

مقدمه

کتابی که پیش رو دارید از سری کتاب های آموزش مبحثی ریاضیات مربوط به مبحث تابع هموگرافیک از سری مباحث کاربرد مشتق می باشد. در این کتاب علاوه بر ارائه تمام مطالب آموزشی و تدریس مبحث مربوطه سعی شده تا داوطلبان کنکور با نمونه سوالات مختلف تشریحی و چهارگزینه ای از این مبحث آشنا شوند. در این منبع از تمامی سوالات مطرح شده در آزمون های سراسری و آزاد داخل و خارج از کشور و نیز کنکورهای آزمایشی معتبر کشور استفاده شده و در کنار آن طرح سوالات تالیفی و شبیه ساز کنکور داوطلبان را از استفاده از هر منبع دیگری برای مطالعه این مبحث بی نیاز می سازد. وجود کتاب های فراوان با رویکرد تستی و عدم پردازش به آموزش و تدریس کامل و خلاء وجود کتاب های آموزشی، ما را بر آن داشت تا در مباحث مختلف ریاضی اقدام به تالیف و چاپ کتاب های مبحثی نماییم. به طوری که اگر داوطلبی بخواهد در مبحثی به مطالعه عمیق تر و دقیق تر بپردازد مطالعه این کتاب ها آن ها را از مطالعه سایر منابع بی نیاز می کند. بدون شک این مجموعه همانند هر کتاب دیگری عاری از نقص نیست. لذا از همکاران و دانش آموزان عزیز استدعا دارم تا نظرات و انتقادات و پیشنهادات خود را با شماره ۰۹۱۲۰۹۰۳۳۸۰ با بنده در میان بگذارند.

مهندس رضایی

فروردین ۱۳۹۶

تقدیم به

مادر عزیزم

که از دوران ابتدایی با همه سختی ها

همیشه مشوق و پشتیبانم بود.

فهرست:

- ۱ تابع هموگرافیک-دامنه-برد-مجانب- مشتق و مرکز تقارن آن
- ۲ محورهای تقارن تابع هموگرافیک
- ۳ یک به یک بودن تابع هموگرافیک
- ۴ رسم تابع هموگرافیک
- ۴ بررسی یکنوایی
- ۵ شکل خطی
- ۵ انتقال مبدا به مرکز تقارن تابع
- ۲۲ تا ۶ نمونه سوالات

تابع هموگرافیک:

هر تابع به فرم $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ که در آن $c \neq 0$ و $ad - bc \neq 0$ را تابع هموگرافیک می‌گوییم.

دامنه ی تابع:

دامنه تابع هموگرافیک به صورت $R - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ است.

برد تابع:

برد تابع هموگرافیک $R - \left\{\frac{a}{c}\right\}$ است.

مشتق تابع:

مشتق تابع $f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ می‌باشد و با توجه به مثبت بودن مخرج برحسب علامت $ad - bc$ ،

دو حالت پیش می‌آید:

الف) اگر $ad - bc > 0$ آنگاه $f'(x) > 0$ و در نتیجه تابع در هر بازه‌ای که شامل (مجانِب قائم) نباشد اکیداً صعودی است.

ب) اگر $ad - bc < 0$ آنگاه $f'(x) < 0$ و در نتیجه تابع در هر بازه‌ای که شامل (مجانِب قائم) نباشد اکیداً نزولی است.

مجانِب های تابع:

تابع دارای دو مجانب است که یکی خط $x = -\frac{d}{c}$ (مجانِب قائم) و دیگری $y = \frac{a}{c}$ (مجانِب افقی) می‌باشد.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax}{cx} = \frac{a}{c} \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{d}{c}} f(x) = \pm\infty$$

مرکز تقارن تابع:

نقطه ی $\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$ که همان محل تلاقی مجانب هاست همان مرکز تقارن تابع است.

تذکر:

تابع هموگرافیک را هم نگار نیز می گویند.

نکته تستی:

تابع هموگرافیک با (شرط $ad - bc \neq 0$) همواره یک به یک است و

هرگز نقطه ی عطف و اکسترمم (max, min) ندارد.

محورهای تقارن تابع هموگرافیک:

تابع هموگرافیک دارای دو محور تقارن است که شیب آنها ± 1 است و از مرکز تقارن می گذرند و معادلات آنها به صورت

$$y - \frac{a}{c} = \pm \left(x + \frac{d}{c} \right)$$

است. در بعضی از منابع برای سرعت عمل محورهای تقارن را به صورت ساده شده ی زیر عنوان می کنند.

$$y = x + \frac{a+d}{c} \qquad y = -x + \frac{a-d}{c}$$

محورهای تقارن قاطع:

توجه کنید که از دو محور تقارن تابع هموگرافیک همواره یکی قاطع است یعنی نمودار را قطع می کند.

اگر $ad - bc < 0$ آنگاه محور تقارن با شیب $m = +1$ قاطع است.

اگر $ad - bc > 0$ آنگاه محور تقارن با شیب $m = -1$ قاطع است.

تذکر:

توجه کنید که اگر $c = 0$ باشد، تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ به $f(x) = \frac{ax+b}{d}$ و در نتیجه

$f(x) = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$ که یک خط راست است تبدیل می شود و دیگر هموگرافیک نیست.

تذکر:

در بحث مقاطع مخروطی می خوانیم که نام منحنی این تابع هذلولی متساوی القطرین است.

توجه:

در حالتی که در تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، $ad - bc = 0$ است به این معنی است که مشتق برابر صفر می

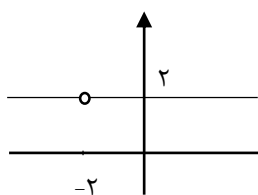
شود. زیرا گفتیم $f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ و می دانیم تابعی به صورت $y = k \in R$ مشتقشان صفر است به

عبارتی در این حالت تابع به یک خط راست موازی محور x ها تبدیل می شود که یک به یک نیز نیست. برای

درک بیشتر به این نکته توجه کنید که در این حالت که $ad - bc = 0$ به این معنی است که $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

یعنی صورت و مخرج قابلیت ساده شدن دارند. مثلاً به معادله تابع $y = \frac{2x+4}{x+2}$ توجه کنید، صورت و مخرج

قابل ساده شدن هستند.



$$y = \frac{2(x+2)}{x+2} \Rightarrow y = 2$$

و نمودار تابع در این حالت به صورت روبرو است: (توجه کنید $\{-2\}$ = دامنه)

بنابراین در این حالت ها نمودار تابع یک خط افقی موازی محور x هاست که یک نقطه ی توخالی (ریشه

مخرج) دارد.

نکته:

پس در تابع هموگرافیک $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ اگر $ad - bc = 0$ باشد تابع یک به یک نیست.

نکته:

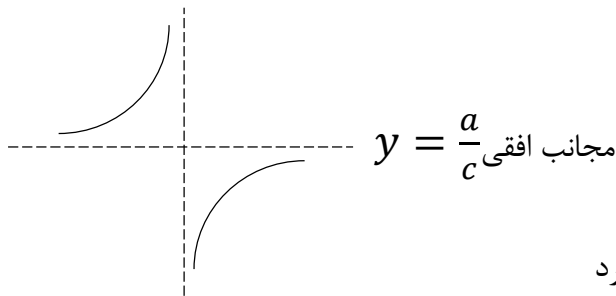
در تابع هموگرافیک اگر $a + d = 0$ تابع با معکوسش برابر است یعنی

$$f^{-1}(x) = f(x) \text{ به عبارت } f \circ f(x) = x \text{ است.}$$

رسم تابع هموگرافیک:

توجه کنید که تابع هموگرافیک به یکی از دو صورت زیر است (در این تابع نمودارها با توجه به مجانب‌ها

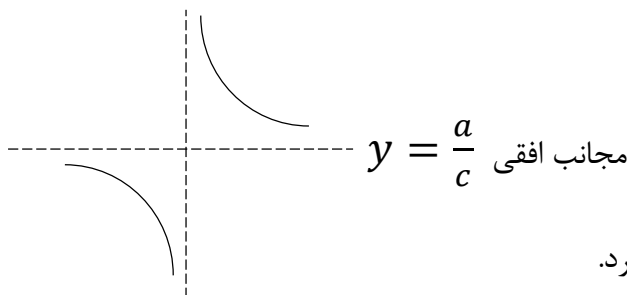
رسم می‌شوند)



حالت الف) اگر $ad - bc > 0$

در این حالت نمودار از ناحیه ۲ و ۴ مجانب‌ها می‌گذرد

مجانب قائم $x = -\frac{d}{c}$



حالت ب) اگر $ad - bc < 0$

در این حالت نمودار از ناحیه ۱ و ۳ مجانب‌ها می‌گذرد.

مجانب قائم $x = -\frac{d}{c}$

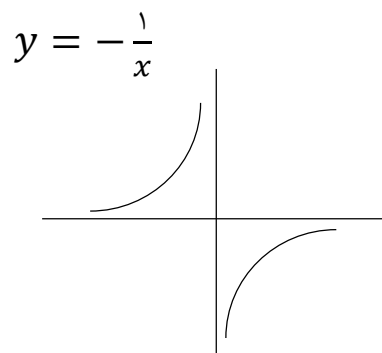
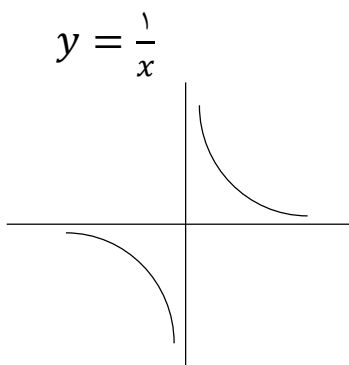
یکنوایی تابع هموگرافیک:

توجه کنید که تابع هموگرافیک در کل R و نیز روی دامنه اش غیریکنواست ولی در دو طرف مجانب قائم

صعودی اکید (وقتی $ad - bc > 0$) و یا نزولی اکید وقتی $(ad - bc < 0)$ می‌باشد. بنابراین اگر تابع

در بازه ای صعودی اکید و یا نزولی اکید باشد مجانب قائم تابع باید خارج از آن بازه قرار داشته باشد.

معروف ترین توابع هموگرافیک:



شکل خطی تابع هموگرافیک:

تابع به صورت $Ax + By + Cxy + D = 0$ شکل خطی تابع هموگرافیک است.

مثال) مرکز تقارن تابع $3x - y + 2xy + 2 = 0$ را پیدا کنید.

$$3x + 2 = y - 2xy$$

$$3x + 2 = y(1 - 2x) \Rightarrow y = \frac{3x + 2}{-2x + 1}$$

$$w \left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -\frac{3}{2} \end{array} \right.$$

انتقال مبدا مختصات به مرکز تقارن یک تابع هموگرافیک:

اگر مبدا مختصات را به مرکز تقارن یک تابع هموگرافیک منتقل کنیم معادله ی جدید تابع به صورت زیر

$$xy = -\frac{ad-bc}{c^2} \text{ خواهد بود.}$$

نکته:

توجه کنید که مرکز تقارن تابع هموگرافیک همان محل تلاقی مجانب ها و نیز همان محل تلاقی محورهای تقارن است. پس مختصات مرکز تقارن در معادلات محورهای تقارن صدق می کند.

توصیه ای برای مشتق:

در توابع به فرم $y = \frac{au+b}{cu+d}$ که u عبارتی بر حسب x است. مشتق به صورت زیر محاسبه می شود:

$$y' = \frac{ad-bc}{(cu+d)^2} \cdot u'$$

مثال) اگر $y = \frac{2\sin x + 1}{3\sin x - 5}$

$$y' = \frac{(2)(-5) - (1)(3)}{(3\sin x - 5)^2} \times \cos x = \frac{-13 \cos x}{(3\sin x - 5)^2}$$

مثال ۱) مرکز تقارن تابع $f(x) = \frac{mx-3}{2x-4}$ روی خط $y = x - 1$ قرار دارد. مقدار m کدام است؟

- ۱ (۴) ۲ (۳) ۳ (۱) ۴ (۲)

$$2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad \Rightarrow w \left| \begin{array}{c} 2 \\ m \\ 2 \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \Rightarrow y = \frac{m}{2}$$

مرکز تقارن روی خط $y = x - 1$ قرار دارد. پس داریم: $\frac{m}{2} = 2 - 1 \Rightarrow m = 2$

گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۲) تابع $f(x) = \frac{4x-m}{x+2m+1}$ به ازای چه مقدار m به تابع ثابت تبدیل می گردد؟

- ۱) $\frac{9}{4}$ ۲) $-\frac{9}{4}$ ۳) $\frac{4}{9}$ ۴) $-\frac{4}{9}$

باید $ad - bc = 0$ باشد

$$\Rightarrow 4(2m + 1) - (-m)(1) = 0$$

$$8m + 4 + m = 0 \Rightarrow 9m = -4 \Rightarrow m = -\frac{4}{9}$$

گزینه ۴ صحیح است.

مثال ۳) اگر نقطه ی $(1, -2)$ مرکز تقارن منحنی $y = \frac{5-2x}{ax+b}$ باشد $a + b$ چند است؟

- ۱) ۲ ۲) ۰ ۳) -۲ ۴) ۳

مجانِب قائم $x = -\frac{b}{a}$ و مجانب افقی $y = -\frac{2}{a}$ است.

$$-\frac{2}{a} = -2 \Rightarrow a = 1$$

$$-\frac{b}{a} = 1 \Rightarrow b = -1$$

$$\Rightarrow a + b = 0$$

گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۴) معادله ی محور تقارن قاطع تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{2x+3}{4x-2}$ کدام است؟

(۱) $y = 2x$ (۲) $y = -2x$ (۳) $y = x$ (۴) $y = -x$

این تابع نزولی است زیرا $ad - bc < 0$ است. یعنی $(2)(-2) - (3)(4) < 0$ پس محور تقارن قاطع

دارای شیب $m = +1$ است که از مرکز تقارن یعنی $w \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{vmatrix}$ میگذرد.

$$y - \frac{1}{2} = 1 \left(x - \frac{1}{2} \right) \Rightarrow y = x$$

گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۵) به ازای چه مقادیری از m نمودار تابع هموگرافیک $y = \frac{2x-(m+1)}{-x+4m}$ از ناحیه ۱ و ۳ مجانب ها

می گذرد؟

(۱) $m < \frac{1}{7}$ (۲) $m < -\frac{1}{7}$ (۳) $m > 7$ (۴) $m > -7$

باید مشتق تابع یعنی $ad - bc < 0$ منفی باشد.

$$2(4m) - (-(m+1))(-1) < 0$$

$$8m - m - 1 < 0 \Rightarrow 7m < 1 \Rightarrow m < \frac{1}{7}$$

گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۶) معکوس تابع $f(x) = \frac{3x+4}{9x-3}$ کدام است؟

$$f^{-1}(x) = \frac{3x+4}{9x-3} \quad (۲) \qquad f^{-1}(x) = \frac{4x+3}{x+9} \quad (۱)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{4x+3}{3x-9} \quad (۴) \qquad f^{-1}(x) = \frac{9x-3}{3x+4} \quad (۳)$$

چون $a + d = 0$ است پس تابع با معکوش برابر است و گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۷) تابع $y = \frac{2x-1}{x+1}$ مفروض است. مبدا مختصات را به نقطه $(-1, 2)$ منتقل می کنیم. ضابطه ی

تابع در دستگاه جدید کدام است؟

$$xy = -3 \quad (۴) \qquad xy = -4 \quad (۳) \qquad xy = 4 \quad (۲) \qquad xy = \frac{1}{2} \quad (۱)$$

می دانیم نقطه $(-1, 2)$ همان مرکز تقارن این تابع است. پس در واقع مبدا مختصات را به مرکز تقارن تابع انتقال داده ایم.

$$xy = - \left(\frac{(2)(1) - (-1)(1)}{(1)^2} \right) \Rightarrow xy = -3$$

یادآوری: $xy = - \left(\frac{ad-bc}{c^2} \right)$

گزینه ۴ صحیح است.

مثال ۸) مرکز تقارن تابع $y = \frac{x+a}{x-b} + a$ لروی نیمساز ربع دوم و چهارم قرار دارد مجموع a, b کدام است؟

$$-2 \quad (۴) \qquad -1 \quad (۳) \qquad 2 \quad (۲) \qquad 1 \quad (۱)$$

$$y = \frac{x+a+a(x-b)}{x-b} = \frac{x+a+ax-ab}{x-b} \Rightarrow y = \frac{(a+1)x+a(1-b)}{x-b}$$

$$\Rightarrow w \left| \begin{array}{c} b \\ a+1 \end{array} \right.$$

نیمساز ربع دوم و چهارم به صورت $y = -x$ است.

$$\Rightarrow a+1 = -b \Rightarrow a+b = -1$$

گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۹) دو محور تقارن منحنی نمایش تابع با ضابطه $y = \frac{ax-2}{bx-4}$ از نقطه $(2,4)$ می گذرند. مقدار

$a + b$ چند است؟

- (۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

محورهای تقارن از مرکز تقارن می گذرند. پس $W\left(\frac{4}{b}, \frac{a}{b}\right)$ همان $(2,4)$ است.

$$\frac{4}{b} = 2 \Rightarrow b = 2$$

$$\frac{a}{b} = 4 \Rightarrow \frac{a}{2} = 4 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow a + b = 10$$

گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۱۰) معادله $y = \frac{(m-1)x-2}{x-2m}$ مکان هندسی مرکز تقارن منحنی تابع $y = \frac{(m-1)x-2}{x-2m}$ کدام است؟

- (۱) $y = \frac{x}{2} - 1$ (۲) $y = \frac{x}{4} - 1$ (۳) $x = \frac{y}{2} - 1$ (۴) $x = \frac{y}{4} - 1$

مجانِب ها را بر حسب پارامتر m پیدا می کنیم.

$$y = m - 1 \quad \text{مجانِب افقی} \quad x = 2m \quad \text{مجانِب قائم}$$

حالا در هر کدام از آنها مقدار m را حساب می کنیم.

$$x = 2m \Rightarrow m = \frac{x}{2} \Rightarrow y + 1 = \frac{x}{2} \Rightarrow y = \frac{x}{2} - 1$$

$$y = m - 1 \Rightarrow m = y + 1$$

گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۱۱) مکان هندسی نقطه m به مختصات $x = \frac{2+t}{2-t}$ و $y = 1 - \frac{2t}{2+t}$ وقتی t تغییر می کند یک

منحنی است. نمودار این منحنی از کدام نواحی نمی گذرد؟

- (۱) ۳و۱ (۲) ۴و۲ (۳) ۴و۱ (۴) ۳و۲

$$y = \frac{2+t-2t}{2+t} \Rightarrow y = \frac{2-t}{2+t}, x = \frac{2+t}{2-t}$$

اگر توجه کنید x, y عکس همدند. پس داریم:

$$xy = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$$

که می دانیم نمودار $y = \frac{1}{x}$ از ناحیه ۱ و ۳ میگذرد و از ۲ و ۴ نمی گذرد.

گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۱۲) به ازای چه مقدار m نمودار تابع $y = \frac{(m-1)x-2}{x-m}$ در هر یک از شاخه هایش نزولی است؟

$$(1) \quad m < -2 \quad (2) \quad m < -1 \text{ یا } m > 3 \quad (3) \quad m < -1 \text{ یا } m > 2 \quad (4) \quad -1 < m < 2$$

$$y' < 0 \Rightarrow -m(m-1) - (-2)(1) < 0$$

$$-m^2 + m + 2 < 0 \Rightarrow m^2 - m - 2 > 0$$

تعیین علامت

$$\longrightarrow m < -1 \cup m > 2$$

گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۱۳) به ازای چه مقدار m نمودار $y = \frac{mx+1}{x+m}$ در هر یک از شاخه هایش صعودی است و مرکز تقارن

آن در ناحیه ی دوم محورهای مختصات قرار دارد؟

$$(1) \quad m > -1 \quad (2) \quad m < -1 \quad (3) \quad m > 0 \quad (4) \quad m > 1$$

$$ad - bc > 0 \Rightarrow m^2 - 1 > 0 \Rightarrow m > 1 \text{ یا } m < -1 \quad (I)$$

میدانیم در ربع دوم $x < 0, y > 0$ است

مرکز تقارن $w(-m, m)$

$$\Rightarrow -m < 0 \Rightarrow m > 0 \quad (II)$$

$$(I) \cap (II) \Rightarrow m > 1$$

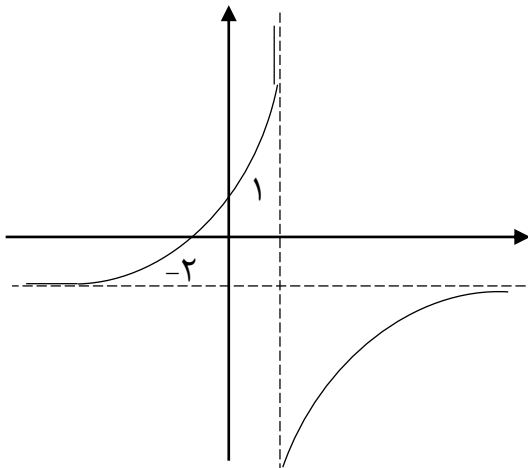
گزینه ۴ صحیح است.

مثال ۱۴) اگر تابع f یک تابع هموگرافیک باشد $f(0) = 1$ و $f(-2) = 0$ و $f'(2) = 3$ آنگاه

نمودار این تابع از کدام نواحی محورهای مختصات می گذرد؟

$$(1) \text{ اول و سوم} \quad (2) \text{ دوم و چهارم} \quad (3) \text{ اول و دوم و چهارم} \quad (4) \text{ هر ۴ ناحیه}$$

توجه کنید که تابع محورهای مختصات را در نقاط $x = -2$ و $y = 1$ قطع می کند و همچنین تابع در هر یک از شاخه هایش صعودی است.



بنابراین نمودار تقریبی آن به صورت روبروست و از هر ۴ ناحیه عبور می کند.

گزینه ۴ صحیح است.

مثال ۱۵) نمودار تابع $y = \frac{x+a}{x+b}$ و خط $x = y - 2$ همدیگر را روی محورهای قطع می کنند. حاصل $a \times b$ کدام است؟

۲ (۴)

۴ (۳)

۱ (۲)

۳ (۱)

نقطه تلاقی روی محور y ها $A \left| \begin{matrix} \cdot \\ 2 \end{matrix} \right.$ $x = 0 \Rightarrow y = 2$

نقطه تلاقی روی محور x ها $B \left| \begin{matrix} -2 \\ \cdot \end{matrix} \right.$ $y = 0 \Rightarrow x = -2$

که باید در تابع هموگرافیک صدق کند.

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{a}{b} = 2$$

$$y = 0 \Rightarrow x = -a = -2 \Rightarrow a = 2, b = 1$$

$$\Rightarrow a.b = 2$$

گزینه ۴ صحیح است.

مثال ۱۶) مجانب های نمودار تابع $y = \frac{2x-1}{x+3}$ خط به معادله $y = x + 3$ را در ۲ نقطه M, N قطع

می کنند. اندازه MN کدام است؟

$\sqrt{11}$ (۴)

$\sqrt{6}$ (۳)

$\sqrt{10}$ (۲)

$\sqrt{8}$ (۱)

$$x = -3, \quad y = 2$$

$$x = -3 \Rightarrow \xrightarrow{\text{تلاقی با خط}} y = 0 \quad M \begin{vmatrix} -3 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$y = 2 \Rightarrow \xrightarrow{\text{تلاقی با خط}} x = -1 \quad N \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow MN = \sqrt{(-3 - (-1))^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{8}$$

گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۱۷ نمودارهای توابع هموگرافیک $y = \frac{x}{x-1}$ و $y = \frac{x}{x-2}$:

(۱) همدیگر را قطع نمی کنند

(۲) فقط در یک نقطه متقاطع اند

(۳) در ۲ نقطه متقاطع اند

(۴) در ۳ نقطه متقاطع اند

$$\frac{x}{x-1} = \frac{x}{x-2} \Rightarrow x(x-2) = x(x-1)$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x = x^2 - x \Rightarrow x = 0$$

فقط در نقطه ای با طول صفر متقاطع اند.

گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۱۸ خط به معادله $y = mx$ نمودار تابع هموگرافیک با ضابطه $y = \frac{1+x}{1-x}$ را در بازه (a, b) قطع نمی کند. (این بازه بزرگ ترین بازه ی ممکن است) حاصل $b + a$ کدام است؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

$$mx = \frac{1+x}{1-x} \Rightarrow mx(1-x) = 1+x \Rightarrow -mx^2 + (m-1)x - 1 = 0$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow (m-1)^2 - 4(-m)(-1) < 0 \Rightarrow m^2 - 6m + 1 < 0$$

$$3 - 2\sqrt{2} < m < 3 + 2\sqrt{2} \Rightarrow b + a = 6$$

گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۱۹ اگر قرینه ی نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور x ها بر نمودار تابع با ضابطه ی $y = \frac{1}{x}$ منطبق باشد مقدار $f(3)$ چند است؟

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $-\frac{1}{3}$

برای قرینه نسبت به محور x ها باید y را به $-y$ تبدیل کنیم. پس تابع $f(x)$ تابعی است که وقتی در آن y را به $-y$ تبدیل می کنیم تابع به $y = \frac{1}{x}$ تبدیل می شود. بنابراین تابع $f(x)$ به صورت $y = \frac{1}{x}$ است.

یا به عبارتی همان $y = -\frac{1}{x}$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x} \Rightarrow f(3) = -\frac{1}{3}$$

گزینه ۴ صحیح است.

مثال ۲۰ منحنی نمایش کدام تابع قرینه منحنی نمایش تابع $y = \frac{x+1}{x-1}$ نسبت به نیمساز ناحیه اول است؟

- (۱) $y = \frac{x-1}{x+1}$ (۲) $x = \frac{y+1}{y-1}$ (۳) $y = \frac{x-1}{-x+1}$ (۴) $x = \frac{y-1}{y+1}$

در تابع هموگرافیک $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ اگر $a + d = 0$ باشد معکوس آن با خود تابع برابر است.

$$y = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow x = \frac{y+1}{y-1}$$

گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۲۱ محورهای مختصات را به موازات خود انتقال می دهیم تا معادله ی تابع هموگرافیک $y = \frac{2x-3}{x+1}$

به صورت $xy = k$ نوشته شود. k کدام است؟

- (۱) -۵ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) -۴

اگر مبدا مختصات را به مرکز تقارن تابع منتقل کنیم به صورت $xy = -\left(\frac{ad-bc}{c^2}\right)$ در می آید.

$$\Rightarrow xy = -\left(\frac{2(1) - (-3)(1)}{(1)^2}\right) = -5 \Rightarrow k = -5$$

گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۲۲ اگر محورهای مختصات را به موازات خود به نقطه $(3, \frac{1}{2})$ منتقل کنیم صورت جدید معادله ی

$$2xy = x + 6y + 5 \text{ به چه صورت خواهد بود؟}$$

$$xy = 4 \quad (4) \quad xy = -3 \quad (3) \quad xy = 3 \quad (2) \quad xy = -4 \quad (1)$$

$$w\left(3, \frac{1}{2}\right) \quad 2xy - 6y = x + 5 \Rightarrow y(2x - 6) = x + 5 \Rightarrow y = \frac{x + 5}{2x - 6}$$

$$xy = -\left(\frac{ad - bc}{c^2}\right) = -\left(\frac{-6 - 10}{4}\right) = 4$$

گزینه ۴ صحیح است.

مثال ۲۳ تابع با ضابطه ی $y = ax + b + \frac{2x^2}{x+1}$ تابع هموگرافیکی است که محور x ها را در نقطه $x = 1$ قطع می کند. b کدام است؟

$$-2 \quad (4) \quad 2 \quad (3) \quad -1 \quad (2) \quad 1 \quad (1)$$

$$A \Big|_1 \Rightarrow 0 = a + b + 1 \Rightarrow a + b = -1$$

$$y = \frac{(ax + b)(x + 1) + 2x^2}{x + 1} \Rightarrow y = \frac{ax^2 + ax + bx + b + 2x^2}{x + 1}$$

$$y = \frac{(a + 2)x^2 + (a + b)x + b}{x + 1} \Rightarrow a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2$$

$$\Rightarrow y = \frac{(b - 2)x + b}{x + 1} \stackrel{(1,0)}{\Rightarrow} b - 2 + b = 0 \Rightarrow b = 1$$

گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۲۴ به ازای کدام مقادیر a, b تابع با ضابطه ی $y = ax + b + \frac{2x^2}{x-1}$ یک تابع هموگرافیک است

که مرکز تقارن آن روی نیمساز ربع دوم قرار دارد؟

$$a = 2, b = 1 \quad (4) \quad b = 1, a = -2 \quad (3) \quad a = 2, b = -1 \quad (2) \quad a = -2, b = -3 \quad (1)$$

$$y = \frac{(ax + b)(x - 1) + 2x^2}{x - 1} = \frac{ax^2 - ax + bx - b + 2x^2}{x - 1}$$

$$\Rightarrow y = \frac{(a + 2)x^2 + (b - a)x - b}{x - 1}$$

$$a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow y = \frac{(2 + b)x - b}{x - 1}$$

روی نیمساز ۲ \rightarrow مرکز تقارن $(1, 2 + b)$

$$\Rightarrow y + x = 0 \Rightarrow 2 + b + 1 = 0 \Rightarrow b = -3$$

گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۲۵ اگر خطوط $x + y = 5$ و $x = y + 1$ محورهای تقارن تابع $y = \frac{ax+5}{bx+3}$ باشد a, b کدام

است؟

- ۳ (۱) -۳ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴)

محل تلاقی محورهای تقارن همان مرکز تقارن است.

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 3, y = 2$$

$$w\left(-\frac{3}{b}, \frac{a}{b}\right) \Rightarrow \begin{aligned} -\frac{3}{b} = 3 &\Rightarrow b = -1 \\ \frac{a}{b} = 2 &\Rightarrow \frac{a}{-1} = 2 \Rightarrow a = -2 \\ &\Rightarrow ab = 2 \end{aligned}$$

گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۲۶ اگر مرکز تقارن تابع $y = \frac{ax-1}{bx+1}$ بر نقطه ی عطف تابع درجه ی سوم $y = x^3 - 3x^2$

منطبق باشد حاصل $a - b$ کدام است؟

- ۲ (۴) -۲ (۳) ۳ (۲) -۳ (۱)

مرکز تقارن تابع درجه سوم همان نقطه ی عطف آن است.

$$y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow y'' = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow y = (1)^3 - 3(1)^2 \Rightarrow y = -2 \quad I(1, -2)$$

از طرفی مرکز تقارن تابع هموگرافیک $W\left(-\frac{1}{b}, \frac{a}{b}\right)$ است. و چون بر هم منطبق اند

$$\begin{aligned} -\frac{1}{b} = 1 &\Rightarrow b = -1 \\ \frac{a}{b} = -2 &\Rightarrow a = 2 \Rightarrow a - b = 3 \end{aligned}$$

گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۲۷ اگر مرکز تقارن منحنی $y = \frac{x-2}{m(x-m)}$ روی نیمساز ربع اول باشد، m کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۳ (۳) -۳ (۴) ۱

$$y = \frac{x-2}{mx-m^2} \longrightarrow mx - m^2 = 0 \Rightarrow x = m, y = \frac{1}{m}$$

$$w\left(m, \frac{1}{m}\right) \xrightarrow{\text{نیمساز ربع اول}} y = x \Rightarrow \frac{1}{m} = m \Rightarrow m = \pm 1$$

چون در ربع اول x, y مثبت اند $\Leftarrow m = 1$ قبول است.

گزینه ۴ صحیح است.

مثال ۲۸ خط $y = x + 4$ محور تقارن منحنی $y = \frac{ax}{x-1}$ است. مقدار a کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

مختصات مرکز تقارن در معادلات محورهای تقارن صدق می کند.

$$w(1, a) \Rightarrow a = 1 + 4 \Rightarrow a = 5$$

گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۲۹ مرکز تقارن منحنی $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{y-b} = 1$ کدام است؟

$$(a-1, b+1) \quad (2) \qquad (a+1, b+1) \quad (1)$$

$$(a+1, b-1) \quad (4) \qquad (a-1, b-1) \quad (3)$$

$$\frac{1}{y-b} = 1 - \frac{1}{x-a} \Rightarrow \frac{1}{y-b} = \frac{x-a-1}{x-a}$$

$$\Rightarrow y-b = \frac{x-a}{x-a-1} \Rightarrow y = \frac{x-a}{x-a-1} + b$$

$$\Rightarrow y = \frac{x-a+b(x-a-1)}{x-a-1} \Rightarrow y = \frac{(b+1)x-ab-b-a}{x-a-1}$$

$$\Rightarrow w(a+1, b+1)$$

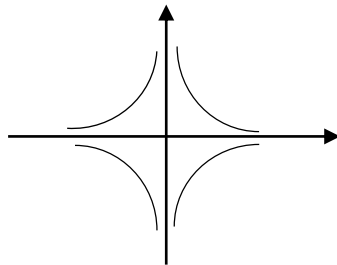
گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۳۰ تابع $F(x) = \frac{5x-1}{3x-2}$ چند نقطه ی عطف دارد؟

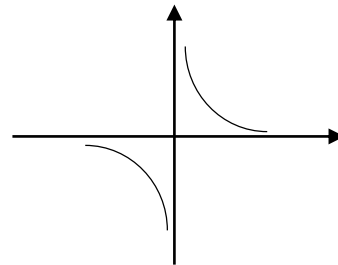
- ۲ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ ندارد

تابع هموگرافیک نقطه ی عطف ندارد. گزینه ۴ صحیح است.

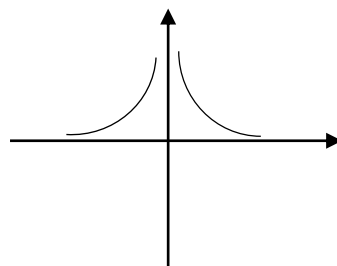
مثال ۳۱ نمودار $|y| = \frac{1}{\sqrt{x^2}}$ کدام است؟



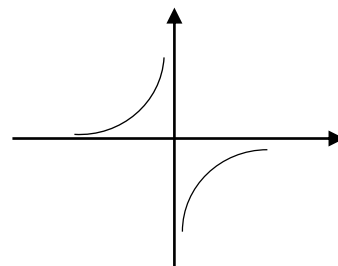
(۳)



(۱)



(۴)



(۲)

$$|y| = \frac{1}{|x|} \Rightarrow |x||y| = 1 \Rightarrow |xy| = 1 \Rightarrow xy = \pm 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}, y = -\frac{1}{x} \Rightarrow$$

گزینه ۳ صحیح است.

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

$$x = -\frac{d}{c} \Rightarrow x = -\frac{d}{c} = 1 \Rightarrow c + d = 0 \Rightarrow c = -d$$

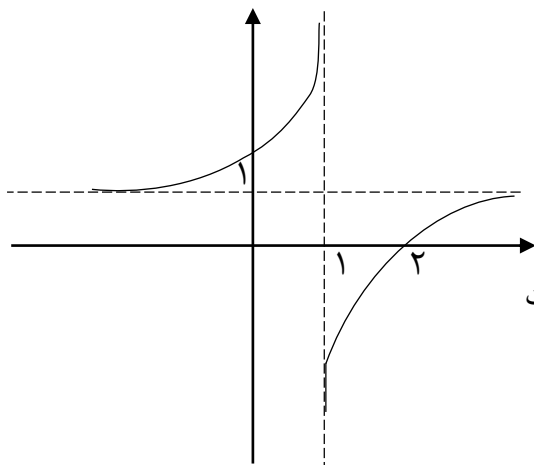
$$y = \frac{a}{c} = 2 \Rightarrow a = 2c \Rightarrow a = -2d$$

$$1 \in f \Rightarrow 1 = \frac{b}{d} \Rightarrow b = d$$

$$\text{محل تلاقی با محور طولها} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a} = -\left(\frac{d}{-2d}\right) = \frac{1}{2}$$

گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۳۵ اگر نمودار $y = \frac{ax+b}{x+c}$ به صورت زیر باشد حاصل $a - b - c$ کدام است؟



۵ (۲)

۳ (۱)

۴ (۴)

۱ (۳)

طبق شکل مجانب قائم $x = 1$ و مجانب افقی $y = 1$ است

و نمودار از $A(2,0)$ می گذرد.

$$1 + c = 0 \Rightarrow c = -1$$

$$y = a \Rightarrow a = 1$$

$$A(2,0) \Rightarrow 0 = \frac{2 + b}{2 - (-1)} \Rightarrow b = -2$$

$$a - b - c = 1 - (-2) - (-1) = 4$$

گزینه ۴ صحیح است.

مثال ۳۶ خط $y = mx$ به ازای بعضی از مقادیر منحنی $y = \frac{x+1}{x-1}$ را در نقطه A, B قطع می کند.

مکان هندسی وسط AB کدام گزینه است؟

$$y = \frac{x}{2x+1} \quad (۴) \quad y = \frac{x}{2x-1} \quad (۳) \quad y = \frac{2x}{2x-1} \quad (۲) \quad y = \frac{2x-1}{x+1} \quad (۱)$$

$$\frac{x+1}{x-1} = mx \Rightarrow mx^2 - mx = x+1 \Rightarrow mx^2 - (m+1)x - 1 = 0$$

می دانیم جمع دو ریشه ی معادله ی درجه دوم $-\left(\frac{b}{a}\right)$ است و چون x وسط آنهاست پس $x = -\left(\frac{b}{2a}\right)$ است.

$$x = \frac{m+1}{2m} \Rightarrow m = \frac{1}{2x-1} \Rightarrow y = mx = \frac{x}{2x-1}$$

گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۳۷ تابع $y = \frac{2x+m+3}{x-m}$ در فاصله ی $x > 2$ اکیداً نزولی است. حدود m کدام است؟

$$-1 < m \leq 3 \quad (۴) \quad -1 < m < 1 \quad (۳) \quad -1 < m \leq 2 \quad (۲) \quad 1 < m < 2 \quad (۱)$$

مجانب قائم تابع $x = m$ است که نباید در فاصله ی $x > 2$ قرار بگیرد پس حتماً $m \leq 2$ است. از طرفی

مشتق تابع باید منفی باشد تا نزولی اکید باشد.

$$y' = \frac{-2m - m - 3}{(x-m)^2} < 0$$

$$\Rightarrow -3m - 3 < 0 \Rightarrow m > -1$$

اشتراک این ۲ فاصله: $-1 < m \leq 2$ **گزینه ۲ صحیح است.**

مثال ۳۸ نمودار $y = \left| \frac{x}{x-1} \right|$:

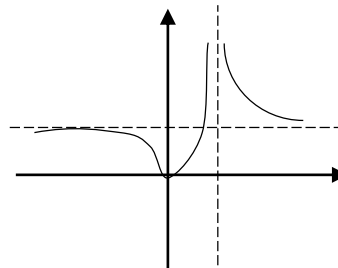
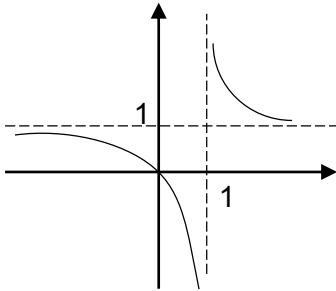
(۱) فاقد اکسترمم است (۲) دارای ۲ ماکزیمم است

(۳) دارای ۱ مینیمم است (۴) دارای ۱ ماکزیمم است

ابتدا نمودار $y = \frac{x}{x-1}$ را رسم می کنیم و سپس قسمت زیر محور x ها را به بالا منتقل می کنیم.

$$y' = \frac{-1}{(x-1)^2} \text{ و } x = 1 \text{ (مجانب قائم) و } y = 1 \text{ (مجانب افقی)}$$

نقطه تلاقی با محورها $\left| \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \end{matrix} \right.$ است.



نمودار دارای یک نقطه Min است و گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۳۹ در مورد تابع $y = \frac{3x-1}{x-2}$ کدام مورد نادرست است؟

(۱) مرکز تقارن آن در ناحیه اول است

(۲) ۲ مجانب دارد

(۴) ۲ اکسترمم دارد

(۳) نقطه ی عطف ندارد

تابع هموگرافیک نقطه ی عطف ندارد. گزینه ۴ نادرست است.

مثال ۴۰ عرض از مبدا محور تقارن منحنی $y = \frac{3x+1}{x-2}$ با شیب منفی کدام است؟

(۴) -۳

(۳) ۵

(۲) ۳

(۱) ۴

$$w(2,3), m = -1 \Rightarrow y - 1 = -1(x - 2)$$

$$y = -x + 5$$

برای تعیین عرض از مبدا به x مقدار صفر می دهیم. $x = 0 \Rightarrow y = 5$

گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۴۱ نمایش هندسی تابع $y = \frac{x-1}{x-1}$ در کدام نواحی محورهای مختصات قرار دارد؟

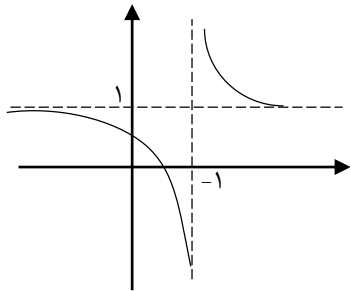
(۴) ۱ و ۲ و ۴

(۳) هر ۴ ربع

(۲) ۲ و ۳ و ۴

(۱) ۱ و ۲ و ۳

مجانب ها $x = 1, y = 1$ می باشند و $y' = \frac{-1}{(x-1)^2}$ است یعنی هرکدام از شاخه ها نزولی اند و



$A(0, \frac{1}{2}), B(\frac{1}{2}, 0)$ محل تلاقی با محورهای است.

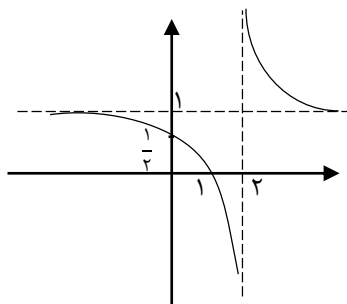
پس نمودار از نواحی ۱، ۲ و ۴ می گذرد.

گزینه ۴ صحیح است.

مثال ۴۲) نمودار $y = \left| \frac{x-1}{x-2} \right|$:

- (۱) فقط یک مینیمم نسبی دارد
 (۲) فقط یک ماکزیمم نسبی دارد
 (۳) مینیمم و ماکزیمم نسبی ندارد
 (۴) ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی دارد

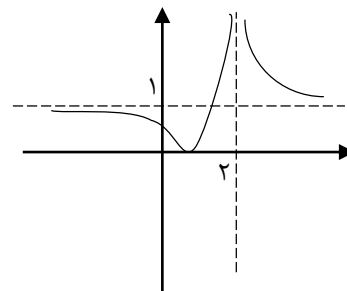
$x = 2$ مجانب قائم و $y = 1$ مجانب افقی است $\Rightarrow y = \frac{x-1}{x-2}$



هر شاخه نزولی است $\Rightarrow y' = \frac{-1}{(x-2)^2} < 0$

محل تلاقی با محورهای است $A(0, \frac{1}{2}), B(0, 1)$

حالا قسمت های زیر محور را به بالا منتقل می کنیم.



پس نمودار فقط یک مینیمم نسبی دارد. **گزینه ۱ صحیح است.**