جزوات آموزشی درس‌آموز

۷

جزوات کنکور ریاضی عمومی

کاربرد مشتق ۲

دکتر علیرضا نورالدینی

http://www.darsamoz.com

این بخش:

جزوه (۷) ریاضی عمومی

جهت:

آشنایی شما با جزوات آموزشی

درس‌آموز

به شما هدیه گردیده است!

http://www.darsamoz.com

کاربرد مشتق (۲)

«بسته آموزشی کنکور ریاضی چهارم تجربی»

داوطلب گرامی!

قبل از مطالعه‌ی این جزوه، به موارد مهم زیر توجه نمایید:

- پیش‌نیاز مطالعه‌ی این جزوه، دو جزوه‌ی قبلی **مشتق** از همین بسته آموزشی است.
- از مباحث این جزوه **معمولاً ۲ تست** در کنکورهای تجربی آورده می‌شود.
- فهرست مطالب جزوه به شرح زیر است:

بخش اول:

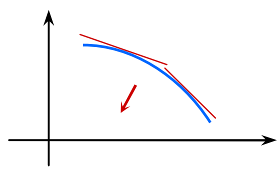
جهت تقعر نمودار

در این بخش به معرفی جهت انحنای یک منحنی و روش تعیین آن می‌پردازیم:

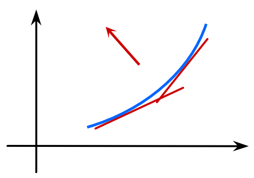
جهت تقعر

فرض کنیم تابع f در یک بازه‌ی I مشتق‌پذیر باشد، در این صورت:

- اگر در این بازه، نمودار تابع بالاتر از خط مماس بر آن قرار گرفته باشد، آنگاه گوییم تقعر نمودار در این بازه **«رو به بالا»** است.
- اگر در این بازه، نمودار تابع پایین‌تر از خط مماس بر آن باشد، آنگاه گوییم تقعر نمودار در این بازه **«رو به پایین»** است.



تقعر رو به پایین



تقعر رو به بالا

توجه کنید: جهت تقعر، همان جهت گُودی نمودار است!

تعیین تقعر: جهت تقعر نمودار با تعیین مشتق دوم و سپس تعیین علامت آن انجام می‌شود:

- اگر f'' روی یک بازه‌ی مثبت باشد، آنگاه تقعر f بر آن بازه رو به بالاست.
- اگر f'' روی یک بازه منفی باشد، آنگاه تقعر f بر آن رو به پایین است.

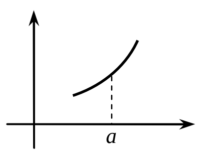
تست. وضع f' و f'' در نقطه‌ی a بر طبق شکل زیر چگونه است؟

۱) $f'(a)<0$ و $f''(a)<0$

۲) $f'(a)<0$ و $f''(a)>0$

۳) $f'(a)>0$ و $f''(a)>0$

۴) $f'(a)>0$ و $f''(a)<0$



گزینه‌ی ۳:

چون تابع صعودی است، باید $f'(a)>0$ و چون تقعر رو به بالاست، باید داشته باشیم $f''(a)>0$.

تست. به ازای کدام مقدار a تقعر نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=ax^3+(1-a^2)x^2+3x$ در بازه‌ی $(-\infty,\frac{1}{2})$ به طرف پایین و در بازه‌ی $(\frac{1}{2},+\infty)$ به طرف بالا است؟ (کنکور تجربی ۸۲)

۱) -2 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) 2

گزینه‌ی ۴ :

با دو بار مشتق‌گیری، مشتق دوم تابع را تعیین می‌کنیم:

$$y = ax^3 + (1-a^2)x^2 + 3x \rightarrow y' = 3ax^2 + 2(1-a^2)x + 3 \ , \ y'' = 6ax + 2(1-a^2)$$

مشتق دوم عبارت درجه‌ی ۱ است و طبق فرض باید در نقطه‌ی $x = \frac{1}{2}$ علامت آن تغییر کند. در نتیجه این عدد ریشه‌ی y'' است:

$$6a(\frac{1}{2}) + 2(1-a^2) = 0 \rightarrow 2a^2 - 3a - 2 = 0 \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} a = 2 \\ a = -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

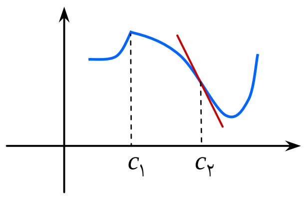
اکنون توجه کنید چون تقعر نمودار تابع بعد از $\frac{1}{2}$ رو به بالاست، لازم است علامت عبارت درجه‌ی اول y'' نیز بعد از $\frac{1}{2}$ مثبت باشد و در نتیجه $6a$ مثبت بوده و به عبارت دیگر باید a بزرگ‌تر از صفر باشد؛ یعنی $a = 2$ قبول است.

هنگام تغییر جهت تقعر نمودار، نقاط مهمی روی نمودار مشخص می‌شوند:

نقطه‌ی عطف

نقطه‌ی به طول c روی نمودار تابع f را یک **«نقطه عطف»** تابع گوییم، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

- مماس (حتی مماس قائم) بر نمودار در نقطه‌ی c موجود باشد.
- تقعر نمودار در نقطه‌ی به طول c تغییر کند.



به عنوان نمونه:

در تابع مقابل c_1 نقطه‌ی عطف نیست، چون به دلیل شکستگی نمودار، مماس بر نمودار وجود ندارد؛ ولی c_2 یک نقطه‌ی عطف تابع است.

نکته. در مورد نقطه‌ی عطف یک تابع در نقطه‌ی به طول c به چند مورد مهم توجه نمایید:

- علامت مشتق دوم در دو طرف c تغییر می‌کند.
- تقریباً همیشه در نقطه‌ی عطف مشتق دوم وجود داشته و در این صورت $f''(c) = 0$ است.
- مماس بر منحنی در نقطه‌ی عطف همواره از نمودار عبور می‌کند.

تست. اگر مماس بر منحنی تابع $y = ax^3 + 6x^2 + 1$ در نقطه‌ی $x = 1$ از منحنی عبور کند، a کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

گزینه‌ی ۱ :

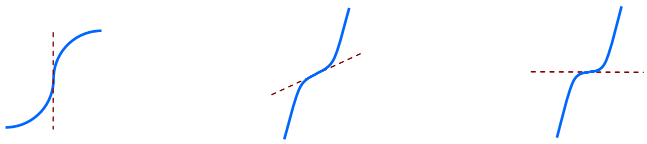
با توجه به نکته‌ی قبل، $x = 1$ نقطه‌ی عطف است و مشتق دوم به ازای آن صفر می‌شود:

$$y'' = 6ax + 12 \xrightarrow{x=1} 6a + 12 = 0 \Rightarrow a = -2$$

انواع نقاط عطف: در کل هر نقطه‌ی عطف تابع، به یکی از سه حالت زیر است:

- **عطف افقی:** هنگامی است که مشتق دوم در دو طرف نقطه تغییر علامت داده و مشتق اول در آن برابر صفر شود.
- **عطف مایل:** هنگامی است که مشتق دوم در دو طرف نقطه تغییر علامت داده و مشتق اول در آن عددی غیر صفر شود.
- **عطف قائم:** در کنکور تجربی، به ندرت ممکن است مشتق دوم تابع در دو طرف نقطه تغییر علامت داده و مشتق اول در آن بی‌نهایت شود.

نمودارهای مربوطه را مشاهده می‌کنید:



عطف قائم **عطف مایل** **عطف افقی**

تست. تابع $y=x^{۳}-۳x^{۲}+۳x-۲$ چگونه است؟

۱) عطف با مماس مایل دارد ۲) عطف با مماس قائم دارد ۳) عطف با مماس افقی دارد ۴) عطف ندارد

گزینه‌ی ۳ :

از تابع دو بار مشتق می‌گیریم:

$$y''=۶x-۶$$

واضح است که y'' در $x=۱$ صفر شده و علامتش در این نقطه تغییر می‌کند (چون درجه‌ی ۱ است)؛ بنابراین $x=۱$ نقطه‌ی عطف تابع است.

برای تشخیص نوع نقطه‌ی عطف، مقدار y' را در $x=۱$ مشخص می‌کنیم:

$$y'=۳x^{۲}-۶x+۳ \xrightarrow{x=۱} y'(۱)=۳-۶+۳=۰$$

پس شیب خط مماس در نقطه‌ی عطف برابر صفر بوده و لذا تابع عطف با مماس افقی دارد.

عطف برخی توابع: در ذهن داشتن موارد زیر ضروری نیست، اما ممکن است گاهی سرعت شما را افزایش دهد:

- توابع به فرم $y=(x-a)^{۳}$، $y=(x-a)^{۵}$ و ... در نقطه‌ی $x=a$ دارای عطف با مماس افقی هستند.
- توابع به فرم $y=\sqrt[۳]{x-a}$ در نقطه‌ی $x=a$ دارای عطف با مماس قائم هستند. به عنوان نمونه: تابع $y=\sqrt[۳]{x-۱}$ در $x=۱$ و تابع $y=\sqrt[۳]{x}$ در $x=۰$ عطف دارند.
- تابع درجه‌ی سوم در ریشه‌ی معادله‌ی $y''=۰$ همیشه عطف دارد. این مورد در انتهای همین جزوه بیشتر توضیح داده شده است.
- توابع $y=\sin x$ و $y=\tan x$ در نقاط $k\pi$ و توابع $y=\cos x$ و $y=\cot x$ در نقاط $k\pi+\frac{\pi}{۲}$ عطف دارند!

تست. در کدام بازه، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=-x^{۴}+۸x^{۳}-۱۸x^{۲}$ نزولی و تقعر نمودار آن رو به بالا است؟ (تجربی ۹۳)

۱) $(۱,۴)$ ۲) $(۱,۳)$ ۳) $(۰,۳)$ ۴) $(۰,۱)$

گزینه‌ی ۲ :

باید بازه‌ای تعیین شود که مشتق در آن منفی (تابع نزولی) و مشتق دوم مثبت (تقعر رو به بالا) شود:

$$y'=-۴x^{۳}+۲۴x^{۲}-۳۶x \rightarrow y''=-۱۲x^{۲}+۴۸x-۳۶$$

اکنون نامعادلات $y'<۰$ و $y''>۰$ را با توجه به بازه‌های داده شده طبق تکنیک عددگذاری (جزوه تعیین علامت ریاضی دوم) امتحان می‌کنیم؛

$$x=\frac{۱}{۲}:\ y'=-۴(\frac{۱}{۸})+۲۴(\frac{۱}{۴})-۳۶(\frac{۱}{۲})<۰\ ,\ \ y''=-۱۲(\frac{۱}{۴})+۴۸(\frac{۱}{۲})-۳۶=-۳+۲۴-۳۶<۰$$

نامساوی‌های مورد نظر برقرار نبوده و گزینه‌های ۳ و ۴ که شامل عدد $\frac{۱}{۲}$ هستند، رد می‌شوند. بین گزینه‌های ۱ و ۲:

$$x=۳:\ y'=-۴(۲۷)+۲۴(۹)-۳۶(۳)=۰\ ,\ \ y''=-۱۲(۹)+۴۸(۳)-۳۶=۰$$

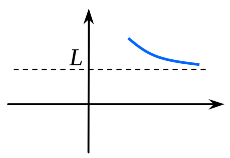
نامساوی‌های $y'<۰$ و $y''>۰$ باز هم برقرار نبوده و لذا گزینه‌ی ۱ هم رد شده و گزینه‌ی ۲ صحیح خواهد بود.

بخش دوم:
مجانب‌های نمودار

قبل از پرداختن به بررسی نمودار، انواع مجانب‌های یک تابع را معرفی می‌کنیم:

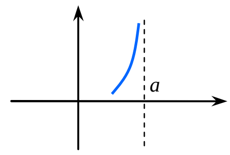
مجانب افقی و قائم

- اگر هنگامی که $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$ (یا در هر دو حالت) حد تابع f برابر عددی چون L شود، آنگاه خط افقی $y=L$ را یک **«مجانب افقی»** نمودار تابع f گویند.



$x\to+\infty \Rightarrow f(x)\to L$

- هرگاه حد تابع f یا حتی یکی از حدهای چپ و راست آن در نقطه‌ی a بینهایت شود، آنگاه خط $x=a$ را یک **«مجانب قائم»** نمودار تابع f گویند.



$x\to a^- \Rightarrow f(x)\to+\infty$

تذکر: مجانب قائم و حد بینهایت معمولاً در ریشه‌های مخرج توابع رخ می‌دهند.

تست. فاصله‌ی نقطه‌ی تقاطع مجانب‌های منحنی به معادله‌ی $y=\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^۲-۳x+۲}$ از مبدأ مختصات کدام است؟ (تجربی ۸۵)

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) ۵

گزینه‌ی ۱ :

ابتدا معادله‌ی مجانب‌های نمودار را مشخص می‌کنیم:

- **مجانب افقی:** از تابع وقتی $x\to+\infty$ حد می‌گیریم ($x\to-\infty$ قبول نیست، چون $\sqrt{x}$ برای عددهای منفی بی معنی است):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{x}}{x^۲-۳x+۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{x}=۰$$

پس $y=۰$ معادله‌ی مجانب افقی است.

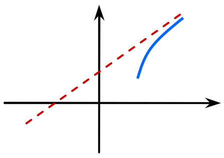
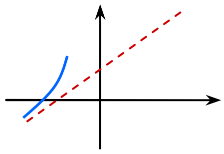
- **مجانب قائم:** مخرج را برابر صفر قرار می‌دهیم: $x^۲-۳x+۲=۰$؛ از حل این معادله ریشه‌های $x=۱$ و $x=۲$ بدست می‌آیند که باید ببینیم در کدام‌یک از این نقاط حد تابع ∞ می‌شود:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{x^2-3x+2}\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x-3}=\frac{1-\frac{1}{2}}{-1}=-\frac{1}{2}$$ (روش سریع رفع ابهام از جزوات ریاضی ۳ Hop)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{x}}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{2-\sqrt{2}}{0}=\pm\infty$$

پس فقط $x=2$ مجانب قائم است و نقطه‌ی تقاطع دو مجانب $y=0$ و $x=2$ به صورت $(2,0)$ می‌شود و فاصله‌ی آن تا مبدأ برابر $\sqrt{(2-0)^2+(0-0)^2}=2$ است.

مجانب مایل: یک خط مایل را **«مجانب مایل»** نمودار f گوئیم، هرگاه وقتی x به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کند، فاصله‌ی نقاط نمودار تابع و این خط به صفر میل کند. شکل‌های زیر را ببینید:

شرط وجود و روش تعیین مجانب‌های مایل را در ادامه ببینیم:

تعیین مجانب مایل

ابتدا از تابع وقتی $x\to\pm\infty$ حد می‌گیریم. اگر حد تابع بینهایت بدست آید، گوییم:

تابع احتمالاً مجانب مایل دارد!

سپس خط $y=ax+b$ را به عنوان **«مجانب مایل»** در نظر گرفته و مراحل زیر را طی می‌کنیم:

- عدد a از رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود:

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$$

باید برای a عددی غیر صفر بدست آید. سپس:

- عدد b طبق روش زیر مشخص می‌گردد:

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-ax\right)$$

مقدار b می‌تواند صفر هم بدست آید.

مثال. مجانب مایل تابع $y=x\sqrt{\frac{x}{x+1}}$ را هنگامی که $x\to+\infty$ تعیین کنید.

پاسخ : *طبق روش بالا:*

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{\frac{x}{x+1}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x}{x+1}}=\sqrt{1}=1$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{\frac{x}{x+۱}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x(\sqrt{\frac{x}{x+۱}}-۱)\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+۱}}-۱\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+۱}}{\sqrt{x+۱}}\times\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+۱}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+۱}}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{x-x-۱}{\sqrt{x+۱}\times(\sqrt{x}+\sqrt{x+۱})}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{-۱}{\sqrt{x}\times(\sqrt{x}+\sqrt{x})}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{۲x}=-\frac{۱}{۲}$$

پس مجانب مایل خط $y=x-\frac{۱}{۲}$ است.

تذکر: در مثال قبل دیدید که یافتن مجانب مایل به روش معمولی گاهی بسیار پر زحمت است؛ با این‌حال، در کنکورهای تجربی، معمولاً استفاده از دستور کلی بالا نیاز نمی‌شود و مجانب مایل با استفاده از چند حالت اصلی و روش مربوط به هر یک تعیین می‌گردد که در ادامه آورده شده‌اند:

توابع کسری: فرض کنیم $f(x)=\frac{ax^n+bx^{n-۱}+\cdots+kx+l}{a'x^m+b'x^{m-۱}+\cdots+k'x+l'}$ (یعنی درجه‌ی صورت برابر n و درجه‌ی مخرج m است.) آنگاه:

- اگر $n<m$، آنگاه خط $y=۰$ مجانب افقی f است.
- اگر $n=m$، آنگاه خط $y=\frac{a}{a'}$ مجانب افقی f است.
- اگر $n=m+۱$، یعنی:

درجه‌ی صورت دقیقاً یک واحد از درجه‌ی مخرج بیشتر باشد،

آنگاه: نمودار f دارای یک مجانب مایل است که از تقسیم صورت بر مخرج تعیین می‌گردد.

- در غیر این صورت نمودار f مجانب افقی یا مایل ندارد.

تست. یکی از مجانب‌های منحنی به معادله‌ی $y=\frac{۲x^۳+ax^۲+۵}{x^۲+x}$ محور xها را در نقطه‌ای به طول ۲- قطع می‌کند. a کدام است؟

۱) ۳-　　۲) ۳　　۳) ۴　　۴) ۶　　(تجربی ۹۰)

گزینه‌ی ۴ :

توجه کنید که مجانب‌های قائم در بین ریشه‌های مخرج $x=۰$ و $x=-۱$ بوده و هیچ‌کدام محور طول را در ۲- قطع نمی‌کنند. پس مقصود تست، مجانب دیگر است که چون درجه‌ی صورت دقیقاً از درجه‌ی مخرج ۱ واحد بیشتر است، مجانب مربوطه مایل است که از تقسیم صورت به مخرج تعیین می‌شود:

توجه کنید که تقسیم را فقط تا مشخص شدن عبارت درجه‌ی ۱ در قسمت خارج قسمت ادامه می‌دهیم که معادله‌ی مجانب مایل است:

$$\begin{array}{r|l} ۲x^۳+ax^۲+۵ & x^۲+x \\ \cline{2-2} -(۲x^۳+۲x^۲) & ۲x+a-۲ \\ \hline ۰+(a-۲)x^۲+۵ & \end{array}$$

$$y=۲x+a-۲\xrightarrow{(-۲,۰)}۰=-۴+a-۲\Rightarrow a=۶$$

توابع رادیکالی:

- در توابع با ضابطه‌ی $y=ax+b+f(x)$، اگر $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=k$ آنگاه خط $y=ax+b+k$ مجانب مایل است.
- مجانب افقی یا مایل را می‌توان توسط هم‌ارزی در بینهایت تعیین کرد. به‌عنوان نمونه تابع $f(x)=ax+b+\sqrt{kx^2+lx+h}$ دارای مجانب‌های مایل به صورت زیر است:

$$y=ax+b+\sqrt{k}\,(x+\frac{l}{2k})\ ,\qquad y=ax+b-\sqrt{k}\,(x+\frac{l}{2k})$$

تست. خط به معادله‌ی $y=\frac{3}{2}$ مجانب افقی تابع با ضابطه‌ی $y=2x-1+\sqrt{ax^2+bx}$ است. b کدام است؟

۱) -5 ۲) 10 ۳) -10 ۴) 5

گزینه‌ی ۳ :

طبق روش بالا عبارت هم‌ارزی رادیکال را می‌نویسیم:

$$y=2x-1+\sqrt{a}\,|x+\frac{b}{2a}|=\begin{cases} y=2x-1+\sqrt{a}(x+\frac{b}{2a}) & \text{اگر } x\to+\infty \\ y=2x-1-\sqrt{a}(x+\frac{b}{2a}) & \text{اگر } x\to-\infty \end{cases}$$

فقط در حالت $x\to-\infty$ امکان حذف جملات $2x$ و $-\sqrt{a}x$ وجود دارد تا معادله‌ی مجانب به صورت $y=\frac{3}{2}$ شود. پس باید $a=4$ باشد و مجانب افقی به صورت $y=2x-1-2(x+\frac{b}{2(4)})=-1-\frac{b}{4}$ است. در نتیجه باید:

$$-1-\frac{b}{4}=\frac{3}{2}\xrightarrow{\times 4}-4-b=6\ \Rightarrow\ b=-10$$

تست. کدام تابع دارای یک مجانب افقی و یک مجانب مایل است؟

۱) $y=\frac{x-1}{x-2}$ ۲) $y=2x-\sqrt{4x^2+1}$ ۳) $y=2x+\sqrt{x^2+1}$ ۴) $y=\frac{x^2}{x-1}$

گزینه‌ی ۲ :

گزینه‌ی ۱ مجانب مایل و گزینه‌ی ۴ مجانب افقی ندارد و بنابراین فقط گزینه‌های ۲ و ۳ باقی می‌مانند. مجانب‌های گزینه‌ی ۳ را توسط هم‌ارزی مشخص می‌کنیم:

$$y=2x+\sqrt{x^2+1}=\begin{cases} y=2x+(x+\frac{0}{2})=3x & (x\to+\infty) \\ y=2x-(x+\frac{0}{2})=x & (x\to-\infty) \end{cases}$$

پس در این گزینه، هر دو مجانب مایل هستند و بنابراین گزینه‌ی ۲ باید درست باشد.

بخش سوم:
نمودارهای توابع

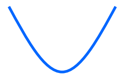
در این بخش ویژگی‌های شاخص نمودار و بویژه دو تابع مهم و معروف را بررسی می‌کنیم که پاسخ دادن به تست‌ها را در زمان کوتاه‌تری ممکن می‌سازند.

تابع درجه دوم:

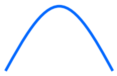
نمودار تابع $y=ax^2+bx+c$ دارای مشخصات زیر است:

- نمودار این تابع یک سهمی قائم است که برحسب علامت a به یکی از دو صورت زیر است.

اگر $a>0$ باشد:

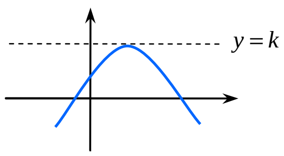


اگر $a<0$ باشد:



- طبق مورد قبل، نمودار برای $a>0$ دارای می‌نیمم نسبی (و مطلق) و برای $a<0$ نمودار دارای ماکزیمم نسبی (و مطلق) است.
- در این تابع داریم $y''=2a$ و بنابراین در حالت $a>0$ تقعر نمودار همواره رو به بالا و در حالت $a<0$ تقعر نمودار همواره رو به پایین است. به‌علاوه، نمودار هیچ‌گاه نقطه‌ی عطف ندارد.
- خط $x=-\frac{b}{2a}$ همواره از نقطه‌ی اکسترمم (رأس) نمودار عبور می‌کند و محور تقارن نمودار است.

نکته. اگر خط $y=k$ بر نمودار $y=ax^2+bx+c$ مماس باشد (یا اکسترمم تابع بر خط $y=k$ واقع باشد)، آنگاه معادله‌ی $ax^2+bx+c=k$ دارای ریشه‌ی مضاعف است.



تست. اگر مقدار ماکزیمم نسبی تابع با ضابطه‌ی $y=ax^2+2x+3$ برابر ۴ باشد، در این صورت a کدام است؟

۱) ۱ ۲) -2 ۳) -1 ۴) ۲

گزینه‌ی ۳ : طبق یادآوری بالا:

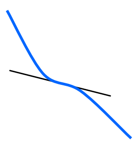
$$ax^2+2x+3=4 \rightarrow ax^2+2x-1=0 \xrightarrow{\Delta=0} 4+4a=0 \Rightarrow a=-1$$

تابع درجه سوم:

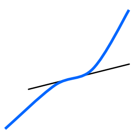
در تابع $y=ax^3+bx^2+cx+d$، عبارت $y'=0$ یک معادله‌ی درجه دوم است و لذا برحسب تعداد جواب‌های آن وضعیت کلی نمودار تابع مشخص می‌شود.

- اگر در معادله‌ی $y'=0$ عدد Δ منفی باشد، آنگاه تابع یا صعودی اکید است و یا نزولی اکید. لذا اکسترمم ندارد و فقط یک نقطه‌ی عطف (با مماس مایل) دارد. نمودار تابع در این حالت، به یکی از دو صورت زیر است:

اگر $a<0$ باشد.

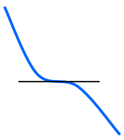


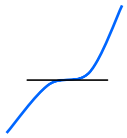
اگر $a>0$ باشد.



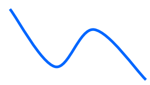
- اگر در معادله‌ی $y'=0$ عدد Δ برابر صفر باشد، آنگاه باز هم تابع یا صعودی اکید است یا نزولی اکید. لذا تابع اکسترمم ندارد و فقط یک نقطه‌ی عطف (با مماس افقی) دارد.

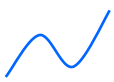
• **توجه کنید:** در این حالت نقطه‌ی عطف، ریشه‌ی هر دو معادله‌ی $y'=0$ و $y''=0$ است.


اگر $a<0$ باشد.


اگر $a>0$ باشد.

- اگر در معادله‌ی $y'=0$ عدد Δ مثبت باشد، آنگاه این معادله دارای دو ریشه است که یکی نقطه ماکزیمم نسبی و دیگری نقطه می‌نیمم نسبی را مشخص می‌کند. نمودار این تابع به یکی از دو صورت زیر است:


اگر $a<0$ باشد.

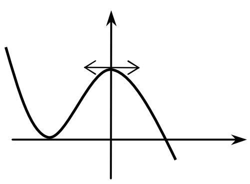

اگر $a>0$ باشد.

مشاهده می‌کنید که تابع باز هم عطف با مماس مایل دارد.

نکته. در تابع درجه سوم موارد مهم زیر برقرارند:

- تابع درجه سوم همواره دارای یک نقطه عطف است که از حل معادله‌ی $y''=0$ طول آن به‌صورت $x=-\frac{b}{3a}$ بدست می‌آید.
- نقطه‌ی عطف تابع درجه سوم، همواره مرکز تقارن منحنی تابع است.

تست. ضابطه‌ی تابع نمودار مقابل کدام می‌تواند باشد؟



۱) $y=-x^3-3x^2+4$ ۲) $y=-x^3+3x^2+4$

۳) $y=x^3-3x^2+4$ ۴) $y=x^3+3x^2+4$

گزینه‌ی ۱ :

با توجه به نمودار، ضریب x^3 باید منفی باشد و در نتیجه در گزینه‌های ۳ و ۴. مشاهده می‌کنید که طول عطف نمودار منفی است، ولی در گزینه‌ی ۲، عدد $-\frac{b}{3a}=-\frac{3}{-3}=1$ مثبت است و لذا این گزینه هم رد می‌شود.

ارتباط ضابطه‌ی تابع و نمودار آن از مواردی است که در کنکور تجربی معمولاً یک تست دارد. هنگام پاسخ‌دهی، نکات زیر راهگشا خواهد بود:

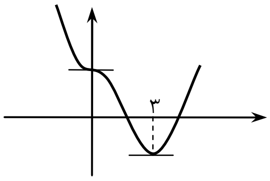
تشخیص نمودار: موارد زیر را در نظر داشته باشید:

- دامنه‌ی تابع
- نقاط برخورد نمودار با محورهای مختصات
- مجانب‌های منحنی تابع در صورت وجود

- استفاده از مشتق جهت تعیین صعودی و نزولی بودن و همچنین نقاط اکسترمم
- استفاده از مشتق دوم جهت تعیین تقعر و نقاط عطف

نمونه‌های بعد را ببینید:

تست. شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{1}{4}x^4+ax^3+bx^2+2$ است. $a+b$ کدام است؟ (تجربی ۹۰)



۱) -1
۲) صفر
۳) ۲
۴) ۱

گزینه‌ی ۱ :

به شکل نگاه کنید؛ در نقطه‌ی ۳ نمودار مماس افقی دارد، یعنی مشتق صفر است:

$$y'=x^3+3ax^2+2bx=0 \xrightarrow{x=3} 27+27a+6b=0$$

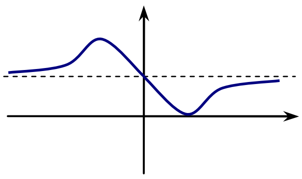
از طرف دیگر، در $x=0$ خط مماس از نمودار عبور کرده؛ یعنی این نقطه عطف است و باید مشتق دوم در آن صفر شود:

$$y''=3x^2+6ax+2b=0 \xrightarrow{x=0} b=0$$

اکنون مقدار b را در معادله‌ی قبلی صفر قرار می‌دهیم:

$$27+27a+6b=0 \to 27+27a=0 \Rightarrow a=-1$$

تست. شکل مقابل نمودار تابع $y=\frac{ax^2+bx+8}{x^2+4}$ است. $a+b$ کدام است؟ (تجربی ۹۴)



۱) -7
۲) -6
۱) ۹
۱) ۱۰

گزینه‌ی ۲ :

چون نمودار بر محور طول مماس است، معادله‌ی $y=0$ ریشه‌ی مضاعف دارد:

$$y=0 \to \frac{ax^2+bx+8}{x^2+4}=0 \to ax^2+bx+8=0 \xrightarrow{\Delta=0} b^2-32a=0$$

از طرف دیگر، مقدار عرض نمودار در $x=0$ و مقدار y در معادله‌ی مجانب افقی یکسان هستند:

$$x=0 \to y=\frac{a(0)^2+b(0)+8}{(0)^2+4}=\frac{8}{4}=2$$

معادله‌ی مجانب افقی $y=\frac{a}{1}=a$ است و در نتیجه $a=2$ است. این مقدار را در رابطه‌ی $b^2-32a=0$ جایگزین می‌کنیم:

$$b^2-64=0 \to b=\pm 8$$

چون دو جواب برای b داریم، یکی از آن‌ها نادرست است؛ مقدارهای $a=2$ و $b=8$ را در تابع آزمایش می‌کنیم:

$$y=\frac{۲x^۲+۸x+۸}{x^۲+۴}=\frac{۲x^۲+۸}{x^۲+۴}+\frac{۸x}{x^۲+۴}=۲+\frac{۸x}{x^۲+۴}$$

در عبارت $۲+\frac{۸x}{x^۲+۴}$، برای xهای مثبت، مقدار y از ۲ بزرگ‌تر است، ولی در نمودار این چنین نیست. پس $a=۲$ و $b=-۸$ قبول بوده و $a+b=-۶$ است.

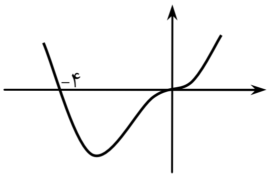
تست. شکل مقابل نمودار تابع $f(x)=x^۴+ax^۳+bx$ است. با تعیین مقادیر a و b، می‌نیمم تابع کدام است؟ (تجربی ۹۵)

۱) -۳۶

۲) -۳۲

۳) -۲۷

۴) -۲۴



گزینه‌ی ۳:

به شکل نگاه کنید؛ دو خصوصیت ساده در نمودار هست:

- نقطه‌ی $(-۴,۰)$ روی نمودار قرار دارد:

$$(-۴)^۴+a(-۴)^۳+b(-۴)=۰ \xrightarrow{\div ۴} ۶۴=۱۶a+b$$

- در مماس افقی بوده و لذا مشتق برابر صفر است:

$$y'=۴x^۳+۳ax^۲+b \xrightarrow{x=۰} ۰+۰+b=۰ \Rightarrow b=۰$$

قرار دادن $b=۰$ در معادله‌ی $۶۴=۱۶a+b$ مقدار $a=۴$ را خواهد داد. پس ضابطه‌ی مشتق به صورت است:

$$y'=۴x^۳+۱۲x^۲=۰ \rightarrow ۴x^۲(x+۳)=۰ \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x=۰ \\ x=-۳ \end{array}\right.$$

در نتیجه؛ طول نقطه‌ی می‌نیمم برابر -۳ بوده و مقدار آن با جایگذاری در تابع بدست خواهد آمد:

$$f(-۳)=(-۳)^۴+۴(-۳)^۳=۸۱-۱۰۸=-۲۷$$

تمرین تست

(حل تست‌ها بخش مهمی از فرآیند یادگیری است؛ انجام دقیق آن‌ها باعث تکمیل و عمیق شدن یادگیری خواهد شد!)

۱- به ازای مجموعه مقادیر a، تقعر منحنی به معادله‌ی $y=x^۴+ax^۳+\frac{۳}{۲}x^۲$ همواره رو به بالا است؟ (سراسری ۹۲)

۱) $-۱<a<۱$ ۲) $-۱<a<۲$ ۳) $-۲<a<۱$ ۴) $-۲<a<۲$

۲- تقعر نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^{\frac{۴}{۳}}-۴x^{\frac{۱}{۳}}$ در بازه‌ی (a,b) رو به پایین است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۴ (ریاضی ۸۸)

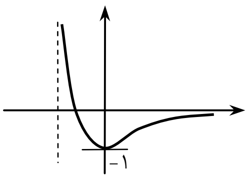
۳- تقعر نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x^۲+۹}{x^۲+۱۲}$ در بازه‌ی (a,b) رو به بالا است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ∞ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ (ریاضی ۸۷)

۴- منحنی به معادله‌ی $y=\frac{ax^۲}{x^۲+x-a}$ دقیقاً دو مجانب دارد. اگر این دو در نقطه‌ی $(x_۰,y_۰)$ متقاطع باشند، $x_۰+y_۰$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $-\frac{۳}{۴}$ ۴) -۱

۵- شکل روبرو قسمتی از نمودار تابع $f(x)=\frac{ax+b}{(x+۱)^۲}$ است. دوتایی (a,b) کدام است؟

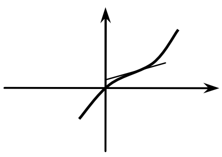


۱) $(-۲,۲)$ ۲) $(۱,-۱)$
۳) $(-۲,-۱)$ ۴) $(۲,۱)$

۶- طول نقطه‌ی عطف تابع $f(x)=\frac{x^۳-۶x^۲+۷x+۸}{x}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲- ۳) فاقد عطف ۴) ۱

۷- شکل زیر نمودار تابع $y=x^۳+ax^۲+bx$ است. دوتایی (a,b) کدام می‌تواند باشد؟



۱) $(-۱,۱)$
۲) $(۱,-۱)$
۳) $(-۱,-۱)$
۴) $(۱,۱)$

۸- اگر نقطه‌ی تلاقی مجانب‌های تابع $f(x)=\frac{x^۲+ax-۱}{x-۱}$ روی محور طول‌ها باشد، a کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۳- ۳) ۳ ۴) ۲

۹- تابع $y=xe^x$ در نقاط به طول $x=-۲$ و $x=-۱$ به ترتیب چه وضعیتی دارد؟

۱) عطف - می‌نیمم ۲) عطف - ماکزیمم ۳) می‌نیمم - عطف ۴) ماکزیمم - عطف

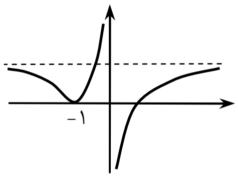
۱۰- اگر نمودار منحنی به معادله‌ی $f(x)=\frac{x^۳+ax+b}{x^۳}$ بـه صـورت زیـر باشـد، $a+b$ کـدام است؟

۱) -۵

۲) -۲

۳) ۱

۴) -۱



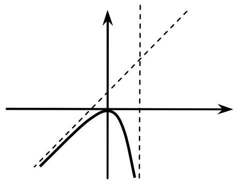
۱۱- شکل زیر، نمودار تابع $y=\frac{x^۲+a}{x+b}$ در بازه‌ی $(-\infty,۱)$ است. دوتایی مرتب (a,b) کدام است؟

۱) $(۱,۰)$

۲) $(۱,-۱)$

۳) $(۰,-۱)$

۴) $(۰,۱)$



۱۲- مجانب‌های نمودار تابع $y=\frac{x^۳}{x^۲-x-۶}$ در دو نقطه‌ی A و B متقاطع‌اند. مختصات نقطه‌ی وسط پاره‌خط AB کدام است؟

۱) $(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})$ ۲) $(\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲})$ ۳) $(\frac{۳}{۲},-\frac{۱}{۲})$ ۴) $(\frac{۳}{۲},\frac{۱}{۲})$

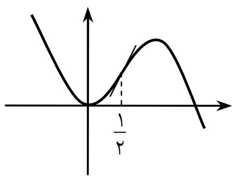
۱۳- اگر نمودار تابع به معادله‌ی $y=-x^۳+ax^۲+bx+c$ به شکل زیر باشد، آنگاه حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۱

۲) $\frac{۵}{۴}$

۳) $\frac{۳}{۲}$

۴) $\frac{۷}{۴}$



۱۴- جهت تقعر تابع $y=(x^۲+\frac{۵}{۳})x^{\frac{۱}{۴}}$ در چند نقطه تغییر می‌کند؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

راهنمایی: بهتر است ابتدا $x^{\frac{۱}{۴}}$ را داخل پرانتز ضرب کرده و سپس مشتق بگیرید؛ توجه کنید عددهای منفی در دامنه‌ی تابع نیستند!

۱۵- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=ax^۲+bx\sqrt{x}+\frac{۱}{۴}$ در نقطه‌ی $(\frac{۱}{۴},-۱)$ دارای نقطه‌ی عطف است. a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

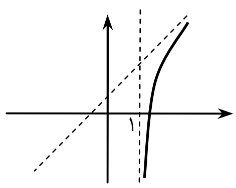
۱۶- شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $f(x)=\frac{x^۲+a}{x+b}$ است. در این صورت کدام صحیح است؟

۱) $a>b=-۱$

۲) $a<b=-۱$

۳) $b>a=-۱$

۴) $b<a=-۱$



کلید تست‌های تألیفی

سؤال	گزینه	سؤال	گزینه	سؤال	گزینه	سؤال	گزینه
۱	۴	۹	۱	۱۷		۲۵	
۲	۲	۱۰	۱	۱۸		۲۶	
۳	۴	۱۱	۳	۱۹		۲۷	
٤	۳	۱۲	۲	۲۰		۲۸	
٥	۳	۱۳	۳	۲۱		۲۹	
٦	۲	۱٤	۲	۲۲		۳۰	
۷	۱	۱٥	۴	۲۳		۳۱	
۸	۱	۱٦	۲	۲٤		۳۲	

تست کنکور

۱- مجانب‌های منحنی به معادله‌ی $y=\frac{x^{3}+x^{2}}{(x-1)^{2}}$ در نقطه‌ی A متقاطع‌اند. عرض این نقطه کدام است؟ (تجربی ۸۲)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۱ ۴) ۲

۲- به ازای کدام مقدار a تقعر نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=ax^{3}+(1-a^{2})x^{2}+3x$ در بازه‌ی $(-\infty,\frac{1}{2})$ به طرف پایین و در بازه‌ی $(\frac{1}{2},+\infty)$ به طرف بالا است؟ (تجربی ۸۲)

۱) -2 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) ۲

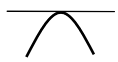
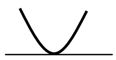
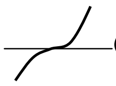
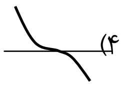
۳- تقعر نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\frac{1}{x^{2}+12}$ در بازه‌ی $(-a,a)$ رو به پایین است. بیشترین مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ (تجربی ۸۳)

۴- فاصله‌ی نقطه‌ی تقاطع مجانب‌های منحنی به معادله‌ی $y=\frac{x-\sqrt{x}}{x^{2}-3x+2}$ از مبدأ مختصات کدام است؟ (تجربی ۸۵)

۱) ۲ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) ۵

۵- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^{4}-3x^{3}+3x^{2}-x$ در نقطه‌ی $x=1$ کدام وضع را با محور xها دارد؟ (تجربی ۸۶)

۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

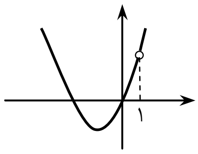
۶- منحنی به معادله‌ی $y=\sqrt{(a-1)x^{2}+ax+2-a}$ دارای دو خط مجانب است. مجموعه مقادیر a به کدام صورت است؟

۱) $a<2$ ۲) $a>0$ ۳) $a>1$ ۴) $1<a<2$ (تجربی ۸۷)

۷- طول نقطه عطف نمودار تابع $f(x)=x^{\frac{۵}{۳}}-۱۰x^{\frac{۲}{۳}}$ کدام است؟ (تجربی ۸۷)

۱) ۲-   ۲) ۰ و ۲-   ۳) ۲   ۴) ۰ و ۲

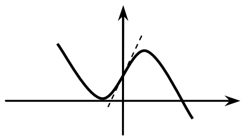
۸- شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{۴x^۳+ax+b}{x-۱}$ است. دوتایی مرتب (a,b) کدام است؟ (تجربی ۸۷)



۱) $(۰,-۴)$ ۲) $(-۴,۰)$

۳) $(-۲,۱)$ ۴) $(۴,۰)$

۹- شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=-x^۳+ax^۲+bx+۲$ است. زوج مرتب (a,b) کدام است؟ (تجربی ۸۸)



۱) $(۰,-۳)$ ۲) $(۱,-۲)$

۳) $(۰,۳)$ ۴) $(۰,۶)$

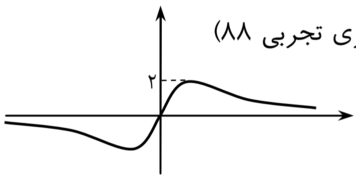
۱۰- نقطه‌ی تلاقی مجانب‌های نمودار تابع $y=۲x-\sqrt{x^۲-۲x}$ کدام است؟ (تجربی ۸۸)

۱) $(-۱,۰)$ ۲) $(-۱,۱)$ ۳) $(۱,۲)$ ۴) $(۱,۳)$

۱۱- تقعر نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=۶x^۵-۵x^۴+۲x+۷$ در بازه‌ی $(a,+\infty)$ رو به بالا است. کمترین مقدار a کدام است؟

۱) ۱-   ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) صفر   ۴) ۱   (تجربی ۸۸)

۱۲- شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{ax+b}{x^۲+۱}$ است. a کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۸)



۱) ۴   ۲) ۳

۳) ۲   ۴) ۱

۱۳- مجموعه طول نقاطی که در آن‌ها تقعر منحنی به معادله‌ی $f(x)=(x^۲+۲x+۲)e^{-x}$ رو به پایین باشد، به کدام صورت است؟

۱) $-۲<x<۰$ ۲) $-۱<x<۲$ ۳) $۰<x<۱$ ۴) $۰<x<۲$ (تجربی ۸۹)

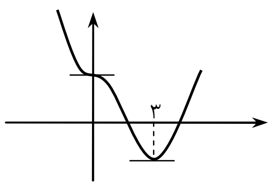
۱۴- یکی از مجانب‌های منحنی به معادله‌ی $y=\frac{۲x^۳+ax^۲+۵}{x^۲+x}$ محور xها را در نقطه‌ای به طول ۲- قطع می‌کند. a کدام است؟

۱) ۳-   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۶   (تجربی ۹۰)

۱۵- طول نقطه عطف منحنی به معادله $y=\frac{x}{۱+|x|}$ کدام است؟ (تجربی ۹۰)

۱) ۱-   ۲) فاقد نقطه‌ی عطف   ۳) صفر   ۴) ۱

۱۶- شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{۱}{۴}x^۴+ax^۳+bx^۲+۲$ است. $a+b$ کدام است؟ (تجربی ۹۰)



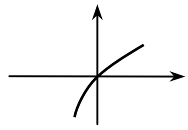
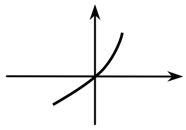
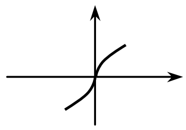
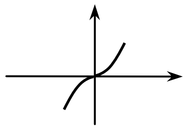
۱) ۱-   ۲) صفر

۳) ۲   ۴) ۱

۱۷- منحنی نمایش تابع $y=-x^4+4x^3-3$ در کدام بازه صعودی و تقعر آن رو به پایین است؟ (تجربی ۹۱)

۱) $(2,3)$ ۲) $(0,2)$ ۳) $(0,3)$ ۴) $(2,+\infty)$

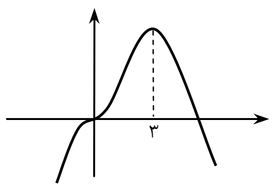
۱۸- نمودار تابع $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ در حوالی مبدأ مختصات چگونه است؟ (تجربی ۹۱)

۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

۱۹- اگر $f(x)=\dfrac{x+3}{2x+1}$ و $g(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$ باشند، نقطه تلاقی مجانب‌های تابع fog کدام است؟ (تجربی ۹۱)

۱) $(-1,0)$ ۲) $(-1,1)$ ۳) $(-2,2)$ ۴) $(0,1)$

۲۰- شکل روبرو نمودار تابع $f(x)=ax^4+2x^3+bx^2$ است. a کدام است؟ (تجربی ۹۲)



۱) -1
۲) $-\frac{1}{2}$
۳) $-\frac{1}{4}$
۴) $\frac{1}{4}$

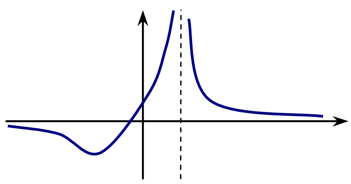
۲۱- تقعر منحنی به معادله‌ی $y=x\sqrt{x^2+2}$ در بازه‌ی $(a,+\infty)$ رو به بالا است. کمترین مقدار a کدام است؟

۱) -1 ۲) $-\infty$ ۳) صفر ۴) ۱ (تجربی ۹۲)

۲۲- در کدام بازه، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=-x^4+8x^3-18x^2$ نزولی و تقعر نمودار آن رو به بالا است؟ (تجربی ۹۳)

۱) $(1,4)$ ۲) $(1,3)$ ۳) $(0,3)$ ۴) $(0,1)$

۲۳- شکل مقابل نمودار تابع $y=\dfrac{x+a}{x^2+bx+4}$ است. مقادیر a و b چگونه است؟ (تجربی ۹۳)

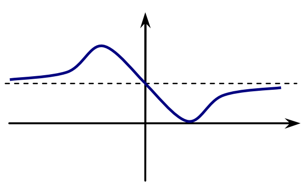


۱) $a<0$ و $b=4$
۲) $a<0$ و $b=-4$
۱) $a>0$ و $b=4$
۱) $a>0$ و $b=-4$

۲۴- اگر تابع‌هایی به صورت $y=x^3-(m+2)x^2+3x$ همواره صعودی باشند، آنگاه مجموعه طول نقاط عطف این توابع، در کدام بازه است؟ (تجربی ۹۴)

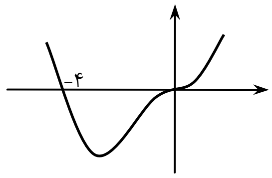
۱) $[-2,0]$ ۲) $[-2,2]$ ۳) $[-1,1]$ ۴) $[0,1]$

۲۵- شکل مقابل نمودار تابع $y=\dfrac{ax^2+bx+8}{x^2+4}$ است. $a+b$ کدام است؟ (تجربی ۹۴)



۱) ۷-
۲) ۶-
۱) ۹
۱) ۱۰

۲۶- شکل مقابل نمودار تابع $f(x)=x^۴+ax^۳+bx$ است. با تعیین مقادیر a و b، می‌نیمم تابع کدام است؟ (تجربی ۹۵)



۱) ۳۶-

۲) ۳۲-

۳) ۲۷-

۴) ۲۴-