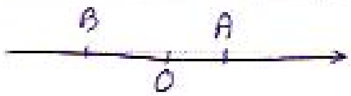
هندسه تحلیلی: مجموعه مطالبی از ریاضی که با مختصات نقاط سروکار دارد.

معرفی $\mathbb{R}^3$: مجموعه دسته‌های سه‌تایی مرتب $\mathbb{R}^3=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$

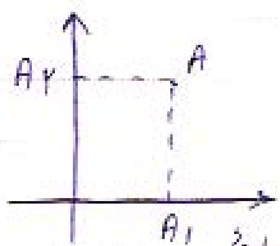
① اصل: بین نقاط محور و مجموعه $\mathbb{R}$ یک تناظر یک‌به‌یک برقرار است.



$\overline{OB}=x_B$ $\qquad |AB|=\sqrt{(x_A-x_B)^2}$

$\overline{OA}=x_A$

② اصل: بین نقاط صفحه و $\mathbb{R}^2$ یک تناظر یک به یک برقرار است.



$OA=\sqrt{A_1^2+A_2^2}$

مطالبی درباره خط

③ اصل: بین نقاط فضا و مجموعه $\mathbb{R}^3$ یک تناظر یک به یک برقرار است.

سه صفحه متمایز دو به دو عمود بر هم که از یک نقطه بگذرند فضا را به ۸ قسمت تقسیم می‌کنند.

از تقاطع آنها سه محور یا سه خط دو به دو عمود بر هم و هم‌رس پدید می‌آید. آنها را محورهای مختصات گویند.

از A صفحه‌ای بر Ox عمود می‌کنیم تا آن را در A_1 قطع کند.

A_2 ---- Oy ----

A_3 ---- Oz ----

$OA_1=x_A$ طول

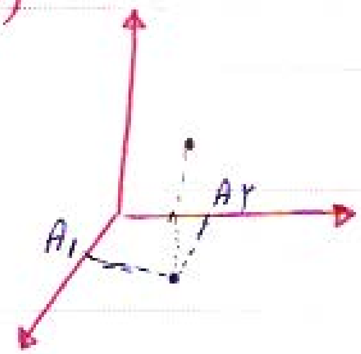
$OA_2=y_A$ عرض

$OA_3=z_A$ ارتفاع

Subject:
Year Month Date

$A=(1,2,3)$

* تعیین نقطه با استفاده از مختصات :



۱) ویژگی XOZ ⇐ $y=0$

۲) " XOY ⇐ $z=0$

۳) " YOZ ⇐ $x=0$

۴) محور x ها ⇐ $z=0, y=0$

۵) " y ها ⇐ $x=0 \quad z=0$

۶) محور z ها ⇐ $x=0, y=0$

قرینه :

۱) قرینه نقطه $A(x,y,z)$ نسبت به صفحه xoy ، $A'=(x,y,-z)$

۲) " " " " " " yoz $A''=(-x,y,z)$

۳) " " " " " " xoz $A'''=(x,-y,z)$

۴) قرینه نقطه $A=(x,y,z)$ نسبت به محور x ها $A_1=(x,-y,-z)$

۵) " " " " " " مبدا $A_2=(-x,-y,-z)$

Subject:
Year Month Date

* قضیه: طول پاره خط: $|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$

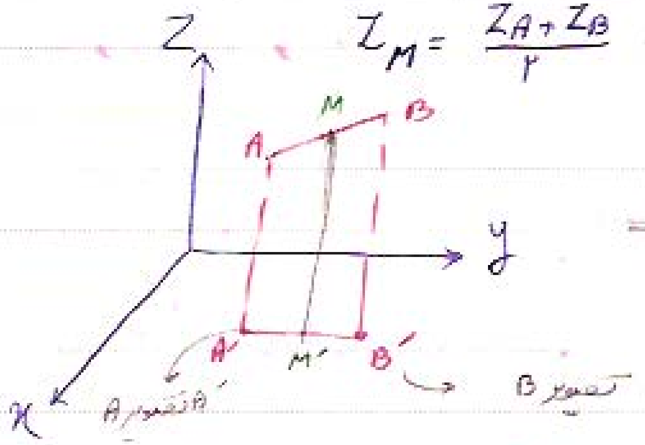
(اثبات در کتاب)

* قضیه: M وسط AB

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$$

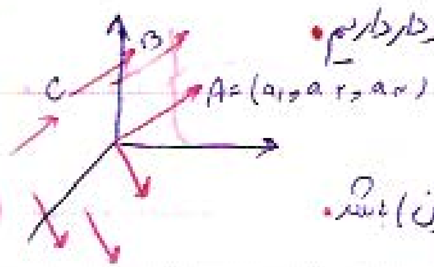
تمرین کتاب



راهنمایی برای اثبات ⟸

* برای تعیین معادلات خط و صفحه در فضا نیاز به بردار داریم.

بردار:



پاره خط جهت دار یعنی پاره خطی که دارای ابتدا و انتها (شروع و پایان) باشد.

فضا را مجموعه‌ی بی پایان پاره خطهای جهت دار در نظر می‌گیریم.

رابطه زیر را در این مجموعه تعریف می‌کنیم:

$\vec{AB} \cong \vec{CD} \iff$ هم طول و هم جهت باشند.
(موازی نیز هستند)

این رابطه یک رابطه‌ی هم ارزی است. پس R^3 را به کلاس های هم ارزی افراز می‌کند.

به هر کلاس هم ارزی یک بردار گوییم. نماینده‌ی هر کلاس عضوی از آن کلاس است که شروع آن O باشد.
بیش از همه کاربرد دارد.

$\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$ $\qquad$ $\overrightarrow{CB} = (x_B - x_C, y_B - y_C, z_B - z_C)$

$\overrightarrow{O} = (0, 0, 0)$ بردار صفر

$a = (a_1, a_2, a_3)$
$b = (b_1, b_2, b_3)$ $\qquad$ $a = b \iff a_1 = b_1 , a_2 = b_2 , a_3 = b_3$

$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = |OA| \geqslant 0$ $\qquad$ $|a| = 0 \iff a = 0$

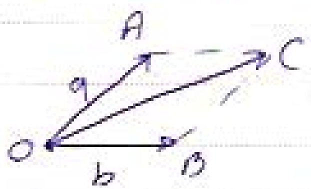
مجموعه $\mathbb{R}^3$ را یک فضای برداری می‌نامند.

* در این مجموعه چند عمل تعریف می‌کنیم *

۱) جمع دو بردار { مختصات / هندسی
۲) تفریق دو بردار
۳) ضرب عدد در بردار
۴) ضرب داخلی دو بردار
۵) ضرب خارجی دو بردار

$a + b = (a_1 + b_1 , a_2 + b_2 , a_3 + b_3)$

* ویژگی‌های جمع: ۱) بسته بودن ۲) جابجایی ۳) شرکت‌پذیری ۴) وجود عضو خنثی
۵) وجود قرینه



$\overrightarrow{OC} = a + b$ $\qquad$ $\overrightarrow{BA} = a - b$

$-b = (-b_1 , -b_2 , -b_3)$ $\qquad$ $a - b = a + (-b) = (a_1 - b_1 , a_2 - b_2 , a_3 - b_3)$

Subject :
Year Month Date

اگر $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha a = (\alpha a_1 , \alpha a_2 , \alpha a_3)$

* αa موازی a است و $\begin{cases} \text{هم جهت با } a \text{ اگر } \alpha > 0 \\ \text{خلاف} \quad \alpha < 0 \end{cases}$

$|\alpha a| = |\alpha||a|$

نماد قدر مطلق

نماد اندازه بردار

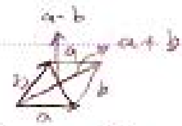
شرط موازی بودن:

$a \parallel b \iff \exists \alpha \neq 0 : a = \alpha b$

هر دو غیر صفر

$a_1 = \alpha b_1$
$a_2 = \alpha b_2$
$a_3 = \alpha b_3$

یا $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3} = \alpha \neq 0 \quad (b_1 \neq 0,\ b_2 \neq 0,\ b_3 \neq 0)$



ویژه:

$|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2|a|^2 + 2|b|^2$

* بردار یکه یا واحد *

برداری است که اندازه آن ۱ باشد.

$i = (1,0,0) \qquad j = (0,1,0)$

$k = (0,0,1) \qquad a = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right) \qquad |a| = 1$

تعریف: به هر بردار غیر صفر a یک بردار به نام بردار یکه a نسبت می دهند.

$e_a = \dfrac{1}{|a|} a$

$a = (2, -2, 1) \qquad e_a = \dfrac{1}{\sqrt{4+4+1}} (2, -2, 1)$

$e_a = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

e_a با a موازی است و با آن هم جهت است.

e_a حافظ جهت a است.

مثال: بردار $a=(2,-2,1)$ مفروض است. بردار b با a هم‌جهت است و اندازه‌ی b ۷ است.

b کدام است؟

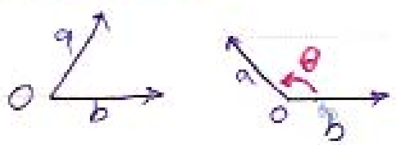
$e_a=\left(\frac{2}{3},\frac{-2}{3},\frac{1}{3}\right)$ $b=7e_a=\left(\frac{14}{3},\frac{-14}{3},\frac{7}{3}\right)$

$i \rightarrow$ بردار یکه محور xها
$j \rightarrow$ « « yها
$k \rightarrow$ « « zها

$$a=(a_1,a_2,a_3)=(a_1,0,0)+(0,a_2,0)+(0,0,a_3)$$

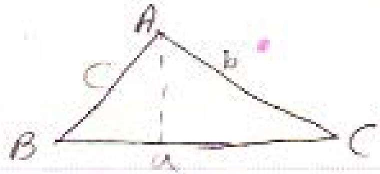
$$a=a_1 i+a_2 j+a_3 k$$

زاویه‌ی بین دو بردار:



« « « غیر صفر a و b زاویه‌ای است که یکی از آنها در جهت مثبت مثلثاتی دوران می‌کند تا بر دیگری منطبق شود $0\le\theta\le180$

قضیه‌ی کسینوس‌ها:



اثبات در کتاب

طول ضلع مقابل

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

*** ضرب داخلی (درونی - نقطه‌ای - عددی - اسکالر) دو بردار ***

تعریف:

$$a\cdot b=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

ویژگی ها:

۱) $a.b \in R$ ۲) $a.b=b.a$ (جابجایی) ۳) $a.(b\pm c)=a.b\pm a.c$

۴) $a.a=|a|^2$ ۵) $\alpha(a.b)=(\alpha a).b=a.(\alpha b)$

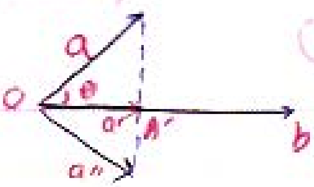
نکته: $a.b=a.c \not\Rightarrow b=c$ ۶) $a.b=|a|.|b|.\cos\theta$

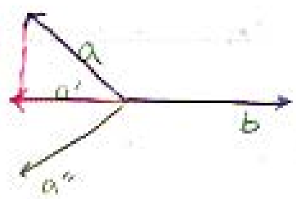
۷) $a.b=0 \Leftrightarrow \begin{cases} |a|=0 \\ |b|=0 \\ \theta=90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} a=0 \\ b=0 \\ \cos\theta=90 \end{matrix}$

۸) دو بردار a و b غیرصفر برهم عمودند $\Leftrightarrow a.b=0$

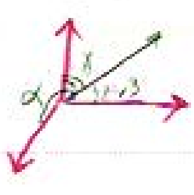
۹) $\cos\theta=\dfrac{a.b}{|a|.|b|}$ ۱۰) $a'=\dfrac{a.b}{b.b}\,b$ تصویر بردار a بر امتداد بردار b

۱۱) $a''=2a'-a$





فرض کنیم α، β و γ زوایای بردار a به ترتیب با محور xها، yها و zها باشند.



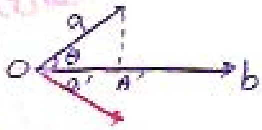
$\cos\alpha=\dfrac{a.i}{|a|.|i|}=\dfrac{a_1}{|a|}$ $\cos\beta=\dfrac{a_2}{|a|}$

$\cos\gamma=\dfrac{a_3}{|a|}$

نتیجه: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

$a=|a|(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

اثبات ۱)



$$\cos\theta = \frac{|a'|}{|a|} \rightarrow |a'| = |a|.\cos\theta$$

a' با b موازی است ـ مانند شکل هم جهت

۲) $a' = |a'| e_b$

$$a' = |a|\cos\theta \; e_b = \cancel{|a|} \frac{a\cdot b}{\cancel{|a|}|b|} \times \frac{1}{|b|} = \frac{a\cdot b}{b\cdot b}\, b$$

۷) $(a \hat{,} b) = \theta$ $\quad (a \hat{,} a'') \neq \theta$

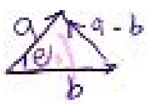
اگر مقعر باشد ← $360 - 2\theta$

۸) ۸۳ـ اگر $|a| = 2\sqrt{6}$ ، $|b| = 5$ و $a\cdot b = 0$ ، $|a-b|$ کدام است؟

$a \perp b$

$a\cdot b = 0 \rightarrow \theta = 90 \rightarrow |a-b| = \sqrt{25+24} = 7$ $\quad$ ۷✓ ۲ ۴ ۳

اثبات ۲)



$$|a-b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos\theta \quad ①$$

$$|a-b|^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a\cdot a - a\cdot b - b\cdot a + b\cdot b$$

$$= |a|^2 + |b|^2 - 2a\cdot b \quad ②$$

$$1,2 \rightarrow -2a\cdot b = -2|a||b|\cos\theta \qquad a\cdot b = |a||b|\cos\theta$$

$$a-b = (a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3) \qquad |a-b|^2 = |a_1-b_1|^2 + |a_2-b_2|^2 + |a_3-b_3|^2$$

Subject :
Year .　　Month .　　Date .　/ /

$|a-b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \to a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 2|a||b|\cos\theta$

* ضرب خارجی (برداری) دو بردار :

۱۱)

$a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2 \,,\, a_3b_1 - a_1b_3 \,,\, a_1b_2 - a_2b_1)$

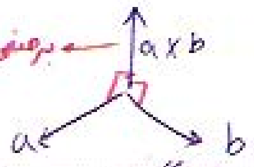
۲۱) ۲۳ ۳۱ ۳۱ ۱۲ ⇒ راه حفظ کردن

مثال) $a = (2,3,4)$　　$b = (1,-2,5)$　　$a \times b = (2,3,4) \times (1,-2,5)$

۳۱) $a \times b = (15 - (-8) \,,\, 4 - 10 \,,\, -4 - 3) = (23, -6, -7)$

ویژگی ها :

۵۱)



بر صفحه دو بردار عمود است

۶۱)

راستگرد — قاعده دست راست

۷۱)

۱) $a \times b \in \mathbb{R}^3$　　۸)

۲) $a \times b = -b \times a$

۳) $a \times (b \pm c) = a \times b \pm a \times c$

۴) $a \times a = 0$　　۵) $k \times i = j$, $i \times j = k$, $j \times k = i$

نکته) $a \neq 0$　　$a \times b = a \times c \not\Rightarrow b = c$

۶) $a \cdot (a \times b) = 0$, $b \cdot (a \times b) = 0$

۷) $a \times b$ هم بر a و هم بر b عمود است .

۱۰) $a\times b=0 \Leftrightarrow \begin{cases} |a|=0 & a=0 \\ |b|=0 & b=0 \\ \sin\theta=0 & \theta=0 \text{ یا } 180 \end{cases}$

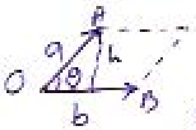
۹) $a\times b = |a|\times|b| \sin\theta$

۱۱) دو بردار غیر صفر a و b با هم موازی اند $\Leftrightarrow a\times b=0$

۱۲) $\sin\theta = \dfrac{|a\times b|}{|a|\times|b|}$

۱۳) $\tan\theta = \dfrac{|a\times b|}{a\cdot b}$

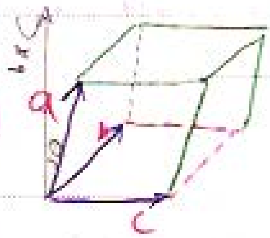
۱۴) $|a\times b|^2 + (a\cdot b)^2 = |a|^2\,|b|^2$

۱۵) 

$S = h\cdot b = |a|\cdot|b|\sin\theta = |a\times b|$
متوازی الاضلاع

۱۶) $S_{OAB} = \frac{1}{2}|a||b|\sin\theta = \frac{1}{2}|a\times b|$

۱۷) حجم متوازی السطوح که روی a و b و c بنا می شود برابر است با : $|a\cdot(b\times c)|$



$V = \underset{\text{قاعده}}{S}\times h =$

$S = |b\times c|$ ①

$\theta =$ زاویه بین a و $b\times c$ $\quad |\cos\theta| = \dfrac{h}{|a|}$ $\quad h = |a|\cos\theta$

$|\cos\theta| = \dfrac{|a\cdot(b\times c)|}{|a|\,|b\times c|}$ $\Rightarrow h = \dfrac{|a\cdot(b\times c)|}{|b\times c|}$ ①

$V = |a\cdot(b\times c)|$