۸ انرژی پتانسیل و پایستگی انرژی

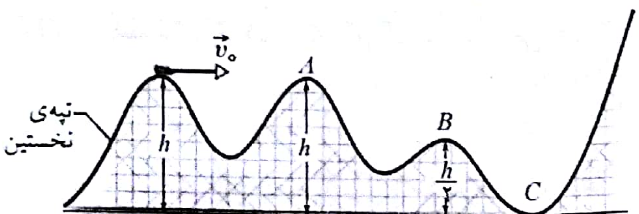
پودمان ۸-۱ انرژی پتانسیل

* ۱ هرگاه فنری به اندازه‌ی $۷/۵\,\text{cm}$ نسبت به طول حالت آرامش متراکم شود، $۲۵\,\text{J}$ انرژی پتانسیل کشسانی ذخیره می‌کند. ثابت فنر چقدر است؟

حل: انرژی پتانسیل ذخیره شده توسط فنر، از رابطه‌ی $U=\frac{۱}{۲}kx^{۲}$ به دست می‌آید که در آن k ثابت فنری و x جابه‌جایی انتهای فنر نسبت به مکان تعادل است. بنابراین داریم

$$k=\frac{۲U}{x^{۲}}=\frac{۲(۲۵\,\text{J})}{(۰/۰۷۵\,\text{m})^{۲}}=۸/۹\times۱۰^{۳}\,\text{N/m}$$

* ۲ در شکل ۸-۲۹، یک قطار غلتان هوایی به جرم $m=۸۲۵\,\text{kg}$ در یک مسیر بی‌اصطکاک حرکت می‌کند تا با تندی $v_۰=۱۷/۰\,\text{m/s}$ در ارتفاع $h=۴۲/۰\,\text{m}$ به بالای نخستین تپه می‌رسد. نیروی گرانشی از این نقطه تا (الف) نقطه‌ی A، (ب) نقطه‌ی B، و (پ) نقطه‌ی C، چه مقدار کار روی قطار انجام می‌دهد؟ اگر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه قطار ـ زمین در نقطه‌ی C صفر گرفته شود، مقدار آن در هنگامی که قطار به، (ت) نقطه‌ی B، و (ث) نقطه‌ی A می‌رسد، چقدر است؟ (ج) اگر جرم m دو برابر شود، آیا تغییر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه در میان نقطه‌های A و B، افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟



شکل ۸-۲۹ مسئله‌های ۲ و ۹.

حل: از معادله‌ی ۷-۱۲ برای W_g و از معادله‌ی ۸-۹ برای U استفاده می‌کنیم.

(الف) جابه‌جایی در بین نقطه‌ی آغازی و نقطه‌ی A افقی است، در نتیجه $\phi=۹۰/۰^\circ$ و $W_g=۰$ (زیرا $\cos۹۰/۰^\circ=۰$).

(ب) جابه‌جایی در بین نقطه‌ی آغازی و نقطه‌ی B دارای مؤلفه‌ی قائم $h/۲$ به طرف پایین (در جهت $\vec{F}_g$) است، لذا داریم

$$W_g=\vec{F}_g\cdot\vec{d}=\frac{۱}{۲}mgh$$
$$=\frac{۱}{۲}(۸۲۵\,\text{kg})(۹/۸۰\,\text{m/s}^{۲})(۴۲/۰\,\text{m})=۱/۷\times۱۰^{۵}\,\text{J}$$

(پ) جابه‌جایی در بین نقطه‌ی آغازی و نقطه‌ی C دارای مؤلفه‌ی قائم h به طرف پایین (در جهت $\vec{F}_g$) است، لذا داریم

$$W_g=\vec{F}_g\cdot\vec{d}=mgh$$
$$=(۸۲۵\,\text{kg})(۹/۸۰\,\text{m/s}^{۲})(۴۲/۰\,\text{m})=۳/۴\times۱۰^{۵}\,\text{J}$$

(ت) اگر C را در نقطه‌ی مرجع در نظر بگیریم

$$U_B=\frac{۱}{۲}mgh$$
$$=\frac{۱}{۲}(۸۲۵\,\text{kg})(۹/۸۰\,\text{m/s}^{۲})(۴۲/۰\,\text{m})=۱/۷\times۱۰^{۵}\,\text{J}$$

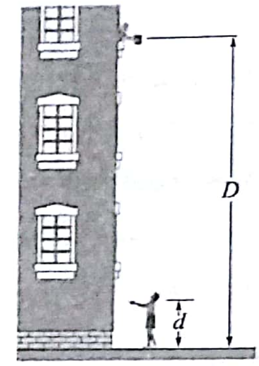
(ث) به طور مشابه، داریم

$$U_A=mgh=(۸۲۵\,\text{kg})(۹/۸۰\,\text{m/s}^{۲})(۴۲/۰\,\text{m})=۳/۴\times۱۰^{۵}\,\text{J}$$

(ج) همه‌ی پاسخ‌ها با جرم جسم متناسب‌اند. اگر جرم دوبرابر شود، همه‌ی پاسخ‌ها دو برابر می‌شوند.

* ۳ کتابی ۲/۰۰ کیلوگرمی را برای دوست خود که در روی زمین به فاصله‌ی $D=۱۰/۰\,\text{m}$ پایین‌تر قرار دارد می‌اندازید. دوست شما برای گرفتن کتاب دست‌های خود را به فاصله‌ی $d=۱/۵\,\text{m}$ بالاتر از زمین دراز می‌کند (شکل ۸-۳۰). (الف) تا هنگام رسیدن کتاب به دست‌های او نیروی گرانشی زمین چقدر

کار W_g، روی کتاب انجام می‌دهد؟ (ب) در حین افتادن کتاب، ΔU، تغییر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه کتاب ـ زمین چقدر است؟ اگر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه U، در سطح زمین صفر فرض شود، مقدار U در نقطه‌ای که کتاب، (پ) رها می‌شود، و (ت) به دست‌های دوست شما می‌رسد، چقدر است؟ اکنون، فرض کنید U در سطح زمین ۱۰۰ J است و دوباره (ث) W_g، (ج) ΔU، (چ) U را در نقطه‌ی رها شدن کتاب، و (ح) U را در نقطه‌ی رسیدن به دست‌های دوست خود، پیدا کنید.



شکل ۸-۳۰ مسئله‌های ۳ و ۱۰.

حل: (الف) چون جابه‌جایی قائم به طرف پایین (در جهت $\vec{F}_g$) مساوی با $۱۰/۰\,m - ۱/۵۰\,m = ۸/۵۰\,m$ است، از معادله‌ی ۷-۱۲ داریم

$$W_g = mgh\cos\phi$$

$$= (۲/۰۰\,kg)(۹/۸۰\,m/s^۲)(۸/۵۰\,m)\cos ۰^\circ = ۱۶۷\,J$$

(ب) یک روش (که اندکی مشکل است) استفاده از معادله‌ی ۸-۱ است، اما بهتر است ΔU را حساب کنیم که در آن $U = mg$ است (جهت $+y$ به طرف بالا انتخاب شده است). نتیجه برابر است با

$$\Delta U = mg(y_f - y_i)$$

$$= (۲/۰۰\,kg)(۹/۸۰\,m/s^۲)(۱/۵۰\,m - ۱۰/۰\,m) = -۱۶۷\,J$$

(پ) در قسمت (ب) از این واقعیت استفاده کردیم که $U_i = mgy_i = ۱۹۶\,J$ است.

(ت) در قسمت (ب)، باز هم از این واقعیت استفاده کردیم که $U_f = mgy_f = ۲۹\,J$ است.

(ث) برای محاسبه‌ی W_g به اطلاعات جدید نیاز نداریم (در سطح زمین $U = ۱۰۰\,J$ است)، در نتیجه داریم $W_g = ۱۶۷\,J$.

(ج) به عنوان نتیجه‌ی معادله‌ی ۸-۱، بار دیگر باید $\Delta U = -W_g = -۱۶۷\,J$ را پیدا کنیم.

(چ) با این اطلاعات جدید (که در مکان $y = ۰$، $U_۰ = ۱۰۰\,J$ است)، داریم

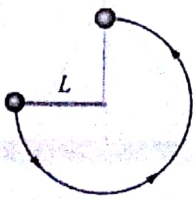
$$U_i = mgy_i + U_۰ = ۲۹۶\,J$$

(ح) با این اطلاعات جدید (که در مکان $y = ۰$، $U_۰ = ۱۰۰\,J$ است)، داریم

$$U_f = mgy_f + U_۰ = ۱۲۹\,J$$

برای آزمودن قسمت (ج) می‌توانیم U_i جدید را از این نتیجه کم کنیم.

* ۴ شکل ۸-۳۱ گلوله‌ای به جرم $m = ۰/۳۴۱\,kg$ را نشان می‌دهد که به انتهای میله‌ای باریک با جرم ناچیز به طول $L = ۰/۴۵۲\,m$، وصل شده است. انتهای دیگر میله در نقطه‌ای به لولایی چنان وصل شده است که گلوله می‌تواند در روی دایره‌ای قائم حرکت کند. میله را، مطابق شکل، به طور افقی نگه می‌داریم و آن را به اندازه‌ای به پایین هُل می‌دهیم که گلوله بچرخد و میله با تندی صفر درست در بالا به وضعیت قائم برسد. چقدر کار روی گلوله توسط نیروی گرانشی از نقطه‌ی آغازی تا (الف) پایین‌ترین نقطه، (ب) بالاترین نقطه، و (پ) نقطه‌ی واقع در سمت راست و هم سطح با نقطه‌ی آغازی، انجام می‌شود؟ اگر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه گلوله ـ زمین در نقطه‌ی آغازی صفر گرفته شود، مقدار این انرژی در هنگامی که گلوله به (ت) پایین‌ترین نقطه، (ث) بالاترین نقطه، و (ج) نقطه‌ی واقع در سمت راست و هم سطح با نقطه‌ی آغازی می‌رسد، چقدر است؟ (چ) فرض کنید میله را با شدت بیشتر چنان هُل می‌دهیم که گلوله با تندی ناصفر از بالاترین نقطه بگذرد. آیا تغییر انرژی پتانسیل گرانشی ΔU_g، نسبت به حالتی که گلوله در بالاترین نقطه می‌ایستاد از پایین‌ترین نقطه تا بالاترین نقطه بیشتر می‌شود، کمتر می‌شود، یا ثابت می‌ماند؟



شکل ۸-۳۱ مسئله‌های ۴ و ۱۴.

حل: (الف) تنها نیرویی که روی گلوله کار انجام می‌دهد، نیروی گرانش است؛ نیروی میله بر مسیر حرکت گلوله عمود است، در نتیجه کار انجام نمی‌دهد. گلوله در هنگام رفتن از مکان آغازی تا پایین‌ترین نقطه در روی مسیر حرکت، مسافت قائمی مساوی با طول L میله را به طرف پایین می‌پیماید، در نتیجه کاری که نیروی گرانش انجام می‌دهد برابر است با

$$W = mgL = (۰/۳۴۱\,\mathrm{kg})(۹/۸۰\,\mathrm{m/s^۲})(۰/۴۵۲\,\mathrm{m}) = ۱/۵۰\,\mathrm{J}$$

(ب) هنگام رفتن گلوله از مکان آغازی تا بالاترین نقطه در روی مسیر حرکت، مسافتی مساوی با L را به طور قائم به بالا می‌رود، اما این بار جابه‌جایی به طرف بالا و در خلاف جهت نیروی گرانش است. کاری که نیروی گرانش انجام می‌دهد برابر است با

$$W = mgL = (۰/۳۴۱\,\mathrm{kg})(۹/۸۰\,\mathrm{m/s^۲})(۰/۴۵۲\,\mathrm{m}) = ۱/۵۰\,\mathrm{J}$$

(پ) مکان پایانی گلوله در همان ارتفاع مکان آغازی است. جابه‌جایی افقی، و بر نیروی گرانش عمود است. نیروی گرانش در این جابه‌جایی کاری انجام نمی‌دهد.

(ت) نیروی گرانش پایستار است. تغییر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه گلوله ـ زمین (وقتی گلوله به پایین‌ترین نقطه می‌رود) با منفی کار انجام شده توسط گرانش، برابر است:

$$\Delta U = -mgL = -(۰/۳۴۱\,\mathrm{kg})(۹/۸۰\,\mathrm{m/s^۲})(۰/۴۵۲\,\mathrm{m}) = -۱/۵۰\,\mathrm{J}$$

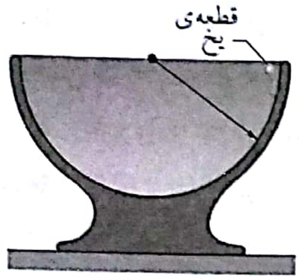
(ث) اگر همین طور استدلال بکنیم، وقتی گلوله به بالاترین نقطه می‌رود، داریم

$$\Delta U = +mgL = (۰/۳۴۱\,\mathrm{kg})(۹/۸۰\,\mathrm{m/s^۲})(۰/۴۵۲\,\mathrm{m}) = ۱/۵۰\,\mathrm{J}$$

(ج) با همین استدلال، وقتی گلوله به نقطه‌ای با همان ارتفاع می‌رود، $\Delta U = ۰$ است.

(چ) تغییر انرژی پتانسیل گرانشی فقط به مکان‌های آغازی و پایانی گلوله بستگی دارد و به تندی گلوله بستگی ندارد. تغییر انرژی پتانسیل ***همان*** است زیرا مکان‌های آغازی و پایانی همان‌اند.

* ۵ در شکل ۸-۳۲، قطعه یخ کوچکی به جرم ۲/۰۰ گرم از لبه‌ی ظرف نیمکره شکلی به شعاع ۲۲/۰ cm رها می‌شود. سطح تماس یخ با ظرف بی‌اصطکاک است. (الف) در حین پایین رفتن قطعه یخ تا ته ظرف نیروی گرانشی چقدر کار روی یخ انجام می‌دهد؟ (ب) تغییر انرژی پتانسیل دستگاه یخ ـ ظرف در حین پایین رفتن یخ چقدر است؟ (پ) اگر انرژی پتانسیل در ته ظرف صفر فرض شود، مقدار این انرژی در نقطه‌ی رها شدن یخ چقدر است؟ (ت) اگر انرژی پتانسیل در نقطه‌ی رها شدن یخ صفر فرض شود، مقدار آن در هنگام رسیدن یخ به ته ظرف چقدر است؟ (ث) اگر جرم یخ دو برابر شود، آیا بزرگی پاسخ‌های قسمت‌های (الف) تا (ت) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟



شکل ۸-۳۲ مسئله‌های ۵ و ۱۱.

حل: (الف) نیروی گرانش ثابت است، در نتیجه کاری که انجام می‌دهد از رابطه‌ی $W = \vec{F}\cdot\vec{d}$ به دست می‌آید که در آن $\vec{F}$ نیرو و $\vec{d}$ جابه‌جایی است. این نیرو قائم و به طرف پایین و بزرگی آن mg است، که m جرم قطعه یخ است، پس داریم $W = mgh$ که h ارتفاع سقوط قطعه یخ است. این ارتفاع با شعاع ظرف برابر است. بنابراین، داریم

$$W = mgr = (۲/۰۰\times۱۰^{-۳}\,\mathrm{kg})(۹/۸\,\mathrm{m/s^۲})(۲۲/۰\times۱۰^{-۲}\,\mathrm{m}) = ۴/۳۱\times۱۰^{-۳}\,\mathrm{J}$$

(ب) نیروی گرانش پایستار است، لذا تغییر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه قطعه یخ + زمین با منفی کار انجام شده برابر است:

$$\Delta U = -W = -۴/۳۱\times۱۰^{-۳}\,\mathrm{J}$$

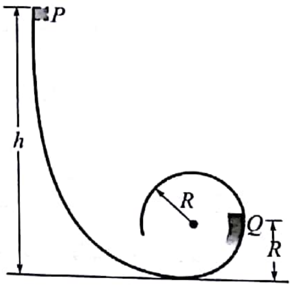
(پ) موقعی که قطعه یخ در بالا قرار دارد، انرژی پتانسیل آن به اندازه $|\Delta U|$ نسبت به موقعی که در پایین قرار دارد، بیشتر است؛ یعنی انرژی در بالا $U = +۴/۳۱\times۱۰^{-۳}\,\mathrm{J}$ است.

(ت) اگر در بالا $U = ۰$ باشد، در آن صورت در پایین داریم $U = -۴/۳۱\times۱۰^{-۳}\,\mathrm{J}$.

(ث) همه‌ی پاسخ‌ها با جرم قطعه یخ متناسب‌اند. پس اگر جرم دو برابر شود، پاسخ‌ها نیز دو برابر می‌شوند.

** ۶ در شکل ۸-۳۳، جسم کوچکی به جرم $m = ۰/۰۳۲\,\mathrm{kg}$ می‌تواند روی مسیر حلقه‌ای بی‌اصطکاکی به شعاع $R = ۱۲\,\mathrm{cm}$

بلغزد. جسم از نقطه‌ی P واقع در ارتفاع $h = ۵٫۰R$ بالاتر از قسمت پایینی حلقه، از حال سکون رها می‌شود. هنگامی که جسم از نقطه‌ی P تا (الف) نقطه‌ی Q و (ب) نقطه‌ی بالای حلقه حرکت می‌کند، نیروی گرانشی چقدر کار روی جسم انجام می‌دهد؟ اگر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه جسم - زمین در پایین حلقه صفر فرض شود، انرژی پتانسیل آن هنگامی که جسم در (پ) نقطه‌ی P، (ت) نقطه‌ی Q، و (ث) نقطه‌ی بالای حلقه قرار دارد، چقدر است؟ (ج) اگر جسم را به جای رها کردن، با یک تندی آغازی رو به پایین بلغزانیم، آیا بزرگی پاسخ‌های قسمت‌های (الف) تا (ث) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟



شکل ۸-۳۳ مسئله‌های ۶ و ۱۷.

حل: از معادله‌ی ۷-۱۲ برای پیدا کردن W_g و از معادله‌ی ۸-۹ برای پیدا کردن U استفاده می‌کنیم.

(الف) جابه‌جایی در بین نقطه‌ی آغازی و نقطه‌ی Q، دارای مؤلفه‌ی قائم رو به پایین $h - R$ (هم‌جهت با $\vec{F}_g$) است، در نتیجه (به ازای $h = ۵R$) داریم

$$W_g = \vec{F}_g \cdot \vec{d} = ۴mgR$$

$$= ۴(۳٫۲۰\times ۱۰^{-۲}\,\text{kg})(۹٫۸۰\,\text{m/s}^۲)(۰٫۱۲\,\text{m}) = ۰٫۱۵\,\text{J}$$

(ب) جابه‌جایی در بین نقطه‌ی آغازی و بالای حلقه دارای مؤلفه‌ی قائم رو به پایین $h - ۲R$ (هم‌جهت با $\vec{F}_g$) است، در نتیجه (به‌ازای $h = ۵R$) داریم

$$W_g = \vec{F}_g \cdot \vec{d} = ۳mgR$$

$$= ۳(۳٫۲۰\times ۱۰^{-۲}\,\text{kg})(۹٫۸۰\,\text{m/s}^۲)(۰٫۱۲\,\text{m}) = ۰٫۱۱۳\,\text{J}$$

(پ) به ازای $y = h = ۵R$ در نقطه‌ی P داریم

$$U = ۵mgR$$

$$= ۵(۳٫۲۰\times ۱۰^{-۲}\,\text{kg})(۹٫۸۰\,\text{m/s}^۲)(۰٫۱۲\,\text{m}) = ۰٫۱۸۸\,\text{J}$$

(ت) به ازای $y = R$ در نقطه‌ی Q داریم

$$U = mgR = (۳٫۲۰\times ۱۰^{-۲}\,\text{kg})(۹٫۸۰\,\text{m/s}^۲)(۰٫۱۲\,\text{m}) = ۰٫۰۳۸\,\text{J}.$$

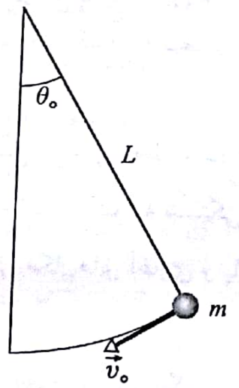
(ث) به ازای $y = ۲R$ در بالای حلقه داریم

$$U = ۲mgR$$

$$= ۲(۳٫۲۰\times ۱۰^{-۲}\,\text{kg})(۹٫۸۰\,\text{m/s}^۲)(۰٫۱۲\,\text{m}) = ۰٫۰۷۵\,\text{J}$$

(ج) اطلاعات جدید $(v_i \neq ۰)$ در هیچ یک از محاسبات قبلی تأثیری ندارد؛ بنابراین نتایج قبلی تغییر نمی‌کنند.

** ۷ شکل ۸-۳۴ میله‌ی باریکی به طول $L = ۲٫۰۰\,\text{m}$ و جرم ناچیز را نشان می‌دهد که می‌تواند به دور یک سر خود در روی دایره‌ای قائم بچرخد و به سر دیگر میله گلوله‌ای به جرم $m = ۵٫۰۰\,\text{kg}$ وصل شده است. میله را تحت زاویه‌ی $\theta_۰ = ۳۰٫۰^\circ$ به یک سو می‌کشیم و آن را با سرعت آغازی $\vec{v}_۰ = ۰$ رها می‌کنیم. وقتی گلوله به پایین‌ترین نقطه‌ی مسیر خود می‌رسد، (الف) نیروی گرانشی چقدر کار بر روی آن انجام می‌دهد و (ب) تغییر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه گلوله - زمین چقدر است؟ (پ) اگر انرژی پتانسیل گرانشی در پایین‌ترین نقطه‌ی مسیر گلوله صفر انتخاب شود، مقدار این انرژی درست در لحظه‌ی رها شدن چقدر است؟ (ت) اگر زاویه‌ی $\theta_۰$ را افزایش دهیم، آیا بزرگی پاسخ‌های قسمت‌های (الف) تا (پ) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد یا ثابت می‌ماند؟



شکل ۸-۳۴ مسئله‌های ۷، ۱۸ و ۲۱.

حل: مشکل اصلی برای دانشجوها در این مسئله‌ها، استفاده از مثلثات برای پیدا کردن ارتفاع گلوله (نسبت به نقطه‌ی آویز) $h = L - L\cos\theta$ (برای زاویه‌ی θ اندازه‌گیری شده از راستای قائم در شکل ۸-۳۴) است. وقتی این رابطه به دست آمد (که در این جا

اثبات نمی‌کنیم) نتایج اساسی این مسئله با کمک معادلات ۷-۱۲ (برای W_g) و ۸-۹ (برای U) به دست می‌آیند.

(الف) جهت مؤلفه‌ی قائم بردار جابه‌جایی به طرف پایین و بزرگی آن h است، در نتیجه داریم

$$W_g = \vec{F}_g \cdot \vec{d} = mgh = mgL(1-\cos\theta)$$
$$= (۵/۰۰\text{kg})(۹/۸۰\text{m/s}^۲)(۲/۰۰\text{m})(1-\cos ۳۰^\circ) = ۱۳/۱\text{J}$$

(ب) از معادله ۸-۱ داریم

$$\Delta U = -W_g = -mgL(1-\cos\theta) = -۱۳/۱\text{J}$$

(پ) به ازای $h = ۰$، از معادله‌ی ۸-۹ داریم

$$U = mgL(1-\cos\theta) = ۱۳/۱\text{J}$$

(ت) وقتی زاویه افزایش می‌یابد، می‌بینیم که ارتفاع h نیز افزایش می‌یابد (و با اندکی عملیات ریاضی می‌توان نشان داد که $\cos\theta$ کاهش می‌یابد و البته $1-\cos\theta$ افزایش پیدا می‌کند)، در نتیجه پاسخ‌های قسمت‌های (الف) و (ب) افزایش می‌یابند، و مقدار مطلق پاسخ قسمت (ب) نیز افزایش پیدا می‌کند.

** ۸ گلوله‌ی برفی به جرم $۱/۵۰\text{kg}$ از بالای پرتگاهی به ارتفاع $۱۲/۵\text{m}$ پرتاب می‌شود. سرعت آغازی گلوله $۱۴/۰\text{m/s}$ تحت راستای ۴۱/۰ درجه‌ی بالای افق است. (الف) در حین پرواز گلوله‌ی برف تا رسیدن به سطح زمین در پایین پرتگاه نیروی گرانشی چقدر کار روی گلوله انجام می‌دهد؟ (ب) تغییر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه گلوله‌ی برف ـ زمین در حین پرواز چقدر است؟ (پ) اگر انرژی پتانسیل گرانشی را در بالای پرتگاه صفر بگیریم، مقدار آن در هنگامی که گلوله‌ی برف به زمین می‌رسد، چقدر است؟

حل: (الف) نیروی گرانش ثابت است، در نتیجه کار انجام شده از رابطه‌ی $W = \vec{F}\cdot\vec{d}$ به دست می‌آید که در آن $\vec{F}$ نیرو و $\vec{d}$ جابه‌جایی است. جهت این نیرو به طور قائم به طرف پایین و بزرگی آن mg و m جرم گلوله‌ی برفی است. رابطه‌ی کار به صورت $W = mgh$ ساده می‌شود که h ارتفاع سقوط گلوله‌ی برفی است:

$$W = mgh = (۱/۵۰\text{kg})(۹/۸۰\text{m/s}^۲)(۱۲/۵\text{m}) = ۱۸۴\text{J}$$

(ب) نیروی گرانش پایستار است، در نتیجه تغییر انرژی پتانسیل دستگاه گلوله‌ی برفی ـ زمین با منفی کاری که نیروی گرانش انجام می‌دهد برابر است: $\Delta U = -W = -۱۸۴\text{J}$.

(پ) وقتی گلوله‌ی برفی به زمین می‌رسد، انرژی پتانسیل آن به اندازه‌ی $|\Delta U|$ از انرژی پتانسیل گلوله‌ی برفی در لحظه‌ی پرتاب بیشتر است، بنابراین در لحظه‌ای که گلوله به زمین برخورد می‌کند، انرژی پتانسیل آن $U = -۱۶۹\text{J}$ است.

پودمان ۸-۲ پایستگی انرژی مکانیکی

* ۹ در مسئله‌ی ۲، تندی قطار در (الف) نقطه‌ی A، (ب) نقطه‌ی B، و (پ) نقطه‌ی C، چقدر است؟ (ت) در تپه‌ی آخر که برای عبور به نسبت بلند است، قطار تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟ (ث) اگر از قطار دیگری با جرم دو برابر استفاده شود، بزرگی پاسخ‌های قسمت‌های (الف) تا (ت) چه خواهد بود؟

حل: از معادله‌ی ۸-۱۷ استفاده می‌کنیم که پایستگی انرژی مکانیکی (که در آن نیروی اصطکاک و نیروهای اتلافی دیگر چشمپوشی شده است) را توصیف می‌کند.

(الف) در مسئله‌ی ۹-۲، $U = mgh$ (نسبت به مکان مرجع واقع در C) را به دست آوردیم. باز هم با توجه به شکل ۸-۲۷، معلوم می‌شود که این مقدار همان U_0 است و در نتیجه داریم $K_A = K_0$ و از آن‌جا داریم

$$v_A = v_0 = ۱۷/۰\text{m/s}$$

(ب) در حل مسئله‌ی ۹-۲ رابطه‌ی $U_B = mgh/۲$ را نیز به دست آوردیم. در این حالت داریم

$$K_0 + U_0 = K_B + U_B$$
$$\frac{۱}{۲}mv_0^۲ + mgh = \frac{۱}{۲}mv_B^۲ + mg\left(\frac{h}{۲}\right)$$

در نتیجه داریم

$$v_B = \sqrt{v_0^۲ + gh}$$
$$= \sqrt{(۱۷/۰\text{m/s})^۲ + (۹/۸۰\text{m/s}^۲)(۴۲/۰\text{m})} = ۲۶/۵\text{m/s}$$

(پ) به طور مشابه داریم

$$v_C = \sqrt{v_0^۲ + ۲gh}$$
$$= \sqrt{(۱۷/۰\text{m/s})^۲ + ۲(۹/۸۰\text{m/s}^۲)(۴۲/۰\text{m})} = ۳۳/۴\text{m/s}$$

(ت) برای پیدا کردن ارتفاع «پایانی»، $K_f = ۰$ را قرار می‌دهیم. در این حالت داریم

$$K_0 + U_0 = K_f + U_f$$
$$\frac{۱}{۲}mv_0^۲ + mgh = ۰ + mgh_f$$

که از آن‌جا مقدار زیر به دست می‌آید

$$h_f = h + \frac{v_0^2}{2g} = ۴۲{,}۰\,\mathrm{m} + \frac{(۱۷{,}۰\,\mathrm{m/s})^2}{۲(۹{,}۸۰\,\mathrm{m/s^2})} = ۵۶{,}۷\,\mathrm{m}$$

(ث) واضح است که نتایج به دست آمده به جرم بستگی ندارنـد. در نتیجه، اگر جرم دیگری برای قطار در نظر گرفته شـود، بایـد همـان نتایج به دست آیند.

* ۱۰ (الف) در مسئله‌ی ۳، تندی کتاب هنگام رسیدن به دست‌ها چقدر است؟ (ب) اگر از کتاب دیگری با جرم دو برابر استفاده کنیم، تندی آن چقدر خواهد بود؟ (پ) اگر همان کتاب اولـی را با یک تندی آغازی به پـایین پرتـاب کنـیم، آیـا بزرگـی پاسـخ قسمت (الف) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟

حل: از معادله‌ی ۸–۱۷ استفاده می‌کنیم که پایستگی انرژی مکانیکی را (کـه در آن از نیـروی اصـطکاک و اثـرات تلـف کننـده‌ی دیگـر چشمپوشی شده است) توصیف می‌کند.

(الف) در حل مسئله‌ی ۹–۳ (که در این مسئله به آن اشاره می‌کنـیم) $U_f = mgy_f = ۲۹{,}۰\,\mathrm{J}$ و $U_i = mgy_i = ۱۹۶\,\mathrm{J}$ را (بـا ایـن فرض که مکان مرجع در روی زمین قرار دارد) بـه دسـت آوردیـم. چون در این حالت $K_i = ۰$ است، داریم

$$۰ + ۱۹۶\,\mathrm{J} = K_f + ۲۹{,}۰\,\mathrm{J}$$

در نتیجـــــــــه $K_f = ۱۶۷\,\mathrm{J}$ و نهایتـــــــــاً

$v = \sqrt{\frac{۲K_f}{m}} = \sqrt{\frac{۲(۱۶۷\,\mathrm{J})}{۲{,}۰۰\,\mathrm{kg}}} = ۱۲{,}۹\,\mathrm{m/s}$ به دست می‌آید.

(ب) اگر عملیات جبری در محاسبه‌ی قسمت (الف) را ادامه دهـیم، $K_f = -\Delta U = mgh$ به دست می‌آید کـه در آن $h = y_i - y_f$ و یک مقدار مثبت است. در نتیجه داریم

$$v = \sqrt{\frac{۲K_f}{m}} = \sqrt{۲gh}$$

این نتیجه را از معادلات جدول ۲–۱ (به ویژه معادلـه‌ی ۲–۱۶) نیـز می‌توان به دست آورد. این واقعیت که پاسخ مستقل از جـرم اسـت، نشان می‌دهد که پاسخ قسمت (ب) مانند پاسخ قسمت (الف) است، یعنی $v = ۱۲{,}۹\,\mathrm{m/s}$.

(پ) اگر $K_i \neq ۰$ باشد در آن صـورت $K_f = mgh + K_i$ اسـت (که K_i باید مقداری مثبت باشد). به این ترتیب مقدار K_f بیشتر از مقدار آن در قسمت‌های قبلی خواهد بود و مقدار بیشـتری بـرای v نیز به دست خواهد آمد.

* ۱۱ (الف) در مسئله‌ی ۵، تندی قطعه یخ هنگام رسـیدن بـه تـه ظرف چقدر است؟ (ب) اگر از قطعـه یخـی بـا جـرم دو برابـر استفاده کنیم، تندی آن چقدر خواهد بود؟ (پ) اگر همان قطعـه یخ را با یک تندی آغازی به سمت پـایین بلغـزانیم، آیـا بزرگـی پاسخ قسمت (الف) افزایش می‌یابد، کاهش مـی‌یابـد، یـا ثابـت می‌ماند؟

حل: (الف) اگر K_i انرژی جنبشی آغازی قطعه یخ در لبه‌ی ظرف باشد، K_f انرژی جنبشـی آن در تـه ظـرف، U_i انـرژی پتانسـیل گرانشی دستگاه قطعه یخ + زمین در حالی که قطعه یخ در بالا قـرار دارد، و U_f انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه قطعـه یـخ + زمـین در حالی کـه قطعـه یـخ در پـایین ظـرف قـرار دارد، اسـت. در نتیجه $K_f + U_f = K_i + U_i$.

انرژی پتانسیل در ته ظرف را صفر در نظر می‌گیـریم، در نتیجـه انرژی پتانسیل در بالای ظرف $U_i = mgr$ است که $r = ۰{,}۲۲۰\,\mathrm{m}$ شعاع ظرف و m جرم قطعه یـخ اسـت. چـون قطعـه یـخ از حـال سکون شروع به حرکت می‌کند، $K_i = ۰$ است. چون تنـدی قطعـه در ته ظرف خواسـته شـده اسـت، مـی‌نویسـیم $K_f = \frac{1}{۲}mv^2$. از پایستگی انرژی داریم

$$W_g = \vec{F}_g \cdot \vec{d} = mgh = mgL(1-\cos\theta)$$

تندی قطعه یخ برابر است با

$$v = \sqrt{۲gr} = \sqrt{۲(۹{,}۸\,\mathrm{m/s^2})(۰{,}۲۲۰\,\mathrm{m})} = ۲{,}۰۸\,\mathrm{m/s}$$

(ب) چون رابطه‌ی تندی شامل جرم قطعه یخ نیسـت، تنـدی همـان مقدار $۲{,}۰۸\,\mathrm{m/s}$ است و به جرم قطعه یخ بستگی ندارد.

(پ) انـرژی جنبشـی پایـانی از رابطـه‌ی $K_f = K_i + U_i - U_f$ به‌دست می‌آید. چون K_i بیشتر از قبل است، K_f بزرگ‌تر است. بنابراین، تندی پایانی قطعه یخ بیشتر است.

*** ۱۲ (الف) در مسئله‌ی ۸، با استفاده کـردن از روش انـرژی بـه جای روش‌های به کار رفته در فصل ۴، تندی گلولـه‌ی بـرف را هنگام رسیدن به زمـین در پـایین پرتگـاه پیـدا کنیـد. (ب) اگر زاویه‌ی پرتاب به ۴۱٫۰ درجه در *زیر* افق تغییر کند و (پ) اگر جرم گلوله به ۲٫۵۰ kg تغییر کند، تندی گلوله چه خواهد بود؟**

حل: از معادله‌ی ۸–۱۸ استفاده می‌کنیم که پایستگی انرژی مکانیکی

را توصیف می‌کند. برای محاسبه‌ی U، مکان مرجع را در سطح زمین زیر برنگاه در نظر می‌گیریم؛ این مکان در محاسبات ما مکان «پایانی» نیز هست.

(الف) با استفاده از معادله‌ی ۸-۹، انرژی پتانسیل آغازی از رابطه‌ی $U_i = mgh$ به دست می‌آید که در آن $h = ۱۲٫۵\ \text{m}$ و $m = ۱٫۵۰\ \text{kg}$ است. در نتیجه داریم

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$
$$\frac{۱}{۲}mv_i^۲ + mgh = \frac{۱}{۲}mv^۲ + ۰$$

در نتیجه، تندی گلوله‌ی برفی در لحظه‌ی برخورد به زمین برابر است با

$$v = \sqrt{\frac{۲}{m}\left(\frac{۱}{۲}mv_i^۲ + mgh\right)} = \sqrt{v_i^۲ + ۲gh}$$

در این‌جا $v_i = ۱۴٫۰\ \text{m/s}$ بزرگی سرعت آغازی (نه فقط یک مؤلفه‌ی آن) است. بنابراین، $v = ۲۱٫۰\ \text{m/s}$ به دست می‌آید.

(ب) همان‌طور که در بالا اشاره شد، v_i بزرگی سرعت آغازی است نه فقط یک مؤلفه‌ی آن؛ بنابراین، این سرعت به زاویه‌ی پرتاب بستگی ندارد. باز هم پاسخ ۲۱٫۰ m/s است.

(پ) روشن است که نتیجه‌ی به دست آمده برای v در قسمت (الف) به جرم بستگی ندارد. بنابراین، با تغییر جرم گلوله‌ی برفی، v تغییر نمی‌کند.

* ۱۳ ساچمه‌ای ۵٫۰ گرمی با استفاده از یک تفنگ فنری به طور قائم به بالا شلیک می‌شود. اگر فنر تفنگ به اندازه‌ی ۸٫۰ cm متراکم شود، ساچمه درست به هدفی که در ۲۰ متری بالای فنر متراکم شده قرار دارد، می‌رسد. (الف) در حین این صعود ۲۰ متری، تغییر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه ساچمه ـ زمین، U_g، چقدر است؟ (ب) تغییر انرژی پتانسیل کشسانی فنر، U_s، در حین شلیک شدن ساچمه چقدر است؟ (پ) ثابت فنر چقدر است؟

حل: نقطه‌ی مرجع برای انرژی پتانسیل گرانشی را در مکان ساچمه و در حالی که فنر متراکم شده است، در نظر می‌گیریم.

(الف) وقتی ساچمه در بالای مسیر حرکت قرار دارد، انرژی پتانسیل گرانشی $U_g = mgh$ است که در آن $h = ۲۰\ \text{m}$ ارتفاع بالاترین نقطه است. پس، داریم

$$U_g = (۵٫۰ \times ۱۰^{-۳}\ \text{kg})(۹٫۸\ \text{m/s}^۲)(۲۰\ \text{m}) = ۰٫۹۸\ \text{J}$$

(ب) چون انرژی جنبشی در نقطه‌ی رها شدن ساچمه در بالاترین ارتفاع صفر است، در نتیجه از پایستگی انرژی مکانیکی داریم $\Delta U_g + \Delta U_s = ۰$ که در آن ΔU_s تغییر انرژی پتانسیل کشسانی فنر است. بنابراین داریم $\Delta U_s = -\Delta U_g = -۰٫۹۸\ \text{J}$.

(پ) وقتی فنر کشیده نشده است، انرژی پتانسیل آن را صفر در نظر می‌گیریم. بنابراین، نتیجه‌ی به دست آمده در قسمت قبلی ایجاب می‌کند که انرژی پتانسیل آغازی آن $U_s = ۰٫۹۸\ \text{J}$ باشد. این مقدار باید با $\frac{۱}{۲}kx^۲$ مساوی باشد، که k ثابت فنری و x میزان تراکم آغازی است. در نتیجه داریم

$$k = \frac{۲U_s}{x^۲} = \frac{۲(۰٫۹۸\ \text{J})}{(۰٫۰۸۰\ \text{m})^۲} = ۳٫۱ \times ۱۰^۲\ \text{N/m} = ۳٫۱\ \text{N/cm}$$

* ۱۴ (الف) در مسئله‌ی ۴، چه تندی آغازی‌ای باید به گلوله داده شود تا با تندی صفر به بالاترین نقطه برسد؟ در این صورت، تندی گلوله در (ب) پایین‌ترین نقطه و (پ) نقطه‌ی واقع در سمت راست و هم سطح با نقطه‌ی آغازی چقدر خواهد بود؟ (ت) اگر جرم گلوله دو برابر شود، آیا بزرگی پاسخ‌های قسمت‌های (الف) تا (پ) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟

حل: از معادله‌ی ۸-۱۶ که پایسته بودن انرژی مکانیکی را (از نیروی اصطکاک و اثرهای اتلافی دیگر چشم‌پوشی می‌کنیم) توصیف می‌کند، استفاده می‌کنیم.

(الف) وقتی گلوله به بالاترین نقطه می‌رود، تغییر انرژی پتانسیل آن $\Delta U = mgL$ است. در نتیجه داریم

$$\Delta K + \Delta U = ۰$$
$$K_{\text{بالا}} - K_۰ + mgL = ۰$$

بعد از قرار دادن $K_{\text{بالا}} = ۰$، $K_۰ = mgL$ به دست می‌آید و در نتیجه داریم

$$v_۰ = \sqrt{\frac{۲K_۰}{m}} = \sqrt{۲gL}$$
$$= \sqrt{۲(۹٫۸۰\ \text{m/s}^۲)(۰٫۴۵۲\ \text{m})} = ۲٫۹۸\ \text{m/s}$$

(ب) باز هم از مسئله‌ی ۹-۴ معلوم می‌شود که وقتی گلوله از نقطه‌ی آغازی به پایین‌ترین نقطه (ته ظرف) می‌رود، تغییر انرژی

پتانسیل $\Delta U = -mgL$ است. بنابراین داریم

$$\Delta K + \Delta U = ۰$$

$$K_{\text{پایین}} - K_۰ + mgL = ۰$$

که به ازای $K_۰ = mgL$، داریم $K_{\text{پایین}} = ۲mgL$. در نتیجه داریم

$$v_{\text{پایین}} = \sqrt{\frac{۲K_{\text{پایین}}}{m}} = \sqrt{۴gL}$$

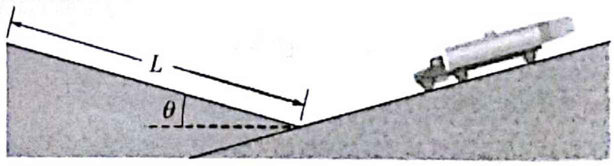
$$= \sqrt{۴(۹/۸۰\,m/s^۲)(۰/۴۵۲\,m)} = ۴/۲۱\,m/s$$

(پ) چون ارتفاع (در هنگام رفتن گلوله از نقطه‌ی آغازی به بالاترین نقطه) تغییر نمی‌کند، در نتیجه $\Delta U = ۰$، که ایجاب می‌کند $\Delta K = ۰$ باشد. بنابراین، تندی با همان مقدار آغازی برابر است

$$v_{\text{راست}} = v_۰ = ۲/۹۸\,m/s$$

(ت) از محاسبات بالا روشن است که نتایج به جرم بستگی ندارند. پس، اگر گلوله جرم دیگری داشته باشد، همین نتایج به دست می‌آیند.

* ۱۵ در شکل ۸-۳۵، پیش از آنکه راننده کامیون را به بالای شیب‌راهه‌ی فرار اضطراری بی‌اصطکاک با زاویه‌ی شیب ۱۵ درجه هدایت کند، کامیون با ترمزهای معیوب با تندی ۱۳۰ km/h به سمت پایین در حال حرکت است. جرم کامیون $۱/۲\times۱۰^۴$kg است. (الف) کمینه‌ی طول شیب‌راهه‌ی فرار L، چقدر باید باشد تا کامیون به حال توقف لحظه‌ای برسد؟ (کامیون را یک ذره فرض کنید و این فرض را توجیه کنید). آیا طول کمینه‌ی L (ب) با کاهش یافتن جرم کامیون و (پ) با کاهش یافتن تندی کامیون، افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟



شکل ۸-۳۵ مسئله‌ی ۱۵.

حل: از هرگونه کار انجام‌شده توسط اصطکاک چشم‌پوشی می‌کنیم. سرعت را تبدیل می‌کنیم: $v = ۱۳۰(۱۰۰۰/۳۶۰۰) = ۳۶/۱\,m/s$

(الف) از معادله‌ی ۸-۱۷ استفاده می‌کنیم: $K_f + U_f = K_i + U_i$، که به ازای $U_i = ۰$ و $U_f = mgh$، داریم $K_f = ۰$. چون $K_i = \frac{۱}{۲}mv^۲$، که v تندی آغازی کامیون است، داریم

$$\frac{۱}{۲}mv^۲ = mgh \Rightarrow h = \frac{v^۲}{۲g} = \frac{(۳۶/۱\,m/s)^۲}{۲(۹/۸\,m/s^۲)} = ۶۶/۵\,m$$

اگر L طول سطح شیب‌دار باشد، $L\sin ۱۵° = ۶۶/۵\,m$، در نتیجه $L = (۶۶/۵\,m)/\sin ۱۵° = ۲۵۷\,m$. بنابراین، اگر اصطکاک ناچیز باشد، طول سطح شیب‌دار باید در حدود $۲/۶\times۱۰^۲\,m$ باشد.

(ب) پاسخ‌ها به جرم کامیون بستگی ندارند. پس اگر جرم کاهش یابد، پاسخ‌ها تغییر نمی‌کنند.

(پ) اگر تندی کاهش یابد، h و L هر دو کاهش می‌یابند (توجه کنید که h با مربع تندی و L با h متناسب است).

** ۱۶ جسمی ۷۰۰ گرمی از ارتفاع $h_۰$ بالای یک فنر قائم با ثابت فنری $k = ۴۰۰\,N/m$ و جرم ناچیز از حال سکون رها می‌شود. جسم به فنر برخورد می‌کند و پس از متراکم کردن فنر به اندازه‌ی ۱۹/۰cm در یک لحظه متوقف می‌شود. چه مقدار کار (الف) توسط جسم روی فنر و (ب) توسط فنر روی جسم، انجام می‌شود؟ (پ) مقدار $h_۰$ چقدر است؟ (ت) اگر جسم از ارتفاع $۲/۰۰h_۰$ بالای فنر رها شود، بیشینه‌ی مقدار تراکم فنر چقدر خواهد بود؟

حل: مکان مرجع برای براورد انرژی پتانسیل گرانشی را در مکان آرامش (بدون تراکم) فنر انتخاب می‌کنیم. x را مقدار تراکم فنر در نظر می‌گیریم که به طرف پایین مثبت است (در نتیجه $x > ۰$ به این معنی است که فنر متراکم شده است).

(الف) به ازای $x = ۰/۱۹۰\,m$، کار انجام شده توسط نیروی فنر، از معادله‌ی ۷-۲۶ به دست می‌آید

$$W_s = -\frac{۱}{۲}kx^۲ = -۸/۱۲\,J \approx -۷/۲\,J$$

با استفاده از قانون سوم نیوتون، معلوم می‌شود که کار انجام شده روی فنر ۷/۲J است.

(ب) همان طور که در بالا گفته شد: $W_s = -۷/۲\,J$ است.

(پ) از پایستگی انرژی داریم

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$mgh_۰ = -mgx + \frac{۱}{۲}kx^۲$$

که از آن‌جا (به‌ازای $m = ۰/۷۰\,kg$)، $h_۰ = ۰/۸۶\,m$ به‌دست می‌آید.

(ت) برای ارتفاع جدید $۱٫۷۲\,m$، مقدار جدید x را از فرمول معادله‌ی درجه دوم (با درنظرگرفتن ریشه‌ی مثبت $x > ۰$) به‌دست می‌آوریم:

$$mgh'_t = -mgx + \frac{۱}{۲}kx^{۲} \Rightarrow x = \frac{mg + \sqrt{(mg)^{۲} + ۲mgkh'_t}}{k}$$

در نتیجه $x = ۰٫۲۶\,m$ به دست می‌آید.

۱۷ ** در مسئله‌ی ۶، بزرگی (الف) مؤلفه‌ی افقی و (ب) مؤلفه‌ی قائم ***نیروی برایند*** وارد به جسم در نقطه‌ی Q چیست؟ (پ) جسم از چه ارتفاع h باید از حال سکون رها شود تا در بالاترین نقطه‌ی حلقه در آستانه‌ی جدا شدن از حلقه قرار گیرد (***قرار گرفتن جسم در آستانه‌ی جدا شدن***، درست به معنی صفر شدن نیروی عمودی وارد به جسم از سوی مسیر است). (ت) نمودار بزرگی نیروی عمودی وارد به جسم در بالای حلقه را برحسب ارتفاع آغازی h، در گستره‌ی $h = ۰$ تا $h = ۶R$، رسم کنید.

حل: (الف) در نقطه‌ی Q، جسم (که در آن نقطه در حال حرکت دورانی است) شتاب مرکزگرای رو به سمت چپ $v^{۲}/R$ را تحمل می‌کند. $v^{۲}$ را از پایستگی انرژی به دست می‌آوریم:

$$K_P + U_P = K_Q + U_Q$$

$$۰ + mgh = \frac{۱}{۲}mv^{۲} + mgR$$

با دانستن $h = ۵R$، داریم $mv^{۲} = ۸mgR$. در نتیجه، مؤلفه‌ی افقی نیروی برایند وارد شده به جسم Q برابر است با

$$F = mv^{۲}/R = ۸mg = (۰٫۰۳۲\,kg)(۹٫۸\,m/s^{۲}) = ۲٫۵\,N$$

جهت به طرف چپ (در جهت $\vec{a}$) است.

(ب) مؤلفه‌ی رو به پایین نیروی برایند وارد بر جسم در نقطه‌ی Q، نیروی رو به پایین گرانش است:

$$F = mg = (۰٫۰۳۲\,kg)(۹٫۸\,m/s^{۲}) = ۰٫۳۱\,N$$

(پ) وقتی جسم به بالاترین نقطه‌ی حلقه می‌رسد، نیروی مرکزگرا باید با نیروی گرانش برابر باشد:

$$\frac{mv_t^{۲}}{R} = mg \Rightarrow mv_t^{۲} = mgR$$

این امر ایجاب می‌کند مقدار متفاوتی برای h نسبت به مقدار به کار رفته در بالا به دست آید:

$$K_P + U_P = K_t + U_t$$

$$۰ + mgh = \frac{۱}{۲}mv_t^{۲} + mgh_t$$

$$mgh = \frac{۱}{۲}(mgR) + mg(۲R)$$

درنتیجه $h = ۲٫۵R = (۲٫۵)(۰٫۱۲\,m) = ۰٫۳۰\,m$ به‌دست می‌آید.

(ت) نیروی عمودی F_N برای تندی‌های بالاتر از $\sqrt{gR}$ (تنها امکان برای صفر نبودن F_N ـ به حل قسمت قبلی توجه کنید) با استفاده از قانون دوم نیوتون به دست می‌آید:

$$F_N = \frac{mv_t^{۲}}{R} - mg$$

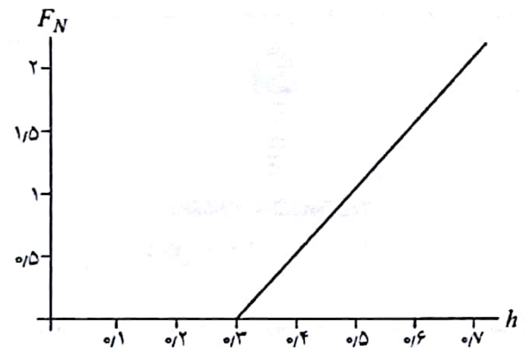
چون $v_t^{۲}$ از طریق پایستگی انرژی به h بستگی دارد، می‌توان نوشت

$$K_P + U_P = K_t + U_t \Rightarrow gh = \frac{۱}{۲}v_t^{۲} + ۲gR$$

بنابراین، نیروی عمودی به صورت تابعی از h ($h \geq ۲٫۵R$ ـ راه حل قسمت قبلی را ببینید) در می‌آید:

$$F_N = \frac{۲mgh}{R} - ۵mg$$

در نتیجه نمودار به ازای $h \geq ۲٫۵R = ۰٫۳۰\,m$ مانند یک خط راست با شیب مثبت $۲mg/R$ است. توجه کنید که به ازای $h \leq ۲٫۵R$، نیروی عمودی صفر است.



۱۸ ** (الف) در مسئله‌ی ۷، تندی گلوله در پایین‌ترین نقطه چقدر است؟ (ب) اگر جرم گلوله افزایش یابد، آیا تندی آن افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟

حل: از معادله‌ی ۸-۱۸ که پایستگی انرژی مکانیکی را نشان می‌دهد، استفاده می‌کنیم. مکان مرجع برای محاسبه‌ی U، پایین‌ترین نقطه‌ی نوسان است:

(الف) انرژی پتانسیل در مکان نشان داده شده در شکل ۸-۳۲ (که به‌عنوان مکان آغازی درنظر گرفته می‌شود)، $U = mgL(۱ - \cos\theta)$ است. در نتیجه داریم

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$۰ + mgL(۱ - \cos\theta) = \frac{۱}{۲}mv^{۲} + ۰$$

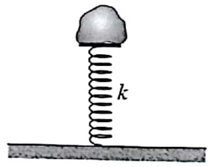
در نتیجه خواهیم داشت:

$$v=\sqrt{\frac{۲mgL\,(۱-\cos\theta)}{m}}=\sqrt{۲gL\,(۱-\cos\theta)}$$

در رابطه‌ی بالا مقادیر $L=۲{,}۰۰\,\mathrm{m}$ و $\theta=۳۰{,}۰^\circ$ را قرار می‌دهیم و $v=۲{,}۲۹\,\mathrm{m/s}$ را به دست می‌آوریم.

(ب) روشن است که نتیجه‌ی به دست آمده برای v به جرم بستگی ندارد. در نتیجه، اگر جرم گلوله تغییر کند، نتیجه‌ی v تغییر نمی‌کند.

** ۱۹ شکل ۸-۳۶ سنگی به جرم $۸{,}۰۰\,\mathrm{kg}$ را نشان می‌دهد که روی فنری به حال سکون قرار دارد. فنر به وسیله‌ی سنگ به اندازه‌ی $۱۰{,}۰\,\mathrm{cm}$ متراکم شده است. (الف) ثابت فنر چقدر است؟ (ب) سنگ را به اندازه‌ی $۳۰{,}۰\,\mathrm{cm}$ دیگر به پایین فشار می‌دهیم و آن را رها می‌کنیم. انرژی پتانسیل کشسانی فنر متراکم شده، درست پیش از رها شدن سنگ چقدر است؟ (پ) وقتی سنگ از نقطه‌ی رها شدن تا ارتفاع بیشینه حرکت می‌کند، تغییر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه سنگ ـ زمین چقدر است؟ (ت) این ارتفاع بیشینه نسبت به نقطه‌ی رها شدن چقدر است؟



شکل ۸-۳۶ مسئله‌ی ۱۹.

حل: از یکاهای SI استفاده می‌کنیم و جهت $+y$ را به طرف بالا در نظر می‌گیریم. هم‌چنین، مکان آرامش (متراکم نشده‌ی) انتهای بالایی فنر را به عنوان مبداء انتخاب می‌کنیم، در نتیجه میزان تراکم آغازی فنر (وضعیت تعادل بین نیروی فنر و نیروی گرانش)، $y_۰=-۰{,}۱۰۰\,\mathrm{m}$ است و تراکم بیشتر آن را به مکان $y_۱=-۰{,}۴۰۰\,\mathrm{m}$ می‌برد.

(الف) وقتی سنگ در مکان تعادل $(a=۰)$ قرار دارد، از قانون دوم نیوتون داریم

$$\vec{F}_{\text{net}}=ma$$

$$F_{\text{فنر}}-mg=۰$$

$$-k\,(-۰{,}۱۰۰)-(۸{,}۰۰)(۹{,}۸)=۰$$

در این‌جا از قانون هوک (معادله‌ی ۷-۲۱) استفاده کرده‌ایم. در نتیجه ثابت فنری مساوی با $k=۷۸۴\,\mathrm{N/m}$ به دست می‌آید.

(ب) با فشار دادن بیشتر سنگ به طرف پایین و سپس رها کردن آن، شتاب دیگر صفر نیست و سنگ به طرف بالا حرکت می‌کند، و مقداری از انرژی پتانسیل کشسانی (ذخیره شده در فنر) را به انرژی جنبشی تبدیل می‌کند. مقدار انرژی پتانسیل کشسانی در لحظه‌ی رها شدن سنگ از معادله‌ی ۸-۱۱ به دست می‌آید:

$$U=\frac{۱}{۲}ky_۱^۲=\frac{۱}{۲}(۷۸۴\,\mathrm{N/m})(-۰{,}۴۰۰)^۲=۶۲{,}۷\,\mathrm{J}$$

(پ) ارتفاع بیشینه‌ی $y_۲$ فراتر از نقطه‌ی رها شدن سنگ از فنر (و وارد شدن به حرکت سقوط آزاد) واقع است. در ارتفاع بیشینه تندی سنگ (به طور لحظه‌ای) صفر است. اگر مکان $y_۱$ را به‌عنوان نقطه‌ی مرجع در محاسبه‌ی انرژی پتانسیل گرانشی انتخاب کنیم، داریم

$$K_۱+U_۱=K_۲+U_۲$$

$$۰+\frac{۱}{۲}ky_۱^۲=۰+mgh$$

در این‌جا $h=y_۲-y_۱$ ارتفاع بالاتر از نقطه‌ی رها شدن سنگ است. پس، mgh (انرژی پتانسیل گرانشی) مساوی با پاسخ قبلی $۶۲{,}۷\,\mathrm{J}$ است و از همین مقدار در قسمت بعدی استفاده می‌کنیم.

(ت) داریم $h=ky_۱^۲/۲mg=۰{,}۸۰۰\,\mathrm{m}$، یا $h=۸۰{,}۰\,\mathrm{cm}$.

** ۲۰ آونگی شامل یک سنگ ۲٫۰ کیلوگرمی است که در انتهای یک ریسمان ۴٫۰ متری با جرم ناچیز، تاب می‌خورد. تندی سنگ در هنگام عبور از پایین‌ترین نقطه، $۸{,}۰\,\mathrm{m/s}$ است. (الف) تندی سنگ در لحظه‌ای که ریسمان تحت زاویه‌ی ۶۰ درجه نسبت به راستای قائم قرار دارد، چقدر است؟ (ب) این سنگ در طی حرکتش، تا چه زاویه‌ی بیشینه‌ای نسبت به راستای قائم می‌رسد؟ (پ) اگر انرژی پتانسیل دستگاه آونگ ـ زمین را در پایین‌ترین نقطه‌ی قرار داشتن سنگ صفر انتخاب کنیم، انرژی مکانیکی کل دستگاه چقدر است؟

حل: (الف) نقطه‌ی مرجع انرژی گرانشی را در پایین‌ترین نقطه‌ی نوسان انتخاب می‌کنیم. فرض می‌کنیم θ زاویه نسبت به راستای قائم باشد. درنتیجه ارتفاع y «گلوله»ی آونگ (جسم آویخته‌شده به انتهای آونگ، که در این مسئله سنگ است) از رابطه‌ی $y=L(۱-\cos\theta)$ به دست می‌آید. بنابراین، انرژی پتانسیل گرانشی برابر است با

$$mgy=mgL\,(۱-\cos\theta)$$

وقتی $\theta=۰^\circ$ است (ریسمان در پایین‌ترین نقطه قرار دارد)، گنف

شده که تندی سنگ $8.0\ m/s$ است و در نتیجه انرژی جنبشی آن $64\ J$ (با استفاده از معادله‌ی ۷-۱) است. در زاویه‌ی $\theta = 60°$، انرژی مکانیکی آن برابر است با

$$E_{\text{مکانیکی}} = \frac{1}{2} m v^2 + mgL(1 - \cos\theta)$$

پایستگی انرژی (چون اصطکاک وجود ندارد) ایجاب می‌کند که انرژی مکانیکی مساوی با $64\ J$ باشد. از حل این معادله تندی $v = 5.0\ m/s$ به دست می‌آید.

(ب) اکنون بار دیگر معادله‌ی بالا را مساوی با $64\ J$ قرار می‌دهیم (θ مجهول است) اما تندی صفر است (شرط نقطه‌ی بیشینه یا «نقطه‌ی برگشت»). در نتیجه $\theta_{max} = 79.4°$ به دست می‌آید.

(پ) همان‌طور که در پاسخ قسمت (الف) مشاهده کردیم، انرژی مکانیکی کل $64\ J$ است.

** ۲۱ شکل ۸-۳۲ آونگی به‌طول $L = 1.25\ m$ را نشان می‌دهد. هنگامی که ریسمان با راستای قائم زاویه‌ی $\theta_0 = 40.0°$ می‌سازد، گلوله‌ی آونگ (که تمام جرم آونگ را شامل می‌شود) دارای تندی v_0 است. (الف) به‌ازای $v_0 = 8.00\ m/s$، تندی گلوله در پایین‌ترین نقطه‌ی مسیرش چقدر است؟ کمترین مقدار v_0 چقدر می‌تواند باشد تا آونگ به پایین و سپس به بالا تاب بخورد و ریسمان در حالی که مستقیم است، (ب) به وضعیت افقی، و (پ) به وضعیت قائم، برسد؟ (ت) اگر θ_0 به اندازه‌ی چند درجه افزایش یابد، آیا بزرگی پاسخ‌های قسمت‌های (ب) و (پ) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟

حل: از معادله‌ی ۸-۱۸ که پایستگی انرژی مکانیکی را (با چشمپوشی از اثرات اصطکاک و اثرات اتلافی نیروهای دیگر) توصیف می‌کند، استفاده می‌کنیم. مکان مرجع برای محاسبه‌ی U (و ارتفاع h) را در پایین‌ترین نقطه‌ی نوسان در نظر می‌گیریم.

(الف) شکل نشان می‌دهد که اگر زاویه‌ی θ نسبت به راستای قائم اندازه‌گیری شده باشد، رابطه‌ی $h = L - L\cos\theta$ برقرار است. بنابراین، انرژی پتانسیل گرانشی در مکان نشان داده شده در شکل ۸-۳۲ (مکان آغازی)، $U = mgL(1-\cos\theta_0)$ است. درنتیجه داریم:

$$K_0 + U_0 = K_f + U_f$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + mgL(1-\cos\theta_0) = \frac{1}{2} m v^2 + 0$$

که از آن‌جا بزرگی سرعت گلوله به دست می‌آید:

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}\left[\frac{1}{2} m v_0^2 + mgL(1-\cos\theta_0)\right]} = \sqrt{v_0^2 + 2gL(1-\cos\theta_0)}$$

$$= \sqrt{(8.00\ m/s)^2 + 2(9.80\ m/s^2)(1.25\ m)(1-\cos 40°)}$$

$$= 8.35\ m/s$$

(ب) می‌خواهیم تندی آغازی لازم برای رسیدن گلوله به مکان افقی ـ با مشخصات $v_h = 0$ و $\theta = 90°$ (یا $\theta = -90°$، که البته چون $\cos(-\phi) = \cos\phi$، در نتیجه علامت زاویه اهمیتی ندارد) ـ را به‌دست آوریم:

$$K_0 + U_0 = K_h + U_h$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + mgL(1-\cos\theta_0) = 0 + mgL$$

در نتیجه داریم

$$v_0 = \sqrt{2gL\cos\theta_0}$$

$$= \sqrt{2(9.80\ m/s^2)(1.25\ m)\cos 40°} = 4.33\ m/s$$

(پ) برای آن که ریسمان صاف و مستقیم بماند، نیروی مرکزگرا (در بالاترین نقطه) باید (دست کم) با نیروی گرانشی مساوی باشد (در این حالت $r = L$). رابطه‌ی انرژی جنبشی (در بالاترین نقطه به ازای $\theta = 180°$) برابر است با

$$\frac{m v_t^2}{r} = mg \Rightarrow m v_t^2 = mgL$$

$$K_0 + U_0 = K_t + U_t$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + mgL(1-\cos\theta_0) = \frac{1}{2} m v_t^2 + mg(1-\cos 180°)$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + mgL(1-\cos\theta_0) = \frac{1}{2}(mgL) + mg(2L)$$

و سرانجام تندی گلوله برابر است با

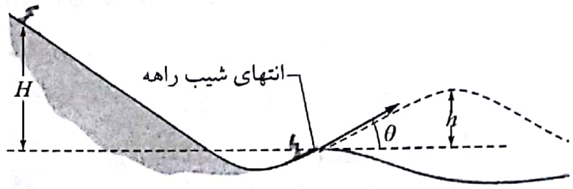
$$v_0 = \sqrt{gL(3+2\cos\theta_0)}$$

$$= \sqrt{(9.80\ m/s^2)(1.25\ m)(3+2\cos 40°)} = 7.45\ m/s$$

(ت) هر چه انرژی پتانسیل آغازی بیشتر باشد، انرژی جنبشی لازم برای رسیدن گلوله به مکان‌های توصیف شده در قسمت‌های (ب) و (پ) کمتر است. با افزایش مقدار θ_0، U_0 افزایش می‌یابد و می‌بینیم که مقدار بزرگتر θ_0 باعث می‌شود مقدار v_0 در قسمت‌های (ب) و (پ) کمتر باشد.

** ۲۲ اسکی‌بازی به جرم $60\ kg$ از ارتفاع $H = 20\ m$ بالای شیب‌راهه‌ی پرش اسکی، مطابق شکل ۸-۳۷، از حال سکون

شروع به حرکت می‌کند و در انتهای شیب‌راهه در راستای زاویه‌ی $\theta = ۲۸^\circ$ نسبت به افق شیب را ترک می‌کند. اثر مقاومت هوا را نادیده می‌گیریم و فرض می‌کنیم که شیب‌راهه بی‌اصطکاک است. (الف) بیشینه‌ی ارتفاع پرش h در انتهای شیب‌راهه که اسکی‌باز به آن می‌رسد چقدر است؟ (ب) اگر او وزن خود را با حمل کردن یک کوله پشتی افزایش دهد، آیا h بیشتر می‌شود، کمتر می‌شود، یا ثابت می‌ماند؟



شکل ۸-۳۷ مسئله‌ی ۲۲.

حل: از مطالب فصل ۴ می‌دانیم که ارتفاع پرش اسکی‌باز، h، را می‌توان از رابطه‌ی $v_y^۲ = ۰ = v_{0y}^۲ - ۲gh$ به دست آورد که در آن $v_{0y} = v_0 \sin ۲۸^\circ$ مؤلفه‌ی رو به بالای «سرعت پرش» اسکی‌باز است. برای پیدا کردن v_0 از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم.

(الف) اسکی‌باز از حال سکون در ارتفاع $y = ۲۰\,\mathrm{m}$ بالای نقطه‌ی «پرش» شروع به حرکت می‌کند، در نتیجه از پایستگی انرژی داریم

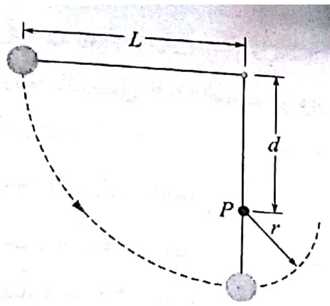
$$mgy = \frac{۱}{۲}mv^۲ \Rightarrow v = \sqrt{۲gy} = ۱۹/۸\,\mathrm{m/s}$$

که همان تندی آغازی v_0 برای پرش است. بنابراین، از معادله‌ی بالا که h را به v_0 مربوط می‌کند، داریم

$$h = \frac{(v_0 \sin ۲۸^\circ)^۲}{۲g} = ۴/۴\,\mathrm{m}$$

(ب) می‌بینیم که در محاسبات بالا جرم حذف می‌شود، لذا اگر جرم تغییر کند، نتایج تغییر نمی‌کنند.

**** ۲۳** شکل ۸-۳۸ ریسمانی به طول $L = ۱۲۰\,\mathrm{cm}$ را نشان می‌دهد که به یک سر آن گلوله‌ای وصل شده و سر دیگرش ثابت است. فاصله‌ی انتهای ثابت ریسمان، d، تا میخ کوبیده شده در نقطه‌ی P، $۷۵/۰\,\mathrm{cm}$ است. گلوله از حال سکون و در حالتی که ریسمان افقی است رها می‌شود و روی کمان خط‌چین حرکت می‌کند. تندی گلوله هنگام رسیدن به (الف) پایین‌ترین نقطه و (ب) بالاترین نقطه، پس از گیر کردن ریسمان به میخ، چقدر است؟



شکل ۸-۳۸ مسئله‌های ۲۳ و ۷۰.

حل: (الف) وقتی ریسمان به پایین‌ترین نقطه‌اش می‌رسد، انرژی پتانسیل اولیه‌ی آن (نسبت به پایین‌ترین نقطه) $U = mgL$ آن به انرژی جنبشی تبدیل می‌شود. بنابراین داریم

$$mgL = \frac{۱}{۲}mv^۲ \Rightarrow v = \sqrt{۲gL}$$

که به ازای $L = ۱/۲۰\,\mathrm{m}$، تندی زیر به دست می‌آید:

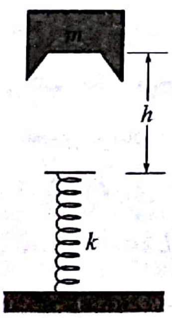
$$v = \sqrt{۲gL} = \sqrt{۲(۹/۸۰\,\mathrm{m/s^۲})(۱/۲۰\,\mathrm{m})} = ۴/۸۵\,\mathrm{m/s}$$

(ب) در این حالت، انرژی مکانیکی کل در بین انرژی جنبشی $\frac{۱}{۲}mv_b^۲$ و انرژی پتانسیل mgy_b تقسیم می‌شود. می‌دانیم که $y_b = ۲r$ که در آن $r = L - d = ۰/۴۵۰\,\mathrm{m}$ است. از پایستگی انرژی داریم

$$mgL = \frac{۱}{۲}mv_b^۲ + mgy_b$$

که از آن‌جا $v_b = \sqrt{۲gL - ۲g(۲r)} = ۲/۴۲\,\mathrm{m/s}$ به‌دست می‌آید.

**** ۲۴** جسمی به جرم $m = ۲/۰\,\mathrm{kg}$ از ارتفاع $h = ۴۰\,\mathrm{cm}$ بر روی فنری با ثابت فنری $k = ۱۹۶۰\,\mathrm{N/m}$، رها می‌شود (شکل ۸-۳۹). بیشینه‌ی مقدار تراکم فنر را پیدا کنید.



شکل ۸-۳۹ مسئله‌ی ۲۴.

حل: m جرم جسم، $h = ۰/۴۰\,\mathrm{m}$ ارتفاع افتادن جسم بر روی فنر (از مکان آرامش فنر اندازه‌گیری می‌شود)، و x میزان تراکم فنر (به

طرف پایین اندازه‌گیری می‌شود، در نتیجه مثبت است) است. مرجع انرژی پتانسیل گرانشی، مکان آغازی جسم است. جسم مسافت کل $h+x$ را سقوط می‌کند، و انرژی پتانسیل گرانشی پایانی آن $-mg(h+x)$ است. انرژی پتانسیل فنر در حالت پایانی $\frac{۱}{۲}kx^{۲}$، و انرژی جنبشی آن در آغاز و پایان صفر است. چون انرژی پایسته است، داریم

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$۰ = -mg(h+x) + \frac{۱}{۲}kx^{۲}$$

پاسخ این معادله‌ی درجه دوم عبارت است از

$$x = \frac{mg \pm \sqrt{(mg)^{۲} + ۲mghk}}{k}$$

در این‌جا $mg = ۱۹٫۶\ \mathrm{N}$، $h = ۰٫۴۰\ \mathrm{m}$، و $k = ۱۹۶۰\ \mathrm{N/m}$ و ریشه‌ی مثبت $x = ۰٫۱۰\ \mathrm{m}$ است.

** ۲۵ در زمان $t = ۰$ گلوله‌ای به جرم $۱٫۰\ \mathrm{kg}$ از بالای یک برج بلند با سرعت $\vec{v} = (۱۸\ \mathrm{m/s})\hat{\mathrm{i}} + (۲۴\ \mathrm{m/s})\hat{\mathrm{j}}$ پرتاب می‌شود. مقدار ΔU دستگاه گلوله ـ زمین در بین دو زمان $t = ۰$ و $t = ۶٫۰\ \mathrm{s}$ (که گلوله هم‌چنان در حال سقوط آزاد است) چیست؟

حل: چون زمان به طور مستقیم در فرمول‌های انرژی وارد نمی‌شود، با استفاده از مطالب فصل ۴ (یا جدول ۲-۱ در فصل ۲)، تغییر ارتفاع در مدت پرواز $t = ۶٫۰\ \mathrm{s}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\Delta y = v_{۰y}t - \frac{۱}{۲}gt^{۲}$$

از این‌جا $\Delta y = -۳۲\ \mathrm{m}$ به دست می‌آید. بنابراین داریم

$$\Delta U = mg\Delta y = -۳۱۸\ \mathrm{J} \approx -۳٫۲\times۱۰^{-۲}\ \mathrm{J}$$

** ۲۶ نیروی پایستار $\vec{F} = (۶٫۰x - ۱۲)\hat{\mathrm{i}}\ \mathrm{N}$، که در آن x برحسب متر است، به ذره‌ای وارد می‌شود و ذره در راستای محور x حرکت می‌کند. انرژی پتانسیل وابسته به این نیرو U، در نقطه‌ی $x = ۰$ برابر با $۲۷\ \mathrm{J}$ است. (الف) رابطه‌ی مربوط به U برحسب x را، که در آن U برحسب ژول و x برحسب متر است، بنویسید. (ب) انرژی پتانسیل مثبت بیشینه چقدر است؟ به ازای چه مقدار (پ) منفی و (ت) مثبت x، انرژی پتانسیل صفر است؟

حل: (الف) رابطه به صورت زیر است

$$\Delta U = U(x) - U(۰) = -\int_{۰}^{x}(۶x' - ۱۲)dx'$$

بنابراین، به ازای $U(۰) = ۲۷\ \mathrm{J}$، مقدار $U(x)$ (که آن را U می‌نویسیم) از انتگرال‌گیری به دست می‌آید:

$$U = ۲۷ + ۱۲x - ۳x^{۲}$$

(ب) برای به دست آوردن مقدار بیشینه‌ی این تابع، از شرط $dU/dx = ۰$ استفاده می‌کنیم، یا نیروی وضعیت تعادل را به‌صورت زیر به دست می‌آوریم:

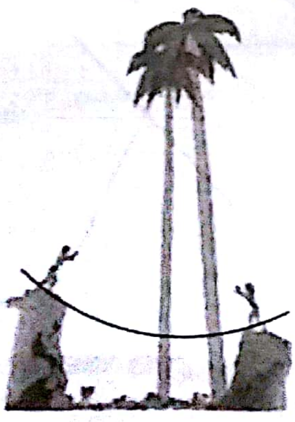
$$F = ۰ \Rightarrow ۶x_{eq} - ۱۲ = ۰$$

در نتیجه $x_{eq} = ۲٫۰\ \mathrm{m}$ به دست می‌آید و رابطه‌ی انرژی پتانسیل بالا به صورت $U = ۳۹\ \mathrm{J}$ نوشته می‌شود.

(پ) با استفاده از فرمول معادله‌ی درجه دوم یا با استفاده از حل دو جمله‌ای، مقدار منفی x را به دست می‌آوریم که به ازای آن $U = ۰$ و $x = -۱٫۶\ \mathrm{m}$ است.

(ت) به همین ترتیب، مقدار مثبت x به دست می‌آید که به ازای آن $U = ۰$ و $x = ۵٫۶\ \mathrm{m}$ است.

** ۲۷ تارزان، که وزنش $۶۸۸\ \mathrm{N}$ است، انتهای شاخه‌ی پیچکی به طول $۱۸\ \mathrm{m}$ را می‌گیرد و از لبه‌ی یک پرتگاه تاب می‌خورد (شکل ۸-۴۰). او از لبه‌ی پرتگاه تا پایین‌ترین نقطه‌ی تاب، به اندازه‌ی $۳٫۲\ \mathrm{m}$ پایین می‌آید. اگر نیروی وارد به شاخه از $۹۵۰\ \mathrm{N}$ تجاوز کند شاخه می‌شکند. (الف) آیا شاخه می‌شکند؟ (ب) اگر پاسخ منفی است، بیشترین نیرویی که هنگام تاب خوردن به شاخه وارد می‌شود، چقدر است؟ اگر پاسخ مثبت است، شاخه تحت چه‌زاویه‌ای نسبت به راستای قائم، می‌شکند؟



شکل ۸-۴۰ مسئله‌ی ۲۷.

حل: (الف) برای مشخص کردن این که شاخه می‌شکند یا خیر، کافی است آن را در حالتی بررسی کنیم که تارزان در پایین‌ترین نقطه تاب می‌خورد، و این موقعی است که اگر شاخه نشکند، بیشترین نیروی کشش را دارد. با انتخاب جهت مثبت به طرف بالا، قانون دوم نیوتون به صورت زیر نوشته می‌شود

$$T - mg = m\frac{v^۲}{r}$$

که در آن $r = ۱۸٫۰\,\mathrm{m}$ و $m = W/g = ۶۸۸/۹٫۸ = ۷۰٫۲\,\mathrm{kg}$ است. ما $v^۲$ را از پایستگی انرژی به دست می‌آوریم (مکان مرجع برای انرژی پتانسیل، پایین‌ترین نقطه‌ی تاب خوردن است):

$$mgh = \frac{۱}{۲}mv^۲ \Rightarrow v^۲ = ۲gh$$

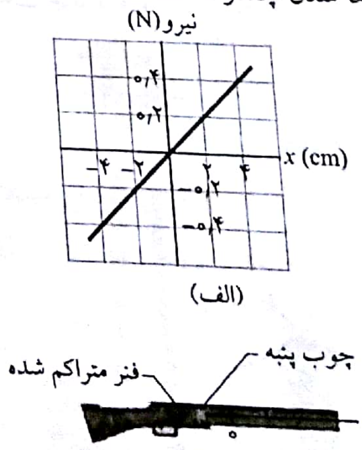
که در آن $h = ۳٫۲۰\,\mathrm{m}$ است. از ترکیب این نتیجه‌ها داریم

$$T = mg + m\frac{۲gh}{r} = mg\left(۱+\frac{۲h}{r}\right)$$

که از آن‌جا $T = ۹۳۳\,\mathrm{N}$ به‌دست می‌آید. در نتیجه شاخه نمی‌شکند.

(ب) نیروی کشش بیشینه تقریباً $۹٫۳\times۱۰^۲\,\mathrm{N}$ است.

**** ۲۸** شکل ۸-۴۱ الف، نمودار تغییرات نیروی فنر را برحسب کشیدگی یا تراکم فنر یک تفنگ چوب پنبه‌ای (شکل ۸-۳۹ ب) نشان می‌دهد. فنر به اندازه‌ی $۵٫۵\,\mathrm{cm}$ متراکم می‌شود و برای پرتاب کردن یک چوب پنبه‌ی ۳٫۸ گرمی توسط تفنگ به کار می‌رود. (الف) اگر چوب پنبه رها شود تندی‌اش در هنگام عبور از وضعیت آرامش فنر چقدر است؟ (ب) حالا فرض کنید چوب پنبه به فنر می‌چسبد و پیش از جدا شدن از آن، فنر را به اندازه‌ی $۱٫۵\,\mathrm{cm}$ می‌کشد. در این صورت، تندی چوب پنبه در لحظه‌ی رها شدن چقدر است؟



شکل ۸-۴۱ مسئله‌ی ۲۸.

حل: ثابت فنری از شیب نمودار به دست می‌آید:

$$k = \frac{\Delta F}{\Delta x} = ۰٫۱۰\,\mathrm{N/cm} = ۱۰\,\mathrm{N/m}$$

(الف) انرژی پتانسیل فنر متراکم شده را با انرژی جنبشی چوب پنبه در لحظه‌ی رها شدن، مساوی قرار می‌دهیم:

$$\frac{۱}{۲}kx^۲ = \frac{۱}{۲}mv^۲ \Rightarrow v = x\sqrt{\frac{k}{m}}$$

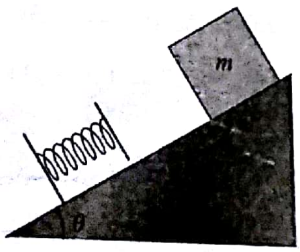
که به ازای $m = ۰٫۰۰۳۸\,\mathrm{kg}$ و $x = ۰٫۰۵۵\,\mathrm{m}$، $v = ۲٫۸۲\,\mathrm{m/s}$ به دست می‌آید.

(ب) در این حالت، مقداری انرژی پتانسیل در لحظه‌ی رها شدن چوب پنبه وجود دارد. به ازای $d = ۰٫۰۱۵\,\mathrm{m}$، از پایستگی انرژی داریم

$$\frac{۱}{۲}kx^۲ = \frac{۱}{۲}mv^۲ + \frac{۱}{۲}kd^۲ \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{m}(x^۲ - d^۲)}$$

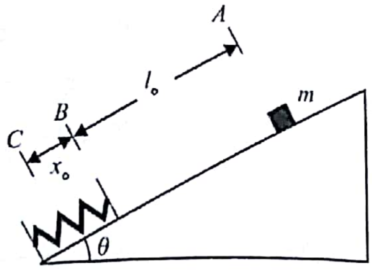
در نتیجه $v = ۲٫۷\,\mathrm{m/s}$ به دست می‌آید.

**** ۲۹** در شکل ۸-۴۲، جسمی به جرم $m = ۱۲\,\mathrm{kg}$ از حال سکون از بالای یک سطح شیب‌دار بی‌اصطکاک با زاویه‌ی شیب $\theta = ۳۰^\circ$ رها می‌شود. در پایین جسم فنری قرار دارد که می‌تواند با نیروی $۲۷۰\,\mathrm{N}$ به اندازه‌ی $۲٫۰\,\mathrm{cm}$ متراکم شود. جسم پس از رها شدن و برخورد به فنر و متراکم کردن آن به اندازه‌ی $۵٫۵\,\mathrm{cm}$ در یک لحظه متوقف می‌شود. (الف) جسم از نقطه‌ی حالت سکون تا نقطه‌ی توقف چه مسافتی را روی سطح شیب‌دار می‌پیماید؟ (ب) تندی جسم درست در لحظه‌ی تماس با فنر چقدر است؟



شکل ۸-۴۲ مسئله‌ی ۲۹.

حل: همان طور که شکل زیر نشان می‌دهد، جسم از نقطه‌ی A شروع به حرکت می‌کند، در نقطه‌ی B برای اولین بار با فنر برخورد می‌کند و وقتی به‌نقطه‌ی C می‌رسد فنر را به اندازه‌ی $x_۰ = ۰٫۰۵۵\,\mathrm{m}$ متراکم می‌کند. نقطه‌ی C نقطه‌ی مرجع ما برای محاسبه‌ی انرژی



پتانسیل گرانشی است. انرژی پتانسیل کشسانی (فنر) در هنگام آرامش (بدون تراکم) فنر صفر است.

با توجه به اطلاعات داده شده می‌توان ثابت فنری را به دست آورد. از قانون هوک داریم

$$k=\frac{F}{x}=\frac{۲۷۰\,\mathrm{N}}{۰/۰۲\,\mathrm{m}}=۱/۳۵\times۱۰^{۴}\,\mathrm{N/m}$$

مسافت بین نقاط A و B، $l_{\circ}$ است و می‌دانیم که کل مسافت لغزش $l_{\circ}+x_{\circ}$ بر طبق رابطه‌ی زیر به ارتفاع آغازی h_A جسم (نسبت به نقطه‌ی C اندازه‌گیری شده است) بستگی دارد

$$\sin\theta=\frac{h_A}{l_{\circ}+x_{\circ}}$$

در این‌جا $\theta=۳۰^{\circ}$ زاویه‌ی سطح شیب‌دار است.

(الف) از پایستگی انرژی مکانیکی داریم

$$K_A+U_A=K_C+U_C\Rightarrow ۰+mgh_A=\frac{۱}{۲}kx_{\circ}^{۲}$$

و از آن‌جا داریم:

$$h_A=\frac{kx_{\circ}^{۲}}{۲mg}=\frac{(۱/۳۵\times۱۰^{۴}\,\mathrm{N/m})(۰/۰۵۵\mathrm{m})^{۲}}{۲(۱۲\,\mathrm{kg})(۹/۸\,\mathrm{m/s^{۲}})}=۰/۱۷۴\,\mathrm{m}$$

در نتیجه، مسافت کل پیموده شده توسط جسم و پیش از متوقف شدن، برابر است با

$$l_{\circ}+x_{\circ}=\frac{h_A}{\sin ۳۰^{\circ}}=\frac{۰/۱۷۴\,\mathrm{m}}{\sin ۳۰^{\circ}}=۰/۳۴۷\,\mathrm{m}\approx۰/۳۵\,\mathrm{m}$$

(ب) از این نتیجه، $l_{\circ}-x_{\circ}=۰/۳۷۴\,\mathrm{m}-۰/۰۵۵\,\mathrm{m}=۰/۲۹۲\,\mathrm{m}$ به دست می‌آید که نشان می‌دهد جسم هنگام لغزیدن از نقطه‌ی A تا نقطه‌ی B، به اندازه‌ی مسافت قائم

$$|\Delta y|=h_A-h_B=l_{\circ}\sin\theta=(۰/۲۹۲\,\mathrm{m})\sin ۳۰^{\circ}=۰/۱۴۶\mathrm{m}$$

به پایین می‌رود. بنابراین با استفاده از معادله‌ی ۸-۱۸ داریم

$$۰+mgh_A=\frac{۱}{۲}mv_B^{۲}+mgh_B\Rightarrow\frac{۱}{۲}mv_B^{۲}=mg|\Delta y|$$

که از آن‌جا تندی چوب پنبه هنگام رها شدن از تفنگ به دست می‌آید:

$$v_B=\sqrt{۲g|\Delta y|}=\sqrt{۲(۹/۸\,\mathrm{m/s^{۲}})(۰/۱۴۶\,\mathrm{m})}$$
$$=۱/۶۹\,\mathrm{m/s}\approx۱/۷\,\mathrm{m/s}$$

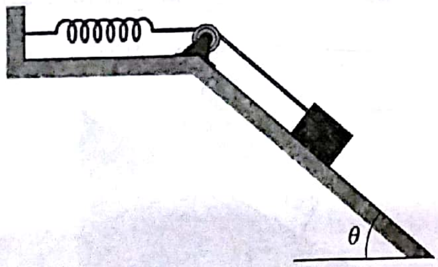
توجه: انرژی در این فرایند ذخیره می‌شود. انرژی کل جسم در مکان B برابر است با

$$E_B=\frac{۱}{۲}mv_B^{۲}+mgh_B=\frac{۱}{۲}(۱۲\,\mathrm{kg})(۱/۶۹\,\mathrm{m/s})^{۲}+$$
$$+(۱۲\,\mathrm{kg})(۹/۸\,\mathrm{m/s^{۲}})(۰/۰۲۸\,\mathrm{m})=۲۰/۴\,\mathrm{J}$$

که با انرژی پتانسیل کشسانی در فنر برابر است:

$$\frac{۱}{۲}kx_{\circ}^{۲}=\frac{۱}{۲}(۱/۳۵\times۱۰^{۴}\,\mathrm{N/m})(۰/۰۵۵\,\mathrm{m})^{۲}=۲۰/۴\,\mathrm{J}$$

** ۳۰ یک جعبه‌ی جای نان به جرم $۲/۰\mathrm{kg}$ بر روی یک سطح شیب‌دار بی‌اصطکاک با زاویه‌ی شیب ۴۰ درجه از طریق ریسمانی که از روی قرقره‌ای گذشته است، به فنر سبکی با ثابت فنری $k=۱۲۰\,\mathrm{N/m}$، مطابق شکل ۸-۴۳، وصل شده است. در هنگامی که فنر کشیده نشده است جعبه رها می‌شود. فرض کنید قرقره بی‌جرم و بی‌اصطکاک است. (الف) جعبه پس از آنکه به اندازه‌ی $۱۰\mathrm{cm}$ از سطح پایین می‌رود تندی‌اش چقدر است؟ (ب) این جعبه پیش از توقف لحظه‌ای تا چه مسافتی از نقطه‌ی رها شدنش، بر روی سطح می‌لغزد و (پ) بزرگی و (ت) جهت (به بالا یا پایین سطح شیب‌دار) شتاب جعبه در لحظه‌ی توقف لحظه‌ای آن چیست؟



شکل ۸-۴۳ مسئله‌ی ۳۰.

حل: ارتفاع آغازی جعبه را سطح مرجع $y=۰$ انتخاب می‌کنیم و می‌بینیم که ارتفاع جعبه (وقتی مسافت d را به طرف پایین سطح شیب‌دار طی کرد) $y=-d\sin ۴۰^{\circ}$ است.

(الف) با استفاده از پایستگی انرژی داریم

$$K_i+U_i=K+U\Rightarrow ۰+۰=\frac{۱}{۲}mv^{۲}+mgy+\frac{۱}{۲}kd^{۲}$$

که به ازای $d=۰/۱۰\,\mathrm{m}$، داریم $v=۰/۸۱\,\mathrm{m/s}$.

(ب) می‌خواهیم مقدار $d \neq 0$ را طوری تعیین کنیم که $K = 0$ شود:

$$K_i + U_i = K + U \Rightarrow 0 + 0 = 0 + mgy + \frac{1}{2}kd^2$$

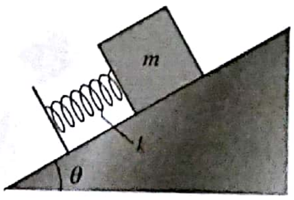
در نتیجه $mgd \sin 40° = \frac{1}{2}kd^2$ و از آن‌جا $d = 0/21\text{m}$ به‌دست می‌آید.

(پ) نیروی رو به بالای سطح شیب‌دار، نیروی فنر (قانون هوک) با بزرگی $kd = 25/2\text{ N}$ است. نیروی رو به پایین سطح شیب دار، مؤلفه‌ی نیروی گرانشی $mg \sin 40° = 12/6\text{ N}$ است. بنابراین، نیروی برایند وارد بر جعبه $(25/2 - 12/6)\text{N} = 12/6\text{ N}$ به طرف بالای سطح شیب‌دار است و شتاب ناشی از آن برابر است با

$$a = F / m = (12/6\text{ N}) / (2/0\text{ kg}) = 6/3\text{ m/s}^2$$

(ت) جهت شتاب به طرف بالای سطح شیب‌دار است.

۳۱ ** جسمی به‌جرم $m = 2/00\text{kg}$ درمقابل فنری واقع در روی یک سطح شیب‌دار بی‌اصطکاک با زاویه‌ی شیب $\theta = 30/0°$ قرار دارد (شکل ۸-۴۴). (جسم به فنر متصل نیست). فنر که ثابت نیروی آن $k = 19/6\text{ N/cm}$ است، به اندازه‌ی $20/0\text{cm}$ متراکم و سپس رها می‌شود. (الف) انرژی پتانسیل کشسانی فنر متراکم شده چقدر است؟ (ب) هنگامی که جسم از نقطه‌ی رها شدن تا بالاترین نقطه در روی سطح شیب‌دار حرکت می‌کند، تغییر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه جسم ـ زمین چقدر است؟ (پ) فاصله‌ی بالاترین نقطه‌ای که جسم در روی سطح شیب‌دار به آن می‌رسد تا نقطه‌ی رها شدن چقدر است؟



شکل ۸-۴۴ مسئله‌ی ۳۱.

حل: نقطه‌ی مرجع برای انرژی پتانسیل گرانشی U_g (و ارتفاع h) را در جایی روی جسم انتخاب می‌کنیم که فنر دارای تراکم بیشینه است. وقتی جسم به بالاترین نقطه می‌رود، ابتدا توسط فنر شتاب‌دار می‌شود؛ بعد از آن، جسم از فنر جدا می‌شود و بالاخره به نقطه‌ای می‌رسد که تندی جسم در آن‌جا (به طور لحظه‌ای) $v_f = 0$ است. محور x در راستای سطح شیب‌دار و جهت آن به طرف بالای سطح شیب‌دار انتخاب می‌شود (در نتیجه x_0 برای تراکم اولیه یک مقدار منفی است)؛ مبداء محور x در مکان آرامش (بدون تراکم) قرار دارد. در دستگاه یکاهای SI، $k = 1960\text{ N/m}$ و $x_0 = -0/200\text{m}$ است.

(الف) انرژی پتانسیل کشسانی $\frac{1}{2}kx_0^2 = 39/2\text{J}$ است.

(ب) چون در آغاز $U_g = 0$ است، تغییر U_g با مقدار پایانی آن برابر است mgh ($m = 2/00\text{kg}$). این مقدار باید با نتیجه‌ی قسمت (الف) مساوی باشد (علت را در قسمت بعدی می‌بینید). بنابراین داریم $\Delta U_g = U_g = 39/2\text{J}$.

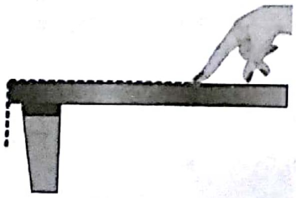
(پ) از اصل پایستگی انرژی مکانیکی داریم

$$K_0 + U_0 = K_f + U_f$$

$$0 + \frac{1}{2}kx_0^2 = 0 + mgh$$

در نتیجه $h = 2/00\text{m}$ به دست می‌آید. چون مسافت پیموده شده در راستای سطح شیب‌دار خواسته شده است، داریم $d = h / \sin 30° = 4/00\text{m}$.

۳۲ ** در شکل ۸-۴۵، زنجیری طوری روی یک میز بی‌اصطکاک قرار گرفته که یک چهارم طول آن از لبه‌ی میز آویخته شده است. اگر طول زنجیر $L = 28\text{cm}$ و جرم آن $m = 0/012\text{kg}$ باشد، چقدر کار برای بالا کشیدن بخش آویخته شده به روی میز لازم است؟



شکل ۸-۴۵ مسئله‌ی ۳۲.

حل: کار لازم برای کشیدن زنجیر بر روی میز، با تغییر انرژی پتانسیل گرانشی زنجیر برابر است. بخش آویزان زنجیر را به تعداد زیادی از پاره‌های بی‌نهایت کوچک تقسیم می‌کنیم که طول هر کدام dy و جرم هر کدام $(m/L)dy$ است؛ بنابراین تغییر انرژی پتانسیل هر پاره در حین پیمودن مسافت $|y|$ در پایین‌تر از سطح میز، برابر است با

$$dU = (m/L)g|y|dy = -(m/L)gy\,dy$$

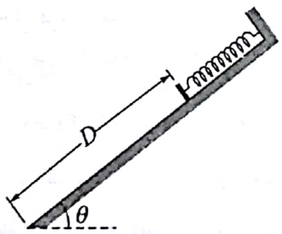
چون مقدار y منفی است (جهت $+y$ را به طرف بالا و مبداء را در روی سطح میز انتخاب کرده‌ایم)، تغییر انرژی پتانسیل کل برابر است با

$$\Delta U = -\frac{mg}{L}\int_{-L/4}^{0} y\,dy = \frac{1}{2}\frac{mg}{L}(L/4)^2 = mgL/32$$

بنابراین، کار لازم برای کشیدن بخش آویخته شده‌ی زنجیر بر روی میز برابر است با

$$W = \Delta U = mgL/32$$
$$= (0.016\,\mathrm{kg})(9.8\,\mathrm{m/s^2})(0.24\,\mathrm{m})/32 = 0.001\,\mathrm{J}$$

*** ۳۳ در شکل ۸-۴۶، فنری با ثابت نیروی $k = 170\,\mathrm{N/m}$ در بالای یک سطح شیب‌دار بی‌اصطکاک با زاویه‌ی شیب $\theta = 37.0^\circ$ قرار دارد. پایین سطح شیب‌دار تا انتهای پایینی فنر در حالت آرامش، $D = 1.00\,\mathrm{m}$ فاصله دارد. جعبه‌ای به جرم $2.00\,\mathrm{kg}$ را به فنر فشار می‌دهیم تا به اندازه‌ی $0.200\,\mathrm{m}$ متراکم شود و سپس جعبه را از حال سکون رها می‌کنیم. (الف) تندی جعبه در لحظه‌ای که فنر به طول حالت آرامش برمی‌گردد، چقدر است (در این حالت تماس جعبه با فنر قطع می‌شود)؟ (ب) تندی جعبه هنگام رسیدن به پایین سطح شیب‌دار چقدر است؟



شکل ۸-۴۶ مسئله‌ی ۳۳.

حل: ارتفاع‌های h را از انتهای پایینی سطح شیب‌دار (به‌عنوان مرجع مکان برای محاسبه‌ی انرژی پتانسیل گرانشی mgh) اندازه‌گیری می‌کنیم. محور x در راستای سطح شیب‌دار و $+x$ به طرف بالای سطح شیب‌دار انتخاب می‌شود (در نتیجه تراکم فنر متناظر با $x > 0$ است) و مبداء محور x در انتهای فنر در حال آرامش (بدون تراکم) در نظر گرفته می‌شود. ارتفاع متناظر با مکان آغازی جعبه (در حالی که فنر به اندازه‌ی $x = 0.200\,\mathrm{m}$ متراکم شده است) از رابطه‌ی $h_1 = (D+x)\sin\theta$ به دست می‌آید که در آن $\theta = 37^\circ$ است.

(الف) از پایستگی انرژی داریم

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \Rightarrow$$

$$0 + mg(D+x)\sin\theta + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgD\sin\theta$$

که با استفاده از داده‌های $m = 2.00\,\mathrm{kg}$ و $k = 170\,\mathrm{N/m}$، تندی جعبه به دست می‌آید

$$v_2 = \sqrt{2gx\sin x + kx^2/m} = 2.40\,\mathrm{m/s}$$

(ب) در این حالت، از پایستگی انرژی داریم

$$K_1 + U_1 = K_3 + U_3$$

$$0 + mg(D+x)\sin\theta + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_3^2 + 0$$

در نتیجه $v_3 = \sqrt{2g(D+x)\sin\theta + kx^2/m} = 4.19\,\mathrm{m/s}$ به‌دست می‌آید.

*** ۳۴ پسر بچه‌ای بالای یک تپه‌ی یخی به شکل نیمکره با شعاع $R = 13.8\,\mathrm{m}$ نشسته است. او با تندی آغازی ناچیز شروع به لغزیدن به پایین می‌کند (شکل ۸-۴۷). فرض کنید تقریباً، سطح یخ بی‌اصطکاک است. پسر بچه در چه نقطه‌ای از سطح جدا می‌شود؟

شکل ۸-۴۷ مسئله‌ی ۳۴.

حل: فرض می‌کنیم $\vec{F}_N$ نیروی عمودی باشد که یخ به پسربچه وارد می‌کند و m جرم پسربچه است. نیروی برایند رو به داخل $mg\cos\theta - F_N$ است و بر طبق قانون دوم نیوتون، این نیرو باید با mv^2/R مساوی باشد که v تندی پسربچه است. در نقطه‌ای که پسربچه از یخ جدا می‌شود، $F_N = 0$ است، در نتیجه داریم $g\cos\theta = v^2/R$. ما می‌خواهیم این تندی را پیدا کنیم. اگر انرژی پتانسیل گرانشی در بالای تپه‌ی یخی را صفر در نظر بگیریم، انرژی پتانسیل آن در لحظه‌ی نشان داده شده برابر است با

$$U = -mgR(1-\cos\theta)$$

پسر بچه از حال سکون شروع به حرکت می‌کند و انرژی جنبشی او در لحظه‌ی نشان داده شده $\frac{1}{2}mv^2$ است. بنابراین از پایستگی انرژی داریم

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgR(1-\cos\theta)$$

یا $v^۲ = ۲gR\,(۱-\cos\theta)$. این رابطه را در معادله‌ی به دست آمده از قانون دوم نیوتون قرار می‌دهیم تا $g\cos\theta = ۲g\,(۱-\cos\theta)$ به دست آید. از این جا $\theta = ۲/۳$ حاصل می‌شود. ارتفاع پسربچه نسبت به پایین تپه برابر است با

$$h = R\cos\theta = \frac{۲}{۳}R = \frac{۲}{۳}(۱۲٫۸\,\mathrm{m}) = ۹٫۲\,\mathrm{m}$$

*** ۳۵ در شکل ۸-۴۲، جسمی به جرم $m = ۳٫۲۰\,\mathrm{kg}$ از حال سکون به اندازه‌ی مسافت d به پایین سطح بی‌اصطکاک با زاویه‌ی شیب $\theta = ۳۰٫۰^\circ$ می‌لغزد و به فنری با ثابت نیروی $۴۳۱\,\mathrm{N/m}$ برخورد می‌کند. جسم وقتی که به طور لحظه‌ای متوقف می‌شود فنر را به اندازه‌ی $۲۱٫۰\,\mathrm{cm}$ متراکم می‌کند. (الف) مسافت d و (ب) مسافت بین نقطه‌ی نخستین تماس جسم ـ فنر و نقطه‌ای که تندی جسم بیشترین مقدار را دارد، چیست؟

حل: (الف) انرژی پتانسیل کشسانی (پایانی) فنر برابر است با

$$U = \frac{۱}{۲}kx^۲ = \frac{۱}{۲}(۴۳۱\,\mathrm{N/m})(۰٫۲۱۰\,\mathrm{m})^۲ = ۹٫۵۰\,\mathrm{J}$$

این انرژی باید از انرژی (گرانشی) آغازی دستگاه، mgy (که y را از پایین‌ترین ارتفاعی که جسم می‌رسد اندازه‌گیری می‌کنیم) تأمین شده باشد، در نتیجه داریم

$$y = (d+x)\sin(۳۰^\circ)$$

و از آن‌جا داریم

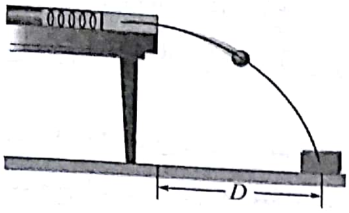
$$mg\,(d+x)\sin(۳۰^\circ) = ۹٫۵۰\,\mathrm{J} \Rightarrow d = ۰٫۳۹۶\,\mathrm{m}$$

(ب) جسم بعد از اولین تماس با فنر (که بر طبق قانون هوک نیروی kx را وارد می‌کند) برای مدت کوتاهی شتاب می‌گیرد (به خاطر مؤلفه‌ی نیروی گرانشی در راستای سطح شیب‌دار، $mg\sin ۳۰^\circ$)، تا آن‌که نیروی قانون هوک به قدر کافی می‌رسد و به جسم شتاب کند کننده وارد می‌کند. موقعی که این اتفاق می‌افتد داریم

$$kx = mg\sin ۳۰^\circ$$

در نتیجه $x = ۰٫۰۳۶۴\,\mathrm{m} = ۳٫۶۴\,\mathrm{cm}$.

*** ۳۶ بابک و رضا مشغول بازی‌اند و می‌خواهند با استفاده از یک تفنگ فنری، که به طور افقی روی میزی قرار گرفته است، تیله‌ای به سوی جعبه‌ی کوچک واقع بر روی زمین نشانه‌گیری کنند. فاصله‌ی افقی جعبه‌ی هدف تا لبه‌ی میز $D = ۲٫۲۰\,\mathrm{m}$ است؛ شکل ۸-۴۸ را ببینید. بابک فنر را به اندازه‌ی $۱٫۱۰\,\mathrm{cm}$ متراکم می‌کند، اما تیله به اندازه‌ی $۲۷٫۰\,\mathrm{cm}$ نسبت به مرکز جعبه در فاصله‌ی کوتاه‌تری به زمین می‌افتد. رضا فنر را چقدر باید متراکم کند تا تیله درون جعبه بیفتد؟ فرض کنید برای فنر و تیله‌ی درون تفنگ هیچ اصطکاکی وجود ندارد.



شکل ۸-۴۸ مسئله‌ی ۳۶.

حل: مسافتی که تیله می‌پیماید، از تندی آغازی آن (و روش‌های فصل ۴) تعیین می‌شود، و تندی آغازی (با استفاده از پایستگی انرژی) از میزان تراکم اولیه‌ی فنر به دست می‌آید. ارتفاع میز را h و مسافت افقی تا نقطه‌ی رسیدن تیله به زمین را x می‌نامیم. در نتیجه $x = v_۰t$ و $h = \frac{۱}{۲}gt^۲$ (زیرا مؤلفه‌ی قائم «سرعت پرتاب» تیله صفر است). بنابراین $x = v_۰\sqrt{۲h/g}$ به دست می‌آید. می‌دانیم فاصله تا محل فرود آمدن تیله با تندی آغازی تیله نسبت مستقیم دارد. فرض می‌کنیم $v_{۰۱}$ تندی آغازی تیله در شلیک اول و $D_۱ = (۲٫۲۰ - ۰٫۲۷۰)\,\mathrm{m} = ۱٫۹۳\,\mathrm{m}$ فاصله‌ی افقی تا نقطه‌ی فرود باشد. به همین ترتیب، $v_{۰۲}$ تندی آغازی شلیک دوم و $D = ۲٫۲۰\,\mathrm{m}$ فاصله‌ی افقی تا نقطه‌ی فرود است. در نتیجه داریم

$$\frac{v_{۰۲}}{v_{۰۱}} = \frac{D}{D_۱} \Rightarrow v_{۰۲} = \frac{D}{D_۱}v_{۰۱}$$

وقتی فنر به اندازه‌ی l متراکم می‌شود، انرژی پتانسیل کشسانی آن $\frac{۱}{۲}kl^۲$ است. وقتی تیله از فنر جدا می‌شود، دارای انرژی جنبشی $\frac{۱}{۲}mv_۰^۲$ است. انرژی مکانیکی پایسته است: $\frac{۱}{۲}mv_۰^۲ = \frac{۱}{۲}kl^۲$، و می‌بینیم که تندی آغازی تیله نسبت مستقیم با تراکم اولیه‌ی فنر دارد. اگر $l_۱$ میزان تراکم فنر در شلیک اول و $l_۲$ میزان تراکم فنر در شلیک دوم باشد، داریم $v_{۰۲} = (l_۲/l_۱)v_{۰۱}$. این مقدار را در رابطه‌ی قبلی قرار می‌دهیم:

$$l_۲ = \frac{D}{D_۱}l_۱ = \left(\frac{۲٫۲۰\,\mathrm{m}}{۱٫۹۳\,\mathrm{m}}\right)(۱٫۱۰\,\mathrm{cm}) = ۱٫۲۵\,\mathrm{cm}$$

** ۳۷ ریسمان یکنواختی به طول ۲۵ cm و جرم ۱۵ گرم در آغاز به سقف چسبیده است. سپس، ریسمان به طور قائم از سقف آویزان می‌شود و تنها یک سر آن متصل به سقف می‌ماند. با این تغییر سمت‌گیری، مقدار تغییر انرژی پتانسیل گرانشی ریسمان چقدراست؟ (*راهنمایی:* یک‌جزء دیفرانسیلی از ریسمان را در نظر بگیرید و سپس از حساب انتگرال استفاده کنید.)

حل: یک جزء دیفرانسیلی به طول dx در فاصله‌ی x از یک انتهای ریسمان (انتهای متصل به سقف) در نظر می‌گیریم. وقتی ریسمان به طور قائم از سقف آویزان می‌شود، تغییر انرژی پتانسیل آن برابر است با

$$dU = -(\lambda dx)gx$$

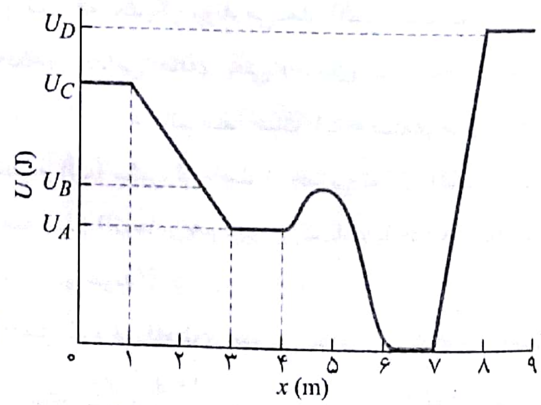
که در آن $\lambda = m/h$ جرم واحد طول است و علامت منفی نشان می‌دهد که انرژی پتانسیل کاهش می‌یابد. از رابطه‌ی بالا روی طول کل ریسمان انتگرال می‌گیریم و تغییر کل در انرژی پتانسیل را به دست می‌آوریم:

$$\Delta U = \int dU = -\int_{۰}^{h} \lambda gx dx = -\frac{۱}{۲}\lambda gh^{۲} = -\frac{۱}{۲}mgh$$

به ازای $m = ۱۵\,g$ و $h = ۲۵\,cm$، داریم $\Delta U = -۰/۰۱۸\,J$.

پودمان ۸-۳ خواندن یک منحنی انرژی پتانسیل

** ۳۸ شکل ۸-۴۹ نمودار تغییرات انرژی پتانسیل U برحسب مکان x ذره‌ای به جرم ۰/۲۰۰kg را که بر اثر یک نیروی پایستار فقط می‌تواند در راستای محور x حرکت کند، نشان می‌دهد. نمودار شامل این مقادیر است: $U_A = ۹/۰۰\,J$، $U_C = ۲۰/۰۰\,J$، و $U_D = ۲۴/۰۰\,J$. ذره درنقطه‌ای رها می‌شود



شکل ۸-۴۹ مسئله‌ی ۳۸.

که در آن U یک «تپه‌ی پتانسیل» به «ارتفاع» $U_B = ۱۲/۰۰\,J$، تشکیل می‌دهد و انرژی جنبشی ذره ۴/۰۰ J است. تندی ذره در (الف) $x = ۳/۵\,m$ و (ب) $x = ۶/۵\,m$، چیست؟ محل نقطه‌ی برگشت در (پ) سمت راست و (ت) سمت چپ نمودار، کجاست؟

حل: در این مسئله، انرژی مکانیکی (مجموع K و U) در حین حرکت ذره ثابت می‌ماند.

(الف) چون انرژی مکانیکی پایسته است، $U_B + K_B = U_A + K_A$، در نتیجه انرژی جنبشی ذره در ناحیه‌ی A ($۳/۰۰\,m \le x \le ۴/۰۰\,m$) برابر است با

$$K_A = U_B - U_A + K_B = ۱۲/۰\,J - ۹/۰۰\,J + ۴/۰۰\,J = ۷/۰۰\,J$$

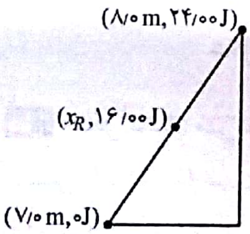
به ازای $K_A = mv_A^{۲}/۲$، تندی ذره در نقطه‌ی $x = ۳/۵\,m$ (داخل ناحیه‌ی A) برابر است با

$$v_A = \sqrt{\frac{۲K_A}{m}} = \sqrt{\frac{۲(۷/۰۰\,J)}{۰/۲۰۰\,kg}} = ۸/۳۷\,m/s$$

(ب) در مکان $x = ۶/۵\,m$، $U = ۰$ و $K = U_B + K_B = ۱۲/۰\,J + ۴/۰۰\,J = ۱۶/۰\,J$ است. در نتیجه تندی در این نقطه برابر است با

$$v = \sqrt{\frac{۲K}{m}} = \sqrt{\frac{۲(۱۶/۰\,J)}{۰/۲۰۰\,kg}} = ۱۲/۶\,m/s$$

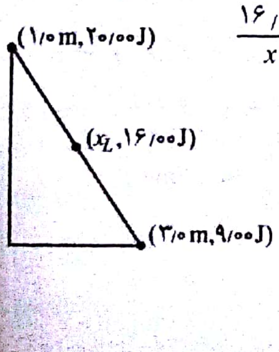
(پ) در نقطه‌ی برگشت، تندی ذره صفر است. مکان نقطه‌ی برگشت در سمت راست را x_R می‌نامیم. با توجه به شکل زیر، x_R را به‌دست می‌آوریم:



$$\frac{۱۶/۰۰\,J - ۰}{x_R - ۷/۰۰\,m} = \frac{۲۴/۰۰\,J - ۱۶/۰۰\,J}{۸/۰۰\,m - x_R}$$

$$\Rightarrow x_R = ۷/۶۷\,m$$

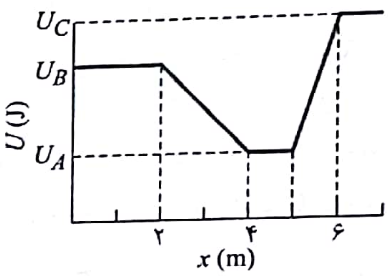
(ت) مکان نقطه‌ی برگشت در سمت چپ را با x_L نشان می‌دهیم. با توجه به شکل زیر می‌توانیم x_L را به دست آوریم:



$$\frac{۱۶/۰۰\,J - ۲۰/۰۰\,J}{x_L - ۱/۰۰\,m} = \frac{۹/۰۰\,J - ۱۶/۰۰\,J}{۳/۰۰\,m - x_L}$$

$$\Rightarrow x_L = ۱/۷۳\,m$$

** ۳۹ شکل ۸-۵۰ نمودار انرژی پتانسیل U برحسب مکان x ذره‌ای به جرم $۰/۹۰ kg$ را نشان می‌دهد که می‌تواند فقط در راستای محور x حرکت کند (نیروهای ناپایستار دخالتی ندارند). سه مقدار انرژی پتانسیل مربوط به نمودار عبارت‌اند از: $U_A = ۱۵/۰ J$، $U_B = ۳۵/۰ J$، و $U = ۴۵/۰ J$. ذره که در نقطه‌ی $x = ۴/۵ m$ با تندی آغازی $۷/۰ m/s$ رها می‌شود، در جهت محور x منفی پیش می‌رود. (الف) اگر ذره بتواند به نقطه‌ی $x = ۱/۰ m$ برسد، تندی‌اش در آنجا چیست و اگر نتواند به آن نقطه برسد، نقطه‌ی برگشت آن کدام است؟ (ب) بزرگی و (پ) جهت نیروی وارد به ذره در هنگام شروع حرکت به سمت چپ نقطه‌ی $x = ۴/۰ m$، چیست؟ اکنون، فرض کنید که وقتی ذره با تندی $۷/۰ m/s$ در نقطه‌ی $x = ۴/۵ m$ رها می‌شود، در جهت محور x مثبت پیش می‌رود. (ت) اگر ذره بتواند به نقطه‌ی $x = ۷/۰ m$ برسد، تندی‌اش در آنجا چیست و اگر نتواند برسد، نقطه‌ی برگشت آن کدام است؟ (ث) بزرگی و (ج) جهت نیروی وارد به ذره در هنگام شروع حرکت به سمت راست نقطه‌ی $x = ۵/۰ m$، چیست؟



شکل ۸-۵۰ مسئله‌ی ۳۹.

حل: شکل نشان می‌دهد که در نقطه‌ی $x = ۴/۵ m$، انرژی پتانسیل $U_۱ = ۱۵ J$ است. اگر تندی ذره $v = ۷/۰ m/s$ باشد، انرژی جنبشی آن برابر است با

$$K_۱ = mv^۲/۲ = (۰/۹۰ kg)(۷/۰ m/s)^۲/۲ = ۲۲ J$$

انرژی کل $E_۱ = U_۱ + K_۱ = (۱۵ + ۲۲) J = ۳۷ J$ است.

(الف) در نقطه‌ی $x = ۱/۰ m$، انرژی پتانسیل $U_۲ = ۳۵ J$ است. بنابر پایستگی انرژی، داریم $K_۲ = ۲/۰ J > ۰$. منظور این است که ذره می‌تواند با تندی زیر به آن جا برسد:

$$v_۲ = \sqrt{\frac{۲K_۲}{m}} = \sqrt{\frac{۲(۲/۰ J)}{۰/۹۰ kg}} = ۲/۱ m/s$$

(ب) نیرویی که به ذره وارد می‌شود با منفی مقدار شیب نمودار به انرژی پتانسیل بستگی دارد:

$$F_x = -\frac{\Delta U}{\Delta x}$$

با توجه به شکل داریم $F_x = \frac{۳۵ J - ۱۵ J}{۳ m - ۴ m} = +۱۰ N$.

(پ) چون بزرگی این نیرو $F_x > ۰$، جهت این نیرو در جهت $+x$ است.

(ت) در نقطه‌ی $x = ۷/۰ m$، انرژی پتانسیل $U_۳ = ۴۵ J$ است که از انرژی کل اولیه‌ی $E_۱$ بیشتر است. بنابراین، ذره هرگز نمی‌تواند به آن‌جا برسد. در نقطه‌ی برگشت، انرژی جنبشی صفر است. در بین نقاط $x = ۵ m$ و $x = ۶ m$، انرژی پتانسیل برابر است با

$$U(x) = ۱۵ + ۳۰(x - ۵)\ ,\ ۵ \le x \le ۶$$

بنابراین، نقطه‌ی برگشت از حل معادله‌ی $۳۷ = ۱۵ + ۳۰(x - ۵)$ معین می‌شود که $x = ۵/۷ m$ است.

(ت) در نقطه‌ی $x = ۵/۰ m$، نیروی وارد بر ذره برابر است با

$$F_x = -\frac{\Delta U}{\Delta x} = -\frac{(۴۵ - ۱۵) J}{(۶ - ۵) m} = -۳۰ N$$

بزرگی این نیرو $|F_x| = ۳۰ N$ است.

(ج) چون $F_x < ۰$ است، نشان می‌دهد که جهت نیرو در جهت $-x$ است.

** ۴۰ انرژی پتانسیل یک مولکول دو اتمی (یک سیستم دو اتمی مانند $H_۲$ یا $O_۲$) برابر است با

$$U = \frac{A}{r^{۱۲}} - \frac{B}{r^{۶}}$$

که در آن r فاصله‌ی میان دو اتم مولکول و A و B مقادیری ثابت و مثبت‌اند. این انرژی پتانسیل به نیرویی وابسته است که دو اتم را به یکدیگر پیوند می‌دهد. (الف) مطلوب است تعیین ***فاصله‌ی جدایی تعادل***، یعنی فاصله‌ی میان اتم‌ها که به ازای آن نیروی وارد به هر اتم صفر است. اگر فاصله‌ی میان اتم‌ها (ب) کمتر و (پ) بیشتر، از فاصله‌ی جدایی تعادل باشد، آیا این نیرو دافعه است (اتم‌ها از هم دور می‌شوند)، یا جاذبه (اتم‌ها به هم نزدیک می‌شوند)؟

حل: (الف) نیرو در فاصله‌ی جدایی تعادل $r = r_{eq}$ برابر است با

$$F = -\frac{dU}{dr}\bigg|_{r = r_{eq}} = ۰ \Rightarrow -\frac{۱۲A}{r_{eq}^{۱۳}} + \frac{۶B}{r_{eq}^{۷}} = ۰$$

که در نتیجه داریم: $r_{\text{eq}} = \left(\frac{۲A}{B}\right)^{\frac{۱}{۶}} = ۱٫۱۲\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{۱}{۶}}$

(ب) برای پیدا کردن کمینه در منحنی انرژی پتانسیل می‌توانیم به نمودار توجه کنیم یا یک‌بار دیگر مشتق می‌گیریم تا معلوم شود تقعر منحنی در این نقطه به طرف بالا است، یعنی برای مقادیر r اندکی کمتر از r_{eq}، شیب منحنی منفی است (لذا نیرو مثبت، دافعه است).

(پ) برای مقادیر r اندکی بیشتر از r_{eq}، شیب منحنی باید مثبت باشد (در نتیجه نیرو منفی، جاذبه است).

*** ۴۱ نیروی پایستار $F(x)$ به ذره‌ای به جرم $۱٫۰\,\text{kg}$، که در راستای محور x حرکت می‌کند، وارد می‌شود. انرژی پتانسیل وابسته به نیروی $F(x)$، برابر است با

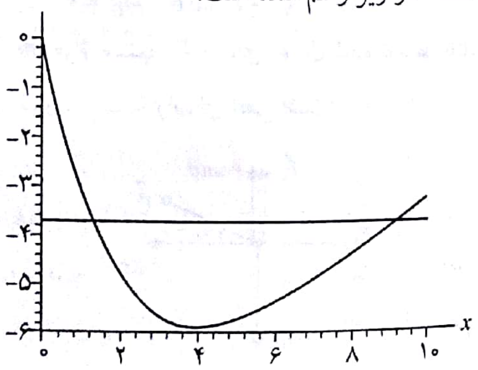
$$U(x) = -۴xe^{-x/۴}\,\text{J}$$

که در آن x برحسب متر است. در مکان $x = ۵٫۰\,\text{m}$، انرژی جنبشی ذره $۲٫۰\,\text{J}$ است. (الف) انرژی مکانیکی دستگاه چقدر است؟ (ب) نمودار $U(x)$ برحسب x را به ازای $۰ \le x \le ۱۰\,\text{m}$ رسم کنید. در روی این نمودار خط نمایشگر انرژی مکانیکی دستگاه را رسم کنید. از قسمت (ب) استفاده کنید و (پ) کمترین مقدار x، و (ت) بیشترین مقدار x را، که ذره می‌تواند در میان آن‌ها حرکت کند، به دست آورید. از قسمت (ب) استفاده کنید و (ث) بیشینه‌ی انرژی جنبشی ذره، و (ج) مقدار x مربوط به این حالت، را به دست آورید. (چ) معادله‌ی مربوط به تابع $F(x)$ برحسب x را معین کنید. (ح) به ازای چه مقدار (معین) x، داریم $F(x) = ۰$؟

حل: (الف) انرژی در مکان $x = ۵٫۰\,\text{m}$، مساوی است با

$$E = K + U = ۲٫۰\,\text{J} - ۵٫۷\,\text{J} = -۳٫۷\,\text{J}$$

(ب) منحنی انرژی پتانسیل و انرژی E (خط افقی) برای گستره‌ی $۰ \le x \le ۱۰\,\text{m}$ در زیر رسم شده است.



(پ) در این قسمت مشخصات نقاط برگشت خواسته شده است؛ در نقطه‌ی برگشت روی منحنی، انرژی کل با مقدار به دست آمده در قسمت (الف) برابر است. کمترین مقدار x نقطه‌ی برگشت، $x = ۱٫۳\,\text{m}$ است.

(ت) بیشترین مقدار x نقطه‌ی برگشت $x = ۹٫۱\,\text{m}$ است.

(ث) چون $K = E - U$، در نتیجه اگر K بیشینه شود U کمینه خواهد شد. با توجه به منحنی معلوم است که به ازای $x = ۴٫۰\,\text{m}$، انرژی پتانسیل U کمترین مقدار را دارد. پس می‌توان نوشت $E - U = -۳٫۷ - (-۴xe^{-x/۴})$ که از آن‌جا $K = ۲٫۱۶\,\text{J} \approx ۲٫۲\,\text{J}$ به دست می‌آید. روش دیگر این است که در روی منحنی از نقطه‌ای که U کمینه است تا خط افقی متناظر با انرژی کل E را اندازه بگیریم تا مقدار تقریبی K در آن نقطه به‌دست آید.

(ج) همان‌طور که در قسمت قبلی گفتیم مقدار U در منحنی به ازای $x = ۴٫۰\,\text{m}$، کمینه است.

(چ) نیروی ناشی از انرژی پتانسیل با استفاده از معادله‌ی ۸-۲۰ (و پیوست ث) برابر است با

$$F = \frac{dU}{dx} = (۴ - x)e^{-x/۴}$$

(ح) در این‌جا نکات مربوط به قسمت‌های (ت) و (ث) تکرار می‌شود (زیرا به مقدار کمینه‌ی $U(x)$ برگشتیم)، اما اکنون نتیجه‌ی تحلیلی قسمت (چ) را نیز داریم. می‌بینیم که دقیقاً در مکان $x = ۴٫۰\,\text{m}$، $F = ۰$ است.

پودمان ۸-۴ کار انجام شده روی یک دستگاه توسط نیروی خارجی

* ۴۲ کارگری جسمی به جرم $۲۷\,\text{kg}$ را با نیرویی که در راستای ۳۲ درجه‌ی زیر افق قرار دارد، با تندی ثابت به اندازه‌ی $۹٫۲\,\text{m}$ روی یک سطح افقی هُل می‌دهد. اگر ضریب اصطکاک جنبشی میان جسم و سطح ۰٫۲۰ باشد، (الف) کار انجام شده توسط نیروی کارگر و (ب) افزایش انرژی گرمایی دستگاه جسم ـ سطح، چقدر است؟

حل: چون سرعت ثابت است، $\vec{a} = ۰$ و مؤلفه‌ی افقی نیروی کارگر $F\cos\theta$ (که در آن $\theta = ۳۲°$) باید با بزرگی نیروی اصطکاک

$f_k = \mu_k F_N$ برابر باشد. هم‌چنین، نیروهای قائم باید اثر یکدیگر را خنثی کنند:

$$F\cos\theta - \mu_k F_N = ۰$$

$$F_N - F\sin\theta - mg = ۰$$

در نتیجه $F = ۷۱/۳\ \mathrm{N}$ به دست می‌آید.

(الف) کاری که کارگر روی جسم انجام می‌دهد، با استفاده از معادله‌ی ۷-۷ برابر است با

$$W_F = Fd\cos\theta = (۷۱/۳\ \mathrm{N})(۹/۲\mathrm{m})\cos(۳۲^\circ) = ۵۵۶/۳\ \mathrm{J}$$

(ب) چون $f_k = \mu_k (mg + F\sin\theta)$، در نتیجه داریم

$$\Delta E_{th} = f_k d = (۶۰/۵\ \mathrm{N})(۹/۲\ \mathrm{m}) = ۵۵۶/۶\ \mathrm{J} \approx W_F$$

* ۴۳ سگی با وارد کردن نیرویی افقی به بزرگی $۸/۰\ \mathrm{N}$ جعبه‌ی لانه‌ی خود را روی زمین می‌کشد. نیروی اصطکاک جنبشی وارد به جعبه $۵/۰\ \mathrm{N}$ است. وقتی جعبه به اندازه‌ی $۰/۷۰\ \mathrm{m}$ روی زمین کشیده می‌شود، (الف) کار انجام شده توسط نیروی سگ، و (ب) افزایش انرژی گرمایی جعبه و سطح زمین، چقدر است؟

حل: (الف) با استفاده از معادله‌ی ۷-۸ داریم

$$W_{\text{اعمال شده}} = (۸/۰\ \mathrm{N})(۰/۷۰\ \mathrm{m}) = ۵/۶\ \mathrm{J}$$

(ب) انرژی گرمایی تولید شده، از معادله‌ی ۸-۳۲ حساب می‌شود:

$$\Delta E_{th} = f_k d = (۵/۰\ \mathrm{N})(۰/۷۰\ \mathrm{m}) = ۳/۵\ \mathrm{J}$$

** ۴۴ یک نیروی افقی به بزرگی $۳۵/۰\ \mathrm{N}$ جسمی به جرم $۴/۰۰\mathrm{kg}$ را روی یک سطح با ضریب اصطکاک $۰/۶۰۰$ هُل می‌دهد. (الف) وقتی جسم مسافتی به اندازه‌ی $۳/۰۰\ \mathrm{m}$ روی سطح می‌لغزد، این نیرو چقدر کار روی دستگاه جسم ـ سطح انجام می‌دهد؟ (ب) در طی این جابه‌جایی، انرژی گرمایی جسم به اندازه‌ی $۴۰/۰\ \mathrm{J}$ افزایش می‌یابد. افزایش انرژی گرمایی سطح چقدر است؟ (پ) افزایش انرژی جنبشی جسم چقدر است؟

حل: (الف) کار برابر است با

$$W = Fd = (۳۵/۰\ \mathrm{N})(۳/۰۰\ \mathrm{m}) = ۱۰۵\ \mathrm{J}$$

(ب) مقدار کل انرژی تبدیل شده به صورت گرما (معادلات ۸-۳۱ و ۶-۲ را ببینید) برابر است با

$$\Delta E_{th} = \mu_k mgd$$
$$= (۰/۶۰۰)(۴/۰۰\ \mathrm{kg})(۹/۸۰\ \mathrm{m/s^2})(۳/۰۰\ \mathrm{m}) = ۷۰/۵۶\ \mathrm{J}$$

اگر $۴۰/۰\ \mathrm{J}$ به جسم داده شده باشد، $(۷۰/۵۶ - ۴۰/۰)\mathrm{J} = ۳۰/۵۶\ \mathrm{J}$ به سطح داده شده است.

(پ) مقدار زیادی از کار $۱۰۵\ \mathrm{J}$، یعنی $۷۰/۵۶\ \mathrm{J}$ به‌صورت انرژی گرمایی تلف شده است، اما هنوز $(۱۰۵ - ۷۰/۵۶)\mathrm{J} = ۳۴/۴۴\ \mathrm{J}$ از آن باقی مانده و انرژی جنبشی جسم را افزایش می‌دهد. (این‌کار، انرژی پتانسیل جسم را افزایش نمی‌دهد زیرا سطح افقی فرض شده است.)

** ۴۵ برای کشیدن جسمی به جرم $۳/۵۷\ \mathrm{kg}$ با تندی ثابت به اندازه‌ی $۴/۰۶\ \mathrm{m}$ در راستای یک سطح افقی، از طنابی استفاده می‌شود. نیروی وارد شده از سوی طناب به جسم $۷/۶۸\ \mathrm{N}$ تحت زاویه‌ی $۱۵/۰$ درجه بالای افق است. (الف) کار انجام شده توسط نیروی طناب، (ب) افزایش انرژی گرمایی دستگاه جسم ـ سطح، و (پ) ضریب اصطکاک جنبشی میان جسم و سطح چقدر است؟

حل: (الف) کاری که نیروی طناب بر روی جسم انجام می‌دهد، با استفاده از معادله‌ی ۷-۷ برابر است با

$$W = Fd\cos\theta = (۷/۶۸\mathrm{N})(۴/۰۶\mathrm{m})\cos ۱۵/۰^\circ = ۳۰/۱\ \mathrm{J}$$

(ب) اگر بزرگی نیروی اصطکاک جنبشی را f بنامیم، افزایش انرژی گرمایی از معادله‌ی ۸-۲۹ به دست می‌آید:

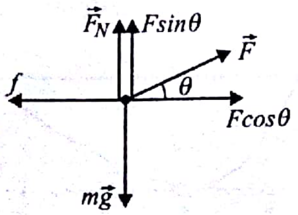
$$\Delta E_{th} = Fd = (۷/۴۲\mathrm{N})(۴/۰۶\ \mathrm{m}) = ۳۰/۱\mathrm{J}$$

(پ) برای به دست آوردن نیروهای اصطکاک و عمودی، می‌توانیم از معادله‌ی قانون دوم نیوتون استفاده کنیم، و سپس برای پیدا کردن ضریب اصطکاک رابطه‌ی $\mu_k = f/F_N$ را به کار ببریم. محور x را در راستای مسیر حرکت جسم و محور y را عمود بر سطح در نظر می‌گیریم. نمودار جسم ـ آزاد در زیر نشان داده شده است. مؤلفه‌های x و y قانون دوم نیوتون عبارت‌اند از

$$x: F\cos\theta - f = ۰$$

$$y: F_N + F\sin\theta - mg = ۰$$

در این‌جا m جرم جسم، F نیروی اعمال شده توسط طناب، و θ زاویه‌ی آن نیرو نسبت به راستای افقی است.



از معادله‌ی اول داریم

$$f = F\cos\theta = (7.68\,\text{N})\cos 15.0^\circ = 7.42\,\text{N}$$

و از معادله‌ی دوم داریم

$$F_N = mg - F\sin\theta$$

$$= (3.57\,\text{kg})(9.8\,\text{m/s}^2) - (7.68\,\text{N})\sin 15.0^\circ = 33.0\,\text{N}$$

در نتیجه ضریب اصطکاک جنبشی برابر است با

$$\mu_k = \frac{f}{F_N} = \frac{7.42\,\text{N}}{33.0\,\text{N}} = 0.225$$

پودمان ۸-۵ پایستگی انرژی

* ۴۶ یک بازیکن بیرون میدان بیسبال توپ را با تندی آغازی $81.8\,\text{mi/h}$ پرتاب می‌کند. درست پیش از آنکه بازیکن میدان توپ را در همان ارتفاع بگیرد، تندی توپ $110\,\text{ft/s}$ است. انرژی مکانیکی دستگاه توپ ـ زمین، برحسب فوت ـ پوند بر اثر نیروی پسار هوا چقدر کاهش یافته است؟ (وزن توپ بیسبال ۹/۰ اونس است).

حل: این مسئله را با استفاده از یکاهای انگلیسی (به ازای $g = 32\,\text{ft/s}^2$) حل می‌کنیم ولی برای سهولت، وزن را به پوند تبدیل می‌کنیم:

$$mg = (9.0)\text{oz}\left(\frac{1\,\text{lb}}{16\,\text{oz}}\right) = 0.56\,\text{lb}$$

در نتیجه $m = 0.018\,\text{lb}\cdot\text{s}^2/\text{ft}$ به دست می‌آید (که آن را ۰/۰۱۸ اسلاگ می‌خوانیم؛ پیوست ت). تندی آغازی را به فوت بر ثانیه تبدیل می‌کنیم:

$$v_1 = (81.8\,\text{mi/h})\left(\frac{5280\,\text{ft/mi}}{3600\,\text{s/h}}\right) = 120\,\text{ft/s}$$

برای تبدیل مستقیم می‌توان از پیوست ت استفاده کرد. برای انرژی «تلف شده» در این مسئله می‌توان از معادله‌ی ۸-۳۰ مقدار $\Delta E_{th} = -\Delta E_{mec}$ را حساب کرد:

$$\Delta E_{th} = \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_f^2) + mg(y_i - y_f)$$

$$= \frac{1}{2}(0.018)(120^2 - 110^2) + 0 = 21\,\text{ft}\cdot\text{lb}$$

* ۴۷ یک بشقاب پرنده (فریزبی) به جرم ۷۵ گرم از نقطه‌ای به ارتفاع $1.1\,\text{m}$ از سطح زمین با تندی $12\,\text{m/s}$ پرتاب می‌شود. وقتی بشقاب پرنده به ارتفاع ۲/۱ متری می‌رسد، تندی‌اش $10.5\,\text{m/s}$ است. کاهش انرژی مکانیکی E_{mec}، دستگاه بشقاب پرنده ـ زمین بر اثر نیروی پسار هوا چقدر است؟

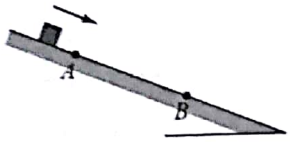
حل: از یکاهای SI استفاده می‌کنیم، در نتیجه $m = 0.075\,\text{kg}$. از معادله‌ی ۸-۳۳ انرژی «تلف شده» در این مسئله به صورت $\Delta E_{th} = -\Delta E_{mec}$ به دست می‌آید:

$$\Delta E_{th} = \frac{1}{2}m(v_i^2 - v_f^2) + mg(y_i - y_f)$$

$$= \frac{1}{2}(0.075\,\text{kg})[(12\,\text{m/s})^2 - (10.5\,\text{m/s})^2] +$$

$$+ (0.075\,\text{kg})(9.8\,\text{m/s}^2)(1.1\,\text{m} - 2.1\,\text{m}) = 0.53\,\text{J}$$

* ۴۸ در شکل ۸-۵۱، جسمی از یک سطح شیب‌دار به پایین می‌لغزد. در حین حرکت کردن جسم از نقطه‌ی A تا نقطه‌ی B، به فاصله‌ی $5.9\,\text{m}$ از یکدیگر نیروی $\vec{F}$ با بزرگی $2.0\,\text{N}$ در راستای سطح شیب‌دار و به سمت پایین به جسم وارد می‌شود. بزرگی نیروی اصطکاک وارد به این جسم $10\,\text{N}$ است. اگر انرژی جنبشی جسم در فاصله‌ی میان A و B به اندازه‌ی $35\,\text{J}$ افزایش پیدا کند، کار انجام شده روی جسم توسط نیروی گرانشی در طی حرکت از A تا B چقدر است؟



شکل ۸-۵۱ مسئله‌های ۴۸ و ۷۱.

حل: از معادله‌ی ۸-۳۱ استفاده می‌کنیم:

$$\Delta E_{th} = f_k d = (10\,\text{N})(5.9\,\text{m}) = 59\,\text{J}$$

و از معادله‌ی ۷-۸ داریم

$$W = Fd = (2.0\,\text{N})(5.9\,\text{m}) = 12\,\text{J}$$

به همین ترتیب از معادله‌ی ۸-۳۱ داریم

$$W = \Delta K + \Delta U + \Delta E_{th}$$

$$12 = 35 + \Delta U + 59$$

که از آن‌جا $\Delta U = -82\,\text{J}$ به دست می‌آید. بنابراین با توجه به معادله‌ی ۸-۱، کار انجام‌شده توسط گرانش $W = -\Delta U = 82\,\text{J}$ است.

* ۴۹ خرسی به جرم $25\,\text{kg}$ از حال سکون از یک درخت کاج به اندازه‌ی $12\,\text{m}$ به پایین می‌لغزد و تندی‌اش درست پیش از

برخورد به زمین $۵/۶ \,\mathrm{m/s}$ است. (الف) در حین لغزیدن، تغییر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه خرس ـ زمین چقدر است؟ (ب) انرژی جنبشی خرس درست پیش از برخورد به زمین چقدر است؟ (پ) نیروی اصطکاک متوسط وارد به خرس در حال لغزیدن، چقدر است؟

حل: (الف) انرژی پتانسیل گرانشی آغازی را $U_i = ۰$ در نظر می‌گیریم. در این صورت، انرژی پتانسیل گرانشی پایانی $U_f = -mgL$ است، که در آن L طول درخت است. تغییر انرژی پتانسیل گرانشی برابر است با

$$U_f - U_i = -mgL = -(۲۵\,\mathrm{kg})(۹/۸\,\mathrm{m/s^۲})(۱۲\,\mathrm{m})$$
$$= -۲/۹ \times ۱۰^۳ \,\mathrm{J}$$

(ب) انرژی جنبشی برابر است با

$$K = \frac{۱}{۲} m v^۲ = \frac{۱}{۲}(۲۵\,\mathrm{kg})(۵/۶\,\mathrm{m/s})^۲ = ۳/۹ \times ۱۰^۲ \,\mathrm{J}$$

(پ) مجموع تغییرات انرژی‌های مکانیکی و گرمایی باید صفر باشد. تغییر انرژی گرمایی $\Delta E_{\mathrm{th}} = fL$ است که f بزرگی نیروی اصطکاک متوسط است؛ در نتیجه داریم

$$f = -\frac{\Delta K + \Delta U}{L} = -\frac{۳/۹ \times ۱۰^۲ \,\mathrm{J} - ۲/۹ \times ۱۰^۳ \,\mathrm{J}}{۱۲\,\mathrm{m}} = ۲/۱ \times ۱۰^۲ \,\mathrm{N}$$

* ۵۰ اسکی‌بازی به جرم $۶۰\,\mathrm{kg}$ با سرعت $۲۴\,\mathrm{m/s}$، که در راستای ۲۵ درجه‌ی بالای افق قرار دارد، انتهای شیب‌راهه‌ی مسیر پرش اسکی را ترک می‌کند. فرض کنید بر اثر نیروی پسار هوا، اسکی‌باز با تندی $۲۲\,\mathrm{m/s}$ در نقطه‌ای که فاصله‌ی قائم آن تا زیر انتهای شیب‌راهه‌ی مسیر پرش $۱۴\,\mathrm{m}$ است، به زمین برخورد می‌کند. از لحظه‌ی پرش تا برگشت به زمین، کاهش انرژی مکانیکی دستگاه اسکی‌باز ـ زمین بر اثر نیروی پسار هوا چقدر است؟

حل: برای انرژی «تلف شده» در این مسئله، از معادله‌ی ۸-۳۳ داریم: $\Delta E_{\mathrm{th}} = -\Delta E_{\mathrm{mec}}$. پس می‌توان نوشت:

$$\Delta E_{\mathrm{th}} = \frac{۱}{۲} m (v_i^۲ - v_f^۲) + mg(y_i - y_f)$$
$$= \frac{۱}{۲}(۶۰\,\mathrm{kg})[(۲۴\,\mathrm{m/s})^۲ - (۲۲\,\mathrm{m/s})^۲] +$$
$$+ (۶۰\,\mathrm{kg})(۹/۸\,\mathrm{m/s^۲})(۱۴\,\mathrm{m}) = ۱/۱ \times ۱۰^۴ \,\mathrm{J}$$

از زاویه‌ی ۲۵° در این محاسبه استفاده نشد که نشان می‌دهد انرژی یک کمیت نرده‌ای است.

* ۵۱ در حین ریزش تخته سنگ‌های یک تپه، تخته سنگی به جرم $۵۲۰\,\mathrm{kg}$ از حال سکون از دامنه‌ی تپه‌ای به طول $۵۰۰\,\mathrm{m}$ و به ارتفاع $۳۰۰\,\mathrm{m}$ به پایین می‌لغزد. ضریب اصطکاک جنبشی میان تخته سنگ و سطح تپه ۰/۲۵ است. (الف) اگر U، انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه تخته سنگ ـ زمین در پایین تپه صفر باشد، مقدار U درست پیش از لغزیدن تخته سنگ چقدر است؟ (ب) در حین لغزیدن تخته سنگ چقدر انرژی به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود؟ در لحظه‌ی رسیدن تخته سنگ به پایین تپه، (پ) انرژی جنبشی آن، و (ت) تندی آن، چقدر است؟

حل: (الف) انرژی پتانسیل آغازی برابر است با

$$U_i = mgy_i = (۵۲۰\,\mathrm{kg})(۹/۸\,\mathrm{m/s^۲})(۳۰۰\,\mathrm{m}) = ۱/۵۳ \times ۱۰^۶ \,\mathrm{J}$$

در این‌جا جهت $+y$ را به طرف بالا و $y = ۰$ را در پایین در نظر گرفته‌ایم (لذا $U_f = ۰$).

(ب) چون $f_k = \mu_k F_N = \mu_k mg\cos\theta$، با توجه به معادله‌ی ۸-۳۱ داریم: $\Delta E_{\mathrm{th}} = f_k d = \mu_k mgd\cos\theta$. اکنون، سطح تپه (به طول $d = ۵۰۰\,\mathrm{m}$) مانند وتر یک مثلث با اضلاع ۵-۴-۳ است، لذا $\cos\theta = x/d$ و $x = ۴۰۰\,\mathrm{m}$ است. در نتیجه داریم

$$\Delta E_{\mathrm{th}} = \mu_k mgd\frac{x}{d} = \mu_k mgx$$
$$= (۰/۲۵)(۵۲۰)(۹/۸)(۴۰۰) = ۵/۱ \times ۱۰^۵ \,\mathrm{J}$$

(پ) با استفاده از معادله‌ی ۸-۳۱ (به ازای $W = ۰$) داریم

$$K_f = K_i + U_i - U_f - \Delta E_{\mathrm{th}}$$
$$۰ + (۱/۵۳ \times ۱۰^۶ \,\mathrm{J}) - ۰ - (۵/۱ \times ۱۰^۶ \,\mathrm{J}) = ۱/۰۲ \times ۱۰^۶ \,\mathrm{J}$$

(ت) از رابطه‌ی $K_f = mv^۲/۲$ مقدار تندی $v = ۶۳\,\mathrm{m/s}$ به‌دست می‌آید.

** ۵۲ کلوچه‌ی حلقه‌ای بزرگی که روی یک سطح افقی می‌لغزد، به سر یک فنر افقی با ثابت فنری $k = ۴۰۰\,\mathrm{N/m}$ وصل شده و سر دیگر فنر در جایی محکم شده است. انرژی جنبشی کلوچه در هنگام عبور از مکان تعادل فنر $۲۰/۰\,\mathrm{J}$ است. در حین لغزیدن کلوچه یک نیروی اصطکاک به بزرگی $۱۰/۰\,\mathrm{N}$ به آن وارد می‌شود. (الف) این کلوچه پیش از توقف لحظه‌ای، تا چه فاصله‌ای نسبت به مکان تعادل می‌لغزد. (ب) در هنگام برگشتن به مکان تعادل انرژی جنبشی‌اش چقدر خواهد بود؟

حل: (الف) یک شکل مناسب برای این مسئله (با وجود اصطکاک) شکل ۸-۳ در کتاب درسی است. با استفاده از معادله‌ی ۸-۳۱ داریم $\Delta E_{th} = f_k d$ و رابطه‌ی انرژی جنبشی آغازی K_i با انرژی پتانسیل «توقف» U_r به صورت زیر است

$$K_i + U_i = f_k d + K_r + U_r$$

$$\Rightarrow ۲۰/۰\,J + ۰ = f_k d + ۰ + \frac{۱}{۲}kd^۲$$

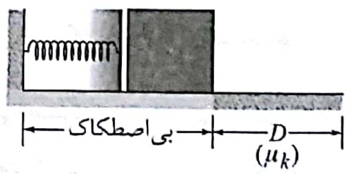
در این‌جا $f_k = ۱۰/۰\,N$ و $k = ۴۰۰\,N/m$ است. از این معادله‌ی درجه دوم مقدار d را پیدا می‌کنیم که از ریشه‌ی مثبت آن $d = ۰/۱۵\,m$ به دست می‌آید.

(ب) بار دیگر از معادله‌ی ۸-۳۱ استفاده می‌کنیم و U_r را به انرژی جنبشی «دوم» K_s کلوچه در هنگامی که فنر کشیده نشده است، ربط می‌دهیم

$$K_r + U_r = f_k d + K_s + U_s \Rightarrow \frac{۱}{۲}kd^۲ = f_k d + K_s + ۰$$

با استفاده از نتیجه‌ی قسمت (الف) داریم $K_s = ۳/۰\,J$.

** ۵۳ در شکل ۸-۵۲، جسمی به جرم $۳/۵\,kg$ به وسیله‌ی فنری متراکم شده با ثابت فنری $۶۴۰\,N/m$، شتاب می‌گیرد. جسم پس از ترک کردن فنر با طول حالت آرامش، روی یک سطح افقی با ضریب اصطکاک جنبشی $\mu_k = ۰/۲۵$ پیش از توقف مسافت $D = ۷/۸\,m$ را می‌پیماید. (الف) افزایش انرژی گرمایی دستگاه جسم ـ سطح، (ب) بیشینه‌ی انرژی جنبشی جسم، و (پ) مقدار تراکم اولی فنر، چیست؟



شکل ۸-۵۲ مسئله‌ی ۵۳.

حل: (الف) نیروهای قائمی که به جسم وارد می‌شوند، نیروی عمودی رو به بالا، و نیروی گرانش رو به پایین هستند. چون مؤلفه‌ی قائم شتاب جسم صفر است، قانون دوم نیوتون ایجاب می‌کند که $F_N = mg$ باشد، که m جرم جسم است. در نتیجه داریم $f = \mu_k F_N = \mu_k mg$. میزان افزایش انرژی گرمایی از رابطه $\Delta E_{th} = fd = \mu_k mgD$ به دست می‌آید که در آن D مسافتی است که جسم پیش از توقف طی می‌کند. با استفاده از معادله‌ی ۸-۲۹ داریم

$$\Delta E_{th} = (۰/۲۵)(۳/۵kg)(۹/۸m/s^۲)(۷/۸m) = ۶۷J$$

(ب) انرژی جنبشی جسم درست در لحظه‌ی جدا شدن از فنر، و وارد شدن به ناحیه‌ای با وجود اصطکاک، بیشینه (K_{max}) است. بنابراین، انرژی جنبشی بیشینه‌ی جسم با انرژی گرمایی تولید شده در طی فرایند متوقف شدن جسم برابر، یعنی مساوی با $۶۷\,J$ است.

(پ) انرژی ظاهر شده به صورت جنبشی، ابتدا به صورت انرژی پتانسیل در فنر فشرده شده، بوده است. پس، $K_{max} = U_i = \frac{۱}{۲}kx^۲$، که k ثابت فنری و x میزان تراکم فنر است. در نتیجه داریم

$$x = \sqrt{\frac{۲K_{max}}{k}} = \sqrt{\frac{۲(۶۷\,J)}{۶۴۰\,N/m}} = ۰/۴۶\,m$$

** ۵۴ دختر بچه‌ای به وزن $۲۶۷\,N$ از سُرسره‌ای که با راستای افقی زاویه‌ی ۲۰ درجه می‌سازد، به اندازه‌ی $۶/۱\,m$ به پایین سُر می‌خورد. ضریب اصطکاک جنبشی میان سُرسره و بچه ۰/۱۰ است. (الف) چقدر انرژی به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود؟ (ب) اگر دختر بچه از بالای سُرسره با تندی $۰/۴۵۷\,m/s$ شروع به لغزیدن کند، تندی‌اش در پایین سُرسره چقدر است؟

حل: (الف) با استفاده از تجزیه‌ی نیروی نشان داده شده در فصل ۶، نیروی عمودی $F_N = mg\cos\theta$ را (که در آن $mg = ۲۶۷\,N$ است) به دست می‌آوریم:

$$f_k = \mu_k F_N = \mu_k mg\cos\theta$$

بنابراین، از معادله‌ی ۸-۳۲ داریم

$$\Delta E_{th} = f_k d = \mu_k mgd\cos\theta$$

$$= (۰/۱۰)(۲۶۷)(۶/۱)\cos ۲۰^\circ = ۱/۵\times ۱۰^۲\,J$$

(ب) تغییر انرژی پتانسیل برابر است با

$$\Delta U = mg(-d\sin\theta) = (۲۶۷\,N)(-۶/۱\,m)\sin ۲۰^\circ$$

$$= -۵/۶\times ۱۰^۲\,J$$

انرژی جنبشی آغازی برابر است با

$$K_i = \frac{۱}{۲}mv_i^۲ = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۲۶۷\,N}{۹/۸\,m/s^۲}\right)(۰/۴۵۷\,m/s^۲) = ۲/۸\,J$$

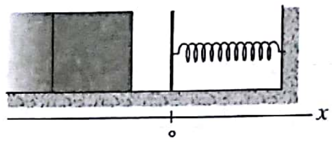
در نتیجه با استفاده از معادله‌ی ۸-۳۳ (به ازای $W = ۰$) می‌توان

انرژی جنبشی پایانی را به دست آورد:

$$K_f = K_i - \Delta U - \Delta E_{th}$$
$$= ۲,۸ - (-۵,۶\times ۱۰^{۲}) - ۱,۵\times ۱۰^{۲} = ۴,۱\times ۱۰^{۲}\ \mathrm{J}$$

درنتیجه تندی پایانی دختربچه $v_f = \sqrt{۲K_f / m} = ۵,۶\ \mathrm{m/s}$ است.

** ۵۵ در شکل ۸-۵۳، جسمی به جرم $m = ۲,۵\ \mathrm{kg}$ به سوی فنری با ثابت فنری $k = ۳۲۰\ \mathrm{N/m}$ می‌لغزد. وقتی جسم متوقف می‌شود فنر به اندازه‌ی ۷,۵ cm متراکم شده است. ضریب اصطکاک جنبشی میان جسم و سطح افقی ۰,۲۵ است. در حین تماس داشتن جسم با فنر تا هنگام توقف، (الف) کار انجام شده توسط نیروی فنر و (ب) افزایش انرژی گرمایی دستگاه جسم ـ سطح، چقدر است؟ (پ) تندی جسم درست در لحظه‌ی برخورد به فنر چیست؟



شکل ۸-۵۳ مسئله‌ی ۵۵.

حل: (الف) به ازای $x = ۰,۰۷۵\ \mathrm{m}$ و $k = ۳۲۰\ \mathrm{N/m}$، از معادله‌ی ۷-۲۶ داریم $W_s = -\frac{۱}{۲}kx^{۲} = -۰,۹۰\ \mathrm{J}$. این مقدار با منفی ΔU برابر است.

(ب) با تجزیه کردن نیروها، $F_N = mg$ به دست می‌آید و نشان می‌دهد که $f_k = \mu_k F_N = \mu_k mg$. به ازای $d = x$، از معادله‌ی ۸-۳۱ داریم

$$\Delta E_{th} = f_k d = \mu_k mgx$$
$$= (۰,۲۵)(۲,۵)(۹,۸)(۰,۰۷۵) = ۰,۴۶\ \mathrm{J}$$

(پ) معادله‌ی ۸-۳۳ (به ازای $W = ۰$) نشان می‌دهد که انرژی جنبشی آغازی برابر است با

$$K_i = \Delta U + \Delta E_{th} = ۰,۹۰ + ۰,۴۶ = ۱,۳۶\ \mathrm{J}$$

و از آن‌جا $v_i = \sqrt{۲K_i / m} = ۱,۰\ \mathrm{m/s}$ به دست می‌آید.

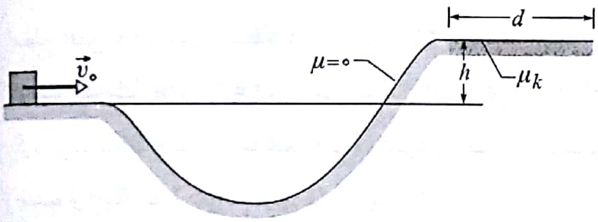
** ۵۶ جسمی به جرم ۲,۰ kg را به فنری افقی، واقع بر روی یک میز، فشار می‌دهیم. در نتیجه، فنر به اندازه‌ی ۱۵ cm متراکم می‌شود. آنگاه جسم را رها می‌کنیم تا فنر آن را بر روی سطح میز بلغزاند. جسم در فاصله‌ی ۷۵ سانتی‌متری نقطه‌ی رها شدن متوقف می‌شود. ثابت نیروی فنر ۲۰۰ N/m است. ضریب اصطکاک جنبشی جسم ـ سطح میز چقدر است؟

حل: از پایستگی انرژی که به صورت معادله‌ی ۸-۳۳ (به ازای $W = ۰$) نوشته می‌شود، داریم

$$\Delta E_{th} = K_i - K_f + U_i - U_f \Rightarrow f_k d = ۰ - ۰ + \frac{۱}{۲}kx^{۲} - ۰$$
$$\Rightarrow \mu_k mgd = \frac{۱}{۲}(۲۰۰\ \mathrm{N/m})(۰,۱۵\ \mathrm{m})^{۲}$$
$$\Rightarrow \mu_k (۲,۰\ \mathrm{kg})(۹,۸\ \mathrm{m/s^{۲}})(۰,۷۵\ \mathrm{m}) = ۲,۲۵\ \mathrm{J}$$

و از آن‌جا ضریب اصطکاک جنبشی $\mu_k = ۰,۱۵$ به دست می‌آید.

** ۵۷ در شکل ۸-۵۴، جسمی در طول مسیری که از دره‌ای می‌گذرد، از یک سطح افقی تا سطح افقی بالاتر می‌لغزد. مسیر حرکت جسم تا رسیدن به سطح بالاتر بی‌اصطکاک است. در سطح بالاتر نیروی اصطکاک سبب می‌شود جسم پس از پیمودن مسافت d متوقف شود. تندی آغازی جسم $v_0 = ۶,۰\ \mathrm{m/s}$، اختلاف ارتفاع دو سطح افقی $h = ۱,۱\ \mathrm{m}$، و ضریب اصطکاک جنبشی $\mu_k = ۰,۶۰$ است. مقدار d را پیدا کنید.



شکل ۸-۵۴ مسئله‌ی ۵۷.

حل: چون درّه بی‌اصطکاک است، تنها دلیلی که باعث می‌شود جسم با تندی کمتر از تندی آغازی به سطح بالاتر برسد، به دست آوردن انرژی پتانسیل $\Delta U = mgh$ است که در آن $h = ۱,۱\ \mathrm{m}$ است. جسم پس از لغزیدن در سطح ناصاف بالاتر، سرانجام متوقف می‌شود زیرا انرژی جنبشی باقی مانده‌ی آن به انرژی گرمایی $\Delta E_{th} = f_k d = \mu_k mgd$ تبدیل می‌شود که در آن $\mu = ۰,۶۰$ است. بنابراین، از معادله‌ی ۸-۳۳ (به ازای $W = ۰$) معادله‌ای به‌دست می‌آید که از حل کردن آن می‌توان مسافت d را پیدا کرد:

$$K_i = \Delta U + \Delta E_{th} = mg(h + \mu d)$$

در این معادله $K_i = mv_i^۲/۲$ و $v_i = ۶٫۰\,m/s$ است. از معادله‌ی بالا داریم: $d = \frac{v_i^۲}{۲\mu g} - \frac{h}{\mu} = ۱٫۲\,m$.

** ۵۸ یک ظرف شیرینی از سطح شیب‌داری با زاویه‌ی شیب ۴۰ درجه به سمت بالا حرکت داده می‌شود. در فاصله‌ی ۵۵ cm از پایین سطح شیب‌دار (که روی سطح اندازه‌گیری می‌شود)، تندی ظرف $۱٫۴\,m/s$ است. ضریب اصطکاک جنبشی میان ظرف و سطح ۰٫۱۵ است. (الف) ظرف تا چه مسافتی بر روی سطح حرکت خواهد کرد؟ (ب) ظرف در موقع برگشتن به سمت پایین با چه سرعتی به پایین سطح می‌رسد؟ (پ) اگر ضریب اصطکاک جنبشی کاهش یابد (اما تندی یا فاصله‌ی داده شده تغییر نکند)، آیا بزرگی پاسخ‌های قسمت‌های (الف) و (ب) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟

حل: برای حل کردن مستقیم این مسئله می‌توانیم از روش‌های به کار رفته در فصل‌های ۲ تا ۶ استفاده کنیم، اما در این‌جا روش‌های انرژی را به کار می‌بریم.

(الف) از تجزیه‌ی نیروها مانند روش به کار رفته در فصل ۶، معلوم می‌شود که بزرگی نیروی عمودی $F_N = mg\cos\theta$ (که در آن $\theta = ۴۰^\circ$) است، یعنی $f_k = \mu_k F_N = \mu_k mg\cos\theta$، که در آن $\mu_k = ۰٫۱۵$ است. از معادله‌ی ۸-۳۱ داریم

$$\Delta E_{th} = f_k d = \mu_k mgd\cos\theta$$

همچنین، با استفاده از مثلثات نتیجه می‌گیریم که $\Delta U = mgd\sin\theta$. معادله‌ی ۸-۳۳ (به ازای $W = ۰$ و $K_f = ۰$) معادله‌ای برای تعیین d به دست می‌دهد:

$$K_i = \Delta U + \Delta E_{th}$$

$$\frac{۱}{۲}mv_i^۲ = mgd(\sin\theta + \mu_k\cos\theta)$$

در این‌جا $v_i = ۱٫۴\,m/s$ است. از معادله‌ی بالا داریم

$$d = \frac{v_i^۲}{۲g(\sin\theta + \mu_k\cos\theta)} = ۰٫۱۳\,m$$

(ب) اکنون که مکان توقف ظرف را می‌دانیم ($d' = ۰٫۱۳ + ۰٫۵۵ = ۰٫۶۸\,m$ از پایین سطح شیب‌دار)، می‌توانیم باز هم از معادله‌ی ۸-۳۳ (به ازای $W = ۰$ و $K_i = ۰$) برای توصیف انرژی جنبشی پایانی ظرف (در پایین سطح شیب‌دار) استفاده کنیم:

$$K_f = -\Delta U - \Delta E_{th}$$

$$\frac{۱}{۲}mv^۲ = mgd'(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)$$

در نتیجه تندی ظرف در پایین سطح شیب‌دار به دست می‌آید:

$$v = \sqrt{۲gd'(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)} = ۲٫۶\,m/s$$

(پ) در قسمت (الف) روشن است که اگر μ_k کاهش یابد، d افزایش پیدا می‌کند، زیرا μ_k یک کمیت مثبت است و در مخرج کسر قرار دارد (کاهش اصطکاک یعنی کاهش انرژی «تلف شده»). در قسمت (ب)، دو جمله در رابطه‌ی v وجود دارد که نشان می‌دهند اگر μ_k کوچک‌تر باشد، v باید افزایش یابد: زیرا مقدار $d' = d_۰ + d$ افزایش می‌یابد و ضریب $\sin\theta - \mu_k\cos\theta$ نیز افزایش پیدا می‌کند. هر چه μ_k کوچک‌تر باشد، جمله‌ی دوم $(\mu_k\cos\theta)$ کوچک‌تر می‌شود.

** ۵۹ سنگی به وزن $۵٫۲۹\,N$ با تندی آغازی $۲۰٫۰\,m/s$ به‌طور قائم از سطح زمین به هوا پرتاب می‌شود. در حین پرواز سنگ، اگر به آن نیروی ثابت پسار هوا به مقدار $۰٫۲۶۵\,N$ شود، (الف) بیشینه‌ی ارتفاعی که سنگ به آن می‌رسد چقدر است؟ (ب) تندی سنگ درست پیش از برخورد به زمین چیست؟

حل: (الف) ارتفاع بیشینه‌ای که سنگ به آن می‌رسد، h است. درهنگام بالا رفتن سنگ تا این ارتفاع، انرژی گرمایی تولید شده توسط سنگ، برطبق معادله‌ی ۸-۳۱، برابر است با $\Delta E_{th} = fh$. از اصل پایستگی انرژی به صورت معادله‌ی ۸-۳۳ (به‌ازای $W = ۰$) استفاده می‌کنیم:

$$K_f + U_f + \Delta E_{th} = K_i + U_i$$

و انرژی پتانسیل در نقطه‌ی پرتاب (سطح زمین) را صفر در نظر می‌گیریم. انرژی جنبشی آغازی $K_i = \frac{۱}{۲}mv_۰^۲$، انرژی پتانسیل آغازی $U_i = ۰$، انرژی جنبشی پایانی $K_f = ۰$، و انرژی پتانسیل پایانی $U_f = wh$ است که در آن $w = mg$ وزن سنگ است. بنابراین، $wh + fh = \frac{۱}{۲}mv_۰^۲$ و ارتفاع برابر است با

$$h = \frac{mv_۰^۲}{۲(w + f)} = \frac{v_۰^۲}{۲g(۱ + f/w)}$$

به‌ازای $m = (۵٫۲۹\,N)/(۹٫۸۰\,m/s^۲) = ۰٫۵۴\,kg$، مقدار عددی ارتفاع برابر است با

$$h = \frac{(۲۰٫۰\,m/s)^۲}{۲(۹٫۸۰\,m/s^۲)(۱ + ۰٫۲۶۵/۵٫۲۹)} = ۱۹٫۴\,m$$

(ب) می‌دانیم که وقتی سنگ به بالا می‌رود جهت نیروی هوا به طرف پایین، و وقتی سنگ به پایین می‌رود جهت نیروی سنگ به طرف بالا وارد می‌شود، زیرا با جهت حرکت مخالف است. در یک رفت و برگشت کامل، انرژی گرمایی $\Delta E_{th} = 2fh$ است. انرژی جنبشی پایانی $K_f = \frac{1}{2}mv^2$ است که در آن v تندی سنگ پیش از برخورد به زمین است. انرژی پتانسیل پایانی $U_f = 0$ است. بنابراین با استفاده از معادله‌ی ۸-۳۱ (به ازای $W = 0$) داریم

$$\frac{1}{2}mv^2 + 2fh = \frac{1}{2}mv_0^2$$

رابطه‌ای را که در بالا برای h به دست آوردیم، در این رابطه قرار می‌دهیم:

$$\frac{2f\,v_0^2}{2g\,(1+f\,/w)} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$v^2 = v_0^2 - \frac{2f\,v_0^2}{mg\,(1+f\,/w)} = v_0^2 - \frac{2f\,v_0^2}{w\,(1+f\,/w)}$$
$$= v_0^2\left(1-\frac{2f}{w+f}\right) = v_0^2\,\frac{w-f}{w+f}$$

در این‌جا w را به جای mg قرار داده و بعضی عملیات جبری را انجام داده‌ایم. بالاخره داریم:

$$v = v_0\sqrt{\frac{w-f}{w+f}}$$
$$= (20{,}0\,m/s)\sqrt{\frac{5{,}29\,N - 0{,}265\,N}{5{,}29\,N + 0{,}265\,N}} = 19{,}0\,m/s$$

** ۶۰ بسته‌ای به جرم $4{,}0\,kg$ با انرژی جنبشی $128\,J$ از یک سطح شیب‌دار با زاویه‌ی شیب ۳۰ درجه به سمت بالا شروع به حرکت می‌کند. اگر ضریب اصطکاک جنبشی میان بسته و سطح شیب‌دار ۰٫۳۰ باشد، بسته تا چه مسافتی بر روی سطح به سمت بالا می‌لغزد؟

حل: می‌خواهیم مسافت پیموده شده در روی سطح شیب‌دار، d را پیدا کنیم که بر طبق رابطه‌ی $\Delta h = d\sin\theta$ به ارتفاع بستگی دارد. مانند فصل ۶، نیرو را تجزیه می‌کنیم و بزرگی نیروی عمودی $F_N = mg\cos\theta$ را به دست می‌آوریم که در نتیجه داریم $\mu_k = \mu_k\, mg\cos\theta$. معادله‌ی ۸-۳۳ (به ازای $W = 0$) را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$0 = K_f - K_i + \Delta U + \Delta E_{th}$$

$$= 0 - K_i + mgd\sin\theta + \mu_k\, mgd\cos\theta$$

و از آن جا مسافت پیموده شده به دست می‌آید:

$$d = \frac{K_i}{mg\,(\sin\theta + \mu_k\cos\theta)}$$
$$= \frac{128}{(4{,}0)(9{,}8)(\sin 30^\circ + 0{,}30\cos 30^\circ)} = 4{,}3\,m$$

** ۶۱ وقتی یک سوسک صدادار روی زمین به پشت قرار می‌گیرد، با خم کردن ناگهانی پشتش به هوا می‌پرد و انرژی ذخیره شده در عضله‌ی خود را به انرژی مکانیکی تبدیل می‌کند. این ساز و کار به هوا پریدن باعث تولید صدایی می‌شود که قابل شنیدن است و دلیل صدادار نامیدن این سوسک هم همین است. یک نوار تصویری گرفته شده از پرش سوسک صدادار نشان می‌دهد که سوسکی به‌جرم $m = 4{,}0\times10^{-6}\,kg$ در هنگام پرش به اندازه‌ی $0{,}77\,mm$ خود را به بالا حرکت می‌دهد و سپس تا ارتفاع بیشینه‌ی $h = 0{,}30\,m$ به‌هوا می‌پرد. درحین پرش، بزرگی متوسط (الف) نیروی خارجی وارد به پشت سوسک از سوی کف زمین، و (ب) شتاب سوسک برحسب g، چقدر است؟

حل: پیش از پرش، انرژی مکانیکی $\Delta E_{mech,0} = 0$ است. در ارتفاع بیشینه‌ی h، که تندی سوسک صفر است، انرژی مکانیکی $\Delta E_{mech,1} = mgh$ است. تغییر انرژی مکانیکی به نیروی خارجی وارد شده بستگی دارد:

$$\Delta E_{mech} = \Delta E_{mech,1} - \Delta E_{mech,0} = mgh = F_{avg}d\cos\phi$$

در این‌جا F_{avg} بزرگی نیروی خارجی متوسط وارد شده به سوسک است.

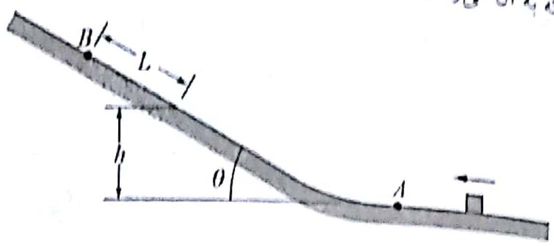
(الف) از معادله‌ی بالا داریم

$$F_{avg} = \frac{mgh}{d\cos\phi}$$
$$= \frac{(4{,}0\times10^{-6}\,kg)(9{,}80\,m/s^2)(0{,}30\,m)}{(7{,}7\times10^{-4}\,m)(\cos 0^\circ)} = 1{,}5\times10^{-2}\,N$$

(ب) با تقسیم کردن مقدار بالا به جرم سوسک، شتاب سوسک به‌دست می‌آید:

$$a = \frac{F_{avg}}{m} = \frac{h}{d\cos\phi}\,g$$
$$= \frac{(0{,}30\,m)}{(7{,}7\times10^{-4}\,m)(\cos 0^\circ)}\,g = 3{,}8\times10^2\,g$$

*** ۶۲ در شکل ۸-۵۵، جسمی در طول یک مسیر بی‌اصطکاک می‌لغزد تا به بخشی به طول $L = ۰٫۷۵\,m$ می‌رسد، که از ارتفاع $h = ۲٫۰\,m$ روی شیب‌راهه‌ای با زاویه‌ی شیب $\theta = ۳۰°$، شروع می‌شود. در این بخش ضریب اصطکاک جنبشی ۰٫۴۰ است. جسم با تندی $۸٫۰\,m/s$ از نقطه‌ی A می‌گذرد. اگر این جسم بتواند به نقطه‌ی B (محل پایان یافتن اصطکاک) برسد، تندی‌اش در آنجا چیست، و اگر نتواند برسد بیشترین ارتفاعی که به آن می‌رسد نسبت به نقطه‌ی A چقدر است؟



شکل ۸-۵۵ مسئله‌ی ۶۲.

حل: اولین نقطه‌ی رسیدن جسم به «ناحیه‌ی ناصاف» را C می‌نامیم (ارتفاع این نقطه نسبت به سطح مرجع h است). تندی جسم در نقطه‌ی C از معادله‌ی ۸-۱۷ به دست می‌آید:

$$v_C = \sqrt{v_A^2 - ۲gh} = \sqrt{(۸٫۰)^۲ - ۲(۹٫۸)(۲٫۰)}$$
$$= ۴٫۹۸۰ \approx ۵٫۰\,m/s$$

بنابراین، انرژی جنبشی جسم در نقطه‌ی C (در طرف راست ناحیه ناصاف) برابر است با

$$K_C = \frac{۱}{۲}m(۴٫۹۸۰\,m/s)^۲ = ۱۲٫۴\,m$$

توجه کنید که این انرژی به جرم جسم بستگی دارد، اما خواهیم دید که حذف خواهد شد. با استفاده از معادله‌ی ۸-۳۷ (و معادله‌ی ۶-۲ به ازای $F_N = mg\cos\theta$) و $y = d\sin\theta$، در صورتی که $d < L$ باشد (جسم به نقطه‌ی B نرسد)، این انرژی جنبشی به‌طور کامل به انرژی گرمایی (و پتانسیل) تبدیل می‌شود:

$$K_C = mgy + f_k d \Rightarrow ۱۲٫۴\,m = mgd\sin\theta + \mu_k mgd\cos\theta$$

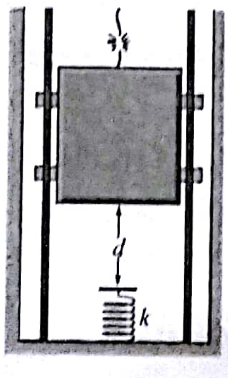
به ازای $\mu_k = ۰٫۴۰$ و $\theta = ۳۰°$، مقدار $d = ۱٫۴۹\,m$ به دست می‌آید که از L (مقدار داده شده $۰٫۷۵\,m$) بزرگ‌تر است، در نتیجه فرض $d < L$ نادرست است. وقتی جسم به نقطه‌ی B می‌رسد، انرژی جنبشی چقدر است؟ شتاب همان مقدار قبلی است، اما به جای d مقدار L را قرار می‌دهیم و جمله‌ی $v^۲$ پایانی مجهول است (به جای مقدار صفر مفروض):

$$\frac{۱}{۲}mv^۲ = K_C - (mgL\sin\theta + \mu_k mgL\cos\theta)$$

از این جا تندی رسیدن جسم به نقطه‌ی B به دست می‌آید:

$$v_B = \sqrt{v_C^۲ - ۲gL(\sin\theta + \mu_k\cos\theta)}$$
$$= \sqrt{(۴٫۹۸\,m/s)^۲ - ۲(۹٫۸\,m/s^۲)(۰٫۷۵\,m)(\sin ۳۰° + ۰٫۴\cos ۳۰°)}$$
$$= ۳٫۵\,m/s$$

*** ۶۳ کابل اتاقک آسانسور ۱۸۰۰ کیلوگرمی شکل ۸-۵۶، که در طبقه‌ی اول ساختمانی متوقف است، بریده می‌شود. در این موقع فاصله‌ی پایین اتاقک از بالای فنر اطمینان با ثابت فنری $k = ۰٫۱۵\,MN/m$، برابر با $d = ۳٫۷\,m$ است. یک وسیله‌ی ایمنی اتاقک را به ریل‌های مسیر فشار می‌دهد تا نیروی اصطکاک ثابت $۴٫۴\,kN$ با حرکت اتاقک مخالفت کند. (الف) تندی اتاقک را درست پیش از برخورد با فنر پیدا کنید. (ب) بیشینه‌ی تراکم فنر، x، را پیدا کنید (نیروی اصطکاک در حین متراکم شدن فنر نیز اثر می‌کند). (پ) اتاقک پس از برخورد با فنر چه مقدار به بالا می‌جهد؟ (ت) با استفاده از اصل پایستگی انرژی، کل مسافتی را که اتاقک پیش از متوقف شدن می‌پیماید، به طور تقریبی پیدا کنید. (فرض کنید وقتی اتاقک ساکن است، نیروی اصطکاک قابل چشم‌پوشی است.)



شکل ۸-۵۶ مسئله‌ی ۶۳.

حل: صورت مسئله نشان می‌دهد که اصطکاک ایستایی را نباید در نظر گرفت. بزرگی نیروی اصطکاک $f = ۴۴۰۰\,N$، نیروی اصطکاک جنبشی است و (همان طور که گفته شده است) ثابت است (و جهت آن به طرف بالا است)، و تغییر انرژی گرمای مربوط $\Delta E_{th} = fd$ (معادله‌ی ۸-۳۱) است و در قسمت (الف) $d = ۳٫۷\,m$ [ولی در قسمت (ب) به جای آن می‌توان x یعنی

میزان تراکم فنر را قرار داد].

(الف) به ازای $W = 0$ و انتخاب قسمت بالایی فنر (متراکم نشده) به عنوان سطح مرجع، می‌توان $U = mgy$ را از معادله‌ی ۸-۳۳ حساب کرد:

$$U_i = K + \Delta E_{th} \Rightarrow v = \sqrt{2d\left(g - \frac{f}{m}\right)}$$

که به ازای $m = 1800\,kg$، مقدار $v = 7/4\,m/s$ به دست می‌آید.

(ب) باز هم از معادله‌ی ۸-۳۳ (به ازای $W = 0$) استفاده می‌کنیم، اما این بار انرژی جنبشی در لحظه‌ی برخورد با فنر را به انرژی دستگاه در پایین‌ترین نقطه ربط می‌دهیم. با استفاده از همان سطح مرجع برای محاسبه‌ی $U = mgh$ در قسمت (الف)، انرژی پتانسیل گرانشی در پایین‌ترین نقطه مساوی با $mg(-x)$ است (ثابت فنری $k = 1/5\times10^5\,N/m$ است)؛ در این نقطه فنر به طور کامل متراکم شده است:

$$K = mg(-x) + \frac{1}{2}kx^2 + fx$$

در این جا $K = \frac{1}{2}mv^2 = 4/9\times10^4\,J$ با توجه به تندی قسمت (الف) به‌دست می‌آید. اگر از علامت اختصاری $\xi = mg - f = 1/3\times10^4\,N$ استفاده کنیم، از معادله‌ی درجه دوم مذکور داریم

$$x = \frac{\xi \pm \sqrt{\xi^2 + 2kK}}{k} = 0/90\,m$$

در این جا ریشه‌ی مثبت را در نظر گرفته‌ایم.

(پ) رابطه‌ی انرژی در پایین‌ترین نقطه با انرژی در بالاترین نقطه پس از واجهیدن اتاقک (مسافت d' در بالای وضعیت آرامش فنر) را به‌دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم $d' > x$ باشد. اکنون پایین‌ترین نقطه را به عنوان سطح مرجع برای محاسبه‌ی انرژی پتانسیل گرانشی انتخاب می‌کنیم:

$$\frac{1}{2}kx^2 = mgd' + fd' \Rightarrow d' = \frac{kx^2}{2(mg+d)} = 2/8\,m$$

(ت) نیروی ناپایستار (بخش ۸-۱)، اصطکاک است و جمله‌ی انرژی مربوط به آن، به مسافت پیموده شده بستگی دارد (در حالی که انرژی پتانسیل مربوط به نیروهای ناپایستار فقط به مکان بستگی دارد و به مسیر بین مکان‌ها بستگی ندارد). فرض می‌کنیم اتاقک آسانسور در مکان تعادل فنر، در حالی که فنر به اندازه‌ی d_{eq} متراکم شده است، متوقف می‌شود. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$mg = kd_{eq} \Rightarrow d_{eq} = \frac{mg}{k} = 0/12\,m$$

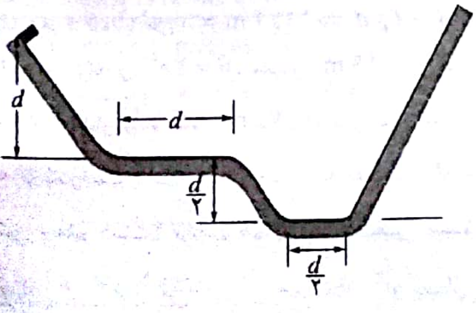
در این قسمت، از نقطه‌ی توقف پایانی به عنوان سطح مرجع برای محاسبه‌ی انرژی پتانسیل گرانشی استفاده می‌کنیم. بنابراین انرژی پتانسیل آغازی $U = mgy$ به صورت $mg(d_{eq}+d)$ نوشته می‌شود. در نقطه‌ی توقف پایانی، انرژی پتانسیل گرانشی صفر و انرژی فنر $\frac{1}{2}kd_{eq}^2$ است. پس، معادله‌ی ۸-۳۳ به صورت زیر نوشته می‌شود

$$mg(d_{eq}+d) = \frac{1}{2}kd_{eq}^2 + fd_{\text{کل}}$$

$$(1800)(9/8)(0/12+3/7) = \frac{1}{2}(1/5\times10^5)(0/12)^2 + (4400)d_{\text{کل}}$$

بنابراین، کل مسافتی که اتاقک پیش از توقف می‌پیماید $d_{\text{کل}} = 15\,m$ است.

*** ۶۴ در شکل ۸-۵۷، جسمی از حال سکون از ارتفاع $d = 40\,cm$ رها می‌شود، از یک شیب‌راهه‌ی بی‌اصطکاک به پایین می‌لغزد و به بخش تخت اول مسیر به‌طول d، که در آنجا ضریب اصطکاک جنبشی ۰/۵۰ است، می‌رسد. اگر این جسم هنوز در حال حرکت باشد، از شیب‌راهه‌ی بی‌اصطکاک دوم و از ارتفاع $d/2$ به پایین می‌لغزد و به بخش تخت پایین‌تر به طول $d/2$، که در آنجا ضریب اصطکاک جنبشی ۰/۵۰ است، می‌رسد. اگر این جسم باز هم در حال حرکت باشد، از یک شیب‌راهه‌ی بی‌اصطکاک بالا می‌رود تا (به‌طور لحظه‌ای) متوقف شود. این جسم در کجا متوقف می‌شود؟ اگر توقف نهایی جسم روی یک بخش تخت مسیر باشد، توضیح دهید در کدام بخش تخت و فاصله‌ی L محل توقف تا لبه‌ی سمت چپ آن بخش را مشخص کنید. اگر جسم به شیب‌راهه برسد، ارتفاع محل توقف لحظه‌ای H، را نسبت به بخش تخت پایین‌تر مسیر پیدا کنید.



شکل ۸-۵۷ مسئله‌ی ۶۴

حل: وقتی اصطکاک وجود ندارد (جسم در راستای سطوح شیب‌دار حرکت می‌کند)، انرژی در انرژی‌های بین جنبشی (معادله‌ی ۷-۱) و پتانسیل (معادله‌ی ۸-۹) مبادله می‌شود. اما در مسیرهای تخت افقی (فلات‌ها)، اصطکاک باعث می‌شود مقداری از انرژی جنبشی بر طبق معادله‌ی ۸-۳۱ (همراه با معادله‌ی ۶-۲ به ازای $\mu_k = 0.50$ و $F_N = mg$ در این مسئله) تلف شود. بنابراین، پس از آن که جسم به اندازه‌ی d (در راستای قائم) به پایین می‌لغزد، انرژی $K = \frac{1}{2}mv^2 = mgd$ را کسب می‌کند، که بخشی از آن ($\Delta E_{th} = \mu_k mgd$) تلف می‌شود، لذا مقدار انرژی جنبشی در پایان قسمت تخت اول (درست پیش از پایین رفتن به سمت فلات دوم) برابر است با

$$K = mgd - \mu_k mgd = \frac{1}{2}mgd$$

وقتی جسم به طرف قسمت تخت دوم به پایین می‌رود، انرژی جنبشی اضافی $mgd/2$ را کسب می‌کند، اما وقتی در روی قسمت تخت دوم فلات دوم می‌لغزد، انرژی $\mu_k mgd/2$ را «تلف می‌کند». بنابراین، وقتی جسم می‌خواهد از سطح شیب‌دار بالا برود، دارای انرژی جنبشی زیر است

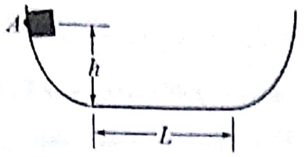
$$K = \frac{1}{2}mgd + \frac{1}{2}mgd - \frac{1}{2}\mu_k mgd = \frac{3}{4}mgd$$

این مقدار را با معادله‌ی ۸-۹ مساوی قرار می‌دهیم تا ارتفاع صعود جسم مساوی با $H = \frac{3}{4}d$ به دست آید. پس، جسم (به طور لحظه‌ای) در روی سطح شیب‌دار در ارتفاع زیر متوقف می‌شود

$$H = 0.75d = 0.75(40\,\text{cm}) = 30\,\text{cm}$$

این ارتفاع نسبت به قسمت تخت دوم (پایین‌تر) اندازه‌گیری شده است.

*** ۶۵ ذره‌ای در امتداد مسیری که دو سرش بالا آمده و بخش میانی آن تخت است، مطابق شکل ۸-۵۸، می‌لغزد. طول بخش تخت $L = 40\,\text{cm}$ است. بخش‌های خمیده‌ی مسیر بی‌اصطکاک‌اند، اما در بخش تخت ضریب اصطکاک جنبشی $\mu_k = 0.20$ است. ذره از نقطه‌ی A، که ارتفاع آن نسبت به بخش تخت مسیر برابر با $h = L/2$ است، رها می‌شود. این ذره، سرانجام، در کجا متوقف می‌شود؟



شکل ۸-۵۸ مسئله‌ی ۶۵.

حل: انرژی‌های جنبشی آغازی و پایانی صفر است، و ما پایستگی انرژی را به صورت معادله‌ی ۸-۳۳ (به ازای $W = 0$) می‌نویسیم. ذره فقط در قسمت تخت مسیر می‌تواند متوقف شود، اما پرسش این است که آیا در بار اول که به طرف راست می‌رود، یا در بار دوم که به طرف چپ می‌رود، یا در بار سوم که به طرف راست می‌رود، یا... متوقف می‌شود؟ اگر توقف در بار اول صورت گیرد، انرژی گرمایی تولید شده $\Delta E_{th} = f_k d$ خواهد بود که در آن $d \le L$ و $f_k = \mu_k mg$ است. اگر توقف ذره در بار دوم صورت گیرد، انرژی گرمایی کل $\Delta E_{th} = \mu_k mg(L+d)$ خواهد بود که d نشان دهنده‌ی مکان توقف ذره است و شرط $0 \le d \le L$ باید در نظر گرفته شود. اگر ذره پس از n بار عبور به راست و چپ متوقف شود، انرژی گرمایی کل برابر است با

$$\Delta E_{th} = \mu_k mg[(n-1)L + d]$$

بنابراین داریم:

$$mgd = \mu_k mg((n-1)L + d)$$

بعد از ساده کردن و قرار دادن $h = L/2$، داریم

$$\frac{d}{L} = 1 + \frac{1}{2\mu_k} - n$$

دو جمله‌ی اول سمت راست $1 + \frac{1}{2\mu_k} = 3.5$ است، در نتیجه شرط $0 \le d/L \le 1$ ایجاب می‌کند که $n = 3$ باشد. حال اگر نسبت $d/L = 1/2$ را در نظر بگیریم، ذره در بار سوم که می‌خواهد از قسمت تخت عبور کند، متوقف می‌شود.

مسئله‌های بیشتر

۶۶ میمونی به جرم $3.2\,\text{kg}$ از ارتفاع ۳/۰ متری بالای زمین آویزان است. (الف) اگر نقطه‌ی مرجع در روی زمین را $y = 0$ در نظر بگیریم، انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه میمون ـ زمین چقدر است؟ اگر میمون روی زمین بیفتد و نیروی پسار هوا ناچیز فرض شود، (ب) انرژی جنبشی و (پ) تندی میمون درست پیش از رسیدن به زمین، چقدر است؟

حل: (الف) از معادله‌ی ۸-۹ داریم

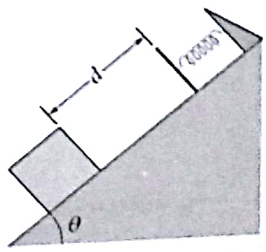
$$U = mgh = (3.2\,\text{kg})(9.8\,\text{m/s}^2)(3.0\,\text{m}) = 94\,\text{J}$$

(ب) انرژی مکانیکی پایسته است، در نتیجه $K = 94\,\text{J}$.

(پ) تندی میمون (با توجه به معادله‌ی ۷-۱) برابر است با

$$v = \sqrt{2K/m} = \sqrt{2(94\,\text{J})/(32\,\text{kg})} = 7.7\,\text{m/s}$$

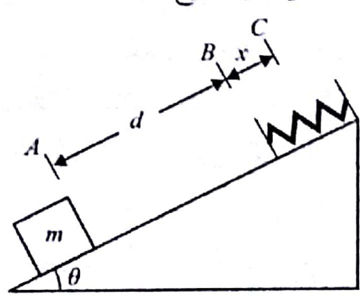
۶۷ فنری (با ثابت فنری $k = 200\,\text{N/m}$) در بالای یک سطح شیب‌دار بی‌اصطکاک با زاویه‌ی شیب $\theta = 40°$ (شکل ۸-۵۹) نصب شده است. جسمی ۱٫۰ کیلوگرمی با انرژی جنبشی آغازی ۱۶ J از مکانی واقع درفاصله‌ی $d = 0.60\,\text{m}$ از انتهای فنردرحال آرامش به‌طرف بالای سطح شیب‌دارپرتاب می‌شود. (الف) انرژی جنبشی جسم در لحظه‌ای که فنر را به اندازه‌ی ۰٫۲۰ m متراکم می‌کند، چقدر است؟ (ب) این جسم با چه انرژی جنبشی‌ای باید به طرف بالای سطح پرتاب شود تا موقعی که فنر را به اندازه‌ی ۰٫۴۰ m متراکم می‌کند، در یک لحظه متوقف شود؟



شکل ۸-۵۹ مسئله‌ی ۶۷.

حل: وقتی جسم به طرف بالای سطح شیب‌دار پرتاب می‌شود، انرژی جنبشی آن به انرژی‌پتانسیل گرانشی و انرژی‌پتانسیل کشسانی فنر تبدیل می‌شود. این جسم فنر را متراکم می‌کند، و پیش از آن که جسم به طرف پایین بلغزد، به طور لحظه‌ای متوقف می‌شود.

فرض کنید A نقطه‌ی آغاز و نقطه‌ی مرجع برای محاسبه‌ی انرژی پتانسیل گرانشی ($U_A = 0$) باشد. جسم ابتدا در نقطه‌ی B با فنر تماس پیدا می‌کند. فنر در نقطه‌ی C به مقدار اضافی x متراکم می‌شود (به شکل زیر رجوع کنید).



بر طبق پایستگی انرژی داریم $K_A + U_A = K_B + U_B = K_C + U_C$، و می‌دانیم که

$$U = U_g + U_s = mgy + \frac{1}{2}kx^2$$

یعنی انرژی پتانسیل کل با مجموع انرژی پتانسیل گرانشی و انرژی پتانسیل کشسانی فنر برابر است.

(الف) درلحظه‌ای که $x_C = 0.20\,\text{m}$ است، ارتفاع قائم برابر است با

$$y_C = (d + x_C)\sin\theta = (0.60\,\text{m} + 0.20\,\text{m})\sin 40° = 0.514\,\text{m}$$

با استفاده از اصل پایستگی انرژی داریم

$$K_A + U_A = K_C + U_C \Rightarrow 16\,\text{J} + 0 = K_C + mgy_C + \frac{1}{2}kx_C^2$$

که از آن‌جا انرژی جنبشی در نقطه‌ی C به دست می‌آید:

$$K_C = K_A - mgy_C - \frac{1}{2}kx_C^2$$

$$= 16\,\text{J} - (1.0\,\text{kg})(9.8\,\text{m/s}^2)(0.514\,\text{m}) - \frac{1}{2}(200\,\text{N/m})(0.20\,\text{m})^2 \approx 7.0\,\text{J}$$

(ب) درلحظه‌ای که $x'_C = 0.40\,\text{m}$ است، ارتفاع قائم برابر است با

$$y'_C = (d + x'_C)\sin\theta = (0.60\,\text{m} + 0.40\,\text{m})\sin 40° = 0.64\,\text{m}$$

با به کار بردن اصل پایستگی انرژی داریم $K'_A + U'_A = K'_C + U'_C$. چون $U'_A = 0$، در نتیجه انرژی جنبشی آغازی $K'_C = 0$ است و داریم

$$K'_A = U'_C = mgy'_C + \frac{1}{2}kx'^2_C$$

$$= (1.0\,\text{kg})(9.8\,\text{m/s}^2)(0.64\,\text{m}) + \frac{1}{2}(200\,\text{N/m})(0.40\,\text{m})^2 = 22\,\text{J}$$

۶۸ پرتابه‌ای به جرم ۰٫۵۵ kg با انرژی جنبشی آغازی ۱۸۰۰ J از لبه‌ی پرتگاهی پرتاب می‌شود. جابه‌جایی رو به بالای بیشینه‌ی پرتابه نسبت به نقطه‌ی پرتاب، ۱۴۰ m+ است. (الف) مؤلفه‌ی افقی و (ب) مؤلفه‌ی قائم سرعت پرتاب چیست؟ (پ) در لحظه‌ای که مؤلفه‌ی قائم سرعت پرتابه ۶۵ m/s است، جابه‌جایی قائم آن نسبت به نقطه‌ی پرتاب چیست؟

حل: (الف) در نقطه‌ی ارتفاع بیشینه، که $y = 140\,\text{m}$ است، مؤلفه‌ی قائم سرعت صفر می‌شود اما مؤلفه‌ی افقی به همان مقدار لحظه‌ی پرتاب (اگر از اصطکاک هوا چشم‌پوشی شود) باقی می‌ماند. انرژی جنبشی پرتابه در آن لحظه برابر است با

$$K = \frac{۱}{۲}(۰/۵۵\,\text{kg})v_x^۲$$

همچنین، انرژی پتانسیل پرتابه (اگر شکل مرجع در سطح لبه‌ی پرتگاه انتخاب شود) در آن لحظه $U = mgy = ۷۵۵\,\text{J}$ است.

بنابراین، بر طبق اصل پایستگی انرژی مکانیکی داریم

$$K = K_i - U = ۱۸۰۰ - ۷۵۵$$

$$v_x = \sqrt{\frac{۲(۱۸۰۰ - ۷۵۵)}{۰/۵۵}} = ۶۲\,\text{m/s}$$

ب) همان‌طور که گفته شد $v_x = v_{ix}$، درنتیجه از انرژی جنبشی آغازی

$$K_i = \frac{۱}{۲}m(v_{۱x}^۲ + v_{۱y}^۲)$$

می‌توان برای محاسبه‌ی v_{iy} استفاده کرد که $v_{iy} = ۵۲\,\text{m/s}$ به دست می‌آید.

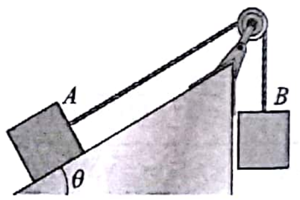
پ) با استفاده از معادله‌ی ۲-۱۶ برای راستای قائم (جهت $+y$ به طرف بالا) داریم

$$v_y^۲ = v_{۱y}^۲ - ۲g\Delta y$$

$$\Rightarrow (۶۵\,\text{m/s})^۲ = (۵۲\,\text{m/s})^۲ - ۲(۹۸\,\text{m/s}^۲)\Delta y$$

که از آن‌جا $\Delta y = -۷۶\,\text{m}$ به دست می‌آید. علامت منفی نشان می‌دهد که جابه‌جایی در زیر نقطه‌ی پرتاب صورت گرفته است.

۶۹ در شکل ۸-۶۰، جرم قرقره ناچیز است و قرقره و سطح شیب‌دار اصطکاک ندارند. جسم A دارای جرم $۱/۰\,\text{kg}$، جسم B دارای جرم $۲/۰\,\text{kg}$ و زاویه‌ی θ برابر با ۳۰ درجه است. اگر دو جسم از حال سکون و به گونه‌ای رها شوند که ریسمان به‌حالت کشیده باشد، در هنگام سقوط کردن جسم B به‌اندازه‌ی ۲۵cm انرژی جنبشی کل دو جسم چقدر است؟



شکل ۸-۶۰ مسئله‌ی ۶۹.

حل: اگر جسم بزرگ‌تر (جسم B، $m_B = ۲/۰\,\text{kg}$) ارتفاع قائم $d = ۰/۲۵\,\text{m}$ را به پایین سقوط کند، جسم کوچک‌تر (جسم A، $m_A = ۱/۰\,\text{kg}$) باید ارتفاع خود را به اندازه‌ی $h = d\sin ۳۰°$ افزایش دهد. تغییر انرژی پتانسیل گرانشی برابر است با

$$\Delta U = -m_B gd + m_A gh$$

بر طبق اصل پایستگی انرژی، $\Delta E_{\text{mech}} = \Delta K + \Delta U = ۰$، و تغییر انرژی جنبشی دستگاه $\Delta K = -\Delta U$ است. چون انرژی جنبشی آغازی صفر است، انرژی جنبشی پایانی برابر است با

$$K_f = \Delta K = m_B gd - m_A gh = m_B gd - m_A gd\sin\theta$$

$$= (m_B - m_A \sin\theta)gd$$

$$= [۲/۰\,\text{kg} - (۱/۰\,\text{kg})\sin ۳۰°](۹/۸\,\text{m/s}^۲)(۰/۲۵\,\text{m}) = ۳/۷\,\text{J}$$

توجه: رابطه‌ی بالا نشان می‌دهد که در حالت ویژه که $m_B = m_A \sin\theta$ است، دستگاه دوجسمی ساکن می‌ماند. از طرف دیگر، اگر $m_A \sin\theta > m_B$ باشد، جسم A به طرف پایین سطح شیب‌دار می‌لغزد و جسم B به‌طور قائم به طرف بالا حرکت می‌کند.

۷۰ در شکل ۸-۳۸، ریسمان دارای طول $L = ۱۲۰\,\text{cm}$ است و به یک سر آن گلوله‌ای وصل شده و سر دیگرش به جایی محکم شده است. یک میخ ثابت در نقطه‌ی P قرار دارد. گلوله پس از رها شدن از حالت سکون به پایین حرکت می‌کند تا ریسمان به میخ برخورد کند؛ سپس گلوله به دور میخ به بالا تاب می‌خورد. اگر بخواهیم گلوله به دور میخ یک دور کامل بزند، فاصله‌ی d را چقدر باید اضافه کنیم؟ (*راهنمایی:* گلوله در بالاترین نقطه‌ی مسیرش باز هم باید در حال حرکت باشد. آیا می‌دانید چرا؟)

حل: از اصل پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم: انرژی مکانیکی در بالاترین نقطه‌ی مسیر باید با انرژی آغازی آن برابر باشد. برای پیدا کردن تندی از قانون دوم نیوتون استفاده می‌کنیم و سپس انرژی جنبشی در بالاترین نقطه‌ی مسیر را به دست می‌آوریم. در آن نقطه جهت نیروی‌کشش T ریسمان و جهت نیروی گرانش هردو به‌طرف پایین، یعنی به طرف مرکز دایره است. چون شعاع دایره $r = L - d$ است، در نتیجه قانون دوم را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$T + mg = mv^۲/(L - d)$$

در این جا v تندی و m جرم گلوله است. وقتی گلوله با کمترین تندی ممکن از بالاترین نقطه عبور می‌کند، نیروی کشش ریسمان صفر است. در نتیجه داریم

$$mg = m\frac{v^۲}{L - d} \Rightarrow v = \sqrt{g(L - d)}$$

هنگامی که گلوله از پایین‌ترین نقطه‌ی مسیر عبور می‌کند انرژی

پتانسیل گرانشی دستگاه گلوله ـ زمین باید صفر باشد. پس، انرژی پتانسیل آغازی گلوله mgL است. انرژی جنبشی آغازی صفر است زیرا گلوله از حال سکون شروع به حرکت می‌کند. انرژی پتانسیل پایانی در بالاترین نقطه‌ی مسیر، $۲mg(L-d)$ و انرژی جنبشی پایانی $\frac{۱}{۲}mv^۲ = \frac{۱}{۲}mg(L-d)$ است و v همان مقداری است که در بالا به دست آمد. از اصل پایستگی انرژی داریم:

$$mgL = ۲mg(L-d) + \frac{۱}{۲}mg(L-d) \Rightarrow d = ۳L/۵$$

به ازای $L = ۱/۲۰\,m$ مقدار $d = ۰/۶۰(۱/۲۰\,m) = ۰/۷۲\,m$ به دست می‌آید.

توجه کنید که اگر d از این مقدار بیشتر باشد، ارتفاع بالاترین نقطه کمتر می‌شود، در نتیجه تندی گلوله در هنگام رسیدن به آن نقطه بیشتر است و گلوله از آن نقطه عبور می‌کند. اگر d از مقدار به دست آمده کمتر باشد، گلوله نمی‌تواند دور کامل بزند. بنابراین، مقدار به دست آمده برای d یک حد پایین است.

۷۱ در شکل ۸-۵۱، جسمی به پایین یک شیب‌راهه‌ی بی‌اصطکاک لغزانده می‌شود. تندی‌های جسم در نقطه‌های A و B به ترتیب $۲/۰۰\,m/s$ و $۲/۶۰\,m/s$ هستند. بار دیگر، این جسم به پایین شیب‌راهه لغزانده می‌شود اما این بار تندی آن در نقطه‌ی A برابر با $۴/۰۰\,m/s$ است. در این حالت تندی جسم در نقطه‌ی B چقدر است؟

حل: وقتی جسم در روی سطح شیب‌دار بی‌اصطکاک به پایین می‌لغزد، انرژی پتانسیل گرانشی آن به انرژی جنبشی تبدیل می‌شود، در نتیجه تندی جسم افزایش می‌یابد. با توجه به پایستگی انرژی داریم $K_A + U_A = K_B + U_B$. بنابراین، تغییر انرژی جنبشی جسم در حال حرکت از نقطه‌ی A تا نقطه‌ی B برابر است با

$$\Delta K = K_B - K_A = -\Delta U = -(U_B - U_A)$$

در هر دو حالت، تغییر انرژی پتانسیل یکسان است. در نتیجه $\Delta K_۱ = \Delta K_۲$. تندی جسم در نقطه‌ی B در بار دوم از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

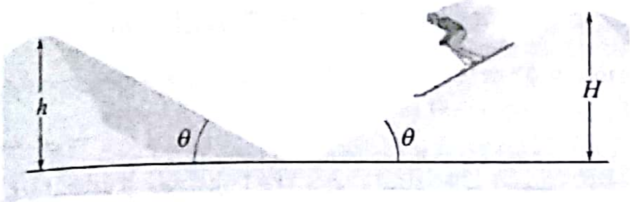
$$\frac{۱}{۲}mv_{B,۱}^۲ - \frac{۱}{۲}mv_{A,۱}^۲ = \frac{۱}{۲}mv_{B,۲}^۲ - \frac{۱}{۲}mv_{A,۲}^۲$$

یا

$$v_{B,۲} = \sqrt{v_{B,۱}^۲ - v_{A,۱}^۲ + v_{A,۲}^۲}$$

$$= \sqrt{(۲/۶۰\,m/s)^۲ - (۲/۰۰\,m/s)^۲ + (۴/۰۰\,m/s)^۲} = ۴/۳۳\,m/s$$

۷۲ دو قله‌ی پوشیده از برف به ارتفاع‌های $H = ۸۵۰\,m$ و $h = ۷۵۰\,m$ در دوطرف دره‌ای قرار گرفته‌اند. یک پیست اسکی به‌طول $۳/۲\,km$ و شیب متوسط $\theta = ۳۰°$ از نوک قله‌ی بلندتر تا نوک قله‌ی کوتاه‌تر کشیده شده است (شکل ۸-۶۱). (الف) اسکی‌بازی ازحالت سکون از روی قله‌ی بلندتر شروع به‌حرکت می‌کند. اگر او بدون استفاده از باتون حرکت کند، با چه تندی‌ای به بالای قله‌ی کوتاه‌تر می‌رسد؟ از اصطکاک چشم‌پوشی کنید. (ب) ضریب اصطکاک‌جنبشی میان برف‌و اسکی‌ها، تقریباً چقدر باید باشد تا اسکی‌باز درست دربالای قله‌ی کوتاه‌ترمتوقف شود؟



شکل ۸-۶۱ مسئله‌ی ۷۲.

حل: (الف) انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه اسکی‌باز ـ زمین را در حالتی که اسکی‌باز به پایین قله‌ها می‌رسد، صفر در نظر می‌گیریم. انرژی پتانسیل آغازی $U_i = mgH$ است که در آن m جرم اسکی‌باز، و H ارتفاع قله‌ی بلندتر است. انرژی پتانسیل پایانی $U_f = mgh$ است که در آن h ارتفاع قله‌ی کوتاه‌تر است. انرژی جنبشی اسکی‌باز در آغاز $K_i = ۰$ و انرژی جنبشی پایانی او $K_f = \frac{۱}{۲}mv^۲$ است، که v تندی اسکی‌باز در نوک قله‌ی کوتاه‌تر است. نیروی عمودی که سطح شیب‌دار به اسکی‌باز وارد می‌کند کار انجام نمی‌دهد و اصطکاک ناچیز است، در نتیجه انرژی مکانیکی پایسته است:

$$U_i + K_i = U_f + K_f \Rightarrow mgH = mgh + \frac{۱}{۲}mv^۲$$

و از آن‌جا داریم

$$v = \sqrt{۲g(H-h)}$$

$$= \sqrt{۲(۹/۸\,m/s^۲)(۸۵۰\,m - ۷۵۰\,m)} = ۴۴/۳\,m/s$$

(ب) یادآوری می‌کنیم که وقتی اسکی‌باز بر روی سطح شیب‌دار به پایین می‌لغزد، نیروی عمودی که سطح شیب‌دار به اسکی‌باز وارد می‌کند، $F_N = mg\cos\theta$ است که θ زاویه شیب نسبت به افق، و برای هر دو سطح $۳۰°$ است. بزرگی نیروی اصطکاک $f = \mu_k F_N = \mu_k mg\cos\theta$ است. انرژی گرمایی تولید شده

توسط نیروی اصطکاک $fd = \mu_k mg\cos\theta$ است که d مسافت کل پیموده شده در راستای مسیر است. چون اسکی‌باز بدون انرژی جنبشی به نوک قله‌ی کوتاه‌تر می‌رسد، افزایش انرژی گرمایی با کاهش انرژی پتانسیل برابر است. یعنی، $\mu_k mgd\cos\theta = mg(H-h)$. در نتیجه داریم

$$\mu_k = \frac{H-h}{d\cos\theta} = \frac{(۸۵۰\,\mathrm{m} - ۷۵۰\,\mathrm{m})}{(۳/۲\times۱۰^۳\,\mathrm{m})\cos۳۰^\circ} = ۰/۰۵$$

۷۳ دمای یک مکعب پلاستیکی هنگامی که بر اثر نیروی افقی $۱۵\,\mathrm{N}$ با تندی ثابت به اندازه‌ی $۳/۰\,\mathrm{m}$ روی سطحی هُل داده می‌شود، پایشگری می‌شود. این پایشگری نشان می‌دهد که انرژی گرمایی مکعب به اندازه‌ی $۲۰\,\mathrm{J}$ افزایش می‌یابد. افزایش انرژی گرمایی سطحی که مکعب روی آن می‌لغزد، چقدر است؟

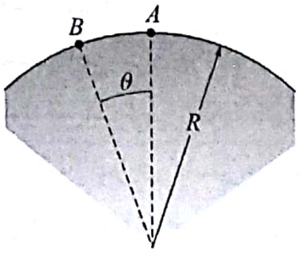
حل: وقتی مکعب بر روی سطح هل داده می‌شود، انرژی گرمایی سطح و مکعب افزایش می‌یابند زیرا در بین آن‌ها اصطکاک وجود دارد. بر طبق قانون پایستگی، برای دستگاه سطح ـ مکعب داریم $W = \Delta E_{mech} + \Delta E_{th}$. چون تندی ثابت است، $\Delta K = ۰$ و از معادله‌ی ۸-۳۳ (کاربرد مفهوم پایستگی انرژی) داریم

$$W = \Delta E_{mech} + \Delta E_{th} = \Delta E_{th}$$
$$= \Delta E_{th(\text{مکعب})} + \Delta E_{th(\text{سطح})}$$

به ازای $W = (۱۵\,\mathrm{N})(۳/۰\,\mathrm{m}) = ۴۵\,\mathrm{J}$ و $\Delta E_{th(\text{مکعب})} = ۲۰\,\mathrm{J}$، داریم $\Delta E_{th(\text{سطح})} = ۲۵\,\mathrm{J}$.

توجه: کل کار انجام شده در این‌جا به انرژی‌های گرمایی سطح و مکعب تبدیل می‌شود. مقدار انرژی گرمایی منتقل شده به یک ماده به خواص گرمایی آن بستگی دارد که در فصل ۱۸ (جلد دوم اصول فیزیک) مورد بحث قرار می‌گیرد.

۷۴ اسکی‌بازی به وزن $۶۰۰\,\mathrm{N}$ از تپه‌ای دایره‌ای بی‌اصطکاک به شعاع $R = ۲۰\,\mathrm{m}$ بالا می‌رود (شکل ۸-۶۲). فرض کنید که اثرهای مقاومت هوا روی اسکی‌باز ناچیز است. اسکی‌باز هنگام بالا رفتن از تپه تحت زاویه‌ی $\theta = ۲۰^\circ$ دارای تندی $۸/۰\,\mathrm{m/s}$ در نقطه‌ی B است. (الف) تندی او در نوک تپه (نقطه‌ی A) بدون استفاده از چوب دستی چقدر است؟ (ب) تندی کمینه‌ی او در نقطه‌ی B چقدر باید باشد تا او بازهم بتواند به بالای تپه برسد؟ (پ) اگر وزن اسکی‌باز به جای $۶۰۰\,\mathrm{N}$ برابر با $۷۰۰\,\mathrm{N}$ باشد، بزرگی پاسخ‌های این دو پرسش افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟



شکل ۸-۶۲ مسئله‌ی ۷۴.

حل: ارتفاع آغازی او را به عنوان سطح $y = ۰$ انتخاب می‌کنیم و می‌بینیم که ارتفاع نوک تپه $y_A = R(۱-\cos۲۰^\circ) = ۱/۲\,\mathrm{m}$ و R شعاع تپه است. جرم اسکی‌باز $m = (۶۰۰\,\mathrm{N})/(۹/۸\,\mathrm{m/s^۲}) = ۶۱\,\mathrm{kg}$ است.

(الف) با استفاده از اصل پایستگی انرژی، معادله‌ی ۸-۱۷، داریم

$$K_B + U_B = K_A + U_A \Rightarrow K_B + ۰ = K_A + mgy_A$$

به ازای $v_B = ۸/۰\,\mathrm{m/s}$ داریم $K_B = ۱۹۵۲\,\mathrm{J}$ و $K_A = ۲/۳\times۱۰^۳\,\mathrm{J}$ به دست می‌آید. بنابراین، تندی اسکی‌باز در نوک تپه برابر است با

$$v_A = \sqrt{\frac{۲K_A}{m}} = \sqrt{\frac{۲(۲/۳\times۱۰^۳\,\mathrm{J})}{۶۱\,\mathrm{kg}}} = ۸/۷\,\mathrm{m/s}$$

توجه: شاید بخواهیم بررسی کنیم که آیا اسکی‌باز در تماس با تپه می‌ماند یا خیر. برای مثال در نقطه‌ی A خواهیم داشت $v^۲/r \approx ۲\,\mathrm{m/s^۲}$، که به طور قابل ملاحظه از g کمتر است.

(ب) به ازای $K_A = ۰$ داریم

$$K_B + U_B = K_A + U_A \Rightarrow K_B + ۰ = ۰ + mgy_A$$

در نتیجه $K_B = ۷۲۰\,\mathrm{J}$ به دست می‌آید و تندی متناظر با آن برابر است با

$$v_B = \sqrt{\frac{۲K_B}{m}} = \sqrt{\frac{۲(۷۲۰\,\mathrm{J})}{۶۱\,\mathrm{kg}}} = ۴/۹\,\mathrm{m/s}$$

(پ) برحسب جرم اسکی‌باز داریم

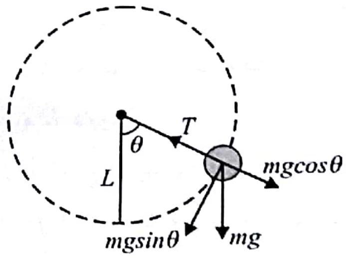
$$K_B + U_B = K_A + U_A \Rightarrow$$
$$\frac{۱}{۲}mv_B^۲ + mgy_B = \frac{۱}{۲}mv_A^۲ + mgy_A$$

در نتیجه جرم m حذف می‌شود و ملاحظه می‌کنیم که تندی اسکی‌باز به جرم (یا وزن) او بستگی ندارد.

۷۵ برای ساختن یک آونگ گلوله‌ای ۰٫۰۹۲ کیلوگرمی به یک سر میله‌ای به طول $۰٫۶۲\,\mathrm{m}$ و جرم ناچیز وصل شده و سر دیگر میله روی محوری سوار شده است. میله را می‌چرخانیم تا به‌صورت قائم قرار گیرد و سپس آن را از حال سکون رها می‌کنیم تا به سمت پایین حرکت کند و به دور محور تاب بخورد. وقتی گلوله به پایین‌ترین نقطه‌ی مسیر خود می‌رسد، (الف) تندی آن و (ب) نیروی کشش در میله چقدر است؟ آنگاه، میله را می‌چرخانیم تا به صورت افقی قرار گیرد و دوباره آن را از حال سکون رها می‌کنیم. (پ) در چه زاویه‌ای نسبت به راستای قائم نیروی کشش در میله برابر با وزن گلوله می‌شود؟ (ت) اگر جرم گلوله را افزایش دهیم، آیا بزرگی پاسخ قسمت (پ) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟

حل: این مسئله مربوط به حرکت آونگ است. انرژی‌های جنبشی و پتانسیل گلوله‌ی متصل به میله، با موقعیت آن تغییر می‌کند، اما انرژی مکانیکی در سرتاسر فرایند پایسته می‌ماند.

فرض می‌کنیم L طول آونگ است. ارتباط بین زاویه‌ی θ (نسبت به راستای قائم) و ارتفاع h (نسبت به پایین‌ترین نقطه‌ی مسیر، که به عنوان مکان مرجع برای محاسبه‌ی انرژی پتانسیل گرانشی mgh انتخاب شده است)، به صورت $h = L(۱-\cos\theta)$ است. نمودار جسم ـ آزاد در زیر نشان داده شده است. ارتفاع آغازی $h_۱ = ۲L$ است و در پایین‌ترین نقطه $h_۲ = ۰$ است. انرژی مکانیکی کل در سرتاسر فرایند پایسته است.



(الف) در آغاز گلوله در ارتفاع $h_۱ = ۲L$ قرار دارد و $K_۱ = ۰$ و $U_۱ = mgh_۱ = mg(۲L)$ است. در پایین‌ترین نقطه‌ی مسیر $K_۲ = \frac{۱}{۲}mv_۲^۲$ و $U_۲ = ۰$ است. با استفاده از اصل پایستگی انرژی به شکل معادله‌ی ۸–۱۷، داریم

$$K_۱ + U_۱ = K_۲ + U_۲ \Rightarrow ۰ + ۲mgL = \frac{۱}{۲}mv_۲^۲ + ۰$$

از این‌جا $v_۲ = ۲\sqrt{gL}$ به‌دست می‌آید که به‌ازای $L = ۰٫۶۲\,\mathrm{m}$ داریم

$$v_۲ = ۲\sqrt{(۹٫۸\,\mathrm{m/s^۲})(۰٫۶۲\,\mathrm{m})} = ۴٫۹\,\mathrm{m/s}$$

(ب) در پایین‌ترین نقطه، گلوله حرکت دایره‌ای انجام می‌دهد و مرکز دایره در بالای آن قرار دارد، در نتیجه جهت $|\vec{a}| = v^۲/r$ به طرف بالا و $r = L$ است. از قانون دوم نیوتون داریم

$$T - mg = m\frac{v^۲}{r} \Rightarrow T = m\left(g + \frac{۴gL}{L}\right) = ۵mg$$

که به ازای $m = ۰٫۰۹۲\,\mathrm{kg}$، نیروی کشش میله $T = ۴٫۵\,\mathrm{N}$ است.

(پ) گلوله در این حالت (با تندی صفر) از زاویه‌ی $\theta_i = ۹۰^\circ$ (یعنی از ارتفاع $h_i = L$) شروع به حرکت می‌کند و $T = mg$ است. وقتی گلوله از نقطه‌ای تحت زاویه‌ی θ عبور می‌کند، همان‌طور که نمودار جسم ـ آزاد نشان می‌دهد، قانون دوم نیوتون برای محوری در راستای میله به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\frac{mv^۲}{r} = T - mg\cos\theta = mg(۱-\cos\theta)$$

در نتیجه (چون $r = L$) در مکان مورد نظر $v^۲ = gL(۱-\cos\theta)$ است. از اصل پایستگی انرژی داریم

$$K_i + U_i = K + U$$

$$۰ + mgL = \frac{۱}{۲}mv^۲ + mgL(۱-\cos\theta)$$

$$gL = \frac{۱}{۲}(gL(۱-\cos\theta)) + gL(۱-\cos\theta)$$

بعد از ساده کردن رابطه‌ی اخیر خواهیم داشت

$$\theta = \cos^{-۱}(۱/۳) = ۷۱^\circ$$

(ت) چون زاویه‌ی به دست آمده در قسمت (پ) مستقل از جرم گلوله است، اگر جرم گلوله تغییر کند نتایج تغییر نمی‌کنند.

توجه: به ازای زاویه‌ی معلوم θ نسبت به راستای قائم، نیروی کشش در میله برابر است با

$$T = m\left(\frac{v^۲}{r} + g\cos\theta\right)$$

شتاب مماسی $a_t = g\sin\theta$ باعث تغییر تندی، و در نتیجه باعث تغییر انرژی جنبشی با زمان می‌شود. در هر حال، انرژی مکانیکی پایسته است.

۷۶ ذره‌ای را با وارد کردن یک نیروی خارجی ابتدا از $x = ۱٫۰\,\mathrm{m}$ تا $x = ۴٫۰\,\mathrm{m}$ رو به بیرون حرکت می‌دهیم و سپس آن را رو به درون به $x = ۱٫۰\,\mathrm{m}$ برمی‌گردانیم. این نیرو، که در راستای محور x وارد می‌شود برای رفتن رو به بیرون و برگشتن رو به درون می‌تواند مقادیر متفاوتی داشته باشد. در جدول زیر مقادیر

مربوط به چهار حالت نیرو (برحسب نیوتون) نشان داده شده است، که در آن x برحسب متر است:

	رفت (رو به بیرون)	برگشت (رو به درون)
(الف)	$+۳٫۰$	$-۳٫۰$
(ب)	$+۵٫۰$	$+۵٫۰$
(پ)	$+۲٫۰x$	$-۲٫۰x$
(ت)	$+۳٫۰x^۲$	$+۳٫۰x^۲$

کار خالص انجام شده توسط نیروی خارجی روی ذره را در هر یک از حالت‌ها ***برای حرکت رفت و برگشت*** پیدا کنید. (ث) در کدام حالت، در صورت وجود، نیروی خارجی پایستار است؟

حل: (الف) جدول نشان می‌دهد که وقتی جابه‌جایی در جهت $+x$ است [$\vec{d} = +(۳٫۰\,\mathrm{m})\hat{i}$]، نیرو $+(۳٫۰\,\mathrm{N})\hat{i}$ است، وقتی جابه‌جایی در جهت $-x$ صورت می‌گیرد، نیرو $-(۳٫۰\,\mathrm{N})\hat{i}$ است. با به کار بردن معادله‌ی ۷-۸ برای هر قسمت از این حرکت رفت و برگشتی و جمع کردن نتیجه‌ها، مقدار کار انجام شده ۱۸ J به دست می‌آید. این میدان نیرو پایستار نیست؛ اگر پایستار بود، در آن صورت کار خالص انجام شده باید صفر می‌شد (زیرا ذره به نقطه‌ی شروع برگشته است).

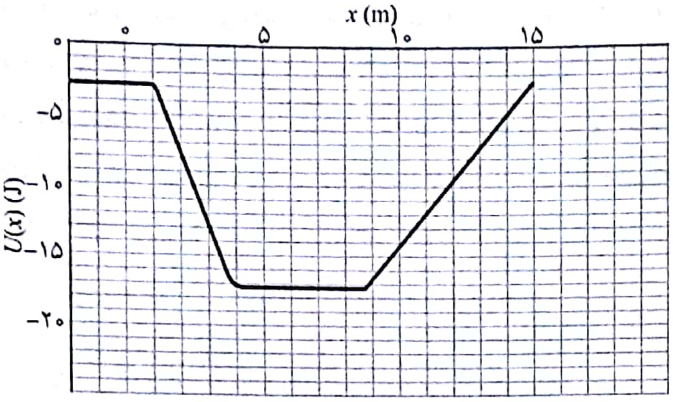
(ب) اما این میدان نیرو پایستار است، زیرا محاسبه نشان می‌دهد که کار خالص انجام شده صفر است.

(پ) دو انتگرال به صورت $\int ۲x\,dx$ تشکیل می‌دهیم که جواب هر دو $x^۲$ است و آن‌ها را باهم جمع می‌کنیم. با توجه به حدود انتگرال از $x = ۱$ تا $x = ۴$، کار انجام شده مساوی با $۳۰\,\mathrm{J} = (۴^۲ - ۱^۲)۲$ به دست می‌آید.

(ت) این میدان نیرو نیز پایستار است، زیرا محاسبه نشان می‌دهد که کار خالص انجام شده صفر است.

(ث) نیروها در قسمت‌های (ب) و (ت) پایستارند.

۷۷ نیروی پایستار $F(x)$ به ذره‌ای به جرم ۲٫۰ kg، که در راستای محور x حرکت می‌کند، وارد می‌شود. نمودار انرژی پتانسیل $U(x)$ وابسته به نیروی $F(x)$ در شکل ۸-۶۳، رسم شده است. وقتی ذره در مکان $x = ۲٫۰\,\mathrm{m}$ قرار دارد، سرعتش $-۱٫۵\,\mathrm{m/s}$ است. (الف) بزرگی و (ب) جهت $F(x)$ در این مکان چیست؟ ذره در میان چه مکان‌هایی (پ) در طرف چپ و (ت) در طرف راست، حرکت می‌کند؟ (ث) تندی ذره در مکان $x = ۷٫۰\,\mathrm{m}$ چقدر است؟



شکل ۸-۶۳ مسئله‌ی ۷۷.

حل: رابطه‌ی بین تابع انرژی پتانسیل $U(x)$ و نیروی پایستار $F(x)$ به صورت معادله‌ی ۸-۲۲ است: $F(x) = -dU/dx$. مثبت بودن شیب (ضریب زاویه) تابع $U(x)$ در یک نقطه به این معنی است که $F(x)$ منفی است، و برعکس.

(الف) در مکان $x = ۲٫۰\,\mathrm{m}$ نیرو برابر است با

$$F = -\frac{dU}{dx} \approx -\frac{\Delta U}{\Delta x} = -\frac{U(x = ۴\mathrm{m}) - U(x = ۱\mathrm{m})}{۴٫۰\mathrm{m} - ۱٫۰\mathrm{m}}$$

$$= -\frac{-(۱۷٫۵\,\mathrm{J}) - (-۲٫۸\,\mathrm{J})}{۴٫۰\mathrm{m} - ۱٫۰\mathrm{m}} = ۴٫۹\,\mathrm{N}$$

(ب) چون شیب تابع $U(x)$ در نقطه‌ی $x = ۲٫۰\,\mathrm{m}$ منفی است، جهت نیرو در جهت $+x$ است (اما در خواندن مقدارها از روی نمودار، عدم قطعیتی وجود دارد که باعث می‌شود رقم آخر خیلی معنی‌دار نباشد).

(پ) در مکان $x = ۲٫۰\,\mathrm{m}$، انرژی پتانسیل به صورت زیر براورد می‌شود

$$U(x = ۲٫۰\mathrm{m}) \approx U(x = ۱٫۰\mathrm{m}) + (-۴٫۹\,\mathrm{J/m})(۱٫۰\mathrm{m})$$

$$= -۷٫۷\,\mathrm{J}$$

بنابراین، انرژی مکانیکی کل برابر است با

$$E = K + U = \frac{۱}{۲}mv^۲ + U$$

$$= \frac{۱}{۲}(۲٫۰\,\mathrm{kg})(-۱٫۵\,\mathrm{m/s})^۲ + (-۷٫۷\,\mathrm{J}) = -۵٫۵\,\mathrm{J}$$

باز هم در خواندن مقدارها از روی نمودار، عدم قطعیت وجود دارد که باعث می‌شود رقم آخر خیلی معنی‌دار نباشد. در آن سطح

(−۵/۵J) در روی نمودار، دو نقطه در روی منحنی انرژی پتانسیل وجود دارد که انرژی پتانسیل یکسانی دارند: $x \approx ۱/۵\,m$ و $x \approx ۱۳/۵\,m$. بنابراین، ذره در ناحیه‌ی $۱/۵\,m < x < ۱۳/۵\,m$ می‌ماند. مرز سمت چپ در $x = ۱/۵\,m$ قرار دارد.

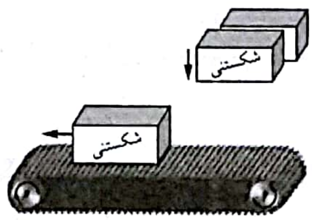
(ت) نتایج بالا نشان می‌دهند که مرز سمت راست در $x = ۱۳/۵\,m$ قرار دارد.

(ث) در مکان $x = ۷/۰\,m$، مقدار $U \approx -۱۷/۵\,J$ خوانده می‌شود. بنابراین اگر انرژی کل ذره (محاسبه شده در قسمت قبلی) $E \approx -۵/۵\,J$ باشد، در نتیجه خواهیم داشت

$$\frac{۱}{۲}mv^۲ = E - U \approx ۱۲\,J \Rightarrow v = \sqrt{\frac{۲}{m}(E-U)} \approx ۳/۵\,m/s$$

در این جا نیز عدم قطعیت در رقم آخر وجود دارد.

۷۸ در کارخانه‌ای صندوق‌های ۳۰۰ کیلوگرمی از یک ماشین بسته‌بندی به طور قائم بر روی تسمه نقاله‌ای که با تندی $۱/۲۰\,m/s$ حرکت می‌کند، می‌افتند (شکل ۸-۶۴). (موتوری تندی تسمه را ثابت نگه می‌دارد). ضریب اصطکاک جنبشی میان تسمه و صندوق ۰/۴۰۰ است. پس از مدت کوتاهی، لغزیدن صندوق‌ها روی تسمه پایان می‌یابد و صندوق به همراه تسمه حرکت می‌کند. در دوره‌ی زمانی‌ای که طی آن صندوق نسبت به تسمه به حالت سکون می‌رسد، (الف) انرژی جنبشی داده شده به صندوق، (ب) بزرگی نیروی اصطکاک جنبشی وارد به صندوق، و (پ) انرژی تولید شده توسط موتور را، در دستگاه مختصات ساکن نسبت به کارخانه، حساب کنید. (ت) توضیح دهید چرا پاسخ‌های (الف) و (پ) متفاوت‌اند.



شکل ۸-۶۴ مسئله‌ی ۷۸.

حل: (الف) چون تندی صندوقی به جرم m نسبت به کف کارخانه از صفر تا $۱/۲۰\,m/s$ افزایش می‌یابد، انرژی داده شده به آن برابر است با

$$K = \frac{۱}{۲}mv^۲ = \frac{۱}{۲}(۳۰۰kg)(۱/۲۰\,m/s)^۲ = ۲۱۶\,J$$

(ب) بزرگی نیروی اصطکاک جنبشی برابر است با

$$f = \mu F_N = \mu mg = (۰/۴۰۰)(۳۰۰kg)(۹/۸\,m/s^۲) = ۱/۱۸ \times ۱۰^۳\,N$$

(پ) فرض می‌کنیم مسافتی که صندوق پیش از متوقف شدن، نسبت به تسمه نقاله می‌پیماید d باشد. در نتیجه از معادله‌ی ۲-۱۶ داریم $[v^۲ = ۲ad = ۲(f/m)d]$

$$\Delta E_{th} = fd = \frac{۱}{۲}mv^۲ = K$$

بنابراین، انرژی کل که باید موتور تأمین کند برابر است با

$$W = K + \Delta E_{th} = ۲K = (۲)(۲۱۶\,J) = ۴۳۲\,J$$

(ت) انرژی تأمین شده توسط موتور، کار W است که موتور روی دستگاه انجام می‌دهد و باید از انرژی جنبشی داده شده به صندوق در قسمت (ب) بزرگ‌تر باشد. علت امر این است که بخشی از انرژی تأمین شده توسط موتور برای جبران انرژی تلف شده‌ی ΔE_{th} در حین لغزش صندوق مصرف می‌شود.

۷۹ خودرویی به جرم ۱۵۰۰kg با تندی ۳۰km/h از جاده‌ی شیب‌داری با زاویه‌ی شیب ۵/۰ درجه شروع به لغزیدن به پایین می‌کند. موتور خاموش است و تنها نیروهای وارد به خودرو نیروی برایند اصطکاک ناشی از جاده و نیروی گرانشی هستند. تندی خودرو پس از پیمودن مسافت ۵۰m بر روی جاده ۴۰km/h است. (الف) چقدر از انرژی مکانیکی خودرو به خاطر نیروی اصطکاک خالص کم می‌شود؟ (ب) بزرگی نیروی اصطکاک خالص چیست؟

حل: وقتی خودرو به پایین سطح شیب‌دار می‌لغزد، به خاطر وجود نیروی اصطکاک، مقداری از انرژی مکانیکی به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود. زاویه سطح شیب‌دار $\theta = ۵/۰°$ است. بنابراین، تغییر ارتفاع خودرو در بین بالاترین و پایین‌ترین نقطه، $\Delta y = -(۵۰m)\sin\theta = -۴/۴m$ است. ما پایین‌ترین نقطه (مکان پایانی خودرو) را سطح مرجع $y = ۰$ در نظر می‌گیریم. تغییر انرژی پتانسیل از رابطه‌ی $\Delta U = mg\Delta y$ به دست می‌آید.

برای به دست آوردن انرژی جنبشی، ابتدا یکای تندی‌ها را به یکاهای SI تبدیل می‌کنیم: $v_۰ = ۸/۳\,m/s$ و $v = ۱۱/۱\,m/s$. تغییر انرژی جنبشی $\Delta K = \frac{۱}{۲}m(v_f^۲ - v_i^۲)$ است. تغییر کل انرژی مکانیکی $\Delta E_{mech} = \Delta K + \Delta U$ است.

(الف) با قرار دادن مقادیر معلوم، ΔE_{mech} را به دست می‌آوریم:

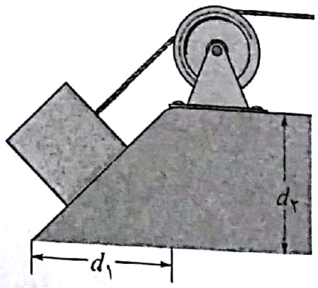
$$\Delta E_{mech} = \Delta K + \Delta U = \frac{۱}{۲} m (v_f^۲ - v_i^۲) + mg\Delta y$$
$$= \frac{۱}{۲}(۱۵۰۰\,\text{kg})[(۱۱/۱\,\text{m/s})^۲ - (۸/۳\,\text{m/s})^۲] +$$
$$+(۱۵۰۰\,\text{kg})(۹/۸\,\text{m/s}^۲)(-۴/۴\,\text{m})$$
$$= -۲۳۹۴۰\,\text{J} \approx -۲/۴\times۱۰^۴\,\text{J}$$

یعنی کاهش انرژی مکانیکی (ناشی از اصطکاک) $۲/۴\times۱۰^۴$ J است.

(ب) با استفاده از معادلات ۸-۳۱ و ۸-۳۳، $\Delta E_{th} = f_k d = -\Delta E_{mech}$ را به دست می‌آوریم. به ازای $d = ۵۰\,\text{m}$ نیروی اصطکاک جنبشی f_k برابر است با

$$f_k = \frac{-\Delta E_{mech}}{d} = \frac{-(-۲/۴\times۱۰^۴\,\text{J})}{۵۰\,\text{m}} = ۴/۸\times۱۰^۲\,\text{N}$$

۸۰ در شکل ۸-۶۵، قطعه‌ای گرانیت به جرم ۱۴۰۰kg توسط یک جرثقیل کابلی با تندی ثابت ۱/۳۴ m/s از یک سطح شیب‌دار به بالا کشیده می‌شود. فاصله‌های نشان داده شده عبارت‌اند از $d_۱ = ۴۰\,\text{m}$ و $d_۲ = ۳۰\,\text{m}$. ضریب اصطکاک جنبشی میان قطعه و سطح شیب‌دار ۰/۴۰ است. توان ناشی از نیروی وارد به قطعه از سوی کابل چقدر است؟



شکل ۸-۶۵ مسئله‌ی ۸۰

حل: می‌دانیم که سنگ مسافت $d = ۱/۲۵\,\text{m}$ را در مدت یک ثانیه به طرف بالای سطح شیب‌دار می‌لغزد، بنابراین افزایش ارتفاع آن $h = d\sin\theta$ است که در آن θ برابر است با

$$\theta = \tan^{-۱}\left(\frac{۳۰}{۴۰}\right) = ۳۷^\circ$$

هم‌چنین می‌دانیم که نیروی اصطکاک جنبشی در روی سطح شیب‌دار $f_k = \mu_k mg\cos\theta$ است که در آن $\mu_k = ۰/۴۰\,\text{m}$ و $m = ۱۴۰۰\,\text{kg}$ است. بنابراین با استفاده از معادلات ۸-۳۱ و ۸-۳۳ داریم

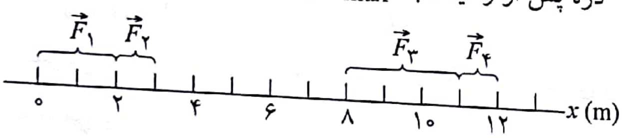
$$W = mgh + f_k d = mgd(\sin\theta + \mu_k \cos\theta)$$

یا $W = ۱/۵۸\times۱۰^۴\,\text{J}$ در مدت یک ثانیه به دست می‌آید. در نتیجه توان مربوط به این کار برابر است با

$$P = \frac{۱/۵۸\times۱۰^۴\,\text{J}}{۱\text{s}} = ۱/۵۸\times۱۰^۴\,\text{W} \approx ۱/۶\times۱۰^۴\,\text{W}$$

۸۱ ذره‌ای بر اثر نیروهای پایستار وارد شده فقط می‌تواند در راستای محور x حرکت کند (شکل ۸-۶۶ وجدول زیررا ببینید). این ذره درنقطه‌ی $x = ۵/۰۰\,\text{m}$ با انرژی جنبشی $K = ۱۴/۰\,\text{J}$ و انرژی پتانسیل $U = ۰$ رها می‌شود. اگرحرکت ذره درجهت منفی محور x باشد، (الف) K و (ب) U در نقطه‌ی $x = ۲/۰۰\,\text{m}$، (پ) K و (ت) U درنقطه‌ی $x = ۰$، چیست؟ اگرحرکت ذره در جهت مثبت محور x باشد، (ث) K و (ج) U در نقطه‌ی $x = ۱۱/۰\,\text{m}$، (چ) K و (ح) U در نقطه‌ی $x = ۱۲/۰\,\text{m}$، و (خ) K و (د) U درنقطه‌ی $x = ۱۳/۰\,\text{m}$، چیست؟ (ذ) نمودار $U(x)$ برحسب x را در گستره‌ی $x = ۰$ تا $x = ۱۳/۰\,\text{m}$ رسم کنید.

بار دیگر، ذره را از حال سکون در نقطه‌ی $x = ۰$ رها می‌کنیم. (ر) انرژی جنبشی ذره در نقطه‌ی $x = ۵/۰\,\text{m}$ چقدراست و (ز) مکان بیشینه‌ی ذره x_{max}، در کجاست؟ (ژ) ذره پس از رسیدن به x_{max} چه می‌کند؟



شکل ۸-۶۶ مسئله‌های ۸۱ و ۸۲

گستره	نیرو
صفر تا ۲/۰۰m	$\vec{F}_۱ = +(۳/۰۰\,\text{N})\hat{i}$
۲/۰۰m تا ۳/۰۰m	$\vec{F}_۲ = +(۵/۰۰\,\text{N})\hat{i}$
۳/۰۰m تا ۸/۰۰m	$F = ۰$
۸/۰۰m تا ۱۱/۰۰m	$\vec{F}_۳ = -(۴/۰۰\,\text{N})\hat{i}$
۱۱/۰۰m تا ۱۲/۰۰m	$\vec{F}_۴ = -(۱/۰۰\,\text{N})\hat{i}$
۱۲/۰۰m تا ۱۵/۰۰m	$F = ۰$

حل: (الف) با توجه به صورت مسئله می‌توان نیروها را به انرژی‌های پتانسیل ربط داد: از نقطه‌ی $x = ۳/۰۰\,\text{m}$ تا نقطه‌ی $x = ۲/۰۰\,\text{m}$ کار انجام شده برابر است با

$$W = F_۲\Delta x = (۵/۰۰\,\text{N})(-۱/۰۰\,\text{m}) = -۵/۰۰\,\text{J}$$

در نتیجه انرژی پتانسیل در نقطه‌ی $x=۲٫۰۰\,m$، مساوی با $U_۲=+۵٫۰۰\,J$ است.

(ب) در این حالت بر طبق صورت مسئله $E_{max}=۱۴٫۰\,J$ است، لذا انرژی جنبشی در نقطه‌ی $x=۲٫۰۰\,m$ برابر است با

$$K_۲=E_{max}-U_۲=۱۴٫۰-۵٫۰۰=۹٫۰۰\,J$$

(پ) از نقطه‌ی $x=۲٫۰۰\,m$ تا نقطه‌ی $x=۰$، کار انجام شده $W=F_۱\Delta x=(۳٫۰۰\,N)(-۲٫۰۰\,m)=-۶٫۰۰\,J$ است، لذا انرژی پتانسیل در نقطه‌ی $x=۰$ برابر است با

$$U_۰=۶٫۰۰\,J+U_۲=(۶٫۰۰+۵٫۰۰)\,J=۱۱٫۰\,J$$

(ت) با توجه به استدلال بیان شده در قسمت (الف)، داریم

$$K_۰=E_{max}-U_۰=(۱۴٫۰-۱۱٫۰)\,J=۳٫۰۰\,J$$

(ث) از نقطه‌ی $x=۸٫۰۰\,m$ تا نقطه‌ی $x=۱۱٫۰\,m$، کار انجام شده $W=F_۳\Delta x=(-۴٫۰۰\,N)(۳٫۰۰\,m)=-۱۲٫۰\,J$ است، لذا انرژی پتانسیل در نقطه‌ی $x=۱۱٫۰\,m$ برابر است با $U_{۱۱}=۱۲٫۰\,J$.

(ج) انرژی جنبشی در نقطه‌ی $x=۱۱٫۰\,m$ برابر است با

$$K_{۱۱}=E_{max}-U_{۱۱}=(۱۴٫۰-۱۲٫۰)\,J=۲٫۰۰\,J$$

(چ) اکنون داریم $W=F_۴\Delta x=(-۱٫۰۰\,N)(۱٫۰۰\,m)=-۱٫۰۰\,J$، در نتیجه انرژی پتانسیل در نقطه‌ی $x=۱۲٫۰\,m$ برابر است با

$$U_{۱۲}=۱٫۰۰\,J+U_{۱۱}=(۱٫۰۰+۱۲٫۰)\,J=۱۳٫۰\,J$$

(ح) بنابراین، انرژی جنبشی در نقطه‌ی $x=۱۲٫۰\,m$ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$K_{۱۲}=E_{max}-U_{۱۲}=(۱۴٫۰-۱۳٫۰)=۱٫۰۰\,J$$

(خ) در این بازه (از نقطه‌ی $x=۱۲٫۰\,m$ تا نقطه‌ی $x=۱۳٫۰\,m$) کاری انجام نمی‌شود، در نتیجه پاسخ مانند پاسخ قسمت (چ) است: $U_{۱۲}=۱۳٫۰\,J$.

(د) در این بازه (از $x=۱۲٫۰\,m$ تا $x=۱۳٫۰\,m$) کاری انجام نمی‌شود، در نتیجه پاسخ مانند پاسخ قسمت (ح) است: $K_{۱۲}=۱٫۰۰\,J$.

(ذ) اگرچه در این جا نمودار رسم نکرده‌ایم، اما نمودار شبیه یک «چاه پتانسیل» با دو طرف شیب‌دار است: از $x=۰$ تا $x=۲\,m$ نمودار U به صورت یک پاره‌خط در حال کاهش از ۱۱J تا ۵J، و از $x=۲\,m$ تا $x=۳\,m$، نمودار به صفر میل می‌کند، و تا $x=۸\,m$ صفر می‌ماند، و از $x=۸\,m$ تا ۱۲J (در نقطه‌ی $x=۱۱\,m$) صعود می‌کند، و سپس به صورت یک پاره‌خط با شیب مثبت از ۱۳J (در نقطه‌ی $x=۱۲\,m$) بالا می‌رود. به ازای $x>۱۲\,m$، مقدار انرژی تغییر نمی‌کند (بالای چاه).

(ر) ذره را می‌توان در حال «سقوط» در چاهی با شیب‌های $۰<x<۳\,m$ در نظر گرفت که در این حالت انرژی جنبشی کسب می‌کند، و می‌تواند به نقطه‌ی $x=۵\,m$ برسد. چون در $x=۵\,m$، $U=۰$ است، انرژی پتانسیل آغازی (۱۱J) به طور کامل به انرژی جنبشی $K=۱۱٫۰\,J$ تبدیل می‌شود.

(ز) این انرژی برای بالا رفتن ذره و خارج شدن آن از طرف xهای بزرگ ($x>۸\,m$) کافی نیست، اما ذره می‌تواند به «ارتفاع» ۱۱J در نقطه‌ی $x=۱۰٫۸\,m$ برسد. همان‌طور که در بخش ۸-۵ بحث شد، این نقطه «نقطه‌ی برگشت» حرکت است.

(ژ) بعد از آن ذره به پایین «سقوط» می‌کند و در طرف با شیب x کوچک بالا می‌رود تا به مکان آغازی برگردد. با احتیاط می‌گوییم که وقتی ذره در نقطه‌ی $x=۱۰٫۸\,m$ به طور موقتی متوقف می‌شود، توسط نیروی $\vec{F}_۳$ به طرف چپ شتاب می‌گیرد، بار دیگر ذره تندی کافی به دست می‌آورد و می‌تواند تا $x=۰$ برگردد و مجدداً در آن‌جا متوقف شود.

۸۲ برای آرایش نیروها در مسئله‌ی ۸۱ ذره‌ای ۲٫۰۰ کیلوگرمی را در نقطه‌ی $x=۵٫۰۰\,m$ با سرعت آغازی $۳٫۴۵\,m/s$ در جهت منفی محور x رها می‌کنیم. (الف) اگر این ذره بتواند به نقطه‌ی $x=۰\,m$ برسد در آنجا تندی‌اش چیست، و اگر نتواند به آنجا برسد، نقطه‌ی برگشت آن کجاست؟ اکنون، فرض کنید که وقتی ذره با تندی $۳٫۴۵\,m/s$ در نقطه‌ی $x=۵٫۰۰\,m$ رها می‌شود، در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. (ب) اگر ذره بتواند به نقطه‌ی $x=۱۳٫۰\,m$ برسد، در آنجا تندی‌اش چیست، و اگر نتواند به آنجا برسد، نقطه‌ی برگشت ذره کجاست؟

حل: (الف) در نقطه‌ی $x=۵٫۰۰\,m$ انرژی پتانسیل صفر و انرژی جنبشی برابر است با

$$K=\frac{۱}{۲}mv^۲=\frac{۱}{۲}(۲٫۰۰\,kg)(۳٫۴۵\,m/s)^۲=۱۱٫۹\,J$$

بنابراین، انرژی کل به قدر کافی زیاد است و ذره می‌تواند به نقطه‌ی $x=۰$ برسد که در آنجا $U=۱۱٫۰\,J$ است و اندکی انرژی اضافی به طرف چپ $(۱۱٫۹\,J-۱۱٫۰\,J=۰٫۹۰۲۵\,J)$ دارد. این همان

انرژی جنبشی در $x = ۰$ است و نشان می‌دهد که تندی ذره

$$v = \sqrt{۲(۰٫۹۰۲۵\,\mathrm{J})/(۲\mathrm{kg})} = ۰٫۹۵۰\,\mathrm{m/s}$$

است. بنابراین، ذره متوقف می‌شود و نقطه‌ی برگشت ندارد.

(ب) انرژی کل ($۱۱٫۹\mathrm{J}$) با انرژی پتانسیل در $x = ۱۰٫۹۷۵۶ \approx ۱۱٫۰\,\mathrm{m}$ (که ذره ابتدا به طرف راست حرکت می‌کند) برابر است. این نقطه را می‌توان با درون‌یابی یا با استفاده از قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی می‌توان پیدا کرد:

$$K_f = K_i + W = ۰ \Rightarrow ۱۱٫۹۰۲۵ + (-۴)d = ۰$$

$$\Rightarrow d = ۲٫۹۷۵۶ \approx ۲٫۹۸$$

(که اگر آن را با $x = ۸٫۰۰\,\mathrm{m}$ جمع کنیم [نقطه‌ای که در آن $F_۳$ اثر می‌کند] نتیجه‌ی درست به دست می‌آید). به این ترتیب یک نقطه‌ی برگشت در حرکت ذره به وجود می‌آید.

۸۳ جسمی ۱۵ کیلوگرمی با شتاب $۲٫۰\,\mathrm{m/s^۲}$ در راستای یک سطح افقی بی‌اصطکاک حرکت می‌کند و تندی‌اش از $۱۰\,\mathrm{m/s}$ به $۳۰\,\mathrm{m/s}$، می‌رسد. (الف) تغییر انرژی مکانیکی جسم و (ب) آهنگ متوسط انرژی داده شده به جسم، چقدر است؟ آهنگ لحظه‌ای انرژی داده شده به جسم وقتی که تندی‌اش (پ) $۱۰\,\mathrm{m/s}$ و (ت) $۳۰\,\mathrm{m/s}$، است، چیست؟

حل: (الف) وقتی انرژی پتانسیل تغییر نمی‌کند، از معادله‌ی ۸-۲۴ داریم

$$W_{\mathrm{app}} = \Delta K = \frac{۱}{۲}m(v^۲ - v_۰^۲)$$

در نتیجه $\Delta E = ۶٫۰ \times ۱۰^۳\,\mathrm{J}$ به دست می‌آید.

(ب) با توجه به محاسبه‌ی بالا، می‌بینیم که $W_{\mathrm{app}} = ۶٫۰ \times ۱۰^۳\,\mathrm{J}$ است. با استفاده از فصل ۲ کتاب، می‌دانیم که $\Delta t = \Delta v / a = ۱۰\,\mathrm{s}$. پس به کمک معادله‌ی ۷-۴۲ داریم

$$P_{\mathrm{avg}} = \frac{W}{\Delta t} = \frac{۶٫۰ \times ۱۰^۳}{۱۰} = ۶۰۰\,\mathrm{W}$$

(پ) و (ت) نیروی ثابت اعمال شده $ma = ۳۰\,\mathrm{N}$ و جهت آن در جهت حرکت است، لذا از معادله‌ی ۷-۴۸ می‌توان توان لحظه‌ای را به دست آورد:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = \begin{cases} ۳۰۰\,\mathrm{W} & v = ۱۰\,\mathrm{m/s} \quad \text{برای} \\ ۹۰۰\,\mathrm{W} & v = ۳۰\,\mathrm{m/s} \quad \text{برای} \end{cases}$$

توجه کنید که مقدار متوسط این مقدارها با پاسخ به دست آمده در قسمت (ب) سازگار است.

۸۴ نوعی فنر از قانون هوک پیروی ***نمی‌کند***. بزرگی نیرویی که (برحسب نیوتون) فنر هنگام کشیده شدن به اندازه‌ی x (برحسب متر) برخلاف جهت کشش وارد می‌کند، از رابطه‌ی $F = ۵۲٫۸x + ۳۸٫۴x^۲$ به دست می‌آید. (الف) کار لازم برای کشیده شدن فنر به اندازه‌ی $x = ۰٫۵۰۰\,\mathrm{m}$ تا $x = ۱٫۰۰\,\mathrm{m}$ را حساب کنید. (ب) در حالی که یک سر فنر ثابت نگه داشته شده است، سر دیگر را به جسمی به جرم $۲٫۱۷\,\mathrm{kg}$ وصل می‌کنیم و آن را به اندازه‌ی $x = ۱٫۰۰\,\mathrm{m}$ می‌کشیم. اگر جسم از حالت سکون رها شود، تندی‌اش در لحظه‌ای که فنر به اندازه‌ی $x = ۰٫۵۰۰\,\mathrm{m}$ کشیده می‌شود، چقدر است؟ (پ) نیرویی که فنر وارد می‌کند پایستار است یا ناپایستار؟ توضیح دهید.

حل: (الف) هنگام کشیده شدن یک فنر توسط یک نیروی خارجی، فنر نیز یک نیروی مساوی و مخالف اعمال می‌کند. وقتی فنر در جهت x مثبت کشیده می‌شود، نیرویی در جهت x منفی وارد می‌کند و نیروی اعمال شده در جهت $+x$ باید به صورت $F = ۵۲٫۸x + ۳۸٫۴x^۲$ باشد. کاری که این نیرو انجام می‌دهد برابر است با

$$W = \int_{۰٫۵۰}^{۱٫۰۰} (۵۲٫۸x + ۳۸٫۴x^۲)dx$$

$$= \left(\frac{۵۲٫۸}{۲}x^۲ + \frac{۳۸٫۴}{۳}x^۳\right)\Bigg|_{۰٫۵۰}^{۱٫۰۰} = ۳۱٫۰\,\mathrm{J}$$

(ب) فنر به اندازه‌ی $۳۱٫۰\,\mathrm{J}$ کار انجام می‌دهد و این امر باید باعث افزایش انرژی جنبشی جسم شود. درنتیجه تندی جسم برابر است با

$$v = \sqrt{\frac{۲K}{m}} = ۵٫۳۵\,\mathrm{m/s}$$

(پ) این نیرو پایستار است زیرا کاری که نیرو در هنگام رفتن جسم از نقطه‌ی $x_۱$ تا نقطه‌ی $x_۲$ انجام می‌دهد فقط به $x_۱$ و $x_۲$ بستگی دارد، و به جزئیات حرکت در بین $x_۱$ و $x_۲$ بستگی ندارد.

۸۵ در هر ثانیه از آبشاری به ارتفاع $۱۰۰\,\mathrm{m}$ مقدار $۱۲۰۰\,\mathrm{m^۳}$ آب فرو می‌ریزد. سه چهارم انرژی جنبشی حاصل از سقوط آب به‌وسیله‌ی یک مولد برق آبی به انرژی الکتریکی تبدیل می‌شود. این مولد انرژی الکتریکی را با چه آهنگی تولید می‌کند؟ (جرم یک متر مکعب آب $۱۰۰۰\,\mathrm{kg}$ است).

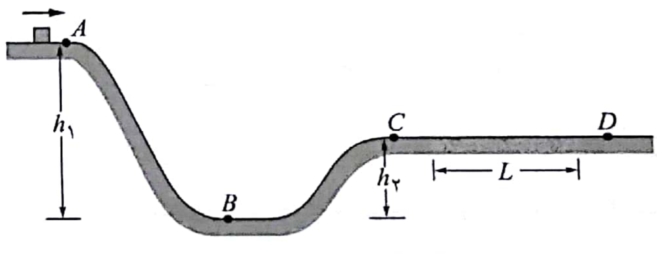
حل: بر طبق پایستگی انرژی، تغییر انرژی جنبشی آب در یک ثانیه برابر است با

$$\Delta K = -\Delta U = mgh = \rho V g h$$
$$= (10^3\ kg/m^3)(1200\ m^3)(9.8\ m/s^2)(100\ m)$$
$$= 1.176 \times 10^9\ J$$

فقط $\frac{3}{4}$ این انرژی به انرژی الکتریکی تبدیل می‌شود. توان تولید شده (که فرض می‌شود ثابت است، در نتیجه توان متوسط با توان لحظه‌ای برابر است) برابر است با

$$P_{avg} = \frac{(3/4)\Delta K}{t} = \frac{(3/4)(1.176\times 10^9\ J)}{1.0\ s} = 8.8\times 10^8\ W$$

۸۶ درشکل ۸–۶۷، جسم کوچکی از نقطه‌ی A با تندی $7.0\ m/s$ به حرکت در می‌آید. مسیر جسم بی‌اصطکاک است تا آنکه به بخشی با طول $L = 12\ m$ برسد، که در آنجا ضریب اصطکاک جنبشی ۰٫۶۶ است. ارتفاع‌های نشان داده شده عبارت‌اند از: $h_1 = 6.0\ m$ و $h_2 = 2.0\ m$. تندی جسم در (الف) نقطه‌ی B و (ب) نقطه‌ی C، چقدر است؟ (پ) آیا این جسم به نقطه‌ی D می‌رسد؟ اگر می‌رسد، تندی‌اش در آنجا چیست؛ اگر نمی‌رسد، تا چه فاصله‌ای در بخش با اصطکاک پیش می‌رود؟



شکل ۸–۶۷ مسئله‌ی ۸۶

حل: (الف) در نقطه‌ی B تندی جسم (با استفاده از معادله‌ی ۸–۱۷) برابر است با

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh_1} = \sqrt{(7.0\ m/s)^2 + 2(9.8\ m/s^2)(6.0\ m)}$$
$$= 12.9\ m/s$$

(ب) در این حالت اختلاف ارتفاع‌ها (در بین نقاط A و C) مورد نظر است:

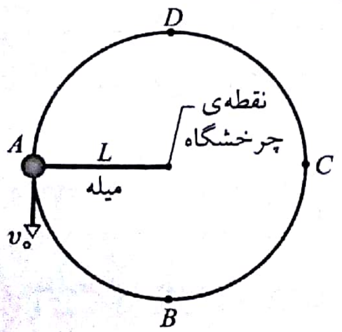
$$v = \sqrt{v_0^2 + 2g(h_1 - h_2)}$$
$$= \sqrt{(7.0\ m/s)^2 + 2(9.8\ m/s^2)(4.0\ m)}$$
$$= 11.29\ m/s$$

(پ) با استفاده از نتیجه‌ی قسمت (ب) معلوم می‌شود که انرژی جنبشی جسم درست در آغاز لغزیدن در ناحیه‌ی ناصاف (به طور افقی به طرف نقطه‌ی D) برابراست با $\frac{1}{2}m(11.29\ m/s)^2 = 63.7m$ این کمیت به جرم جسم بستگی دارد که به زودی حذف خواهد شد. با توجه به معادله‌ی ۸–۳۱ (و معادله‌ی ۶–۲ به‌ازای $F_N = mg$) اگر $d < L$ باشد، این انرژی جنبشی کلاً به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود:

$$63.7\,m = \mu_k\, mgd$$

به ازای $\mu_k = 0.66$، مقدار $d = 9.85\ m$ به دست می‌آید که از L (در مسئله ۱۲ متر داده شده است) کمتر است. نتیجه می‌گیریم که جسم پیش از عبور از ناحیه‌ی «ناصاف» متوقف می‌شود (در نتیجه به نقطه‌ی D نمی‌رسد).

۸۷ میله‌ای صُلب با جرم ناچیز و به طول L، در یک سرش دارای گلوله‌ای به جرم m است (شکل ۸–۶۸). سر دیگر این میله به یک نقطه‌ی چرخشگاه طوری متصل است که گلوله می‌تواند در روی دایره‌ی قائمی حرکت کند. نخست فرض کنید که در نقطه‌ی چرخشگاه اصطکاکی وجود ندارد. دستگاه را از وضعیت افقی A با تندی آغازی v_0 به سمت پایین پرتاب می‌کنیم. گلوله درست به نقطه‌ی D می‌رسد و در آنجا متوقف می‌شود. (الف) رابطه‌ی مربوط به v_0 برحسب L، m و g را به‌دست آورید. (ب) هنگام گذشتن گلوله از نقطه‌ی B نیروی کشش در میله چقدر است؟ (پ) در نقطه‌ی چرخشگاه سنگ‌ریزه‌ی کوچکی قرار داده می‌شود تا اصطکاک افزایش یابد. در این‌صورت، گلوله پس از پرتاب شدن از نقطه‌ی A به سمت پایین با همان تندی پیشی، درست به نقطه‌ی C می‌رسد. کاهش انرژی مکانیکی در این حرکت چقدر است؟ (ت) کاهش انرژی مکانیکی در مدتی که گلوله پس از انجام دادن چند نوسان، در نهایت، در نقطه‌ی B متوقف می‌شود، چیست؟



شکل ۸–۶۸ مسئله‌ی ۸۷

حل: فرض می‌کنیم وضعیت A نقطه‌ی مرجع انرژی پتانسیل، $U_A = 0$، است. کل انرژی‌های مکانیکی در نقاط A، B و C عبارت‌اند از:

$$E_A = \frac{1}{2}mv_A^2 + U_A = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$E_B = \frac{1}{2}mv_B^2 + U_B = \frac{1}{2}mv_B^2 - mgL$$

$$E_D = \frac{1}{2}mv_D^2 + U_D = mgL$$

در این‌جا $v_D = 0$ است. این مسئله را با استفاده از اصل پایستگی انرژی به صورت $E_A = E_B = E_D$ تحلیل می‌کنیم.

(الف) از شرط $E_A = E_D$ داریم

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgL \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gL}$$

(ب) برای پیدا کردن نیروی کشش میله در هنگام عبور گلوله از نقطه‌ی B، ابتدا تندی در نقطه‌ی B را پیدا می‌کنیم. با استفاده از $E_B = E_D$ داریم

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - mgL = mgL \Rightarrow v_B = \sqrt{4gL}$$

جهت شتاب مرکزگرا به طرف بالا (در آن لحظه) و هم‌جهت با نیروی کشش است. بنابراین، از قانون دوم نیوتون داریم

$$T - mg = \frac{mv_B^2}{r} = \frac{m(4gL)}{L} = 4mg$$

یا $T = 5mg$.

(پ) اختلاف ارتفاع‌ها در بین نقاط C و D مساوی با L است، در نتیجه «اتلاف» انرژی مکانیکی (که به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود)، مساوی با $-mgL$ است.

(ت) اختلاف ارتفاع‌ها در بین نقاط B و D مساوی با $2L$ است، در نتیجه «اتلاف» انرژی مکانیکی (که به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود)، مساوی با $-2mgL$ است.

توجه: روش دیگر برای محاسبه‌ی اتلاف انرژی در قسمت (ت)، استفاده از رابطه‌ی زیر است

$$E'_B = \frac{1}{2}mv_B'^2 + U_B = 0 - mgL = -mgL$$

که از آن‌جا داریم:

$$\Delta E = E'_B - E_A = -mgL - mgL = -2mgL$$

۸۸ یک بالون محتوی آب به جرم $1{,}50\,kg$ را با تندی آغازی $3{,}00\,m/s$ یک راست به سمت بالا پرتاب می‌کنیم. (الف) انرژی جنبشی بالون درست در لحظه‌ی پرتاب شدن چقدر است؟ (ب) در زمان بالا رفتن بالون به طور کامل نیروی گرانشی چقدر کار روی آن انجام می‌دهد؟ (پ) در زمان بالا رفتن بالون به طور کامل تغییر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه بالون ـ زمین چقدر است؟ (ت) اگر انرژی پتانسیل گرانشی را در نقطه‌ی پرتاب صفر بگیریم، مقدار آن در هنگام رسیدن بالون به ارتفاع بیشینه‌ی خود چقدر است؟ (ث) حال اگر انرژی پتانسیل گرانشی را در ارتفاع بیشینه صفر بگیریم، مقدار آن در نقطه‌ی پرتاب چقدر است؟ (ج) ارتفاع بیشینه چقدر است؟

حل: (الف) انرژی جنبشی آغازی بالون $K_i = \frac{1}{2}(1{,}5)(3{,}5)^2 = 9{,}19\,J$ است.

(ب) کار گرانش با منفی تغییر انرژی پتانسیل برابر است. در بالاترین نقطه، همه‌ی انرژی جنبشی K_i به انرژی پتانسیل U (با شرط چشمپوشی از مقاومت هوا) تبدیل شده است، لذا نتیجه می‌گیریم که کار گرانش $-9{,}19\,J$ است.

(پ) در ضمن نتیجه می‌گیریم که $\Delta U = 9{,}19\,J$ است.

(ت) انرژی پتانسیل در آن‌جا $U_f = U_i + \Delta U = 9{,}19\,J$ است.

(ث) اگر $U_f = 0$ باشد، در آن صورت $U_i = U_f - \Delta U = -9{,}19\,J$ است.

(ج) چون $mg\Delta y = \Delta U$، در نتیجه $\Delta y = 0{,}625\,m$.

۸۹ یک قوطی نوشابه به جرم $2{,}50\,kg$ را با تندی آغازی $3{,}00\,m/s$ از ارتفاع $4{,}00\,m$ یک راست به سمت پایین پرتاب می‌کنیم. نیروی پسار هوا روی قوطی ناچیز است. انرژی جنبشی قوطی (الف) در هنگام رسیدن به زمین در پایان سقوط و (ب) در نیمه‌راه رسیدن به زمین، چقدر است؟ (پ) انرژی جنبشی قوطی و (ت) انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه قوطی ـ زمین، $0{,}200\,s$ پیش از رسیدن قوطی به زمین، چقدر است؟ در حالت اخیر، نقطه‌ی مرجع $y = 0$ را روی زمین انتخاب کنید.

حل: (الف) بنابر اصل پایستگی انرژی، وقتی قوطی نوشابه به زمین (که به عنوان سطح $U = 0$ انتخاب شده است) می‌رسد، انرژی جنبشی با مجموع انرژی‌های جنبشی آغازی و پایانی برابر است:

$$K = K_i + U_i = \frac{1}{2}(2{,}50\,kg)(3{,}00\,m/s)^2 + $$
$$+(2{,}50\,kg)(9{,}80\,m/s^2)(4{,}00\,m) = 109\,J$$

تندی رسیدن قوطی به زمین برابر است با

$$v=\sqrt{2K/m}=۹/۳۵\,\mathrm{m/s}$$

(ب) وقتی ارتفاع پرتاب به طرف پایین به جای $۴/۰۰\,\mathrm{m}$، مساوی با $۲/۰۰\,\mathrm{m}$ است، انرژی جنبشی برابر است با

$$K=\frac{۱}{۲}(۲/۵۰\,\mathrm{kg})(۳/۰۰\,\mathrm{m/s})^۲+$$
$$+(۲/۵۰\,\mathrm{kg})(۹/۸۰\,\mathrm{m/s^۲})(۲/۰۰\,\mathrm{m})=۶۰/۳\,\mathrm{J}$$

(پ) یک روش این است که تصور کنیم قوطی در لحظه‌ی $t=۰$، با تندی $۹/۳۵\,\mathrm{m/s}$ از زمین پرتاب شده است و در لحظه‌ی $t=۰/۲۰۰\,\mathrm{s}$ ارتفاع و تندی قوطی را با استفاده از معادلات ۲-۱۵ و ۲-۱۱ حساب کنیم:

$$y=(۹/۳۵\,\mathrm{m/s})(۰/۲۰۰\,\mathrm{s})-\frac{۱}{۲}(۹/۸۰\,\mathrm{m/s^۲})(۰/۲۰۰\,\mathrm{s})^۲$$
$$=۱/۶۷\,\mathrm{m}$$

$$v=۹/۳۵\,\mathrm{m/s}-(۹/۸۰\,\mathrm{m/s^۲})(۰/۲۰۰\,\mathrm{s})=۷/۳۹\,\mathrm{m/s}$$

پس، انرژی جنبشی قوطی برابر است با

$$K=\frac{۱}{۲}(۲/۵۰\,\mathrm{kg})(۷/۳۹\,\mathrm{m/s})^۲=۶۸/۲\,\mathrm{J}$$

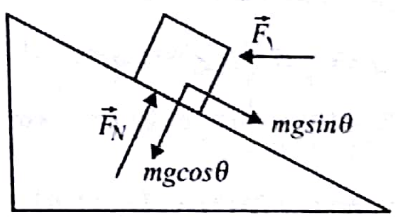
(ت) انرژی پتانسیل گرانشی به صورت زیر به دست می‌آید

$$U=mgy=(۲/۵\,\mathrm{kg})(۹/۸\,\mathrm{m/s^۲})(۱/۶۷\,\mathrm{m})=۴۱/۰\,\mathrm{J}$$

۹۰ یک نیروی افقی ثابت تنه‌ی درختی به جرم $۵۰\,\mathrm{kg}$ را با تندی ثابت به اندازه‌ی $۶/۰\,\mathrm{m}$ در روی یک سطح شیب‌دار با زاویه‌ی شیب ۳۰ درجه به بالا حرکت می‌دهد. ضریب اصطکاک جنبشی میان تنه‌ی درخت و سطح شیب‌دار ۰/۲۰ است. مطلوب است تعیین (الف) کار انجام شده توسط این نیرو، و (ب) افزایش انرژی گرمایی تنه‌ی درخت و سطح شیب‌دار.

حل: نمودار جسم ـ آزاد تنه‌ی درخت در زیر رسم شده است. معادلات قانون دوم نیوتون در راستای محورهای x و y به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$F_۱\cos\theta-f_k-mg\sin\theta=ma$$
$$F_N-F_۱\sin\theta-mg\cos\theta=۰$$



(الف) تنه‌ی درخت با سرعت ثابت از سطح شیب‌دار بالا می‌رود، در نتیجه $a=۰$ است. با استفاده از رابطه‌ی $f_k=\mu_k F_N$، نیروی حرکت دهنده‌ی $F_۱$ را به دست می‌آوریم:

$$F_۱=\frac{mg(\sin\theta+\mu_k\cos\theta)}{\cos\theta-\mu_k\sin\theta}$$

کاری که نیروی $\vec{F}_۱$ در طی مسافت l به طرف بالای سطح شیب‌دار بر روی تنه‌ی درخت انجام می‌دهد، برابر است با

$$W_۱=F_۱ l\cos\theta=\frac{(mgl\cos\theta)(\sin\theta+\mu_k\cos\theta)}{\cos\theta-\mu_k\sin\theta}$$

$$=\frac{(۵۰\,\mathrm{kg})(۹/۸\,\mathrm{m/s^۲})(۶/۰\,\mathrm{m})(\cos ۳۰^\circ)(\sin ۳۰^\circ+(۰/۲۰)\cos ۳۰^\circ)}{\cos ۳۰^\circ-(۰/۲۰)\sin ۳۰^\circ}$$

$$=۱/۷\times۱۰^۳\,\mathrm{J}$$

(ب) افزایش انرژی پتانسیل گرانشی تنه‌ی درخت برابر است با

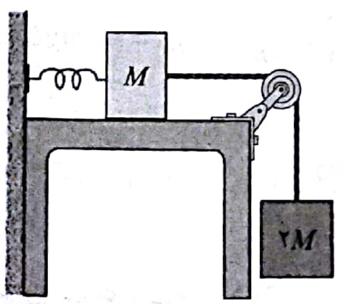
$$\Delta U=mgl\sin\theta$$
$$=(۵۰\,\mathrm{kg})(۹/۸\,\mathrm{m/s^۲})(۶/۰\,\mathrm{m})\sin ۳۰^\circ=۱/۵\times۱۰^۳\,\mathrm{J}$$

چون تندی (و در نتیجه انرژی جنبشی) تنه‌ی درخت تغییر نمی‌کند، از معادله‌ی ۸-۳۳ داریم

$$W_۱=\Delta U+\Delta E_{th}$$

افزایش انرژی گرمایی (تولید شده توسط اصطکاک جنبشی) برابر است با $۱/۷\times۱۰^۳\,\mathrm{J}-۱/۵\times۱۰^۳\,\mathrm{J}=۲۰۰\,\mathrm{J}$. یک راه دیگر برای به‌دست آوردن این نتیجه، استفاده از رابطه‌ی $\Delta E_{th}=f_k l$ (معادله‌ی ۸-۳۱) است.

۹۱ دو جسم به جرم‌های $M=۲/۰\,\mathrm{kg}$ و $۲M$، به فنری با ثابت فنری $k=۲۰۰\,\mathrm{N/m}$ وصل شده‌اند و یک سر فنر، مطابق شکل ۸-۶۹، به دیوار ثابت شده است. سطح افقی و قرقره اصطکاک ندارند و جرم قرقره ناچیز است. در حالی که فنر طول حالت آرامش خود را دارد، دو جسم را از حال سکون رها می‌کنیم. (الف) انرژی جنبشی مرکب دو جسم در حالی که جسم آویخته



شکل ۸-۶۹ مسئله‌ی ۹۱.

به اندازه‌ی $۰٫۰۹۰\,\mathrm{m}$ پایین می‌آید، چقدر است؟ (ب) انرژی جنبشی جسم آویخته هنگام پایین آمدن به اندازه‌ی $۰٫۰۹۰\,\mathrm{m}$، چقدر است؟ (پ) مسافت پیموده شده‌ی بیشینه توسط جسم آویخته پیش از توقف لحظه‌ای، چقدر است؟

حل: ارتفاع آغازی جسم $۲M$، که در شکل ۸-۶۷ نشان داده شده است، برای محاسبه‌ی مقدار U_g، $y=۰$ است. وقتی این جسم سقوط می‌کند، فنر متناسب با آن کشیده می‌شود. هم‌چنین، انرژی جنبشی $K_{\text{دستگاه}}$ برای ***دستگاه***، یعنی برای کل جرم در حال حرکت $۳M$، حساب می‌شود.

(الف) بر طبق اصل پایستگی انرژی، معادله‌ی ۸-۱۷، داریم

$$K_i+U_i=K_{\text{دستگاه}}+U_{\text{دستگاه}}$$

$$\Rightarrow ۰+۰=K_{\text{دستگاه}}+(۲M)g(-۰٫۰۹۰)+\frac{۱}{۲}k(۰٫۰۹۰)^۲$$

در نتیجه به‌ازای $M=۲٫۰\,\mathrm{kg}$، مقدار $K_{\text{دستگاه}}=۲٫۷\,\mathrm{J}$ به‌دست می‌آید.

(ب) انرژی جنبشی جسم $۲M$ کسری از انرژی جنبشی کل است:

$$\frac{K_{۲M}}{K_{\text{دستگاه}}}=\frac{(۲M)v^۲/۲}{(۳M)v^۲/۲}=\frac{۲}{۳}$$

بنابراین $K_{۲M}=\frac{۲}{۳}(۲٫۷\,\mathrm{J})=۱٫۸\,\mathrm{J}$ است.

(پ) در این‌جا فرض می‌کنیم $y=-d$ و d را پیدا می‌کنیم:

$$K_i+U_i=K_{\text{دستگاه}}+U_{\text{دستگاه}}$$

$$\Rightarrow ۰+۰=۰+(۲M)g(-d)+\frac{۱}{۲}kd^۲$$

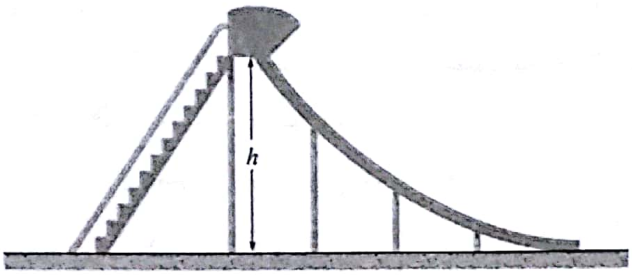
در نتیجه به ازای $M=۲٫۰\,\mathrm{kg}$ داریم $d=۰٫۳۹\,\mathrm{m}$.

۹۲ جریانی از خاکستر آتش‌فشانی در حال عبور از روی یک زمین افقی به یک سر بالایی با شیب ۱۰ درجه می‌رسد. بخش جلوی این جریان پیش از توقف به‌اندازه‌ی $۹۲۰\,\mathrm{m}$ از شیب بالا می‌رود. فرض کنید که گازهای محبوس در این جریان آن را به سمت بالا بلند و نیروی اصطکاک ناشی از زمین را بی‌اثر می‌کنند؛ هم‌چنین، فرض کنید که انرژی مکانیکی بخش جلوی جریان پایسته است. تندی آغازی بخش جلوی جریان چقدربوده است؟

حل: بر طبق اصل پایستگی انرژی، $mgh=mv^۲/۲$، و تندی خاکستر آتش‌نشانی $v=\sqrt{۲gh}$ است. در این مسئله، ارتفاع و مسافت پیموده شده‌ی $d=۸۸۰\,\mathrm{m}$ (در روی سطح شیب‌دار $\theta=۱۰^\circ$) با رابطه‌ی مثلثاتی $h=d\sin\theta$ به هم مربوط‌اند. در نتیجه داریم

$$v=\sqrt{۲(۹٫۸\,\mathrm{m/s^۲})(۹۲۰\,\mathrm{m})\sin ۱۰^\circ}=۵۶\,\mathrm{m/s}$$

۹۳ سُرسره‌ای به شکل کمانی از دایره به شعاع $۱۲\,\mathrm{m}$ است. ارتفاع بیشینه‌ی این سُرسره $h=۴٫۰\,\mathrm{m}$، و سطح زمین بر دایره مماس است (شکل ۸-۷۰). کودکی به جرم $۲۵\,\mathrm{kg}$ از حال سکون از بالای سُرسره شروع به لغزیدن می‌کند و تندی‌اش در پایین سُرسره $۶٫۲\,\mathrm{m/s}$ است. (الف) طول سُرسره چقدر است؟ (ب) در طی این مسافت نیروی اصطکاک متوسط وارد به کودک چقدر است؟ اگر به جای سطح زمین، یک خط قائم گذرنده از ***بالای سُرسره*** بر دایره مماس باشد، (پ) طول سُرسره و (ت) نیروی اصطکاک متوسط وارد به کودک، چقدر است؟



شکل ۸-۷۰ مسئله‌ی ۹۳.

حل: (الف) فرض بر این است که ته سرسره افقی است. مانسته‌ی مفید این حالت، آونگی به‌طول $R=۱۲\,\mathrm{m}$ است که به اندازه‌ی زاویه‌ی θ (متناظر با بودن کودک در بالای سرسره در ارتفاع $h=۴٫۰\,\mathrm{m}$) به طرف چپ منحرف و رها شده است و وقتی گلوله‌ی آونگ به پایین‌ترین نقطه (ارتفاع صفر) می‌رسد دارای تندی $v=۶٫۲\,\mathrm{m/s}$ است. درست مانند روابط مثلثاتی یک آونگ، داریم

$$h=R(۱-\cos\theta)\Rightarrow\theta=\cos^{-۱}\left(۱-\frac{h}{R}\right)=۴۸^\circ$$

این زاویه معادل $۰٫۸۴$ رادیان است. طول سرسره که به صورت کمان دایره‌ای به‌طول $s=R\theta$ است، $(۱۲\,\mathrm{m})(۰٫۸۴)=۱۰\,\mathrm{m}$ است.

(ب) برای پیدا کردن بزرگی نیروی اصطکاک f با استفاده از معادله‌ی ۸-۳۱ (به ازای $W=۰$) داریم:

$$۰=\Delta K+\Delta U+\Delta E_{th}=\frac{۱}{۲}mv^۲-mgh+fs$$

در نتیجه (به ازای $m=۲۵\,\mathrm{kg}$)، $f=۴۹\,\mathrm{N}$ به دست می‌آید.

(پ) در این‌جا فرض بر این نیست که پایین سرسره افقی است، بلکه یک خط قائم در بالای سرسره بر کمان سرسره مماس است (این خط به فاصله‌ی ۱۲m در طرف چپ مرکز انحنای کمان قرار دارد). با توجه به شباهت این مسئله به مسئله‌ی آونگ، گویی گلوله‌ی آونگ از حالت افقی (تحت زاویه‌ی $\theta_1 = 90°$ نسبت به راستای قائم) رها شده است و مدتی بعد با تندی $v = 6.2\ m/s$ به نقطه‌ای تحت زاویه‌ی θ_2 رسیده است. اختلاف ارتفاع‌های بین این دو وضعیت برابر است با

$$\Delta h = R(1-\cos\theta_2) - R(1-\cos\theta_1) = -R\cos\theta_2$$

در این جا از این واقعیت استفاده کرده‌ایم که $\theta_1 = 0$ است. در نتیجه به ازای $\Delta h = -4.0\ m$ داریم $\theta_2 = 70.5°$ که نشان می‌دهد زاویه‌ی مرکزی کمان $|\Delta\theta| = 19.5°$ یا ۰٫۳۴ رادیان است. از ضرب کردن این مقدار در شعاع کمان، طول سرسره $s' = 4.1\ m$ به دست می‌آید.

(ت) باز هم بزرگی نیروی اصطکاک f' را از معادله‌ی ۸-۳۱ (به ازای $W = 0$) به دست می‌آوریم:

$$0 = \Delta K + \Delta U + \Delta E_{th} = \frac{1}{2}mv^2 - mgh + f's'$$

در نتیجه داریم $f' = 1.2\times10^2\ N$.

۹۴ کشتی مجلل *ملکه الیزابت ۲*، که دارای یک نیروگاه برق دیزلی با توان بیشینه‌ی ۹۲MW است، با تندی ثابت ۳۲٫۵ گره حرکت می‌کند. نیروی رو به جلو وارد شده به کشتی در این تندی چقدر است؟ (۱ گره = ۱٫۸۵۲ km/h)

حل: برای محاسبه‌ی نیرو از رابطه‌ی $P = Fv$ استفاده می‌کنیم:

$$F = \frac{P}{v} = \frac{92\times10^6\ W}{(32.5\ \text{گره})\left(1.852\ \frac{km/h}{\text{گره}}\right)\left(\frac{1000\ m/km}{3600\ s/h}\right)} = 5.5\times10^6\ N$$

۹۵ کارگر کارخانه‌ای صندوقی به جرم ۱۸۰kg را که به حال سکون در بالای شیب‌راهه‌ای به طول ۳٫۷m و زاویه‌ی شیب ۳۹ درجه نسبت به راستای افقی نگه داشته شده است، ناگهان رها می‌کند. ضریب اصطکاک جنبشی میان صندوق و شیب‌راهه و نیز میان صندوق و کف کارخانه ۰٫۲۸ است. (الف) تندی حرکت صندوق در موقع رسیدن به پایین شیب‌راهه چقدر است؟ (ب) صندوق تا چه مسافتی بر روی کف کارخانه می‌لغزد؟ (فرض کنید که انرژی جنبشی صندوق در هنگام انتقال از شیب‌راهه به کف کارخانه تغییر نمی‌کند). (پ) اگر جرم صندوق نصف شود، آیا بزرگی پاسخ‌های قسمت‌های (الف) و (ب) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟

حل: این مسئله را با استفاده از روش‌های ارائه شده در فصل‌های ۲ تا ۶ می‌توان حل کرد، ولی ما از روش‌های انرژی برای حل آن استفاده می‌کنیم.

(الف) با تجزیه کردن نیروها به روش فصل ۶، بزرگی نیروی عمودی $F_N = mg\cos\theta$ به دست می‌آید (که در آن $\theta = 39°$) است، یعنی $f_k = \mu_k mg\cos\theta$ و $\mu_k = 0.28$ است. در نتیجه از معادله‌ی ۸-۳۱ داریم

$$\Delta E_{th} = f_k d = \mu_k mgd\cos\theta$$

هم‌چنین به کمک مثلثات نتیجه می‌گیریم که $\Delta U = -mgd\sin\theta$ که در آن $d = 3.7\ m$ است. چون $K_i = 0$، در نتیجه معادله‌ی ۸-۳۳ (به ازای $W = 0$) نشان می‌دهد که انرژی جنبشی پایانی برابر است با

$$K_f = -\Delta U - \Delta E_{th} = mgd(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)$$

از این‌جا تندی صندوق در پایین سطح شیب‌دار به دست می‌آید

$$v = \sqrt{\frac{2K_f}{m}} = \sqrt{2gd(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)} = 5.5\ m/s$$

(ب) حرکت افقی با این تندی شروع می‌شود و در کف کارخانه $\Delta U = 0$ و $f_k = \mu_k mg$ است. صندوق پیش از توقف مسافت d' را بر روی کف کارخانه می‌لغزد. بر طبق معادله‌ی ۸-۳۱ (به ازای $W = 0$) داریم

$$0 = \Delta K + \Delta U + \Delta E_{th} = 0 - \frac{1}{2}mv^2 + 0 + \mu_k mgd'$$

$$= -\frac{1}{2}(2gd(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)) + \mu_k gd'$$

در این‌جا از نتیجه‌ی قسمت (الف) استفاده کرده‌ایم. پس، می‌توان نوشت

$$d' = \frac{d(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)}{\mu_k} = 5.4\ m$$

(پ) این نتایج جبری نشان می‌دهند که پاسخ‌ها به جرم بستگی ندارند. بنابراین یک صندوق ۹۰ کیلوگرمی با همان تندی صندوق

۱۸۰ کیلوگرمی به پایین سطح شیب‌دار می‌رسد و مسافت لغزش در کف کارخانه به خواص اصطکاک آن سطح بستگی دارد. نکته‌ی جالب این است که چون g در رابطه‌ی d' وجود ندارد، اگر این آزمایش درمریخ انجام شود، مسافت لغزش همین مقدار خواهد بود!

۹۶ اگر یک بازیکن بیسبال به جرم $۷۰\,\mathrm{kg}$، با سُر خوردن با تندی آغازی $۱۰\,\mathrm{m/s}$ توپ را درست در حین برخورد به زمین برباید، (الف) کاهش انرژی جنبشی بازیکن و (ب) افزایش انرژی گرمایی بدن بازیکن و زمین در مدتی که او سُر می‌خورد، چقدر است؟

حل: (الف) کاهش انرژی جنبشی آغازی برابر است با

$$K=\frac{۱}{۲}mv^۲=\frac{۱}{۲}(۷۰\,\mathrm{kg})(۱۰\,\mathrm{m/s})^۲=۳/۵\,\mathrm{kJ}$$

(ب) همین مقدار انرژی به صورت انرژی گرمایی تلف می‌شود، در نتیجه افزایش انرژی گرمایی بدن بازیکن $\Delta E_{th}=۳/۵\,\mathrm{kJ}$ است.

۹۷ یک دانه‌ی موز به جرم $۰/۵۰\,\mathrm{kg}$ با تندی آغازی $۴/۰۰\,\mathrm{m/s}$ یک راست به هوا پرتاب می‌شود و به ارتفاع بیشینه‌ی $۰/۸۰\,\mathrm{m}$ می‌رسد. در حین بالا رفتن موز نیروی پسار هوا در انرژی مکانیکی دستگاه موز ـ زمین چه تغییری ایجاد می‌کند؟

حل: از معادله‌ی ۸-۳۳ داریم $mgy_f=K_i+mgy_i-\Delta E_{th}$، یا

$$(۰/۵۰\,\mathrm{kg})(۹/۸\,\mathrm{m/s^۲})(۰/۸۰\,\mathrm{m})$$
$$=\frac{۱}{۲}(۰/۵۰\,\mathrm{kg})(۴/۰۰\,\mathrm{m/s})^۲+(۰/۵۰\,\mathrm{kg})(۹/۸\,\mathrm{m/s^۲})()-\Delta t_{th}$$

در نتیجه $\Delta E_{th}=۴/۰۰\,\mathrm{J}-۳/۹۲\,\mathrm{J}=۰/۰۸۰\,\mathrm{J}$ به دست می‌آید.

۹۸ یک ابزار فلزی با نگه داشته شدن در مقابل کناره‌ی چرخ ماشین چاقو تیزکنی با نیروی $۱۸۰\,\mathrm{N}$، تیز می‌شود. نیروهای اصطکاک بین کناره‌ی چرخ و ابزار باعث می‌شوند که قطعه‌های ریزی از ابزار به‌بیرون پرتاب شوند. چرخ دارای شعاع $۲۰/۰\,\mathrm{cm}$ است و با سرعت زاویه‌ای $۲/۵۰\,\mathrm{rev/s}$ می‌چرخد. ضریب اصطکاک جنبشی میان چرخ و ابزار $۰/۳۲۰$ است. انرژی با چه آهنگی از موتور راه‌انداز ماشین به انرژی گرمایی چرخ و ابزار و انرژی جنبشی قطعه‌های ریز پرتاب شده منتقل می‌شود؟

حل: چون دوره‌ی تناوب $T=(۲/۵\,\mathrm{rev/s})^{-۱}=۰/۴۰۰\,\mathrm{s}$ است، در نتیجه از معادله‌ی ۴-۳۳ داریم $v=۳/۱۴\,\mathrm{m/s}$. بزرگی نیروی اصطکاک (با استفاده از معادله‌ی ۶-۲) برابر است با

$$f=\mu_k F_N=(۰/۳۲۰)(۱۸۰\,\mathrm{N})=۵۷/۶\,\mathrm{N}$$

توان تلف شده توسط اصطکاک باید با توان تولید شده توسط موتور برابر باشد، لذا از معادله‌ی ۷-۴۸ داریم

$$P=(۵۷/۶\,\mathrm{N})(۳/۱۴\,\mathrm{m/s})=۱۸۱\,\mathrm{W}$$

۹۹ شناگری با تندی متوسط $۰/۲۲\,\mathrm{m/s}$ در آب حرکت می‌کند. نیروی متوسط پسار آب $۱۱۰\,\mathrm{N}$ است. توان متوسط مورد نیاز شناگر چقدر است؟

حل: شناگر برای شنا کردن با سرعت ثابت باید آب را با نیروی $۱۱۰\,\mathrm{N}$ به عقب هل دهد. آب نسبت به او با تندی $۰/۲۲\,\mathrm{m/s}$ به طرف پشت او در جهت نیروی او حرکت می‌کند. توان خروجی شناگر از معادله‌ی ۷-۴۸ به دست می‌آید:

$$P=\vec{F}\cdot\vec{v}=Fv=(۱۱۰\,\mathrm{N})(۰/۲۲\,\mathrm{m/s})=۲۴\,\mathrm{W}$$

۱۰۰ وزن یک خودرو با سرنشینان آن $۱۶۴۰۰\,\mathrm{N}$ است. این خودرو در حال حرکت با تندی $۱۱۳\,\mathrm{km/h}$ ترمز می‌کند تا متوقف شود. بزرگی نیروی اصطکاک وارد به چرخ‌ها از سوی جاده $۸۲۳۰\,\mathrm{N}$ است. مسافت پیموده شده تا توقف خودرو را پیدا کنید.

حل: انرژی آغازی خودروی به جرم m که با تندی v_i حرکت می‌کند، $\frac{۱}{۲}mv_i^۲$ است که در آن $m=۱۶۴۰۰/۹/۸=۱۶۷۳\,\mathrm{kg}$ است. با استفاده از معادلات ۸-۳۱ و ۸-۳۳، رابطه‌ی این انرژی با نیروی اصطکاک f که خودرو را در طی مسافت d متوقف می‌کند، به صورت $K_i=fd$ است؛ در این‌جا جاده را افقی در نظر گرفته‌ایم ($\Delta U=۰$). تندی خودرو برابر است با

$$v_i=(۱۱۳\,\mathrm{km/h})(۱۰۰۰\,\mathrm{m/km})(۱\,\mathrm{h}/۳۶۰۰\,\mathrm{s})$$
$$=۳۱/۴\,\mathrm{m/s}$$

این مقدار را در رابطه‌ی بالا قرار می‌دهیم و d را به دست می‌آوریم

$$d=\frac{K_i}{f}=\frac{mv_i^۲}{۲f}=\frac{(۱۶۷۳\,\mathrm{kg})(۳۱/۴\,\mathrm{m/s})^۲}{۲(۸۲۳۰\,\mathrm{N})}=۱۰۰\,\mathrm{m}$$

۱۰۱ گلوله‌ای به جرم $۰/۶۳\,kg$ با تندی آغازی $۱۴\,m/s$ یک راست به سمت بالا پرتاب می‌شود و به ارتفاع بیشینه‌ی $۸/۱\,m$ می‌رسد. در حین بالا رفتن گلوله تا رسیدن به ارتفاع بیشینه، تغییر انرژی مکانیکی دستگاه گلوله ـ زمین چقدر است؟

حل: اگر نقطه‌ی پرتاب گلوله را به عنوان سطح مرجع انرژی پتانسیل انتخاب کنیم، داریم

$$\Delta E = mgh - \frac{۱}{۲}mv_۰^۲ = m\left((۹/۸)(۸/۱) - \frac{۱}{۲}(۱۴)^۲\right)$$

که به ازای $m = ۰/۶۳\,kg$ مقدار تغییر انرژی $\Delta E = -۱۲\,J$ به‌دست می‌آید. این «اتلاف» انرژی مکانیکی به خاطر مقاومت هوا صورت می‌گیرد.

۱۰۲ ارتفاع قله‌ی اورست از سطح دریا $۸۸۵۰\,m$ است. (الف) کوه‌نوردی به جرم $۹۰\,kg$ برای صعود کردن به قله از سطح دریا در برابر نیروی گرانشی وارد به خودش چقدر انرژی باید صرف کند؟ (ب) این انرژی با خوردن چند تخته شکلات تأمین می‌شود؟ انرژی هم‌ارز هر تخته شکلات $۱/۲۵\,MJ$ است پاسخ این مسئله باید نشان دهد که کار انجام شده در برابر نیروی گرانشی تنها بخش کوچکی از انرژی صرف شده در بالا رفتن از کوه است.

حل: (الف) انرژی داخلی که کوه‌نورد باید به انرژی پتانسیل گرانشی تبدیل کند، برابر است با

$$\Delta U = mgh = (۹۰kg)(۹/۸۰m/s^۲)(۸۸۵۰m) = ۷/۸\times۱۰^۶\,J$$

(ب) تعداد تخته شکلات‌هایی که این انرژی را تولید می‌کنند عبارت‌اند از

$$N = \frac{۷/۸\times۱۰^۶\,J}{۱/۲۵\times۱۰^۶\,J/\text{تخته}} \approx ۶/۲\ \text{تخته}$$

۱۰۳ یک دونده‌ی سرعتی به وزن $۶۷۰\,N$ مسافت $۷/۰\,m$ اول مسیر مسابقه را با شروع کردن از حال سکون و با شتاب یکنواخت، در مدت ۱/۶ ثانیه می‌پیماید. (الف) تندی و (ب) انرژی جنبشی دونده در پایان ۱/۶ ثانیه چقدر است؟ (پ) دونده در این مدت ۱/۶ ثانیه چه توان متوسطی را تولید می‌کند؟

حل: (الف) شتاب دونده (با استفاده ازمعادله‌ی ۲-۱۵) برابراست با

$$a = \frac{۲\Delta x}{t^۲} = \frac{(۲)(۷/۰m)}{(۱/۶s)^۲} = ۵/۴۷m/s^۲$$

در نتیجه تندی او در لحظه‌ی $t = ۱/۶\,s$ برابر است با

$$v = at = (۵/۴۷m/s^۲)(۱/۶s) = ۸/۸m/s$$

در این مورد از معادله‌ی ۲-۱۷ نیز می‌توان استفاده کرد.

(ب) انرژی جنبشی دونده (با وزن w و جرم $m = w/g$) برابر است با

$$K = \frac{۱}{۲}mv^۲ = \frac{۱}{۲}\left(\frac{w}{g}\right)v^۲$$

$$= \frac{۱}{۲}(۶۷۰N/(۹/۸m/s^۲))(۸/۸m/s)^۲$$

$$= ۲/۶\times۱۰^۳\,J$$

(پ) توان متوسط دونده از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$P_{avg} = \frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{۲/۶\times۱۰^۳\,J}{۱/۶s} = ۱/۶\times۱۰^۳\,W$$

۱۰۴ نیروی پایستاری به معادله‌ی $F = -۳/۰x - ۵/۰x^۲$، که در آن F برحسب نیوتون و x برحسب متر است، به جسمی ۲۰ کیلوگرمی وارد می‌شود. انرژی پتانسیل وابسته به این نیرو را در نقطه‌ی $x = ۰$ صفر بگیرید. (الف) انرژی پتانسیل دستگاه وابسته به این نیرو وقتی که جسم در نقطه‌ی $x = ۲/۰\,m$ قرار دارد، چقدر است؟ (ب) اگر جسم دارای تندی $۴/۰\,m/s$ در جهت منفی محور x در نقطه‌ی $x = ۵/۰\,m$ باشد، تندی‌اش در هنگام عبور از مبداء چقدر است؟ (پ) اگر انرژی پتانسیل دستگاه در نقطه‌ی $x = ۰$ برابر با $-۸/۰\,J$ در نظر گرفته شود، پاسخ‌های قسمت‌های (الف) و (ب) چه خواهند بود؟

حل: انرژی پتانسیل دستگاه از معادله‌ی ۸-۶ به دست می‌آید:

$$U(\xi) = -\int_۰^{\xi}(-۳x - ۵x^۲)\,dx = \frac{۳}{۲}\xi^۲ + \frac{۵}{۳}\xi^۳$$

(الف) با استفاده از فرمول بالا، $U(۲) \approx ۱۹\,J$ به دست می‌آید.

(ب) وقتی تندی جسم $v = ۴\,m/s$ است، انرژی مکانیکی آن $\frac{۱}{۲}mv^۲ + U(۵)$ است. این مقدار باید با انرژی در مبداء برابر باشد:

$$\frac{۱}{۲}mv^۲ + U(۵) = \frac{۱}{۲}mv_۰^۲ + U(۰)$$

بنابراین تندی جسم در هنگام عبور از مبداء برابر است با

$$v_۰ = \sqrt{v^۲ + \frac{۲}{m}(U(۵) - U(۰))}$$

پس، به ازای $U(۵) = ۲۴۶\,J$، $U(۰) = ۰$ و $m = ۲۰\,kg$، داریم $v_۰ = ۶/۴\,m/s$.

(پ) در این حالت فرمول اصلی U به صورت زیر تغییر می‌کند

$$U(x) = -8 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{3}x^3$$

بنابراین، $U(2) = 11\,J$ به دست می‌آید. اما هنوز $v_0 = 6.4\,m/s$ است زیرا آن محاسبه فقط به اختلاف مقدارهای انرژی پتانسیل [به ویژه $U(5) - U(0)$] بستگی دارد.

۱۰۵ ماشینی تنه‌ی درختی به جرم $40\,kg$ را با سرعت ثابت در روی شیب‌راهه‌ای با زاویه‌ی شیب ۴۰ درجه به اندازه‌ی $2.0\,m$ بالا می‌کشد و نیروی ماشین موازی با سطح شیب‌راهه است. ضریب اصطکاک جنبشی میان تنه‌ی درخت و شیب‌راهه 0.40 است. (الف) کار انجام شده روی تنه‌ی درخت توسط نیروی ماشین و (ب) افزایش انرژی گرمایی تنه‌ی درخت و سطح شیب‌راهه، چقدر است؟

حل: (الف) نیروی گرانشی را به دو مؤلفه تجزیه می‌کنیم و قانون دوم نیوتون (همچنین معادله‌ی ۶-۲) را برای آن‌ها به کار می‌بریم:

$$F_{\text{ماشین}} - mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta = ma$$

در حالت معرفی شده در این مسئله، $a = 0$ است، در نتیجه داریم

$$F_{\text{ماشین}} = mg\sin\theta + \mu_k mg\cos\theta = 372\,N$$

بنابراین، کار انجام شده توسط ماشین $F_{\text{ماشین}}\, d = 744\,J = 7.4\times10^2\,J$ است.

(ب) انرژی گرمایی تولید شده به صورت زیر است

$$\mu_k mg\cos\theta d = 240\,J = 2.4\times10^2\,J$$

۱۰۶ ثابت نیروی فنر یک تفنگ فنری بچگانه $670\,N/m$ است. برای شلیک کردن یک گلوله با این تفنگ نخست فنر را متراکم می‌کنند و سپس گلوله را بر روی آن قرار می‌دهند. با فشار دادن ماشه‌ی تفنگ فنر رها می‌شود و گلوله را در درون لوله به جلو می‌راند. گلوله هنگام خارج شدن از دهانه‌ی لوله‌ی تفنگ از فنر جدا می‌شود. تفنگ تحت زاویه‌ی ۳۰ درجه نسبت به افق به سمت بالا گرفته می‌شود و گلوله‌ای به جرم ۵۷ گرم پرتاب می‌شود، که به ارتفاع بیشینه‌ی $1.83\,m$ بالای دهانه می‌رسد. نیروی پسار هوا روی گلوله را ناچیز فرض کنید. (الف) فنر گلوله را با چه تندی‌ای پرتاب می‌کند؟ (ب) با این فرض که اصطکاک میان گلوله و لوله‌ی تفنگ ناچیز باشد، مقدار تراکم آغازی فنر را پیدا کنید.

حل: (الف) در بالاترین نقطه، سرعت گلوله $v = v_x$ کاملاً افقی و با مؤلفه‌ی افقی سرعت شلیک برابر است (به فصل ۴ رجوع کنید): $v_{0x} = v_0\cos\theta$، که در آن $\theta = 30^\circ$ است. معادله‌ی ۸-۱۷ ارتباط بین انرژی جنبشی در بالاترین نقطه و انرژی جنبشی شلیک را نشان می‌دهد:

$$K_0 = mgy + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_{0x}^2 + \frac{1}{2}mv_{0y}^2$$

در این‌جا $y = 1.83\,m$ است. چون جمله‌ی $mv_{0x}^2/2$ در طرف راست با جمله‌ی $mv^2/2$ در طرف چپ برابر است، در نتیجه داریم $v_{0y} = \sqrt{2gy} \approx 6\,m/s$. با استفاده از رابطه‌ی $v_{0y} = v_0\sin\theta$ داریم

$$v_0 = 11.98\,m/s \approx 12\,m/s$$

(ب) با به کار بردن اصل پایستگی انرژی (از جمله انرژی ذخیره شده در فنر، معادله‌ی ۸-۱۱) در مورد حرکت گلوله در لوله‌ی تفنگ (در طی مسافت d که با افزایش ارتفاع قائم $d\sin\theta$ متناظر است) داریم

$$\frac{1}{2}kd^2 = K_0 + mgd\sin\theta \Rightarrow d = 0.11\,m$$

۱۰۷ تنها نیروی وارد شده به یک ذره نیروی پایستار $\vec{F}$ است. اگر این ذره در نقطه‌ی A باشد، انرژی پتانسیل دستگاه وابسته به $\vec{F}$ و ذره $40\,J$ است. اگر ذره از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B حرکت کند، کار انجام شده توسط $\vec{F}$ روی ذره $+25\,J$ است. انرژی پتانسیل دستگاه شامل ذره در نقطه‌ی B چقدر است؟

حل: کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ با منفی تغییر انرژی پتانسیل ذره (معادله‌ی ۸-۶ را ببینید) برابر است: $U_B = U_A - 25 = 15\,J$.

۱۰۸ در سال ۱۹۸۱/۱۳۶۰، دانیل گودوین با استفاده از فنجان‌های مکشی و گیره‌های فلزی از ***نمای بیرونی*** ساختمان سیرز در شیکاگو تا ارتفاع ۴۴۳ متر بالا رفت. (الف) جرم او را به تقریب در نظر بگیرید و سپس مقدار انرژی‌ای را که او از انرژی زیست مکانیکی (درونی) خود به انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه زمین ـ گودوین تبدیل کرده است تا بتواند خود را تا آن ارتفاع بالا

ببرد، حساب کنید. (ب) اگر او، به جای این کار، از پله‌های درون ساختمان (تا همان ارتفاع) بالا می‌رفت، چه مقدار انرژی را باید تبدیل می‌کرد؟

حل: (الف) فرض می‌کنیم جرم دانیل در بین $m_1 = 50\ \text{kg}$ و $m_2 = 70\ \text{kg}$ (متناظر با وزن او در بین 110 lb و 154 lb) باشد. بنابراین، گستره‌ی افزایش انرژی پتانسیل گرانشی او برابر است با

$$m_1gh \le \Delta U \le m_2gh \Rightarrow 2\times10^5 \le \Delta U \le 3\times10^5$$

در این ارتفاع $h = 443\ \text{m}$ است.

(ب) در صورت مسئله فقط مقدار انرژی داخلی تبدیل شده به انرژی پتانسیل گرانشی خواسته شده است، که این مقدار همان مقدار به دست آمده در قسمت (الف) است. اما اگر بخواهیم انرژی داخلی ***کل*** او را (که بیشتر آن به گرما تبدیل می‌شود) در نظر بگیریم، می‌توانیم انتظار داشته باشیم که بالا رفتن از نمای بیرونی کاملاً متفاوت با بالا رفتن از پله‌ها است.

۱۰۹ سیرک‌بازی به‌جرم ۶۰٫۰ kg از بالای تیری به‌ارتفاع ۴٫۰۰ m از حال سکون به پایین سُر می‌خورد. انرژی جنبشی سیرک باز در هنگام رسیدن به کف زمین در حالتی که نیروی اصطکاک میان او و تیر (الف) ناچیز است (که در نتیجه او آسیب خواهد دید) و (ب) دارای بزرگی ۵۰۰ N است، چیست؟

حل: (الف) معادله‌ی ۸-۳۷ را به صورت زیر می‌نویسیم

$$K_f = K_i + mgy_1 - f_k d$$

$$= 0 + (60\ \text{kg})(9.8\ \text{m/s}^2)(4.0\ \text{m}) - 0 = 2.35\times10^3\ \text{J}$$

(ب) در این حالت جمله‌ی انرژی گرمایی صفر نیست و داریم

$$K_f = K_i + mgy_i - f_k d$$

$$= 0 + (60\ \text{kg})(9.8\ \text{m/s}^2)(4.0\ \text{m}) - (500\ \text{N})(4.0\ \text{m}) = 2.35\ \text{J}$$

۱۱۰ جسمی به جرم ۵٫۰ kg را با تندی ۵٫۰ m/s در طول یک سطح شیب‌دار با زاویه‌ی شیب ۳۰ درجه نسبت به افق به بالا پرتاب می‌کنیم. جسم در این حالت‌ها بر روی سطح شیب‌دار چه مسافتی می‌پیماید. (الف) سطح بی‌اصطکاک است و (ب) ضریب اصطکاک جنبشی میان جسم و سطح ۰٫۴۰ است؟ (پ) در حالت اخیر، افزایش انرژی گرمایی جسم و سطح در حین بالا رفتن جسم چقدر است؟ (ت) اگر جسم با وجود نیروی اصطکاک به پایین برگردد تندی‌اش در هنگام رسیدن به نقطه‌ی پرتاب اولی چقدر است؟

حل: پایین سطح شیب‌دار را به عنوان سطح مرجع $y = 0$ در نظر می‌گیریم. زاویه‌ی سطح شیب‌دار $\theta = 30^\circ$ است. رابطه‌ی مسافتی که روی سطح شیب‌دار طی می‌شود، d (از پایین سطح شیب‌دار اندازه‌گیری می‌شود) با ارتفاع y به صورت $y = d\sin\theta$ است.

(الف) با استفاده از اصل پایستگی انرژی داریم

$$K_0 + U_0 = K_{\text{بالا}} + U_{\text{بالا}} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = 0 + mgy$$

در اینجا $v_0 = 5.0\ \text{m/s}$ است. در نتیجه $y = 1.28\ \text{m}$ و از آنجا $d = 2.56\ \text{m}$ به دست می‌آید.

(ب) با تجزیه کردن نیروها مانند فصل ۶، بزرگی نیروی اصطکاک به صورت $f_k = \mu_k mg\cos\theta$ به دست می‌آید. اکنون معادله‌ی ۸-۳۳ را به صورت زیر می‌نویسیم

$$K_0 + U_0 = K_{\text{بالا}} + U_{\text{بالا}} + f_k d$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = 0 + mgy + f_k d$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgd\sin\theta + \mu_k mgd\cos\theta$$

که پس از حذف‌کردن جرم و بازآرایی رابطه‌ها، پاسخ d به‌دست می‌آید:

$$d = \frac{v_0^2}{2g(\mu_k\cos\theta + \sin\theta)} = 2\ \text{m}$$

(پ) انرژی گرمایی تولید شده توسط نیروی اصطکاک برابر است با $f_k d = \mu_k mg\cos\theta = 17\ \text{J}$.

(ت) جسم از ارتفاع $y = 2\sin 30^\circ$ به پایین برمی‌گردد، که با معادله‌ی ۸-۳۳ نیز توصیف می‌شود. باز هم ΔE_{th} با 17 J برابر است و داریم

$$K_{\text{بالا}} + U_{\text{بالا}} = K_{\text{پایین}} + U_{\text{پایین}} + f_k d$$

$$0 + mgy = \frac{1}{2}mv_{\text{پایین}}^2 + 0 + 17$$

در نتیجه $v_{\text{پایین}} = 3.6\ \text{m/s}$ به دست می‌آید.

۱۱۱ پرتابه‌ای به جرم ۹٫۴۰ kg به طور قائم به سمت بالا شلیک می‌شود. در حین بالا رفتن پرتابه نیروی پسار هوا انرژی مکانیکی دستگاه پرتابه ـ زمین را به اندازه‌ی ۶۸٫۰ kJ کاهش می‌دهد. اگر نیروی پسار هوا ناچیز می‌بود پرتابه چه مقدار بالاتر می‌رفت؟

حل: مستقیماً با استفاده از معادله‌ی ۸-۸ داریم

$$\Delta y = \frac{۶۸۰۰۰\,\mathrm{J}}{(۹/۴\,\mathrm{kg})(۹/۸\,\mathrm{m/s^2})} = ۷۳۸\,\mathrm{m}$$

۱۱۲ مردی به جرم ۷۰/۰ kg، که از پنجره‌ی ساختمانی به پایین می‌پرد، درون یک تور نجات واقع در ۱۱/۰ m پایین‌تر از پنجره فرود می‌آید. وقتی که او تور نجات را به اندازه‌ی ۱/۵۰ m به پایین می‌کشد در یک لحظه متوقف می‌شود. با این فرض که در این فرایند انرژی مکانیکی پایسته است و تور مانند یک فنر آرمانی عمل می‌کند، انرژی پتانسیل کشسانی تور را در هنگام کشیده شدن به اندازه‌ی ۱/۵۰ m پیدا کنید.

حل: فرض می‌کنیم انرژی جنبشی آغازی او (در لحظه‌ی پریدن) ناچیز است. بنابراین، انرژی پتانسیل گرانشی آغازی او نسبت به جایی که در یک لحظه متوقف می‌شود، مساوی با انرژی پتانسیل کشسانی تور نجات کشیده شده است (از مقاومت هوا چشم‌پوشی می‌کنیم) پس می‌توان نوشت:

$$U_{\text{تور}} = U_{\text{گرانش}} = mgh$$

در این‌جا $h = ۱۱/۰\,\mathrm{m} + ۱/۵\,\mathrm{m} = ۱۲/۵\,\mathrm{m}$ است. به ازای $m = ۷۰\,\mathrm{kg}$، $U_{\text{تور}} = ۸/۶\,\mathrm{kJ}$ به دست می‌آید.

۱۱۳ گلوله‌ای به جرم ۳۰ گرم که با سرعت افقی ۵۰۰ m/s حرکت می‌کند، پس از پیمودن مسافت ۱۲ cm در درون یک دیوار متوقف می‌شود. (الف) تغییر انرژی مکانیکی گلوله چقدر است؟ (ب) بزرگی نیروی متوسطی که از سوی دیوار به گلوله وارد می‌شود، چیست؟

حل: در این مسئله $m = ۰/۰۳۰\,\mathrm{kg}$ و $d = ۰/۱۲\,\mathrm{m}$ است.

(الف) چون ارتفاع تغییر نمی‌کند (و فرض می‌کنیم که انرژی پتانسیل کشسانی نیز تغییر نمی‌کند)، $\Delta U = ۰$ است و داریم

$$\Delta E_{\text{mech}} = \Delta K = -\frac{۱}{۲}mv_0^2 = -۳/۸\times۱۰^۳\,\mathrm{J}$$

در این‌جا $v_0 = ۵۰۰\,\mathrm{m/s}$ و تندی پایانی صفر است.

(ب) بر طبق معادله‌ی ۸-۳۳ (به ازای $W = ۰$) داریم $\Delta E_{\text{th}} = ۳/۸\times۱۰^۳\,\mathrm{J}$ که از آن‌جا نیروی اصطکاک با استفاده از معادله‌ی ۸-۳۱ به دست می‌آید:

$$f = \frac{\Delta E_{\text{th}}}{d} = ۳/۱\times۱۰^۴\,\mathrm{N}$$

در این‌جا به جای f_k حرف f را قرار داده‌ایم تا حالت عمومی‌تر داشته باشد.

۱۱۴ خودرویی به جرم ۱۵۰۰ kg از حال سکون روی جاده‌ای افقی شروع به حرکت می‌کند و در مدت ۳۰ s به تندی ۷۲ km/h می‌رسد. (الف) انرژی جنبشی خودرو در پایان این ۳۰ s چقدر است؟ (ب) توان متوسط لازم برای خودرو در این بازه‌ی زمانی ۳۰ s چقدر است؟ (پ) با فرض ثابت بودن شتاب، توان لحظه‌ای در پایان این بازه‌ی زمانی ۳۰ s چیست؟

حل: (الف) انرژی جنبشی خودرو (به‌جرم m) در لحظه‌ی $t = ۳۰\,\mathrm{s}$ برابر است با

$$K = \frac{۱}{۲}mv^2 = \frac{۱}{۲}(۱۵۰۰\,\mathrm{kg})\left((۷۲\,\mathrm{km/h})\left(\frac{۱۰۰۰\,\mathrm{m/km}}{۳۶۰۰\,\mathrm{s/h}}\right)\right)^2 = ۳/۱\times۱۰^۵\,\mathrm{J}$$

(ب) توان متوسط لازم برابر است با

$$P_{\text{avg}} = \frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{۳/۱\times۱۰^۵\,\mathrm{J}}{۳۰\,\mathrm{s}} = ۱/۰\times۱۰^۴\,\mathrm{W}$$

(پ) چون شتاب a ثابت است، توان با استفاده از معادله‌ی ۲-۱۱ برابر است با $P = Fv = mav = ma(at) = ma^2t$. در مقابل، توان متوسط در قسمت (ب) به صورت $P_{\text{avg}} = \frac{mv^2}{2t}$ به دست آمد که با استفاده از رابطه‌ی $v = at$ به صورت $\frac{۱}{۲}ma^2t$ در می‌آید. بنابراین، توان لحظه‌ای در پایان بازه‌ی زمانی، دو برابر توان متوسط در همان مدت است:

$$P = ۲P_{\text{avg}} = (۲)(۱/۰\times۱۰^۴\,\mathrm{W}) = ۲/۰\times۱۰^۴\,\mathrm{W}$$

۱۱۵ گلوله‌ای برفی به جرم ۱/۵۰ kg با تندی آغازی ۲۰/۰ m/s تحت زاویه‌ی ۳۴/۰ درجه نسبت به افق به سمت بالا پرتاب می‌شود. (الف) انرژی جنبشی آغازی گلوله چقدر است؟ (ب) در مدتی که گلوله‌ی برفی از نقطه‌ی پرتاب تا ارتفاع بیشینه حرکت می‌کند انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه گلوله‌ی برفی ـ زمین چقدر تغییر می‌کند؟ (پ) ارتفاع بیشینه چقدر است؟

حل: (الف) انرژی جنبشی آغازی به صورت زیر است

$$K_i = (۱/۵\,\mathrm{kg})(۲۰\,\mathrm{m/s})^2/۲ = ۳۰۰\,\mathrm{J}$$

(ب) در نقطه‌ی با ارتفاع بیشینه، مؤلفه‌ی قائم سرعت صفر می‌شود

اما مؤلفه‌ی افقی مساوی با مقدار سرعت افقی پرتاب باقی می‌ماند (البته اگر از مقاومت هوا چشم‌پوشی کنیم). انرژی جنبشی گلوله‌ی برفی در آن لحظه برابر است با

$$K = \frac{۱}{۲}(۱٫۵\,kg)[(۲۰\,m/s)\cos ۳۴°]^{۲} = ۲۰۶\,J$$

بنابراین داریم $\Delta U = K_i - K = ۳۰۰\,J - ۲۰۶\,J = ۹۳٫۸\,J$.

(پ) چون $\Delta U = mg\Delta y$ است، در نتیجه داریم

$$\Delta y = \frac{۹۴\,J}{(۱٫۵\,kg)(۹٫۸\,m/s^{۲})} = ۶٫۳۸\,m$$

۱۱۶ یک چترباز شیرجه‌رو در هوا، که $۶۸\,kg$ جرم دارد، با تندی حد ثابت $۵۹\,m/s$ سقوط می‌کند. (الف) انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه زمین - چترباز با چه آهنگی کاهش می‌یابد؟ (ب) انرژی مکانیکی این دستگاه با چه آهنگی کاهش می‌یابد؟

حل: (الف) آهنگ تغییر انرژی پتانسیل گرانشی برابر است با

$$\frac{dU}{dt} = mg\frac{dy}{dt} = -mg|v|$$
$$= -(۶۸)(۹٫۸)(۵۹) = -۳٫۹\times ۱۰^{۴}\,J/s$$

بنابراین، انرژی گرانشی با آهنگ $۳٫۹\times ۱۰^{۴}\,W$ کاهش می‌یابد.

(ب) چون سرعت ثابت است، آهنگ تغییر انرژی جنبشی صفر است. بنابراین، آهنگ اتلاف انرژی مکانیکی با همان مقدار آهنگ تغییر انرژی پتانسیل گرانشی ($۳٫۹\times ۱۰^{۴}\,W$) برابر است.

۱۱۷ جسمی به جرم $۲۰\,kg$ بر روی یک سطح افقی به فنری افقی با ثابت فنری $k = ۴٫۰\,kN/m$ وصل شده است. جسم را به گونه‌ای به سمت راست می‌کشیم که فنر نسبت به طول آرامش خود به اندازه‌ی $۱۰\,cm$ کشیده می‌شود و سپس آن را از حال سکون رها می‌کنیم. بزرگی نیروی اصطکاک میان جسم لغزان و سطح $۸۰\,N$ است. (الف) انرژی‌جنبشی جسم پس از پیمودن $۲٫۰\,cm$ نسبت به نقطه‌ی رها شدن، چقدر است؟ (ب) انرژی جنبشی جسم در هنگام نخستین برگشت به نقطه‌ای که فنر دارای طول آرامش است، چیست؟ انرژی جنبشی بیشینه‌ی کسب‌شده توسط جسم در هنگام لغزیدن از نقطه‌ی رها شدن تا نقطه‌ای که فنر دارای طول آرامش است، چقدر است؟

حل: (الف) اثر اصطکاک (لغزشی) برحسب انرژی تلف شده مطابق معادله‌ی ۸-۳۱ توصیف می‌شود. داریم

$$\Delta E = K + \frac{۱}{۲}k(۰٫۰۸)^{۲} - \frac{۱}{۲}k(۰٫۱۰)^{۲} = -f_k(۰٫۰۲)$$

به‌ازای $k = ۴۰۰\,N/m$ و $f_k = ۸۰\,N$، $K = ۵٫۶\,J$ به‌دست می‌آید.

(ب) در این حالت، $d = ۰٫۱۰\,m$ است. پس می‌توان نوشت

$$\Delta E = K + ۰ - \frac{۱}{۲}k(۰٫۱۰)^{۲} = -f_k(۰٫۱۰)$$

که از آن‌جا $K = ۱۲\,J$ به دست می‌آید.

(پ) ما می‌توانیم از دو روش زیر استفاده کنیم. یک راه بررسی بستگی انرژی به متغیر d است:

$$\Delta E = K + \frac{۱}{۲}k(d_۰ - d)^{۲} - \frac{۱}{۲}kd_۰^{۲} = -f_k d$$

در این‌جا $d_۰ = ۰٫۱۰\,m$ است و K به صورت تابعی از d به دست می‌آید: در روش اول شرط $\frac{dK}{dd} = ۰$ را بررسی می‌کنیم و پاسخ $K_{max} = \frac{۱}{۲k}(kd_۰ - f_k)^{۲}$ به دست می‌آید. در روش دوم (که شاید آسان‌تر باشد) می‌دانیم که K موقعی بیشینه است که v بیشینه باشد و شرط آن هم $a = ۰$ است، یعنی نیروها باید در حال تعادل باشند. بنابراین، در روش دوم می‌توان مکان تعادل را پیدا کرد:

$$|F_{فنر}| = f_k \Rightarrow kx = ۸۰$$

در نتیجه به ازای $k = ۴۰۰۰\,N/m$، مقدار $x = ۰٫۰۲\,m$ به دست می‌آید. اما می‌دانیم که $x = d_۰ - d$، در نتیجه $d = ۰٫۰۸۰$ است. بنابراین با توجه به روش‌های به کار رفته در قسمت (الف)، پاسخ $K_{max} = ۱۲٫۸\,J \approx ۱۳\,J$ به دست می‌آید.

۱۱۸ مقاومت در برابر حرکت یک خودرو شامل اصطکاک جاده، که تقریباً مستقل ازتندی است، و نیروی پسار هوا، که با مربع تندی متناسب است، می‌شود. برای خودرویی با وزن $۱۲۰۰۰\,N$ نیروی مقاومت کل F با رابطه‌ی $F = ۳۰۰ + ۱٫۸v^{۲}$ داده می‌شود، که F برحسب نیوتون و v برحسب متر بر ثانیه است. توان لازم (برحسب قوه اسب) در تندی $۸۰\,km/h$ را برای آنکه به خودرو شتاب $۰٫۹۲\,m/s^{۲}$ بدهد، حساب کنید.

حل: یکای تندی را به یکای SI تبدیل می‌کنیم:

$$v = (۸۰\,km/h)\left(\frac{۱۰۰۰\,m/km}{۳۶۰۰\,s/h}\right) = ۲۲٫۲\,m/s$$

نیروی F_P لازم برای به پیش راندن خودرو (با وزن w و جرم $m = w/g$) از قانون دوم نیوتون به دست می‌آید:

$$F_{\text{net}} = F_P - F = ma = \frac{wa}{g}$$

در این‌جا $F = 300 + 1.8v^2$ است. بنابراین، توان لازم برابر است با

$$P = \vec{F}_P \cdot \vec{v} = \left(F + \frac{wa}{g}\right)v$$

$$= \left(300 + 1.8(22.2)^2 + \frac{(12000)(0.92)}{9.8}\right)(22.2)$$

$$= 5.14\times10^4\ \text{W} = (5.14\times10^4\ \text{W})\left(\frac{1\text{hp}}{746\ \text{W}}\right) = 69\text{hp}$$

۱۱۹ گلوله‌ای به جرم ۵۰ گرم با سرعت آغازی $8.0\ \text{m/s}$ تحت زاویه‌ی ۳۰ درجه‌ی بالای افق از پنجره‌ای پرتاب می‌شود. با استفاده از روش‌های انرژی، مطلوب است تعیین (الف) انرژی جنبشی گلوله در بالاترین نقطه‌ی مسیر پرواز، و (ب) تندی گلوله وقتی که به $3.0\ \text{m}$ پایین‌تر از پنجره رسیده است. آیا پاسخ قسمت (ب) به (پ) جرم گلوله یا (ت) زاویه‌ی پرتاب آغازی، بستگی دارد؟

حل: مکان آغازی در پنجره را به عنوان نقطه‌ی مرجع برای محاسبه‌ی انرژی پتانسیل انتخاب می‌کنیم. انرژی آغازی گلوله $E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$ است. در بالاترین نقطه‌ی پرواز، مؤلفه‌ی قائم سرعت صفر است و مؤلفه‌ی افقی آن (با چشم‌پوشی از اصطکاک هوا) با مقدار آن در لحظه‌ی پرتاب برابر است: $v_x = v_0\cos\theta$. در نقطه‌ای به ارتفاع h در زیر پنجره، انرژی گلوله برابر است با

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - mgh$$

در این‌جا v تندی گلوله است.

(الف) انرژی جنبشی گلوله در بالاترین نقطه‌ی پرواز برابر است با

$$K_{\text{بالا}} = \frac{1}{2}mv_x^2 = \frac{1}{2}m(v_0\cos\theta)^2$$

$$= \frac{1}{2}(0.050\text{kg})[(8.0\ \text{m/s})\cos 30°]^2 = 1.2\ \text{J}$$

(ب) وقتی گلوله به ارتفاع $h = 3.0\ \text{m}$ در زیر پنجره می‌رسد، بر طبق اصل پایستگی انرژی داریم

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 - mgh$$

یا

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

$$= \sqrt{(8.0\ \text{m/s})^2 + 2(9.8\ \text{m/s}^2)(3.0\ \text{m})} = 11.0\ \text{m/s}$$

(پ) همان‌طور که رابطه‌ی بالا نشان می‌دهد، $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$ مستقل از جرم m است.

(ت) به‌طور مشابه، تندی v مستقل از زاویه‌ی آغازی θ نیز هست.

۱۲۰ فنری با ثابت نیروی $3200\ \text{N/m}$ در آغاز چنان کشیده شده که دارای انرژی پتانسیل کشسانی $1.44\ \text{J}$ شده است (برای فنر در حال آرامش، داریم $U = 0$). اگر کشیدگی آغازی به (الف) یک کشیدگی $2.0\ \text{cm}$، (ب) یک تراکم $2.0\ \text{cm}$ و (پ) یک تراکم $4.0\ \text{cm}$ تغییر کند، ΔU چقدر خواهد شد؟

حل: (الف) در وضعیت آغازی، کشیدگی فنر (با استفاده از معادله‌ی ۸-۱۱) برابر است با

$$x_i = \sqrt{2(1.44)/3200} = 0.030\ \text{m} = 3.0\ \text{cm}$$

در وضعیت بعدی، کشیدگی فنر فقط $2.0\ \text{cm}$ است، لذا این بار انرژی ذخیره شده (نسبت به وضعیت آغازی) کمتر است. در نتیجه داریم

$$\Delta U = \frac{1}{2}(3200\ \text{N/m})(0.020\text{m})^2 - 1.44\text{J} = -0.80\text{J}$$

(ب) انرژی پتانسیل کشسانی ذخیره شده به ازای $|x| = 0.020\ \text{m}$ به کشیده شدن یا متراکم شدن فنر بستگی ندارد. پاسخ همان پاسخ قسمت (الف) یعنی $\Delta U = 0.80\text{J}$ است.

(پ) در این حالت $|x| = 0.040\ \text{m}$ است که از x_i بزرگ‌تر است، در نتیجه انرژی پتانسیل نیز (نسبت به وضعیت آغازی) بیشتر است. پس می‌توان نوشت:

$$\Delta U = \frac{1}{2}(3200\ \text{N/m})(0.040\text{m})^2 - 1.44\text{J} = +1.12\text{J} \approx 1.1\text{J}$$

۱۲۱ لوکوموتیوی با قابلیت توان $1.5\ \text{MW}$ می‌تواند در مدت $6.0\ \text{min}$ تندی یک قطار را از $10\ \text{m/s}$ به $25\ \text{m/s}$ برساند. (الف) جرم قطار را حساب کنید. (ب) تندی قطار و (پ) نیروی شتاب دهنده‌ی قطار برحسب زمان (ثانیه) در بازه‌ی زمانی $6.0\ \text{min}$ را پیدا کنید. (ت) مسافت پیموده شده توسط قطار را در این بازه‌ی زمانی به دست آورید.

حل: (الف) به ازای $P = 1.5\ \text{MW} = 1.5\times10^6\ \text{W}$ (که فرض می‌شود ثابت است) در مدت $t = 6.0\ \text{min} = 360\text{s}$، از قضیه‌ی کار ـ انرژی داریم

$$W = Pt = \Delta K = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2)$$

بنابراین، جرم لوکوموتیو برابر است با

$$m = \frac{۲Pt}{v_f^۲ - v_i^۲} = \frac{(۲)(۱/۵\times۱۰^۶ \, W)(۳۶۰ s)}{(۲۵ m/s)^۲ - (۱۰ m/s)^۲} = ۲/۱\times۱۰^۶ \, kg$$

(ب) برای t اختیاری، از رابطه‌ی $Pt = \frac{۱}{۲}m(v^۲ - v_i^۲)$ تندی $v = v(t)$ را به صورت تابعی از زمان به دست می‌آوریم:

$$v(t) = \sqrt{v_i^۲ + \frac{۲Pt}{m}} = \sqrt{(۱۰)^۲ + \frac{(۲)(۱/۵\times۱۰^۶)t}{۲/۱\times۱۰^۶}} = \sqrt{۱۰۰+۱/۵t}$$

(پ) نیروی $F(t)$ به صورت تابعی از زمان برابر است با

$$F(t) = \frac{P}{v(t)} = \frac{۱/۵\times۱۰^۶}{\sqrt{۱۰۰+۱/۵t}}$$

(ت) مسافت پیموده شده توسط قطار از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$d = \int_۰^t v(t')dt' = \int_۰^{۳۶۰}\left(۱۰۰+\frac{۳}{۲}t\right)^{۱/۲}dt$$
$$= \frac{۴}{۹}\left(۱۰۰+\frac{۳}{۲}t\right)^{۳/۲}\Big|_۰^{۳۶۰} = ۶/۷\times۱۰^۳ \, m$$

۱۲۲ یک قرص شافل بورد به جرم $۰/۴۲ kg$ در آغاز ساکن است و بازیکن تندی آن را با ضربه‌ی یک چوب و با شتاب ثابت به $۴/۲ m/s$ افزایش می‌دهد. عمل شتاب دادن در طول مسافت $۲/۰ m$ صورت می‌گیرد و در پایان آن تماس چوب با قرص قطع می‌شود. پس از آن، قرص تا پیش از توقف به اندازه‌ی مسافت اضافی $۱۲ m$ دیگر می‌لغزد. فرض کنید زمین بازی تراز است و نیروی اصطکاک وارد به قرص ثابت است. افزایش انرژی گرمایی دستگاه قرص ـ زمین بازی (الف) در $۱۲ m$ اضافی و (ب) در کل مسافت $۱۴ m$، چقدر است؟ (پ) چقدر کار توسط چوب روی قرص انجام می‌شود؟

حل: وقتی نیروی اصطکاک وجود دارد، کار انجام شده روی یک دستگاه $W = \Delta E_{mech} + \Delta E_{th}$ است که در آن $\Delta E_{mech} = \Delta K + \Delta U$ و $\Delta E_{th} = f_k d$ است. در وضعیت معرفی شده، کار توسط چوب فقط در $۲/۰ m$ اول انجام شده، و در مسافت اضافی $۱۲ m$ کاری انجام نشده است.

(الف) در طی مسافت پایانی $d = ۱۲ m$، $W = ۰$ است و داریم

$$K_۱ + U_۱ = K_۲ + U_۲ + f_k d$$
$$\frac{۱}{۲}mv^۲ + ۰ = ۰ + ۰ + f_k d$$

که در آن $m = ۰/۴۲ kg$ و $v = ۴/۲ m/s$ است. در نتیجه $f_k = ۰/۳۱ N$ به دست می‌آید و تغییر انرژی گرمایی $\Delta E_{th} = f_k d = ۳/۷ J$ است.

(ب) با استفاده از $f_k = ۰/۳۱ N$ برای مسافت کل $d_{کل} = ۱۴ m$، انرژی گرمای تولید شده توسط اصطکاک برابر است با

$$\Delta E_{th,کل} = f_k d_{کل} = (۰/۳۱ N)(۱۴ m) = ۴/۳ J$$

(پ) در طی مسافت آغازی $d' = ۲ m$، کار انجام شده برابر است با

$$W = \Delta E_{mech} + \Delta E'_{th} = \Delta K + \Delta U + f_k d'$$
$$= \frac{۱}{۲}mv^۲ + ۰ + f_k d'$$

در این‌جا معادلات ۸-۳۱ و ۸-۳۳ را با هم ترکیب کرده‌ایم. بنابراین، کاری که توسط چوب روی قرص انجام می‌شود، برابر است با

$$W = \frac{۱}{۲}mv^۲ + f_k d'$$
$$= \frac{۱}{۲}(۰/۴۲ kg)(۴/۲ m/s)^۲ + (۰/۳۱ N)(۲/۰ m) = ۴/۳ J$$