*) توضیح : مطالب این جزوهٔ نمونه ، صرفاً قسمتی از جزوهٔ اصلی می باشد و برای این مباحث ، مطالب پیشنیاز لازم است که در جزوهٔ کامل موجود می باشد.

# « نمونه ای از جزوهٔ جبر و احتمال و ریاضیات گسسته »

## *) احتمال

**نظریه احتمال :** به بررسی نظریه ی تجربه های تصادفی ، احتمال می گوییم.

**تجربه :** به هر نوع آزمایش یا عملی که نتیجه آن قبل از انجام ، برای ما مشخص باشد یا نباشد ، تجربه می گوییم که بر دو نوع است :

**۱) تجربه حتمی :** به هر تجربه ای که نتیجه ی آن قبل از وقوع ، بر ما معلوم باشد ، تجربه حتمی گفته می شود.

**۲) تجربه تصادفی :** به هر تجربه که نتیجه ی آن قبل از وقوع ، بر ما مشخص نباشد ، تجربه تصادفی می گوییم (مانند پرتاب سکه). با توجه به این مطلب ، بحث احتمال مربوط به تجربه های تصادفی است.

**فضای نمونه :** مجموعه تمام حالت های ممکن در انجام یک تجربه تصادفی را فضای نمونه می گوییم ؛ مثلاً در پرتاب یک تاس ، فضای نمونه برابر تمام حالت هایی است که ممکن است رخ دهند ، یعنی اعداد $\{1,2,3,4,5,6\}$

بر طبق تعریف فضای نمونه ، می توان تجربه ها را به دو دسته ی گسسته و پیوسته تقسیم کرد که در آن ها ، تعداد حالات ممکنه برای وقوع ، به ترتیب قابل شمارش و غیر قابل شمارش می باشد.

---

◄ **نکته :** اگر mسکه را همزمان پرتاب کنیم ، یا یک سکه را mبار پرتاب کنیم ، تعداد حالات فضای نمونه در این حالت برابر $2^m$ خواهد بود. به همین ترتیب ، اگر nتاس را همزمان پرتاب کنیم ، یا یک تاس را nبار پرتاب کنیم ، فضای نمونه در این حالت دارای $6^n$ عضو خواهد بود.

**مثال ) در تجربه دو تاس ، غیر همزمان ، زمانی مجاز به پرتاب تاس دوم هستیم هر گاه که تاس اول را انداخته و عدد آمده کمتر از ۳ نباشد. تعداد حالت های این آزمایش (فضای نمونه) کدام است؟**

جواب) در پرتاب اول ، عدد حاصل باید از مجموعه $\{3,4,5,6\}$ باشد و در پرتاب دوم محدودیتی نداریم و حاصل از مجموعه $\{1,2,3,4,5,6\}$ است ، پس در کل ، طبق اصل ضرب ، تعداد حالت ها برابر $6 \times 4 = 24$ حالت می باشد.

---

*** ) مجموعه سؤالات و تست ها :**

**۱) کیسه ای حاوی چهار مهره قرمز ، چهار مهره آبی و دو مهره سبز است. از کیسه سه مهره بر میداریم. تعداد عضو های فضای نمونه کدام است؟** ۱) ۱۲۰ ۲) ۷۲۰ ۳) ۲۰ ۴) ۳۶۰

جواب) برای یافتن حالات کل (فضای نمونه ) بدون محدودیت خاصی ، این گونه در نظر می گیریم که می خواهیم از یک کیسه شامل ۱۰ مهره ، سه مهره ، به طور همزمان برداریم. طبق مبحث انتخاب ، داریم:

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \times 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

---

**۲) از کیسه ای شامل ۴ مهره قرمز و ۳ مهره سفید ، سه مهره یکی به یکی انتخاب می کنیم ، تعداد عضو های فضای نمونه کدام است؟** ۱) ۲۱۰ ۲) ۳۴۳ ۳) ۷۰ ۴) ۳۵

جواب) فرق این سوال با سوال قبلی ، در نحوه ی برداشتن است که در این سوال ، باید یکی یکی ( و نه همزمان) برداشت کنیم:

$$\binom{7}{1} \times \binom{6}{1} \times \binom{5}{1} = 7 \times 6 \times 5 = 210$$

---

**۳) از کیسه ای شامل ۳ مهره سفید، ۲ مهره سبز و یک مهره زرد، سه مهره ، یکی به یکی و با جایگذاری انتخاب می کنیم . تعداد عضو های فضای نمونه کدام است؟** ۱) ۲۱۶ ۲) ۱۲۰ ۳) ۳۶ ۴) ۴۰

جواب) تفاوت این سوال در جایگذاری است. یعنی هر مهره را بر میداریم ، میبینیم و مجدداً درون کیسه قرار می دهیم و در هر مرحله ، تعداد مهره های درون کیسه ثابت است: $\binom{6}{1} \times \binom{6}{1} \times \binom{6}{1} = 6^3 = 216$

**۴) تعداد عضو های فضای نمونه روز تولد پنج نفر که در یک مهمانی می باشند کدام است؟**

۱) $(7)^5$ ۲) $840$ ۳) $365$ ۴) $(365)^5$

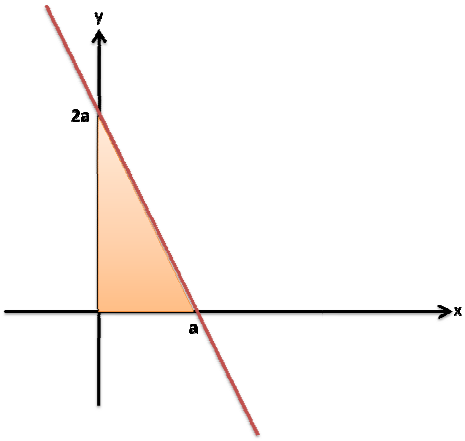
جواب) هر کدام از افراد می توانند در یکی از ۳۶۵ روز سال به دنیا آمده باشند ، پس در کل طبق اصل ضرب داریم:

$$365\times 365 \times 365 \times 365 \times 365 = (365)^5$$

---

**۵) اندازه فضای نمونه ی تجربه انتخاب یک نقطه از سطح محصور به خط $2x + y = 2a$ و محورهای مختصات در ناحیه ی اول کدام است؟**

۱) $\frac{1}{2}|a|$ ۲) $|a|$ ۳) $\frac{1}{2}a^2$ ۴) $a^2$




جواب) این یک حالت از فضای نمونه در تجربه های پیوسته می باشد. اگر شکل را رسم کنیم ، می بینیم سطح محصور که در واقع همان فضای نمونه است ، یک مثلث است و باید مساحت آن را حساب کنیم:

---

**۶) کدامیک از گزینه های زیر ، نمایش دهنده فضای نمونه ی شامل تمام نقاط درون و واقع بر محیط دایره ای به شعاع سه و مرکز (2,-3) می باشد؟**

۱) $\{(x,y): x^2 + y^2 - 4x + 6y < 4\}$ ۲) $\{(x,y): x^2 + y^2 - 4x + 6y \leq 4\}$

۳) $\{(x,y): x^2 + y^2 - 4x + 6y \leq -4\}$ ۴) $\{(x,y): x^2 + y^2 - 4x + 6y < -4\}$

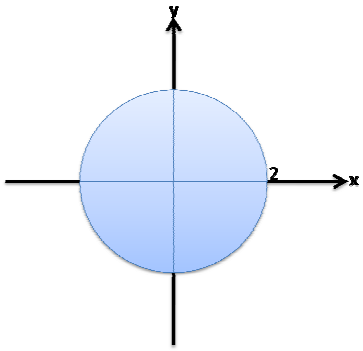
جواب) همانطور که از هندسه تحلیلی می دانیم ، دایره به شعاع سه و مرکز **(2,-3)** دارای معادله به شکل $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 3^2$ است. با توجه به این که باید هم نقاط درون و هم نقاط روی محیط را شامل شود ، علامت $=$ به $\leq$ تبدیل می شود و با به توان رساندن و ساده کردن ، به گزینه ی سه می رسیم.

---

**۷) اندازه فضای نمونه ی قسمتی از مساحت دایره ای به شعاع دو و به مرکز مبدأ مختصات که در ناحیه ی سوم واقع است را مشخص کنید.**

۱) $4\pi$ ۲) $2\pi$ ۳) $\pi$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

جواب) با توجه به شکل مقابل ، فضای نمونه ، مساحت ربع دایره واقع در ربع سوم محور های مختصات است و داریم:




**پیشامد تصادفی :** **به هر زیر مجموعه از فضای نمونه یک تجربه تصادفی ، یک پیشامد تصادفی می گوییم ، مثلاً پیشامد این که در پرتاب یک تاس ، حاصل ، یک عدد زوج باشد ، یعنی مجموعه اعداد $\{2,4,6\}$**

**مثال ) در تجربه پرتاب سه سکه به طور همزمان ، مرتبه ی پیشامد آنکه حداقل یکبار رو ظاهر شود ، چقدر است؟**

جواب) روش اول)مستقیم: این پیشامد ، یعنی این که یا یک بار ، یا دوبار و یا هر سه بار ، رو بیاید. در نتیجه اگر رو را با "ر" و پشت را با "پ" نشان دهیم، این حالات را داریم: (ر،پ،پ) و (پ،ر،پ) و (پ،پ،ر) و (ر،ر،پ) و (ر،پ،ر) و (پ،ر،ر) و (ر،ر،ر) یعنی هفت حالت داریم.

روش دوم) متمم گیری: در این حالت از روش حالات کل (فضای نمونه) منهای حالات نامطلوب ، استفاده می کنیم. در این سوال ، حالت نامطلوب حالتی است که هیچ وقت رو نیاید ، یعنی (پ،پ،پ) و فضای نمونه برابر $2^3 = 8$ می باشد.
پس در کل، طبق اصل متمم گیری ،داریم: $8 - 1 = 7$

*** ) مجموعه سوالات و تست ها :**

**۱) در تجربه پرتاب سه سکه به طور همزمان ، تعداد عضو های پیشامد آنکه الف) حداکثر دو بار رو بیاید. ب) فقط دو بار رو بیاید ، به ترتیب کدام است؟** ۱)۳ ، ۱ ۲) ۷ ، ۳ ۳) ۷ ، ۱ ۴) ۳ ، ۲

جواب) برای قسمت اول ، با توجه به این که فضای نمونه برابر $2^3 = 8$ است و حالت نا مطلوب این است که هر سه بار رو بیاید (ر،ر،ر) ، طبق اصل متمم گیری داریم: $8 - 1 = 7$

برای قسمت دوم، باید دو بار رو و یک بار پشت بیاید که برابر $\frac{3!}{2!\times 1!} = 3$ است. یا می توان این حالات را نوشت: (ر،ر،پ) و (ر،پ،ر) و (پ،ر،ر)

**۲) در تجربه پرتاب دو تاس ، برآمدهای پیشامد آنکه : الف) جمع دو تاس عددی فرد باشد ب)یکی از دو تاس عددی اول باشد ، کدام است؟**

۱) ۱۸،۱۹ ۲) ۱۸،۱۸ ۳) ۹،۱۸ ۴) ۹،۱۹

جواب) قسمت الف) برای این پیشامد ، با توجه به این که فرد = فرد + زوج ، باید عدد یک تاس فرد و عدد دیگری زوج باشد. یعنی تاس اول اعداد $\{6و4و2\}$ و تاس دوم اعداد $\{5و3و1\}$ بیاید که طبق اصل ضرب داریم: $3 \times 3 = 9$ همچنین می توان این طور در نظر گرفت که تاس اول فرد بیاید و تاس دوم زوج ، پس به همین ترتیب، برای این حالت هم ۹ امکان داریم و در کل طبق اصل جمع ، کل حالات برابر $9 + 9 = 18$ خواهد بود.

قسمت ب) یکی از دو تاس باید عدد اول باشد ، یعنی از مجموعه $\{5و3و2\}$ باشد و دیگری نباید اول باشد (چون باید فقط یکی از اعداد تاس ها ، اول باشد) ، یعنی از مجموعه $\{6و4و1\}$ باشد. پس طبق اصل ضرب ، $3 \times 3 = 9$ حالت داریم و این که تاس اول ، عدد اول بیاید یا تاس دوم ، خود دو حالت دارد ، پس داریم: $9 \times 2 = 18$ ، گزینه ی ۲

---

**۳) از کیسه ای شامل سه مهره قرمز ، چهار مهره آبی و پنج مهره سیاه ، سه مهره ، یکی به یکی و بدون جایگذاری بر می داریم. تعداد عضوهای پیشامد این آنکه مهره ها از دو رنگ باشند را کدام است؟**

۱) ۱۹۵ ۲) ۱۴۵ ۳) ۸۷۰ ۴) ۶۴۰

جواب) برای حل این سوال ، از روش متمم گیری استفاده می کنیم . یعنی کل حالات (فضای نمونه) را از حالات نامطلوب کم می کنیم. حالات نامطلوب در این مسأله ، حالاتی است که هر سه مهره خارج شده یکرنگ باشند ، یا هر کدام از مهره ها یک رنگ خاص باشند. همچنین در این سوال ، چون مهره ها را یکی یکی خارج می کنیم ، باید به ترتیب برداشتن مهره ها هم توجه کنیم. به همین خاطر ، بعد از مشخص کردن حالت های برداشت ، باید از جایگشت با تکرار هم استفاده کنیم.

همانطور که قبلاً هم داشتیم ، تعداد حالت فضای نمونه برابر است با : $\binom{12}{1} \times \binom{11}{1} \times \binom{10}{1} = 1320$

برای حالات نامطلوب ، ابتدا حالت های این که هر سه مهره ، قرمز ، هر سه مهره آبی و هر سه مهره ، سیاه باشند را حساب می کنیم ، سپس حالت این که یک مهره قرمز ، یک مهره آبی و یک مهره سیاه باشد را حساب می کنیم (با توجه به ترتیب برداشت مهره ها). پس برای محاسبه ی حالات نامطلوب ، داریم:

$$\left[\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1} \times \frac{3!}{3!} + \binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1} \times \frac{3!}{3!} + \binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1} \times \frac{3!}{3!} + \binom{3}{1}\binom{4}{1}\binom{5}{1} \times \frac{3!}{1! \times 1! \times 1!}\right]$$

حالات نامطلوب – کل حالات $= 1320 - 450 = 870$ گزینه ی ۳