۲ حرکت در طول خط راست

پودمان ۲-۱ مکان، جابه‌جایی و سرعت متوسط

* ۱ در هنگام عطسه کردن شدید، چشم‌های شما ممکن است به مدت $۰٫۵۰\,\mathrm{s}$ بسته شوند. اگر در حین عطسه کردن مشغول رانندگی با تندی $۹۰\,\mathrm{km/h}$ باشید خودرو شما در این مدت چه مسافتی را می‌پیماید؟

حل: تندی خودرو (که ثابت فرض می‌شود) برابر است با

$$v = (۹۰\,\mathrm{km/h})(۱۰۰۰\,\mathrm{m/km})(۳۶۰۰\,\mathrm{s/h}) = ۲۵\,\mathrm{m/s}$$

بنابراین در مدت ۰٫۵۰ ثانیه، خودرو مسافت زیر را می‌پیماید:

$$d = vt = (۲۵\,\mathrm{m/s})(۰٫۵۰\,\mathrm{s}) \approx ۱۳\,\mathrm{m}$$

* ۲ سرعت متوسط خود را در دو حالت زیر حساب کنید: (الف) در طول یک مسیر راست، ابتدا مسافت $۷۳٫۲\,\mathrm{m}$ را با تندی $۱٫۲۲\,\mathrm{m/s}$ راه می‌روید و سپس مسافت $۷۳٫۲\,\mathrm{m}$ را با تندی $۳٫۰۵\,\mathrm{m/s}$ می‌دوید. (ب) در طول یک مسیر راست، ابتدا به مدت یک دقیقه با تندی $۱٫۲۲\,\mathrm{m/s}$ راه می‌روید و سپس به مدت یک دقیقه با تندی $۳٫۰۵\,\mathrm{m/s}$ می‌دوید. (پ) نمودار تغییرات x برحسب t را برای هر دو حالت رسم کنید و چگونگی به دست آوردن سرعت متوسط از روی نمودار را نشان دهید.

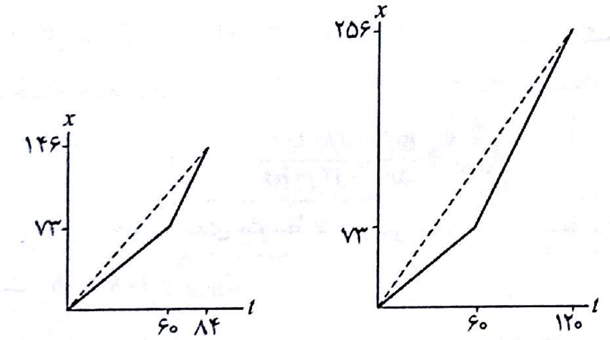
حل: (الف) از این واقعیت استفاده می‌کنیم که وقتی سرعت ثابت است، زمان از تقسیم کردن مسافت به سرعت تعیین می‌شود:

$$v_{\mathrm{avg}} = \frac{۷۳٫۲\,\mathrm{m} + ۷۳٫۲\,\mathrm{m}}{\dfrac{۷۳٫۲\,\mathrm{m}}{۱٫۲۲\,\mathrm{m/s}} + \dfrac{۷۳٫۲\,\mathrm{m}}{۲٫۸۵\,\mathrm{m}}} = ۱٫۷۱\,\mathrm{m/s}$$

(ب) وقتی سرعت v ثابت است، مسافت پیموده شده با حاصل‌ضرب vt برابر است:

$$v_{\mathrm{avg}} = \frac{(۱٫۲۲\,\mathrm{m/s})(۶۰\,\mathrm{s}) + (۳٫۰۵\,\mathrm{m/s})(۶۰\,\mathrm{s})}{۱۲۰\,\mathrm{s}} = ۲٫۱۴\,\mathrm{m/s}$$

(پ) نمودار تغییرات x برحسب t برای هردو حالت، در شکل‌های زیر رسم شده‌اند (مسافت برحسب متر و زمان برحسب ثانیه است). شکل سمت چپ دارای دو نمودار است که با خط‌های پر و خط‌چین رسم شده‌اند. نمودار رسم شده با خط‌های پر نشان می‌دهد که شیب خط اول ۱٫۲۲ و شیب خط دوم ۳٫۰۵ است. شیب خط‌چین، سرعت متوسط را نشان می‌دهد. در شکل سمت راست نیز شیب خط‌های پر به ترتیب ۱٫۲۲ و ۳٫۰۵ است. تفاوت اساسی در دو شکل این است که وقتی سرعت زیاد است، مسافت پیموده شده نیز زیاد است.



* ۳ خودرویی در یک جاده‌ی راست، مسافت $۴۰\,\mathrm{km}$ را با تندی $۳۰\,\mathrm{km/h}$ می‌پیماید. سپس، خودرو مسافت $۴۰\,\mathrm{km}$ دیگر را در همان جهت با تندی $۶۰\,\mathrm{km/h}$ طی می‌کند. (الف) سرعت متوسط خودرو در این سفر ۸۰ کیلومتری چقدر است؟ (فرض کنید خودرو در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند). (ب) تندی متوسط خودرو چقدر است؟ (پ) نمودار تغییرات x برحسب t را رسم کنید و نشان دهید چگونه می‌توان سرعت متوسط را از روی نمودار معین کرد.

حل: چون این مسافرت دو قسمت دارد، لذا جابه‌جایی‌ها در قسمت‌های اول و دوم حرکت را به صورت Δx_1 و Δx_2 و بازه‌های زمانی متناظر با آن‌ها را به ترتیب به صورت Δt_1 و Δt_2

در نظر می‌گیریم. چون مسئله یک بعدی است و هر دو جابه‌جایی در یک جهت صورت می‌گیرند، جابه‌جایی کل $\Delta x = \Delta x_۱ + \Delta x_۲$، و زمان کل مسافرت $\Delta t = \Delta t_۱ + \Delta t_۲$ است. با استفاده از تعریف سرعت متوسط در معادله‌ی ۲-۲ داریم

$$v_{avg} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x_۱ + \Delta x_۲}{\Delta t_۱+\Delta t_۲}$$

برای پیدا کردن تندی متوسط، می‌دانیم که اگر سرعت ثابت و مثبت باشد، تندی با بزرگی سرعت مساوی است و مسافت پیموده شده با بزرگی جابه‌جایی برابر است: $d = |\Delta x| = v\Delta t$

(الف) در قسمت اول حرکت، جابه‌جایی $\Delta x_۱ = ۴۰\,km$ و بازه‌ی زمانی برابر است با

$$t_۱ = \frac{(۴۰\,km)}{(۳۰\,km/h)} = ۱/۳۳\,h$$

به طور مشابه، در قسمت دوم حرکت، جابه‌جایی $\Delta x_۲ = ۴۰\,km$ و بازه‌ی زمانی برابر است با

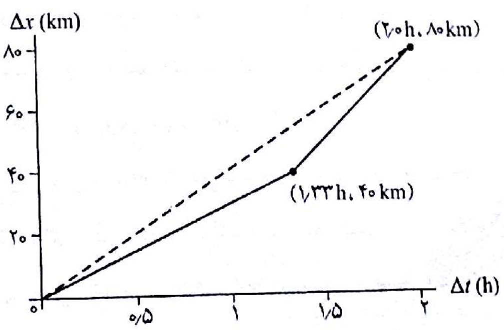
$$t_۲ = \frac{(۴۰\,km)}{(۶۰\,km/h)} = ۰/۶۷\,h$$

جابه‌جایی کل $\Delta x = \Delta x_۱ + \Delta x_۲ = ۴۰\,km + ۴۰\,km = ۸۰\,km$، و زمان کل سپری شده $\Delta t = \Delta t_۱ + \Delta t_۲ = ۲/۰۰\,h$ است. در نتیجه سرعت متوسط برابر است با

$$v_{avg} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(۸۰\,km)}{(۲/۰\,h)} = ۴۰\,km/h$$

(ب) در این حالت، تندی متوسط با بزرگی سرعت متوسط برابر است: $S_{avg} = ۴۰\,km/h$.

(پ) نمودار مسافت کل پیموده شده در زیر رسم شده است: این نمودار دارای دو پاره‌خط پیوسته است که شیب خط اول ۳۰ km/h است و مبداء مختصات را به نقطه‌ی $(\Delta t_۱, \Delta x_۱) = (۱/۳۳\,h, ۴۰\,km)$ وصل می‌کند، شیب خط دوم ۶۰ km/h است و نقطه‌ی $(\Delta t_۱, \Delta x_۱)$ را به نقطه‌ی $(\Delta t, \Delta x) = (۲/۰۰\,h, ۸۰\,km)$ وصل می‌کند.



* ۴ خودرویی با تندی ثابت ۳۵ km/h از تپه‌ای بالا می‌رود و با تندی ثابت ۶۰ km/h از تپه پایین می‌آید. تندی متوسط خودرو در این رفت و برگشت را حساب کنید.

حل: تندی متوسط، برخلاف سرعت متوسط، به مسافت کل بستگی دارد. چون مسافت D به طرف بالای تپه، با مسافت D به طرف پایین تپه برابر است، و چون تندی خودرو (در هر بخش حرکت) ثابت است، داریم D/t = تندی. بنابراین، تندی متوسط برابر است با:

$$\frac{D_{بالا} + D_{پایین}}{t_{بالا} + t_{پایین}} = \frac{۲D}{\frac{D}{v_{بالا}} + \frac{D}{v_{پایین}}}$$

با قرار دادن تندی رو به بالای $v_{بالا} = ۳۵\,km/h$ و تندی رو به پایین $v_{پایین} = ۶۰\,km/h$ در رابطه‌ی بالا، تندی متوسط ۴۴ km/h به دست می‌آید.

* ۵ مکان جسمی که در راستای محور x حرکت می‌کند، از معادله‌ی $x = ۳t - ۴t^۲ + t^۳$ به دست می‌آید، که در آن x برحسب متر و t برحسب ثانیه است. مکان این جسم را در هر یک از زمان‌های زیر پیدا کنید: (الف) 1s، (ب) 2s، (پ) 3s، و (ت) 4s. (ث) جابه‌جایی جسم در بین زمان‌های $t = ۰$ و $t = ۴s$ چیست؟ (ج) سرعت متوسط جسم در بازه‌ی زمانی $t = ۲s$ تا $t = ۴s$ چقدر است؟ (چ) نمودار x برحسب t را در بازه‌ی زمانی $۰ \le t < ۴s$ رسم کنید و نشان دهید که چگونه می‌توان با استفاده از این نمودار پاسخ قسمت (ج) را به دست آورد؟

حل: معادله‌ی $x = ۳t - ۴t^۲ + t^۳$ را در دستگاه SI به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x = (۳\,m/s)t - (۴\,m/s^۲)t^۲ + (۱\,m/s^۳)t^۳$$

جواب‌ها را با یک یا دو رقم با معنی به دست می‌آوریم.

(الف) با قرار دادن $t = ۱s$ در معادله داریم $x = ۳ - ۴ + ۱ = ۰$.

(ب) به ازای $t = ۲s$ داریم $x = ۳(۲) - ۴(۲)^۲ + (۲)^۳ = -۲\,m$.

(پ) به ازای $t = ۳s$ داریم $x = ۰\,m$.

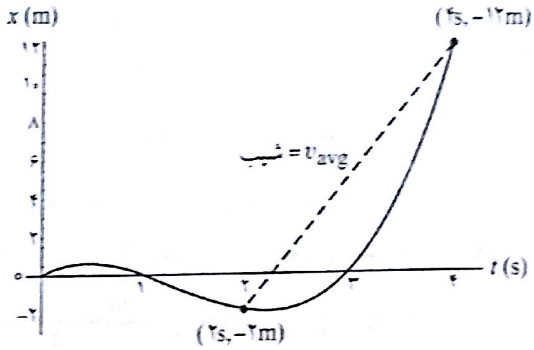
(ت) با قرار دادن $t = ۴s$ داریم $x = ۱۲\,m$.

(ث) مکان جسم در لحظه‌ی $t = ۰$ را از مکان جسم در لحظه‌ی $t = ۴s$ کم می‌کنیم تا جابه‌جایی $\Delta x = ۱۲\,m$ به دست آید.

(ج) مکان جسم در لحظه‌ی $t = ۲s$ را از مکان جسم در لحظه‌ی $t = ۴s$ کم می‌کنیم تا جابه‌جایی $\Delta x = ۱۴m$ به دست آید. سپس از معادله‌ی ۲ـ۲ داریم

$$v_{avg} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۱۴\,m}{۲\,s} = ۷\,m/s$$

(چ) مکان جسم در بازه‌ی زمانی $۰ \le t \le ۴$ در نمودار زیر رسم شده است. خط راست رسم شده از نقطه‌ی $(t, x) = (۲s, -۲m)$ تا نقطه‌ی $(۴s, ۱۲m)$، سرعت متوسط خواسته شده در قسمت (ج) را به دست می‌آید.



❋ ۶ رکورد جهانی سال ۱۹۹۲ سرعت دوچرخه (به عنوان وسیله‌ی نقلیه وابسته به توان انسان) را کریس هیوبر بر جای گذاشت. او مسافت ۲۰۰m را در مدت زمان شگفت‌انگیز ۶٫۵۰۹s پیمود و پس از مسابقه این طور اظهار کرد که «من فکر می‌کنم، پس تُند می‌روم!». در سال ۲۰۰۱، سام ویتینگهام رکورد هیوبر را با اختلاف سرعت ۱۹٫۰km/h شکست. ویتینگهام مسافت ۲۰۰m را در چه مدت پیمود؟

حل: تندی هیوبر برابر است با

$$v_۰ = (۲۰۰\,m)/(۶٫۵۰۹\,s) = ۳۰٫۷۲\,m/s = ۱۱۰٫۶\,km/h$$

در این‌جا از ضریب تبدیل $۱\,m/s = ۳٫۶\,km/h$ استفاده کرده‌ایم. چون تندی ویتینگهام به اندازه‌ی $۱۹٫۰\,km/h$ بیشتر بوده است، لذا تندی او برابر است با:

$$v_۱ = (۱۱۰٫۶\,km/h + ۱۹٫۰\,km/h) = ۱۲۹٫۶\,km/h = ۳۶\,m/s$$

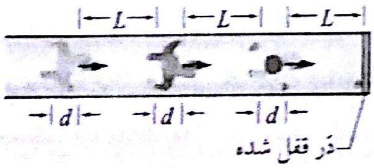
در این‌جا از ضریب تبدیل $۱\,km/h = ۰٫۲۷۷۸\,m/s$ استفاده شده است. بنابراین با استفاده از معادله‌ی ۲ـ۲ می‌توان مدت زمان لازم برای پیمودن ۲۰۰m توسط ویتینگهام را به دست آورد:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_۱} = \frac{۲۰۰\,m}{۳۶\,m/s} = ۵٫۵۵۴\,s$$

❋❋ ۷ دو قطار که تندی هر کدام ۳۰km/h است، بر روی یک مسیر مستقیم به سوی هم حرکت می‌کنند. وقتی که فاصله‌ی دو قطار از هم ۶۰km است، پرنده‌ای با تندی پرواز ۶۰km/h از روی یکی از قطارها به طور مستقیم به طرف قطار دیگر پرواز می‌کند. پرنده به محض رسیدن به قطار دوم، آن را ترک می‌کند و دوباره به طرف قطار اول برمی‌گردد و این کار را به همین ترتیب تکرار می‌کند (نمی‌دانیم پرنده **چرا** این گونه رفتار می‌کند). کل مسافتی که پرنده می‌پیماید چقدر است؟

حل: می‌دانیم که فاصله‌ی بین قطارها با آهنگ ثابت ۶۰km/h کم می‌شود و زمان سپری شده قبل از برخورد قطارها $t = (۶۰\,km)/(۶۰\,km/h) = ۱٫۰\,h$ است. در طول این مدت، پرنده مسافت $x = vt = (۶۰\,km/h)(۱٫۰\,h) = ۶۰\,km$ را می‌پیماید.

❋❋ ۸ ***فرار با وحشت.*** شکل ۲ـ۲۱، وضعیتی را نشان می‌دهد که عده‌ای از مردم قصد فرار از یک در را دارند و متوجه می‌شوند که در قفل شده است. ضخامت بدن این افراد که با تندی $v_s = ۳٫۵۰\,m/s$ به طرف در فرار می‌کنند، $d = ۰٫۲۵\,m$، و فاصله‌ی افراد از یکدیگر $L = ۱٫۷۵\,m$ است. شکل ۲ـ۲۱ آرایش قرار گرفتن افراد را در زمان $t = ۰$ نشان می‌دهد. (الف) ضخامت لایه‌ی افراد جمع شده در پشت در با چه آهنگ متوسطی افزایش می‌یابد؟ (ب) ضخامت این لایه در چه مدتی به ۵٫۰m می‌رسد؟ (پاسخ‌ها نشان می‌دهند که چنین وضعیتی چقدر سریع به یک حالت خطرناک تبدیل می‌شود).



شکل ۲ـ۲۱ مسئله‌ی ۸

حل: مدت زمانی که طول می‌کشد تا هر فرد بتواند مسافت L را با تندی v_s طی کند، برابر است با $\Delta t = L / v_s$. چون ضخامت بدن هر فرد d است، لذا با افزوده شدن هر فرد، ضخامت لایه‌ی افراد جمع شده در پشت در به اندازه‌ی ضخامت بدن یک نفر اضافه می‌شود.

(الف) آهنگ افزایش ضخامت افراد جمع شده برابر است با:

$$R=\frac{d}{\Delta t}=\frac{d}{L/v_s}=\frac{dv_s}{L}=\frac{(۰/۲۵m)(۳/۵۰m/s)}{۱/۷۵m}=۰/۵۰m/s$$

(ب) مدت زمان لازم برای رسیدن ضخامت به مقدار $D=۵/۰m$، برابر است با:

$$t=\frac{D}{R}=\frac{۵/۰m}{۰/۵۰m/s}=۱۰s$$

** ۹ در یک مسابقه‌ی دو یک کیلومتری به نظر می‌رسد دونده‌ی ۱ در خط ۱ (با زمان ۲min و ۲۷/۹۵s) نسبت به دونده‌ی ۲ در خط ۲ (با زمان ۲min و ۲۸/۱۵s) تندتر می‌دود. اما $L_۲$ طول خط ۲، ممکن است اندکی از $L_۱$ طول خط ۱، بیشتر باشد. مقدار $L_۲-L_۱$ چقدر می‌تواند باشد تا باز هم نتیجه بگیریم که دونده‌ی ۱ تندتر می‌دود؟

حل: مدت زمان‌ها را به ثانیه تبدیل می‌کنیم: $t_۱=۱۴۷/۹۵s$ و $t_۲=۱۴۸/۱۵s$. اگر سرعت دونده‌ها مساوی باشد، داریم

$$v_{avg,۱}=v_{avg,۲}\Rightarrow \frac{L_۱}{t_۱}=\frac{L_۲}{t_۲}$$

از این رابطه داریم:

$$L_۲-L_۱=(\frac{۱۴۸/۱۵}{۱۴۷/۹۵}-۱)L_۱\approx ۱/۴m$$

در این‌جا $L_۱\approx ۱۰۰۰m$ را قرار داده‌ایم. بنابراین اگر $L_۱$ و $L_۲$ بیش از ۱/۴m تفاوت نداشته باشند، دونده‌ی ۱ سریع‌تر از دونده‌ی ۲ می‌دود. اما اگر $L_۱$ به اندازه ۱/۴m کمتر از $L_۲$ باشد، دونده‌ی ۲ سریع‌تر از دونده‌ی ۱ می‌دود.

** ۱۰ برای تعیین رکورد سرعت در مسافت (راست خط) d، یک خودرو مسابقه ابتدا باید در یک‌جهت (به‌مدت $t_۱$) و سپس در جهت مخالف (به مدت $t_۲$) رانده شود. (الف) برای حذف کردن اثرهای باد و به‌دست آوردن تندی خودرو v_c در وضعیت بدون باد، آیا باید متوسط $\frac{d}{t_۱}$ و $\frac{d}{t_۲}$ را حساب کرد (روش ۱) یا باید d را به مقدار متوسط $t_۱$ و $t_۲$ تقسیم کرد (روش ۲)؟ وقتی یک باد پایا درجهت حرکت خودرو می‌وزد و نسبت تندی باد v_w، به تندی خودرو v_c، برابر با ۰/۰۲۴ است، اختلاف نسبی مقادیر به دست آمده از این دو روش چقدر است؟

حل: فرض کنید v_w تندی باد و v_c تندی خودرو باشد.

(الف) فرض کنید در بازه‌ی زمانی $t_۱$، خودرو در جهت باد حرکت می‌کند. در نتیجه تندی مؤثر خودرو از رابطه‌ی $v_{eff,۱}=v_c+v_w$ به‌دست می‌آید، و مسافت پیموده شده $d=v_{eff,۱}t_۱=(v_c+v_w)t_۱$ است. از طرف دیگر، در بازه‌ی زمانی $t_۲$ مربوط به مسیر برگشت، خودرو در خلاف جهت باد حرکت می‌کند و تندی مؤثر آن $v_{eff,۲}=v_c-v_w$ است و مسافت پیموده شده $d=v_{eff,۲}t_۲=(v_c-v_w)t_۲$ است. این دو رابطه را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$v_c+v_w=\frac{d}{t_۱} \quad و \quad v_c-v_w=\frac{d}{t_۲}$$

این دو معادله را با هم جمع و به ۲ تقسیم می‌کنیم تا معادله‌ی $v_c=\frac{۱}{۲}(\frac{d}{t_۱}+\frac{d}{t_۲})$ به دست آید. بنابراین روش ۱، تندی v_c خودرو در وضعیت بدون باد را به ما می‌دهد.

(ب) اگر از روش ۲ استفاده شود، نتیجه به صورت زیر خواهد بود:

$$v'_c=\frac{d}{(t_۱+t_۲)/۲}=\frac{۲d}{t_۱+t_۲}=\frac{۲d}{\frac{d}{v_c+v_w}+\frac{d}{v_c-v_w}}$$

$$=\frac{v_c^۲-v_w^۲}{v_c}=v_c\left[۱-(\frac{v_w}{v_c})^۲\right]$$

اختلاف نسبی مقادیر به دست آمده از این دو روش برابر است با

$$\frac{v_c-v'_c}{v_c}=(\frac{v_w}{v_c})^۲=(۰/۰۲۴۰)^۲=۵/۷۵\times ۱۰^{-۴}$$

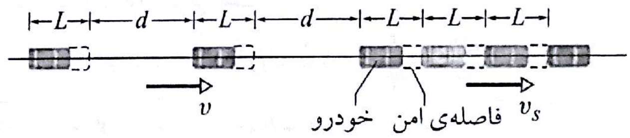
** ۱۱ برای شرکت کردن در جلسه‌ی مصاحبه‌ای که در شهر دیگری به فاصله‌ی ۳۰۰km از شهر شما برگزار می‌شود، در بزرگ‌راهی رانندگی می‌کنید. مصاحبه در ساعت ۱۱:۱۵ صبح آغاز می‌شود. چون تصمیم می‌گیرید با تندی ۱۰۰km/h در بزرگ‌راه رانندگی کنید ساعت ۸:۰۰ صبح به راه می‌افتید تا قدری زودتر برسید. شما مسافت ۱۰۰km اول را با این تندی رانندگی می‌کنید اما به خاطر آنکه بزرگ‌راه در دست تعمیر است مجبور می‌شوید مسافت ۴۰km را با تندی ۴۰km/h برانید. بقیه‌ی مسیر را دست کم با چه تندی‌ای باید رانندگی کنید تا به موقع به جلسه‌ی مصاحبه برسید؟

حل: با توجه به مقادیر داده شده در صورت مسئله، قسمت اول مسافرت (با تندی ۱۰۰km/h) یک ساعت طول می‌کشد، و قسمت دوم مسافرت (با تندی ۴۰km/h) نیز یک ساعت طول

می‌کشد. مدت زمان باقی مانده ۱٫۲۵ ساعت و مسافت باقی مانده ۱۶۰km است. لذا تندی لازم برابر است با

$$v = (۱۶۰\,\text{km}) / (۱٫۲۵\,\text{h}) = ۱۲۸\,\text{km/h}$$

*** ۱۲ ***موج ضربه‌ای ترافیک.*** کند شدن ناگهانی ترافیک فشرده ممکن است به صورت یک تپ، به نام ***موج ضربه‌ای***، در راستای خط حرکت خودروها، همسو با حرکت (همسو با ترافیک) یا ناهمسو با حرکت منتشر شود، یا ساکن بماند. شکل ۲-۲۲، مجموعه‌ای از خودروها را با فاصله‌ی یکسان از یکدیگر نشان می‌دهد که با تندی $v = ۲۵٫۰\,\text{m/s}$ به طرف مجموعه‌ی دیگری از خودروهای کندتر و با فاصله‌ی یکسان و در حال حرکت با تندی $v_s = ۵٫۰۰\,\text{m/s}$ پیش می‌روند. فرض کنید هر خودرو تندتر که به مجموعه‌ی جلوی افزوده می‌شود طول خودروهای کندتر را به اندازه‌ی $L = ۱۲٫۰\,\text{m}$ (به اندازه‌ی طول هر خودرو و فاصله‌ی امن بین دو خودرو) می‌افزاید. هم‌چنین، فرض کنید به محض پیوستن خودرو به مجموعه‌ی خودروهای کندتر، تندی خودرو تند در آخرین لحظه به طور ناگهانی کم می‌شود. (الف) به ازای چه فاصله‌ای بین خودروهای تند d، موج ضربه‌ای ساکن می‌ماند؟ اگر این فاصله دو برابر شود، (ب) تندی و (پ) جهت انتشار موج ضربه‌ای (همسو یا ناهمسو با ترافیک) چیست؟



شکل ۲-۲۲ مسئله‌ی ۱۲.

حل: (الف) فرض کنید در لحظه‌ی $t = ۰$ فاصله‌ی بین خودروهای کندتر و تندتر d است. اگر در بازه‌ی زمانی $t = L / v_s = (۱۲٫۰\,\text{m}) / (۵٫۰\,\text{m/s}) = ۲٫۴۰\,\text{s}$ که خودرو کندتر مسافت $L = ۱۲٫۰\,\text{m}$ را می‌پیماید، خودرو تندتر مسافت $vt = d + L$ را طی می‌کند تا به خط خودروهای کندتر ملحق شود، موج ضربه‌ای ساکن می‌ماند. برای برقراری این شرط، فاصله‌ی بین خودروهای کندتر و تندتر باید برابر باشد با

$$d = vt - L = (۲۵\,\text{m/s})(۲۴\,\text{s}) - ۱۲٫۰\,\text{m} = ۴۸٫۰\,\text{m}$$

(ب) فرض می‌کنیم که در لحظه‌ی $t = ۰$ فاصله‌ی بین خودروهای کندتر و تندتر $d = ۹۶٫۰\,\text{m}$ باشد. در لحظه‌ی بعدی t، خودروهای کندتر و تندتر مسافت $x = v_s t$ را می‌پیمایند و خودرو تندتر بعد از پیمودن مسافت $d + x$ به خط حرکت خودروها ملحق می‌شود. از رابطه‌ی

$$t = \frac{x}{v_s} = \frac{d + x}{v}$$

مسافت پیموده شده به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x = \frac{v_s}{v - v_s} d = \frac{۵٫۰۰\,\text{m/s}}{۲۵٫۰\,\text{m/s} - ۵٫۰۰\,\text{m/s}} (۹۶٫۰\,\text{m}) = ۲۴٫۰\,\text{m}$$

مدت زمان متناظر با این مسافت برابر است با $t = (۲۴٫۰\,\text{m}) / (۵٫۰۰\,\text{m/s}) = ۴٫۸۰\,\text{s}$. چون پشت خودرو کندتر به‌اندازه‌ی $\Delta x = x - L = ۲۴٫۰\,\text{m} - ۱۲٫۰\,\text{m} = ۱۲٫۰\,\text{m}$ همسو با ترافیک حرکت کرده است، تندی پشت خودرو کندتر، یا تندی موج ضربه‌ای، برابر است با

$$v_{\text{ضربه ای}} = \frac{\Delta x}{t} = \frac{۱۲٫۰\,\text{m}}{۴٫۸۰\,\text{s}} = ۲٫۵۰\,\text{m/s}$$

(پ) چون $x > L$، لذا جهت موج ضربه‌ای همسو با ترافیک است.

*** ۱۳ شخصی برای پیمودن فاصله‌ی میان تهران تا کرج، نصف ***زمان*** لازم را با تندی $۵۵\,\text{km/h}$ و نصف دیگر را با تندی $۹۰\,\text{km/h}$ رانندگی می‌کند. شخص در راه برگشت، نصف ***مسافت*** را باتندی $۵۵\,\text{km/h}$ ونصف دیگررا با تندی $۹۰\,\text{km/h}$ می‌پیماید. تندی متوسط خودرو، (الف) از تهران تا کرج، (ب) در راه برگشت از کرج به تهران، و (پ) در کل مسافرت رفت و برگشت، چقدر است؟ (ت) سرعت متوسط خودرو در کل مسافرت رفت و برگشت چقدر است؟ (ث) نمودار تغییرات x برحسب t را برای قسمت (الف) با فرض آنکه حرکت در جهت مثبت محور x انجام شده است، رسم کنید. نشان دهید چگونه می‌توان سرعت متوسط را از روی نمودار معین کرد.

حل: (الف) مدت زمان مسافرت و فاصله‌ی بین تهران تا کرج را به ترتیب با T و D نشان می‌دهیم. در نتیجه سرعت متوسط به‌دست می‌آید

$$v_{\text{avg},۱} = \frac{D}{T} = \frac{(۵۵\,\text{km/h})\frac{T}{۲} + (۹۰\,\text{km/h})\frac{T}{۲}}{T} = ۷۲٫۵\,\text{km/h}$$

که به صورت $۷۳\,\text{km/h}$ گرد می‌شود.

(ب) اگر سرعت ثابت باشد، داریم

$$v_{avg,2} = \frac{D}{T} = \frac{D}{\frac{D/2}{55}+\frac{D/2}{90}} = 68.3 \text{ km/h}$$

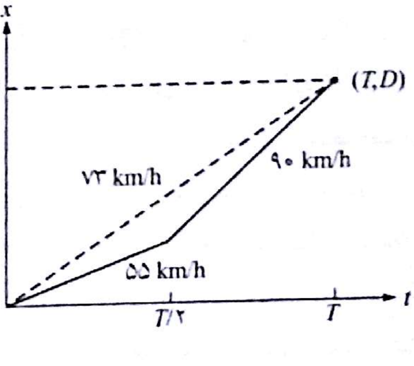
که به صورت 68 km/h گرد می‌شود.

(پ) کل مسافت پیموده شده ($2D$) را نباید با جابه‌جایی برایند (صفر) اشتباه کرد. برای یک رفت و برگشت کامل داریم:

$$v_{avg} = \frac{2D}{\frac{D}{72.5}+\frac{D}{68.3}} = 70 \text{ km/h}$$

(ت) چون جابه‌جایی برایند صفر است، سرعت متوسط برای کل مسافرت رفت و برگشت نیز صفر است.

(ث) در مورد رسم کردن نمودار، مسئله به دانشجو اجازه می‌دهد مسافت D را هر چه می‌خواهد اختیار کند (نیازی به مراجعه به نقشه نیست)؛ لذا دانشجو می‌تواند T را به طور اختیاری برحسب D رسم کند. به طور خلاصه می‌توان نمودار را به صورت زیر (شیب برحسب کیلومتر بر ساعت) توصیف کرد: دو پاره‌خط در اختیار است که شیب اولی $55°$ است و مبداء مختصات را به نقطه‌ی $(t_1, x_1) = (T/2, 55T/2)$ وصل می‌کند، و پاره‌خط دوم دارای شیب $90°$ است و نقطه‌ی (t_1, x_1) را به نقطه‌ی (T, D) وصل می‌کند که در آن $D = (55+90)\frac{T}{2}$ است. سرعت متوسط، با شیب خطی که از مبداء به نقطه (T, D) وصل می‌شود، برابر است. نمودار (بدون مقیاس) به صورت زیر است:



پودمان ۲-۲ سرعت لحظه‌ای و تندی لحظه‌ای

* ۱۴ مکان الکترونی که در راستای محور x حرکت می‌کند، از معادله‌ی $x = 16te^{-t}$ m به دست می‌آید، که در آن t برحسب ثانیه است. الکترون در چه فاصله‌ای از مبداء به حال سکون لحظه‌ای در می‌آید؟

حل: با استفاده از رابطه‌ی عمومی $\frac{d}{dx}\exp(bx) = b\exp(bx)$ داریم

$$v = \frac{dx}{dt} = \left(\frac{d(16t)}{dt}\right)\cdot e^{-t} + (16t)\cdot\left(\frac{de^{-t}}{dt}\right)$$

$$v = 16(1-t)e^{-t}$$

این رابطه نشان می‌دهد که به ازای $t = 1$s سرعت الکترون صفر می‌شود. چون الکترون در لحظه‌ی $t = 1$s متوقف می‌شود، مقدار $t = 1$s را در تابع اولیه‌ی $x = 16te^{-t}$ قرار می‌دهیم تا فاصله‌ی توقف از مبداء، $x = 5.9$ m، به دست آید.

* ۱۵ (الف) معادله‌ی مکان یک ذره به‌صورت $x = 4 - 12t + 3t^2$ است (که در آن t برحسب ثانیه و x برحسب متر است). سرعت ذره در زمان $t = 1$s چیست؟ (ب) درست پس از این زمان، ذره در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند یا در جهت منفی؟ (پ) تندی ذره در این زمان چقدر است؟ (ت) در زمان‌های بعدی تندی ذره بیشتر می‌شود یا کمتر؟ (تلاش کنید به دو پرسش بعدی بدون انجام دادن محاسبه‌های اضافی پاسخ دهید). (ث) آیا هیچ زمانی وجود دارد که در آن سرعت ذره صفر باشد؟ (ج) آیا پس از زمان $t = 3$s زمانی وجود دارد که ذره در جهت منفی محور x حرکت کند؟ اگر پاسخ مثبت است، t را مشخص کنید و اگر منفی است پاسخ دهید نه.

حل: از معادله‌ی ۲-۴ استفاده می‌کنیم.

(الف) سرعت ذره برابر است با:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(4-12t+3t^2) = -12+6t$$

بنابراین، به ازای $t = 1$s، سرعت برابر است با:

$$v = (-12)+(6)(1) = -6 \text{ m/s}$$

(ب) چون $v < 0$ است، ذره در لحظه‌ی $t = 1$s در جهت منفی محور xها حرکت می‌کند.

(پ) در لحظه‌ی $t = 1$s، ***تندی*** ذره $|v| = 6$ m/s است.

(ت) به ازای $0 < t < 2$s، $|v|$ کاهش می‌یابد تا صفر شود. به ازای $2s < t < 3s$، $|v|$ از صفر تا مقداری که در قسمت (پ) داشت، افزایش می‌یابد. پس، مقدار $|v|$ بزرگ‌تر از مقدار مربوط به $t > 3$s است.

(ث) بلی، چون v به آرامی از مقادیر منفی (نتیجه‌ی مربوط به $t = 1$s را در نظر بگیرید) تا مقادیر مثبت (توجه کنید که به ازای

$t \to +\infty$، $v \to +\infty$) تغییر می‌کند. می‌توان نشان داد که به ازای $t = ۲s$، $v = ۰$ است.

(ج) خیر. در واقع با توجه به معادله‌ی $v = -۱۲ + ۶t$ معلوم می‌شود که به ازای $t > ۲s$، $v > ۰$ است.

* ۱۶ تابع مکان $x(t)$ یک ذره‌ی در حال حرکت در راستای محور x به‌صورت $x = ۴/۰ - ۶/۰t^۲$ است، که در آن x برحسب متر و t برحسب ثانیه است. این ذره (الف) در چه زمانی و (ب) در کجا، به طور موقتی می‌ایستد؟ ذره (پ) در چه زمان منفی و (ت) در چه زمان مثبت از مبداء عبور می‌کند. (ث) نمودار x برحسب t را برای بازه‌ی $-۵s$ تا $+۵s$ رسم کنید. (ج) برای جابه‌جا کردن نمودار به راست‌سو، باید جمله‌ی $+۲۰t$ را به تابع $x(t)$ بیفزاییم یا جمله‌ی $-۲۰t$ را؟ (چ) افزودن این جمله مقدار x مربوط به توقف موقتی ذره را افزایش می‌دهد یا کاهش؟

حل: در این مسئله از نمادهای تابعی $x(t)$، $v(t)$، و $a(t)$ استفاده می‌کنیم و دو کمیت اخیر را با گرفتن دیفرانسیل به دست می‌آوریم:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -۱۲t \quad \text{و} \quad a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -۱۲$$

(الف) از رابطه‌ی $v(t) = ۰$ معلوم می‌شود که ذره در لحظه‌ی $t = ۰$ به طور موقتی متوقف می‌شود.

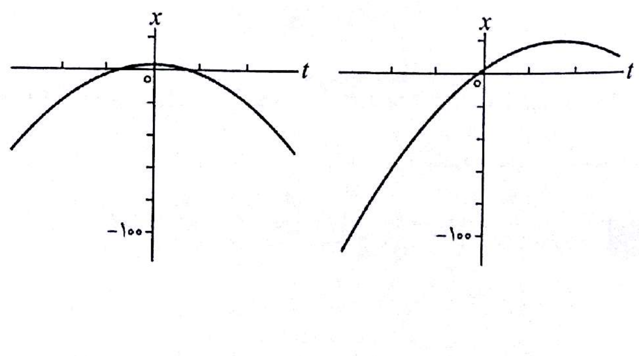
(ب) محل توقف ذره $x(۰) = ۴/۰\,m$ است.

(پ) و (ت) با قرار دادن $x(t) = ۰$ در رابطه‌ی $x(t) = ۴/۰ - ۶/۰t^۲$ داریم $t = \pm ۰/۸۲s$؛ در این لحظه‌ها ذره از مبداء عبور می‌کند.

(ث) نمودار x برحسب t در بازه‌ی $-۵s$ تا $+۵s$ در شکل سمت چپ رسم شده است. شکل سمت راست نیز برای قسمت (ج) مناسب است. در هر دو حالت بازه‌ی زمانی به صورت $-۳s < t < ۳s$ است.

(ج) نمودار سمت راست با افزودن $۲۰t$ به رابطه‌ی $x(t)$ به دست آمده است.

(چ) در هر جایی که شیب منحنی صفر می‌شود، $v = ۰$ است. بنابراین ذره به ازای مقدار x بزرگتر به طور موقتی متوقف می‌شود.



** ۱۷ مکان ذره‌ای که در راستای محور x حرکت می‌کند، برحسب سانتی‌متر از معادله‌ی $x = ۹/۷۵ + ۱/۵۰t^۳$ به دست می‌آید، که در آن t برحسب ثانیه است. مطلوب است محاسبه‌ی، (الف) سرعت متوسط ذره در بازه‌ی زمانی $t = ۲/۰۰s$ تا $t = ۳/۰۰s$؛ (ب) سرعت لحظه‌ای ذره در زمان $t = ۲/۰۰s$؛ (پ) سرعت لحظه‌ای ذره در زمان $t = ۳/۰۰s$؛ (ت) سرعت لحظه‌ای ذره در زمان $t = ۲/۵۰s$؛ و (ث) سرعت لحظه‌ای ذره در موقعی که ذره در وسط فاصله‌ی میان دو مکان متناظر با $t = ۲/۰۰s$ و $t = ۳/۰۰s$ قرار دارد. (ج) نمودار تغییرات x برحسب t را رسم کنید و پاسخ‌های خواسته شده را به روش ترسیمی به دست آورید.

حل: برای سرعت متوسط از معادله‌ی ۲-۲ و برای سرعت لحظه‌ای از معادله‌ی ۲-۴ استفاده می‌کنیم.

(الف) به ازای $t = ۲/۰۰s$ و $t = ۳/۰۰s$ در معادله‌ی داده شده، به ترتیب مقادیر $x_۲ = ۲۱/۷۵\,cm$ و $x_۳ = ۵۰/۲۵\,cm$ به دست می‌آید. سرعت متوسط در بازه‌ی زمانی $۲/۰۰s \le t \le ۳/۰۰s$ برابر است با:

$$v_{avg} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۵۰/۲۵\,cm - ۲۱/۷۵\,cm}{۳/۰۰s - ۲/۰۰s} = ۲۸/۵\,cm/s$$

(ب) سرعت لحظه‌ای برابر با $v = dx/dt = ۴/۵t^۲$ است و برای لحظه‌ی $t = ۲/۰۰s$، مقدار $v = (۴/۵)(۲/۰۰)^۲ = ۱۸/۰\,cm/s$ به‌دست می‌آید.

(پ) در لحظه‌ی $t = ۳/۰۰s$، سرعت لحظه‌ای برابر است با:

$$v = (۴/۵)(۳/۰۰)^۲ = ۴۰/۵\,cm/s$$

(ت) در لحظه‌ی $t = ۲/۵۰s$، سرعت لحظه‌ای برابر است با:

$$v = (۴/۵)(۲/۵۰)^۲ = ۲/۸۱\,cm/s$$

(ث) فرض کنید t_m مربوط به لحظه‌ای است که ذره در میانه‌ی راه بین $x_۲$ و $x_۳$ حرکت می‌کند [یعنی وقتی که ذره در $x_m = (x_۲ + x_۳)/۲ = ۳۶\,cm$ قرار دارد]. بنابراین، داریم

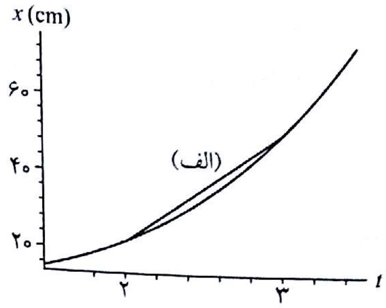
$$x_m = ۹/۷۵ + ۱/۵t_m^۳ \Rightarrow t_m = ۲/۵۹۶\,s$$

تندی لحظه‌ای در این لحظه برابر است با:

$$v = ۴/۵(۲/۵۹۶)^۲ = ۳۰/۳\,cm/s$$

(ج) جواب قسمت (الف) از شیب خط راست بین $t = ۲s$ و $t = ۳s$ در منحنی x برحسب t به دست می‌آید. جواب

قسمت‌های (ب)، (پ)، (ت) و (ث) از شیب خط مماس بر منحنی در نقاط مربوط، به دست می‌آید (در شکل نشان داده نشده‌اند).



پودمان ۲-۳ شتاب

* ۱۸ مکان ذره‌ای که در راستای محور x حرکت می‌کند، از رابطه‌ی $x = ۱۲t^۲ - ۲t^۳$ به دست می‌آید، که در آن x برحسب متر و t برحسب ثانیه است. مطلوب است تعیین (الف) مکان، (ب) سرعت، (پ) شتاب ذره در زمان $t = ۳/۰ \text{s}$. (ت) مختصه‌ی مثبت بیشینه‌ای که ذره به آن می‌رسد چیست، و (ث) ذره در چه زمانی به آنجا می‌رسد؟ (ج) سرعت مثبت بیشینه‌ی ذره چقدر است؟ و (چ) ذره در چه زمانی به این سرعت می‌رسد؟ (ح) ذره در زمانی که حرکت نمی‌کند (به جز در $t = ۰$)، شتابش چیست؟ (خ) سرعت متوسط ذره را در بین زمان‌های $t = ۰$ تا $t = ۳ \text{s}$ حساب کنید.

حل: (الف) از رابطه‌ی مکان $x(t) = ۱۲t^۲ - ۲t^۳$ مشتق می‌گیریم و سرعت و شتاب را به دست می‌آوریم:

$$v(t) = ۲۴t - ۶t^۲ \quad \text{و} \quad a(t) = ۲۴ - ۱۲t$$

با قرار دادن مقدار $t = ۳/۵ \text{s}$، داریم $x(۳/۵) = ۶۱ \text{m}$.

(ب) به طور مشابه، مقدار $t = ۳/۵ \text{s}$ را قرار می‌دهیم و سرعت $v(۳/۵) = ۱۱ \text{m/s}$ را به دست می‌آوریم.

(پ) به ازای $t = ۳/۰ \text{s}$ داریم $a(۳/۰) = -۱۲ \text{m/s}^۲$.

(ت) در مختصه‌ی x بیشینه، باید $v = ۰$ باشد، جواب $t = ۰$ را کنار می‌گذاریم و زمان را از رابطه‌ی سرعت به دست می‌آوریم: $t = ۲۴/۶ = ۴\text{s}$. باقراردادن $t = ۴ \text{s}$ درمعادله‌ی x، مقدار $x = ۶۴\text{m}$ برای بیشترین مقدار x که ذره به آنجا می‌رسد، به‌دست می‌آید.

(ث) از قسمت (ت) معلوم می‌شود که ذره در زمان $t = ۴/۰ \text{s}$ به آنجا می‌رسد.

(ج) برای بیشینه شدن سرعت ذره لازم است $a = ۰$ باشد که در لحظه‌ی $t = ۲۴/۱۲ = ۲/۰ \text{s}$ این اتفاق می‌افتد. با قرار دادن $t = ۲/۰ \text{s}$ در معادله‌ی سرعت، $v_{max} = ۲۴ \text{m/s}$ به‌دست می‌آید.

(چ) از قسمت (ج) معلوم می‌شود که ذره در زمان $t = ۲۴/۱۲ = ۲/۰ \text{s}$ به این سرعت بیشینه می‌رسد.

(ح) در قسمت (ث)، ذره در لحظه‌ی $t = ۴ \text{s}$ (به طور موقت) بی‌حرکت بود. شتاب ذره در آن لحظه برابر بود با $۲۴ - ۱۲(۴) = -۲۴ \text{m/s}^۲$.

(خ) ***سرعت متوسط*** از معادله‌ی ۲-۲ به دست می‌آید، لذا لازم است مقادیر x در لحظات $t = ۰$ و $t = ۳ \text{s}$ را پیدا کنیم، که به ترتیب عبارت‌اند از $x = ۰$ و $x = ۵۴ \text{m}$ [در قسمت (الف) به دست آمده بود]. در نتیجه سرعت متوسط ذره برابر است با

$$v_{avg} = \frac{۵۴ - ۰}{۳ - ۰} = ۱۸ \text{m/s}$$

* ۱۹ تندی یک ذره در زمان معینی در جهت مثبت محور x ۱۸m/s است و ۲/۴s بعد در سوی مخالف تندی آن ۳۰m/s است. شتاب متوسط ذره در این بازه‌ی زمانی ۲/۴s چقدر است؟

حل: قسمت اولیه‌ی حرکت را در جهت $+x$ در نظر می‌گیریم. شتاب متوسط ذره در بازه‌ی زمانی $t_1 < t \le t_2$ از معادله‌ی ۲-۷ به‌دست می‌آید

$$a_{avg} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$$

در لحظه‌ی $t_1 = ۰$، $v_1 = +۱۸ \text{m/s}$ و در لحظه‌ی $t_2 = ۲/۴ \text{s}$ و $v_2 = -۳۰ \text{m/s}$ است. در نتیجه از معادله‌ی ۲-۷ داریم

$$a_{avg} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{(-۳۰ \text{m/s}) - (+۱ \text{m/s})}{۲/۴ \text{s} - ۰} = -۲۰ \text{m/s}^۲$$

بزرگی شتاب متوسط $۲۰ \text{m/s}^۲$ و در خلاف جهت سرعت اولیه‌ی ذره است. علت امر این است که سرعت ذره در بازه‌ی زمانی فوق کاهش می‌یابد.

* ۲۰ مکان ذره‌ای از رابطه‌ی $x = ۲۰t - ۵t^۳$ به دست می‌آید که در آن x برحسب متر و t برحسب ثانیه است. (الف) آیا سرعت ذره هرگز صفر می‌شود؟ (ب) در چه زمانی شتاب ذره

a، صفر است؟ شتاب a در چه گسترهی زمانیای (مثبت یا منفی) (پ) منفی است؟ (ت) مثبت است؟ (ث) نمودارهای $x(t)$، $v(t)$، و $a(t)$ را رسم کنید.

حل: از رابطهی داده شده مشتق میگیریم و سرعت و شتاب را بهدست میآوریم:

$$v(t)=\frac{dx(t)}{t}=-۱۵t^{۲}+۲۰ \quad \text{و} \quad a(t)=\frac{dv(t)}{dt}=-۳۰t$$

از این رابطهها در قسمتهای زیر استفاده میکنیم:

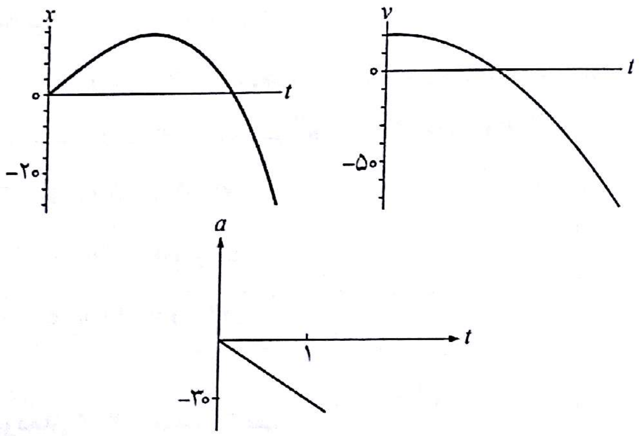
(الف) از رابطهی $-۱۵t^{۲}+۲۰=۰$، تنها مقدار مثبت t که سرعت ذره بهازای آن صفر میشود، $t=\sqrt{۲۰/۱۵}=۱٫۲s$ بهدست میآید.

(ب) از رابطهی $-۳۰t=۰$، مقدار $a(۰)=۰$ به دست میآید، یعنی در لحظهی $t=۰$ شتاب صفر است.

(پ) واضح است که شتاب $a(t)=-۳۰t$ بهازای $t>۰$ منفی است.

(ت) شتاب $a(t)=-۳۰t$ به ازای $t<۰$ مثبت است.

(ث) نمودارهای $x(t)$، $v(t)$ و $a(t)$ به صورت زیر هستند:



** ۲۱ شخصی از زمان $t=۰$ تا زمان $t=۵٫۰۰min$ در حال ایستادن است، و از $t=۵٫۰۰min$ تا $t=۱۰٫۰min$ با چابکی تمام در یک خط راست با تندی ثابت $۲٫۲۰m/s$ راه میرود. (الف) سرعت متوسط v_{avg}، و (ب) شتاب متوسط a_{avg} شخص، در بازهی زمانی ۲٫۰۰ دقیقه تا ۸٫۰۰ دقیقه چقدر است؟ (پ) v_{avg} و (ت) a_{avg} شخص، در بازهی زمانی ۳٫۰۰ دقیقه تا ۹٫۰۰ دقیقه چقدر است؟ (ث) نمودار تغییرات x برحسب t و نمودار تغییرات v برحسب t را رسم کنید و نشان دهید که پاسخهای قسمتهای (الف) تا (ت) را از روی نمودار چگونه میتوان به دست آورد.

حل: از معادلهی ۲-۲ (سرعت متوسط) و معادلهی ۲-۷ (شتاب متوسط) استفاده میکنیم. با توجه به انتخاب محورهای مختصات، مکان اولیهی شخص را به عنوان مبداء مختصات و جهت حرکت او در بازهی $۵min \le t \le ۱۰min$ را جهت xهای مثبت در نظر میگیریم. ضمناً از این واقعیت استفاده میکنیم که وقتی سرعت در بازهی زمانی $\Delta t'$ ثابت است، $\Delta x=v\Delta t'$ است.

(الف) در اینجا کل بازهی مورد نظر $\Delta t=۸-۲=۶min$ است که معادل ۳۶۰ ثانیه است؛ زیرا بازهای که شخص در آن مدت **حرکت میکند**، $\Delta t'=۸-۵=۳min=۱۸۰s$ است. در لحظهی $t=۲min$، مکان شخص در $x=۰$ و در لحظهی $t=۸min$، مکان او در $x=v\Delta t'=(۲٫۲)(۱۸۰)=۳۹۶m$ است. بنابراین داریم

$$v_{avg}=\frac{۳۹۶m-۰}{۳۶۰s}=۱٫۱۰m/s$$

(ب) در لحظهی $t=۲min$، شخص در حال سکون و در لحظهی $t=۸min$، سرعتش $v=+۲٫۲m/s$ است. بنابراین، جواب تا سه رقم با معنی برابر است با

$$a_{avg}=\frac{۲٫۲m/s-۰}{۳۶۰s}=۰٫۰۰۶۱۱m/s^{۲}$$

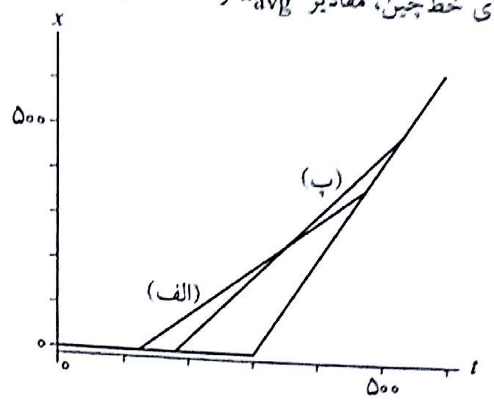
(پ) اکنون کل بازهی زمانی مورد نظر $\Delta t=۹-۳=۶min$ (باز هم ۳۶۰ ثانیه) است، در حالی که زیر بازهای که شخص در آن مدت حرکت میکند، $\Delta t'=۹-۵=۴min=۲۴۰s$ است. در لحظهی $t=۳min$ مکان شخص در $x=۰$ و در لحظهی $t=۹min$، مکان او در $x=v\Delta t'=(۲٫۲)(۲۴۰)=۵۲۸m$ است. بنابراین داریم

$$v_{avg}=\frac{۵۲۸m-۰}{۳۶۰s}=۱٫۴۷m/s$$

(ت) در لحظهی $t=۳min$، شخص در حال سکون است و در لحظهی $t=۹min$، سرعت او $v=+۲٫۲m/s$ است. در نتیجه، درست مانند قسمت (ب)، $a_{avg}=۲٫۲/۳۶۰=۰٫۰۰۶۱m/s^{۲}$ است.

(ث) خط افقی در پایین منحنی $x-t$ نشان میدهد که در بازهی زمانی $۰\le t<۳۰۰s$ شخص در مکان $x=۰$ ایستاده است و خطی که در بازهی $۳۰۰\le t\le ۶۰۰s$ به طرف بالا صعود میکند، نشان میدهد که شخص با سرعت ثابت حرکت میکند. نمودارهای خطچین، جواب قسمتهای (الف) و (پ) را برحسب شیبخطها نشان میدهند. در اینجا نمودار $v-t$ نشان داده نشده است، ولی دارای دو «پله» افقی خواهد بود (که یکی در $v=۰$ برای بازهی زمانی $۰\le t<۳۰۰s$ و دیگری در $v=۲٫۲m/s$ برای بازهی

زمانی $600\,s \le t \le 300$ است). شتاب‌های متوسط حساب شده در قسمت‌های (ب) و (ت)، نمودارهای خط‌چینی خواهند بود که «پله»ها را در مقادیر مناسب t به هم وصل می‌کنند (شیب‌های نمودارهای خط‌چین، مقادیر a_{avg} را نشان خواهند داد).



** ۲۲ مکان یک ذره‌ی در حال حرکت در راستای محور x برحسب زمان از معادله‌ی $x=ct^2-bt^3$ به دست می‌آید، که در آن x برحسب متر و t برحسب ثانیه است. یکای (الف) ثابت c، و (ب) ثابت b، چیست؟ مقادیر عددی ثابت‌ها را به ترتیب، ۳٫۰ و ۲٫۰ در نظر بگیرید. (پ) در چه زمانی ذره به مکان مثبت بیشینه‌ی x می‌رسد؟ ذره در بازه‌ی زمانی $t=0.0\,s$ تا $t=4.0\,s$، (ت) چه مسافتی را می‌پیماید و (ث) جابه‌جایی آن چیست؟ سرعت ذره در زمان‌های زیر را پیدا کنید. (ج) ۱٫۰s، (چ) ۲٫۰s، (ح) ۳٫۰s، و (خ) ۴٫۰s. شتاب ذره را در زمان‌های (د) ۱٫۰s، (ذ) ۲٫۰s، (ر) ۳٫۰s، (ز) ۴٫۰s، پیدا کنید.

حل: در این مسئله از نماد $x(t)$ برای مقدار x در لحظه‌ی خاص t استفاده می‌کنیم. نمادهای $v(t)$ و $a(t)$ نیز معانی مشابهی دارند.

(الف) چون ct^2 دارای یکای طول است، یکای c باید به صورت m/s^2 باشد.

(ب) چون bt^3 دارای یکای طول است، یکای b باید به صورت m/s^3 باشد.

(پ) وقتی ذره به مختصه‌ی بیشینه (یا کمینه) خود می‌رسد، سرعتش صفر است. چون سرعت از رابطه‌ی $v=dx/dt=2ct-3bt^2$ به‌دست می‌آید، لذا در لحظه‌ی $t=0$، $v=0$ است و داریم

$$t=\frac{2c}{3b}=\frac{2(4.0\,m/s^2)}{3(2.0\,m/s^3)}=1.3\,s$$

به‌ازای $t=0$، $x=x_0=0$ و به‌ازای $t=1.3\,s$، $x=2.3\,m>x_0$ است. چون می‌خواهیم مقدار بیشینه را پیدا کنیم، ریشه‌ی اول ($t=0$) را حذف می‌کنیم و ریشه‌ی دوم ($t=1\,s$) را می‌پذیریم.

(ت) در ۴ ثانیه‌ی اول، ذره از مبداء تا نقطه‌ی $x=1.0\,m$ حرکت می‌کند، دور می‌زند و به نقطه‌ی زیر برمی‌گردد:

$$x(4\,s)=(4.0\,m/s^2)(4.0\,s)^2-(2.0\,m/s^3)(4.0\,s)^3=-64\,m$$

طول کل مسیری که ذره می‌پیماید $1.3\,m+1.3\,m+64\,m=67\,m$ است.

(ث) جابه‌جایی ذره $\Delta x=x_2-x_1$ است که در آن $x_1=0$ و $x_2=-64\,m$ است. در نتیجه داریم $\Delta x=-64\,m$. سرعت ذره برابر است با: $v=2ct-3bt^2=(8.0\,m/s^2)t-(6.0\,m/s^3)t^2$.

(ج) با قرار دادن $t=1\,s$، داریم $v(1.0)=2.0\,m/s$

(چ) به طور مشابه داریم $v(2.0)=-8.0\,m/s$

(ح) $v(3.0)=-30\,m/s$

(خ) $v(4.0)=-64\,m/s$

شتاب از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$a=dv/dt=2c-6b=8.0\,m/s^2-(12.0\,m/s^3)t$$

(د) با قرار دادن $t=1\,s$، داریم $a(1.0)=-4.0\,m/s^2$

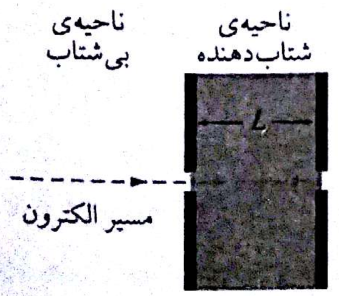
(ذ) $a(2.0)=-16\,m/s^2$

(ر) $a(3.0)=-28\,m/s^2$

(ز) $a(4.0)=-40\,m/s^2$

پودمان ۲-۴ شتاب ثابت

* ۲۳ الکترونی با سرعت آغازی $v_0=1.50\times10^5\,m/s$ وارد ناحیه‌ای به طول $L=1.0\,cm$ می‌شود و تحت تأثیر میدان الکتریکی شتاب می‌گیرد (شکل ۲-۲۳). الکترون با سرعت $v=5.70\times10^6\,m/s$ از این ناحیه خارج می‌شود. شتاب آن با فرض ثابت بودن، چقدر است؟



شکل ۲-۲۳ مسئله‌ی ۲۳.

حل: این مسئله مربوط به حالت شتاب ثابت است، بنابراین حرکت الکترون را با استفاده از معادلات داده شده در جدول ۲-۱ می‌توان تحلیل کرد:

$$v = v_۰ + at \qquad (۲\text{-}۱۱)$$

$$x - x_۰ = v_۰ t + \frac{۱}{۲}at^۲ \qquad (۲\text{-}۱۵)$$

$$v^۲ = v_۰^۲ + ۲a(x - x_۰) \qquad (۲\text{-}۱۶)$$

شتاب را می‌توان از معادله‌ی (۲-۶) به دست آورد. به ازای $v_۰ = ۱/۵۰ \times ۱۰^۵ \mathrm{m/s}$، $v = ۵/۷۰ \times ۱۰^۶ \mathrm{m/s}$، $x_۰ = ۰$ و $x = ۰/۰۱۰ \mathrm{m}$، شتاب متوسط به صورت زیر به دست می‌آید:

$$a = \frac{v^۲ - v_۰^۲}{۲x} = \frac{(۵/۷ \times ۱۰^۶ \mathrm{m/s})^۲ - (۱/۵ \times ۱۰^۵ \mathrm{m/s})^۲}{۲(۰/۰۱۰ \mathrm{m})}$$

$$= ۱/۶۲ \times ۱۰^{۱۵} \mathrm{m/s^۲}$$

* ۲۴ ***قارچ‌های منجنیقی.*** برخی قارچ‌ها هاگ‌های خود را با سازوکار منجنیقی پرتاب می‌کنند. هنگامی که آب موجود در هوا روی هاگ متصل به قارچ متراکم می‌شود، در یک طرف هاگ یک قطره‌ی آب و در طرف دیگر یک لایه‌ی نازک آب رشد می‌کند. هاگ در اثر وزن قطره به یک طرف خم می‌شود، اما وقتی که لایه‌ی نازک به قطره می‌رسد آب قطره ناگهان به درون لایه جریان پیدا می‌کند و هاگ مثل فنر ازجا درمی‌رود و با چنان سرعتی به‌بالا می‌پرد که ازقارچ جدا می‌شود. تندی هاگ معمولاً، هنگام پرتاب شدن در فاصله‌ای به طول $۵/۰ \mu\mathrm{m}$ به $۱/۶ \mathrm{m/s}$ می‌رسد؛ سپس، این تندی درفاصله‌ی بعدی $۱/۰ \mathrm{mm}$ در اثر مقاومت هوا به صفر می‌رسد. با استفاده از این داده‌ها و با فرض ثابت‌بودن شتاب‌ها، شتاب هاگ را برحسب g در (الف) هنگام پرتاب شدن و (ب) هنگام کاهش یافتن تندی، پیدا کنید.

حل: در این مسئله تندی‌های آغازی و پایانی، و جابه‌جایی را داریم و می‌خواهیم شتاب را پیدا کنیم. از معادله‌ی شتاب ثابت (معادله‌ی ۲-۱۶) به صورت $v^۲ = v_۰^۲ + ۲a(x - x_۰)$ استفاده می‌کنیم.

(الف) چون $v_۰ = ۰$، $v = ۱/۶ \mathrm{m/s}$ و $\Delta x = ۵/۰ \mu\mathrm{m}$ است، شتاب هاگ‌ها در موقع پرتاب شدن برابر است با:

$$a = \frac{v^۲ - v_۰^۲}{۲x} = \frac{(۱/۶ \mathrm{m/s})^۲}{۲(۵/۰ \times ۱۰^{-۶} \mathrm{m})} = ۲/۵۶ \times ۱۰^۵ \mathrm{m/s^۲}$$

$$= ۲/۶ \times ۱۰^۴ g$$

(ب) در هنگام کاهش یافتن تندی، شتاب برابر است با

$$a = \frac{v^۲ - v_۰^۲}{۲x} = \frac{۰ - (۱/۶ \mathrm{m/s})^۲}{۲(۱/۰ \times ۱۰^{-۳} \mathrm{m})} = -۱/۲۸ \times ۱۰^۳ \mathrm{m/s^۲} = -۱/۳ \times ۱۰^۲ g$$

علامت منفی نشان می‌دهد که شتاب هاگ‌ها کندکننده است.

* ۲۵ یک وسیله‌ی نقلیه‌ی برقی از حال سکون به راه می‌افتد و با شتاب $۲/۰ \mathrm{m/s^۲}$ به خط راست حرکت می‌کند تا به تندی $۲۰ \mathrm{m/s}$ می‌رسد. سپس تندی وسیله با آهنگ $۱/۰ \mathrm{m/s^۲}$ کاهش می‌یابد تا متوقف شود. (الف) از زمان شروع حرکت تا توقف چه مدت طول می‌کشد؟ (ب) این وسیله از زمان شروع حرکت تا توقف، چه مسافتی را می‌پیماید؟

حل: حرکت را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم و جهت حرکت را مثبت در نظر می‌گیریم. در قسمت ۱، وسیله‌ی نقلیه از حال سکون تا بیشترین تندی‌اش شتاب می‌گیرد، بنابراین مقادیر $v_۰ = ۰$، $v = ۲۰ \mathrm{m/s}$ و $a = ۲/۰ \mathrm{m/s^۲}$ را داریم. در قسمت ۲، تندی وسیله‌ی نقلیه از بیشترین مقدار کاهش می‌یابد و بالاخره متوقف می‌شود. در این حالت $v_۰ = ۲۰ \mathrm{m/s}$، $v = ۰$ و $a = -۱/۰ \mathrm{m/s^۲}$ است (شتاب منفی است زیرا جهت بردار شتاب در خلاف جهت حرکت است).

(الف) با استفاده از جدول ۲-۱، $t_۱$ در قسمت ۱ حرکت را از معادله‌ی $v = v_۰ + at$ یعنی $۲۰ = ۰ + ۲/۰ t_۱$ به دست می‌آوریم که مساوی با $t_۱ = ۱۰ \mathrm{s}$ است. $t_۲$ در قسمت ۲ حرکت از معادله‌ی مشابه $۰ = ۲۰ + (-۱)t_۲$ به دست می‌آید که مساوی با $t_۲ = ۲۰ \mathrm{s}$ است. در نتیجه زمان کل حرکت $t = t_۱ + t_۲ = ۳۰ \mathrm{s}$ است.

(ب) در قسمت ۱ حرکت، فرض می‌کنیم $x_۰ = ۰$ است و از معادله‌ی $v^۲ = v_۰^۲ + ۲a(x - x_۰)$ از جدول ۲-۱ استفاده می‌کنیم:

$$x = \frac{v^۲ - v_۰^۲}{۲a} = \frac{(۲۰ \mathrm{m/s})^۲ - (۰)^۲}{۲(۲۰ \mathrm{m/s^۲})} = ۱۰۰ \mathrm{m}$$

این مقدار، مسافت اولیه برای قسمت ۲ حرکت است، لذا با استفاده از همان معادله برای قسمت ۲ حرکت، داریم

$$x - ۱۰۰ \mathrm{m} = \frac{v^۲ - v_۰^۲}{۲a} = \frac{(۰)^۲ - (۲۰ \mathrm{m/s})^۲}{۲(-۱/۰ \mathrm{m/s^۲})}$$

در نتیجه مکان نهایی $x = ۳۰۰ \mathrm{m}$ است. این مقدار همان مسافت پیموده شده‌ی کل نیز هست (وسیله‌ی نقلیه حرکت خود را معکوس نمی‌کند یا در جهت عکس حرکت نمی‌کند).

۲۶ یک میونون (یکی از ذرات بنیادی) با تندی $5{,}00\times10^{6}\,m/s$ به ناحیه‌ای وارد و حرکتش با آهنگ $1{,}25\times10^{14}\,m/s^{2}$ کند می‌شود. (الف) میونون پیش از توقف چه مسافتی را می‌پیماید؟ (ب) نمودار تغییرات x برحسب t و نمودار تغییرات v برحسب t مربوط به میونون را رسم کنید.

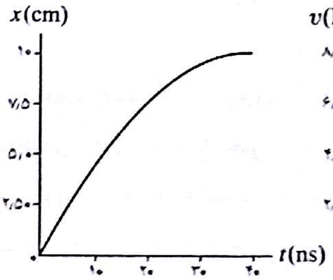
حل: شرط شتاب ثابت اجازه می‌دهد از جدول ۲-۱ استفاده کنیم.

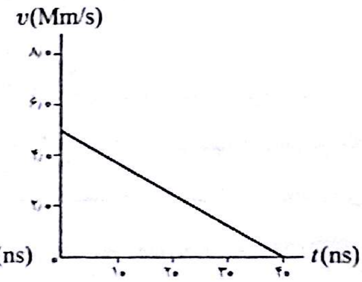
(الف) با قرار دادن $v=0$ و $x_0=0$ در معادله‌ی $v^2=v_0^2+2a(x-x_0)$، داریم:

$$x=-\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a}=-\frac{1}{2}\frac{(5{,}00\times10^{6})^2}{-1{,}25\times10^{14}}=0{,}100\,m$$

چون سرعت میونون در حال کم شدن است، علامت سرعت اولیه و شتاب باید مخالف هم باشند.

(ب) نمودارهای مکان و سرعت میونون برحسب زمان را از لحظه‌ی ورود به میدان تا لحظه‌ی توقف رسم کرده‌ایم. محاسبه‌ی قسمت (الف) بدون توجه به زمان t انجام شده است، به همین علت از معادلات جدول ۲-۱ (مانند $v=v_0+at$ و $x=v_0t+\frac{1}{2}at^2$) برای ترسیم این نمودارها استفاده کرده‌ایم.





۲۷ الکترونی دارای شتاب $+3{,}2\,m/s^2$ است. در لحظه‌ی معینی سرعت الکترون $+9{,}6\,m/s$ است. سرعت الکترون، (الف) ۲٫۵ ثانیه پیش و (ب) ۲٫۵ ثانیه بعد، چقدر است؟

حل: از معادله‌ی $v=v_0+at$ به ازای $t=0$ در لحظه‌ای که سرعت مساوی با $+9{,}6\,m/s$ است، استفاده می‌کنیم.

(الف) چون می‌خواهیم سرعت در لحظه‌ی **پیش** از $t=0$ را به‌دست آوریم، لذا $t=-2{,}5\,s$ را در معادله‌ی ۲-۱۱ قرار می‌دهیم:

$$v=(9{,}6\,m/s)+(3{,}2\,m/s^2)(-2{,}5\,s)=1{,}6\,m/s$$

(ب) در این حالت $t=+2{,}5\,s$ است و داریم

$$v=(9{,}6\,m/s)+(3{,}2\,m/s^2)(2{,}5\,s)=18\,m/s$$

۲۸ در یک جاده‌ی خشک، خودرویی با لاستیک‌های خوب می‌تواند با شتاب ثابت $4{,}92\,m/s^2$ ترمز کند. (الف) چه مدت طول می‌کشد تا این خودرو که دارای تندی آغازی $24{,}6\,m/s$ است، متوقف شود. (ب) در این مدت خودرو چه مسافتی را می‌پیماید؟ (پ) نمودار x برحسب t و نمودار v برحسب t را در مدت حرکت با این شتاب کند کننده رسم کنید.

حل: محور $+x$ را در جهت حرکت انتخاب می‌کنیم، در نتیجه داریم $v_0=+24{,}6\,m/s$ و $a=-4{,}92\,m/s^2$. در ضمن فرض می‌کنیم $x_0=0$ است.

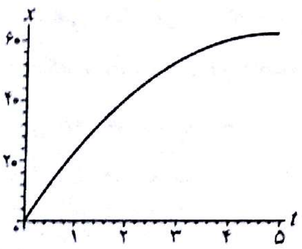
(الف) مدت زمانی که طول می‌کشد تا خودرو متوقف شود، با استفاده از معادله‌ی ۲-۱۱ برابر است با:

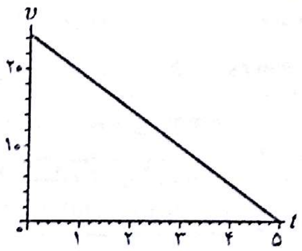
$$0=v_0+at\Rightarrow t=\frac{24{,}6\,m/s}{4{,}92\,m/s^2}=5{,}00\,s$$

(ب) اگرچه چندین معادله در جدول ۲-۱ می‌توانند نتیجه‌ی مساوی در این مورد به ما بدهند، ما معادله‌ی ۲-۱۶ را انتخاب می‌کنیم [زیرا به جواب قسمت (الف) بستگی ندارد]:

$$0=v_0^2+2ax\Rightarrow x=\frac{(24{,}6\,m/s)^2}{2(-4{,}92\,m/s^2)}=61{,}5\,m$$

(پ) با استفاده از این نتیجه‌ها، نمودار $v_0t+\frac{1}{2}at^2$ (نمودار x برحسب زمان، در طرف چپ) و نمودار v_0+at (نمودار v در طرف راست) در بازه‌ی زمانی $0\le t\le 5\,s$ را رسم می‌کنیم:





۲۹ اتاقک آسانسوری که در مجموع می‌تواند مسافت $190\,m$ را با تندی بیشینه‌ی $305\,m/min$ بالا یا پایین برود با شتاب $1{,}22\,m/s^2$ از حال سکون شروع به حرکت می‌کند و سپس با همین شتاب به حال سکون می‌رسد. (الف) این آسانسور از موقعی که از حال سکون به راه می‌افتد و با شتاب به تندی بیشینه می‌رسد چه مسافتی را می‌پیماید؟ (ب) چه مدت طول می‌کشد تا آسانسور از حال سکون به راه بیفتد، بدون توقف ارتفاع $190\,m$ را بپیماید و دوباره به حال سکون برسد؟

حل: ما فرض می‌کنیم که شتاب تند کننده (مرحله‌ی ۱) و شتاب کندکننده (مرحله‌ی ۲) دارای مقدار ثابت a هستند، لذا می‌توان از جدول ۲-۱ استفاده کرد. اگر جهت حرکت را در جهت محور $+x$ انتخاب کنیم، $a_1=+۱/۲۲\,m/s^۲$ و $a_۲=-۱/۲۲\,m/s^۲$ خواهد بود. درلحظه‌ی $t=t_1$، سرعت اتاقک $v=۳۰۵/۶۰=۵/۰۸\,m/s$ است.

(الف) Δx را به عنوان مسافت پیموده شده در مدت زمان t_1 در نظر می‌گیریم و از معادله‌ی ۲-۱۶ استفاده می‌کنیم:

$$v^۲=v_0^۲+۲a_1\Delta x \Rightarrow \Delta x=\frac{(۵/۰۸\,m/s)^۲}{۲(۱/۲۲\,m/s^۲)}$$

$$=۱۰/۵۹\,m\approx ۱۰/۶\,m$$

(ب) با استفاده از معادله‌ی ۲-۱۱ داریم

$$t_1=\frac{v-v_0}{a_1}=\frac{۵/۰۸\,m/s}{۱/۲۲\,m/s^۲}=۴/۱۷\,s$$

مدت زمان $t_۲$ برای داشتن شتاب کند کننده نیز به اندازه‌ی مدت زمان t_1 است، لذا $t_1+t_۲=۸/۳۳\,s$. پس، مسافت کل پیموده شده در مدت زمان‌های t_1 و $t_۲$ برابر است با $۲(۱۰/۵۹\,m)=۲۱/۱۸\,m$. بنابراین، در طی فاصله‌ی $۱۹۰\,m-۲۱/۱۸\,m=۱۶۸/۸۲\,m$، اتاقک با سرعت ثابت حرکت می‌کند. مدت زمان مربوط به حرکت با سرعت ثابت برابر است با

$$t_۳=\frac{۱۶۸/۸۲\,m}{۵/۰۸\,m/s}=۳۳/۲۱\,s$$

بنابراین مدت زمانی که طول می‌کشد تا آسانسور از حال سکون به راه بیفتد و دوباره به حال سکون برگردد، برابر است با

$$۸/۳۳\,s+۳۳/۲۱\,s\approx ۴۱/۵\,s$$

* ۳۰ در یک خودرو ترمزها می‌توانند تندی را با آهنگ $۵/۲\,m/s^۲$ کاهش دهند. (الف) اگر خودرو با تندی $۱۳۷\,km/h$ در حال حرکت باشد و ناگهان پلیس راهنمایی سر برسد، راننده حداقل در چه مدت می‌تواند تندی خودرو را به مقدار مجاز $۹۰\,km/h$ برساند؟ (پاسخ شما بی‌فایده بودن این ترمز کردن را برای فرار از آشکار شدن تخلف توسط رادار یا تفنگ لیزری نشان می‌دهد). (ب) نمودار x برحسب t و نمودار v برحسب t را برای این حرکت کند شونده رسم کنید.

حل: جهت مثبت را در جهت سرعت اولیه‌ی خودرودر نظر می‌گیریم (و تأکید می‌کنیم که $a<0$ است زیرا خودرو در حال کم کردن سرعت است). فرض می‌کنیم شتاب ثابت است و از جدول ۲-۱ استفاده می‌کنیم.

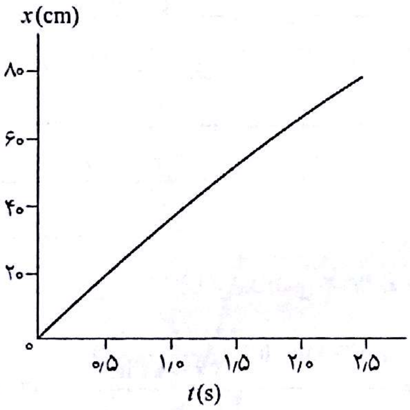
(الف) با قرار دادن مقادیر $v_0=۱۳۷\,km/h=۳۸/۱\,m/s$، $v=۹۰\,km/h=۲۵\,m/s$، و $a=-۵/۲\,m/s^۲$ در معادله‌ی $v=v_0+at$، داریم

$$t=\frac{۲۵\,m/s-۳۸/۱\,m/s}{-۵/۲\,m/s^۲}=۲/۵۲\,s$$

(ب) فرض می‌کنیم خودرو در هنگام ترمز شدن در لحظه‌ی $t=0$ در نقطه‌ی $x=0$ قرار دارد. بنابراین، مختصه‌ی خودرو به صورت تابعی از زمان برابر است با

$$x=(۳۸/۱\,m/s)t+\frac{1}{۲}(-۵/۲\,m/s^۲)t^۲$$

این تابع را در نمودار زیر از $t=0$ تا $t=۲/۵\,s$ رسم کرده‌ایم. ما نمودار $v-t$ را در اینجا رسم نکرده‌ایم که اگر رسم کنید یک خط راست خواهد بود که از v_0 تا v در حال نزول است.



* ۳۱ موشکی در فضا با شتاب ثابت $۹/۸\,m/s^۲$ حرکت می‌کند تا در حین پرواز احساس شتاب عادی گرانشی را ایجاد کند. (الف) اگر موشک از حالت سکون شروع به حرکت کرده باشد، چه مدت طول می‌کشد تا تندی آن به یک دهم تندی نور برسد؟ $(c=۳/۰\times ۱۰^۸\,m/s)$ (ب) موشک در این مدت چه مسافتی می‌پیماید؟

حل: ثابت بودن شتاب در این مسئله به ما اجازه می‌دهد از معادلات جدول ۲-۱ استفاده کنیم.

(الف) مدت زمان لازم را از معادله‌ی $v=v_0+at$ به‌دست می‌آوریم:

$$t=\frac{v-v_0}{a}=\frac{\frac{1}{۱۰}(۳/۰\times۱۰^۸\,m/s)}{۹/۸\,m/s^۲}=۳/۱\times۱۰^۶\,s$$

که معادل ۱/۲ ماه است.

(ب) مسافت پیموده شده را از معادله‌ی $x = x_۰ + v_۰t + \frac{۱}{۲}at^۲$ به‌ازای $x_۰ = ۰$ به دست می‌آوریم:

$$x = \frac{۱}{۲}(۹٫۸\,m/s^۲)(۳٫۱\times ۱۰^۶ s)^۲ = ۴٫۶\times ۱۰^{۱۳} m$$

توجه کنید که در حل قسمت‌های (الف) و (ب) از معادله‌ی $v^۲ = v_۰^۲ + ۲a(x - x_۰)$ استفاده نکردیم. سرعت نهایی موشک را به عنوان امتحان از این معادله حساب می‌کنیم:

$$v = \sqrt{v_۰^۲ + ۲a(x - x_۰)} = \sqrt{۰ + ۲(۹٫۸\,m/s^۲)(۴٫۶\times ۱۰^{۱۳} m - ۰)} = ۳٫۰\times ۱۰^۷ m/s$$

که همان سرعت داده شده در صورت مسئله است. بنابراین مسئله را درست حل کرده‌ایم.

* ۳۲ رکورد جهانی سرعت در روی زمین توسط سرهنگ **جان استَپ** هنگامی به دست آمد که در مارس ۱۹۵۴ (اسفند ۱۳۳۲) در حال سوار بودن بر یک سورتمه‌ی با پیشران موشکی با سرعت $۱۰۲۰ km/h$ در روی یک ریل حرکت می‌کرد. او و سورتمه در مدت ۱٫۴ ثانیه متوقف شدند (شکل ۲-۷ را ببینید). جان استپ در هنگام متوقف شدن چه شتابی را برحسب g تجربه کرده است؟

حل: شتاب از معادله‌ی ۲-۱۱ (یا از معادله‌ی ۲-۷) به دست می‌آید:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(۱۰۲۰\,km/h)(\frac{۱۰۰۰\,m/km}{۳۶۰۰\,s/h})}{۱٫۴ s} = ۲۰۲٫۴\,m/s^۲$$

این شتاب برحسب $g = ۹٫۸\,m/s^۲$ برابر است با

$$a = (\frac{۲۰۲٫۴\,m/s^۲}{۹٫۸\,m/s^۲})g = ۲۱g$$

* ۳۳ خودرویی با سرعت $۵۶٫۰ km/h$ در حال حرکت است. هنگامی که خودرو به فاصله‌ی ۲۴٫۰ متری یک راه‌بند مانع عبور می‌رسد، راننده ترمز می‌کند و خودرو پس از ۲٫۰۰ ثانیه به راه‌بند برخورد می‌کند. (الف) شتاب کند کننده‌ی خودرو پیش از برخورد به راه‌بند چقدر است؟ (ب) سرعت خودرو هنگام برخورد چقدر است؟

حل: صورت مسئله نشان می‌دهد که شتاب a ثابت است و می‌توان از معادلات جدول ۲-۱ استفاده کرد.

(الف) مقدار $x_۰ = ۰$ را در معادله‌ی $x = v_۰t + \frac{۱}{۲}at^۲$ (معادله‌ی ۲-۱۵) قرار می‌دهیم تا شتاب $a = ۲(x - v_۰t)/t^۲$ به دست آید. با قرار دادن $x = ۲۴٫۰ m$ و $v_۰ = ۵۶٫۰ km/h = ۱۵٫۵۵ m/s$ و $t = ۲٫۰۰ s$ در این معادله خواهیم داشت:

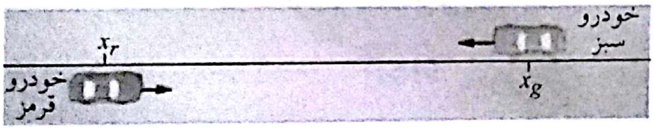
$$a = \frac{۲[۲۴٫۰ m - (۱۵٫۵۵ m/s)(۲٫۰۰ s)]}{(۲٫۰۰ s)^۲} = -۳٫۵۶\,m/s^۲$$

یا $|a| = ۳٫۵۶\,m/s^۲$. علامت منفی نشان می‌دهد که جهت شتاب در خلاف جهت حرکت خودرو است، یعنی تندی خودرو در حال کند شدن است.

(ب) مقدار $v = v_۰ + at$ را به صورت زیر حساب می‌کنیم:

$$v = ۱۵٫۵۵ m/s - (۳٫۵۶ m/s^۲)(۲٫۰۰ s) = ۸٫۴۳ m/s = ۳۰٫۳ km/h$$

** ۳۴ در شکل ۲-۲۴، دو خودرو مشابه قرمز r، و سبز g، در دو سوی خیابانی در راستای محور x به سوی هم حرکت می‌کنند. در زمان $t = ۰$ خودرو r در مکان $x_r = ۰$ و خودرو g در مکان $x_g = ۲۲۰ m$ قرار دارد. اگر خودرو r، با سرعت ثابت $۲۰ km/h$ حرکت کند، دو خودرو در مکان $x = ۴۴٫۵ m$، و اگر با سرعت ثابت $۴۰ km/h$ حرکت کند، دو خودرو در مکان $x = ۷۷٫۹ m$، از کنار هم عبور می‌کنند. مطلوب است تعیین (الف) سرعت آغازی و (ب) شتاب ثابت خودرو سبز؟



شکل ۲-۲۴ مسئله‌های ۳۴ و ۳۵.

حل: فرض می‌کنیم که $d = ۲۲۰ m$ مسافت بین خودروها در لحظه‌ی $t = ۰$، و $v_۱ = ۲۰ km/h = ۵۰/۹ m/s$ تندی مربوط به عبور خودرو قرمز از نقطه‌ی $x = ۴۴٫۵ m$ و $v_۲ = ۴۰ km/h = ۱۰۰/۹ m/s$ تندی مربوط به عبور از نقطه‌ی $x_۲ = ۷۷٫۹ m$ باشد. اکنون دو معادله (بر مبنای معادله‌ی ۲-۱۷) داریم:

$$d - x_۱ = v_۰t_۱ + \frac{۱}{۲}at_۱^۲ \qquad \text{که در آن } t_۱ = x_۱/v_۱$$

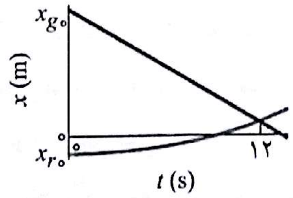
$$d - x_۲ = v_۰t_۲ + \frac{۱}{۲}at_۲^۲ \qquad \text{که در آن } t_۲ = x_۲/v_۲$$

این دو معادله را به طور هم‌زمان حل می‌کنیم و نتایج زیر را به‌دست می‌آوریم:

(الف) سرعت اولیه‌ی خودرو سبز $v_0 = -8.7\,m/s$ است. علامت منفی نشان می‌دهد که خودرو سبز در آغاز به طرف خودرو قرمز حرکت می‌کند.

(ب) شتاب خودرو سبز $a = -3.3\,m/s^2$ است.

** ۳۵ شکل ۲-۲۴، خودروهای قرمز r، و سبز g، را نشان می‌دهد که به سوی هم حرکت می‌کنند. شکل ۲-۲۵ نشان دهنده‌ی نمودار حرکت خودروها ومکان‌های $x_{g0} = 270\,m$ و $x_{r0} = -35.0\,m$ آن‌ها در زمان $t = 0$ است. خودرو سبز دارای تندی ثابت $20.0\,m/s$ است و خودرو قرمز از حال سکون شروع به‌حرکت می‌کند. بزرگی شتاب خودرو قرمز چقدر است؟



شکل ۲-۲۵ مسئله‌ی ۳۵.

حل: مکان خودروها به صورت تابعی از زمان عبارت‌اند از:

$$x_r(t) = x_{r0} + \frac{1}{2}a_r t^2 = (-35.0\,m) + \frac{1}{2}a_r t^2$$

$$x_g(t) = x_{g0} + v_g t = (270\,m) - (20\,m/s)t$$

در اینجا سرعت خودرو سبز را قرار داده‌ایم و نه تندی آن را. در لحظه‌ی $t = 12.0\,s$ که خط‌های رسم شده یکدیگر را قطع می‌کنند، دو خودرو از کنار هم عبور می‌کنند. بنابراین می‌توان نوشت

$$(270\,m) - (20\,m/s)(12.0\,s) = 30\,m = (-35.0\,m) + \frac{1}{2}a_r(12.0\,s)^2$$

در حل این معادله بزرگی شتاب خودرو قرمز مساوی با $a_r = 0.90\,m/s^2$ به دست می‌آید.

** ۳۶ خودرویی مسافت $900\,m$ را در راستای محور x می‌پیماید. حرکت خودرو از حال سکون (در $x = 0$) آغاز می‌شود و به حال سکون (در $x = 900\,m$) به پایان می‌رسد. شتاب خودرو در طول یک چهارم اول مسیر $+2.25\,m/s^2$ و در بقیه‌ی مسیر $-0.750\,m/s^2$ است. (الف) زمان پیمودن مسافت $900\,m$ چقدر است؟ (ب) بیشینه‌ی تندی خودرو چیست؟ (پ) نمودارهای مکان x، سرعت v، و شتاب a برحسب زمان t مربوط به این سفر را رسم کنید.

حل: (الف) برای قسمت ۱ سفر از معادله‌ی ۲-۱۵ و برای قسمت ۲ سفر از معادله‌ی ۲-۱۸ استفاده می‌کنیم:

$$\Delta x_1 = v_{01}t_1 + \frac{1}{2}a_1 t_1^2 \qquad a_1 = 225\,m/s^2\ ,\ \Delta x_1 = \frac{900}{4}\,m$$

$$\Delta x_2 = v_2 t_2 - \frac{1}{2}a_2 t_2^2 \qquad a_2 = -0.75\,m/s^2 , \Delta x_2 = \frac{3(900)}{4}\,m$$

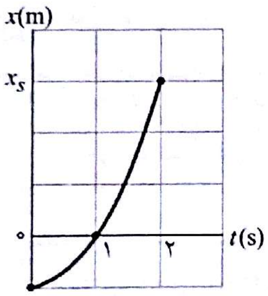
علاوه بر این، $v_{01} = v_2 = 0$ است. زمان‌ها را از این معادله به دست می‌آوریم و آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم: $t = t_1 + t_2 = 56.6\,s$

(ب) از معادله‌ی ۲-۱۶ برای قسمت ۱ سفر استفاده می‌کنیم:

$$v^2 = (v_{01})^2 + 2a_1\Delta x_1 = 0 + 2(2.25)(\frac{900}{4}) = 1013\,m^2/s^2$$

که از آنجا مقدار $v = 31.8\,m/s$ برای تندی بیشینه به‌دست می‌آید.

** ۳۷ شکل ۲-۲۶، نمودار حرکت ذره‌ای را نشان می‌دهد که در راستای محور x با شتاب ثابت حرکت می‌کند. مقیاس محور قائم شکل با مقدار $x_s = 6.0\,m$ مشخص شده است. (الف) بزرگی، و (ب) جهت شتاب ذره چیست؟



شکل ۲-۲۶ مسئله‌ی ۳۷.

حل: (الف) با توجه به شکل معلوم می‌شود که $x_0 = -2.0\,m$ است. معادله‌ی

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

جدول ۲-۱ را برای $t = 1.0\,s$ و سپس برای $t = 2.0\,s$ به‌کار می‌بریم. در نتیجه دو معادله به دست می‌آید که در آن‌ها v_0 و a مجهول‌اند:

$$0.0 - (-2.0\,m) = v_0(1.0\,s) + \frac{1}{2}a(1.0\,s)^2$$

$$6.0\,m - (-2.0\,m) = v_0(2.0\,s) + \frac{1}{2}a(2.0\,s)^2$$

از حل هم‌زمان این معادله‌ها مقادیر $v_0 = 0$ و $a = 4.0\,m/s^2$ به‌دست می‌آیند.

(ب) مثبت بودن جواب نشان می‌دهد که جهت بردار شتاب در جهت $+x$ است.

** ۳۸ (الف) اگر شتاب بیشینه‌ی قابل تحمل برای مسافرهای یک قطار زیرزمینی $۱/۳۴\,m/s^۲$ و فاصله‌ی ایستگاه‌های قطار $۸۰۶\,m$ باشد، تندی بیشینه‌ی قطار در بین ایستگاه‌ها به چه مقدار می‌تواند برسد؟ (ب) زمان پیمودن فاصله‌ی میان دو ایستگاه چقدر است؟ (پ) اگر این قطار در هر ایستگاه به مدت $۲۰s$ توقف کند، تندی بیشینه‌ی قطار از آغاز یک حرکت تا آغاز حرکت بعدی چقدر است؟ (ت) نمودارهای x، v و a برحسب t را برای بازه‌ی زمانی بین آغاز یک حرکت تا آغاز حرکت بعدی رسم کنید.

حل: فرض می‌کنیم قطار از حال سکون ($v_۰ = ۰$ و $x_۰ = ۰$) با شتاب $a_۱ = +۱/۳۴\,m/s^۲$ تا نقطه‌ی میانی حرکت می‌کند و سپس با شتاب $a_۲ = -۱/۳۴\,m/s^۲$ حرکت می‌کند تا در ایستگاه بعدی متوقف شود ($v_۲ = ۰$). سرعت قطار در نقطه‌ی میانی ($x_۱ = ۸۰۶/۲ = ۴۰۳\,m$)، مساوی با $v_۱$ است.

(الف) از معادله‌ی ۲-۱۶ داریم

$$v_۱^۲ = v_۰^۲ + ۲a_۱x_۱ \Rightarrow v_۱ = \sqrt{۲(۱/۳۴m/s^۲)(۴۴۰m)} = ۳۴/۳m/s$$

(ب) مدت زمان $t_۱$ در مرحله‌ی شتاب گرفتن قطار (با استفاده از معادله‌ی ۲-۱۵) برابر است با

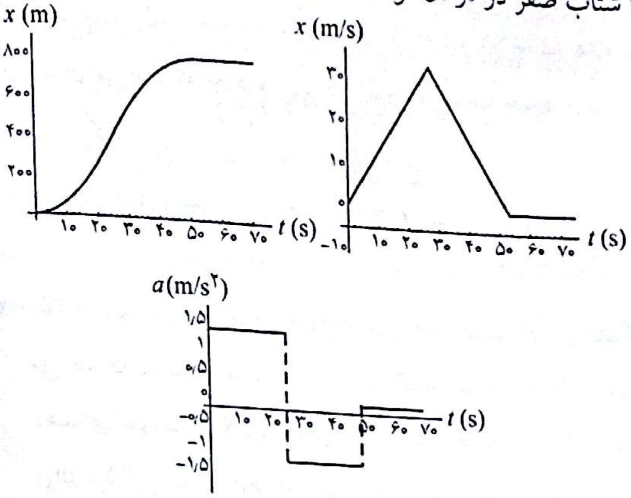
$$x_۱ = v_۰t_۱ + \frac{۱}{۲}a_۱t_۱^۲ \Rightarrow t_۱ = \sqrt{\frac{۲(۴۴۰m)}{۱/۳۴m/s^۲}} = ۲۵/۶s$$

چون بازه‌ی زمانی مربوط به شتاب کند کننده نیز به همین مقدار است، این نتیجه را دو برابر می‌کنیم تا $t = ۵۱/۲s$ برای بازه‌ی زمانی بین ایستگاه‌ها به دست آید.

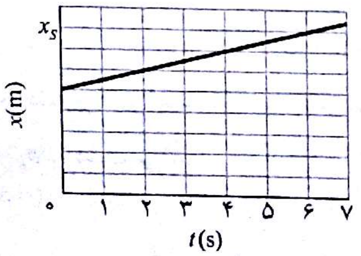
(پ) چون «زمان مرده» (زمان توقف) $۲۰s$ است، مدت زمان کل بین آغاز حرکت تا آغاز حرکت بعدی $T = t + ۲۰ = ۷۱/۲s$ است. بنابراین، از معادله‌ی ۲-۲ داریم

$$v_{avg} = \frac{۸۸۰\,m}{۷۱/۲s} = ۱۲/۴\,m/s$$

(ت) نمودارهای x، v و a برحسب زمان، در زیر رسم شده‌اند. نمودار سوم، $a(t)$، دارای سه «گام» افقی است ـ اولی با شتاب $۱/۳۴\,m/s^۲$ در بازه‌ی زمانی $۰ < t < ۲۴/۵۳s$، دومی با شتاب $-۱/۳۴\,m/s^۲$ در بازه‌ی زمانی $۲۴/۵۳s < t < ۴۹/۱s$ و گام آخر با شتاب صفر در «زمان توقف» در بازه‌ی $۴۹/۱s < t < ۶۹/۱s$.



** ۳۹ خودروهای A و B در دو خط مجاور و در یک جهت حرکت می‌کنند. در بازه‌ی زمانی $t = ۰$ تا $t = ۷/۰s$، نمودار مکان x خودرو A از شکل ۲-۲۷ به‌دست می‌آید. مقیاس محور قائم شکل با مقدار $x_S = ۳۲/۰m$ مشخص شده است. در زمان $t = ۰$ خودرو B در حال حرکت با سرعت $۱۲m/s$ و شتاب ثابت منفی a_B است و از مکان $x = ۰$ عبور می‌کند. (الف) مقدار a_B چقدر باید باشد تا در زمان $t = ۴/۰s$ این دو خودرو (برای یک لحظه) به کنار هم برسند (یعنی به‌طور لحظه‌ای دارای مقدار x یکسان باشند)؟ (ب) به ازای این مقدار a_B، این دو خودرو چند بار در کنار هم قرار می‌گیرند. (پ) نمودار مکان x خودرو B برحسب زمان t را در روی شکل ۲-۲۷ رسم کنید. اگر بزرگی شتاب a_B، (ت) بیشتر از و (ث) کمتر از، پاسخ قسمت (الف) باشد، دوخودرو چندبار درکنارهم قرار می‌گیرند؟



شکل ۲-۲۷ مسئله‌ی ۳۹.

حل: (الف) می‌دانیم که $v_A = ۱۲/۶ = ۲m/s$ است. بنابراین، با توجه به مقدار x اولیه‌ی مساوی با $۲۰m$، خودرو A در لحظه‌ی $t = ۴s$ به مکان $x = ۲۸m$ می‌رسد. برای خودرو B در همان

زمان، مقدار x مساوی با همین مقدار است؛ با استفاده از معادله‌ی ۲-۱۵ داریم:

$$۲۸\,m = (۱۲\,m/s)t + \frac{۱}{۲}a_B t^۲ \qquad t = ۴٫۰\,s \text{ که در آن}$$

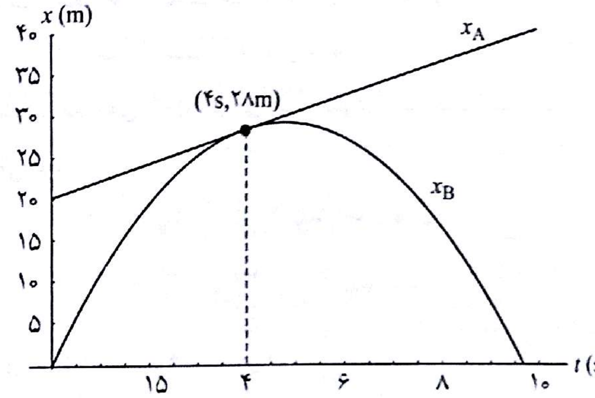
در نتیجه مقدار $a_B = -۲٫۵\,m/s^۲$ به دست می‌آید.

(ب) سؤال این است: با استفاده از مقدار a_B به دست آمده در قسمت (الف) آیا مقادیر دیگری برای t (علاوه بر $t = ۴s$) وجود دارند که به ازای آن‌ها $x_A = x_B$ باشد؟ این شرط به صورت زیر نوشته می‌شود

$$۲۰ + ۲t = ۱۲t + \frac{۱}{۲}a_B t^۲$$

چون $a_B = -۲٫۵\,m/s^۲$ است، معادله‌ی بالا فقط یک جواب $t = ۴s$ را دارد و نشان می‌دهد که فقط در لحظه‌ی $t = ۴s$ خودروها در کنار هم قرار می‌گیرند.

(پ) نمودارمکان x خودرو B برحسب زمان t به‌صورت زیر است



(ت) ما فقط باید ریشه‌های **حقیقی** را پیدا کنیم، یعنی باید $۰ \geq (a_B)(-۲۰)۲ - ۱۰^۲$ باشد. اگر $|a_B| > ۲٫۵$ باشد، هیچ جواب حقیقی برای معادله به دست نمی‌آید، یعنی خودروها هرگز در کنار هم قرار نمی‌گیرند.

(ث) در این صورت $۰ < (a_B)(-۲۰)۲ - ۱۰^۲$ است که نشان می‌دهد معادله دو ریشه‌ی حقیقی دارد، یعنی خودروها دو بار در کنار هم قرار می‌گیرند.

** ۴۰ در حالی که با خودرو به چراغ راهنمایی نزدیک می‌شوید چراغ زرد می‌شود. تندی خودرو شما دارای مقدار مجاز $v_0 = ۵۵\,km/h$ است. بهترین آهنگ کاهش دادن تندی $a = ۵٫۱۸\,m/s^۲$ و بهترین زمان واکنش شما برای شروع به ترمز کردن $T = ۰٫۷۵s$ است. برای جلوگیری از ورود به حریم چهارراه پس از قرمز شدن چراغ راهنمایی آیا در حالت‌های زیر باید ترمز کنید تا متوقف شوید یا باید با همان تندی $۵۵\,km/h$ به حرکت ادامه دهید، اگر فاصله‌ی خودرو شما تا چهارراه و مدت زمان زرد بودن چراغ به ترتیب (الف) $۴۰m$ و $۲٫۸s$، و (ب) $۳۲m$ و $۱٫۸s$، باشد؟ پاسخ خود را به صورت ترمز کردن، ادامه دادن حرکت، انجام دادن هر دو کار (اگر هر دو کار مؤثر باشد)، یا هیچ کدام (اگر هیچ یک مؤثر نباشند و مدت زمان زرد ماندن چراغ نامناسب باشد)، بیان کنید.

حل: در مدت زمان واکنش، سرعت خودرو ثابت می‌ماند در نتیجه مسافت پیموده شده در این مدت برابر است با:

$$d_r = v_0 T - (۱۵٫۲۸\,m/s)(۰٫۷۵\,s) = ۱۱٫۴۶\,m$$

برای پیدا کردن مسافت d_b پیموده شده در مدت زمان ترمز کردن، از معادله‌ی ۲-۱۶ (به ازای $v = ۰$) استفاده می‌کنیم:

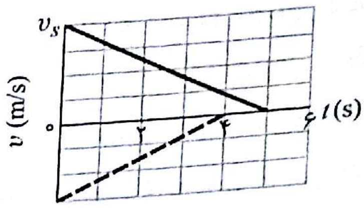
$$v^۲ = v_0^۲ + ۲ad_b \Rightarrow d_b = -\frac{(۱۵٫۲۸\,m/s)^۲}{۲(-۵٫۱۸\,m/s^۲)}$$

بنابراین، مسافت کل پیموده شده $d_r + d_b = ۳۴٫۰\,m$ است که نشان می‌دهد راننده می‌تواند خودرو را به موقع متوقف کند. اگر راننده با سرعت v_0 به حرکت ادامه دهد، خودرو در مدت زمان $t = (۴۰m)/(۱۵٫۲۸\,m/s) = ۲٫۶s$ به چهارراه وارد می‌شود، که این مدت زمان برای وارد شدن به چهارراه پیش از قرمز شدن چراغ راهنمایی، کافی است. اغلب مردم این وضعیت را قابل‌قبول می‌دانند.

(ب) در این حالت، مسافت کل پیموده شده تا لحظه‌ی توقف [که در قسمت (الف) مساوی با ۳۴ متر به دست آمد]، از فاصله‌ی باقی‌مانده تا چهارراه بیشتر است، لذا راننده نمی‌تواند ماشین خود را بدون وارد شدن جلو آن به حریم چهارراه، متوقف کند. مدت زمان رسیدن به تندی ثابت $۳۲/۱۵٫۲۸ = ۲٫۱s$ است که خیلی طولانی است (چراغ بعد از $۱٫۸s$ قرمز می‌شود). راننده در وسط‌گیر می‌افتد.

** ۴۱ در هنگام حرکت کردن دو قطار در یک مسیر راننده‌های آن‌ها ناگهان متوجه می‌شوند که قطارها به سوی هم حرکت می‌کنند. شکل ۲-۲۸، نمودار سرعت‌های قطارها v، را به‌صورت تابعی از زمان t، پس از آنکه راننده‌ها حرکت قطارها را کند کردند، نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم شکل با مقدار

$v_s = ۴۰٫۰\,m/s$ مشخص شده است. فرایند کند شدن قطارها هنگامی آغاز می‌شود که فاصله‌ی قطارها از یکدیگر ۲۰۰m است. فاصله‌ی دو قطار پس از متوقف شدن چقدر است؟



شکل ۲-۲۸ مسئله‌ی ۴۱.

حل: جابه‌جایی Δx برای هر قطار با مساحت زیر نمودار برابر است (زیرا جابه‌جایی از انتگرال سرعت به دست می‌آید). هر یک از این مساحت‌ها به صورت یک مثلث است و مساحت مثلث با حاصل‌ضرب قاعده در نصف ارتفاع برابر است. بنابراین، مقدار مطلق جابه‌جایی برای یک قطار $(\frac{۱}{۲})(۴۰\,m/s)(۵\,s) = ۱۰۰\,m$، و برای قطار دیگر $(\frac{۱}{۲})(۳۰\,m/s)(۴\,s) = ۶۰\,m$ است. فاصله‌ی اولیه‌ی بین قطارها ۲۰۰m بود، که با توجه به محاسبه‌ی جابه‌جایی‌ها، فاصله‌ی بین قطارها ۱۶۰m کم شده است. در نتیجه جواب $۲۰۰ - ۱۶۰ = ۴۰\,m$ است.

*** ۴۲ در حالی که به فاصله‌ی ۲۵m در دنبال خودرو گشت نامحسوس پلیس در بزرگ‌راهی رانندگی می‌کنید، با تلفن همراه مشغول صحبت کردن هستید؛ تندی حرکت خودرو شما و خودرو پلیس ۱۲۰km/h است. درگیری با طرف مکالمه باعث می‌شود از توجه به خودرو پلیس به مدت ۲٫۰s غافل بمانید (این مدت برای نگاه کردن به تلفن و گفتن «من این کار را نمی‌کنم!» کافی است). در آغاز این ۲٫۰s افسر پلیس با شتاب $۵٫۰\,m/s^۲$ ناگهان ترمز می‌کند. (الف) سرانجام، وقتی دوباره حواس شما جمع می‌شود فاصله‌ی میان دو خودرو چقدر است؟ فرض کنید به مدت ۰٫۴۰s دیگر به زمان نیاز دارید تا متوجه خطر شوید و ترمز کنید. (ب) اگر شما نیز با شتاب $۵٫۰\,m/s^۲$ ترمز کنید، تندی خودرو شما هنگام برخورد با خودرو پلیس چقدر است؟

حل: (الف) توجه کنید که ۱۲۰km/h معادل ۳۳٫۳m/s است. در بازه‌ی زمانی ۲ ثانیه‌ای، خودرو شما مسافت ۶۶٫۷m را طی می‌کند. در این مدت خودرو پلیس که ترمز شده است (بر طبق معادله‌ی ۲-۱۵) مسافت ۵۱٫۱۱m را می‌پیماید. چون فاصله‌ی اولیه‌ی بین خودروها ۲۵m بود، و این فاصله به اندازه‌ی ۱۵٫۶m کم شده است، بنابراین فاصله‌ی بین خودروها ۹٫۴m است.

(ب) ابتدا ۰٫۴s را به داده‌های قسمت (الف) اضافه می‌کنیم. در طول مدت ۲٫۴s، خودرو شما مسافت ۷۹٫۹m را طی می‌کند. در این مدت زمان، خودرو ترمز شده‌ی پلیس (بر طبق معادله‌ی ۲-۱۵) مسافت ۵۸٫۹۳m را طی می‌کند. در نتیجه فاصله‌ی اولیه‌ی ۲۵m بین خودروها به اندازه‌ی ۲۰٫۶m کم می‌شود. بنابراین، در لحظه‌ای که (آن را $t_۰$ بنامید) شروع به ترمز کردن می‌کنید، فاصله‌ی بین خودروها ۴٫۴m است. تندی خودرو پلیس در لحظه‌ی $t_۰$ مساوی با $۳۳٫۳ - ۵(۲٫۴) = ۲۱٫۳\,m/s$ است. برخورد بین دو خودرو در لحظه‌ی t موقعی صورت می‌گیرد که $x_{\text{پلیس}} = x_{\text{شما}}$ باشد (محورهای مختصات را طوری انتخاب می‌کنیم که در لحظه‌ی $t_۰$، مکان خودرو شما $x = ۰$ و مکان خودرو پلیس $x = ۴٫۴\,m$ باشد). معادله‌ی ۲-۱۵ برای هر خودرو به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$x_{\text{پلیس}} - ۴٫۴ = ۲۱٫۳(t - t_۰) - \frac{۱}{۲}(۵)(t - t_۰)^۲$$

$$x_{\text{شما}} = ۳۳٫۳(t - t_۰) - \frac{۱}{۲}(۵)(t - t_۰)^۲$$

این معادله‌ها را از هم کم می‌کنیم:

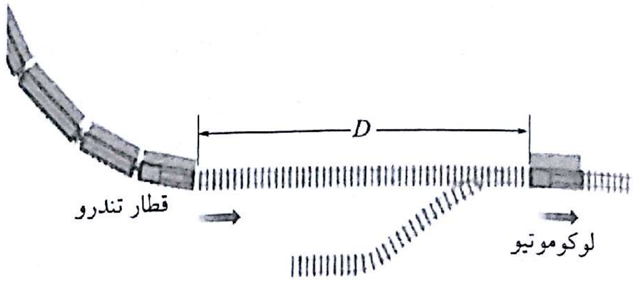
$$۴٫۴ = (۳۳٫۳ - ۲۱٫۳)(t - t_۰) \Rightarrow ۰٫۳۶۷\,s = t - t_۰$$

تندی خودرو شما در آن لحظه برابر است با

$$۳۳٫۳ + a(t - t_۰) = ۳۳٫۳ - ۵(۰٫۳۶۷) \approx ۳۱\,m/s = ۱۱۲\,km/h$$

*** ۴۳ هنگامی‌که یک قطار تندرو مسافری با تندی ۱۶۱km/h در حال حرکت است، پس از گذر از یک پیچ به مسیر مستقیم می‌رسد. در این حال راننده‌ی قطار ناگهان در جلو خود و در فاصله‌ی $D = ۶۷۶\,m$ لوکوموتیوی را می‌بیند که در همان جهت و روی همان ریل با سرعت ۲۹٫۰km/h به پیش می‌رود (شکل ۲-۲۹). راننده‌ی قطار تندرو بی‌درنگ ترمز می‌کند. (الف) بزرگی شتاب ثابت کُند کننده‌ی ناشی از ترمز کردن چقدر باید باشد تا درست در آخرین لحظه از برخورد جلوگیری شود؟ (ب) فرض کنید راننده‌ی قطار تندرو نخستین

بار در زمان $t = 0$ و در مکان $x = 0$ لوکوموتیو را می‌بینند. نمودارهای $x(t)$ مربوط به لوکوموتیو و قطار تندرو را برای حالتی رسم کنید که آن دو درست در آستانه‌ی برخورد قرار می‌گیرند و حالتی که کاملاً از برخورد جلوگیری نشده است.



شکل ۲-۲۹ مسئله‌ی ۴۳.

حل: چون شتاب ثابت است، از معادلات جدول ۲-۱ استفاده می‌کنیم. از معادله‌ی ۲-۱۷ شروع می‌کنیم و سرعت اولیه‌ی قطار را v_t و سرعت لوکوموتیو را v_l می‌نامیم (که سرعت نهایی قطار نیز هست، مشروط بر اینکه برخورد صورت نگیرد). می‌دانیم که مسافت Δx شامل فاصله‌ی اولیه‌ی بین قطار و لوکوموتیو (D) و مسافت پیموده شده‌ی $v_l t$ توسط لوکوموتیو است. بنابراین داریم

$$\frac{v_t + v_l}{۲} = \frac{\Delta x}{t} = \frac{D + v_l t}{t} = \frac{D}{t} + v_l$$

اکنون از معادله‌ی ۲-۱۱ برای حذف کمیت زمان از معادله‌ی بالا استفاده می‌کنیم. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{v_t + v_l}{۲} = \frac{D}{(v_l - v_t)/a} + v_l$$

و از آنجا داریم:

$$a = \left(\frac{v_t + v_l}{۲} - v_l\right)\left(\frac{v_l - v_t}{D}\right) = -\frac{۱}{۲D}(v_l - v_t)^۲$$

پس، شتاب قطار برابر است با:

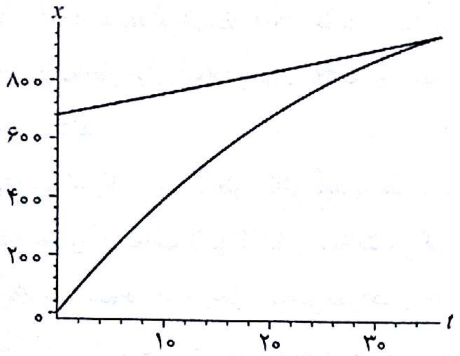
$$a = -\frac{۱}{۲(۰/۶۷۶\ \mathrm{km})}(۲۹\ \mathrm{km/h} - ۱۶۱\ \mathrm{km/h})^۲$$

$$= -۱۲۸۸۸\ \mathrm{km/h^۲}$$

$$= (-۱۲۸۸۸\ \mathrm{km/h^۲})\left(\frac{۱۰۰۰\ \mathrm{m}}{۱\mathrm{km}}\right)\left(\frac{۱\mathrm{h}}{۳۶۰۰\mathrm{s}}\right)^۲ = -۰/۹۹۴\ \mathrm{m/s^۲}$$

بنابراین، ***بزرگی*** شتاب کند کننده‌ی قطار $|a| = ۰/۹۹۴\ \mathrm{m/s^۲}$ است. نمودار زیر درست حالت قبل از برخورد را نشان می‌دهد (x در راستای محور قائم برحسب متر و t در راستای محور افقی برحسب ثانیه انتخاب شده‌اند). خط راست، حرکت لوکوموتیو و منحنی، حرکت قطار مسافری را نشان می‌دهد.

حالت دیگر (که از برخورد ممانعت نمی‌شود)، مانند حالت اول است با این تفاوت که در نقطه‌ای که منحنی و خط راست به هم می‌رسند، شیب منحنی از شیب خط راست بیشتر است.



پودمان ۲-۵ شتاب سقوط آزاد

* **۴۴** یک حیوان گورکن رم کرده در حین بالا پریدن در مدت ۰/۲۰۰ ثانیه‌ی اول به ارتفاع ۰/۵۵۴ متری می‌رسد. (الف) تندی آغازی این حیوان در لحظه‌ی جدا شدن از زمین چقدر است؟ (ب) تندی حیوان در ارتفاع ۰/۵۵۴ متری چقدر است؟ (پ) این حیوان تا چه ارتفاعی بالاتر می‌پرد؟

حل: از مقاومت هوا چشمپوشی می‌کنیم، در نتیجه $a = -g = -۹/۸\ \mathrm{m/s^۲}$ است. جهت رو به پایین را در جهت $-y$ انتخاب می‌کنیم و شتاب حرکت نیز ثابت است. ضمناً سطح زمین را در مبداء محور y انتخاب می‌کنیم.

(الف) با استفاده از معادله‌ی $y = v_۰ t - \frac{۱}{۲}gt^۲$ به ازای $y = ۰/۵۵۴\ \mathrm{m}$ و $t = ۰/۲۰۰\mathrm{s}$ داریم

$$v_۰ = \frac{y + \frac{۱}{۲}gt^۲}{t} = \frac{۰/۵۵۴ + \frac{۱}{۲}(۹/۸)(۰/۲۰۰)^۲}{۰/۲۰۰} = ۳/۷۵\ \mathrm{m/s}$$

(ب) سرعت حیوان در ارتفاع $y = ۰/۵۵۴\ \mathrm{m}$ برابر است با:

$$v = v_۰ - gt = ۳/۷۵ - (۹/۸)(۰/۲۰۰) = ۱/۷۹\ \mathrm{m/s}$$

(پ) با استفاده از معادله‌ی $v^۲ = v_۰^۲ - ۲gy$ (برای مقادیر متفاوت y و v نسبت به قبل)، مقدار y مربوط به ارتفاع بیشینه را (که در آنجا $v = ۰$ است) به دست می‌آوریم:

$$y = \frac{v_۰^۲}{۲g} = \frac{(۳/۷۵)^۲}{۲(۹/۸)} = ۰/۷۱۷\ \mathrm{m}$$

بنابراین، حیوان گورکن به اندازه‌ی $۰/۷۱۷ - ۰/۵۵۴ = ۰/۱۶۳\ \mathrm{m}$ بالاتر می‌پرد.

※ ۴۵ (الف) توپی را با چه سرعتی باید از سطح زمین به طور قائم به سوی بالا پرتاب کرد تا به ارتفاع بیشینه‌ی $۵۰\,m$ برسد؟ (ب) توپ چه مدت در هوا خواهد بود؟ (پ) نمودارهای تغییرات y، v و a برحسب t مربوط به توپ را رسم کنید. در روی دو نمودار اول، زمان رسیدن گلوله به ارتفاع ۵۰ متری را مشخص کنید.

حل: در این مسئله یک توپ به طور قائم باید به طرف بالا پرتاب شود. حرکت بعدی آن تحت تأثیر گرانش صورت می‌گیرد. در مدتی که توپ پرتاب می‌شود و به زمین برمی‌گردد، از مقاومت هوا چشمپوشی می‌کنیم، در نتیجه $a=-g=-۹/۸\,m/s^۲$ است (جهت رو به پایین را در جهت $-y$ انتخاب می‌کنیم). چون شتاب ثابت است، لذا از معادلات جدول ۲-۱ استفاده می‌کنیم:

$$v = v_۰ - gt \qquad (۲-۱۱)$$

$$y - y_۰ = v_۰t - \frac{۱}{۲}gt^۲ \qquad (۲-۱۵)$$

$$v^۲ = v_۰^۲ - ۲g(y-y_۰) \qquad (۲-۱۶)$$

در این معادله‌ها $y_۰=۰$ است، تندی توپ پس از رسیدن به ارتفاع بیشینه‌ی y، به طور موقتی صفر می‌شود $(v=۰)$. بنابراین، تندی اولیه‌ی توپ $v_۰$ را از طریق معادله‌ی $v^۲=v_۰^۲-۲gy=۰$ می‌توان به ارتفاع y ربط داد.

مدت زمانی که طول می‌کشد تا توپ به ارتفاع بیشینه برسد، از رابطه‌ی $v=v_۰-gt=۰$ یا $t=v_۰/g$ به دست می‌آید. بنابراین، مدت زمان رفت و برگشت توپ (از لحظه‌ی جدا شدن از زمین تا لحظه‌ی برگشت آن به زمین)، $T=۲t=۲v_۰/g$ است.

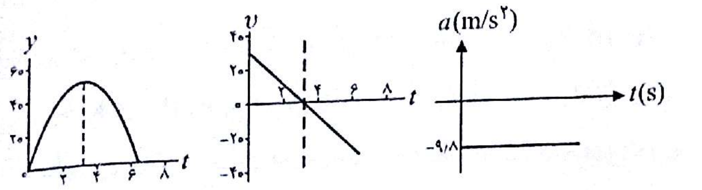
(الف) در بالاترین نقطه‌ی مسیر $v=۰$ و $v_۰=\sqrt{۲gy}$ است. چون $y=۵۰\,m$ است، در نتیجه داریم

$$v_۰=\sqrt{۲gy}=\sqrt{۲(۹/۸\,m/s^۲)(۵۰\,m)}=۳۱/۳\,m/s$$

(ب) با استفاده از نتیجه‌ی قسمت (الف) برای $v_۰$، مدت زمان کل پرواز توپ را به دست می‌آوریم:

$$T=\frac{۲v_۰}{g}=\frac{۲(۳۱/۳\,m/s)}{۹/۸\,m/s^۲}=۶/۳۹\,s\approx ۶/۴\,s$$

(پ) نمودارهای تغییرات y، v و a برحسب t برای توپ، در بالا رسم شده‌اند. نمودار شتاب یک خط افقی است که از $-۹/۸\,m/s^۲$ رسم شده است.



برای محاسبه‌ی مدت زمان کل پرواز توپ از معادله‌ی ۲-۱۵ نیز می‌توان استفاده کرد. در لحظه‌ی $t=T>۰$، توپ به مکان اولیه‌ی پرتاب $(y=۰)$ برمی‌گردد. در نتیجه داریم

$$y=v_۰T-\frac{۱}{۲}gT^۲=۰\Rightarrow T=\frac{۲v_۰}{g}$$

※ ۴۶ قطره‌های باران از ابرهایی به ارتفاع $۱۷۰۰\,m$ فرو می‌ریزند. (الف) اگر مقاومت هوا باعث کند شدن حرکت نشود، قطره‌ها با چه سرعتی به زمین برخورد می‌کنند؟ (ب) آیا راه رفتن در زیر چنین رگبار بارانی امن است؟

حل: اگر از مقاومت هوا در طول مدت سقوط قطره‌ها چشمپوشی کنیم، $a=-g=-۹/۸\,m/s^۲$ خواهد بود (جهت رو به پایین را جهت $-y$ در نظر گرفته‌ایم). این حرکت با شتاب ثابت است و می‌توانیم از معادلات جدول ۲-۱ (با قرار دادن Δy به جای Δx) استفاده کنیم.

(الف) با استفاده از معادله‌ی ۲-۱۶ و پذیرفتن ریشه‌ی منفی (چون سرعت نهایی رو به پایین است)، داریم

$$v=-\sqrt{v_۰^۲-۲g\Delta y}=-\sqrt{۰-۲(۹/۸)(-۱۷۰۰)}=-۱۸۳\,m/s$$

بنابراین، بزرگی سرعت قطره‌های باران $۱۸۸\,m/s$ است.

(ب) خیر، جواب دادن به این سؤال بدون تجزیه و تحلیل کافی مشکل است. اگر جرم یک قطره‌ی باران را در حدود یک گرم یا کمتر در نظر بگیریم، جرم و تندی آن [با توجه به قسمت (الف)]، کمتر از جرم و تندی یک گلوله‌ی معمولی است. اما در اینجا تعداد قطره‌ها *زیاد* است و وضعیت خطرناکی پیش می‌آید. اگر مقاومت هوا را در نظر بگیریم، تندی نهایی قطره‌ها کمتر و خطر برطرف می‌شود و ما هم با این وضعیت آشنا هستیم.

※ ۴۷ در یک کارگاه ساختمانی، آچاری از بالا می‌افتد و با تندی $۲۴\,m/s$ به زمین می‌خورد. (الف) آچار از چه ارتفاعی سقوط کرده است؟ (ب) مدت زمان سقوط چقدر است؟ (پ) نمودارهای تغییرات y، v و a برحسب t را برای آچار رسم کنید.

حل: از مقاومت هوا چشم‌پوشی می‌کنیم، در نتیجه $a=-g=-۹/۸\,m/s^{۲}$ است (جهت رو به پایین را در جهت $-y$ انتخاب می‌کنیم). حرکت با شتاب ثابت صورت می‌گیرد و ما به جای Δx مقدار Δy را قرار می‌دهیم.

(الف) آجار در لحظه‌ی صفر با سرعت اولیه‌ی $v_۰=۰$ می‌افتد. از معادله‌ی $v^{۲}=v_۰^{۲}-۲g\Delta y$ داریم

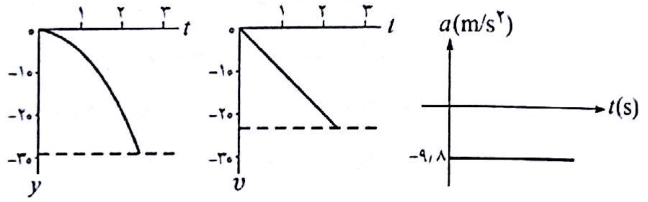
$$\Delta y=-\frac{(-۲۴)^{۲}}{۲(۹/۸)}=-۲۹/۴\,m$$

بنابراین، آجار از ارتفاع $۲۹/۴\,m$ سقوط کرده است.

(ب) ازحل معادله‌ی $v=v_۰-gt$، زمان سقوط آجار را پیدا می‌کنیم:

$$t=\frac{v_۰-v}{g}=\frac{۰-(-۲۴)}{۹/۸}=۲/۴۵\,s$$

(پ) برای رسم کردن نمودارها از یکاهای SI استفاده می‌کنیم و مکان اولیه‌ی آجار را در مبداء مختصات انتخاب می‌کنیم.



وقتی آجار با شتاب $a=-g<۰$ سقوط می‌کند، تندی آن افزایش می‌یابد ولی سرعت آن منفی‌تر می‌شود.

* ۴۸ بچه‌ای سنگی را با تندی $۱۲/۰\,m/s$ از بالای ساختمانی به ارتفاع $۳۰/۰\,m$ در راستای قائم به پایین می‌اندازد. (الف) چه مدت طول می‌کشد تا سنگ به زمین برسد؟ (ب) تندی سنگ در لحظه‌ی برخورد به زمین چقدر است؟

حل: از مقاومت هوا چشم‌پوشی می‌کنیم، در نتیجه $a=-g=-۹/۸\,m/s^{۲}$، ضمناً جهت رو به پایین را در جهت $-y$ انتخاب می‌کنیم. در این مسئله شتاب حرکت ثابت است.

(الف) چون $\Delta y=y-y_۰=-۳۰\,m$ است، از معادله‌ی ۲-۱۵ برای محاسبه‌ی t استفاده می‌کنیم:

$$\Delta y=v_۰t-\frac{۱}{۲}gt^{۲}\Rightarrow t=\frac{v_۰\pm\sqrt{v_۰^{۲}-۲g\Delta y}}{g}$$

به ازای $v_۰=-۱۲\,m/s$ (زیرا جهت سرعت به طرف پایین است) و انتخاب ریشه‌ی مثبت (برای آنکه $t>۰$ باشد)، داریم

$$t=\frac{-۱۲+\sqrt{(-۱۲)^{۲}-۲(۹/۸)(-۳۰)}}{۹/۸}=۱/۵۴\,s$$

(ب) چون اطلاعات کافی در اختیار داریم، از تمام معادلات جدول ۲-۱ برای پیدا کردن v می‌توان استفاده کرد. اما تنها معادله‌ای که به نتیجه‌ی قسمت (الف) نیاز دارد، معادله‌ی ۲-۱۶ است:

$$v=\sqrt{v_۰^{۲}-۲g\Delta y}=۲۷/۱\,m/s$$

ریشه‌ی مثبت این معادله را انتخاب می‌کنیم تا *تندی* (بزرگی بردار سرعت) به دست آید.

* ۴۹ یک بالون هوای داغ با تندی $۱۲\,m/s$ در حال صعود کردن است. هنگامی که بالون به ارتفاع ۸۰ متری زمین می‌رسد، بسته‌ای از آن رها می‌شود. (الف) چه مدت طول می‌کشد تا بسته به زمین برسد؟ (ب) تندی بسته در لحظه‌ی برخورد به زمین چقدر است؟

حل: از مقاومت هوا چشم‌پوشی می‌کنیم، در نتیجه $a=-g=-۹/۸\,m/s^{۲}$ است. جهت رو به پایین را در جهت $-y$ انتخاب می‌کنیم. چون شتاب ثابت است، از معادلات جدول ۲-۱ می‌توان استفاده کرد. مبداء مختصات را بر روی زمین قرار می‌دهیم و می‌دانیم که سرعت اولیه‌ی بسته با سرعت بالون برابر است، یعنی $v_۰=+۱۲\,m/s$ و ضمناً محل اولیه‌ی بالون $y_۰=+۸۰\,m$ است.

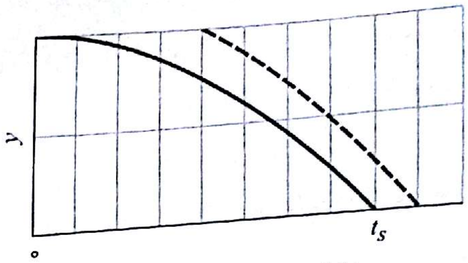
(الف) از معادله‌ی $y=y_۰+v_۰t-\frac{۱}{۲}gt^{۲}$ به ازای $y=۰$، مدت زمان رسیدن بسته به زمین به دست می‌آید:

$$t=\frac{v_۰+\sqrt{v_۰^{۲}+۲gy_۰}}{g}=\frac{۱۲+\sqrt{۱۲^{۲}+۲(۹/۸)(۸۰)}}{۹/۸}=۵/۴\,s$$

(ب) اگر نخواهیم از نتیجه‌ی قسمت (الف) استفاده کنیم، می‌توانیم معادله‌ی ۲-۱۶ را به‌کاربریم. اما اگر این امر اهمیتی نداشته باشد، از انواع فرمول‌های جدول ۲-۱ می‌توان استفاده کرد. مثلاً از معادله‌ی ۲-۱۱ داریم $v=v_۰-gt=۱۲-(۹/۸)(۵/۴۴۷)=-۴۱/۳۸\,m/s$، یعنی *تندی* بسته در لحظه‌ی برخورد به زمین $۴۱\,m/s$ است.

* ۵۰ در زمان $t=۰$، سیب ۱ از کنار یک پل روی بزرگ‌راهی واقع در زیر پل می‌افتد؛ لحظه‌ای بعد، سیب ۲ از همان ارتفاع به پایین پرتاب می‌شود. شکل ۲-۳۰، نمودارهای مکان‌های y این سیب‌ها را برحسب t در حین سقوط تا برخورد آن‌ها به سطح بزرگ‌راه نشان می‌دهد. مقیاس محور زمان شکل با مقدار $t_s=۲/۰\,s$ مشخص شده است. سیب ۲ تقریباً با چه تندی‌ای

به پایین پرتاب شده است؟



شکل ۲-۳۰ مسئله‌ی ۵۰.

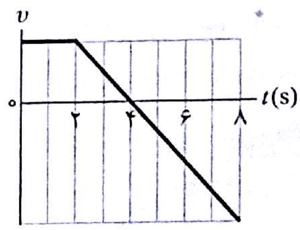
حل: مؤلفه‌ی y سیب ۱ تابع رابطه‌ی $y-y_{۰۱}=-\frac{۱}{۲}gt^{۲}$ است و در لحظه‌ی $t=۲/۰\,s$، $y=۰$ است. از این رابطه $y_{۰۱}=۱۹/۶\,m$ به دست می‌آید.

نمودار مختصه‌ی سیب ۲ (که در لحظه‌ی $t=۱/۰\,s$ با سرعت $v_{۲}$ پرتاب شده است) به صورت زیر است:

$$y-y_{۰۲}=v_{۲}(t-۱/۰)-\frac{۱}{۲}g(t-۱/۰)^{۲}$$

در این رابطه $y_{۰۲}=y_{۰۱}=۱۹/۶\,m$ و در لحظه‌ی $t=۲/۲۵\,s$، $y=۰$ است. بنابراین، به طور تقریبی $|v_{۲}|=۹/۶\,m/s$ به دست می‌آید.

** ۵۱ در حالی که یک بالون مجهز به ابزارهای علمی با تندی $۱۹/۶\,m/s$ به بالاسو صعود می‌کند، یکی از بسته‌های اندازه‌گیری آن از جا کنده می‌شود و آزادانه سقوط می‌کند. شکل ۲-۳۱، سرعت قائم این بسته برحسب زمان را، از پیش از کنده شدن تا رسیدن به زمین نشان می‌دهد. (الف) این بسته تا چه ارتفاع بیشینه‌ای نسبت به نقطه‌ی رها شدنش بالا می‌رود؟ (ب) نقطه‌ی رها شدن بسته در چه ارتفاعی نسبت به زمین قرار دارد؟



شکل ۲-۳۱ مسئله‌ی ۵۱.

حل: (الف) جهت رو به بالا را در جهت $+y$ انتخاب، و برای پیدا کردن سرعت اولیه‌ی بسته از معادله‌ی ۲-۱۱ استفاده می‌کنیم:

$$v=v_{۰}+at \Rightarrow ۰=v_{۰}-(۹/۸\,m/s^{۲})(۲/۰\,s)$$

که از آنجا $v_{۰}=۱۹/۶\,m/s$ به دست می‌آید. اکنون از معادله‌ی ۲-۱۵ استفاده می‌کنیم.

$$\Delta y=(۱۹/۶\,m/s)(۲/۰\,s)+\frac{۱}{۲}(-۹/۸\,m/s^{۲})(۲/۰\,s)^{۲}\approx ۲۰\,m$$

باید توجه کرد که «$۲/۰\,s$» که در این محاسبه به کار رفته است مربوط به بازه‌ی زمانی $۲<t<۴$ در نمودار است (در حالی که «$۲/۰\,s$» که در محاسبه‌ی اول به کار رفت، مربوط به بازه‌ی زمانی $۰<t<۲$ در نمودار بود).

(ب) در محاسبه‌ی مربوط به قسمت (ب)، زمان «$۶/۰\,s$» مربوط به بازه‌ی زمانی $۲<t<۸$ در نمودار است:

$$\Delta y=(۱۹/۶\,m/s)(۶/۰\,s)+\frac{۱}{۲}(-۹/۸\,m/s^{۲})(۶/۰\,s)^{۲}\approx -۵۹\,m$$

یا $|\Delta y|=۵۹\,m$.

** ۵۲ از روی پلی که در حال ساخت است، پیچی به عمق ۹۰ متری دره‌ی زیر پل سقوط می‌کند. (الف) این پیچ ۲۰% آخر مسیرش را در چه مدتی می‌پیماید؟ تندی پیچ، (الف) در لحظه‌ای که ۲۰% آخر مسیر را آغاز می‌کند و (پ) در لحظه‌ای که به دره‌ی زیر پل می‌رسد، چقدر است؟

حل: کل مسیر پیموده شده توسط پیچ به صورت زیر است

$$y-y_{۰}=-\frac{۱}{۲}gt^{۲}$$

که در آن $y-y_{۰}=-۹۰\,m$ (جهت رو به بالا را جهت y مثبت در نظر گرفتیم). در نتیجه زمان سقوط کامل $t=۴/۲۹\,s$ به دست می‌آید. ۸۰ درصد اول سقوط آزاد با رابطه‌ی $-۷۲=-g\tau^{۲}/۲$ داده می‌شود که از آن جا $\tau=۳/۸۳\,s$ به دست می‌آید.

(الف) بنابراین، ۲۰ درصد آخر مسیر در مدت $t-\tau=۰/۴۶\,s$ طی می‌شود.

(ب) تندی پیچ از رابطه‌ی $v=-g\tau$ به دست می‌آید که تقریباً $|v|=۳۷/۵\,m/s$ است.

(پ) به‌طور مشابه داریم $v_{\text{پایانی}}=-gt$ یا $|v_{\text{پایانی}}|=۴۲\,m/s$.

** ۵۳ کلیدی از روی پلی که $۴۵\,m$ بالاتر از سطح آب قرار دارد، سقوط می‌کند. این کلید یک راست درون قایقی می‌افتد که با سرعت ثابت در حرکت است و در لحظه‌ی رها شدن در فاصله‌ی ۱۲ متری پیش از محل برخورد قرار داشته است. تندی قایق چقدر است؟

حل: تندی قایق ثابت و برابربا $v_b = d/t$ است. وقتی کلید می‌افتد، d فاصله‌ی سقوط قایق تا پل (مساوی با ۱۲m) و t مدت زمان سقوط کلید است. برای محاسبه‌ی t، مبداء مختصات را در نقطه‌ی رها شدن کلید و جهت مثبت محور y را درجهت **رو به پایین** انتخاب می‌کنیم. اگر کلید در لحظه‌ی صفر رها شود، مدت زمان t را برای $y = ۴۵\,m$ حساب می‌کنیم. چون سرعت اولیه‌ی کلید صفر است، مختصه‌ی مکانی کلید از معادله‌ی $y = \frac{۱}{۲}gt^۲$ به‌دست می‌آید:

$$t = \sqrt{\frac{۲y}{g}} = \sqrt{\frac{۲(۴۵\,m)}{۹٫۸\,m/s^۲}} = ۳٫۰۳\,s$$

بنابراین تندی قایق برابر است با:

$$v_b = \frac{۱۲\,m}{۳٫۰۳\,s} = ۴٫۰\,m/s$$

** ۵۴ سنگی از روی پلی که ۴۳٫۹m بالاتر از سطح آب قرار دارد، رها می‌شود. ۱٫۰۰ ثانیه پس از رها شدن این سنگ، سنگ دیگری در راستای قائم به پایین پرتاب می‌شود و دو سنگ به‌طور هم‌زمان به سطح آب می‌رسند. (الف) تندی آغازی سنگ دوم چقدر است؟ (ب) نمودار تغییرات سرعت هر سنگ را برحسب زمان روی یک نمودار رسم کنید و مبداء زمان را لحظه‌ی رها شدن سنگ اول بگیرید.

حل: از مقاومت هوا چشم‌پوشی می‌کنیم، در نتیجه $a = -g = -۹٫۸\,m/s^۲$ است. جهت **رو به پایین** را در جهت $-y$ انتخاب می‌کنیم. چون شتاب ثابت است، از معادله‌ی ۲-۱۵ استفاده می‌کنیم. متغیرهای پریم‌دار (به جز t) را برای سنگ اول به کار می‌بریم که دارای سرعت اولیه‌ی صفر است و متغیرهای بدون پریم را برای سنگ دوم به کار می‌بریم که سرعت اولیه‌ی رو به پایین آن $-v_۰$ است. بنابراین برای تندی **اولیه** از $v_۰$ استفاده می‌کنیم:

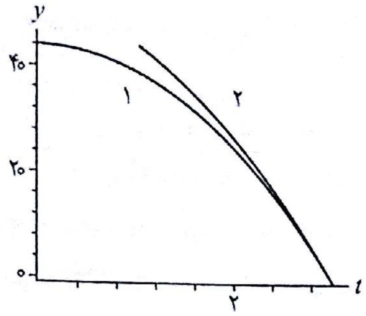
$$\Delta y' = ۰(t) - \frac{۱}{۲}gt^۲$$

$$\Delta y = (-v_۰)(t-۱) - \frac{۱}{۲}g(t-۱)^۲$$

با توجه به صورت مسئله، $\Delta y' = \Delta y = -۴۳٫۹\,m$، پس t را از معادله‌ی اول پیدا می‌کنیم $(t = ۳\,s)$ و در معادله‌ی دوم قرار می‌دهیم تا تندی اولیه‌ی سنگ دوم به دست آید:

$$-۴۳٫۹ = (-v_۰)(۲) - \frac{۱}{۲}(۹٫۸)(۲)^۲$$

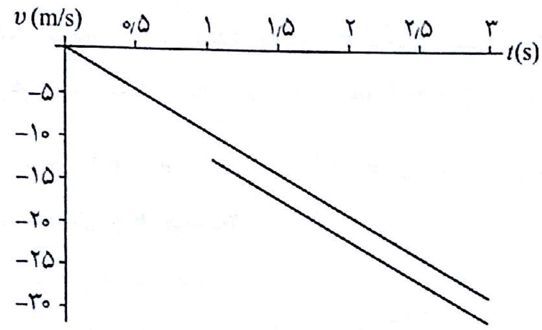
$$v_۰ = ۱۲٫۱۵\,m/s$$



(ب) سرعت سنگ‌ها عبارت‌اند از:

$$v'_y = \frac{d(\Delta y')}{dt} = -gt \qquad v_y = \frac{d(\Delta y)}{dt} = -v_۰ - g(t-۱)$$

نمودار تغییرات سرعت هر سنگ برحسب زمان به‌صورت زیر است.



** ۵۵ یک گلوله‌ی گِلی از ارتفاع ۱۵٫۰ متری به زمین می‌افتد. این گلوله پس از گذشت ۲۰٫۰ms از آغاز تماس بازمین متوقف می‌شود. (الف) بزرگی شتاب متوسط گلوله درمدت زمان تماس با زمین چقدر است؟ (گلوله را مانند یک ذره درنظر بگیرید). (ب) جهت شتاب متوسط به بالاسو است یا به پایین‌سو؟

حل: شتاب متوسط گلوله‌ی گِلی در حین تماس با زمین، از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$a_{avg} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

که در آن Δv تغییر سرعت گلوله در حین تماس با زمین و $\Delta t = ۲۰٫۰ \times ۱۰^{-۳}\,s$ مدت زمان تماس است. بنابراین، باید ابتدا سرعت گلوله در لحظه‌ی پیش از برخورد $(y = ۰)$ را پیدا کنیم.

(الف) اکنون برای پیدا کردن سرعت در لحظه‌ی **پیش** از برخورد، $t = ۰$ را لحظه‌ی افتادن در نظر می‌گیریم. با استفاده از معادله‌ی (۲-۱۶) به ازای $y_۰ = ۱۵٫۰\,m$، داریم

$$v = -\sqrt{v_۰^۲ - ۲g(y - y_۰)} = -\sqrt{۰ - ۲(۹٫۸\,m/s^۲)(۰ - ۱۵m)}$$

$$= -۱۷٫۱۵\,m/s$$

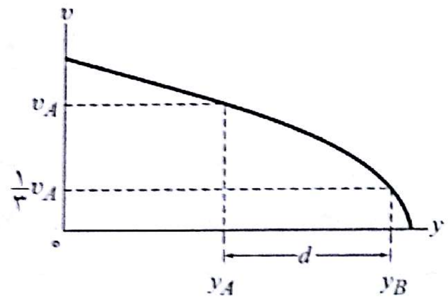
در اینجا علامت منفی به این علت انتخاب شده است که گلوله در

لحظه‌ی برخورد به طرف پایین در حرکت است. در نتیجه، شتاب متوسط در حین تماس با زمین برابر است با

$$a_{avg} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0-(-17.1\,m/s)}{20.0\times10^{-3}s} = 857\,m/s^2$$

(ب) چون شتاب به دست آمده مثبت است، نشان می‌دهد که جهت بردار شتاب به طرف بالا است. در فصل بعدی این جهت را به بزرگی و جهت نیروی وارد شده از طرف زمین به گلوله، در حین برخورد، ربط خواهیم داد.

** ۵۶ شکل ۲-۳۲، نمودار تندی v برحسب ارتفاع y توپی را نشان می‌دهد که در راستای محور y یک راست به بالاسو پرتاب شده است. مسافت d برابر با $0.40m$ است. تندی توپ در ارتفاع y_A برابر با v_A و در ارتفاع y_B برابر با $\frac{1}{3}v_A$ است. تندی v_A چیست؟



شکل ۲-۳۲ مسئله‌ی ۵۶.

حل: از معادله‌ی ۲-۱۶ استفاده می‌کنیم:

$$v_B^2 = v_A^2 + 2a(y_B - y_A)$$

در اینجا $a = -9.8\,m/s^2$، $y_B - y_A = 0.40\,m$، و $v_B = \frac{1}{3}v_A$ است. در نتیجه مقدار تقریبی $v_A = 3.0\,m/s$ به‌دست می‌آید.

** ۵۷ برای آزمودن کیفیت یک توپ تنیس آن را از ارتفاع ۴٫۰۰ متری سطح زمین رها می‌کنیم. توپ پس از برخورد به زمین به اندازه‌ی $2.00m$ وامی‌جهد. اگر توپ به مدت $12.0ms$ با زمین در تماس بوده باشد، (الف) بزرگی شتاب متوسط توپ در حین تماس با زمین چیست، و (ب) جهت شتاب به بالاسو است یا به پایین‌سو؟

حل: شتاب سقوط گوی تنیس در مدت تماس با زمین، از معادله‌ی $a_{avg} = (v_2 - v_1)/\Delta t$ به دست می‌آید، که در آن v_1 سرعت گوی درست پیش از برخورد به زمین، v_2 سرعت گوی درست هنگام جهیدن به بالا، و Δt مدت زمان تماس گوی با زمین ($12\times10^{-3}s$) است.

(الف) جهت محور y را به طرف بالا مثبت می‌گیریم و مبداء را در نقطه‌ی رها کردن گوی انتخاب می‌کنیم. ابتدا سرعت گوی پیش از برخورد به زمین را با استفاده از معادله‌ی $v_1^2 = v_0^2 - 2gy$ پیدا می‌کنیم. به ازای $v_0 = 0$ و $y = -4.00\,m$ داریم

$$v_1 = -\sqrt{-2gy} = -\sqrt{-2(9.8)(-4.00)} = -8.85\,m/s$$

در اینجا ریشه‌ی منفی را انتخاب کرده‌ایم، زیرا گوی به طرف پایین حرکت می‌کند. برای پیدا کردن سرعت گوی درست بعد از برخورد به زمین (هنگام جهیدن به بالا تا ارتفاع $2.00m$ در غیاب مقاومت هوا) از معادله‌ی $v^2 = v_2^2 - 2g(y - y_0)$ به ازای $v = 0$، $y = -2.00\,m$ استفاده می‌کنیم. بنابراین، داریم

$$v_2 = \sqrt{2g(y - y_0)} = -\sqrt{2(9.8)(-2.00+4.00)} = 6.26\,m/s$$

در نتیجه شتاب متوسط توپ برابر است با:

$$a_{avg} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = \frac{6.26-(-8.85)}{12.0\times10^{-3}} = 1.26\times10^3\,m/s^2$$

(ب) مثبت بودن این نتیجه نشان می‌دهد که جهت بردار شتاب به طرف بالا است. در فصل بعدی نشان خواهیم داد که این امر به بزرگی و جهت نیرویی که زمین در حین برخورد به توپ وارد می‌کند، بستگی دارد.

** ۵۸ جسمی از حال سکون به اندازه‌ی ارتفاع h سقوط می‌کند. اگر جسم در $1.00s$ آخر مسافتی به اندازه‌ی $0.50h$ سقوط کند، مطلوب است تعیین (الف) زمان و (ب) ارتفاع سقوط. (پ) جواب غیرقابل قبول t را که از معادله‌ی درجه دوم به دست آمده است از نظر فیزیکی توضیح دهید.

حل: جهت رو به پایین را جهت $+y$ انتخاب می‌کنیم و مبداء مختصات را در نقطه‌ی رهاشدن جسم (در لحظه‌ای که ساعت شروع به کار می‌کند) در نظر می‌گیریم. مدت زمان $1.00s$ داده شده در مسئله را به‌صورت $t - t'$ در نظر می‌گیریم که t مدت زمان رسیدن به زمین و t' یک ثانیه پیش از آن را نشان می‌دهد. مسافت متناظر با این مدت زمان $y - y' = 0.50h$ است و y مکان زمین را نشان می‌دهد. بنابراین y مساوی با h است، لذا داریم $h - y' = 0.50h$ یا $0.50h = y'$.

(الف) t' و t را از معادله‌ی ۲-۱۵ (به‌ازای $v_0=0$) به‌دست می‌آوریم:

$$y'=\frac{1}{2}gt'^2 \Rightarrow t'=\sqrt{\frac{2y'}{g}}$$

$$y=\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t=\sqrt{\frac{2y}{g}}$$

مقادیر $y=h$ و $y'=0{,}50h$ را در معادلات بالا قرار می‌دهیم و آن‌ها را به هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{t'}{t}=\sqrt{\frac{2(0{,}40h)/g}{2h/g}}=\sqrt{0{,}50}$$

با قرار دادن مقدار $t'=t-1{,}00$، داریم

$$t-1{,}00=t\sqrt{0{,}50}\Rightarrow t=\frac{1{,}00}{1-\sqrt{0{,}50}}$$

در نتیجه مقدار $t=3{,}33\,s$ به دست می‌آید.

(ب) نتیجه به دست آمده را در $y=\frac{1}{2}gt^2$ قرار می‌دهیم و $h=54\,m$ را به دست می‌آوریم.

(پ) در قسمت (الف) دو ریشه به صورت $\sqrt{0{,}50}=\pm0{,}7$ به‌دست می‌آید. اگر ریشه‌ی منفی $-0{,}7$ را انتخاب کنیم، جواب تقریبی به دست آمده برای t مساوی با $0{,}7\,s$ خواهد بود که ایجاب می‌کند $t'=t-1$ یک عدد منفی باشد (که زمان **پیش** از افتادن را نشان می‌دهد) و واضح است که با وضعیت فیزیکی توصیف شده در این مسئله سازگار نیست و جواب غیرقابل قبول است.

** ۵۹ از دوشی که در ارتفاع ۲۰۰ سانتی‌متری سطح زمین قرار دارد، قطره‌های آب به زمین می‌ریزند. این قطره‌ها در بازه‌های زمانی منظم (مساوی) سقوط می‌کنند و در لحظه‌ای که قطره‌ی اول به زمین می‌رسد، قطره‌ی چهارم شروع به افتادن می‌کند. در لحظه‌ای که قطره‌ی اول به زمین برخورد می‌کند قطره‌های، (الف) دوم و (ب) سوم، در چه فاصله‌ای از دوش قرار دارند؟

حل: از مقاومت هوا چشم‌پوشی می‌کنیم، در نتیجه $a=-g=-9{,}8\,m/s^2$ است. جهت رو به پایین را در جهت $-y$ انتخاب می‌کنیم، و چون شتاب ثابت است، می‌توان از معادلات جدول ۲-۱ استفاده کرد. سطح زمین را در مبداء محور y در نظر می‌گیریم.

(الف) لحظه‌ی خروج قطره‌ی ۱ از دوش $t=0$ است و مدت زمان رسیدن آن به زمین را که t_1 است به ازای $v_0=0$ و $y_1=-2{,}00\,m$ می‌توان از معادله‌ی ۲-۱۵ حساب کرد:

$$y_1=-\frac{1}{2}gt_1^2\Rightarrow t_1=\sqrt{\frac{-2y}{g}}=\sqrt{\frac{-2(-2{,}00)}{9{,}8}}=0{,}639\,s$$

در لحظه‌ای که قطره‌ی اول به زمین می‌رسد، قطره‌ی چهارم شروع به افتادن می‌کند، و از منظم بودن بازه‌های زمانی می‌توان نتیجه گرفت که قطره‌ی ۲ در لحظه‌ی $t=0{,}639/3=0{,}213\,s$ و قطره‌ی ۳ در لحظه‌ی $t=2(0{,}213)=0{,}426\,s$ از دوش خارج می‌شوند. بنابراین، مدت زمانی که قطره‌ی ۲ در حال سقوط است برابر با $t_2=t_1-0{,}213=0{,}426\,s$ و مدت زمانی که قطره‌ی ۳ در حال سقوط است برابر با $t_3=t_1-0{,}426=0{,}213\,s$ است. محل این قطره‌ها در لحظه‌ای که قطره‌ی اول به زمین می‌رسد به ترتیب عبارت‌اند از:

$$y_2=-\frac{1}{2}gt_2^2=-\frac{1}{2}(9{,}8)(0{,}426)^2=-0{,}889\,m$$

یا به فاصله‌ی ۸۹ سانتی‌متر پایین دوش.

(ب) مدت زمانی که قطره‌ی ۳ در حال سقوط است، $t_3=t_1-0{,}426\,s$ است (در همین موقع قطره‌ی ۱ به زمین برخورد می‌کند). مکان قطره‌ی ۳ وقتی که قطره‌ی ۱ به زمین می‌رسد، برابر است با:

$$y_3=-\frac{1}{2}gt_3^2=-\frac{1}{2}(9{,}8\,m/s^2)(0{,}213\,s)^2=-0{,}222\,m$$

یا در حدود ۲۲ سانتی‌متر پایین دوش.

** ۶۰ سنگی در زمان $t=0$ از زمین به طور قائم به بالا پرتاب می‌شود. این سنگ در زمان $t=1{,}5\,s$ از مقابل نوک برج بلندی عبور می‌کند و $1{,}0\,s$ بعد به ارتفاع بیشینه‌ی خود می‌رسد. ارتفاع برج چقدر است؟

حل: برای پیدا کردن سرعت پرتاب سنگ، از معادله‌ی ۲-۱۱ برای ارتفاع بیشینه (وقتی سرعت به طور افقی صفر می‌شود) استفاده می‌کنیم:

$$v=v_0-gt\Rightarrow 0=v_0-(9{,}8\,m/s^2)(2{,}5\,s)$$

در نتیجه مقدار $v_0=24{,}5\,m/s$ به دست می‌آید (جهت $+y$ به طرف بالا انتخاب شده است). اکنون از معادله‌ی ۲-۱۵ برای پیدا کردن ارتفاع برج (با فرض $y_0=0$ در سطح زمین) استفاده می‌کنیم:

$$y-y_0=v_0t+\frac{1}{2}at^2\Rightarrow$$

$$y-0=(24{,}5\,m/s)(1{,}5\,s)-\frac{1}{2}(9{,}8\,m/s^2)(1{,}5\,s)^2$$

در نتیجه جواب $y=26\,m$ به دست می‌آید.

*** ۶۱ یک گلوله‌ی فولادی از پشت بام ساختمانی به پایین می‌افتد و از جلو پنجره‌ای به ارتفاع $۱/۲۰\,m$ عبور می‌کند. مدت زمان عبور از جلو پنجره $۰/۱۲۵\,s$ است. سپس، این گلوله به سطح یک پیاده‌رو می‌رسد و به بالا وامی‌جهد و در مدت $۰/۱۲۵\,s$ از پایین تا بالای پنجره را می‌پیماید. فرض کنید حرکت رو به بالای گلوله دقیقاً عکس حرکت سقوطی آن است. مدت زمانی که طول می‌کشد تا توپ از زیر پنجره به پیاده‌رو برسد، $۲/۰۰\,s$ است. ارتفاع ساختمان چقدر است؟

حل: جهت ***رو به پایین*** را در جهت $+y$ و مبداء مختصات را در پشت بام ساختمان (با ارتفاع H) در نظر می‌گیریم. گلوله در حین سقوط، در لحظه‌ی t_1 (با سرعت v_1) از بالای پنجره (در ارتفاع y_1) و در لحظه‌ی t_2 از پایین پنجره (در ارتفاع y_2) عبور می‌کند. می‌دانیم که $y_2 - y_1 = ۱/۲۰\,m$ و $t_2 - t_1 = ۰/۱۲۵\,s$ است و داریم

$$y_2 - y_1 = v_1(t_2 - t_1) + \frac{۱}{۲}g(t_2 - t_1)^2$$

در نتیجه داریم

$$v_1 = \frac{۱/۲۰\,m - \frac{۱}{۲}(۹/۸\,m/s^2)(۰/۱۲۵\,s)^2}{۰/۱۲۵\,s} = ۸/۹۹\,m/s$$

این مقدار را در معادله‌ی ۲-۱۶ (به ازای $v_0 = ۰$) قرار می‌دهیم و y_1 را به دست می‌آوریم:

$$v_1^2 = ۲gy_1 \Rightarrow y_1 = \frac{(۸/۹۹\,m/s)^2}{۲(۹/۸\,m/s^2)} = ۴/۱۲\,m$$

گلوله در لحظه‌ی t_3 (در ارتفاع $y_3 = H$) به زمین می‌رسد. با توجه به تقارن موجود در مسئله («پرواز رو به بالا عکس سقوط است»)، داریم $t_3 - t_2 = ۲/۰۰/۲ = ۱/۰۰\,s$. در نتیجه داریم $t_3 - t_1 = ۱/۰۰\,s + ۰/۱۲۵\,s = ۱/۱۲۵\,s$. با استفاده از معادله‌ی ۲-۱۵ داریم:

$$y_3 - y_1 = v_1(t_3 - t_1) + \frac{۱}{۲}g(t_3 - t_1)^2$$

$$y_3 - ۴/۱۲m = (۸/۹۹m/s)(۱/۱۲۵s) + \frac{۱}{۲}(۹/۸\,m/s^2)(۱/۱۲۵s)^2$$

بالاخره $y_3 = H = ۲۰/۴\,m$ به دست می‌آید.

*** ۶۲ یک بازیکن بسکتبال که نزدیک حلقه ایستاده است، برای قاپیدن توپ در برگشت از تخته تا ارتفاع $۷۶/۰\,cm$ به طور قائم به بالا می‌پرد. این بازیکن، در کل، چه زمانی (بالا پریدن و پایین آمدن) (الف) در $۱۵/۰\,cm$ بالای مسیر، و (ب) در $۱۵/۰\,cm$ پایین مسیر در حال پریدن است؟ آیا پاسخ‌ها به شما کمک می‌کنند تا بفهمید چرا به نظر می‌رسد بازیکن‌های بسکتبال در مرحله‌ی اوج پرش در هوا معلق می‌مانند؟

حل: ارتفاعی که بازیکن به آن می‌رسد، $y = ۰/۷۸\,m$ است (مبداء محور y را در سطح زمین و جهت $+y$ را به طرف بالا انتخاب می‌کنیم).

(الف) سرعت اولیه‌ی v_0 بازیکن برابر است با

$$v_0 = \sqrt{۲gy} = \sqrt{۲(۹/۸)(۰/۷۶)} = ۳/۸۶\,m/s$$

این رابطه نتیجه‌ای از معادله‌ی ۲-۱۶ به ازای $v = ۰$ است. وقتی بازیکن به ارتفاع $y_1 = ۰/۷۶ - ۰/۱۵ = ۰/۶۱\,m$ می‌رسد، تندی v_1 از معادله‌ی $v_0^2 - v_1^2 = ۲gy_1$ به دست می‌آید:

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - ۲gy_1} = \sqrt{(۳/۸۶)^2 - ۲(۹/۸۰)(۰/۶۱)} = ۱/۷۱\,m/s$$

مدت زمان t_1 که لازم است تا بازیکن بتواند به اندازه‌ی $\Delta y_1 = ۰/۱۵\,m$ ***بالای مسیر*** بپرد، از معادله‌ی ۲-۱۷ به دست می‌آید:

$$\Delta y_1 = \frac{۱}{۲}(v_1 + v)t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{۲(۰/۱۵)}{۱/۷۱ + ۰} = ۰/۱۷۵\,s$$

منظور این است که کل زمانی که بازیکن برای جهیدن ۱۵ سانتی‌متر (بالا و پایین پریدن) صرف می‌کند، $۲(۰/۱۷۵) = ۰/۳۵\,s = ۳۵۰\,ms$ است.

(ب) مدت زمان t_2 که برای جهیدن $۰/۱۵$ سانتی‌متر لازم است، از معادله‌ی ۲-۱۵ به دست می‌آید

$$۰/۱۵ = v_0 t_2 - \frac{۱}{۲}gt_2^2 = (۳/۸۶)t_2 - \frac{۹/۸}{۲}t_2^2$$

با پذیرفتن ریشه‌ی کوچک‌تر این معادله، $t_2 = ۰/۰۴۱s$ به دست می‌آید که ایجاب می‌کند کل زمان سپری شده در ۱۵ سانتی‌متر پایین مسیر (بالا و پایین پریدن)، $۲(۴۱\,ms) = ۸۲\,ms$ باشد.

*** ۶۳ گربه‌ای خواب‌آلود متوجه می‌شود که گلدانی از مقابل یک پنجره‌ی باز ابتدا بالا می‌رود و سپس پایین می‌آید. گلدان در کل رفت و برگشت به مدت $۰/۵۰$ ثانیه در معرض دید بوده و ارتفاع پنجره از بالا تا پایین $۲/۰۰\,m$ است. گلدان تا چه ارتفاعی از لبه‌ی بالای پنجره بالاتر رفته است؟

حل: مدت زمان عبور گلدان از جلو پنجره‌ای به ارتفاع $L = 2.0\,\text{m}$ در هر بار $0.25\,\text{s}$ است. از v برای سرعت گلدان هنگام عبور از بالای پنجره (هنگام بالا رفتن) استفاده می‌کنیم. بنابراین، به ازای $a = -g = -9.8\,\text{m/s}^2$ و با این فرض که جهت رو به پایین در جهت $-y$ است، از معادله‌ی ۲-۱۸ داریم

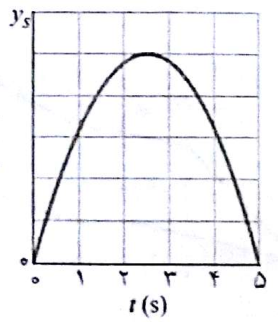
$$L = vt - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow v = \frac{L}{t} - \frac{1}{2}gt$$

مسافت H که گلدان بالاتر از پنجره می‌پیماید (با استفاده از معادله‌ی ۲-۱۶ با سرعت نهایی صفر برای نشان دادن بالاترین نقطه) برابر است با:

$$H = \frac{v^2}{2g} = \frac{(L/t - gt/2)^2}{2g}$$

$$= \frac{[2.00/0.25 - (9.80)(0.25)/2]^2}{(2)(9.80)} = 2.34\,\text{m}$$

*** ۶۴ در سطح سیاره‌ای گلوله‌ای به طور قائم به بالا پرتاب می‌شود. شکل ۲-۳۳، نمودار تغییرات y برحسب t مربوط به گلوله را نشان می‌دهد، که در آن y ارتفاع گلوله از نقطه‌ی پرتاب و $t = 0$ زمان پرتاب کردن گلوله است. مقیاس محور قائم شکل با $y_s = 30.0\,\text{m}$ مشخص شده است. بزرگی، (الف) شتاب سقوط آزاد درسیاره، و (ب) سرعت آغازی گلوله، چقدر است؟



شکل ۲-۳۳ مسئله‌ی ۶۴.

حل: نمودار نشان می‌دهد که $y = 25\,\text{m}$ بالاترین نقطه است (که تندی در آنجا به طور لحظه‌ای صفر می‌شود). با توجه به تقارن نمودار، چشم‌پوشی کردن از «اصطکاک هوا» (یا هر چیزی که ممکن است در سیاره‌ی دوردست وجود داشته باشد)، قابل قبول است.

(الف) برای پیدا کردن شتاب گرانش g_p در سطح سیاره، از معادله‌ی ۲-۱۵ (برای $+y$ به طرف بالا) استفاده می‌کنیم:

$$y - y_0 = vt + \frac{1}{2}g_p t^2 \Rightarrow 25 - 0 = (0)(2.5) + \frac{1}{2}g_p(2.5)^2$$

در نتیجه $g_p = 8.0\,\text{m/s}^2$ به دست می‌آید.

(ب) از نقطه‌ی بیشینه نمودار برای پیدا کردن سرعت اولیه استفاده می‌کنیم:

$$y - y_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t \Rightarrow 25 - 0 = \frac{1}{2}(v_0 + 0)(2.5)$$

در نتیجه $v_0 = 20\,\text{m/s}$ به دست می‌آید.

پودمان ۲-۶ انتگرال‌گیری ترسیمی در تحلیل حرکت

* ۶۵ شکل ۲-۱۳ الف، نمودار شتاب سر و بالاتنه‌ی داوطلب آزمایش در حین تصادف از عقب را نشان می‌دهد. وقتی شتاب سر بیشینه است، تندی، (الف) سر، و (ب) بالاتنه، چقدر است؟

حل: نکته‌ی کلیدی این است که تندی سر (و بالاتنه نیز) در هر لحظه با پیدا کردن مساحت زیر نمودار شتاب سر برحسب زمان، مطابق معادله‌ی ۶-۲۶، به دست می‌آید:

$v_1 - v_0 =$ (مساحت بین منحنی شتاب و محور زمان، از t_0 تا t_1)

(الف) شکل ۲-۱۴ الف نشان می‌دهد که سر از حالت سکون $(v_0 = 0)$ در لحظه‌ی $t_0 = 110\,\text{ms}$ شتاب می‌گیرد و در لحظه‌ی $t_1 = 160\,\text{ms}$ به مقدار بیشینه‌ی $90\,\text{m/s}^2$ می‌رسد. مساحت این ناحیه برابر است با:

$$\text{مساحت} = \frac{1}{2}(160 - 110)\times 10^{-3}\,\text{s}\,(90\,\text{m/s}^2) = 2.25\,\text{m/s}$$

که با تندی v_1 در لحظه‌ی t_1 برابر است.

(ب) برای محاسبه‌ی تندی بالاتنه در لحظه‌ی $t_1 = 160\,\text{ms}$، مساحت را به ۴ ناحیه تقسیم می‌کنیم: ناحیه‌ی A، از صفر تا ۴۰ms، که دارای مساحت صفر است. ناحیه‌ی B، از ۴۰ms تا ۱۰۰ms، که دارای شکل مثلث است و مساحت آن برابر است با

$$\text{مساحت ناحیه‌ی B} = \frac{1}{2}(0.0600\,\text{s})(50.0\,\text{m/s}^2) = 1.50\,\text{m/s}$$

ناحیه‌ی C، از ۱۰۰ تا ۱۲۰ms، دارای شکل مستطیل است و مساحت آن برابر است با

$$\text{مساحت ناحیه‌ی C} = (0.0200\,\text{s})(50.0\,\text{m/s}^2) = 1.00\,\text{m/s}$$

از ۱۱۰s تا ۱۶۰ms، شکل ناحیه‌ی D به صورت ذوزنقه‌ای با مساحت

$$\text{مساحت ناحیه‌ی D} = \frac{1}{2}(0.0400\,\text{s})(50.0 + 20.0)\,\text{m/s}^2$$

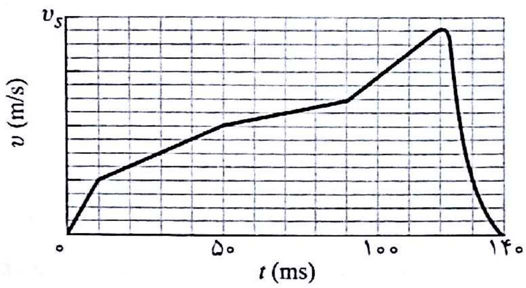
$$= 1.40\,\text{m/s}$$

است. با قرار دادن این مقدارها در معادله‌ی ۲-۲۶ به‌ازای $v_۰ = ۰$ داریم:

$$v_۱ - ۰ = ۰ + ۱/۵۰\,m/s + ۱/۰۰\,m/s + ۱/۴۰\,m/s = ۳/۹۰\,m/s$$

یا $v_۱ = ۳/۹۰\,m/s$.

❋❋ ۶۶ در یک ضربه‌ی رو به جلو در کاراته، مشت کاراته باز از حال سکون و از پهلوی کمر به سرعت به جلو آورده می‌شود تا بازو به طور کامل باز شود. در شکل ۲-۳۴، نمودار تندی $v(t)$ مشت برای یک کاراته باز ماهر نشان داده شده است. مقیاس محور قائم شکل با $v_s = ۸/۰\,m/s$ مشخص شده است. مشت در مدت زمان (الف) $t = ۵۰\,ms$، و (ب) تا هنگامی که تندی آن به بیشینه می‌رسد، چقدر حرکت کرده است؟



شکل ۲-۳۴ مسئله‌ی ۶۶.

حل: نکته‌ی کلیدی این است که مکان یک جسم در هر لحظه را می‌توان از مساحت زیر نمودار سرعت جسم برحسب زمان، مطابق معادله‌ی ۲-۲۵، به دست آورد:

$x_۱ - x_۰ =$ (مساحت بین منحنی سرعت و محور زمان، از $t_۰$ تا $t_۱$)

(الف) برای محاسبه‌ی مکان مشت در لحظه‌ی $t = ۵۰\,ms$، مساحت در شکل ۲-۳۴ را به دو ناحیه تقسیم می‌کنیم. از لحظه‌ی صفر تا لحظه‌ی $۱۰\,ms$، ناحیه‌ی A به شکل یک مثلث با مساحت

$$\text{مساحت ناحیه‌ی A} = \frac{۱}{۲}(۰/۰۱۰\,s)(۲\,m/s) = ۰/۰۱\,m$$

است. از لحظه‌ی $۱۰\,ms$ تا لحظه‌ی $۵۰\,ms$، ناحیه‌ی B به شکل یک ذوزنقه با مساحت

$$\text{مساحت ناحیه‌ی B} = \frac{۱}{۲}(۰/۰۴۰\,s)(۲+۴)\,m/s = ۰/۱۲\,m$$

است. با قرار دادن این مقدارها در معادله‌ی ۲-۲۵ به ازای $x_۰ = ۰$، داریم

$$x_۱ - ۰ = ۰ + ۰/۰۱\,m + ۰/۱۲\,m = ۰/۱۳\,m$$

یا $x_۱ = ۰/۱۳\,m$.

(ب) در لحظه‌ی $t_۱ = ۱۲۰\,ms$ تندی مشت به مقدار بیشینه‌ی خود می‌رسد. از لحظه‌ی $۵۰\,ms$ تا لحظه‌ی $۹۰\,ms$، ناحیه‌ی C به شکل یک ذوزنقه با مساحت

$$\text{مساحت ناحیه‌ی C} = \frac{۱}{۲}(۰/۰۴۰\,s)(۴+۵)\,m/s = ۰/۱۸\,m$$

است. از لحظه‌ی $۹۰\,ms$ تا لحظه‌ی $۱۲۰\,ms$، ناحیه‌ی D به شکل یک ذوزنقه با مساحت

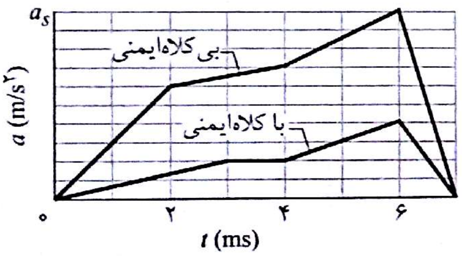
$$\text{مساحت ناحیه‌ی D} = \frac{۱}{۲}(۰/۰۳۰\,s)(۵+۷/۵)\,m/s = ۰/۱۹\,m$$

است. با قراردادن این مقدارها در معادله‌ی ۲-۲۵، به‌ازای $x_۰ = ۰$ داریم.

$$x_۱ - ۰ = ۰ + ۰/۰۱\,m + ۰/۱۲\,m + ۰/۱۸\,m + ۰/۱۹\,m = ۰/۵۰\,m$$

یا $x_۱ = ۰/۵۰\,m$.

❋❋ ۶۷ هنگامی که توپ فوتبال به طرف بازیکنی می‌آید و او با «سرزدن» توپ را به سویی می‌فرستد شتاب حرکت سر بازیکن در حین برخورد توپ ممکن است قابل ملاحظه باشد. شکل ۲-۳۵، نمودار شتاب اندازه‌گیری شده‌ی $a(t)$ سر یک بازیکن فوتبال را در حرکت از حال سکون برای دو حالت بی‌کلاه ایمنی و با کلاه ایمنی نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم شکل با $a_s = ۲۰۰\,m/s^۲$ مشخص شده است. در زمان $t = ۷/۰\,ms$ تفاوت تندی به دست آمده بین سر با کلاه ایمنی و بی‌کلاه ایمنی چقدر است؟



شکل ۲-۳۵ مسئله‌ی ۶۷.

حل: این مسئله با استفاده از معادله‌ی ۲-۲۶ حل می‌شود:

$v_۱ - v_۰ =$ (مساحت بین منحنی شتاب و محور زمان، از $t_۰$ تا $t_۱$)

برای محاسبه‌ی تندی سر بی‌کلاه در لحظه‌ی $t_۱ = ۷/۰\,ms$، مساحت زیر منحنی $a-t$ را به ۴ ناحیه تقسیم می‌کنیم: از لحظه‌ی صفر تا لحظه‌ی $۲\,ms$، ناحیه‌ی A دارای شکل مثلث و مساحت آن برابر است با

$$\text{مساحت ناحیه‌ی A} = \frac{۱}{۲}(۰/۰۰۲۰\,s)(۱۲۰\,m/s^۲) = ۰/۱۲\,m/s$$

از لحظه‌ی ۲ms تا لحظه‌ی ۴ms، ناحیه‌ی B دارای شکل ذوزنقه و مساحت آن برابر است با

$$\text{مساحت ناحیه‌ی B} = \frac{1}{2}(0.0020\,s)(120+140)\,m/s^2 = 0.26\,m/s$$

از لحظه‌ی ۴ms تا لحظه‌ی ۶ms، ناحیه‌ی C دارای شکل ذوزنقه و مساحت آن برابر است با

$$\text{مساحت ناحیه‌ی C} = \frac{1}{2}(0.0020\,s)(140+200)\,m/s^2 = 0.34\,m/s$$

از لحظه‌ی ۶ms تا لحظه‌ی ۷ms، ناحیه‌ی D دارای شکل مثلث و مساحت آن برابر است با

$$\text{مساحت ناحیه‌ی D} = \frac{1}{2}(0.0010\,s)(200\,m/s^2) = 0.10\,m/s$$

با قرار دادن این مقدارها در معادله‌ی ۲-۲۶ به ازای $v_0 = 0$ داریم

$$v_{\text{بی کلاه}} = 0.12\,m/s + 0.26\,m/s + 0.34\,m/s + 0.10\,m/s = 0.82\,m/s$$

همین محاسبات را برای سر با کلاه ایمنی انجام می‌دهیم و نتایج زیر را به دست می‌آوریم:

از لحظه‌ی صفر تا ۳ms، ناحیه‌ی A به شکل مثلث و دارای مساحت زیر است

$$\text{مساحت ناحیه‌ی A} = \frac{1}{2}(0.0030\,s)(40\,m/s^2) = 0.060\,m/s$$

از لحظه‌ی ۳ms تا ۴ms، ناحیه‌ی B به شکل مستطیل و دارای مساحت زیر است

$$\text{مساحت ناحیه‌ی B} = \frac{1}{2}(0.0010\,s)(40\,m/s^2) = 0.040\,m/s$$

از لحظه‌ی ۴ms تا ۶ms، ناحیه‌ی C به شکل ذوزنقه و دارای مساحت زیر است

$$\text{مساحت ناحیه‌ی C} = \frac{1}{2}(0.0020\,s)(40+80)\,m/s^2 = 0.12\,m/s$$

از لحظه‌ی ۶ms تا ۷ms، ناحیه‌ی D به شکل مثلث و دارای مساحت زیر است

$$\text{مساحت ناحیه‌ی D} = \frac{1}{2}(0.0010\,s)(80\,m/s^2) = 0.040\,m/s$$

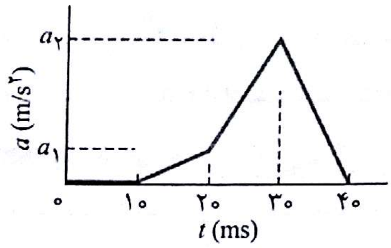
این مقادیر را به ازای $v_0 = 0$ در معادله‌ی ۲-۲۶ قرار می‌دهیم، که در نتیجه داریم

$$v_{\text{بی کلاه}} = 0.060\,m/s + 0.040\,m/s + 0.12\,m/s + 0.040\,m/s = 0.26\,m$$

بنابراین، اختلاف تندی‌ها برابر است با

$$\Delta v = v_{\text{بی کلاه}} - v_{\text{با کلاه}} = 0.82\,m/s - 0.26\,m/s = 0.56\,m/s$$

** ۶۸ سمندر که از خانواده‌ی *مارمولک‌ها* است، طعمه‌ی خود را با پرتاب‌کردن زبانش مانند یک پرتابه، می‌گیرد: بخش استخوانی زبان به جلو پرتاب می‌شود، بقیه‌ی زبان دراز می‌شود تا نوک آن به طعمه برسد و به آن بچسبد. شکل ۲-۳۶، نمودار تغییرات بزرگی شتاب برحسب t را برای مرحله‌ی شتاب‌گیری عمل پرتاب در یک وضعیت نوعی نشان می‌دهد. شتاب‌های نشان داده‌شده عبارت‌اند از $a_1 = 100\,m/s^2$ و $a_2 = 400\,m/s^2$. تندی رو به بیرون زبان در پایان مرحله‌ی شتاب‌گیری چقدر است؟

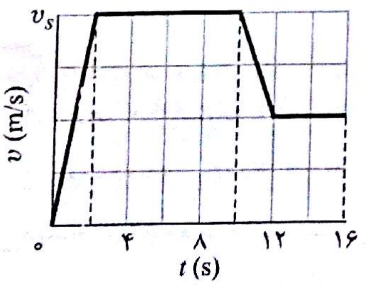


شکل ۲-۳۶ مسئله‌ی ۶۸.

حل: برای حل کردن این مسئله، سرعت را با انتگرال‌گیری از منحنی شتاب برحسب زمان حساب می‌کنیم. تندی زبان سمندر با مساحت زیر منحنی شتاب برابر است:

$$v = \text{مساحت} = \frac{1}{2}(10^{-2}s)(100\,m/s^2) + \frac{1}{2}(10^{-2}s)(100\,m/s^2 + 400\,m/s^2) + \frac{1}{2}(10^{-2}s)(400\,m/s^2) = 5.0\,m/s$$

** ۶۹ در شکل ۲-۳۷، نمودار سرعت ـ زمان یک دونده نشان داده شده است. دونده در مدت ۱۶s چه مسافتی را می‌پیماید؟ مقیاس محور قائم شکل با $v_s = 8.0\,m/s$ مشخص شده است.



شکل ۲-۳۷ مسئله‌ی ۶۹.

حل: چون $v = dx/dt$ (معادله‌ی ۲-۴)، پس $\Delta x = \int v dt$، که با مساحت زیر منحنی $v-t$ برابر است. مساحت کل A را به مساحت‌های مستطیل (قاعده ضربدر ارتفاع) و مثلث (قاعده ضربدر

نصف ارتفاع) تقسیم می‌کنیم:

$$A = A_{0<t<2} + A_{2<t<10} + A_{10<t<12} + A_{12<t<16}$$
$$= \frac{1}{2}(2)(8) + (8)(8) + ((2)(4) + \frac{1}{2}(2)(4)) + (4)(4)$$

در نتیجه $\Delta x = 100\,m$ به دست می‌آید.

*** ۷۰ دو ذره در راستای محور x حرکت می‌کنند. مکان ذره‌ی ۱ ازمعادله‌ی $x = 6.00t^2 + 3.00t + 2.00$ (برحسب متر و ثانیه) و شتاب ذره‌ی ۲ از معادله‌ی $a = -8.00t$ (برحسب متر بر مجذور ثانیه و ثانیه) به دست می‌آید. سرعت ذره‌ی ۲ در زمان $t = 0$ برابر با $20\,m/s$ است. سرعت این دو ذره در هنگامی که هم سرعت می‌شوند چقدر است؟

حل: می‌دانیم که سرعت با مشتق زمانی تابع مکان برابر است، یا سرعت با انتگرال زمانی تابع شتاب که ثابت انتگرال‌گیری آن سرعت اولیه است، برابر است. بنابراین، سرعت ذره‌ی ۱ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{d}{dt}(6.00t^2 + 3.00t + 2.00) = 12.0t + 3.00 .$$

به طور مشابه می‌توان سرعت ذره‌ی ۲ را به صورت زیر نوشت

$$v_2 = v_{20} + \int a_2\,dt = 20.0 + \int(-8.00t)dt = 20.0 - 4.00t^2$$

شرط $v_1 = v_2$ ایجاب می‌کند که:

$$12.0t + 3.00 = 20.0 - 4.00t^2 \Rightarrow 4.00t^2 + 12.0t - 17.0 = 0$$

از حل این معادله‌ی درجه دوم، $t = 0.590\,s$ به دست می‌آید. بنابراین، سرعت دو ذره در این لحظه $v_1 = v_2 = 12.0(0.590) + 3.00 = 10.1\,m/s$ است.

مسئله‌های بیشتر

۷۱ در یک بازی ویدیویی برنامه‌ریزی چنان است که یک نقطه در صفحه‌ی نمایش طبق معادله‌ی $x = 9.00t - 0.750t^3$ حرکت می‌کند. در این معادله x فاصله برحسب سانتی‌متر است و از لبه‌ی سمت چپ صفحه‌ی نمایش اندازه‌گیری می‌شود و t زمان برحسب ثانیه است. وقتی این نقطه به یک لبه‌ی صفحه‌ی نمایش واقع در $x = 0$ یا $x = 15.0\,cm$ می‌رسد، t به طور لحظه‌ای صفر می‌شود و نقطه دوباره طبق معادله‌ی $x(t)$ حرکت می‌کند. (الف) نقطه در چه زمانی پس از شروع حرکت به طور لحظه‌ای به حال سکون در می‌آید؟ (ب) به ازای چه مقداری از x این اتفاق می‌افتد؟ (پ) در این‌حالت شتاب نقطه (با توجه به جهت) چیست؟ (ت) نقطه درست پیش از رسیدن به حال سکون به راست‌سو حرکت می‌کند یا به چپ‌سو؟ (ث) درست پس از رسیدن به حال سکون لحظه‌ای چطور؟ (ج) در چه زمان $t > 0$، نقطه برای نخستین بار به لبه‌ی صفحه‌ی نمایش می‌رسد؟

حل: (الف) مشتق (نسبت به زمان) رابطه‌ی داده شده برای x، «سرعت» نقطه را به دست می‌دهد:

$$v(t) = 9 - \frac{9}{4}t^2$$

محاسبات را با سه رقم با معنی انجام می‌دهیم. واضح است که در لحظه‌ی $t = 2.00\,s$، $v = 0$ است.

(ب) در لحظه‌ی $t = 2\,s$، داریم $x = 9(2) - \frac{3}{4}(2)^3 = 12$.

بنابراین، وقتی $v = 0$ است نقطه در فاصله‌ی $12.0\,cm$ از لبه‌ی سمت چپ صفحه ساکن است.

(پ) مشتق سرعت $a = -\frac{9}{2}t$ است، لذا وقتی نقطه در فاصله‌ی $12\,cm$ از لبه‌ی سمت چپ صفحه قرار دارد، شتابش $-9.00\,cm/m^2$ است.

(ت) در زمان‌های کمتر از $t = 2\,s$، $v > 0$ است لذا نقطه به سمت راست حرکت کرده است.

(ث) همان‌طور که جواب قسمت (پ) نشان می‌دهد، نقطه بلافاصله پس از لحظه‌ی $t = 2\,s$ به طرف چپ حرکت می‌کند. در واقع، رابطه‌ی به دست آمده در قسمت (الف) تضمین می‌کند که در تمام لحظات $t > 2$، $v < 0$ است.

(ج) همان‌طور که بحث مربوط به قسمت (ث) نشان می‌دهد، لبه‌ای که نقطه در لحظه‌ی $t > 2$ به آن می‌رسد نمی‌تواند لبه‌ی سمت راست باشد؛ لذا لبه‌ی سمت چپ $(x = 0)$ است. رابطه‌ی داده شده در صورت مسئله را به ازای $x = 0$ و برای tهای مثبت حل می‌کنیم. جواب به دست آمده نشان می‌دهد که نقطه در لحظه‌ی $t = \sqrt{12}\,s \approx 3.46\,s$ به لبه‌ی سمت چپ می‌رسد.

۷۲ از لبه‌ی پشت بام یک ساختمان بلند، سنگی به طور قائم به سمت بالا پرتاب می‌شود. سنگ $1.60\,s$ پس از پرتاب به ارتفاع بیشینه‌ی خود نسبت به لبه‌ی پشت بام می‌رسد. سپس، این سنگ

$۶٫۰۰\,s$ پس از پرتاب با عبور از لبه‌ی ساختمان درهنگام سقوط به سمت پایین، به زمین می‌رسد. این سنگ برحسب یکاهای SI: (الف) با چه سرعتی به بالا پرتاب شده است، (ب) به چه ارتفاع بیشینه‌ای در بالای ساختمان می‌رسد؟ (پ) ارتفاع ساختمان چقدر است؟

حل: جهت رو به بالا را در جهت $+y$ انتخاب می‌کنیم.

(الف) در بالاترین نقطه‌ی مسیر، $v = ۰$ است. در نتیجه، به ازای $t = ۱٫۶۰\,s$ از معادله‌ی $v = v_۰ - gt$ مقدار $v_۰ = ۱۵٫۶۸\,m/s$ به‌دست می‌آید.

(ب) از معادله‌ی $y - y_۰ = v_۰ t + \frac{۱}{۲} g t^۲$ استفاده می‌کنیم و برای بالاترین نقطه مقدار $y_{max} - y_۰ = ۱۲٫۵۴\,m$ به دست می‌آید که نسبت به نقطه‌ی آغاز (بالاترین نقطه‌ی ساختمان) اندازه‌گیری می‌شود.

(پ) اکنون از نتیجه‌ی قسمت (الف) استفاده می‌کنیم و $t = ۶٫۰۰\,s$ و $y = ۰$ (سطح زمین) را در آن قرار می‌دهیم. در نتیجه داریم

$$۰ - y_۰ = (۱۵٫۶۸\,m/s)(۶٫۰۰\,s) - \frac{۱}{۲}(۹٫۸\,m/s^۲)(۶٫۰۰\,s)^۲$$

پس $y_۰$ (ارتفاع ساختمان) مساوی با $۸۲٫۳\,m$ است.

۷۳ در لحظه‌ای که چراغ راهنمایی سبز می‌شود، خودرویی با شتاب ثابت $a = ۲٫۲\,m/s^۲$ به راه می‌افتد. در همان لحظه کامیونی که با تندی ثابت $۹٫۵\,m/s$ در حرکت است، به خودرو می‌رسد و از آن پیشی می‌گیرد. (الف) خودرو در چه فاصله‌ای از چراغ راهنمایی از کامیون جلو می‌افتد؟ (ب) تندی خودرو در آن لحظه چقدر است؟

حل: مدت زمان لازم برای رسیدن دو وسیله‌ی نقلیه به یکدیگر را t می‌نامیم و فرض می‌کنیم در لحظه‌ی $t = ۰$ چراغ راهنمایی سبز می‌شود. مسافت‌های پیموده شده توسط دو وسیله‌ی نقلیه در مدت t، باید مساوی باشد.

(الف) شتاب خودرو را a و تندی (ثابت) کامیون را v می‌نامیم:

$$\Delta x = \left(\frac{۱}{۲} a t^۲\right)_{\text{خودرو}} = (vt)_{\text{کامیون}}$$

در نتیجه داریم:

$$t = \frac{۲v}{a} = \frac{۲(۹٫۵)}{۲٫۲} = ۸٫۶\,s$$

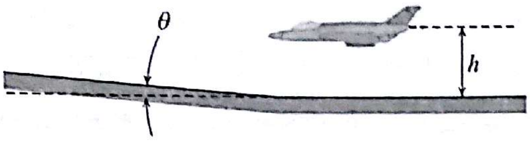
بنابراین خواهیم داشت

$$\Delta x = vt = (۹٫۵)(۸٫۶) = ۸۲\,m$$

(ب) تندی خودرو در این لحظه برابر است با:

$$v_{\text{خودرو}} = at = (۲٫۲)(۸٫۶) = ۱۹\,m/s$$

۷۴ خلبانی با تندی $۱۳۰۰\,km/h$ در ارتفاع $h = ۳۵\,m$ به موازات یک دشت که در ابتدا افقی است در حال پرواز کردن است. اما در زمان $t = ۰$ خلبان شروع به پرواز در بالای یک زمین شیب‌دار به سمت بالا با زاویه‌ی شیب $\theta = ۴٫۳^\circ$ می‌کند (شکل ۲-۳۸). اگر خلبان جهت پرواز خود را تغییر ندهد در چه زمان t هواپیما به زمین برخورد می‌کند؟



شکل ۲-۳۸ مسئله‌ی ۷۴.

حل: اگر هواپیما (با سرعت v) در همان راستا به حرکت ادامه دهد و شیب زمین نیز ۴٫۳ درجه به طرف بالا باشد، هواپیما پس از پیمودن مسافت

$$\Delta x = \frac{h}{\tan\theta} = \frac{۳۵\,m}{\tan ۴٫۳^\circ} = ۴۶۵٫۵\,m \approx ۰٫۴۶۵\,km$$

به زمین برخورد می‌کند. مدت زمان مربوط به پیمودن این مسافت، از معادله‌ی ۲-۲ (به ازای $v = v_{avg}$، زیرا v ثابت است) به دست می‌آید:

$$t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{۰٫۴۶۵\,km}{۱۳۰۰\,km/h} = ۰٫۰۰۰۳۶\,h \approx ۱٫۲۹\,s$$

بنابراین، خلبان ۱٫۲۹ ثانیه فرصت دارد تا مسیر پرواز هواپیما را تصحیح کند.

۷۵ در متوقف کردن یک خودرو به هنگام لزوم، برای شروع به ترمز کردن ابتدا زمان واکنش معینی صرف می‌شود و سپس حرکت خودرو با آهنگ ثابتی کُند می‌شود. فرض کنید در موقع ترمز کردن، مسافت کل پیموده شده توسط خودرو شما در هر دو مرحله $۵۶٫۷\,m$ برای تندی آغازی $۸۰٫۵\,km/h$، و $۲۴٫۴\,m$ برای تندی آغازی $۴۸٫۳\,km/h$ باشد. (الف) زمان واکنش شما چقدر است؟ (ب) بزرگی شتاب خودرو چیست؟

حل: فرض می‌کنیم t_r زمان واکنش و t_b مدت زمان ترمز کردن باشد. در طول مدت t_r، حرکت با سرعت ثابت $(v_۰)$ صورت

می‌گیرد. بنابراین، مکان خودرو از معادله‌ی زیر مشخص می‌شود:

$$x = v_0 t_r + v_0 t_b + \frac{۱}{۲}at_b^۲$$

در این معادله v_0 سرعت اولیه و a شتاب خودرو است (که انتظار داریم یک مقدار منفی باشد زیرا سرعت را در جهت مثبت در نظر گرفته‌ایم و می‌دانیم که تندی خودرو در حال کند شدن است). ***بعد از*** ترمز کردن، سرعت خودرو از رابطه‌ی $v = v_0 + at_b$ به دست می‌آید.

با استفاده از این معادله به ازای $v = ۰$، مقدار t_b از معادله‌ی اول حذف می‌شود و خواهیم داشت:

$$x = v_0 t_r - \frac{v_0^۲}{a} + \frac{۱}{۲}\frac{v_0^۲}{a} = v_0 t_r - \frac{۱}{۲}\frac{v_0^۲}{a}$$

این معادله را برای هر یک از سرعت‌های اولیه می‌نویسیم:

$$x_۱ = v_{0۱} t_r - \frac{۱}{۲}\frac{v_{0۱}^۲}{a}$$

$$v_۲ = v_{0۲} t_r - \frac{۱}{۲}\frac{v_{0۲}^۲}{a}$$

با حل کردن این دو معادله‌ی دو مجهولی، t_r و a به دست می‌آیند:

$$t_r = \frac{v_{0۲}^۲ x_۱ - v_{0۱}^۲ x_۲}{v_{0۱} v_{0۲}(v_{0۲} - v_{0۱})}$$

$$a = -\frac{۱}{۲}\frac{v_{0۲} v_{0۱}^۲ - v_{0۱} v_{0۲}^۲}{v_{0۲} x_۱ - v_{0۱} x_۲}$$

(الف) با قرار دادن مقادیر $x_۱ = ۵۶/۷\,\text{m}$ و $x_۲ = ۲۴/۴\,\text{m}$، $v_{0۱} = ۸۰/۵\,\text{km/h} = ۲۲/۴\,\text{m/s}$، $v_{0۲} = ۴۸/۳\,\text{km/h} = ۱۳/۴\,\text{m/s}$، خواهیم داشت:

$$t_r = \frac{۱۳/۴^۲(۵۶/۷) - ۲۲/۴^۲(۲۴/۴)}{(۲۲/۴)(۱۳/۴)(۱۳/۴ - ۲۲/۴)} = ۰/۷۴\,\text{s}$$

(ب) به طور مشابه، با قرار دادن مقادیر $x_۱ = ۵۶/۷\,\text{m}$، $x_۲ = ۲۴/۴\,\text{m}$، $v_{0۱} = ۸۰/۵\,\text{km/h} = ۲۲/۴\,\text{m/s}$ و $v_{0۲} = ۴۸/۳\,\text{km/h} = ۱۳/۴\,\text{m/s}$، داریم

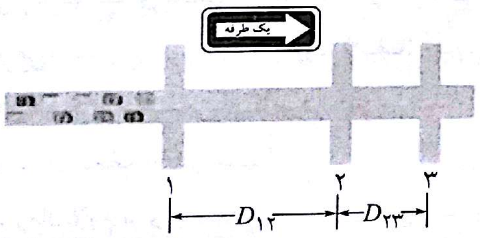
$$a = -\frac{۱}{۲}\frac{(۱۳/۴)۲۲/۴^۲ - (۲۲/۴)۱۳/۴^۲}{(۱۳/۴)(۵۶/۷) - (۲۲/۴)(۲۴/۴)} = -۶/۲\,\text{m/s}^۲$$

بنابراین، **بزرگی** شتاب کند کننده‌ی خودرو $۶/۲\,\text{m/s}^۲$ است.

اگرچه در اینجا مقادیر گرد شده را در رابطه‌ها نوشته‌ایم، اما در هنگام محاسبه با ماشین حساب از مقادیر «دقیق» (مانند $v_{0۲} = \frac{۱۶۱}{۱۲}\,\text{m/s}$) استفاده کرده‌ایم.

۷۶ شکل ۲-۳۹، بخشی از یک خیابان را نشان می‌دهد، که در آن جریان ترافیک باید چنان کنترل شود که یک ***دسته*** از خودروها بتوانند درطول آن به‌راحتی حرکت کنند. فرض کنید خودروهای سردسته در لحظه‌ای به تقاطع ۲ نزدیک شده‌اند، که چراغ سبز آن هنگامی که تا تقاطع به اندازه‌ی d فاصله دارند، روشن شده است. آن‌ها با تندی معین v_p (تندی مجاز بیشینه) به حرکت خود ادامه می‌دهند تا به تقاطع ۳ برسند و در فاصله‌ی d مانده به این تقاطع چراغ سبز آن‌ها هم روشن می‌شود. فاصله‌ی تقاطع‌ها از یکدیگر $D_{۱۲}$ و $D_{۲۳}$ است. (الف) زمان تأخیر سبز شدن چراغ تقاطع ۳ نسبت به چراغ تقاطع ۲ چقدر باید باشد تا دسته‌ی خودروها به‌طور یکنواخت و بدون توقف به‌حرکت ادامه دهند؟

اکنون، فرض کنید که دسته‌ی خودروها در پشت چراغ قرمز تقاطع ۱ متوقف مانده‌باشد. وقتی چراغ سبز می‌شود خودروهای سردسته زمان معین t_r را لازم دارند تا نسبت به عوض شدن رنگ چراغ واکنش نشان دهند و زمان بیشتری هم نیاز دارند تا با شتاب a به تندی v_p برسند. (ب) اگر چراغ تقاطع ۲ هنگامی سبز شود که خودروهای سردسته به فاصله‌ی d از تقاطع می‌رسند چه مدت پس از سبز شدن چراغ تقاطع ۱، چراغ تقاطع ۲ باید سبز شود؟



شکل ۲-۳۹ مسئله‌ی ۷۶.

حل: (الف) سرعت ثابت با نسبت جابه‌جایی به زمان سپری شده برابر است. بنابراین، برای آن‌که خودرو با تندی ثابت v_p مسافت $D_{۲۳}$ را طی کند، زمان تأخیر سبز شدن چراغ راهنمایی باید $t = D_{۲۳}/v_p$ باشد.

(ب) مدت زمان لازم برای آن که خودرو از حال سکون به تندی v_p برسد، مساوی با $t_0 = v_p/a$ است. در این بازه‌ی زمانی، خودرو باید مسافت $D_{۱۲} - \Delta x_0 - d$ را طی کند تا به تقاطع ۲ برسد، و زمان سپری شده $t_۱ = (D_{۱۲} - \Delta x_0 - d)/v_p$ است.

بنابراین، زمان تأخیر در تقاطع ۲ برابر است با:

$$t_{\text{کل}} = t_r + t_۰ + t_۱ = \frac{v_P}{a} + \frac{D_{۱۲} - \Delta x_۰ - d}{v_P}$$

$$= t_r + \frac{v_P}{a} + \frac{D_{۱۲} - (v_P^۲ / ۲a) - d}{v_P} = t_r + \frac{۱}{۲}\frac{v_P}{a} + \frac{D_{۱۲} - d}{v_P}$$

۷۷ تندی یک خودرو گرم‌تاز در مدت $۵٫۴ \text{s}$ می‌تواند از صفر به ۶۰km/h برسد. (الف) در این مدت شتاب متوسط خودرو برحسب $\text{m/s}^۲$ چقدر است؟ (ب) اگر خودرو دارای شتاب ثابت باشد، در مدت $۵٫۴ \text{s}$ چه مسافتی را می‌پیماید؟ (پ) اگر شتاب خودرو در همان مقدار به دست آمده در قسمت (الف) ثابت بماند، چه مدت طول می‌کشد تا خودرو از حال سکون بتواند مسافت $۰٫۲۵ \text{km}$ را بپیماید؟

حل: چون شتاب ثابت است، حرکت را می‌توان با استفاده از معادلات جدول ۲-۱ تحلیل کرد. جهت حرکت را در جهت $+x$ در نظر می‌گیریم:

$$v = (۶۰ \text{km/h})\left(\frac{۱۰۰۰ \text{m/km}}{۳۶۰۰ \text{s/h}}\right) = +۱۶٫۷ \text{m/s}$$

و $a > ۰$ است. مکان شروع حرکت از حال سکون $(v_۰ = ۰)$ را $x_۰ = ۰$ در نظر می‌گیریم.

(الف) شتاب متوسط را با استفاده ازمعادله‌ی ۲-۷ به‌دست می‌آوریم:

$$a_{\text{avg}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_۰}{t - t_۰} = \frac{۱۶٫۷ \text{m/s} - ۰}{۵٫۴ \text{s} - ۰}$$

$$= ۳٫۰۹ \text{m/s}^۲ \approx ۳٫۱ \text{m/s}^۲$$

(ب) با فرض ثابت بودن شتاب $a = a_{\text{avg}} = ۳٫۰۹ \text{m/s}^۲$، مسافت کل پیموده شده در بازه‌ی زمانی $۵٫۴ \text{s}$ برابر است با

$$x = x_۰ + v_۰ t + \frac{۱}{۲} a t^۲$$

$$= ۰ + ۰ + \frac{۱}{۲}(۳٫۰۹ \text{m/s}^۲)(۵٫۴ \text{s})^۲ = ۴۵ \text{m}$$

(پ) مدت زمان لازم برای پیمودن مسافت $x = ۲۵۰ \text{m}$ از معادله‌ی ۲-۱۵ به دست می‌آید:

$$x = \frac{۱}{۲} a t^۲ \Rightarrow t = \sqrt{\frac{۲x}{a}} = \sqrt{\frac{۲(۲۵۰ \text{m})}{۳۱ \text{m/s}^۲}} = ۱۳ \text{s}$$

توجه کنید که جابه‌جایی خودرو به صورت تابعی از زمان را می‌توان به شکل $x(t) = \frac{۱}{۲}(۳٫۰۹ \text{m/s}^۲)t^۲$ نوشت. در ضمن، برای حل قسمت (ب) از معادله‌ی ۲-۱۷ استفاده کردیم:

$$x = \frac{۱}{۲}(v_۰ + v)t = \frac{۱}{۲}(۱۶٫۷ \text{m/s})(۵٫۴ \text{s}) = ۴۵ \text{m}$$

۷۸ یک قطار قرمز رنگ با تندی ۷۲km/h و یک قطار سبز رنگ با تندی ۱۴۴km/h در یک مسیر راست و افقی به سوی هم حرکت می‌کنند. وقتی که فاصله‌ی قطارها به ۹۵۰m می‌رسد، راننده‌های آن‌ها هم‌زمان قطارهای یکدیگر را می‌بینند و ترمز می‌کنند. اگر این ترمز کردن، حرکت هر یک از قطارها را با شتاب $۱٫۰ \text{m/s}^۲$ کُند بکند، آیا برخوردی رخ می‌دهد؟ اگر پاسخ مثبت است، تندی قطار قرمز رنگ و تندی قطار سبز رنگ در لحظه‌ی برخورد چقدر است؟ اگر پاسخ منفی است، فاصله‌ی میان قطارها در لحظه‌ی توقف چقدر است؟

حل: لحظه‌ی ترمز شدن قطارها را $t = ۰$ انتخاب می‌کنیم. چون شتاب کند کننده ثابت است، می‌توان از معادلات جدول ۲-۱ استفاده کرد. متغیرهای پریم‌دار (مانند $v' = ۷۲ \text{km/h} = ۲۰ \text{m/s}$) مربوط به قطار قرمز هستند (که در جهت $+x$ حرکت می‌کند و در لحظه‌ی $t = ۰$ در مبداء قرار دارد) و متغیرهای بدون پریم مربوط به قطار سبز هستند (که در جهت $-x$ حرکت می‌کند و در لحظه‌ی $t = ۰$ در مکان $x_۰ = +۹۵۰ \text{m}$ قرار دارد). توجه کنید که جهت بردار شتاب قطار سبز در جهت ***مثبت*** است، حتی اگر تندی قطار در حال کند شدن باشد؛ سرعت اولیه‌ی قطار سبز $v_۰ = -۱۴۴ \text{km/h} = -۴۰ \text{m/s}$ است. چون قطار قرمز تندی اولیه‌ی کمتری دارد، باید زودتر از قطار سبز (نه به خاطر برخورد) متوقف شود. با توجه به معادله‌ی ۲-۱۶، قطار قرمز باید در مکان زیر متوقف شود (یعنی $v' = ۰$ شود):

$$x' = \frac{(v')^۲ - (v'_۰)^۲}{۲a'} = \frac{۰ - (۲۰ \text{m/s})^۲}{-۲ \text{m/s}^۲} = ۲۰۰ \text{m}$$

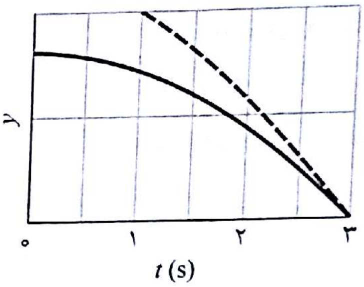
تندی قطار سبز هنگام رسیدن به این مکان برابر است با:

$$v = \sqrt{v_۰^۲ + ۲a\Delta x} = \sqrt{(-۴۰)^۲ + ۲(۱٫۰)(۳۰۰ - ۹۵۰)} = ۱۰ \text{m/s}$$

سرعت قطار سبز در این نقطه باید -۱۰m/s باشد زیرا قطار سبز هنوز در جهت $-x$ حرکت می‌کند. اگر محاسبه‌ی v ممکن نباشد (یعنی در زیر رادیکال عدد منفی ظاهر شود)، معلوم می‌شود که قطارها به هم برخورد نمی‌کنند و باید فاصله‌ی دو قطار را پیدا کنیم. نکته‌ی مهم این است که ببینیم آیا قطار قرمز قبل از توقف به قطار سبز برخورد می‌کند؟ برای بررسی این امر باید مدت زمان لازم برای متوقف شدن قطار قرمز را حساب کنیم (که از معادله‌ی ۲-۱۱ مقدار t به دست می‌آید) و مکان قطار سبز در آن لحظه را نیز باید معین

کنیم (که از معادله‌ی ۲-۱۸ مقدار x به دست می‌آید و چون کم‌تر از $۹۵۰m$ است، نشان می‌دهد که قطارها با یکدیگر برخورد نمی‌کنند).

۷۹ در زمان $t = ۰$، صخره‌نوردی به‌طور تصادفی میخ صخره‌نوردی خود را رها می‌کند و میخ از آن نقطه‌ی مرتفع به دره‌ی زیر پای صخره‌نورد به طور آزاد سقوط می‌کند. اندکی بعد، دوست این صخره‌نورد که ۱۰m بالاتر از او واقع شده است، میخی را به پایین‌سو پرتاب می‌کند. نمودارهای مکان‌های y برحسب t این میخ‌ها در حین سقوط در شکل ۲-۴۰ رسم شده‌اند. میخ دوم با چه تندی‌ای به پایین انداخته شده است؟



شکل ۲-۴۰ مسئله‌ی ۷۹.

حل: مختصه‌ی y میخ ۱ از معادله‌ی $y - y_{۰۱} = -\frac{۱}{۲}gt^۲$ پیروی می‌کند که در آن به‌ازای $t = ۳/۰ s$، $y = ۰$ است. بنابراین، $y_{۰۱} = ۴۴/۱m$ به دست می‌آید. نمودار مختصه‌ی میخ ۲ (که در لحظه‌ی $t = ۱/۰ s$ با سرعت $v_۱$ سقوط می‌کند) برابر است با

$$y - y_{۰۲} = v_۱(t - ۱/۰) - \frac{۱}{۲}g(t - ۱/۰)^۲$$

در اینجا $y_{۰۲} = y_{۰۱} + ۱۰ = ۵۴/۱m$ و به ازای $t = ۳/۰ s$، باز هم $y = ۰$ است. در نتیجه مقدار تقریبی $|v_۱| = ۱۷ m/s$ به دست می‌آید.

۸۰ قطاری از حال سکون به راه می‌افتد و با شتاب ثابت حرکت می‌کند. تندی این قطار در یک زمان ۳۰m/s است و پس از پیمودن مسافت ۱۶۰m به ۵۰m/s می‌رسد. مطلوب است محاسبه‌ی (الف) شتاب، (ب) زمان لازم برای پیمودن مسافت ۱۶۰m، (پ) زمان لازم برای رسیدن به تندی ۳۰m/s، و (ت) مسافت پیموده شده از حال سکون تا زمانی که تندی قطار به ۳۰m/s می‌رسد. (ث) نمودارهای x برحسب t و v برحسب t را با شروع کردن حرکت قطار از حال سکون رسم کنید.

حل: جهت $+x$ را جهت حرکت در نظر می‌گیریم. برای داده‌ها از پانویس‌های ۱ و ۲ استفاده می‌کنیم. درنتیجه داریم $v_۱ = +۳۰ m/s$، $v_۲ = +۵۰ m/s$ و $x_۲ - x_۱ = +۱۵۰ m$.

(الف) با استفاده از این پانویس‌ها، معادله‌ی ۲-۱۶ به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$a = \frac{v_۲^۲ - v_۱^۲}{۲(x_۲ - x_۱)} = \frac{(۵۰ m/s)^۲ - (۳۰ m/s)^۲}{۲(۱۵۰ m)} = ۵/۳ m/s^۲$$

(ب) بازه‌ی زمانی متناظر، جابه‌جایی $x_۲ - x_۱$ را با استفاده از معادله‌ی ۲-۱۷ به دست می‌آوریم:

$$t_۲ - t_۱ = \frac{۲(x_۲ - x_۱)}{v_۱ + v_۲} = \frac{۲(۱۵۰ m)}{۳۰ m/s + ۵۰ m/s} = ۳/۸ s$$

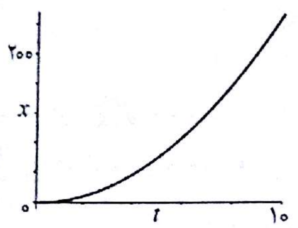
(پ) چون در لحظه‌ای که ساعت به کار می‌افتد قطار ساکن است ($v_۰ = ۰$) لذا مقدار $t_۱$ از معادله‌ی ۲-۱۱ به دست می‌آید:

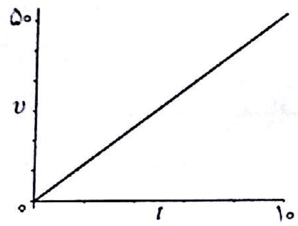
$$v_۱ = v_۰ + at_۱ \Rightarrow t_۱ = \frac{۳۰ m/s}{۵/۳ m/s^۲} = ۵/۷ s$$

(ت) مکان مبداء را در جایی انتخاب کرده‌ایم که قطار در آغاز در آن‌جا ساکن بود ($x_۰ = ۰$). بنابراین، می‌خواهیم مقدار $x_۱$ را پیدا کنیم. برای این منظور مثلاً می‌توان از معادله‌ی ۲-۱۷ استفاده کرد:

$$x_۱ = \frac{۱}{۲}(v_۰ + v_۱)t_۱ = \frac{۱}{۲}(۳۰ m/s)(۵/۷ s) = ۸۶ m$$

(ث) نمودارهای x برحسب t و v برحسب t به‌صورت زیر هستند:





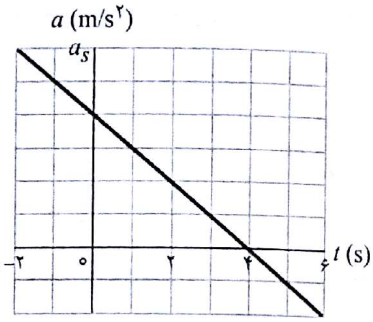
۸۱ معادله‌ی شتاب حرکت یک ذره در راستای محور x به‌صورت $a = ۵/۰t$ است، که در آن t برحسب ثانیه و a برحسب متر بر مجذور ثانیه است. سرعت ذره در زمان $t = ۲/۰ s$ برابر با $+۱۷ m/s$ است. سرعت آن در زمان $t = ۴/۰ s$ چیست؟

حل: از شتاب (از $t = ۲s$ تا $t = ۴s$) انتگرال می‌گیریم تا سرعت به دست بیاید و از مقادیر داده شده در مسئله استفاده می‌کنیم:

$$v = v_۰ + \int_{t_۰}^{t} a\,dt = v_۰ + \int_{t_۰}^{t} (۵/۰t)\,dt = v_۰ + \frac{۱}{۲}(۵/۰)(t^۲ - t_۰^۲)$$

$$= ۱۷ + \frac{۱}{۲}(۵/۰)(۴^۲ - ۲^۲) = ۴۷ m/s$$

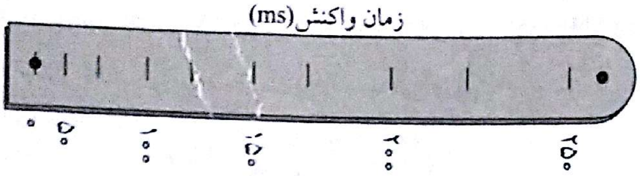
۸۲ شکل ۲-۴۱، نمودار شتاب a برحسب زمان t را برای یک ذره‌ی در حال حرکت در راستای محور x نشان می‌دهد. مقیاس محور a در شکل با $a_s = ۱۲٫۰\,m/s^۲$ مشخص شده است. سرعت ذره در زمان $t = -۲٫۰\,s$، برابر با $۷٫۰\,m/s$ است. سرعت آن در زمان $t = ۶٫۰\,s$ چیست؟



شکل ۲-۴۱ مسئله‌ی ۸۲

حل: درلحظه‌ی $t = ۶\,s$، سرعت برابر است با $v = v_{معلوم} + \int_{-۲}^{۶} a\,dt$. ساده‌ترین راه برای به دست آوردن این مقدار، پیدا کردن مساحت مثلث (قاعده ضربدر نصف ارتفاع) زیر نمودار است. در نتیجه مقدار $v = ۷\,m/s + ۳۲\,m/s = ۳۹\,m/s$ به دست می‌آید.

۸۳ شکل ۲-۴۲، وسیله‌ی ساده‌ای را برای اندازه‌گیری زمان واکنش نشان می‌دهد. این وسیله شامل یک نوار مقوایی مدرج و دو خال سیاه بزرگ است. فرض کنید دوست شما نوار را **به طور قائم** با دو انگشت شست و اشاره‌ی خود در محل خال سمت راست در شکل ۲-۴۲ می‌گیرد. سپس، در حالی که دو انگشت شست و اشاره‌ی خود را بدون تماس با نوار در مقابل خال دیگر (خال سمت چپ در شکل ۲-۴۲) نگه داشته‌اید، دوستتان نوار را رها می‌کند و شما باید سعی کنید به محض مشاهده‌ی سقوط نوار، آن را فوراً با دو انگشت خود بگیرید. عدد محل گرفتن نوار، زمان واکنش شما را نشان می‌دهد. (الف) در چه فاصله‌ای از خال پایینی باید نشانه‌ی $۵۰٫۰\,ms$ را قرار داد؟ نشانه‌های (ب) ۱۰۰، (پ) ۱۵۰، (ت) ۲۰۰ و (ث) $۲۵۰\,ms$ باید در چه فاصله‌هایی بالاتر قرار داشته باشند؟ (به عنوان مثال، آیا فاصله‌ی نشانه‌ی $۱۰۰\,ms$ تا خال سیاه باید دو برابر فاصله‌ی نشانه‌ی $۵۰\,ms$ تا آن خال باشد؟ آیا می‌توانید رابطه‌ای میان پاسخ‌ها پیدا کنید؟)



شکل ۲-۴۲ مسئله‌ی ۸۳

حل: جسمی که می‌افتد ($v_۰ = ۰$) سقوط آزاد انجام می‌دهد ($a = -g = -۹٫۸\,m/s^۲$ و جهت رو به پایین در جهت $-y$ انتخاب شده است) و ما از معادله‌ی ۲-۱۵ به صورت مکرر استفاده می‌کنیم.

(الف) فاصله‌ی (مثبت) D از نقطه‌ی پایینی تا نشانه‌ی مربوط به زمان واکنش خاص t، از رابطه‌ی $\Delta y = -D = -\frac{۱}{۲}gt^۲$ یا $D = gt^۲/۲$ به‌دست می‌آید. بنابراین به‌ازای $t_۱ = ۵۰٫۰\,m/s$ داریم

$$D_۱ = \frac{(۹٫۸\,m/s^۲)(۵۰٫۰\times۱۰^{-۳}s)^۲}{۲} = ۰٫۰۱۲۳\,m = ۱٫۲۳\,cm$$

(ب) برای $t_۲ = ۱۰۰\,ms$ داریم

$$D_۲ = \frac{(۹٫۸\,m/s^۲)(۱۰۰\times۱۰^{-۳}s)^۲}{۲} = ۰٫۰۴۹\,m = ۴D_۱$$

(پ) برای $t_۳ = ۱۵۰\,ms$ داریم

$$D_۳ = \frac{(۹٫۸\,m/s^۲)(۱۵۰\times۱۰^{-۳}s)^۲}{۲} = ۰٫۱۱\,m = ۹D_۱$$

(ت) برای $t_۴ = ۲۰۰\,ms$ داریم

$$D_۴ = \frac{(۹٫۸\,m/s^۲)(۲۰۰\times۱۰^{-۳}s)^۲}{۲} = ۰٫۱۹۶\,m = ۱۶D_۱$$

(ث) برای $t_۴ = ۲۵۰\,ms$ داریم

$$D_۵ = \frac{(۹٫۸\,m/s^۲)(۲۵۰\times۱۰^{-۳}s)^۲}{۲} = ۰٫۳۰۶\,m = ۲۵D_۱$$

۸۴ سورتمه‌ای مجهز به موشک، که در یک مسیر مستقیم و افقی حرکت می‌کند، برای پژوهش درباره‌ی اثرهای شتاب‌های زیاد روی انسان به کار می‌رود. یکی از این سورتمه‌ها می‌توانند در مدت $۱٫۸\,s$ از حال سکون به تندی $۱۶۰۰\,km/h$ برسد. مطلوب است تعیین (الف) شتاب سورتمه (که ثابت فرض می‌شود) برحسب g و (ب) مسافت پیموده شده.

حل: جهت حرکت را درجهت $+x$ درنظرمی‌گیریم و فرض می‌کنیم $x_۰ = ۰$ است. در نتیجه $v = ۱۶۰۰(۱۰۰۰/۳۶۰۰) = ۴۴۴\,m/s$ به‌دست می‌آید.

(الف) از معادله‌ی ۲-۱۱ داریم $444 = a(1/8)$ یا $a = 246/7\,\text{m/s}^2$.
این مقدار شتاب را برحسب g به دست می‌آوریم:

$$a = \left(\frac{246/7\,\text{m/s}^2}{9/8\,\text{m/s}^2}\right)g = 25\,g$$

(ب) از معادله‌ی ۲-۱۷ داریم

$$x = \frac{1}{2}(v_0 + v)t = \frac{1}{2}(444\,\text{m/s})(1/8\,\text{s}) = 399/6\,\text{m}$$

۸۵ یک گاری معدن با تندی $20\,\text{km/h}$ به بالای تپه‌ای کشیده می‌شود و سپس با تندی $35\,\text{km/h}$ به پایین تپه و نقطه‌ی شروع حرکت، برگشت داده می‌شود (زمان لازم برای تغییر دادن جهت حرکت گاری در بالای تپه قابل چشم‌پوشی است). تندی متوسط گاری در پیمودن این مسافت از نقطه‌ی شروع حرکت تا برگشت به نقطه‌ی شروع حرکت چیست؟

حل: فرض می‌کنیم طول مسافت از پایین تا بالای تپه D باشد. در نتیجه داریم

$$\text{تندی متوسط} = \frac{\text{مسافت کل پیموده شده}}{\text{زمان کل سپری شده}}$$

$$= \frac{2D}{\dfrac{D}{20\,\text{km/h}} + \dfrac{D}{35\,\text{km/h}}} \approx 25\,\text{km/h}$$

۸۶ موتورسواری که در راستای محور x به‌سمت خاور حرکت می‌کند در زمان‌های $0 \le t \le 6/0\,\text{s}$ دارای شتاب $a = (6/1 - 1/2t)\,\text{m/s}^2$ است. در زمان $t = 0$ سرعت و مکان موتورسوار $2/7\,\text{m/s}$ و $7/3\,\text{m}$ است. (الف) تندی بیشینه‌ای که موتورسوار به آن می‌رسد چقدر است؟ (ب) کل مسافتی که موتورسوار در بازه‌ی زمانی بین $t = 0$ و $t = 6/0\,\text{s}$ می‌پیماید، چقدر است؟

حل: از شتاب انتگرال می‌گیریم، تا سرعت به دست آید:

$$v - v_0 = \int_0^t (6/1 - 1/2t')\,dt'$$

برای فهمیدن این موضوع بهتر است به بحث ارائه شده در بخش ۲-۷ کتاب رجوع کنید.

(الف) نتیجه‌ی محاسبه‌ی انتگرال برابر است با

$$v = v_0 + 6/1t - 0/6t^2$$

با توجه به صورت مسئله، $v_0 = 2/7\,\text{m/s}$ است. مقدار بیشینه‌ی این تابع موقعی به دست می‌آید که مشتق آن (شتاب) را مساوی با صفر قرار دهیم (موقعی $a = 0$ است که $t = 6/1/1/2 = 5/1\,\text{s}$ باشد). مقدار $t = 5/1\,\text{s}$ را در معادله‌ی سرعت قرار می‌دهیم تا $v = 18\,\text{m/s}$ به دست آید.

(ب) از رابطه‌ی سرعت مشتق می‌گیریم تا تابع x برحسب t به‌دست آید:

$$x - x_0 = \int_0^t v\,dt' = \int_0^t (v_0 + 6/1t' - 0/6t'^2)\,dt'$$

$$= v_0 t + 3/05t^2 - 0/2t^3$$

در اینجا $x_0 = 7/3\,\text{m}$ است و به ازای $t = 6\,\text{s}$، $x = 83\,\text{m}$ به‌دست می‌آید. این جواب درست است. در صورت مسئله مسافت کل پیموده شده (و $x - x_0$ مقدار ***جابه‌جایی*** است) خواسته شده است. اگر موتورسوار جهت حرکت را معکوس کرده باشد، مسافت پیموده شده بیش از مقدار جابه‌جایی خواهد بود. بنابراین می‌توان پرسید که «آیا او در جهت معکوس حرکت کرده است؟» اگر این کار صورت گرفته باشد باید سرعت (به طور موقتی) در جایی (وقتی جهت حرکت را معکوس می‌کند) صفر شده باشد. معادله‌ی درجه دوم سرعت را حل می‌کنیم و مقدار مثبت t به ازای $v = 0$ را به دست می‌آوریم. در نتیجه مقدار $t = 10/6\,\text{s}$ به دست می‌آید که نشان می‌دهد جهت حرکت در آن لحظه معکوس می‌شود. اما بازه‌ی زمانی داده شده در مسئله به صورت $0 \le t \le 6\,\text{s}$ است. بنابراین جهت حرکت موتورسوار معکوس نشده است و جابه‌جایی با مسافت کل پیموده شده برابر است.

۸۷ هنگامی که تندی مجاز بیشینه در بزرگ‌راه نیویورک از $55\,\text{mi/h}$ به $65\,\text{mi/h}$ افزایش می‌یابد، درمدت زمان مسافرت خودرویی که مسافت $700\,\text{km}$ بین ورودی بافالو و خروجی نیویورک سیتی را با تندی مجاز بیشینه می‌پیماید چقدر صرفه‌جویی می‌شود؟

حل: زمان لازم برای پیمودن مسافت d با تندی v_1، برابر است با $t_1 = d/v_1$. به طور مشابه، اگر همان مسافت با تندی v_2 پیموده شود، زمان لازم $t_2 = d/v_2$ است. مقدار تندی‌های v_1 و v_2 در این مسئله داده شده‌اند:

$$v_۱ = ۵۵\,\text{mi/h} = (۵۵\,\text{mi/h})\frac{۱۶۰۹\,\text{m/mi}}{۳۶۰۰\,\text{s/h}} = ۲۴/۵۸\,\text{m/s}$$

$$v_۲ = ۶۵\,\text{mi/h} = (۶۵\,\text{mi/h})\frac{۱۶۰۹\,\text{m/mi}}{۳۶۰۰\,\text{s/h}} = ۲۹/۰۵\,\text{m/s}$$

چون $d = ۷۰۰\,\text{km} = ۷/۰\times ۱۰^۵\,\text{m}$ است، اختلاف زمان دو حرکت برابر است با

$$\Delta t = t_۱ - t_۲ = d(\frac{۱}{v_۱} - \frac{۱}{v_۲})$$

$$= (۷/۰\times ۱۰^۵\,\text{m})(\frac{۱}{۲۴/۵۸\,\text{m/s}} - \frac{۱}{۲۹/۰۵\,\text{m/s}})$$

$$= ۴۳۸۳\,\text{s} = ۷۳\,\text{min}$$

یا یک ساعت و ۱۳ دقیقه.

۸۸ خودرویی در حال حرکت با شتاب ثابت مسافت بین دو نقطه به فاصله‌ی $۶۰/۰\,\text{m}$ را در مدت $۶/۰۰\,\text{s}$ می‌پیماید. تندی خودرو در هنگام عبور از نقطه‌ی دوم $۱۵/۰\,\text{m/s}$ بوده است. (الف) تندی خودرو در هنگام عبور از نقطه‌ی اول چیست؟ (ب) بزرگی شتاب خودرو چقدر است؟ (پ) خودرو در چه فاصله‌ای پیش از نقطه‌ی اول در حال سکون بوده است؟ (ت) نمودارهای x برحسب t و v برحسب t مربوط به خودرو را از حال سکون $(t = ۰)$ رسم کنید.

حل: شتاب ثابت است و ما می‌توانیم از معادلات جدول ۲-۱ استفاده کنیم.

(الف) نقطه‌ی اول را در مبداء مختصات و لحظه‌ای را که خودرو در آنجا قرار دارد، صفر انتخاب می‌کنیم. با استفاده از معادله‌ی ۲-۱۷ داریم

$$x = \frac{۱}{۲}(v + v_۰)t = \frac{۱}{۲}(۱۵/۰\,\text{m/s} + v_۰)(۶/۰۰\,\text{s})$$

به ازای $x = ۶۰/۰\,\text{m}$ (که جهت حرکت در جهت $+x$ است)، سرعت اولیه‌ی خودرو مساوی با $v_۰ = ۵/۰\,\text{m/s}$ به دست می‌آید.

(ب) با قرار دادن مقادیر $v = ۱۵/۰\,\text{m/s}$، $v_۰ = ۵/۰\,\text{m/s}$، و $t = ۶/۰۰\,\text{s}$ در معادله‌ی $a = (v - v_۰)/t$ (معادله‌ی ۲-۱۱)، شتاب خودرو مساوی با $a = ۱/۶۷\,\text{m/s}^۲$ به دست می‌آید.

(پ) با قرار دادن $v = ۰$ در معادله‌ی $v^۲ = v_۰^۲ + ۲ax$، مقدار x به‌دست می‌آید:

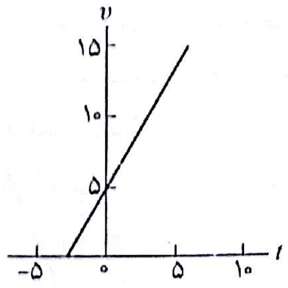
$$x = -\frac{(۵/۰\,\text{m/s})^۲}{۲(۱/۶۷\,\text{m/s}^۲)} = -۷/۵\,\text{m}$$

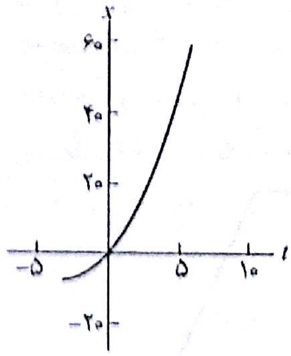
یا $|x| = ۷/۵\,\text{m}$.

(ت) برای رسم نمودارهای خواسته شده باید زمان مربوط به $v = ۰$ را از معادله‌ی $v = v_۰ + at' = ۰$ پیدا کنیم:

$$t' = \frac{-۶/۰\,\text{m/s}}{۱/۶۷\,\text{m/s}^۲} = -۱۳/۰\,\text{s}$$

که نشان می‌دهد خودرو در لحظه‌ی $-۱۳/۰\,\text{s}$ در حال سکون بوده است.





۸۹ یک شعبده‌باز در نمایش خود، معمولاً، توپ‌هایی را به طور قائم تا ارتفاع H پرتاب می‌کند. اگر قرار باشد توپ‌ها دو برابر مدت بیشتر در هوا بمانند تا چه ارتفاعی باید پرتاب شوند؟

حل: از مقاومت هوا چشم‌پوشی می‌کنیم، در نتیجه $a = -g = -۹/۸\,\text{m/s}^۲$ است. جهت **رو به پایین** را در جهت $-y$ انتخاب می‌کنیم. چون شتاب ثابت است می‌توان از معادلات جدول ۲-۱ استفاده کرد. وقتی چیزی به طور قائم به بالا پرتاب می‌شود و به همان سطح قبلی برمی‌گردد، مدت زمان پرواز t دو برابر مدت زمان بالا رفتن t_a است که از معادله‌ی ۲-۱۸ به ازای $H = \Delta y$ و $v = ۰$ (که نقطه‌ی بیشینه را مشخص می‌کند) به دست می‌آید:

$$H = vt_a + \frac{۱}{۲}gt_a^۲ \Rightarrow t_a = \sqrt{\frac{۲H}{g}}$$

با نوشتن همین معادله‌ها برای مدت زمان کل پرواز $t = ۲t_a$، داریم

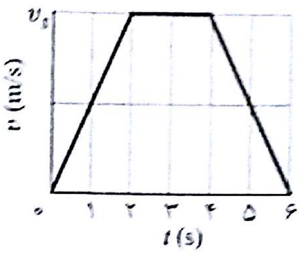
$$H = \frac{۱}{۸}gt^۲ \Rightarrow t = ۲\sqrt{\frac{۲H}{g}}$$

اکنون دو پرتاب را در نظر می‌گیریم، یکی به ارتفاع $H_۱$ در مدت زمان کل $t_۱$ و دیگری به ارتفاع $H_۲$ در مدت زمان کل $t_۲$. با نوشتن نسبت‌ها داریم

$$\frac{H_۲}{H_۱} = \frac{\frac{۱}{۸}gt_۲^۲}{\frac{۱}{۸}gt_۱^۲} = (\frac{t_۲}{t_۱})^۲$$

از این نسبت‌ها معلوم می‌شود که اگر $t_۲ = ۲t_۱$ باشد (آن‌طور که مسئله خواسته است)، $H_۲ = ۲^۲H_۱ = ۴H_۱$ خواهد بود.

۹۰ ذره‌ای در زمان $t=0$ در راستای محور x مثبت از مبداء شروع به حرکت می‌کند. در شکل ۲-۴۳، نمودار سرعت ذره به‌صورت تابعی از زمان نشان داده شده است؛ مقیاس محور v شکل با $v_s = 4{,}0\,m/s$ مشخص شده است. (الف) مختصه‌ی مکان ذره در زمان $t = 5{,}0\,s$ چیست؟ (ب) سرعت ذره در زمان $t = 5{,}0\,s$ چیست؟ (پ) شتاب ذره در زمان $t = 5{,}0\,s$ چقدر است؟ (ت) سرعت متوسط ذره در بین زمان‌های $t = 1{,}0\,s$ و $t = 5{,}0\,s$ چیست؟ (ث) شتاب متوسط ذره در بین زمان‌های $t = 1{,}0\,s$ تا $t = 5{,}0\,s$ چقدر است؟



شکل ۲-۴۳ مسئله‌ی ۹۰.

حل: (الف) با استفاده از مساحت یک مثلث که نشان دهنده‌ی انتگرال متناظر با مساحت زیر منحنی است، می‌توانیم انتگرال v نسبت به t را از لحظه‌ی $t=0$ تا لحظه‌ی $t = 5\,s$ به دست آوریم، که مساوی با $15\,m$ است. چون $x_0 = 0$ است لذا در لحظه‌ی $t = 5{,}0\,s$ مختصه‌ی مکان ذره $x = 15\,m$ است.

(ب) نمودار نشان می‌دهد که در لحظه‌ی $t = 5{,}0\,s$، $v = 2{,}0\,m/s$ است.

(پ) چون $a = dv/dt$ معرف شیب منحنی است، لذا در بازه‌ی زمانی $4s < t < 6s$ شتاب برابر با $-2{,}0\,m/s^2$ است.

(ت) چون $x(t)$ را برحسب مساحت (در نمودار) حساب کردیم، لذا $x(1) = 1m$ است و با استفاده از مقدار به دست آمده در قسمت (الف)، از معادله‌ی ۲-۲ داریم

$$v_{avg} = \frac{x(5) - x(1)}{5 - 1} = \frac{15\,m - 1\,m}{4\,s} = 3{,}5\,m/s$$

(ث) با استفاده ازمعادله‌ی ۲-۷ و مقادیر $v(t)$ در روی نمودار، داریم

$$a_{avg} = \frac{v(5) - v(1)}{5 - 1} = \frac{2\,m/s - 2\,m/s}{4\,s} = 0$$

۹۱ سنگی را از بالای پرتگاهی به ارتفاع $100\,m$ رها می‌کنیم. چه مدت طول می‌کشد تا سنگ (الف) $50\,m$ اول، و (ب) $50\,m$ دوم، را بپیماید؟

حل: جهت رو به پایین را در جهت $+y$ و $y_0 = 0$ انتخاب می‌کنیم. با استفاده از معادله‌ی $y = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$ به ازای $v_0 = 0$ داریم $t = \sqrt{2y/g}$.

(الف) برای این قسمت از حرکت، $y = 50\,m$ است و داریم

$$t = \sqrt{\frac{2(50)}{9{,}8}} = 3{,}2\,s$$

(ب) برای قسمت دوم حرکت می‌دانیم که جابه‌جایی کل $y = 100\,m$ است. پس، مدت زمان کل سپری شده برابر است با

$$t = \sqrt{\frac{2(100)}{9{,}8}} = 4{,}5\,s$$

تفاضل این مدت زمان و زمان به دست آمده در قسمت (الف)، مدت زمان سقوط در ۵۰ متر دوم است: $4{,}5 - 3{,}2 = 1{,}3\,s$.

۹۲ فاصله‌ی دو ایستگاه قطار زیرزمینی $1100\,m$ است. اگر یک قطار نصف این مسافت را از حال سکون با شتاب تند کننده‌ی $+1{,}2\,m/s^2$ و نصف دیگر مسافت را با شتاب کُند کننده‌ی $-1{,}2\,m/s^2$ بپیماید، (الف) مدت زمان پیمودن این مسافت و (ب) تندی بیشینه‌ی قطار چقدر است؟ (پ) نمودارهای x، v و a برحسب t را برای پیمودن این مسافت رسم کنید.

حل: در صورت مسئله جهت $+x$ به طور ضمنی در جهت حرکت قطار انتخاب شده است. مکان اولیه‌ی قطار (موقعی که ساعت شروع به کار می‌کند)، $x_0 = 0$ (وقتی $v_0 = 0$) است و در مکان $x_1 = 1100/2 = 550\,m$ قطار به تندی بیشینه می‌رسد، و در مکان $x_2 = 1100\,m$ متوقف می‌شود ($v_2 = 0$).

(الف) با استفاده از معادله‌ی ۲-۱۵، مدت زمان پیمودن مسافت x_1 برابر است با

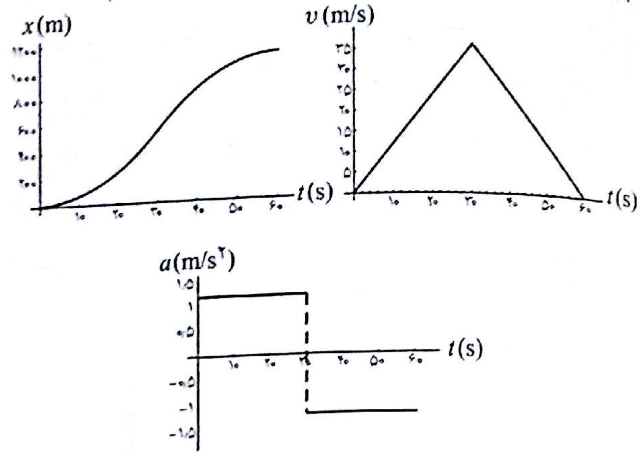
$$t_1 = \sqrt{\frac{2x_1}{a_1}} = \sqrt{\frac{2(550\,m)}{1{,}2\,m/s^2}} = 30{,}3\,s$$

بازه‌ی زمانی $t_2 - t_1$ نیز مساوی با همین مقدار زمان است (با استفاده از معادله‌ی ۲-۱۸ به راحتی به این نتیجه می‌رسیم) لذا زمان کل برابر با $t_2 = 2(30{,}3) = 60{,}6\,s$ است.

(ب) تندی بیشینه‌ی قطار در لحظه‌ی t_1 ظاهر می‌شود و برابر است با

$$v_1 = v_0 + a_1 t_1 = 36{,}36\,m/s$$

(پ) نمودارهای x، v و a برحسب زمان در زیر رسم شده‌اند.



۹۳ سنگی به طور قائم به بالاسو پرتاب می‌شود. این سنگ در سر راه خود به بالاسو با تندی v از نقطه‌ی A و با تندی $\frac{۱}{۲}v$ از نقطه‌ی B به اندازه‌ی ۳٫۰۰m بالاتر از نقطه‌ی A، می‌گذرد. مطلوب است محاسبه‌ی (الف) تندی v و (ب) ارتفاع بیشینه‌ای که سنگ در بالاتر از نقطه‌ی B به آن می‌رسد.

حل: از مقاومت هوا چشمپوشی می‌کنیم، در نتیجه $a=-g=-۹٫۸\,m/s^۲$ است. جهت رو به پایین را در جهت y در نظر می‌گیریم و چون شتاب سنگ ثابت است، از معادلات جدول ۲-۱ استفاده می‌کنیم. ضمناً $y_۰=۰$ انتخاب می‌شود.

(الف) معادله‌ی ۲-۱۶ را برای هر دو اندازه‌گیری به کار می‌بریم:

$$v_B^۲=v_۰^۲-۲gy_B \Rightarrow (\frac{۱}{۲}v)^۲+۲g(y_A+۳)=v_۰^۲$$

$$v_A^۲=v_۰^۲-۲gy_A \Rightarrow v^۲+۲gy_A=v_۰^۲$$

این دو رابطه را مساوی یکدیگر قرار می‌دهیم:

$$\frac{۱}{۴}v^۲+۲gy_A+۲g(۳)=v^۲+۲gy_A \Rightarrow ۲g(۳)=\frac{۳}{۴}v^۲$$

$$v=\sqrt{۲g(۴)}=۸٫۸۵\,m/s$$

(ب) سنگی که با تندی $v=۸٫۸۵\,m/s$ از نقطه‌ی A می‌گذرد و به طرف بالا حرکت می‌کند، به ارتفاع بیشینه‌ی $y-y_A=v^۲/۲g=۴٫۰۰\,m$ بالاتر از نقطه‌ی A می‌رسد (اگر در معادله‌ی ۲-۱۶ برای توصیف بالاترین نقطه به جای سرعت نهایی مقدار صفر را قرار دهیم، به همین نتیجه می‌رسیم). بنابراین بالاترین نقطه حرکت ۱٫۰۰m بالاتر از نقطه‌ی B قرار دارد.

۹۴ سنگی از بالای ساختمانی به ارتفاع ۶۰m (از حال سکون) رها می‌شود. این سنگ ۱٫۲s پیش از برخورد به زمین در چه فاصله‌ای از زمین قرار دارد؟

حل: از مقاومت هوا چشمپوشی می‌کنیم، در نتیجه $a=-g=-۹٫۸\,m/s^۲$. جهت رو به پایین را در جهت $-y$ انتخاب می‌کنیم و شتاب حرکت نیز ثابت است. سطح زمین را در مبداء محور y در نظر می‌گیریم. مدت زمان کل سقوط از معادله‌ی ۲-۱۵ حساب می‌شود:

$$\Delta y=v_۰t-\frac{۱}{۲}gt^۲ \Rightarrow t=\frac{v_۰+\sqrt{v_۰^۲-۲g\Delta y}}{g}$$

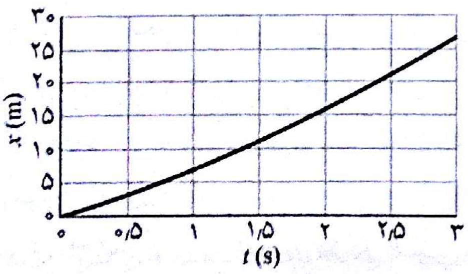
با انتخاب ریشه‌ی مثبت و قرار دادن $y=۰$، $v_۰=۰$ و $y_۰=h=۶۰\,m$، خواهیم داشت

$$t=\frac{\sqrt{۲gh}}{g}=\sqrt{\frac{۲h}{g}}=۳٫۵\,s$$

«۱٫۲ ثانیه پیش از رسیدن سنگ به زمین»، به این معنی است که سنگ در مدت $t=۲٫۳\,s$ سقوط کرده است. اگر $h=۶۰\,m$ و $v_۰=۰$ را در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$y-h=v_۰(۲٫۳)-\frac{۱}{۲}g(۲٫۳)^۲ \Rightarrow y=۳۴\,m$$

۹۵ یک قایق یخ پیما با سرعت ثابت به‌سوی خاور پیش می‌رود. در این لحظه وزش ناگهانی باد سبب می‌شود قایق به مدت ۳٫۰s با شتاب ثابت به سمت خاور حرکت کند. در شکل ۲-۴۴، نمودار x برحسب t نشان داده شده است، که در آن $t=۰$ زمان شروع وزش باد و جهت مثبت محور x به‌سمت خاور است. (الف) شتاب قایق در بازه‌ی زمانی ۳٫۰s چقدر است؟ (ب) سرعت قایق در پایان این بازه‌ی زمانی ۳٫۰s چیست؟ (پ) اگر شتاب به‌مدت ۳٫۰s دیگر ثابت بماند قایق در این بازه‌ی زمانی اضافی ۳٫۰s چه مسافتی را می‌پیماید؟



شکل ۲-۴۴ مسئله‌ی ۹۵.

حل: (الف) با توجه به صورت مسئله می‌توان از معادلات جدول ۲-۱ استفاده کرد، اما $v_۰$، v و a به طور صریح داده نشده‌اند. بنابراین می‌توانیم معادله‌ی $x-x_۰=v_۰t+\frac{۱}{۲}at^۲$ را برای نقاط مختلف نمودار به کار ببریم و کمیت‌های مجهول را از حل هم‌زمان معادله‌ها به دست آوریم. برای نمونه می‌توان نوشت

$$۱۶\,m-۰=v_۰(۲/۰\,s)+\frac{۱}{۲}a(۲/۰\,s)^۲$$

$$۲۷\,m-۰=v_۰(۳/۰\,s)+\frac{۱}{۲}a(۳/۰\,s)^۲$$

از این دو معادله مقادیر $v_۰=۶/۰\,m/s$ و $a=۲/۰\,m/s^۲$ به‌دست می‌آیند.

(ب) با استفاده از معادلات جدول ۲-۱ داریم:

$$x-x_۰=vt-\frac{۱}{۲}at^۲$$

$$\Rightarrow ۲۷m-۰=v(۳/۰\,s)-\frac{۱}{۲}(۲/۰\,m/s^۲)(۳/۰\,s)^۲$$

که از آن‌جا $v=۱۲\,m/s$ به دست می‌آید.

(پ) فرض می‌کنیم وزش باد در بازه‌ی زمانی $۶/۰\le t\le ۳/۰$ ادامه دارد، لذا از معادله‌ی $x-x_۰=v_۰t+\frac{۱}{۲}at^۲$ در این بازه‌ی زمانی استفاده می‌کنیم [از قسمت (ب) $v_۰=۱۲/۰\,m/s$ به دست آمده است]:

$$\Delta x=(۱۲/۰\,m/s)(۳/۰\,s)+\frac{۱}{۲}(۲/۰\,m/s^۲)(۳/۰\,s)^۲=۴۵\,m$$

۹۶ از روی یک تخته‌ی شیرجه‌ی واقع در ارتفاع ۵/۲۰ متری سطح آب یک دریاچه گلوله‌ای سربی انداخته می‌شود. این گلوله با سرعت معینی به آب برخورد می‌کند، با همان سرعت که ثابت است، در آب دریاچه فرو می‌رود و ۴/۸۰s پس از رها شدن، به ته دریاچه می‌رسد. (الف) عمق دریاچه چقدر است؟ (ب) بزرگی و (پ) جهت (به بالاسو یا به پایین سو) سرعت متوسط گلوله در کل زمان سقوط چیست؟ فرض کنید تمام آب دریاچه را خالی می‌کنیم. اکنون، گلوله از تخته‌ی شیرجه پرتاب می‌شود و پس از ۴/۸۰s به ته دریاچه می‌رسد. (ت) بزرگی و (ث) جهت سرعت آغازی گلوله چیست؟

حل: (الف) ارتفاع تخته شیرجه را h در نظر می‌گیریم. جهت رو به پایین را در جهت $+y$ و مبداء مختصات را نقطه‌ی افتادن گلوله در نظر می‌گیریم (ساعت در این لحظه شروع به کار می‌کند).

بنابراین، $y=h$ مکان برخورد گلوله به آب را نشان می‌دهد. فرض می‌کنیم عمق دریاچه D و مدت زمان کل سقوط گلوله T است. تندی گلوله در هنگام رسیدن به سطح آب دریاچه $v=\sqrt{۲gh}$ است (معادله‌ی ۲-۱۶) و مدت زمان رسیدن گلوله به سطح آب $t_۱=\sqrt{۲g/h}$ است (معادله‌ی ۲-۱۵). اکنون مدت زمان سقوط گلوله در داخل دریاچه (با سرعت ثابت v) را حساب می‌کنیم:

$$t_۲=\frac{D}{v}=\frac{D}{\sqrt{۲gh}}$$

در نتیجه $T=t_۱+t_۲=\sqrt{\frac{۲h}{g}}+\frac{D}{\sqrt{۲gh}}$ و از آنجا داریم

$$D=T\sqrt{۲gh}-۲h=$$

$$(۴/۸۰\,s)\sqrt{(۲)(۹/۸۰\,m/s^۲)(۵/۲۰\,m)}-۲(۵/۲۰\,m)=۳۸/۱\,m$$

(ب) بزرگی سرعت متوسط گلوله با استفاده از معادله‌ی ۲-۲ به‌دست می‌آید:

$$v_{avg}=\frac{D+h}{T}=\frac{۳۸\,m+۵/۲۰\,m}{۴/۸۰\,s}=۹\,m/s$$

(پ) در دستگاه مختصاتی که انتخاب کرده‌ایم، علامت مثبت v_{avg} به این معنی است که گلوله به طرف پایین حرکت می‌کند، اما اگر جهت رو به بالا را جهت مثبت انتخاب می‌کردیم، در آن صورت جواب قسمت (ب) دارای علامت منفی می‌شد.

(ت) $v_۰$ را از معادله‌ی $\Delta y=v_۰t+\frac{۱}{۲}gt^۲$ به ازای $t=T$ و $\Delta y=h+D$ به دست می‌آوریم:

$$v_۰=\frac{h+D}{T}-\frac{gT}{۲}=$$

$$\frac{۵/۲۰\,m+۳۸/۱\,m}{۴/۸۰\,s}-\frac{(۹/۸\,m/s^۲)(۴/۸۰\,s)}{۲}=۱۴/۵\,m/s$$

(ث) با توجه به دستگاه مختصات انتخاب شده در اینجا، علامت منفی به این معنی است که گلوله به طرف بالا پرتاب شده است.

۹۷ تک کابل نگهدارنده‌ی یک آسانسور ساختمانی بی‌سرنشین در حالی پاره می‌شود که آسانسور در بالای ساختمانی به ارتفاع ۱۲۰m متوقف است. (الف) آسانسور با چه تندی‌ای به زمین برخورد می‌کند؟ (ب) سقوط این آسانسور چه مدت طول می‌کشد؟ (پ) تندی آسانسور در هنگام عبور از نقطه‌ی نیمه راه مسیرش چقدر است؟ (ت) آسانسور پس از چه مدت از آغاز سقوط، از این نقطه عبور می‌کند؟

حل: جهت *رو به پایین* را در جهت $+y$ انتخاب می‌کنیم و از معادلات جدول ۲-۱ استفاده می‌کنیم و به جای x، y و $a=+g$، $v_0=0$، و $y_0=0$ را قرار می‌دهیم. پانویس ۱ را برای نقطه‌ی نیمه‌ی راه و پانویس ۲ را برای رسیدن آسانسور به زمین در نظر می‌گیریم.

(الف) از معادله‌ی ۲-۱۶، $v_2^2=v_0^2+2a(y_2-y_1)$، داریم

$$v_2=\sqrt{2gy_2}=\sqrt{2(9.8\,m/s^2)(120\,m)}=48.5\,m/s$$

(ب) مدت زمانی که آسانسور به زمین می‌رسد (با استفاده از معادله‌ی ۲-۱۵) برابر است با:

$$t_2=\sqrt{\frac{2y_2}{g}}=\sqrt{\frac{2(120\,m)}{9.\,m/s^2}}=4.95\,s$$

(پ) اکنون از معادله‌ی ۲-۱۶ به صورت $v_1^2=v_0^2+2a(y_1-y_0)$ استفاده می‌کنیم:

$$v_1=\sqrt{2gy_1}=\sqrt{2(9.8\,m/s^2)(60\,m)}=34.3\,m/s$$

(ت) مدت زمان مربوط به رسیدن آسانسور به نیمه‌ی راه (با استفاده از معادله‌ی ۲-۱۵) برابر است با:

$$t_1=\sqrt{\frac{2y_1}{g}}=\sqrt{\frac{2(60\,m)}{9.8\,m/s^2}}=350\,s$$

۹۸ دو سنگ از حالت سکون به فاصله‌ی زمانی ۱٫۰ ثانیه از یک ارتفاع رها می‌شوند. چه مدت پس از رها شدن سنگ اول، فاصله‌ی سنگ‌ها از هم ۱۰m خواهد بود؟

حل: جهت $+y$ را به طرف بالا و مبداء مختصات را نقطه افتادن سنگ‌ها در نظر می‌گیریم، و سپس مکان سنگ ۱ را با $y_1=-\frac{1}{2}gt^2$ و مکان سنگ ۲ را با $y_2=-\frac{1}{2}g(t-1)^2$ نشان می‌دهیم. ساعت را در لحظه‌ی رها شدن سنگ ۱ به راه می‌اندازیم. می‌خواهیم مدت زمان متناظر با $y_2-y_1=10\,m$ را پیدا کنیم:

$$-\frac{1}{2}+g(t-1)^2+\frac{1}{2}gt^2=10\Rightarrow t=(10/g)+0.5=1.5\,s$$

۹۹ گلوله‌ای از بالای ساختمانی به ارتفاع ۳۶٫۶m در راستای قائم به پایین‌سو پرتاب می‌شود. گلوله ۲٫۰۰ ثانیه پس از پرتاب شدن، از لبه‌ی بالای پنجره‌ای می‌گذرد که در ارتفاع ۱۲٫۲ متری زمین قرار دارد. تندی گلوله هنگام گذشتن از لبه‌ی بالای پنجره چقدر است؟

حل: جهت رو به بالا در جهت $+y$ انتخاب می‌کنیم. بنابراین $y_0=36.6\,m$ و $y=12.2\,m$ است. با استفاده از معادله‌ی ۲-۱۸ داریم

$$y-y_0=vt+\frac{1}{2}gt^2\Rightarrow v=-22.0\,m/s$$

این مقدار برای مدت زمان $t=2.00\,s$ به دست آمده است. بنابراین، تندی گلوله هنگام گذشتن از بالای پنجره برابر است با:

$$|v|=22.0\,m/s$$

۱۰۰ چتربازی پس از بیرون پریدن از هواپیما به اندازه‌ی ۶۰m به‌طور آزاد سقوط می‌کند. سپس چتر، باز می‌شود و چترباز با شتاب کُندکننده‌ی ۲٫۰m/s² پایین می‌آید و با تندی ۳٫۰m/s به زمین می‌رسد. (الف) چترباز چه مدت در هوا بوده است؟ (ب) چترباز در چه ارتفاعی از هواپیما به بیرون پریده است؟

حل: در حین سقوط آزاد، از مقاومت هوا چشمپوشی می‌کنیم و $a=-g=-9.8\,m/s^2$ را قرار می‌دهیم. جهت رو به پایین را در جهت $-y$ انتخاب می‌کنیم. سرعت اولیه صفر است، لذا معادله‌ی ۲-۱۵ به صورت $\Delta y=-\frac{1}{2}gt^2$ ساده می‌شود که در آن Δy معرف مقدار منفی مسافت سقوط d است. بنابراین، برای سهولت می‌توانیم معادله را به صورت $d=\frac{1}{2}gt^2$ بنویسیم.

(الف) مدت زمان t_1 که چترباز در سقوط آزاد بوده است (با استفاده از معادله‌ی ۲-۱۵) برابر است با:

$$d_1=60\,m=\frac{1}{2}gt_1^2=\frac{1}{2}(9.80\,m/s^2)t_1^2$$

از اینجا $t_1=3.5\,s$ به دست می‌آید. تندی چترباز درست پیش از باز شدن چتر، از ریشه‌ی مثبت $v_1^2=2gd_1$ به دست می‌آید:

$$v_1=\sqrt{2gh_1}=\sqrt{(2)(9.80\,m/s^2)(60\,m)}=34\,m/s$$

اگر تندی نهایی چترباز v_2 باشد، بازه‌ی زمانی t_2 بین باز شدن چتر و رسیدن چتر باز به سطح زمین، برابر است با:

$$t_2=\frac{v_1-v_2}{a}=\frac{34\,m/s-3.0\,m/s}{2\,m/s^2}=16\,s$$

این نتیجه از معادله‌ی ۲-۱۱ به دست می‌آید که در آن از *تندی‌ها* به جای سرعت‌ها (با مقدار منفی) استفاده می‌شود (به طوری که سرعت نهایی منهای سرعت اولیه، با تندی نهایی منهای تندی اولیه برابر می‌شود). ضمناً توجه می‌کنیم که بردار شتاب این قسمت از

حرکت، مثبت است زیرا جهت آن به طرف بالا است (برخلاف جهت حرکت ـ که معرّف شتاب کند کننده است). پس، مدت زمان کل پرواز برابر است با:

$$t_1 + t_2 = 17\,\text{s}$$

(ب) مسافتی که چترباز بعد از باز شدن چتر سقوط می‌کند، برابر است با:

$$d = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2a} = \frac{(31\,\text{m/s})^2 - (3{,}0\,\text{m/s})^2}{(2)(20\,\text{m/s}^2)} \approx 240\,\text{m}$$

در هنگام محاسبه، ما از معادله‌ی ۲-۱۶ استفاده و طرفین را در ۱- ضرب کرده‌ایم (این امر مقدار منفی Δy را به d مثبت در طرف چپ تغییر می‌دهد). بنابراین، سقوط از ارتفاع $h = 50 + d \approx 290\,\text{m}$ آغاز می‌شود.

۱۰۱ گلوله‌ای از ارتفاع h با **تندی آغازی** v_0 به طور قائم **به پایین‌سو** پرتاب می‌شود. (الف) تندی آن درست در لحظه‌ی برخورد به زمین چقدر است؟ (ب) چه مدت طول می‌کشد تا گلوله به زمین برسد؟ اگر گلوله از همان ارتفاع و با همان تندی آغازی **به بالاسو** پرتاب شود، (پ) پاسخ قسمت (الف)، و (ت) پاسخ قسمت (ب)، چه خواهد بود؟ پیش از حل کردن هر معادله‌ای، معین کنید پاسخ‌های قسمت‌های (پ) و (ت) نسبت به پاسخ‌های قسمت‌های (الف) و (ب) بزرگ‌تر، کوچک‌تر یا مساوی‌اند.

حل: از مقاومت هوا چشم‌پوشی می‌کنیم، در نتیجه $a = -g = -9{,}8\,\text{m/s}^2$ است و جهت رو به پایین را در جهت $-y$ انتخاب می‌کنیم. حرکت با شتاب ثابت صورت می‌گیرد و ما سطح زمین را با $y = 0$ مشخص می‌کنیم.

(الف) در معادله‌ی ۲-۱۶ به جای v_0 مقدار $-v_0$ و به جای y_0 مقدار h را قرار می‌دهیم:

$$v = \sqrt{(-v_0)^2 - 2g(y - y_0)} = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

در اینجا ریشه‌ی مثبت را انتخاب می‌کنیم زیرا تندی (**بزرگی سرعت**) خواسته شده است.

(ب) در معادله‌ی ۲-۱۵ به جای v_0 مقدار $-v_0$ را قرار می‌دهیم و t را به دست می‌آوریم:

$$\Delta y = -v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \frac{-v_0 \pm \sqrt{(-v_0)^2 - 2g\Delta y}}{g}$$

باز هم ریشه‌ی مثبت را انتخاب می‌کنیم تا $t > 0$ باشد. به ازای $y = 0$ و $y_0 = h$ داریم:

$$t = \frac{\sqrt{v_0^2 + 2gh} - v_0}{g}$$

(پ) اگر گلوله با همان تندی از ارتفاع h به بالا پرتاب شود (اصطکاک هوا وجود نداشته باشد)، با همان تندی رو به پایین به ارتفاع h برمی‌گردد و قبل از برخورد به زمین، به همان تندی نهایی به دست آمده در قسمت (الف)، می‌رسد.

(ت) مدت زمان بالا رفتن گلوله تا لحظه‌ی برگشت، بیشتر از مدت زمان مربوط به قسمت (ب) است. محاسبات مشابه‌اند، ولی در اینجا به جای $-v_0$ در قسمت (ب)، مقدار $+v_0$ را قرار می‌دهیم. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\Delta y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2g\Delta y}}{g}$$

باز هم ریشه‌ی مثبت را انتخاب می‌کنیم تا $t > 0$ باشد. به ازای $y = 0$ و $y_0 = h$ خواهیم داشت

$$t = \frac{\sqrt{v_0^2 + 2gh} + v_0}{g}$$

۱۰۲ ورزشی که در آن توپ از هر ورزش دیگری سریع‌تر حرکت می‌کند، جای آلای نام دارد، که در آن تندی توپ به $303\,\text{km/h}$ رسیده است. اگر یک بازیکن حرفه‌ای جای آلای با توپی با این تندی مواجه شود و ناخواسته چشم به هم بزند به مدت $100\,\text{ms}$ جایی را نخواهد دید. در این مدت یک چشم به هم زدن، توپ چه مسافتی را می‌پیماید؟

حل: فرض می‌کنیم حرکت با سرعت ثابت صورت می‌گیرد و از معادله‌ی ۲-۲ (به ازای $v_{avg} = v > 0$) استفاده می‌کنیم:

$$\Delta x = v\Delta t = (303\,\frac{\text{km}}{\text{h}}(\frac{1000\,\text{m/km}}{3600\,\text{s/h}}))(100 \times 10^{-3}\,\text{s}) = 8{,}4\,\text{m}$$