بسمه تعالی

دانشکده علوم مهندسی	مدرس:	آزمون درس: معادلات دیفرانسیل
تاریخ آزمون: ۱۳۹۵/۱/۲۹	ساعت آزمون: ۱۶	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه
نیمسال دوم	سال تحصیلی: ۱۳۹۵- ۱۳۹۴	استفاده از کتاب یا جزوه درسی مجاز نیست

پردیس دانشکده های فنی

دانشگاه تهران

ردیف	نام و نام خانوادگی دانشجو: شماره دانشجویی:	نمره
۱	جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را با دانستن یک جواب $y_1(x)$ بدست آورید. $y' = 2tanx(secx) - y^2sinx \quad ; \quad y_1(x) = secx$	۲
۲	مسیرهای قائم بر دسته منحنیهای $y = Ln(tanx + c)$ را بیابید.	۱/۵
۳	جواب عمومی معادله دیفرانسیلی ناهمگن زیر را بدست آورید. $x^2y'' + xy' - y = \frac{1}{x+1} \quad ; \quad x > 0$	۲
۴	جواب عمومی معادله دیفرانسیلی ناهمگن زیر را بدست آورید. (محاسبه ضرایب لازم نیست) $y^{(4)} + y = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}sin(x) + e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$	۲

با آرزوی موفقیت

پاسخ تشریحی میان‌ترم معادلات دیفرانسیل - فروردین ۹۵

www.mrajabi.ir

۱-

$$y' = 2\tan x(\sec x) - y^2 \sin x$$

$$y_1 = \sec x$$

معادله فوق یک معادله ریکاتی است. قرار می‌دهیم

$$y = \sec x + \frac{1}{z} \quad (\mathrm{I})$$

$$y' = \sec x \tan x - \frac{z'}{z^2} \quad (\mathrm{II})$$

با جایگذاری (I) و (II) در معادله داریم:

$$\sec x \tan x - \frac{z'}{z^2} = 2\tan x \sec x - \left(\sec x + \frac{1}{z}\right)^2 \sin x$$

$$\rightarrow \sec x \tan x - \frac{z'}{z^2} = 2\tan x \sec x - \sec^2 x \sin x - \frac{2\sec x \sin x}{z} + \frac{\sin x}{z^2}$$

$$\xrightarrow{\times z^2} -z' = \cancel{\tan x \sec x\, z^2} - \cancel{\underbrace{\sec^2 x \sin x}_{\tan x \sec x}\, z^2} - 2\underbrace{\sec x \sin x}_{\tan x}\, z + \sin x \Rightarrow z' - 2\tan x\, z = -\sin x$$

$$\mu = e^{\int -2\tan x\, dx} = e^{\ln \cos^2 x} = \cos^2 x$$

$$\xrightarrow{\times \cos^2 x} z'\cos^2 x - 2\sin x \cos x = -\sin x \cos^2 x$$

$\Rightarrow (z\cos^2 x)' = -\sin x \cos^2 x$

$\Rightarrow z\cos^2 x = \int -\sin x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{3}\cos^3 x + C$

$u = \cos x$

$du = -\sin x \, dx$

$$\Rightarrow z = \frac{\frac{1}{3}\cos^3 x + C}{\cos^2 x}$$

$$y = \sec x + \frac{1}{z} \Rightarrow \boxed{y = \sec x + \frac{\cos^2 x}{\frac{1}{3}\cos^3 x + C}}$$

-۲

$y = \ln(\tan x + c) \Rightarrow e^y = \tan x + c$

$\Rightarrow y' e^y = \sec^2 x$

$y' \to -\frac{1}{y'}, \quad \Rightarrow -\frac{e^y}{y'} = \sec^2 x$

$\Rightarrow \frac{y'}{e^y} = -\frac{1}{\sec^2 x} = -\cos^2 x$

$\Rightarrow e^{-y} dy = -\cos^2 x \, dx \Rightarrow \int e^{-y} dy = -\int \cos^2 x \, dx$

$= -\int \frac{\cos 2x + 1}{2} dx = -\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{2}x + C$

$$\Rightarrow -e^{-y} = -\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{2}x + c$$

$$\Rightarrow e^{-y} = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x - c$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -\ln\left(\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x - c\right)}$$

۳-

$$x^2y'' + xy' - y = \frac{1}{x+1} \qquad x>0$$

معادله فوق یک معادله کوشی اویلر است.

ابتدا جواب معادله همگن را بدست می آوریم.

$$r(r-1)+r-1=0 \Rightarrow (r-1)(r+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} r=1 \\ r=-1 \end{cases}$$

$$y_h = c_1 x + \frac{c_2}{x}$$

حال با استفاده از روش لاگرانژ، یک جواب خصوصی برای این معادله بدست می آوریم:

$$y_p = c_1(x)\,x + c_2(x)\times\frac{1}{x}$$

$$c_1(x) = -\int \frac{y_2 f(x)}{w(x)}\,dx \qquad c_2(x) = \int \frac{y_1 f(x)}{w(x)}\,dx$$

$$w(x) = \begin{vmatrix} x & \frac{1}{x} \\ 1 & -\frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x} = -\frac{2}{x} \Big/ f(x) = \frac{1}{x^2(x+1)}$$

$$c_1(x) = -\int \frac{\frac{1}{x} \times \frac{1}{x^2(x+1)}}{-\frac{2}{x}}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2(x+1)}$$

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \\ C = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_1(x) = \frac{1}{2}\int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|x+1|\right) = \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{1}{x}\right)$$

$$c_2(x) = \int \frac{x \times \frac{1}{x^2(x+1)}}{-\frac{2}{x}}\, dx = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x+1|$$

$$y_p = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2 = \frac{1}{2}\left(x \ln\left|\frac{x+1}{x}\right| - 1\right)$$

$$- \frac{1}{2x}\ln|x+1|$$

جواب مسئله $= y_h + y_p$

[illegible]

۴-

$$y^{(4)}+y=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\sin x+e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$$

ابتدا جواب معادله همگن را بدست می‌آوریم:

$$r^4+1=0 \Rightarrow r^4=-1=\cos\pi+i\sin\pi \to r=\cos\left(\frac{2k\pi+\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi+\pi}{4}\right)$$

$k=0,1,2,3$

$$k=0 \to r=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$k=1 \to r=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$k=2 \to r=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$k=3 \to r=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

در نتیجه جواب‌های معادله $\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$ و $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$ است.
بنابراین جواب معادله همگن برابر خواهد بود با:

$$y_h=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)+e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(c_3\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+c_4\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$$

حال جواب خصوصی این معادله را بدست می‌آوریم، چون $\frac{\sqrt{2}}{2}\pm i$ ریشه معادله همگن نیست ولی $\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$ ریشه معادله همگن است داریم:

$$y_p=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(a_1\cos x+a_2\sin x\right)+xe^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(a_3\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+a_4\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$$

جواب نهایی $=y_h+y_p$