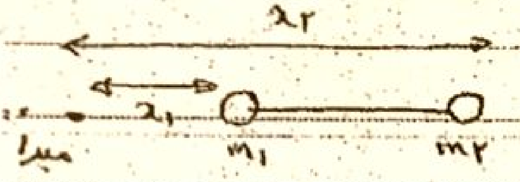
فیزیک 1

جناب آقای نایبی ندوشن

(۱)

- مرکز جرم



یک بعدی، x_1 و x_2 فاصله‌ها برداری هستند.

$$x_{cm}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$$

$$x_{cm}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots}{\text{جرم کل}}=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_ix_i}{M}$$

$$y_{cm}=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_iy_i}{M}\ ,\quad z_{cm}=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_iz_i}{M}$$

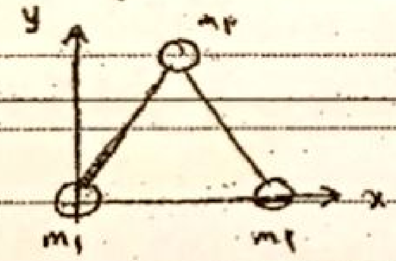
★ M = جرم کل دستگاه

$$r_{cm}=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_ir_i}{M}$$

و بردار مرکز جرم را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\vec{r}_{cm}=x_{cm}\hat{i}+y_{cm}\hat{j}+z_{cm}\hat{k}$$

مثال: سه گلوله به جرم‌های $m_1=1kg$ ، $m_2=2kg$ ، $m_3=3kg$ در گوشه‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ابعاد یک متر قرار دارند. مرکز جرم آنها را نسبت به مکان m_1 بدست آورید.



(۱) $x_1=0$ ، $y_1=0$ ، $m_1=1kg$

(۲) $x_2=1$ ، $y_2=0$ ، $m_2=2kg$

(۳) $x_3=0.5$ ، $y_3=1\times\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $m_3=3$

$$x_{cm}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3}=\frac{7}{12}$$

$$y_{cm}=\frac{\sum m_iy_i}{M}=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{1+2+3}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$r_{cm}=\frac{7}{12}\hat{i}+\frac{\sqrt{3}}{4}\hat{j}$$

- مرکز جرم یک توزیع جرم پیوسته: هرگاه یک توزیع جرم پیوسته مثل یک میله یا یک

داشتیم شیء آن را به المان‌ها (جزء، عنصر) کوچک ΔM تقسیم می‌کنیم و شامل جرم‌ها

نقطه‌ی مرکز جرم آن را می‌نویسیم

$$x_{cm} = \frac{\Delta m_1 x_1 + \Delta m_2 x_2 + \cdots}{\Delta m_1 + \Delta m_2 + \cdots} = \frac{\sum \Delta m_i x_i}{\text{جرم کل}}$$

$$x_{cm} = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{\sum \Delta m_i x_i}{m} = \boxed{\frac{\int x\,dm}{M}} \quad \text{و} \quad \boxed{y_{cm} = \frac{\int y\,dm}{M}}$$

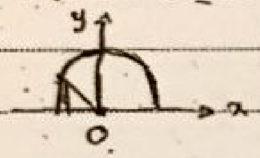
$M =$ جرم جسم *

مثال: میله‌ی همگن به طول L و جرم m مرکز جرم آن را نسبت به یک انتهای آن به دست آورید.

$$\frac{m}{dm} = \frac{L}{dx} \quad (1)$$

$$x_{cm} = \frac{\int x\,dm}{m} = \frac{m}{L/m}\int x\,dx = \frac{1}{L}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^L = \frac{L}{2}$$

تمرین: میله‌ی همگن به جرم m به شکل نیم حلقه‌ای به شعاع R در نظر بگیرید و مرکز جرم آن را نسبت به نقطه‌ی O به دست آورید.



نکته: سه نوع توزیع جرم داریم: ۱) خطی ۲) سطحی ۳) حجمی که روابط آن در هر حالت به صورت زیر است (اگر توزیع جرم یکنواخت باشد)

چگالی خطی — طول

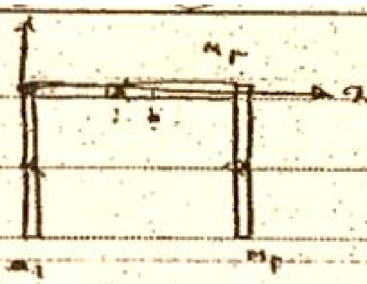
خطی: $m = \lambda L$

چگالی سطحی — مساحت

سطحی: $m = \sigma A$

حجمی: $m = \rho V$

مثال: سه عدد میله که طول هر کدام L می‌باشد و با جرم‌های $m_1 = m_0$ ، $m_2 = 2m_0$ ، $m_3 = 2m_0$ در نظر بگیرید (مطابق شکل)، مرکز جرم آن را نسبت به نقطه‌ی O به دست آورید. فرض می‌کنیم میله‌ها همگن



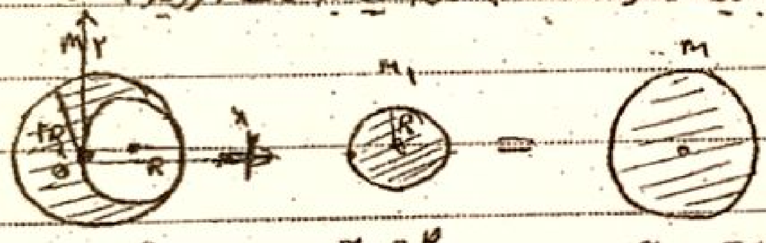
هستند. در نتیجه مرکز جرم هر میله در مرکز هندسی آن می‌باشد.

① $m_1 = m_0$, $x_1 = 0$, $y_1 = -\frac{l}{2}$ ② $m_2 = 2m_0$, $x_2 = l$, $y_2 = -\frac{l}{2}$ ③ $m_3 = 3m_0$, $x_3 = \frac{l}{2}$, $y_3 = 0$

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1+m_2+m_3} = \frac{3.5}{6}l$$

$$y_{cm} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1+m_2+m_3} = \frac{-m_0\times\frac{l}{2} - m_0 l + 0\times 3m_0}{6m_0} = \frac{-\frac{3}{2}l}{6} = -\frac{1}{4}l$$

٪ مثال: صفحه‌ی دایره‌ای به شعاع $2R$ و جرم یکنواخت m در آن حفره‌ای به شعاع R مطابق شکل ایجاد می‌کنیم. مرکز جرم قسمت باقیمانده را نسبت به نقطه‌ی O بدست آورید.



$x_2 = ?$ $x_1 = R$ $x_{cm} = 0$

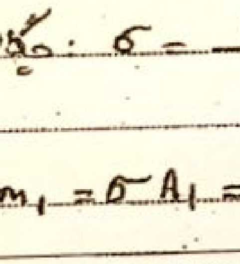
چگالی سطحی: $\sigma = \frac{m}{A} = \frac{m}{\pi(2R)^2} = \frac{m}{4\pi R^2}$

$$m_1 = \sigma A_1 = \sigma\pi R^2 = \frac{m}{4\pi R^2}\times\pi R^2 = \frac{m}{4}$$

$$m_2 = m - m_1 \longrightarrow m_2 = \frac{3m}{4}$$

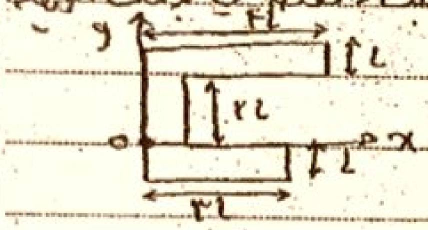
$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1+m_2} \Rightarrow 0 = \frac{\frac{m}{4}\times R + \frac{3m}{4}x_2}{\frac{m}{4}+\frac{3}{4}m} \Rightarrow x_2 = -\frac{R}{3}$$

تمرین: جسم مکعبی شکل به ابعاد a که یک بعدی در مختصات مرکز جرم را نسبت به نقطه‌ی O بدست آورید. (راهنمایی: برای حل این مسئله نقطه‌ی مرکز هر صفحه را مرکز جرم می‌گیریم)



Date

تمرین: صفحه‌ی همگن با ابعاد داده شده بر روی شکل مرکز جرم آن را نسبت به نقطه O بدست آورید.
(راهنمایی: باید به سه صفحه تقسیم شود)



« حرکت مرکز جرم و قانون دوم نیوتن »

با توجه به تعریف مرکز جرم داریم: $r_{cm} = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + \dots}{M}$

$M r_{cm} = m_1 r_1 + m_2 r_2 + \dots \xrightarrow{\text{مشتق}} M \overset{\text{سرعت}}{v_{cm}} = m_1 v_1 + m_2 v_2 + \dots$

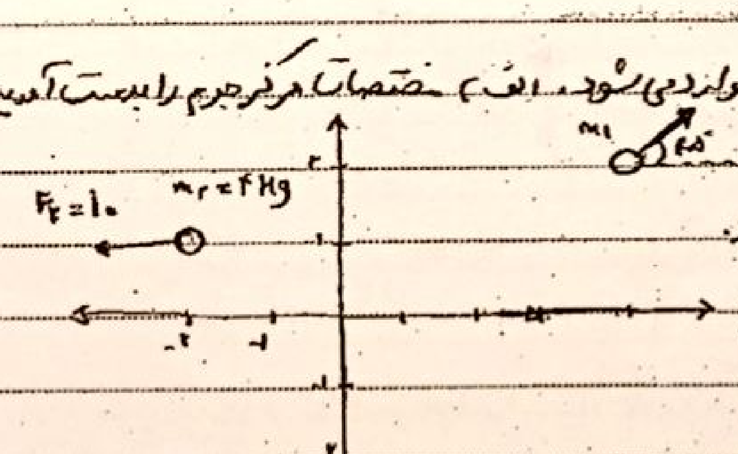
$\xrightarrow{\text{مشتق}} M \overset{\text{شتاب}}{a_{cm}} = a_1 m_1 + a_2 m_2 + \dots \Rightarrow M a_{cm} = F_1 + F_2 + \dots$

$\boxed{M a_{cm} = F_{ext}}$ برآیند نیروی خارجی وارد بر مرکز جرم

سیستم شکل از

مثال: سه ذره به جرم‌های $m_1 = m_2 = 4kg$ و $m_3 = 8kg$ مطابق شکل در نظر بگیرید. با اعمال نیروی $F_1 = 20N$ و $F_2 = 10N$ و $F_3 = 5N$ در جهت‌های نشان داده شده وارد می‌شود. الف) مختصات مرکز جرم را بدست آورید

ب) بزرگی و جهت شتاب مرکز جرم را بدست آورید.



① $m_1 = 4kg$, $x_1 = 4$, $y_1 = 2$

② $m_2 = 4kg$, $x_2 = -2$, $y_2 = 1$

③ $m_3 = 8kg$, $x_3 = 1$, $y_3 = -3$

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1+m_2+m_3} = \frac{16+(-8)+(8)}{16} = 1$$

$$y_{cm} = \frac{\sum m_i y_i}{M} = \frac{4\times 2 + 4\times 1 + 8(-3)}{16} = \frac{-12}{16} = \frac{-3}{4}$$

$$F_x = F_1 \cos 45^\circ - F_2 + F_3 \Rightarrow F_x = 20\times 0.7 - 10 + 5 = 9$$

★ $\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7$

$$F_y = F_1 \sin 45^\circ = 20 \times 0.7 = 14$$

$$F_{ext} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{9^2 + 14^2} \simeq 16.5$$

$$a_{cm} = \frac{F_{ext}}{M} = \frac{16.5}{16} \simeq 1\,\frac{m}{s^2} \Rightarrow \theta = \mathrm{Arctg}\left(\frac{F_y}{F_x}\right) = \mathrm{Arctg}\left(\frac{14}{9}\right)$$

نکته: هرگاه در مسئله ای موضوع مسئله راجع به موقعیت ذرات باشد و شرایط زیر در آن برقرار باشد

$\boxed{F_{ext} = 0}$ و $\boxed{\underbrace{v_{0cm} = 0}_{\text{سرعت اولیه صفر}}}$ در این صورت از روابط زیر برای حل مسئله می توانیم استفاده کنیم.

نیرو صفر

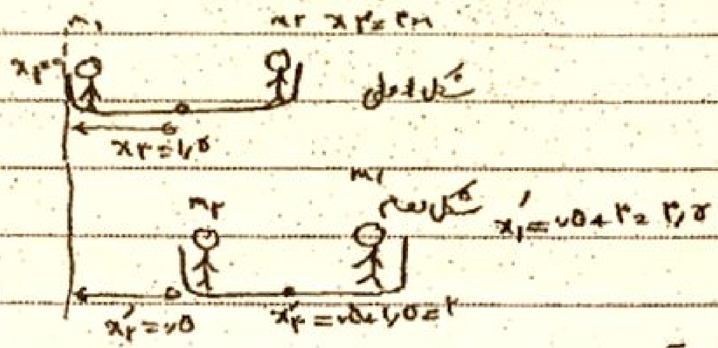
$$\Rightarrow x'_{cm} = x_{cm} + \cancel{v_{0cm} t} + \cancel{\frac{1}{2} a_{cm} t^2} \xrightarrow[\text{شرایط}]{\text{با توجه}} x_{cm} = x'_{cm}$$

$$\boxed{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots = m_1x'_1 + m_2x'_2 + \dots}$$ مهم

مثال: قایقی همگن به جرم $60\,kg$، دو نفر در دو انتهای قایق ایستاده اند. جرم یکی از آنها $50\,kg$ است و جرم دیگری را نمیدانیم چقدر است. طول قایق $3m$ است. این دو نفر جایشان را با یکدیگر عوض می کنند. اگر از اصطکاک بین آب و قایق صرف نظر کنیم و ابتدا قایق در حال سکون باشد. مطلوبست

می‌شود که قایق به اندازه نیم متر جابجا می‌شود جرم شخص دیگر را بدست آورید.

(فرض می‌کنیم $m_2 < m_1$)

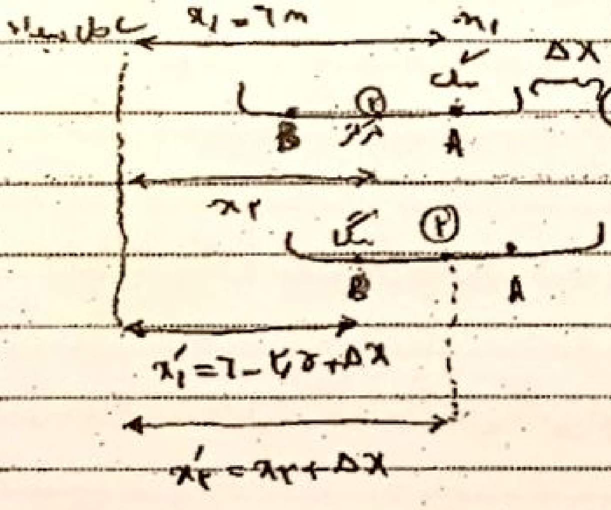


چون $F_{ext} = 0$, $V_{0cm} = 0$

$$m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 = m_1x_1' + m_2x_2' + m_3x_3' \Rightarrow$$

$$50\times 0 + m_2\times 3 + 60\times 1.5 = 50\times 3.5 + m_2\times 0.5 + 60\times 2 \Rightarrow m_2 = 82\,kg$$

مثال) قایقی به جرم $18\,kg$ روی سطح آب قرار دارد. سنگی به جرم $4.5\,kg$ در قایق است. فاصله سنگ تا ساحل $6m$ است. سنگ به اندازه 2.5 متر نسبت به قایق به طرف ساحل حرکت می‌کند. فاصله نهایی سنگ تا ساحل چقدر است.



(قایق به سمتی حرکت می‌کند که ابتدا سنگین‌تر بوده)

چون $F_{ex} = 0$, $V_{0cm} = 0$ پس

$$X_{cm} = X'_{cm} \Rightarrow m_1x_1 + m_2x_2 = m_1x_1' + m_2x_2'$$

$$4.5\times 6 + 18x_2 = 4.5(6 - 2.5 + \Delta x) + 18(x_2 + \Delta x)$$

$$\Delta x = 0.5\,m \quad , \quad x_1' = 6 - 2.5 + 0.5 = 4\,(m)$$

مثال) کره‌ای توخالی به جرم m و شعاع $2R$ روی سطحی بدون اصطکاک قرار دارد. کره دیگری به جرم

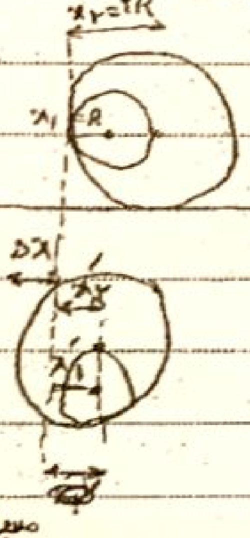
m، شعاع R داخل این کره طوری قرار دارد که مراکز آنها روی خط افقی هستند. کره کوچکتر

داخل کره بزرگتر سقوط می‌کند، طوری که مراکز آنها روی یک خط قائم قرار می‌گیرد. در این حالت

$(x'_1 = x_2)$

جابجایی کره بزرگتر چقدر است. نیروی خارجی وزن در امتداد محور قائم وجود دارد. بنابراین

$y_{cm} = y'_{cm}$ نیست ولی در جهت افقی نیروی خارجی صفر است پس $x_{cm} = x'_{cm}$



$$y_{cm} \neq y'_{cm}$$

$$x_{cm} = x'_{cm} \Rightarrow m_1 x_1 + m_2 x_2 = m_1 x'_1 + m_2 x'_2$$

$$(m_1 = m_2) \Rightarrow R + 2R = x'_2 + x'_1 \xrightarrow[\text{به دلیل}]{x'_1 = x'_2} x'_2 = \frac{3}{2}R$$

$$\Delta x = -\frac{R}{2}$$

واگنی به جرم m_1 و طول l روی ریل بدون اصطکاکی قرار دارد. n گلوله که جرم هر کدام m_2

است در یک سمت واگن قرار دارند. اگر یکی از گلوله‌ها به سمت دیگر واگن پرتاب شود و در

همان انتها قرار گیرد جابجایی واگن چقدر است. اگر تمام n گلوله به سمت دیگر پرتاب شود جابجایی

واگن چقدر است.

* تکانه: حاصلضرب جرم در سرعت را تکانه می‌نامیم. $\vec{P} = m\vec{v}$

- تکانه کمیتی است برداری هم جهت با سرعت و واحد آن در (SI) $\frac{kg \cdot m}{s}$ است و اگر یک

- سیستم ذرات داشته باشیم باید تکانه همه ذرات را بصورت برداری با یکدیگر جمع کنیم.

- (جمع برداری) $\vec{P} = \vec{P_1} + \vec{P_2} + \ldots$

* تکانه و قانون دوم نیوتن

- (دستگاه ذرات) $\frac{d}{dt}(P) = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} + v\frac{dm}{dt}$

- $a = \frac{d\vec{v}}{dt}$ و اگر جرم ثابت باشد $\frac{dm}{dt} = 0$ پس:

- $\frac{dp}{dt} = ma$ ، قانون دوم نیوتن $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{dp}{dt} = F_{ext}}$

- اگر نیروی خارجی صفر باشد با توجه به روابط زیر پایستگی تکانه برقرار است

$\frac{dp}{dt} = 0 \longrightarrow p =$ ثابت $\Longleftrightarrow$ تکانه اولیه = تکانه نهایی $P = P'$ ، $m_1v_1 + m_2v_2 + \ldots = m_1v'_1 + m_2v'_2 + \ldots$

- نکته: در رابطه بالا سرعت‌ها باید نسبت به ناظر ساکن حساب شود و اگر سرعت‌ها ی جسم

- نسبی داده شده بود برای تبدیل آن از رابطه برداری زیر استفاده می‌کنیم.

سرعت جسم نسبت به ناظر ساکن $\vec{V} = \vec{V_0} + \vec{U}$ ⟵ سرعت جسم نسبت به ناظر متحرک

سرعت سیستم متحرک

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} : |c| = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}$

نکته: هرگاه موضوع مسئله راجع به سرعت باشد برای حل مسئله مناسب تر است از رابطه ی

استفاده شود. ⟵ $P = P'$

مثال: بالونی به جرم m_1 در هوا معلق است شخصی به جرم m_2 نردبان طنابی بالن را در دست دارد. شخص تصمیم می گیرد با سرعت $u = 2\frac{m}{s}$ نسبت به بالن به طرف بالا حرکت کند. الف) بالن با چه سرعتی و در چه جهتی حرکت خواهد کرد؟ ب) اگر شخص از حرکت بایستد وضعیت بالن را بررسی کنید (ابتدا بالن و شخص متصل به آن که در هوا ساکن اند: $V_1 = V_2 = 0$ معلق دارای سرعت صفر می باشد)

سرعت بالن نسبت به زمین — سرعت شخص نسبت به زمین

$$P = P' \Rightarrow m_1V_1 + m_2V_2 = m_1V_1' + m_2V_2' \Rightarrow$$

$(V_2' = V_1' + u)$

$$0 + 0 = m_1V_1' + m_2(V_1' + u) \Rightarrow V_1' = \frac{-m_2 u}{m_1 + m_2} \quad (3)$$

بالن به طرف پایین حرکت می کند

ب) با توجه به رابطه بالا (3) شخص اگر از حرکت بایستد ($u=0$) بالن هم متوقف می شود.

مثال: قایقی همگن به جرم $400\,kg$ روی سطح یخی بدون اصطکاک با سرعت $4\frac{m}{s}$ در حرکت است. شخصی به جرم $80\,kg$ در انتهای قایق است. طول قایق $18\,m$ است. شخص تصمیم می گیرد با سرعت $2\frac{m}{s}$ در جهت حرکت قایق به انتهای دیگر آن برود. در این مدت جابجایی

قایق چقدر است؟

$L = ut \Rightarrow t = \frac{۱۸}{۲} = ۹\,s$

مدت زمان حرکت شخص در قایق $9s$ است.

$$P = P' \Rightarrow \overbrace{m_1 v_1}^{\text{شخص}} + \overbrace{m_2 v_2}^{\text{قایق}} = m_1 v_1' + m_2 v_2' \quad] \; ①$$

سرعت شخص نسبت به زمین = سرعت شخص نسبت به قایق + سرعت قایق

$v_1' = v_2' + u \quad] \; ②$ $\qquad v_1 = v_2 = ۴ \frac{m}{s}$

رابطه ① و ②

$۸۰ \times ۴ + ۴۰۰ \times ۴ = ۸۰ (v_2' + ۲) + ۴۰۰ \times v_2'$

$\Rightarrow v_2' = \frac{۱۱}{۳} \;,\; x = v_2' t = \frac{۱۱}{۳} \times ۹ = ۳۳$

نکته: هرگاه یک سیستم از چند ذره تشکیل شده باشد برای محاسبه سرعت مرکز جرم از رابطه

فرمول زیر استفاده می شود. (برداری است)
(بنابراین باید به جهت حرکت توجه شود)

$$\boxed{v_{cm} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots}}$$

*!! برخورد !!

ضربه: با توجه به قانون دوم نیوتن داریم $\left(F = \frac{dp}{dt} \right)$:

$$F = \frac{dp}{dt} \Rightarrow F \cdot dt = dp \Rightarrow \underbrace{\Delta p}_{\text{تغییر تکانه، ضربه، تکان}} = \int dp = \int F \, dt$$

$\Delta p = F \cdot \Delta t$

انواع برخورد:

۱) برخورد کشسان یا الاستیک: در این نوع برخورد انرژی جنبشی اولیه و نهایی سیستم با یکدیگر برابر است. $K = K'$ همچنین می‌توان از پایستگی تکانه هم استفاده کرد. ($P = P'$).

۲) برخورد غیرکشسان یا غیرالاستیک: در این نوع برخورد مقدار انرژی جنبشی تغییر می‌کند بنابراین $K \neq K'$ است. ولی پایستگی تکانه برقرار است $P = P'$

* نکته: اگر دو جسم پس از برخورد به هم متصل شوند و با سرعت یکسانی حرکت کنند آن را برخورد غیرکشسان کامل می‌نامیم.

پایستگی تکانه در برخورد: اگر دو ذره با جرم‌های m_1 و m_2 و با سرعت‌های v_1 و v_2 با یکدیگر برخورد کنند، تغییر تکانه هر کدام برابر است با:

$\Delta P_1 = F_1 \Delta t_1$ تغییر تکانه m_1

$\Delta P_2 = F_2 \Delta t_2$ تغییر تکانه m_2

با توجه به قانون سوم نیوتن $F_1 = -F_2$ و چون زمان برخورد برای هر دو یکسان است $\Delta t_1 = \Delta t_2$

پس نتیجه می‌گیریم $\overline{\Delta P_1} = -\overline{\Delta P_2} \Leftarrow P_1' - P_1 = (P_2' - P_2)$

$\Rightarrow P_1 + P_2 = P_1' + P_2'$

برخورد کشسان یک بعدی: فرض دو گلوله به جرم‌های m_1 و m_2 با سرعت‌های v_1 و v_2 در حالت

یک‌بعدی برخورد کشسان انجام می‌دهند. سرعت‌ها بعد از برخورد را برحسب سرعت‌ها قبل از

برخورد بدست آورید:

$$P = P' \Rightarrow m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2' \quad (1)$$

$$m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2 - v_2') \quad (2)$$

کشسان $K = K' \Rightarrow \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \Rightarrow$

$$m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2^2 - v_2'^2) \quad (3)$$

تقسیم (3) بر (2):

$$v_1 + v_1' = v_2' + v_2 \Rightarrow v_2' = v_1 + v_1' - v_2 \quad (4)$$

رابطه (4) در (1) قرار می‌دهیم:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \times v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \quad (5)$$

سرعت m_1 پس از برخورد

رابطه (5) در (4) قرار می‌دهیم:

سرعت m_2 پس از برخورد

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \times v_2 \quad (6)$$

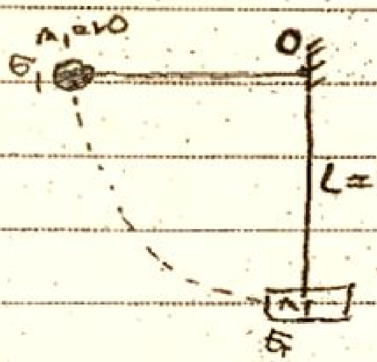
* نکته: در روابط (5) و (6) فقط در برخوردهای کشسان یک‌بعدی می‌توان استفاده کرد.

حالت‌ها خاص: الف) اگر $m_1 = m_2 \Longleftarrow$ $v_1' = v_2 \;,\; v_2' = v_1$

خیلی بزرگتر

ب) اگر $m_2 \gg m_1$ و $v_2 = 0 \Longleftarrow$ $v_1' = -v_1$ و $v_2' = 0$

مثال: گلوله‌ای به جرم ۰٫۵ کیلوگرم به انتهای نخ سبکی به طول ۱ متر متصل است. انتهای دیگر این نخ در نقطهٔ O مطابق شکل لولا شده است. گلوله را از حالت افقی رها می‌کنیم تا در پایین‌ترین نقطهٔ مسیر با یک قطعه 2.5^{kg} برخورد کشسان انجام دهد. سرعت هر جسم پس از برخورد چقدر است.



$m_2=2.5$

با استفاده از پایستگی انرژی سرعت گلوله را درست قبل از برخورد بدست می‌آوریم. $E_1=E_2 \Rightarrow K_1+U_1=K_2+U_2$

$$m_1 g l = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \Rightarrow v_1=\sqrt{2gh}=\sqrt{20}$$

روش اول: استفاده از فرمول: $v_2=0$

$$v_1' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} \times v_1 + \frac{2m_2}{m_1+m_2} v_2 = \frac{0.5-2.5}{0.5+2.5} \cdot \sqrt{20} + 0 = -\frac{2}{3}\sqrt{20}$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2} v_1 + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2} \times v_2 = \frac{2\times 0.5}{0.5+2.5} + 0 = \frac{\sqrt{20}}{3}$$

روش دوم: $P=P' \Rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$

$$\Rightarrow 0.5\times\sqrt{20} + 0 = 0.5 v_1' + 2.5 v_2' \Rightarrow v_1' = \sqrt{20} - 5 v_2'$$

چون کشسان است: $K=K' \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + 0 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \Rightarrow 0.5\times 20 = 0.5(\sqrt{20} - 5v_2')^2$

$+ 2.5 v_2'^2$

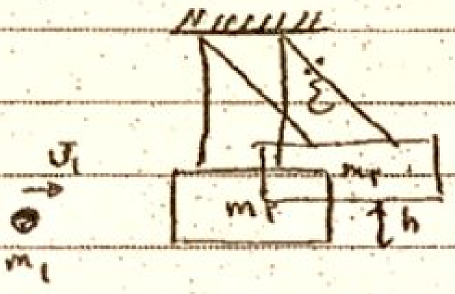
مثال: گلوله‌ای به جرم m_1 با سرعت نامعلوم $\vec{v}_1$ به طرف قطعه چوبی ساکن که (m_2) بوسیله دو

رشته نخ مطابق شکل آویزان شده است شلیک می‌شود. گلوله از قطعه چوب خارج نمی‌شود

(غیرکشسان کامل) سیستم به اندازه h در امتداد قائم جابجا می‌شود سرعت اولیه گلوله

چقدر است (این وسیله آونگ بالستیک معروف است)

پرتابه



$$P = P' \Rightarrow m_1 v_1 + 0 = (m_1+m_2)v' \Rightarrow v' = \frac{m_1 v_1}{m_1+m_2} \quad (1)$$

سرعت سیستم درست لحظه پس از برخورد

چون برخورد غیرکشسان کامل است انرژی جنبشی قبل از برخورد و بعد از برخورد برابر نیست ولی می‌توان

از پایستگی انرژی مکانیکی بعد از برخورد استفاده کرد.

$$E = E' \Rightarrow \frac{1}{2}(m_1+m_2)v'^2 = (m_1+m_2)gh \Rightarrow v' = \sqrt{2gh} \quad (2)$$

$$(2), (1) \Rightarrow \frac{m_1 v_1}{m_1+m_2} = \sqrt{2gh} \Rightarrow v_1 = \frac{(m_1+m_2)\sqrt{2gh}}{m_1}$$

مثال: دو جسم به جرم‌های $m_1 = 2kg$ ، $m_2 = 5kg$ با سرعت‌های $\vec{v}_1 = 10\frac{m}{s}$ ، $\vec{v}_2 = 3\frac{m}{s}$ روی سطحی

بدون اصطکاک در حرکت‌اند. فنری با ضریب سختی $K = 110\frac{N}{m}$ به جسم ۲ مطابق شکل متصل

است. ماکزیمم تراکم فنر چقدر است.

$$P = P'$$

غیرکشسان کامل

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1+m_2)v' \Rightarrow v' = \frac{20+15}{2+5} = 5\frac{m}{s}$$

سرعت سیستم در ماکزیمم تراکم v'

$$E = E' \Rightarrow \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v'^2 + \frac{1}{2}Kx^2$$

$$200 + 5\times 9 = (2+5)(5)^2 + 110x^2$$

مثال: گلوله‌ای به جرم ۵ گرم در راستای افقی به طرف قطعه چوبی به جرم ۲,۵kg که بر روی یک

سطح افقی ساکن است شلیک می‌شود. ضریب اصطکاک جنبشی میان تخته چوب و سطح افقی

۰/۲ است. گلوله داخل قطعه چوب متوقف می‌شود و چوب بر اثر ضربه به اندازه ۱/۸ متر حرکت

می‌کند. الف) تندی چوب بلافاصله پس از متوقف شدن گلوله در آن چقدر است. ب) گلوله با چه

تندی شلیک می‌شود. $E_2 - E_1 = W_f \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}(m+m')v'^2 = -\mu (m+m') g x$

سرعت اولیه گلوله

$v' = 2/7 \frac{m}{s}$ (الف / ب) $P = P' \Rightarrow m v = (m+m') v' \Rightarrow v = 1352 \frac{m}{s}$

* برخورد دوبعدی:

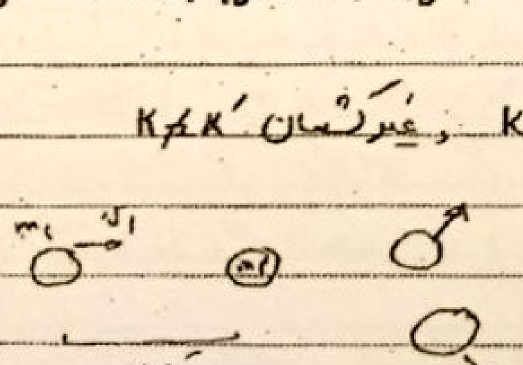
در برخورد دوبعدی باید پایستگی تکانه را در جهت محور xها و yها جداگانه نوشت. اگر برخورد

کشسان باشد $K = K'$ و اگر غیرکشسان باشد $K \neq K'$ است.

$P_x = P'_x \Rightarrow m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x}$

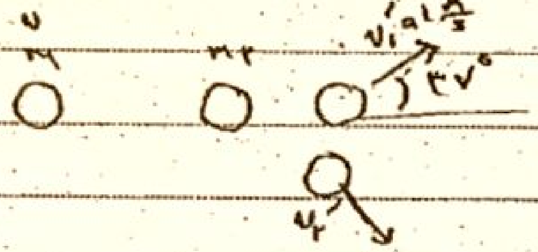
$P_y = P'_y \Rightarrow m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = m_1 v'_{1y} + m_2 v'_{2y}$

اگر کشسان باشد $K = K'$ ، غیرکشسان $K \neq K'$



قبل از برخورد

مثال: توپی با سرعت $3\,\frac{m}{s}$ به توپ مشابهی که ساکن است برخورد می‌کند. بعد از برخورد یکی از توپ‌ها با سرعت $1\,\frac{m}{s}$ با زاویه 37° نسبت به امتداد اولیه حرکت می‌کند. توپ دیگر با چه سرعتی و در چه جهتی حرکت خواهد کرد؟ (با اطلاعات داده شده آیا برخورد کشسان است.)



$m_1 = m_2$

$$P_x = P_x' \Rightarrow m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v_1' \cos 37^\circ + m_2 v_{2x}' \xrightarrow{\text{با ساده کردن m ها}}$$

$$\Rightarrow 3 + 0 = 1 \times 0.8 + v_{2x}' \Rightarrow v_{2x}' = 2.2$$

$$P_y = P_y' \Rightarrow m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = m_1 v_{1y}' \sin 37^\circ + m_2 v_{2y}'$$

$$\Rightarrow 0 + 0 = 1 \times 0.6 + v_{2y}' \Rightarrow v_{2y}' = -0.6$$

$$v_2' = \sqrt{v_{2x}'^2 + v_{2y}'^2} = \sqrt{5.2}\,\frac{m}{s}, \quad \theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{|v_{2y}'|}{|v_{2x}'|}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{0.6}{2.2}\right) \simeq 15^\circ$$

$$K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{m}{2}(3^2) + 0 = 4.5\,m$$

$$K' = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{m}{2}(1^2 + 5.2) = 3.1\,m$$

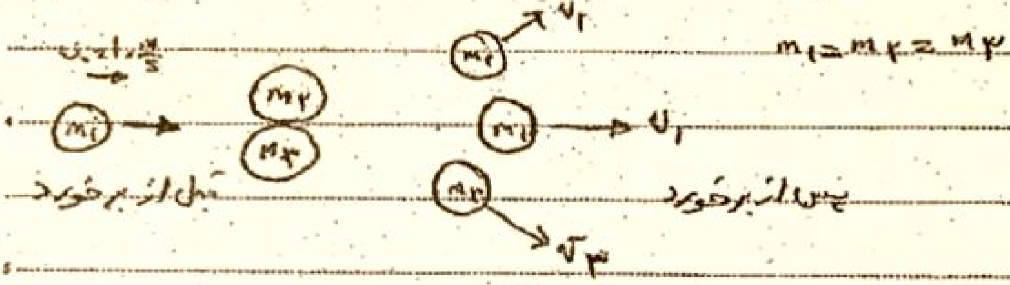
* چون $K \neq K'$ بنابراین برخورد غیرکشسان است

جرم

مثال : دو توپ مشابه در کنار هم در حالت سکون قرار داده‌اند. توپ دیگری با همان اندازه،

و توپ دیگر با سرعت $v_0 = 10 \frac{m}{s}$ طوری به این دو توپ ساکن برخورد می‌کند که v_0 عمود بر

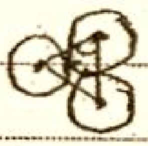
خط واصل مراکز دو توپ باشد. اگر برخورد کشسان فرض شود، سرعت هر توپ پس از



برخورد چقدر است.

در لحظه برخورد اگر مراکز توپ‌ها را به هم وصل کنیم یک مثلث متساوی الاضلاع ایجاد می‌شود

(زاویه مثلث ۶۰)



بنابراین می‌توان نتیجه گرفت راستای توپ m_1 تغییر نمی‌کند و توپ

m_2 و m_3 هر کدام با زاویه ۳۰ نسبت به محور xها حرکت می‌کنند.

$$P_y = P'_y \Rightarrow 0 = \overset{\text{صفر}}{\cancel{m_1 v_1}} + m_2 v_2 \sin 30 - m_3 v_3 \sin 30 \Rightarrow \boxed{v_2 = v_3} \quad (1)$$

$$P_x = P'_x \Rightarrow m_1 v_0 + 0 + 0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \cos 30 + v_3 \cos 30 \times m_3 =$$

$$\boxed{10 = v_1 + v_2 \frac{\sqrt{3}}{2} + v_3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} \; (2) \Rightarrow (1),(2) \Rightarrow 10 = v_1 + \sqrt{3}\, v_2 \Rightarrow$$

$$\boxed{v_1 = 10 - \sqrt{3}\, v_2} \quad (3) \qquad K = K' \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} v_3^2 m_3$$

$$\Rightarrow 100 = (10 - \sqrt{3}\, v_2)^2 + 2 v_2^2 \Rightarrow v_2 = 4\sqrt{3}$$

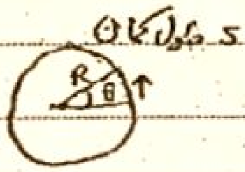
$$\Rightarrow v_1 = 10 - \sqrt{3}\,(4\sqrt{3}) = -2 \frac{m}{s}$$

یعنی m_1 به سمت عقب برمی‌گردد

«سینماتیک دورانی»

جسم صلب: جسمی است که فاصله نقاط آن نسبت به یکدیگر بر اثر اعمال نیروها، گشتاور نیروها همواره ثابت باشد.

فرض: ذره‌ای بر روی دایره‌ای به شعاع R دوران می‌کند. اگر زاویه θ را در مدت زمان Δt طی کند. در این صورت سرعت زاویه‌ای آن برابر است با:



سرعت زاویه‌ای ω = جابجایی زاویه‌ای / زمان $\Rightarrow$ (سرعت متوسط) $\bar{\omega} = \frac{\theta - \theta_0}{t - t_0} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$

واحد سرعت زاویه‌ای $\frac{rad}{s}$ (رادیان)، $\frac{rev}{s}$ (دور)، واحد θ رادیان rad، دور rev، درجه deg

$1\ rev = 2\pi\ rad = 360\ deg$ (زاویه بُعد ندارد)

طول کمان = (شعاع) (زاویه)

متر   متر   رادیان

لحظه‌ای $\omega = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$

شتاب زاویه‌ای: تغییرات سرعت زاویه‌ای به زمان را شتاب زاویه‌ای گویند.

شتاب زاویه‌ای متوسط: $\alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t - t_0} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$

لحظه‌ای $\alpha = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$

Date

واحد شتاب زاویه ای: $\frac{rad}{s^2}$ (رادیان) ، $\frac{rev}{s^2}$ (دور)

معادلات سینماتیک دورانی با شتاب زاویه ای ثابت: (ثابت α)

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \alpha\, dt \Rightarrow \omega - \omega_0 = \alpha t \Rightarrow \boxed{\omega = \omega_0 + \alpha t} \quad ①$$

مشابه: $v = v_0 + at$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \int d\theta = \int \omega\, dt \quad ② \xrightarrow{\text{از } ①} \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t (\omega_0 + \alpha t)\, dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2} \xrightarrow{\text{مشابه}} x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$\bar{\omega} = \frac{\theta - \theta_0}{t - 0} \Rightarrow \theta = \theta_0 + \bar{\omega} t \quad ③ \quad , \quad \bar{\omega} = \frac{\omega + \omega_0}{2} \quad ④$$

③ و ④ ادغام، $\theta = \theta_0 + \left(\frac{\omega + \omega_0}{2}\right) t$ ⑤

$$\frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = t \quad ⑥ \quad , \quad \boxed{2\alpha(\theta - \theta_0) = \omega^2 - \omega_0^2}$$

مثال: صفحه ی دایره ای از حالت سکون با شتاب زاویه ای ثابت شروع به دوران می کند. در یک لحظه معین، سرعت زاویه ای آن برابر است با: $\omega_0 = 0$ ، $\omega_1 = 10 \frac{rev}{s}$

پس از ۶۰ دور کامل سرعت زاویه ای آن می شود: $\omega_2 = 15 \frac{rev}{s}$

الف) شتاب زاویه ای آن چقدر است. ب) مدت زمان ۶۰ دور چقدر است. ج) مدت زمانی که طول کشیده است تا سرعت زاویه ای از حالت سکون به ۱۰ دور بر ثانیه برسد چقدر است.

مکانیک و گرما   موضوع: حرکت زاویه‌ای دورانی   (شرح مسائل امتحانی)

انتشارات آذربادگان — خیابان انقلاب مابین منیری جاوید و اردیبهشت جنب شهادت
ایرانشهر، ساختمان ۱۴۵۴ طبقه سوم — ۶۶۴۹۶۱۲۳

⊛ مسائل: ۲، ۳، ۵، ۷، ۹، ۱۲، ۱۷، ۲۴ فصل پنجم کتاب مکانیک و گرما
فصل نهم ۲ سوال در امتحان می‌آید

از حالت سکون تا وقتی سرعت زاویه‌ای آن به $10\,\frac{rev}{s}$ برسد چند دور چرخیده است.

الف) $\omega_2^2-\omega_1^2=2\alpha\theta \Rightarrow \alpha=\frac{15^2-10^2}{2\times 60}=\frac{125}{120}\simeq 1.04\,\frac{rev}{s^2}$

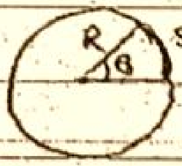
ب) $\omega_2=\omega_1+\alpha t \rightarrow 15=10+1.04t \rightarrow t=4.8\,(s)$

ج) $\omega_1=\omega_0+\alpha t_0 \rightarrow 10=0+1.04t_0 \rightarrow t_0=9.6\,(s)$

د) $\omega_1^2-\omega_0^2=2\alpha\theta_0 \rightarrow 10^2-0=2(1.04)\theta_0 \Rightarrow \theta_0=48\,rev$

در رابطه بین سینماتیک خطی و دایره‌ای ... شود

خطی	دایره‌ای
x	θ
v	ω
a	α



$s = R.\theta$ طول کمان

رادیان

$\frac{rad}{s}$

اندازه سرعت خطی: $v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(R\theta) = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$

شتاب مماسی: $a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(R\omega)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha$

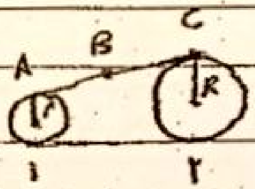
$\frac{\text{رادیان}}{s^2}$

شتاب شعاعی مرکزگرا $a_r = \frac{v^2}{R}$ یا $R\omega^2$

شتاب کل

$a_{\text{کل}} = \sqrt{a_r^2 + a_t^2}$

دو عدد چرخ به شعاع‌های ۱۰ سانتی‌متر و ۲۵ سانتی‌متر به وسیله تسمه‌ای مطابق شکل به هم متصل‌اند. سیستم از حالت سکون شروع به دوران می‌کند. اگر شتاب زاویه‌ای چرخ کوچکتر $1.5\ \frac{rad}{s^2}$ باشد مدت زمان لازم برای اینکه سرعت زاویه‌ای چرخ بزرگتر $۱۰۰\ \frac{\text{دور}}{\text{دقیقه}}$ برسد چقدر است.



$v_A = v_B = v_C \Rightarrow r\omega_1 = R\omega_2 \Rightarrow \omega_1 = \frac{\omega_2 R}{r}$

$= \frac{۱۰۰ \times ۲۵}{۱۰} = ۲۵۰\ \frac{rev}{min} * \frac{۲\pi}{۶۰} \simeq ۲۵\ \frac{rad}{s}$

$\omega_1 = \omega_0 + \alpha_1 t \Rightarrow ۲۵ = ۰ + ۱٫۵ t \Rightarrow t = ۱۶٫۷ (s)$

مثال: چرخی با شتاب زاویه‌ای $\alpha = 4at^3 - 3bt^2$ می‌چرخد، اگر سرعت زاویه‌ای اولیه این چرخ

(a و b ثابت)

ω_0 باشد. مطلوب است: الف) سرعت زاویه‌ای چرخ ب) زاویه طی شده برحسب زمان

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \alpha \, dt \Rightarrow \omega - \omega_0 = \int_0^t (4at^3 - 3bt^2)\, dt$$

$$\Rightarrow \omega = \omega_0 + at^4 + bt^3 \Big] \; (1)$$

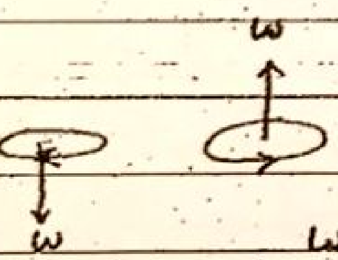
$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \int d\theta = \int \omega \, dt \Big] \; (2)$$

$$\text{رابطه ۱ و ۲} \Rightarrow \int_0^{\theta} d\theta = \int_0^t (\omega_0 + at^4 + bt^3)\, dt \Rightarrow \theta = \omega_0 t + \frac{at^5}{5} + \frac{bt^4}{4}$$

ω و α کمیت‌ها برداری می‌باشند. برای تعیین جهت ω اگر چهار انگشت دست راست را در

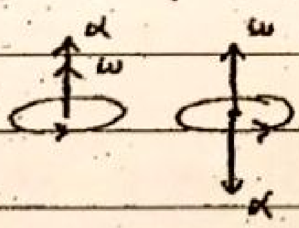
جهت چرخش جسم قرار دهیم، در این صورت انگشت شست دست راست که عمود بر صفحه

چرخش است جهت ω را نشان می‌دهد.



اگر حرکت تندشونده باشد α و ω هم جهت و کندشونده α و ω

خلاف جهت هم هستند.



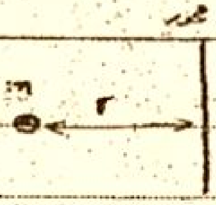
* انرژی جنبشی دورانی و لختی دورانی *

هرگاه یک جرم نقطه‌ای به فاصله r از یک محور داشته باشیم در این صورت لختی دورانی آن برابر

مثلا:

$$I = mr^2$$

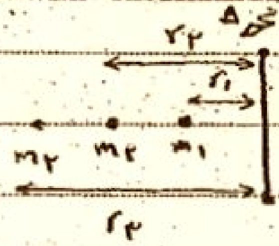
$kg \quad m^2$



و اگر مجموعه ای از جرم ها در فاصله های r_1، r_2، r_3 مانند شکل وجود داشته باشد در این صورت

گشتاور دورانی مجموعه برابر است با:

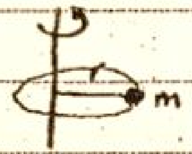
$$I_\Delta = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots +$$



انرژی جنبشی دورانی: اگر ذره ای به جرم m بر روی دایره ای به شعاع r با سرعت زاویه ای ω

دوران کند در این صورت سرعت خطی آن برابر است با:

$$v = r\omega$$



و انرژی جنبشی آن برابر است با:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

قضیه محورهای موازی: اگر گشتاور دورانی نسبت به محور مرکز جرم را داشته باشیم و بخواهیم گشتاور دورانی

را نسبت به یک محور دلخواه دیگر که موازی با محور مرکز جرم است بدست آوریم از رابطه زیر استفاده

می کنیم:

$$I_\Delta = I_{cm} + \overset{\text{جرم کل}}{m} h^2$$

I_Δ: گشتاور دورانی نسبت به محور Δ که موازی با محور مرکز جرم است

I_{cm}: گشتاور دورانی نسبت به محور مرکز جرم

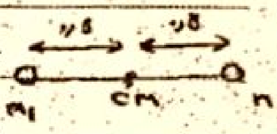
h: فاصله محور مرکز جرم تا محور جدید

مثال: دو گلوله که جرم هر کدام 5kg است به وسیله میله ای سبک به طول 1 متر به هم متصل اند

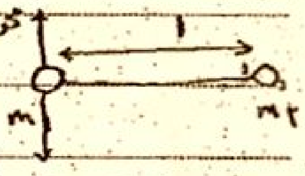
گشتاور دورانی را نسبت به مرکز جرم و همچنین نسبت به یک انتهای میله بدست آورید.

(مفهوم (I): مقاومت در مقابل تغییرات سرعت زاویه ای)

$$I_{cm} = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = ۵(۰/۵)^2 + ۵(۰/۵)^2 = ۲/۵ \ kg \cdot m^2$$



$$I_{\text{انتها}} = m_1 (0)^2 + m_2 (1)^2 = 0 + ۵ \times (1)^2 = ۵ \ kg \cdot m^2$$

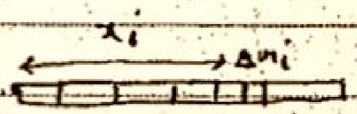


۵. گشتاور دورانی یک توزیع جرم غیر نقطه ای (پیوسته):

هرگاه یک توزیع جرم پیوسته داشته باشیم آن را به المان های کوچک Δm تقسیم می کنیم و

مثل جرم های نقطه ای گشتاور دورانی آن را به صورت زیر بدست می آوریم

$$I = \Delta m_1 \cdot x_1^2 + \Delta m_2 \cdot x_2^2 + \dots = \sum \Delta m_i \cdot x_i^2$$

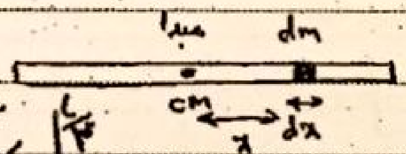


$$\Rightarrow I = \lim_{\Delta m \to 0} \sum \Delta m_i \cdot x_i^2 = \int x^2 \cdot dm \ \text{یا} \ I = \int y^2 \cdot dm \ \text{یا} \int r^2 \cdot dm = I$$

مثال: میله ای همگن به جرم m و طول L، گشتاور دورانی آن را الف) نسبت به مرکز جرم آن

ب) نسبت به انتهای میله بدست آورید.

$$\frac{m}{L} = \frac{dm}{dx} \rightarrow dm = \frac{m}{L} dx$$

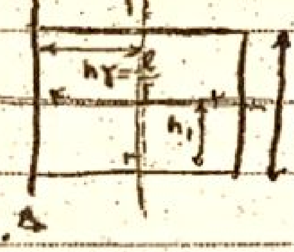


$$I_{cm} = \int x^2 dm = \int x^2 \cdot \frac{m}{L} dx = \frac{m}{L} \frac{x^3}{3} \Bigg|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{1}{12} m L^2$$

ب) در $I_{\text{انتها}} = I_{cm} + m h^2 = \frac{1}{12} m L^2 + m \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} m L^2$

مثال: چهار عدد میله که طول هر کدام l و جرم هر کدام m می‌باشد مربعی را تشکیل می‌دهد. لختی دورانی

نسبت به محور Δ که در شکل نشان داده شده است بدست آورید (فرض کنید $\left(\frac{1}{12}ml^2 = I_{cm}^{\text{میله}}\right)$

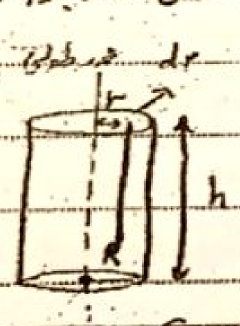


$$I_{1\Delta}=I_{3\Delta}=I_{cm}+mh_1^2=\frac{1}{12}ml^2+m\left(\frac{l}{2}\right)^2=\frac{1}{3}ml^2$$

$$I_{4\Delta}=0 \quad , \quad I_{2\Delta}=I_{cm}+mh_1^2=0+m(l)^2=ml^2$$

$$I_{\text{کل}}=I_1+I_2+I_3+I_4=\frac{5}{3}ml^2$$

مثال: استوانهٔ همگن و توپر به جرم m و شعاع R لختی دورانی را نسبت به محور طولی مرکز جرم بدست آورید.



جرم = چگالی × حجم

آوریم:

$$m=\rho V \quad , \quad dm=\rho dV \quad (1) \quad , \quad \rho=\frac{m}{\pi R^2 h} \quad (2)$$

$$V=\pi r^2 h \Rightarrow dV=2\pi h r.dr \quad (3)$$

(h ثابت است و در اینجا یک استوانه با ضخامت بسیار کم است که ضخامت آن dr است)

رابطه (2) و (3) به (1) قرار می‌دهیم:

$$dm=\frac{2mr}{R^2}.dr \quad (4)$$

$$I_{cm}=\int r^2 dm \quad (5)$$

رابطه (4) به (5) $\Leftarrow$

$$I_{cm}=\frac{2m}{R^2}\int r^3 dr=\frac{2m}{R^2}\cdot\frac{r^4}{4}\Big|_0^R$$

$$\boxed{I_{cm}=\frac{1}{2}mR^2}$$

• با استفاده از قضیه محورهای موازی لختی دورانی استوانه را نسبت به خط مماس بر استوانه (Δ)

$\Delta \quad h=R$ فاصله دو محور

بدست آورید. $I_{محور} = I_{cm} + mh^2 = \frac{1}{2}mR^2 + m(R)^2 = \frac{3}{2}mR^2$

• مثال: مربع، اگر مربع با سرعت زاویه‌ای ω حول محور Δ بچرخد انرژی جنبشی آن چقدر است

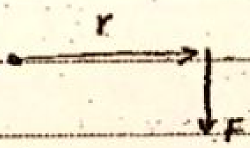
$$K = \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 = \frac{1}{2} \times \frac{8}{3} m l^2 \omega^2$$

• گشتاور نیرو:

گشتاور عاملی است که تمایل به ایجاد حرکت دورانی دارد. کمیتی است برداری و با رابطه زیر بیان می‌شود.

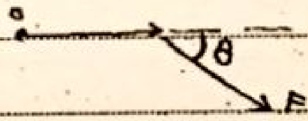
• واحد آن (نیوتن × متر) است. گشتاور نیرو = (بازوی گشتاور) × (نیرو)
l
فاصله عمود

تاو
$\tau = r \cdot F$



$\tau_o = r \sin\theta \cdot F$ (اگر r و F عمود نباشند)

نسبت به o



$\tau_o = r \times F$ شکل برداری

• جهت گشتاور با قاعده دست راست تعیین می‌شود. اگر چهار انگشت دست راست را طوری در جهت

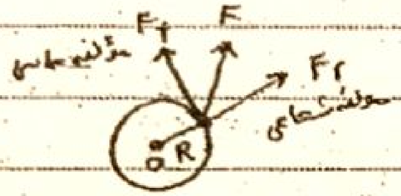
بردار ۲ قرار دهیم که بردار F از کف دست خارج شود در این صورت انگشت شست جهت

راست که عمود بر آن دو است جهت گشتاور را نشان می دهد.

* گشتاور و قانون دوم نیوتن :

فرض کنید ذره ای بر روی دایره ای به شعاع R قرار دارد و به آن نیروی F مطابق شکل وارد می شود نیروی

F را به دو مؤلفه شعاعی و مماسی تجزیه می کنیم. مؤلفه شعاعی F_r گشتاوری ایجاد نمی کند ولی مؤلفه



مماسی گشتاور ایجاد می کند که گشتاور آن برابر است با:

$$\tau = RF_t = Rma_t = RmR\alpha = mR^2\alpha = I\alpha$$

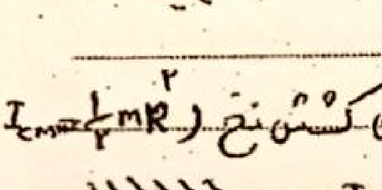
قانون دوم نیوتن: $\sum \tau_o = I_o\alpha$

توجه داشته باشید که در رابطه بالا τ و I نسبت به یک محور حساب شوند.

مثال: قرقره ای به جرم m و شعاع R و دور آن نخ پیچیده شده است مطابق شکل. انتهای نخ

وزنه ای به جرم m' متصل است. با باز شدن نخ از دور قرقره جسم m' به طرف پایین حرکت

می کند. مطلوب است شتاب جرم m' و شتاب زاویه ای قرقره و نیروی کشش نخ. ($I_{cm}=\frac{1}{2}mR^2$)



$$\sum F = m'a \Rightarrow m'g - T = m'a \quad (1)$$

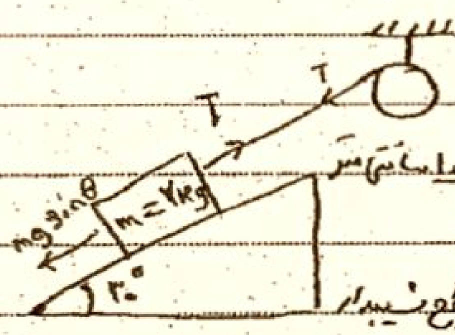
قرقره: $\sum \tau_{cm} = I_{cm}\alpha \Rightarrow TR = \frac{1}{2}mR^2\alpha \Rightarrow T = \frac{mR\alpha}{2}$

$T = \frac{ma}{2}$] ②

رابطه ② در ① : (شتاب m' و شتاب مماسی لبه قرقره با هم برابرند) ← $m'g - \frac{ma}{2} = m'a$

$a = \frac{2m'g}{m+2m'}$] ③ $\qquad \alpha = \frac{a}{R} = \frac{2m'g}{m+2m'}$] ④

رابطه ③ در ② : $T = \frac{mm'g}{m+2m'}$



مثال: جسمی به جرم 2kg روی سطح شیب‌داری بدون اصطکاک با زاویه 30° قرار دارد این جسم به وسیله نخی به قرقره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر مطابق شکل متصل است جسم با شتاب $2\frac{m}{s^2}$ به طرف پایین سطح شیب‌دار حرکت می‌کند لختی دورانی قرقره چقدر است.

جسم: $mg\sin 30^\circ - T = ma \rightarrow 2\times10\times\frac{1}{2} - T = 2\times2 \Rightarrow T = 6\ (N)$

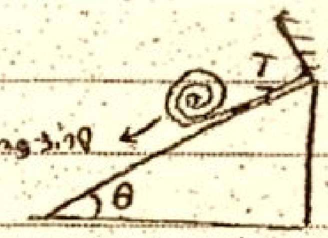
قرقره: $\sum \tau = I_{cm}\alpha \rightarrow TR = I\frac{a}{R} \rightarrow 6\times0/1 = I\times\frac{2}{0/1} \Rightarrow$

$I = 0/03\ kg.m^2$

مثال: نواری به طول L م دور خودش می‌پیچیم تا به شکل استوانه درآوریم یک انتهای آن را در بالای سطح شیب‌دار می‌بندیم ثابت کنید مدت زمانی که طول می‌کشد تا این نوار باز شود برابر است

استوانه

$I_{cm} = \frac{1}{2} m R^2$



$T = \sqrt{\frac{3l}{g \sin\theta}} : t$

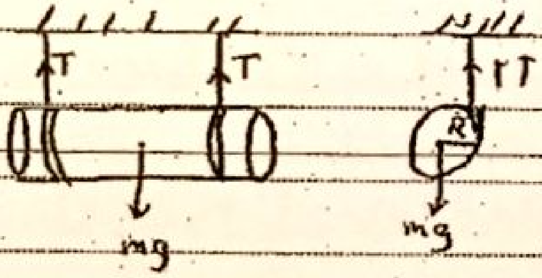
$\sum F = ma \Rightarrow mg\sin\theta - T = ma$] ①

$\sum \tau_{cm} = I_{cm}\alpha \Rightarrow TR = \frac{1}{2} m R^2 \alpha \rightarrow T = \frac{mR\alpha}{2} \Rightarrow T = m\frac{a}{2}$ ②

$mg\sin\theta - \frac{ma}{2} = ma \ , \ a = \frac{2}{3} g\sin\theta \longleftarrow$ رابطه ② در ①

$l = \frac{1}{2} a t^2 \longrightarrow t = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{2l}{\frac{2}{3} g\sin\theta}} = \sqrt{\frac{3l}{g\sin\theta}}$

مثال: استوانه‌ای به جرم m و شعاع R در دو انتهای آن مطابق شکل نخ کشیده‌ایم انتهای دیگر نخ ها را به سقف اتاق متصل کرده‌ایم. با باز شدن نخ از دور استوانه، استوانه به طرف پایین حرکت می‌کند. شتاب مرکز جرم استوانه و نیروی کشش هر نخ را بدست آورید.



$\sum \tau_{cm} = I_{cm}\alpha \rightarrow 2TR = \frac{1}{2} m R^2 \alpha$

$\Rightarrow T = \frac{mR\alpha}{4} \rightarrow T = \frac{ma}{4}$ ①

$\sum F = ma \rightarrow mg - 2T = ma$] ②

$mg - \frac{2ma}{4} = ma \Rightarrow a = \frac{2}{3} g$] ③ : رابطه ① در ②

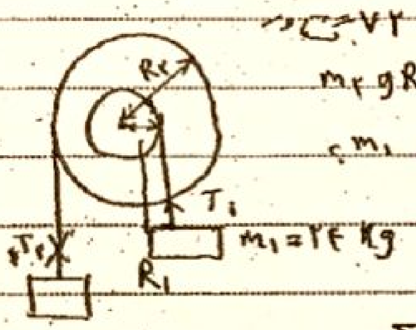
$T = \frac{mg}{6}$: رابطه ③ در ①

مثال: قرقره‌ای که دو شیار به شعاع‌های $R_1 = 0/2\,m$ و $R_2 = 0/4\,m$ مطابق شکل حول محور افقی

می‌تواند بچرخد. دور شیارها قرقره نخ پیچیده شده است. در انتهای هر کدام از نخ‌ها دو جسم

به جرم‌های $m_1 = 24\,kg$ و $m_2 = 18\,kg$ متصل است. گشتاور لختی دورانی قرقره نسبت به مرکز چرخش

$I = 30\,kg\,m^2$ است. مطلوب است الف) شتاب زاویه‌ای قرقره ب) شتاب هر جسم ج) نیروی



72   48

کشش هر نخ. با توجه به اینکه در لحظه شروع حرکت $m_2 g R_2 > m_1 g R_1$

بنابراین قرقره در جهت عکس عقربه‌های ساعت می‌چرخد. بنابراین m_1 به

طرف بالا و m_2 طرف پایین حرکت می‌کند.

$$\sum F = m_1 a_1 \longrightarrow T_1 - m_1 g = m_1 a_1 \longrightarrow T_1 = m_1(g + R_1\alpha) \quad] \ (1)$$

$$\sum F = m_2 a_2 \longrightarrow m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \longrightarrow T_2 = m_2(g - R_2\alpha) \quad] \ (2)$$

قرقره: $\sum \tau_{cm} = I_{cm} \cdot \alpha \longrightarrow T_2 R_2 - T_1 R_1 = I\alpha \quad] \ (3)$

از روابط (1)، (2) و (3) $\Leftarrow$ $m_2(g - R_2\alpha)R_2 - m_1(g + R_1\alpha)R_1 = 30\alpha$

$\alpha = 0/7 \ \frac{rad}{s}$

ب) $a_2 = R_2\alpha = 0/4 \times 0/7 = 0/28 \ \frac{m}{s}$ $a_1 = R_1\alpha = 0/2 \times 0/7 =$

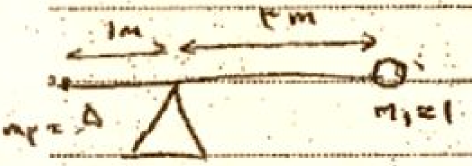
ج) مقدار α در روابط (1) و (2) $T_1 = ?$, $T_2 = ?$

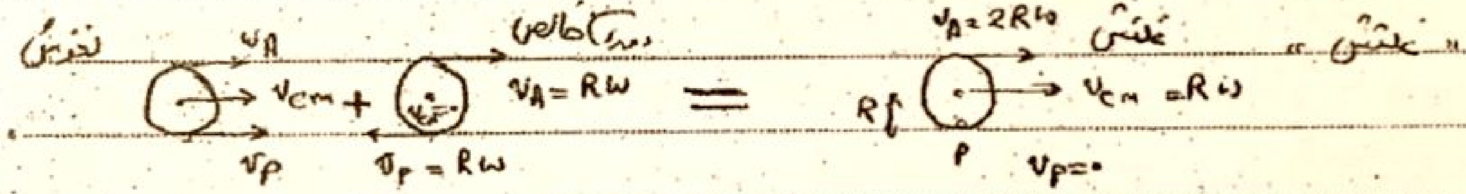
Date

مثال: دو جسم به جرم $m_1=1kg$ و $m_2=5kg$ به وسیله میله ای سبک مطابق شکل به هم متصل اند.

میله را به حالت افقی روی تکیه گاهی در نقطه o قرار می دهیم (مطابق شکل) در لحظه شروع

حرکت شتاب هر جسم چقدر است.





در غلتش کامل نقطه تماس جسم با سطح باید در حال سکون لحظه ای باشد که این سرعت غلتش کامل است. پس $v_p=0$ و سرعت مرکز جرم برابر $R\omega$ و سرعت بالاترین نقطه $2R\omega$ می باشد. طبق قضیه محورهای موازی داریم:

$$I_p = I_{cm} + mR^2$$

انرژی جنبشی برابر است با:

$$K = \frac{1}{2} I_p \omega^2 = \frac{1}{2}(I_{cm} + mR^2)\omega^2$$

$$K = \underbrace{\frac{1}{2} I_{cm}\omega^2}_{\text{دورانی}} + \underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{\text{انتقالی}}$$

در دورانی خالص سرعت مرکز جرم صفر است. و سرعت نقاط دیگر برابر $R\omega$ است. انرژی جنبشی برابر است با:

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2$$

در انتقالی خالص سرعت تمام نقاط جسم با یکدیگر برابر است و انرژی جنبشی برابر است با:

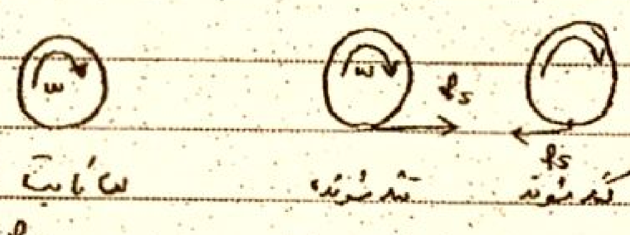
$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

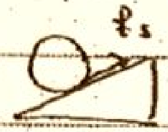
« اصطکاک غلتشی »

چون در غلتش نقطه تماس جسم با سطح در حال سکون لحظه ای است بنابراین نیروی اصطکاک ایستایی

PAPCO

... می باشد.





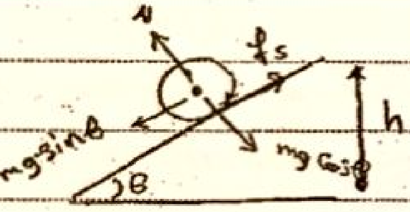
. اصطکاک در سطح شیبدار همواره در جهت بالای سطح شیبدار می باشد.

مثال: کره ای توپر به جرم m، شعاع R، از حالت سکون از بالای سطح شیبداری به ارتفاع h و

زاویه θ قرار می دهیم تا با غلتیدن به طرف پایین حرکت کند. مطلوبست شتاب مرکز جرم هنگام

پایین آمدن، سرعت مرکز جرم در پایین سطح شیبدار؟ کره توپر $I_{cm} = \frac{2}{5}mR^2$

روش اول دینامیکی:



$\sum F = ma \to mg\sin\theta - f_s = ma$] (1)

$\sin\theta = \frac{h}{x}$

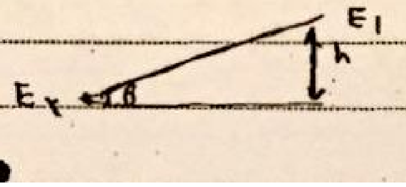
$\sum \tau_{cm} = I_{cm}\cdot\alpha \to f_s \cdot R = \frac{2}{5}mR^2\cdot\alpha$

$\to f_s = \frac{2}{5}mR\alpha = \frac{2}{5}ma$] (2)

روابط (1) و (2): $mg\sin\theta - \frac{2}{5}ma = ma \to a = \frac{5}{7}g\sin\theta$

$v_{cm}^2 - v_{0cm}^2 = 2ax \to v_{cm}^2 - 0 = 2\times\frac{5}{7}g\sin\theta\cdot\frac{h}{\sin\theta} = \frac{10}{7}gh \Rightarrow v_{cm} = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$

راه حل دوم انرژی:



PAPCO

$E_1 = E_2 \to K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \to 0 + mgh = \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} mv^2 + 0$ (۱)

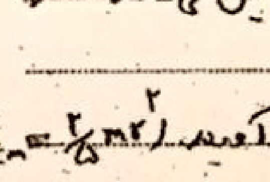
$I = \frac{2}{5} mR^2 , \omega = \frac{v}{R}$] (۲)   اصطکاک ایستایی انرژی را تلف نمی‌کند ($E_1 = E_2$)

$v = \sqrt{\frac{10}{7} gh}$ از روابط (۱) و (۲)

$v^2 - v_0^2 = 2ax \to a = \frac{v^2}{2x} \to a = \frac{\frac{10}{7} gh}{\frac{2h}{\sin\theta}} = \frac{5}{7} g \sin\theta$

مثال: مسئله قبل را برای یک استوانه توپر که جرم و شعاع آن با جرم و شعاع کره توپر مسئله قبل برابر است حل کنید ($I_{cm} = \frac{1}{2} mR^2$ استوانه) و با مقایسه جواب‌ها توضیح دهید که کدام یک زودتر به پایین سطح شیبدار می‌رسند.

مثال: گلوله‌ای به جرم m و شعاع r از بالای مسیری از حالت سکون به طرف پایین می‌غلتد. اگر در بالاترین نقطه مسیر دایره‌ای به شعاع R از سطح جدا شود، ارتفاع h را بدست آورید. ($I_{cm} = \frac{2}{5} mr^2$)
(فرض کنید $r \ll R$)



$\sum F = \frac{mv^2}{R} \to N + mg = \frac{mv^2}{R} \to v^2 = Rg$ (۱)

شرط جدا شدن $N = 0$

$E_1 = E_2 \longrightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \Rightarrow 0 + mgh = \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2} m v^2 + mg2R$]

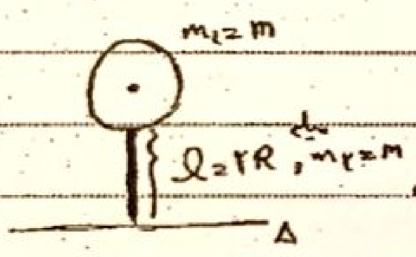
$I = \frac{2}{5} m r^2 \Rightarrow \omega = \frac{v}{R}$] (۳)

رابطه (۳) در (۱) در (۲) $h =$ بدست می‌آید

مثال: حلقه‌ای به جرم m و شعاع R میله‌ای به طول $l = 2R$ و به جرم m متصل است.

میله را از محور Δ آویزان می‌کنیم و از حالت سکون رها می‌کنیم اگر به اندازه 180° بچرخد در این

حالت سرعت زاویه‌ای چقدر است. $\left(\overset{\text{حلقه}}{I_{cm}} = \frac{1}{2} m R^2 \;،\; \overset{\text{میله}}{I_{cm}} = \frac{1}{12} m l^2 \right)$



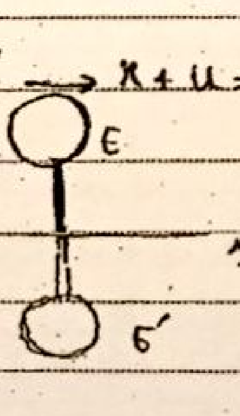
$y_{cm} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{m(3R) + mR}{m + m} = 2R$] (۱)

حلقه نسبت به محور Δ $\quad I_\Delta = I_{cm} + m h_1^2 = \frac{1}{2} m R^2 + m(3R)^2 = 9.5\, m R^2$

میله $\quad I_\Delta = I_{cm} + m h_2^2 = \frac{1}{12} m l^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} m l^2 = \frac{1}{3} m (2R)^2 = 1.33\, m R^2$

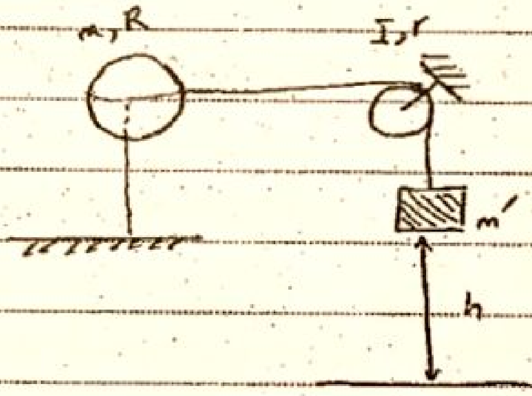
کل $\quad I_\Delta = \underset{\text{حلقه}}{I_\Delta} + \underset{\text{میله}}{I_\Delta} = 10.8\, m R^2$] (۲)

$E = E' \longrightarrow K + U = K' + U' \longrightarrow 0 + (m_1 + m_2) g y_{cm} = \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 - (m_1 + m_2) g y_{cm}$



$\omega = ?$ رابطه (۱) و (۲) در (۳)

مثال: پوسته‌ی کروی (کره توخالی) به جرم m، شعاع R می‌تواند حول محور ثابتی بچرخد. به دور آن مطابق شکل نخ پیچیده شده است. این نخ پس از عبور از قرقره‌ای به شعاع r و لختی دورانی I، به جسمی به جرم m' متصل است. سیستم از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند. وقتی جسم m' به اندازه h به طرف پایین جابجا شود، سرعت آن چقدر است. ($I_{\text{پوسته}} = \frac{2}{3}mR^2$)



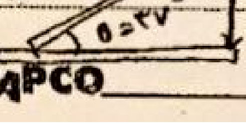
مثال: میله‌ای به جرم m، طول l از نقطه A لولا شده است وقتی با افق زاویه 37° می‌سازد از حالت سکون رها می‌کنیم تا دوران کند. الف) شتاب زاویه‌ای هنگام دوران چقدر است. ب) سرعت زاویه‌ای وقتی از حالت افقی می‌گذرد چقدر است. ($I_{cm} = \frac{1}{12}ml^2$)

لولا A

قضیه محورهای موازی: $I_A = I_{cm} + mh^2 = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2$

$$\sum \tau_A = I_A\alpha \longrightarrow mg\frac{l}{2}\cos\theta = \frac{1}{3}ml^2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{3g\cos\theta}{2l}$$

شتاب زاویه‌ای لحظه‌ای (چون شتاب لحظه‌ای است به جای θ مقدار نگذاشتیم)



$h = \frac{l}{2}\sin 37^\circ$

$E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$

$0 + mg\frac{l}{2}\sin 37^\circ = \frac{1}{2}I_A\omega^2 + 0 \Rightarrow \omega = ?$

« دما و انبساط »

سلسیوس ، فارنهایت

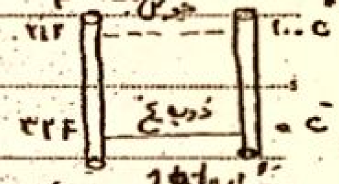
واحد اندازه‌گیری دما C ، K ، F و رانکین است. رابطه بین آنها به صورت زیر است:

کلوین

$T_K = T_C + 273.15$ ، فارنهایت $T_F = 1.8\,T_C + 32$ ، $T_R = T_F + 460$

مثال: در چه دمایی دو دماسنج با مقیاس سلسیوس و فارنهایت عدد یکسانی را نشان می‌دهند؟

$T_F = T_C \Rightarrow 1.8\,T_C + 32 = T_C \Rightarrow T_C = -40^\circ$



دمای نقطه سه‌گانه آب: دمایی است که آب به صورت مایع و بخار و جامد به حالت تعادل قرار دارد که برابر است با: 0 درجه در فشار معین

واحدهای مختلف فشار: $1\,atm = 76\,cm = 760\,mm\,Hg = 1.013 \times 10^5 \simeq 14.6\,PSI$

تور ، Pa ، پوند اینچ مربع

انبساط: اغلب اجسام بر اثر گرم شدن منبسط می‌شوند مانند فلزات و بعضی از اجسام بر اثر گرم شدن منقبض می‌شوند مانند پلیمرها. رابطه بین تغییر طول و طول اولیه و تغییر دما و ضریب انبساط طولی به صورت زیر است:

$\Delta L = \alpha\, L_0\, \Delta T$

تغییر دما ، تغییر طول ، ضریب انبساط طولی ، طول اولیه

طول نهایی $L = L_0 (1 + \alpha \Delta T)$

و روابط انبساط سطحی و حجمی به صورت زیر خواهد بود:

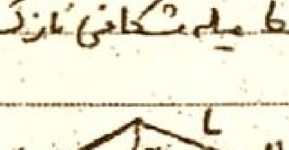
مساحت اولیه   حجم اولیه

$\Delta A = 2\alpha A_0 \Delta T$, $\Delta V = 3\alpha V_0 \Delta T$

در مایعات $\Longleftarrow$ $\Delta V = \beta V_0 \Delta T$ $\Leftarrow$ $3\alpha = \beta$ ضریب انبساط حجمی

α = افزایش طول واحد طول به ازاء افزایش یک درجه دما را ضریب انبساط طولی می‌نامیم.

مثال: میله‌ای به طول $2l_0$ بین دو سکو محکم بسته شده است. در وسط میله شکافی نازک وجود دارد. اگر سیستم به اندازه $50^\circ C$ دمایش را افزایش دهیم وسط



میله مطابق شکل به اندازه x جابجا شود. اگر ضریب انبساط طولی میله $\alpha = 1.1\times 10^{-5}\ (\frac{1}{^\circ C})$ باشد

مقدار x را بدست آورید. $L = L_0(1+\alpha\Delta T)$.

$L^2 = x^2 + L_0^2 \longrightarrow x = \sqrt{L^2 - L_0^2} = \sqrt{L_0^2(1+\alpha\Delta T)^2 - L_0^2} = L_0\sqrt{1+\alpha^2\Delta T^2 + 2\alpha\Delta T - 1}$

$\simeq L_0\sqrt{2\alpha\Delta T} = L_0\sqrt{11\times 10^{-4}} = 0.035\,L_0$

گرما: گرما نوعی انرژی است که بر اثر اختلاف دما از جسم گرم به سرد جاری می‌شود. واحد آن در (SI) ژول (J) در CGS کالری و در سیستم انگلیسی B.T.U است. هر یک کالری ۴٫۲ ژول و هر BTU ۲۵۲ کالری، ۱۰۵۵ ژول است.

۱ کالری: مقدار گرمایی است که یک گرم آب ۱۵/۵ درجه سیلسیوس می گیرد تا دما آن یک درجه سیلسیوس افزایش یابد.

۱ B.T.U: مقدار گرمایی است که ۱ پوند (حدود ۴۵۰ گرم) آب $63^\circ F$ می گیرد تا دما آن ۱ درجه فارنهایت افزایش یابد.

ظرفیت گرمایی: مقدار گرمایی که یک جسم می گیرد تا دما آن ۱ درجه افزایش یابد.

$A = \frac{Q}{\Delta T}$ ، $\frac{J}{C^\circ}$ یا $\frac{cal}{^\circ C}$ (ظرفیت گرمایی هم ارزش آبی هم گفته می شود)

گرمای ویژه: مقدار گرمایی که واحد جرم می گیرد تا دما آن یک درجه افزایش یابد.

$c = \frac{Q}{m\Delta T}$ $\frac{J}{kg.^\circ C}$ یا $\frac{cal}{gr.^\circ C}$ ، $C_{آب} = 1 \frac{cal}{gr.^\circ C} = 4200 \frac{J}{kg.^\circ C}$

ظرفیت گرمای ویژه مولی: مقدار گرمایی که ۱ مول از ماده می گیرد تا دما آن در حجم ثابت و یا فشار ثابت ۱ درجه افزایش یابد.

$c_v = \frac{Q}{n\Delta T}$ گرمای ویژه مولی در حجم ثابت

$c_p = \frac{Q}{n\Delta T}$ در فشار ثابت ، تعداد مول $n = \frac{m}{M}$ جرم / جرم مولی

به تعداد مول

گرمای تغییر حالت: مقدار گرمایی که واحد جرم در دما ثابت می گیرد تا تغییر حالت (فاز) دهد.

الف) گرمای ویژه نهان تبخیر: مقدار گرمایی که واحد جرم در دما ثابت می گیرد تا از حالت مایع

بخار تبدیل شود با L_V نشان می‌دهیم: $L_V = \frac{Q}{m}$ $\quad \frac{J}{kg}$ یا $\frac{cal}{gr}$

$L_{V_{آب}} = 540 \frac{cal}{gr} = 2{,}26 \times 10^{6} \frac{J}{kg}$

ب) گرمای نهان ذوب: مقدار گرمایی که واحد جرم در دمای ثابت می‌گیرد تا از حالت جامد به مایع

تبدیل شود. که با L_F نشان می‌دهیم $L_F = \frac{Q}{m}$ $\quad \frac{J}{kg}$ یا $\frac{cal}{gr}$

یخ $L_F = 80 \frac{cal}{gr} = 3{,}34 \times 10^{5} \frac{J}{kg}$

مثال: یک قطعه مس به جرم ۲۰۰ گرم و دمای ۸۰ درجه سلسیوس در مجاورت یک قطعه آلومینیوم به

جرم ۱۰۰ گرم و دمای ۲۰ درجه سلسیوس قرار می‌دهیم تا به حالت تعادل گرمایی برسند. اگر $C_{مس} = 0{,}09 \frac{cal}{g°C}$

و $C_{آلومینیوم} = 0{,}22$ باشد دمای تعادل چقدر است؟

گرمایی که مس از دست داده $Q_1 = Q_2$ گرمایی که آلومینیوم گرفته

ΔT = دمای بیشتر − دمای کمتر

$\Rightarrow m_1 c_1 (80 - T_e) = m_2 c_2 (T_e - 20) \Rightarrow 200 \times 0{,}09 (80 - T_e) =$

$= 100 \times 0{,}22 (T_e - 20) \Rightarrow T_e = \frac{1880}{41} \simeq 46 °C$

مثال: ظرف شیشه‌ای به جرم $300\,gr$ محتوی $200\,gr$ آب $20°C$ در نظر بگیرید. لوله بخار خنکی را

به آن وصل می‌کنیم تا دمای آن به $40°C$ برسد. اگر $L_V = 540 \frac{cal}{gr}$ (تبخیر) باشد. جرم بخار را بدست آورید.

بخار ۱۰۰ به آب ۱۰۰ — آب ۱۰۰ به ۴۰ — آب ۲۰ به ۴۰ — ظرف ۲۰ به ۴۰

$\underbrace{Q_1 + Q_2}_{\text{گرما از دست داده}} = Q_3 + Q_4 \Rightarrow m_h L_V + m_h c_{آب} (100 - 40) = (m_2 c_2 + m_{ظرف} c_{ظرف})(40 - 20)$ $\quad C_{شیشه} = 0{,}2 \frac{cal}{gr}$

$m_h(\Delta 40 + L_0) = (200\times 1 + 30\times 0.12)(12) \Rightarrow m_h \simeq 4\ gr$

مثال: حلقه‌ای مسی به جرم $20\,g$ و دمای $0^\circ C$ صفر و قطر $2.54cm$ بر روی این حلقه کره‌ای آلومینیومی به قطر 2.54508 و دمای $100^\circ C$ قرار می‌دهیم. در دمای تعادل کره از حلقه مسی عبور می‌کند اگر $\alpha_{\text{آلومینیوم}} = 2.3\times10^{-5}\ \frac{1}{^\circ C}$ ، $\alpha_{\text{مس}} = 1.7\times10^{-5}\ \frac{1}{^\circ C}$ ، $c_{\text{آلومینیوم}} = 0.23$ ، $c_{\text{مس}} = 0.092\ \frac{cal}{gr\,^\circ C}$ باشد جرم حلقه مسی چقدر است؟ شرط عبور کره از حلقه آن است که $d_{\text{حلقه}} \geq D_{\text{کره}}$

در اینجا $\Delta T = T_e -$ دمای اولیه

$$\begin{cases} d_0 = 2.54\ cm \\ D_0 = 2.54508 \end{cases}$$

$$d_0(1+\alpha_1\Delta T_1) = D_0 \Rightarrow 2.54(1+1.7\times10^{-5}(T_e-0)) = 2.54508(1+2.3\times10^{-5}(T_e-100))$$

$$\Rightarrow \boxed{T_e \simeq 50^\circ C}$$

تا اینجا [illegible]

$$\overset{\text{مس گرفته}}{Q_1} = \overset{\text{از دست داده}}{Q_2}$$

$$m_1c_1(50-0) = m_2c_2(100-50) \Rightarrow 20\times0.09\times50 = m_2\times0.23(100-50)$$

$\Rightarrow m_2 \simeq 7.8$ گرم

گاز کامل: هر گازی که بتوان از برهم کنش بین مولکول‌ها صرف نظر کرد آن را گاز کامل (ایده‌آل) می‌نامند مانند: He ، Ne ، Ar ، ... هر گاز دیگری هم که رقیق باشد می‌توان از برهم کنش بین مولکول‌ها تقریباً صرف نظر کرد. اگر گاز کامل باشد رابطه بین فشار مطلق و حجم و دمای مطلق بین دو حالت به صورت مقابل می‌باشد:

$$\underset{\text{دمای مطلق}}{\frac{\overset{\text{فشار مطلق}}{P_1}V_1}{T_1}} = \frac{P_2V_2}{T_2}$$

مطلق $P_a = \underbrace{P_0}_{\text{جو}} + \underbrace{P}_{\text{فشار پیمانه‌ای}}$

پیمانه‌ای: اختلاف فشار داخل و خارج ظرف با فشار پیمانه‌ای می‌باشد.

همچنین می‌توان برای گاز کامل از رابطه‌ی زیر استفاده کرد

$$\underbrace{P}_{\text{فشار}}\overbrace{v}^{\text{حجم }(m^3)} = \overbrace{n}^{\text{تعداد مول}}\underbrace{R}_{\text{ثابت عمومی گازها}}\underbrace{T}_{\text{دما (کلوین)}} \qquad \left(R = 8{,}3 \ \frac{J}{mol \cdot K}\right)$$

پاسکال

رابطه کار در ترمودینامیک: فرض کنید مقداری گاز داخل سیلندری با مساحت سطح مقطع A قرار دارد

اگر نیروی F را به پیستون وارد کنیم به طوری که جابجایی به اندازه dx داشته باشد در این صورت

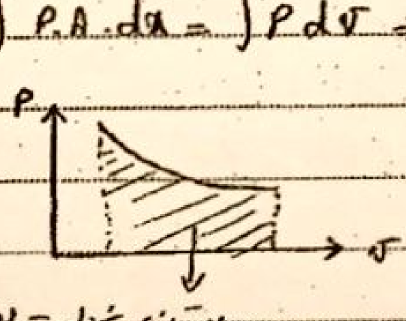
تغییر حجم آن برابر است با: $\quad dv = A \cdot dx \quad (1)$

با توجه به رابطه بین فشار و نیرو داریم $\quad P = \frac{F}{A} \longleftarrow F = P A \quad (2)$

و با توجه به رابطه کار می‌توان نوشت: $\quad w = \int F\, dx \quad (3)$

از (1) و (2) و (3):

$$w = \int P \cdot A \cdot dx = \int P\, dv \Rightarrow \boxed{\underbrace{w}_{\text{ژول}} = \int \underbrace{P}_{\text{پاسکال}} \cdot \underbrace{dv}_{\text{مترمکعب}}}$$



مساحت زیر نمودار = w

محاسبه کار در چند فرآیند:

الف) فرآیند فشار ثابت: $w=\int P.dV = P(V_2-V_1) = P.\Delta V$

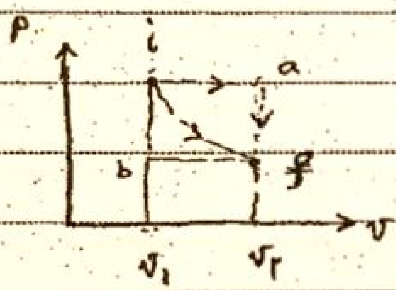
ب) فرآیند حجم ثابت: $w=\int P.dV = 0$

ج) دما ثابت: $w=\int P dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V}.dV = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$

• قانون اول ترمودینامیک: فرض کنید مقداری گاز داخل ظرفی وجود دارد که می‌تواند با مبادله گرما

• با محیط از حالت اولیه i به حالت نهایی f برسد. برای این منظور می‌توان مسیرهای مختلفی را با

• توجه به نمودار شکل مقابل در نظر گرفت



۱) مسیر $\underleftarrow{fai}$ ابتدا در فشار ثابت حجم را افزایش دهیم سپس

• در حجم ثابت فشار را کاهش دهیم تا به حالت نهایی f برسیم. در این صورت کار انجام شده برابر

• است با مساحت زیر نمودار: $w_1 = S_{iaV_2V_1}$

۲) مسیر مایل $\underleftarrow{fi}$: همزمان با کاهش فشار حجم سیستم را افزایش دهیم تا به حالت نهایی برسد

• در این صورت کار انجام شده برابر است با: $w_2 = S_{ifV_1V_2}$

۳) مسیر $\underleftarrow{fbi}$: ابتدا در حجم ثابت فشار را کاهش دهیم سپس در فشار ثابت حجم را افزایش دهیم

• تا به حالت نهایی برسیم. در این صورت کار انجام شده برابر است با: $w_3 = S_{ibfV_2V_1}$

ملاحظه می شود که $W_3 < W_2 < W_1$ یعنی کار به مسیر بستگی دارد. تجربه نشان می دهد که گرما هم،

که سیستم با محیط مبادله می کند، به نوع فرآیند بستگی دارد.

$Q = nC_v \Delta T$ گرما در حجم ثابت

$Q = nC_p \Delta T$ گرما در فشار ثابت

ولی تفاضل این دو همواره مقداری است ثابت و برابر است با تغییر انرژی داخلی

قانون اول ترمودینامیک $\Delta U = \underbrace{Q}_{\text{گرما}} - \underbrace{W}_{\text{کار}}$ تغییر انرژی داخلی

$Q > 0$ سیستم گرما بگیرد ، $Q < 0$ سیستم گرما از دست بدهد

$W > 0$ سیستم منبسط شود ، $W < 0$ سیستم منقبض شود (متراکم شود)

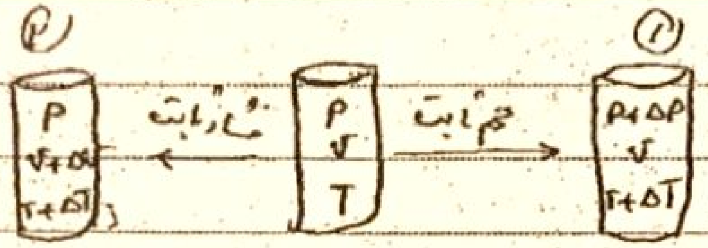
نکته: ΔU به نوع فرآیند بستگی ندارد. در همه فرآیندها از رابطه زیر بدست می آید:

$\Delta U = nC_v \Delta T$

سوال: ثابت کنید $C_p - C_v = R$ است؟

فرض کنید مقداری گاز درون ظرفی وجود دارد. می خواهیم دمای آن را به اندازه ΔT افزایش دهیم.

برای این منظور دو نوع فرآیند حجم ثابت و فشار ثابت در نظر می گیریم و قانون اول ترمودینامیک را



سمودآن بکار می بریم

$\Delta U_2 = Q_2 - W_2$ $\qquad$ $\Delta U_1 = Q_1 - W_1$

$\Delta U_2 = nC_p\Delta T - P\Delta V$] (2) $\qquad$ $\Delta U_1 = nC_v\Delta T - 0$] (1)

$PV = nRT \longrightarrow P\Delta V = nR\Delta T$] (3)

از روابط (2) و (3) $\qquad$ $\Delta U_2 = nC_p\Delta T - nR\Delta T$] (4)

می دانیم که تغییر انرژی داخلی به نوع فرآیند بستگی ندارد و فقط به تغییرات دما بستگی دارد

و در این دو فرآیند دما به یک اندازه افزایش یافته است. پس داریم:

$\Delta U_1 = \Delta U_2 \Rightarrow nC_v\Delta T = nC_p\Delta T - nR\Delta T \Rightarrow C_v = C_p - R$

$\Rightarrow C_p - C_v = R$ $\qquad$ ضریب اتمیسیته $\leftarrow$ $\gamma = \dfrac{C_p}{C_v}$

تعریف (فرآیند بی دررو یا آدیاباتیک): فرآیندی است که مبادله گرما بین سیستم و محیط وجود ندارد. $Q = 0$

1) سیستم عایق بندی $\qquad$ 2) فرآیند سریع انجام شود.

مثال: مطلوبست محاسبه کار در فرآیند بی دررو بر حسب فشار اولیه و نهایی و حجم اولیه و نهایی و

فرآیند آدیاباتیک:

مثال: در فرآیند آدیاباتیک روابط مقابل را ثابت کنید: $PV^{\gamma} =$ ثابت ، $TV^{\gamma-1} =$ ثابت

$du = dQ - dw \longrightarrow nC_V dT = 0 - p\,dV \;]\,①\;,\; P = \frac{nRT}{V} \;]\,②$

رابطه ② در ①:

$nC_V\,dT = \frac{-nRT\,dV}{V}$

بر $C_V T$ تقسیم می‌کنیم:

$\frac{dT}{T} + \frac{R}{C_V}\cdot\frac{dV}{V} = 0 \;]\,③$

$\frac{R}{C_V} = \frac{C_P - C_V}{C_V} = \gamma - 1 \;]\,④$

رابطه ④ در ③:

$\frac{dT}{T} + (\gamma-1)\frac{dV}{V} = 0 \;,\; \int\frac{dT}{T} + (\gamma-1)\int\frac{dV}{V} = 0$

$\ln T + (\gamma-1)\ln V = C$ ثابت $\Rightarrow \ln T + \ln V^{\gamma-1} = C \Rightarrow \ln TV^{\gamma-1} = C$

$\Rightarrow TV^{\gamma-1} = C$ ثابت $,\; T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1} \;]\,⑤$

از قانون گاز کامل:

$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} \;]\,⑥ \xrightarrow[\text{در هم ضرب}]{\text{طرفین ⑤ ⑥}} P_1V_1^{\gamma} = P_2V_2^{\gamma}$

قانون دوم ترمودینامیک (آنتروپی) : آنتروپی معیاری است برای اندازه‌گیری بی‌نظمی. هرگاه سیستم گرما بگیرد جنبش مولکولی افزایش می‌یابد و سیستم بی‌نظم‌تر می‌شود. به عبارتی آنتروپی آن افزایش می‌یابد و سیستم بی‌نظم‌تر می‌شود به عبارتی آنتروپی آن افزایش می‌یابد و اگر سیستم گرما از دست بدهد مولکول‌ها آرام‌تر حرکت می‌کنند و نسبت به حالت قبل منظم‌تر می‌شوند به عبارت دیگر آنتروپی آن کاهش می‌یابد. تغییرات آنتروپی را با رابطه زیر انجام می‌دهیم:

$$\Delta S = \int \frac{\overset{\text{گرما}}{dQ}}{\underset{\text{دمای کلوین}}{T}}$$

واحد آنتروپی $\frac{J}{K}$ یا $\frac{cal}{K}$ است

فرآیند بازگشت‌پذیر: کلیه فرآیندهایی که در طبیعت به صورت طبیعی اتفاق می‌افتند بازگشت ناپذیرند یعنی اگر فرآیندی را با تغییرات ناچیز بتوان به حالت اولیه بازگرداند می‌توان آن را تقریباً فرآیند بازگشت‌پذیر نامید. در فرآیندهای بازگشت‌پذیر تغییرات آنتروپی کل صفر است.

$$\Delta S_{\text{بازگشت‌پذیر}} = \oint \frac{dQ}{T} = 0 \qquad \text{بازگشت‌ناپذیر} \quad \Delta S_{\text{کل}} > 0$$

و در فرآیندهای تک دما (دما ثابت) $\Delta S = \frac{Q}{T}$ فرآیند دما ثابت

مثال: ۲۰ گرم یخ $0^\circ C$ در یک گرماسنج با ارزش آبی $30 \frac{cal}{^\circ C}$ محتوی $200 gr$ آب $40^\circ C$ می‌ریزیم تا ذوب شود. الف) دمای تعادل چقدر است. ب) تغییر آنتروپی یخ و آب و گرماسنج و کل سیستم را بدست آورید. ($c_{\text{یخ}} = 0.5 \frac{cal}{gr^\circ C}$ ، $L_{F_{\text{یخ}}} = 80 \frac{cal}{gr}$ ، $c_{\text{آب}} = 1$) :

Date

یخ ۱۰- ← صفر ، یخ صفر ← آب صفر ، آب صفر ← تعادل ، آب ۴۰ ← تعادل ، ظرف ۴۰ ← تعادل

الف) $\underbrace{Q_1+Q_2+Q_3}_{\text{گرما می‌گیرد}} = \underbrace{Q_4+Q_5}_{\text{گرما می‌دهد}} \Rightarrow$

$$m_1 c_{یخ}(0-(-10)) + m_1 L_F + m_1 c_{آب}(T_e-0) = (m_{آب} c_{آب}+A)(40-T_e)$$

$$\Rightarrow 20\times 0.5\times 10 + 20\times 80 + 20\times 1\times T_e = (200+30)(40-T_e)$$

$$\Rightarrow T_e = 30^\circ C = 303\,K$$

ب) یخ ۱۰- ← صفر $\quad \Delta S = \int \frac{dQ}{T} = m_{یخ}\, c_{یخ} \int_{263}^{273} \frac{dT}{T} = 20\times 0.5 \ln \frac{273}{263}$

یخ صفر ← آب صفر $\quad \Delta S_1' = \frac{Q}{T} = \frac{mL_F}{273} = \frac{20\times 80}{273}\ \frac{cal}{K}$

آب صفر ← ۳۰ $\quad \Delta S_1'' = \int \frac{dQ}{T} = m c_{آب} \int_{273}^{303} \frac{dT}{T} = 20\times 1\times \ln\left(\frac{303}{273}\right)$

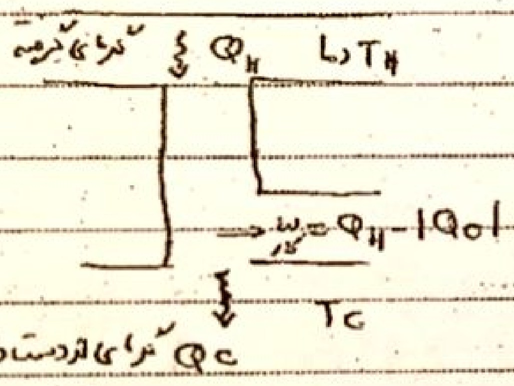
آب ۴۰ ← ۳۰ $\quad \Delta S_2 = \int \frac{dQ}{T} = m_{آب}\, c \int_{313}^{303} = 200 \ln \frac{303}{313} < 0$

ظرف ۴۰ ← ۳۰ $\quad \Delta S_3 = \int \frac{dQ}{T} = \overset{mc\ \text{ارزش آبی}}{A} \int_{313}^{303} \frac{dT}{T} = 30 \ln \frac{303}{313} < 0$ چون گرما از دست داده

$$\Delta S_{کل} = \sum \Delta S_i$$

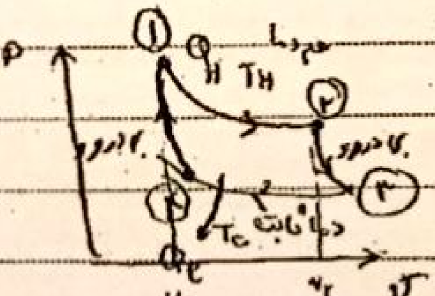
تمرین: ۲۰ گرم یخ -10° را در یک استخر آب $20^\circ C$ می‌ریزیم تا ذوب شود. مطلوب است تغییر آنتروپی یخ و آب استخر و کل سیستم. (دمای تعادل همان دمای استخر است) چون حجم آب استخر در مقابل یخ ∞ محسوب می‌شود.

ماشین های گرمایی: وسایلی هستند که می توانند گرما را به کار تبدیل کنند. برای هر ماشین گرمایی کمیتی به نام بازده به صورت زیر تعریف می شود.



$$e_{\text{بازده}} = \frac{W_{\text{کار مفید}}}{Q_H} = \frac{Q_H - |Q_C|}{Q_H} = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_H}$$

چرخه کارنو: چرخه کارنو یک چرخه ایده آل است و چرخه هیچ ماشین گرمایی واقعی نمی باشد از چهار فرآیند تشکیل شده است. دو فرآیند بی دررو و دو فرآیند هم دما که نمودار $P-V$ آن به صورت زیر است.



مثال: بازده چرخه کارنو را ثابت کنید (با چرخه ایده‌آل در آزمایشگاه): $e = 1 - \frac{T_C}{T_H}$ (۳)

فرآیند ۱ و ۲ دما ثابت: $\Delta U_{12} = Q_{12} - W_{12} \Rightarrow Q_H = W = \int P\,dV = \int \frac{nRT_H}{V}\,dV$

$$= nRT_H \ln\frac{V_2}{V_1} \quad (1)$$

فرآیند ۳ و ۴ دما ثابت: $\Delta U_{34} = Q_{34} - W_{34} \Rightarrow W_{34} = Q_{34} \Rightarrow Q_C = \int P\,dV = \int_{V_3}^{V_4} \frac{nRT_C\,dV}{V}$

$$\Rightarrow Q_C = nRT_C \ln\frac{V_4}{V_3} < 0 \Rightarrow |Q_C| = nRT_C \cdot \ln\frac{V_3}{V_4} \quad (2)$$

رابطه (۲) و (۱) در (۳):

$$e = 1 - \frac{T_C}{T_H} \times \frac{\ln\frac{V_3}{V_4}}{\ln\frac{V_2}{V_1}} \quad (4)$$

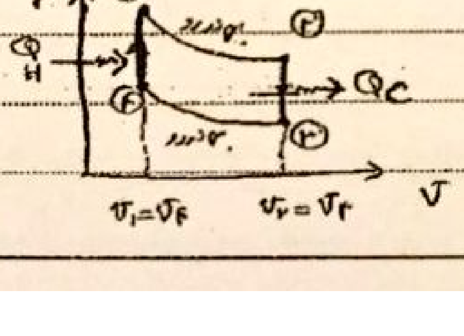
فرآیند ۲ به ۳ بی‌دررو: $T_H V_2^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1} \Rightarrow T_H \cdot V_2^{\gamma-1} = T_C V_3^{\gamma-1}$

فرآیند ۴ به ۱ بی‌دررو: $T_H V_1^{\gamma-1} = T_C \cdot V_4^{\gamma-1} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4} \quad (5)$

از مقایسه (۴) و (۵) به رابطه روبرو می‌رسیم: $e = 1 - \frac{T_C}{T_H}$

چرخه ماشین‌های بنزینی

مثال: مطلوب است بازده چرخه اتو برحسب نسبت تراکم و ضریب اتومیسیته. چرخه اتو از چهار فرآیند تشکیل شده است: دو فرآیند حجم ثابت و دو فرآیند بی‌دررو که نمودار P-V آن به صورت زیر است.



نسبت تراکم $\Rightarrow r = \frac{V_2}{V_1} = \frac{\text{بیشترین حجم}}{\text{کمترین حجم}}$ است.

$Q_H = nC_v(T_1 - T_4) > 0$, $Q_C = nC_v(T_3 - T_2) < 0 \Rightarrow$

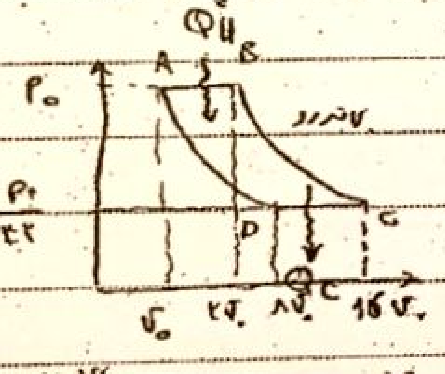
$|Q_C| = nC_v(T_2 - T_3) > 0 \Rightarrow e = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_H} = 1 - \frac{T_2 - T_3}{T_1 - T_4}$] ①

② و ① بی‌دررو : $T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1} \longrightarrow T_1 = T_2\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow T_1 = T_2(r)^{\gamma-1}$] ②

④ و ③ بی‌دررو : $T_3V_3^{\gamma-1} = T_4V_4^{\gamma-1} \longrightarrow T_4 = T_3\left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow T_4 = T_3(r)^{\gamma-1}$] ③

$e = 1 - \frac{T_2 - T_3}{(T_2 - T_3)r^{\gamma-1}} \Rightarrow e = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}} \longleftarrow$ رابطهٔ ① و ② و ③ :

مثال: یک مول گاز ایده‌آل ماده کار ماشین گرمایی که چرخه‌ای مطابق شکل دارد، در نظر بگیرید. دو فرآیند بی‌دررو و دو فرآیند هم‌فشار است. الف) ضریب اتمیسیته گاز چقدر است. ب) بازده ماشین چقدر است.



$D \xrightarrow{\text{بی‌دررو}} A \qquad P_AV_A^{\gamma} = P_DV_D^{\gamma} \Rightarrow P_0V_0^{\gamma} = \left(\frac{P_0}{32}\right)(8V_0)^{\gamma} \Rightarrow$

$V_0^{\gamma} = \left(\frac{1}{2^5}\right)\cdot(2^{3\gamma})(V_0^{\gamma}) \Rightarrow 2^5 = 2^{3\gamma} \Rightarrow \gamma = 5/3$

بازده خواسته شده

هر وقت صحبت از آنتروپی بود و دما را نداشتیم بهترین کار این است که دماهای رئوس را حساب کنیم.

$T_A = \frac{P_0V_0}{nR}$, $T_B = \frac{P_0 2V_0}{nR} = 2T_A$, $T_C = \frac{(P_0/32)(16V_0)}{nR} = T_A/2$

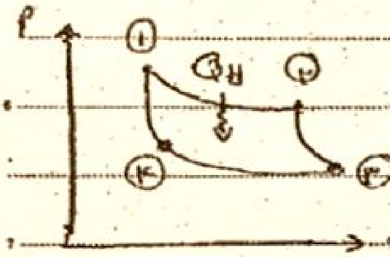
$$T_D = \frac{P_0/32 \times 8V_0}{nR} = \frac{P_0V_0}{4nR} = \frac{T_A}{4}$$

$$Q_H = Q_{AB} = nC_p(T_B - T_A) = nC_p(2T_A - T_A) = nC_pT_A$$

$$Q_C = Q_{CD} = nC_p(T_D - T_A) = nC_p\left(\frac{T_A}{4} - T_A/2\right) = \frac{-nC_pT_A}{4}$$

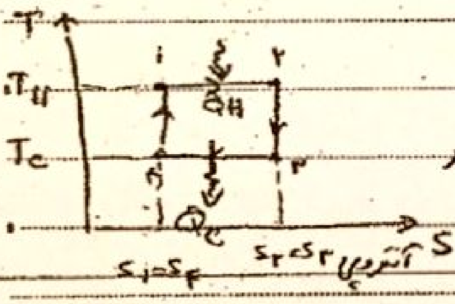
$$\Rightarrow e = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_H} = 1 - \frac{nC_p\, T_A/4}{nC_pT_A} = 1 - 1/4 = 3/4 \text{ یا } 75\%$$

مثال ۲: با استفاده از نمودار P-V چرخه کارنو نمودار T-S آن را رسم و نشان دهید که مساحت



زیر نمودار برابر است با کار انجام شده در یک چرخه.

در فرآیند ۱ به ۲ دمای سیستم گرمای Q_H را جذب می‌کند پس آنتروپی افزایش می‌یابد.



در فرآیند ۲ به ۳ که بی دررو است $(Q=0)$ بنابراین آنتروپی تغییر نمی‌کند ولی دما کاهش می‌یابد.

فرآیند ۳ به ۴ سیستم در دمای ثابت T_C گرمای Q_C را از دست می‌دهد پس آنتروپی کاهش می‌یابد.

در فرآیند ۴ به ۱ سیستم طوری بی دررو به حالت اولیه برمی‌گردد بنابراین آنتروپی تغییر نمی‌کند ولی دما افزایش می‌یابد.

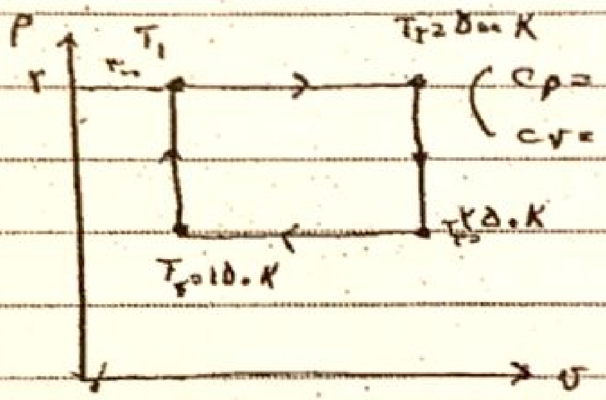
$$\Delta S_{12} = \frac{Q_H}{T_H} \rightarrow Q_H = \Delta S_{12}\, T_H$$

$$\Delta S_{34} = \frac{Q_C}{T_C} \rightarrow Q_C = T_C \cdot \Delta S_{34}$$

$$\Rightarrow W = Q_H - |Q_C| \Rightarrow W = \Delta S(T_H - T_C)$$

مثال ۵: ۳ لیتر اکسیژن با دما ۳۰۰K گرما می‌دهیم تا در فشار ثابت ۲ اتمسفر دما آن به ۵۰۰K برسد سپس در حجم ثابت آن را سرد می‌کنیم تا دما آن به ۲۵۰K برسد سپس در فشار ثابت آن را سرد می‌کنیم تا دما آن به ۱۵۰K برسد و بالاخره در حجم ثابت آن را گرم می‌کنیم تا دما آن به ۳۰۰K برسد الف) نمودار P-V آن را رسم کنید. ب) چند مول گاز وجود دارد. ج) کار انجام شده در یک چرخه چقدر است. د) بازده چرخه چقدر است. هـ) (برای تمرین) تغییر آنتروپی هر فرآیند چقدر است ($C_p = \frac{7}{2}R$, $C_v = \frac{5}{2}R$)

الف)



ب) $n = \frac{PV}{RT} = \frac{2\times10^5 \times 3\times10^{-3}}{8.3 \times 300} = 0.24\ mol$

ج) $1 \to 2 \Rightarrow \frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{3}{300} = \frac{V_2}{500} \Rightarrow V_2 = 5\ litr$

$4 \to 1 \Rightarrow \frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_4V_4}{T_4} \Rightarrow \frac{2}{300} = \frac{P_4}{150} \Rightarrow P_4 = 1\ atm$

$W = (V_2 - V_1)(P_1 - P_4) = (5-3)\times10^{-3} \times (2-1)\times10^5 = 200\ J$

د) $Q_{12} = nC_p(T_2 - T_1) = 0.24 \times \frac{7}{2}R(200) = 168R$

$Q_{41} = nC_v (T_1 - T_4) = ۰٫۲۴ \times \frac{5}{2} R \times ۱۵۰ = ۹۰ R$

$Q_H = Q_{12} + Q_{41} = ۲۵۸ R = ۲۵۸ \times ۸٫۳$

$\left(R = ۸٫۳ \ \frac{J}{mol \cdot K} \right)$

$\left(R = ۲ \ \frac{cal}{mol} \right)$

$e = \frac{w}{Q_H} = \frac{۲۰۰}{۲۵۸ \times ۸٫۳}$

ه) $\Delta S_{12} = \int \frac{dQ}{T} = nC_p \int_{۳۰۰}^{۵۰۰} \frac{dT}{T} = ۰٫۲۴ \times \frac{7}{2} R \ln \frac{5}{3} = ۱٫۶۸ \ln \frac{5}{3}$

$\Delta S_{23} = \int \frac{dQ}{T} = nC_v \int_{۵۰۰}^{۲۵۰} \frac{dT}{T} = ۰٫۲۴ \times \frac{5}{2} R \ln \frac{۲۵۰}{۵۰۰} = ۱٫۲ \ln \frac{1}{2}$

$\Delta S_{34} = \int \frac{dQ}{T} = nC_p \int \frac{dT}{T} = nC_p \ln \frac{۱۵۰}{۲۵۰}$

$\Delta S_{41} = \int \frac{dQ}{T} = nC_v \int \frac{dT}{T} = nC_v \ln \frac{۳۰۰}{۱۵۰}$

یخچال‌ها ماشین‌های گرمایی هستند که در جهت عکس کار می‌کنند. برای یخچال‌ها به جای بازده ضریب عملکرد به صورت زیر تعریف می‌شود.

$K = \frac{Q_c}{w}$