه f الزاماً الترمیم مطلق دارد

روش محاسبه: ۱- نقاط بحرانی داخل بازه ۲- نقاط ابتدا و انتها را بنویسید

با مقایسه مقادیر $f(x)$ در نقاط بالا الترمیم مطلق بدست می آید



نکته: اگر $f(x)$ پیوسته باشد: $R_f = [m, M]$

m : مقدار کمینه مطلق M : مقدار بیشینه مطلق

بر $f(x) = x + \sqrt{4-x^2}$ راییبید.

$$4-x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 \leq 4 \rightarrow -2 \leq x \leq 2 \quad D_f = [-2, 2]$$

$$f'(x) = 1 + \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2} - x}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \quad \sqrt{4-x^2} = x^2 \rightarrow 4-x^2 = x^4$$

$$x^4 = 4-x^2 \quad x = \pm\sqrt{2} \rightarrow x = \sqrt{2} \quad R_f = [-2, 2\sqrt{2}]$$

$$f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \quad f(2) = 2 \quad f(-2) = -2$$

۷۱
۱۷۴

مطلوبست ماکزیم و مینیم مطلق

یوسته $f(x) = (1/x)^x = y$

دامنه: $1/x > 0 \rightarrow x > 0 \rightarrow D_f = (0, +\infty)$

$\ln y = x \ln 1/x = -x \ln x \xrightarrow{\text{شتق}} y'/y = -\ln x - 1 \rightarrow y' = -(1/x)^x (1 + \ln x) = 0$

$1 + \ln x = 0 \rightarrow \ln x = -1 \rightarrow x = e^{-1}$

$f(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1/x)^x = 0$

$f(0+) = \lim_{x \rightarrow 0+} (1/x)^x = \lim_{x \rightarrow 0+} e^{x \ln 1/x} = \lim_{x \rightarrow 0+} e^{-x \ln x} = e^0 = 1$

$f(e^{-1}) = e^{1/e} \quad f(0+) = 1 \quad f(+\infty) = 0$

توجه کنید که صند کمترین مقدار f است اما از حد بدست آمده است پس مینیم مطلق

وجود ندارد و پس $\max(f) = e^{1/e}$

$R_f = (0, e^{1/e}]$

نکته: اگر $x, y > 0$ به طوریکه $x+y$ ثابت باشد، آنگاه $x^x y^y$ وقتی ماکزیم است

که $x = y = \frac{x+y}{2}$ (نکته ۳۷ فصل ششم)

نکته: اگر $x, y > 0$ به طوریکه $x^x y^y$ عدد ثابت باشد، آنگاه $x+y$ وقتی مینیم

است که $x = y = \sqrt[3]{x^3 y^3}$

۱۸
۲۱۴

درزه به شعاع $\sqrt{4}$ استوانه ای با حجم ماکزیم محاط من نیم شعاع عمده

استوانه را باید (ضلع بیستم ۱۳ و ۹)

$V = \pi r^2 h \quad r^2 + (h/2)^2 = 4$

$\rightarrow h = 2\sqrt{4-r^2} \rightarrow V = 2\pi r^2 \sqrt{4-r^2}$

$V = 2\pi (r^2) (4-r^2)^{1/2} \quad \frac{r^2}{1} = \frac{4-r^2}{1/2} \rightarrow r^2 = 2 \rightarrow h = 2\sqrt{2}$

۴۴
۲ ج ۱۶
مجم استوانه محاط در مخروط قائم حداکثر چند برابر حجم مخروط است

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{4}{9}$ ۳) $\frac{5}{9}$ ۴) $\frac{14}{27}$
هدف یافتن ماکزیمم حجم استوانه محاط در مخروط است

$$V = \pi r^2 h \quad \frac{r}{1} = \frac{1-h}{1} \rightarrow r = 1-h$$

$$V = \pi (1-h)^2 h \xrightarrow{\max} \frac{1-h}{2} = \frac{h}{1} \rightarrow h = \frac{1}{3}$$

$$V_{\max} = \pi (1 - \frac{1}{3})^2 \frac{1}{3} = \frac{4\pi}{27}$$

$$\text{نسبت (حداکثر)} = \frac{V_{\max}}{V_{\text{مخروط}}} = \frac{\frac{4\pi}{27}}{\frac{1}{3}\pi(1)^2(1)} = \frac{4}{9}$$

نسبت هار وابسته

۴۰
۲ ج ۱۴۶
در یک ظرف مخروطی که ارتفاع قاعده آن ۳ متر و ارتفاع آن ۴ متر است

آب با سرعت ۵ متر مکعب بر ثانیه می ریزیم. زمانی که سطح آب در ارتفاع ۲ متر قرار می گیرد، سرعت بالا آمدن آب در ظرف چقدر است $\frac{dh}{dt}$

$$V = \frac{3\pi}{14} r^2 h \rightarrow V = \frac{3\pi}{14} h^3$$

$$\frac{r}{3} = \frac{h}{4} \rightarrow r = \frac{3}{4} h$$

$$\rightarrow V = \frac{3\pi}{14} h^3 \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \frac{dV}{dt} = \frac{9\pi}{14} h^2 \frac{dh}{dt}$$

$$\xrightarrow{\text{مقدار داده شده}} 5 = \frac{9\pi}{14} (2)^2 \frac{dh}{dt} \rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{20}{9\pi}$$

فرایند هار مخفی

فرض کنید $x = x(t)$ بالذات زمان خود تغییر کند که باعث تغییر آن در

هر لحظه، متناسب با مقدار x در آن لحظه باشد

$$\frac{dx}{dt} = kx \quad (k \neq 0) \rightarrow x(t) = x_0 e^{kt}$$

مقدار x در $t=0$

$$\frac{x(x_2)}{x(x_1)} = e^{k \Delta x} \text{ و } \Delta x = x_2 - x_1$$

نکته:

پس در هر افزایش خاص ثابت مقدار x در دوران مختلف فقط Δx وابسته است. اگر Δx ثابت باشد نسبت هم ثابت می ماند

$\frac{۸۴}{۱۸۱}$ نسبت درختستان یک جمعیت ۹ در هزار و نسبت متولدین ۲۱ در هزار آن جمعیت است و این نسبت ها همیشه بر مقدار x مانند پس از گذشت

چند سال جمعیت ۲ برابر می شود؟ $\ln 2 = 0.69$ سال

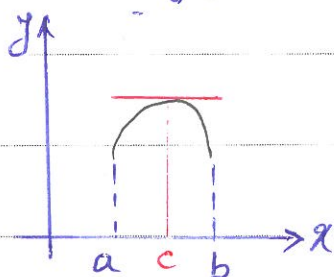
$$x = x(t) \text{ نرخ افزایش} = \frac{12}{1000}$$

$$\frac{x(x_2)}{x(x_1)} = 2 = e^{\frac{12}{1000} \Delta x} \rightarrow \frac{12}{1000} \Delta x = \ln 2$$

$$\Delta x = \frac{1000 \cdot \ln 2}{12} = \frac{490}{12} = 40.8$$

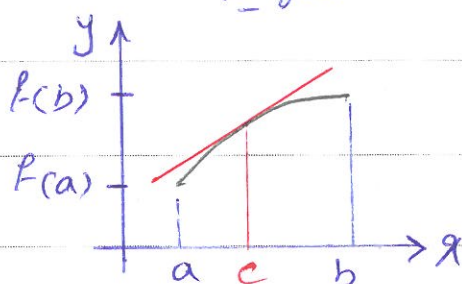
تفسیر:

فرض کنید $f(x)$ روی $[a, b]$ پیوسته و در (a, b) مشتق پذیر و $f(a) = f(b)$ آنگاه $a < c < b$ موجود است که $f'(c) = 0$



قضیه مقدار میانگین

فرض کنید f روی $[a, b]$ پیوسته و در (a, b) مشتق پذیر باشد آنگاه $a < c < b$ موجود است که



$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

کاربرد: اگر $a < x < b$ داشته باشیم $m < f'(x) < M$ آنگاه

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$

مثال: اگر $f(x)$ دو بار مشتق پذیر و دارای ۲ ریشه متمایز باشد تعیین کنید مقدار

$f''(x)$ چند جواب دارد

$\begin{array}{c} c \\ \downarrow \\ [x_1, x_2] \end{array}$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3$

$\xrightarrow{\text{دول}} f'(c_1) = 0$

$f(x_1) = 0$ و $f(x_2) = 0 \xrightarrow{\text{دول}} f'(c_1) = 0$

$f(x_2) = 0$ و $f(x_3) = 0 \xrightarrow{\text{دول}} f'(c_2) = 0$

حال فرض $f'(x)$ را برابر $f'(x)$ در بازه $[c_1, c_2]$ می نویسیم بنا بر این فرض $c_1 < c < c_2$ موجود است که $f'(c) = 0$ پس مقدار $f''(x)$ حداقل یک جواب دارد

نتیجه: اگر تابع $f(x)$ دارای n ریشه متمایز باشد

آنگاه $f''(x)$ حداقل دارای $n-k$ ریشه است $(k < n)$

۳۰. نقطه استفاده از قضیه مقدار میانی تعیین کنید $\lg 3 - \lg 2$ و $\lg 7 - \lg 3$ در چه بازه

۲ ج ۹۵۷

قرار دارد (میان) باید برابر تابع $f(x) = \lg^{-1} x$

در بازه $[3, 7]$ فرض مقدار میانی را می نویسیم. پس $3 < c < 7$ موجود است که:

$$f'(c) = \frac{f(7) - f(3)}{7 - 3} \rightarrow \lg^{-1} 7 - \lg^{-1} 3 = \frac{4}{1+c^2}$$

برابر $3 < c < 7$ باید استریم مطلق داریم $c=3 \rightarrow \frac{4}{1+c^2} = \frac{4}{1+9} = 0.4$

$c=7 \rightarrow \frac{4}{1+c^2} = \frac{4}{1+49} = 0.08$

$$0.08 < \lg^{-1} 7 - \lg^{-1} 3 < 0.4$$

قاعده هسپیتال: $\frac{\infty}{\infty}$ یا $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

بزرگ آنگاه بسط حد برابر عدد ∞ باشد

۲۹ (کتاب ۱۸۹)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x(1 + \ln x) - 1}{-1 + 1/x} \stackrel{\text{HOP}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x(1 + \ln x)^2 + x^{x-1}}{-1/x^2}$$

$$y = x^x \rightarrow \ln y = x \ln x \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = -\ln x + 1 \rightarrow y' = x^x(1 + \ln x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x - x) \cdot \frac{x^x}{x} = \frac{0}{0} \sim \frac{e^{\ln x} \cdot \frac{x^x}{x}}{e^{\ln x} \cdot \frac{x^x}{x}} = \frac{1 - x}{\ln x} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\frac{1}{x}(1 + \ln x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \cdot \frac{x^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{\ln x} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\frac{1}{x}(1 + \ln x)} = \frac{1}{2}$$

دifferential و تقریب خطی

تعریف: برای تابع $y = f(x)$ differential عبارت است از:

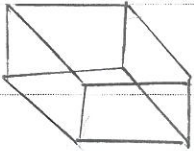
$$dy = df = f'(x) dx$$

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0) \Delta x}{df(x_0) = dy}$$

$$\rightarrow f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx df \rightarrow \Delta f \approx df$$

مثال ۱: اصلاح یک عینک به شکل ضلع ۱۰ امتداد دراز حرارت است. به صورت تقریبی باید

$$S(x) = 4x^2$$



$$x, \Delta x \leq 0.02$$

$$2, 4$$

$$S(1.03) \leq S(1.0) + S'(1.0) \Delta x = 4 + 8 \times 0.03 = 4.24$$

بنابراین مقدار تقریبی ΔS = ۰.۲۴

فصل چهارم انتگرال

تابع اولیه
انتگرال نامعین
صند متق

$$\int \cos x dx = \sin x + C \leftarrow (\sin x)' = \cos x$$

فرمولهای انتگرال

$$\int f(x) dx \text{ روشی از انتگرال گیری}$$

۱) روش تغییر متغیر (جایگزینی)

مثال ۱

$$\int \frac{x^3}{x^4 + 4} dx \xrightarrow{u=x^4, du=4x^3 dx} \int \frac{1}{u^2 + 4} du = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{u}{2} + C$$

$$= \frac{1}{8} \tan^{-1} \frac{x^4}{2} + C$$

مثال ۲

$$\int \frac{\sqrt{x^3 + 2x^2}}{x^2(1+2x^2)} dx = \int \frac{x \sqrt{1+2x^2}}{x^2(1+2x^2)} dx$$

$$u = 1 + 2x^2, du = 4x dx \Rightarrow \int \frac{1}{4} u^{-1/2} du = \frac{1}{4} \times \frac{2}{1/2} u^{1/2} + C$$

$$= \frac{1}{4} (1 + 2x^2)^{1/2} + C$$

مثال ۳

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{1}{1+e^x} dx = \int \frac{(1+e^x) - e^x}{1+e^x} dx$$

$$= \int \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right) dx = x - \ln(1+e^x) + C$$

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{e^{-x} dx}{e^{-x} + 1} = -\ln(e^{-x} + 1) + C = -\ln \frac{1+e^x}{e^x} + C$$

$$= -\ln(1+e^x) + \ln e^x + C = x - \ln(1+e^x) + C$$

۲- انتگرال از توابع مثلثاتی

محاسبه $\int \sin^m x \cos^n x dx$

(الف) اگر n یا m یابد و فرد باشند از یکی از توانها سرریز یک واحد خارج کردن و با اختار $\cos^2 x + \sin^2 x$ آن به باقی میماند را بر حسب نسبت مثلثاتی دیگر می نویسیم و سپس با همان نسبت مثلثاتی دیگر می نویسیم

(ب) m و n هر دو زوج باشند کل انتدال را با نقطه بر حسب \sin یا نقطه بر حسب \cos می نویسیم و از روابط زیر استفاده می کنیم

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

مثال: $\int \sin^3 x + \cos^5 x dx = \int \sin x (\cos^4 x - \cos^2 x) dx$

$$u = \cos x, \quad du = -\sin x dx \quad \int -(u^4 + u^2) du$$

$$= -\frac{1}{5} u^5 - \frac{1}{3} u^3 + C$$

محاسبه $\int x^m \sec^n x dx$

(الف) اگر n زوج باشد مقدار $\sec^2 x$ را $u = \sec x$ قرار دهیم

(ب) اگر m فرد باشد مقدار \sec را $u = \sec x$ قرار دهیم

ضمناً ممکن است اتحاد $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ مورد نیاز

مثال: $\int x^4 \sec^4 x dx$ $u = \tan x \rightarrow du = \sec^2 x dx$ الف-۴
۲۵

$$\int u^4 (1 + u^2) du = \int (u^4 + u^6) du$$

$$= \frac{1}{5} u^5 + \frac{1}{7} u^7 + C$$

محاسبه انتگرال کربیناسیل $\sin x$ و $\cos x$

تبدیل دهیم $z = \tan \frac{x}{2}$ داریم:

$$dx = \frac{2dz}{1+z^2}, \quad \sin x = \frac{2z}{1+z^2}$$

$$\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

$$\int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x + 5} \quad z = \tan \frac{x}{2}$$

$$\frac{191}{2.439}$$

$$\int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{1-z^2}{1+z^2} + \frac{3(1-z^2)}{1+z^2} + 5} = \int \frac{2dz}{2z^2 + 8z + 8} = \int \frac{dz}{z^2 + 4z + 4}$$

$$= \int (z+2)^{-2} dz = -\frac{1}{z+2} + C = \frac{1}{2 + \tan \frac{x}{2}} + C$$

$$\int \frac{dx}{a\sin^2 x + b\cos^2 x + c}$$

ابتدا صورت و مخرج را به $\cos^2 x$ تقسیم کرده و سپس قرار می دهیم $z = \tan x$

$$\int \frac{dx}{4\sin^2 x + 2\cos^2 x} = \int \frac{\sec^2 x dx}{4\tan^2 x + 2}$$

$$\frac{18}{132.432}$$

$$z = \tan x \quad \int \frac{dz}{4z^2 + 2} = \frac{1}{4} \int \frac{dz}{z^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \tan^{-1} \frac{z}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \tan^{-1} \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \tan x \right) + C$$

۳- انتگرال توابع یارادیکالی

برای محاسبه انتگرال شامل $\sqrt[n]{x}$ قرار می دهیم $x = t^n$ تا رادیکال حذف گردد
(چنانچه n زوج باشد فرض کنید $n \geq 0$)
در موارد زیر با تغییر متغیر مشتقات ساده را حل می کنیم

- ۱) $\sqrt{a^2 - x^2} \rightarrow x = a \sin t \quad -\pi/2 \leq t \leq \pi/2$
 ۲) $\sqrt{a^2 + x^2} \rightarrow x = a \tan t \quad -\pi/2 < t < \pi/2$
 ۳) $\sqrt{x^2 - a^2} \rightarrow x = a \sec t \quad t \in [0, \pi] - \{\pi/2\}$

$$\int \frac{dx}{x - \sqrt{x}} \quad \frac{x=t^2}{t \geq 0} \quad \int \frac{2t dt}{t^2 - t} = \int \frac{2 dt}{t - 1} \quad \text{(بخش ۱۳)} \quad \frac{2}{2.18}$$

$$= 2 \ln |t - 1| + C = 2 \ln |\sqrt{x} - 1|$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} = \int \frac{dx}{(\sqrt{x^2 + 1})^3} \quad \frac{x = \tan t}{\int \frac{\sec^2 t}{(\sqrt{\tan^2 t + 1})^3} dt} \quad \text{ساده}$$

$$= \int \frac{\sec^2 t}{\sec^3 t} dt = \int \cos t dt = \sin t + C = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + C$$

۴- روش جبرجبر

$$\int u dv = uv - \int v du$$

- انتخاب از اعضا گروه ۱ $\leftarrow u$
 - انتخاب از ضریب (۱) در (۲) با ضریب (۲) $\rightarrow u$
 - انتخاب از ضریب گروه (۳) در (۲) $\rightarrow u$

گروه ۱	گروه ۲	گروه ۳
توان	ضریب	توان
آر	ضریب	توان

$\int \ln x dx$ $u = \ln x$ $dv = dx$ مثال:

$du = \frac{1}{x} dx$ $v = x$

$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C$

$I = \int \sec^3 x dx = \int \sec x \cdot \sec^2 x dx = \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x dx$ مثال:

$= \sec x \tan x - \int \sec x \sec x dx = \sec x \tan x - \int \sec^2 x dx + \int \sec x dx$

$\rightarrow I = \frac{1}{2} (\sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x|) + C$

$du = \sec x \tan x dx$, $v = \tan x$

$\int (x^2 - x + 4) e^{3x} dx$ مثال:

	<u>مثبت</u>	<u>مثبت</u>	
+	$x^2 - x + 4$	e^{3x}	
-	$2x - 1$	$\frac{1}{3} e^{3x}$	
+	2	$\frac{1}{9} e^{3x}$	
-	0	$\frac{1}{27} e^{3x}$	

$(x^2 - x + 4) \frac{e^{3x}}{3} - (2x - 1) \frac{e^{3x}}{9} + \frac{2}{27} e^{3x} - \int x \frac{1}{27} e^{3x} dx + C$

نکته: اگر اشتدال ضرب اعضاء روبرو هم نیاز به ضرب خردناسته باید توقف
مانع ندارد و باید حتماً توقف کرد

$\int e^x \cos x dx = I$ مثال:

$I = e^x \sin x + e^x \cos x + \int -e^x \cos x dx$

$I + I = 2I = e^x (\sin x + \cos x) + C$

	<u>مثبت</u>	<u>مثبت</u>
e^x	\rightarrow	$\cos x$
e^x	\rightarrow	$\sin x$
e^x	\rightarrow	$-\cos x$

نکته: هرگاه ضرب اعضاء خردین از جبهه اصلي باشد حتماً باید توقف کرد

دستورکافش یا رابطه بازگشتی $\frac{18}{243}$

$$\int \cos^n x dx = I_n$$

۳) $\frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$

$$I_n = \int \cos^{n-1} x \cos x dx$$

$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \sin^2 x dx$$

$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x dx - (n-1) \int \cos^n x dx$$

$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

گزینه ۳

$$n I_n = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) I_{n-2} \rightarrow \text{سم} \rightarrow$$

۵) روش تجزیه کسرها جزئی

برای همبستگی استدلال $P(x) = \frac{P(x)}{q(x)}$ که P و q دو چند جمله‌ای و درجه صورت از درجه مخرج کمتر باشد از روش تجزیه کسرها استفاده می‌کنیم.

استهلاک $q(x)$ را به صورت ضرب دو نوع عامل بنویسیم

۱) $(x-a)^n$

۲) $(ax^2+bx+c)^m$ که Δ حقیقی ندارد

حالت اول: اگر $(x-a)^n$ در مخرج موجود باشد شایسته آن n کسر جزئی می‌نویسیم

$$\frac{-A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n} \quad A_n = \lim_{x \rightarrow a} (x-a)^n P(x)$$

حالت دوم: در مخرج $(ax^2+bx+c)^m$ که $\Delta < 0$ دیده شود شایسته آن

$$\frac{B_1x+C}{ax^2+bx+c} + \frac{B_2x+C}{(ax^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{B_mx+C_m}{(ax^2+bx+c)^m}$$

۴۷

$$\int \frac{1}{x^2(x-1)} dx$$

۹
۲۵۶

$$f(x) = \frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$$

$$C = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)f(x) = 1$$

$$B = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 f(x) = -1$$

نکته: دو طرف را در x ضرب کرده و $x \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{x(x-1)} = A + \frac{B}{x} + \frac{Cx}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 = A + 0 + C \rightarrow A = -1$$

$$\int \frac{dx}{x^2(x-1)} = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x-1} \right) dx = -\ln|x| + \frac{1}{x} + \ln|x-1| + k$$

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)} dx$$

مثال ۹

$$f(x) = \frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$A = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)f(x) = 1 \quad \begin{matrix} x \text{ دو طرف } x \\ x \rightarrow \infty \end{matrix} \quad 0 = A + B \quad B = -1$$

$$x=0 \quad -1 = -1 + C \quad C = 0$$

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)} dx = \int \frac{1}{x-1} + \frac{-x}{x^2+1} = \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + k$$

انتگرال معین



$$x_k = a + k \Delta x \quad c_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

$$f(c_1) \Delta x + f(c_2) \Delta x + \dots + f(c_n) \Delta x$$

$$= \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x = \int_a^b f(x) dx \quad b > a$$

دو ویژگی از انتگرال معین:

$$1- \text{ اگر } f(x) \geq g(x) \text{ برای هر } x \in [a, b] \text{ آنگاه } \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

$$2- \text{ اگر برای } x \in [a, b] \text{ داشته باشیم } m \leq f(x) \leq M \text{ آنگاه:}$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

تعریف: میانگین مقدار متوسط $f(x)$ در $[a, b]$ عبارت است از:

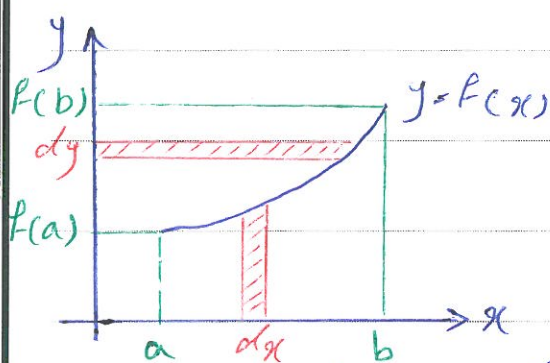
$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$$

نکته: اگر تابع $f(x)$ پیوسته باشد آنگاه $a < c < b$ موجود است

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a) \quad \text{نصف مقدار میانگین در انتگرال}$$

$$3- \int_{-a}^a f(x) dx = \underbrace{\int_{-a}^0 f(x) dx}_{\text{فرد}} + \underbrace{\int_0^a f(x) dx}_{\text{زوج}} = 2 \int_0^a f(x) dx$$

$$4- \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad \int_a^a f(x) dx = 0$$



۵- اگر $f(x)$ یکنواخت باشد

$$\int_a^b f(x) dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x) dx = b f(b) - a f(a)$$

کاربرد این مسد محاسب انتگرال معین توابع معکوس می باشد

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$$

۲۲
۲۶۷
ویرایش شماره ۲

۱- برای $f(x)$ و \min و \max داخل انتگرال را باید بد (در این گونه سوال ها لازم نیست انتگرال

باید برای تابع تحت انتگرال $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}$ روکنا کرده (اگر هم محاسب کنیم

$$\rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2+x-x^2}} = (2+x-x^2)^{-1/2}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} (1-2x) (2+x-x^2)^{-3/2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \frac{1-2x}{(2+x-x^2)^{3/2}}$$

x	f(x)
1/2	1/2
0	$\sqrt{2}/2$
1	$\sqrt{2}/2$

مطلق min
مطلق max

$$\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{1}{2} \times (1-0) \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{\sqrt{2}}{2} (1-0)$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} \cos x \ln \frac{1+x}{1-x} dx = + \cos(-x) \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) - 1 = 0$$

۲۴
۲۶۸

$$= - \cos x \ln \frac{1+x}{1-x} = - f(x) = 0 \text{ انتگرال = صفر}$$

تایید فرد و بازه متقارن \rightarrow انتگرال = صفر

نصب: قضیه اساس حساب دیفرانسیل و انتگرال

$$1) \frac{d}{dx} \int_a^x f(x) dx = f(x)$$

$$2) \frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(x) dx = v'(x) f(v(x)) - u'(x) f(u(x))$$

$$2) \frac{d}{dx} \int_{v(x)}^{u(x)} f(x, x) dx = u'(x) f(u(x), x) - v'(x) f(v(x), x) + \int_{v(x)}^{u(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, x) dx$$

مثال داخل اشکال در بریم

بیشترین مقدار $f(x) = \int_x^{2x} e^{-x^2} dx$ در نقطه x بدام x رخ می دهد

$$f'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2} = 0 \quad e^{-4x^2} (2 - e^{3x^2}) = 0$$

$$e^{3x^2} = 2 \xrightarrow{\ln} 3x^2 = \ln 2 \quad x = \pm \sqrt{\frac{1}{3} \ln 2}$$

در $x = \sqrt{\frac{\ln 2}{3}}$ نقطه ماکزیمم است

از معادله $\int_1^x \frac{dx}{1+x^2} = u$ حاصل $\frac{d^2 u}{dx^2}$ در $x=1$ مقدار است

مقادیر $\frac{d}{du}$ $1 = \frac{v'}{\sqrt{1+2x^2}} \rightarrow v' = \sqrt{1+2x^2}$ متابع u متیل

$$v'' = \frac{2x v'}{\sqrt{1+2x^2}} = \frac{2x}{\sqrt{1+2x^2}} \quad \text{متیل} \rightarrow v'' = 2\sqrt{1+2x^2} \quad v'' = 2\sqrt{1+2x^2}$$

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin(x^2)}{x} dx \quad \frac{df}{dx} = f$$

$$\frac{df}{dx} = 1 \times \frac{\sin(x^2)}{x} = 0 + \int_0^x \frac{x \cos(x^2)}{x} dx = \frac{\sin x^2}{x} + \frac{\sin x^2}{x}$$

ست $f(x) = \int_0^x (1+x^2)^{-1/2} dx$ و تابع معکوس f است نام f از f معیاری

۱) $g'(x) = g'(x)$ ۲) $g'(x) = \frac{1}{4} g'(x)$

۳) $g'(x) = \frac{3}{4} g'(x)$ ۴) $g'(x) = \frac{1}{4} g'(x)$

$$g'(y) = -f'(x) = \frac{1/4 (3x^2) (1+x^2)^{-3/2}}{(1+x^2)^{-1/2} 3} \rightarrow g'(y) = \frac{1}{4} x^2$$

$$y = f(x) \rightarrow x = f^{-1}(y) = g(y) \rightarrow g'(y) = \frac{1}{4} g'(y)$$

$$y = f(x)$$

نکته: اگر تابع معکوس $f(x)$ باشد

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \rightarrow g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \rightarrow \frac{d}{dx} \rightarrow f'(x) g'(y) = -\frac{f''(x)}{f'(x)^2}$$

$$\rightarrow g''(y) = -\frac{f''(x)}{f'(x)^2}$$

تابع ثابت صفر باشد

تابع پیوسته و ماضی $f(x)$ در رابطه زیر صدق می کند

$$f''(x) = \int_0^x (f(t) \frac{\sin t}{3 - \cos t}) dt$$

معادله اشتدال

ضابطه $f(x)$ را باید

برای حذف اشتدال باید از رابطه داده شده $\frac{d}{dx}$ بگیریم

$$2 f(x) f'(x) = f(x) \frac{\sin x}{3 - \cos x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \frac{\sin x}{3 - \cos x}$$

$$\int \rightarrow f(x) = \frac{1}{4} \ln(2 - \cos x) + k$$

برای تعیین k باید در هر طرف معادله اشتدال را جای x عدد قرار دهیم. برای آن بالا

$$x = 0 \rightarrow f''(0) = \int_0^0 \dots = 0 \rightarrow f'(0) = 0$$

$$x = 0 \xrightarrow{(*)} f'(0) = \frac{1}{4} \ln(2 - 1) + k \rightarrow k = -\frac{1}{4} \ln 2$$

$$f(x) = \frac{1}{4} \ln(2 - \cos x) - \frac{1}{4} \ln 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t g \sqrt{t} dt}{x^3} \stackrel{Hop}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot g \sqrt{x}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sqrt{x}}{3x}$$

۳۴
۲ ج ۹۵۸

$$x \rightarrow 0$$

$$\begin{cases} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3} & x \rightarrow 0^+ \\ \frac{-2x}{3x} = -\frac{2}{3} & x \rightarrow 0^- \end{cases}$$

چون حد چپ و راست

نامبر دارند \rightarrow حد وجود ندارد

محاسبه انتگرال معین

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$F(x) = \int f(x) dx$$

$$\int_1^e \frac{dx}{x(\ln^2 x + \ln x + 1)} \quad \begin{matrix} x = \ln x \\ dx = \frac{1}{x} dx \end{matrix} \quad \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + t + 1} = \int_0^1 \frac{dt}{(t + \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \quad \frac{E1}{279}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{t + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\arctan \frac{3}{2} - \arctan \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

$$\int_1^e \frac{dx}{\sqrt{x}(1 - e^{-\sqrt{x}})} \quad \begin{matrix} x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{matrix} \quad \int_1^e \frac{2t dt}{t(1 - e^{-t})} = 2 \int_1^e \frac{e^t dt}{e^t - 1} \quad \frac{13.}{28.79}$$

$$= 2(\ln(e^t - 1) - \ln(e - 1)) = 2 \ln \frac{e^t - 1}{e - 1} = \ln(e + 1)$$

$$\int_{-2}^{-1} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx \quad x = \sec t \quad \frac{51}{279}$$

$$\begin{cases} -2 = x = \sec t \rightarrow \cos t = -\frac{1}{2} \rightarrow t = \frac{2\pi}{3} \\ -1 = x = \sec t \rightarrow \cos t = -1 \rightarrow t = \pi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \frac{\sqrt{\sec^2 t - 1}}{\sec t} \sec t \tan t dt &= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \frac{\sqrt{t^2 - 1}}{\sec t} \sec t \tan t dt \\ &= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} t \tan t dt = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \frac{t}{\sec^2 t - 1} dt = (t \tan t - t) \Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \\ &= -(0 - \pi) - (-\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}) = \pi - \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\int_1^{\sqrt{3}} (1-x^2) \ln x \, dx$$

$$du = \frac{1}{x} dx, \quad v = x - \frac{x^3}{3}$$

$$\frac{6}{2 \times 3 \times 2}$$

$$\begin{aligned} & \left[(x - \frac{x^3}{3}) \ln x \right]_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} (1 - \frac{x^2}{3}) dx = - \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^{\sqrt{3}} \\ & = - \frac{2}{3} \sqrt{3} + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\int_0^1 x g^{-1} x \, dx$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} u = x g^{-1} x \\ du = dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{1+x^2} dx \\ v = x \end{cases}$$

$$\left[x g^{-1} x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$$

$$\int_a^b f(x) dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x) dx = b f(b) - a f(a)$$

$$f(x) = x g^{-1} x, \quad a=0, \quad b=1 \rightarrow f^{-1}(x) = x g x$$

$$\int_0^1 x g^{-1} x \, dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x g x \, dx = \frac{1}{2} - \ln(\sec x) \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2} - \ln \sqrt{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$$

$$\rightarrow \int_0^1 x g^{-1} x \, dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$$

$$I_{n-1}, I_n, I_n = \int_0^a (a^2 - x^2)^n dx \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2 \times 2 \times 2}$$

$$du = -2nx(a^2 - x^2)^{n-1} \quad v = x$$

$$I_n = x(a^2 - x^2) \Big|_0^a - 2n \int_0^a x^2 (a^2 - x^2)^{n-1} dx$$

$$(a^2 - x^2)^n - a^2 (a^2 - x^2)^{n-1}$$

$$= 2n \int_0^a (a^2 - x^2)^n dx + 2na^2 \int_0^a (a^2 - x^2)^{n-1} dx$$

$$I_n = -2n I_n + 2na^2 I_{n-1} \rightarrow (2n+1) I_n = 2na^2 I_{n-1}$$

نکته: برابر محاسبه انتگرال معین تابع چند ضابطه‌ای (قدر مطلق، برکت و...) باید انتگرال را صورت مجموع انتگرال‌های متوالی که تابع بر بازه‌های مجزیه دقیقاً یک ضابطه داشته باشد پس نقطه شکستن، x هایی هستند که تابع در آن تغییر ضابطه می‌دهد

مثال: بیابان $F(x) = x^2$ و از $x=2$ تا $x=4$ باید

$$\text{بیابان} = \frac{\int_2^4 F(x) dx}{2-0} = \frac{1}{4} \int_2^4 x^2 dx$$

x هایی که داخل برکت صریح شود \rightarrow نقاط شکستن

$$x \in \mathbb{Z} \rightarrow x^2 = 2, 3, 4 \rightarrow 0, 1, 2, 3, 4$$

و $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ و $x=2$

$$\text{بیابان} = \frac{1}{4} \left(\int_0^1 x^2 dx + \int_1^{\sqrt{2}} x^2 dx + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} x^2 dx + \int_{\sqrt{3}}^2 x^2 dx \right) = \frac{1}{4} ((\sqrt{2}-1) + 2(\sqrt{3}-\sqrt{2}) + 2(2-\sqrt{3}))$$

$$\int_0^{\pi/4} |\sin x - \cos x| dx \quad \left. \begin{array}{l} \text{نقطه شکستن} \\ \text{توابع قدر مطلق} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ای} \\ \text{نابریکتر} \end{array}$$

$$\frac{41}{282}$$

$$\sin x - \cos x = 0 \rightarrow \tan x = 1 \rightarrow x = \pi/4$$

$$\text{انتگرال} = \int_0^{\pi/4} -\sin x + \cos x dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin x - \cos x dx$$

$$= [\cos x + \sin x]_0^{\pi/4} + (-\cos x - \sin x)_{\pi/4}^{\pi/2} = 2\sqrt{2} - 2$$

نکته: فرض کنید $a \neq 0$ و $F(x)$ پیوسته باشد

$$\int_a^a F(x) dx = \int_a^a F(a-x) dx$$

$$x \rightarrow a-x$$

آر. ۲۲
۲۷۴

$$I = \int_0^a \frac{f(x)}{f(x) + f(a-x)} dx$$

$$x \rightarrow a-x, I = \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(a-x) + f(x)} dx$$

مجموعه: $2I = I + I = \int_0^a \frac{f(a-x) + f(x)}{f(x) + f(a-x)} dx = \int_0^a 1 dx = a$

$$2I = a \Rightarrow I = \frac{a}{2}$$

$$\int_0^a \frac{f(x)}{f(x) + f(a-x)} dx = \frac{a}{2}$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^m x}{\sin^m x + \cos^m x} dx = \frac{\pi/2}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$f(x) = \sin^m x, a = \pi/2$$

$$f(a-x) = \sin^m(\pi/2 - x) = \cos^m x$$

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx$$

۲۳
۲۷۴

$$x \rightarrow \pi - x, I = \int_0^{\pi} (\pi - x) f(\sin(\pi - x)) dx$$

مجموعه: $2I = I + I = \int_0^{\pi} \pi f(\sin x) dx \rightarrow I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$$

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$$

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

۲۷
۲۷۸

$$\begin{aligned} \text{سؤال} = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx &\xrightarrow{t = \cos x} \frac{\pi}{2} \int_1^{-1} \frac{-dt}{1+t^2} = -\frac{\pi}{2} \left[\tan^{-1} t \right]_1^{-1} \\ &= -\frac{\pi}{2} \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

حساب حد یک مجموع با استبدال معین

اگر مجموع داده شده برابر مجموع ریمان $P(x)$ در n آید، آنگاه جواب سؤال $\int_0^1 P(x) dx$ خواهد بود و در یافتن $P(x)$ کافی است $P(x)$ را برابر حد عمومی مجموع قرار داده و با محاسبات حد $P(x)$ را می یابیم $\left(\frac{k-1}{n} \leq c_k < \frac{k}{n} \right)$

$$\lim \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right)$$

۹۳
۲۸۳

$$n f(c_k) = \frac{n}{n^2+k^2} \quad \text{جواب عمومی}$$

$$\frac{1}{n} f(c_k) = \frac{n^2}{n^2+k^2} = \frac{1}{1+(k/n)^2} \quad k/n = c_k \rightarrow f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{جواب} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \left[\tan^{-1} x \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} (\sqrt{n^2-1^2} + \sqrt{n^2-2^2} + \dots + \sqrt{n^2-n^2})$$

۹۹
۲۸۴

$$\frac{1}{n} f(c_k) = \frac{1}{n^2} \sqrt{n^2-k^2}$$

$$\rightarrow f(c_k) = \frac{\sqrt{n^2-k^2}}{n} = \sqrt{1-(k/n)^2} \quad k/n = c_k \rightarrow f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\text{جواب} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \xrightarrow{x = \sin t} \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t} (\cos t dt)$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k g^{-1} \frac{2k-1}{2n}$$

$$\frac{21}{283}$$

$$n \rightarrow +\infty$$

$$\frac{1}{n} F(c_k) = \text{میانگین} = \frac{1}{n} x_k g^{-1} \frac{2k-1}{2n} \rightarrow F(c_k) = x_k g^{-1} \frac{2k-1}{2n}$$

$$= x_k g^{-1} \frac{2k-1}{2n} \quad \frac{2k-1}{2n} \leq \frac{k-1}{n} \leq \frac{k}{n}$$

$$c_k \rightarrow x \rightarrow F(x) = x g^{-1} x \quad \text{جواب} = \int_0^1 x g^{-1} x dx = \frac{1}{2} \ln 2$$

انتگرال ناسره (مجاازر)

منظور از انتگرال ناسره آن است که:

(۱) بازه انتگرال گیر نامحدود باشد (شامل ∞ باشد)

(۲) تابع تحت انتگرال درباره انتگرال گیر، حد برابر ∞ داشته باشد (تابع مجاز دارد)

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2} \quad \text{انتگرال حدی} \quad \frac{1}{x^2+1} = g^{-1} x \mid_b = g^{-1} b$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x^2} dx = \infty \quad \text{انتگرال واگرا} \quad \frac{1}{x^2} = g^{-1} x \mid_a = -1 + \frac{1}{a}$$

$$p > 1 \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ حدی است} \quad \text{نکته: } x^p \text{ حدی است}$$

$$p < 1 \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-x_0)^p} \text{ حدی است} \quad \text{نکته: } (x-x_0)^p \text{ حدی است}$$

تعریف: اگر تعداد نامتناهی ها بیشتر از این باشد (تکثر) را به صورت جمع اشتراکی می نویسند که هر یک دقیقاً یک نامتناهی دارند، اشتراک را هم در این نامتناهی ها اشتراک ها در مجموع همرا باشد.

مثال: بررسی کنید اشتراک همراست یا و آرا

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x-2)^5} = \int_2^3 \frac{dx}{(x-2)^5} + \int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x-2)^5}$$

یا $p=5$ و آراست

این اشتراک و آراست

مثال: بررسی کنید اشتراک همراست یا و آرا

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^4} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^4} + \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^4}$$

یا $p=4$ و آراست

پس این اشتراک و آراست

نسخه: $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ که $a < x < b$ همراست $\Leftrightarrow p < 1$

آزمون همراست

اگر $\int_a^b f(x) dx$ و $\int_a^b g(x) dx$ دقیقاً یک تکثر باشد که آن را x می نامیم

(۱) آزمون مقایسه: فرض کنید $f(x) \geq g(x)$

(الف) اگر $\int_a^b f(x) dx$ همراست باشد آنگاه $\int_a^b g(x) dx$ نیز همراست

(ب) اگر $\int_a^b g(x) dx$ و آرا باشد آنگاه $\int_a^b f(x) dx$ نیز و آراست

۲- آزمون هم‌ارزی

آزمون هم‌ارزی را می‌توان به این شکل نوشت: $\int_a^b f(x) dx$ و $\int_a^b g(x) dx$ هر دو از هم‌ارزی باشند.

۳- آزمون قدر مطلق

آزمون قدر مطلق را می‌توان به این شکل نوشت: $\int_a^b f(x) dx$ و $\int_a^b |f(x)| dx$ هر دو از هم‌ارزی باشند.

مثال: بررسی کنید انتگرال $\int_1^{+\infty} \frac{x^2 + \sqrt{x} + 1}{x^3 + x^2 + 5} dx$ هم‌ارزی است یا نه؟

$$1) \int_1^{+\infty} \frac{x^2 + \sqrt{x} + 1}{x^3 + x^2 + 5} dx$$

برای $x \rightarrow \infty$: $\frac{x^2 + \sqrt{x} + 1}{x^3 + x^2 + 5} \sim \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x}$
 چون $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ هم‌ارزی است و $p=1$ پس $\int_1^{+\infty} \frac{x^2 + \sqrt{x} + 1}{x^3 + x^2 + 5} dx$ هم‌ارزی است.
 (داده نیز داراست)

$$2) I = \int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx \rightarrow \sin(+\infty) \text{ حالت متغیر دارد}$$

برای $\int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx$ داریم: $0 \leq \left| \frac{\sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}}$
 چون $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}} dx$ هم‌ارزی است و $p < 1$ پس $\int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx$ هم‌ارزی است.
 و لذا $I(2)$ هم‌ارزی است.

۱۴
۲۹۹
اگر $\alpha > \beta$ نت چه شرایطی برقرار است

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + x^\beta} = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha + x^\beta} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + x^\beta}$$

$$x=0: \frac{1}{x^\alpha + x^\beta} \sim \frac{1}{x^\beta} \xrightarrow{\text{مقدار}} \beta < 1$$

$$x=+\infty: \frac{1}{x^\alpha + x^\beta} \sim \frac{1}{x^\alpha} \xrightarrow{\text{مقدار}} \alpha > 1$$

$\alpha > 1 \text{ و } \beta < 1 \iff \text{مقدار}$

۳۷
۲۶۸۰
مقدار n را طوری بیابید که انتگرال زیر مقدار شود:

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{n}{x+1} - \frac{3x}{2x^2+n} \right) dx$$

$$\text{مقدار} = \frac{n(2x^2+n) - 3x(x+1)}{(x+1)(2x^2+n)} \sim \frac{(2n-3)x^2 - 3x}{2x^2}$$

* اگر $2n-3 \neq 0$ عبارت بالا مانند $\frac{1}{x}$ است که چون $\frac{1}{x}$ را P داریم
* اگر $2n-3 = 0$ یعنی $n = \frac{3}{2}$ عبارت بالا مانند $\frac{1}{x^2}$ است که چون $\frac{1}{x^2}$ را P داریم
مقدار است پس از این $n = \frac{3}{2}$ مقدار می شود

محاسبه انتگرال نامرئی

- (۱) اگر نامرئی در داخل بازه باشد محاسبه می کنیم
 - (۲) اگر نامرئی در خارج بازه باشد بررسی می کنیم که آیا است یا نه
- چنانچه همرا باشد محاسبه می کنیم

$$F(x) = \int_0^x \frac{dx}{\cosh x} \quad \frac{95}{292}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\cosh x} = \int_0^{+\infty} \frac{2dx}{e^x + e^{-x}}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{2e^x}{e^{2x} + 1} dx \quad \frac{u=e^x}{u^2+1} \int_1^{+\infty} \frac{2du}{u^2+1} = 2 \left[\arctan u \right]_1^{+\infty} = 2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx \quad b > a > 0$$

$$\frac{124}{27.154}$$

$$\frac{1}{(b-a)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b} \right) dx = \frac{1}{b-a} \left(\ln(x+a) - \ln(x+b) \right) \Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{b-a} \ln \frac{x+a}{x+b} \Big|_0^{+\infty}$$

$$\frac{1}{(x+1)(x-3)} = \frac{1}{-4} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-3} \right)$$

اولی دومی

نکته: اولی - دومی

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+4} \right)$$

اولی دومی

اولی - دومی

۲۷
۲۱.۹
مثال ۲

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-3x} \sin 4x \, dx = \frac{4}{25}$$

$$I = e^{-3x} \left(-\frac{\cos 4x}{4} - \frac{3 \sin 4x}{14} \right) \Big|_0^{+\infty} + \left(-\frac{9}{14} I \right)$$

$$= 0 - \left(-\frac{1}{4} \right) - \frac{9}{14} I$$

$$\rightarrow \frac{25}{14} I = \frac{1}{4} \rightarrow I = \frac{4}{25}$$

$e^{-3x} \sin 4x$
 $-3e^{-3x} - \frac{1}{4} \cos 4x$
 $9e^{-3x} - \frac{1}{14} \sin 4x$

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx} \sin(ax) \, dx = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx} \cos(ax) \, dx = \frac{s}{s^2 + a^2} \quad (s > 0)$$

$$\int_0^3 \frac{dx}{x^2 - 2x + 1} = \int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

۸۰
۲۹۸
واریاسیون
توجه کنید که در اینجا x (داخل بازه) ناسره است و چون $a=2$ پس واریاسیون

۱۶۱
۲۳۲۹
مثال ۳

حاصل $\int_1^x \frac{x-1}{\ln x} \, dx$ را با $\frac{x^\lambda - 1}{\ln x}$ مقایسه کنید

$$I(\lambda) = \int_1^x \frac{x^\lambda - 1}{\ln x} \, dx$$

پس نسبت به λ مشتق کنید.

$$\frac{dI}{d\lambda} = \int_1^x \frac{x^\lambda \ln x}{\ln x} \, dx = \int_1^x x^\lambda \, dx = \frac{1}{\lambda+1} x^{\lambda+1} \Big|_1^x = \frac{1}{\lambda+1} (x^{\lambda+1} - 1)$$

$$\rightarrow \frac{dI}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda+1} \Rightarrow I = I(\lambda) = \ln(\lambda+1) + C$$

$$\lambda \rightarrow 0 \rightarrow I(0) = \int_1^x \frac{x^0 - 1}{\ln x} \, dx = 0 \quad \lambda \rightarrow 0 \rightarrow I(0) = \ln(1) + C$$

$$\rightarrow I(x) = \int_1^x \frac{x^\lambda - 1}{\ln x} \, dx = \ln(\lambda+1) \rightarrow \lambda \rightarrow 0 \rightarrow \int_1^x \frac{x-1}{\ln x} \, dx = \ln 2$$

تابع گاما، شرط همگرایی $p > -1$ ، $\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^p dt$

مثال $\Gamma(1) = p \rightarrow \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{+\infty}$

فرمولهای تابع گاما:

۱) رابطه بازگشتی $\Gamma(p+1) = p \Gamma(p)$

۲) $\Gamma(n+1) = n!$ ، $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

۳) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

۴) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^{2p+1} dx = \frac{1}{2} \Gamma(p+1) \leftarrow t = x^2 \text{ و } x > 0$

۵) $\int_1^{+\infty} (-\ln x)^p dx = \Gamma(p+1) \leftarrow t = -\ln x$

$$e^{-t} t^p dt = e^{\ln x} (-\ln x)^p (-dx/x)$$

$$\begin{cases} 0 = t = -\ln x \rightarrow x = 1 \\ +\infty = t = -\ln x \rightarrow \ln x = -\infty \rightarrow x = \infty \end{cases}$$

۶) $\int_0^1 x^{x-1} (1-x)^{y-1} dx = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

شرط همگرایی: $x > 0, y > 0$

۷) $\int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1} \theta \cos^{2y-1} \theta d\theta = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{2 \Gamma(x+y)}$

$$\int_0^{+\infty} x^a e^{-x} dx = a! = 12.$$

۳۵
۲ ج. ۲.۲

$$(P=a) \quad \Gamma(y) \xrightarrow{\text{تعریف}} (P-1)$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \stackrel{(۴)}{=} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

مثال:

$$(۴): \quad yP+1=0 \rightarrow P=-1/2$$

$$\int_0^1 (\ln \frac{1}{x})^a dx = \int_0^1 (-\ln x)^a dx$$

۷۵
۲ ج. ۵.۵

$$\frac{(a)}{P=a} \quad \Gamma(y) = a! = 12.$$

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{y} e^{-y^3} dy \stackrel{x=y^3}{=} \int_0^{+\infty} x^{1/4} e^{-x} \left(\frac{1}{3} x^{-2/3}\right) dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{-1/4} dx = \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{3}$$

$P=1/4 \leftarrow \Gamma \text{ تعریف}$

۹۱
۳.۵

$$\int_0^{\pi/4} \cos^2 \theta d\theta \stackrel{(۷)}{=} \frac{\Gamma(1/2) \Gamma(3/4)}{2 \Gamma(5/4)} = \frac{\sqrt{\pi} \times \frac{1}{2} \sqrt{\pi}}{3! = 6}$$

۹۲
۳.۵

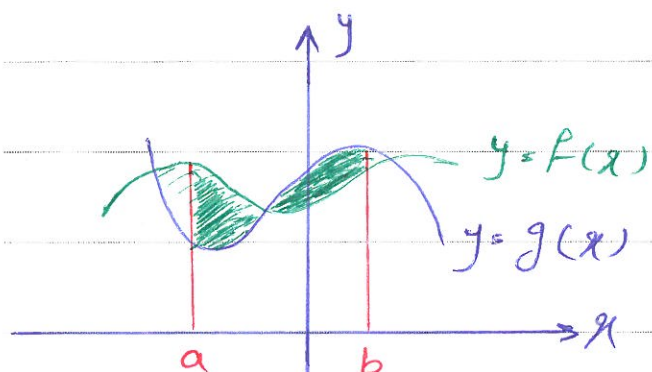
$$\begin{cases} 2x-1=0 \rightarrow x=1/2 \\ 2y-1=4 \rightarrow y=5/2 \end{cases} \quad = \frac{5}{24} \pi$$

$$\Gamma(5/2) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \Gamma(3/2) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma(1/2) = \frac{15}{8} \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(5/2) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \Gamma(3/2) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma(1/2) = \frac{15}{8} \sqrt{\pi}$$

کاربردهای انتگرال معین

مساحت



$$\text{مساحت} = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

ارتفاع

مساحت ناحیه محدود به محور y و خط $y = x$ و نمودار $y = \frac{2}{1+x^2}$

$$\text{مساحت} : \frac{2}{1+x^2} = x \rightarrow x^3 + x = 2 \rightarrow x = 1$$

$$\begin{aligned} \text{مساحت} &= \int_0^1 \left| \frac{2}{1+x^2} - x \right| dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{1+x^2} - x \right) dx \\ &= 2x \arctan x - \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

مساحت ناحیه محدود به نمودارهای زیر را بیابید

$$y^3 - 3y^2 - x + 2y = 0$$

$$y^3 + x - 2y = 0$$

حذف

$$y^3 - 2y^2 = 0 \rightarrow y^2(y - 2) = 0 \rightarrow y = 0, 2$$

$$x_1 = y^3 - 3y^2 + 2y$$

$$x_2 = 2y - y^2$$

$$\text{مساحت} = \int_0^2 |x_1 - x_2| dy = \int_0^2 |y^3 - 2y^2| dy$$

$$= \int_0^2 (2y^2 - y^3) dy = \frac{2}{3} y^3 - \frac{1}{4} y^4 \Big|_0^2$$

۹۶
۳۰۶
سطح محصوره در $y^2 = 4x^2 - x^4$ را بیابید

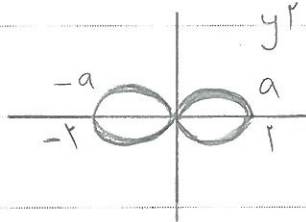
چون y تبدیل $-y$ $\rightarrow y$ ضابطه عوض نمی شود نمودار نسبت به محور x متقارن است. چون x تبدیل $-x$ $\rightarrow x$ ضابطه عوض نمی شود پس نمودار نسبت به محور y متقارن است پس کافی است $x > 0$ و $y > 0$ را در x^2 ضرب کنیم تا شیب در واقع است ناحیه مورد نیاز در ربع اول (پس محور x و y) را محاسبه و پاسخ در ۴ ضرب می شود

از $y = x \rightarrow$ تقاطع $y = \sqrt{4x^2 - x^4} = x\sqrt{4 - x^2}$

$\int_0^2 x\sqrt{4 - x^2} dx = \int_0^2 |y| dx$ است

$\int_0^2 x\sqrt{4 - x^2} dx \xrightarrow{t = 4 - x^2} \int_4^0 -\frac{1}{2} t^{\frac{1}{2}} dt = -\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_4^0 = \frac{16}{3}$

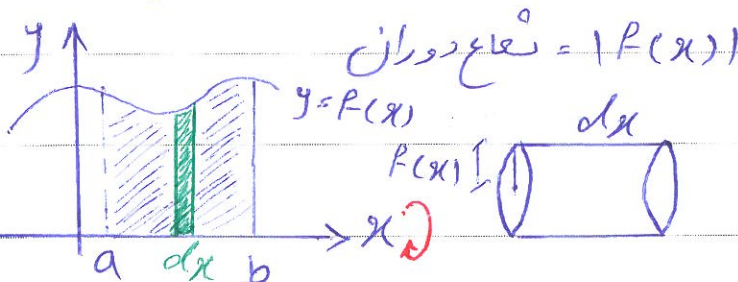
است $\frac{64}{3}$



۲. حجم: حجم حاصل از دوران

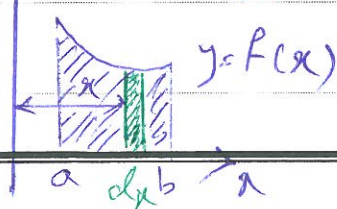
الف: دوران حول محور x ها: $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$

(روش دیسک)



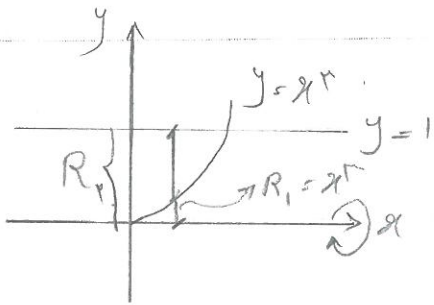
ب: دوران حول محور y ها: $V = 2\pi \int_a^b x |f(x)| dx$

(روش پوست استوانه ای)



۵. ناحیه محدود بین $y = x^3$ و $y = 1$ و خطوط $x = 0$ و $x = 1$ را حول محور x دوران می دهیم حجم آن را بیابید

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (R_2^2 - R_1^2) dx = \pi \int_0^1 (1^2 - (x^3)^2) dx \\ & = \pi \int_0^1 (1 - x^6) dx = \pi \left[x - \frac{x^7}{7} \right]_0^1 = \frac{6\pi}{7} \end{aligned}$$

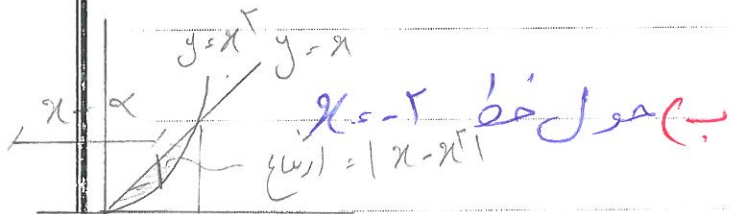


۶. ناحیه محدود بین $y = x^2$ و $y = x$ را حول محور x دوران می دهیم

حجم حاصل را بیابید

(الف) حول محور y ها

(ب) حول خط $y = 1$



اگر $x = 2$ و $x^2 = x$ را با هم مقایسه کنیم

الف: $\int_0^2 x(x - x^2) dx = \pi \int_0^2 (x^2 - x^3) dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \frac{2\pi}{3}$

ب: $\int_0^1 x(x - x^2) dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{12}$

ج: هرگاه در آن حول خط $y = 1$ بگردانیم، در آن صورت $x = 1$ و $x^2 = x$ را با هم مقایسه کنیم

حجم = $\pi \int_0^1 ((x+1)^2 - (x^2+1)^2) dx$

د: هرگاه در آن حول خط $y = 1$ بگردانیم، در آن صورت $x = 1$ و $x^2 = x$ را با هم مقایسه کنیم

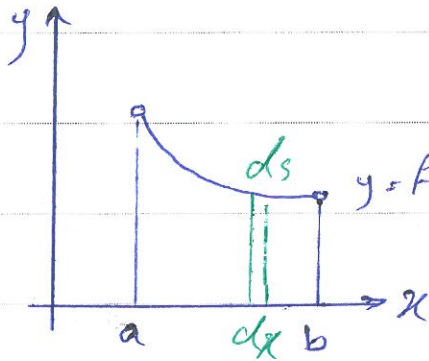
حجم = $\pi \int_0^1 ((x+1)^2 - (x^2+1)^2) dx$

$R_2 = (x+1)$ و $R_1 = (x^2+1)$

$R_1 = (x^2+1)$ و $R_2 = (x+1)$

۳- طول قوس

طول قوس قسمت از نمودار $y = f(x)$ و $a \leq x \leq b$ است برابر است با

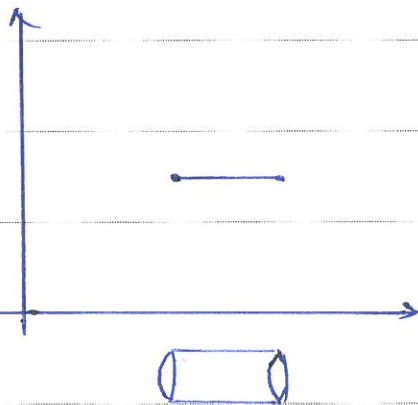


$$ds = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

$$\text{طول قوس} = \int_{x=a}^{x=b} ds$$

۴- مساحت جانبی سطح حاصل از دوران

آر نمودار $y = f(x)$ و $a \leq x \leq b$ حول محور دوران کند، مساحت جانبی حاصل از دوران برابر است با



الف: حول محور x ها

$$2\pi \int_{x=a}^{x=b} |y| ds$$

ارتفاع

مساحت جانبی

ب: حول محور y ها

$$2\pi \int_{x=a}^{x=b} |x| ds$$

شعاع

مساحت جانبی

مساحت جانبی حاصل از دوران $y = x^2$ و $x \leq \sqrt{3}$ حول محور y را بیابید. ۱۰۹
۳۱۶

$$y' = 2x \quad ds = \sqrt{1+y'^2} dx = \sqrt{1+4x^2} dx$$

$$\text{مساحت جانبی} = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} x \sqrt{1+4x^2} dx$$

$$\frac{u=1+4x^2}{du=8x dx} \rightarrow \frac{\pi}{4} \int_1^9 u^{1/2} du = \frac{\pi}{4} u^{3/2} \Big|_1^9 = \frac{13\pi}{3}$$

مساحت سطح $y^2 + 4x = 2 \ln y$ حاصل از دوران $1 < y < 3$ حول محور x ها را بیابید. ۱۱۰
۳۱۶

$$x = \frac{1}{2} \ln y - \frac{y^2}{4} \rightarrow x' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2y} - \frac{1}{2}y$$

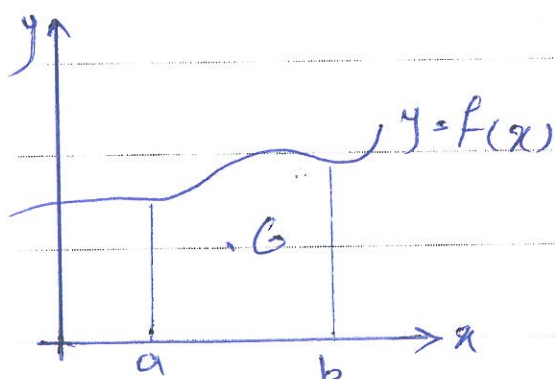
$$ds = \sqrt{1+x'^2} dy = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2y} - \frac{1}{2}y\right)^2} dy = \sqrt{\left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{2}y\right)^2} dy$$

$$\rightarrow ds = \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{2}y\right) dy \rightarrow \text{مساحت جانبی} = 2\pi \int_1^3 y \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{2}y\right) dy$$

$$= \pi \int_1^3 (1+y^2) dy = \pi \left(y + \frac{y^3}{3}\right) \Big|_1^3 = \frac{32\pi}{3}$$

$$(a-b)^2 + 4ab = (a+b)^2$$

نکته



د - مرکز هندسی

$$G(\bar{x}, \bar{y})$$

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}$$

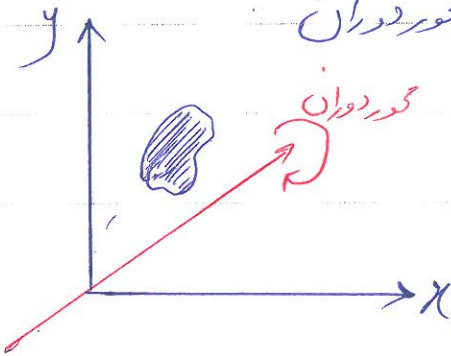
$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}$$

۲- فضا یا ریوس

قصبه اول: اگر ناحیه را در صفحه، حول یک محور دوران کند، حجم جسم حاصل برابر است با:

$$V = 2\pi \times (\text{مساحت ناحیه}) \times \text{فاصله}$$

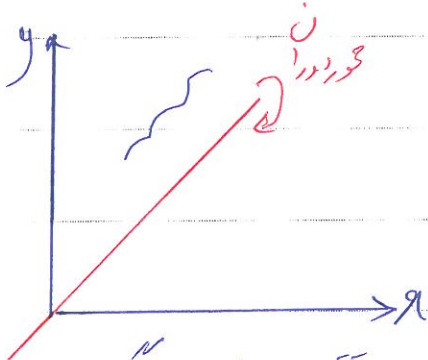
فاصله مرکز هندس ناحیه تا محور دوران



قصبه دوم: اگر نمودار حول یک محور در صفحه دوران کند، مساحت جانبی سطح حاصل برابر است با:

$$S = 2\pi \times (\text{طول قوس}) \times \text{فاصله}$$

فاصله مرکز هندس نمودار تا محور دوران



نکته: اگر شکلی دارای محور تقارن باشد، مرکز هندس در محور تقارن قرار می گیرد

نکته: فاصله (x, y) از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با:

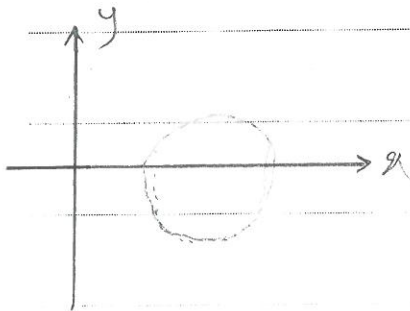
$$\text{فاصله} = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

۱۱۴ اگر ناحیه داخل دایره $x^2 + y^2 = a^2$ که $a > 0$ حول محور y دوران کند

۳۲۰

دوران کند مخلوط است حجم جسم

$d = |a| = b$ مرکز هندس $G(b, 0)$



→ قضیه اول

$$= 2\pi^2 a^2 b$$

۱۱۵ اگر دایره $x^2 + y^2 = a^2$ که $a > 0$ حول محور y دوران کند

۳۲۱

مخلوط است مساحت سطح حاصل؟

$$b = 4\pi^2 a^2 = (2\pi a)(2\pi b) = (طول قوس) \times مساحت جانب \rightarrow$$
 قضیه دوم

مثال: ناحیه مثلثی شکل به رئوس $(0, 0)$ ، $(2, 0)$ ، $(1, 1)$ حول خط

$x + y = 5$ دوران کند مخلوط است حجم جسم

$x + y - 5 = 0$ مرکز هندس مثلث، میانگین رئوس $G(\frac{0+2+1}{3}, \frac{0+0+1}{3})$

$\rightarrow G(1/3, 1/3)$

$d = \frac{|1 + 1/3 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{11}{3\sqrt{2}}$ مساحت $= \frac{1 \times 2}{2} = 1$

حجم $= (مساحت) \times (2\pi d) = \frac{22\pi}{3\sqrt{2}} = \frac{11\pi}{3} \sqrt{2}$

۵۷ مرکز هندس ناحیه داخل دایره $x^2 + y^2 = a^2$ (دایره) در بالا محور x

۳۱۹

یعنی $y \geq 0$ و $x^2 + y^2 \leq a^2$ ناحیه

ناحیه مثبت به محور y متقارن است پس G روی محور قرار دارد و لذا $x = 0$ بر

محاسبه آن در روش داریم

روش اول (با فرمول):

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2} \int_{-a}^a y^2 dx}{\int_{-a}^a y dx} = \frac{\frac{1}{2} \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx}{\frac{1}{2} \pi a^2}$$

$$= \frac{\int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx}{\pi a^2} = \frac{(ax - x^3/3) \big|_{-a}^a}{\pi a^2} = \frac{4a}{3\pi}$$

روش دوم: فاصله مرکز هندس نامرئی برابر \bar{y} است. ضمناً در اثر دوران داخل نیم دایره حول قطر (محور x ها) یک کره بدست می آید که حجم آن $\frac{4\pi}{3} a^3$ می باشد از قضیه اول

$$\frac{4\pi}{3} a^3 = \frac{\pi a^2}{2} \times 2\pi \bar{y} \rightarrow \bar{y} = \frac{4a}{3\pi}$$

۷- معنی هار پارامتر

معنی پارامتر $x = x(t)$ و $a \leq t \leq b$ مفروض است

$$y = y(t)$$

کلیه فرمولها را تکرار کرده در کاربرد هار اشتدال برابر معنی پارامتر قابل استفاده است اما بجای dx قرار می دهیم $dx = |x'| dt$ و حدود t در هر کران اشتدالها مطرح می شود

نکته طول قوس

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} |dx| = \sqrt{1 + \left(\frac{y'}{x'}\right)^2} |x'| dt = \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$$

مثال: مساحت ناحیه محدود به نمودار $x = t^2 + 2t$ و $x = 1$ ، $y = x^2 + x$ را بیابید.

$$\begin{aligned} \text{مساحت} &= \int_0^1 |y| dx = \int_0^1 (t^3 + t)(2t + 2) dt \\ &= \int_0^1 (2t^4 + 2t^3 + 2t^2 + 2t) dt = 9 \end{aligned}$$

$$dx = x' dt = (2t + 2) dt$$

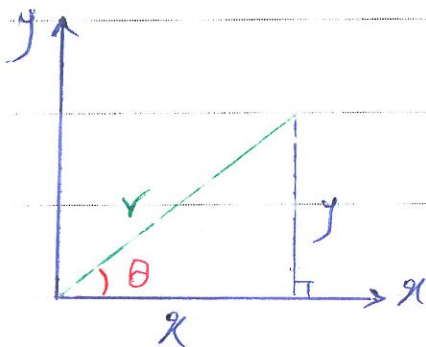
طول قوس نمودار $2e^{1/2}t$ و $x = e^t - t$ ، $0 \leq t \leq 2$ را بیابید.

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = \sqrt{(e^t - 1)^2 + e^t} = \sqrt{(e^t + 1)^2} dt$$

$$= (e^t + 1) dt$$

$$\text{طول قوس} = \int ds = \int_0^2 (e^t + 1) dt = (e^t + t) \Big|_0^2 = e^2 + 1$$

مضامین
مختصات قطبی



$$P(x, y) \longleftrightarrow (r, \theta)$$

مورد x ها = مختصات قطبی ، مبدأ مختصات قطبی

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ x \cos \theta = \frac{y}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

مفهوم r بودن r :

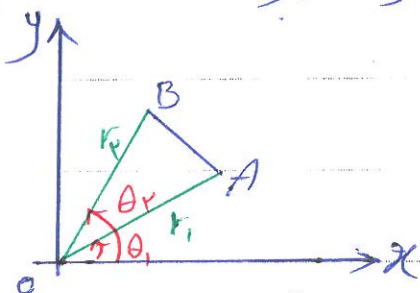
فرض کنید $r < 0$:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta = (-r) \cos(\theta + \pi) \\ y = r \sin \theta = (-r) \sin(\theta + \pi) \end{cases}$$

پس نقطه (r, θ) متناظر $(-r, \theta + \pi)$ است یا مختصات نقطه $(-r, \theta)$ را نسبت به مبدأ مختصات قرینه کنیم

فاصله دو نقطه در مختصات قطبی

نقاط $A(r_1, \theta_1)$ و $B(r_2, \theta_2)$ دارای فاصله زیر خواهند بود



$$|AB| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

در مختصات قطبی $(\frac{17\sqrt{2}}{12}, \frac{\pi}{4})$ و $(\frac{4}{4}, \frac{\pi}{4})$ (دو رأس متقابل)

$\frac{33}{12\sqrt{2}}$

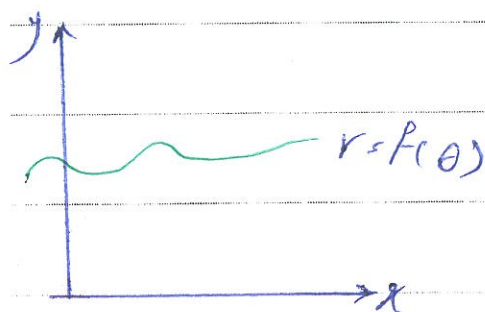
یک مربع هستند مساحت مربع چقدر است

$$|AB| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 4^2 - 2\sqrt{2} \times 4 \cos \frac{15\pi}{12}} = \sqrt{2 + 16 + 4\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4}} = \sqrt{18 + 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{18 + 4} = \sqrt{22}$$

$$= \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \quad \text{مساحت مربع} = \frac{1}{2} d^2 = \frac{(\sqrt{48})^2}{2} = \frac{48}{2} = 24$$

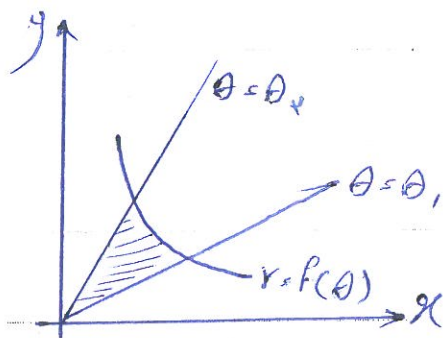
عمودار قطبی: عنوان بعضی پارامتر

عمودار $r = f(\theta)$ مفروض است

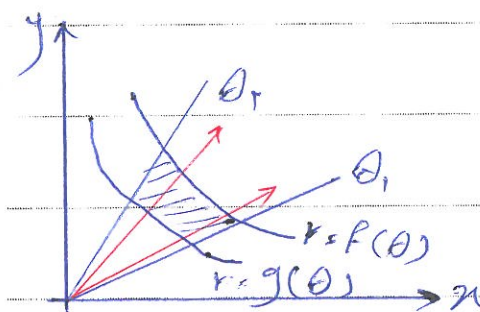


$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = f(\theta) \cos \theta \\ y = f(\theta) \sin \theta \end{cases}$$

مساحت



$$\text{مساحت} = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 d\theta$$



نوع

$$\text{مساحت} = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (f^2(\theta) - g^2(\theta)) d\theta$$

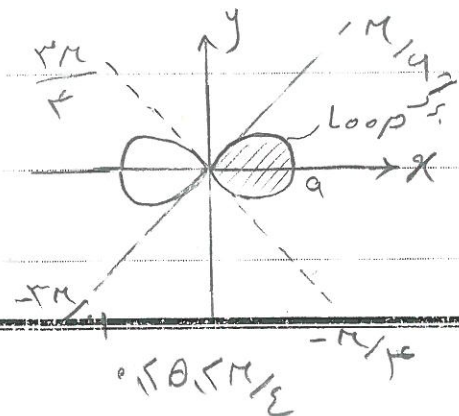
رود

تذکره: شروع استفاده از فرمول (نشان داده شده) آن است که هر خط شعاعی $\theta = \theta_1$ در ناحیه رسم کنیم دقیقاً از یکی از دو عمودار وارد و از دیگری خارج گردد

مساحت ناحیه محدود به $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ را بیابید (نوع)

$\frac{13}{427}$

$$r = 0 \rightarrow \cos 2\theta = 0 \rightarrow \theta = \pm \pi/4 \text{ و } \pm 3\pi/4$$



$$\text{مساحت} = 2 \times \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^2 \cos 2\theta d\theta = a^2$$

مساحت یک است راست

نکته: اگر در نمودار قطبی $r = f(\theta)$ داشته باشیم $f(\theta) \neq 0$ و $f'(\theta) \neq 0$

آنگاه $\theta = \theta$ معادله خط مماس در مبداست

نکته: اگر در نمودار قطبی $r = f(\theta)$ ضابطه عوض نشود آنگاه محور

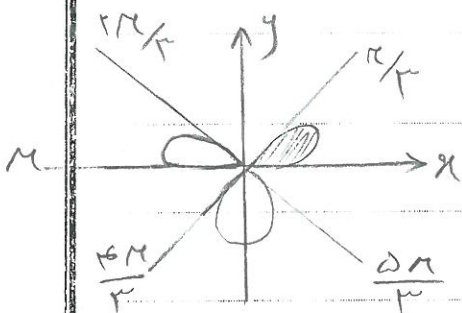
محور تقارن خواهد بود

نکته: اگر در نمودار قطبی $r = f(\theta)$ ضابطه $r \rightarrow -r$ عوض نشود آنگاه محور

محور تقارن خواهد بود

۴
۳۲۴
مساحت ناحیه نمودار $r = a \sin^2 \theta$ را بیابید ($a > 0$)

$\theta = 0$ و $\theta = \pi/3$ و $2\pi/3$: $r = 0$: آر-تقاطع



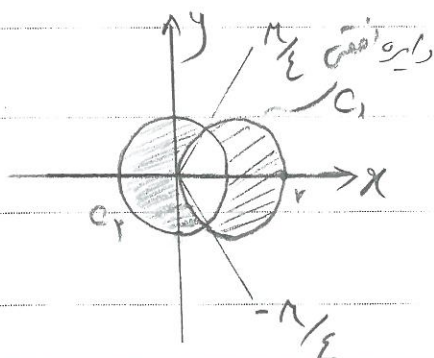
$$\begin{aligned} \text{مساحت} &= 2 \times \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} a^2 \sin^4 \theta d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/3} (1 - \cos 4\theta) d\theta = \frac{\pi a^2}{4} \end{aligned}$$

۷
۳۲۴
 $C_1: r = 2 \cos \theta$ و $C_2: r = \sqrt{2}$

الف: مساحت ناحیه داخل C_1 و خارج C_2

ب: مساحت ناحیه خارج C_1 و داخل C_2

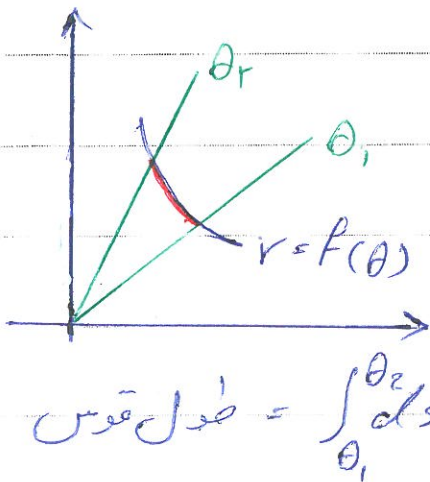
الف: $2 \cos \theta = \sqrt{2} \rightarrow \cos \theta = \sqrt{2}/2 \rightarrow \theta = \pm \pi/4$



$$\begin{aligned} \text{مساحت} &= 2 \times \left\{ \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left(2 \cos^2 \theta - \sqrt{2} \right) d\theta \right\} \\ &= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (2 \cos^2 \theta - \sqrt{2}) d\theta = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$مساحت = 2 \times \left\{ \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sqrt{2}^2 - (2 \cos \theta)^2) d\theta + \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{2}^2 d\theta \right\}_{\pi/4}^{\pi/2}$$

مساحت نیمه بالایی



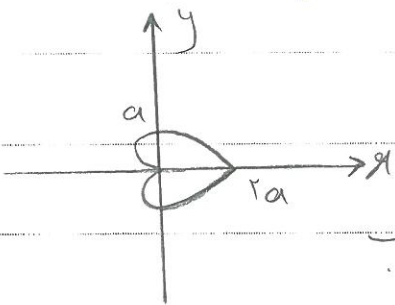
طول قوس

طول قسمتی از نمودار $r = f(\theta)$

که $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ عبارت است از

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta$$

طول قوس (عمودی) $r = a(1 + \cos \theta)$ ، رابطه (۱) (۲)



حدود θ بازه $[0, 2\pi]$ است اما چون محور x محور تقارن است پس برای θ در بازه $[0, \pi]$ کافیست و جواب را در ۲ ضرب می‌کنیم

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta = \sqrt{a^2 (1 + \cos \theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

$$= a \sqrt{2 + 2 \cos \theta} d\theta = a \sqrt{2(1 + \cos \theta)} d\theta = 2a |\cos \frac{\theta}{2}| d\theta$$

$$\begin{aligned} \text{طول قوس} &= \int ds = 2 \int_0^{\pi} 2a |\cos \frac{\theta}{2}| d\theta = 4a \int_0^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= 8a \sin \frac{\theta}{2} \Big|_0^{\pi} = 8a \end{aligned}$$

منو دار قطبی $r = f(\theta)$ مفروض است $x = r \cos \theta = f(\theta) \cos \theta$

$$y = r \sin \theta = f(\theta) \sin \theta$$

معمولاً سوالاتی که در مورد مشتق منو دار قطبی (مانند خط مماس، آلتماس، مماس) مطرح می شود با نوشتن معادله قطبی به صورت پارامتر (محسوب θ) حل می شود.

معادله خط مماس بر دایره $r = 1 - \cos \theta$ در $\theta = \frac{\pi}{3}$ را بیابید. ۱۹۶
۲ ج ۳۳۳

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = (1 - \cos \theta) \cos \theta \\ y = (1 - \cos \theta) \sin \theta \end{cases}$$

$$\text{شیب مماس: } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\sin^2 \theta + (1 - \cos \theta) \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta - (1 - \cos \theta) \sin \theta}$$

نقطه (اوه) $(x, y) = (1, 0)$ $\theta = \frac{\pi}{2}$ شیب مماس $\rightarrow \frac{dy}{dx} = -1$ $\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{dy}{dx} = -1$

$$y - 0 = -1(x - 1) \rightarrow y + x = 1 \xrightarrow{\text{قطبی}} r \sin \theta + r \cos \theta = 1 \quad r = \frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}$$

بیشترین فاصله نقطه (اوه) از منو دار قطبی $r = \sin 2\theta$ از منو دار قطبی را بیابید. ۲۱
۲ ج ۸۴

چون فاصله هر نقطه از محور x ها برابر $|y|$ است، پس باید $|y|$ را ماکزیم کنیم.

$$|y| = |r \sin \theta| = |\sin^2 \theta \sin \theta| = |\sin^3 \theta| \cos \theta = 2 \sin^2 \theta \cos \theta \quad \text{جمع ثابت} = 1$$

$$\begin{cases} \sin^2 \theta = \frac{1}{2} \\ \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cos^2 \theta = \frac{1}{2} \\ \sin^2 \theta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\max(|y|) = 2 \sin^2 \theta \cos \theta = 2 \left(\frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۹
۴۳۳
کوتاهترین و بلندترین فاصله مبدأ را از هم زیر باید $x^2 + xy + y^2 = 14$

چون فاصله هر نقطه (x, y) از مبدأ برابر $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ است پس باید d را استریم

کنیم. در مختصات قطبی داریم $d = \sqrt{x^2 + y^2} = r$

$$x^2 + y^2 + xy = 14 \rightarrow r^2 + r^2 \cos \theta \sin \theta = 14$$

کافی است ابتدا r^2 را استریم کنیم:

$$\max(r^2) = \frac{14}{1 + \frac{1}{2}(-1)} = 32 \rightarrow \max(r) = \sqrt{32}$$

$$\min(r^2) = \frac{14}{1 + \frac{1}{2}(1)} = \frac{28}{3} \rightarrow \min(r) = \frac{\sqrt{84}}{3}$$



نکته: خوددار قطبی $r = f(\theta)$ و نقطه P در آن

متناظر $\theta = \theta_0$ مفروض است. زاویه بین شعاع حاصل

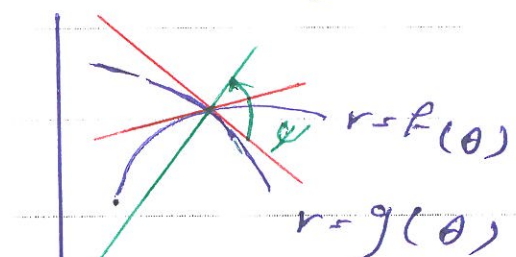
و خط مماس بر خوددار در نقطه P عبارت است از: $\pi > \phi > 0$.

$$\tan \phi = \frac{r}{r'} = \frac{f(\theta_0)}{f'(\theta_0)}$$

نکته: اگر دو خوددار قطبی $r = f(\theta)$ و $r = g(\theta)$ در نقطه P متناظر θ متقاطع کنند

زاویه بین دو خوددار در نقطه P عبارت است از: $\psi = \phi_1 - \phi_2$ که در آن ϕ

و ϕ_2 زاویه بین شعاع حاصل و خط مماس بر خوددار f و g در نقطه P خواهند بود.



$$\tan \psi = \frac{\tan \phi_1 - \tan \phi_2}{1 + \tan \phi_1 \tan \phi_2}$$

تذکره: هرگاه در دو نمودار قطبی حاصل ضرب ϕ_1 و ϕ_2 برابر (۱-) شود

دو نمودار برهم می‌خورند یعنی $\psi = \pi/2$

از روی این خط می‌توان $r = a(1 - \cos \theta)$ با $r = 2$ و $\theta = \pi/2$ ۱۳۰۲
۲ ج ۷۴

ϕ از روی این می‌تواند حاصل شود

$$\tan \phi = \frac{r}{r'} = \frac{a(1 - \cos \theta)}{a \sin \theta}$$

از روی این خطوط می‌توان بر نمودارها زیر را باید ۳۸
۲ ج ۴۵

$$r = 2(1 + \sin \theta)$$

بن دو نمودار $\psi =$

$$r = 3(1 - \sin \theta)$$

$$\text{تقاطع} \rightarrow 2(1 + \sin \theta) = 3(1 - \sin \theta) \rightarrow \sin \theta = 1/5$$

$$r = 2(1 + \sin \theta) \rightarrow \tan \phi_1 = \frac{r}{r'} = \frac{2(1 + \sin \theta)}{2 \cos \theta}$$

$$r = 3(1 - \sin \theta) \rightarrow \tan \phi_2 = \frac{r}{r'} = \frac{3(1 - \sin \theta)}{-3 \cos \theta}$$

$$\rightarrow \tan \phi_1 \tan \phi_2 = \frac{1 - \sin^2 \theta}{-\cos^2 \theta} = -1$$

$$\tan \psi = \infty \rightarrow \psi = \pi/2$$

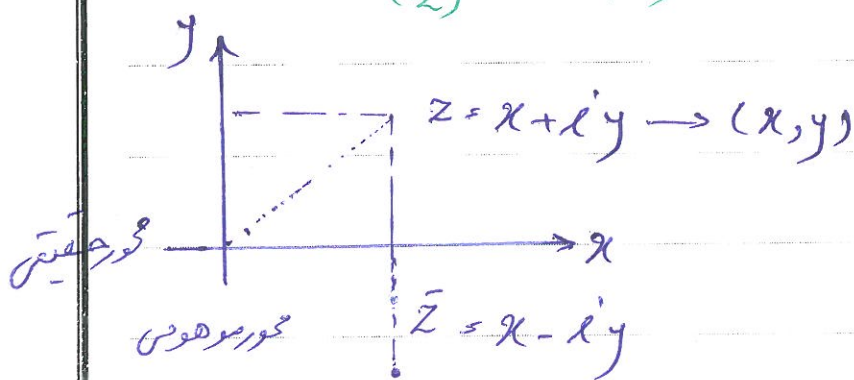
نصل نسیم
اعداد مختلط

$$x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow x = \pm \sqrt{-1}$$

$$i = \sqrt{-1} \leftrightarrow i^2 = -1$$

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$$\underbrace{\quad}_{\text{عدد حقیقی}} \underbrace{\quad}_{\text{عدد مختلط}} \underbrace{\quad}_{\text{عدد مختلط}} \quad \text{Re}(z) \quad \text{Im}(z)$$



$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{قد مطلق}$$

$$z \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2$$

$$\rightarrow z \bar{z} = |z|^2$$

$$\text{از } z + \frac{1}{z} = 1 \text{ حاصل } z^2 + (z)^2 \text{ با ضرب} \quad \frac{22}{28 \times 42}$$

$$z \text{ ضرب در } z \rightarrow z^2 + 1 = z \rightarrow z^2 - z + 1 = 0$$

$$\rightarrow z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = x + iy$$

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + i^2 y^2 + 2ixy = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$\bar{z}^2 = (\bar{z})^2 = x^2 - y^2 - 2ixy \rightarrow z^2 + \bar{z}^2 = 2(x^2 - y^2) = 2\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) = -1$$

$$Z = \frac{3 + 2i \sin \theta}{1 - 2i \sin \theta}$$
 مقدار θ پیدا کنید تا عدد مختلط Z حقیقی باشد. ۱.۵ ج ۸۵
 به نسبت حقیقی ۲ صفر شود.

$$Z = \frac{3 + 2i \sin \theta}{1 - 2i \sin \theta} \cdot \frac{1 + 2i \sin \theta}{1 + 2i \sin \theta} = \frac{(3 - 4 \sin^2 \theta) + 4i \sin \theta}{1 + 4 \sin^2 \theta}$$

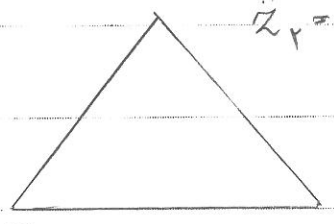
$$\operatorname{Re}(Z) = 0 \rightarrow 3 - 4 \sin^2 \theta = 0 \rightarrow \sin^2 \theta = \frac{3}{4} \rightarrow \sin \theta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{3}$$

$$Z^2 + aZ + \frac{a^2}{k} = 0$$
 از ازا چه مقدار k پیدا شود در این معادله Z حقیقی باشد. ۲ ج ۸۳۹
 به این شکل است در الاضلاع هستند. $(a \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ (مسئله ۹۱)

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) ۳

$$Z = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{k}}}{2} = \frac{-a \pm a \sqrt{1 - \frac{3}{k}}}{2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{a}{2} \sqrt{\frac{k}{k} - 1} i$$

توجه کنید که برای آنکه Z حقیقی ایجاد شود باید $1 - \frac{3}{k} < 0$ پس $\frac{k}{k} - 1 > 0$

$$Z_1 = -\frac{a}{2} + \frac{a}{2} \sqrt{\frac{k}{k} - 1} i$$


$$Z_2 = \overline{Z_1}$$

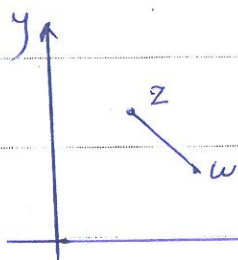
$$|Z_1 - Z_2| = |Z_1 - \overline{Z_1}| = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 (1 + \frac{k}{k} - 1)} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{k}{k}}$$

$$Z_1 \neq Z_2 \text{ فاصله} = |Z_1 - Z_2| = \left| \frac{a}{2} \sqrt{\frac{k}{k}} - i \right| = a \sqrt{\frac{k}{k} - 1}$$

$$\rightarrow a \sqrt{\frac{k}{k} - 1} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{k}{k}}$$

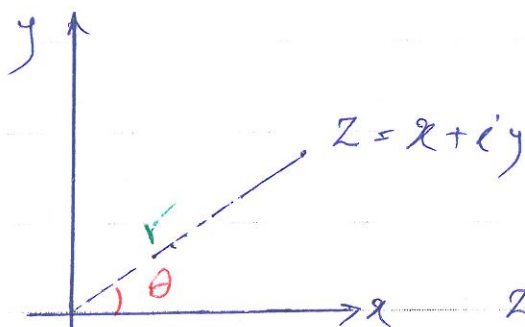
$$\sqrt{\frac{k}{k} - 1} = \frac{1}{\sqrt{k}} \rightarrow k - k = 1 \rightarrow k = 3$$

تذکره:



$$|z - w| = \text{فاصله } z \text{ و } w$$

خاصیت قطبی



$$r = |z|$$

$$z = x + iy = r \cos \theta + i r \sin \theta$$

$$= r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta} \rightarrow z = r e^{i\theta}$$

$\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$

درستی

$$1) z = r e^{i\theta} = r e^{i(\theta + 2k\pi)} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2) z = r e^{i\theta} \rightarrow \bar{z} = r e^{-i\theta}$$

$$3) (r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$4) (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

محاسبه ریشه n ام یک عدد

$$\sqrt[n]{z} = w \rightarrow w^n = z$$

$$z = r e^{i\theta} = r e^{i(\theta + 2k\pi)}$$

$$\sqrt[n]{z} = r^{1/n} e^{i \frac{(\theta + 2k\pi)}{n}} \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

۱۱
۴۵۷

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} \right)^{10}$$

$$1+\sqrt{3}i = re^{i\theta} = re^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+3} = 2 \\ \tan \theta = \frac{y}{x} = \sqrt{3} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$1-\sqrt{3}i = \overline{1+\sqrt{3}i} = 2e^{-i\pi/3}$$

$$\begin{aligned} \text{نتیجه} &= \left(\frac{2e^{i\pi/3}}{2e^{-i\pi/3}} \right)^{10} = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}} \right)^{10} = e^{i\frac{20\pi}{3}} = e^{i(\frac{20\pi}{3} - 2\pi)} = e^{i\frac{14\pi}{3}} \\ &= e^{i\frac{14\pi}{3}} = \cos \frac{14\pi}{3} + i \sin \frac{14\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

اگر A و B و C زوایای مثلث باشند مطلوبست (معادله ۹)

۲۲۷۴۸

$$(\sin A + i \cos A)^{1389} (\sin B + i \cos B)^{1389} (\sin C + i \cos C)^{1389}$$

$$\sin A + i \cos A = i(\cos A + i \sin A) = i(e^{iA}) = ie^{-iA}$$

$$\text{نتیجه} = (ie^{-iA} e^{-iB} e^{-iC})^{1389} = (-ie^{-i(A+B+C)})^{1389}$$

$$= (-ie^{-i\pi})^{1389} = (-i)^{1389} = i(i^2)^{694} = i \times 1 = i$$

$$\cos(-\pi) + i \sin(-\pi) = -1$$

$$Z = \frac{1+i}{1+i+(1-i)^2}$$

این از لقب خارج در زیر را بسازید

۱۵
۴۵۸

$$۱) \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$$

$$۲) \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$$

$$۳) \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$$

$$۴) \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$$

$$Z = \frac{1+i}{1+i+1^2+i^2-2i} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i^2+2i}{1+1} = i = re^{i\theta}$$

$$x=0, y=1 \rightarrow r=1, \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow \sqrt[3]{Z} = e^{i\frac{14\pi}{3}} = e^{i\frac{(4k+1)\pi}{3}} = \cos \frac{(4k+1)\pi}{3} + i \sin \frac{(4k+1)\pi}{3}$$

$k=0 \rightarrow 1$

$$i = \sqrt{-1} \rightarrow i^2 = -1$$

$$۱) e^{-\pi/2}$$

$$۲) e^{\pi/2}$$

$$۳) e^{i\pi/2}$$

$$۴) e^{-i\pi/2}$$

۱۸
۴۵۹

$$i^k = (e^{i\pi/2})^k = (e^{(2k\pi + \pi/2)i})^k = e^{(2k\pi + \pi/2)i}$$

$$\rightarrow i^k = e^{-(2k\pi + \pi/2)} \quad k \in \mathbb{Z}$$

مکان هندس در صفحه مختلط



$$۱- |z - z_0| = r > 0 \Leftrightarrow \text{دایره}$$

۲- بیض



$$|z - z_1| + |z - z_2| = 2r > 0 \quad \text{طول قطری AB}$$

$$نکته: |z - z_1| + |z - z_2| = 2r > 0 \quad \text{چون شکل است}$$

$$\text{الف: اگر } |z_1 - z_2| < 2r \leftarrow \text{بیض است}$$

$$\text{ب: اگر } |z_1 - z_2| > 2r \leftarrow \text{هی است}$$

$$\text{ج: اگر } |z_1 - z_2| = 2r \leftarrow \text{پاره خطی واصل بین } z_1 \text{ و } z_2$$

۳- هندلوس



$$||z - z_1| - |z_1 - z_2|| = 2r > 0$$

$$نکته: ||z - z_1| - |z_1 - z_2|| = 2r > 0 \quad \text{چون شکل است}$$

$$\text{الف: اگر } |z_1 - z_2| > 2r \leftarrow \text{هندلوس است}$$

$$\text{ب: اگر } |z_1 - z_2| < 2r \leftarrow \text{هی است}$$

$$\text{ج: اگر } |z_1 - z_2| = 2r \leftarrow \text{دو نیم خط}$$

$$۴- \left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = k > 0$$

الف: اگر $k=1$ خط (عمود منصف)

ب: اگر $k \neq 1$ دایره شعاع $R = \frac{k}{|1-k^2|} |z_2 - z_1|$

۱۴. ۱۲.۵ ج ۲ مکان هندسی z در رابطه $\left| \frac{z-3}{z+3} \right| = 2$ می‌شکلی است؟ (عبدالله ۸۹)

تبدیل دهیم $z = x + iy$ و ساده کنیم

$$\frac{|x-3+iy|}{|x+3+iy|} = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}{\sqrt{(x+3)^2+y^2}} = 2 \Rightarrow \frac{(x-3)^2+y^2}{(x+3)^2+y^2} = 4$$

$$4((x+3)^2+y^2) = (x-3)^2+y^2 \rightarrow 3x^2+3y^2+30x+27=0$$

$$\rightarrow x^2+y^2+10x+9=0 \rightarrow (x+5)^2+y^2=16$$

دایره مرکز $(-5, 0)$ و شعاع ۴

مثال: با ازار مقادیر مختلف پارامتر $a > 0$ بررسی کنید مکان هندسی زیر چه شکلی است؟

(عبدالله ۸۸ و ۸۴)

$$|z-1| + |z+1| = a$$

$$z_1=1, z_2=-1 \rightarrow |z_1-z_2|=2$$

$$\begin{cases} 2 < a \rightarrow \text{بیضی} \\ 2 > a \rightarrow \text{تیری} \\ 2 = a \rightarrow \text{خط} \end{cases}$$

۱۲. ۱۲.۵ ج ۲ مکان هندسی z در رابطه زیر را تعیین کنید

$$|z-(2+i)| - |z+3+4i| = \sqrt{5}$$

$$z_1=2+i, z_2=-3-4i \quad |z_1-z_2|=|5+5i|=\sqrt{5^2+5^2}=\sqrt{50}=\sqrt{2}\cdot 5$$

چون $r=5 < 2r=\sqrt{50}$ (ب) $|z_1-z_2| < 2r$ تیری است

۴۵
۲ ج ۱۹

مکان هندسی z در رابطه زیر مشخص کنید
 $(a \text{ و } b \text{ دو عدد مختلط ثابت و } b \neq 0)$
 $z\bar{z} - \bar{a}z - a\bar{z} + a\bar{a} = b\bar{b}$

✓ دایره نیم دایره خط آبی

روش اول: چون گزیده ایم a و b رابطه نیستند پس a و b
 $\rightarrow z\bar{z} - \bar{a}z - a\bar{z} + a\bar{a} = b\bar{b} \rightarrow |z|^2 - |z|^2 = |b|^2$ دایره

روش دوم:

$$z(\bar{z} - \bar{a}) - a(\bar{z} - \bar{a}) = b\bar{b} \quad (\bar{z} - \bar{a})(z - a) = b\bar{b}$$

$$\rightarrow |z - a|^2 = |b|^2 \rightarrow |z - a| = |b|$$

دایره مرکز a و شعاع $|b|$

مکان هندسی نقطه (x, y) متناظر با عدد مختلط $z = x + iy$ که $z = \cosh(r + it)$ کدام است

$$\begin{aligned} x + iy &= \cosh(r + it) = \frac{e^{r+it} + e^{-r-it}}{2} \\ &= \frac{1}{2}(e^r \cdot e^{it} + e^{-r} \cdot e^{-it}) = \frac{1}{2}(e^r(\cos t + i \sin t) + e^{-r}(\cos t - i \sin t)) \\ &= \frac{1}{2}(e^r + e^{-r}) \cos t + \frac{1}{2}(e^r - e^{-r}) \sin t \cdot i \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \rightarrow \text{بیضی}$$

$a \neq b$

فصل هفتم

دنباله‌ها

تعریف: دنباله‌ای که نامش آن زیر مجموعه \mathbb{N} باشد دنباله نامیده می‌شود. معمولاً آن را

با نماد a_n نمایش داده و به a_n جمله عمومی می‌گویند. $\{1, 2, 3, \dots\}$ و \mathbb{N}

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$
اعضای دنباله (بر)

۱. دنباله a_n را صعودی می‌نامیم هرگاه: $a_n \leq a_{n+1}$

۲. دنباله a_n را کراندار می‌نامیم هرگاه اعداد α و β موجود باشند به طوری که: $\alpha \leq a_n \leq \beta$

$\alpha \leq a_n \leq \beta$
کران بالا کران پایین

مثال: دنباله $a_n = \frac{\ln n}{n}$ و $n \geq 3$ آیا کراندار است؟

$f(x) = \frac{\ln x}{x}$ و $x \geq 3$ $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$ نزولی است

$(\ln e > \ln 3 > \ln x \rightarrow x \geq 3)$ پس a_n نزولی است

برای بررسی کراندار بودن $f(x)$ را صعودی بررسی می‌دهیم

$f(3) = \frac{\ln 3}{3}$ و $f(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ $0 < f(x) \leq \frac{\ln 3}{3}$

$\rightarrow 0 < a_n \leq \frac{\ln 3}{3} \rightarrow$ پس a_n کراندار است

تعریف: اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$ می‌گویند دنباله a_n به L همگراست و در غیر اینصورت a_n واگراست

روش محاسبه دنباله ها $(n \rightarrow +\infty)$

۱- تمام قواعد محاسبه در توابع در مورد دنباله ها درست است

۲- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{k} = 1$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ $(k > 0)$

۳- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^p} = 1$ $(p > -1)$ نکته:

$1^p + 2^p + \dots + n^p \sim \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2}$

۴- قوانین رشد $n^n \gg n! \gg a^n$

۵- دستور استرلینگ $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

$\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e} \rightarrow \sqrt[n]{(kn)!} \sim \left(\frac{kn}{e}\right)^k$

۶- اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$ آنگاه $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$

پس می‌توان نوشت: $\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \rightarrow L$ $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \rightarrow L$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n+\sqrt{n}} = 1$ ۲۷
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{(n+\sqrt{n})\left(\frac{n}{n-1} - 1\right)} = e^{\frac{n+\sqrt{n}}{n-1}}$ ۲۸

$\sim e^{\frac{n}{n}} = e^{1/2}$

$a_n = \frac{(n+1)^{n^2}}{n^n} \sim \frac{e^n}{n^n} \rightarrow +\infty$ ۲۹

$\sim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \sim e^{n^2(1 + \frac{1}{n} - 1)} = e^n$ ۳۰

چون $e > 2$ پس رشد صورت از مخرج بیشتر است

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$ ۳۱

عبارت $\frac{1^{1/2} + 2^{1/2} + \dots + n^{1/2}}{n\sqrt{n}}$ ۳۲
 $\stackrel{(۳)}{=} \frac{n^{3/2}}{n^{3/2}} = \frac{2}{3}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n+1)!}{n!}}$$

۱۱
۴۹۵

$$= \frac{1}{n} \frac{\sqrt[n]{2n+1} \sqrt[n]{(2n)!}}{\sqrt[n]{n!}} \sim \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^2}{n \cdot \frac{n}{e}} = \frac{4}{e}$$

$$(2n+1)! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 2n \times (2n+1) = (2n+1)(2n)!$$

$$a_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2) \dots (n+n)}$$

مثال:

روش اول: عبارت زیر را یکجا رادری کنیم و تقسیم می کنیم

$$a_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{1 \times 2 \times \dots \times n(n+1) \dots (n+n)} = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} \sim \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^2}{n \left(\frac{n}{e}\right)} = \frac{4}{e}$$

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2) \dots (n+n)}{n^n}} = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right) \dots \left(1+\frac{n}{n}\right)}$$

$$\ln(a_n) = \frac{1}{n} (\ln(1+\frac{1}{n}) + \ln(1+\frac{2}{n}) + \dots + \ln(1+\frac{n}{n}))$$

$$\frac{1}{n} f(c_k) = \text{مجموع ریک} = \frac{1}{n} \ln(1+\frac{k}{n}) \rightarrow f(c_k) = \ln(1+\frac{k}{n})$$

$$\ln(\text{جواب}) = \int_0^1 \ln(1+x) dx = x \ln(1+x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x+1}{x+1} dx = \ln 2 - 1 + \ln 2 = 2 \ln 2 - 1 = \ln \frac{4}{e}$$

$$\text{جواب} = \frac{4}{e}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{n^2}}{((n!)^n)}$$

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

۴۳
۲۸.۸۴۴

$$\sim \frac{n^{n^2}}{n^{n^2}}$$

$$\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\right)^n = \left(\frac{n}{e}\right)^{n^2} \cdot n^{n^2} (2\pi n)^{n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{n} - 1) \ln n$$

۳۷
۲ ج ۴۴۸

$$\text{حالت } = (e^{\frac{1}{n} \ln n} - 1) \ln n \sim (\frac{1}{n} \ln n) \ln n = \frac{(\ln n)^2}{n} \rightarrow 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} (1 + \sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \dots + \sqrt[n]{e^{n-1}})$$

۲۶
۵۴۷

$$\frac{1 + \sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \dots + \sqrt[n]{e^{n-1}}}{n} \xrightarrow{a_1 + \dots + a_n} e$$

$$a_n = \frac{\sqrt[n]{e^{n-1}}}{n} = e^{\frac{n-1}{n}} \sim e^{n/n} = e$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{p} \times \frac{1}{q} \times \frac{1}{r} \times \dots \times \frac{1}{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n} \quad \text{مثال}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = r$$

نکته: در سوالات مشابه اصولاً جملات اول n دارند و عدد هستند

تذکره: اگر دنباله a_n که حد آن موجود است به صورت مجموع n جمله باشد، آنرا

a_n می نامیم. چنانچه دنباله ها مناسب b_n و c_n را طوری بیابیم که $c_n \leq a_n \leq b_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = L \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$$

ماژیم و میسیم جملات موجود در a_n (معمولاً جمله اول، آخر) انجام می شود

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

۳
۴۸۹
حد دنباله a_n را بیابید

روش اول: هر جمله در مجموع بالا به صورت $\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ است که بین جمله اول و آخر

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

قرار دارد $(1 \leq k \leq n)$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$$

روش دوم $a_n \sim \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{n \text{ terms}} = 1 \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$

روش سوم: مجموع ریمان \rightarrow تبدیل معین

$$\frac{1}{n} f(c_k) = \text{حد متوسط} = \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$$

$$\rightarrow f(c_k) = \frac{n}{\sqrt{n^2+k}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}$$

چون c_k را نمی توان مشخص کرد \rightarrow مجموع ریمان نیست

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{1}{n}\right)^1 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^n \right)^{\frac{1}{n}}$ ۱/۸۳۹ ج ۲ عمران ۹۱

$$\left(\frac{k}{n}\right)^k \leq \left(\frac{n}{n}\right)^n = 1 \rightarrow \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^k \leq n \checkmark$$

ترجمه: لند کل مجموع از جمله اول بزرگتر است

$$n \geq \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^k \geq \frac{1}{n} \xrightarrow{\text{توان } \frac{1}{n}} n^{\frac{1}{n}} \geq \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^k \right)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

۱- جواب سوال \rightarrow

دنباله بازگشته

تعریف: هرگاه در یک دنباله، رابطه‌ای بین a_n و a_{n-1} برقرار باشد آن را رابطه بازگشته می‌گویند.

۱- چنانچه دنباله بازگشته همگرا باشد، فرض می‌کنیم $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$ و در این صورت $a_{n+1} \rightarrow L$ و $a_{n-1} \rightarrow L$ و با اعمال حد بر رابطه بازگشته L را محاسبه می‌کنیم.

۲- اگر $a_n = f(a_{n-1})$ و $f(x)$ صعودی باشد آنگاه:

الف- اگر $a_1 < a_2$ آنگاه a_n صعودی است

ب- اگر $a_1 > a_2$ آنگاه a_n نزولی است

۳- دنباله صعودی و از بالا کراندار یا دنباله نزولی و از پایین کراندار همگرا خواهند بود.

مثال ۱۰.۷: $a_1 = \sqrt{2}$ و $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$ حد آن را بیابید.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L \rightarrow a_{n-1} \rightarrow L$$

$$L = \sqrt{2 + L} \rightarrow L^2 = 2 + L \rightarrow L^2 - L - 2 = 0 \rightarrow L = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \rightarrow L = 2 \text{ یا } L = -1$$

پس $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$ و $a_1 = \sqrt{2}$ الف: دنباله a_n صعودی؟ نزولی؟

ب: کراندار؟ پس کران؟

$$f(x) = \sqrt{2 + x} \rightarrow a_n = f(a_{n-1})$$

پس a_n صعودی است $n=2: a_2 = \sqrt{2 + a_1} = \sqrt{2 + \sqrt{2}} > \sqrt{2} = a_1$

پس از پایین کراندار است $a_n \rightarrow a_n \geq a_1 = \sqrt{2}$ صعودی

بررسی می‌کنیم که آیا ۲ کران بالاست یعنی آیا $a_n \leq 2$

$$n=1: a_1 = \sqrt{2} < 2 \quad n=2: a_2 = \sqrt{2 + a_1} < \sqrt{2 + 2} = 2 \quad \text{فرض می‌کنیم } a_{n-1} \leq 2 \rightarrow a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}} < \sqrt{2 + 2} = 2$$

پس بنا بر استقرا: اگر $a_n < 2$ و a_n کراندار است، بنابراین از (۳) دنباله a_n همگرا است.

تعریف فرض کنید a_n دنباله است. تعریف می کنیم

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_k = \sum_{n=1}^k a_n$$

دنباله S_k سری با جمع عمومی a_n گفته می شود.

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} S_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \text{سری}$$

۱- سری هندسی، q و $a \neq 0$ اعداد حقیقی

$$a + aq + aq^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q} \sim \text{محدوده}$$

محدوده \sim $|q| < 1$ \leftrightarrow همگراست

$$a + aq + \dots + aq^{n-1} = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}, \quad q \neq 1$$

تعداد $= n$

۲- سری تیلور

$$\sum_{n=1}^k (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{k+1}$$

الف

$$\sum_{n=1}^k (a_n - a_{n+r}) = (a_1 + a_r) - (a_{k+1} + a_{k+r})$$

ب

دو جمله از اول

دو جمله از آخر

۳- p سری با سری ریمان

$$p > 1 \leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ همگراست}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{-1} - \frac{1}{7} \right) = \frac{1}{4} \left(-\frac{8}{7} \right) = -\frac{2}{7}$$

تیلور

$$\frac{2}{7}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\underbrace{n-1}_{a_n}} - \frac{1}{\underbrace{n+1}_{a_{n+2}}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{4} - \frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty} \right) = \frac{3}{4} \quad \frac{26}{d.a}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{\frac{n+1}{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1} - \ln \frac{n+1}{n+2} \quad \frac{2d}{d.a}$$

$$\text{تکویس} \quad \ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{3} - \ln 2$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+n} \right) \quad \frac{21}{d.f}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\dots+k} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \quad \text{تکویس} = 2 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{\infty} \right) = 2$$

$$\begin{aligned} 1+2+\dots+k &= \frac{1}{2} k(k+1) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^{n+1}}{1/2^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n + 2 \left(\frac{2}{2} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left(\frac{2}{2} \right)^n \quad \frac{31}{d.6} \\ &= \frac{1/2}{1-1/2} + \frac{2}{1-2/2} = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\theta)}{r^k} \quad \frac{2-11}{d.2}$$

$$e^{k\theta i} = \cos(k\theta) + i \sin(k\theta) \quad \text{ص دایره}$$

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{k\theta i}}{r^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(e^{i\theta})^k}{r - e^{-i\theta}}$$

$$\begin{aligned} |z| &= \left| \frac{e^{i\theta}}{r} \right| = \frac{1}{r} |\cos\theta + i\sin\theta| \\ &= \frac{1}{r} \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \frac{1}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1 - 1/r e^{i\theta}}{-1 + r e^{i\theta}} &= \frac{r - e^{i\theta}}{-1 + r \cos\theta + r i \sin\theta} \\ \frac{1 - r(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}{2 \cos\theta} &= \frac{1 - r \cos\theta}{1 - r \cos\theta} \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\theta)}{3^k} = \operatorname{Im}(z) = \frac{3 \sin \theta}{1 - 4 \cos \theta}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\theta)}{3^k} = \operatorname{Re}(z) = \frac{-1 + 3 \cos \theta}{1 - 4 \cos \theta}$$

آزمون هاگ هدراس

(۱) اگر a_n هدراس باشد آنگاه $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ پس اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \neq 0$ آنگاه

a_n و اراس است

(۲) آزمون برای سری نامقی ($a_n \geq 0$)

الف: آزمون مقایسه اگر $a_n \geq b_n$

۱- اگر a_n هدراس باشد آنگاه b_n هدراس است

۲- اگر b_n و اراس باشد آنگاه a_n و اراس است

ب: آزمون مقایسه حدی اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$

۱- اگر $L > 0$ و b_n هدراس باشد آنگاه a_n هدراس است

۲- اگر $L < 0$ و b_n و اراس باشد آنگاه a_n و اراس باشد

۳- اگر $L = 0$ و b_n و اراس باشد آنگاه a_n هدراس و b_n هدراس یا هدراس و اراس باشد

تذکر: اگر وقتی $n \rightarrow +\infty$ داشته باشیم a_n یا b_n آنگاه a_n و b_n هدراس

هدراس یا هدراس و اراس باشد

مثال: بررسی کنید $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(L \ln n)^p}$ هدراس است یا و اراس $b_n = \frac{1}{n^p}$ ($p > 0$)

اگر $p = 1$ یا $0 < p < 1$ آنگاه $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ و اراس است $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^p}{(L \ln n)^p} = +\infty$

و $L = +\infty$ پس a_n و اراس است

نکته: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(Ln)^n}$ از $n=2$ شروع می‌کنیم و از $n=1$ شروع نمی‌کنیم.

مثال: بررسی کنید سری زیر همگرا هستند یا وگرنه.

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{2n^3-1}$ $\frac{n}{2n^3} = \frac{1}{2n^2}$ جمله عمومی

چون $p=2 > 1$ پس $\sum \frac{1}{n^2}$ همگراست پس با آزمون هم انزیر سری داده شده همگراست.

۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}}$

چون $p=1/2 < 1$ پس $\sum \frac{1}{n^{1/2}}$ واگراست \leftarrow آزمون \leftarrow سری داده شده واگراست

مقادیر p را خود باید که در زیر همگرا باشد $\frac{4}{2} \times 2.3$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^p}$ $\frac{n+1}{n^p} \sim \frac{n}{n^p} = \frac{1}{n^{p-1}}$ \leftarrow همگرا $\leftarrow p-1 > 1 \Leftrightarrow p > 2$

ج: آزمون ریشم: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$

د: آزمون نسبت: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$

ه: اگر $L < 1$ آنگاه $\sum a_n$ همگراست

و: اگر $L > 1$ آنگاه $\sum a_n$ واگراست

مثال: بررسی کنید سری زیر همگرا هستند یا وگرنه.

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n+1)} a_n$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n+1}$

$\sim e^{(n+1)} \left(\frac{n-1}{n+1} - 1 \right) = e^{\frac{-2(n+1)}{n+1}} = e^{-2} = L$

چون $L = e^{-2} = \frac{1}{e^2} < 1$ پس سری همگراست $(f(x))^{g(x)} \sim e^{g(f(x))}$

۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

آزمون ریش

ریش دوم، (آزمون نسبت)

$$\sqrt[n]{\frac{2^n n!}{n^n}} = \frac{2 \sqrt[n]{n!}}{n} \sim \frac{2 \left(\frac{n}{e}\right)}{n} = \frac{2}{e} < 1$$

ریش دوم، (آزمون نسبت)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{2(n+1) \cdot n^n}{(n+1)^{n+1}} = 2 \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

ریش دوم، (آزمون نسبت)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 e^{n \left(\frac{n}{n+1} - 1\right)} = 2 e^{-\frac{n}{n+1}} \sim 2 e^{-1} = \frac{2}{e} < 1$$

۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh n}{2^n + 3^n}$

$$\sqrt[n]{\frac{\cosh n}{2^n + 3^n}} = \frac{\sqrt[n]{\frac{1}{4}(e^n + e^{-n})}}{\sqrt[n]{2^n + 3^n}} \sim \frac{\sqrt[n]{\frac{1}{4}e^n}}{\sqrt[n]{3^n}} = \frac{1}{3}$$

۱- آزمون انتگرال

اگر $a_n = f(n)$ تابع $f(x)$ مثبت، نزولی و متوسعه باشد آنگاه
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\int_1^{\infty} f(x) dx$ هر دو همگرا یا هر دو واگرا می‌باشند.

مثال: بررسی کنید $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ همگراست یا واگرا؟
 $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$

$$\int_2^{\infty} f(x) dx = \int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} \xrightarrow{x=\ln x} \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2}$$

چون $p=2 > 1$ پس انتگرال همگراست و لذا بسامه آزمون انتگرال همگراست.

مثال: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ همگراست $\Leftrightarrow p > 1$

۴۳
۵۱۷

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} \quad \text{و} \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^3-1}$$

$$\frac{n^2}{2n^3-1} \sim \frac{n^2}{2n^3} = \frac{1}{2n}$$

برای آزمون اشتدال استفاده می کنیم

$$f(x) = \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}$$

ثبت، پیوسته، نزولی

$$\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \stackrel{x=\sqrt{t}}{\substack{dx = \frac{dt}{2\sqrt{x}}}} \int_{-\infty}^{+\infty} 2e^{-t} dt = -2e^{-t} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = -2e^{-\infty} = 0$$

صفر اشتدال می باشد

پس سری هم همگراست

(۳) آزمون سری متناوب

تعریف: چنانچه $a_n > 0$ و a_n نزولی باشد و $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ آنگاه سری متناوب $\sum (-1)^n a_n$ همگراست

قضیه: اگر $a_n > 0$ و a_n نزولی و $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ آنگاه سری متناوب $\sum (-1)^n a_n$ همگراست

(۴) آزمون قدر مطلق: اگر $\sum |a_n|$ همگرا باشد آنگاه $\sum a_n$ همگراست

تعریف: اگر $\sum |a_n|$ همگرا باشد آنگاه $\sum a_n$ همگراست

تعریف: اگر $\sum |a_n|$ و $\sum a_n$ همگرا باشند و $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ آنگاه $\sum a_n$ همگراست

مثال: بررسی کنید سری $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ همگراست یا نه

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad \text{سری قدر مطلق} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sim \frac{1}{2n}$$

چون $p=1$ پس سری قدر مطلق واگراست اما سری داده شده متناوب است

پس این سری همگراست (آزمون ۳) $0 < a_n = \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0$

۲) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^{kn+m}, k > 0, m \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R^k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

مثال: بازه همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n(n+1)}$ را بیابید.
 که طبق مقدار زیر آن $\frac{1}{2^n(n+1)}$ از آن همگرایی

$a_n = \frac{1}{2^n(n+1)}$ مرکز: $x_0 = -3$

* ابتدا شعاع همگرایی را مشخص می‌کنیم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n \sqrt[n]{n+1}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{R} \rightarrow R = 2 \rightarrow |x+3| < 2$$

$$\rightarrow -2 < x+3 < 2 \rightarrow -5 < x < -1$$

* همیشه وضع سر را در ابتدا و انتها تعیین می‌کنیم

$$x = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n} \text{ وار}$$

$$x = -5 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \xrightarrow{\text{مقاربت}} \text{همگرا} \rightarrow \frac{1}{n+1} < 0$$

بازه همگرایی: $[-5, -1)$

مثال: شعاع همگرایی سر را بیابید

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{3^n+2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n+3^n} (x+\frac{1}{2})^n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt[n]{2^n+3^n}} = \frac{2}{3} = \frac{1}{R} \rightarrow R = \frac{3}{2}$$

$$۲) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{n!} \right) (x-1)^{n+1} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2+1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2+1}}{\sqrt[n]{n!}} \sim \frac{1}{n/e}$$

$$\rightarrow 0 = \frac{1}{R'} \rightarrow R = +\infty$$

$$۳) \sum_{n=1}^{\infty} (3+(-1)^n)^n (x-1)^{2n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} |3+(-1)^n| = \begin{cases} 4 & \text{زوج } n \\ 2 & \text{فرد } n \end{cases}$$

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 4 = \frac{1}{R}$$

$$R' = 1/4 \rightarrow R = 1/4$$

نکته: در محاسبه شعاع $\sum a_n (x-x_0)^{k_n+m}$ چنانچه $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ چند عدد مختلف بدست آید، بزرگترین حد در فرمول محاسبه می شود

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R^k} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

در شعاع همگرایی $\sum a_n x^n$ برابر R باشد شعاع همگرایی $\sum \frac{n!}{n^n} a_n^2 x^n$ همگرا

$$\frac{۵۶}{۵۲۳} \quad ۱) \frac{1}{e} R^2 \quad ۲) R^2 \quad ۳) e R^2 \quad ۴) e^2 R$$

$$\frac{1}{R'} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} a_n^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \sqrt[n]{a_n^2} = \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \right)^2 = \frac{1}{e R^2}$$

صورت سوال

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n(\ln n)^2}$$

$$۱) [-1, 3] \quad ۲) [1, 3] \quad ۳) [-1, 1] \quad ۴) [-1, 1]$$

$$\frac{۵۶}{۵۲۴}$$

روشن اول! وسط بازه همگرایی مرکز سری توانی است و در این سوال نقطه وسط گزیده ۲ با مرکز یعنی $x=2$ یک است \rightarrow گزیده ۲

$$a_n = \frac{1}{n(\ln n)^2} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n} (\sqrt[n]{\ln n})^2} = 1 = \frac{1}{R'}$$

$$\rightarrow R=1 \rightarrow |x-2| < 1 \rightarrow 1 < x < 3 \rightarrow \text{بازه همگرایی} = [1, 3]$$

$$x=3, \sum \frac{1}{n(\ln n)^2} \xrightarrow{P=2>1} \text{همگر} \quad x=1, \sum \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2} \xrightarrow{\text{متناوب}} \text{همگر}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n!}{n^n} \right) x^n$$

۴. حاصل همداری
۵۲۴

۱) $(-1, 0)$

۲) $(-1, 1)$

۳) $(0, e)$

۴) $(-e, 0)$

کانه است R را بدست آوریم

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e} = \frac{1}{R} \rightarrow R = e \rightarrow |x| < e \rightarrow -e < x < e$$

بررسی دقیق تر: در $x = \pm e$ بررسی می کنیم

ابتدا واکنش را به ازای $x = e$ بررسی می کنیم

$$n! \sim \left(\frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n}$$

$$\frac{n!}{n^n} e^n \sim \frac{\left(\frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n}}{n^n} e^n = \sqrt{2\pi n} \rightarrow +\infty$$

$n \rightarrow +\infty$

چون حد مثبت می شود پس شرط لازم را ندارد و اگر

$$x = -e: \sum (-1)^n \frac{n!}{n^n} e^n$$

$$\sim (-1)^n \sqrt{2\pi n} \rightarrow \pm \infty \neq 0$$

شرط لازم را ندارد و اگر است

$$(-e, e) = \text{بازه همداری}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^{2n}$$

۱۴
۵۱۸

۱) $|x| < 2$

۲) $(-\infty, +\infty)$

۳) $|x| < 4$

۴) $0 < x < 2$

کانه است R را بدست آوریم

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{(\sqrt[n]{n!})^2}{\sqrt[n]{(2n)!}} \sim \frac{(\frac{n}{e})^2}{(\frac{2n}{e})^2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{R^2}$$

$$\rightarrow R = 2 \rightarrow |x| < 2$$

بررسی دقیق تر در $x = \pm 2$ نیاز به بررسی دارد

$$x = \pm 2 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}$$

$$\frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} \sim \frac{4^n \left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\right)^2}{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n}} = \frac{2n}{\sqrt{2\pi n}} \rightarrow +\infty$$

$n \rightarrow +\infty$

چون شرط لازم را ندارد پس واکراست $(-2, 2) =$ بازه همگرایی

نکته: هرگاه سری غیر توانی مطرح نشود برابر با متن بازه همگرایی آن مانند سری عدد ریاضی می‌نیم. معمولاً جمله عمومی را b_n بنویسیم و $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n} = L$ را محاسبه می‌کنیم. حال $L < 1$ را حل می‌کنیم. یک بازه (باز) برابر x بدست آید سپس $L = 1$ را بررسی می‌کنیم تا بازه بدست آید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x-1}{x} \right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \frac{x-1}{x} \right| = \left| \frac{x-1}{x} \right| = L$$

$$L = \frac{|x-1|}{|x|} < 1 \rightarrow |x-1| < |x| \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2 - 2x + 1 < x^2$$

$$\rightarrow -1 - 2x < 0 \rightarrow x > -\frac{1}{2}$$

$$L = 1 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

حال $L = 1$ را بررسی می‌کنیم

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

$$= \text{بازه همگرایی} = \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n x}$$

مثال:

بازه همگرایی

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{(\sqrt[n]{n})^x} = |x| = L$$

$$\rightarrow L = |x| < 1 \rightarrow -1 < x < 1$$

$$L = |x| = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 1: \sum \frac{1}{n} \\ x = -1: \sum \frac{(-1)^n}{n} \end{cases} \text{ و آرا}$$

$$\rightarrow x = -1: \sum \frac{(-1)^n}{n} = \sum n(-1)^n$$

چون حد جمله عمومی $n x (-1)^n$ صفر نمی شود و آرا استبازه همگرایی $(-1, 1)$

سری تیلور ویک لورن

تعریف: اگر $f(x)$ در x_0 تا هر مرتبه مشتق پذیر باشد آنگاه سری تیلور $f(x)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots$$

و چنانچه $x_0 = x$ آن سری مک لورن می گوئیمنکته ۱: سری تیلور حول x_0 تنها سری توانی است که در یک بازه همگرایی حول x_0 $f(x)$ مساوی می شود.نکته ۲: چند جمله ای تیلور $f(x)$ حول x_0 از درجه k عبارت است از:

$$P_k(x) = \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

توجه کنید که از ازا k عبارت $P_k(x)$ همان تقریب خطی می باشد.بنابراین چند جمله ای تیلور تقریباً با $f(x)$ برابر است $f(x) \approx P_k(x)$

* اگر $P_k(x)$ را به عنوان مقدار تقریب $f(x)$ حول x_0 انتخاب کنیم، عدد

e بین x_0 و x موجود است که

$$R_k(x) = f(x) - P_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!} (x - x_0)^{k+1}$$

مثال: اگر برای محاسبه مقدار تقریب e از سه تیلر $f(x) = e^x$ حول $x_0 = 1$ تا زوج e استفاده کنیم، حد اکثر مقدار خطا چقدر است؟

هنگامی که $k=4 \rightarrow R_4(x) = \frac{f^{(5)}(c)}{5!} (x-1)^5$ و $x_0=1$ و $x=e$

و لذا $0 < c < 1$ موجود است که $f^{(5)}(x) = e^x$

$$R_4(1) = \frac{f^{(5)}(c)}{5!} = \frac{e^c}{120} < \frac{e}{120} < \frac{1}{120}$$

خطا محاسبه حد اکثر $1/120$ و $1/4$ می باشد $(c < 1 \rightarrow e^c < e^1 = e)$

مثال: سری تیلر $f(x) = \frac{1}{1-x}$ حول صفر را بسازید. $x_0 = 0$

سری تیلر: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, f'''(x) = \frac{2 \times 3}{(1-x)^4}$$

$$\rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \rightarrow f^{(n)}(0) = n!$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad R=1 \quad -1 < x < 1$$

مثال: سری تیلر $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ را بسازید.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \xrightarrow{x \rightarrow -x^2} \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n \rightarrow \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

مثال: سری تیلر $h(x) = \ln(1-x)$ را بسازید.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \xrightarrow{\int} -\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \rightarrow \ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

ضرب x^3 در $\ln(1+x+x^2)$ را بیابید. ۳۱
۵۷۱

روش اول: ضرب x^3 برابر $\frac{f''(x)}{3!}$ است. (جولان است)

روش دوم: $x = x + x^2 \sim x \rightarrow x \sim x \rightarrow x^2 \sim x^2$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

$$\ln(1+x+x^2) = (x+x^2) - \frac{(x+x^2)^2}{2} + \frac{(x+x^2)^3}{3} - \dots$$

$$x^3 \text{ ضرب } 0 + -1 + 1/3 = -2/3$$

$$-1/3 (x+x^2)^2 \rightarrow x^3 \text{ جمله } -1/3 (2xb) = -ab = -x^2 \rightarrow -1$$

$$1/3 (x+x^2)^3 \sim 1/3 x^3 \rightarrow 1/3$$

ضرب x^4 در $e^{\sin x}$ را بیابید. ۷۲
۵۳۴

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$x = \sin x \sim x \rightarrow x \sim x \rightarrow x^4 \sim x^4$$

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^3 x}{6} + \frac{\sin^4 x}{24} + \dots$$

$$x^4 \text{ ضرب } 0 + 0 + (-1/4) + 1/24 = -1/8$$

$$1/24 \sin^2 x = 1/24 (x - x^3/4 + \dots)^2$$

$$x^4 \text{ جمله } 1/24 (2ab) = ab = -1/4 x^4$$

محدود $(1+x)^{1/x}$ در $x \rightarrow 0$ را بیابید. ۱۳
۲۴۴

$$(1+x)^{1/x} = e^{1/x \ln(1+x)} = f(x)$$

$$1/x \ln(1+x) = 1 - 1/2 x + 1/3 x^2 - \dots$$

$$f(x) = e^{1 - x/2 + x^2/3 - \dots} \xrightarrow{x \rightarrow 0} e^1 \cdot e^{-x/2} + x^2/3 + \dots$$

$$= e \left(1 + \left(-\frac{x}{1} + \frac{x^2}{1} - \dots \right) + \frac{1}{1} \left(-\frac{x}{1} + \frac{x^2}{1} - \dots \right)^2 + \dots \right)$$

$$\rightarrow f(x) = e \left(1 - \frac{1}{1}x + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1} \right) \frac{x^2}{2} + \dots \right)$$

$$(نکته) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^{n-1} = e^x$$

$$\frac{12}{532}$$

$$1) (x+1)e^x \quad 2) x^2 e^x$$

$$3) (x^2+1)e^x \quad 4) (x^2+x)e^x$$

$$n^n \text{ شش شش } \frac{1}{n+a} - \frac{1}{n} \text{ شش اشتغال}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \xrightarrow{\text{مشتق}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1} = e^x$$

$$x \text{ ضرب در } \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n = x e^x$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^{n-1} = e^x + x e^x \quad x \text{ ضرب در } \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n = x e^x + x^2 e^x$$

$$1 - 3x^2 + 5x^4 - 7x^6 + \dots \text{ حاصل را باید}$$

$$\frac{2}{1.8}$$

$$x - x^3 + x^5 - x^7 + \dots = \frac{x}{1+x^2}$$

$$q = -x^2 \text{ نسبت هندسی}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} 1 - 3x^2 + 5x^4 - \dots = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2 \text{ مثال}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \xrightarrow{\text{مشتق}} \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$x \text{ ضرب در } \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$x = \frac{1}{2} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} = 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$$

$$2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{2^n} \rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2 - 1 = 1$$

