

۳- تعداد رابطه‌های تعریف شده روی: 2^n A **ویژگیهای رابطه:** فرض کنید A مجموعه‌ای غیر تهی و R رابطه‌ای روی A باشد.

۱) $\forall a \in A \Rightarrow aRa$ بازتابی

۲) $aRb \Rightarrow bRa$ تقارنی

۳) $\begin{cases} aRb \Rightarrow bRa \\ aRb, bRa \Rightarrow a=b \end{cases}$ پادتقارنی

۴) $aRb, bRc \Rightarrow aRc$ تراییبی

هم ارزی: رابطه دارای خواص بازتابی، تقارنی، تراییبی

توقیف: رابطه دارای خواص بازتابی، پادتقارنی، تراییبی

نکته ۱: اگر R_1 و R_2 متقارن باشند آنگاه:

$R_1 - R_2, R_2 - R_1, R_1 \cap R_2, R_1 \cup R_2$ متقارن هستند.

نکته ۲: اگر R_1 و R_2 بازتابی $R_1 \cap R_2$ و $R_1 \cup R_2$ بازتابی

ولی $R_1 - R_2, R_2 - R_1$ بازتابی نیست.

نکته ۳: R_1 و R_2 تراگذاری آنگاه $R_1 \cap R_2$ تراگذاری و $R_1 \cup R_2$ و $R_1 - R_2$ و $R_2 - R_1$ تراگذاری نیست.

وارون رابطه (R^{-1}): از تعویض مؤلفه‌های اول و دوم رابطه R به دست می‌آید.

$$R^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in R\}$$

$$(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$$

$$(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$$

$$(R_1 - R_2)^{-1} = R_1^{-1} - R_2^{-1}$$

تعریف افزاز: A و $A \neq \emptyset$ به n زیر مجموعه A_1 و A_2 و ... و A_n افزاز شده است اگر: الف- برای هر $1 \leq i \leq n$ $A_i \neq \emptyset$ ب- برای هر $i \neq j$ $A_i \cap A_j = \emptyset$

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i = A \text{ - ج}$$

هر رابطه هم‌ارزی روی یک مجموعه آن مجموعه را به زیر مجموعه‌های مجزا که هر یک از آنها دسته یا کلاس هم‌ارزی نامیده می‌شود تقسیم می‌کند. دسته هم‌ارزی a را با $[a]$ نمایش می‌دهیم.

$$[a] = \{x | xRa\}$$

- $A = \{a, b, c, d\}$ چند افزاز دارد؟

۱- افزاز به زیر مجموعه‌های یک عضوی

$$= \binom{4}{1} = 4$$

$$= \frac{1}{2} \binom{4}{2} = 3 \quad \text{۱۴} = ۱ + ۳ + ۴ + ۶ = \text{کل افزاز}$$

$$= \binom{4}{2} = ۶ \quad \text{افراز به یک دو عضوی و دو یک عضوی}$$

گراف متناظر با رابطه

اگر A یک مجموعه‌ی متناهی و R یک رابطه روی A باشد، به R گراف جهت‌دار G را به صورت زیر نسبت می‌دهیم. رأسهای G اعضای A هستند و رأس a به رأس b متصل است هرگاه aRb

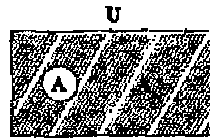
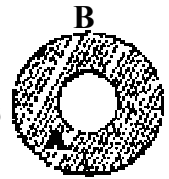
تعیین ویژگی‌های رابطه با گراف جهت‌دار:

۱- **بازتابی:** گراف جهت‌دار در هر رأس دارای یک طوقه باشد.

۲- **متقارن:** اگر از a به b یالی وجود دارد، از b به a نیز یالی وجود داشته باشد.

$$۶) \begin{cases} A - A = \emptyset \\ A - \emptyset = A \end{cases}$$

$$۷) A \subseteq B \Rightarrow \begin{cases} A - B = \emptyset \\ B - A = \text{قسمت سایه خورده} \end{cases}$$



متمم یک مجموعه (A'): $U - A = A'$

نتایج:

$$۱) A = A'$$

$$۲) \phi' = U, U' = \phi$$

$$۳) A = B \Leftrightarrow A' = B'$$

$$۴) A - B = A \cap B'$$

$$۵) A \Rightarrow B \text{ و } B \Rightarrow A \Rightarrow A \subseteq B$$

$$۶) (A \cup B)' = A' \cap B', (A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$۷) A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$$

$$۸) A \cap A' = \phi, A \cup A' = U$$

$$۹) A \subseteq B \Rightarrow A \cap B' = \phi, A' \cup B = U$$

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$$

$$A - (A \cap B) = A - B$$

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

$$(B \cup C) - A = (B - A) \cup (C - A)$$

$$(B \cap C) - A = (B - A) \cap (C - A)$$

$$A - B = B - A \Leftrightarrow A = B$$

تعریف حاصلضرب دکارتی:

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

$$A \times A = A^2 \Rightarrow R \times R = R^2$$

نتایج:

$$۱) A \times B \neq B \times A$$

$$۲) A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$$

$$۳) A \times \phi = \phi \times A = \phi$$

$$۴) \begin{cases} A \subseteq B \\ C \subseteq D \end{cases} \Rightarrow A \times C \subseteq B \times D$$

$$۵) \begin{cases} A = B \\ C = D \end{cases} \Rightarrow A \times C = B \times D$$

$$۶) A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$۷) A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$۸) A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

$$۹) (A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times C) \cup (B \times D)$$

$$۱۰) (A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B)^2$$

$$۱۱) n(A \times B) = n(A)n(B)$$

$$۱۲) n[(A \times B) \cup (B \times A)] = 2n(A)n(B) - n[(A \cap B)^2]$$

$$۱۳) n(A^2 - B^2) = n(A)^2 - n[(A \cap B)^2]$$

رابطه (R): هر زیر مجموعه از $A \times B$ رابطه‌ای از A به B است.

اگر A یک مجموعه‌ی n عضوی و B ، m عضوی باشد آنگاه:

۱- $A \times B$ دارای $n \times m$ عضو است.

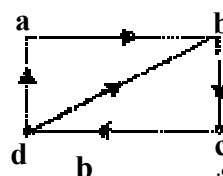
۲- تعداد رابطه‌ها از A به B : $2^{n \times m}$

۳- پادتقارنی: اگر از a به b یالی وجود دارد، از b به a یالی وجود نداشته باشد.

۴- ترایایی: اگر از a به b و b به c یالی وجود دارد، از a به c نیز یالی وجود داشته باشد.

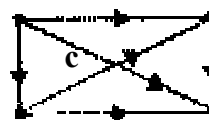
- آیا رابطه متناظر با گرافهای زیر روی مجموعه $A = \{a, b, c, d\}$ ترایایی است ولی متقارن نیست؟

ترایایی و متقارن نیست $bRc, cRd \Rightarrow bRd$

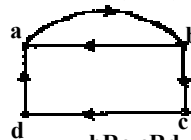


ترایایی است و متقارن نیست.

$bRc, cRd \Rightarrow bRd$



ترایایی و متقارن نیست $bRc, cRd \Rightarrow bRd$



ترایایی و متقارن نیست $bRc, cRd \Rightarrow bRd$



تعیین ویژگی‌های رابطه از روی ماتریس:

۱- بازتابی $I_n \leq M$

۲- تقارنی $M = M^T$

۳- ترایایی $M^2 \leq M$

۴- پادتقارنی $M \wedge M^T \leq I_n$ (\wedge ضرب نظیر به نظیر درایه‌ها)
اگر A یک مجموعه n عضوی باشد و R رابطه‌ای روی آن آنگاه:

۱- تعداد روابط بازتابی: 2^{n^2-n}

۲- تعداد روابط تقارنی: $2^{n^2-n} \times 2^{\frac{n^2-n}{2}} = 2^{\frac{n^2+n}{2}}$

۳- تعداد روابط پادتقارنی: $2^{n^2-n} \times 2^{\frac{n^2-n}{2}} = 2^{\frac{n^2+n}{2}}$

۴- تعداد روابط تقارنی و بازتابی: $2^{\frac{n^2+n}{2}}$

۶- تعداد روابط تقارنی و پادتقارنی: 2^n

۷- تعداد روابط تقارنی پادتقارنی و بازتابی: ۱ که همان ماتریس I_n می‌باشد.

نکاتی برای حل مسائل به شیوه تحلیلی:

- ۱- برای آنکه رابطه بازتابی باشد کلیه درایه‌های قطر اصلی باید ۱ باشد.
- ۲- برای تقارنی بودن هر زوج خانه‌ای که روی قطر اصلی قرار ندارند و نسبت به آن متساوی‌الفاصله هستند می‌توانند زوج مرتب‌های $(1,1)$ و $(0,0)$ را اختیار کنند.

۳- برای پادتقارنی بودن هر زوج خانه‌ای که روی قطر اصلی قرار ندارد و نسبت به آن متساوی‌الفاصله هستند می‌توانند زوج‌های مرتب‌های $(0,0)$ و $(0,1)$ را اختیار کنند.

اصول شمول و عدم شمول (۱)

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| -$$

$$|A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

- چند عدد طبیعی سه رقمی و اول نسبت به ۶۰ وجود دارد؟

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

برای آنکه عدد نسبت به ۶۰ اول باشد باید بر ۲ و ۳ و ۵ بخش پذیر نباشد یعنی تعداد اعداد اول نسبت به $2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma$ با تعداد اعداد اول نسبت به $2 \times 3 \times 5 = 30$ برابر است.

A_1 و A_2 و A_3 به ترتیب مجموعه سه رقمی‌های مضرب ۲، ۳ و ۵:

$$|A_1| = \left\lfloor \frac{900}{2} \right\rfloor = 450 \quad |A_2| = \left\lfloor \frac{900}{3} \right\rfloor = 300 \quad |A_3| = \left\lfloor \frac{900}{5} \right\rfloor = 180$$

$$|A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \frac{900}{6} \right\rfloor = 150 \quad |A_1 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{900}{10} \right\rfloor = 90$$

$$|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{900}{15} \right\rfloor = 60 \quad |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{900}{30} \right\rfloor = 30$$

$$|A_1 \cap A_2 \cup A_3| = 900 - 450 - 300 - 180 + 150 + 90 + 60 - 30 = 240$$

نکته ۱: تعداد توابع از یک مجموعه m عضوی به یک مجموعه n عضوی برابر است با: n^m $3^4 = 81$ تعداد کل توابع

فرض می‌کنیم: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ مجموعه توابعی است که از A به $B - \{i\}$ تعریف نشده باشند.

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^4$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |s| - |A_1| - |A_2| - |A_3|$$

$$+ |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| -$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 2^4 - 3 \times 2^4 + 3 \times 1 - 0 = 36$$

نکته ۲: تعداد توابع پوشا از مجموعه m عضوی B به n عضوی A با شرط $n \leq m$.

$$n^m - \binom{n}{1}(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} 1^m$$

نکته ۳: تعداد تابع‌های پوشا و یک به یک روی مجموعه n عضوی A برابر است با: $n!$

معادله سیاله (۱)

توزیع n شی در k جعبه:

اگر k جعبه داشته باشیم و بخواهیم n شی را داخل جعبه‌ها قرار دهیم به طوری که امکان خالی بودن بعضی از جعبه‌ها وجود داشته باشد تمام

$$N = \binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1} \quad \text{حالات ممکن عبارت است از:}$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n \quad \text{تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادله}$$

$$\binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k} \quad \text{تذکر: } n \in \mathbb{N}$$

تذکر: تعداد جوابهای طبیعی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر است با: $\binom{n-1}{k-1}$

حال به بررسی انواع مسائل مختلف در این مورد می‌پردازیم:

نوع ۱: تعداد جوابهای صحیح معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ به طوری که

$$i \in \{1, 2, 3\} \text{ باشد. } 0 \leq x_i \leq 2$$

جایگشت

فرض کنید n شی متمایز داریم. هر یک از حالات کنار هم قرار گرفتن n شی را یک جایگشت از آن n شی می‌نامیم. تعداد جایگشت‌های n شی متمایز برابر با $n!$ است و با P_n نشان داده می‌شود.

$$P_n = n!$$

نکته (۱): جایگشت روی دایره (n شی متمایز): $(n-1)!$ حالت m نفر به چند حالت می‌توانند دور یک میز گرد بنشینند به طوری که دوم شخص a و b کنار هم باشند؟

a و b را یک نفر در نظر می‌گیریم پس $(m-2)!$ حالت وجود دارد و 2 نفر a و b نیز به $2!$ طریق جابه‌جا می‌شوند پس کل حالات برابر $2(m-2)!$ می‌شود.

جایگشت تکراری: هرگاه n شی که در آن r_1, r_2, r_3, \dots شی تکراری باشد و بخواهیم در یک ردیف کنار هم قرار دهیم از فرمول

$$\frac{n!}{r_1! \times r_2! \times r_3! \times \dots}$$
 استفاده می‌کنیم.

تذکره: اگر n شی را بخواهیم در k جعبه توزیع کنیم به طوری که در جعبه اول n_1 شی و در جعبه دوم n_2 شی و... در جعبه k ام n_k شی

$$N = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$$
 باشد آنگاه:

ترکیب

هرگاه در انتخاب r شی از n شی ترتیب آنها مهم نباشد از ترکیب استفاده می‌کنیم.

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

- به چند طریق می‌توان ۴ کتاب از ۷ کتاب سال سوم و ۳ کتاب از ۵ کتاب سال چهارم را یک در میان در قفسه کتاب چیند؟

$$\binom{7}{4} \times 4! + \binom{5}{3} \times 3!$$

خواص عمل ترکیب:

$$1 - \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

$$2 - \binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} \quad \text{قانون پاسکال:}$$

$$3 - \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$$

$$4 - \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

فضای نمونه‌ای (S): پیوسته گسسته

گسسته: مجموعه‌ای متناهی و یا نامتناهی ولی قابل شمارش.

پیوسته: مجموعه‌ای نامتناهی و غیرقابل شمارش و قابل اندازه‌گیری به صورت بازه‌هایی از اعداد حقیقی یا مساحت اشکال و احجام هندسی.

پیشامد و عملیات بر روی آن

پیشامد: هر زیر مجموعه از فضای نمونه‌ای S را یک پیشامد می‌گویند.

(۱) ϕ : پیشامد غیر ممکن

(۲) S : پیشامد حتمی

(۳) $A \cap B$: هم A و هم B رخ دهد.

(۴) $A \cup B$: حداقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد.

(۵) $A \cap A'$: رخ ندهد.

(۶) $A - B$: A رخ دهد ولی B رخ ندهد که معادل $A \cap B'$ است.

$$|S| = \binom{3+4-1}{4} = 15$$

تعداد جوابهایی که در محدوده $0 \leq x_i \leq 2$ نیستند را بدست می‌آوریم:

$$A_i = \{x_i \geq 3\} \quad A_1 = \{x_1 \geq 3\} \Rightarrow x_1 = y_1 + 3$$

$$\Rightarrow y_1 + x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow |A_1| = \binom{3}{1} \quad |A_2| = |A_3| = 3$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

نوع ۲: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ با

$$\text{شرط } x_2 \geq 4, x_1 > 2$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 \geq 4 &\Rightarrow y_1 + 4 \geq 4 \Rightarrow y_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 4 &\Rightarrow y_2 + 4 \geq 4 \Rightarrow y_2 \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad \binom{4+4-1}{4} = \binom{7}{4} = 35$$

$$\Rightarrow y_1 + y_2 + x_3 + x_4 = 4$$

نوع ۲: تعداد جوابهای صحیح معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 14$ به طوری که $1 \leq x_i \leq 5$ ($i = 1, 2, 3, 4$) باشد؟

$$x_i = y_i + 1 \Rightarrow 0 \leq y_i \leq 4, y_1 + y_2 + y_3 = 11$$

$$0 \leq 4 - y_i \leq 4 \Rightarrow z_i \leq 4, y_i = 4 - z_i$$

$$4 - z_1 + 4 - z_2 + 4 - z_3 = 11 \Rightarrow z_1 + z_2 + z_3 = 1, 0 \leq z_i \leq 4$$

$$\text{تعداد جوابها} = \binom{1+3-1}{1} = 3$$

نوع ۳: نامعادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 9$ دارای چند جواب صحیح نامنفی می‌باشد؟

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 9 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9 - y$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + y = 9 \quad \binom{9+6-1}{9} = \binom{14}{9} = \binom{14}{5}$$

نوع ۴: نامعادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 < 7$ دارای چند جواب صحیح نامنفی می‌باشد؟

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 6 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 - y \Rightarrow \binom{10}{6}$$

از تجزیه‌ی عدد طبیعی n به عوامل اول $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ تعداد

اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی n که نسبت n اولند:

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

نکته ۱: اگر n عدد اول باشد $\varphi(n) = n - 1$

نکته ۲: اگر $n = P_1 P_2 \dots P_k$ آنگاه

$$\varphi(n) = (P_1 - 1)(P_2 - 1) \dots (P_k - 1)$$

نکته ۳: $\varphi(mn) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$ (m, n)

نکته ۴: m و n عدد طبیعی به طوری که تمام عوامل عدد m یک شمارنده n نیز باشند آنگاه $\varphi(mn) = m\varphi(n)$

اصل ضرب

اصل ضرب: اگر عملی به n_1 طریق، عمل دومی به n_2 طریق و... عمل k امی به n_k طریق صورت پذیرد، این عمل با هم به n_1, n_2, \dots, n_k طریق صورت می‌گیرد.

دو پیشامد ناسازگار: A و B را ناسازگار گویند هرگاه $A \cap B = \emptyset$
 - پیشامدهای A و B از فضای نمونه‌ای یک آزمایش مفروضند، آنگاه داریم:

(الف) $A \cap B' \cap C' = \emptyset$ فقط پیشامد A رخ دهد.

(ب) $A \cup B \cup C$ حداقل یکی از پیشامدها رخ دهد.

(ج) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$ حداقل دو تا از پیشامدها رخ دهد.

(د) $(A \cap B' \cap C') \cup (B \cap A' \cap C') \cup (C \cap A' \cap B')$ تنها یکی از پیشامدها رخ دهد.

(ه) $A' \cap B' \cap C' = (A \cup B \cup C)'$ هیچیک از پیشامدها رخ ندهد.

(و) $(A \cap B \cap C)'$ حداکثر دو پیشامد رخ دهد.

(ز) $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

تنها یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد.

قوانین احتمال

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad (1)$$

$$P(\emptyset) = 0 \quad (2)$$

$$P(S) = 1 \quad (3)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (4)$$

(۵) اگر A و B ناسازگار باشند: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$P(A') = 1 - P(A) \quad (6)$$

$$P(A - B) = P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) \quad (7)$$

(۸) اگر $A \subseteq B$ آنگاه:

$$P(B - A) = P(B) - P(A) \quad (الف) \quad P(A) \leq P(B) \quad (ب)$$

(۹)

$$P(A \cap B) = P(A - B) + P(B - A) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

$$= 2P(A \cup B) - P(A) - P(B)$$

$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) \quad (10)$$

پیشامدهای مستقل وابسته

تعریف دوپیشامد مستقل: دو پیشامد A و B را مستقل گویند هرگاه رخ دادن پیشامد A تأثیری در رخ دادن پیشامد B نداشته باشد یعنی:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

در غیر این صورت دو پیشامد را وابسته گویند:

$$P(A \cap B) \neq P(A).P(B)$$

نکته ۱: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند آنگاه A و B' نیز مستقل هستند.

نکته ۲: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند آنگاه A' و B نیز مستقل هستند.

نکته ۳: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند آنگاه A' و B' نیز مستقل هستند.

- A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای باشند و

$$P(A).P(B) + P(A' \cup B') = 1 \quad \text{و} \quad P(A).P(B) + P(A \cap B) = 1$$

مستقلند.

$$P(A).P(B) + P(A \cap B)' = 1 \Rightarrow$$

$$P(A).P(B) + 1 - P(A \cap B) = 1 \Rightarrow P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

دو پیشامد مستقل هستند.

احتمال در فضای گسسته هم شانس

ظرفی شامل ۴ مهره‌ی قرمز و ۵ مهره‌ی سفید است از این ظرف ۳ مهره را با هم به تصادف خارج می‌کنیم مطلوب‌بست احتمال: A
 دو مهره سفید و یک مهره قرمز باشد: B هر سه مهره هم‌رنگ نباشد.
 $p(B) = 1 -$ (هر سه مهره هم‌رنگ باشد)

$$p(A) = \frac{m(A)}{n(s)} = \frac{\binom{5}{2} + \binom{4}{1}}{\binom{9}{3}} = \frac{10}{84}$$

احتمال در فضای گسسته غیر هم‌شانس

هرگاه $s = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ یک فضای نمونه‌ای باشد، اگر $p(e_i)$ احتمال وقوع پیشامد ساده e_i باشد آنگاه:

$$p(e_i) \geq 0 \quad (1)$$

$$p(e_1) + p(e_2) + \dots + p(e_n) = 1 \quad (2)$$

احتمال دو جمله‌ای

در پرتاب n سکه احتمال k بار رو آمدن و یا در n مورد به دنیا آمدن نوزاد، احتمال به دنیا آمدن k پسر یا k دختر برابر است با:

$$p(k \text{ آمدن}) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

نکته: توان a و b تعداد دفعات رو و پشت را نشان می‌دهد.

$$3a^2b = 3\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9}$$

احتمال در فضای پیوسته

در فضای پیوسته سه نوع فضای نمونه‌ای را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

$$p(A) = \frac{L(A)}{L(s)} = \frac{\text{طول } A}{\text{طول } S} \quad \text{۱- فضای نمونه‌ای طولی}$$

$$p(A) = \frac{S(A)}{S(S)} = \frac{\text{مساحت } A}{\text{مساحت } S} \quad \text{۲- فضای نمونه‌ای سطحی}$$

$$p(A) = \frac{V(A)}{V(S)} = \frac{\text{حجم } A}{\text{حجم } S} \quad \text{۳- فضای نمونه‌ای حجمی}$$

احتمال شرطی و احتمال

احتمال شرطی:

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

قانون ضرب احتمالات:

$$p(A \cap B) = p(B).p(A|B)$$

$$p(A \cap B) = p(A).p(B|A)$$

قانون احتمال کل:

$$p(A) = \sum_{i=1}^n p(B_i).P(A|B_i) = \sum_{i=1}^n p(A \cap B_i)$$

نکته ۱:

$$p(A \cap B \cap C) = p(A)p(B|A)p(C|A \cap B)$$

قاعده بیز:

$$p(A|B) = \frac{p(A).p(B|A)}{p(B)}$$

مثال: هرگاه داشته باشیم

$$p(A) = \frac{1}{4} \quad \text{و} \quad p(A|B) = \frac{3}{7} \quad \text{و} \quad p(B|A) = \frac{1}{5} \quad \text{آنگاه} \quad p(B) \text{ کدام است؟}$$

$$p(B)p(A|B) = p(A)p(B|A) \Rightarrow p(B) \times \frac{3}{7} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} \Rightarrow p(B) = \frac{7}{60}$$