# مبحث دنباله ها

ما در مبحث دنباله ها با یکسری کلمات سرو کار داریم که ابتدا تعریفی از آنها ارایه کرده و سپس در متن درس شرح کامل آنها را می آوریم.اولین چیز تعریف خود کلمه "دنباله" است.دنباله به توابعی گفته میشود که دامنه آنها اعداد طبیعی ست و همانطور که میدانیم هر تابعی دارای دامنه و برد است .پس در دنباله ها دامنه اعداد طبیعی است و اما برد! به مقادیر برد یک دنباله جمله عمومی دنباله گفته می شود.اگر بخواهیم این مطالب را به زبان ریاضی بیان کنیم به این صورت می شود:

$f:N \to R$

$f(n)= a_n$

f:نام تابع

N:دامنه تابع

R:برد تابع

$a_n$:ضابطه تابع یا جمله عمومی دنباله

مثال:اگر تابعی بصورت $f:N \to R$ با ضابطه $f(n)=\frac{n}{\sqrt{3}}$ باشد چند جمله ابتدایی این دنباله بصورت $\frac{1}{\sqrt{3}}$ و $\frac{2}{\sqrt{3}}$ و $\frac{3}{\sqrt{3}}$ و ...خواهد بود.

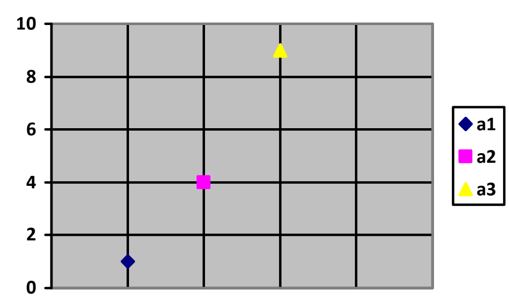
برای مشخص کردن دنباله میتوان از نماد $\{a_n\}$ نیز استفاده کرد.مثلا در مثال بالا داریم : $\left\{\frac{n}{\sqrt{3}}\right\}$

## رسم نمودار دنباله ها

چون دنباله ها تابع هستند(توابعی نا پیوسته اندزیرا فقط اعداد طبیعی را بعنوان دامنه میپذیرند)پس نمودار دنباله با کمی تفاوت شبیه نمودار تابع متناظر با آن است.به مثال زیر دقت کنید:

مثال:$\{n^2\}$

شکل این دنباله به اینصورت خواهد بود:




در صورتی که در تابع متناظر با این دنباله که بصورت $g(x)=x^2$ و $g:R \to R$است نمودار بصورت یک سهمی است.

حال تفاوت دنباله با تابعی که دامنه آن مجموعه اعداد طبیعی ست مشخص شد.اما از آنجایی که دامنه دنباله ها همواره اعداد ۱و۲و۳و.... میباشند از روش ترسیم روی یک محور نیز میتوان استفاده نمود بدین نحو که روی محور افقی تنها مجموعه مقادیر برد را نشان دهیم.

## صعودی یا نزولی بودن دنباله ها

برای دنباله ها نیز به مانند توابع صعودی و نزولی بودن تعریف میشودو طبق تعریف برای صعودی بودن داریم:

$a_{n+1} \leq a_n$ که این نامساوی به این معناست که با بزرگتر شدن مقادیر دامنه مجموعه مقادیر برد نیز رشد میکنند.این نامساوی با حذف علامت تساوی به صورت صعودی اکید خوانده میشود.

بر همین منوال برای نزولی بودن نیز داریم: $a_{n+1} \geq a_n$

## حد یک دنباله

حد دنباله یعنی وقتی $n$با اندازه کافی بزرگ میشود بالاخره جملات دنباله به اندازه ای که ما بخواهیم به L نزدیک می شوند.بطور ریاضی یعنی: $\mathrm{Lim}\ a_n = \mathrm{L}$وقتی که $n \to \infty$و میگوییم دنباله $a_n$ به عدد L همگراست.

مثال: $a_n = 1 + \frac{1}{n}$

ثابت کنید $\mathrm{Lim}\ a_n = 1$ وقتی $n \to \infty$

$$\forall \varepsilon \rangle 0 \exists M \in N \ni n \geq M \to |a_n - L| \langle \varepsilon$$

$$\left|\frac{n+1}{n} - L\right| \langle \varepsilon$$

حل:

$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| \langle \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} \langle \varepsilon$$

$$n \rangle \frac{1}{\varepsilon}$$

در مثال بالا دیدیم که جملاتی که شماره شان از $\frac{1}{\varepsilon}$ بزرگتر باشد فاصله شان از عدد یک کمتر از $\varepsilon$است.بعبارتی جملات دنباله را هرچقدر بخواهیم میتوانیم به یک نزدیک کنیم و این همان مفهوم حد دنباله است.

نکته:برای محاسبه $\mathrm{Lim}\ c^n$ وقتی $n \to \infty$ در صورتی که $|c| \langle 1$ باشد حاصل صفر خواهد بود.

مثال:مشخص کنید کدامیک از دنباله های زیر همگرا و کدام واگراست؟

الف) $\left\{\frac{(-1^n)}{2^n}\right\}$

حل) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1^n)}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n = 0$ همگرا به صفر است

ب) $\left\{\frac{3^n}{5^n}\right\}$

حل) $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{5^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$ همگرا به صفر است

پ) $\left\{\frac{4^n}{3^n}\right\}$

حل) $\lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n$ این دنباله واگراست زیرا $\frac{4}{3} \rangle 1$

نکته:علاوه بر دنبا له هایی که مشخصاصعودی یا نزولی هستند دنباله هایی نیز وجود دارند که رفتاری نوسانی دارند مثلا $\{(-1^n)\}$ دنباله ایست که دائما مابین ۱- و ۱ نوسان میکند. به این گونه دنباله ها دنباله های واگرای نوسانی میگویند.

نکته:اگر دنباله ای دارای یک زیر دنباله ی واگرا باشد خود آن دنباله نیز واگراست.به مثال زیر دقت کنید:

$$a_n = \begin{cases} 2n & n \in even \\ \frac{1}{n} & n \in odd \end{cases}$$

دنباله ی ذکر شده در بالا دارای دو زیر دنباله است یکی برای شمارنده های زوج و یکی برای شمارنده های فرد. اگر بخواهیم چند جمله از این دنباله را بنویسیم داریم: $1,4,\frac{1}{3},8,\frac{1}{5},\ldots$ همانطور که دیده میشود زیر دنباله ای که برای اعداد زوج تعریف شده به سمت بینهایت میل میکند و واگراست و وجود یک زیر دنباله ی واگرا کافیست تا بگوییم که دنباله ی $a_n$ واگراست.

مثال:دنباله ی روبرو به چه عددی همگراست؟

$$\left\{\frac{3^n+2^n}{3^{n-1}}\right\}$$

حل) $a_n = \frac{3^n+2^n}{3^{n-1}} = \frac{3^n}{3^{n-1}} + \frac{2^n}{3^{n-1}} = 3+3\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 3 + 3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 3+3\times 0 = 3$$

مثال) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2n+1}{n^4}$ را حساب کنید.

حل) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2n+1}{n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^3} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} = 0$

با حل این دو مثال به این نکته میرسیم که در مورد دنباله های کسری میتوان گفت که چنانچه درجه صورت و مخرج مساوی باشند و یا درجه مخرج بیشتر باشد قطعا دنباله همگراست و اگر درجه مخرج کمتر از صورت باشد دنباله واگراست.

در این زمینه به مثالهای زیر دقت کنید:

در این مثال بزرگترین درجه صورت سه و بزرگترین درجه مخرج نیز $\lim_{n\to\infty}\frac{7n^3-9n^2+5}{5n^3+4n}=\frac{7}{5}$ (مثال

سه میباشد و با توجه به نکته ی ذکر شده در بالا درجه صورت و مخرج مساویست پس دنباله همگراست

درجه مخرج 〉درجه صورت $\lim_{n\to\infty}\frac{5n-1}{2n^3+5n^2+2}=0$ (مثال

درجه مخرج 〈درجه صورت $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n}{n+1}=+\infty$ (مثال

## ***راه های محاسبه حد دنباله ها***

برای محاسبه حد دنباله هابا توجه به نوع مسئله(که شناخت نوع مسئله و تشخیص راه حل مناسب با حل تمرینهای مرتبط با این موضوع و به تعداد زیاد میسر خواهد بود)راه های مختلفی را پیش رو داریم که شامل:الف)با استفاده از تغییر متغیر-ب)با استفاده از قضیه ساندویچ-پ)با استفاده از حد توابع میباشد.

از آنجایی که آشنایی با این روشها به توضیح خاصی نیاز ندارد بلکه کاملا به تمرین کردن وآشنایی با این روشها وابسته است آنها را در طی چندین مثال شرح میدهیم.

تمرین:حد دنباله های زیر را بدست آورید.

$\left\{\frac{5+2\times3^n}{1-5\times3^n}\right\}$ (مثال

(حل        از تغییر متغیر استفاده میکنیم بدین صورت که:

$3^n=t\Rightarrow t\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$

$\lim_{t\to\infty}\frac{5+2t}{1-5t}=\frac{-2}{5}$

$\left\{\left(-1\right)^n\frac{1}{n}\right\}$ (مثال

(حل با استفاده از قضیه ساندویچ

$-1\le\left(-1^n\right)\le1\Rightarrow\frac{-1}{n}\le\frac{(-1)^n}{n}\le\frac{1}{n}$

و چون داریم:

در نتیجه بنا به قضیه فشار(ساندویچ)داریم:

$\lim_{n\to\infty}a_n=0$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{e^n}=?$ (مثال

(حل با استفاده از حد توابع

در اینجا میتوانیم از دو مرحله هوپیتال استفاده کرده و یابااستفاده از قوانین رشد به حاصل صفر بودن این حد برسیم. $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}$

قوانین رشد: $a^x \rangle b^x \rangle x^{\alpha} \rangle x^{\beta} \rangle \log_c x$

که در آن:

$a \;\rangle\; b \;\rangle\; 1$

$c \;\rangle\; 0$

$c \neq 1$

$\alpha, \beta \rangle 0$