



مطالب ناب مهندسی صنایع

https://telegram.me/industrialEngineering_qie

نظریه صف

محمد مدرس یزدی

Queuing Theory

Mohammad Modarres Yazdi

www.bank-projeh.ir

فهرست

www.bank-projeh.ir

مدرس برداشتی: محمد
 طنزی صفت
 منبع به اسنگنه
 و ازدحامه من
 کتابخانه من
 ۱- مهدی‌یاری، طنزی الف مرکز دانشگاهی سه‌لیوان

صفحه	عنوان	صفحه	عنوان
۱۲۲		۳۳	۱۱۰.۲ سربهای همگرا
۱۲۲	فصل ۶. مدل‌های نمایی در سیستمهای صفت	۳۵	۱۲۰.۲ سری نصاعد هندسی
۱۲۵	۶. فرایند تولد و مرگ	۳۵	۱۳۰.۲ تبدیل ۲
۱۲۸	۶. بیان فرایند تولد و مرگ در چارچوب زنجیره مارکوف	۴۰	مسائل
۱۳۴			
۱۳۶	۴.۰ مدل $M/M/1$	۴۵	فصل ۳. توزیع نمایی و فرایند پواسون
۱۴۲	۴.۰ مدل $M/M/1/K$	۴۵	۱۰.۳ توزیع نمایی
۱۴۴	۴.۰ مدل $M/M/m$	۴۷	۲۰.۳ خواص توزیع نمایی
۱۴۶	۴.۰ مدل $M/M/m/C$	۵۲	۳۰.۳ فرایند شمارشی
۱۴۸	۶.۰ مدل‌های نمایی با آهنگ درود یا آهنگ خدمت‌دهی متغیر	۵۵	۴۰.۳ فرایند پواسون
۱۴۹	۶.۰ دوره مشغول بودن و بیکاری سیستم در مدل ۱	۵۶	۵۰.۳ رابطه بین فرایند پواسون و توزیع نمایی
۱۵۲	۶.۰ دوره تکرار از مدل‌های نمایی	۵۸	۶۰.۳ خواص فرایند پواسون
۱۶۰		۶۳	۷۰.۳ تابع توزیع ارلانگی
۱۶۱	فصل ۷. سیستمهای مارکوفی	۶۷	مسائل
۱۶۳			
۱۶۸	۱.۰.۷ یک مثال	۷۵	فصل ۴. زنجیره‌های مارکوف
۱۷۲	۲.۰.۷ $M/M/1$ با درود گردیده	۷۵	۱۰.۴ فرایند مارکوف
۱۷۶	۳.۰.۷ مدل $M/M/1$ با خدمت گردیده	۷۶	۲۰.۴ زنجیره‌های مارکوف
۱۷۹	۴.۰.۷ $M/E_r/1$	۸۳	۳۰.۴ طبقه‌بندی حالات سیستم در یک زنجیره مارکوف
۱۹۰	۵.۰.۷ $E_r/M/1$	۸۸	۴۰.۴ احتمالات حدی در زنجیره‌های مارکوف
۲۰۱	۶.۰.۷ نظام اوایت	۹۳	۵۰.۴ زنجیره‌های مارکوف با زمان پیوسته
۲۱۰	۷.۰.۷ شبکه‌های صفت	۱۰۱	۶۰.۴ روابط حدی در زنجیره مارکوف با زمان پیوسته
۲۱۰	۸.۰.۷ مسائل	۱۰۲	مسائل
۲۱۹			
۲۲۰	فصل ۸. سیستمهای صفت شمره مارکوفی		فصل ۵. چارچوب کلی سیستمهای صفت
۲۲۲	۱.۰.۸ مدل $M/G/1$	۱۱۰	۱۰.۵ بیان نرسیمی سیستم بر حسب زمان
۲۲۱	۲.۰.۸ مدل $M/G/1$ با درود زده	۱۱۰	۲۰.۵ دوره تکرار و دوره پایدار سیستم
-			۳۰.۵ رابطه بین معیارهای ارزیابی یک سیستم صفت
۲۲۵	۳.۰.۸ مدل $M/G/m$	۱۱۱	۴۰.۵ دوره بیکاری و دوره مشغول بودن یک سیستم صفت
۲۲۵	۴.۰.۸ مدل $G/M/1$	۱۱۳	۵۰.۵ ضرب بهره‌وری
۲۲۵	۵.۰.۸ مسائل	۱۱۶	۶۰.۵ سیستمهای صفت قاعی
۲۲۵		۱۱۷	مسائل
۲۲۵	فصل ۹. بهینه‌سازی سیستمهای صفت	۱۱۸	
۲۲۵	۱.۰.۹ طبقه‌بندی و هزینه‌های یک سیستم صفت	۱۲۱	

عنوان	
۲.۹ تابع هزینه	صفحه ۲۲۶
۳.۹ منابع های نصیم در سیستم‌های صفحه	صفحه ۲۲۸
۴.۹ انتخاب محل مبتنی صفحه	صفحه ۲۴۴
سائل	صفحه ۲۵۰
مرجعها	صفحه ۲۵۵
واژه‌نامه	صفحه ۲۵۷

بسم الله الرحمن الرحيم

پیشگفتار

نظریه‌صف بکی از مهمترین زمینه‌های کاربرد نظریه احتمالات و فرایندهای تصادفی است. با توجه به نقش و اهمیت اقتصادی و اجتماعی صفت در زمینه‌های مهندسی، مخابرات، سیستم‌های حمل و نقل، کامپیووتر، خدمات، تولید، و سیستم‌های اجتماعی، بسیاری از مهندسان و ریاضیدانان از سالها قبلاً به تحقیق دراین زمینه پرداخته‌اند. دراین تحقیقات، همکام با سطح روش‌های تحلیلی به ارائه کاربردهای جدید نیز توجه زیادی شده است.

با توجه به توسعه گسترده نظریه‌صف، اکنون سال‌هاست که تدریس آن منحصر به روش‌های ریاضی و آمار نیست، بلکه به آموزش آن در رشته‌های مهندسی صنایع، مخابرات، کامپیووتر، مدیریت، اقتصاد، آمار و ریاضی، و نظایر اینها اهمیت زیادی داده می‌شود. کتاب حاضر، در درجه اول برای استفاده دانشجویان کارشناسی و کارشناسی ارشد رشته‌های فوق تالیف شده است، اما در عین حال می‌تواند مورد استفاده مهندسان و سایر کسانی فرار گیرد که به نوعی با طراحی و تحلیل سیستم‌های اقتصادی، اجتماعی، و مهندسی سروکار دارند. بدین لحاظ، در نگارش کتاب سعی شده است که مفاهیم اصلی و کاربردی تحت الشاع اثباتهای بیچیده ریاضی واقع شود؛ با وجود این از بیان مبانی ریاضی و آماری مربوطه نیز صرف نظر نشده است، زیرا اساساً نظریه صفت بر پایه اصول ریاضی بنا نهاده شده است.

در فصل اول کتاب، به ارائه تعریف سیستم‌های صفت و برخی تعاریف مقدماتی لازم برای درک نظریه‌صف پرداخته‌ایم.

فصل دوم کتاب، به اختصار به مورد احتمالات می‌پردازد و به مخصوص به اهمیت کاربرد احتمال شرطی و امید ریاضی شرطی در محاسبه عبارتهای احتمالی تأکید می‌شود. در فصل‌های سوم و چهارم، فرایندهای احتمالی، به مخصوص، نقش توزیع نمایی و فرایند بواسون و فرایند مارکوف مورد بررسی قرار می‌گیرند. در بسیاری از کتابهای نظریه‌صف، تنها اشاره‌ای به این مباحث می‌شود و بررسی بیشتر را به کتابهای مربوط به فرایندهای تصادفی واگذار می‌کنند. لیکن، چون در دانشگاه‌های مسا درس فرایندهای تصادفی بیش نیاز نظریه‌صف

شش

هفت

نیست، در این کتاب، به تحریج این مباحث توجه پیشتری می‌شود. بدین ترتیب، در فصلهای اول تا چهارم، مقدمات لازم برای درک مفاهیم نظریه صفت را در می‌شود. در فصل پنجم، به کلیات سیستمهای صفت و تحریج رابطه‌های مربوط به این سیستمهای صفت، صرف نظر از ویژگیهای آن می‌بردازیم. در سه فصل ششم و هشتم، حالتهای خاص سیستمهای صفت بررسی می‌شوند. در فصل نهم نیز نحوه بهینه‌سازی و بررسی عوامل قابل تغییر (یا منظرهای تصمیم) در سیستمهای صفت مورد بحث قرار می‌گیرند.

در همه فصول کتاب، مثالهای حل شده متعددی ارائه می‌شود. این مثال‌ها کاربردهای نظریه صفت را نیز نشان می‌دهند. در پایان هر فصل نیز تعداد نسبتاً زیادی مسائل حل نشده برای نمرین و همچنین آشنایی با زمینه‌های کاربرد مدل‌ها ارائه می‌شود. در اینجا لازم است از همه دانشجویانی که در تصحیح جزوایت، و ارائه پیشنهادهای مفید مؤلف را مساعدت و راهنمایی کرده‌اند تشکر کم. از همکاری دست‌اسدر کاران مرکز نشر دانشگاهی، به خصوص کارکان حوزه فنی مهندسی سپاسگزارم.

محمد مدرس

سیستمهای صفت

انتظار در صفت هر چند بسی ناخوشاید است، اما مناسفانه بخشی از واقعیت انتخاب ناپذیر زندگی را تشکیل می‌دهد. آنها، در زندگی روزمره خسود، با انواع مختلف صفت، که به ازین رفتن وقت، تبر و سرایه آهای انجامد، رویدرو می‌شوند. اوقاتی که در صفحه‌ای اتو بوس، ناهاجرودی، حرید و نشایر آهای بدهدار می‌رود، نمونه‌های ملموسی از این نوع از لایه‌ها در زندگی است. در جوامع امر و زی، صفحه‌ای، هم‌تری وجود دارد، که هزینه‌های اقتصادی، واجتماعی آنها به مرأت بیش از نمونه‌های ساده فوق است. از آن جمله می‌توان صفحه‌ای حاصل از ترافیک شهری، و نیز صفحه‌ای را که در فرودگاهها، بنادر، مؤسسات مخابراتی و در پشت فرایندهای تولید تشکیل می‌شود، نام برد. در مجموع، شاید بتوان گفت که انتظار در صفت دیگر استثنای نیست و بهصورت قاعده درآمده است.

از این بردن نتایج ناماً بعد انتظار در صفت بدون شناخت خصائص این پذیره امکان‌پذیر نیست. نظریه صفت، که به مطالعه صفحه‌ای دیدگاه، (یا ضمی می‌بردازد، تأثیر عوامل تشکیل‌دهنده صفت و راههای منطقی کاهش زمان انتظار را بررسی می‌کند. اگرچه هیچ کاهشی توان صفت را کلا از میان برد، اما می‌توان که ضایعات ناشی از آن را جنی الامكان کاهش داد.

هشت

نیست، در این کتاب، به تشریح این مباحث توجه بیشتری می‌شود، بدین ترتیب، در فصلهای اول ناچهارم، مقدمات لازم برای درک مفاهیم نظریه صفت‌فرآهم می‌شود. در فصل پنجم، به کلیات سیستمهای صفت و تشریح راه‌های مربوط به این سیستمهای صرف‌نظر از ویژگیهای آن می‌پردازم. در فصل ششم و هفتم، خانهای خاص سیستمهای صفت بررسی می‌شوند. در فصل نیز نحوه بهینه‌سازی و بررسی عوامل قابل تغیر (یا متغیرهای تصمیم) در سیستمهای صفت مورد بحث قرار می‌گیرند.

در همه فصول کتاب، مثالهای حل شده متعددی ارائه می‌شود. این مثالها کاربردهای نظریه صفت را نزد نشان می‌دهند. در باطن هر فصل نیز تعداد زیادی مسائل حل شده برای تمرين و همچنین آشنایی با زیستهای کاربرد مدلها ارائه می‌شود. در اینجا لازم است از همه دانشجویانی که در تصحیح جزوای، و ارائه پیشنهادهای مفید مؤلف را مساعدت و راهنمایی کرده‌اند تشکر کم. از همتاری دست‌اندرکاران مرکز نشر دانشگاهی، بهخصوص کارکنان حوزه فنی مهندسی سپاسگزارم.

محمد مدرس

سیستمهای صفت

انتظار در صفت هر چند بسی ناخوشایند است، اما متأسفانه بخشی از واقعیت اجنباب ناپذیر زندگی را تشکیل می‌دهد. انسانها، در زندگی روزمره خود با این اخلاق مختلف صفت، که به ازین رفتن وقت، نیرو و سرمایه آنها می‌انجامد، روبرو می‌شوند. اوافقی که در صفحه‌ای اتوومون، تاهازخوری، خرد و نظایر آنها بهدر می‌رود، نمونه‌های ملموسی از این نوع انلاوهای در زندگی است. در جوامع امروزی، صفحه‌ای همتری وجود دارد، که هزینه‌های اقتصادی، واجتماعی آنها بمراتب بیش از نمونه‌های ساده فوق است. از آن جمله می‌توان صفحه‌ای حاصل از ترافیک شهری، و نیز صفحه‌ای را که در فرودگاهها، بنادر، مؤسسات مخابراتی و در پشت فرایندهای تولید تشکیل می‌شود، نام برد. در مجموع، شاید بتوان گفت که انتظار در صفت دیگر استثنای نیست و به صورت فاعله درآمده است.

از بین بردن نتایج نسام‌اعد انتظار در صفت بدون شناخت خصائص این پدیده امکان‌پذیر نیست. نظریه صفت، که به مطالعه هنها از دیدگاه، (یاضی می‌پردازد، تأثیر عوامل تشکیل‌دهنده صفت و راه‌های منطقی کاهش زمان انتظار را بررسی می‌کند. اگرچه هیچ‌گاه نمی‌توان صفت را کلا از میان برد، اما می‌توان که خایعات ناشی از آن را حتی الامکان کاهش داد.

۲.۱ معیارهای ارزیابی یک سیستم صفت

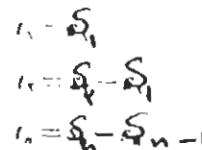
- برای سنجش عملکرد یک سیستم صفت، عمدتاً از سه معیار ذیر بهره‌هی اگرند؛ آن‌چهارم، بر حسب مورد می‌توان از معیارهای دیگر نیز استفاده کرد.
۱. طول صفت (تعداد مشتری‌ها که در صفت منتظر در بیان خدمت هستند) با تعداد مشتریان داخل سیستم.
 ۲. زمان انتظار هر مشتری در صفت یا سیستم، لازم و باید اوری است که مدت انتظار دیگر، مجموع زمان انتظار در صفت به اضافه مدت زمانی است که مشتری در حال در بیان خدمت است.
 ۳. درصدی از زمان که سیستم به علت بودن مشتری بیکار است (یا درصدی از زمان که سیستم مشغول به کار است).
- باید درنظر داشت که، در اکثر سیستم‌ها، معیارهای فوق ماهیت تصادفی دارند. در نتیجه، معیار ارزیابی سیستم، امید (باشه) این مشتری‌ها تصادفی خواهد بود.

۳.۱ ورودیهای سیستم

عملکرد سیستم به عوامل متعدد (با ورودیهای سیستم) سنتکی دارد، که عده‌ترین آنها عبارت اند از:

الف. التلوی ورود مشتری

بازدهی سیستم و معیارهای ارزیابی آن، یعنی طول صفت، مدت انتظار و درصد مشتری سیستم، استنگی به تعداد مشتری‌ها دارد که مراجعت می‌کنند. طبیعتاً هر چند نهاد در این معیار باشد، طول صفت و مدت زمان انتظار مشتری را بادرد و در حد ممکن از سیستم دور نداشت. فرض کنید که اولین مشتری در زمان t_1 ، دومی در زمان t_2 و به همین ترتیب n امین مشتری در زمان t_n وارد سیستم شود. زمان بین دو ورود متوالی مشتریها Δt می‌توان بدسترسی از نظریه کرد:



برای مشخص کردن **گلگوی ورود** مشتری، مشخص کردن t_1, t_2, \dots, t_n ... بروزی است، با توجه به اینکه زمان ورود مشتریها ماهیت تصادفی دارد، باشهی است که رامهایین دو درود متوالی بین مشتری‌ها تصادفی هستند. برای بررسی دقیق رابطه‌های را باشیم، می‌توانم صفت و محاسبه معیارهای ارزیابی آن، شاخص تابع توزیع این مددرهای

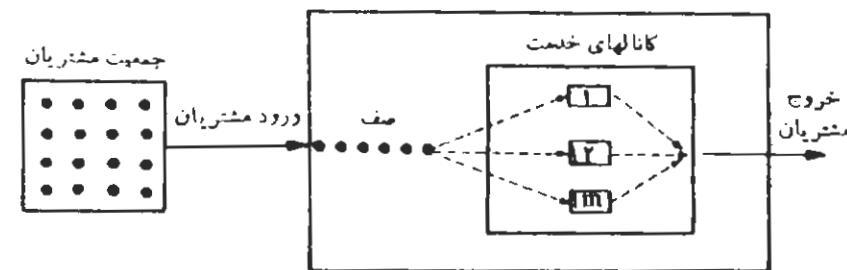
۱.۱ اجزای یک سیستم صفت

صف چیست؟ می‌سینی را در نظر بگیر بد که خدمتی را ارائه می‌کند، متفاصلانه برای دریافت این خدمت مراجعت می‌کنند، که آنها را اصطلاحاً مشتری می‌نامند. خدمت مورد نظر توسط شخص، ماشین و یا امکانات دیگر، که خدمت دهنده نامیده می‌شوند، ارائه می‌شود. هنگامی که یک مشتری جهت دریافت خدمت مورد نظر به می‌سیستم مراجعت می‌کند، دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد. اگر حداقل یکی از خدمات دهنده‌گان بیکار باشد، بلاهایله ارائه خدمت به مشتری جدید شروع می‌شود. اما چنانچه تمام خدمت دهنده‌گان مشغول به کار باشند، مشتری باید منتظر بماند؛ و بدین ترتیب، صفت شکل می‌شود. بنابراین، در هر سیستم که خدمتی را عرضه می‌کند، چنانچه در یک لحظه قدرت مشتری بیش از طرفیت سیستم (بمنی تعداد خدمت دهنده‌گان) باشد، بی شک صفت شکل خواهد شد. باد آوری می‌کنیم که مشتری و خدمت دهنده لزوماً انسان نیست و صفت مورد بحث نیز لزوماً معنای فیزیکی نخواهد داشت. مثلاً می‌سیستم تعمیرات یک کارخانه را در نظر بگیر بد. ماشینی که خراب شده است و منتظر تعمیر کار است، مشتری محسوب می‌شود. در این مدت، این ماشین در محل اسfer از خود جا می‌گیرد، نه در یک صفت فیزیکی؛ اسا چون منتظر دریافت خدمت است، نوعی از صفت، بمعنای مورد بحث در این مبحث، محسوب می‌شود.

مشتریهای بالقوه سیستم، یا به عبارت دیگر مجموعه مشتری‌ها که امکان دارد برای دریافت خدمت ارائه شده مراجعت کنند، را جمیعت مشتریان بالقوه می‌نامند.

با توجه به مطالب فوق یک سیستم صفت را، به طور کلی، مطابق شکل ۱۰.۱ می‌توان نشان داد.

مطابق شکل فوق، مشتری، که عنصری از جمیعت مشتریان بالقوه است، وارد سیستم می‌شود. اگر خدمت دهنده‌گان بیکار نباشند، این مشتری در صفت منتظر می‌ماند، تا نوبت به او برسد. پس از «دیگالت خدمت مورد نظر، از سیستم خارج می‌شود. اگر حداقل یکی از خدمات دهنده‌گان بیکار باشد، مشتری بدون انتظار در صفت، خدمت مورد نظر را دریافت و سیستم را ترک می‌کند.



شکل ۱۰.۱ اجزای یک سیستم صفت.

ماهیت تصادفی دارد، ولذا برای محاسبه معیارهای ارزیابی می‌ستم، تابع توزیع این متغیر تصادفی باید معلوم باشد. فرض کنید که مدت خدمت‌دهی بهیک مشتری برابر با X باشد. اگر تابع توزیع این متغیر تصادفی را با $B(X)$ نشان دهیم، رابطه زیر را خواهیم داشت:

$$B(X) = P[X \leq x] \quad (2.1)$$

آهنگ خدمت‌دهی، طبق تعریف، عبارت از میانگین تعداد مشتریانی است که در واحد زمان از یک خدمت‌دهنه خدمت دریافت می‌کنند. اگر آهنگ خدمت‌دهی را با μ نشان دهیم، بدینی است که بین μ و مدت خدمت‌دهی، یعنی X ، رابطه زیر برقرار است:

$$\mu = \frac{1}{E(X)} \quad (2.1)$$

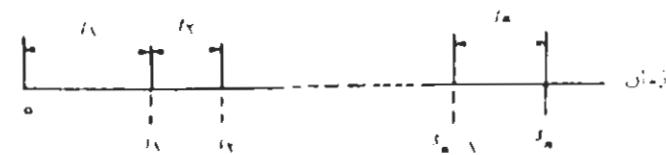
از طرف دیگر، آهنگ خروج مشتریان را می‌توان میانگین تعداد مشتریانی تعریف کرد که در واحد زمان از سیستم خارج می‌شوند. بدینی است که آهنگ خروج مشتریان بستگی به آهنگ خدمت‌دهی، تعداد خدمت‌دهنه و تعداد مشتریهای داخل سیستم دارد. مثلاً، اگر سیستم فقط دارای یک خدمت‌دهنه و این خدمت‌دهنه نیز دائمًا مشغول به کار باشد، آهنگ خروج مشتریان و آهنگ خدمت‌دهی پکان خواهد بود. مدت خدمت‌دهی، ممکن است مستقل از طول صفحه و با وابسته به آن باشد. مثلاً، در صورتی که طول صفحه زیاد شود، خدمت‌دهنه ممکن است (مثلاً با استفاده از ابزار پهنگ) بر سرعت کار خود بیفزاید. در این المپ نیز مدت خدمت‌دهی ممکن است نسبت به زمان ثابت با هنگام باشد. مثلاً، اگر خدمت‌دهنه ماشینی باشد که در اثر فرسودگی کارایی آن پایین پاید؛ طبعاً با مرور زمان مدت زمان خدمت‌دهی نیز افزایش می‌یابد. خدمت‌دهنه نیز ممکن است همزمان با این خدمت بهیک یا چند مشتری ببردارد:

ج. تعداد خدمت‌دهنگان

تعداد خدمت‌دهنگان در بازده سیستم مؤثر است. این خدمت‌دهنگان به صورت مولای عمل می‌کنند؛ یعنی، هر کدام به طور مستقل بهیک از مشتریها خدمت می‌دهند. گاهی به جای خدمت‌دهنه، از عبارت کافال خدمت استفاده می‌شود.

د. ظرفیت صفحه

منظور از ظرفیت صفحه حداقل تعداد مشتریانی است که می‌توانند در صفحه قرار گیرند.



شکل ۲.۱ دیده و ورود، مسازه‌های بین دو ورود متوالی مشتریها

تصادفی فهرودت دارد. اگر تابع توزیع این متغیر تصادفی را با (1) نشان دهیم، خواهیم داشت

$$(1) = P[X \leq x] \quad (2.1)$$

یک کمیت مفید برای بررسی الگوی درود مشتری، آهنگ ورود مشتری است. که طبق تعریف می‌باشند، تعداد مشتریها است که در واحد زمان وارد سیستم می‌شوند. آهنگ ورود مشتری را معمولاً با λ نشان می‌دهند. بدینی است که λ برای باعکس میانگین زمان بین دو ورود متوالی است. مثلاً، ساده‌ترین حالت را در نظر بخیرید، که در آن زمان بین دو ورود متوالی مشتریها ثابت و برایر با نیم ساعت باشد. در این صورت، تعداد مشتریها که در ساعت وارد سیستم می‌شوند، برایر با 2 است.

ورود مشتریها به صورت اتفاقی، با بهصورت گروهی است. در مورد ورودهای گروهی، مثلاً، ورود مشتریانی که همزمان به وسیله اتوبوس وارد یک مهاباده بین راه می‌شوند، غالباً با دو متغیر تصادفی سروکار داریم؛ یکی زمان بین دو ورود متوالی گروهها و دیگری تعداد مشتریهای هر گروه.

عامل مهم دیگر، همگن بودن یا نبودن الگوی ورود مشتریها بر حسب زمان است. آهنگ ورود مشتری می‌تواند در زمانهای مختلف ثابت، و با غیرثابت باشد. مثلاً، اکثری ورود مشتری بهیک سیستم ثابت، که در آن تعداد متفاوت از مشتریان در ساعت شبانه‌روز یک‌سانیست، غیرثابت است.

در برخی از سیستمهای آهنگ دود مشتری بطور حق بتوانستگی دارد. مثلاً، اگر طول صفحی زیاد باشد، ممکن است مشتری از ورود به این سیستم صفحه منصرف شود و به سیستم دیگری مراجعت کند. لذا در چنین سیستمی، آهنگ ورود مشتری آرامتر از آهنگ ورود مشتری در سیستم متشابه است که صفحه طولانی ندارد.

ب. التلوی خدمت‌دهی شناخت التلوی خدمت‌دهی (مدت زمانی که ارائه خدمت بهیک مشتری طول می‌کند) نیز برای مسنجش عملکرده سیستم ضرورت دارد. بدینی است هر چه مدت خدمت‌دهی کمتر باشد، طول صفحه و زمان انتظای مشتریها نیز کمتر خواهد شد. مدت زمان خدمت هم معمولاً

است بل افاضله کار خدمت دهی به آنها را شروع کند و حتی اگر لازم باشد کار خدمت دهی به مشتریهای دیگر را نیمه تمام بگذارد. در بعضی از سیستمها ارائه خدمت نیمه تمام نمی‌ماند، اما به مشتریابی با اولویت بالا، خدمت خارج از نوبت ارائه می‌شود.

ز. مرافق خدمت

در بعضی از سیستمها، خدمت ارائه شده شامل چند مرحله است. مثلاً برای دریافت مجوز از یک سازمان دولتی باید چندین مرحله را پشت سر گذاشت. مشتریابی با خدمات چند مرحله‌ای انواع مختلف دارد، که از جمله می‌توان سیستم‌های با مرافق خدمتی صری، موازی و ترکیبی از سری و موازی را نام برد.

۳.۱ نحوه نمایش یک سیستم صفت

یک سیستم صفت را در حالت کلی به طور فرازدادی به صورت $A/B/M/K/C/Z$ نشان می‌دهند. هر کدام از شش حرف فوایدی کی از عوامل اصلی سیستم است. $A(X)$ نابع توزیع زمان بین دو ورود، B یا (X) نابع توزیع مدت خدمت دهی، m تعداد خدمت دهنده، K ظرفیت کمیت، C جمعیت مشتریان و Z نظام سیستم را نشان می‌دهد. در فرادری از داده فوق، به جای A با B ، برحسب اینکه چه نابع توزیع تواند داشته باشد، از حروف ذیر به عنوان کد استفاده می‌شود:

کد	تابع توزیع
M	نمایی
E ,	ارلانگی با ۲ مرحله
D	قطعی
G	کلی

اگر ظرفیت صفت بینهایت باشد، چهارمین حرف (یعنی K) و اگر جمعیت مشتریان بالقوه بینهایت باشد، پنجمین حرف (یعنی C) را می‌توان حذف کرد. همچنین اگر نظم سیستم بر مبنای نوبت (یعنی FIFO) باشد، ششمین حرف نیز حذف می‌شود. مثلاً $M/M/2$ معرف سیستم صفتی است که زمان بین ورود متواتی دو مشتری به صورت نمایی، مدت خدمت دهی به صورت نمایی و تعداد خدمت دهنده ۲ است. در این سیستم، ظرفیت صفت و جمعیت مشتریان بالقوه، بینهایت فرض شده و نظام سیستم بر مبنای دعاایت نوبت است.

LIFO / E/۱/۱۰۵ / D معرف سیستم صفتی است که در آن زمان بین ورود متواتی

ظرفیت صفت با پنهانی است، متناهی است. متناهی بودن ظرفیت صفت می‌تواند ناشی از محدودیت لفای داخل سیستم مورد نظر باشد. در حالتی که ظرفیت صفت متناهی باشد، ورود مشتریها تا زمانی ادامه می‌باشد که طول صفت کمتر از ظرفیت آن باشد و از آن پس، از ورود مشتری جلوگیری می‌شود. در چنین حالتی فرض براین است که این مشتری دیگر منتظر نماند و از مراجعة مجدد به سیستم منصرف گردد.

۴. جمعیت مشتریان بالقوه

طول صفت و مدت زمان انتظار در صفت و همچنین بیکار بودن سیستم، ۴ جمعیت مشتریان (یعنی مشتریان بالقوه سیستم) نیز بستگی دارد. اگر تعداد مشتریانی که می‌توانند مراجعت کنند (به عنوان مثال، تعداد مشتریان یک سیستم تلفن در یک شهر بزرگ) خیلی زیاد باشد، جمعیت مشتریان را می‌توان نامتناهی فرض کرد؛ ولی، در مواردی جمعیت مشتریان ممکن است متناهی باشد. این حالت از جمله در مورد ماشینهایی که در یک کارگاه ممکن است خراب شوند و منتظر تعمیر بمانند، صدق می‌کند.

۵. قلل سیستم

منظور از تنظیم سیستم، نحوه انتخاب مشتریهای داخل صفت برای ارائه خدمت است. در یک سیستم، موقعی که یکی از خدمات دهنده‌گان بیکار و آماده ارائه خدمت می‌شود، ضایعه‌های مختلفی برای انتخاب مشتری بعدی می‌توانند وجود داشته باشد. متداولترین روش، در نظر گرفتن نوبت است؛ یعنی اینکه کسی که زودتر وارد سیستم شده، و جلوتر از همه در صفت فرادر گرفته باشد، زودتر انتخاب می‌شود. این نظم FIFO می‌نماید. در برخی سیستمها ممکن است انتخاب مشتری برخلاف فاصله فوق باشد؛ یعنی، آن مشتری انتخاب شود که دیفتر از همه وارد سیستم شده است. نامهایی که برای تایپ روی میز ماشین تویس ایجاد شده، معمولاً با این ضایعه مشتریان می‌شود. به این نظم LIFO می‌گویند. پایه دیگری برای انتخاب، ممکن است تصادف باشد، که SIRO نامیده می‌شود؛ این مورد از جمله انتخاب قطعات بدکی در یک ابزار را شامل می‌شود.

در نظر گرفتن اولویت برای مشتریهای مختلف، یکی از مباحث مهم نظریه صفت است. در بیاری از سیستمها، اهمیت مشتریها متفاوت است. برای گروههای مختلف مشتری، برحسب اهمیتی که برای سیستم دارند، اولویت‌های گوناگون در نظر گرفته می‌شود. در بعضی از سیستمها، برخی از مشتریان اولویت بالایی برخوردارند، که به محض ورود به سیستم، ارائه خدمات به آنها شروع می‌شود. در مورد این مشتریها، خدمت دهنده موظف

1. First-In First-Out 2. Last-In First-Out

3. Service In Random Order

ج. فرودگاهها و بنادر
فرودگاهها و بنادر، تک‌چد جزئی از مجموعه کل حمل و نقل هستند، بدقت اهمیتی که دارند، در نظریه صفت به‌طور جداگانه بررسی می‌شوند. باند فرودگاه را می‌توان یک خدمت دهنده است. در نظریه صفت به‌طور جداگانه بررسی می‌شوند. باند فرودگاهها بزرگتر چند باند و چند بخش آورده، در هر لحظه فقط یک هواپیما (در فرودگاهها بزرگتر چند باند و چند هواپیما) می‌تواند روی باند بنشیند و یا از آن بلند شود. بداین ترتیب، در فرودگاهها بروز در پرداخت و آمد، هواپیماهای برای نشتن روی باند ممکن است ماقبل (در حال برواز در بالای فرودگاه) در صفت انتظار بماند. شین هبین موضوع در بنادر نیز ممکن است اتفاق بیند، کشتیها، به علت محدودیت امکانات تخلیه و بارگیری، ممکن است حتی ماهها در انتظار بمانند. در فرودگاهها و بنادر، سیستمهای صفتی نیز به‌طور جزئی بوجود می‌آیند؛ نظیر: ارائه خدمات به مسافر، بارگیری کامیونها در ایستارهای توشه و نظایر آنها.

د. بیمارستانها و مرکزهای بهداشتی
می‌توان بیمارستان، یا حتی یک بخش آن را، یک سیستم صفت فرض کرد. بیماران، مشتری و امکانات درمان (نظیر اطاق‌عمل، تزریقات، آزمایشگاه و...)، خدمت‌دهنده محسوب می‌شوند.

ه. شبکه‌های کثور
خلعمنی که ارائه می‌شود، انتقال نامه و بسته‌های پستی از مبدأ مشخص به مقصد مورد نظر است. در اینجا مشتری، نامه و خدمت‌دهنده، امکانات پست، نظیر نامه‌دان، وسائل حمل و نقل بسته‌های پستی، و مانینهای تفکیک نامه محسوب می‌شود.

و. سیستم تعمیر و تکه‌داری تأسیسات صنعتی
در این مورد مانینهایی که خراب می‌شوند، نقش مشتری را دارند، و خلعمنی که ارائه می‌شود انواع تعمیرات اپهلهاری و نگهداری‌های بر نامه‌داری شده است. خدمت دهنده‌گان، تعمیر کاران و ایزار تعمیر هستند، پسرخلاف مثالهای بالا، کسی در آنها جمعیت مشتری‌های صلا نامتهایی بود، در این حالت جمیعت مشتریان فقط مانین آلات کارخانه‌ها، و در نتیجه متهای است.

ز. فرایند تولید کارخانجات
در یک خط تولید (مثلاً مونتاژ نهایی)، قطعاتی که باید به هم متصل شوند، مشتری،^۹ امکانات تولید، نظیر کارگران و ایزارها، خدمت‌دهنده محسوب می‌شوند. تعادل خط مولفه بوجود می‌آید که ورود مشتری به سیستم (بینی خواسته از یک مرحله تولید به مرحله بعدی) متناسب با ظرفیت خط مونتاژ باشد و با این صورت، با صفت از قطعات بوجود

مشتریها ثابت (قطعی)، مدت خدمت طبق توزیع از لانگی ۵ مرحله‌ای، سیستم دارای یک خدمت دهنده، ظرفیت آن ۱۰۰، جمهیت مشتریان نامنهای و تنظیم سیستم به صورت LIFO است.

۵.۱ زمینه‌های کاربرد نظریه صفت
همان طور که تکنده شد، اهمیت نظریه صفت از تاریخ وسیع آن در میسته‌های صنعتی و اجتماعی ناشی می‌شود. در زیر به بعضی از این کاربردها اشاره می‌کیم.

الف. سیستمهای مخابراتی
قدیمی ترین زمینه استفاده از نظریه صفت، سیستمهای مخابراتی است. در واقع باید گفت که این نظریه در خدمت مخابرات بوجود آمد. در اوائل قرن بیست ارلانگ^۱ در باره نظریت خاطر نظر نهاد تلفن به مطالعه پرداخت. شبکه مخابرات، سیستم صفتی است که مشتریها برای مکالمه به آن مراجعه می‌کنند. چون امکان ندارد که برای هر دو نفر مشترک، یک خط نلن اختصاصی ایجاد شود، لذا کلا عدد محدودی خط نلن برای استفاده همه مشتری‌کن بوجود می‌آید. اگر در یک لحظه تعداد خاطر نهاد موجود نکافی همه زیارت‌ها را نهد، صفت تشکیل می‌شود. بررسی ارلانگ، در قالب نظریه‌های ریاضی، احتمالات و آمار، به تدریج توسعه یافت و نظریه صفت بوجود آمد. در دوره بعد از جنگ دوم جهانی، کسی با رشد سریع تحقیق در عملیات و علوم و فنون وابسته به آن همراه بود، نظریه صفت نیز کاربردهای متعدد دیگری یافت؛ اما، مخابرات همچنان یکی از مهمترین کاربردهای این رشته است.

ب. شبکه حمل و نقل
به طور کلی شبکه‌های حمل و نقل نوعی سیستم صفت‌اند. خدمتی که عرضه می‌شود، حمل بار و سافر از یک نقطه به نقطه دیگر است. خدمت دهنده‌گان ممکن است وسایل حمل و نقل و شبکه راهها باشند. محدود بودن این خدمت دهنده‌گان به ایجاد صفت می‌انجامد؛ مثلاً، در یک شبکه اتوبوس‌رانی شهری، خدمت دهنده‌گان، اتوبوسها هستند، به علت محدودیت تعداد آنها، صفت مشتریها، که در اینجا شهر و ندان‌اند، تشکیل می‌شود. مثلاً دیگر، تراکم اتومبیلها پشت چراغ قرمز است. در اینجا، اتومبیلها مشتری سیستم و فضای چهار راه خدمت دهنده محسوب می‌شود. مطالعه حمل و نقل و ترافیک از دیدگاه‌های مختلف، یکی از عمدۀ ترین کاربردهای نظریه صفت است.

1. Erlang

می‌آید، با امکانات تولید بدون استفاده می‌ماند. در این حالت، برخلاف حالت قبلی، ورود هفته‌ای معمولاً به صورت فطی (با تقریب کافی) است.
نظریه خفت در زمینه‌های دیگر از جمله کامپیوتر، دادگاهی‌ای قضایی، ادارات دولتی، سیستم آموزش عالی، سیستم‌های خدمتی (مانند پمپ بنزین، باجه فروش بلیط...) و سیستم موابوءدهای کاربردهای گسترده‌ای دارد.

مثال

۱. اجزای سیستم‌های صفتی (متوسط خدمت، خدمت دهنده، مشتری، صفت، و جمعیت مشتریان) را مشخص کنید.
 - الف. بانک
 - ب. ایجاد ایجاد کارخانه
 - ج. مرکز اورانس شهر
 - د. شرکت هزاری در سالن کارخانه
 - ه. مخزن سد آب
- و. خط تولید محصولی با سه نوع عملیات و یک مورد بازرسی در انتهای خط
- ز. باجه خوارض در ابتدا بزرگراه

۲. سیستم انبارداری محصولی را در نظر بگیرید، که تعداد موجودی آن محصول به اضافه تعدادی که سفارش داده شده است، همیشه برابر با N باشد. به عبارت دیگر، موقعی که یک واحد محصول فروخته می‌شود، بلا فاصله برای جایگزینی آن واحدی دیگر از محصول سفارش داده شود، سیستم صفتی را برای این مسئله تعریف کنید. خدمت دهنده، مشتری، نظم سیستم، زمان بین دو ورود مشتریها، و مدت زمان خلقت را مشخص کنید.

۳. پارکینگ اتومبیل را با ظرفیت معین به صورت سیستم در نظر بگیرید، اجزای آن، چنین نوع خدمت، خدمت دهنده‌گان و تعداد آنها، مشتری، جمیعت مشتریان بالقوه، همگن بودن ها نبودن آهنگ ورود مشتری، مدت زمان خدمت، آهنگ خلقت دهنده، و آهنگ خروج مشتری و طول صفت را مشخص کنید.

۴. در یک سیستم صفت، تعداد مشتریها که بین لحظه صفر تا t مراجعت می‌کنند، را با (t) و زمان ورود مشتری N را با ζ بیان می‌کنیم. نشان دهید که

$$P[N(t)=n] = P[\zeta_1 < t, \zeta_2 < t, \dots, \zeta_n < t]$$

$$P[N(t) \geq n] = P[\zeta_1 < t]$$

$$P[N(t)=n] = P[\zeta_1 < t] - P[\zeta_1 < t]$$

۳

مروری بر احتمالات

در این فصل به مرور بر بعضی از تعاریف و مفاهیم نظریه احتمال می‌پردازیم. برای بررسی جزئیات و درک عمیق‌تر مطالب، پیشنهاد می‌کنیم که به کتابهایی که در این زمینه نوشته شده است؛ مثلاً، کتابهای شماره ۵ و ۱۵، در اینست منابع و مأخذ، مراجعه شود.

۱.۰۲ فضای نمونه، پیشامد و احتمال

آزمایش یا تجربه‌ای را در نظر بگیرید که نتیجه آن را نتوان به صورت قطعی، اذ قبیل پیش‌بینی کرد؛ زیرا، به عامل شناسی یا تصادف بستگی دارد. فضای نمونه عبارت از مجموعه نتیجه‌هایی است که می‌توان از این آزمایش انتظار داشت.

مثال ۱.۰۲ سیستم صفتی را در نظر بگیرید که مدت زمان ارائه خدمت در آن عموماً به صورت قطعی قابل پیش‌بینی نیست. فرض کنید که تجربه شان داده است که مدت زمان خدمت در این سیستم، بین ۵ تا ۱۵ دقیقه است. در این صورت فضای نمونه این آزمایش عبارت است از:

$$S = \{x | 5 \leq x \leq 15\}$$

مثال ۱.۰۲ یک مشتری وارد یک سیستم صفت می‌شود، که حداقل ظرفیت آن ۱۰

مشتری نمی‌تواند بیش‌بینی کند که هنگام ورودش چند مشتری دیگر هم در سیستم

که E' مکمل مجموعه E است، یعنی
 $E \cdot E' = \emptyset, E \cup E' = S$

اگر $E_1 \subset E_2$ باشد

$$P(E_1) \leq P(E_2) \quad (۶.۲)$$

۰.۳ دو مجموعه E_1 و E_2 ، که اشتراک آنها لزوماً مجموعه نباید، را در نظر بگیرید

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) \quad (۷.۲)$$

۰.۴ فضای نمونه S ، که دارای N عنصر است، را در نظر بگیرید، یعنی

$$S = \{1, 2, \dots, N\}$$

چنانچه نتیجه آزمایش بتواند هر کدام از عناصر فوق، با شناس مساوی، باشد

$$P(1) = P(2) = \dots = P(N) = \frac{1}{N} \quad (۸.۲)$$

۰.۲ متغیر تصادفی

در اکثر موارد به جای بررسی پیشامدها به طور مستقیم، از مفهوم متغیر تصادفی برای بررسی پدیده‌های احتمالی استفاده می‌کنند. این کار باعث تسهیل محاسبات می‌شود. به حسب تعریف، متغیر تصادفی عبارت از تابعی عددی است که روی فضای نمونه تعریف می‌شود. به این ترتیب، به هر عنصر فضای نمونه، عددی اختصاص داده می‌شود. بدینه است که می‌توان متغیرهای تصادفی متعددی را روی یک فضای نمونه مشخص تعریف کرد.

در مثال ۰.۲ می‌توان متغیرهای تصادفی X و Z را به شرح ذیر تعریف کرد:
 X عبارت است از مدت زمان ارائه خدمت. این متغیر تصادفی می‌تواند مدة اعداد بین ۵ تا ۱۵ را انتخاب کند و لا چنین تعریف می‌شود

$$Y = \begin{cases} \text{اگر مدت زمان خدمت کمتر از ۱۰ دقیقه باشد،} \\ \text{اگر مدت زمان خدمت بیش از ۱۰ دقیقه باشد،} \end{cases}$$

این متغیر تصادفی فقط می‌تواند مقادیر صفر و یک را انتخاب کند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با وجود اینکه در آزمایش مورد نظر فقط یک فضای نمونه وجود دارد، متغیرهای تصادفی مختلف روی آن تعریف شده است. معمولاً متغیر تصادفی طریق تعریف می‌شود که راحت‌تر برآن هدف مورد نظر را بیان کرده؛ در این مثال، اگر فقط زمان خدمت

هستند. با وجود این، چون ظرفیت سیستم ۱۰ است، می‌توان اطمینان داشت که در هر لحظه بیش از ۱۰ مشتری در سیستم حضور ندارند. بنابراین، چنانچه نتیجه آزمایش را تعداد مشتریان داخل سیستم تعریف کنیم، فضای نمونه عبارت خواهد بود از:

$$S = \{0, 1, 2, \dots, 10\}$$

badanestن فضای نمونه، اگرچه نمی‌توان نتیجه قطعی آزمایش را پیش‌بینی کرد، اما می‌توان مطمئن بود که نتیجه حاصله فقط عنصری از مجموعه فضای نمونه خواهد بود، هر زیرمجموعه فضای نمونه را یک پیشامد می‌نماید. اگر S فضای نمونه یک آزمایش باشد، مجموعه E را در صورتی پیشامد می‌نمایم که

$$E \subseteq S \quad (۱.۲)$$

در مثال ۱.۲، پیشامد می‌تواند مجموعه زیر باشد

$$E = \{x | 5 \leq x \leq 6\}$$

در این پیشامد فقط بررسی خدمتها بیکه کمتر از ۶ دقیقه طول می‌کشند، مس نظر است. در مثال ۱.۲، پیشامد می‌تواند مجموعه $\{0\} = E$ باشد، که در این صورت، هنگام ورود مشتری مورد نظر، سیستم خالی است. احتمال وقوع یک پیشامد، در یک آزمایش، که فضای نمونه آن S است، احتمال وقوع پیشامدی مانند E ، که داخل این فضاست، براساس سه اصل ذیر تعریف می‌شود:

$$\Pr(E) \leq 1 \quad (۲.۲)$$

$$\Pr(S) = 1 \quad (۳.۲)$$

چ. چنانچه $E_1 \cup E_2$ دو پیشامد فضای S باشد و فصل مشترکی هم نداشته باشد
 $(E_1 \cap E_2 = \emptyset)$ (بعنی

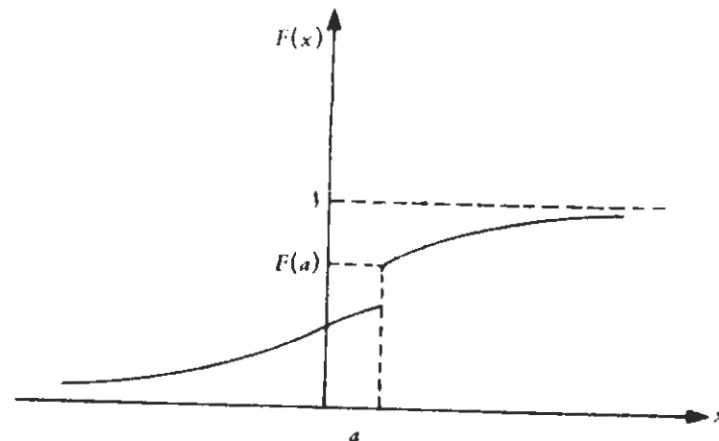
$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) \quad (۴.۲)$$

طبق این اصل، احتمال اینکه نتیجه آزمایش حداقل یکی از دو پیشامد فرق باشد، برابر با مجموع احتمالات آنهاست.

چند نتیجه‌گیری

با استفاده از سه اصل فوق می‌توان نتیجه گیری‌های زیر را ارائه کرد، که در محاسبه احتمالات پیشامدها مورد استفاده فرار می‌گیرد.

$$P(E^c) = 1 - P(E) \quad (۵.۲)$$



شکل ۱۰.۳ خاصیت پیوستگی از سمت راست در يك تابع توزیع

الف. متغیر تصادفی گسته
چنانچه متغیری تصادفی فقط مقادیر يك مجموعه قابل شمارش را انتخاب کند، به آن متغیر تصادفی گسته می گویند. تعداد عناصر این مجموعه می تواند متناهی یا نامتناهی باشد.
بر حسب تعریف، تابع احتمال این متغیر تصادفی عبارت است از:

$$p(a) = P(X = a) \quad (14.2)$$

که a یکی از عناصر مجموعه قابل شمارش فوق است. مجموع احتمالات، به ازای تمام عناصر این مجموعه برابر با یک است، یعنی

$$\sum_{a=0}^{\infty} p(a) = 1 \quad (15.2)$$

در عمل، گاهی استفاده از مفهوم تابع توزیع يك متغیر تصادفی راحت‌تر از مفهوم تابع احتمال است. تابع توزیع را می توان بر حسب تابع احتمال، به شرح زیر بیان کرد.

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{a=0}^x p(a) \quad (16.2)$$

مثال ۲۰.۲ يك متغیر تصادفی دارای تابع احتمالی به شرح زیر است:

$$p(0) = 0.2, \quad p(1) = 0.1, \quad p(2) = 0.2, \quad p(5) = 0.3, \quad p(6) = 0,$$

تابع توزیع این متغیر تصادفی را تعیین کنید.
حل: طبق تعریف، تابع توزیع این متغیر تصادفی را به شرح زیر می توان بیان کرد:

مد نظر باشد، تعریف X مناسب است. چنانچه فرض شود که اگر مدت خدمت پیش از ۷ دقیقه طول پکشید جریمه‌ای به آن تعقیل می گیرد، تنها طبقه‌بندی که می تواند مدنظر باشد این است که خدماتها با مشمول لبرپنه می فود (یعنی بیشتر از ۷ دقیقه طول می کشد)، و با نمی شود (کمتر با مساوی ۷ دقیقه طول می کشد). در این حالت، فرضآ بین زمان خدمت ۷ دقیقه‌ای و ۸ دقیقه‌ای تقاضوت وجود ندارد.

از طرف دیگر، هر پیشامد را نیز می توان بر حسب متغیر تصادفی به شکل ($X = x$) با $(x \leq X)$ بیان کرد.

تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی X (که به اختصار آنرا تابع توزیع می نامند)، بازای تمام مقادیر x (از $-\infty$ تا $+\infty$) به شرح زیر تعریف می شود.

$$F(x) = P(X \leq x) \quad (9.2)$$

بر اساس این تعریف، می توان نتیجه گیری کرد که تابع توزیع متغیر تصادفی X دارای خواص زیر نیز هست:

الف. تابع توزیع تابعی افزایش‌دهنده است. اگر $b \leq a$ باشد

$$F(a) \leq F(b) \quad (10.2)$$

ب. مقدار تابع توزیع در $-\infty$ صفر است و در $+\infty$ به سمت یک میل می کند، یعنی

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1 \quad (11.2)$$

ج. رابطه زیر به ازای همه مقادیر $b \leq a$ همواره برقرار است،

$$P(a < x \leq b) = F(b) - F(a)$$

د. چنانچه در نقطه‌ای مانند x تابع توزیع منقطع باشد،

$$F(x) = \lim_{y \rightarrow x} F(x+y) \quad (12.2)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} F(x-y) < F(x) \quad (13.2)$$

یعنی در چنین نقطه‌ای مقدار تابع از شاخه سمت راست منحنی تابع به دست می آید و با توجه به خاصیت افزایش‌دهنده بودن تابع، این مقدار از مقادیر شاخه سمت چپ بیشتر است. به عبارت دیگر $F(x)$ تابعی است که از سمت راست بیوسته است. شکل ۱۰.۲ این موضوع را نشان می‌دهد.

متغیر تصادفی بر دو نوع است. گسته و پیوسته.

تابع احتمال این متغیر تصادفی عبارت است از:

$$p(x) = p, \quad p(0) = 1 - p \quad (17.2)$$

توزیع دو جمله‌ای، فرض کنید که n آزمایش برآورده باشد (با تابع موقبیت پاشکست) مستقلاً انجام شود. تعداد موقبتهای این مجموعه آزمایشها، متغیری تصادفی با توزیع دو جمله‌ای، بدشرح زیر است

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n \quad (18.2)$$

که m احتمال موقبیت هر آزمایش برآورده است. توزیع هندسی، در این مورد نیز فرض کنید که تعدادی آزمایش برآورده مستقلانجام شود. چنانچه λ را تعداد آزمایشها تا اولین موقبیت در نظر بگیریم، λ متغیری تصادفی با توزیع هندسی به شرح زیر است.

$$p(\lambda) = p(1-p)^{\lambda-1}, \quad \lambda = 1, 2, \dots \quad (19.2)$$

توزیع پواسون، متغیر تصادفی x دارای توزیع پواسون با پارامتر λ است. اگر

$$p(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \quad x = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (20.2)$$

به علت اهمیت توزیع پواسون در نظریه صفت، درباره آن به نفصیل در فصل سوم بحث خواهیم کرد.

ب. متغیر تصادفی پیوسته

چنانچه متغیری تصادفی پتواند همه مقادیر یک مجموعه غیرقابل شمارش (پیوسته) را انتخاب کند، به آن متغیر تصادفی پیوسته می‌گویند. مثلاً، مدت زمان ارائه خدمت در یک سیستم صفت معمولاً پلشمتغیر تصادفی پیوسته است. هر متغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع آن، یعنی $F(x)$ مشخص می‌شود. در مقایسه با تابع احتمال در مورد متغیرهای تصادفی پاشکست، تابع چگالی در مورد متغیرهای تصادفی پیوسته بدشرح زیر تعریف می‌شود.

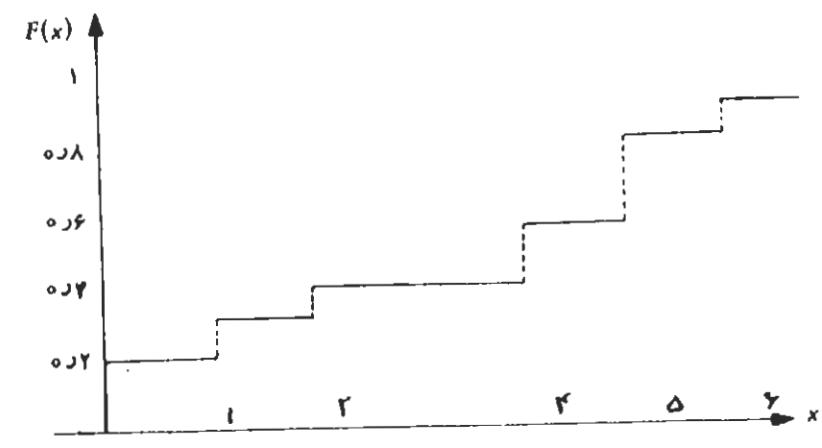
$$\frac{d}{dx} F(x) \quad (21.2)$$

متقابل، تابع توزیع یک متغیر تصادفی پیوسته بر حسب تابع چگالی آن از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.2 & 0 \leq x < 1 \\ 0.5 & 1 \leq x < 2 \\ 0.8 & 2 \leq x < 3 \\ 0.9 & 3 \leq x < 4 \\ 0.95 & 4 \leq x < 5 \\ 0.99 & 5 \leq x < 6 \\ 1 & x \geq 6 \end{cases}$$

منحنی (x) نسبت به x در شکل ۲۰.۲ نشان داده شده است از طرف دیگر، با معلوم بودن تابع توزیع یک متغیر تصادفی گسته، می‌توان تابع احتمال آن را تعیین کرد. در این مورد، مقدار تابع احتمال در همه نقاط برای باصره است، بداستنای نقاطی که در آنها تابع توزیع دارای جهش است. در چنین نقاطی مقدار تابع احتمال برای با مقدار بجهش است. با مراجعت به شکل فوق، صحت این امر روشن می‌شود.

تعدادی از توابع توزیع اهیت خاصی دارند که مهمترین آنها عبارت اند از: توزیع برآورده، بر حسب تعریف، هر متغیر تصادفی که فقط بنوایند دو مقدار مشخص را انتخاب کند، دارای تابع توزیع برآورده است. به عنوان نمونه، آزمایشی را در نظر بگیرید که نتیجه آن صرفاً موقبیت پاشکست باشد برای این اساس، متغیری تصادفی را می‌توان تعریف کرد که فقط مقادیر یک و صفر را انتخاب کند، به ترتیب، معرف موقبیت و شکست آزمایش هستند. چنانچه p احتمال موقبیت و $(p-1)$ احتمال شکست آزمایش باشد.



شکل ۲۰.۲ تابع توزیع متغیر تصادفی در مثال ۲.۳

در مورد متغیرهای تصادفی پیوسته نیز تعدادی از آنها از اهمیت بیشتری برخودار هستند، که عبارت اند از: توزیع نمایی؛ توزیع گاما؛ توزیع ارلانگ؛ توزیع فوق نمایی؛ توزیع فرمال. سه نوع توزیع اول را به تفصیل در فصل سوم مورد بررسی قرار خواهیم داد. برای مطالعه بیشتر در مورد توابع توزیع فوق نمایی و فرمال به مراجع ۵ و ۱۰ مراجعه شود.

۳.۳ امید ریاضی

امید ریاضی یک متغیر تصادفی گسته مانند X ، که با $E(X)$ نشان داده می شود، بر حسب تعریف، عبارت است از:

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i) = E[X] \quad (22.2)$$

که x_i ها مقادیر ممکنی هستند که متغیر تصادفی می تواند انتخاب کند. چنانچه مقدار تصادفی پیوسته باشد، امید ریاضی آن، از رابطه زیر حاصل می شود.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (23.2)$$

قضیه ۱۰.۲: بدارای تمام اعداد ثابت a و b ، رابطه های زیر صادق است.

$$E(aX + b) = aE(X) + b \quad (24.2)$$

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y) \quad (25.2)$$

امید ریاضی تابعی از متغیر تصادفی

در مواردی، ممکن است به جای محاسبه امید ریاضی متغیر تصادفی، امید ریاضی تابعی چون g از آن مسند نظر باشد، که در این حالت،طبق تعریف، از رابطه های زیر به دست می آید:

$$E[g(X)] = \sum_x g(x)p(x) \quad , \quad \text{اگر } X \text{ گسته باشد} \quad (26.2)$$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(v)f(v)dv \quad , \quad \text{اگر } X \text{ پیوسته باشد} \quad (27.2)$$

حالات خاصی که کاربردهای متعدد دارد، محاسبه گنتاور رام یک متغیر تصادفی، به شکل $E(X^n)$ بدارای n است. (گذاور اول، همان میانگین متغیر تصادفی است).

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy \quad (22.2)$$

احتمال وقوع يك پیشاند را می نوان با استفاده از تابع توزیع با تابع چگالی متغیر تصادفی پیوسته بدست آورد.

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(y)dy \quad (23.4)$$

در واقع، احتمال اینکه مقدار متغیر تصادفی بین دو عدد a و b باشد، برابر مساحت زیر منحنی تابع چگالی در میان فاصله است (شکل ۳.۲). از طرف دیگر، طبق رابطه (۲۳.۲)، احتمال اینکه يك متغیر تصادفی پیوسته، دقیقاً مقدار مشخصی مانند a را انتخاب کند، برابر با صفر است، یعنی

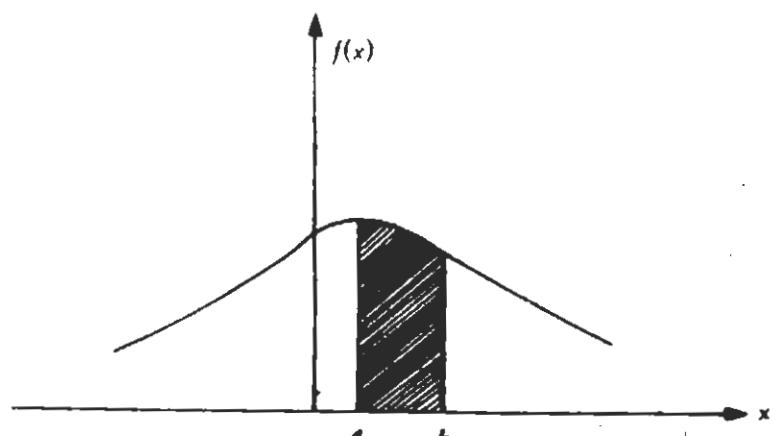
$$P(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0 \quad (24.2)$$

در نتیجه، می توان نشان داد که

$$P(X < a) = P(X \leq a) \quad (25.2)$$

ضمناً، با توجه به رابطه های (۱۱.۲) و (۲۳.۲)، مساحت زیر منحنی تابع چگالی برابر با يك خواهد بود، یعنی

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \quad (26.2)$$



شکل ۳.۲ تابع چگالی يك متغیر تصادفی پیوسته

$$f(a, b) = \frac{\partial^2}{\partial a \partial b} F(a, b) \quad (29.2)$$

با استفاده از تابع چنگالی توأم، می‌توان تابع چنگالی هر متغیر تصادفی را جداگانه محاسبه کرد

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \quad (30.2)$$

مثال ۳۰.۲ دو متغیر تصادفی X و Y را، که تابع چنگالی توأم آنها به شرح زیر است، در نظر بگیرید. $f_Y(y)$ را محاسبه کنید.

$$f(x, y) = \begin{cases} 2y(x-y)e^{-(x+y)} & 0 < x < \infty, 0 < y \leq x \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_{-\infty}^y f(x, y) dx + \int_y^{\infty} f(x, y) dx$$

در انتگرال اول عبارت فوق، چون مقدار x از y کوچکتر است، تابع چنگالی توأم دو متغیره مقدار انتگرال برابر با صفر است. پس از انتگرالگیری جزو هجزه لست دو، نتیجه زیر بدست می‌آید

$$f_Y(y) = 2y$$

پیشامدتها و متغیرهای تصادفی مستقل دو پیشامد E_1 و E_2 را مستقل می‌نامند، اگر رابطه زیر در مورد آنها صدق کند.

$$P(E_1, E_2) = P(E_1)P(E_2) \quad (21.2)$$

به معین ترتیب، دو متغیر تصادفی X و Y در صورتی مستقل هستند که به ازای همه مجموعه‌های عددی A و B رابطه زیر صادق باشد:

$$P\{X \in A, Y \in B\} = P\{X \in A\}P\{Y \in B\} \quad (22.2)$$

بنابراین، از رابطه فوق نتیجه می‌شود که به ازای تمام مقادیر عددی x و y خواهیم داشت.

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y) \quad (23.2)$$

$$P(x, y) = P_X(x)P_Y(y) \quad (24.2)$$

واریانس متغیر تصادفی

و این یک مفهوم تصادفی، به شرح زیر تعریف می‌شود:

$$\text{var}(X) = E[(X - E[X])^2] \quad (32.2)$$

واریانس شاخصی است که پراکندگی مقادیر متغیر تصادفی را نسبت به میانگین آن می‌سنجد. می‌توان نشان داد که پیکونه واریانس را، می‌شود از رابطه زیر بدست آورد.

$$\text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 \quad (32.2)$$

۴.۲ تابع توزیع توأم

دو متغیر تصادفی X و Y را در نظر بگیرید، که تابع توزیع توأم آنها به شرح زیر بلف می‌شود.

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) \quad (35.2)$$

در عبارت فوق احتمال اینکه هر دو پیشامد اتفاق بیفتد، مدنظر است.

تابع توزیع هر کدام از این متغیرهای تصادفی را می‌توان از تابع توزیع توامشان بدست آورد. برای این مظاوله با تخصیص همه مقادیر ممکن به متغیر تصادفی دیگر، آن را به اثر می‌سازیم، بدین ترتیب،

$$F_X(x) = P[X \leq x, Y < \infty] = \lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y) = F(x, \infty) \quad (36.2)$$

در عبارت فوق، $F_X(x)$ معرف تابع توزیع X ، به نهایی، است و توزیع نهایی نامیده می‌شود.

بنابراین دو متغیر تصادفی مورد نظر پیوسته باشد، یک تابع چنگالی توأم، مانند $f(x, y)$ رابطه آنها را مشخص می‌سازد، در این صورت، احتمال اینکه مقادیر این دو متغیر از مجموعه مخصوص انتخاب شود، از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$P\{(X, Y) \in C\} = \iint_{(x,y) \in C} f(x, y) dx dy \quad (37.2)$$

در این حالت، تابع توزیع توأم آنها نیز به همین صورت بدست می‌آید.

$$F(a, b) = P(X \leq a, Y \leq b) \quad (38.2)$$

از طرف دیگر، تابع چنگالی توأم را نیز می‌توان از تابع توزیع توأم بدست آورد.

مثال ۵.۲ فرض کنید سه سکه را برتاب می‌کنم، احتمال پیشامد E ، آمدن حداقل ۲ شیر در سه برتاب، را در حالت‌های زیر محاسبه کنید.
الف. بدین هیچ اطلاعات اضافی؛ در این حالت فضای نمونه دارای هشت عنصر است، که در چهار عنصر آن حداقل دو شیر وجود دارد. اذا

$$P(E) = ۰.۵$$

ب. با اطلاع از اینکه نتیجه اولین برتاب، شیر بوده است؛ این پیشامد، یعنی شیر بودن نتیجه اولین برتاب، را با F نشان می‌دهیم. بنابراین، هدف، محاسبه $P(E|F)$ است. این عبارت را می‌توانیم مستقیماً و با استفاده از رابطه (۵۰.۲) به دست آوریم. محاسبه مستقیم به شرح زیر انجام می‌شود.

$$\begin{aligned} P(E|F) &= P(\text{شیر آمدن نتیجه در دو آزمایش باقیمانده}) \\ &= \text{خط آمدن نتیجه در هر دو آزمایش باقیمانده} - P \\ &= ۱ - P \\ &= ۱ - ۰.۲۵ = ۰.۷۵ \end{aligned}$$

چنانچه بخواهیم از رابطه (۵۰.۲) استفاده کنیم، خواهیم داشت.

$$\begin{aligned} P(FF) &= P(\text{آمدن حداقل دو شیر}) \\ &= P(F)P(F) \quad \text{در برتاب اول} \\ &= P(\text{شیر آمدن نتیجه اولین برتاب به اضافه شیر آمدن نتیجه حداقل یکی از دو برتاب دیگر}) \\ &= \frac{۳}{۸} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(F) &= P(\text{شیر آمدن نتیجه اولین برتاب}) \\ &= ۰.۵ \end{aligned}$$

لذا طبق رابطه (۵۰.۲)

$$P(E|F) = ۰.۷۵$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در دو حالت فوق، الف و ب، اگرچه بک پدیده شخص و منحصر به‌فرد (به دست آمدن حداقل دو شیر در سه برتاب) مورد بررسی قرار گرفته است، چون اطلاعات موجود در این دو حالت متفاوت است، نتایج به دست آمده نیز یکسان نیست.

مثال ۶.۲ دو مشتری وارد یک صیانت شده‌اند. به فرض اینکه هر مشتری به احتمال ۰.۶ مرد باشد، احتمال مرد بودن هر دو مشتری، پیشامد E ، را در سه حالت زیر حساب کنید.

همان‌طور مگه مشاهده می‌شود، چنانچه دو پیشامد فوق مستقل باشند، طبق رابطه (۴۱.۲)

$$f(x, y) = f_x(x)f_y(y), \quad (۴۵.۲)$$

$$E(XY) = E(X)E(Y) \quad (۴۶.۲)$$

کوواریانس دو متغیر تصادفی X و Y را به شرح زیر تعریف می‌کنیم.

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \quad (۴۷.۲)$$

رابطه فوق را به شکل زیر نیز می‌توان بیان کرد:

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \quad (۴۸.۲)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، دو مورد دو متغیر تصادفی مستقل، مقدار کوواریانس برابر با صفر است.

واریانس مجموع دو متغیر تصادفی

اعتبه ۴.۲ رابطه زیر همیشه صدق می‌کند.

$$\text{var}(X+Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y) + ۲\text{cov}(X, Y) \quad (۴۹.۲)$$

چنانچه دو متغیر تصادفی X و Y مستقل باشند، واریانس مجموع آنها برابر با مجموع واریانس‌های آنهاست.

۵.۴ احتمال شرطی

منظور از احتمال شرطی بک پیشامد، مثلاً $P(E|F)$ ، احتمال اتفاق افتادن پیشامد E است، مشروط براینکه پیشامد F اتفاق افتاده باشد. بدین ترتیب، با درنظر گرفتن اطلاعات جدیدی که در مورد اتفاق افتادن پیشامد F داریم، و همچنین رابطه بین E و F . قضاوت بهتری در باره احتمال اتفاق افتادن یا نهادن پیشامد E خواهیم داشت. احتمال شرطی با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)} \quad (۵۰.۲)$$

همان‌طور مگه مشاهده می‌شود، چنانچه دو پیشامد فوق مستقل باشند، طبق رابطه (۴۱.۲) نتیجه عبارت فوق $P(E|F)$ خواهد بود، یعنی، پیشامد F تأثیری بر روی E نخواهد داشت.

آنها باید را که در دو میان ساخت وارد می‌شوند با λ نشان می‌دهند. فرض می‌کنیم که این دو متغیر تصادفی دارای توزیع بواسون و یا پارامترهای λ_1 و λ_2 هستند. تابع توزیع X را با آنکه از اینکه $X+Y=n$ است، حساب کنید.

حل: با استفاده از رابطه (۴.۲) و با توجه به اینکه X و Y مستقل هستند، داریم

$$\begin{aligned} P\{X=k|X+Y=n\} &= \frac{P\{X=k, X+Y=n\}}{P\{X+Y=n\}} \\ &= \frac{P\{X=k, Y=n-k\}}{P\{X+Y=n\}} \\ &= \frac{P\{X=k\}P\{Y=n-k\}}{P\{X+Y=n\}} \end{aligned}$$

از طرفی می‌دانیم که مجموع دو متغیر تصادفی با توزیع بواسون نیز دارای توزیع بواسون (با پارامتری برابر با مجموع پارامترها) خواهد بود. بنابراین

$$\begin{aligned} P\{X=k|X+Y=n\} &= \frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^k}{k!} \frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} \left[\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!} \right]^{-1} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{\lambda_1^k \lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n} \\ &= \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} \right)^{n-k} \end{aligned}$$

بدین ترتیب، متغیر تصادفی X ، با معلوم بودن $n = X+Y$ ، دارای توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای n و $(\lambda_1/\lambda_1+\lambda_2)$ خواهد بود.

۶.۳ امید شرطی
امید ریاضی X ، مشروط بر اینکه متغیر تصادفی دیگری مانند Y مقدار مشخصی مانند y را انتخاب کند، به شکل $E(X|Y=y)$ نشان داده می‌شود. در حالانی که Y گسته باشد، امید شرطی را می‌توان نظریه هر متغیر تصادفی دیگر، به شرح زیر محاسبه کرد:

$$E(X|Y=y) = \sum_x x P(X=x|Y=y) \quad (53.2)$$

در حالانی که Y پیوسته باشد، امید شرطی را می‌توان از رابطه زیر بدست آورد.

$$P(E) = 0.36 = 0.46 \times 0.8$$

ب. با داشتن اینکه اولین مشتری مرد است (پیشامد F)

$$P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)}$$

$$P(EF) = P(F) = 0.46 = 0.36 \times 0.8$$

$$P(F) = 0.46 = 0.36$$

در نتیجه

$$P(E|F) = 0.46$$

ج. با داشتن اینکه حداقل یکی از دو مشتری مرد است (پیشامد G)

$$P(E|G) = \frac{P(EG)}{P(G)}$$

$$P(EG) = 0.36$$

$$P(G) = 1 - P(\text{زن بودن هر دو مشتری}) = 1 - 0.16 = 0.84$$

در نتیجه

$$P(E|G) = \frac{0.36}{0.84} = \frac{3}{7} = 0.43$$

در صورتی که پیشامدنا بر حسب متغیر تصادفی Y بان شده باشد، رابطه (۵۰.۲) همچنان معتبر است و بدیکی از شکل‌های زیر بان می‌شود:

$$P(X=x|Y=y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)} \quad (51.2)$$

$$P(X \leq x|Y=y) = \frac{P(X \leq x, Y=y)}{P(Y=y)} \quad (52.2)$$

(مشروط بر اینکه در دو عبارت فوق مخرج کسر برابر با صفر باشد)

مثال

۷۰.۲ تعداد مشتریانی که در ساخت اول وارد سیستمی می‌شوند را با X و تعداد

همانطور که مشاهده می شود، برای اینکه بتوان از فضیه فوق جهت محاسبه $E(X)$ استفاده کرد، لازم است که بتوان متغیر تصادفی جدیدی مانند Y بیندا کرد، که اولاً تابع توزیع آن و، ثانیاً رابطه وابستگی میان X و Y ، یعنی $(y) = E(X|Y=y)$ ، مشخص باشد.

مثال ۴.۲ سکه‌ای را در نظر بگیرید، که احتمال آمدن شیر در موقع پرتاب آن P فرض می‌شود، این سکه را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا اولین شیر به دست آید. اگر N معرف تعداد پرتابهای سکه تا اولین شیر باشد، $E(N)$ را حساب کنید.

حل: از رابطه (۴.۲) برای محاسبه $E(N)$ استفاده می‌کنیم، برای این منظور باید متغیر جدیدی معرفی کرد، که هم تابع توزیع آن وهم چگونگی رابطه آن با متغیر تصادفی مورد نظر، یعنی N ، معلوم باشد. این متغیر تصادفی جدید، نتیجه اولین پرتاب، به شرح زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{اگر نتیجه اولین پرتاب شیر باشد,} \\ 0 & \text{اگر نتیجه اولین پرتاب خط باشد,} \end{cases}$$

بنابراین، طبق رابطه (۴.۲) و با درنظر گرفتن اینکه احتمال آمدن شیر در هر پرتاب p باشد، داریم:

$$\begin{aligned} E(N) &= E(N|Y=1)P(Y=1) + E(N|Y=0)P(Y=0) \\ &= pE(N|Y=1) + (1-p)E(N|Y=0) \end{aligned}$$

بدینه است که

$$E(N|Y=1) = 1$$

حال فرض کنید که نتیجه اولین پرتاب شیر نباشد، یعنی $Y=0$ باشد. در این صورت، با توجه به اینکه پرتابها مغل از یکدیگرند، مانند تعداد پرتابهای لازم بعد از اولین پرتاب، برابر با $E(N)$ خواهد بود، یعنی

$$E(N|Y=0) = 1 + E(N)$$

در نتیجه

$$E(N) = p + (1-p)[1 + E(N)]$$

با

$$E(N) = \frac{1}{p}$$

$$E(X|Y=y) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx} \quad (4.2)$$

مثال ۴.۲ در مثال (۴.۲)، امید شرطی $E(X|Y=y)$ را محاسبه کنید.
حل: پس از انگرالگیری صورت کسر به صورت جزء به جزء و با استفاده از نتیجه مثال فوق، تساوی زیر به دست می‌آید.

$$E(X|Y=y) = y + 1$$

۷.۳ به کارگیری احتمال شرطی در محاسبه امید ریاضی یک متغیر تصادفی X و معرف Y به طور مستقیم امکانپذیر نباشد، می‌توان با استفاده از یک متغیر تصادفی دیگر مانند Z و به کمک قضیه زیر چنین محاسبه‌ای را انجام داد.

قضیه ۴.۲ روابطهای زیر موارد هرقرار است:

$$E[X] = \sum_y E[X|Y=y]P\{Y=y\} \quad (4.5)$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} E[X|Y=y]f_Y(y)dy \quad (4.6)$$

اثبات: X و Y می‌توانند پیوسته یا گسته باشند. در نتیجه، چهار حالت مختلف ممکن است اتفاق بینند. برای نمونه، حالاتی را در نظر بگیرید که هردو متغیر تصادفی X و Y گسته باشند. در این صورت، رابطه فوق به شکل زیر اثبات می‌شود:

$$\begin{aligned} \sum_y E[X|Y=y]P\{Y=y\} &= \sum_y \sum_x xP\{X=x|Y=y\}P\{Y=y\} \\ &= \sum_y \sum_x x \frac{P\{X=x, Y=y\}}{P\{Y=y\}} P\{Y=y\} \\ &= \sum_y \sum_x xP\{X=x, Y=y\} \\ &= \sum_x x \sum_y P\{X=x, Y=y\} \\ &= \sum_x xP\{X=x\} \\ &= E[X]. \end{aligned}$$

در رابطه فوق، بدینه است که چنانچه $15 < n$ باشد (یعنی تعداد کل مراجعین به سیستم کمتر از ۱۵ مشتری باشد)، امکان اینکه ۱۵ مشتری خدمت دریافت کرده باشد، وجود ندارد. اما، اگر $15 \geq n$ باشد، می‌دانیم که هر مشتری که وارد شده است، به احتمال μ خدمت دریافت کرده، و به احتمال $1 - \mu$ خدمت دریافت نکرده است. بنابراین، یا پاک توزیع دو جمله‌ای سروکار داریم، که در آن $P = \mu$ است.

$$P\{X=k|N=n\} = \begin{cases} \binom{n}{k} P^k (1-P)^{n-k} & \text{شرطی براینکه } n \geq k \\ 0 & \text{شرطی براینکه } n < k \end{cases}$$

با جایگزینی عبارت فوق در رابطه (۵۰.۲) و با در نظر گرفتن اینکه N دارای توزیع بواسون است، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} P\{X=k\} &= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{P^k (1-P)^{n-k} e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)! k!} \frac{(\lambda P)^k (\lambda(1-P))^{n-k} e^{-\lambda}}{n!} \\ &= \frac{e^{-\lambda} (\lambda P)^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda(1-P))^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda P)^k}{k!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda(1-P))^i}{i!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda P)^k}{k!} e^{\lambda(1-P)} \\ &= e^{-\lambda} \mu^k \frac{(\lambda P)^k}{k!} \end{aligned}$$

در نتیجه، X دارای توزیع بواسون بامانگین $(\lambda P = \mu)$ است.

مثال ۱۶.۲ چنانچه X و Y متغیرهای تصادفی نمایی با پارامترهای λ و μ باشند، احتمال $P(X < Y)$ را محاسبه کنید.

حل: با استفاده از رابطه (۵۰.۲)، با فرض اینکه $X = x$ باشد، احتمال پیشامد رابطه $(X < Y)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$P(X < Y) = \int_0^{\infty} P(X < Y | X = x) f(x) dx$$

۸.۳ کاربرد احتمال شرطی در محاسبه احتمال یک پیشامد

چنانچه محاسبه مستقیم یک پیشامد دشوار با غیر ممکن باشد، می‌توان با استفاده از رابطه‌های احتمال شرطی، شبیه رابطه‌های مرتبه‌های امید شرطی، و طبق قضیه زیر چنین محاسبه‌ای را انجام داد.

قضیه ۳.۳ رابطه‌ای زیر همواره برقرار است:

$$(57.2) \quad \text{الف. اگر } Y \text{ گسته باشد، } P(A|Y=y)P(Y=y)$$

$$(58.2) \quad \text{ب. اگر } Y \text{ پیوسته باشد، } P(A|Y=y)f(y) dy$$

البته: متغیر تصادفی X را به شرح زیر تعریف می‌کنیم:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{اگر } A \text{ اتفاق بینند،} \\ 0 & \text{اگر } A \text{ اتفاق نبیند،} \end{cases}$$

بدینه است که طبق تعریف میانگین متغیر تصادفی، میانگین X عبارت است از:

$$E(X) = P(A)$$

از طرف دیگر، طبق تعریف امید شرطی داریم:

$$E(X|Y=y) = \sum_x x P(X=x|Y=y) = P(X=1|Y=y) = P(A|Y=y) \quad (59.2)$$

با استفاده از روابط‌های (۵۹.۲) و (۵۵.۲)، این قضیه به شرح زیر ثابت می‌شود:

$$P(A) = E(X) = \sum_y E(X|Y=y)P(Y=y) = \sum_y P(A|Y=y)P(Y=y)$$

مثال ۹.۴ تعداد مشتریها که هر روز به یک سیستم مراجعه می‌کنند، متغیر تصادفی با توزیع بواسون و میانگین آن ۱۵ مشتری در روز است. هر مشتری با احتمال μ و مستقل از سایر مشتریها، از دریافت خدمت منصرف، و از میهمان خارج می‌شود. احتمال اینکه در یک روز مشخص ۱۵ مشتری برای دریافت خدمت بمانند، چیست؟

حل: تعداد مشتریها که برای دریافت خدمت می‌ماند را X می‌نامیم، بنابراین، سؤال مسئله، محاسبه $P(X=15)$ است. به حای محاسبه مستقیم، از احتمال شرطی، یعنی رابطه (۵۷.۲)، استفاده می‌کنیم. برای این منظور، از متغیر تصادفی N ، تعداد مشتریها که در روز مراجعه می‌کنند، کمک کرده می‌شود. به این ترتیب،

$$(60.2) \quad P(X=15) = \sum_{n=15}^{\infty} P(X=15|N=n)P(N=n)$$

مفهوم $P(X < Y | X = x)$ ، احتمال بزرگتر بودن Y از متغیر تصادفی X است، به شرط اینکه مقدار x مشخص باشد. بنابراین،

$$P[X < Y | X = x] = P[Y > x] = e^{-\mu x}$$

قسمت آخر رابطه فوق، با استفاده از فرض نایاب بودن متغیر تصادفی Y بدست آمده است. در نتیجه

$$P(X < Y) = \int_0^{\infty} (e^{-\mu x})(\lambda e^{-\lambda x}) dx$$

۴

$$P(X < Y) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \quad (۶۱.۲)$$

۹.۳ فرمول بیز

فرمول احتمال شرطی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

با استفاده از رابطه (۵۰.۲)، نتیجه می‌شود:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)} \quad (۶۲.۲)$$

مثال ۱۴.۲ محصولات کارخانه‌ای در دو کارگاه تولید می‌شود. در کارگاه اول، ۹۰ درصد کالاهای و در کارگاه دوم فقط ۴۰ درصد آنها با استاندارد تعیین می‌کند. چنانچه یک واحد کالا با استاندارد تعیین کند، با چه احتمالی در کارگاه اول تولید شده است؟ فرض می‌کیم میزان تولید کارگاه اول سه برابر تولید کارگاه دوم است.

حل: بیشامدای زیر را تعریف می‌کیم:

A. کالا از گروه یک انتخاب شده باشد؛

B. کالا با استاندارد تعیین کند.

بنابراین مسئله مورد نظر محاسبه $P(A|B)$ است. اجزای رابطه (۶۲.۲) را جدا کنید و بدست می‌آوریم:

$$P(B|A) = ۰.۹$$

$$P(B|A^c) = ۰.۴$$

$$P(A) = ۰.۷۵$$

در نتیجه

$$P(A|B) = \frac{(۰.۹)(۰.۷۵)}{(۰.۹)(۰.۷۵) + (۰.۴)(۰.۲۵)} = \frac{۲۷}{۳۱}$$

۹.۴ تابع مولد گشتاور

تابع مولد گشتاور یک متغیر تصادفی، به ازای تمام مقادیر t به شرح زیر تعریف می‌شود:

$$M_X(t) = E[e^{tX}]$$

$$= \begin{cases} \sum_x e^{tx} P(x) & \text{اگر } X \text{ گسته باشد,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx & \text{اگر } X \text{ پیوسته باشد,} \end{cases} \quad (۶۲.۲)$$

مثال ۱۴.۳ فرض کنید که X متغیر تصادفی با توزیع بواسون و پارامتر λ است.

تابع مولد گشتاور این متغیر تصادفی به شرح زیر بدست می‌آید:

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{tn} p(n) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{tn} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t}$$

$$= e^{\lambda(e^t - 1)}$$

(در رابطه فوق، مسط سری $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n / n!$ است، که در آن $x = \lambda e^t$ است، به تارگت شده است).

مثال ۱۴.۴ تابع مولد گشتاور اور متغیر تصادفی Y با توزیع نمایی و پارامتر λ هارت است از:

$$M_Y(t) = \int_0^{\infty} e^{ty} f(y) dy = \int_0^{\infty} e^{ty} \lambda e^{-\lambda y} dy = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

رابطه فوق فقط در مورد مقادیر $t < 0$ صادق است. علت اصلی اینکه $M_Y(t)$ را تابع مولد گشتاور می‌نامند، این است که با استفاده از آن می‌توان تمام گشتاورهای متغیر تصادفی را بدست آورد.

قضیه ۵.۴ گشتاور n متفیر تصادفی X ، یعنی $E(X^n)$ ، برابر با مشتق n ام تابع مولد گشتاور آن متفیر تصادفی به ازای $t = 0$ است.

$$\text{Var}(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

پکی از عده ترین کاربردهای تابع مولد گشناور، بدست آوردن تابع توزیع مجموع دو متغیر تصادفی مستقل است، که از قضیه زیر نتیجه گیری می‌شود، (تابع توزیع مجموع دو متغیر تصادفی مستقل X و Y را اصطلاحاً پیچش تابع توزیع X و Y می‌گویند).

قضیه ۶.۲ تابع مولد گشناور مجموع دو متغیر تصادفی مستقل X و Y برابر با حاصل ضرب توابع مولد گشناور در آنهاست، یعنی

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t) \quad (65.2)$$

البته: براساس تعریف تابع مولد گشناور و خاصیت مستقل بودن متغیرهای تصادفی X و Y داریم،

$$\begin{aligned} M_{X+Y}(t) &= E[e^{t(X+Y)}] = E[e^{tX} \cdot e^{tY}] = E(e^{tX})E(e^{tY}) \\ &= M_X(t) \cdot M_Y(t) \end{aligned}$$

مثال ۱۵.۳ دو متغیر تصادفی مستقل X و Y را در نظر بگیرید. اگر این دو متغیر تصادفی دارای توزیع بواسون با پارامترهای λ_1 و λ_2 باشند، تابع توزیع Z ، که مجموع این دو متغیر تصادفی است، را بدست آوردید.

حل: طبق مثال ۱۲.۲، تابع مولد گشناور این دو متغیر تصادفی هارت است از:

$$M_X(t) = e^{\lambda_1(e^t - 1)} \quad (66.2)$$

$$M_Y(t) = e^{\lambda_2(e^t - 1)} \quad (67.2)$$

طبق قضیه ۲، تابع مولد گشناور Z از رابطه (۶۵.۲) بدست می‌آید.

$$M_Z(t) = e^{\lambda_1 + \lambda_2} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)(e^t - 1)}$$

لذا نتیجه گیری می‌شود که، Z دارای توزیع بواسون با پارامتر $(\lambda_1 + \lambda_2)$ است.

۱۱.۲ سریهای همگرا

در فصلهای بعدی، به کرات با سریهای همگرا برخورد خواهیم داشت. یک سری، مجموعه‌ای از اعداد به شکل a_1, a_2, \dots است، که آنها را جملات می‌نامیم و a_n را جمله عمومی آن می‌نامند. منظور از همگرا (یا متفاوت) بودن یک سری آن است که مجموع

$$\left. \frac{dM_X(t)}{dt^n} \right|_{t=0} = E(X^n) \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad (68.2)$$

البته: مثنهای اول و دوم و ... n ام تابع مولد گشناور عبارت اند از:

$$\frac{dM_X(t)}{dt} = \frac{dE(e^{tX})}{dt} = E\left(\frac{de^{tX}}{dt}\right) = E(Xe^{tX})$$

$$\frac{d^n M_X(t)}{dt^n} = \frac{d}{dt}[E(Xe^{tX})] = E\left[\frac{d}{dt}(Xe^{tX})\right] = E(X^n e^{tX})$$

و بهینه‌سازی

$$\frac{d^n M_X(t)}{dt^n} = E(X^n e^{tX})$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در رابطه‌های فوق چنانچه مقدار $t = 0$ در نظر گرفته شود، $E(X^n)$ بدست می‌آید.

مثال ۱۶.۳ گشناورهای اول و دوم یک متغیر تصادفی X با توزیع بواسون و پارامتر λ عبارت است از:

$$E(X) = \left. \frac{dM_X(t)}{dt} \right|_{t=0} = \lambda e^t \cdot e^{\lambda(e^t - 1)}|_{t=0} = \lambda$$

$$E(X^2) = e^{\lambda(e^t - 1)}[(\lambda e^t)^2 + \lambda e^t]|_{t=0} = \lambda^2 + \lambda$$

با استفاده از دو گشناور اول، (۶۸.۲) را نیز می‌توان محاسبه کرد:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \lambda$$

مثال ۱۷.۳ گشناورهای اول و دوم یک متغیر تصادفی y با توزیع نمایی و پارامتر λ هارت است از

$$E(Y) = \left. \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2} \right|_{t=0} = \frac{1}{\lambda}$$

$$E(Y^2) = \left. \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3} \right|_{t=0} = \frac{2}{\lambda^2}$$

با استفاده از دو گشناور اول، (۶۸.۲) را نیز می‌توان محاسبه کرد

۶

$$\sum_{n=0}^N nx^{n-1} = \frac{1-x^N - Nx^N + Nx^{N+1}}{(1-x)^2} = \frac{1-x^N}{(1-x)^2} - \frac{Nx^N}{1-x} \quad (71.2)$$

ب. اگر حد خارج قسمت دو جمله متولی یک سری، یعنی $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_0}$ عددی کوچکتر از واحد، مانند k ، کوچکتر باشد، آن سری همگراست.
ج. اگر حد جمله a_n از عددی کوچکتر از واحد، مانند k ، کوچکتر باشد، آن سری همگراست.
در این قسمت، چند نمونه سری همگرا با جملات مثبت را که در نظریه صفت مورد استفاده قرار می‌گیرد، بررسی می‌کنیم.

۱۲.۲ سری تصاعد هندسی

اگر میان جملات یک سری، رابطه زیر برقرار باشد، به آن سری تصاعد هندسی می‌گویند.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

با

$$a_n = a_1 q^{n-1} \dots$$

هر قدر نسبت تصاعد می‌گویند اگر $q > 1$ باشد، مجموع جملات سری عبارت است از:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q} \quad (72.1)$$

اگر مجموع تعدادی متناهی از جملات مدنظر باشد،

$$\sum_{n=1}^N a_n = \frac{a_1 - a_{N+1}}{1-q} \quad (72.2)$$

در رابطه فوق، شرط $1 < q$ ضرورت ندارد.

۱۳.۲ تبدیل x^n

تبدیل x^n ، که کاهی به آن تابع مولده نیز می‌گویند، نقش و کاربردی شبیه تابع مولده گشناور دارد. این نوع تبدیل منحصرآ برای متغیرهای تعدادی گسته (و به طور اعم توابع گسته) کارگرفته می‌شود.

جملات آن عددی متناهی باشد. بدانان ریاضی، یک سری همگراست، اگر

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

جملات یک سری می‌تواند مثبت یا منفی باشد، اما در نظریه صفت معمولاً با جملات مثبت سروکار خواهیم داشت. بنابراین، در این محبت فقط به این حالت خاص می‌پردازیم.
چند خاصیت اصلی سریهای همگرا عبارت است از:

الف. ۱. در یک سری همگرا، جمله عمومی n ام به مت صفر میل می‌کند، یعنی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad (68.2)$$

باید توجه داشت که این خاصیت، شرط کافی نیست و ممکن است در سریهای غیرهمگرا نیز وجود داشته باشد. لیکن، اگر حد نهایی جمله‌ای صفر نباشد، می‌توان استنتاج کرد که آن سری همگرا نیست.

۲. سری نامی. اگر جمله عمومی یک سری به شکل x^n/a_n باشد، مجموع جملات آن

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = e^x \quad (69.2)$$

۳. اگر جمله عمومی یک سری به شکل nx^{n-1} باشد، مجموع جملات آن

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}(x^n) = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

اما، از رابطه (۶۷.۲) نتیجه می‌شود، که:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

بنابراین،

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (70.2)$$

اگر محاسبه مجموع تعدادی محدود از اعضای این سری مدنظر باشد، خواهیم داشت:

$$\sum_{n=0}^N nx^{n-1} = \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^N x^n \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1-x^{N+1}}{1-x} \right)$$

متغیر تصادفی X را در نظر بگیرید که فقط مقادیر مدد صحیح ضرمندی را انتخاب می‌کند. چنانچه تابع احتمال این متغیر تصادفی به شرح زیر باشد،

$$p_i = P[X = i]$$

در این صورت، تبدیل z در مورد این متغیر تصادفی بر حسب تعریف عبارت است از:

$$(74.2) \quad P(z) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i$$

هر طبقه اینکه z طوری انتخاب شود که p_i سری همگرا باشد. برای نمونه اگر $1 < |z|$ باشد، این فرط همواره برقرار است.

مثال ۷۴.۲ اگر λ دارای توزیع هندسی باشد، تبدیل z آنرا محاسبه کنید.

حل: تابع توزیع احتمال این متغیر تصادفی عبارت است از:

$$p_i = p(1-p)^i, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

طبق تعریف $P(z)$ برای این متغیر تصادفی به شرح زیر است.

$$P(z) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i = \sum_{i=0}^{\infty} p(1-p)^i z^i = P \sum_{i=0}^{\infty} ((1-p)z)^i$$

با در نظر گرفتن مجموع سری هندسی، نتیجه می‌شود که

$$(75.2) \quad P(z) = \frac{p}{1 - qz}$$

مثال ۷۵.۲ تبدیل z بک متغیر تصادفی z با توزیع دوجمله‌ای را محاسبه کنید.

حل: تابع توزیع این متغیر تصادفی عبارت از:

$$p_i = P(X = i) = (\mathcal{X}) p^i q^{n-i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

و تبدیل z آن به شرح زیر محاسبه می‌شود.

$$P(z) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (pz)^i q^{n-i}$$

(باید در نظر داشت که به ازای $i + n > n$ رابطه $p = 0$ برقرار است). با توجه به بسط سری دوجمله‌ای، نتیجه می‌شود که:

$$(76.2) \quad P(z) = (q + pz)^n$$

لهمین p_i با استفاده از تبدیل z رابطه بین p_i و $P(z)$ را می‌توان محاسبه کرد. این رابطه ای متضمنه مقدارهای متغیر z است و با مشخص بودن هر کدام، امکان محاسبه دیگری وجود ندارد.

قضیه ۷۰.۳ چنانچه تبدیل z یک متغیر تصادفی (z) باشد، در این صورت تابع توزیع احتمال آن، متغیری تصادفی به شرح زیر تواند بود:

$$p_i = P(z) |_{z=i}, \quad (77.2)$$

$$p_i = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n P(z)}{dz^n} \right|_{z=0}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (78.2)$$

المیات: با توجه به اینکه

$$P(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + \dots \quad (79.2)$$

$$P'(z) = p_1 + 2p_2 z + 3p_3 z^2 \quad (80.2)$$

$$P''(z) = 2p_2 + 3!p_3 z \quad (81.2)$$

در روابط فوق، اگر $z = 0$ باشد، روابط (77.2) و (78.2) به ازای $n = 1, 2$ اثبات می‌شود. بهمین ترتیب، رابطه (78.2) به ازای مقادیر $n \geq 3$ نیز ثابت می‌شود.

مثال ۷۰.۳ اگر تبدیل z بک متغیر تصادفی (z) باشد، تابع توزیع احتمال مرتبه را تعیین کنید.

حل: طبق روابط (77.2) و (78.2) نتیجه می‌شود

$$p_i = e^{-\lambda}$$

$$p_i = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}, \quad i \geq 1$$

بهنی λ دارای توزیع پواسون با پارامتر λ است. در این مثال، تابع توزیع احتمال طبق را از تعریف تبدیل z نیز می‌توان محاسبه کرد، زیرا با استفاده از بسط سری نمایی خواهیم داشت.

$$P(z) = e^{-\lambda} \lambda^z = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda z} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} z^n$$

$$P_i = e^{-\lambda} \lambda^i / i! \quad \text{در نتیجه}$$

بهنی از خواص تبدیل z را به شرح زیر می‌توان بیان کرد.

$$P(1) = 1$$

دستگاه معادلات اولی λ و μ پارامترهای ثابت هستند.

هدف از حل دستگاه معادلات تفاضلی، پیدا کردن مقادیر تابع بهازی متغیرهای مختلف، یعنی p_0, p_1, \dots, p_n است، بهطوری که در دستگاه معادلات صدق کند. کاربرد حل معادلات تفاضلی در مثالهای زیر نشان داده می شود.

مثال ۴-۲ معادلات تفاضلی زیر را با استفاده از تبدیل z حل کنید:

$$p_{n+1} - (1+a)p_n + ap_{n-1} = 0 \quad n=1, 2, \dots \quad (46.2)$$

$$p_1 - ap_0 = 0$$

فرض بر این است که p_0 معرف تابع احتمال یک متغیر تصادفی است.

حل: تبدیل z توابع p_n را به شرح ذیر تعریف می کیم:

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$$

ضمانت عبارات معادله (46.2) را در z ضرب و همه را باهم جمع می کنیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{n+1} z^n - (1+a) \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n + a \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1} z^n = 0 \quad (47.2)$$

طبق تعریف مربوط به $P(z)$ نتیجه می شود که

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{n+1} z^n = \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} p_{n+1} z^{n+1} = \frac{1}{z} [P(z) - p_0 - p_1 z]$$

و

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n = P(z) - p_0$$

و

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1} z^n = z \cdot \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1} z^{n-1} = zP(z)$$

و

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \lambda_i p_{n-i} z^n = \sum_{i=1}^n \lambda_i z^i \sum_{n=i}^{\infty} p_{n-i} z^{n-i} = L(z)P(z)$$

پس از جایگزینی روابط فوق در رابطه ۷۹.۲ نتیجه می شود که

$$E(X) = P'(1) \quad (47.2)$$

$$\text{var}(X) = P''(1) + P'(1) - [P'(1)]^2 \quad (47.2)$$

با ازای $1 = z$ ، از رابطه های (۷۸.۲) و (۷۹.۲) و (۸۰.۲) خواص فوق استنتاج می شود.

قضیه ۴-۳ اگر X_1 و X_2 ، متغیرهای تصادفی مستقل، و $(z) = P_1(z)$ و $P_2(z)$ ، به ترتیب معرف تبدیل z آنها، و $X_1 + X_2 = X_1 + X_2$ باشد، در این صورت تبدیل z متغیر تصادفی X از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$P(z) = P_1(z)P_2(z) \quad (48.2)$$

المات: فرض کنید

$$q_i = P[X_1 = i] \quad , \quad p_i = P[X_1 = i]$$

با بر این

$$P(X = n) = P(X_1 + X_2 = n) = \sum_{k=0}^n P(X_1 = k)P(X_2 = n-k) = \sum_{i=0}^n p_i q_{n-i} \quad \text{در نتیجه}$$

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X = n)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{i=0}^n p_i q_{n-i} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i \sum_{n=i}^{\infty} q_{n-i} z^{n-i}$$

$$= p_1(z)p_2(z)$$

قضیه ۴-۴ اگر تبدیل z یک متغیر تصادفی مانند x برابر با $P(x)$ باشد، تبدیل z متغیر تصادفی bx برابر با $bP(x)$ است. (b عددی ثابت است).

کاربرد تبدیل z در حل معادلات تفاضلی

بکی از مهترین کاربردهای تبدیل z ، حل معادلات تفاضلی است، که در آنها توابع وجود دارند که متغیرهایشان عدد صحیح هستند، برای نمونه

$$(\lambda + \mu)p_n = \underbrace{\mu p_0}_{\mu_{n+1}} + \lambda p_{n-1}, \quad n=1, 2, \dots$$

μ_{n+1}

$$f(n+2) - f(n+1) - f(n) = 0 \quad , \quad n=0, 1, 2, \dots$$

همان طور که مشاهده می شود، در اولین دستگاه معادلات، توابع مورد نظر p_n و در دومی $f(n)$ هستند. متغیرهای این توابع n است، که فقط مقادیر عدد صحیح را انتخاب می کند. (در

۷. شخصی در آزمونی شرکت و یکی از نمرات الف، ب، ج، د و ه را دریافت می‌کند. چنانچه نمره الف بگیرد، برآینده اعلام می‌شود و دیگر در این آزمون شرکت نمی‌کند. چنانچه نمره او ه باشد هم، حق شرکت مجدد در آزمون را ندارد. در غیر این دو حالت، آنقدر در آزمون شرکت می‌کند تا یکی از دو نمره فوق را دریافت کند. فرض کنید که نتیجه آزمونها مستقل از یکدیگر و احتمال گرفتن نمره‌های الف، ب، ج، د و ه به ترتیب P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 باشد. فضای نمونه این مسئله را بنویسید. نشان دهید که احتمال توافق شرکت در آزمون به علت گرفتن نمره الف، برابر با نتیجه رابطه زیر است:

$$\frac{P_1}{P_1 + P_5}$$

۸. ناسی را دوبار پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه ناس اول ۵ باشد، چقدر است، مشروط بر اینکه هدایم مجموع دو ناس برابر با ۸ بوده است؟

۹. احتمال اینکه در یک روز K مشتری به سیستم مراجعت کنند را P فرض می‌کیم. احتمال اینکه در دو روز جمماً ۱۵ مشتری به این سیستم مراجعت کنند، چقدر است؟ فرض کنید که تعداد مشتریها که در روزهای مختلف مراجعت می‌کنند مستقل از یکدیگر است.

۱۰. با فقط یکی از n کلید موجود، می‌توانیم دری را باز کنیم. در دو حالت زیر، احتمال اینکه در دفعه نام بتوان در را باز کرد، چقدر است؟ میانگین و واریانس تعداد کلیدهای امتحان شده را در هر دو حالت زیر حساب کنید.

- الف. کلیدهایی که در را باز نمی‌کنند، کtar گذاشته شوند.
ب. کلیدهایی که در را باز نمی‌کنند، کtar گذاشته نشوند.

۱۱. از ۱۵ عدد توب موجود، نه عدد آن نو است. در بازی اول سه توب به طرز تصادفی انتخاب می‌کنیم. پس از بازی، آنها را برگشت می‌دهیم. در بازی دوم سه توب دیگر را، باز هم به طرز تصادفی انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه هر سه توب نو باشند، چیست؟ (فرض می‌شود که توبهای مصرف شده در بازی اول دیگر نو محاسبه نشوند).

۱۲. در ظرفی ۵ توب سفید و ۷ توب سیاه و در ظرف دیگر، سه توب سفید و ۱۲ توب سیاه وجود دارد. سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر نتیجه شیر باشد، از ظرف شماره ۱ و اگر خط باشد از ظرف شماره ۲، توبی برمی‌داریم. اگر توبی که برداشته ایم سفید باشد، به چه احتمالی نتیجه پرتاب سکه شیر بوده است؟

۱۳. در مثال ۴.۲، آیا دو متغیر تصادفی X و Y مستقل‌اند؟ چرا؟
۱۴. شش دانشجوی دانشکده «الف» و شش دانشجوی دانشکده «ب»، در یک آزمایشگاه نتیج نام کرده‌اند. برای آزمایش، آنها را به طرز تصادفی به دو گروه تقسیم کرده‌اند. احتمال اینکه در گروه اول هفت دانشجوی دانشکده «الف» جای گرفته باشند، پذیراست؟

$$P(z) = \frac{\mu p_z(1-z)}{\mu(1-z)-z[\lambda-L(z)]}$$

با استفاده از رابطه فوق مقادیر p محاسبه می‌شود.

مسائل

۱. در ظرفی سه قوب، یک توب سفید، یک توب سیاه و یک توب قرمز وجود دارد. یک توب به طور تصادفی از آن برمی‌داریم. آن گاه این توب را مجدداً به ظرف برمی‌گردانیم و توبی دیگر را از آن برمی‌داریم. فضای نمونه این آزمایش چیست؟ احتمال اینکه هر دو توب سفید باشند، چیست؟ احتمال اینکه یک توب سیاه و یک توب سفید باشند، چیست؟

۲. مسئله ۱ را مجدداً حل کنید، با این تفاوت که توب برداشته شده از ظرف مجدداً بر گردانیده نشود.

۳. مسئله ۱ را مجدداً حل کنید، با این تفاوت که در ظرف چهار توب، دو توب سفید، یک توب سیاه، و یک توب قرمز، وجود داشته باشد.

۴. به جای استفاده از فضای نمونه، با استفاده از متغیر تصادفی مناسب، مسئله ۳ را مجدداً حل کنید.

۵. متغیر تصادفی X ، فقط مقادیر عدد صحیح غیرمنفی را انتخاب می‌کند، نشان دهید که

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n) = \sum_{m=0}^{\infty} P(X > m)$$

۶. در ظرفی n توب وجود دارد، که با شماره‌های ۱ و ۲ و ... و n مشخص شده‌اند. یک توب را به طرز تصادفی انتخاب و پس از باداشت کردن شماره آن، به ظرف برمی‌گردانیم. این کار را ادامه می‌دهیم، تا اینکه توبی برای دو میان بار برداشته شود، که در این صورت متوقف می‌شویم. چنانچه X را تعداد دفعات آزمایش فرض کنیم، نشان دهید که $P(k) = P(X = k)$ از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$P(k) = (k-1) \left(\frac{n}{k-1} \right)^{k-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n+1$$

- آن گاه با استفاده از روش و نتیجه مسئله ۵، تابع توزیع X را تعیین کنید. ضمناً نشان دهید که میانگین X از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$E(X) = 2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

$$f(x, y) = \frac{e^{-x-y}}{y}, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty$$

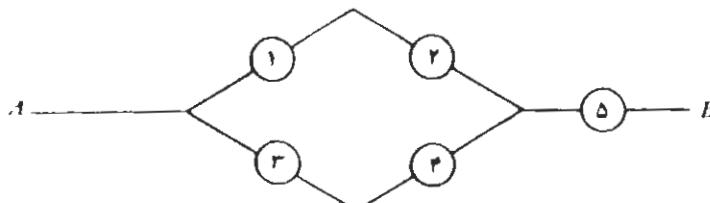
مقدار $E(X|Y=y)$ را بدست آورد.

۲۳. اگر X یک متغیر تصادفی با توزیع نمایی باشد، $(E(X|X))$ را محاسبه کنید.
در دو کفه ترازو، دو وزنه می‌گذاریم، که هر کدام از آنها متغیری تصادفی است.
اولی دارای توزیع نرمال با میانگین ۲۵ و واریانس ۱ دومی دارای توزیع یکواخت
در فاصله (۵۵، ۵۰) است. احتمال اینکه وزنه اولی سنتگین تر باشد، چقدر است؟

۲۴. احتمال اینکه در یک تیراندازی تیر به هدف بخورد برابر با $(D^3 - 3000)$ است،
که D فاصله تیرانداز نا هدف فرض می‌شود. جنابجه هدف منحرک و فاصله آن تیر
متغیری تصادفی با توزیع یکواخت از فاصله ۱۰۰ تا ۲۰۰ باشد، در این صورت احتمال
برخورد تیر به هدف را بدست آورد.

۲۵. در یک طرف ۶ نوب سفید و ۴ نوب سیاه وجود دارد. عدد n را به طور تصادفی از
بین اعداد (۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶) انتخاب می‌کیم. آن‌گاه n عدد نوب از طرف برمی‌داریم.
احتمال اینکه همه توپها سفید باشد، چیست؟

۲۶. یک مدار برقی در شکل نشان داده شده است. در طول یک آزمایش، جزء شماره i
($i = 1, 2, \dots, 5$) به احتمال P_i از کار می‌افتد و عبور حریان از آن امکان ندارد. احتمال
اینکه در انتهای آزمایش حریان از A به B عبور کند، چقدر است؟



۲۷. در کارخانه‌ای یک نمونه سه‌تایی از کالا بی برای بازرسی انتخاب شده است. اگر در این کارخانه ۵ خط تولید مشاهده و خود داشته باشد، احتمال اینکه این کالاها از خطاوت مختلف انتخاب شده باشند، چقدر است؟ (با عبارت دیگر احتمال اینکه دو عدد با هشتگر کلا روی یک خط تولید شوند باشد، چقدر است؟)

۲۸. در موزد هر تبدیل φ ، تابع φ مرتبه را تعیین کنید. (φ لزوماً تابع احتمال نیست)

$$P(z) = \frac{10}{1-z}$$

الف.

۲۹. یک متغیر تصادفی در فاصله $(1, 1)$ دارای نابع پنگالی $C(1-X^2)$ است.
مقدار C را تعیین کنید. تابع توزیع این متغیر تصادفی را محاسبه کنید. احتمال اینکه X
بین سو ۰ تا ۰.۷۵ باشد، چقدر است؟

۳۰. متغیرهای تصادفی مستقل $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ را در نظر بگیرید، که دارای تابع توزیع
پکتواریت دفاضه $(1, n)$ هستند. متغیر تصادفی جدید M را به شرح زیر تعریف می‌کنیم:
$$M = \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

نشان دهید که تابع توزیع M هارت خواهد بود از:

$$F_M(x) = x^n, \quad 0 < x < 1$$

تابع پنگالی این متغیر تصادفی را بدست آورد.

۳۱. متغیری تصادفی، مقادیر ۱ و ۲ و ۳ را با احتمال مساوی انتخاب می‌کند. با استفاده
از تابع مولد گشاور این متغیر تصادفی، مقدار $E(x)$ و $D(x)$ را به دست آورد.
نتایج بدست آمده را با محاسبه مستقیم این گشاورها مقایسه کنید.

۳۲. دو متغیر تصادفی مستقل X و Y را در نظر بگیرید. فرض کنید که X دارای توزیع
نمایی و Y دارای تابع توزیع دلخواه G باشد. مقدار رابطه زیر را حساب کنید:

$$P(X < Y)$$

۳۳. فرض کنید که X معرف تعداد پرتاهای ناس تا آمدن اولین عدد ۶ و Y معرف تعداد
پرتاها تا آمدن اولین عدد ۱ باشد. کمینهای زیر را حساب کنید

$$E(X|Y=3), \quad E(X|Y=1), \quad E(X)$$

۳۴. فرض کنید که X_1, X_2, \dots, X_N متغیرهای تصادفی مستقل وهمه دارای تابع توزیع
پکان هستند. از طرف دیگر N نیز متغیر تصادفی است. ثابت کنید که

$$E\left[\sum_{i=1}^N X_i\right] = E[N]E[X]$$

$$\text{var}\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = E[N]\text{var}(X) + (E[X])^2\text{var}(N)$$

۳۵. متغیر تصادفی X را در نظر بگیرید که دارای تابع پواسون با پارامتر λ است. اگر
 λ نیز یک متغیر تصادفی با توزیع نمایی و پارامتر m باشد، در این صورت تابع توزیع
 X را بدست آورد.

۳۶. پنگالی مشترک X و Y هارت است از:

ب. $P(z) = \frac{\lambda}{1-\lambda z}$

ج. $P(z) = \frac{\lambda z}{(1-\lambda z)^2}$

د. $P(z) = \lambda e^z$

۳۰.تابع f مربوط به تبدیل z به شرح زیر را تعیین کنید.

$$P(z) = \frac{1+12z}{1+z+6z^2}$$

راهنمایی: $P(z)$ را به مجموع دو کسر تبدیل کنید که مخرج آنها درجه یک و صورت آنها فاقد متغیر z باشد.

۳۱. معادله نقاطی زیر را حل کنید.

$$p_{n+2} - 5p_{n+1} + 6p_n = 0$$

که $p_0 = 1$ و $p_1 = 0$ است.

توزیع نمایی^۱ و فرآیند پواسون

در نظریه صفت، توزیع نمایی، فرآیند پواسون و توزیع ارلانگی نقش اساسی دارند. مدل‌هایی که زمان بین دو دو دو متغیری مشترک‌ها و یا مدت خدمت دهی آنها متغیری تصادفی با توزیع نمایی است، ساده‌ترین حالتها محسوب می‌شوند. در بسیاری از موارد نیز متغیرهای تصادفی فوق را می‌توان، با تقریب کافی، دارای توزیع نمایی فرض کرد. ضمناً خواهیم دید که توزیع نمایی و فرآیند پواسون با یکدیگر (ابطه) تبدیل دارند و در واقع به یک پدیده واحد از دو دید مختلف می‌نگرند.

در فصول بعد، مدل‌های صفتی را که براساس فرآیند پواسون ساخته شده‌اند، مورد بررسی قرار می‌دهیم

۱.۳ توزیع نمایی

تعريف. متغیر تصادفی X دارای توزیع نمایی است. اگر، به ازای تمام مقادیر $x > 0$ ، تابع چگالی آن به شکل زیر باشد (λ بارامتر مدل نامیده می‌شود).

$$(1.3) \quad f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

تابع توزیع این متغیر تصادفی را (به ازای $x \geq 0$) به شرح زیر محاسبه می‌کنند.

۱. در بعضی از کتب و مقالات به این متغیر تصادفی، نمایی منفی هم می‌کویند.

(میانگین این متغیر تصادفی را نزد می‌توان با میانگینی از نابع مولد گشتاور به دست آورد، که همان $\lambda/1$ حاصل می‌شود).

۴.۳ خواص توزیع نمایی

الف. خاصیت بدون حافظه بودن

مهترین خاصیت توزیع نمایی این است که گذشته آن نفسی در آینده‌اش تدارد. فرض کند که زمان وقوع یک اتفاق، متغیری تصادفی با توزیع نمایی باشد. اگر نا لحظه‌نمایی، مثلاً، این اتفاق بفناور باشد، می‌توان از این مدت زمان صرف نظر کرد و مبدأ زمان را باین لحظه (لحظه و به جای صفر) انتقال داد.

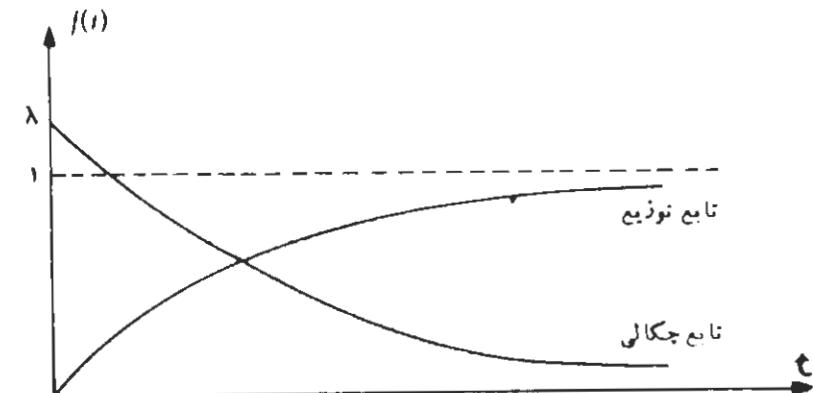
مثلاً، اگر خراب شدن ماشینی دارای توزیع نمایی باشد و پس از مدتی، مثلاً سال، ماشین هنوز خراب نشده باشد، خاصیت بدون حافظه بودن آن حکم می‌کند که سه سال گذشته را باید فراموش کرد و زمان حال را مبنای محاسبات در نظر گرفت. بدین ترتیب، احتمال خراب شدن این ماشین کهنه با احتمال خراب شدن ماشین تو مادر آن یکسان است. برای بیان این موصوع بزمیان ریاضی، فرض کنید که X ، متغیر تصادفی با توزیع نمایی باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که بجزای تمام مقادیر X و در این رابطه ریاضی صادق است

$$P[X > s+x | X > s] = P[X > x] \quad (4.3)$$

هر دو طرف رابطه فوق، احتمال خراب شدن ماشین را، حداقل نا لحظه λ (نسب بوزمان فعلی) نشان می‌دهند. طرف سمت راست، مربوط به ماشین تو است، در حالی که عبارت سمت چپ به ماشینی مربوط است که نا این لحظه عمری به امداده داشته است. برای اثبات رابطه ۴.۳، از خاصیت احتمال شرطی استفاده می‌شود، یعنی

$$\begin{aligned} P(X > s+x | X > s) &= \frac{P(X > s+x, X > s)}{P(X > s)} \\ &= \frac{P(X > s+x)}{P(X > s)} = \frac{e^{-\lambda(s+x)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda x} = P(X > x) \end{aligned}$$

این پدیده را می‌توان با کمک منحنی‌های شکل ۴.۳ نزد نشان داد. فرض کنید که منحنی شارة ۱ نشان‌دهنده تابع چگالی متغیری تصادفی با توزیع نمایی و پارامتر λ است. می‌خواهیم حساب کنیم با چه احتمالی ماشین در فاصله s تا $s+x$ خراب می‌شود. اگر در لحظه s صفر باشیم، این احتمال بر اینرا با مساحت زیر منحنی در همین فاصله است. اما اگر در لحظه s باشیم و ماشین هنوز خراب نشده باشد، این احتمال بر اینرا با مساحت زیر منحنی شماره (۲) در همین فاصله است، ذیرا به علت خاصیت بدون حافظه بودن توزیع نمایی، مبدأ زمان به لحظه



شکل ۴.۳ نابع چگالی و نابع توزیع نمایی

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x f(y) dy = 1 - e^{-\lambda x} \quad (4.3)$$

$$P(X > x) = e^{-\lambda x} \quad (4.3)$$

محاسبه میانگین و واریانس توزیع نمایی

میانگین این متغیر تصادفی به شرح ذیر محاسبه می‌شود:

$$E(X) = \int_0^\infty x (\lambda e^{-\lambda x}) dx = \frac{1}{\lambda} \quad (4.3)$$

و دیامس را می‌توان از تابع مولد گشتاور بدست آورد، که عبارت است از:

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \int_0^\infty (e^{tx}) (\lambda e^{-\lambda x}) dx = \frac{\lambda}{\lambda-t} \cdot (t < \lambda) \quad (4.3)$$

با مشتقگیری از این تابع، می‌توان گشتاورهای مختلف و از جمله $E(X^r)$ را حساب کرد.

$$E(X^r) = \left. \frac{d^r M(t)}{dt^r} \right|_{t=0} = \left. \frac{r!}{(\lambda-t)^{r+1}} \right|_{t=0} = \frac{r!}{\lambda^{r+1}} \quad (4.3)$$

$$\text{var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 = \frac{1}{\lambda^2} \quad (4.3)$$

$$\frac{d}{ds} P(X > t+s) = P(X > t) \frac{d}{ds} P(X > s) \quad (11.2)$$

از طرف دیگر، ما توجه بداین موضوع که نابع چگالی مشتق نابع توزیع نمایی است، رابطه زیر را به دست می آوریم:

$$\frac{d}{ds} P(X > s) = \frac{d}{ds} [1 - P(X \leq s)] = -\frac{d}{ds} P(X \leq s) = -f(s) \quad (12.2)$$

که (s) نابع چگالی متغیر تصادفی X بدارای مقدار s است. از رابطه های (11.2) و (12.2) نتیجه کشیده می شود که

$$\frac{d}{ds} P(X > s+t) = -f(s) P(X > t)$$

امندا طرفین را بر $P(X > t)$ تقسیم می کنیم. از طرفی، چون نابع فوق بدارای تمام مقادیر ممکن است، آنرا به صور دلخواه ماوی صفر قرار می دهیم.

$$\frac{dP(X > t)}{P(X > t)} = -f(t) dt \quad (13.2)$$

از طرفین انتگرال معتبر (از صفر تا t) گرفته می شود، که حاصل آن عبارت است از:

$$L_t[P(X > t)] = -f(t) \cdot t$$

یا

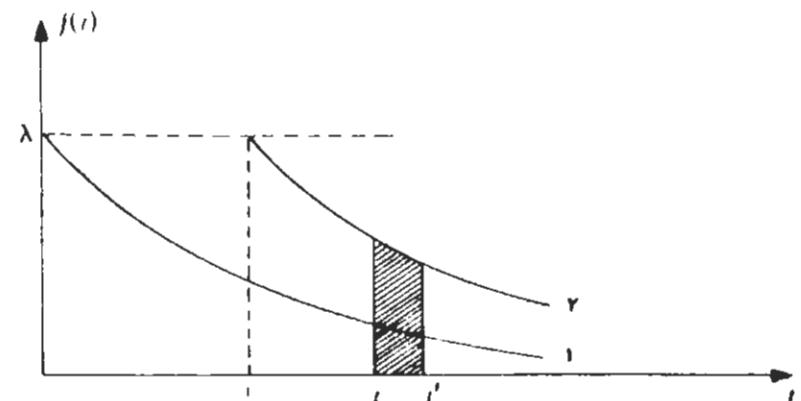
$$P(X > t) = e^{-f(t)t} \quad (14.2)$$

رابطه (14.2) نشان می دهد که X دارای توزیع نمایی با پارامتر (t) f است. در نظر باید صرف نظر کرد از خاصیت بدون حافظه بودن، محاسبات را بسیار آسانتر

می کند، زیرا می توان با صرف نظر کردن از اتفاقات گذشته، هر زمانی (t-s) عنوان مدها محاسبات در نظر گرفت. اگر زمان بین دو ورود متوالی مشتریها، دارای توزیع نمایی باشد، اطلاع از زمان ورود مشتریهای قبلی ضروری ندارد.

مثال ۲.۳ فرض کنید که مدت زمانی که یک مشتری در داخل سیستم می گذراند، متغیر تصادفی با توزیع نمایی و میانگین ۴۵ دقیقه باشد. احتمال اینکه یک مشتری حداقل یک ساعت در سیستم باشد. چقدر است؟ احتمال اینکه یک مشتری حداقل یک ساعت در سیستم باشد، در حالی که می دانیم تا این لحظه حداقل نیم ساعت را در سیستم گذرانده، چقدر است؟

حل: متغیر تصادفی X را مدت زمان توقف مشتری در سیستم فرض می کنیم. می دانیم



شکل ۲۰.۳ خاصیت بدون حافظه بودن توزیع نمایی

و انتقال می باشد. بدین معنی که مشاهده می شود، در این حالت مقدار احتمال بیشتر از حالت قبلی است.

مثال ۱۰.۳ فرض کنید که مدت مکالمات تلفنی، متغیری تصادفی با توزیع نمایی و میانگین ۵ دقیقه است. شخصی به یک تلفن عمومی مراجعه و مشاهده می کند که شخص دیگری در حال مکالمه است، اما معلوم نیست که مکالمه این از چه زمانی شروع شده است؟ احتمال اینکه این شخص مجبور شود بیش از یک ساعت منتظر آزاد شدن تلفن بماند، چقدر است؟

حل: چون متغیر تصادفی نمایی بدون حافظه است، می توان فرض کرد که مکالمه از همان لحظه آغاز شده است. از طرف دیگر، چون میانگین مکالمه ۵ دقیقه است، پارامتر λ برابر با $1/5$ خواهد بود. اگر مدت زمان مکالمه تلفن کننده را X فرض کیم،

$$P(X > 60) = e^{-60/1/5} = e^{-60}$$

قضیه ۱۰.۳ تنها متغیر تصادفی پیوسته بدون حافظه، نمایی است اثبات: متغیر تصادفی X، که بدون حافظه است، را در نظر بگیرید. طبق این خاصیت، رابطه (۸.۳) به ازای تمام مقادیر t و s برقرار است. از طرفی، براساس احتمال شرطی، دارایم.

$$P(X > t+s | X > s) = \frac{P(X > t+s, X > s)}{P(X > s)} = \frac{P(X > t+s)}{P(X > s)} \quad (9.2)$$

با استفاده از روابط های (۸.۳) و (۹.۲)، رابطه زیر به دست می آید:

$$P(X > t+s) = P(X > s)P(X > t) \quad (10.2)$$

نسبت t+s و مشتق می گیریم.

خواهد بود، که طبق خاصیت فوق متغیر تصادفی با توزیع نمایی است.
مثال ۳.۳ سیستم صنعتی را در نظر بگیرید که دو خدمت دهنده داشته باشد. مدت زمان خدمت، متغیر تصادفی با توزیع نمایی است. میانگین خدمت توسط خدمت دهنده اولی را ۱۰ دققه و توسط دومی را ۱۵ دققه فرض می کنیم. بلکه متغیر جدید وارد سیستم می شود. در زمان ورود او هر دو خدمت دهنده مشغول و مددگار و در صفت نیزه شری دیگری وجود ندارد. چنانچه در لحظه ورود این مشتری جدید، ۱۲ دققه از زمان ارائه خدمت توسط خدمت دهنده شماره ۱ و ۸ دققه از خدمت شماره ۲ کلشته است، بدروالات زیر جواب دهید؟

- الف. احتمال اینکه مشتری جدید حداکثر ۳ دققه در صفت منتظر بماند، چقدر است?
ب. میانگین مدت زمان انتظار مشتری در صفت را حساب کنید.
- حل: بر اساس میانگین مدت زمان خدمت، بار امتر های متغیر تصادفی نمایی برای خدمت دهنده اول برای $\lambda_1 = 1/10$ و برای دومی برای $\lambda_2 = 1/15$ خواهد بود. با استفاده از خاصیت الف، (بدون حافظه بودن توزیع نمایی)، می وانم فرض کنم که خدمت دهنده کار از اینجا ورود مشتری جدید کار خود را شروع کرده است. بار این، بدأ زمان را همن اینجا در نظر می کیریم. اما، مدت زمانی که مشتری جدید در صفت صرف می کند، متغیر تصادفی X برابر با حداقل مدت زمان ارائه خدمت توسط خدمت دهنده کان ۱ و ۲ است. ادعا، متغیر تصادفی X ، طبق حاصلت ب، دارای توزیع نمایی سا بار امتر مجموع بار امترها، یعنی $1/6$ است. بن،

$$P(X \leq 2) = 1 - e^{-\lambda_1 - \lambda_2} = 1 - e^{-1/10 - 1/15} = 1 - e^{-1/6}$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{1/10} + \frac{1}{1/15} = 25$$

بنابراین، مشتری را بد غایق در صفت منتظر بماند. در حالی که از در سیستم فقط خدمت دهنده اول کار می کرد، می باشد $1/10$ دقیقه بیشتر می کرد. (و اگر فقط خدمت دهنده دوم کار می کرد، $1/15$ دقیقه وقت نیاز بود).

ج. نزولی بودنتابع جستگالی

این خاصیت از رسمی متعارف و خصوص متعارف است. برای روشن شدن این خاصیت، دو زمان x و y را در نظر بگیرید (که $y > x$). احتمال وقوع بلکه پیشامد، در همه لحظه از این خاصیت دارای $P(X \leq y | X \leq x)$ از احتمال وقوع همان پیشامد در همه لحظه $(x, y]$ بیشتر است (در هر دو حالت y بستان و x می شود). این موصوع در شکل ۳.۳ اشاره داده شده است.
مثال عددی زیر بهروش شدن موصوع (ملک می کند. محدودیت، مربوط به توزیع نمایی با میانگین بلک است

که با نگرانی توفیق متناسبی ۴۰ دقیقه (با دو ساعت) است. بنابراین، $\lambda = 1/5$ به این ترتیب، حواله اولین سؤال عبارت است از:

$$P(X > 1) = e^{-\lambda} = e^{-1/5}$$

اما در مورد دومین سؤال، با درنظر گیری حقیقت بادون حافظه بودن این متغیر تصادفی،

$$P(X > 1 | X > 0) = P(X > 1) / P(X > 0) = e^{-1/5} / (1 - e^{-1/5}) = e^{-1/5} / e^{1/5} = e^{-1/5}$$

لهم، حداقل چند متغیر تصادفی مبتنی بر توزیع نمایی، با متغیر تصادفی با توزیع نمایی است. هرگاه توزیع این خاصیت، سیستم صنعتی را با در خدمت دهنده در نظر بگیرید، فرض کنید در همانی که پیشنهادی جدید وارد سیستم می شود، همه خدمت دهنده کان مشغول هستند در ضمن، همانی هم مشکل نشده است. در این صورت، مدت زمانی که مشتری باید در صفت منتظر بماند، عبارت است از فاصله زمانی ورود او تا لحظه ای که حداقل یکی از خدمت دهنده کان آزاد می شود، به عبارت دیگر، مدت انتظار او، که البته متغیر تصادفی است، حداقل چند متغیر تصادفی پیشگر (مدت بعد می تواند همی خدمت دهنده کان) است. می خواهیم نشان دهیم که آنچه این متغیرهای تصادفی دارای توزیع نمایی باشد، حداقل آنها نیز دارای توزیع نمایی خواهد بود. پادامنی این توزیع نمایی بیو، مجموع پادامنی های متغیرهای تصادفی تشكیل دهنده آن است.

برای دیانتی؛ اگر X_1, X_2, \dots, X_n متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع نمایی دارای متنوشهای $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ هستند، $X = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$

$$P(X > x) = P(\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} > x)$$

پس مطوفه دیگر، اکسر حداقل چند متغیر تصادفی، از عددی مانند X کوچکتر نیاشد. می بینیم اینکه هر کدام از این متغیرهای تصادفی نیز از این عدد کوچکتر نخواهد بود. (نظام این،

$$P(\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} > x) = P(X_1 > x, X_2 > x, \dots, X_n > x)$$

پس چون هرچند شده است که متغیرهای تصادفی مورد بحث مستقل اند،

$$P(X > x) = P(X_1 > x)P(X_2 > x) \dots P(X_n > x) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)x}$$

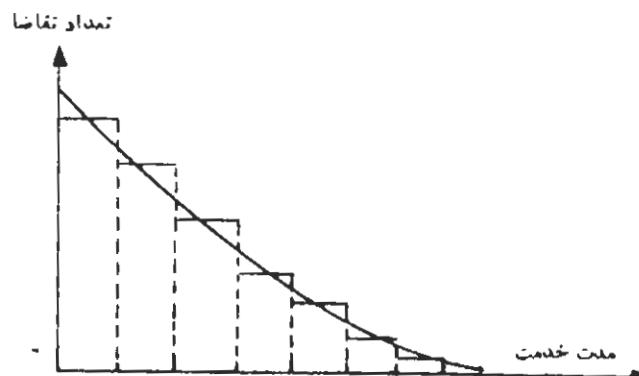
این خاصیت را می توان در مورد المکوی «عدد مشتبهیان نیز در نظر گرفت. فرض کنید که سیستم دارای n نوع مشتری و زمان بین دو ورود متواالی هر نوع مشتری نیز متغیر تصادفی با توزیع نمایی باشد. در این صورت، زمان بین دو ورود متواالی مشتریها (صرف نظر از نوع مشتری)، برایر برای حداقل زمانهای بین دو ورود مشتریها مختلف

تصادفی با توزیع نمایی دانست، به شرح ذیرا است:

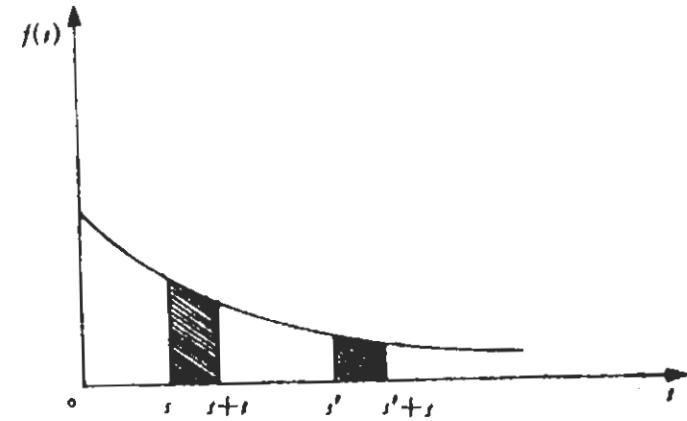
سیستمی را در نظر بگیرید که دارای انواع مختلف مشتری (مثلاً «نوع») باشد. با مراجعه به شکل ۲.۳، فرض کنید که تعداد مشتریهای نوع ۱ زیاد ولی مدت خدمت دهی به آنان کوتاه (و تقریباً ثابت)؛ تعداد مشتریهای نوع ۲ تا حدی کمتر ولی مدت خدمت دهی به آنان بیشتر، و همین طور تا مشتریان نوع n ام که تعدادشان خیلی کم و مدت ارائه خدمت به آنان طولانی است. در این صورت، منحنی حاصل معرف مقدار تفاضل مدت خدمت دهی خواهد بود، که با تقریب کافی، نشاندهندۀ متغیری تصادفی با توزیع نمایی است. مثلاً بیمارستانی را در نظر بگیرید، معمولاً، تفاضل مدت خدمت کوتاه مدت تزریقات و پانسمان زیاد، ولی برای خدمات طولانی مانند جراحی توأم با بستری شدن کمتر است. یک مقالمه لغتنی را در نظر بگیرید، درصدی بالا از مقالمهات کوتاه و درصد کمی از آنها طولانی هستند. درنتیجه، رابطه بین تعداد و مدت خدمت معمولاً با التهی شکل ۲.۳ تطابق دارد و لذا می‌توان گفت که مدت زمان مقالمه، متغیر تصادفی نمایی است.

۵. در توزیع نمایی، احتمال وقوع پیشامد در زمان کوتاه Δt تقریباً برابر با $\lambda \Delta t$ است یعنی چنانچه تا لحظه مشخص بیشامد مورد نظر بسیور قریع نیوسته باشد، احتمال اتفاق افتادن آن در فاصله کوتاه Δt متناسب با λ است. به زبان ریاضی

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(X \leq x + \Delta t | X > x)}{\Delta t} = \lambda \quad (15.3)$$



شکل ۲.۴ حالی که انواع مختلف مشتری با زمانهای مختلف خدمتدهی وجود دارد



شکل ۳.۲ نزولی بودن تابع جکالی متغیر تصادفی نمایی

$$P(0 \leq X \leq \frac{1}{4}) = 0.393$$

$$P(\frac{1}{4} \leq X \leq 1) = 0.228$$

$$P(1 \leq X \leq \frac{3}{4}) = 0.145$$

$$P(\frac{3}{4} \leq X \leq 2) = 0.088$$

$$P(2 \leq X \leq 5) = 0.053$$

براساس محاسبات فوق، یک متغیر تصادفی با توزیع نمایی مقادیر کوچک (۱) یا احتمال «بهاد» مقادیر بزرگتر (۴) احتمال کمتر انتخاب می‌کند. در این مثال، احتمال انتخاب مقادیر کوچکتر از مقدار میانگین، بیش از ۳۶٪ (بیش از ۳۶۶۰٪) است، در حالی که احتمال انتخاب مقادیر بیش از آن کمتر از ۲٪ (بیش از ۳۶۹۰٪) خواهد بود.

از این خاصیت بدین ترتیب استفاده می‌کنند که در صورتی می‌توان گفت که مدت خدمت دهی دارای توزیع نمایی است که احتمال طولانی بودن مدت خدمت کم باشد و دو همچنین بیشتر خدمتها در مدتی کوتاه (در مقایسه با میانگین) به اتمام برسد. همان ترتیب، اگر در سیستمی، مدت خدمت دهی ثابت و یا تقریباً ثابت باشد، نمی‌توان گفت که خدمتهایی با توزیع نمایی انجام می‌شود.

یک دهگر از مواردی که می‌توان مدت خدمت دهی را، طبق این خاصیت، متغیری

Δt

$$\begin{aligned} P(X \leq x + \Delta t | X > x) &= P(X \leq \Delta t) = 1 - e^{-\lambda \Delta t} \\ &= 1 - \left[1 - \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} - \frac{(\lambda t)^3}{3!} + \dots \right] = \lambda \Delta t + O(\Delta t) \end{aligned}$$

(در هارت فوق، ابتدا از خاصیت بدون حافظه بودن توزیع نمایی و سپس از بسط e^x استفاده شده است). منظور از (x) مجموعه مواهی است که به آنی برهای کوچک، یک پنهانیت کوچک درجه دوم به بالا هستند. بدین ریاضی

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Theta(\Delta x)}{\Delta x} = 0 \quad (16.2)$$

به عنوان نمونه،تابع x از نوع (x) است، در حالی که تابع θ شامل این مجموعه نمی شود.

براساس خاصیت (۱۶)، می توان نتیجه گیری کرد که در فرایند پواسون احتمال اینکه در یک فاصله کوتاه زمانی Δt ، همزمان دو پیشامد اتفاق یافند، پنهانیت کوچک درجه دوم است. بنابراین، هیچ گاه دو پیشامد همزمان به وقوع نمی بیوندد.

ورود کاملاً تصادفی
با توجه به قضیه فوق، ورود پواسون را گاهی ورود کاملاً تصادفی هم می نویند، زیرا احتمال ورود یک مشتری در فاصله کوتاه Δt منفل از زمان گذشته است و فقط بتنگی به مدت Δt و λ دارد.

۳.۳ فرایند شمارشی

این فرایند معرف تعداد پیشامدهایی است که تا لحظه معینی اتفاق افتاده است. در حالت کلی، چنانچه $\{N(t), t \geq 0\}$ معرف یک فرایند شمارشی باشد، بدانای $\{N(t), t \geq 0\}$ شاندنه تعداد پیشامدهایی است که تا لحظه صفر تا t صورت گرفته است. نمونهای فرایندهای شمارشی عبارت اند از:

- تعداد حوادث رانندگی که در یک شهر و در مدتی معین اتفاق می افتند.
 - تعداد بچه هایی که در مدت معینی در یک بیمارستان متولد می شوند.
 - تعداد مشتری بانی که تا لحظه t وارد یک میستم صفت شده و یا از آن خارج شده اند.
- براساس این تعریف، $\{N(t), t \geq 0\}$ فقط می تواند اعداد صحیح غیرمنفی را انتخاب کند. ضمناً فرایند شمارشی تابعی افزاینده (برحسب t) است، یعنی بدانای $\{N(t), t \geq 0\}$ داریم:

از طرف دیگر، تعداد پیشامدهایی که تا t و $t + \Delta t$ اتفاق می افتند، برابر با $N(t + \Delta t) - N(t)$ خواهد بود. ضمناً فرض می کنیم که $N(t)$ ، یعنی شمارش پیشامدها از لحظه صفر شروع شود.

در یک فرایند شمارشی، ممکن است خاصیت (شد منفل وجود داشته باشد. معنای این خاصیت این است که تعداد پیشامدهایی که در یک فاصله زمانی معنی رخ می دهد (با به عبارت دیگر، مقدار رشد (t) در این فاصله)، منتقل از تعداد پیشامدهایی است که در یک فاصله زمانی دیگر اتفاق می افتند (به فرض اینکه این دو فاصله زمانی خیره شتر لا باشند). مثلاً، در یک سیستم صف، خاصیت رشد منفل در الکترو و رله مشتری آن بدین معناست که تعداد مشتری هایی که فرداً تا ساعت ۹ نباشند وارد می شوند مبارابر با تعداد مشتری هایی که قبل از ساعت ۹ وارد شده اند، ندارد.

خاصیت دیگری که در یک فرایند شمارشی می نواند وجود داشته باشد، خاصیت (شد ثابت است. معنای این خاصیت آن است که تعداد پیشامدهایی که تا لحظه زمانی معینی برش می آید، منفل از زمان و نوع آنهاست و فقط بستگی به طول Δt نداشت آن ذاته. مثلاً، اگر خاصیت رشد ثابت در الکترو ورود مشتری به یک سیستم صف صدق نماید، نداده مشتری هایی که میلا از ساعت ۸ تا ۹ وارد می شوند، تا تعداد مشتری بانی که در هر ساعت دیگر، مثلاً ۱۰ تا ۱۱ وارد می شوند، تابع توزیع بکسانی دارد. اما، اگر در یک سیستم، ورود مشتری های در زمانهای مختلف متفاوت باشد، دیگر خاصیت رشد ثابت صدق نمی کند. مثلاً در یک جایگاه فروش بزرگ، میانگین تعداد مشتری هایی در احتمه کشته (اتوماتها) از ساعت ۸ تا ۹ بیشتر از میانگین تعداد مشتری هایی است که تا ساعت ۲۲ تا ۲۳ مراجعت کنند.

۴.۳ فرایند پواسون

فرایند پواسون حالت خاصی از فرایند شمارشی محضوب می شود.

کلیه، فرایند شمارشی $\{N(t), t \geq 0\}$ را فرایند پواسون با پارامتر λ نامند، اگر تعداد پیشامدهایی که در فاصله زمانی Δt میان t و $t + \Delta t$ اتفاق می افتند، طبق توزیع پواسون و (به ازای تمام مقادیر n و λ ، به شرح زیر باشد

$$P[N(t + \Delta t) - N(t) = n] = e^{-\lambda} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad (17.2)$$

ضمناً فرض می کنیم که خاصیت رشد منفل نیز وجود داشته باشد.

براساس تعریف فوق، خاصیت رشد ثابت بجز مسلمان وجود خواهد داشت، زیرا رابطه فوق بدانای تمام مقادیر n و λ صادق است. درنتیجه:

خواهد بود. اثبات دیاضی این موضوع به شرح زیر است.
ابندا نشان خواهیم داد که T_1 دارای توزیع نمایی با پارامتر λ است، زیرا

$$\begin{aligned} P(T_1 > x) &= P[N(x) = 0] = e^{-\lambda t} \\ \text{در مرحله بعد، با استفاده از روابط زیر، نمایی بودن } T_1 \text{ اثبات می شود.} \\ P(T_1 > x | T_1 = s) &= P(s+x < T_1) = P(s+x < T_1) \\ &= P(s < T_1 - x) = P(s < T_1) = e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

(در رابطه فوق، تساوی دوم از خاصیت رشد ثابت ناشی می شود). به همین ترتیب، می توان همین خاصیت را برای T_2 و T_3 و ... نشان داد.

بنابراین، می توان گفت که فرایند پواسون و توزیع نمایی دو روی یک سکه اند. فرایند پواسون تعداد پیشامدها را مشخص می کند و توزیع نمایی فاصله بین دو پیشامد متواتی (آنچنان می دهد. مثلاً در یک سیستم صفحه، اگر ورود مشتریها طبق فرایند پواسون باشد، می توان گفت زمان بین دو ورود متواتی مشتریها براساس توزیع نمایی است، عکس این موضوع نیز صادق است).

مثال ۴.۳ مشتریهای یک بانک براساس فرایند پواسون مراجعته می کنند. در هر ساعت، به طور متوسط ۱۰ نفر مشتری وارد می شوند. پس از باز شدن یاتک در صبح، احتمال اینکه در ۱۵ دقیقه اول کسی مراجعته نکند، چقدر است؟ احتمال اینکه بین ورود هفتمنی و هشتمنی مشتری و قهقهه ای حداقل برابر یک ساعت پیش بیاید، چقدر است؟

حل: پارامتر فرایند پواسون عبارت است از $\lambda = 10$. طبق بحث فوق، زمان بین دو ورود متواتی مشتریها طبق توزیع نمایی با پارامتر پواسون (۱۰) است. بنابراین،

$$P(T_1 > 25) = e^{-25}$$

$$P(T_1 > 1) = e^{-10}$$

(در رابطهای فوق، معرف زمان ورود اولین مشتری و T_1 معرف زمان بین ورود هفتمنی و هشتمنی مشتری است و ضمناً ۱۵ دقیقه به ۲۵ دقیقه می بینیم که بین این دو مقدار متفاوت است).

ارتباط بین فرایند پواسون و توزیع نمایی را به صورت ساده تر نیز می توان نشان داد. اگر تعداد پیشامدها براساس فرایند پواسون باشد، در هر لحظه طبق خاصیت دسته مستقل، پیشامدهای از آن لحظه به بعد را می توان مستقل از گذشته فرض کرد. به عبارت دیگر، مبدأ زمان را می توان همن لحظه در نظر گرفت. بدین ترتیب، زمان پیشامد بعدی، متغیری تصادفی است که قادر حافظه است. ضمناً میانگین تعداد پیشامدها از این لحظه تا t برابر با λt است، که با خاصیت «د» توزیع نمایی تطبیقی کند. بنابراین، زمان بین دو پیشامد متواتی هم متبرهی تصادفی با توزیع نمایی است.

$$P[N(s+t) - N(s) = n] = P[N(t) = n] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad (14.2)$$

در اینجا لازم است که بله تلاوت فرایند پواسون و توزیع پواسون نیز اشاره شود. در توزیع پواسون تنها پارامتر λ مطرح است. در حالی که در فرایند پواسون علاوه بر این پارامتر، با زمان (t) نیز سروکار داریم. اگر در توزیع پواسون بهای پارامتر λ را قرار دهیم، فرایند پواسون به دست می آید. از طرف دیگر، بهای از مقدار ثابت نیز از λ مقدار λt نیز ثابت خواهد بود و فرایند پواسون به توزیع پواسون تبدیل می شود.

میانگین و واریانس فرایند پواسون
اگر $N(t)$ معرف فرایند پواسون باشد،

$$E[N(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} n P(N(t) = n) = \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = \lambda t \quad (14.3)$$

(در معامله فسق از بسط سری $e^{-\lambda t}$ استفاده شده است). همانطور که مشاهده می شود، میانگین تعداد پیشامدها هستگی متفقیم به زمان دارد. در واقع، λ معرف میانگین تعداد پیشامدها در واحد زمان است. برای محاسبه واریانس، ابتدا $E[N^2(t)]$ را حساب می کیم.

$$E[N^2(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = (\lambda t)^2 + \lambda t \quad (20.3)$$

در نتیجه

$$\text{var}[N(t)] = \{E[N(t)]\}^2 - E[N^2(t)] = (\lambda t)^2 - (\lambda t)^2 + \lambda t = \lambda t \quad (21.3)$$

لازم بعیدآوری است که می توان میانگین و واریانس را با استفاده از کامپیوتر مولدگشته اد به دست آورد. نایاب مولدگشته اور فرایند پواسون عبارت است از:

$$\begin{aligned} M_{X(0)}(s) &= e^{\lambda(s-t)} \\ M_{N(t)} &= \end{aligned}$$

۵.۳ رابطه بین فرایند پواسون و توزیع نمایی

فرض کنید که تعداد پیشامدها طبق فرایند پواسون باشد. اگر اولین پیشامد در زمان s_1 دومی در s_2 و بالاخره m این پیشامد در زمان s_m صورت گیرد و زمانهای بین دو پیشامد را به ترتیب T_1, T_2, \dots, T_m بنامیم، یعنی $T_1 = s_1 - s_0$ و $T_2 = s_2 - s_1$ و ... و $T_m = s_m - s_{m-1}$. در این صورت می توان ثابت کرد که T_1, T_2, \dots, T_m متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع نمایی هستند. پارامتر این متغیرهای تصادفی همان پارامتر فرایند پواسون

$$P[N_1(t)=n|N(t)=m] = \binom{m}{n} P^n (1-p)^{m-n}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} P[N_1(t)=n] &= \sum_{m=n}^{\infty} \binom{m}{n} P^n (1-p)^{m-n} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^m}{m!} \\ &= \frac{P^n}{n!} (\lambda t)^n e^{-\lambda t} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(1-p)^{m-n}}{(m-n)!} (\lambda t)^{m-n} \end{aligned}$$

سری فوق بسط سری از نوع e^x است، پس

$$P[N_1(t)=n] = \frac{P^n}{n!} (\lambda t)^n e^{-\lambda t} e^{\lambda t(1-p)} = e^{-\lambda p t} (\lambda p t)^n$$

مثال ۴.۳ مثال شماره ۴.۲ را مجدداً در نظر بگیرید. اگر هر مشتری با احتمال P مرد باشد، بهسازیات زیر باشند. اگر هر مشتری با احتمال A احتمال اینکه در ۱۵ دقیقه اول باز شدن باشند در صبح، هجیج مردی مراجعت نکند، چقدر است؟ احتمال اینکه بین ورود دهمین زن و بازدهمین زن بیش از یک ساعت فاصله باشد، چقدر است؟

حل: طبق فضای فوق، ورود مشتریان مرد و همچنان ورود مشتریان زن طبق مراجعت پواسون است، مبانگین تعداد مشتریان مردی که در یک ساعت مراجعت می‌کنند، پارامتر $N(t)$ باز شوند را با $(1-P)$ و مبانگین تعداد مشتریان زن باز شوند را با P (۰.۲) است. بنابراین اگر T_1 و T_2 بانگن تابع معرف زمانهای بین دو ورود مشتری ای مرد و زن باشند،

$$P(T_1 \leq ۰.۲۵) = e^{-\lambda p t} e^{-\lambda t}$$

$$P(T_1 > ۰.۲۵) = e^{-\lambda t}$$

مثال ۶.۳ مثال شماره ۴.۳ را مجدداً در نظر بگیرید. مبانگین زمان ورود مشتری

دوم چندراست؟

حل: چون

$$S_{11} := T_1 + T_2 + \dots + T_m$$

و از طرف دیگر می‌دانیم که T_i ها دارای توزیع نمایی و مستقل هستند، لذا

$$E(S_{11}) = ۱۰ E(T_1) = ۱۰(۰.۲۱) = ۲.۱$$

۶.۳ خواص فرایند پواسون

قضیه ۶.۳ اگر $N_1(t)$ و $N_2(t)$ فرایندهای پواسون با پارامترهای به ترتیب λ_1 و λ_2 باشند، در این صورت فرایند $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ نیز فرایند پواسون، با پارامتر $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ خواهد بود.

اثبات: می‌خواهیم ثابت کنیم که $P(N(t)=n) = e^{-\lambda t} (\lambda t)^n / n!$. برای اثبات این موضع از تابع مولد گشناور استفاده می‌کنیم. می‌دانیم که

$$M_{N(t)}(s) = M_{N_1(t)}(s) \cdot M_{N_2(t)}(s) \quad (۲۲.۳)$$

اما تابع تولید گشناور این فرایند، همان طور که فلا گفته شد، عبارت است از:

$$M_{N(t)}(s) = \{e^{-\lambda_1 s(e^s - ۱)}\} \{e^{-\lambda_2 s(e^s - ۱)}\} = e^{-\lambda s(e^s - ۱)}$$

که تابع مولد گشناور فرایند پواسون با پارامتر $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ است.

از این قضیه می‌توان نتیجه گیری کرد که اگر سیستم دارای n نوع مشتری باشد، و هر نوع مشتری، مستقل از سایر مشتریها و براساس فرایند پواسون وارد سیستم شود، ورود کل مشتریها نیز مجموعاً براساس فرایند پواسون خواهد بود. این موضع فعلاً در هنگام بحث درباره توزیع نمایی (خاصیت ب) نیز مطرح شد (از بحث میان این دو موضوع را به صورت تمرین نشان دهد).

قضیه ۶.۴ سیستمی را در نظر بگیرید که ورود مشتریها به آن براساس فرایند پواسون، $N(t)$ دارای پارامتر λ است. مشتریها از دو نوع ۱ و ۲ هستند. هر مشتری با احتمال P از نوع ۱ و با احتمال $P-1$ از نوع ۲ است. اگر تعداد مشتریهای نوع ۱ که وارد سیستم می‌شوند را با $N_1(t)$ و نوع ۲ را با $N_2(t)$ نشان دهیم، نیز $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ به صورت فرایند پواسون و مستقل از پذکدیگر خواهد بود. پارامتر در این اولی P و $\lambda(1-P)$ است.

اثبات: می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$P[N_1(t)=n] = e^{-\lambda(1-P)t} \frac{(\lambda(1-P)t)^n}{n!} \quad (۲۲.۴)$$

برای محاسبه این احتمال، پیشامد مورد نظر را مشروط به تعداد کل مشتریهای وارد شده می‌کنیم.

$$P[N_1(t)=n] = \sum_m P[N_1(t)=n|N(t)=m] P[N(t)=m] \quad (۲۲.۵)$$

اما احتمال اینکه تا زمان t کلا n مشتری از نوع ۱ وارد شده باشد، در حالی که جماعت n مشتری وارد سیستم شده است، براساس توزیع دوجمله‌ای است.

اما طبق فرضهای ب و ج رابطهای زیر را داریم. اگر $m = n - 2$ باشد،

$$P[N(t+s) = n] = P[N(t) = m] = P[N(t) \neq m]$$

و همچنین

$$P[N(t+s) = n | N(t) = n-1] =$$

$$= P[\theta(s)] = \lambda s + \theta(s)$$

و

$$P[N(t+s) = n | N(t) = n] = P[N(t) = n]$$

$$= 1 - \lambda s + \theta(s)$$

پس از جابگزینی عبارات فوق و در نظر گرفتن اینکه مجموع چند تابع $\theta(s)$ نیز تابع $\theta(s)$ تغیر اhad بود، رابطه زیر را بدست می آوریم.

$$\frac{P_n(t+s) - P_n(t)}{s} = \lambda P_{n-1}(t) - \lambda P_n(t) + \theta(s)$$

در حق، موقنی که و به سمت صفر می کند و با در نظر گرفتن مفهوم منطق تابع، رابطه زیر نتیجه می شود

$$P'_n(t) = \lambda P_{n-1}(t) - \lambda P_n(t) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (26.3)$$

برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل (۲۶.۳)، ابتدا $P_n(t)$ را محاسبه می کنیم و آن گاه نتیجه را برای محاسبه $P_{n+1}(t)$ به کار می گیریم. این کار را ادامه می دهیم تا جواب سایر معادلات نیز به دست آید. بنابراین

$$P'_n(t) = -\lambda P_n(t)$$

در نتیجه

$$P_n(t) = K e^{-\lambda t}$$

از شرط اولیه $P_0(t) = 1$ استفاده می کنیم. در نتیجه

$$P_n(t) = e^{-\lambda t} \quad (27.2)$$

که معرف فرآیند پواسون است. در حالت کلی به ازای $n = 1, 2, \dots$ رابطه (۲۵.۳) را می توان به شکل زیرهم نشان داد.

$$e^{\lambda t} [P'_n(t) + \lambda P_n(t)] = \lambda e^{\lambda t} P_{n-1}(t)$$

قضیه ۳۰.۳ فرآیند شمارشی $\{N(t), t \geq 0\}$ ، با مشخصات زیر، یک فرآیند پواسون با پارامتر λ است

$$N(0) = 0$$

ب. دارای خاصیتهای دش متفق باشد (یعنی تعداد پیشامدها در فواصل زمانی مجزا، متفق از یکدیگر باشد)

ج. احتمال وقوع یک پیشامد در فاصله کوتاه s متناسب با این فاصله باشد، یعنی

$$P[N(s) = 1] = \lambda s + \theta(s)$$

د. احتمال وقوع پیشامد در فاصله کوتاه s وجود نداشته باشد، یعنی

$$P[N(s) = 0] = \theta(s) \quad (\text{همان طور که قبلاً گفتیم، متوجه از } \theta(s) \text{ تابعی بینهاست که چلت از درجه ۲ است، یعنی})$$

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \theta(s) = 0$$

المیات؛ برای سهولت محاسبات از فرارداد زیر استفاده می کنیم.

$$P_n(t) = P[N(t) = n] \quad (25.3)$$

بدین ترتیب، $P_n(t)$ معرف احتمال وقوع n پیشامد تا لحظه t است. برای اینکه نشان دهیم فرآیند مورد نظر پواسون است، باید ثابت کنیم که

$$P_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

برای این منظور از معادلات دیفرانسیل به شرح زیر استفاده می کنیم. ابتدا $P_n(t)$ را با همراه گیری از خاصیت امید شرطی محاسبه می کنیم:

$$P_n(t+s) = P[N(t+s) = n] = \sum_{m=0}^n P[N(t+s) = n | N(t) = m]$$

$$P[N(t) = m]$$

رابطه فوق را می توان به صورت زیر نشان داد:

$$\begin{aligned} P_n(t+s) &= \sum_{m=0}^n P[N(t+s) = n | N(t) = m] P_m(t) \\ &\quad + P[N(t+s) = n | N(t) = n-1] P_{n-1}(t) \\ &\quad + P[N(t+s) = n | N(t) = n] P_n(t) \\ &\quad + \sum_{m=n+1}^{\infty} P[N(t+s) = n | N(t) = m] P_m(t) \end{aligned}$$

پوامون با میانگین ۵ ره مشتری در ساعت است. اگر در سه ساعت اول دو مشتری مراجعت کرده باشند، احتمال اینکه هر دو مشتری در ساعت اول آمده باشند، چقدر است؟ حل: طبق قسمه ۳.۵، هر کدام از این دو مشتری، بر اساس توزیع یکنواخت، در فاصله ساعت مراجعت کردند. بنابراین، احتمال ورود هر مشتری در ساعت اول بکسوم و احتمال ورود هر دو مشتری در ساعت اول یک‌هم است.

۷.۳ تابع توزیع ارلانکی

به علت ادموت نقش تابع توزیع ارلانکی (دایاما) در مبحثهای صفت، در این بخش به تعریف و مردمی خواص آن می‌پردازم.
در مسول بعدی توان این مدل را با این مدل این صفت آنها بی‌هستند که بر اساس متغیر تصادفی نمایی مساخته شده‌اند. خاصیت بدون حافظه مورد این متغیر تصادفی، حل مدل‌های نمایی را بسیار آسان می‌سازد. بنابراین، مدل‌بینی است آن‌که هنی‌الامانی سعی می‌شود مسائل صفت در چارچوب مدل‌های نمایی فرموله شود. با وجود این، ماماده آنها را نمی‌توان در این قالب جا داد. متغیرهای تصادفی، نظر مدت زمان خدمت و یا زمان بین دو ورود مشتریها در سیستمهای صفت، از توابع توزیع متعددی پیروی می‌کنند.
تابع توزیع ارلانکی، اگرچه ارجنر ساد کی محاسباتی در حد توزیع نمایی نیست، در مقایسه با سایر متغیرهای تصادفی به متغیر تصادفی نمایی نزدیک‌تر است و در مواردی، با تبدیل آن به متغیرهای تصادفی امایی از آن‌پوالت محاسباتی خوبیت بدون حافظه بودن استفاده می‌کند. مزیت عمده آن نسبت به توزیع نمایی این است که در عمل پذیرفته‌ای تصادفی سیاری را می‌توان بر حسب آن نیافرود.
تعریف، متغیر تصادفی بود را، که دارای تابع چدایی به شرح زیر باشد، ارلانکی می‌نامند.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^n}{n!} \quad (22.2)$$

۷.۴ پارامترهای ارلانکی و هردو مقادیر منبی هستند. علاوه بر این، λ همچو عدده صحیح است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، این متغیر تصادفی دارای حالت خواص توزیع کاماست، که در آن پارامتر فقط اعداد صحیح را انتخاب می‌کند. (در توزیع کاما، ۲، هر عدد مشتری را می‌تواند انتخاب کند؛ بنابراین، چون به ازای هر دوی غیر عدد صحیح $(1 - r)$ معنایست، به جای آن r^m به کار گرفته می‌شود. در حالت‌های خواص، که عدده صحیح باشد، مفهوم هردو عبارت یکسان است.
میانگین متغیر تصادفی ارلانکی برای $\lambda/2$ و دارای انس آن برای $\lambda/2$ و تابع مولده‌گشته‌وار آن $(1 - \lambda)/\lambda$ است.

در نتیجه،

$$\frac{d}{dt}[e^{\lambda t} P_n(t)] = \lambda e^{\lambda t} P_{n-1}(t) \quad (28.2)$$

اکنون، با استفاده از روش استقرا می‌توان قضیه را ثابت کرد. یعنی فرض می‌کنیم که بازای $(1 - n)$ ، فرایند موردیعث پوامون است، پس،

$$P_{n-1}(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \quad (29.2)$$

حال، می‌توان از روابط (۲۸.۲) و (۲۸.۳) نتیجه گرفت که

$$\frac{d}{dt}[e^{\lambda t} P_n(t)] = \lambda^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (30.2)$$

یا

$$P_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} + C$$

از شرط اولیه $P_0 = 0$ استفاده می‌کیم. $C = 0$ به دست می‌آید و قضیه ثابت می‌شود. قضیه ۵.۳ (تابع توزیع زمان ورود مشتری، مشروط بر اینکه تعداد مشتریهای وارد شده معلوم باشد).

فرض کنید که ورود مشتریها بر اساس فرایند پوامون است. اگر بدانیم که در فاصله t دقیقاً یک مشتری وارد شده است (ولی نمی‌دانیم که در چه لحظه‌ای وارد شده است)، تابع توزیع عدد اد پوامون متفهور تصادفی یکنواخت (دهمین فاصله) خواهد بود. اثبات: اگر T معرف زمان ورود این مشتری باشد.

$$P[T \leq x | N(t) = 1] = \frac{P[T \leq x, N(t) = 1]}{P[N(t) = 1]} \quad (31.2)$$

(واردشدن هیچ مشتری در فاصله زمانی x تا t ، و واردشدن یک مشتری در فاصله زمانی x تا t)

$$= \frac{e^{-\lambda x} (\lambda x) e^{-\lambda(t-x)}}{e^{-\lambda t} (\lambda t)} = \frac{x}{t}$$

قضیه فوق را می‌توان تعمیم داد. اگر بدانیم تا لحظه مخصوصی دقیقاً n نفر وارد شده‌اند، می‌توان فرض کرد که هر مشتری طبق توزیع یکنواخت وارد شده است دو مشتریهای مختلف مستقل از یکدیگر است.

۷.۵ تعداد مشتریهای که به یک سیستم صفت مراجعت کنند، به صورت توزیع

می شود، اما میانگین هر کدام از آنها به نصف نقلیل می باشد. به این ترتیب، میانگین ارلانگی ثابت می باشد.

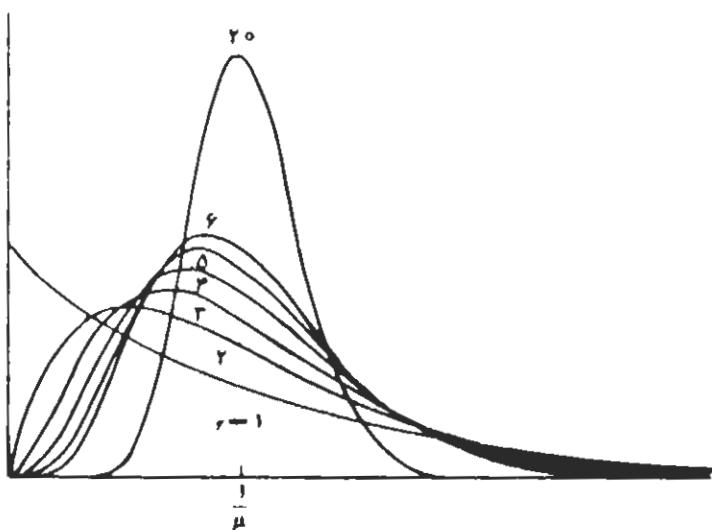
با توجه به مراتب فوق، اثر تغییرات را برای مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی ارلانگی با میانگین ثابت λ بررسی می‌کنیم. در حالتهای خاص، که $\lambda = 1$ است، توزیع ارلانگی به نمایی تبدیل می‌شود. با تغییر τ توابع مختلف به وست می‌آید که در شکل ۵.۳ نشان داده شده است. ضمناً طبق قضیه حد مرکزی در احتمالات، موقعی که τ افزایش می‌افتد، نامه سچکار (۳.۲) بعثت نایه هگلار، نرمال می‌نماید.

بنانه ۱۰۰ = اختیار شود، تابع توزیع فوق دیگر ماهیت تصادفی نخواهد داشت
و فقط مقداری ثابت، برابر با λ ، اختیار خواهد کرد. این موضوع را می‌توان با استفاده از رابطه کلی میانگین و واریانس توزیع ارلانگی نشان داد، زیرا در حالت کلی رابطه ذیر به قرار است:

$$\text{var}(X) = \frac{r}{\lambda^2} = \frac{[E(X)]^2}{\sigma^2} \quad (11.1)$$

حال، اگر مقدار میانگین ثابت و برابر با K باشد و $00 \rightarrow \sigma$ ، واریانس نیز به صفر میل می‌کند. می‌دانیم که اگر واریانس یک متغیر تصادفی برابر با صفر باشد، آن متغیر ثابت و قطعی است.

با توجه به مشکل ۵.۳، مشاهده می‌شود که مجموعه توابع ارلانگی سیار متعدد است.



شکل ۳-۸: مجموعه نهایه هیکال ارلانک، بر حسب عدد ها فرض ثابت بودن مهاجمکن

قضیه ۶.۳ مجموع λ متغیر تصادفی نمایی منتقل با پارامترهای λ ، یک متغیر تصادفی ارالانگی با پارامترهای (λ, μ) است.

المات: متغیرهای تعدادی مستقل نمایی X_1, X_2, \dots, X_n را در نظر بگیرید. اگر $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ بارامترهای آنها و γ مجموع آنها باشد، همان طور که قبله ذکر شد نایاب مولد گشتوار γ برابر با حاصل ضرب توابع تولید گشتوار X_1, X_2, \dots, X_n است.

$$M_Y(t) \equiv M_{X_1}(t) \cdots M_{X_n}(t)$$

از طرفه، همچوی می‌دانیم که تابع مولد گشناور، λ برابر $(1 - \frac{1}{\lambda})$ است. بنابراین، تابع مولد گشناور λ برابر با $(1 - \frac{1}{\lambda})$ خواهد بود، که می‌دانیم این تابع مولد گشناور سه برونویل یا همچوی متغیر تصادفی از لانگی با پارامترهای λ و μ است.

میانگین و واریانس توزیع ارلانگی را از قضیه فوق نز می توان دست آورد. از آنجاکه هر متفیر تصادفی ارلانگی با پارامترهای λ و n معادل مجموع n متفیر تصادفی مستقل نمایی با پارامتر λ است، میانگین و واریانس آنهم n برابر میانگین و واریانس هر یک متفیر تصادفی نمایی است. از این راه نز می توان میانگین و واریانس توزیع ارلانگی را محاسبه کرد، که با نتایج قبلی نطبق می کند.

۷۰.۳ اگر ورود مشتریها براساس فرایند پواسون باشد، زمان ورود مشتری ها، یعنی μ ، متغیری نصادفی با توزیع ارلانگی و با پارامترهای λ و μ است.

اهنگ: می‌دانیم که **و** زمان ورود مشتری **وام**، بر این با مجموع فواید زمانی بین ردهای متولی **و مشتری است**، یعنی

$$S_1 \equiv T_1 + T_2 + \cdots + T_n$$

که زمان بین ورود مشتری (۱-i) آم و مشتری (۲) است. چون T ها مستقل و دارای وزیع نمایی با پارامتر λ هستند، لذا طبق قضیه (۴.۲) متغیر نصادفی θ نیز دارای نابع وزیع ارلانگ^۳ خواهد بود.

نورِ کلیہرات ہارا میر

میان طرودهای گفته شده، متغیر تصادفی ارلانگی با دو پارامتر λ و μ مشخص می‌شود. از طرف دیگر، این متغیر تصادفی را می‌توان مجموعه \mathcal{M} متغیر تصادفی نمایی با پارامتر λ فرض کرد. حال مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی ارلانگی را در نظر بگیرید که میانگین آنها مقدار ثابت K (یعنی $E(\lambda) = K$) باشد. در این صورت، با تغییر λ ، پارامتر λ نیز متناسب آن تغییر می‌کند. به عنوان نمونه، اگر λ دو برابر شود، λ نیز باید دو برابر گردد تا مقدار K ثابت بماند. به هارت دیگر، در چنین حالتی تعداد متغیرهای نمایی دو برابر

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!(r-1-k)!} \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda y} (\lambda y)^{r-1-k} dy \quad (۲۸.۳)$$

انتگرال فوق برابر با $(1-k-r)$ است؛ زیرا، طبق خاصیت تابع گاما رابطه زیر برقرار است:

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-u} u^{a-1} du = (a-1) \quad (۲۹.۲)$$

(در عبارت فوق $u=\lambda x$ است). به این ترتیب قضیه ثابت می شود.

مثال ۸.۳ یک سیستم صفت با یک خدمت دهنده را در نظر بگیرید. مدت زمان خدمت، نماین با میانگین ۲۵ دقیقه است. یک مشتری در صفحه منتظر خدمت دهنده مشغول ارائه خدمت بهمشتری دیگری است. احتمال اینکه مشتری مورد نظر در صفحه، پیش از یک ساعت دیگر در سیستم بماند، چقدر است؟

حل: مدت زمان انتظار این مشتری در سیستم از دو قسمت تشکیل می شود. قسمت اول، زمان انتظار او در صفحه، که برابر با مدت زمان دریافت خدمت مشتری دیگر است و آن را با X_1 نشان می دهیم. قسمت دوم مدت زمانی است که خود او خدمت دریافت می کند و با X_2 بیان می شود؛ بنابراین، اگر مدت زمان ماندن این مشتری در سیستم را با Y نشان دهیم، $Y = X_1 + X_2$ خواهد بود. از طرفی چون X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی نماین هستند، Y یک متغیر تصادفی ارلانگی است. میانگین خدمت توسط یک خدمت دهنده نماین هستند، λ یک متغیر تصادفی ارلانگی است. لذا Y دارای توزیع ارلانگی با پارامترهای ۳ مشتری در ساعت یعنی $\mu = 3$ است. لذا Y دارای توزیع ارلانگی با پارامترهای $(2, 3)$ است. هدف مسئله، محاسبه $P(Y > 1)$ است. طبق قضیه (۸.۳) خواهیم داشت.

$$P(Y > 1) = e^{-\mu} \sum_{k=0}^1 \frac{(\mu)^k}{k!} = e^{-3} \left[\frac{(3)^0}{0!} + \frac{3^1}{1!} \right] = 4e^{-3}$$

مسائل

۱. مدت تعییر ماشینی بر اساس توزیع نماین و میانگین یک و نیم ساعت است. احتمال اینکه تعییر این ماشین بیش از ۱۲ ساعت طول بکشد چقدر است؟ احتمال اینکه تعییر ماشین بیش از ۱۲ ساعت طول بکشد، در حالی که می دانیم تا این لحظه ۱۱ ساعت طول کشیده، چقدر است؟

۲. در یک آزمایش که ۴ ساعت به طول می انجامد، از لامپ استفاده می شود که عمر آن متغیری تصادفی با میانگین ۵ ساعت است. احتمال اینکه قبل از بایان آزمایش، این لامپ نتواند در چهار حالت زیر حساب کنند:

۳. می توان داده های آماری بسیاری از متغیرهای تصادفی را با یکی از نوابع این مجموعه منطبق ساخت. فرض کنید که داده های آماری یک متغیر تصادفی، مثلاً مدت زمان ارائه خدمت در یک سیستم صفت در اختیار باشد. از روی این داده ها می توان میانگین و واریانس این متغیر تصادفی را تخمین نزد. با توجه به متغیر بودن توزیع ارلانگی، امکان زیادی وجود دارد که داده های مورد نظر با آن تطبیق کند. یکی از محاسن توزیع ارلانگی، همین خاصیت نوع آن است که بسیاری از متغیرهای تصادفی واقعی را می توان در قالب آن جای داد.

معمول در جریان حل مسائلی که در آن با متغیر تصادفی ارلانگی سروکار داشته باشیم، با حل انتگرالهای بسیار پیچیده و مفصل برخوردار می کنیم. با استفاده از قضیه زیر، در مواردی می توان محاسبات را ساده تر کرد.

قضیه ۸.۳ تابع توزیع ارلانگی با پارامترهای λ و r را از رابطه زیر می توان بدست آورد:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \quad (۳۴.۳)$$

البته؛ طبق تعریف، تابع توزیع این متغیر تصادفی عبارت است از:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{r-1}}{(r-1)!} dt \\ = 1 - \int_x^\infty \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{r-1}}{(r-1)!} dt$$

برای محاسبه انتگرال فوق، از تغییر متغیری به شکل $t = -y$ استفاده می کنیم.

$$F(x) = 1 - \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda(-y+x)} \frac{(\lambda(-y+x))^{r-1}}{(r-1)!} dy \quad (۳۵.۲)$$

با استفاده از بسط دو جمله ای خواهیم داشت:

$$(y+x)^{r-1} = \sum_{k=0}^{r-1} (r-1)_k x^k y^{r-1-k} \quad (۳۶.۲)$$

بنابراین، رابطه (۳۶.۲) به شکل زیر در می آید:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda y} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{x^k y^{r-1-k}}{(r-1-k)! k!} dy \quad (۳۷.۲)$$

با توزیع نمایی و میانگین ۱۵ ثانیه است، احتمال اینکه این شخص سالم از جاده بگذرد، چیست؟

۸. کامیونی دارای ۱۵ چرخ، دو چرخ روی محور جلو و هشت چرخ روی محور عقب است، فرض کنید مسافتی که طی می شود تا یکی از لاستیکها پنجر شود متغیری تصادفی با توزیع نمایی است. به طور متوسط لاستیک جلو کامیون ۱۵ هزار کیلومتر و لاستیک عقب ۸۰۰۰ کیلومتر را بدون پنجر شدن طی می کند.

الف. احتمال اینکه پس از طی m کیلومتر، هیچ کدام از لاستیکها پنجر شود، چقدر است؟
ب. اگر اولین لاستیک در کیلومتر ۷ پنجر شود، تابع توزیع Z و همچنین (Y/E) را به دست آورید.

ج. تابع توزیع تعداد لاستیکهای پنجر شده تا کیلومتر ۵۵ هزار را محاسبه کنید.

۹. یک کارگاه تولیدی دارای سه ماشین صنعتی است، مثالی هر ماشین پس از مدتی کار، جهت تنظیم مجدد و کنترل قطعات تولید شده، مدتی هم آن را خاموش می کند، مدت زمان روشن بودن و همچنین خاموشی ماشینها، متغیرهای تصادفی نمایی و مستقل هستند، میانگین مدت زمان روشن بودن ماشین اول را ۳۵ دقیقه و مدت زمان روشن بودن ماشینهای دوم و سوم را هر کدام ۲۵ دقیقه، میانگین مدت زمان خاموشی ماشین اول را ۱۵ دقیقه و مدت زمان خاموشی ماشینهای دوم و سوم را هر کدام ۱۵ دقیقه فرض می کنیم، یک لحظه مشخص را در نظر بگیرید و فرض کنید که ۳ دقیقه از روشن شدن ماشین اول، ۸ دقیقه از روشن شدن ماشین دوم و ۱۳ دقیقه از روشن شدن ماشین سوم گذشته است و هر سه ماشین هنوز روشن هستند.

الف. احتمال اینکه ماشین شماره ۱ بین ۸ دقیقه و ۱۲ دقیقه پس از لحظه مورد نظر خاموش شود، چقدر است؟

ب. احتمال اینکه یکی از ماشینها زودتر از همه، بین ۸ دقیقه و ۱۲ دقیقه پس از لحظه مورد نظر خاموش شود، چقدر است؟

ج. احتمال اینکه ماشین شماره یک زودتر از همه خاموش شود، چقدر است؟

د. احتمال اینکه ماشین شماره یک زودتر از همه خاموش شود و این خاموشی بین ۸ تا ۱۲ دقیقه پس از لحظه مورد نظر اتفاق بیفتد، چقدر است؟

۱۰. مثال ۲.۲ (سیستم صفت و دو خلقت دهنده) را مجدداً در نظر بگیرید، احتمال اینکه مشتری جدیدی بعد از هر دو مشتری از سیستم خارج شود، چقدر است؟ احتمال اینکه مشتری جدید، قبل از یکی از دو مشتری قدیمی از سیستم خارج شود، چقدر است؟ احتمال اینکه مشتری جدید قبل از مشتری شماره ۱ خارج شود، چقدر است؟

۱۱. کارخانه‌ای که دارای ۲ ماشین مشابه تزریق پلاستیک است، درصد بستن قراردادی برای تولید انبوه قطعه‌ای پلاستیکی است. مدت قرارداد طوری است که فقط دو هزار

الف. عمر لامپ دارای توزیع نمایی است، و لامپ، نو است.

ب. عمر لامپ دارای توزیع نمایی است، و لامپ، قبل ۵ ساعت کار کرده است.

ج. عمر لامپ دارای توزیع یکنواخت (روی فاصله میفر تا ۱۵ ساعت است)، و لامپ نو، است.

د. عمر لامپ دارای توزیع یکنواخت (روی فاصله میفر تا ۱۵ ساعت است)، و لامپ قبل ۵ ساعت کار کرده است.

۳. تعداد تصادفات یک جاده بر اساس فرایند بواسون است. فرض می شود که به طور متوسط هر دو ساعت یک بسار یک تهداف اتفاق می افتد. احتمال اینکه بین ساعت ۸ تا ۸:۲۵ حداقل سه تصادف اتفاق بیفتد، چقدر است؟ احتمال اینکه در ۲۴ ساعت تصادفی نباشد، چقدر است؟

۴. در تعمیر گاهی، دو ماشین الف و ب در حال تعمیر هستند. مدت زمان تعمیر هر «**ا**» ماشین، نمایی و دارای میانگین، به ترتیب ۲ ساعت و ۳ ساعت است. احتمال اینکه ماشین «**ب**» زودتر تعمیر شود، چقدر است؟

۵. دو نوع جزو درسی برای تکثیر به چاپخانه فرستاده می شود. نوع الف که تعداد نسخه محدودی از آن لازم است، و نوع ب که تعداد زیادی نسخه از آن گرفته می شود. تعداد جزووهایی که به چاپخانه می رسد، بر اساس فرایند بواسون با میانگین ۱۶ عدد از نوع الف و ۱۵ عدد از نوع ب در هر ساعت است. اگر الان ساعت ۱۵:۳۸ باشد و بدایم که ۱۰ بین جزو زن نوع الف در ساعت ۱۰:۲۵ و آخرین جزو زن نوع ب در ساعت ۱۰:۱۸ رسیده است،

الف. احتمال اینکه تا ساعت ۱۵:۴۵ مه جزو به چاپخانه برسد، چقدر است؟
ب. احتمال اینکه تا ساعت ۱۵:۴۵ دو جزو زن نوع الف و یک جزو زن نوع ب برسد، چقدر است؟

ج. احتمال اینکه اولین جزوی که به چاپخانه می رسد از نوع الف باشد، چقدر است؟
د. آیا در فاصله بین آمدن دو جزو زن (بعنی در ساعتها ۱۸:۱۵ و ۱۵:۲۵) ممکن است مه جزو زن دیگرهم به چاپخانه رسیده باشد؟ احتمال آن چقدر است؟

۵. اگر تا ساعت ۹ تعداد ۱۲ جزو از نوع الف رسیده باشد، میانگین کل تعداد جزووهای رسیده به چاپخانه تا ساعت ۹ چقدر است؟ (فرض می کنیم وقت شروع کار سیستم ساعت ۷ بوده است).

۶. از جاده‌ای که عرض آن تقریباً معادل یک اتومبیل است، اتومبیلها طبق فرایند بواسون (بما میانگین سه اتومبیل در هر دقیقه)، هر دو می کنند. شخصی بدون توجه به اتومبیلها، عرض جاده را در ۱۵ ثانیه طی می کند. احتمال اینکه سالم از جاده بگذرد، چقدر است؟

۷. مثلاً ۶ را مجدداً در نظر بگیرید. فرض کنید که مدت عبور این شخص متغیر تصادفی

→ احتمال اینکه در هر هفته دقیقاً یک مشتری مراجعت کرده باشد، چقدر است؟

۱۵. اگر $(1 - N)$ معرف فرآیند پواسون باشد، $[(1 - N)^t \cdot N^t] / t!$ را حساب کنید.

۱۶. بیمارانی که بهبود بیمارستان مراجعت می‌کنند، با احتمال ارde احتیاج به بسترندن دارند. اگر مراجعت آنها براساس فرآیند پواسون با میانگین ۳ نفر در ساعت باشد، احتمال اینکه در شش ساعت اول ۱۵ بیمار بسترنده شوند، چقدر است؟

۱۷. سیستمی در ساعت ۸ صبح شروع به کار می‌کند. ورود مشتریها براساس فرآیند پواسون است. فرض کنید تا ساعت ۱۱ صبح، جمیاً ۵ نفر وارد سیستم شده‌اند. احتمال اینکه بین ساعت ۹ تا ۱۵:۰۰ یک نفر وارد شده باشد، چقدر است؟ احتمال اینکه حداقل ۳ نفر وارد شده باشند، چقدر است؟

۱۸. متغیرهای تصادفی مستقل X_1, X_2, \dots, X_n (که $n = 1, 2, \dots, 10$) را در نظر بگیرید. هر متغیر به احتمال P مقدار بیک و به احتمال $(1 - P)$ مقدار صفر را انتخاب می‌کند. متغیر تصادفی جدیدی به شرح زیر تعریف می‌کنیم.

$$S_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N$$

ثابت کنید که متغیر تصادفی فرق دارای توزیع بواسون است، به فرض اینکه N نیز دارای توزیع بواسون با پارامتر λ باشد.

۱۹. تعداد تصادفات بک اتومبیل در سال براساس توزیع بواسون با میانگین 20 است. چنانچه عمر این اتومبیل دارای توزیع نرمال (با میانگین m) باشد، میانگین تعداد تصادفات را در مدت عمر این ماشین حساب کنید.

۲۰. به یک سیستم صفت، مشتریها طبق فرآیند پواسون وارد می‌شوند. اگر به طور متوسط ساعتی 8 مشتری به سیستم مراجعت کنند، با چه احتمالی مشتری چهارم فل از نیم ساعت اول وارد سیستم می‌شود؟

۲۱. دو نوع مشتری به فروشگاهی مراجعت می‌کنند. ورود هر دو مشتری براساس فرآیند پواسون، به ترتیب دارای پارامترهای 5 و 10 نفر در ساعت است.

الف. احتمال اینکه اولین مشتری که وارد می‌شود از نوع ۱ باشد، چقدر است؟

ب. احتمال اینکه پنجمین مشتری نوع ۱ قبل از دومنی مشتری نوع ۲ وارد شود، چقدر است؟

۲۲. مشتریهای پنجمین سیستم طبق فرآیند پواسون با آنگک ۱۲ مشتری در ساعت وارد می‌شوند. اگر در 10 ساعت اول 100 مشتری وارد شده باشند، احتمال اینکه در چهار ساعت آخر 50 نفر وارد شده باشند، چقدر است؟

۲۳. در یک اداره، کمیسیونی در خواستهای منقاضیان را هر ماه بک باز برسی می‌کند،

ساعتهایی فقط برای غولپی ور انتیار است. هر ماهین تا موکبی که غراب نشده می‌تواند 15 هد کلیه مورد نظر را در مساحت توپید کند، ولی چنانچه ماقبلین غراب شود، پادرنظر گرفتن زمان لازم برای تعمیرات، دیگر نمی‌توان از آن ماشین برای این توپید بخصوص استفاده کرد. بدین ذاتی که ماشین بدون غراب هدن می‌تواند کار کند، طبق برآورده، متغیری X بوده که توزیع نمایی و با میانگین هزار ساعت است.

ب. احتمال اینکه بنوان حداقل 30 هزار کلیه مورد نظر را توپید کرد، چقدر است؟
ج. پوچی اینکه بندب مجدداً پاسخ دهد، مشروط براینکه محدودیت هزار ساعت وقت وجود نداشته باشد.

۱۲. ماشینی که هادای 5 موتور شایه مشتمل است، در صورتی کار می‌کند که حداقل سه موتور آن سالم باشد. اگر فریض کنیم که احتمال غراب شدن هر موتور دارای توزیع نمایی است، لائیع جگالی کار کرد این ماشین را بعدست آورید.

۱۳. دستگاهی دارای سه نوع لامب مخصوص است که آنها را A و B و C نامیم. هر چهار سه لامب نماین و میانگین آنها به ترتیب 200 و 200 و 300 و 300 ساعت است. هر لامب که سوزد، هلا قابل بازی با یک لامب نو، از نوع خودش، توضیح می‌شود.

الف. احتمال اینکه اولین لامب نوع A بین 400 تا 1200 ساعت کار کند، چیست؟
ب. احتمال اینکه اولین لامب نوع A قبل از اولین لامب نوع B سوزد، چیست؟ احتمال اینکه اولین لامب که می‌سوزد از نوع A باشد، چیست؟

ج. احتمال اینکه تعداد لامبهایی که در 1200 ساعت اول می‌سوزد بیش از سه عدد باشد، سرطان است.
د. احتمال اینکه بعد از سوختن دو مینی لامب نوع A ، اولین لامب نوع B هنوز سالم باشد، چیست؟

۱۴. یک کارگاه مبلسازی را در نظر بگیرید که مراجعت مشتریها به آن بر اساس فرآیند بواسون است. در این کارگاه، فقط یک گروه سازنده میل وجود دارد.
الف. در کدام بیک از دو حالت زیر می‌توان این کارگاه را یک سیستم صفت از نوع $M/M/1$ فریض کرد؟ چرا؟

۱۵. کارگاه سفارش انواع مختلف میل و میز و صندلی را قبول می‌کند.
حالات ۱. کارگاه توپید فقط یک نوع میز مشخص را به صورت سریبازی قبول می‌کند.

حالات ۲. کارگاه توپید فقط یک نوع میز مشخص را به صورت سریبازی قبول می‌کند.
ب. فریض کنید مشتریهایی که مراجعت می‌کنند بسی دو نوع اند، یعنی به احتمال $7/5$ در صد مشتری جدید و به احتمال $2/5$ در صد مشتری قدیمی هستند. احتمال اینکه در هفته اول دو مشتری جدید، یک مشتری قدیمی مراجعت کنند، چقدر است؟ احتمال اینکه بعد از هشتین جه، اگر در طول میل مراجعتی قدیمی مراجعت کند، چقدر است؟

مشتری مراجعت کرده باشد، چقدر است؟
ج. احتمال اول صفو نیز سهل شود

میانگین W را می‌خواهیم تعیین کنیم. مشخص کنید که کدام یک از جوابهای زیر صحیح است (و یا احتمالاً هیچ کدام صحیح نیست).

$$\text{الف. طبق خاصیت پواسون، } E(W) = \frac{1}{\lambda}$$

ب. ورود مسافر در فاصله بین دو ورود اتوبوسهای متواالی کاملاً تصادفی بوده استه لذا زمان ورود او را طبق توزیع یکتوارخت در نظر می‌گیریم که میانگین آن نصف زمان بین دو ورود متواالی اتوبوسههاست؟ پس،

$$E(W) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\lambda}$$

۳۹. یک مدل $1/M/M/1$ ، که در آن آهنگ ورود مشتریها λ و آهنگ خدمتدهی μ است، را در نظر بگیرید. در یک لحظه مشخص سیستم خالی است. مدت زمانی که از این لحظه به بعد طول می‌کشد تا اولین مشتری خارج شود را E فرض می‌کنیم. نشان دهید که

$$P(E > t) = \frac{\mu e^{-\lambda t} - \lambda e^{-\mu t}}{\mu - \lambda}$$

۴۰. در یک جاده، اتومبیلها طبق فرآیند پواسون عبور می‌کنند (با پارامتر λ). شخصی می‌خواهد عرض این جاده را طی کند. مدت زمان عبور او ثابت و برابر با T است. بنابراین، موقیعی می‌تواند این کار را انجام دهد که زمان بین عبور دو اتومبیل متواالی از T کمتر نباشد. N را تعداد اتومبیلهایی در نظر بگیرید که از جلو این شخص عبور می‌کند تا فرست صور برای او پیدا شود.تابع توزیع N چیست؟ میانگین مدت زمان انتظار این شخص چیست؟

۴۱. سفر یک سفینه فضایی به زمان T نیاز دارد. اجسام موجود در فضا ممکن است با این سفنه تصادف کنند و آن را از بین ببرند. این اجسام طبق فرآیند پواسون (λ) جلو سفینه ظاهر می‌شوند. اگر چنین جسمی در مسیر سفینه قرار گیرد، با احتمال P تصادف می‌کند و با احتمال $1-P$ از کنار آن می‌گذرد. سفینه مورد نظر برای دفاع از خود، دارای موشکهایی است که بمحض مشاهده چنین اجسامی به طرف آنها شلیک می‌شوند. هر موشک با احتمال P جسم مقابل را از بین می‌برد. اگر سفینه دارای دو موشک باشد، احتمال اینکه سفر را با موقیعیت بهایان بررساند، چیست؟

۴۲. یک گروه شکارچی را برای بهدام انداختن یک جفت حبوان اعزام کردند. هر حبوانی که بهدام می‌افتد، با احتمال P نر و با احتمال $(1-P)$ ماده است. اگر N معرف تعداد حبواناتی باشد که بهدام می‌افتد تا یک جفت بدست آید، $E(N)$ را محاسبه کنید. فرض کنید تعداد حبواناتی که بهدام می‌افتد، طبق فرآیند پواسون و T مدت زمانی است که

این متفاضلیان طبق فرآیند پواسون با آهنگ λ مراجعت می‌کنند. برای اینکه مدت انتظار آنها کمتر شود، تصمیم گرفته شده است که این کمیسیون یک بار نیز در طول ماه جلسه تشکیل دهد. نشان دهید برای اینکه مدت زمان انتظار متفاضلیان حداقل شود، بهترین تصمیم این است که جلسه اضافی این کمیسیون در وسط هر ماه تشکیل شود.

۴۳. هر یک لقطه حساس مانعین طبق توزیع نمایی با پارامتر λ است. این لقطه را بهدو دلیل حوض می‌کنند. با خراب شود و با هر شر t مرشد. میانگین مدت زمانی که طول می‌کشد تا ~~لقطه را~~^{لقطه را} حوض کند، بقدر است؟

۴۴. پتانجه فاصله زمانی بین هر دو ورود متواالی مشتریها بهمیستم، متغیر تصادفی نمایی با پارامتر λ و مستقل از یکدیگر باشد، ثابت کنید که تعداد مشتریها که در فاصله صفر تا t وارد می‌شوند هر اساس فرآیند پواسون با پارامتر λ است.

۴۵. راهنمایی: از نتیجه مسئله شماره ۲ فعل اول و همچنین قضیه 8.3 استفاده کنید.
۴۶. در یک کارخانه، بهطور متوسط هر چهار روز یک بار بک حادنه اتفاق می‌افتد. زمان بین دو حادنه متواالی نمایی فرض می‌شود. 2.5 درصد این حادنه منجر به مجروح شدن افراد می‌گردد و بقیه آنها جزئی هستند.

الف. احتمال اینکه در هشت روز آینده چهار حادنه اتفاق بیفتد، چیست؟

ب. احتمال اینکه در هشت روز آینده هیچ حادنه منجر به مجروح شدن اتفاق نیفتد، چیست؟

ج. احتمال اینکه اوین حادنهایی که اتفاق می‌افتد جزئی باشد، چیست؟ چرا؟

د. احتمال اینکه در هک روز حداقل یک حادنه جزئی اتفاق بیفتد. ولی حادنه منجر به مجروح شدن اتفاق نیفتد، چیست؟

ه. خسارت روزانه ناشی از یک حادنه، معادل $2500\$ + 10000\$ \cdot e^{-0.05t}$ بر آورد می‌شود(چنانچه حادنهای اتفاق بیفتد، طییناً خسارتنی هم وارد خواهد شد). میانگین خسارت روزانه ناشی از حوادث را تعیین کنید.

و. در بیست روزگذشته دو حادنه اتفاق افتاده است. احتمال اینکه هر دو حادنه در یکی از روزهای اول یا دوم اتفاق افتاده باشد، چیست؟ احتمال اینکه هر کی از آنها در روز اول و دیگری در روز دوم اتفاق افتاده باشد، چیست؟

۴۷. ماشینهایی که دارای دو موتور هستند، برای تعمیر گاهی فرستاده می‌شوند. مدت زمان تعمیر هر موتور (و نه هر ماشین) دارای توزیع نمایی با میانگین 15 دقیقه است. احتمال اینکه فقط یک موتور هر ماشین خراب باشد، 5 درصد و احتمال اینکه هر دو موتور خراب باشند، نیز برابر با 5 درصد است. میانگین و واریانس مدت زمان تعمیر هر ماشین را بدست آورید.

۴۸. مسافری در لحظه t به ایستگاه اتوبوس می‌رسد. اتوبوسها طبق فرآیند پواسون با پارامتر λ وارد ایستگاه می‌شوند. زمان انتظار این مسافر را τ نامیم. تابع توزیع و

برای این کار تعیین شده است. احتمال اینکه این گروه بتواند در این مدت بک جفت بددت آورده، چیست؟

میانگین مدت زمانی که معرف کردۀ اند، حیثیت؟
اکنون فرض کنید که قبلاز زمان آن، ماموریت این گروه به پایان رسیده است.

۴۳- مسئله ۲۳ فصل دوم را با استفاده از مفهوم خاصیت بدون حافظه بودن توزیع نمایی مجددا حل کنید.

۴۳- با استفاده از تابع مولد گشتوار نشان دهید که در توزیع ارلانگی اگر $\nu = 4$ است بینهایت میل کند، تابع چگالی آن مقدار ثابتی خواهد شد.

۱۰

زنجیرهای مارکوف

چون رسماً از سسنه‌ای معرف بر اساس فرایند هارکوف ساخته شده است، اندیزه این فصل اینها به بررسی احتمالی مفهوم این فرایند و میس راهنمایی بهتر سه محنت در مورد حالاتی خاص آن رسماً نجیب‌های هارکوف و زنجیره‌های هارکوف ناریمان بموسسه می‌پردازم.

۱۴۳ فرید مارکوف

برای روشن شدن مفهوم کلی فرآیند مارکوف، می‌توان گفت که اگر زمان t در آن فرآیند، به سه دوره «گذشته»، «حال» و «آینده» تقسیم کنیم، «آینده» آدن فرآیند مستگی به مسیری که در «گذشته» طی کرده است، نداده و تها بسیار موقیت آن در زمان «حال» داشته است. مثلاً، فرآیند پواسون نوعی فرآیند مارکوف است، زیرا در آن تعداد پیشامدهایی که از یک لحظه معین به بعد اتفاق می‌افتد، مستقل از پیشامدهایی است که قبل از آن اتفاده است. به عبارت دیگر، چنانچه وضعیت فرآیند در لحظه‌ی مانند t_1, \dots, t_n مشخص باشد، می‌توان گفت که برای مشتبه، \Pr کت آینده‌ی آیند، تها اخرين اطلاعات، یعنی، وضعیت

$$P[X_{n+1} = j | X_n = i] = \begin{cases} 1 & \text{اگر } i+1 = j \text{ یا } i-1 = j \text{ باشد,} \\ 0 & \text{در غیر این حالت.} \end{cases}$$

زنگیرهای مارکوف همگن، حالت خاصی از زنگیره مارکوف است که در آن احتمال گذار سیستم از هر حالت به حالت دیگر مستقل از مرحله آن (n) باشد. به بیان ریاضی، زنگیره مارکوف را در صورتی همگن می‌نامیم که بازای تمام مقادیر i و j رابطه زیر برقرار باشد.

$$P[X_{n+1} = j | X_n = i] = P[X_1 = j | X_0 = i] = P_{ij} \quad (۳.۲)$$

بنابراین، در يك زنگيره مارکوف همگن، P_{ij} معروف احتمال تغيير حالت سیستم از i به j است. از اين به بعد، فرض می‌کنیم که زنگيرهای مارکوف مورد بررسی، همگن هستند. زنگيره مارکوف مثل ۱.۴ از نوع همگن است، زیرا احتمال حرکت نقطه به جلو یا عقب بستگی به تعداد حرکتهاي انجام شده تا آن لحظه ندارد.

ماتریس گذار

ماتریس گذار، ماتریس است که عنصر تشکیل دهنده آن در سطر i و ستون j ، مقدار P_{ij} (احتمال تغيير حالت سیستم از i به j) است. اگر فرض کنیم که تعداد حالتهاي سیستم M است، ماتریس گذار آن به شکل زیر درمی‌آید.

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & P_{1M} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & P_{2M} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ P_{M1} & P_{M2} & \cdots & \cdots & \cdots & P_{MM} \end{bmatrix} \quad (۴.۲)$$

بدیهی است که تمام عنصر این ماتریس غیرمنفی است. مجموع عنامر هر سطر برابر با يك است (مجموع عناصر يك ستون لزوماً يك نیست). با توجه به نامتناهی بودن تعداد حالتهاي سیستم، ابعاد ماتریس نیز می‌تواند نامتناهی باشد.

در مثال ۱.۴، حالت سیستم می‌تواند بین هر عدد صحیح، از منهاي بینهايت تا به اضافه بینهايت تغییر کند. به همین ترتیب ماتریس گذار نیز دارای ابعاد نامتناهی خواهد بود.

خاصیت مارکوفی يك فرایند را می‌توان به زبان ریاضی نیز نشان داد. مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ را در نظر بگیر بد. اگر $(X_i)_{i=0}^{\infty}$ طبق فرایند مارکوف عمل کند، بازای تمام مقادیر X_0, X_1, \dots, X_n رابطه زیر برقرار است.

$$\begin{aligned} P[X(t_{n+1}) \leq x | X(t_n) = x_n, X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \dots, X(t_1) = x_1] \\ = P[X(t_{n+1}) \leq x | X(t_n) = x_n] \end{aligned} \quad (۱.۴)$$

فرایندهای مارکوف را، به طور کلی، بر حسب دو عامل طبقه‌بندی می‌کنند:

الف. پارامتر α ، که می‌تواند پیوسته یا گسته باشد. گسته بودن α را می‌توان چنین تفسیر کرد که رفتار سیستم تنها در مقاطع مشخص از زمان مطالعه می‌شود. در صورتی که α گسته باشد، $(X_i)_{i=0}^{\infty}$ با متغیرهای تصادفی به شکل X_0, X_1, \dots, X_n جا بهترین می‌شود.

ب. مجموعه مقادیر را که $(X_i)_{i=0}^{\infty}$ می‌تواند انتخاب کند، بر حسب تعريف، حالت سیستم می‌نامند. حالت سیستم نیز می‌تواند گسته یا پیوسته باشد.

۳.۳ زنگيرهای مارکوف

زنگيرهای مارکوف حالت خاصی از فرایند مارکوف است، که در آن هم پارامتر α و هم حالت سیستم، فقط مقادیر گسته را انتخاب می‌کند. براین اساس، يك رشته متغیرهای تصادفی X_0, X_1, \dots, X_n را زنگيره مارکوف می‌نامند، اگر بازای تمام مقادیر α ، و تمام حالتهاي α را رابطه زیر برقرار باشد.

$$P[X_{n+1} = j | X_1 = i_1, X_2 = i_2, \dots, X_n = i_n] = P[X_{n+1} = j | X_n = i] \quad (۴.۳)$$

در اینجا به i مرحله نیز گفته می‌شود.

مثال ۱.۴ نقطه‌ای فیزیکی را در نظر بگیرید که روی خطی مستقیم حرکت می‌کند. در هر حرکت، این نقطه به احتمال P به اندازه يك میلی‌متر به جلو و به احتمال $1-P$ به همین اندازه به عقب می‌رود. اگر $(X_i)_{i=0}^{\infty}$ یعنی حالت سیستم را موقعیت این نقطه روی خط در نظر بگیریم، $(X_i)_{i=0}^{\infty}$ يك زنگيره مارکوف تشکیل می‌دهد؛ زیرا موقعیت نقطه در حرکتهاي بعدی، تنها بهوضعت فعلی آن بستگی دارد و مستقل از مسیری است که در گذشته طی کرده است (این فرایند را قدم زدن تصادفی یز می‌گویند).

احتمال تغيير حالت سیستم از i به j ، یا به عبارت دیگر احتمال حرکت نقطه روی خط به شرح زیر است:

$$P[X_{n+1} = i+1 | X_n = i] = P$$

$$P[X_{n+1} = i-1 | X_n = i] = 1 - P$$

طرح می شود این است که اگر در مرحله ای، حالت سیستم را باشد (بunی $i = X_n$)، احتمال یک که پس از m مرحله، حالت سیستم به j مرسد (بunی $j = X_m$)، چقدر است؟
 ملبهایی است را داشتن ماتریس اکدار، می توان نامع نوزیج P_{ij} را بودست آورد.
 را داشتن حالت مرحله $i + n$ ، نامع نوزیج P_{ij+n} و به عین فرآیند P_{ij+2n} ، P_{ij+3n} ، \dots ، P_{ij+kn} بودست می آید. ایکن، هدف این است که بتوان رامۀ متفقین بین P_{ij} و P_{ij+n} را استفاده نمودن کرد. برای این منظور ابتدا فرآرداد ذیر را تعریف می کنیم.

$$P_{ij}^{(\pi)} \equiv P[X_\pi = j | X_1 = i] \quad (8.4)$$

ب. ماتریس m گذار m مرحله‌ای ماتریسی است که اجزای آن $(m \times m)$ باشند، یعنی،

بنابراین برای تعیین رابطه بین حالتها می‌بینیم در m مرحله، شاخت $P^{(m)}$ فرودی است، برای تعیین $P^{(m)}$ قضیه زیر را می‌توان به کار گرفت.

قضیه ۱۰۶ الف. به ازای تمام حالتها α و β و سرای هر K و K' رابطه زیر برقرار است

$$P_{ij}^{(k+k')} = \sum_{\sigma} P_{is}^{(k)} P_{sj}^{(k')} \quad (\text{A.4})$$

۱

$$P^{(n)} = P \cdot P \cdot \dots \cdot P = P^n \quad (4.4)$$

(رابطه A.٤) که به رابطه $K-C$ ^١ معروف است، بیان کننده این حقیقت است

1. Chapman-Kolmogorov

www.bank-projeh.ir

1

$$P = \begin{bmatrix} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ & q & \circ & p & \\ & & q & \circ & p \\ & & & q & \circ & p \\ & & & & q & \circ & p \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

در ماتریس فوق $p-1 = q$ و در سایر معادلهای مقدار احتمال صفر است.
به طور کلی، هر ماتریس مربوط که تمام عناصر آن غیر منفی و مجموع عناصر هر سطر آن برابر با یک باشد را ماتریس هارکوف می‌نامند.

مثال ۴.۳ فرض کنید که در آمد شخصی در روز Y باشد. \mathbb{Y} متغیری تصادفی است که فقط اعداد صحیح غیرمنفی را انتخاب می‌کند و $P[Y=i] = a_i$ است. بدینهی است که $a_0 > a_1 > \dots > a_n$. جنبه X معرف مجموع در آمد آن شخص در "روز اول باشد" یک زنجیره مارکوف است؛ زیرا با دانستن در آمد آن شخص در "روز اول می‌توان تابع توزیع مجموع در آمد $(n+1)$ رور اول را محاسبه کرد. ماتریس گذار این زنجیره مارکوف به شرح زیر است

$$P = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_T & a_{T+1} & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_T & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

گلزار مه جله‌ای

با استفاده از ماتریس گذار، رابطه بین حالت‌های سیستم در دو مرحله متوازن مشخص می‌شود. به عبارت دیگر، با دانستن حالت همراه مرحله، می‌توان تابع توزیع حالت سیستم را در مرحله بعد تعیین کرد. در این قسمت می‌خواهیم تعیین کنیم که چه رابطه‌ای بین حالت x_1 در مرحله اول و حالت x_2 در مرحله دوم است.

$$P^{(2)} = P \cdot P = \begin{bmatrix} 0.5625 & 0.3125 & 0.05625 \\ 0.3125 & 0.5 & 0.1875 \\ 0.1875 & 0.5625 & 0.25 \end{bmatrix}$$

بنابراین،

$$P_{11}^{(2)} = 0.5625$$

$$P_{21}^{(2)} = 0.1875$$

مقادیر فوق را می‌توان مستقیماً، یا با استفاده از رابطه‌های (۸.۴) نیز بدست آورد. مثلاً

$$P_{11}^{(2)} = P_{11} P_{11} + P_{12} P_{21} + P_{13} P_{31} = 0.5625$$

که در واقع این عبارت حاصل ضرب سطر اول در ستون سوم ماتریس گذار است.

محاسبه تابع توزیع حالت سیستم در هر مرحله

ممکن است در مواردی تعیین تابع توزیع سیستم در مرحله n مدنظر باشد. به عبارت دیگر، ممکن است هدف محاسبه $P(X_n = j)$ بازای حالت‌های مختلف j و مراحل n باشد. این احتمال را گاهی به صورت $\pi_j^{(n)}$ نشان می‌دهند. چنانچه تابع توزیع حالت سیستم در مرحله شروع، یعنی $P(X_0 = i)$ ، بازای تمام حالتها مشخص باشد، با استفاده از مفهوم احتمال شرطی و ماتریس گذار خواهیم داشت:

$$\pi_j^{(n)} = P(X_n = j) = \sum_i P[X_n = j | X_0 = i] \times P[X_0 = i] \sum_j P_{ij}^{(n)} \cdot \pi_i^{(0)} \quad (12.2)$$

با

$$\pi^{(n)} = \pi^{(0)} \times P^{(n)} \quad (13.2)$$

$\pi^{(n)}$ و $\pi^{(0)}$ بردارهای هستند که عناصر تشکیل‌دهنده آنها $\pi_i^{(0)}$ و $\pi_j^{(n)}$ است.

محاسبه احتمال حالت سیستم در چند مرحله مختلف

با داشتن حالت فعلی سیستم و ماتریس گذار می‌توانیم تابع توزیع حالت سیستم را در یک پا چند مرحله بعد بدست آوریم؛ اما، ممکن است مسیر شخصی از حرکت آینده سیستم مدنظر باشد. مثلاً، محاسبه زیر را در نظر بگیرید:

$$P[X_1 = j, X_2 = k | X_0 = i] = P[X_2 = k | X_1 = j, X_0 = i] P[X_1 = j | X_0 = i] \\ = P_{jk} \cdot P_{ji}$$

که احتمال تغییر حالت سیستم از i به j در $(k+k')$ مرحله، برابر با مجموع تغییر حالت‌های سیستم از i به هر حالت دیگر سیستم، مثلاً در k مرحله و سپس از j به j در k' مرحله است.

آیات: با استفاده از معادلات شرطی تابع زیر بدست می‌آید.

$$P_{ij}^{(k+k')} = P[X_{k+k'} = j | X_0 = i] = \quad (10.4)$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} P[X_{k+k'} = j | X_k = s, X_0 = i] \times P[X_k = s | X_0 = i] = \sum_{s=1}^{\infty} P_{sj}^{(k)} P_{si}^{(k)}$$

رابطه (۱۰.۴) را به صورت ماتریس نیز می‌توان نوشت

$$P^{(k+k')} = P^{(k)} \cdot P^{(k')} \quad (11.2)$$

جهون رابطه (۱۱.۲) به ازای تمام مقادیر k و k' صادق است، لذا

$$P^{(\infty)} = P \cdot P^{(\infty-1)}$$

از طرف دیگر

$$P^{(\infty-1)} = P \cdot P^{(\infty-2)}$$

و بهمین ترتیب

$$P^{(2)} = P \cdot P$$

در نتیجه

$$P^{(\infty)} = P \cdot P \cdots P = P^{\infty}$$

مثال ۳.۹ زنجیره مارکوفی را در نظر بگیرید که ماتریس گذار آن به شرح زیر باشد (حالت‌های سیستم را ۱ و ۲ و ۳ فرض کنید)

$$P = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0 & 0.25 & 0.75 \end{bmatrix}$$

مقادیر زیر را بدست آورید:

$P_{11}^{(2)}$ (احتمال اینکه سیستم از حالت ۱ شروع و پس از دو مرحله به ۳ برسد) و

همچنین $P_{21}^{(3)}$ حل:

طی نوعی مدار بهم مباراک، با استفاده از احتمالات شرطی داریم:

$$= \frac{1}{r} \left(\frac{r}{s} + \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{r}{s} + \frac{r}{s} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{r}{s} \right) = \frac{s}{sr}$$

سی دا، عویندی، حالنیای سیستم در یک زنجیره مارکوف

در این بخش به طبقه‌بندی حالت‌های سهم و هر قیچی جلد و ازهار مربوط به آن می‌پردازیم. هدف از این طبقه‌بندی، هدایت کسری آن از ایام شرکت احتمالات حدی در حجم ارزشگوی است.

هر چند دو حالت داریم عربی خود را در اینجا معرفت نماییم، اما هر دو حالت با خود سه مفهوم دسترسی داشته باشند و دو نمی باشد که جزوی از اینهاست، هر حالت سه مفهوم مرتبط است.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

حالات ۱، ۲، ۴ و ۷ را دارم که می‌باید اینها را برای ۱، ۲ و ۵ در P_{out} و P_{in} بگذاریم. از ۳ و ۶ نیز ۲ کلید کرده‌اند.

حالات ۱۴۰۰ میز دسترس پذیر است و بجز از آنها « $P_{\text{vir}}^{(3)}$ » بس ۳۲٪، عبارت دیگر ۳۰٪ طبق تصریف کاری « ≥ 25 »

به همین ترتیب، می‌توان شکان داد که همه حوزه‌ها، هم موافق باشند
مثال ۴.۶ رزبرگه مادر نویی ممتاز سی داده‌ای به شرح زیر را در مطلب مذکور بده
 (جاذبه‌ای، مستند ۱۰ و ۲ و ۳ و ۴ می‌باشد)

نمایم این احتمال فوق مراد است با حاصل صرب میر خات سهند از دهه ۱۹۷۰ میلادی و میر خات سهند از دهه ۱۹۸۰ میلادی نیز نسبت احتمال خوب که در چند دست متن مخصوص و دو میر خات مذکور از

$$P(X_1 = q, X_{n-1} = k, \dots, X_1 = j | X_1 = i) = P_{qj} \dots P_{ki} \quad (14.4)$$

مثال ۴.۲ زنجیره مارکوف مثال ۴.۱ را در نظر بگیرید. و فرض اینکه در ابتدای سیستم متوازد حالت‌های ۱ و ۲ و ۳ را با احتمالات ۰.۵، ۰.۳ و ۰.۲ انتخاب کرد، مقدار احتمالات نزیر را محاسبه کنید.

$$A_1 = P(X_1 = 1 | X_0 = 1)$$

$$A_r = P(X_r = r)$$

$$A_v = P(X_v = \text{v}, X_{\bar{v}} = \bar{\text{v}}, X_{\text{g}} = \text{g} | X_0 = \text{s})$$

$$A_r = P(X_r = 1, X_{\bar{r}} = 0, X_{\Delta} = 1)$$

حل: حملة اول معرف احتمال تغییر حالت سنتم از ۱ به ۲ در سه مرحله است.
واعادت دیگر

$$A_3 = P_{\text{V}}^{(r)} = \frac{1}{2}$$

حمه دوم معرف اختلال بودن سیستم در حالت ۲ است، در حالتی که از موقعیت آن در شروع مراحل اطلاعی نداریم. به عبارت دیگر، حالت سیستم در مرحله صفر می‌تواند هر کدام از سه حالت ۱ و ۲ و ۳ باشد. با استفاده از اختلال شرطی،

$$A_7 = \sum_{i=1}^r P(X_7 = i | X_6 = i) P(X_6 = i) = \frac{1}{r} (P_{17}^{(r)} + P_{27}^{(r)} + P_{37}^{(r)}) \\ = \frac{1}{r} \left(\frac{17}{62} + \frac{10}{62} + \frac{13}{62} \right) = \frac{15}{95}$$

جمله سوم معرف احتمال تغییر حالت سیشم از ۱ به ۲ و سپس از ۲ به ۳ و پس از آن از ۳ به ۲ است. لذا

$$A_T = P_{\text{VY}} P_{\text{YY}} P_{\text{TY}} = (\circ \text{J} \text{Y} \Delta) (\circ \text{J} \text{Y} \Delta) (\circ \text{J} \text{Y} \Delta) = \frac{\text{Y}}{\text{Y}}$$

جمله چهارم شیوه جمله سوم است. با این تفاوت که از موقعیت سیشم در شروع مراحل

درنتیجه $P_{11} = \frac{1}{2}$. با همین روش می‌توان نشان داد که $P_{11} = P_{22} = \frac{1}{2}$.
 مثال ۵.۶ را مجدداً در نظر بگیرید. چون $P_{11} = P_{22} = \frac{1}{2}$ ، لذا طبق قضیه فوق
 حالت‌های ۱ و ۲ باهم مرتبط هستند.
 تعریف. فرض کنید که حالت سیستم در یک مرحله t باشد. احتمال اینکه در مراحل
 بعدی سیستم به τ برگردد را با $P_{\tau t}$ نشان می‌دهیم. حالت τ را برگشت‌پذیر می‌نامیم اگر
 $P_{\tau t} > 0$ باشد. بهمین ترتیب، اگر $P_{\tau t} = 1$ باشد، حالت τ گلدار نامیده می‌شود.
 بهاین ترتیب، اگر سیستم به حالت برگشت‌پذیری مانند τ برسد، در یکی از مراحل
 بعدی بهطور حتم بهاین حالت برگردد. لیکن، چنانچه از یک حالت گذرآشروع کند،
 لزوماً به آن حالت برنامی گردد، اگرچه امکان رسیدن به آن حالت هم برایش وجود دارد.
 مثال ۵.۷ را در نظر بگیرید. حالت ۳ گذرآشروع است، زیرا اگر سیستم از این حالت
 بهر حالت دیگر برود، امکان بازگشت آن وجود ندارد. دراین مثال، $P_{11} = P_{22} = \frac{1}{2}$ ،
 $P_{33} = \frac{1}{2}$ است. درنتیجه حالت ۳ گلدار و حالت‌های ۱ و ۲ و ۳ برگشت‌پذیر
 هستند. برای نمونه مقدار P_{11} را محاسبه می‌کنیم.
 [شروع سیستم از ۱ و برگشت مجدد آن به ۱ در یکی از مراحل بعد] $P_{11} = 1 - P_{12} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
 [شروع سیستم از ۱ و هرگز برگشت نآن به ۱ است.]

اما اینکه سیستم از ۱ شروع کند و هرگز به ۱ برگردد به معنای آن است که از ۱ به حالت
 ۲ برود و از این مرحله به بعد فقط در حالت ۲ بماند. احتمال این کار برابر است با

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{11} = P_{11}^*.$$

پس $P_{11}^* = \frac{1}{2}$ است.

میانگین تعداد دفعات برگشت به یک حالت
 بر اساس این تعریف، اگر حالت τ برگشت‌پذیر باشد و سیستم وارد این حالت شود، حتماً
 در آینده (نزدیک یا دور) سیستم مجدداً به τ برگردد. بهمین ترتیب، فرایند مجدداً از
 τ شروع می‌شود و باز طبق این تعریف، بهمین حالت برگردد. درنتیجه، با تکرار
 این کار می‌توان گفت که تعداد دفعاتی که سیستم وارد حالت τ می‌شود، نامتناهی است.
 اما اگر حالت τ گذرآشروع باشد و سیستم از این حالت شروع کند، به احتمال $P_{\tau \tau}$ مجدداً
 به τ برگردد و به احتمال $(1 - P_{\tau \tau})$ هرگز بازنمی‌گردد. بهمین ترتیب، احتمال اینکه
 سیستم از τ شروع کند، پس از مدتی به τ برگردد و از آن پس هرگز به این حالت مراجعت
 نکند، عبارت از $(1 - P_{\tau \tau})^k$ است. در حالت کلی، احتمال اینکه سیستم دقیقاً n مرتبه به
 τ برگردد و پس از آن هرگز برگرد دهاید $(1 - P_{\tau \tau})^n$ است. همان‌طور که مشاهده می‌شود،

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حالتها نمی‌توان به حالت ۳ دسترسی پیدا کرد، ولی از سایر
 مهیج حالت دیگری (غیر از خودش) نمی‌توان دسترسی یافت.
 تعریف. الف. مجموعه تمام حالت‌هایی که با هم در ارتباط باشند را یک کلاس
 می‌نامند.

ب. سیستم که فقط دارای یک کلاس باشد، یعنی تمام حالت‌های آن باهم مرتبط
 باشند، را سیستم یکپارچه می‌نامند.

ج. مجموعه‌ای از حالت‌ها را بسته می‌نامند، اگر امکان دسترسی از هیچ کدام از
 حالت‌های این مجموعه به هیچ کدام از حالت‌های خارج از آن وجود نداشته باشد، یعنی $P_{ij} = 0$
 (هزاری تمام حالت‌های داخل مجموعه و خارج از مجموعه) برای همه صفر باشد.
 د. اگر حالتی مانند τ ، بهاین‌سانی مجموعه‌ای به سه را تشکیل دهد، به آن حالت جاذب
 می‌گویند، که در این صورت $P_{\tau \tau} = 1$ است.

طبق تعاریف فوق، زنجیره مارکوف مثال ۵.۷ فقط دارای یک کلاس است و
 درنتیجه یک سیستم یکپارچه است، در حالی که زنجیره مارکوف مثال ۵.۶ دارای سه
 کلاس (یعنی $\{1, 2\}$ و $\{3\}$ و $\{4\}$) است. بنابراین در مثال ۵.۶ حالت ۴ یک حالت جاذب
 است.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، سیستم دیگرچه مجموعه بسته‌ای است که هیچ کدام
 از زیرمجموعه‌های آن نمی‌تواند مجموعه بسته نباشد.

قضیه ۵.۴ اگر $P_{11}^* > 0$ باشد، پس $P_{11}^* = 1$

اثبات: چون $P_{11}^* > 0$ ، بنا بر این می‌توان دو عدد مانند m و n را پیدا کرد که

$$(15.2) \quad P_{11}^{(m)} > 0, \quad P_{11}^{(n)} > 0.$$

بهمین ترتیب، چون $m < n$ ، دو عدد m و n وجود دارد که

$$(16.2) \quad P_{11}^{(m)} > 0, \quad P_{11}^{(n)} > 0.$$

بنابراین

$$(17.2) \quad P_{11}^{(n+m)} = \sum_{i=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} \cdot P_{ii}^{(m)} \geq P_{11}^{(n)} \cdot P_{11}^{(m)} > 0.$$

باشد. یکی از حالات، مثلاً i را در سطر پذیر بود. بعد از مدتی متناهی، و فرم π_i ، سیستم دیگر هر کسر به i برآمیزد. بهمین ترتیب، بعد از مدتی، مثلاً t ، سیستم نمی‌تواند حالت j برآید. سایر این، بعد از گذشت مدت زمان معنی، سیستم به همچو کدام از حالات برآمیزد، که این احتمال پذیر نمی‌باشد. پس تعدادی از حالاتی مبتداً اخباراً باشد برگشت پذیر باشد.

قضیه ۵.۴ اگر $Z_{ij} > 0$ برگشت پذیر باشد، زیرا برگشت پذیر خواهد بود.

اثبات: چون $Z_{ij} > 0$ با هم مرتب هستند، پس دو عدد صحیح مثلاً m و m' می‌توان باوت که رابطه‌های زیر در مورد آنها برقرار باشد.

$$P_{ii}^{(m)} > 0 \quad (18.2)$$

سایر این، با استفاده از معادله $C = K - C$ ، رابطه زیر برای از نام مقدار $m + m'$ صادق است.

$$P_{ii}^{(m)} < 0 \quad P_{ii}^{(m')} < 0$$

سایر این،

$$\sum_{i=1}^n P_{ii}^{(m)} = 0 = \sum_{i=1}^n P_{ii}^{(m')} \quad (19.2)$$

اما چون Z_{ij} برگشت پذیر و اعداد m و m' اعدادی مشخص و متناهی هستند، لذا

$$\sum_{i=1}^n P_{ii}^{(m+m')} = \infty$$

درنتیجه، عبارت (19.2) نیز بینایت Z_{ij} برگشت پذیر است.

قضیه ۵.۵ اگر $Z_{ij} > 0$ و i گذرا باشد، در این صورت Z_{ij} نیز گذراست.

اثبات: اگر Z_{ij} برگشت پذیر باشد، طبق قضیه قبلی i هم برگشت پذیر خواهد بود و این خلاف فرض است.

قضیه ۵.۶ در بک زنجیره مارکوف یکبارچه با از نام حالت متناهی، تمام حالات

برگشت پذیر هستند.

اثبات: طبق دو قضیه قبل، تمام حالات باید یا برگشت پذیر و یا گذرا باشند. از طرف دیگر، می‌دانیم در یک زنجیره مارکوف با از نام حالت متناهی، تمام آنها نمی‌توانند گذرا باشند، پس همه برگشت پذیر هستند.

تعريف: میانگین تعداد مراحلی که طول می‌کشد تا سیستم از حالت i شروع گند و مجدداً به j برگرد، را با M_{ij} نشان می‌دهند و به آن میانگین زمان برگشت می‌گویند. با

این تعریف، حالت برگشت پذیر را به دو گروه تقسیم می‌کنیم:

الف. برگشت پذیر مثبت اگر $M_{ii} < \infty$

ب. برگشت پذیر لام اگر $M_{ii} = \infty$

$$\frac{1}{1-f_1}$$

مقدار این احتمال دارای توزیع هندسی است، که میانگین آن $f_1 = 1/f_1$ خواهد بود.

برنتیجه، میانگین تعداد دفعاتی که سیستم به j برگرد عددی متناهی است.

برای اثبات قضیه زیر، از خاصیت فوق در مورد حالاتی برگشت پذیر و گذرا، معمول برگشت پذیر معتبر می‌شود.

قضیه ۵.۷ در یک زنجیره مارکوف، چنانچه در مورد حالاتی از سیستم، مثلاً p ، مقدار p نامتناهی باشد، آن حالت برگشت پذیر، و اگر عددی متناهی باشد، آن حالت گذراست.

اثبات: احتمال ایکه سیستم از i شروع کند و مجدداً در مرحله n به حالت j برگرد، مرا بر $P_{ij}^{(n)}$ است. در این مرحله، تعداد دفعاتی که سیستم به j می‌رسد یا صفر یا بک است. بنابراین، میانگین تعداد دفعات مراجعت سیستم به حالت j در مرحله n برای $p_{ij}^{(n)}$ است.

است. بدین ترتیب، p معرف میانگین تعداد دفعاتی است که سیستم در دراز مدت i برگرد. براسام آنچه که قبلاً گفته شد، برای حالت j در صورتی که برگشت پذیر

باشد، این مقدار نامتناهی و برای حالت گذرا عددی متناهی است.

درمثال ۵.۷ می‌توان با استفاده از قضیه فوق برگشت پذیر بودی حالاتی سیستم را بررسی کرد.

در مورد حالت ۳

$$P_{22} = 0.3$$

$$P_{11}^{(1)} = P_{11} P_{12} + P_{21} P_{22} + P_{22} P_{12} + P_{22} P_{22} = 0.59$$

$$P_{11}^{(2)} = (0.59)^2$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{11}^{(n)} = \frac{0.59}{1 - 0.59} = \frac{3}{7}$$

درنتیجه حالت ۳ گذراست. بهمین ترتیب، می‌توان نشان داد که سایر حالاتی برگشت پذیر هستند.

قضیه ۵.۸ در یک زنجیره مارکوف با از نام حالت متناهی، تمام حالاتی آن

نمی‌توانند گذرا باشند.

اثبات: فرض کنید که تعداد حالات این زنجیره متناهی و برای M و همگی گذرا

$$\mathbf{P}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.7222 & 0.5568 \\ 0.2176 & 0.5822 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.7289 & 0.5711 \\ 0.2283 & 0.5217 \end{bmatrix}$$

میان طور کش مشاهده می کنید، صرف نظر از اینکه از چه حالتی شروع کرده ایم، چندین مرحله (کر) ماتریس به یکدیگر تزدیک می شوند. به عبارت دیگر، صرف نظر از اینکه از چه حالتی شروع کرده باشیم، درنهایت با اختلال ثابتی به حالتهای ۱ یا ۲ می ریسم. بدین ترتیب، در چنین حالتی که اختلالات حدی وجود داشته باشد، موقیع که $\pi_1 \rightarrow 0$ ، ماتریس $\mathbf{P}^{(\infty)}$ هم به ماتریس میل می کند، که تمام عنصر هرستون آن، مثلاً ستون ۱ام، برابر با $\frac{\pi}{2}$ باشد.

در این بخش با استفاده از قضایای زیر، شرایط وجود احتمالات حدی در یک سیستم

و همچنین نتعره محاسبه آنها را در سیستمهای یکپاچه و نادادهای، سیستمهای یکپاچه با دو داده و سیستمهای غیر یکپاچه بررسی می کنیم.

قضیه ۹.۳ بک زنجیره مارکوف یکپاچه با حالتهای نادادهای را در نظر بگیرید.

در این زنجیره مارکوف، الف. احتمالات حدی همیشه وجود دارد، یعنی صرف نظر از اینکه سیستم از چه حالتی شروع کند، در درازمدت با اختلال ثابت π_1 به حالت ۱ نکد می کند.

ب. اگر حالتهای سیستم برگشت پذیر می باشد، به ازای تمام حالتها π_1 عددی می باشد.

ج. اگر حالتهای سیستم گذرا و یا برگشت پذیر نیستند، به ازای تمام حالتها π_1 برابر با صفر است.

قضیه ۹.۴ در یک سیستم یکپاچه با حالتهای برگشت پذیر می باشد و نادادهای (که آن را همه سوبی می نامند) مقادیر احتمالات حدی π_1 با حل دستگاه معادلات زیر بدست می آید:

$$\pi_j = \sum_{i=1}^m \pi_i P_{ij}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (22.2)$$

با

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots) = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots) \cdot P \quad (23.2)$$

$$\sum_{i=0}^m \pi_i = 1 \quad (24.2)$$

قضیه ۹.۵ اگر π_0, π_1, \dots برگشت پذیر می باشد، π_0 نیز برگشت پذیر می باشد، خواهد بود.

ضمناً در یک سیستم با تعداد حالات متناهی، تمام حالتهای آن برگشت پذیر می باشند.

لطفاً! اگر سیستم از n شروع کند و بعداً فقط در مراحل $2d, 3d, \dots$ بتواند به این مرحله داده، می گوییم حالت d دارای دوره برابر با d است. بدین ترتیب، به ازای تمام مقادیر عدد صحیح n ، به استثنای $n=d, 2d, 3d, \dots$ $P^{(n)} = P^{(d)}$ برقرار است. درحال مخصوص، اگر $n = d$ ، اصلحای می گوییم n نادورهای است.

۹.۳ احتمالات حدی در زنجیرهای مارکوف

بکی از ویژگیهای زنجیرهای مارکوف این است که تحت شرایطی، حالت سیستم در d مدت مستقل از حالت اولیه آن است. برای روشن شدن این موضوع، $P^{(d)}$ و $P^{(\infty)}$ را در نظر بگیرید. این دو مقدار در حالت کلی با یکدیگر متفاوت هستند. به عبارت دیگر، احتمال اینکه سیستم در m مرحله دیگر به حالت k برسد، بتنگی به حالت فعلی آن دارد. اما تحت شرایطی، هرچه m افزایش یابد، مقادیر احتمالات فوق به یکدیگر نزدیکتر و درنهایت یکی می شوند. درنتیجه، صرف نظر از اینکه سیستم از چه حالتی شروع کند، احتمال اینکه در درازمدت به حالت k برسد، مقداری ثابت است که این مقدار را به π_k نشان می دهیم. به عبارت دیگر، سیستم از هر حالتی، مثلاً شروع کند، خواهیم داشت:

$$\pi_k = \lim_{m \rightarrow \infty} P_{kk}^{(m)} \quad (25.2)$$

به همین ترتیب، بدیهی است که اگر حرکت سیستم در درازمدت مستقل از حالت شروع آن باشد، رابطه زیر نیز صدق می کند.

$$\pi_k = \lim_{m \rightarrow \infty} P(X_m = k) = \lim_{m \rightarrow \infty} \pi_k^{(m)} \quad (26.2)$$

مثال ۷.۴ زنجیره مارکوف زیر را در نظر بگیرید.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

هائزهای گذار ۲ و ۴ و ۸ مرحله ای این زنجیره مارکوف عبارت است از:

$$\mathbf{P}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.52 & 0.48 \\ 0.36 & 0.64 \end{bmatrix}$$

قضیه ۱۱۰۴ در يك زنجیره مارکوف يکپاچه با دوره π ، مقدار احتمالات حدی، π_i می توان از رابطه های زیر بدست آورد:

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots) = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots) \cdot P$$

$$(\pi_a, \pi_b, \pi_c, \dots) = (\pi_a, \pi_b, \pi_c, \dots) \cdot P \quad (15.4)$$

$$\sum_i \pi_i = d \quad (46.4)$$

نکته قابل توجه در این قضیه این است که مجموع اختلالات حدی، به جای ایکه مساوی با $md+k$ باشد برابر با m است. علت این امر این است که در مرحله $(md+k)$ ، میعنی فقط π توانند تعداد شخصی از حالتها را انتخاب کنند. در نتیجه $= 1/\pi$ فقط مر بوط به حالاتی است، که امکان رسیدن به آنها در این مرحله وجود دارد و با توجه به اینکه π نوع ماتریس حدی وجود دارد، لذا $d = \pi/\lambda$ نیز صادق است.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

این نتیجه مادکوف یکپارچه، دارای دو راه بوده‌است (این موضوع را تحقیق کنید).
 فرض کنید که در شروع کار، سیستم در حالت ۲ باشد. در مرحله دوم، این سیستم با احتمال ۱ به حالت ۱ می‌رود. در مرحله سوم (به ترتیب با احتمال‌های 0.25 و 0.75) به بکی از
 حالتی سه و چهار نزدیک می‌گرد. در مرحله چهارم مجدد به حالت ۲ بر می‌گردد و این کار
 مرتب ادامه پیدا می‌کند. بدین ترتیب، در مرحله حالت ۱ خواهیم داشت: $= 1 - \pi_1$.
 این سیستم در مرحله دوم، پنجم و هشتم و... به احتمال ۱ به این حالت می‌رسد و در این
 مرحله امکان دسترسی به این حالت برای آن وجود ندارد. به همین ترتیب،
 $= 1 - \pi_2$ همین نتایج را می‌توان از قسمی 11.0% ببردهست آورده‌ایم.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad P^{(n+1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

که P ماتریس انتقال زنجیره مارکوف است. مقادیر p_{ij} را، که از روابط (۲۳.۲) و (۲۴.۲) بدست آید، اصطلاحاً توزیع ثابت زنجیره مارکوف نیز می‌گویند. (باید توجه داشت که دستگاه معادلات (۲۴.۲) دارای یک معادله زاید است و لذا پس از حذف یکی از معادلات، (۲۳.۲) تعداد معادلات و مجهولها برابر خواهد شد).

مثال ۸.۴ زنجیره مارکوف مثال ۷.۲ را در نظر بگیرید. این سیستم یک پادچه و نادویه‌ای است. ضمناً چون تعداد حالت‌های آن متناهی است، لذا تمام حالتها برگشت‌پذیر مثبت هستند. احتمالات حدی را می‌توان طبق قضیه ۹.۴ محاسبه کرد، یعنی

$$(\pi_1, \pi_2) = (\pi_1, \pi_2) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\pi_1 + \pi_3 =$$

از حل معادلات فوق نتیجه می شود که: $\pi_1 = 0.4286$, $\pi_2 = 0.5714$, $\pi_3 = 0.5$. می بینیم که در محاسبات مستقیم مثال ۷.۳ نیز، احتمالات حدی به این اعداد نزدیک می شوند. پس π_1 و π_2 بهتر نیب معرف درصدی از اوقات است که سیستم در دراز مدت در حالت ۱ با ۲ توقف نماید، کنده.

احتمالات حدی در زنجیرهای مارکوف با دوره d در این مورد نیز، حالت سیستم در درازمدت بستگی به حالت شروع آن نداشت. لیکن، چنانچه $\pi \rightarrow \infty$ ، کمیت π_m مقدار ثابتی نخواهد داشت، بلکه تاکه مقدار آن صفر و گاهی π است. به عبارت دقیقر، مقدار حد احتمال فوق بستگی به m دارد. اگر π_0 را برابر $md+k$ نشان دهیم (که m عددی صحیح است و $-1, 0, \dots, d-1$ بازی $p_{ij}^{(m+k)}$ ، $i=0, 1, \dots, n$)،

$k = \pi$ برایر، π و به ازای بقیه مقادیر آن برایر با صفر خواهد بود. برای روش نشدن این موضوع، لازم به یاد آوری است که برآسانس تعریف، اگر در زمان شروع (مرحله صفر)، حالت سیستم مثلاً d باشد، فقط در مراحل $d+2d$ ، $d+3d$ و ... سیستم می‌تواند به d برسد. بدینهی است در مراحل دیگر، مثلاً در $1, d+1, d+2, \dots$ نیز سیستم به حالتها دستگیر، غیر از d خواهد رفت.

بهاین ترتیب، اگر حد ماتریس $(\alpha)P$ را به دست آوریم، بهجای یک ماتریس، دارای β ماتریس خودی خواهیم بود، که در هر ماتریس فقط تعدادی از عناصر مطرب β ام برابر با π ، و بقیه صفر خواهد بود (بستگی به حالت در مرحله شروع دارد). برای بدست آوردن مقادیر π از قضیه زیر استفاده می‌کیم.

که $T_1 = 2$ تعداد مراحلی است که در راه داریم تا از شروع کنیم و مجدداً به بروگردیم.
به عنوان نمونه:

$$P(T_1=2) = 1$$

$$P(T_1=n) = 0 \quad , \quad n \neq 2$$

در نتیجه

$$M_1 = 2$$

و به ازای تمام مقادیر m

$$P(T_2=2m) = \left(\frac{1}{4}\right)^{m-1} \left(\frac{1}{2}\right)$$

و به ازای تمام مقادیر n که مضری از ۳ نباشد،

$$P(T_2=n) = 0$$

در نتیجه،

$$M_2 = \sum_{n=1}^{2m} P(T_2=2m) = 12$$

احتمالات حدی در زنجیرهای مارکوف غیر پکیارچه اگر سیستم پکیارچه نباشد، عملای هر کلاس آن می‌تواند نقش یک زنجیره مارکوف پکیارچه را بازی کند. فرض کنید که در حالت i باشیم. دو حالت ممکن است اتفاق بینند. اول اینکه i گذرا پاشد. در این صورت سیستم درنهایت از این حالت و کلاس مربوط به آن خارج می‌شود و هرگز به آن برگشتی ندارد. که در این حالت $\pi_i = 0$ است. لیکن چنانچه برگشت پذیر (اعم از مشت یا نهی) باشد، سیستم از این مرحله فقط وارد حالتها می‌شود که با آن مرتبط باشد و هرگز از کلاس مربوط به این حالت خارج نمی‌شود. به عبارت دیگر، بقیه حالتها عملای حذف می‌شوند و در واقع با یک زنجیره مارکوف کوچکتر ولی پکیارچه مربوط کارخواهیم داشت و روابطهای مربوط به سیستمها را پکیارچه را می‌توان اعمال کرد.

۵.۴ زنجیرهای مارکوف با زمان پیوسته

همان طور که در ابتدای این فصل گفتیم، در یک فرآیند مارکوف هم پارامتر α و هم حالت سیستم $(\alpha)_t$ می‌توانند با گسته دهنده پیوسته باشند. در یک زنجیره مارکوف هر دو عامل فوق

$$\mathbf{P}^{(T_2+1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

همان طور کشیده ماتریس‌های فوق نشان می‌دهند، در همه آنها، مثل $\pi_2 = 1/2$ است. یعنی، صرف نظر از حالت شروع، سه‌تیم در هر مرحله یک بار با احتمال $1/2$ به حالت ۲ می‌رسد. چنانچه از حالت ۲ پس 2 شروع کنیم، در مراحل $3, 4, 5, \dots$ و اگر از حالت ۱ شروع کنیم، در مراحل $1, 2, 3, \dots, m+1$ و $2, 3, \dots, m+1$ و $4, 5, \dots, m+2$ و $5, 6, \dots, m+3$ می‌توانیم به این حالت برسیم. ماتریس‌های حدی، این موضوع را نشان می‌دهند.

پاتوجه به تعریف M_2 ، که قبل از این شد، این کمیت معروف میانگین تعداد مراحلی است که طی آن سیستم از شروع می‌کند و مجدداً به i می‌رسد. در درازمدت رابطه بین M_2 و احتمالهای حدی را می‌توان از قضیه زیر بدست آورد.

قضیه ۱۲.۴ در یک زنجیره مارکوف پکیارچه، رابطه زیر به ازای تمام مقادیر j صادق است

$$\pi_j = \frac{d}{M_j} \quad (12.4)$$

(پس) تواند یک نیز باشد، بعضی حالتها بدون دوره باشند
مثال ۱۵.۴ در زنجیره مارکوف مثال ۹.۴ مقادیر M_2 را بدست آورید.
حل: بر اساس رابطه (۱۲.۴)،

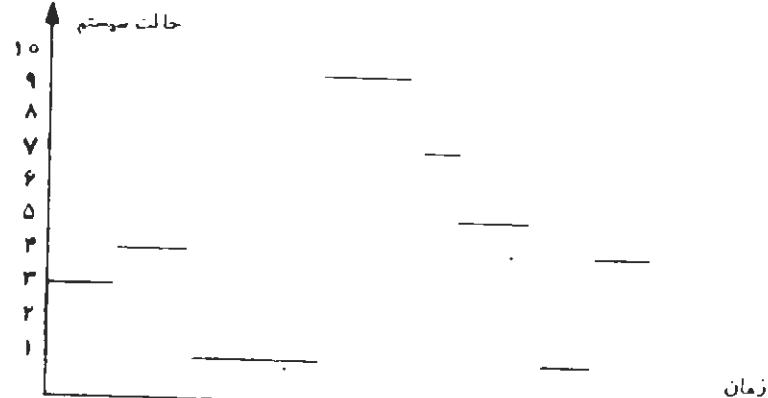
$$M_1 = M_4 = \frac{3}{1} = 3$$

$$M_2 = \frac{3}{0.75} = 12$$

$$M_3 = \frac{3}{0.75} = 4$$

پس توانیم این مقادیر را مستقیماً نیز بدست آوریم، که:

$$M_2 = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot P(T_2=n)$$



شکل ۱۰.۴ گذار سوستم به حالت‌های مختلف نسبت به زمان در یک زنجیره مارکوف پیوسته

تابع توزیع مدت زمان توقف در یک حالت موقعي که سیستم وارد حالتی می‌شود، تا مدتی در آن حالت می‌ماند و سپس به حالت دیگری گذر می‌کند. اگر مدت زمانی که سیستم در حالت i می‌ماند را با T_i نشان دهیم، این متغیر تصادفی دارای توزیع نمایی است. علت این امر را می‌توان به شرح زیر بیان کرد:

فرض کنید که سیستم در لحظه‌ای که آن را لحظه صفر نامیم، وارد حالت i شده و تا لحظه t از آن حالت خارج نشده باشد. با توجه به خاصیت مارکوفی این فرایند، روند حرکت آینده آن مستقل از مدت زمانی t تا $s+t$ است که سیستم در حالت i گذرانیده است. لذا، احتمال اینکه در فاصله زمانی t تا $s+t$ ، سیستم همچنان در حالت i باقی بماند، برابر است با احتمال اینکه حالت سیستم از این لحظه، به مدت s ، تغییر نکند. بنابراین

$$P(T_i > t+s | T_i > t) = P(T_i > s) \quad (30.4)$$

از طرف دیگر، طبق قضیه ۱۰.۳، تنها متغیر تصادفی با خاصیت فوق، دارای توزیع نمایی با پارامتر $(t-s)^{-1}$ است. مقدار این پارامتر را بعداً محاسبه خواهیم کرد.

ماکریس گذار و ماکریس آهنگ گذار در مرور زنجیرهای مارکوف پیوسته، دو نوع ماکریس را در مرور گذار حالتها می‌توان معرفی کرد، یکی از آنها، که ماکریس گذار نامیده و با $P_{ij}(t)$ نشان داده شود، دارای همان معنی مفهوم ماکریس انتقال در زنجیرهای مارکوف گسته است. هر منظر این ماکریس، $P_{ij}(t)$ ، معرف احتمال گذار سیستم از i به j در مدت t است. به این ترتیب، این ماکریس خود تابع از پارامتر t خواهد بود.

گسته هستند (و به معین دلیل، به آنها زنجیرهای مارکوف با زمان گسته نیز می‌گویند).

زنجیرهای مارکوف با زمان پیوسته، حالت خاصی از فرایند مارکوف هستند، که در آنها پارامتر t پیوسته است، اما فرض می‌شود که $(X(s), X(t))$ ، حالت سیستم، همچنان گسته است.

در زنجیرهای مارکوف با زمان گسته، فرض می‌شود که تغییر حالت سیستم فقط در انتهای هر مرحله صورت می‌گیرد (و یا اینکه فقط در انتهای هر مرحله حالت سیستم مشاهده می‌شود)، در حالی که در زنجیرهای مارکوف با زمان پیوسته، چنین محدودیتی وجود ندارد و در نتیجه، حالت سیستم می‌تواند در هر لحظه تغییر کند.

که هر فرایند مارکوف $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ را زنجیره مارکوف با زمان پیوسته (با به اختصار زنجیرهای مارکوف پیوسته) می‌نامند، اگر به ازای تمام مقادیر t و روابطه زیر برقرار باشد:

$$\begin{aligned} P[X(t+s) = j | X(s) = i, X(u) = x(u), u \leq s] \\ = P[X(t+s) = j | X(s) = i] \end{aligned} \quad (28.4)$$

اگر رابطه فوق مستقل از s باشد، این گونه زنجیره مارکوف را همگن می‌نامند. به عبارت دیگر، احتمال انتقال سیستم از یک حالت به حالت دیگر، به ازای تمام مقادیر t و روابطه زیر به دست می‌آید:

$$P_{ij}(t) = P[X(t) = j | X(s) = i] = P[X(t) = j | X(s) = i] \quad (29.2)$$

به این ترتیب، $P_{ij}(t)$ احتمال گذار سیستم از حالت i به j در مدت t است (در این فصل، تنها به بررسی زنجیرهای مارکوف پیوسته همگن می‌پردازیم).

شکل ۱۰.۲ حرکت سیستم به حالت‌های گوناگون را نسبت به زمان نشان می‌دهد. همان طور که مشاهده می‌شود، در هر لحظه از زمان، سیستم می‌تواند یکی از حالت‌های ممکن را انتخاب کند. در هر حالت، سیستم مدتی متوقف و سپس به حالت دیگر گذر می‌کند. مدت زمان توقف در هر حالت متفاوتی تصادفی است.

مثال ۱۰.۶ هر فرایند بواسون، یک زنجیره مارکوف با زمان پیوسته است، زیرا بر اساس خاصیت رشد مستقل، تعداد پیشامدها در فاصله زمانی t (تا $t+s$)، مستقل از تعداد مشتریهایی است که تا لحظه t وارد شده‌اند. در این فرایند، روابطه (۲۹.۲) به شرح زیر تواند بود:

اگر $t \geq s$ باشد،

$$\frac{(t-s)^j}{(j-s)!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \frac{(t-s)^j}{(j-s)!} = P_{ij}(t) = P[X(t) = j | X(s) = i] \quad (29.3)$$

اگر $t < s$ باشد،

$$P_{ij}(t) = 0$$

$q_{i,i-\lambda}$
ارتباط ماتریس آهنگ گذار با ماتریس گذار را می‌توان با استفاده از رابطه زیر مشخص ساخت.

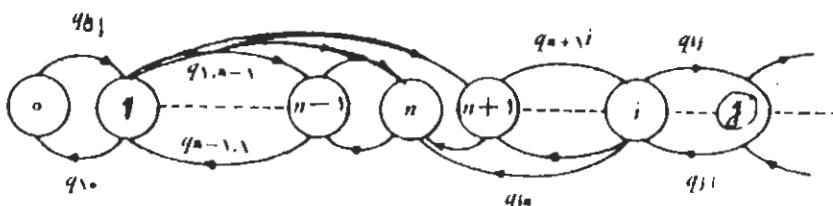
$$Q = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(t) - I}{t} = \frac{d}{dt} P(t) \Big|_{t=0} \quad (۲۰.۲)$$

محاسبه پارامتر تابع توزیع T ،
همان طور که قبلاً گفتیم، T دارای توزیع تماشی با پارامتر $(\mu)_T$ است. از طرف دیگر طبق خاصیت «د» توزیع تماشی، پارامتر آن معرف آهنگ و نوع پیشامد مورد نظر است. لذا پارامتر متغیر تصادفی T برابر با $(\mu)_T - q_{ii}$ خواهد بود. به این ترتیب،

$$P(T, > z) = e^{(\mu)_T z}$$

نمودار آهنگ
رابطه بین حالت‌های یک سیستم مارکوفی را می‌توان با نمودار آهنگ نشان داد. در این نمودار، گرهها معرف حالت سیستم و شاخه‌ها نشان‌دهنده امکان گذار از هر حالت به حالت‌های دیگر است. اندازهای روی شاخه‌ها، q_{ij} ، بر اساس تعریف فوق، نشان‌دهنده آهنگ تغییر حالت سیستم از i به j است. در نمودار آهنگ، q_{ii} ها نشان داده نمی‌شوند.

معادله C-K
در اینجا نیز شیوه زنجیرهای مارکوف گسته، رابطه‌ای به شکل زیر، در مورد همه حالت‌های i و j زمانهای t و $t+1$ مصدق می‌کند.



شکل ۲۰.۴ نمودار آهنگ یک سیستم مارکوف.

حالت خالص این ماتریس، $P(0)$ ، با توجه به عناصر تشکیل دهنده آن بشرح ذیر است:

$$P_{ii}(0) = 1$$

ازای $i \neq j$

$$P_{ij}(0) = 0$$

بنابراین، این ماتریس به شکل ماتریس یکه در می‌آید، یعنی:

$$P(0) = I$$

ماتریس دیگری که می‌تواند گذار حالت‌ها را بیان کند، ماتریس آهنگ گذار است، که با Q نشان داده می‌شود. عناصر تشکیل دهنده این ماتریس، q_{ij} ، بشرح ذیر تعریف می‌شود:
الف. اگر $i \neq j$ باشد،

$$q_{ij} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_{ij}(t)}{t} = \frac{d}{dt} P_{ij}(t) \quad (۲۱.۲)$$

با درنظر گرفتن اینکه $P_{ij}(t)$ معرف احتمال تغییر حالت سیستم از i به j در مدت زمان t است، q_{ij} نشان‌دهنده آهنگ تغییر حالت سیستم از i به j خواهد بود.
ب. اگر $i = j$ باشد،

$$q_{ii} = - \sum_{j \neq i} q_{ij} \quad (۲۲.۲)$$

از طرف دیگر، رابطه (۲۰.۲) را با کمک رابطه (۲۱.۲) می‌توان بشرح ذیر بیان کرد:

$$q_{ii} = - \sum_{j \neq i} \frac{d}{dt} P_{ij}(t) = \frac{d}{dt} [-1 + P_{ii}(t)] = \frac{d}{dt} P_{ii}(t) \quad (۲۳.۲)$$

به این ترتیب، عناصر قطعی ماتریس Q همگی متفاوت هستند و مجموع عناصر هر سطر برابر با صفر خواهد بود.

با توجه به رابطه (۲۰.۲)، $(q_{ii} - q_{ii})$ معرف آهنگ تغییر حالت از i به مجموعه حالت‌های دیگر و q_{ii} معرف آهنگ ماندن سیستم در i است.
مثال ۱۱.۳ را مجدداً در نظر بگیرید. ماتریس آهنگ گذار این زنجیره مارکوف، در سطر i بارت است از:

$$q_{ii} = 0 \quad i > 1 \text{ و } i < l$$

$$q_{i,i+1} = \lambda$$

در محاسبات فوق، اگر از رابطه (۳۶.۴) نسبت به λ مشتقگیری کنیم، به جای رابطه (۳۷.۲) رابطه زیر بدست می آید، که «معادله پرسو $C-K$ » نامیده می شود.

$$\frac{dP(t)}{dt} = \mathbf{Q} \cdot P(t) \quad (38.2)$$

مثال ۹۲.۴ ماشینی را در نظر بگیرید که با درحال کار کردن و با در تعمیر گاه تحت تعمیر است. فرض می کنیم مدت زمان کار این ماشین متغیری تصادفی با توزیع تابعی μ با رامتر λ و مدت تعمیر نیز دارای توزیع تابعی با پارامتر μ است. اگر در لحظه t_0 صفر ماشین مشغول کار باشد، احتمال اینکه در لحظه $t_0 + t_1$ نیز درحال کار کردن باشد، چقدر است؟

حل: سیستم دارای دو حالت مشغول به کار (۱) و درحال تعمیر (۲) است. ماتریس آهنجک گذار این سیستم دارای اجزای زیر است:

$$q_{11} = \lambda \quad q_{12} = \mu$$

$$q_{21} = -\lambda \quad q_{22} = -\mu$$

س

$$\begin{bmatrix} \frac{dP_{11}(t)}{dt} & \frac{dP_{12}(t)}{dt} \\ \frac{dP_{21}(t)}{dt} & \frac{dP_{22}(t)}{dt} \end{bmatrix} = \mathbf{Q} \cdot P(t) = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11}(t) & P_{12}(t) \\ P_{21}(t) & P_{22}(t) \end{bmatrix}$$

با

$$\frac{dp_{11}(t)}{dt} = -\lambda [p_{11}(t) - p_{12}(t)]$$

$$\frac{dp_{12}(t)}{dt} = \mu [p_{11}(t) - p_{12}(t)]$$

اولی را در مجموعی را در λ ضرب و با هم جمع می کنیم

$$\mu \frac{dp_{11}(t)}{dt} + \lambda \frac{dp_{12}(t)}{dt} = 0$$

امنگرال می گیریم:

$$\mu p_{11}(t) + \lambda p_{12}(t) = C$$

با توجه به رابطه اولی، $p_{11}(0) = 1$ و $p_{12}(0) = 0$ نتیجه می شود که، $C = \mu$ و در نتیجه

قضیه ۱۳.۴

$$P_{ij}(t_0 + t_1) = \sum_k P_{ik}(t_0) P_{kj}(t_1) \quad (35.2)$$

اثبات:

$$P_{ij}(t_0 + t_1) = P[X(t_0 + t_1) = j | X(0) = i] = \sum_k P[X(t_0 + t_1) = j |$$

$$X(t_0) = k, X(0) = i] P[X(t_0) = k | X(0) = i]$$

از طرف دیگر، طبق حسابت مارکوفی

$$P[X(t_0 + t_1) = j | X(t_0) = k, X(0) = i] =$$

$$P[X(t_0 + t_1) = j | X(t_0) = k] = P_{kj}(t_1)$$

و همچنان

$$P[X(t_0) = k | X(0) = i] = P_{ik}(t_0)$$

معادله $C-K$ را می توان به صورت ماتریسی و به شکل زیر نوشت:

$$P(t_0 + t_1) = P(t_0) \times P(t_1) \quad (36.2)$$

نحوه محاسبه P معادلات پیشرو و پرسو

طبق رابطه (۳۶.۲)، می توان \mathbf{Q} را از P به دست آورد. اما در عمل معمولاً \mathbf{Q} را به اساس اطلاعات مربوط به ساختار زنجیره مارکوف می توان مشخص ساخت، در حالی که به دست آوردن P بدطور مستقیم مشکل سایر ممکن است. لذا، ضرورت دارد که P را استفاده از \mathbf{Q} محاسبه شود، برای انجام این کار رابطه (۳۶.۲) را مجدداً در نظر بگیرید. اگر از طرفین نسبت به λ مشتقگیری کنیم، چنین نتیجه می شود:

$$\frac{\partial P(t_0 + t_1)}{\partial t_1} = P(t_0) \frac{\partial P(t_1)}{\partial t_1}$$

در رابطه فوق، مقدار t_1 را برابر با صفر و t_0 را برابر با انتخاب می کنیم. چنانچه رابطه (۳۶.۲) را هم در نظر بگیریم، نتیجه می شود که

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t) \cdot Q \quad (37.2)$$

دستگاه معادلات دیفرانسیل فوق به نام معادلات پیشرو $C-K$ موسوم است.



تبدیل زنگیرهای مارکوف با زمان پیوسته به زنگیرهای مارکوف معمولی همان طور که گفته شد تفاوت دو زنگیرهای مارکوف فوق در این است که در زنگیرهای مارکوف گسته تغییر حالتها در واحد زمان برد می شود، در حالی که در زنگیرهای مارکوف پیوسته، زمانی که سیستم در یک حالت می باشد، متغیری تصادفی با توزیع نامایی است. حال اگر در زنگیرهای مارکوف پیوسته، واحد زمان Δ مدت زمانی بدانیم که می‌بینیم Δ یک حالت می باشد، می‌توان آن را به زنگیرهای مارکوف گسته تبدیل کرد. در این صورت، اجزای ماتریس انتقال آن به شکل زیر در می آید:

$$P_{ii} = 0 \quad (39.2)$$

$$P_{ij} = \left(\frac{1}{q_{ii}} \right) q_{ij} \quad (40.2)$$

(برای اثبات رابطه (39.2)، به مثال شماره ۴.۲ (فصل ۲) مراجعه شود). مثال ۱۴.۲ فرایند پواسون را مجدداً در نظر بگیرید. اگر حالت سیستم i باشد، پس اینکه تا این لحظه n پیشامد اتفاق افتاده است. همان‌طور که گفته شد، این فرایندیک زنگیرهای مارکوف پیوسته است. اگر واحد زمان را زمان بین دو پیشامد در نظر بگیریم، به زنگیرهای مارکوف گسته با ماتریس گذار زیر تبدیل می‌شود:

$$P_{nn} = 0$$

$$P_{n,n+1} = 1$$

$$P_{nj} = 0, j \neq n+1$$

۴.۳ روابط حدی در زنگیرهای مارکوف با زمان پیوسته

در اینجا نیز می‌خواهیم تابع توزیع حالت سیستم را در درازمدت، ($t \rightarrow \infty$) تعیین کنیم. قضیه زیر که مشاهد آن در زنگیرهای مارکوف گسته ارائه شده، می‌تواند روابط حدی را در حالت پایدار بدست آورد.

قضیه ۱۴.۳ اگر سیستم پکاچه باشد، در این صورت، حد $P_{ij}(t)$ به صفت عددی میل می‌کند که آن را π_j می‌نامیم، یعنی

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t) = \pi_j$$

ضمناً اگر تمام حالات پرگشت‌پذیر مثبت باشند، که در این صورت سیستم را ارگودیک (*Ergodic*) می‌نامند، مقدار احتمالات حدی نیز از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\sum_i q_{ji} = 0, i = 1, 2, \dots$$

$$\lambda p_{11}(t) = \mu [1 - p_{11}(t)]$$

این رابطه را در اولین معادله دیفرانسیل فوق قرار می‌دهیم. در نتیجه

$$\frac{dp_{11}(t)}{dt} = -(\lambda + \mu)p_{11}(t) + \mu$$

با:

$$\frac{1}{\lambda + \mu} \frac{dp_{11}(t)}{dt} = - \left[p_{11}(t) - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right]$$

در نتیجه،

$$\frac{dp_{11}(t)}{p_{11}(t) - \frac{\mu}{\lambda + \mu}} = -(\lambda + \mu)dt$$

$$\int_{\ln}^{\ln} \left[p_{11}(t) - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right] = -(\lambda + \mu)t + \int_{\ln}^{\ln} C$$

$$p_{11}(t) - \frac{\mu}{\lambda + \mu} = Ce^{-(\lambda + \mu)t}$$

بر اساس شرایط اولیه $P_{11}(0) = 1$ در نتیجه

$$1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} = C$$

$$C = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

و به این ترتیب،

$$p_{11}(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}$$

در این مسئله، پیدا کردن $P_{11}(15)$ مدنظر است، پس

$$P_{11}(15) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-15(\lambda + \mu)}$$

$$Q = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -6 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -9 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

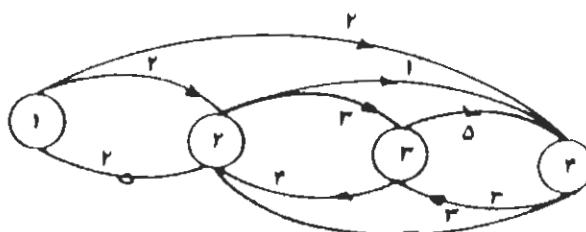
رابطه‌های حدی برای این زنجیره با استفاده از رابطه‌های (۴۲.۴) و (۴۳.۴) به شرح زیر محاسبه می‌شود.

$$[\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3 \ \pi_4] Q = 0$$

با

$$\left\{ \begin{array}{l} -4\pi_1 + 2\pi_2 = 0 \\ 2\pi_1 - 6\pi_2 + 2\pi_3 + 3\pi_4 = 0 \\ 2\pi_2 - 9\pi_3 + 3\pi_4 = 0 \\ 2\pi_1 + \pi_2 + 5\pi_3 - 6\pi_4 = 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \end{array} \right. \quad (45.4)$$

معادلات فوق را می‌توانیم با استفاده از معادلات تعادلی نیز بدست آوریم. برای این کار ابتدا نمودار آهنگ این متنها رسم می‌کنیم. چون این زنجیره دارای چهار حالت است، نمودار آهنگ نیز دارای چهار گره است که هر گره معرف یک حالت است. مقادیر مربوط به آهنگ گذار از هر حالت به حالت دیگر نیز روی نمودار نشان داده شده است. معادلات تعادلی را برای هر گره (حالت) می‌نویسیم:



حالات:

مقادیر مربوط به خروج از حالت ۱، $\pi_1(2+2)$

$$\sum_j \pi_j = 1 \quad (42.4)$$

رابطه (۴۱.۴) را به شکل ماتریس زیر می‌توان نشان داد:

$$[\pi_1 \ \pi_2 \ \dots] Q = 0 \quad (43.4)$$

در اینجا Q ماتریس آهنگ گذار و π معرف درصدی از زمان است که سیستم در حالت i می‌ماند.

استفاده از نمودار آهنگ برای محاسبه روابط حدی

رابطه (۴۱.۴) را می‌توان با کمک نمودار آهنگ نیز بدست آورد. برای هر حالت، مثلاً i ، رابطه فوق را به شکل زیر درمی‌آوریم:

$$\pi_i q_{ii} = \sum_{j \neq i} \pi_j q_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots$$

اما می‌دانیم که

$$q_{ii} = - \sum_{j \neq i} q_{ji}$$

$$\sum_j \pi_j q_{ji} = \sum_{j \neq i} \pi_j q_{ji} \quad (44.4)$$

جملات سمت چپ مربوط به آهنگ گذار خروجی ازهای بقیه حالتها و جملات سمت راست مربوط به آهنگ گذار از سایر حالتها به است. هر جمله حاصل ضرب دو کمیت است، اولی آهنگ گذار از یک حالت به حالت دیگر، q_{ji} ، و دیگری اختلال بودن سیستم در حالت مبدأ، π_j ، است. بدینهی است که، با توجه به اینکه رابطه (۴۱.۴) برای بدست آوردن روابط حدی است، مقادیر اختلالات مورد نظر نیز مربوط به درازمدت خواهد بود.

به این ترتیب، برای محاسبه روابط حدی می‌توان ازنموداد آهنگ استفاده کرد. برای این منظور مجموع $\pi_j q_{ji}$ های خروجی و ورودی هر حالت را مساوی یکدیگر قرار می‌دهیم. این گونه معادلات را معادلات تعادلی نیز می‌کویند.

مثال ۱۴.۶ زنجیره مارکوفی که ماتریس آهنگ گذار آن به شرح زیر است را در نظر بگیرید

استقرار نشان دهد که احتمال انتخاب یک توب سفید همیشه برابر $\frac{1}{5}$ است.

ب. آیا X یک زنجیره مارکوف همگن را تشکیل می‌دهد؟

ج. π_2 را تعداد توبهای سفید موجود در ظرف قبل از n این برداشت در نظر بگیرید.
آیا π_2^n زنجیره مارکوف است؟ در صورتی که جواب مثبت است، ماتریس گذار را بنویسید.

۵. اباری را در نظر بگیرید که کالایی را عرضه می‌کند. تقاضا برای این کالا در طول هفته می‌تواند با احتمال پیکان، صفر، $1, 2, 3, 4, 5$ باشد. در انتهای هفته سفارش کالا انجام می‌شود و بلاغاً صله تأمین می‌گردد، اما اباری مجبور است که کالا را فقط درستهای سه تایی بخرد. اگر در طول هفته مشتری مراججه کرد و کالا موجود نبود، سفارش او همچنان محفوظ می‌ماند و پس از تأمین کالا بادو تحویل داده می‌شود. لذا، سطح موجودی منتهی به معنای سفارش تأمین نشده است. ضابطه سفارش به این ترتیب است که جنابه موجودی در انتهای هفته بهمیزانی کمتر از 2 (۱ یا کمتر) برسد، حداقل سفارش ممکن داده می‌شود، تا میزان موجودی به 2 بسا یافته شود (با درنظر گرفتن اینکه فقط سفارش با ضرائب 3 امکانپذیر است). نشان دهد که میزان موجودی در انتهای هفته، قبل و همچنین بعد از سفارش، به صورت زنجیره مارکوف است.

ماتریس گذار این دو زنجیره مارکوف را بنویسید.

۶. در مثالهای پیش، با روش استقرار نشان دهد که،

$$P^{(n)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2P-1)^n & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2P-1)^n \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2P-1)^n & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2P-1)^n \end{bmatrix}$$

۷. مثلاً یک را مجدداً بافرض $P = P$ در نظر بگیرید. احتمال اینکه یک پیام صفر پس از گذشتن از 5 مرحله بازهم به شکل صفر باشد، چقدر است؟ اگر پیامی پس از گذشتن از 5 مرحله به شکل صفر باشد، احتمال اینکه در شروع مرحله هم به شکل صفر بوده باشد، چقدر است، مشروط بر اینکه تعداد پیامهای صفر در مرحله شروع، 2 برای پیامهای یک بوده باشد؟

۸. فرایند X را در نظر بگیرید که فقط مقادیر صفر و یک و دو را انتخاب می‌کند. فرض کنید که عبارت زیر، بسته به اینکه n فرد یا زوج باشد، برابر با P یا P' است.

$$P\{X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0\}$$

۹. برای این منظور، ابتدا ثابت کنید که رابطه فوق به ازای $i = n$ صدق می‌کند. آن‌گاه، نشان دهد که اگر رابطه به ازای n صادق باشد به ازای $(n+1)$ نیز صادق است.

مقادیر مرتبه بود و در بحالات $1, 2, \pi_2$

در نتیجه با استفاده از معادله تعادلی داریم: $\pi_1 = \pi_2 = 2\pi_2$

$$\text{حالت ۲: } (2+3+1)\pi_2 = 2\pi_1 + 2\pi_2 + 3\pi_2$$

$$\text{حالت ۳: } (2+5)\pi_2 = 2\pi_2 + 3\pi_2$$

$$\text{حالت ۴: } (2+2)\pi_2 = 2\pi_1 + \pi_2 + 5\pi_2$$

همان طور که مشاهده می‌شود، معادلات فوق همان معادلات (25.4) هستند، که مستقیماً از روی نمودار آهنگ و براساس معادلات تعادلی به دست آمده‌اند، بس از حل معادلات فوق، احتمالات حدی به دست می‌آیند.

مسائل

۱. در یک سیستم مخابراتی، پیامها به شکل صفر و یک ارسال می‌شوند. هر یکم باید از مراحل مختلف بگذرد. فرض کنید که یک پیام با احتمال P بدون تغییر یک مرحله را طی می‌کند. اگر X معرف حالت یک پیام (صفر و یک) در مرحله n ام باشد، نشان دهد که X یک زنجیره مارکوف را تشکیل می‌دهد. ماتریس گذار را بنویسید.

۲. در هر یک از دو طرف موجود، سه توب وجود دارد. سه عدد از توبها سفید و سه عدد دیگر قرمز است. هر دفعه به طور همان از هر طرف یک توب به طور تصادفی برمی‌داریم و در طرف دیگر قرار می‌دهیم. اگر X معرف تعداد توبهای سفید طرف اول پس از n دفعه برداشته باشد، نشان دهد که X یک زنجیره مارکوف را تشکیل می‌دهد. ماتریس گذار آن را بنویسید.

۳. سکه‌ای که احتمال آمدن شیر در آن P است، را پرتاب می‌کنیم. $k = X$ معرف این است که تاکنون k نسبت متواലی (و از جمله در پرتاب n) شیر آمده است. X را به صورت یک زنجیره مارکوف نشان دهد و ماتریس گذار آن را بنویسید.

۴. در طرفی پنج توب سفید و چهار توب قرمز وجود دارد. هر دفعه یک توب را به طور تصادفی از طرف برمی‌داریم و پس از آن توب به اضافه دو توب هر نگاه آن را مجدداً به طرف برمی‌گردانیم. فرض کنید X معرف رنگ توبی باشد که در دفعه n ام از طرف برداشته‌ایم. (این مدل به مدل Polya معروف است).

۵. تابع توزیع X را به دست آورید. برای این منظور، با استفاده از روش

۱۹. یک زنجیره مارکوف $A \times A$ را در نظر بگیرید، فرض کنید $Z = X$ ، نشان دهید که حداکثر در ۸ مرحله می توان از X به Z رسید.

۲۰. در مسئله ۱۹، آیا احتمال حدی وجود دارد؟ جوابهای بدست آمده را با جواب مسئله شش مقایسه کنید.

۲۱. پنج نفر روی یک دایره ایستاده اند و مشمول توب بازی هستند. هر کسی توب را در اختیار داشته باشد، به طور شامی برای دیگران برتاب می کند. احتمال اینکه کسی که توب در اختیارش است، پس از دوپرتاب مجدداً توب را در اختیار داشته باشد، چقدر است؟ پس از پنج برتاب، و در درازمدت، احتمال اینکه توب در اختیار این شخص فرار گیرد، چقدر است؟

۲۲. مانع بسی کدار بک رسیده مارکوف را در نظر بخیر بد، که مجموع عناصر هسته ای آن مرا بر مابک نماید. اگر این مانع بسی بکرسد و مادرهای و دادهای خالی باشد، نشان دهید که در درازمدت $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = M$

$$\pi_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۲۳. فرض کنید که Y معرف مجموع برآنمای X طبق مسئله ۱۴ استفاده از نتایج مسئله ۱۴ رامنطة بر X را محاسبه کنید.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = M$$

راهنمایی: فرض کنید که Y معرف مابه المawot X با برگزیری مضرب P که از X گویند که Y را بهترین مقدار دارد و نشان دهید که مجموع عناصر هسته ای آن برابر با یک است. آن کاه از نتیجه مسئله ۱۴ استفاده کنید.

۲۴. در هر دست مساقه بین دو نیم الف و ب، تم الف به احتمال ۴ بینده می شود. تمی بینده است که سه دست را ببرد و پس از آن باری متوقف می شود.

الف. این مسئله را به صورت یک زنجیره مارکوف نشان دهید.

ب. با استفاده از رابطه های زنجیره ای مارکوف، این احتمال را که بازی در سه دست تمام شود، حساب کنید.

ج. با استفاده از روابط زنجیره های مارکوف، این احتمال را که تم الف برکده شود، حساب کنید.

۲۵. در یک میزنه میزان موجودی، فرض می شود که میزان تقاضا در هر هفته متغیری نصادفی با توزیع پواسون و میانگین ۲ است. چنانچه میزان موجودی در انتهای هفته صفر با یک باشد، مقدار سفارش به اندازه های خواهد بود که سطح موجودی به ۲ برسد. اما اگر موجودی در

P_0 و P_1 را از ماتریس های زیر بدست می آوریم.

$$P = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.75 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}, \quad P_0 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

آیا X یک زنجیره مارکوف همگن تشکیل می دهد؟ اکنون حالت سیستم را به صورت $(a, b) = Y$ نشان می دهیم، که a مقادیر صفر و یک و دو را می گیرد (یعنی همان حالت های قبلی) و b نشان دهنده زوج یا فرد بودن مقدار a است. این فرایند را در چارچوب یک زنجیره مارکوف نشان دهید.

۲۶. سه زنجیره مارکوف، که ماتریس های گذار آنها به شرح زیر است را در نظر بگیر بد.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

کدام حالتها برگشت بذیرند؟ دوره برگشت را برای هر حالت محاسبه کنید.

۲۷. زنجیره مارکوفی مسئله مسئله ۱ و ۲ و ۳ و ماتریس گذار زیر مفروض است. اگر در انتدا سیستم در حالت ۱ باشد، احتمال اینکه پس از دو مرحله مجدداً در حالت ۱ فرار گیرد، چقدر است؟ آیا می توان پیش بینی کرد که بعد از تعداد مراحل بسیار زیاد، به چه احتمالی در حالت ۱ خواهد بود؟

$$\begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 & 0 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}$$

۴۶. درمثال ۴.۶، باروشن استقرانشان دهید که به ازای تمام مقادیر n ، مقدار هر کدام از احتمالات زیر حداقل برابر با ۳ درجه است. آن گاه ثابت کنید که حالت‌های ۱ و ۲ برگشت‌پذیر هستند.

$$(P_{22}^{(n)}, P_{12}^{(n)}, P_{21}^{(n)}, P_{11}^{(n)})$$

۴۷. با فرض دانستن ماتریس آهنگ‌گذار، با استفاده از رابطه پیشرو یا پرسو ($C-K$)، ماتریس گذار مسئله ۲۱ را بدست آورید.

راهنمایی: از رابطه‌های استفاده کنید.

$$\frac{d p_{ij}(t)}{dt} = \frac{1}{2} p_{ii}(t) + \frac{1}{2} p_{jj}(t)$$

۴۸

هایان هفته دو یا بیشتر باشد، سفارشی داده نمی‌شود. فرض می‌کنیم که کالای سفارش شده بلاعاقله به اینبار می‌رسد و چنانچه تقاضا بسی در طول هفته به علت نداشتن موجودی نامیم نشود، آن تقاضا از دست رفته تلقی می‌شود. این مسئله را به شکل يك زنجیره مارکوف مدت به دست آورید.

۴۸. زنجیره مارکوف پیوسته‌ای با سه حالت (۱ و ۲ و ۳) و ماتریس آهنگ‌گذار زیر مفروض است

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الف. نمودار آهنگ آن را رسم کنید.

ب. احتمال اینکه در درازمدت سیستم در حالت صفر باشد، چقدر است؟

۴۹. زنجیره مارکوف پیوسته مسئله ۱۸ را به زنجیره مارکوف گسته تبدیل کنید.

۵۰. با استفاده از روابط حدی در زنجیره مارکوف پیوسته، احتمالات حدی مدل مسئله ۱۸ را محاسبه کنید و نتایج حاصله را با نتایج بدست آمده از نمودار آهنگ مقایسه کنید.

۵۱. نشان دهید که ماتریس زیر معرف ماتریس گذار يك زنجیره مارکوف پیوسته است. آن گاه ماتریس آهنگ‌گذار را بدست آورید.

$$P(t) = \begin{bmatrix} 0.4e^{-0.5t} & 0.4e^{-0.5t} & 0.4e^{-0.5t} \\ 0.4e^{-0.5t} & 0.4e^{-0.5t} & 0.4e^{-0.5t} \\ 0.4e^{-0.5t} & 0.4e^{-0.5t} & 0.4e^{-0.5t} \end{bmatrix}$$

۵۲. نمودار آهنگ مسئله ۲۱ را رسم کنید و میان احتمال بودن سیستم را در هر یک از دو حالت (در درازمدت) حساب کنید. این نتایج را متفقیاً از روی ماتریس $P(t)$ نیز بدست آورید.

۵۳. دستگاه معادلات دیفرانسیل پیشرو و پرسو ($C-K$) مربوط به مسئله ۱۸ را بنویسید.

۵۴. با استفاده از معادلات پیشرو (یا پرسو) $C-K$ ، تابع توزیع (t) در فرایند بواسون را بدست آورید.

۵۵. ثابت کنید که در درازمدت $(n \rightarrow \infty)$ ، رابطه زیر صدق می‌کند.

$$P(X_n = j | X_{n+1} = i) = p_j \frac{\pi_j}{k \pi_i}$$

می‌دهیم. یک مشتری، در زمان مشتری شماره n ، پس از ورود، مدتی در صفحه می‌ماند و پس در لحظه t شروع به دریافت خدمت می‌کند، و بالاخره در زمان t' از سیستم خارج می‌شود. مدت زمان انتظار این مشتری در صفحه را با Wq_n ، مدت زمان توقف او در سیستم را با W_s و مدت زمان دریافت خدمت را با x_n نشان می‌دهیم. بدین ترتیب، رابطه‌های زیر میان این بارامترها برقرار است.

$$Wq_n = Q_n - S_n \quad (1.5)$$

$$W_s = S'_n - S_n \quad (2.5)$$

$$x_n = S'_n - Q_n \quad (3.5)$$

$$W_s = Wq_n + x_n \quad (4.5)$$

روابط فوق، در شکل ۱.۵ نشان داده شده است.

تعداد مشتری‌های را که تا لحظه t وارد سیستم شده‌اند با $(t)X$ و تعداد مشتری‌هایی را که تا این لحظه خارج شده‌اند با $(t)X'$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر،

$$X(t) = \{n: S_n \leq t\} \quad (5.5)$$

$$X'(t) = \{n: S'_n \leq t\} \quad (6.5)$$

اگر تعداد مشتری‌های داخل سیستم را در لحظه t با $(t)N$ بیان کنیم

$$N(t) = X(t) - X'(t) \quad (7.5)$$

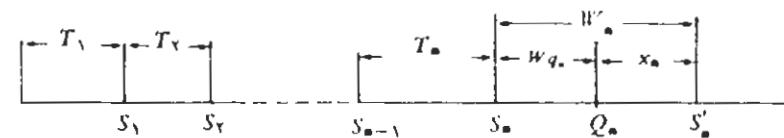
شکل ۲.۵، متحنجی تعبیرات $(t)X$ و $(t)X'$ را نسبت به زمان نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در زمانهای S_1, S_2, \dots, S_{n-1} (یعنی $n=1, 2, \dots, n-1$) مقدار تابع $(t)X$ و در زمانهای $S'_1, S'_2, \dots, S'_{n-1}$ مقدار تابع $(t)X'$ دارای جهشی برآبر واحد است. و اصله عمودی بین این دونتایی، در لحظه t ، معرف تعداد مشتری‌های داخل سیستم در این لحظه، یعنی $(t)N$ ، خواهد بود. از طرف دیگر، و اصله افقی بین محور عمودی (یعنی $t=0$) در ارتفاع x_n (یعنی $x_n < x < n$) نا متحنجی $(t)X$ ، یا اگر زمان ورود مشتری n ام، یعنی S_n و اصله افقی بین $(t)X$ و $(t)X'$ (یعنی $x_n < x < n+1$) در سیستم، یعنی W خواهد بود.

۲.۵ دوره سازنده و دوره پایدار سیستم
متغیرهای عمده بررسی یک سیستم نظری میانگین تعداد مشتری‌ها در سیستم، زمان انتظار یک مشتری در سیستم (و یا صفحه) و درصد پیکاری سیستم معمولاً ماهیت تصادفی دارد ولذا میانگین آنها باید مبنای ارزیابی سیستم قرار گیرد. اما، میانگین و یا سایر کمیتهای مربوط به آنها بیز خود تابعی از زمان است. در بیان از سیستمهای موقتی که زمان از حد مشخصی

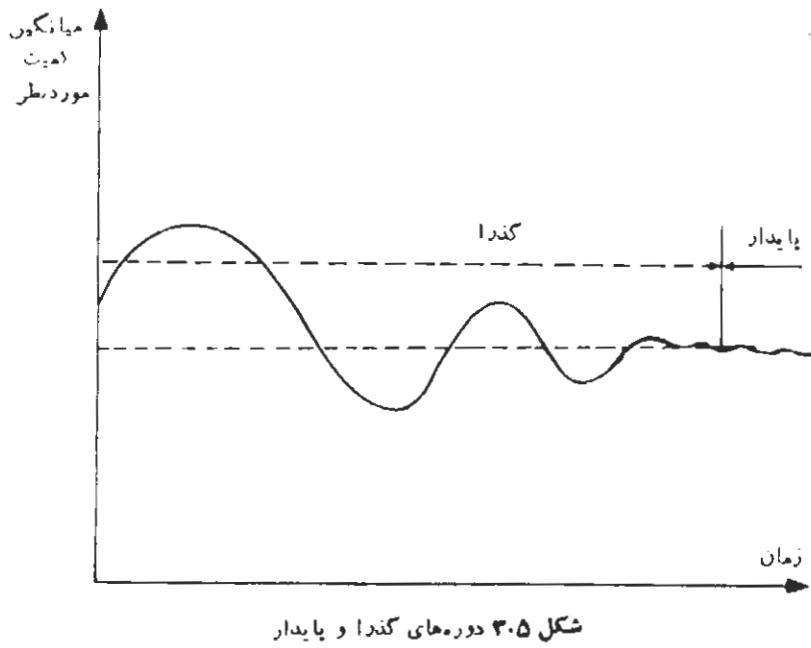
چارچوب کلی سیستمهای صفت

در این فصل، چارچوب و رابطه‌های کلی حاکم بر سیستمهای صفت را مورد بررسی قرار می‌دهیم. چنین رابطه‌هایی در مورد همه سیستمهای صادق است و بستگی به شرایط ویژه آنها ندارد. حالنهای خاص را در فصول بعد بررسی می‌کیم.

۱.۵ بیان ترسیمی سیستم بر حسب زمان
فرض کنید که اولین مشتری در زمان s_1 ، دومی در s_2 و ... n این مشتری در زمان s_n وارد سیستم می‌شود. فاصله زمانی بین ورود مشتری $(1-n)$ ام و مشتری n را با T_n نشان

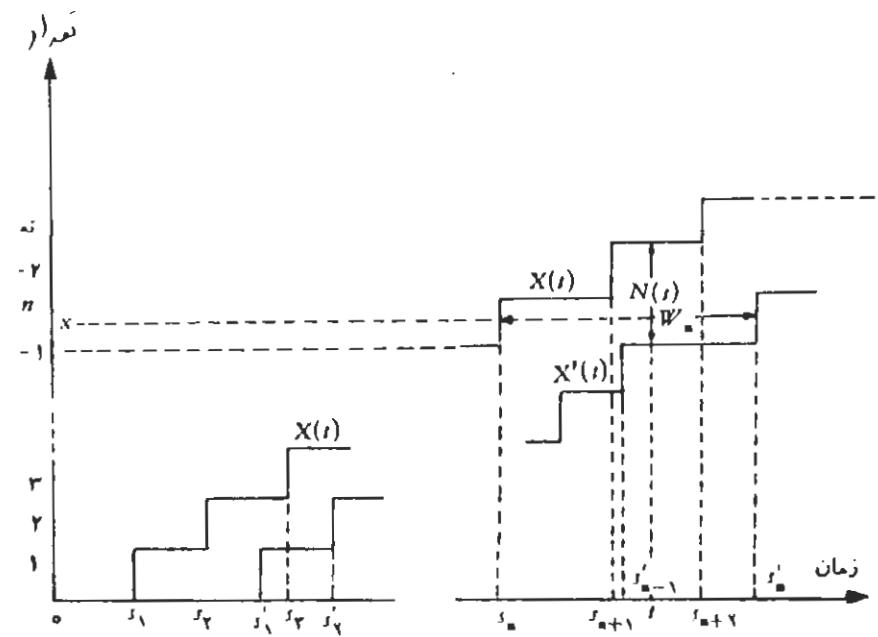


شکل ۱.۵ رابطه بین ورود، خروج و مدت انتظار مشتریان در سیستم



(درازمدت) انجام می‌شود، اگرچه بررسیهای محدودی هم در زمینه تغیرات سیستم در دوره گذرا به عمل می‌آید. ضمناً باید در نظر داشت که مطالعه سیستم در دوره گذرا کاری بسیار مشکل، و در مورد بسیاری از سیستمها، غیرممکن است. همه سیستمها لزوماً دارای دوره پایدار نیستند. مثلاً، اگر آهنگ درود منتهی بشن از آهنگ خروج آن باشد، طول صفت مرتباً افزایش می‌باید و به متین بینایت میل می‌کند. میانگین طول صفت در درازمدت (با میانگین مدت زمان انتظار مشتری در صفت) معمولاً مستقر به شرایط اولیه سیستم ندارد.

۳.۵ رابطه بین معیارهای ارزیابی یک سیستم صفت
با استفاده از شکل ۱.۵، می‌توان مدت زمان انتظار یک مشتری مشخص در سیستم و با صفت و همچنین تعداد مشتریهای سیستم را در هر لحظه تعیین کرد. بیکاری یا مشغول بودن خدمت‌دهندگان در زمانهای مختلف، نیز از شکل ۲.۵ به دست می‌آید. بدینهی است که برای تعیین معیارهای ارزیابی سیستم، اطلاعات مر بوط به یک مشتری خاص نمی‌تواند مد نظر باشد، بلکه اطلاعات مر بوط به مجموعه مشتریها ملاک ارزیابی توواند بود. باید توجه داشت که حتی یک مشتری مشخص هم، اگر دوبار به سیستم مراجعه کند، معمولاً به دو نتیجه متفاوت می‌رسد، که علت آن مابین اختلالی تغیرهای سیستم است. ضمناً، همان طور که گفته شد



شکل ۴.۵ منحنی تغیرات تعداد مشتریهای سیستم نسبت به زمان

تجلویز کند، این کمیتها به سمت اعداد ثابتی میل می‌کنند. مثلاً، اگر سیستم در زمان شروع کار، تعداد مشتری روبرو باشد، بدینهی است که طول صفت زیاد خواهد بود؛ اما، ممکن است به تدریج طول صفت کم شود و بعد از مدتی میانگین آن تقریباً ثابت بماند. میانگین طول صفت در درازمدت (با میانگین مدت زمان انتظار مشتری در صفت) معمولاً مستقر به شرایط اولیه سیستم ندارد.

با این مقدمه، دوره گذرا را مدت زمانی تعریف می‌کنیم که «ضیافت سیستم» (میانگین معیارهای ارزیابی و سایر عوامل مربوط به آن) تغییر می‌کند. این دوره معمولاً زمان شروع کار سیستم را در بر می‌گیرد و در آن شرایط اولیه روی تغیرات وضعیت سیستم تأثیر می‌گذارد. دوره پایدار دوره‌ای است که تغیرات سیستم «آن متعلق از زمان و شرایط اولیه سیستم است. شکل ۳.۵ نشان می‌دهد که میانگین یکی از معیارهای ارزیابی، در شروع کار سیستم در حال نوسان است؛ اما، پس از گذشت مدتی، تقریباً ثابت می‌ماند. بدینهی است که شرایط دوره گذرا، جز در مورد مطالعات خاص، نمی‌توانند مبنای ارزیابی سیستم قرار گیرد، بلکه آنچه اهمیت دارد تغیرات آن در درازمدت و در دوره پایدار است. از این‌دو، دنظریه صفت بود میانگین معیارهای ارزیابی سیستم، در دوره پایدار (د)

می‌گذراند، برابر است با میانگین مدت زمانی که در حرف می‌گذراند به اضافه مدت زمانی که منقول دریافت خدمت است.

در اینجا از اثبات دقیق ریاضی استنتاج لیتل صرف نظر می‌کیم، لیکن، برای روشن شدن موضوع، فرض کنید که سیستم در زمان t باشد. بر حسب تعریف، متوسط زمانی را که یک مشتری در سیستم گذرانیده است، W می‌نامیم. بر این اساس، کل زمانی که مشتریها تا لحظه t در سیستم گذرانیده‌اند، برابر است با:

تعداد مشتریها که تا این لحظه وارد سیستم شده‌اند ضرب در W .

$$W \cdot X(t) \quad (14.5)$$

از طرف دیگر، مجموع مدت زمانی که مشتریها در واحد زمان در سیستم صرف می‌کنند، برابر با میانگین تعداد مشتریان در سیستم است. درنتیجه، کل زمانی که مشتریها تا لحظه t در سیستم گذرانیده‌اند، برابر است با

$$E[N(t)] \quad (15.5)$$

از رابطه‌های (۱۴.۵) و (۱۵.۵) نتیجه می‌شود.

$$E[N(t)] = \frac{X(t)}{t} \cdot W, \quad (16.5)$$

از $X(t)/t$ بدانکه متوسط تعداد مشتریها است که در واحد زمان (در فاصله صفر تا t) وارد سیستم شده‌اند و بر حسب تعریف، آهنگ ورود مشتریان نامیده می‌شود.

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{t} \quad (17.5)$$

در رابطه (۱۶.۵)، اگر λ به صفت بیهوده می‌باشد، در واقع رابطه اول لینل، یعنی رابطه (۱۱.۵) بعدست می‌آید.

رابطه بین L و π_*

با توجه به اینکه L ، بر حسب تعریف، میانگین تعداد مشتریها در سیستم است و با در نظر گرفتن رابطه کلی محاسبه می‌کنیم، می‌توان L را با شرح زیر محاسبه کرد:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n \pi_n = (\text{بودن } n \text{ مشتری در سیستم}) \quad (18.5)$$

محاسبه L با استفاده از تبدیل z

آخر تبدیل z احتمالات حدی را با $P(z)$ نشان دهیم، به این

معیارهای ارزیابی با توجه به شرایط دوره پایدا (سیستم تعیین خواهد شد). برای ارزیابی سیستم در درازمدت، معیارهای عمله عبارت اند از:

L = میانگین تعداد مشتریان در سیستم در درازمدت

π_* = میانگین تعداد مشتریان در حرف در درازمدت

W = میانگین مدت زمان انتظار یک مشتری در سیستم در درازمدت

W_* = میانگین مدت زمان انتظار یک مشتری در حرف در درازمدت

π_* = احتمال بودن n مشتری در سیستم در درازمدت

بدینه است که معیارهای فوق در صورتی دارای معنا خواهد بود که سیستم به دوره پایدار بر سد. بدینه بیان ریاضی، معیارهای فوق را می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

$$L = \lim_{t \rightarrow \infty} \{EN(t)\} \quad (18.5)$$

$$W = \lim_{t \rightarrow \infty} E \quad (19.5)$$

$$\pi_* = \lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} P \quad (10.5)$$

و W_* نیز به طریق مشابه تعریف می‌شوند.

استنتاج لیتل رابطه‌های بین معیارهای ارزیابی یک سیستم در درازمدت، با استفاده از استنتاج لیتل، به ترتیب زیر، به دست می‌آید. این رابطه‌ها که در نظریه صفت اهمیت خاصی دارند، در مرور تمام سیستمهای صفت صادق هستند.

$$L = \lambda W \quad (11.5)$$

$$Lq = \lambda W_* \quad (12.5)$$

$$W = W_* + \frac{1}{\mu} \quad (13.5)$$

در رابطه فوق، λ معرف آهنگ مشتری، میانگین تعداد بالقوه مشتریانی است که در واحد زمان وارد سیستم می‌شوند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، بهفرض ثابت بودن L ، λ و W متناسب با یکدیگرند. به عبارت دیگر، هر چه میانگین مدت زمان انتظار مشتریان بیشتر باشد (یعنی سیستم شلوغ‌تر باشد)، میانگین تعداد مشتریهای داخل سیستم نیز بیشتر می‌شود. از یک طرف، تعداد مشتریها که داخل سیستم هستند، متنیماً بستگی به آهنگ ورود مشتریان دارد. از طرف دیگر، طبق رابطه (۱۳.۵)، میانگین مدت زمانی که یک مشتری در سیستم

$$P_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_1 + B_2 + \dots + B_n}{I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + \dots + I_n + B_n} \quad (21.5)$$

در حالتی که متغیرهای تصادفی $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n$ مستقل و دارای توزیع یکان و همچنین B_1, B_2, \dots, B_n نیز دارای همین خاصیت باشند، طبق قانون اعداد بزرگ خواهیم داشت:

$$P_1 = \frac{E(B)}{E(I) + E(B)} \quad (22.5)$$

که $E(I)$ و $E(B)$ به ترتیب معرف میانگین دوره بیکاری و دوره مشغول بودن سیستم در دراز مدت هستند و مقدار آنها برای مدل‌های خاص در فصلهای بعدی محاسبه خواهد شد. به همین ترتیب، درصد بیکاری سیستم در دراز مدت برابر با $P_1 = 1$ است. از طرف دیگر، طبق تعریف، درصدی از زمان که سیستم قادر شتری است را با π_1 نشان می‌دهیم. بنابراین، تحت شرایط فوق،

$$\pi_1 = \frac{E(I)}{E(I) + E(B)} \quad (23.5)$$

۴.۵ ضریب بهره‌وری

همان‌طور که قلاً گفتیم، یکی از معیارهای ارزیابی سیستم دصدی از زمان است که سیستم کار می‌کند. برای نشان دادن این معیار، از عاملی به نام ضریب بهره‌وری استفاده می‌شود، که تعریف آن به شرح زیر است:

$$\text{میانگین کل تقاضا برای دریافت خدمت در واحد زمان} = p = \frac{\text{کل طرفیت سیستم برای ارائه خدمت در واحد زمان}}{\text{کل طرفیت سیستم برای ارائه خدمت در واحد زمان}} \quad (24.5)$$

طبق این تعریف، هرچه مقدار p بزرگ‌باشد، تقاضا زیاد است و سیستم باید کار بیشتری انجام دهد و صفت طولانیت خواهد شد. بر عکس، هرچه p کوچک‌باشد، طول صفت کوتاه‌تر است، اما در مقابل، از امکانات سیستم استفاده کمتری بعمل می‌آید. قضیه ۲۰.۵ در بیکاری سیستم صفت با m خدمت‌دهنده، که λ و μ به ترتیب معرف آهنگ ورود و آهنگ خدمت است، ضریب بهره‌وری از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$p = \frac{\lambda}{m\mu} \quad (25.5)$$

اثبات: برای محاسبه p در رابطه (۲۴.۵)، واحد منجش صورت و مخرج کسر را تعداد مشتریان در نظر می‌گیریم. در نتیجه،
 صورت کسر = $(\text{میانگین مشتریانی که در واحد زمان مراجعت می‌کنند}) / \lambda$
 مخرج = $(\text{میانگین تعداد خدمت‌دهنده}) \times (\text{میانگین ظرفیت خدمت‌دهی یک خدمت‌دهنده})$

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n z^n$$

$$L = \left. \frac{dP(z)}{dz} \right|_{z=1}$$

$$\frac{dP(z)}{dz} = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n z^{n-1}$$

اگر $1 = z$ باشد، رابطه (۱۹.۵) به رابطه (۱۸.۵) تبدیل می‌شود. به همین ترتیب

$$(بودن n مشتری در صفت) Lq = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P(n)$$

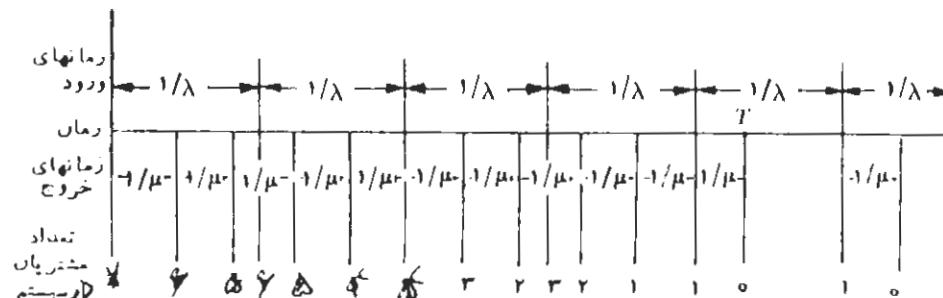
از طرف دیگر، درستی با m خدمت‌دهنده، اگر جمعیت مشتریان برابر با n باشد، طول صفت برابر با $(n-m)$ خواهد بود، لذا

$$Lq = \sum_{n=m}^{\infty} (n-m)\pi_n \quad (20.5)$$

۴.۵ دوره بیکاری و دوره مشغول بودن یک سیستم صفت
 هر سیستم صفت مدنی بیکار می‌ماند. این دوره از خروج آخرین مشتری شروع می‌شود و بروز اولین مشتری بعدی پایان می‌باید. پس از آن، دوره مشغول بودن سیستم شروع می‌شود و ادامه‌ی باشد تا زمانی که تمام مشتریها از سیستم خارج شوند. آن‌گاه، دوره بیکاری مجدد آغاز می‌گردد و همین روند ادامه می‌باید. مجموعه یک دوره بیکاری و مشغول بودن را یک پرتوخانه اشتغال سیستمی گویند. در شکل ۴.۵ دوره‌های بیکاری با I_1, I_2, \dots, I_n و دوره‌های کار با B_1, B_2, \dots, B_n نشان داده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، سیستم به طور متناوب دوره‌های بیکاری و مشغول بودن را می‌گذراند. اولین پرتوخانه اشتغال سیستم، مدت زمان $I_1 + B_1$ است. با توجه به تصادفی بودن زمانهای پرتوخانه اشتغال و مدت خدمت، بدینهی است که دوره‌های بیکاری و مشغول بودن (و طبیعتاً پرتوخانه‌ای اشتغال) معمولاً متغیر تصادفی هستند. اگر در دراز مدت، p را درصدی از اوقات بدایم که سیستم مشغول به کار است.



شکل ۴.۵ دوره‌های بیکاری و مشغول بودن و پرتوخانه‌ای اشتغال

شکل ۵.۵ رمانهای درود و خروج و تعداد مشتریان در مدل $D/D/1$

است. در این سیستم، دوره گذرا T است و پس از آن دو دفعه پایدار شروع می‌شود. در دوره پایدار هیچ مشتری در صفت منتظر نمی‌ماند و صفات نیز نشکل نمی‌شود. بدین ترتیب، رابطه‌های لیتل نیز برقرار خواهد بود. طول مدت دوره گذرا، T ، از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$[\lambda T] + n = [\mu T] \quad (26.5)$$

که تعداد مشتریهای اولیه است. منظور از $[x]$ مقدار کردشده x به عدد صحیح است، به طوری که

$$x - 1 < [x] \leq x$$

حال مدل $D/D/1/K$ ، که در آن ظرفت سیستم متناهی، و برابر با K است، را در نظر بگیرید. در این سیستم هم مشتریها با آهنگ λ سراجمه می‌کنند. لیکن، همه آنها لزوماً وارد سیستم نمی‌شوند، زیرا هنگامی که سیستم دارای K مشتری باشد، از پذیرش مشتری جدید خودداری می‌کند و این مشتری نمی‌تواند در صفت منتظر بماند و به ناجار از دریافت خدمت معمول خواهد ماند. به این ترتیب، آهنگ درود مشتریان کمتر از λ است که آن را با λ نشانی دهیم. بنابراین، در واحد زمان به طور متوسط تعداد $(\lambda - \lambda)$ مشتری از درود به سیستم بازمی‌مانند. برای اینکه سیستم به حالت پایدار برسد، فقط لازم است که λ (ونه λ) از K کوچکتر باشد.

برای سهولت محاسبات، فرض کنید که در لحظه شروع کار سیستم تعداد مشتریهای که منتظر می‌مانند برابر با صفر در نظر گرفته شود. ضمناً، فرض می‌کنیم که $\lambda > \lambda$ باشد. (در حالی که $\lambda > \lambda$ باشد، درود و خروج مشتریها دقیقاً مانند حالت $D/D/1$ است، که قبلاً مورد بررسی فرار گرفت). شکل ۵.۶ این سیستم را بیان می‌کند. در این سیستم فرض شده است که $\lambda = 2\mu$ و $K = 4$ اوین مشتری در زمان λ / μ وارد می‌شود

بدینهای است که $\lambda > \mu$ بدین معناست که ظرفیت سیستم از تقاضای واردہ به آن کمتر است و طول صفت مرتب افزایش می‌باشد تا سرانجام به بینهایت می‌رسد. ضمناً، در بیانی از حالتها نشان داده می‌شود که $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ نیز مربوط به یک سیستم ناپایدار است، بدین ترتیب، معمولاً موقعی سیستم پایدار است که $\rho < 1$ باشد.

۶.۵ سیستمهای صفتی

در این بخش، برای تشریح يك سیستم صفتی، حالات خاصی را بررسی می‌کنیم که تمام متغیرهای آن قطبی است. معمولاً، زمان بین دو ورود متوالی مشتریها و همچنین مدت زمان ارائه خدمت، متغیرهای تصادفی هستند. در سیستمهای صفتی، دو متغیر فوق همواره قطبی فرض می‌شود. به بیان ریاضی می‌توان گفت که در این سیستمهای زمان بین دو ورود متوالی مشتریها و همچنین مدت زمان خدمت، متغیرهای تصادفی هستند که واریانس آنها برابر با صفر است.

طابق با قراردادهای که در فصل اول تشریح شد، سیستمهای قطبی را در حالت کلی $D/D/1$ نشان می‌دهند. آهنگ درود مشتری، طبق معمول با λ و آهنگ خدمت با μ بیان می‌شود. اگر مشتریها به طور انفرادی وارد سیستم شوند و به گونه‌ای انفرادی هم خدمت دریافت کنند، مدت زمان بین دو ورود متوالی مشتریها دقیقاً برابر با $1/\lambda$ و مدت زمان دریافت خدمت نیز برابر با $1/\mu$ خواهد بود.

ابندا حالت ساده $D/D/1$ را در نظر بگیرید. طبق قرارداد، در این سیستم يك خدمت دهنده وجود دارد، و محدودیتی نیز از نظر ظرفیت سیستم و جمیعت مشتریان مطرح نیست. بدینهای است که سیستم در صورتی می‌تواند در دراز مدت پایدار بماند که $\rho < 1$ باشد.

(ج) به عبارت دیگر، سرعت خدمت دهنده در چنین شرایطی باید بیش از تقاضا برای دریافت خدمت باشد. در غیر این صورت، طول صفت مرتب افزایش می‌باشد و به بینهایت خواهد رسید. فرض کنید که در لحظه شروع کار سیستم λ مشتری آماده دریافت خدمت باشند و از آن پس، زمان بین دو ورود $1/\lambda$ باشد. در ابتدا، برای ارائه خدمت به مشتریها باید منتظر هستند، خدمت دهنده باید مرتب کار کند. پس از مدتی که خدمات معمولة ارائه شد، فقط به مشتریان جدید خدمت داده می‌شود. به عبارت دیگر، از لحظه شروع اشتغال سیستم، تا زمان مشخصی، مثلاً T ، خدمت دهنده دائم اشتغال بود کار است و از آن پس درصدی از اوقات را کار می‌کند (که با ρ نشان داده می‌شود). شکل ۵.۵ معرف این سیستم است. در این سیستم فرض شده است که در لحظه شروع کار سیستم λ مشتری در صفت منتظر دریافت خدمت بوده‌اند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، از لحظه صفر تا T ، خدمت دهنده مرتب در حالت ارائه خدمت است. از این لحظه به بعد، مدتی کار می‌کند و سپس بیکار می‌ماند. در شکل فوق دو دفعه مشغول بودن $\mu/1$ و دفعه بیکاری $(\mu/1 - 1/\lambda)$ و چرخه اشتغال سیستم به مدت $1/\lambda$

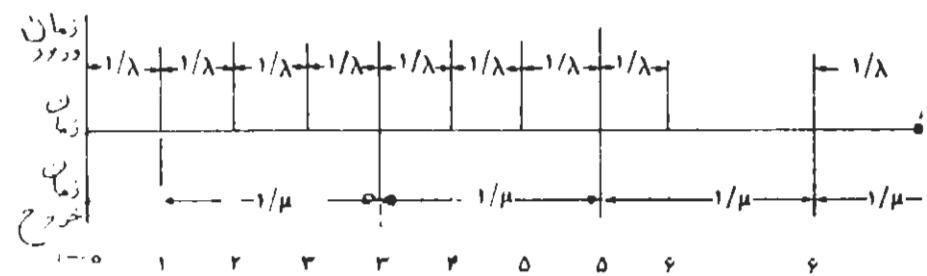
لحظهه ورود یک مشتری دقیقاً ۵ مشتری دیگر در سیستم هستند و این مشتری باید صبر کند تا آنها خارج شوند، یعنی $\mu/5 = \lambda$ و به عین ترتیب $\mu/6 = \lambda$. در نتیجه با درنظر گرفتن فرض $\mu = 3/\lambda$ ، نتیجه می‌شود،

$$\bar{\lambda}W = \frac{\lambda}{3} - \frac{6}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} = 6$$

مسائل

۱. در یک سیستم صفت با دو خدمت دهنده، ورود و خروج مشتریها طبق جدول زیر است. فرض می‌کنیم که انتخاب مشتری در صفت بر اساس نوبت باشد. میانگین زمان انتظار مشتریها، طول صفت، و تعداد افرادی که در حال گرفتن خدمت هستند، آهنگ ورود مشتری و آهنگ خدمت دهنی را محاسبه کنید. نمودار جمعیت مشتریان را نسبت به زمان رسم کنید.

	شماره مشتری	ساعت ورود	ساعت خروج
۱:۳۰	۱	۱	
۱:۴۵	۱:۱۰	۲	
۱:۴۰	۱:۲۰	۳	
۱:۵۵	۱:۳۵	۴	
۲:۰۰	۲:۱۰	۵	
۲:۳۵	۲:۱۵	۶	
۲:۵۵	۲:۲۰	۷	
۲:۵۸	۲:۳۰	۸	
۳:۲۵	۳:۰۵	۹	
۳:۲۰	۳:۰۸	۱۰	
۳:۳۲	۳:۱۵	۱۱	
۳:۴۰	۳:۱۹	۱۲	
۰۰۰۰	۳:۳۶	۱۳	



شکل ۴.۵ زمانهای ورود و خروج و نمداد مشتریان در مدل D/D/1/6

و بلاقابل ارائه خدمات به او شروع می‌شود. چون آهنگ خدمت دهنی کندر از آهنگ ورود مشتری است، لذا مرتباً به طول صفت اضافه می‌شود تا موقعی که سیستم پرسشود (یعنی $U(t) = N(t)$) در این هنگام، از ورود مشتری جلوگیری به عمل می‌آید. از این لحظه به بعد، با خروج یک مشتری، مشتری جدیدی وارد سیستم می‌شود و این کار ادامه می‌باید. در این مدل نیز طول دوره گذرا، T ، از رابطه زیر بدست می‌آید (با فرض اینکه μ/λ بر این عدد صحیح مانند m باشد).

$$T = \frac{K}{\lambda - \mu} \quad (27.5)$$

همان مطور که مشاهده می‌شود، بعد از دوره گذرا، تعداد مشتریان داخل سیستم همراه برابر K است، اما قبل از آن، تعداد مشتریان از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$N(t) = X(t) - X'(t) = [\lambda t] - \left[\frac{t - 1/\lambda}{1/\mu} \right] = [\lambda t] - [\mu t - \mu/\lambda] \quad (28.5)$$

$$N(t) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } 1/\lambda \leq t \leq T \\ [\lambda t] - [\mu t - \mu/\lambda], 1/\lambda \leq t \leq T \\ K & \text{اگر } t > T \end{cases}$$

به این ترتیب، با توجه به شکل ۴.۵ مشاهده می‌شود که بعد از دوره گذرا، که T است، تعداد مشتری در سیستم همراه K باقی می‌ماند. در عین مثال، از هر سه مشتری که مراجعت کنند، دقیقاً یکی از آنها وارد سیستم می‌شود و دو مشتری دیگر از ورود باز مانند. بنابراین، $\bar{\lambda} = \lambda/(K+1) = \lambda/(K+1/3) = \lambda/(\lambda/3 + 1) = 1/\lambda$ است. مدت زمان انتظار یک مشتری برابر با $\mu/6$ است، زیرا در

۳. در يك سیستم $D/D/1/7$ آهنگ خدمت دهی برابر با يك پنجم و آهنگ مراجعة مشتری برابر با يك سوم است. میانگین زمان انتظار هر مشتری در صفح، در دراز مدت، چه است؟ صریب بهره‌وری را محاسبه کنید. صحبت رابطه‌های روابط لینل را نشان دهید. آیا این سیستم حالت پابدار دارد؟

۴. نابت کبد که در هر سیستم صفح بایک خدمت دهنده، همیشه رابطه‌های زیر برقرار است:

$$1) \pi_0 = 1 - \rho \quad 2) L = L_0 + (1 - \pi_0) \quad 3) L = L_0 + \rho$$

۶

مدلهای نمایی در سیستمهای صفح

مقدمه

منظور از مدل‌های نمایی، مدل‌هایی است که در آنها، دو متغیر تصادفی زیر دارای توزیع نمایی باشد:

الف. زمان بین دو دو متوالی مشتریها

ب. مدت خدمت

مدلهای نمایی از مهمترین نمونه‌های سیستمهای صفح هستند. اهمیت آنها از آنجا ناشی می‌شود که از نظر محاسباتی ساده‌ترین مدل‌ها محسوب می‌شوند و در عین حال، بسیاری از سائل واقعی را می‌توان در چارچوب آنها گنجانید.

طبق آنچه که در فصل اول گفته شد، برای بیان سیستمهای صفح و طبقه‌بندی آنها، از ترازدادی به شکل $Z/A/B/m/K/C$ استفاده می‌شود. اگر زمان بین دو ورود متوالی مشتریها دارای توزیع نمایی باشد، حرف M جایگزین Z می‌شود. به همین ترتیب، در صورتی که مدت خدمت هم نمایی باشد، به جای حرف B حرف M قرار می‌گیرد. بنابراین، مدل‌های نمایی، به طور کلی، به صورت ... $M/M/N$ نام داده می‌شوند. در نظریه صفح، به مدل‌های نمایی فرایند تولد و مرگ هم می‌گویند.

در این فصل، ویژگیهای عمومی مدل‌های نمایی در حالت کلی و خصوصیات آنها در حالات خاص را مورد بررسی قرار دهیم.

۳.۶ بیان فرایند تولد و مرگ در چارچوب زنجیره مارکوف

تعداد مشتری داخل سیستم را دریک لحظه، حالت می‌سیتم تعریف کنید. طبق خاصیت فرایند تولد و مرگ، افزایش یا کاهش این تعداد مشتری، فقط بستگی به حالت سیستم دارد و مستقل از گذشته آن است، بنابراین، خاصیت مادکوفی بودن «سود» این فرایند صادق است. ضمناً، مدت زمانی هم که طول می‌کشد تا حالت می‌سیتم تغییر کند، متغیری تصادفی با توزیع نمایی است. بدین ترتیب، این فرایند در چارچوب زنجیره مارکوف پیوسته فرادمی گیرد. برای مشخص کردن ماتریس آهنگ‌گذار، باید عنصر این ماتریس، یعنی q_{ij} را، به ازای تمام مقادیر i و j ، محاسبه کرد. می‌دانیم که طبق تعریف، به ازای $j \neq i$ ،

$$(تغییر حالت می‌سیتم از i به j در مدت Δt) \\ q_{ij} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p}{\Delta t}$$

بنابراین، اگر $i+1=j$ باشد (بک تولد)

$$q_{i,i+1} = \lambda_i \quad (1.6)$$

و اگر $i-1=j$ باشد (بک مرگ)،

$$q_{i,i-1} = \mu_i \quad (2.6)$$

وجود خواهد داشت. در سایر موارد

(۳.۶) اگر $i-1 \neq j$ یا $i+1 \neq j$ باشد، $q_{ij}=0$ خواهد بود.

به این ترتیب، ماتریس آهنگ گذار فرایند تولد و مرگ به شکل زیر درمی‌آید.

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

به جای استفاده از ماتریس فرق، می‌توان از نمودار آهنگ برای نشان دادن فرایند مارکوف استفاده کرد. چنین نمودار آهنگی در شکل ۱.۶ نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در فرایند تولد و مرگ، از یک حالت، تنها می‌توان به‌حالاتی مجاور آن حرکت کرد.

۱.۶ فرایند تولد و مرگ

برای تشریح این فرایند، جمعیت را در نظر گیرید که تعداد آن هر لحظه می‌تواند افزایش یابد (تولد)، و با از آن کاسته گردد (مرگ). دریک می‌سیتم صفت، مشتری‌های داخل می‌سیتم معروف جمعیت فوق الذکر است. در فرایند تولد و مرگ، در حکم مرگ مخصوص می‌شود. ضمناً، خروج یکی از مشتریها (پس از دریافت خدمت)، در حکم مرگ مخصوص می‌شود. ضمناً، ویزگی عده فرایند تولد و مرگ این است که فاصله زمانی بین دو تولد یا دو مرگ بر اساس نوزیع نمایی است. به عبارت دیگر، در این فرایند، تعداد تولد‌ها یا مرگها (دیگر فاصله زمانی مشخص) بواسطه فرایند پواسون است. به نعیرید فیقر، فرایند تولد و مرگ بر اساس فرضهای زیر ابعاد می‌شود.

فرض ۱. یک لحظه مشخص را در نظر بگیرید، که جمعیت می‌سیتم در آن برابر با n باشد. مدت زمانی که طول می‌کشد تا یک تولد صورت گیرد (یک مشتری جدید وارد شود)، متغیری تصادفی با توزیع نمایی و پارامتر λ است. به عبارت دیگر، احتمال ورود یک مشتری در فاصله کوتاه Δt متناسب با طول $\lambda \Delta t$ و طول دفعه برابر است با $(\lambda \Delta t)^n e^{-\lambda \Delta t} + (\lambda \Delta t)^{n-1} \lambda e^{-\lambda \Delta t}$. به همین ترتیب، احتمال ورود بیش از یک مشتری در فاصله کوتاه Δt صفر، یا به طور دقیق‌تر برابر با $(\lambda \Delta t)^0 e^{-\lambda \Delta t}$ است. آهنگ ورود مشتری (یا آهنگ تولد) یعنی λ ، می‌تواند به جمعیت می‌سیتم بستگی داشته باشد، ولی مستقل از زمان فرض می‌شود. لزوماً برابر با صفر نیست.

فرض ۲. یک لحظه مشخص را در نظر بگیرید که در آن جمعیت می‌سیتم برابر با n باشد. مدت زمانی که طول می‌کشد تا یک مرگ صورت گیرد (یا یک مشتری خارج شود)، متغیری تصادفی با توزیع نمایی و پارامتر μ است. آهنگ خروج مشتری (یا مرگ)، همچنین μ ، نزد می‌تواند به جمعیت می‌سیتم بستگی داشته باشد، ولی مستقل از زمان فرض می‌شود. μ برابر با صفر است زیرا جمعیت منفی معنا ندارد.

بنابراین، از فرضهای ۱ و ۲ نتیجه می‌شود که در فرایند تولد و مرگ، در هر لحظه حداقل یک مشتری واژد یا خارج می‌شود. علت این امر این است که ورود و خروج مشتریها طبق فرایند پواسون است. می‌دانیم که دریک فرایند پواسون، دو پیشامد هم‌زمان نمی‌تواند رخ دهد.

آهنگ تولد (یا ورود مشتری)، یعنی λ ، و همچنین آهنگ مرگ، یعنی μ ، در می‌سیتمهای مختلف می‌توانند متفاوت باشند. یک حالت خاص، $\lambda = \mu = \lambda_0$ است. در حالت خاص دیگر، $\lambda = n\lambda_0$ و $\mu = n\mu_0$ است. در این حالت، متناسب با افزایش جمعیت، آهنگ ورود یا خروج نزد افزایش می‌یابد. طبق فرضهای فوق، در مدت زمان کوتاه، جمعیت مشتری‌های داخل می‌سیتم حداقل یک نفر افزایش یا کاهش می‌یابد، مشروط بر اینکه طبق فرایند تولد و مرگ عمل کند.

$$(\lambda_0 + \mu_0)\pi_0 = \lambda_{n-1}\pi_{n-1} + \mu_{n+1}\pi_{n+1} \quad (A.6)$$

با استفاده از رابطه‌های (۶.۶) و (۷.۶) و (A.6) نتیجه می‌شود:

$$\pi_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} \pi_0 \quad (4.6)$$

$$\pi_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} \pi_0 \quad (10.6)$$

.

.

.

.

$$\pi_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \pi_0 \quad (11.6)$$

برای سهولت از فرآرداد زیر استفاده می‌کنیم.

$$C_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \quad n = 1, 2, \dots \quad (12.6)$$

در نتیجه رابطه (۱۱.۶) را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

$$\pi_n = C_n \pi_0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (13.6)$$

از طرف دیگر می‌دانیم که

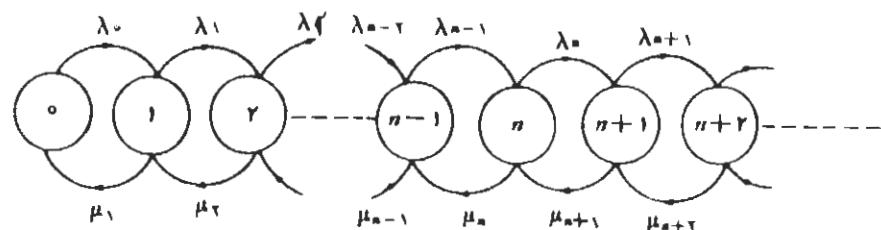
$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1$$

با

$$\pi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \pi_0 = \pi_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \right] = 1$$

در نتیجه

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n} \quad (14.6)$$



شکل ۱۰.۶ نمودار آهنگ در فرآیند تولد و مرگ

معادله تعادلی دسیستم‌های نمایی

همان طور که قبلاً گفته شد، π_n معرف این حالت است که در درازمدت n مشتری در سیستم باشد. به عارت دیگر، π_n نشان‌دهنده درصدی از زمان است که سیستم دارای n مشتری است. به بیان ریاضی

$$\pi_n = \lim_{t \rightarrow \infty} p[N(t) = n] \quad (5.6)$$

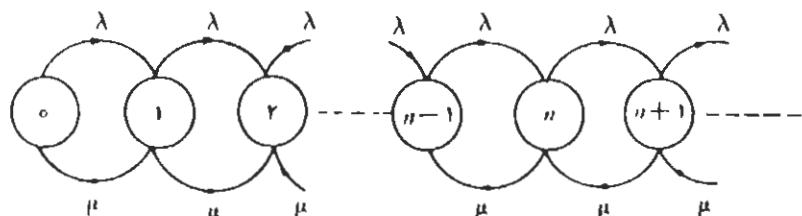
برای محاسبه π_n در فرآیند تولد و مرگ، شکل ۱۰.۶ به کار گرفته می‌شود. ابتدا از حالت صفر، که هیچ مشتری در سیستم وجود ندارد، شروع می‌کنیم. همان طور که نمودار آهنگ نشان می‌دهد، حالت سیستم فقط درصورت تغییر می‌کند که یک مشتری جدید وارد شود. در این صورت، حالت سیستم نیز «یک» خواهد شد. تغییر حالت سیستم از صفر به یک (یعنی ورود یک مشتری) با آهنگ λ انجام می‌شود. به همین ترتیب، با درنظر گرفتن این مطلب که ورود به حالت صفر نیز فقط با تغییر حالت سیستم از یک به صفر امکانپذیر است، آهنگ ورود به این حالت نیز برابر با μ خواهد بود. در نتیجه، معادله تعادلی در حالت صفر برابر است با

$$\lambda_0 \pi_0 = \mu_0 \pi_0 \quad (6.6)$$

اکنون حالت ۱ را در نظر بگیرید. تغییر حالت سیستم، به دو طریق، ورود مشتری جدید (با آهنگ λ) یا خروج تنها مشتری داخل سیستم (با آهنگ μ) می‌سرد. از طرف دیگر، از دو طریق نیز می‌توان به حالت ۱ رسید: از حالت صفر با ورود یک مشتری یا از حالت ۲ با خروج یکی از مشتری‌های داخل سیستم. بنابراین، معادله تعادلی برای این حالت عبارت است از:

$$(\lambda_1 + \mu_1)\pi_1 = \lambda_0 \pi_0 + \mu_2 \pi_2 \quad (7.6)$$

به همین ترتیب، معادله تعادلی برای حالت n به شرح زیر خواهد بود:



شکل ۳.۶ نمودار آهنگ مدل الایمن

داخل سیستم فرض می شود. لذا، به ازای $\lambda = 0, 1, 2, \dots$ از طرف دیگر، چون بک خدمت دهنده بیشتر وجود ندارد، آهنگ خروج مشربان برابر با آهنگ خدمت خواهد بود. در نتیجه، به ازای $\lambda = 0, 1, 2, \dots$ می باشد. در این مدل، $\mu = \mu_0$ فرض شده است، زیرا در صورتی که مشتری در سیستم نباشد، خدمت دهی هم وجود ندارد. نمودار آهنگ این مدل مطابق شکل ۲۰ است.

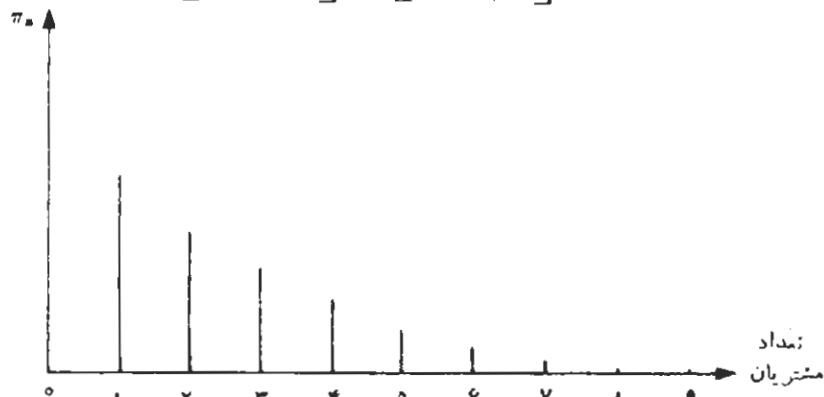
$$C_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_n}{\mu_0 \mu_1 \dots \mu_n} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \quad (12.6)$$

اما بر حسب تعریفی، که از ضریب بهره‌وری به عمل آمد، $\rho = \lambda / \mu$ است.

$$C_n = \rho^n \quad (\text{1.5.5})$$

در نتیجه، با فرض $1 < \rho$

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \right]^{-1} = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \right]^{-1} = 1 - \rho \quad (14.6)$$



شکل ۳.۶ احتمال تعداد مشتری‌های داخل سیستم در درازمدت، مدل ۱

تعداد مشتری در سیستم، در درازمدت، بودست می‌آید.

شرط پایدار بودن سیستمهای نهایی با توجه به این اطلاعات (۱۴.۶)، ملاحظه‌می شود که در صورتی π مثبت است که $C_i \geq C_j$ متناهی، یعنی سری C_1, C_2, \dots, C_n محدودگرا باشد. اگرچنان نباشد π غواصه بود. به عین ترتیب، از از اطلاعات (۱۳.۶) نتیجه می شود که به ازای تمام مقادیر $i, j = 1, 2, \dots, n$ π است. در نتیجه، احتمال اپنکه سیستم خالی یا دارای j مشتری باشد $(i=1, 2, \dots, n)$ بر اساس باصره ای است. معنای این موضوع این است که در درازمدت، تعداد مشتری‌های داخل سیستم از هر عددی مانند n مشتری (یعنی هر ابر سایه‌ای است. در چنین حالتی می‌شود فاپایدار است. بنابراین، در فرآیند تولد و مرگ شرط پایداری سیستم این است که

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n < \infty \quad (15.9)$$

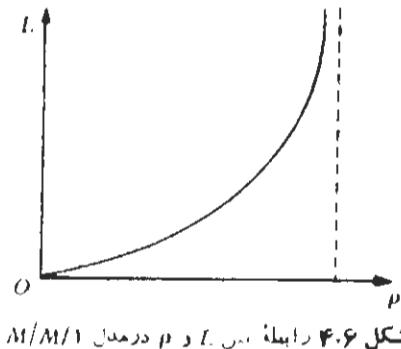
محاسبه معیارهای ارزیابی مدل‌های نمایی

پس از محاسبه π_1 و π_2 (با ازای $n = 1, 2, \dots, 10$)، میانگین تعداد مشتری «میمت»، یعنی L ، از رابطه (۱۰.۵) بدست می‌آید. آن گاه، با استفاده از روابط موسم ۴ استنتاج نیل، یعنی رابطه (۱۱.۵)، معیار دیگر ارزیابی، میانگین مدت زمان انتظار مشتری «میمت» یا W ، بدست می‌آید. بهمین ترتیب، L و W را می‌توان با کمک روابط (۱۲.۵) و (۱۳.۵) محاسبه کرد.

بررسی نو نهایی خاص مدلهای نمایی در ادامه این بخش، انواع مدلهای نمایی را بررسی و معیارهای ارزیابی آنها را به دست می‌آوریم. برای تعیین این معیارها، ابتدا λ و π را بازای هرگاهی مختلف مشخص و π را محاسبه می‌کیم. آن‌گاه به بررسی π و W و سایر عوامل می‌برداریم. در تمام این مدلها فرض می‌کیم که زمان بین دو ورود متوازن، مشترک‌ها و همچنین خدمت‌نمایی، است.

محل ۴.۹ / M/M/۱

این مدل متداولترین نمونه مدل صفت است، که به مدل کلاسیک نیز موسوم است. در این مدل ورود مشتریها طبق فرایند پرداzon با پارامتر λ است. آنگه ورود مشتری مستقل از جمیعت b است.



$$L = \frac{p}{1-p} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \quad (۱۹.۶)$$

رابطه بین L و p در شکل ۲۰.۶ نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، p باشد کوچک‌تر از یک باشد. در غیر این صورت طول صرف بینایت و سیستم ناهايداد خواهد شد. میانگین طول صرف با L را نيز می‌توان حساب کرد. دره لحظه چنانچه سیستم دارای n مشتری باشد، طول صرف برابر با $(1-n)$ خواهد بود. لذا،

$$L_n = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\pi_n = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi_n - \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n$$

جمله اول برابر L و جمله دوم برابر با $(1-\pi_0)$ است. پس،

$$L_n = L - (1-\pi_0) = \frac{\rho^n}{1-\rho} = \frac{\lambda^n}{\mu(\mu-\lambda)} \quad (۲۰.۶)$$

محاسبه مدت زمان انتظار در سیستم

فرض کنید T_w معرف مدت زمان انتظار در سیستم و T_s مدت زمان انتظار در صرف باشد. می‌دانیم که، طبق تعریف

$$W_0 = E(T_w) , \quad W = E(T_s)$$

و W_0 را می‌توان با استفاده از رابطه «لینل» بدست آورد که

$$W_0 = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad (۲۱.۶)$$

$$W_0 = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \quad (۲۲.۶)$$

محاسبه

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n = \sum_{n=0}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n = (1-\rho) \rho \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^{n-1}$$

از رابطه (۲۰.۶) در مرور بسط می‌رسیم که:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n = \frac{1}{(1-\rho)^2}$$

$$\pi_n = C \cdot \rho^n = (1-\rho)\rho^n \quad (۱۸.۶)$$

شکل ۲۰.۶، احتمال تعداد مشتریهای داخل سیستم را در درازمدت نشان می‌دهد. مثال ۱۰.۶ کتابخانه‌ای عمومی که فقط یک کتابدار دارد را در نظر بگیرید. اعضاي کتابخانه طبق مرآبند پواسون با میانگین ۱۵ نفر در ساعت وارد می‌شوند. مدت زمانی که طول می‌کند نا این کتابدار به تقاضای یک عضو رسیدگی کند، متغیری نصادفی میانگین ۵ دقیقه است. در چند درصد وقت، این کتابدار بیکار است؟ احتمال اینکه ۳ نفر منتظر باشند نا کتابدار به تقاضای آنها رسیدگی کند، چقدر است؟

حل: در این مدل $\lambda = 12$ و $\mu = 12$ است. هیمارت دیگر، به طور متوسط در هر ساعت ۱۲ نفر وارد کتابخانه می‌شوند و کتابدار طرفیت ارائه خدمت به ۱۲ نفر در ساعت را دارد.

مدبن ترتیب

$$\rho = \frac{12}{12} = \frac{1}{2}$$

در صد بیکاری کتابدار برابر با π_3 است و طبق رابطه (۱۷.۶) بدست می‌آید.

$$\pi_3 = 1 - \rho = \frac{1}{2}$$

احتمال اینکه سه نفر منتظر در ریافت خدمت از کتابدار باشند، برابر با π_3 است، زیرا اگر ۲ نفر در سیستم باشند، بکی از آنها مشغول در ریافت خدمت است و سه نفر دیگر در صرف منتظر هستند. طبق رابطه (۱۸.۶)

$$\pi_3 = (1-\rho)\rho^3 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0.03125$$

پس

از طرف دیگر، مدت زمانی که این مشتری در صفت منتظر می‌ماند، برابر است با:

$$T_0 = X_1 + \dots + X_n$$

که X_i معرف مدت زمان دریافت خدمت توسط مشتری i -ام است. به همین ترتیب

$$T_0 = T_1 + X_{n+1}$$

که X_{n+1} شانده‌نده مدت زمان دریافت خدمت توسط خود مشتری است، چون مجموع $+1$ متغیر تصادفی مستقل نمایی با پارامترها است، یک متغیر تصادفی الانگی، با پارامترهای λ دارد خواهد شد، بنابراین

$$P(T_0 > x | N=n) = P\left(\sum_{i=1}^{n+1} X_i > x\right) = \int_x^\infty \mu e^{-\mu y} \frac{(\mu y)^n}{n!} dy \quad (27.6)$$

با استفاده از رابطه‌های (۱۸.۶) و (۲۷.۶) رابطه (۲۶.۶) را محاسبه می‌کیم:

$$\begin{aligned} P(T_0 > x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (1-\rho) \int_x^\infty \mu e^{-\mu y} \frac{(\mu y)^n}{n!} dy \\ &= \mu(1-\rho) \int_x^\infty e^{-\mu y} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n (\mu y)^n}{n!} dy \end{aligned} \quad (28.6)$$

از طرف دیگر با بهره‌گیری از بسط سری‌های نمایی نتیجه می‌شود

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n (\mu y)^n}{n!} = e^{\rho \mu y} = e^{\lambda x} \quad (29.6)$$

پس از جایگزینی رابطه فوق و محاسبه انتگرال، رابطه (۲۵.۶) اثبات می‌شود. متأسفانه می‌شود که T_0 دارای توزیع نمایی با پارامتر $(\lambda - \mu)$ است. میانگین این متغیر تصادفی نمایی برابر است با

$$W = E(T_0) = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

که قبلاً با استفاده از استنتاج لیل به دست آمد.

مثال ۳۰.۶ در مثال ۲۰.۶، احتمال اینکه مشتری اصلاً منتظر نماند، چقدر است؟

احتمال اینکه حداقل یک ساعت منتظر بماند، چقدر است؟

مثال ۳۰.۶ مثال ۱۰.۶ را مجدداً در نظر بگیرید. به طور متوسط یک مشتری چه مدت منتظر می‌ماند تا کتابدار به تقاضای او رسیدگی کند؟ چند نفر به طور متوسط منتظر هستند تا کتابدار به تقاضای آنها رسیدگی کند؟ از لحظه ورود یک مشتری تا لحظه‌ای که کار او تمام شود، به طور متوسط چه مدت طول می‌کشد؟ حل: سه مسئله مورد نظر به ترتیب میان مقادیر W_0 ، L_0 و W است، که از روابط‌های (۲۰.۶)، (۲۱.۶) و (۲۲.۶) بدست می‌آید.

$$W_0 = \frac{10}{12(2)} = \frac{10}{24} \text{ ساعت}$$

$$L_0 = \frac{100}{12(2)} = \frac{100}{24} = 4.17$$

$$W = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ ساعت}$$

همان طور که مشاهده می‌شود $W_0 + 1/W$ ، $W = W_0 + 1/W$ است.

کابع توزیع مدت زمان انتظار مشتری در مدل ۱ $M/M/1$ چنانچه علاوه بر میانگین زمان انتظار مشتری در سیستم باصف، که از روابط‌های (۲۱.۶) و (۲۲.۶) بدست می‌آید، اطلاعات پیشتری مورد تجزیه باشد، باید نوع توزیع این متغیرهای تصادفی را با استفاده از قضیه زیر تعیین کرد.
قضیه ۱۰.۶ چنانچه T_0 و $T_0 - T_0$ به ترتیب معرف مدت زمان انتظار مشتری در میان میانگین زمان انتظار مشتری در مدل ۱ $M/M/1$ باشند، خواهیم داشت

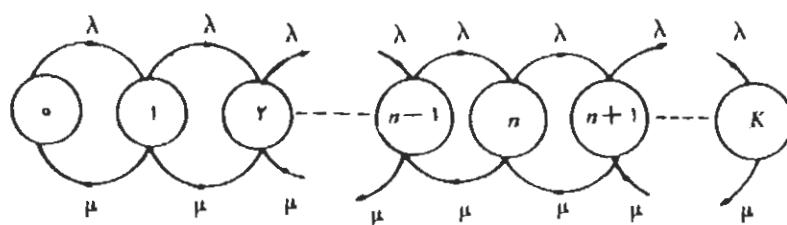
$$P(T_0 = 0) = \pi_0 = 1 - \rho \quad (23.6)$$

$$P(T_0 > x) = \rho e^{-\rho(1-\rho)x} \quad (24.6)$$

$$P(T_0 > x) = e^{-\rho(1-\rho)x} \quad (25.6)$$

اینها رابطه (۲۳.۶) واضح است. نحوه اثبات روابط (۲۴.۶) و (۲۵.۶) متأسفانه و فقط به اثبات آخرین رابطه می‌پرسد ازیم. فرض کنید که در لحظه ورود یک مشتری مشخص، تعداد مشتریها در سیستم N باشد. در این صورت، سه استفاده از روابط احتمال شرطی خواهیم داشت.

$$P(T_0 > x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(T_0 > x | N=n) P(N=n) \quad (26.6)$$



شکل ۵.۶ نمودار آهنگ مدل M/M/1/K

محاسبه آهنگ ورود مشتریان

در این مدل، آهنگ مراجعه مشتریها را با λ و آهنگ داد آنها را با λ نشان می‌دهیم. این دو کمیت با یکدیگر مقاومت هستند؛ زیرا، تمام مشتریهایی که مراجعه می‌کنند لزوماً وارد سیستم نمی‌شوند. درصدی از مشتریها به علت تکمیل ظرفیت از ورود به سیستم بازمی‌مانند، که این درصد برابر است با درصدی از زمان که سیستم دارای K مشتری است. به این ترتیب، از ورود $n+1$ درصد مراجعین جلوگیری به عمل می‌آید و فقط $(1 - \pi_n)$ درصد مراجعین وارد می‌شوند.

$$\lambda = \lambda(1 - \pi_n) \quad (23.6)$$

ضریب بهره‌وری ρ

در این مدل، ضریب بهره‌وری طبق تعریف برابر با $\frac{\lambda}{\mu} = \rho$ و طبق خاصیت این سیستم همواره کوچکتر از یک است. در این مدل $\frac{\lambda}{\mu} / \lambda$ می‌تواند مقداری بیش از یک داشته باشد و در عین حال سیستم پایدار بماند، زیرا تعداد مشتریهای داخل سیستم هرگز به ویناها نمی‌رسد و حداکثر تعداد آنها K خواهد بود.

محاسبه احتمالات حدی

طبق دایره (۱۲.۶)

$$C_n = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = r^n, & n \leq K \\ 0, & n > K \end{cases} \quad (24.6)$$

(در میارت فوق، (μ/λ) را با r نشان می‌دهیم نا از $(\mu/\lambda) = \rho$ متناظر گردد.)

$$P(T_0 = 0) = \pi_0 = 1 - \rho = \frac{1}{r}$$

$$P(T_0 > 1) = \frac{\rho}{r} e^{-r(1)} = \frac{\rho}{r} e^{-r} = 0.11$$

محاسبه احتمال طول مطلوب صد در مدل ۱

در بسیاری از سیستم‌ها این موضوع اهمیت دارد که طول صد از حد معینی مثلاً n تجاوز نکند. درصدی از اوقات که طول صد بیش از حد مطلوب باشد، از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} P(T_0 > n) &= P(\text{بردن } 1 + n \text{ مشتری در سیستم}) = P(n < \text{طول صد}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (1 - \rho) = \rho^{n+1} \end{aligned} \quad (25.6)$$

همان طور که مشاهده می‌شود، این احتمال به طور تصاعدی کاهش می‌یابد. مثال ۴.۶ در مثال ۱.۶، احتمال اینکه تعداد اعضای کتابخانه که متضرنند تا نوبت آنها بر مد بیش از ۵ نفر باشد، چقدر است؟

$$P(T_0 > 5) = \rho^6 = \left(\frac{5}{6}\right)^6$$

۴.۶ مدل $K/1/M/M$. سیستم با خطر فیت متناهی

این مدل از همنظر مثل مدل قلی است، به استثنای اینکه در آن ظرفیت سیستم متناهی و برابر با K است. به علت این محدودیت، پتانجه مجموعاً K مشتری در سیستم بماند، از ورود مشتریهای جدید جلوگیری می‌شود. در ضمن فرض بر این است که مشتریهایی که به علت نبودن جا وارد سیستم نمی‌شوند، مجدداً مراجعه نمی‌کنند.

در این سیستم داریم

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & n < K \\ 0, & n \geq K \end{cases} \quad (21.6)$$

$$\mu_n = \mu, \quad n = 1, 2, \dots, K \quad (22.6)$$

نمودار آهنگ این مدل در شکل ۴.۶ نشان داده شده است.

آن فرض نمی‌شود، در این مدل، بهارای تمام مقادیر μ ، آهنگ داده مشتری ثابت و برابر با λ است، آهنگ خدمت، هی هر خدمت دهنده μ فرض می‌شود، جنابجه نمداد مشتری داخل سیستم برابر با n باشد، دو حالت پیش می‌آید، بکی اینکه $m < n$ باشد، که در این صورت خدمت دهنده مشغول به کارند و آهنگ خروج مشتریها برابر با $m\mu$ است، دوم اینکه $n \geq m$ باشد، که در این حالت حداقل m خدمت دهنده کار می‌کنند و آهنگ خروج برابر با $m\mu$ است، پس به طور خلاصه،

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & n \leq m \\ m\mu, & m < n \end{cases} \quad (20.6)$$

نمودار آهنگ این مدل در شکل ۲۰.۶ نشان داده شده است.
بنابراین

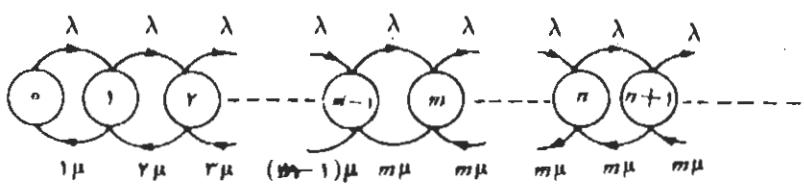
$$C_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_0 \mu_1 \dots \mu_n} = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}, & n < m \\ \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \frac{1}{m!} \frac{1}{m^{n-m}}, & n \geq m \end{cases} \quad (21.6)$$

در نتیجه

$$\pi_n = \left[1 + \sum_{n=1}^m \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{1}{n!} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^m \frac{1}{m!} \times \frac{1}{m^{n-m}} \right]^{-1}$$

پس از ساده شدن، رابطه فوق به شکل زیر خلاصه می‌شود.

$$\pi_n = \left[\sum_{n=1}^m \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{1}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^m}{m!} \frac{1}{(1-\rho)} \right]^{-1} \quad (22.6)$$

شکل ۲۰.۶ نمودار آهنگ مدل $M/M/m$

از رابطه (۱۲.۶) نتیجه می‌شود.

$$\pi_n = (1 + \sum_{n=1}^m C_n)^{-1} = \frac{1-r}{1-r^{k+1}} \quad (23.6)$$

به همین ترتیب، طبق رابطه (۱۲.۶)،

$$\pi_n = \frac{(1-r)r^n}{1-r^{k+1}} \quad (24.6)$$

در حالت خاصی که $r = 1$ باشد

$$\pi_n = \frac{1}{k+1} \quad (25.6)$$

محاسبه W_q و L_q و L

$$L = \sum_{n=0}^k n\pi_n = \frac{(1-r)r}{1-r^{k+1}} \sum_{n=0}^k nr^{n-1}$$

از طرف دیگر

$$\sum_{n=0}^k nr^{n-1} = \sum_{n=0}^k \frac{d(r^n)}{dr} = \frac{d}{dr} \sum_{n=0}^k r^n = \frac{d}{dr} \left(\frac{1-r^{k+1}}{1-r} \right) = \frac{-(k+1)r^{k+1}}{(1-r)^2}$$

$$L = \frac{r}{1-r} - \frac{(k+1)r^{k+1}}{(1-r)^2} \quad (26.6)$$

به همین ترتیب

$$L_q = L - (1 - \pi_n) = L - \frac{r(1-r^k)}{1-r^{k+1}} \quad (27.6)$$

برای محاسبه W_q و W ، از دو ابتدی لیتل استفاده می‌کنیم. باید توجه داشت که در این رابطه‌ها آهنگ ورود مشتری $\bar{\lambda}$ است (λ). بنابراین، با مشخص بودن L_q و L می‌توان W_q و W را نیز بدست آورد.

M/M/m مدلاگر مدل m خدمت دهنده دارد، از هزار طرفیت صفت و چشمیت مشتری هم محدودیتی برای

$$L = W + \left(W_0 + \frac{1}{\mu} \right) = L_0 + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$L = \frac{\pi_0}{m!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^m \frac{\rho}{(1-\rho)} + \frac{\lambda}{\mu}$$

محاسبه تابع توزیع مدت زمان انتظار در مدل $M/M/m$

در اینجا نیز T_0 را مدت زمان انتظار مشتری در صفحه L و T_m را مدت زمان انتظار مشتری در سیستم تعریف می‌کنیم. تابع توزیع T_m بر اساس قضیه زیر محاسبه می‌شود. تابع توزیع T_0 را نیز بروش مثابه می‌توان بدست آورد.

قضیه ۲.۶

$$P[T_0 = 0] = 1 - \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^m \frac{\pi_0}{(1-\rho)m!} \quad (28.6)$$

$$P[T_0 > t] = [1 - P(T_0 = 0)] e^{-(\mu - \lambda)t} \quad (29.6)$$

اثبات. ابتدا $P(T_0 = 0)$ را به دست می‌آوریم. $T_0 = 0$ به معنای این است که در موقع ورود مشتری مورد نظر، نه تنها صفحه شکیل نشده، بلکه حداقل یکی از خدمت‌دهندگان نیز بیکار است. به عبارت دیگر حداقل $1 - m$ مشتری در سیستم هستند. بنابراین،

$$P(T_0 = 0) = \sum_{n=0}^m \pi_n = \pi_0 \sum_{n=0}^m \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{1}{n!} \quad (50.6)$$

با استفاده از رابطه (۲۲.۶) خواهیم داشت.

$$\sum_{n=0}^m \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{1}{n!} = \frac{1}{\pi_0} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^m \frac{1}{m!} \cdot \frac{1}{1-\rho}$$

پس از جایگزینی عبارت فوق در رابطه (۵۰.۶)، رابطه (۲۸.۶) ثابت می‌شود.

برای اثبات رابطه (۲۹.۶)، از رابطه احتمال شرطی استفاده می‌کنیم. اگر جمعیت داخل سیستم را N فرض کنیم، مشتری مورد نظر در صورتی در صفحه منظر می‌ماند که در زمان ورود او حداقل m مشتری در سیستم باشد. بنابراین،

$$P(T_0 > t) = \sum_{n=m}^{\infty} P(T_0 > t | N=n) \pi_n \quad (51.6)$$

مدت زمان انتظار این مشتری (بـه فرض اینکه مشتری دیگر در لحظه ورود او در سیستم

که در آن $\mu/\lambda = \rho$ است، فرض می‌شود که $1 - \rho$ باشد، در غیر این صورت، سیستم به حالت پایدار نمی‌رسد. برای محاسبه π_n از رابطه (۱۲.۶) استفاده می‌کنیم.

$$\pi_n = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{\pi_0}{n!} & , n \leq m \\ \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^m \frac{\pi_0 m^{n-m}}{m!} & , n \geq m \end{cases} \quad (22.6)$$

حالهای خاص:

$$\pi_0 = \frac{1-\rho}{1+\rho} \quad M/M/2 \quad (22.6)$$

$$\pi_0 = \frac{1-\rho}{1+2\rho+12\rho^2} \quad M/M/3 \quad (25.6)$$

محاسبه L_0 و W_0 در مدل $M/M/m$

$$L_0 = \sum_{n=0}^m (n-m) \pi_n = \sum_{n=0}^m (n-m) \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{\pi_0}{m!} (m)^n \cdot$$

$$= \frac{\pi_0}{m!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^m \sum_{n=0}^m (n-m) (\rho)^{n-m}$$

با

$$L_0 = \frac{\pi_0}{m!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^m \cdot \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \quad (26.6)$$

در حالت خاص $M/M/2$:

$$L_0 = \frac{2\rho^2}{1-\rho^2} \quad (27.6)$$

برای محاسبه W_0 و L_0 از رابطه لیتل استفاده می‌شود.

$$W_0 = \frac{L_0}{\lambda}$$

$$W = W_0 + \frac{1}{\mu}$$



به چند تعمیر کار تیازداریم؟

حل: مدل صفت داین سیستم $M/M/1$ است. چون ورود مشتریها طبق نوزدیع بواسون است، لذا زمان بین دو ورود متغیر تصادفی نمایی با میانگین دو ساعت یعنی $1/\lambda = 2$ و یا 5 دقیقه است. هر بینحال به طور متوسط 2 ساعت در تعمیر گاه می‌ماند. یعنی، $\mu = 2$. از طرف دیگر

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{2}$$

در نتیجه 5 دقیقه $= \mu$. به عبارت دیگر تعمیر کارمی تواند در هر ساعت به طور متوسط به اندازه 5 دقیقه بینحال را تعمیر کند. اگر بخواهیم میانگین تعداد بینحالهای تعمیر نشده را تعیین کنیم، باید L_0 را محاسبه کنیم. اما می‌دانیم که

$$L_0 = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{(2)(5)^2}{(2)(25 - 5)} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

اگر بخواهیم مدت زمان انتظار کاهش باید، یعنی $5 \leq W \leq 20$ شود، باید تعداد خدمت‌دهنده‌ها را افزایش بدیم.

$$W = W_0 + \frac{1}{\mu} = \frac{L_0}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = \frac{L_0}{\lambda} + \frac{1}{20} \leq 20$$

با

$$L_0 \leq \frac{V}{12}$$

از طرف دیگر، طبق رابطه (۴۶.۶)،

$$L_0 = \frac{\pi_0}{m!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

که

$$\rho = \frac{0.5}{m(0.75)} = \frac{2}{3m}$$

و π_0 از رابطه (۴۲.۶) بدست می‌آید.

ابتدا $m=2$ را انتخاب می‌کنیم.

$$\pi_0 = (1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3})^{-1} = 0.5$$

باشد)، برای برا مدت زمانی است که طول می‌کند نا $(n-m+1)$ مشتری از سیستم خارج شوند، یعنی،

$$T_n = X_1 + X_2 + \dots + X_{n-m+1}$$

که X_i هارت از زمان بین خروج مشتریهای شماره $(i-1)$ و i است. X_i ها متغیرهای تصادفی نمایی با پارامتر $m\mu$ هستند، زیرا تمام خدمت‌دهنده‌گان مشغول‌اند و آنگک خدمت‌دهی هر کدام برایر با $m\mu$ است. بدین ترتیب، T_n دارای نابع توزیع الانگی با پارامترهای $(m\mu)$ و $(n-m+1)$ است.

در نتیجه

$$P(T_n > t | N=n) = \int_t^\infty m\mu e^{-m\mu y} \frac{(m\mu y)^{n-m}}{(n-m)!} dy$$

بس از جایگزینی رابطه فوق در (۵۱.۶) نتیجه می‌شود:

$$P(T_n > t) = \sum_{m=0}^{\infty} \pi_m \int_t^\infty m\mu e^{-m\mu y} \frac{(m\mu y)^{n-m}}{(n-m)!} dy \quad (52.6)$$

بس از قرار دادن مقدار π_m در رابطه (۴۳.۶) و تغییر محل انتگرال و مجموع، رابطه (۵۲.۶) به صورت زیر در می‌آید.

$$\begin{aligned} P(T_n > t) &= (m\mu) \frac{\pi_0}{m!} \int_t^\infty e^{-m\mu y} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m (m^{n-m}) \frac{(m\mu y)^{n-m}}{(n-m)!} dy \\ &= \frac{\mu \pi_0}{(m-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \int_t^\infty e^{-m\mu y} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(\lambda y)^{n-m}}{(n-m)!} dy \end{aligned}$$

اما می‌دانیم که

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{(\lambda y)^{n-m}}{(n-m)!} = e^{\lambda y},$$

وفضیله ثابت می‌شود.

مثال ۵.۶ به یک تعمیر گاه بینحال، به طور متوسط هر دو ساعت یک بار یک مشتری مراجعت می‌کند. ورود مشتریها طبق فرایند بواسون و مدت زمان تعمیر بینحال بین‌نمایی فرض می‌شود. فقط یک تعمیر کار وجود دارد

الف. اگر به طور متوسط هر بینحال به مدت 2 ساعت در تعمیر گاه می‌ماند، تعیین کنید که میانگین تعداد بینحالهایی که هر روز تعمیر شان شروع نشده، چقدر است؟

ب. اگر بخواهیم مدت زمان 2 ساعت فوق می‌باید، حداقل

$$\pi_r = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{1}{n!} + \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^m \frac{1}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} r^{n-m} \right]^{-1} \quad (56.6)$$

در حالت خاصی که $r = 1$ باشد، رابطه فوق به صورت زیر در می‌آید:

$$\pi_r = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{1}{n!} + \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^m \frac{1}{m!} (K-m+1) \right]^{-1} \quad (57.6)$$

برای محاسبه L_r از رابطه (۵۷.۶) استفاده می‌شود که در نتیجه:

$$L_r = \frac{\pi_r}{m!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^m \cdot \frac{r}{(1-r)} [(1-r^{K-m}) - (1-r)(K-m+1)r^{K-m}] \quad (58.6)$$

و بهمین ترتیب،

$$L = L_r + m - \pi_r \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{m-n}{n!} \quad (59.6)$$

و W_r نیز از داده‌ای لبق حاصل می‌شوند.

مدل ارلاگی ($M/M/m/m$)

حال، حالت خاصی را در نظر بگیرید که $K = m$ باشد. در چنین مدلی فرض می‌کیم که سیستم گنجایش هیچ صفر را ندارد و ظرفیت سیشم منحصر به عدد مشتریها می‌باشد. در این مدل فرض می‌کنیم که تعداد مشتریها می‌توانند تلفن، اگر m کانال ارتباطی باشد، در هر لحظه بهمین تعداد هم مشتریها می‌توانند تلفن برزنند. چنانچه در یک لحظه که تمام خطوط تلفن اشغال است، بلکه متفاوتی جدید تلفن برزند، نه تنها قادر به مکالمه نیست، بلکه حتی نوبت او هم محفوظ نخواهد بود. در چنین حالت خاصی،

$$\pi_r = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{1}{n!} \right)^{-1} \quad (60.6)$$

$$\pi_r = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^m \frac{1}{m!} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{1}{n!} \right]^{-1} \quad (61.6)$$

رابطه (۶۱.۶) به رابطه ارلاگی موسوم است. در این رابطه π_r معرف درصدی از زمان است که تمام خطوط تلفن اشغال هستند و مکالمه جدید امکانپذیر نیست. π_r می‌تواند هر کسی از معیارهای اصلی ارزیابی سیستم تلفن باشد.

$$L_r = \frac{\pi_r}{m!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^m \frac{1}{(1-\frac{\lambda}{\mu})^m} = \frac{1}{12}$$

در نتیجه کلا دو تعمیر کار کافی است.

مدل $M/M/m/K$

در این مدل فرض می‌شود که $K \leq m$ باشد. در نتیجه،

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & , n \leq K-1 \\ 0 & , n \geq K \end{cases} \quad (53.6)$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & , n \leq m \\ m\mu & , m \leq n \leq K \\ 0 & , K < n \end{cases} \quad (54.6)$$

بنابراین، طبق رابطه (۱۲.۶) خواهیم داشت.

$$C_n = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{1}{n!} & , n \leq m \\ \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^m \frac{1}{m!} \frac{1}{m^{n-m}} & , m \leq n \leq K \\ 0 & , K < n \end{cases} \quad (55.6)$$

همانطور که قبلاً در مدل $M/M/1/K$ گفته شد، آهنگ ورود مشتریان لزوماً λ نیست،

زیرا تعدادی از مشتریها که مراجعت می‌کنند به دلیل تکمیل ظرفیت، «داد» می‌بینند،

اگر آهنگ ورود مشتری را $\bar{\lambda}$ بنامیم، در اینجا نیز $(1 - \pi_r) \bar{\lambda} = \lambda$ است. در این مدل،

$\mu = \lambda / m$ همواره کوچکتر از یک است. ضمناً مقدار μ / λ ، که می‌تواند بزرگتر از یک باشد، را با m نشان می‌دهیم.

با استفاده از رابطه (۱۲.۶) نتیجه می‌شود.



عدد اکثر تعداد مشتریهایی که به سیستم مراجعه می‌کنند، برابر با عددی متفاہی، مثل (C) است. یکی از کاربردهای این مدل، برآنایر بیزی تعمیر و نگهداری است، اگر تعداد تعمیر کاران یک کارخانه را m و تعداد ماشینهای آن کارخانه که ممکن است خراب شوند را C فرض کنیم، با یک سیستم صفحه رودکار داریم، که می‌توان در آن ماشینها را مشتری و تعمیر کاران را خدمت دهنده تصور کرد. بدینهی است که در این مورد جمعیت مشتری بان متفاہی و برابر با C است. این سیستم را در صورتی می‌توان یک مدل نمایی با جمعیت متفاہی نامید، که هم مدت زمان تعمیر یک ماشین و هم مدت زمانی که طول می‌کشد تا یک ماشین خراب شود را نمایی فرض کنیم. در هر لحظه ماشینهای این توان بدو گروه تقسیم کرد. گروه اول، ماشینهایی که خراب شده‌اند یا تحت تعمیر یا منتظر تعمیر هستند. گروه دوم ماشینهایی که سالم هستند. ولی هر لحظه ممکن است خراب شوند.

مدت زمان سالم بودن هر ماشین، قبل از خراب شدن آن را متغیر تصادفی با توزیع نمایی و پارامتر λ فرض می‌کنیم. اگر تعداد ماشینهای خراب برابر با n باشد، مجموعاً $(C-n)$ ماشین، سالم هستند، که مشتری بهای بعدی سیستم محاسب می‌شوند. در این حالت، زمان ورود اولین مشتری، در واقع زمانی است که اولین ماشین سالم خراب می‌شود. بنابراین، مدت زمانی که طول می‌کشد تا اولین ماشین خراب شود، یک متغیر تصادفی، و برایر با حداقل $(C-n)$ متغیر تصادفی نمایی است. همان طور که می‌دانیم، چنین متغیر تصادفی دارای توزیع نمایی با پارامتر $\lambda = C-n$ است. بنابراین به ازای تمام مقادیر C توزیع نمایی با پارامتر $\lambda = C-n$ داشته‌اند.

$$\lambda_n = (C - n)\lambda \quad (\text{Eq. 5})$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & , \quad n \leq m \\ m\mu & , \quad m < n \leq C \\ 0 & , \quad C < n \end{cases} \quad (44.4)$$

$$C_n = \begin{cases} \frac{C!}{(C-n)!n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, & n \leq m \\ \frac{C!}{(C-n)!m!m^{n-m}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, & m \leq n \leq C \\ 0, & C < n \end{cases}$$

در این مدل فرض سراین است که از نظر تعداد خدمت‌دهندگان محدودیت وجود ندارد. می‌توان چنین نصوح رکرد که در چنین سیستمی هر لحظه‌که یک مشتری جدید وارد شود، یک خدمت‌دهنده نیاز به آن خدمت می‌شود. در این مدل به ازای تمام مقادیر $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ خدمت‌دهنده نیاز به آن خدمت می‌شود. در این مدل به ازای تمام مقادیر $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ است. برای تعیین λ_m باید در نظر داشت که اگر چه سیستم می‌تواند بینها یک خدمت‌دهنده داشته باشد، اما اگر m مشتری در سیستم باشند، فقط m خدمت‌دهنده نیز مشغول به کار هستند و در نتیجه

$$\mu_n = n\mu$$

ہنا بر این

$$C_s = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{1}{n!}$$

بهاین ترتیب،

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}} = e^{-\lambda/\mu} \quad (87.6)$$

$$\pi_n = C_n \pi_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} \cdot e^{-\lambda/\mu} \quad (44.6)$$

میانگین تعداد مشتریهای داخل سیستم (L) را نیز می‌توان معایسه کرد.

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n e^{-\lambda/\mu} \frac{1}{n!} = \frac{\lambda}{\mu} e^{-\lambda/\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!}$$

$$L = \frac{\lambda}{\mu} \quad (\text{पृष्ठ ५})$$

همان طور که مشاهده می شود، میانگین تعداد مشتریهای داخل سیستم در درازمدت متناسب با آهنگ و داد مشتری است و نسبت معکوس با آهنگ خدمت دهن دارد.

۱.۶ مدل $M/M/m/K$. مدل نمایی با جمعیت متناهی

در این مدل فرض می‌کنیم تعداد مشتریهای بالقوه میتواند متناهی است. به عبارت دیگر،

را ثابت و مستقل از تعداد مشتریهای داخل سیستم درصیف کردیم. در عمل، ممکن است آهنگ ددد مشتری یا آهنگ خدمت‌دهی، هستگی به طول مدت داشته باشد. مثلاً در مدل $M/M/m/C$ ، که فیلا مورد بررسی قرار گرفت، آهنگ ورود مشتری، λ ، هستگی به n یعنی تعداد مشتریهای داخل سیستم داشت.

نمونهای متعددی وجود دارد که آهنگ ورود مشتری و یا آهنگ خدمت متاثر از طول صفحه خواهد بود. مثلاً سیستمی را در نظر بگیرید که در آن عمل «امتناع» وجود دارد؛ بدین معنا که بعضی از مشتریها با مشاهده یک صفحه طولانی درسیتم، از ورود به آن امتناع می‌کنند. فرض کنید که λ معرف آهنگ مراجعة مشتریها باشد. آهنگ ورود به سیستم، لزوماً λ نیست و هرچه جمعبت مشتریهای داخل سیستم افزایش یابد، به تعداد کافی که امتناع می‌کند افزوده شود.

اگر λ معرف آهنگ ورود مشتری به سیستم در لحظه‌ای باشد که تعداد مشتریهای داخل سیستم n است، رابطه زیر بر قرار خواهد بود.

$$\lambda = b \lambda_0 \quad (71.6)$$

که b پارامتری است بین صفر و یک که نسبت به n تابع است، یعنی

$$0 < b_1 < b_2 < \dots < b_n \quad (72.6)$$

بعد این ترتیب، در صورتی که n مشتری درسیتم باشند، فقط درصدی از مراجعين، یعنی b_n وارد می‌شوند. با توجه به شرایط سیستم، b_n می‌تواند به شکل $(n+1)^{-1}$ یا $(n+1)^{-\alpha}$ باشد، که در آن α عددی مثبت است، یا $e^{-\alpha n}$ (با α مثبت) و نظایر آنها باشد.

مدل دیگری را نیز می‌توان نام برداشت که آهنگ ددد مشتریان به آن هستگی به طول صفحه دارد و آن حالتی است که بعضی از مشتریها انصراف خود را از ابتداد در صفحه اعلام می‌دارند. در چنین سیستمهایی، اگرچه مشتریها بایسی که مراججه می‌کنند، وارد سیستم هم می‌شوند، و به صفحه مطلع می‌کردن، بعضی از آنها منصرفی شوند و سیستم را ترک می‌کنند. مدت زمانی را که یک مشتری در صفحه می‌ماید، قبل از اینکه سیستم را ترک کند می‌توان متغیری تصادفی فرض کرد، که دارای توزیع نمایی با پارامتر γ است. چون انصراف مشتریها را مستقل از یکدیگر فرض می‌کنیم، مدت زمانی که طول می‌کشد تا اولین مشتری از ادامه توقف در صفحه منصرف شود، متغیری تصادفی و برابر با حداقل n مشتری تصادفی نمایی باشد که طول می‌کشد تا اولین مشتری منصرف شود، متغیر تصادفی نمایی با پارامتر γ است.

برای محاسبه μ در سیستمهای با انصراف، فرض کنید که در یک لحظه n مشتری در سیستم باشند، تغییر حالت سیستم از $n-1$ به n به دلایت صورت می‌گیرد، یا ارائه خدمت به یک مشتری تمام می‌شود و با یکی از مشتریها از ادامه توقف در صفحه منصرف می‌گردد. بنابراین، مثلاً در مدل $1/M/M/1$ ، آهنگ تغییر حالت از $n-1$ به n برای با

با

$$C_n = \begin{cases} \binom{C}{n} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n & n \leq m \\ \binom{C}{n} \frac{n!}{m!} \cdot m^{n-m} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n & m \leq n \leq C \end{cases} \quad (72.6)$$

و با استفاده از رابطه $\pi_n = \left[1 + \sum_{k=1}^C C_k \right]^{-1}$ ، می‌توان مقدار μ را محاسبه کرد.

$M/M/m/C$

محاسبه آهنگ ورود در مدل

طبق آنچه گفته شد، در این مدل λ معرف پس از متغیر تصادفی نمایی مربوط به عبوریک ماشین است، که مستقل از دیگر ماشینها فرض شده است. به هارت دیگر، $1/\lambda$ میانگین مدت زمانی است که طول می‌کشد تا هر یک مشتری مشخص وارد سیستم شود. بدین ترتیب، آهنگ ورود مشتری هستگی به تعداد مشتریهای دارد که خارج از سیستم هستند. اگر λ را آهنگ ورود مشتری بنامیم، با استفاده از رابطه (65.6) خواهیم داشت.

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^C \lambda_n \cdot \pi_n = \sum_{n=0}^C (C-n) \lambda \pi_n = \lambda C \sum_{n=0}^C \pi_n - \lambda \sum_{n=0}^C n \pi_n$$

$$\text{در نتیجه، با استفاده از این خاصیت که } 1 = \sum_{n=0}^C \pi_n \text{ و } L = \sum_{n=0}^C n \pi_n \text{، خواهیم داشت}$$

$$\bar{\lambda} = \lambda(C-L) \quad (68.6)$$

به این ترتیب، در ابسطهای لیست نیز باید از $\bar{\lambda}$ به عنوان آهنگ ورود مشتری استفاده کرد، یعنی

$$W = \frac{L}{\bar{\lambda}} = \frac{L}{\lambda(C-L)} \quad (69.6)$$

$$W_n = \frac{L_n}{\bar{\lambda}} = \frac{L_n}{\lambda(C-L)} \quad (70.6)$$

۶۰ مدل‌های نمایی با آهنگ ورود یا آهنگ خدمت‌دهی متغیر در اکثر مدل‌های فبلی، آهنگ ورود مشتری و همچنین آهنگ خدمت‌دهی یک خدمت دهنده

(۷۶.۴)

+ μ است.

در بعضی از سیستمها، آهنگ خدمت دهنی نیز می‌تواند با افزایش طول حفظ، افزایش پاکیزه. مثلاً در یک سیستم معکن است چند نوع آهنگ خدمت دهنی وجود داشته باشد. در صورتی که تعداد مشتریهای داخل سیستم از حدی معین کمتر باشد، آهنگ خدمت دهنی لام فرض می‌شود. با افزایش جمعیت سیستم، خدمت دهنده با استفاده از ابزار بهتر آهنگ خدمت دهنی را مثلاً به افزایش جمعیت سیستم، خدمت دهنده با استفاده از ابزار بهتر آهنگ خدمت دهنی نیز مجدداً بیشتر می‌شود. در بعضی از سیستمها تغییر آهنگ خدمت را بصورت ذیر می‌توان نشان داد:

$$\mu = \alpha_1 \mu_1 \quad (76.6)$$

که μ و μ_1 به ترتیب آهنگ خدمت به فرض وجود n مشتری در سیستم است و α_1 عددی بزرگتر از یک فرض می‌شود. در مواردی α_1 را می‌توان n فرض کرد که n عددی ثابت است.

در تمام مدل‌های فوق، تعداد خدمت دهنگان نیز مؤثر است. مثلاً در مدل $M/M/m$ ، که انتخاب مشتریها نیز در آن امکان‌پذیر است، پارامتر m در رابطه (۷۶.۶) خلی بیشتر از مدل $1/M$ است، زیرا مشتری خارج قسمت تعداد مشتریهای داخل سیستم بر تعداد خدمت دهنگان را مدنظر قرار می‌دهد.

۱۵.۶ دوره متفول بودن و بیکاری سیستم در مدل $1/M/M/1$

همانطور که در فصل پنجم آنکه، هر سیستم صفت بتناوب دارد، های بیکاری دارد را طی می‌کند. بر اساس قرارداد، p_n معرف درصدی از اوقات است که، در درازمدت، سیستم کار می‌کند و مقدار این کیفیت از رابطه (۷۶.۵) بدست می‌آید.

در مورد مدل $1/M/M/1$ درصد بیکاری سیستم π و درصد متفول بودن سیستم $\pi - 1 = \mu$ است. مدت زمان بیکاری، فاصله بین زمان خالی شدن سیستم تا زمان ددد مشتری بددی است. با توجه به خاصیت بدون حافظه بدون توزیع نمایی، مدت زمان بیکاری متغیری است تصادفی با توزیع نمایی و پارامتر λ ، و میانگین آن عبارت است از:

$$E(I) = \frac{1}{\lambda} \quad (76.6)$$

با استفاده از رابطه‌های (۷۶.۵) و (۷۶.۶) و همچنین $\pi - 1 = p_n$ نتیجه می‌شود که

$$E(B) = \frac{1 - \pi}{\pi} \cdot \frac{1}{\lambda}$$

با استفاده از رابطه (۷۶.۶)،

$$E(B) = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad (75.6)$$

اگر $N(B)$ معرف تعداد مشتریانی باشد که در یک دوره متفول بودن سیستم خدمت دیافت می‌کنند،

$$E(B) = E[N(B)] \cdot \frac{1}{\mu} \quad \text{یا}$$

$$E[N(B)] = \frac{\mu}{\mu - \lambda} = \frac{1}{1 - \rho} \quad (76.6)$$

۱۱.۶ دوره گذرا در مدل‌های نمایی

در این قسمت تنها به چارچوب روابط مربوط به دوره گذرا می‌پردازیم. قضیه زیر چنین چارچوبی را ارائه می‌کند. یکی از مباحثی که در مرور دوره گذرا مطرح می‌شود، چگونگی حل معادلات دیفرانسیل حاصل از قضیه زیر است، که خارج از بحث این کتاب است.

قضیه. در هر فرایند تولد و مرگ، احتمال وجود n مشتری در سیستم، در لحظه t ، از دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر بدست می‌آید:

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = -\lambda_n p_n(t) + \mu_n p_{n-1}(t) \quad (77.6)$$

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = -(\lambda_n + \mu_n)p_n(t) + \lambda_{n-1}p_{n-1}(t)\mu_{n+1}p_{n+1}(t), n \geq 1 \quad (78.6)$$

اثبات. بر حسب تعریف

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_n(t + \Delta t) - p_n(t)}{\Delta t}$$

از طرف دیگر

$$p_n(t + \Delta t) = P[N(t + \Delta t) = n] = \sum_{i=0}^{\infty} P[N(t + \Delta t) = i]$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} [N(t) = i] P[N(t) = i]$$

دستگاه معادلات مر بوط به صورت مثله است.

$$\begin{aligned} \frac{dp_n(t)}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_n(t + \Delta t) - p_n(t)}{\Delta t} \\ &= -(\lambda_n + \mu_n)p_n(t) + \lambda_{n-1}p_{n-1}(t) + \mu_{n+1}p_{n+1}(t) \end{aligned}$$

حالات خاص: فرایند زولد خالص

اگر فرض کیم، به ازای $\dots, 3, 2, 1, n = 0$ $\mu_n = \mu$ است، یعنی فقط تولد اتفاقی افتد، دستگاه معادلات دیفرانسیل به صورت زیر درمی‌آید. به ازای تمام مقادیر n, μ, λ فرض می‌شود.

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = -\lambda_n p_n(t)$$

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = -\lambda_n p_n(t) + \lambda_{n-1}p_{n-1}(t)$$

حل این معادلات به جواب زیر منجر می‌شود.

$$p_n(t) = P[N(t) = n] = e^{-\lambda_n t} \frac{(\lambda_n)^n}{n!}$$

که معرف بک فرایند هوسون است، که البته این نتیجه از قبل هم قابل پیش‌بینی بود.

محاسبه رابطه‌های صفت دوره پایداری با استفاده از رابطه‌های دوره گلبرگ اگر سیستم به دوره پایدار بررسد، رابطه $\pi_n = \lim_{t \rightarrow \infty} p_n(t)$ به ازای تمام مقادیر n وجود خواهد داشت و مقدار π_n نیز مستقل از شرایط شروع کار می‌شود، ثابت خواهد بود. درنتیجه،

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dp_n(t)}{dt} = \frac{d\pi_n}{dt} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dp_n(t)}{dt} = \frac{d\pi_n}{dt} = 0$$

به این ترتیب معادلات دیفرانسیل قضیه فوق در حد به صورت زیر دومی آید.

$$\lambda\pi_n = \mu\pi_n$$

اما طبق فرضهای ۱ و ۲ فرایند تولد و مرگ داریم:

$$\begin{aligned} P[N(t + \Delta t) = 0 | N(t) = 1] &= P[(t, t + \Delta t) | N(t) = 1] = \mu\Delta t + o(\Delta t) \\ P[N(t + \Delta t) = 1 | N(t) = 0] &= P[\Delta t | N(t) = 0] = 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t) \end{aligned}$$

و به ازای $t \geq 0$

$$P[N(t + \Delta t) = 0 | N(t) = i] = P[\Delta t | N(t) = i] = o(\Delta t)$$

$$P_n(t + \Delta t) = [1 - \lambda_n\Delta t + o(\Delta t)]P_n(t) + [\mu_n\Delta t + o(\Delta t)]P_{n-1}(t) + o(\Delta t)$$

درنتیجه، این رابطه را می‌توان به صورت زیر نوش特 که در حد، همان اولین معادله دیفرانسیل مورد نظر است.

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_n(t + \Delta t) - p_n(t)}{\Delta t} = -\lambda_n p_n(t) + \mu_{n-1} p_{n-1}(t)$$

از طرف دیگر، به ازای $n \geq 1$

$$\begin{aligned} P_n(t + \Delta t) &= \sum_{i=0}^{\infty} P[N(t + \Delta t) = i | N(t) = i]P[N(t) = i] \\ &= P[N(t + \Delta t) = n | N(t) = n-1]p_{n-1}(t) + P[N(t + \Delta t) \\ &= n | N(t) = n] + P[N(t + \Delta t) = n+1 | N(t) = n+1]p_{n+1}(t) \\ &\quad + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq n-1, n+1}}^{\infty} P[N(t + \Delta t) = i | N(t) = i]p_i(t) \end{aligned}$$

مجدداً طبق فرضهای ۱ و ۲ فرایند تولد و مرگ داریم:

$$P[N(t + \Delta t) = n | N(t) = n-1] = \lambda_{n-1}\Delta t + o(\Delta t)$$

$$P[N(t + \Delta t) = n | N(t) = n] = 1 - (\lambda_n + \mu_n)\Delta t + o(\Delta t)$$

$$P[N(t + \Delta t) = n | N(t) = n+1] = \mu_{n+1}\Delta t + o(\Delta t)$$

درنتیجه می‌توان رابطه فوق را به صورت زیر نوشت وحد آن را به دست آورد، که همان



۹۵

۴۳. مسئله شماره ۵ فصل سوم را در نظر نگیرید. فرض می کنیم که در این چاپخانه سه ماشین فتوکپی مشابه وجود داشته باشد. با هر ماشین می توان به طور متوسط ۱۸ جزو نواع الف یا ۶ جزو نواع ب را در ساعت تکثیر کرد. میاست چاپخانه این است که جزو های نوع الف را با ماشین شماره ۱ و جزو های نوع ب با ماشین های شماره ۲ و ۳ تکثیر شوند.

الف. جزو های نوع الف و ب به طور متوسط چه مدت در چاپخانه می مانند؟
ب. احتمال اینکه تکثیر جزوه نوع الف یا ب بلا فاصله پس از رسیدن به چاپخانه انجام شود، حدود است؟

ج. فرض کنید چنانچه نمداد جزو و های نسخه الف در چاپخانه به مه عدد برسد. شخصی برای کمک کردن به مسئول ماشین فرستاده می شود، که در این صورت می توان هرساعت به جای ۱۰ جزو ۲۵ جزو را به طور مستمر تکثیر کرد. نمودار آهنتگ این مدل را در متن کنید و با استفاده از آن به سؤال پند الف مجدداً پاسخ دهید.

۵. در یک سیستم نمایی آهنگ ورود و خروج مشتبهها به شرح زیر است.

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & , n \leq r \\ r\lambda & , n > r \end{cases}, \mu_n = 1^o, n \geq 1$$

احتمال اینکه سیستم خالی باشد، چیست؟ تحت چه شرایطی سیستم به حالت یابیدار می‌رسد؟
این سیستم را چگونه تغییر می‌کنید؟

۶. در مدل $1/M/M$ ، اختلال اینکه مدت زمان انتظار یک مشتری در سیستم، بیش از مدت زمان انتظار مشتری دیگر نباشد، حداقل است؟

۷. اتومبیلها علی فرایند پواسون با میانگین ۱۵ اتومبیل در ساعت وارد یک مخازن تهییض روغن می‌شوند، که فقط یک نفر در آنجا کارمی‌کند. مدت زمان تهییض روغن، متغیری تصادفی با توزیع نمایی است. به طور متوسط می‌توان روغن ۷ اتومبیل را در ساعت تهییض کرد. فضای موجود فقط اجازه توقف سه اتومبیل را می‌دهد (که شامل اتومبیلی که در حال تهییض روغن است نیز می‌شود).

الف. به طور متواتر در هر لحظه چند اتومبیل در این مغازه وجود دارد؟

ب. چند درصد صاحبان اتومبیلها به علت محدودیت جا از تعبیض روند دراین ممتازه منصرف می‌شوند؟

۸. مثلاً شماره ۱۲ فصل سوم را در نظر بگیرید. بدست احمد هرگز یک کتاب را همچنانی نخواهد

الف. احتمال اینکه پس از مرار اجمعه یک مشتری، ساخت مبل او بلایا فاصله شروع شود، چیست؟
احتمال اینکه یک مشتری پیش از هشت هفته معطل شود تا مبل خود را دریافت کند، چیست؟

$$(\lambda_s + \mu_s)\pi_s = \lambda_{s-1}\pi_{s-1} + \mu_{s+1}\pi_{s+1}$$

اهن رابطه‌ها، همان روابط (۶.۶) و (۸.۶) است، که قبلاً با استفاده از معاذله تعدادی به دست آمده بودند و رابطه (۱۱.۶) نیز از آنها نتیجه گیری شده بود.

مسالی

۹۰ در تعمیر گاهی که دارای یک تعمیر کار است، ماشینها طبق فرایند پواسون برای تعمیر به طور متوسط هر روز ۲ ماشین به تعمیر گاه وارد می‌شوند. مدت زمان تعمیر نمایی با میانگین ۳/۱ روز فرض می‌شود.

الف. بمطور متوسط هر ماشین چه مدت در تعمیر گاه است؟

ب، احتمال اینکه در یک لحظه بیش از ۵ ماشین در تعمیر گاه باشد، چیست؟

۳- زمان بین دو و دو و متوالی مراجعت یک تلفن عمومی، نمایی با میانگین ۱۵ دقیقه، و مدت زمان هر تلفن نیز نمایی با میانگین ۳ دقیقه است.

الف. احتمال اینکه کسی برای تلفن زدن مر اجمعه کند و مجبور شود که صبر کند، چقدر است؟
ب. به طور متوسط، در هر لحظه، چند نفر منتظر هستند که تلفن بزنند؟

ج. اختیال اینکه مدت زمان تلفن یکسی از مراجعین بیش از ۱۲ دقیقه طول بگذارد، چقدر است؟

د. اختیال اینکه مدت زمان انتظار یکسی از مراجعین در صرف بیش از ۱۲ دقیقه طول بگذارد، چقدر است؟

۵. پدر چه درصدی از زمان، این تلفن مشغول نیست؟
و. به صد دلایل تعداد مراجعتین اضافه شده است، به طوری که میانگین انتظار هر مشتری در صف ۳۴۰ دقیقه رسیده است. به طور متوسط، هر چند دقیقه‌ای یک نفر برای تلفن زدن مراجعت می‌کند.

۳۰ در پل کارگاه، کارهای مغارشی بر اساس فرآیند پواسون با میانگین ۲۵ قطعه در ساعت می‌رسد. مدت زمان لازم برای ساخت هر قطعه، بر اساس توزیع نمایی است و به طور متوسط در هر ساعت ۳۵ قطعه ساخته می‌شود.

الف. احتمال اینکه در بک لحظه کارگاه فاقد کارسفارشی باشد، چقدر است؟

ب. میانگین تعداد کارهای سفارشی که منتظر هستند، چند عدد است؟

ج. اختیال اینکه یک کار بیش از ۲۰ دقیقه در صفحه نمایند، چقدر است؟

د. احتمال اینکه در یک لحظه ۸ تا ۱۵ کار در صفت منتظر بمانند، چقدر است؟

۶. اگر تعداد کارهای سفارشی ۲۰ درصد افزایش یابد، میانگین تعداد کارهای انجام شده به تغیری می‌کند؟

۹. اکرس هفت کاره ۲۵۰ درصد افزایش باشد، میانگین شدад کارهای انجام شده چه نسبتی
نیز است؟

می‌کند. مدت زمان انتظار هر مشتری چقدر است؟ اگر هر دو کارمند بانک، هم کارهای دریافت و هم پرداخت را انجام دهند، میانگین مدت زمان انتظار هر مشتری چقدر خواهد بود؟ ۱۳ در مرکز اطلاعات یک اداره، دو نفر مأمور با کمک سخنگفتار تلفن به سوالات مراجعن پاسخ می‌گویند. سؤال کنندگان بر اساس فرایند پرسون تلفن می‌زنند (به طور متوسط هر ساعت ۱۵ نفر) مدت زمان لازم برای پاسخ، نماین با متوسط ۵ دقیقه فرض می‌شود. اگر هر دو مأمور مشغول باشند و نفر سومی تلفن بزند، در این صورت این شخص پشت خط مسوم منتظر می‌ماند تا نوبت به او برسد. اما چنانچه کسی تلفن بزند و هر سخنگفتار شغال باشد، سؤال کننده اجباراً منصرف می‌شود (یا بعداً تلفن می‌زنند که در این صورت حقی برای نوبت تلفن قبلي خود را خواهد داشت)

الف. این مسئله با چه مدلی تطبیق می‌کند. نمودار آهنگ آن را در سه کنید.

ب. اختلال اینکه کسی تلفن بزند و بدعلت اشغال بودن هر سخنگفتار منصرف شود، چیست؟
ج. اختلال اینکه کسی تلفن بزند و بخلافه به ممتازش پاسخ داده شود، چیست؟
د. اشغال اینکه کسی تلفن بزند و برای دریافت پاسخ مجبور شود پشت خط صبر کند، چیست؟ میانگین مدت زمان انتظار او در این حالت چقدر است؟

۱۵. درود هوایها به فرودگاه طبق فرایند پرسون با میانگین ۱۸ هواپیما در ساعت است. مدت زمان استفاده از باند فرودگاه برای هر هواپیما بر اساس توزیع نماین با میانگین ۵ دقیقه است. اگر بخواهیم به اختلال میش از ۱۵ درصد هیچ هواپیماهی منتظر نماند چند باند مورد نیاز است؟

۱۶. در یک فروشگاه که فقط یک صندوقدار دارد، مشتریها بر اساس فرایند پرسون مرآجه می‌کنند. (بمیانگین ۱۵ نفر در ساعت). مدت زمانی که صندوقدار صرف هر مشتری می‌کند، متغیری تصادفی با توزیع نماین است. اگر فقط یک نفر مشتری در صندوق باشد، میانگین این متغیر تصادفی ۵ را در ۴ دقیقه خواهد بود، اما چنانچه نعداد مشتری بیش از یک نفر باشد، یک نفر دیگر به صندوقدار کمک می‌کند و این زمان به ۳ دقیقه کاهش می‌یابد.

الف. نمودار آهنگ این مدل را رسم کنید و معادلات تعادلی را بنویسید.
ب. تابع توزیع تعداد مشتریها را در صندوق به دست آورید.
ج. میانگین مدت زمان انتظار هر مشتری را در صورت محاسبه کنید.

۱۷. در یک فروشگاه مرآجه مشتریها بر اساس فرایند پرسون است (به طور متوسط هر ساعت ۱۲ مشتری). مدت زمان خرید نماین با میانگین ۴ دقیقه و فروشگاه دارای یک فروشنده است.

الف. میانگین مدت زمان توقف هر مشتری در فروشگاه را به دست آورید.
ب. اختلال اینکه حداقل سه مشتری در سیستم باشد، چیست؟
ج. حال فرض کنید که اگر نعداد مشتری در فروشگاه به بیش از دو (سه یا بیشتر) برسد، دو

ب. فرض کنید مدیر بست کارگاه تصمیم گرفته است در هر لحظه بیش از K کار انجام نشه را قبول نکند. K را مطور محاسبه کنید که اولاً در حد میکاری به بیش از یک سوم اوقات نمردم و ثانیاً به مطور متوسط بیش از دونار انجام نشه در کارگاه باشد. با این تصمیم، کارگاه در سال (۵۲ هفته) به طور متوسط چند کار قبول می‌کند؟ چند در حد مشتریهای خود را از دست می‌دهد؟

۹. اتومبیلها بر اساس فرایند پرسون وارد یک تعمیرگاه می‌شوند. متوسط زمان بین دو ورود نیم ساعت است. مدت زمان تعمیر، نماین با میانگین ۲۲ دقیقه فرض می‌شود. اگر اتومبیل وارد شود و سایر محروم تعمیرگاه برش باشد، از قبول این اتومبیل خودداری می‌شود. قیاسی محوطه تعمیر گاه باید گنجایش چند اتومبیل را داشته باشد تا بتوان حداقل ۵۰ درصد اتومبیلهای را که مرآجه می‌کنند قبول کرد؟

۱۰. برای تلفنهای راه دور، متفاصلیان به یک شعبه مخابرات، که دارای امکانات برای دو مکالمه است، مرآجه می‌کنند. در شلوغترین ساعت روز به طور متوسط ۱۵ تقاضای مکالمه در ساعت وجود دارد و فاصله بین دو نفر مرآجه کننده متغیر تصادفی با توزیع نماین است. مدت زمان هر مکالمه نیز نماین با میانگین ۵ دقیقه است.

الف. اختلال ایسکه کسی مرآجه کند و بتواند بلا فاصله تلفن بزند، چقدر است?
ب. مدت زمان انتظار هر مشتری در صورت پذیرفتن چقدر است؟

۱۱. کارخانهای دارای ۱۲ ماشین مشابه است. کارهایی که ارجاع می‌شود، بر مبنای فرایند پرسون با میانگین ۱۸ کار در ساعت است. متوسط نسخه تولید به ازای هر ماشین، ۵ کار در ساعت است و مدت زمان انجام آنها نیز نماین فرض می‌شود

الف. میانگین تعداد ماشینهای بیکار چقدر است؟

ب. تابع توزیع تعداد کارهایی که منتظر می‌مانند را به دست آورید.

۱۲. در یک دفتر سعدمنشی کار می‌کنند. کارهایی که به این مشیها ارجاع می‌شود، طبق فرایند پرسون است. در هشت ساعت کار این مشیها به طور متوسط ۲۵ کار به آنها ارجاع می‌شود. مدنی که یک مشی برای هر کار باید صرف کند، دارای توزیع نماین با میانگین ۵ دقیقه است.

الف. درجه درصدی از زمان همه مشیها مشغول اند؟

ب. درجه درصدی از زمان هر مشی مشغول است؟

ج. از زمان ارجاع یک کار، نا اتمام آن به طور متوسط چقدر طول می‌کشد؟

۱۳. در یک بانک، دریافت توسط یک نفر و پرداخت توسط شخص دیگری انجام می‌شود. متوسط مدت دریافت پرداخت مربوط به هر مشتری ۴ دقیقه است و این مدت متغیر تصادفی با توزیع نماین فرض می‌شود. ورود مشتریها برای پرداخت و دریافت طبق فرایند پرسون است. به طور متوسط هر ساعت ۶ نفر برای پرداخت و ۱۲ نفر برای دریافت مرآجه

ب، میانگین مدت زمانی که بک ماشین منتظر تعمیر کار می‌ماند، چقدر است؟
ج. اگر این دو تعمیر کار باهم کار کنند و در آن واحد فقط یک ماشین را تعمیر کنند، مدت زمان تعمیر به ۲۵ دقیقه کاهش می‌یابد. آیا این نتیجه کار بهتر است؟ متن در اینجا از سیستم صفحی با یک خدمت دهنده را در نظر نگیرید. اگر مدت زمان انتظار بک مشتری در صفح زیاد طول بکشد، احتمالاً از دریافت خدمت منصرف و از صفح و سیستم خارج می‌شود. مدت زمانی که هر مشتری، قبل از منصرف شدن، در صفح می‌گذراند، متغیری تصادفی می‌شود. مدت زمانی با توزیع نمایی و پارامتر μ است. نمودار آهنگ را در این مدل دس کنید. اختصار اینکه در یک لحظه سیستم خالی باشد، چقدر است؟

۲۵. در یک کار گاه ۳ ماشین و دو تعمیر کار وجود دارد. مدت زمانی که ماشین کار می‌کند (از از خراب شدن) متغیر تصادفی نمایی با میانگین ۱۵ ساعت و مدت زمان تعمیر نزد نمایی با میانگین ۸ ساعت است. به طور متوسط در هر لحظه چند ماشین خراب است؟ درجه در صفحی از اوقات، هر دو تعمیر کار مشغول کار هستند؟ نمودار آهنگ این مسئله را رسم کنید و ماتریس آهنگ کدار را بنویسید.

۲۶. در یک تعمیر گاه، اتومبیلها بر اساس فرایند پواسون مراجمه می‌کنند. زمان بین دو ورود اتومبیلها، نمایی با میانگین ۴۵ دقیقه فرض می‌شود. مدت زمان تعمیر نیز، نمایی با میانگین ۳۵ دقیقه است اگر هر اتومبیل به مساحتی حدود ۵ متر مربع نیازداشته باشد، تعیین کسند مساحت محوطه پارکینگ اتومبیلها چقدر باید باشد تا با اختصار ۹۰ درصد، هر اتومبیل که به تعمیر گاه مراجمه می‌کند بتواند در این محوطه پارک کند و مجبور نباشد در خیابان منتظر بماند تا تعمیر شروع شود.

۲۷. تعمیر کاری مسازل ۵ ماشین است. مدت زمانی که هر ماشین بدون خراب شدن می‌تواند کار کنند، متغیری تصادفی با توزیع نمایی و با میانگین ۲ ساعت است. مدت زمان تعمیر هر ماشین نیز دارای توزیع نمایی است. این تعمیر کار می‌تواند به طور متوسط ۳ ماشین را در ساعت تعمیر کند.

الف. اختصار اینکه همه ماشینها مشغول کار باشند، چقدر است؟

ب. میانگین تعداد ماشینهایی که منتظر تعمیر هستند، چقدر است؟

ج. اگر این تعمیر کار مستولیت ۴ ماشین را قبول کند، به مطالعات پنهانی «الف» و «ب» مجدداً پاسخ دهدید.

۲۸. تنها متخصص یک تعمیر گاه ۸۵ درصد اوقات مشغول به کار و ۲۵ درصد اوقات به علت نبودن کار بیکار است. ماشینهای طبق فرایند پواسون، با آهنگ روزانه ۲ ماشین برای تعمیر، می‌رسد. مدت زمان تعمیر یک ماشین نمایی فرض می‌شود. دستمزد تعمیر کار و سایر هزینه‌های تعمیر گاه روزانه ۵۵ تومان است. اگر ماشینی که برای تعمیر به تعمیر گاه هر پنهانی تعداد ماشینهای خراب چقدر است؟

فروشنده مشغول به کار می‌شوند و اگر تعداد به بیش از جهار برسد، بهر فروشنده یک دستیار داده می‌شود، به طوری که مدت زمان خلعت به ۳ دقیقه کاهش می‌یابد. نمودار آهنگ را رسم کنید.

د. درینجا، میانگین مدت زمان توقف هر مشتری در فروشگاه را به دست آورید.

۱۸. با استفاده از نتایج $M/M/m/K$ ، رابطه π را برای حالت m/M تعیین کنید

۱۹. رابطه (75.6) را مستقیماً بر اساس تعریف B به دست آورید.

۲۰. رابطه‌های (72.6) ، (75.6) و (76.6) را برای $M/M/2$ نیز به دست آورید.

۲۱. یک سیستم صفح با ۵ خدمت دهنده را در نظر بگیرید. یک مشتری وارد می‌شود و ملاحظه می‌کند که ۱۵ نفر در صفح هستند. مدت زمان خدمت توسعه هر خدمت دهنده، نمایی با میانگین ۱۵ دقیقه فرض می‌شود.

الف. میانگین مدت زمانی را که طول می‌کشد تا اولین مشتری خارج شود به دست آورید.

ب. میانگین مدت زمانی را که این مشتری در صفح می‌گذراند به دست آورید.

ج. میانگین مدت زمانی را که طول می‌کشد تا این مشتری از میهمیت خارج شود به دست آورید.

د. اگر بعد از ورود این مشتری از ورود مشتری‌ها بعدی جلو گیری به عمل آید، میانگین مدت زمانی که طول می‌کشد تا سیستم خالی شود، چقدر است؟

۲۲. شرکتی می‌تواند برای انجام کارهای کامپیوتراز خود، بایکی از دو مرکز «الف» یا «ب» فرازداد بیند. هر مرکز از تعدادی عناصر مختلف تشکیل شده است. تعداد عناصر یک مرکز که خراب می‌شوند، طبق فرایند پواسون و با آهنگ a_1 و a_2 در هر ساعت (به ترتیب هر آی هر اکثر «الف» و «ب») است. تعمیر هر عنصری که خراب شود، بلاعده توسعه یک تعمیر کار جداگانه آغاز می‌گردد. تعداد این تعمیر کاران در حدی است که هر گز هیچ عنصری منتظر تعمیر کار نمی‌ماند. مدت زمان تعمیر هر عنصر، نمایی و با میانگین b_1 و b_2 ساعت (به ترتیب برای هر اکثر «الف» و «ب») فرض می‌شود. چنانچه حتی یک عنصر هر مرکز خراب باشد، ادامه کار متوقف می‌شود.

الف. در چند درصد اوقات، هر مرکز کار می‌کند؟

ب. چنانچه خواست توقف هر ساعت کار (هر یکی هر ساعت مرکز «الف» و «ب» به ترتیب ۵۰٪ باشد، در این صورت با کلام مرکز باید فرازداد بست؟

۲۳. برای تعمیر ۱۰ ماشین، ۲ نفر تعمیر کار تعیین شده‌اند. مدت زمان کار کردن هر ماشین، قبل از خراب شدن، متغیری تصادفی با توزیع نمایی و میانگین ۵ ساعت است. میانگین مدت زمان تعمیر، می‌رسد. که طبق توزیع نمایی است، ۲۵ دقیقه فرض می‌شود.

الف. میانگین تعداد ماشینهای خراب چقدر است؟

و برابر با λ است. مدت زمانی که بک قطعه در ایستگاه‌های اول و دوم می‌گذراند، دارای توزیع نمایی با پارامترهای بتر تیپ λ_1 و λ_2 است. مواد اولیه ورودی ایستگاه اول به طور نامتناهی موجود است و محدودیتی هم برای اینبار کردن خروجی ایستگاه دوم وجود ندارد. ولی چنانچه اینبار بین دو ایستگاه پرسود، تولید در ایستگاه اول هم متوقف می‌شود. اگر با تعریف حالت مناسب، این مدل را به شکل يك زنجیره مارکوف نشان دهد.

ب. این مدل با کدام مدل فرایند تولید و مرگ تطبیق می‌کند؟

ج. چهارصدی از اوقات تولید در هر کدام از ایستگاهها متوقف می‌شود؟

۳۳. در يك مدل $M/M/1$ ، چنانچه λ و μ دو برابر شوند (به طور جداگانه و همچنین به طور همزمان)، معیارهای ارزیابی چه تغییری می‌کند؟

۳۴. در يك مرکز آموزش کامپیوتر، دونفر مردمی و پنج نفر دانشجو کار می‌کنند. دانشجویان بر نامه‌های خود را می‌نویسند و اگر اشکالی پیش بیاید با يك از مردمیان مطرح می‌گذند. به طور متوسط مدت زمانی که يك دانشجو بدون برخورد با اشکالی کار می‌کند، تغییر تصادفی نمایی با میانگین ۲ ساعت است. مدت زمان رفع اشکال نیز طبق توزیع نمایی با میانگین يك ربع ساعت فرض می‌شود.

الف. نمودار آهنگ را درسم کنید.

ب. احتمال اینکه در يك لحظه هر دو مردمی بیکار باشند، چیست؟
ج. احتمال اینکه يك دانشجو اشکال داشته باشد و مجبور باشد صبر کند نامه بیها بیکار شوند، چیست؟ میانگین این انتظار چقدر است؟

بزر هزینه ندارد). علاوه بر اینها، چنانچه مدت زمان نویف ماشین در تعمیر گاه بیش از دوروز باشد، باید جریمه‌ای برابر با 150 نیز برداخت شود.
لطف، میانگین مدت زمان تعمیر چند روز است؟
ب. به طور متوسط روزانه چند ماشین از این تعمیر گاه خارج می‌شوند؟
ت. به طور متوسط هر یه تعمیر هر ماشین چقدر است؟

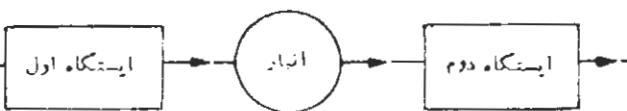
۳۹. در يك بخش تخصصی کارخانه‌ای چهار ماشین مخصوص وجود دارد، که اداره آنها نیاز به تخصص و پیژه دارد. متخصصین و اجد شرایط که در این کارخانه استخدام می‌شوند، با توجه به تقاضای بازار و دریافت پیشنهادهای استخدامی جدید بعد از مدتی کار خود را ترک می‌کند. مدتی که يك متخصص در این کارخانه می‌ماند، متغیری تصادفی با توزیع نمایی و میانگین ۲ سال است. تعداد متخصصینی که برای استخدام مراجعه می‌کنند، بر اساس فرایند پواسون با میانگین سالی ۵ متفاوت است. چنانچه چهار متخصص در استخدام کارخانه باشند، از استخدام جدید خودداری می‌شوند.
الف. این مسئله را به صورت زنجیره مارکوف پیوسته نشان دهد و آهنگ گذار آن را درسم کنید.

ب. این مسئله با چه مدلی تطبیق می‌کند؟
ج. چند درصد از تقاضای استخدام نمی‌شوند؟
د. در هر لحظه، به طور متوسط چند ماشین به علت نبودن متخصص کار نمی‌کند؟

۴۰. ورود مشتریهای يك سیستم طبق فرایند پواسون با میانگین ۳۵ مشتری در ساعت است. درصد مشتریهای که وارد سیستم می‌شوند، چنانچه مشاهده کنید که حداقل سهم مشتری دیگر در صرف ایستاده‌اند از واردشدن به سیستم منصرف می‌شوند. مدت زمان خدمت، متغیری تصادفی با توزیع نمایی و میانگین ۴ دقیقه است. نمودار آهنگ را درسم و میانگین تعداد مشتریهای را که در صرف هستند محاسبه کنید.

۴۱. مدت زمان معایله هر مریض نویسط يك پر شک، نمایی است. این پر شک می‌تواند هر ساعت به طور متوسط ۱۵ مریض را معایله کند. مراجعه بیماران طبق فرایند پواسون با میانگین ۱۲ مرأجعه در ساعت است، ولی در صورتی که ۱۵ بیمار منتظر باشند، بیش از ۸۵ درصد مراجعین منتظر نمی‌مانند و بدسا بر پر شکان مراجعه می‌کنند. نمودار آهنگ را درسم و چند درصد اوقات این پر شک بیکار است؟

۴۲. يك خط تولید از دو ایستگاه پشت سرهم تشکیل شده است. قطعات پس از طی ایستگاه اول به اینبار نیم ساخته‌بین دو ایستگاه داز آنجا به ایستگاه دوم می‌روند. طرفیت اینبار، متناهی



همان طور که در مبحث زنجیره‌های مارکوف پیوسته گفته شد، مدت زمانی که سیستم دو هر کدام اذالتها توقف می‌کند، هفتگری تصادفی با توزیع نمایی است. می‌توان از این خاصیت برای انتخاب مجموعه حالتها استفاده کرد. بدعا برای دیگر، برای ایکه سیستمی در چارچوب فرایند مارکوف نگذاشته شود، ضرورت دارد که حالت‌های آن را در ظاهر گرفتن خاصیت فوق تعریف شود.

بعد از اینکه مجموعه حالت‌های سیستم تعریف و مشخص شد، باید احتمالات حدی سیستم را محاسبه کرد. همان طور که گفته شد، زنجیره‌های مارکوف را معمولاً با ماتریس آهنگ‌گذار آن، یعنی Q ، مشخص می‌کنند. آن گاه با استفاده از فرمولهای احتمالات حدی یعنی P_{ij} را محاسبه می‌کنند. از طرف دیگر، می‌دانیم که با استفاده از فرمول آهنگ می‌توان همین نتیجه را مستقیماً بدست آورد. بدعا برای دیگر، P_{ij} را (آهنگ انتقال سیستم از i به j) را مستقیماً روی نمودار آهنگ نشان می‌دهیم. آن‌گاه، معادلات حدی را می‌نویسیم، که این کار دقیقاً معادل استفاده از نتایج قضیه حدی است. بنابراین، در عمل معمولاً راحت‌ترین روش برای محاسبه P_{ij} را استفاده از نمودار آهنگ است.

بعد از محاسبه احتمالات حدی، سایر اطلاعات مورد نظر از تغییر امید (یا ضمیمه طول صفحه، امید (یا ضمیمه زمان انتظار و نظریه اینها را می‌توان بدست آورد.

سیستم‌های مارکوفی

۱.۷ یک مثال

ماشینهایی را که دارای دوموتور هستند، برای تعمیر به تعمیر گاهی می‌فرستند. بینهای در صد ماشینهایی که به تعمیر گاه آورده می‌شوند، هر دو موتورشان خراب است و ۵۵٪ بدهه قطعی پلکه‌نورشان نیاز به تعمیر دارد. فرض کنید که فمان بین دو ورود متوالی ماشینهای متغیری تصادفی و نمایی با پارامتر λ و مدت زمان تعمیر هر موتور نیز نمایی با پارامتر μ است. اگر ماشینی در تعمیر گاه باشد، از قبول ماشین جدید خودداری می‌شود. احتمال اینکه ماشینی برای تعمیر به تعمیر گاه آورده شود، ولی به علت وجود ماشین دیگری در تعمیر گاه، تعمیر نشود، چقدر است؟

حل: اگر حالت سیستم را تعداد ماشینهای داخل تعمیر گاه در نظر بگیریم، مدل حاصله فرایند مارکوف نخواهد بود. برای اینکه این موضوع نشان داده شود، حالت را در نظر بگیرید که بیک ماشین در تعمیر گاه باشد. مدت زمان توقف سیستم در این حالت بر این مدت زمان تعمیر ماشین است، که این منظر تصادفی دارای توزیع لزوماً نمایی نیست (با احتمال ۰.۵ درصد نمایی و به احتمال ۰.۵ درصد از لانگی است). همان‌طور که قبلاً گفتم، برای اینکه مثله و با هشکل فرایند مارکوف فرموله کنم، لازم است که حالات طوری تعریف شوند که مدت توقف سیستم در هر حالت نمایی باشد.

اکنون، حالت سیستم (ا تعداد موتورهای تعمیر نشده در نظر بگیرید. با این تعریف، سیستم دارای سه حالت صفر، یک و دو است. شکل ۱.۷ نمودار آهنگ این مدل را نشان

در این نصل، سیستم‌های صفری را که در چارچوب فرایند مارکوف قرار می‌گیرند، مورد بررسی قرار می‌دهیم. از آنجاکه رابطه‌های فرایند مارکوف، به بیزه در درازمدت، نسبتاً ساده است، مطلق می‌کنیم مسائل صفر را حتی الامکان طوری فرموده بنشدی کنیم که بتوان از خواص مارکوفی بهره گرفت. همان طور که قبل گفتم، در صورتی یک فرایند را مارکوفی می‌نامند که در هر لحظه بتوان حرکت آینده آن را تنها براساس حالت فعلی آن پیش‌بینی کرد و بعد از آن مسیر حرکت گذشته غایی نباشد.

فرمولندی یک مسئله صفر، معمولاً با تعریف حالت می‌ستم شروع می‌شود. اصولاً مارکوفی مسئله نی شوند. بنابراین، نکته اصلی (فرمولندی یک مسئله صفر، انتخاب مناسب حالت‌های آن است. همان‌طور که قبل گفتم، مدل‌های فرایند تولد و مرگ حالت‌های خاصی از سیستم‌های مارکوفی هستند، مشروط براینکه تعداد مشتریهای داخل سیستم را حالت در نظر بگیریم. اما، چنانچه در سیستم‌های دیگر هم حالت سیستم به همین ترتیب تعریف شود، لزوماً در چارچوب فرایند مارکوف قرار نمی‌گیرند؛ لذا، برحسب مورد و با درنظر گرفتن شرایط، مجموعه حالت‌های مناسی را باید تعریف کرد. چنانچه غیر از این عمل شود، در مسئله مورد نظر، خاصیت فرایند مارکوف به کار گرفته نمی‌شود. در تبجه، بررسی تحلیلی آن معمولاً بسیار پیچیده و گاهی غیر ممکن می‌شود.

از رابطه $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4 = Q = 0$ می‌توان $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4$ را بدست آورد، که با نتایج قبلی تطبیق خواهد کرد.

اگر کنون می‌توان به سؤال مسورد نظر پاسخ داد، احتمال اینکه ماشین در تعمیر گاه مراجعت کند و از قبول آن حودداری شود، برابر است با احتمال اینکه یک ماشین در تعمیر گاه باشد؛ و به عبارت دیگر، برابر است با احتمال وجود یک یا دو موتور تعمیر شده در تعمیر گاه، یعنی $\pi_1 + \pi_2$.

۲.۷ مدل ۱/۱/۱/۱ با ورود کروهی

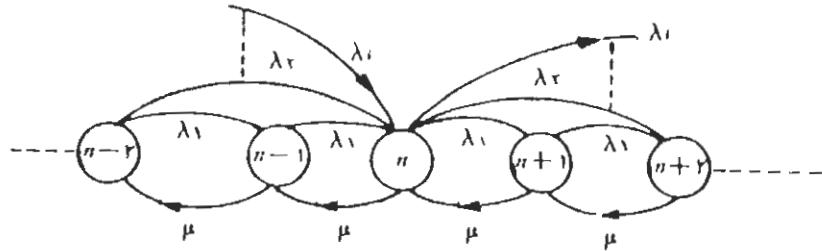
در این مدل، زمان بین دو دد متوالی مشتریها را تصادفی تصادفی با توزیع نمایی (و پارامتر λ) فرض می‌کنیم. لیکن، هر بار به جای یک مشتری، گوشه مشتری وارد می‌شود و تعداد آنها نیز متغیر تصادفی است. احتمال اینکه یک گروه مشتری از k مشتری تشکیل شده باشد را برابر با p_k فرض می‌کنیم. طبق معنا

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1 \quad (2.7)$$

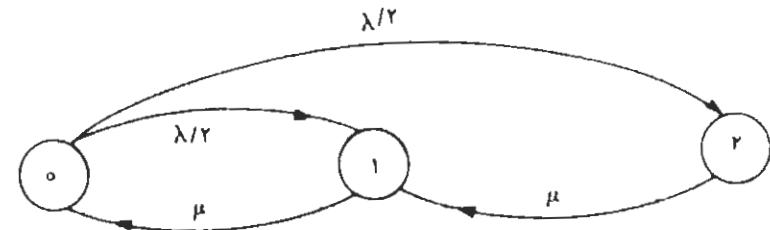
نمودار آهنگ این مدل در شکل ۲.۷ اشان داده شده است.

طبق قضیه ۳.۳، اگر تعداد پیشنهادها براساس فرایند پواسون و هر پیشامد به احتمال p_n از نوع خاصی باشد، تعداد پیشنهادها از این نوع خاص نیز یک فرایند پواسون با پارامتر λp_n تشکیل می‌دهد. با توجه به این قضیه، تعداد کروههایی که وارد سیستم شوند و از k مشتری تشکیل شده باشند، پواسون با پارامتر $\lambda = \lambda p_n = \lambda p_k$ خواهد بود. به این ترتیب، آهنگ ورود مشتریان برابر است با

$$\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda p_k \quad (2.7)$$



شکل ۲.۷ نمودار آهنگ مدل نمایی با ورود کروهی.



شکل ۱.۷ نمودار آهنگ مثال تعمیر گاه

من دهد. آهنگ گذار می‌سیم از صفر بیک برابر با آهنگ ورود یک ماشین با یک موتور خراب است (یعنی $\lambda/2$). به همین ترتیب، آهنگ گذار از صفر بهدو نیز برابر با $\lambda/2$ است. از طرف دیگر، تغییر حالت می‌سیم از یک به دو امکانپذیر نیست، زیرا وقتی هنوز یک موتور تعمیر شده در تعمیر گاه باقی مانده باشد، ماشین دیگری اجازه ورود ندارد. آهنگ گذار می‌سیم از ۲ به ۱ و یا از ۱ به صفر معادل آهنگ تعمیر یک موتور، یعنی μ است. با مشخص شدن نمودار آهنگ، می‌توان احتمالات حدی، یعنی π_i ها، را با استفاده از روابط تعادلی به شرح زیر محاسبه کرد.

$$\text{گروه ۰: } \lambda \pi_0 = \mu \pi_1$$

$$\text{گروه ۱: } \lambda \pi_1 = \frac{\lambda}{2} \pi_0 + \mu \pi_2$$

$$\text{گروه ۲: } \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \quad \mu \pi_2 = \frac{\lambda}{2} \pi_0$$

از حل معادلات فوق، نتایج زیر بدست می‌آید.

$$\pi_2 = \frac{\lambda}{2\mu + 2\lambda}, \quad \pi_1 = \frac{2\lambda}{2\mu + 2\lambda}, \quad \pi_0 = \frac{2\mu}{2\mu + 2\lambda} \quad (1.7)$$

همانطور که گفته شد، می‌توانیم به جای استفاده از نمودار آهنگ از قضیه احتمالات حدی استفاده کنیم، که در این مسئله ماتریس آهنگ گذار عبارت است از:

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & \lambda \\ \mu & -\lambda & \lambda \\ \mu & \mu & -\lambda \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

لور کے مشاہدہ می شود، اگر در ہر گروہ فقط یک مشتری وجود داشتہ باشد، یعنی مدل M/M برقرار باشد، رابطہ L نیز بہمان رابطہ مربوط ہے M/M تبدیل خواهد شد۔ مثلاً ۰.۷ یک سیستم صاف $M/M/1$ میں گروہی را در نظر بگیرید۔ تمداد گروہی کے وارد سینٹ می شوند، بر اساس فرایند بواسون با میانگین ہر ساعت ۳ گروہ سنت۔ تمداد مشتری ہی ہر گروہ متغیری نصادفی با توزیع هندسی بھی شکل زیر است۔

$$P_i = P[N=i] = (\alpha/\beta)^i (1-\alpha/\beta)^{1-i}$$

مدت زمانی که طول می کشد تا تنها خدمت دهنده به یک مشتری خدمت ارائه کند، متغیری مصادفی و نمایی با میانگین دهدۀ قیمة است. اختلال اینکه در درازمدت «مشتری در سیستم پالش، حیمت؟ / را محاسبه کند.

حل: طبق مفروضات، $\lambda = 3$ ، $\mu = 4$ و $\rho = 0.8$ است. طبق تعریف
هندسی $E(N)$ و $E(N^2)$ به شرح زیر محاسبه می‌شوند:

$$E[N] = \frac{1}{\alpha}$$

$$E[N^2] = \text{Var}[N] + E[N]^2 = 104 + 100^2 = 10404$$

π از رابطه (۹.۷) به دست می آید.

$$\pi_0 = \lambda E[N] / \mu = \frac{\lambda}{\epsilon}$$

با استفاده از رابطه (۵.۷) مقادیر π را محاسبه می کنیم، اگر چه فقط برای تعداد متناهی n چنین محاسباتی عملی است. برای نمونه، با درنظر گرفتن $n=3$ ، $\lambda_1=1.8$ ، $\lambda_2=0.72$ و $\lambda_3=0$ خواهیم داشت:

$$\pi_1 = \frac{\lambda}{\mu} \pi_0 = \frac{1}{1 + e^{-\frac{\lambda}{\mu}}}$$

۱۰۷

$$\pi_1 = \frac{0.9}{1.8} = 0.50$$

$$\pi_r = \frac{(0.9)^r}{r} = 0.9^r \forall r$$

معادلات تعادلی رامی توان با استفاده از نمودار آهنگ، شکل ۲.۷، به شرح زیر نوشت.

$$\lambda\pi_\alpha = \mu\pi_\beta \quad (\Delta\cdot\forall)$$

$$(\lambda + \mu)\pi_n = \mu\pi_{n+1} + \sum_{k=1}^n \lambda_k \pi_{n-k}, \quad n = 1, 2, \dots$$

پس از حل این دستگاه معادلات، π را به شرح زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\pi_* = \gamma - \frac{\lambda \sum_i p_i}{\mu} \quad (\text{e.v})$$

چنانچه متغیر نصادفی N را تعداد مشتریهای هر تکروه بدانیم، میانگین آن عبارت خواهد بود از:

$$E(N) = \sum_{i=1}^m i p_i \quad (\text{v.v})$$

از طرف دیگر، آهنگ ورود مشتریان عبارت از میانگین تعداد مشتریهایی است که در واحد زمان وارد سیستم می‌شوند. این کمتر بر اثر با میانگین تعداد گردشها خوب در میانگین تعداد مشتریان هرگز است. بنابراین، آهنگ ورود مشتری برای این است با

$$\lambda \sum_{i=1}^n i p_i \quad (\text{A.Y})$$

بهایین قریب، رابطه (۶.۷) به رابطه زیر تبدیل می‌شود:

$$\pi_c \equiv 1 - \rho \quad (4.4)$$

پس از محاسبه π_1 , مقادیر π_2 بزاری ... $, \pi_n$ از معادلات (۵.۷) بدست می‌آید.

محاسبه در مدل $M/M/1$ با ورود گروهی

پس از محاسبه π ها مقدار L از رابطه (۱) محاسبه می شود. می توان نشان داد مقدار L به شرایط زیر نخست، آنقدر بود.

$$L = \frac{\rho}{\lambda - \rho} + \frac{\rho \left[\frac{E(N')}{E(N)} - 1 \right]}{\lambda - \mu(N' - N)} \quad (10.4)$$

www.bank-projeckt.de



ضمناً، با درنظر گرفتن رابطه (۱۰.۵) می‌دانیم که

$$L = \frac{dP(z)}{dz} \Big|_{z=1}$$

مثال ۴.۷ مثال ۲.۷ را مجدداً درنظر بگیرید. در این مدل

$$K(z) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i z^i = \frac{0.5z}{1 - 0.4z} \quad (15.7)$$

و

$$1 - K(z) = \frac{1 - z}{1 - 0.4z}$$

با درنظر گرفتن اینکه $\mu = 1/\pi = 6/5$ و $\rho = 5/6$ است، رابطه (۱۰.۷) به شرح زیر ساده می‌شود:

$$P(z) = \frac{1 - 0.4z}{6[1 - 0.4z]}$$

از طرف دیگر با استفاده از خاصیت تصاعد هندسی،

$$\sum_{n=0}^{\infty} (0.4z)^n = \frac{1}{1 - 0.4z}$$

بنا بر این،

$$P(z) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} (0.4z)^n \right]^{1/11} = \left(0.4z \right)^{1/11}$$

برای محاسبه π_n از رابطه کلی زیر استفاده می‌شود:

$$\pi_n = \frac{1}{n!} \frac{dP(z)}{dz} \Big|_{z=0} = \frac{(0.4z)^{n-1}}{11}$$

و

$$L = \frac{dP(z)}{dz} \Big|_{z=1} = \frac{5}{6}$$

ضمناً را می‌توان از رابطه (۱۰.۵) و با استفاده از مقادیر π_n که از رابطه فوق بدست می‌آید، نیز محاسبه کرد.

و با استفاده از رابطه (۱۰.۷)،

$$L = \frac{5}{6}.$$

حالات خاص، حال فرض کنید که تعداد مشتریهای هر کارو و دفیقاً برابر با b است.

در این صورت با درنظر گرفتن اینکه $\mu/\rho = \lambda b$ است،

$$L = \frac{\rho(1+b)}{\gamma(1-\rho)} \quad (11.7)$$

و

$$W = \frac{1+b}{2\mu(1-\rho)} \quad (12.7)$$

مثال ۳.۷ در قسمت کنترل کیفیت کارخانه‌ای نمونه‌های ۱۵ تایی طبق فرایند پواسون (بطور متوسط A نمونه در ساعت) وارد می‌شود. مدت زمان بررسی هر قطمه، نمایی با میانگان ۲۲۵ دقیقه است. تمام نمونه‌ها باید مورد بررسی قرار گیرند. بطور متوسط در هر لحظه چند قطمه در قسمت کنترل کیفیت بساعت می‌شود؟ مدت زمان انتظار هر قطمه برای بررسی چقدر است؟

حل: این مثال، یک مدل ۱/۱ مورد گروهی (دقیقاً $h = 15$) و همچنین $\lambda = 225$ و $\mu = 225/\rho = 225/\mu = 5$ است. طبق رابطه‌های (۱۱.۷) و (۱۲.۷)، $L = 8$ و $(\text{ساعت})^{660} = W = 4$ و (دقیقه) $W = 60$ خواهد بود.

$$C_V L$$

محاسبه π_n با استفاده از تبدیل z

مقدار $(P(z))_{n=1, 2, \dots}$ را با استفاده از تبدیل z نیز می‌توان محاسبه کرد. (برای مطالعه بیشتر در مورد تبدیل z به فصل دوم بخش ۱۲ مراجعه شود). فرض کنید $K(z)$ و $P(z)$ و π_n باشد. به عبارت دیگر

$$K(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \quad P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n z^n \quad (13.7)$$

در این صورت، مقدار $P(z)$ از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$P(z) = \frac{\mu \pi_0 (1-z)}{\mu(1-z) - \lambda z(1 - K(z))} \quad (14.7)$$

اثبات این رابطه در مثال ۲۲.۲ ارائه شده است (با فرض $L(z) = \lambda K(z)$). با استفاده از خواص تبدیل z و رابطه $(P(z))_{n=0} = \pi_n$ می‌توان π_n را محاسبه کرد.

$$\lambda\pi_0 = \mu(\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_r) \quad (18.8)$$

$$(\lambda + \mu)\pi_n = \lambda\pi_{n-1} + \mu\pi_{n+1}, \quad n \geq 1. \quad (14.14)$$

(همان طور که نمودار آهنگ نشان می دهد، در این مدل فرض شده است که اگر تعداد مشتریها بی که در حال دریافت خدمت هستند کمتر از μ باشد و مشتری جدیدی وارد شود، به این مشتری نیز بلا فاصله و همزمان با سایر مشتریها خدمت ارائه خواهد شد. چنانچه این فرض صدق نکند، از حالت‌های $2, 3, \dots, \mu$ لزوماً برآنست به صفر صورت نمی‌گیرد. فرض کنید که در لحظه شروع خدمت، فقط دو مشتری در صرف و $\mu - 2$ باشد. اگر در این‌جا ارائه خدمت یک مشتری جدید هم وارد شود، باید در صرف منظر بماند، بنابر این، پس از ازاین خدمت این دو مشتری سیستم را ترک می‌کنند، و ای حالت مبتنی به یک می‌رسد)

دستگاه معادلات شماره‌های (۱۶.۷) و (۱۷.۷) را می‌توان با استفاده از تبدیل Z یا معادلاً مشخصه حل کرد، روش دوم به حل معادله زیر، که به معادله مشخصه موسوم است منجر می‌شود.

$$\mu x^{r+1} - (\lambda + \mu)x + \lambda = 0 \quad (\forall \lambda, y)$$

معادله فوق از درجه (۱+۴) است و می تواند حداقل دارای همین تعداد ریشه باشد، بدینهی است عدد یک همواره یکی از ریشه هاست. از طرف دیگر، ثابت می کنم که این معادله فقط دارای یک ریشه بین صفر و یک است که آن را x_0 می نامیم، پس از محاسبه x_0 ، معادلات تعادل (۱۶.۷) و (۱۷.۷) به شرح زیر بدست می آید:

$$\pi_0 = 1 - x_0 \quad (14.8)$$

$$\pi_n = (1 - x_n) x_n^n \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{Y}_0, \text{Y})$$

همان طور که مشاهده می شود، احتمالات حدی در این مدل مشابه معادلات حدی در مدل $M/M/1$ است؛ مگر در این مورد که به جای p مقدار λ قرار گرفته است. لذا می توان نتائج را که از طبقه های زیر نیز پر فراز است:

$$L = \frac{x_0}{1-x} \quad (1.1)$$

$$W = \frac{x_s}{\lambda(1-x_s)} \quad (11.1)$$

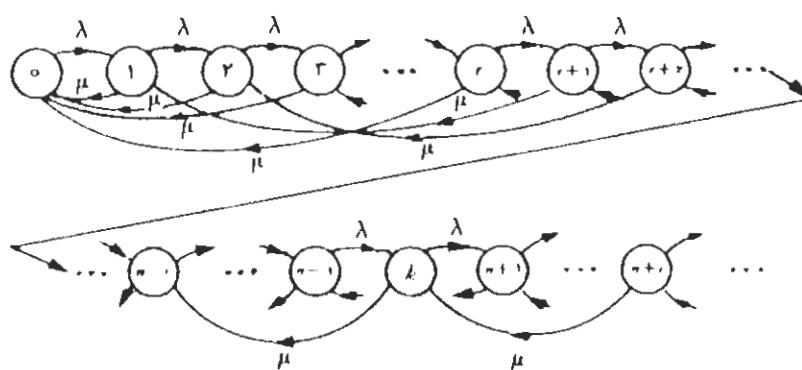
مثال ۵.۷ در یک سیستم صفحه، خدمت دهنده می‌تواند به طور همزمان حداً کنترل ۴۰ مشتری خدمت ارائه کند. ورود مشتری‌ها طبق فرایند پواسون با آنچه ۱۵ مشتری در ساعت و مدت زمان خدمت نمایی با میانگین ع دقیقه است. می‌انگمن تعداد مشتری‌ها ای داتل سیستم حفظ، است؟ احتمال اینکه بیش از چهار مشتری در سیستم باشد، چقدر است؟

۳.۷ مدل ۱/M/M با خدمت سر و هی

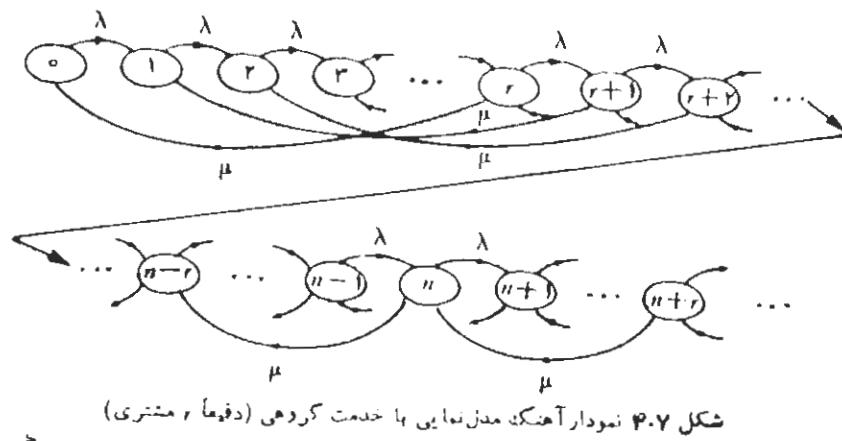
در این مدل، هر خس می کند که هر خدمت دهنده، هر مارکeting ایک مشتری بگردی از مشتریها به طور همزمان، خدمت ارائه می کند. مدت خدمت، نهایی با پارامتر μ است. ورود مشتریها در آسان فرازیند پو اسون ما آنکه در نظر گرفته می شود. ضمناً هر خس می کند که مشتریها به صورت اتفاقی داده می سیتم می شوند. موقعی که یک خدمت دهنده بیکار می شود، به طور همزمان با خدمت ۲ مشتری می بردازد. چنانچه تعداد مشتریها که در صفت منتظر هستند کمتر از ۳ باشد، سیستم می تواند بدو نوع مختلف عمل کند. نوع اول این است که خدمت دهنده با همان تعداد مشتری کار را شروع کند و منتظر نماند که تعداد مشتریها به حد نصیب ۳ برسد. در نوع دوم، خدمت دهنده باید دقیقاً به ۳ مشتری خدمت ارائه کند. در این صورت، سیستم منتظر می ماند تا تعداد مشتریها داخل صفت به ۳ برسد.

ابندا نوع اول را در نظر بگیرید. تعداد مشتریهای داخل سیستم (ا) حالت تعزیف هی کنیم، نمودار آهنگ این مدل در شکل ۳.۷ نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می شود، بدودالیل حالت سیستم تغییرمی کند. یعنی ورود مشتری جدید با آهنگ λ است، که در این صورت به تعداد مشتریها یکی اضافه می شود و حالت سیستم نیز به عنوان ترتیب تغییرمی کند. علت دیگر تغییر حالت سیستم، انمام کار خدمت دهنده است، که در این صورت از تعداد مشتریهای داخل سیستم نزد کاسته می شود. در مورد اخیر، تغییر حالت سیستم بنگذی به حالت فعلی آن دارد. اگر حالت سیستم مادی با یا بیشتر از r باشد، تعداد مشتری یانی که خارج می شوند بر امر با r است. اما اگر حالت سیستم کمتر از r باشد، خدمت دهنده نیز به عنین تعداد مشتری خدمت ارائه کرده است و تمام مشتریها خارج می شوند و حالت سیستم به صفر می رسد.

با استفاده از نمودار آهنگ، معادلات تمادی را به شرح زیر می‌نویسیم:



شکل ۴.۷ نمودار آهنگ مدل M/M/1 با خدمت گردی



$$\pi_n = \frac{1 - x_0^{n+1}}{r}, \quad 1 \leq n < r \quad (27.7)$$

$$\pi_n = \pi_0 \cdot x_0^n, \quad n \geq r \quad (28.7)$$

مثال ۲۰.۷ در مثال ۵.۷ فرض کنید که خدمت دهنده دقیقاً به دو مشتری خدمت می‌دهد؛ یعنی، صبوری کند تا حداقل دو مشتری در صرف منتظر باشند، تا ارائه خدمت را شروع کنند. در این صورت، مدل این مسأله را مجدداً حل کنید.

حل: معادله مشخصه در این مورد نیز تفاوتی نمی‌کند، بنابراین $x^0 = 0.823$

$$\pi_0 = 0.589$$

از رابطه (۲۷.۷)

$$\pi_1 = \frac{1 - x_0^2}{2} = 0.16$$

با از ۲ تا n از رابطه (۲۸.۷)

$$\pi_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \pi_0 \cdot x_0^{n-1} = 0.1328 x_0^{n-1}$$

در نتیجه

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} n \pi_n = \pi_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n \pi_n = 0.16 + 0.1328 \sum_{n=2}^{\infty} n x_0^{n-1}$$

حل: مفروضات مدل $\lambda = 15$ و $\mu = 10$ است، معادله مشخصه برای این مدل، طبق رابطه (۱۸.۷) عبارت است از:

$$10x^2 - 25x + 15 = 0$$

این دستگاه معادله دارای سه ریشه به شرح زیر است

$$\frac{\sqrt{v}-1}{2}, \quad \frac{-\sqrt{v}-1}{2}, \quad \frac{\sqrt{v}-1}{2}$$

همانطور که مشاهده می‌شود، فقط یکی از ریشه‌ها، یعنی $\frac{-\sqrt{v}-1}{2} = -2/2 = -1$ عددی بین صفر و یک است، که آن را با x_0 نشان می‌دهیم. لذا

$$L = \frac{0.823}{1 - 0.823} = 4.645$$

احتمال اینکه بیش از چهار مشتری در سیستم باشند، برابر است با

$$\sum_{n=5}^{\infty} \pi_n = (1 - x_0) \sum_{n=5}^{\infty} x_0^n = x_0^5 = 0.38$$

حال مدل $M/M/1$ با خدمت گروهی را در نظر بگیر بد، که خدمت دهنده، فقط به ۲ مشتری خدمت می‌دهد. در این مدل، چنانچه خدمت دهنده بیکار شود، اما تعداد مشتری‌های داخل سیستم کمتر از ۲ باشد، ارائه خدمت انعام نمی‌شود. خدمت دهنده منتظر می‌ماند تا مشتری‌ای جدیدی وارد سیستم شوند و در لحظه‌ای که ۲ اعیان مشتری وارد می‌شود، کار خود را شروع می‌کند. نمودار آهنگ این مدل در شکل ۲۰.۷ نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در این مدل فقط به گروههای ۲ عددی خدمت ارائه می‌شود و تفاوت آن با مدل شکل ۳.۷ مربوط به حالاتی ۱ تا ۲ است.

با استفاده از نمودار آهنگ، معادلات قابلی به شرح زیر نوشته می‌شود:

$$\lambda \pi_0 = \mu \pi_r \quad (23.7)$$

$$\lambda \pi_n = \lambda \pi_{n-1} + \mu \pi_{n+1}, \quad 1 \leq n < r \quad (24.7)$$

$$(\lambda + \mu) \pi_n = \lambda \pi_{n-1} + \mu \pi_{n+1}, \quad r \leq n \quad (25.7)$$

برای حل معادلات فوق، مجدداً معادله مشخصه (۱۸.۷) را حل می‌کنیم و x_0 را بدست می‌آوریم. می‌توان نشان داد که در این مدل، احتمالات حدی عبارت اند از:

$$\pi_n = \frac{1 - x_0}{r} \quad (26.7)$$

از طرف دیگر، طبق رابطه (۷۰.۲)

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx_0^{n-1} = \frac{1}{(1-x_0)^2} = ۳۱۹$$

بنابراین،

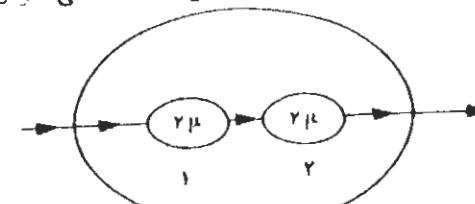
$$L = ۵۱۶ + \frac{۵۱۴۲۸}{x_0} \left[\sum_{n=1}^{\infty} nx_0^{n-1} - ۱ \right] = ۱۱۵$$

$$\sum_{i=5}^{\infty} \pi_i = ۰۱۲۲۸ \sum_{i=5}^{\infty} x_0^i = ۰۴۱$$

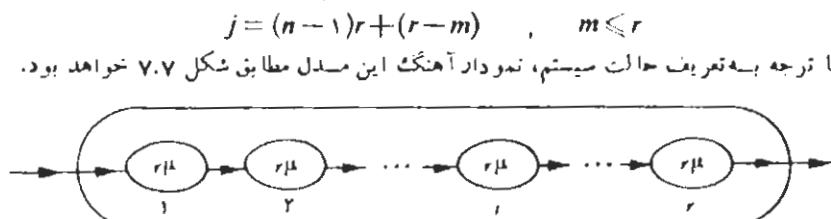
همان طور که مشاهده می شود، هم مقدار L و هم مجموع احتمالات افزایش یافته است (جزءی).

۴.۷ مدل ۱ $M/E_r/1$

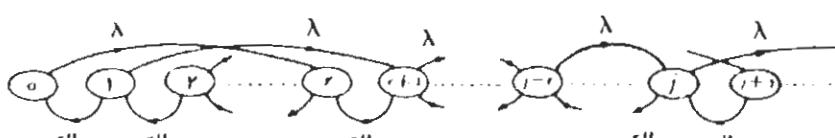
در این میت، مشتریها براساس فرایند بواسون با آهنگ λ وارد می شوند. مدت زمان خدمت قابع توزیع الانگی ($1/\mu$ مرحله) فرض می شود. همانطور که در فصل سوم گفتم، به علت انعطاف پیاده زیاد قابع توزیع الانگی، بسیاری از مشتریهای تصادفی را می توان با تقریب مناسب در قالب آن جسداد، از طرف دیگر، برای اینکه بتوان از خاصیت بدون حافظه بودن توزیع نمایی استفاده کرد، می توان تغییر تصادفی اولانگی را به چند متغیر تصادفی نمایی تجزیه کرد. فرض کنید که میانگین یک متغیر تصادفی اولانگی $1/\mu$ و پارامتر λ دیگر آن $r = 2$ باشد. با استفاده از خاصیت متغیر تصادفی اولانگی، می توان آن را مجموع دو متغیر تصادفی نمایی فرض کرد، که میانگین هر کدام از آنها بر امر $1/2\mu$ خواهد بود. به عبارت دیگر، اگر مدت زمان خدمت براساس توزیع $E_r/1$ باشد، می توان فرض کرد که در این سیستم، خدمت از دور مرحله پشت سرهم تشکیل شده است، که مدت زمان خدمت در هر مرحله، نمایی با پارامتر $1/\mu$ است (شکل ۵.۷). بدین ترتیب، وجود اینکه خدمت مورد نظر عملاً فقط از یک مرحله تشکیل شده است، می توان فرض کرد که بعطر



شکل ۵.۷ خدمت دندمه با توزیع اولانگی دو مرحله ای



شکل ۶.۷ تجزیه یک متغیر تصادفی اولانگی r مرحله ای



شکل ۷.۷ نمودار آهنگ مدل ۱ $M/E_r/1$

مدل حاصل $1/M/D$ خواهد بود، درنتیجه، برای این مدل معیارهای ارزیابی بشرح ذیر بدست می‌آید.

$$L_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho^2}{1-\rho} \quad (36.7)$$

$$W_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \quad (37.7)$$

مثال ۷.۷ مرکز اورانس یک شهر کوچک را در نظر بگیرید که فقط داوایی یک آمبولانس است. تقاضا برای ارسال آمبولانس طبق فرایند پواسون به این مرکز می‌رسد. میانگین زمان بین هر دو تقاضای متوالی دو ساعت است. مدت زمانی که طول می‌کشد تا در معادلات فوق، π_j معرف احتمال وجود مرحله خدمت انجام شده مشتری است. در بررسی این سیستم صفت، آنچه بیشتر مطرح است این است که چند مشتری در سیستم هستند. چنانچه π_j را احتمال وجود j مشتری در سیستم تعریف کنیم،

حل: این سیستم یک مدل $1/M/E_\mu$ است. مدت زمان خدمت از مجموع دو متغیر تصادفی نمایی تشکیل می‌شود که عبارت از زمان رفت و برگشت آمبولانس است. بنابراین، مدت زمان خدمت دارای توزیع E_μ با میانگین ۲۵ دقیقه است. بدین ترتیب، $\lambda = \frac{1}{2}$ و $\mu = \frac{1}{12}$. احتمال اینکه آمبولانس بلا فاصله فرستاده شود، چقدر است؟ میانگین مدت زمان انتظاریک بیمار برای اینکه آمبولانس به منزلش برسد، چقدر است؟

$$\pi_n = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{6}$$

مدت زمان انتظار مشتری در صرف طبق رابطه (۳۴.۷)

$$W_0 = \frac{1+2}{4} \cdot \frac{0.05}{2(3-0.05)} = \frac{1}{20} \text{ ساعت} = ۳ \text{ دقیقه}$$

میانگین زمان انتظار یک مشتری نا لحظه رسیدن آمبولانس عبارت از مجموع زمان انتظار در صرف (یعنی ۳ دقیقه) و مدت زمان رفتن آمبولانس از مرکز به منزل او (یعنی ۱۵ دقیقه) است؛ بنابراین، باید به طور متوسط ۱۳ دقیقه منتظر بماند.

مثال ۷.۸ در یک سیستم صفت، ورود مشتریها طبق فرایند پواسون با میانگین ۲۵ مشتری در ساعت است. در این سیستم، دونفر خدمت دهنده کار می‌کنند. مدت زمان خدمت دارای توزیع نمایی با میانگین ۴ دقیقه است. اگر به جای این دو خدمت دهنده، یک مشاغل خردباری شود، که همان خدمت را انجام دهد، مدت زمان خدمت چقدر باید باشد تا تعداد مشتری‌های داخل سیستم ~~حکمل افزایش~~ ۵۰ بیاید؟

حل: سیستم فعلی یک مدل $1/M/2$ و سیستم پیشنهادی یک مدل $1/M/D$ است.

همان طور که نمودار آهنگ نشان می‌دهد، به محض ورود یک مشتری، حالت سیستم افزایشی بر این باز پیدا می‌کند، زیرا هر مشتری جدید باید مرحله خدمت را پذیراند. چون تعداد مراحل خدمت، حالت سیستم تعریف شده‌است؛ بنابراین، با پایان کار خدمت دهنده حالت سیستم به اندازه یک واحد کاهش می‌باشد؛ لیکن، آهنگ خلعت دهنده، مطین آنچه گفته شد معادلات تعادل در این مدل، براساس نمودار آهنگ، عبارت انداز:

$$\lambda\pi'_n = r\mu\pi'_r \quad (39.7)$$

$$(\lambda + r\mu)\pi'_j = r\mu\pi'_{j-1}, \quad j=1, 2, \dots, r-1 \quad (40.7)$$

$$(\lambda + r\mu)\pi'_r = \lambda\pi'_{r-1} + r\mu\pi'_{r+1}, \quad j=r, r+1, \dots \quad (41.7)$$

در معادلات فوق، π_j معرف احتمال وجود مرحله خدمت انجام شده مشتری است. در بررسی این سیستم صفت، آنچه بیشتر مطرح است این است که چند مشتری در سیستم هستند. چنانچه π_n را احتمال وجود n مشتری در سیستم تعریف کنیم،

$$\pi_n = \sum_{j=0}^n \pi'_j, \quad n=1, 2, \dots \quad (42.7)$$

پسون مقادیر π_n از معادلات ۳۵.۷ و ۳۶.۷ بدست می‌آید، می‌توان π_n را از رابطه (۴۲.۷) محاسبه کرد؛ آن‌گاه، معیارهای ارزیابی را با استفاده از رابطه (۴۰.۵) و استنتاج لیزنل حساب می‌کیم، که نتیجه آنها بشرح ذیر خواهد بود:

$$L_0 = \frac{1+r}{2r} \cdot \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{1+r}{2r} \cdot \frac{\rho^2}{1-\rho} \quad (43.7)$$

در رابطه فوق، $\rho = \lambda/\mu$ است.

$$W_0 = \frac{1+r}{2r} \cdot \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \quad (44.7)$$

$$W = W_0 + \frac{1}{\mu}, \quad L = \lambda W \quad (45.7)$$

حالتهای خاص

اگر $r=1$ باشد، مدل فوق تبدیل به $1/M/1$ می‌شود و رابطه‌های فوق با روابطی که قبل برای این مدل به دست آوردیم تطبیق می‌کند.

اگر $r=\infty$ باشد، توزیع اولانگی ب متغیر قطبی θ غیر احتمالی تبدیل می‌شود و

چنین حالتی وجود ندارد، ولی از نظر ریاضی، تکرر این بدن مرحله فرضی با توزیع F_r تطبیق می‌کند. به این ترتیب، پس از ورود هر مشتری، با وجود اینکه هنوز از مشتری مدعی خبری نیست، می‌توان تصور کرد که اولین مرحله ورود را شروع کرده است.

تعریف حالت سیستم
تعداد مراحل ورودی که مشتری‌های سیستم طی کرده‌اند را حالت می‌نامیم. هر مشتری داخل سیستم، در واقع نام ۲ مرحله را طی کرده است. بدین ترتیب، اگر مشتری ایند، که به طور فرضی درحال تکرار این مراحل ورودی است، تاکنون از m مرحله گذشته باشد و «مشتری دیگر نیز داخل سیستم باشد، حالت سیستم به شرح زیریان می‌شود:

$$j = nr + m$$

با تعریف حالت سیستم به شرح فوق، نمودار آهنگ این مدل را می‌توان مطابق شکل (۸.۷) نشان داد.

۸/۷ معرف احتمال بودن سیستم در حالت j ، در درازمدت است، لذا، معادلات تعادل این مدل به شرح ذیراست

$$r\lambda\pi'_0 = \mu\pi'_r \quad (۲۹.۷)$$

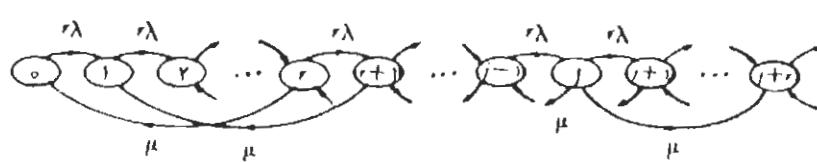
$$r\lambda\pi'_j = r\cdot\lambda\pi'_{j-1} + \mu\pi'_{j+1}, \quad 1 \leq j \leq r-1 \quad (۳۰.۷)$$

$$(r\lambda + \mu)\pi'_j = r\lambda\pi'_{j-1} + \mu\pi'_{j+1}, \quad r \leq j \quad (۳۱.۷)$$

همانطور که مشاهده می‌شود، ماختاد این مدل با مدل $M/M/1$ (خدمت‌گردی که دقیقاً بهم مشتری خدمت می‌دهد) تطبیق می‌کند، با این تفاوت که در این مدل همه جایهای λ پارامتر $r\lambda$ و وجود دارد. برای محاسبه مubarاهای ارزیابی، در اینجا نیز از معادله مشخصه سیستم، شیوه آنچه که در مدل $1/M/M/1$ با خدمت‌گردی ارائه شد، استفاده می‌شود. در این مدل، معادله مشخصه عبارت است از:

$$\mu^{r+1} - (r\lambda + \mu)x + r\lambda = 0 \quad (۳۲.۷)$$

در اینجا نیز، فقط بکی از ریشه‌های این معادله، که آن را x می‌نامیم، عددی بین صفر و



شکل ۸.۷ نمودار آهنگ مدل $1/M/M/1$

را در دو حالت باید مقایسه کرد. در هر دو سیستم $20 = \lambda$ است

مدل $M/M/2$:

در این حالت $15 = \mu = 20/20 = 2/2 = \rho$ است. طبق رابطه (۴۴.۶)

$$\pi_0 = \frac{1-\rho}{1+\rho} = \frac{1}{5}$$

واز رابطه (۴۷.۶) و استنتاج لیتل،

$$L = 202$$

مدل $M/D/1$

هدف نسبت μ (یا ρ) است به طوری که $2\rho \leq L$ باشد. اما در این مدل $\infty = \rho$ است، لذا از رابطه (۳۶.۷) نتیجه می‌شود که

$$L_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho^2}{1-\rho} \quad (۳۸.۷)$$

$$L = L_0 + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho^2}{1-\rho} + \rho \leq 202$$

در نتیجه

$$\mu \leq 25 \quad \text{با} \quad \rho \leq 0.8$$

پس مدت زمان خدمت باعده کمتر از ۲۰۲ دقیقه باشد.

۵.۷ مدل $E_r/M/1$

در این مدل زمان بین دو «دد متوالی» مشتری‌ها طبق توزیع «لامگی (۲ مرحله)» و مدت زمان خدمت نهایی است. در اینجا نیز می‌توان فرض کرد که زمان بین دو ورود مشتری‌ها به ۲ مرحله نهایی تقسیم می‌شود. به عبارت دیگر، می‌توان تصور کرد که مشتری‌ها مشتری این دو سیستم، با ۲ مرحله فرضی را در خارج از سیستم گذرانند. زمان گذر این بدن اولین مرحله آن به‌افاصله پس از ورود مشتری قابلی به سیستم شروع می‌شود. بدینه است که عمل

$$\pi_0 = \pi'_0 + \pi'_1 = \frac{1-x_0}{\lambda} + \frac{1-x'_0}{\mu} = 0.375$$

و برای محاسبه π_n ، ابتدا از رابطه (۲۴.۷) مقدار A را محاسبه می‌کنیم.

$$A = \frac{1-x_0}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} [x_0 + x'_0] = 0.562$$

$$\pi_n = (\pi'_0)^n \quad n \geq 1$$

(همان طور که مشاهده می‌شود، مجموع π_n برابر با یک است)
به همین ترتیب، از رابطه (۲۴.۷) نتیجه می‌شود که:

$$L = \frac{1}{[1 - (\pi'_0)^r]^{\frac{1}{r}}} = 1.31$$

$$W = \frac{L}{\lambda} = 0.263$$

$$L_r = L - \frac{\lambda}{\mu} = 0.692$$

$$W_r = W - \frac{1}{\mu} = 0.138$$

۶.۷ نظام اولویت

تا اینجا فرض برآین بود که نظام سیستم بر اساس نوبت (با FIFO) است. به عبارت دیگر، هر مشتری که زودتر وارد شود، زودتر هم خدمت دریافت می‌کند. لیکن، در عمل نظامی دیگری هم وجود دارد. در قلم اولویت، مشتری‌ها از نظر اهمیت پکان نیستند. اگر هر کدام مشتری فضلت به مشتری‌های دیگر اولویت داشته باشد، زودتر خدمت دریافت می‌دارد، حتی اگر دیرتر از آنان وارد سیستم شده باشد.

یک است. π_n نیز از رابطه‌های (۲۶.۷) و (۲۷.۷) و (۲۸.۷) بدست می‌آید.
از آنچه که در این مدل نیز، هدف محاسبه تابع توزیع، تعداد مشتری‌های داخل سیستم (ونه تعداد مراحل کارهای انجام نشده) است، لذا π_n را احتمال بودن n مشتری در سیستم در درازمدت نمایی می‌کنیم. رابطه π_n به شرح زیر است

$$\pi_n = \sum_{j=n}^{(n+r)-1} \pi'_j, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (۲۴.۷)$$

بدین ترتیب، پس از محاسبه π'_n با استفاده از معادله مشخصه، می‌توان π_n را نیز از رابطه فوق به دست آورد.

$$\pi'_n = \frac{1-x_0}{r} + \frac{1-x'_0}{r} + \dots + \frac{1-x'_0}{r} \quad (۲۴.۷)$$

طبق رابطه (۲۸.۷)، بازای $r \geq j$ و با جایگزینی $r\lambda$ به جای λ

$$\pi'_j = \pi'_0 \frac{r\lambda}{\mu} x'_j$$

در نتیجه، بازای $r \geq n$ و با استفاده از رابطه (۲۴.۷)،

$$\pi_n = \frac{\pi'_0 r \lambda}{\mu} [x'_0 + x'_1 + \dots + x'_n] (x'_0)^n = A(x'_0)^n \quad (۲۵.۷)$$

که

$$A = \frac{\pi'_0 r \lambda}{\mu} [x'_0 + x'_1 + \dots + x'_n] \quad (۲۶.۷)$$

با این، پس از حل معادله مشخصه، π_n به همراه قابل محاسبه است. برای محاسبه L از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} n \pi_n = A \frac{x'_0}{(1-x'_0)^2} \quad (۲۷.۷)$$

سایر معیارهای ارزیابی را نیز با استفاده از رابطه‌های لیقیل بدست می‌آوریم.
مثال ۹.۰.۷ در یک مدل $E_7/M = 1$ اگر $r = 5$ و $\lambda = 8$ باشد، معادله مشخصه این مدل عبارت است از:

$$8x^5 - 18x + 10 = 0$$

نها ریشه بین صفر و یک معادله فوق عدد ۰.۷۲۵ است؛ به این ترتیب،

که A و B_i به شرح ذیر تعریف می‌شوند:

$$A = (m!)(m\mu - \lambda) \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^m \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(\lambda)^j}{j!} + m\mu \quad (29.7)$$

$$B_i = 1 \quad (50.7)$$

$$B_i = 1 - \frac{\sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j}{m\mu}, \quad i = 1, \dots, N \quad (51.7)$$

حالت خاص، در مدل $1/M/M$ رابطه (۲۸.۷) به شکل روابط زیر ساده می‌شود:

$$W_{ii} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda_i)} \quad (52.7)$$

$$W_{ii} = \frac{\lambda}{(\mu - \lambda_1 - \dots - \lambda_i)(\mu - \lambda_1 - \dots - \lambda_{i-1})}, \quad i = 2, \dots, N \quad (52.7)$$

پس از محاسبه W_{ii} ، سایر معیارهای ارزیابی از استنتاج لیتل به دست می‌آید. ضمناً بدینها این مدل تعادل موقعی وجود دارد که $\lambda/m\mu < \lambda_i = \rho$ باشد. اما اگر $\lambda_i > \rho$ باشد، فقط میانگین مدت زمان مشتریهای گروه N (یعنی پایین‌ترین اولویت) برابر باشد، از طرف دیگر، همان طور که مشاهده می‌شود، گروههایی با اولویت (یعنیها بیت می‌رسد. از طرف دیگر، همان طور که مشاهده می‌شود، گروههایی با اولویت بالاتر، کمتر متوجه مانند. روشن کلی اثبات این قضیه، بعداً در مینی بخش ارائه می‌شود.

مثال ۱۵.۷ تعداد دعاوی که به دادگاهی می‌رسد، براسامن فرایند بواسون (یامانگین ماهی ۱۵ عدد) است. تنها قاضی این دادگاه می‌تواند به طور متوسط به ۱۲ بروندۀ در ماه رسیدگی کند. مدت زمان رسیدگی به هر بروندۀ تیزدار ای توزیع نمایی فرض می‌شود. دعاوی از نظر این دادگاه بر سه نوع اند: اضطراری، هم‌عادی، که به ترتیب دارای اولویتی ۱ و ۲ و ۳ هستند و مقدار آنها به طور متوسط به ترتیب ۱۰٪، ۲۵٪، ۶٪ کل موارد دعاوی است. مدت زمانی که طول می‌کشد تا به هر یک بروندۀ رسیدگی شود، چقدر

از نظر کلی، دونوع نظام اولویت وجود دارد، که عبارت اندیاز: نظام اولویت با حق انقطاع و اولویت بدون حق انقطاع. در نظام اولویت با حق انقطاع، اگر مشتری با اولویت بالاتر وارد سیستم شود و خدمت دهنده مشغول ارائه خدمت بهمشتری با اولویت پایین‌تر باشد، خدمت دهنده موظف است کار خود را نیمه تمام گذارد و به مشتری با اولویت بالاتر خدمت ارائه کند. به این ترتیب، در این نظام حتی مشتری که مشغول گرفتن خدمت است نیز، باید تا بایان دریافت خدمت توسط مشتری با اولویت بالاتر صبر کند. مثلاً، بیمارستان را می‌توان می‌ستمی با نظم اولویت و حق انقطاع تصور کرد. زیرا فرض، به بیماری که احتیاج به عمل جراحی فوری داشته باشد، خارج از نوبت رسیدگی می‌شود و حتی ممکن است پردازش، که مشغول معااینه بک بیمار عادی است، نیز کارش را نیمه تمام گذازد تا به این بیمار فوری پردازد.

در نظم اولویت بدون حق انقطاع، اگر چه بمشتری با اولویت بالاتر زودتر خدمت ارائه می‌شود، این مشتری باید صبر کند تا خدمت دهنده کارش را تمام کند. به این ترتیب، در این نظام موافقی که ارائه خدمت به هر یک مشتری شروع شود، به دلیل ورود یک مشتری با اولویت بالاتر، خدمت فعلی قطع نخواهد شد.

در نظم اولویت، بین مشتریهای یک گروه، که دارای اولویت یکسان باشند، نوبت تعابیت می‌شود. مطابق فرارداد، گروه ۱ (بالاترین اولویت فرادراد)، و پس از آن به ترتیب گروههای ۲ و ۳ هستند.

باید توجه داشت که در نظم اولویت، معیارهای کلی سیستم ثابت می‌مانند. وجود اولویت، چیزی را که تغییر می‌دهد، زمان انتظار مشتریهای گروههای مختلف است. به عبارت دیگر، اگر بدون در نظر گرفتن اولویت، میانگین زمان انتظار هر مشتری در سیستم W باشد، با در نظر گرفتن اولویت، میانگین مدت انتظار هر مشتری باز هم W خواهد بود؛ اما، مشتری دارای اولویت بالاتر، کمتر از W مشتری دارای اولویت پایین‌تر، مشتری از W در سیستم می‌ماند. در این قسمت، هدف تعیین مدت زمان انتظار مشتریهایی با اولویتی‌ای کوتاه‌گون است.

برای بحث در مورد نتایج نظام اولویت، از فرادرادهای زیر استفاده می‌کنیم:

$$\lambda_{ii} \text{ آهنگ} \text{ ورود مشتری گروه } i, \quad \lambda_i = \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}$$

او W_{ii} ، به ترتیب معرف میانگین زمان انتظار هر مشتری گروه i در صرف و سیستم؛ او L_i ، به ترتیب معرف میانگین تعداد مشتریهای گروه i در صرف و سیستم است. قضیه ۱۵.۷ یک مدل $M/M/m$ با N گروه مشتری (از نظر اولویت) و بدون حق انقطاع را در نظر نگیرید. اگر نوع خدمت ارائه شده به همه گروهها یکسان (با آهنگ μ) باشد،

$$W_{ii} = \frac{1}{AB_{ii} + B_i}, \quad i = 1, \dots, N \quad (28.7)$$

$$\pi_0 = \frac{14}{34} \quad , \quad \rho = \frac{10}{22}$$

و طبق رابطه (۴۸.۶)

$$L_0 = 0.175$$

$$W_{00} = \frac{L_0}{\lambda} = 0.175$$

اما براساس نظام اولویت، طبق روابط (۴۹.۷) و (۵۰.۷) و (۵۱.۷) داریم:

$$A = 0.175$$

$$B_0 = 1, \quad B_1 = 0.958, \quad B_2 = 0.875, \quad B_3 = 0.583$$

درنتیجه، از رابطه (۴۸.۷)

$$W_{00} = 0.156$$

$$W_{01} = 0.122$$

$$W_{02} = 0.092$$

و میانگین زمان انتظار کل مشتریها عبارت است از:

$$W_0 = 0.175$$

که با نتیجه حاصل از مدل، بدون درنظر گرفتن نظم اولویت، تطبیق می‌کند.

درسیستمی که در آن نظم اولویت رعایت می‌شود، ممکن است نوع خدمت مورد نیاز مشتریهای گروههای مختلف نیز یکسان نباشد. فرض کنید μ_m معروف میانگین تعداد مشتریهای نوع m است، که توسط یک خدمت دهنده، در زمان واحد خدمت دریافت می‌دارند. در این صورت، نتایج یک نظم اولویت طبق قضیه زیر بیان می‌شود.

قضیه ۲۰.۷ یک مدل $M/M/1$ با N گروه مشتری (از نظر اولویت) و بدون حق انتطاع را در نظر بگیرید. اگر آهنگ خدمت دهی بهمشتریهای گروه k برابر با μ_k باشد،

$$W_{00} = \frac{\sum_{j=1}^N \frac{\lambda_j}{\mu_j}}{\left[1 - \frac{\lambda_1}{\mu_1} - \dots - \frac{\lambda_{N-1}}{\mu_{N-1}} \right] \left[1 - \frac{\lambda_N}{\mu_N} \right]} \quad (55.7)$$

است؟ تعداد پروندهای هر نوع از دعاوی در دادگاه چقدر است؟

حل: در این مدل 12 رعایت می‌شوند، $\mu = 12$ ، $\lambda_1 = 10$ ، $\lambda_2 = 2$ ، $\lambda_3 = 1$ ، $\lambda_4 = 10/12$ و $L = 5$ بود، اما با درنظر گرفتن اولویت و با استفاده از رابطه‌های (۵۱.۷) و (۵۲.۷) نتیجه می‌شود:

$$W_{00} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = 0.175$$

$$W_{01} = \frac{\lambda}{(\mu - \lambda_1)(\mu - \lambda_2 - \lambda_3)} = 0.122$$

$$W_{02} = \frac{\lambda}{(\mu - \lambda_1 - \lambda_2)(\mu - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)} = 0.092$$

اما میانگین کل مدت انتظار مشتری درسیستم، با توجه به اینکه تعداد مشتریهای هر گروه و یکسان نیست، از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$W_0 = \frac{\lambda_1}{\lambda} W_{00} + \frac{\lambda_2}{\lambda} W_{01} + \frac{\lambda_3}{\lambda} W_{02} = \frac{5}{12} \quad (52.7)$$

همان طور که متألهه می‌شود، میانگین مدت زمان انتظار برای کل مشتریها تغییر نمی‌کند. اما

$$L_1 = L_0 + \frac{\lambda_1}{\mu} = \lambda_1 W_{00} + \frac{\lambda_1}{\mu} = 0.16$$

$$L_2 = 0.122 \quad L_3 = 0.092$$

$$L = L_1 + L_2 + L_3 = 5$$

که در این مورد نیز میانگین کل تعداد مشتریهای داخل سیستم تغییر نمی‌کند. مثال ۲۰.۷ مثال ۱۵.۷ را مجدداً در نظر بگیرید. اگر تعداد قاضی از یک نفر بدرو فخر افزایش یابد، میانگین مدت زمان انتظار مشتریها چگونه تغییر خواهد کرد؟ حل: اگر در نظم اولویت، اولویت رعایت نشود، مدل حاصل یک مدل $M/M/2$ خواهد بود. در این صورت،

مشتری‌های دارای اولویت ۱ و ۲ هیچ‌گزیری نداشته‌اند.

قضیه ۳۰.۷ بک مدل $M/M/1$ با $N/M/M/1$ تک رو رفتاری (از نظر اولویت) و حق انقطاع را در نظر بگیرید. اگر نوع خدمت ارائه شده به عنوان تک رو رفتاری باشد،

$$W_1 = \frac{1}{\mu - \lambda_1} \quad (۵۶.۷)$$

$$W_i = \frac{\mu}{(\mu - \lambda_1 - \dots - \lambda_{i-1})(\mu - \lambda_1 - \dots - \lambda_i)} \quad i = 2, \dots, N \quad (۵۷.۷)$$

البته، رابطه (۵۶.۷) واضح است. زیرا در این سیستم می‌توان تصور کرد که ارائه خدمت فقط برای تک رو رفتاری ۱ است، مگر در وقت بیکاری که به سایر تک رو رفتاری هم خدمت ارائه می‌شود. در این صورت برای تک رو رفتاری ۱، بک مدل $M/M/1$ خواهد داشت.

حال تک رو رفتاری ۱ را بهم در نظر بگیریم. وجود تک رو رفتاری دیگر هیچ تأثیری بر این دو تک رو رفتار ندارد، لذا اگر مانند مدت زمان انتظار مجموع مشتری‌های ۱ و ۲ را با $W_{1,2}$ مشان دهیم، می‌توان با استفاده از مدل $M/M/1$ این مقدار را محاسبه کرد. اینکن باشد در نظر داشت که آنکه ورود مجموع مشتری‌های ۱ و ۲ برای $\lambda_1 + \lambda_2$ است، اما طبق رابطه (۲۱.۶)

$$W_{1,2} = \frac{1}{\mu - \lambda_1 - \lambda_2}$$

اما

$$W_{1,2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} W_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} W_2$$

با داشتن W_1 و W_2 می‌توان $W_{1,2}$ را محاسبه کرد. بدین معنی ترتیب W_1, W_2, \dots بدست می‌آید و رابطه (۵۷.۷) حاصل می‌شود.

مثال ۳۰.۷ مثال ۱۵.۷ را بافرض حق انقطاع مجدد در نظر بگیرید. در این صورت

$$W_1 = \frac{1}{12-1} = \frac{1}{11}$$

$$W_2 = \frac{12}{(12-1)(12-1-2)} = \frac{12}{22}$$

$$W_3 = \frac{12}{(12-1-2)(12-1-2-2)} = \frac{12}{20}$$

(که $= \lambda_0$ است)

همان طور که مشاهده می‌شود، اگر $\lambda_0 = \mu_1 = \mu_2 = \mu$ باشد، رابطه فوق در وابطه (۵۲.۷) و (۵۳.۷) تبدیل خواهد شد. روش کلی اثبات این قضیه بعداً ارائه می‌شود. مثال ۱۵.۷ مثال ۱۵.۷ را مجدد در نظر بگیرید. فرض کنید که نوع خدمت تک رو رفتاری مختلف با یکدیگر متفاوت باشد ($\lambda_1 = 15, \lambda_2 = 12, \lambda_3 = 11, \mu_1 = 12, \mu_2 = 11, \mu_3 = 10$ است) در این صورت میانگین مدت زمان انتظار هر تک رو رفتاری در صورت را محاسبه کنید. حل: ابتدا صورت کسر W_1 را محاسبه می‌کنیم.

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\lambda_j}{\mu_j} = \frac{1}{225} + \frac{2}{122} + \frac{7}{121} = 0.50762$$

در نتیجه،

$$W_{1,1} = \frac{0.50762}{1 - \frac{1}{15}} = 0.50816$$

$$W_{1,2} = \frac{0.50762}{(1 - \frac{1}{15})(1 - \frac{1}{15} - \frac{2}{12})} = 0.51065$$

$$W_{1,3} = \frac{0.50762}{(1 - \frac{1}{15} - \frac{2}{12})(1 - \frac{1}{15} - \frac{2}{12} - \frac{7}{11})} = 0.51226$$

قطع اولویت با حق انقطاع

همان طور که گفته شد، در این نظام ترازمانی که مشتری‌های دارای اولویت بالاتر در سیستم هستند، از ارائه خدمت به مشتری‌های دارای اولویت پایینتر خودداری می‌شود. در چنین سیستمی، حتی اگر موقعیع «خدمتی» دارای اولویت بالاتر، خدمت دهد، در حال خدمت دهنده مشتری دارای اولویت پایینتر باشد، موظف است که کاد خود را قطع کند و بلاهاصله به مشتری دارای اولویت بالاتر خدمت ارائه کند. ادامه خدمت قطع شده موقعی شروع می‌شود که دیگر مشتری دارای اولویت بالاتر در سیستم نباشد. بدین ترتیب، ارائه خدمت به یک مشتری ممکن است چندبار قطع شود.

در نظام اولویت با حق انقطاع، می‌توان تصور کرد که سیستم برای خدمت به مشتری‌های اولویت اول ایجاد شده است و فقط در موقعیع بیکاری به مشتری‌های تک رو رفتاری بعدی خدمت داده می‌شود. به همین ترتیب، وجود مشتری‌های با اولویت شماره ۳ و ۴ و ... بر کار

نتیجه می شود:

$$W_1 = 0.208515$$

به همین ترتیب، اگر نام کروهها در نظر گرفته شود،

$$W_{1,2,3} = 0.21008$$

و با توجه به رابطه

$$W_{1,2,3} = \frac{\sum \lambda_i W_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$$

نتیجه می شود:

$$W_3 = 0.21073$$

انبات قصیه ۱.۷ انبات این قصیه را فقط در ساده‌ترین حالت آن در نظر می‌گیریم، که مشتریها از نظر اولویت فقط به دلگزین تقسیم می‌شوند. برای اینکه بتواضع مسئله را در جا رچوب یک فرآیند مارکوف فرموله کنیم، حالت سیستم را به شرح زیر تعریف می‌کنیم. حالت سیستم به اساس حرف (*mnr*) مشخص می‌گردد، که *m* معروف تعداد مشتری‌های نوع ۱ (با اولویت بالاتر) در سیستم، *n* تعداد مشتری‌های نوع ۲ (با اولویت پایینتر) در سیستم و *r* نشانده‌شماره اولویت مشتری است، که در حال خدمت گرفتن است. مثلاً حالت (۱۰۵۸۹۲) به معنای این است که ۱۰ مشتری با اولویت ۱ و ۸ مشتری با اولویت ۲ در سیستم هستند و ضمناً یکی از مشتری‌های با اولویت ۲ در حال گرفتن خدمت است. بنابراین، ۱۰ مشتری نوع ۱ و ۷ مشتری نوع ۲ در صفت هستند. استثنای حالت صفر را با یک عدد نشان می‌دهیم. مودار آهنگ این مدل در شکل ۹.۷ نشان داده شده است. بر اساس این نمودار آهنگ، معادلات تعادلی را به شرح زیر می‌نویسیم:

$$\lambda\pi_0 = \mu(\pi_{0,1} + \pi_{0,2})$$

$$(\lambda + \mu)\pi_{0,1} = \lambda_1\pi_0 + \mu(\pi_{1,1} + \pi_{1,2})$$

$$(\lambda + \mu)\pi_{0,2} = \lambda_2\pi_0 + \mu(\pi_{1,1} + \pi_{1,2})$$

$$(\lambda + \mu)\pi_{m,1} = \lambda_1\pi_{m-1,0,1} + \mu(\pi_{m+1,0,1} + \pi_{m,1,1}), \quad m > 1$$

$$(\lambda + \mu)\pi_{m,2} = \lambda_2\pi_{m-1,0,2} + \mu(\pi_{m+1,0,2} + \pi_{m,1,2}), \quad m > 1$$

$$(\lambda + \mu)\pi_{m,n} = \lambda_2\pi_{m-1,n-1,2} + \mu(\pi_{m+1,n-1,2} + \pi_{m,n+1,2}), \quad m > 1$$

$$(\lambda + \mu)\pi_{m,n} = \lambda_1\pi_{m-1,n-1,1} + \lambda_2\pi_{m-1,n-1,2} + \mu(\pi_{m+1,n-1,1} + \pi_{m,n+1,1}), \quad m > 1, n > 0$$

و می‌توانیم مدت زمان انتظار کل مشتریها برابر است با:

$$W = \frac{\lambda_1}{\lambda} W_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda} W_2 + \frac{\lambda_3}{\lambda} W_3 = \frac{1}{2}$$

می‌دانیم که بدون در نظر گرفتن اولویت نزدیکی نتیجه برای کل سیستم به دست می‌آید. سعیا $\lambda_1 = 0.21073$, $\lambda_2 = 0.21008$, $\lambda_3 = 0.208515$ را با استفاده از استنتاج لیتل می‌توان محاسبه کرد، که عبارت اند از: $\lambda_1 = 0.21073$, $\lambda_2 = 0.21008$, $\lambda_3 = 0.208515$. همان طور که مشاهده می‌شود، در این حالت مدت زمان انتظار مشتری‌های گروه ۱ نسبت به نظم اولویت بدون حق انتقطاع کمتر و در مورد مشتری‌های گروه ۳ نسبت به این نظم بیشتر شده است. عبارت دیگر، اگرچه زمان انتظار در کل سیستم تغییر نمی‌کند، نظم اولویت با حق انتقطاع به نفع گروه‌های ۱ و ۲ و به زیان گروه ۳ تمام شده است.

حال همین مثال را برای $M/M/2$ در نظر بگیرید (که همچنان یک قاضی دوقاضی در دادگاه کار کشد). همان طور که گفته شد، وجود گروه‌های ۲ و ۳ از برای گروه ۱ مدارد. و می‌توان تصور کرد که سیستم فقط باین گروه خدمت می‌دهد. لذا، در مورد گروه ۱، مدل $M/M/2$ با $\lambda = 12$ و $\lambda = 1$ می‌باشد. می‌توان تصور کرد W محاسبه می‌شود. حال مجموع گروه‌های ۱ و ۲ را در نظر بگیرید. در این حالت، می‌توان تصور کرد که گروه ۳ مقتضی ندارد. لذا، $W_{1,2} = 0.21073$ را در نظر بگیرید. در این حالت، می‌توان تصور کرد می‌شود و بس از آن W_3 از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$W_{1,2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} W_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} W_2,$$

و نتیجه W_3 محاسبه خواهد شد.اگر فقط گروه یک در نظر گرفته شود، با استفاده از مدل $M/M/2$ و با $\lambda = 12$ و $\lambda = 1$ نتیجه می‌شود:

$$W_1 = 0.20835$$

اگر فقط گروه‌های یک و دو در نظر گرفته شود، با استفاده از مدل $M/M/2$ و با $\lambda = 12$ و $\lambda = 1$ نتیجه می‌شود

$$W_{1,2} = 0.20846$$

با توجه به رابطه

$$W_{1,2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} W_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} W_2$$

$$\lambda_1 \prod_{m=1}^{n-1} \pi_{m-1, m}$$

$$(\lambda + \mu)\pi_{m,n} = \lambda_1\pi_{m-1,n} + \lambda_2\pi_{m,n-1,n}, \quad m \geq 0, n \geq 1 \quad (58.7)$$

از طرف دیگر، احتمال بودن n مشتری در سیستم از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\pi_n = \sum_{m=0}^{n-1} (\pi_{m,n-1,n} + \pi_{m,n-m,n}) \quad (59.7)$$

پاتوجه به اینکه احتمال بودن n مشتری در سیستم (صرف نظر از واشنگی) به نوع اولیت آنها) بستگی به پایه انتخاب مشتری ندارد، مقدار این احتمال بر اساس π / M در مدل ۱ است، یعنی

$$\pi_n = (1 - \rho)\rho^n \quad (60.7)$$

به همین ترتیب، در صد مشغول بودن سیستم، صرف نظر از اینکه خدمت دهنده به کدام گروه خدمت می‌دهد، بر اساس با م است. از طرفی، در صدی از زمان که خدمت دهنده به مشتریهای نوع ۱ و ۲ خدمت می‌دهد، متناسب با تعداد مشتریهای نوع ۱ و ۲، یعنی λ_1 و λ_2 است، بنابراین

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \pi_{m,n} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \rho = \frac{\lambda_1}{\mu} \quad (61.7)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \pi_{m,n} = \frac{\lambda_2}{\mu} \quad (62.7)$$

با استفاده از معادلات تعادلی و روابط (۵۹.۷) تا (۶۲.۷) می‌توان نتایج کلی زیر را بدست آورد، که حالت خاص و ابتدیهای (۵۲.۷) و (۵۳.۷) هستند.

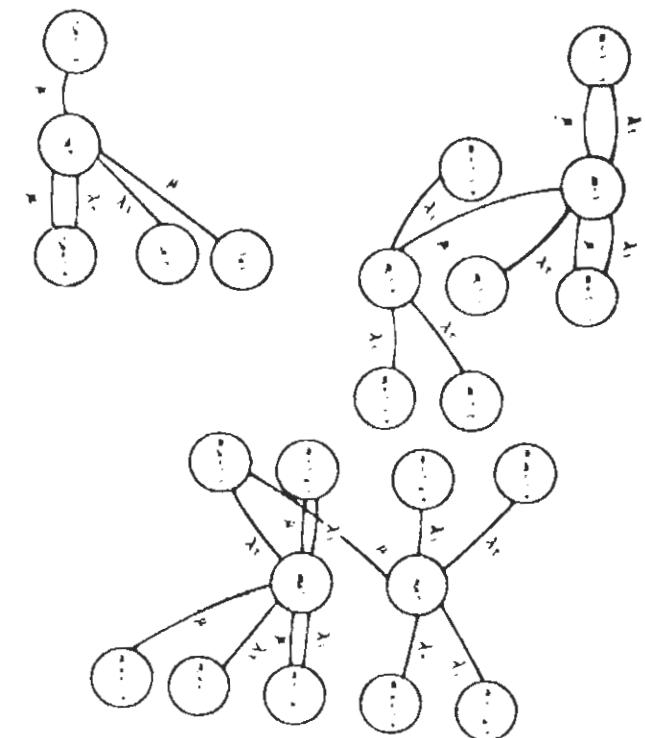
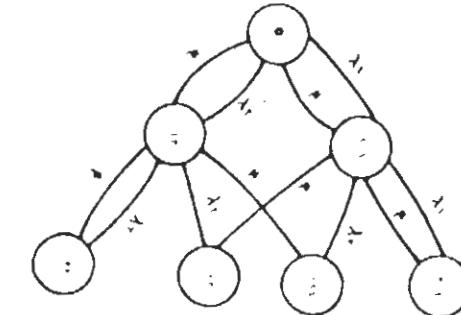
$$L_1 = \frac{(\lambda_1/\mu)(1 + \rho - \lambda_1/\mu)}{1 - \lambda_1/\mu}$$

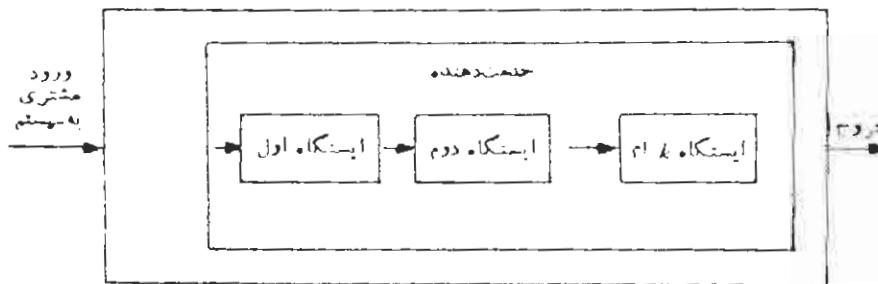
$$L_2 = \frac{\rho \lambda_2/\mu}{1 - \lambda_1/\mu}$$

$$W_{q1} = \frac{\lambda_1}{\mu(\mu - \lambda_1)}$$

$$L_{q1} = \frac{(\lambda_1/\mu)(1 - \lambda_1/\mu + \rho \lambda_1/\mu)}{(1 - \rho)(1 - \lambda_1/\mu)}$$

$$L_{q2} = \frac{\rho \lambda_2/\mu}{(1 - \rho)(1 - \lambda_1/\mu)}$$





شکل ۱۰.۷ یک سیستم صد ما خدمات دهنده های سری

دیافت خدمت نیز برای همه یکسان است. با این ترتیب، مشتری پس از ورود به سیستم در صفحه ایستگاه اولی منتظر می‌ماند. پس از دریافت خدمت در ایستگاه اول، به صفحه دفعی ایستگاهی بوندد. بالاخره پس از دریافت خدمت در K این ایستگاه هم از سیستم خارج می‌شود.

یک خط توانید را در نظر بگیرید. هر قطعه، ایستگاه های مختلف کار را طی می‌کند تا از خدمت خارج شود. البته بدینه است که در خطوط تولید مدت زمان دریافت خدمت لزوماً نهایی نیست.

طریقیت صد در ایستگاه های مختلف می‌توانند متفاوت باشد. ابتدا حالی را بررسی می‌کنیم که طیقت صد در همه ایستگاهها نامتناهی باشد. در جین حالی، وبا استفاده از فاصابای ذیرنشان داده می‌شود که هر ایستگاه خدمت را می‌توان یک مدل نمایی $M/M/m$ درس کرد، که ورود مشتریها به آن طبق فرایند پواسون با پارامتر λ است.

قبل از بحث درباره رابطه بین ایستگاه های خدمت در یک شبکه سری، ابتدا لازم است تابع توزیع زمان می‌دوخروج متواالی مشتریها یک سیستم مورد بررسی قرار گیرد. **قضیه ۱۰.۷** در یک سیستم صد، اگر $\lambda < \mu$ باشد، آنهنچه خروج مشتریها برابر با آنقدر ورود آن و اگر $\lambda > \mu$ باشد، آنهنچه خروج برابر با مجموع آنهنچه خدمت مشتریهاست.

در قضیه فوق باید در نظر داشت که اگر $\lambda > \mu$ باشد، بدینه است که خدمت دهنده گان، دائمآ مشغول خدمت هستند و درنتیجه آنهنچه خروج برابر با ظرفیت کل خدمت دهنده گان، یعنی $m\mu$ است. اما اگر $\lambda < \mu$ باشد، طبیعتاً خدمت دهنده گان مطور متوسط (ρ) درصد اوقات مشغول ارائه خدمت هستند و آنهنچه خروج، کمتر از ظرفیت آنها، و برابر با آنهنچه ورود مشتریهاست.

مثال ۱۰.۷ یک مدل $M/M/2$ را در نظر بگیرید، که هر ساعت به طور متوسط ۳۵ مشتری وارد می‌شوند. مدت زمان خدمت، نهایی میانگین ۳ دقیقه است. درنتیجه، هر خدمت دهنده می‌تواند به ۲ مشتری و کل سیستم به ۵۰ مشتری در ساعت خدمت

$$W_{ss} = \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)(\mu - \lambda_s)}$$

۷.۷ شبکه های صد

در سیستم های صد که در بخش های قبل مورد بررسی قرار گرفتند، خدمت از یک مرحله تشکیل شده بود. به عبارت دیگر، در چین سیستم هایی فقط یک نوع خدمت ارائه می‌شود و همه مشتریها برای دریافت آن مراجعت می‌کنند. در عمل، سیستم هایی دیگر هم وجود دارند که در آنها چند نوع خدمت عرضه می‌شود و هر مشتری برای دریافت نمادی از آنها (دونه لر و ما همه آنها) مرا جمعیتی کند. در واقع، این سیستمها را می‌توان مجموعه چند می‌سیستم فرعی فرض کرد، که هر کدام از آنها با داشتن تعدادی خدمت دهنده، مستقل خدمت مشخصی را ارائه می‌دهند، ولی از نظر ورود مشتری، به یکدیگر وابسته هستند. در این سیستمها، مجموعه خدمت درای نموده، تعمیر گاه از مردمی را در نظر بگیرید که در آن تعمیر کار آن مעתقال مشغول فرمان، نظیم موئور و...) را انجام می‌دهد، یک ایستگاه خدمت می‌گویند. در هر ایستگاه خدمت، یک یا چند خدمت دهنده (تعمیر کار) به طور متوالی کار می‌کنند. یک مشتری (از مردم) ممکن است فقط به یک نوع تعمیر (ایستگاه خدمت) نارداشته باشد و ای انومیلهای هم به چند قسمت تعمیر گاه مراجعت می‌کند. این اتو یا همچنان پس از دریافت خدمت از یک نمایه بر کار، از خدمت تعمیر کار آن نوع دیگر هم اسناده می‌کند. در این تعمیر کار، اگرچه هر گروه تعمیر کار (ایستگاه خدمت) از نظر ارائه خدمت مستقل است، اما با توجه به اینکه مراجعت آنها ممکن است سرویس گاه ایستگاه های خدمت باشد، لذا نمی‌توان هر ایستگاه خدمت را یک سیستم صد مستقل و جدا از سایر ایستگاه ها تقسیم کرد.

در این بخش، حالت خاصی از شبکه های صد مورد بررسی قرار می‌گیرد، که در داده های این شبکه ها، مدت زمان خدمت در هر ایستگاه نمایی فرسان می‌شود. در این مدل، هر مشتری ابتدا به ایستگاه شماره یک مراجعت و پس از دریافت خدمت به ایستگاه دوم و به همین ترتیب به سایر ایستگاه های مراجعت می‌کند. همانطور که در شکل ۱۰.۷ مذکور می‌شود خدمت دهنده، در آنچه خدمت دهنده می‌شود خدمت دهنده، در پارامتر λ و مدت زمان خدمت در هر ایستگاه نمایی فرسان می‌شود. در ایستگاه شماره i ، $(i=1, 2, \dots, K)$ ، نداد خدمت دهنده m_i و میانگین مدت زمان خدمت μ_i است. در یک سیستم سری، همه مشتریها متقاضی هر گونه خدمت هستند و میزان تعمیر

$$P(E > t | N = 0) = P(T + X > t) = \frac{\mu e^{-\lambda t} - \lambda e^{-\mu t}}{\mu - \lambda} \quad (۶۶.۷)$$

(این اث رابطه فوق در مسئله شماره ۲۹ فعل ۳ خواسته شده است)
پس از جایگزین کردن روابط (۶۴.۷) و (۶۵.۷) در رابطه (۶۳.۷) نتیجه می شود که،

$$P(E > t) = e^{-\lambda t}$$

قضیه فوق در مورد مدل‌های $M/M/m$ نیز صادق است. قضیه زیر، بدون اینکه اثبات آن ارائه شود، این موضوع را بیان می کند
قضیه ۶۶.۷ دریک مدل $M/M/m$, با $\lambda < \rho$ و بدون نامناهی بودن ظرفیت، زمان بین دو خروج متوالی مشتریها متغیر تصادفی نمایی با پارامتر λ (آهنگ ورود مشتریها) است

با استفاده از قضیه زیر، شبکه‌های مری را می توان تحلیل کرد.
قضیه ۶۷.۷ یک سیستم سری با K ایستگاه خدمت را در نظر بگیرید. ورود مشتریها به سیستم (یا ورود مشتریها به ایستگاه اول) براساس فرایند بواسون (با پارامتر λ) و مدت زمان خدمت در هر ایستگاه، نمایی فرض می شود. در هر ایستگاه تعدادی خدمت‌دهنده مشغول خدمت هستند. در این صورت، هر ایستگاه خدمت را می توان یک مدل مستقل $M/M/m$ برشمرد. که آهنگ ورود به آن همان آهنگ ورود مشتریها به سیستم (λ) است، شرط نصوص کرده. بر اینکه در همه ایستگاهها ظرفیت صفت نامناهی، و مجموع آهنگ خدمت دهی خدمت دهنگان آن ایستگاه از λ بیشتر باشد.

اثبات: در مورد اولین ایستگاه موضوع روشن است. طبق قضیه ۶۷.۷، مشتریها طبق فرایند بواسون با آهنگ λ از ایستگاه اول خارج و به ایستگاه دوم وارد می شوند. لذا، ایستگاه دوم نیز یک مدل $M/M/m$ با آهنگ ورود λ است. به عنین ترتیب، بقیه ایستگاهها را نیز می توان سیستمهای مستقل $M/M/m$ نصوص کرد.

با استفاده از قضیه ۶۷.۷ و با توجه به اینکه می توان ایستگاه‌های خدمت را مستقل فرض کرد، محاسبه معیارهای ارزیابی سیستم سری به سهولت انجام می شود. به عبارت دیگر، اگر $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ معرف احتمال بودن n مشتری در مرحله اول، n_1, n_2, \dots, n_n مشتری در مرحله n ام باشد،

$$\pi_{n_1, n_2, \dots, n_n} = \pi_1^{n_1} \pi_2^{n_2} \dots \pi_n^{n_n} \quad (۶۷.۷)$$

که π_i معرف احتمال بودن n_i مشتری در ایستگاه i ام است.

ارائه کند. اما چون تعداد مشتریها بی کمتر از این تعداد است، لذا در هر ساعت به طور متوسط فقط ۳۵ مشتری خدمت دریافت و از سیستم خارج می شوند. در این مثال، اگر آهنگ ورود مشتریها از ۳۵ به ۵۵ تغییر کند، $\lambda > \mu$ ، و ظرفیت خدمت دهندگان کمتر از میزانی است که بتوانند تقاضای مشتریان را تامین کنند و لذا طول صفت مرتب افزایش می باید و بهینهایت می رسد. بدین ترتیب، خدمت دهنگان همواره باید کار کنند و در نتیجه آهنگ خروج برابر با ۴۵ خواهد بود.

با استفاده از قضیه زیر، نشان داده می شود که در مدل‌های نمایی نه تنها آهنگ خروج برابر با آهنگ ورود مشتریهاست، بلکه تابع نوزیع زمان بین دو خروج متوالی مشتریها نیز با تابع نوزیع زمان بین دو ورود آنها یکسان است (بهشرط اینکه $\lambda < \mu$ و ظرفیت صفت نامناهی باشد).

قضیه ۶۸.۷ در یک مدل $1/M/m$ با $\lambda < \mu$ و بدون نامناهی در ظرفیت صفت، زمان بین دو خروج متوالی مشتریها، مشتری تصادفی نمایی با پارامتر λ (آهنگ ورود مشتریها) است.

اثبات. یک لحظه مشخص را، که یک مشتری از سیستم خارج می شود، در نظر بگیرید. زمان بین دو خروج متوالی مشتریها، در واقع مدت زمانی است که طول می کشد تا مشتری بعدی از سیستم خارج شود. این متغیر تصادفی را با E نشان می دهیم و هدف محاسبه $P(E > t)$ است. حال فرض کنید که در لحظه خروج مشتری مورد نظر، تعداد مشتری در سیستم برابر با N باشد. در این صورت،

$$P(E > t) = P(E > t | N = 0)P(N = 0) + P(E > t | N > 0)P(N > 0) \quad (۶۸.۷)$$

با استفاده از روابط موجود در مدل $1/M/m$ داریم:

$$P(N > 0) = \rho \quad , \quad P(N = 0) = \pi = 1 - \rho \quad (۶۹.۷)$$

از طرف دیگر، اگر در لحظه مورد نظر، تعدادی مشتری دیگر هم در سیستم باشند، مدت زمان E ، با مدت زمانی که طول می کشد تا مشتری بعدی از سیستم خارج شود، برابر با مدت زمان دریافت خدمت (یا X) توسط مشتری بعدی است. لذا،

$$P(E > t | N > 0) = P(X > t) = e^{-\mu t} \quad (۶۹.۷)$$

اما، چنانچه در لحظه خروج مشتری مورد نظر، هیچ مشتری دیگری در سیستم نباشد، مدت زمانی که طول می کشد تا مشتری بعدی خارج شود، برابر با مجموع مدت زمانی که طول می کشد تا اولین مشتری وارد سیستم شود (یعنی T) و مدت زمان دریافت خدمت توسط همین مشتری (یعنی X) است. لذا

و میانگین رمان انتقال در سیستم بر ابرامت با:

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = ۳۱۷$$

باید توجه داشت که در شبکه‌های سری، اگرچه برای محاسبه معیارهای ارزیابی سیستم می‌توان ایستگاه‌های خدمت را مستقل فرض کرد، ولی این موضوع به معنای آن نیست که مدت زمان انتظار یک مشتری مشخص در یک ایستگاه مستقل از مدت زمان انتظار او در صابرای ایستگاهها باشد. مثلاً ۳۰ آخر همین مفصل، این موضوع را نشان می‌دهد. لیکن، برای مشتری‌ها به طور متوسط (ونه برای هر مشتری مشخص) معیارهای ارزیابی را می‌توان براساس استفاده ایستگاهها بدست آورد.

سیستمهای سری یا ظرفیت متناهی صفر

حال فرض کنید که ظرفیت صفر در بعضی از ایستگاه‌های خدمت متناهی باشد. به عنوان نمونه، یک ایستگاه را در نظر بگیرید که ظرفیت صفر در آن برابر با صفر (یا هر عدد دیگر) باشد، در این صورت، امکان دارد که یک مشتری پس از دریافت خدمت از مرحله قبلی وارد این ایستگاه شود و مواجه با نکلی بودن ظرفیت این ایستگاه گردد، در چنین حالتی دو اتفاق می‌توانند بروند.

۱. این مشتری از سیستم خارج شود و خدمتی را که در ایستگاه‌های بعدی از آن می‌شود، از سیستمهای دیگری دریافت کند. در این حالت، فرض می‌شود که این مشتری دیگر بدان سیستم برخیز گردد.

۲. این مشتری در ایستگاه قبلی منتظر بماند. در این حالت، خدمت دهنه ایستگاه قبلی اجراء از ادامه خدمت به مشتری‌های دیگر باز می‌ماند؛ زیرا، فضا و یا امکانات ارائه خدمت توسط این مشتری اشغال شده است.

مثال ۱۶.۷ سیستم صفری را در طور یکپاره که از دو ایستگاه خدمت به طور سری تشکیل شده است، ظرفیت صفر در هر دو ایستگاه برابر با صفر است. درود مشتری‌ها به سیستم براساس فرایند پواسون با بارامترا λ و زمان خدمت در هر ایستگاه دارای توزیع نمایی با پارامترهای β و γ مفروض می‌شود. چنانچه مشتری پس از پایان دریافت خدمت از ایستگاه اول، به علت پر بودن ایستگاه دوم نتواند وارد آن ایستگاه شود، اجراء دارد که در همان ایستگاه اول منظر بماند. در این سیستم حالت‌های مختلف عبارت اند از:

(۱) هردو ایستگاه خالی است.

(۲) ایستگاه اول دارای مشتری و ایستگاه دوم خالی است.

(۳) ایستگاه اول خالی و ایستگاه دوم دارای مشتری است.

(۴) در هردو ایستگاه یک مشتری در حال دریافت خدمت است.

(۵) در ایستگاه اول مشتری خدمت را دریافت داشته و منتظر است که ایستگاه

$$L = L_1 + L_2 + \dots + L_n \quad (۱۶.۷)$$

که L_i میانگین تعداد مشتری‌هایی است که در مرحله i درحال دریافت خدمت هستند، و براساس روابط مدل $M/M/m$ قابل محاسبه است. در مرور دایر معیارهای ارزیابی نیز به همین ترتیب عمل می‌شود

مثال ۱۶.۸ در یک تعمیرگاه، تعمیر یک ماشین از سه مرحله تشکیل می‌شود. مرحله اول بیاده کردن ماشین، مرحله دوم تشخیص و رفع عیب و مرحله سوم سوار کردن ماشین است. مدت زمان لازم برای اجرای هر مرحله، مغایر تصادفی نمایی است، و میانگین آنها به ترتیب ۲ و ۱۶۲ روز است. تفاضا برای تعمیر ماشین برآسان فرایند پواسون است و به طور متوسط هر ۱۰ روز یک ماشین برای تعمیر به این تعمیرگاه می‌رسد. در مرحله سوم دونه تعمیر کارکار می‌کند، ولی در مراحل اول و دوم فقط یک تعمیرگاه مشغول است. احتمال اینکه در یک لحظه فقط مرحله دوم دارای مشتری باشد، چیست؟ احتمال اینکه دو مشتری در سیستم باشند، چیست؟ میانگین مدت زمان انتظار هر مشتری در سیستم چقدر است؟

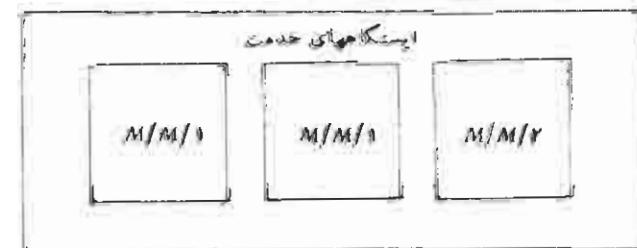
$$\lambda = \frac{1}{2}, \quad \mu_1 = \mu_2 = 1, \quad \mu_3 = \frac{1}{10}$$

است (شکل ۱۶.۷). در هر سه ایستگاه ρ_i است. احتمال اینکه در یک لحظه فقط مرحله دوم دارای مشتری باشد، برای اینکه مرحله اول **و همچوں** مستقل از اینکه مرحله سوم دارای مشتری باشد، یعنی به ازای ρ_2 است

$$\pi_{100} = \pi_{200} = \pi_{100}(\rho_2)(\rho_3) = (1 - \rho_1)\rho_2\rho_3 = 0.05$$

احتمال اینکه دونفر مشتری در سیستم باشند، برای ازای $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3$ است، به شرط اینکه احتمال اینکه دونفر مشتری در سیستم باشند، برای ازای $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3$ است، به شرط اینکه

$$\pi_{200} + \pi_{100} + \pi_{010} + \pi_{001} = 0.15$$



شکل ۱۶.۷ سیستم سری مراده به مثال

ایستگاه با مستقیماً از خارج وارد می‌شوند یا از ایستگاه‌های دیگر مراجعت می‌کنند. شبکه‌های صفت سیار متوجه هستند و حل اکثر آنها، با روش‌های تحلیلی ممکن نیست. حالات خاصی که شبکه‌های جاکسون نامیده می‌شود، بر اساس مفروضات زیر است.

مفروضات شبکه‌های صفت جاکسون

- ورود مشتریها از خارج سیستم به ایستگاه خدمت شاره از طبق فرایند پواسون با آهنگ λ (به ازای $K = 1, 2, \dots, K$) است.
- مدت زمان خدمت در ایستگاه شماره i ، متغیری تصادفی و نسبی با پارامتر μ_i و مستقل از مدت خدمت در سایر ایستگاهها فرض می‌شود.
- ظرفیت صفت در همه ایستگاهها نامتناهی است.

د. یک مشتری که از ایستگاه i خارج می‌شود، به احتمال μ_i دریافت خدمت به ایستگاه j مراجعت می‌کند. احتمال اینکه مشتری پس از دریافت خدمت از ایستگاه i ، از سیستم خارج شود را با μ_{ij} نشان می‌دهند.

حالات خاصی می‌بینیم که مشتری پس از خدمت خاص از شبکه‌های جاکسون فرض می‌شود، که در آن

$$\lambda_j = 0 \quad (\text{به ازای } j = 1, 2, \dots, K) \quad \lambda_i = \lambda$$

آهنگ ورود مشتریان به هر ایستگاه همان طور که تلفظ شد، ورود به ایستگاه برد و نوع آن، یا از خارج سیستم و یا از سایر ایستگاهها، بنابراین، اگر λ معروف آهنگ ورود مشتریها به ایستگاه زرام باشد،

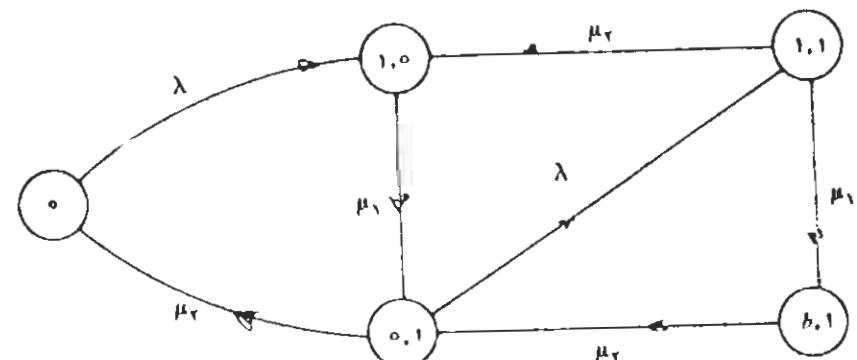
$$\lambda_j = \lambda_i + \sum_{k=1}^K \lambda_k p_{kj}, \quad j = 1, 2, \dots, K \quad (69.7)$$

همان طور که مشاهده می‌شود، $\mu_i P_i$ آهنگ مشتریهایی است که پس از دریافت خدمت در ایستگاه زرام به ایستگاه ز مراجعه می‌کنند.

بازخورد

در حالت کلی، یک مشتری پس از دریافت خدمت در ایستگاه زرام، ممکن است باز هم به همین ایستگاه برمی‌گردد، تا مجدداً خدمت دریافت کند. به این حالت بازخورد می‌گوییم. بازخورد می‌تواند بلا فاصله باشد، یعنی $\mu_i > \mu_j$ و یا مشتری پس از مراجعت به ایستگاه‌های مختلف مجدداً به ایستگاه زرام برمی‌گردد.

برای نمونه یک قطعه، در خط تولید، ممکن است پس از تقدیر ایند بنک ایستگاه،



شکل ۱۲.۷ نمودار آهنگ مثال ۱۶.۷

دوم حالی شود و یک مشتری هم در ایستگاه دوم مشغول دریافت خدمت است. با این توجه داشت که حالت‌های شماره ۲ و ۵ با یکدیگر متفاوت‌اند، اگرچه در هر دو حالت دوم مشتری در یک ایستگاه وجود دارد. نمودار آهنگ این مدل در شکل ۱۲.۷ نشان داده شده است. معادلات تعادلی در این سیستم به شرح زیرند.

$$\lambda \pi_0 = \mu_2 \pi_{0,1}$$

$$\mu_1 \pi_{0,0} = \lambda \pi_0 + \mu_2 \pi_{0,1}$$

$$(\lambda + \mu_2) \pi_{0,1} = \mu_1 \pi_{0,0} + \mu_2 \pi_{0,1}$$

$$(\mu_2 + \mu_3) \pi_{0,1} = \lambda \pi_{0,1}$$

$$\mu_2 \pi_{0,1} = \mu_3 \pi_{1,1}$$

پس از حل دستگاه معادلات فوق، محاسبه می‌بینیم ارزیابی سیستم ممکن می‌شود.

$$\pi_0 = \left[1 + \frac{\lambda}{\mu_1} + \frac{\lambda}{\mu_2} + \frac{\lambda^2}{\mu_1 \mu_2} + \frac{\mu_1 \lambda^2}{\mu_2 (\mu_1 + \mu_2)} \right]^{-1}$$

شبکه‌های صفت در حالت کلی

در یک شبکه صفت، که لزداً یک میکسین می‌باشد، فرض می‌شود که K ایستگاه خدمت وجود دارد. مشتری نیاز به خدمات بعضی از ایستگاه‌ها دارد و ضمناً ترتیب مراجعت او نیز از قبل مشخص نشست. بدین ترتیب، مشتری وقی وارد سیستم شود، برای اولین بار ممکن است به هر کدام از ایستگاه‌های خدمت مراجعت کند. پس از دریافت خدمت از این ایستگاه، به عنوان این دیگر می‌تواند وارد شود. بدین ترتیب، مشتری هیچ مر

مشتری در اینستگاه اول، π_1 مشتری در اینستگاه دوم و ... π_n مشتری در اینستگاه n ام است.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، با وجود اینکه اینستگاهها، سیستم‌های نمایی نیستند، برای محاسبه تابع نوریع تعداد مشتریان، می‌توان سیستم را دارای K مدل نمایی مستقل فرض کرد. به همین ترتیب،

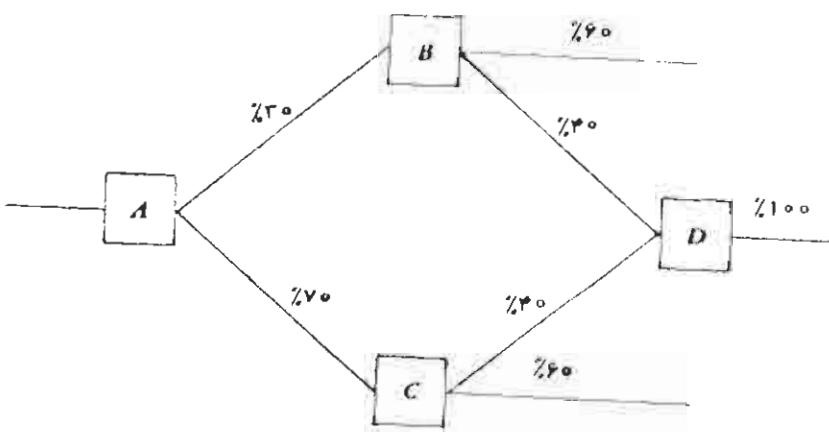
$$L = L_1 + L_2 + \dots + L_n$$

که L معرف میانگین تعداد مشتری در اینستگاه n ام است.
مثال ۱۳۰۲ در یک درمانگاه، بیماران ابتدا برای ثبت نام و تکمیل پرونده به قسمت A مراجعه می‌کنند. این درمانگاه دارای مه پرسنل B و C و D است. ۳۵ درصد بیماران به پرسنل B و ۷۵ درصد به پرسنل C مراجعه می‌کنند. هر کدام از این دو پرسنل نیز ۴۵ درصد بیماران خود را برای تکمیل معایبات به پرسنل D ارجاع می‌دهند. تعداد بیمارانی که به این درمانگاه مراجعه می‌کنند، فرایند پراسون با میانگین ساعتی ۱۶ بیمار است. مدت زمان ثبت نام و تکمیل پرونده و همچنین معاينة بیماران، متغیرهای تصادفی نمایی با میانگین و ترتیب ۳، ۵ و ۷۵ و ۷۵ و ۷۵ دقیقه است. مدت زمان انتظار هر مشتری در سیستم چقدر است؟

حل: این سیستم صفت یک شبکه جاگرون و بدون بازخورد است، این شبکه را به صورت ذیر می‌توان نشان داد (شکل ۱۳۰۷).

در این مدل،

$$p_{AB} = 0.56, p_{AC} = 0.42, p_{AD} = 0.42, p_{BC} = 0.42, p_{BD} = 0.42, \lambda_B' = \lambda_C' = \lambda_D' = 0,$$



شکل ۱۳۰۲ شبکه مثال ۱۷.۷

به علت عدم تنطیم با استاداردهای آنالیز کیفیت، مجدداً به همان اینستگاه برای اصلاح مرستاده شود.

قضیه ۱۳۰۲ در یک شبکه صفت با معرفضات فوق، اگر تمام حالات بدون بازخورد باشد، ورودی تمام اینستگاهها بر اساس فرایند پراسون است.

بدین ترتیب، در یک شبکه صفت با معرفضات فوق و بدون بازخورد، هر اینستگاه مسفل (به صورت یک مدل نمایی عمل می‌کند).

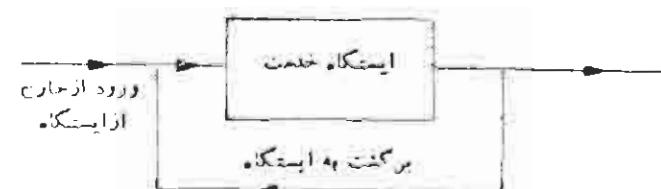
اما چنانچه یک اینستگاه خدمت دارای بازخورد (اعم از مستقیم یا غیر مستقیم) باشد، ورودی کلی به آن اینستگاه، دیگر طبق هرایند پراسون نخواهد بود. در شکل ۱۳۰۷، چنین اینستگاهی نشان داده است. مشتریها می‌کنند که برای دریافت خدمت مراجعت می‌کنند، بر دو نوع اند. تعدادی از آنها از خارج سیستم وارد می‌شوند و تعدادی از آنها هم مشتریها فیلی اینستگاه هستند، که برای دریافت خدمت مجدد به اینستگاه برمی‌گردند. در این اینستگاه، حتی اگر تعداد مشتریها بیکم می‌گردند، بر اساس فرایند پراسون باشند، چون مشتریهای بازخوردهای، فرایند پراسون از آنها هم مشتریهاشند. لذا کل ورودی سیستم لر موطن فرایند پراسون نیست.

بنکه حال توجه این است که حتی در مرور سیستم‌هایی که بازخورد دارند، اگرچه ورودی اینستگاهها دیگر نمی‌تواند بر اساس فرایند پراسون باشد و نتیجتاً هر اینستگاه طبق مدل نمایی عمل نمی‌کند، ولی با استفاده از قضیه زیر، روابطی به دست می‌آید که می‌توان تغییر مدهایی متعلق به آنها برخود دکرد.

قضیه ۱۳۰۷ یک شبکه صفت با معرفضات فوق (با بازخورد و با بدون بازخورد) را، که در همه اینستگاههای آن π معرفضات صفت نامتناهی است، در نظر بگیرید. در این صورت، در درازمدت راه راه رهیشه برقرار است:

$$(1) \quad \pi_{n_1, n_2, \dots, n_k} = \sum_{m_1, m_2, \dots, m_k} \pi_{m_1, m_2, \dots, m_k}$$

که $\pi_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ معرف احتمال بودن n_i مشتری در اینستگاه i و $\pi_{m_1, m_2, \dots, m_k}$ معرف بودن m_i



شکل ۱۳۰۷ اینستگاه خدمت با بازخورد

می نوان بررسی کرد که رابطه $\lambda = 1$ همچنان مفادی است.
 مثلاً 18.7 بیک سیستم صفت را در نظر بگیرید، که سه استکاه خدمت 1 و 2 و 3 داشته باشد. ورود مشتریها از خارج به این استگاهها طبق فوابند یوسون به ترتیب با آهنگ 5 و 10 و 15 است. مدت زمان خدمت، نیایی به ترتیب با آهنگ 15 و 25 و 45 است. مشتریها که از استکاه 1 خارج می شوند، با احتمالات مساوی سه استگاههای 2 و 3 و 4 روند. مشتریها که از استکاه 2 خارج می شوند، همکنی به استکاه 3 می روند. جمله در صد مشتریها ایستگاه 3 به ایستگاه 2 بر می کردند و بقیه از سیستم خارج می شوند. 1 و 17 را محاسبه کنید.

حل: این سیستم یک شبکه صفحه بازخود است. اگر آهنگ ورود مه اینکاهایی داشته باشد، آنرا بعنوان نامی، طبق رابطه (۷-۶۴) بدست نسبت λ_1 و λ_2 و λ_3 بنامیم.

$$\lambda_1 = \delta$$

$$\lambda_1 = 10 + 0.2\lambda_1 + 0.4\lambda_2$$

$$\lambda_r = 15 + 0.2\lambda_1 + \lambda_2$$

نتیجہ میں شود کہ: $\lambda_1 = 5$ و $\lambda_2 = 325$ و $\lambda_3 = 50$ است
و این ترتیب،

$$L = L_x + L_y + L_z = \frac{r_1}{r}, \quad \rho_x = \frac{\delta}{\epsilon}, \quad \rho_y = 0.2 \times 10^{-15} \text{ g/cm}^3, \quad \rho_z = 0.2 \times 10^{-15} \text{ g/cm}^3$$

برای محاسبه λ_1 از رابطه $\lambda_1 = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$ است که آهنگ ورودی سیستم $\lambda_1 = \frac{1}{15 + 10 + 15} = \frac{1}{40} = 0.025$ است، که این مقدار برای ما مجموع آهنگ و داده با استفاده از مخفتف نخواهد بود، در رابطه لیل، مبنظر از آهنگ ورود، میتوانیم کل مشتریها را است که در واحد زمان از خارج سیستم وارد آن می شوند. بنابراین، مشتریها را هر اینستگاه را، که ممکن است چندبار وارد اینستگاه-ای مختلف شوند، باید فقط یک بار در کار سیستم مبنظر کرد. بدین ترتیب

$$W = \frac{L}{\lambda_1' + \lambda_2' + \lambda_3'} = \frac{r_1}{1.8}$$

۱۰۷

- ۴- در یک سیستم صاف، ورود مشتریها بر اساس فرایند بواسون (با آن هنگست λ) انجام می شود. بنابراین سیستم دارای دو خدمت دهنده است. مدت ارائه خدمت قوشها بر کدام ارائه دهنده است دهد؟
۱) این افراد توانند نهادار (سا باز امیر های μ_1 و μ_2) است. اگر سیستم خالی را شاهد، مشتری μ_1

$$\lambda'_4 = 19, \mu_x = \lambda, \mu_y = 19, \mu_z = \lambda, \mu_{\lambda} = 19, p_{D_0} = 1, p_{C_0} = 0.9,$$

$$P_{CN} = 0.94$$

درایمن مدل چون همچو کدام از استگاهها با خود مذاقت دارد، این رود آنها طبق فرایند پواسون است، ضمناً

$$\lambda_1 = 18$$

$$\lambda_B = (0.2)(16) = 4.8$$

$$\lambda_c = (0.97)(1.6) = 1.57$$

$$\lambda_D = (0.24)(2.28) + (0.24)(1.12) = 0.62$$

$$\rho_B = 0.2\text{A}, \quad \rho_C = 0.2\text{V}, \quad \rho_D = 0.2\text{F} \quad , \quad \rho_E = \frac{\lambda_A}{\mu_1} = \frac{16}{10} = 0.8\text{A},$$

اگر P_{err} را معرف احتمال خالی بودن اینستگاه / پیکریم، خواهیم داشت:

$$\pi_{\text{v}}^{(4)} = 0.22, \quad \pi_{\text{v}}^{(5)} = 0.23, \quad \pi_{\text{v}}^{(6)} = 0.24, \quad \pi_{\text{v}}^{(7)} = 0.25$$

هر ایستگاه را می‌توان مستقلابه مدل M/M تصویر کرد. لذا،

$$L_4 = 4, \quad L_5 = \frac{4}{\pi}, \quad L_6 = 10\delta, \quad L_7 = 4$$

در نتیجه طول صفحه این است با:

$$L = \frac{V_1}{\epsilon} = 11.2471$$

از طرف دیگر، امید و ریاضی مدت زمان انتظار یک مشتری برای برآورده با امید ریاضی مدت زمان انتظار او در هر استنگاه است؛ ولی، مشتریها بهمه استنگاهها نمی‌روند. در واقع، همه مشتریها استنگاه ۱۰ دقیقی می‌کنند، ۳۵ درصد آنها به استنگاه دوم می‌روند، ۷۵ درصد آنها به استنگاه سوم و ۴۵ درصد به استنگاه چهارم می‌روند، لذا

$$W = W_x + o(\gamma) W_y + o(\gamma) W_z + o(\gamma) W_\phi$$

W_1 میانگین مدت زمان انتظار یک مشتری در استنگاه نام است و چون هر استنگاه، یک مدل $M/M/1$ محسوب می شود، لذا محاسبه آنها بجز سه استفاده از رابطه $W = \frac{1}{\lambda} + \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$ در $M/M/1$ انجام می شود (دیگر دلایل).

$$W = ۰.۷۴, \quad W_v = \frac{۰}{۱}, \quad W_r = \frac{۰}{۲}, \quad W_t = \frac{۰}{۳}$$

زمان بین آمدن هر دوسته، نمایی بامیانگین ۲۰ دقیقه فر ص می شود. در ۵۵ دقیقه هسته ها،
شش چندان و در ۵۵ دقیقه دیگر، چهار چندان وجود دارد. مدت زمان بازار سی پل چندان،
نمایی بامیانگین ۳ دقیقه فرض می شود.

الف. اگر فقط بک بازرس وجود داشته باشد، احتمال اینکه بیکار باشد، چیست؟ احتمال
اینکه فقط بک چندان دیگر در بازار سی پل بازدید نمایی باشد، چیست؟

ب. چنانچه سه بازرس کار کنند، نمودار آهنگ را رسم کنید و معادلات تعادلی را بنویسید.

۷. در یک کوره الکتریکی، مدت زمان حرارت دادن قطعات، نمایی بامیانگین دو ساعت است.
سهم قطعه را به طور همزمان می نواند داخل کوره جا داد، اما در صورت نیوند قطعات، کوره
را با یک یا دو قوه هم راه اندازی می کنند. رسیدن قطعات برای انتقال حرارتی در کوره،
طبق فرایند پواسون با آهنگ $r = 5\sqrt{t}$ ساعت است. میانگین طبق قطعاتی که منتظر هستند تا
داخل کوره شوند، چقدر است؟ (قدار)

۸. برای حمل اتو میلها از عرض بک رو دهاره، ارقایقی مخصوص استفاده می شود، که
کجایش پنج انومیل را دارد. اتو میلها طبق فرایند پواسون، بامیانگین ساعتی ۱۵ دستگاه
برای عبور از رودخانه مراجعت می کنند. مدت رفت و برگشت قابن منظری تصادفی با توزیع
نمایی است و به طور متوسط ۱۲ دقیقه طول می کشد. احتمال اینکه انومیل مراجعت کند و
بلاماسله سوار قایق شود و از رودخانه عبور کند، چقدر است؟ میانگین تعداد انومیلها که می خواهند
عبور کنند، چقدر است؟ (فرض می کنیم که قایق هنما با بد پرسود نباشد حرکت کنند).

۹. مشتریها طبق فرایند پواسون داردیستم می شوند. تعادامشتری وارد شده در هر ساعت به طور
متوسط ۵ نفر فرض می شود. مدت زمان خدمت به طور متوسط ده دقیقه طول می کشد. میانگین
طول صرف را، در صورتی که مدت زمان خدمت، نمایی، ثابت و با ارلایکی ($\beta = \frac{1}{2}$) باشد، محاسبه کنید.

۱۰. در محل ابزار بزرگ کارخانه ای دو ابزاردار کار می کنند. اوایل مسئول تحویل ابزار
ماشین آلات و دومی مستول تحویل سایر ابزار آلات است. کارگران برای دریافت ابزار
طبق فرایند پواسون ($\lambda = 8$ در ساعت) وارد ابزار می شوند و 25% آنها مقاضی ابزار
ماشین آلات هستند. مدت زمان تحویل ابزار، نمایی بامیانگین ۳ دقیقه است. بررسی انجام
شده نشان می دهد که اگر هر دو ابزاردار مشترکاً کار کنند، مدت زمان خدمت به طور متوسط
۱/۱ دقیقه کاهش می پابد و تابع توزیع آن $E_t = 6$ خواهد بود. کدام روش بهتر است؟

۱۱. برای اداره ماشینی می نواند بکی از دونفر داوطلب را استخدام کرد. اوایل با این
ماشین ۶ واحد محصول مورد نظر دومی ۵ واحد آنرا در روز، به طور متوسط تولید
می کنند. مدت زمان تولید توسعه اولی، نمایی و توسط دومی ارلانگی با $\lambda = 2$ است.
کدام بک از این دونفر را با بد استخدام کردد؟ فرض کنید که تقاضا برای نولید محصول طبق
فرایند پواسون با پارامتر λ است.

۱۲. قسمت کنترل کیفیت کارخانه ای، قطعات معیوبی را که با استانداردها تطبیق نمی کنند

احتمال ۲ ره خدمت دهنده اولی و به احتمال عری خدمت دهنده دومی را انتخاب می کند.
اما، اگر خداقل یکی از خدمت دهنده کان مشغول باشند، مشتری حق انتخاب خدمت دهنده را
ندارد.

این مسئله را به شکل یک سیستم مارکوفی فرموله و نمودار آهنگ آن را رسم کنید
و معادلات تعادلی آن را بنویسید (حل معادلات لازم نیست). میانگین تعداد مشتریها داخل
سیستم را بر حسب احتمالات حدی بدست آورید. میانگین تعداد خدمت دهنده کان بیکار چقدر
است؟ احتمال اینکه یک مشتری از خدمت دهنده اولی خدمت دریافت کند، چقدر است؟

۱۳. مسئله ۱ را مجدداً در نظر بگیرید، که در آن $\lambda = 6$ است. اگر هر دو خدمت دهنده
بیکار باشند، مشتری همواره خدمت دهنده بک و در غیر این صورت هر خدمت دهنده ای را که
بیکار باشد انتخاب می کند. به مؤلفات مسئله ۱ مجدداً پاسخ دهید. درجه درصدی از زمان،
هر کدام از خدمت دهنده کان بیکارند؟

۱۴. مانند یافی که دارای سه موتور هستند، برای تعمیر گاهی فرستاده می شوند. به طور
متوجه، هر چهار ساعت یک ماشین به تعمیر گاه می رسد و فرض می شود که ورود ماشینها
بر اساس فرایند پواسون است. مدت زمان تعمیر هر موتور (ونه هر ماشین)، دارای توزیع
نمایی بامیانگین ۲ دقیقه است. در هر لحظه فقط یک موتور می نواند تحت تعمیر باشد.

الف. حالت سیستم را تعداد موتورهای داخل تعمیر گاه تعریف کنید. نمودار آهنگ را رسم
کنید و معادلات تعادلی آن را بنویسید. $\lambda = 6$
ب. این مسئله طبق چندملی است؟ میانگین مدت زمانی که یک ماشین داخل تعمیر گاهی ماند،
چقدر است؟

۱۵. در مسئله ۱۳، فرض کنید که هر سه موتور ماشین لزوماً احتیاج به تعمیر ندارند. به احتمال
۱/۳ بک موتور، به احتمال ۱/۳ دوموتور و به احتمال ۱/۳ هر سه موتور احتیاج به تعمیر
دارند. در این صورت، این مسئله را مجدداً حل کنید.

۱۶. پک سیستم صفت اسایل خدمت دهنده را در نظر بگیرید، که دونوع مشتری به آن مراجعت
می کند. مشتریها در نوع ۱ اولویت دارند. ورود هر دونوع مشتری بر اساس
فرایند پواسون (با میانگین بدترتب ۱ و ۵ در ساعت) است. مدت زمان خدمت، نمایی با
میانگین ۶ دقیقه است. اولویت پاداشن حق انقطاع فرض می شود.

الف. میانگین مدت زمان انتظار در سیستم و میانگین تعداد مشتریها داخل سیستم را حساب
کنید.

ب. میانگین مدت زمان انتظار در سیستم و میانگین تعداد مشتریها داخل سیستم، ۶ فرض
اینکه اولویت منظور نشود را از بند الف محاسبه کنید.

ج) معادلات تعادلی این مدل را بنویسید

۱۶. در قسمت پاریک فرودگاه استههای محتری چمدانها را برای بازرسیهای امنیتی می آورند.

۱۹. معادلات تعدادی را برای حالت‌های ۱ و ۲، مدل $M/M/1$ با نظم اولویت و حق انقطاع بنویسید.

۲۰. مثلاً فصل ششم را در نظر بگیرید، فرض کنید که ماشینهای تعمیر شده را برای کنترل می‌فرستند.

الف. احتمال اینکه فاصله زمانی بین دو ماشینی که برای کنترل می‌فرستند، حداقل سه روز طول بکشد، چیست؟

ب. حال فرض کنید که به جای اینکه تمام ماشینها را برای کنترل پرستند، فقط ۵ درصد آنها را به صورت تصادفی انتخاب می‌کنند و برای کنترل می‌فرستند. مدت زمان کنترل، نماین با میانگین $1/8$ روز فرض می‌شود. اگر ماشینی برای کنترل فرستاده شود، به طور متوسط از لحظه انتام تعمیر تا لحظه خروج آن از سیستم جنگره طول می‌کشد؟

ج. دریند ب، فرض کنید که ماشینها را یک در میان (نه به صورت تصادفی)، برای کنترل می‌فرستند؟ جواب بند ب را مجدداً بررسی کنید؟

۲۱. در یک مدل $M/M/1$ با نظم اولویت و بدون حق انقطاع و با دو گروه مشتری، آهنگ ورود مشتریهای گروههای ۱ و ۲ به ترتیب λ_1 و λ_2 و آهنگ خدمتهای μ_1 و μ_2 است. در این نظم، نشان دهید میانگین مدت زمان خدمت برای کل سیستم، یعنی $A_{\text{کل}}$ از حالتی است که نظم اولویت وجود ندارد، به شرط اینکه $\lambda_1 > \mu_1$ باشد.

۲۲. در مثال ۱۶.۷، با فرض اینکه $\lambda = 15$ و $\mu = 20$ و $L = 5$ ، احتمالات حدی و L و W را محاسبه کنید. چند درصد مشتریها نمی‌توانند وارد سیستم شوند؟

۲۳. مثلاً ۲۲ را مجدداً در نظر بگیرید. فرض کنید که مشتری پس از دریافت خدمت از مرحله اول، در صورتی مرحله دوم را می‌گذراند که آن مرحله خالی باشد. در غیر این صورت سیستم را ترک می‌کند.

الف. مجدداً به سؤالات مثلاً ۲۲ جواب دهید.

ب. چند درصدی از مشتریهایی که وارد سیستم می‌شوند، هر دو مرحله را می‌گذرانند.

۲۴. سوپرمارکتی را در نظر بگیرید که مشتریها پیش کالاهای موردنیاز خود را شخصاً از قفسه‌ها انتخاب می‌کنند و سپس پول آن را به صندوق‌دار می‌بردازند. مدت زمان انتخاب کالا و همچنین مدت زمان محاسبه قیمت کالا در صنایع، نماین با میانگین به ترتیب $1/5$ دقیقه و 5 دقیقه است. ورود مشتریها به این سوپرمارکت طبق فرایند پرason می‌باشد. در هر ساعت به طور متوسط سی مشتری مراجعت می‌کنند. حداقل چند صندوق‌دار برای این سوپرمارکت لازم است، میانگین مدت زمان توقف یک مشتری در این سوپرمارکت (بافرض حداقل هر دن تعداد صندوق‌داران) چقدر است؟

۲۵. در یک شبکه سری، سه ایستگاه خدمت وجود دارد. ورود مشتریها به این شبکه طبق فرایند

برای اصلاح و تنظیم مجدد به قسم تو لیند بر می‌گرداند. فرض می‌کنید که به طور متوسط هر $1/5$ دقیقه، یک قطمه معیوب شناخته می‌شود و فاصله زمانی بین طرسنادان هر دو قطمه نیز نماین است. برای اصلاح این قطمات هر کی از دو روش زیر را می‌توانیم انتخاب کنیم. ۱) کدام دو قطمه معیوب را پس از اصلاح زودتر به تو لیند بر می‌گرداند؟ الف. به کار گیری دو تعمیر کار، که هر کدام می‌توانند به طور متوسط یک قطمه را در 5 دقیقه تعمیر کنند. مدت زمان تعمیر نماین طرس شود.

ب. استفاده از یک ماشین که هر قطمه معیوب را دقیقاً در $1/25$ دقیقه تعمیر می‌کند. ج. در هند الف، احتمال اینکه کارگر شماره یک بیکار باشد، چیست؟ مقدار احتمال را بر حسب تابع $f(x)$ بدست آوردید.

۲۶. مدل $1/E_7/M$ را در نظر بگیرید. فرض کنید که ظرفیت صفت صفر است. نمودار آهنگ را رسم کنید. احتمال اینکه سیستم خالی باشد، چقدر است؟

۲۷. مشتریها طبق فرایند پرason وارد سیستم می‌شوند. تعداد مشتری وارد شده در هر ساعت به طور متوسط 5 است. مدت زمان خدمت به طور متوسط دقیقه است. میانگین طول صفت را بر حسب اینکه مدت زمان خدمت دارای توزیع نماین، ثابت و یا ارلانگی (با 2 مرحله) باشد، محاسبه کنید.

۲۸. در یک مدل $E_7/2/2/M$ نمودار آهنگ را رسم و L و W را محاسبه و صحبت (اطلاعاتی) را در مورد آنها تحقیق کنید. فرض کنید $\lambda = 20$ و $\mu = 8$ است.

۲۹. در یک مدل $E_7/M/2/2$ نمودار آهنگ را رسم و L و W را محاسبه کنید. فرض کنید $\lambda = 20$ و $\mu = 15$ است.

۳۰. سه نوع مشتری به یک سیستم مراجعت می‌کنند. ورود مشتریهای نوع ۱ و ۲ بر اساس فرایند پرason و به ترتیب با میانگین 2 و 3 و 4 مشتری در ساعت است. مدت زمان ارائه خدمت، توسط تنها خدمت دهنده سیستم، نماین و با میانگین 2 دقیقه است. الف. میانگین مدت زمان انتظار در صفت و همچنین میانگین طول صفت را در مورد هر نوع مشتری، در دو حالت زیر حساب کنید:

۱. در صورتی که ارائه خدمت به مشتریهای هر سه گروه بر حسب نوبت انجام شود؛
۲. در صورتی که مشتریهای نوع ۱ از بالاترین اولویت و مشتریهای نوع ۲ از اولویت بعدی برخوردار باشند (بدون حق انقطاع)
ب. ارتباط بین میانگین زمان انتظار و همچنین طول صفت حالت ۲ را با حالت ۱ مشخص کنید.

۳۱. مثلاً ۱۲ را، با فرض اینکه سیستم دارای نظم اولویت با حق انقطاع است، مجدداً حل کنید.

۳۹. در يك سیستم صفت با يك خدمت دهنده، مشتریها طبق فرایند پوشون با آهنگ $\lambda = 2$ در ساهت وارد می شوند. مدت زمان خدمت، نمایی بامیانگین ع دقیقه است، هر مشتری پس از دریافت خدمت با احتمال $\alpha = 0.8$ از سیستم خارج می شود، ولی با احتمال $\alpha = 0.2$ مجدداً وارد سیستم می شود و راتهای صفت منتظر می ماند. بنابراین، هر مشتری ممکن است چندبار خدمت دریافت کند.

الف. آیا این سیستم يك مدل $M/M/1$ است؟

ب. احتمال اینکه يك مشتری پنج بار خدمت دریافت کند، چیست؟ میانگین تعداد دقیقه که يك مشتری خدمت دریافت می کند، چقدر است؟

ج. احتمال اینکه پنج مشتری در سیستم باشند، چیست؟ L را محاسبه کنید.
ه. میانگین مدت زمان دریافت خدمت برای هر مشتری چقدر است؟

۴۰. در يك شرکت مهندسی متاور، طراحی سیستمی از هشت مرحله تشکیل شده است. مدت زمان اجرای هر مرحله، نمایی بامیانگین دوهفته است. نفaha برای طراحی سیستمها طبق فرایند پوشون با میانگین هر هفته يك بار می رسد. در دو حالت زیر، مدت زمان انتظار هر کار (طراحی يك سیستم) چقدر طول می کشد؟ بآجeh مدلی تطبیق می کند؟
الف. يك مهندس، طراحی هر هشت مرحله را انجام می دهد.
ب. برای طراحی هر مرحله يك مهندس وجود دارد.

۴۱. يك مدل $M/M/1$ را در نظر بگیرید، که آهنگ ورود و خدمت در آن به ترتیب $\lambda = 12$ باشد. تفاوت این مدل با $M/M/1$ این است که در این سیستم، علاوه بر مشتریها عادی يك مشتری مخصوص نیز مراجعت می کند، که ازا او لویت با حق انقطاع برخوردار است. این مشتری پس از دریافت خدمت مدتی خارج از سیستم است و دوباره بصیستم مراجعت می کند. مدت زمان بودن این مشتری در خارج از سیستم، مفترض تصادفی نمایی با میانگین 5 است. آهنگ مراجعة این مشتری را به دست آورید. يك مشتری عادی را در نظر بگیرید. تابع توزیع تعداد دقیقات قطع خدمت این مشتری به علت آمدن مشتری مخصوص را تعیین کنید.

۴۲. يك شبکه سف را در نظر بگیرید که ایستگاههای آن طبق شبکه زیر است. ورود مشتریها فقط به ایستگاه يك و طبق فرایند پوشون است ($\lambda = 20$). مدت زمان خدمت در هر ایستگاه، نمایی فرض می شود. آهنگ خدمت در ایستگاههای يك تا هفت به ترتیب، $15, 20, 30, 35, 30, 15, 10$ است. در هر ایستگاه فقط يك خدمت دهنده مشغول به کار است. در هر ایستگاه که شروجبهای آن به دو ایستگاه دیگر وارد می شوند، فرض بر این است که هر مشتری با احتمال مساوی به یکی از آن دو ایستگاه مراجعت می کند. L و W را برای هر ایستگاه و کل سیستم به دست آورید. آیا هر ایستگاه يك مدل $M/M/1$ است؟

پوشون با آهنگ $\lambda = 5$ و آهنگ خدمت در سه ایستگاه به ترتیب $4, 8$ و 4 و نداد احتمال خالی بودن سیستم چقدر است؟ احتمال اینکه در سیستم 3 مشتری وجود داشته باشد، چقدر است؟ L و W را محاسبه کنید.

۴۳. مثلاً 25 را مجدداً در نظر بگیرید، با این تفاوت که ظرفیت صفت در ایستگاه سوم بر ابر با 3 است. آن گاه، به سؤالات مطرح شده پاسخ مناسب ارائه کنید.

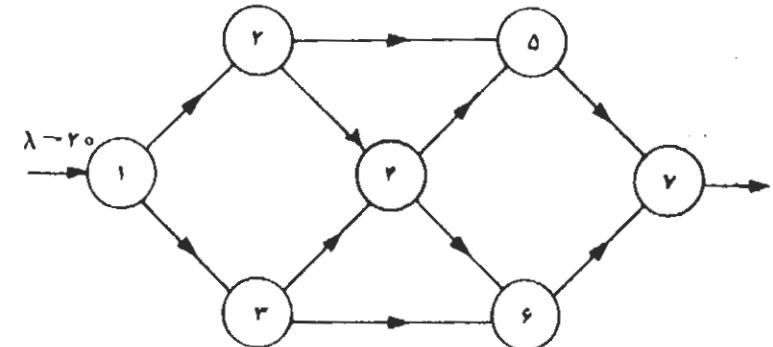
۴۴. مثلاً 25 را مجدداً در نظر بگیرید، با این تفاوت که ظرفیت صفت در ایستگاههای دوم و سوم بر ابر با صفر است. معادلات تعدادی را بنویسید. L و W را محاسبه کنید.

۴۵. در يك هتل، رستوران و چایخواری کنار یکدیگر قرار دارند. مراجعة مشتریها از خارج به این هتل، طبق فرایند پوشون است. هر ساعت به طور متوسط 35 مشتری به هتل مراجعه می کنند، 6 درصد آنها مستقیماً به رستوران و بقیه به چایخواری می روند. بعد از صرف غذا 85 درصد مشتریهای رستوران به چایخواری و 35 درصد مشتریهای چایخواری به رود. مدت زمان ارائه خدمت در هر دو قسم، نمایی با میانگین 2 دقیقه است. در اینحظه، به طور متوسط چند نفر در رستوران و چند نفر در چایخواری هستند (بعد از يك مشتری چند مدت در این هتل است؟ اگر کسی بخواهد بهتر دو قسمت مراجعة کند، به طور متوسط چند مدت در هتل است؟

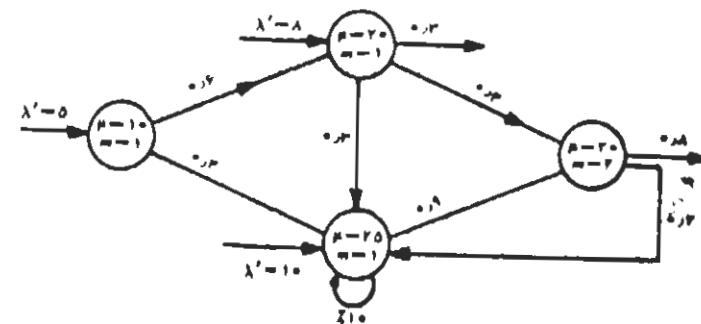
۴۶. خط تولید يك کارخانه از دور مرحله تشکیل شده است. کارهای سفارشی طبق فرایند پوشون با آهنگ ساعنی سه واحد به کارخانه ارجاع می شود. در مرحله اول که ماشینکاری است، مدت زمان خدمت، نمایی با میانگین 15 دقیقه است. اما در مرحله دوم، هر دو قطمه، که از ماشینکاری خارج شده اند، به طور همزمان آبکاری می شوند. مدت زمان آبکاری نیز، نمایی با میانگین 30 دقیقه است. (آبکاری يك قطمه تنها، مفروض به صرفه نیست). به طور متوسط هر کار ارجاع شده چه مدت در کارخانه است؟

۴۷. يك شبکه سری با دو ایستگاه خدمت را در نظر بگیرید، که ورود مشتریها بر اساس فرایند پوشون و مدت زمان خدمت در هر ایستگاه، نمایی با آهنگهای خدمت 10 و 20 (به ترتیب برای ایستگاههای 1 و 2) است. در هر ایستگاه يك خدمت دهنده مشغول به کار است. در لحظه مشتری دو ایستگاه دوم مغایل است. در دو حالت زیر، احتمال اینکه این الم. مشروط بر اینکه می دانیم در صفت ایستگاه اول منتظر نمی ماند.
ب. مشروط بر اینکه می دانیم در صفت ایستگاه اول منتظر می ماند (در این حالت ثابت کنید که احتمال اینکه این مشتری در صفت ایستگاه دوم منتظر باشد، حداقل بر ابر با $2/3$ است).

		ایستگاه		
		درصد قطعات غیرقابل اصلاح	میانگین مدت اجرای عملیات (دقیقه)	
قابل اصلاح	قابل اصلاح	قابل اصلاح	قابل اصلاح	
۱۰	۳۰		۱۵	۱
۵	۲۰		۷	۲



۳۵. یک شبکه صفح را در نظر بگیرید، که ایستگاه‌های آن طبق شبکه زیر است. ورود مشتریها از خارج سیستم به هر ایستگاه طبق فرایند پواسون و مدت زمان خدمت در هر ایستگاه نمایی فرض می‌شود. سایر اطلاعات موردنظر روی شبکه نشان داده شده است. $\lambda = 7W$ را برای هر ایستگاه و کل سیستم بعدست آوردید. آیا هر ایستگاه یک مدل $M/M/m$ است؟



۳۶. یک خط تولید ازدواج ایستگاه‌بشت سرهم تشکیل شده است. قطعات، طبق فرایند پواسون با آهنگ ساعتی 2μ قطمه به ایستگاه اول می‌رسند. در هر ایستگاه، پس از عملیاتی که روی هر قطمه انجام می‌شود، سه حالت می‌توانند اتفاق بیفتد. یافقطه با استانداردها تعیین می‌کند وسائل مشارکه می‌شود، یا قطمه سالم هناخته نمی‌شود و مجددآ برای تعمیر به همان ایستگاه برگردانده می‌شود، یا طیرفابل اصلاح است و به عنوان ضایعات از خط تولید کنار گذاشته می‌شود. مدت زمان کار روی هر قطمه، متغير تصادفی نمایی است و زمان اجرای عملیات روی قطمه برای اولین بار، با زمان تعمیرات تفاوتی نمی‌کند. اطلاعات مر بوط به ایستگاهها در جدول صفحه بعد خلاصه شده است. میانگین تعداد قطعات داخل سیستم را به دست آورید.

زیر تعریف شده باشد، در نظر می‌گیریم.

$X_n = \text{تعداد مشتری در سیستم (هنگام خروج)} // \text{امین مشتری}$
 می‌خواهیم نشان دهیم که X_n یک زنجیره مارکوف تشکیل می‌دهد. به طوری که مشاهده می‌شود، در این سیستم هر مرحله، فاصله زمانی بین دو خروج متوالی مشتریها تعریف شده است. بدینهی است که مدت زمان واقعی هر مرحله ثابت نیست، بلکه متغیری تصادفی است که تابع چگالی آن (t) b فرض شده است. برای اینکه ثابت کنیم مجموعه متغیرهای تصادفی X_n یک زنجیره مارکوف تشکیل می‌دهد، باید نشان دهیم که X_{n+1} فقط به X_n بستگی دارد. این موضوع را از رابطه زیرمی‌توان استنتاج کرد:

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n + 1 & \text{اگر } X_n \text{ باشد}, \\ A & \text{اگر } X_n = 0 \text{ باشد}, \end{cases} \quad (1.8)$$

که این عبارت از تعداد مشتریهای است که در طول مدت زمان ارائه یک خدمت وارد سیستم می‌شوند. قسمت اول رابطه فوق بدینهی است. برای روشن شدن قسمت دوم آن، فرض کنید که در لحظه خروج n امین مشتری، در سیستم مشتری دیگری نباشد، یعنی $X_n = 0$. پس از مدتی، مشتری بعدی یعنی مشتری $(n+1)$ ام وارد می‌شود و بلا فاصله شروع به دریافت خدمت می‌کند. اگر در مدت زمانی که این مشتری مشغول دریافت خدمت است، A مشتری جدید وارد شوند، بدینهی است که در زمان خروج او همین تعداد مشتری هنوز در سیستم هستند.

به این ترتیب، چون مجموعه متغیرهای تصادفی X_n یک زنجیره مارکوف تشکیل می‌دهد، لازم است که ماتریس \mathbf{G} آن نیز مشخص شود. برای سهولت در نشان دادن این ماتریس، از فرازداد زیر استفاده می‌شود:

$$q_n = P[A=n] \quad (2.8)$$

به این ترتیب، احتمال اینکه در طول مدت ارائه یک خدمت، n مشتری وارد شوند را q_n نشان می‌دهیم.

حال با استفاده از رابطه‌های (1.8) و (2.8) می‌توان ماتریس \mathbf{G} را به شکل زیر نشان داد.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 & \dots \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 & \dots \\ 0 & q_0 & q_1 & q_2 & \dots \\ 0 & 0 & q_0 & q_1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & q_0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

سیستمهای صف غیر مارکوفی

در این فصل، مدل‌های را مورد بررسی قرار می‌دهیم، که در آنها فقط یکی از دو متغیر تصادفی زمان بین دو و دو دستگاهی مشتریها یا مدت زمان خدمت دارای تابع توزیع نمایی است. در این مدل‌ها، خاصیت بدون حافظه بودن سیستم دیگر برقرار نیست، زیرا متغیرهای فوق، نمایی نیستند. با وجود این، با استفاده از خاصیت بدون حافظه بودن، همان متغیر تصادفی که پاشد و همین خاصیت مبنای تحلیل سیستم خواهد بود.

۱.۸ مدل $M/G/1$

بر اساس قراردادی که در فصل اول ارائه شد، در این مدل زمان بین دو و دو دستگاهی مشتریها نمایی است. اما، مدت زمان خدمت می‌تواند هر متغیر تصادفی با تابع توزیع دلخواه باشد. تابع چگالی این متغیر تصادفی را با (t) b نشان می‌دهیم. در این مدل نیز، آهنگ ورود مشتری λ و آهنگ خدمت μ فرض می‌شود.

برای مدل $M/G/1$ به شکل یک زنجیره مارکوف

توزیع خدمت نیست)

اثبات: بر اساس تعریف، L میانگین تعداد مشترکان در سیستم در درازمدت است! یعنی،

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) \quad (A.8)$$

برای محاسبه L ، ابتدا رابطه (A.8) را به شرح زیر بیان می‌کنیم:

$$X_{n+1} = X_n + A - Y \quad (9.8)$$

که در عبارت فوق، Y متغیر تصادفی است، که به شرح زیر تعریف می‌شود:

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{اگر } X_n > 0 \\ 0, & \text{اگر } X_n = 0 \end{cases} \quad (10.8)$$

بر اساس این تعریف، روابطهای زیر نیز صدق می‌کند:

$$Y^t = Y \quad (11.8)$$

و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(Y X_n) = L, \quad Y X_n = X_n \quad (12.8)$$

آن گاه، میانگین طرفین رابطه (A.8) و سپس امید ریاضی مجدد طرفین همان رابطه را، در حالی که $\infty \rightarrow n$ بودست می‌آوریم.

$$E(X_{n+1}) = E(X_n) + E(A) - E(Y) \quad (13.8)$$

$$E(X_{n+1}^t) = E(X_n^t) + E(A^t) + E(Y^t) - 2E(Y X_n) - 2E(A Y) + 2E(A X_n) \quad (14.8)$$

با توجه به اینکه متغیر تصادفی A مستقل از Y و X_n است و با درنظر گرفتن رابطه (A.8)، داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(A X_n) = E(A) \cdot L \quad (15.8)$$

و با استفاده از روابطهای (12.8) و (14.8) و (15.8)، در درازمدت، نتیجه می‌شود که:

$$E(A^t) + E(Y^t) - 2L - 2E(A)E(Y) + 2E(A)L = 0 \quad (16.8)$$

(در عبارت فوق، رابطه $E(X_{n+1}^t) = E(X_n^t)$ در درازمدت، به کار گرفته شده است). برای بودست آوردن L از رابطه فوق، لازم است که میانگین و گنتوارد دوم متغیرهای Y و

برای محاسبه q_n ، از رابطه اختصار شرطی استفاده می‌کنیم. چنانچه S ، مدت زمان ارائه خدمت، متغیر تصادفی پیوسته باشد،

$$q_n = P(A = n) = \int_0^\infty P(A = n | S = x) b(x) dx$$

از طرف دیگر

$$P(A = n | S = x) = e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^n}{n!}$$

در نتیجه

$$q_n = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^n}{n!} b(x) dx \quad (2.8)$$

با مشخص بودن (x, b) ، مقدار q_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) محاسبه می‌شود.

اگر متغیر تصادفی مدت زمان خدمت گسته باشد،

$$q_n = P(A = n) = \sum_s P(A = n | S = s) p_s = \sum_s e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^n}{n!} p_s \quad (5.8)$$

محاسبه معیارهای ارزیابی در مدل ۱

قضیه ۱۰.۸ در دلیل مدل ۱ $M/G/1$ ، با فرض $1 < \rho$ ، معیارهای ارزیابی با استفاده از رابطه زیر، که به نام رابطه پلاچک نوینکین^۱ با به طور اختصار $(P-K)$ موسوم است، محاسبه می‌شود

$$L_q = \frac{\rho + \lambda' \text{Var}(S)}{2(1-\rho)} \quad (6.8)$$

که $\text{Var}(S)$ معروف داریانس مدت زمان خدمت است. از طرف دیگر، میانگین مدت زمان خدمت $\mu/1 = E(S)$ است. بنابراین،

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda E(S) \quad (7.8)$$

سایر معیارهای ارزیابی با استفاده از استنتاج لینل بودست می‌آیند، برای نمونه

$$L = L_q + \rho$$

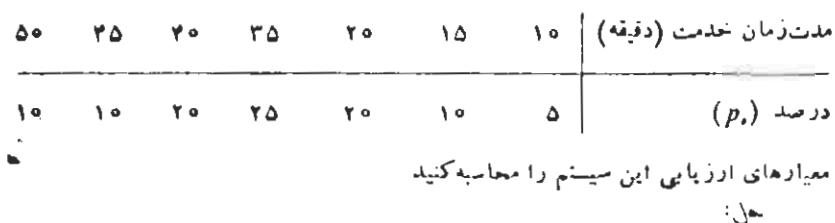
(همان طور که مشاهده می‌شود، برای تعیین معیارهای ارزیابی در مدل ۱ $M/G/1$ ، تنها اطلاعات مورد نیاز، میانگین و داریانس مدت زمان خدمت است و نیازی به دانستن تابع

در این حالت طبق رابطه $(P - K)$:

$$L = \rho + \frac{\rho^2 + (\lambda/\mu)^2}{2(1-\rho)} = \rho + \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

که همان نتیجه به دست آمده در مدل $M/M/1$ است.

مثال ۱۰.۸ در یک سیستم صفت، مشتریها طبق فرایند پواسون وارد می‌شوند، فاصله زمانی بین دو ورود مشتری به‌طور متوسط ۴۵ دقیقه است. مدت زمان خدمت متغیری تصادفی است که هیستوگرام آن به شرح زیر خلاصه می‌شود.



$$\frac{1}{\mu} = E(S) = 22.5$$

$$E(S^2) = 118.625$$

$$\text{Var}(S) = E(S^2) - [E(S)]^2 = 118.625 - 22.5^2 = 11.875$$

$$\lambda = \frac{1}{45}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{45} = \frac{22.5}{45}$$

طبق رابطه $(P - K)$

$$L_q = 15.32$$

$$L = L_q + \rho = 17.5$$

احتمالات حدی در مورد $1/M/G/1$

اگر π معرف وجود n مشتری در لحظه t باشد، با توجه به اینکه مهم است

$$E(A) = \int_0^\infty E(A|S=x) b(x) dx \quad (17.8)$$

اما پسون ورود مشتریها طبق فرایند پواسون است، بنابراین:

$$E(A|S=x) = \lambda x \quad (18.8)$$

در نتیجه

$$E(A) = \lambda \int_0^\infty x b(x) dx = \lambda E(S) \quad (19.8)$$

در رابطه فوق، مقدار انتگرال، بر اساس تعریف میانگین برای $E(S)$ است. از طرفی بر اساس تعریف آهنگ خدمت‌دهی، داریم

$$E(S) = \frac{1}{\mu} \quad (20.8)$$

$$E(A) = \frac{\lambda}{\mu} = \rho \quad (21.8)$$

از طرف دیگر، با استفاده از روابط‌های (۱۱.۸) و (۱۳.۸) و (۲۱.۸) خواهیم داشت.

$$E(Y) = E(Y^2) = E(A) = \rho \quad (22.8)$$

برای محاسبه L از رابطه (۱۶.۸)، تنها چیزی که باقی می‌ماند محاسبه $E(A^2)$ است، که برای این کار، از رابطه واریانس و هجین (۲۱.۸) استفاده می‌کنیم.

$$\text{Var}(A) = E(A^2) - (E(A))^2$$

$$E(A^2) = \text{Var}(A) + \rho^2 = \rho + \lambda^2 \text{Var}(S) + \rho^2 \quad (22.8)$$

با جایگزینی عبارت مربوطه در (۱۶.۸) رابطه $K - P$ ثابت می‌شود.

حالت خاص $1/M/1$

در این حالت

$$\text{Var}(S) = \frac{1}{\mu^2}$$

با استفاده از رابطه‌های (۲۴.۸)

$$\pi_0 = q_0 \pi_0 + q_1 \pi_1$$

$$\pi_1 = q_1 \pi_0 + q_2 \pi_1 + q_3 \pi_2$$

در نتیجه

$$\pi_0 = 0.275, \pi_1 = 0.182, \pi_2 = 0.156$$

مثال ۳۰.۸ یک مدل $M/G/1/M$ را در نظر بگیرید. این مدل حالت خاصی از $1/G/1$ است، که تابع توزیع مدت زمان خدمت آن دارای توزیع نمایی است، یعنی،

$$b(t) = \mu e^{-\mu t}$$

طبق رابطه (۲۰.۸)

$$q_n = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^n}{n!} \mu e^{-\mu x} dx = \frac{\mu}{n!} \int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu)x} (\lambda x)^n dx$$

و طبق رابطه (۲۶.۸)

$$Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n = \mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu)x} (\lambda x)^n dx$$

$$= \mu \int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu)x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda x z)^n}{n!} dx = \mu \int e^{-(\lambda+\mu)x} e^{\lambda z x} dx = \frac{\mu}{\lambda + \mu - \lambda z}$$

و طبق رابطه (۲۵.۸)

$$\pi(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)Q(z)}{Q(z)-z} = \frac{\mu - \lambda}{\mu - \lambda z} = \frac{1-\rho}{1-\rho z}$$

بر طبق آنچه که در مرور تبدیل z گفته شد، تبدیل z مجموعه $\{\pi_n, \rho, \mu\}$ (۲۰.۸) مساوی است
با $\{1/\lambda, 1/\lambda - \rho z\}$. در نتیجه،

$$\pi_0 = (1-\rho)\rho^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

دوره انتقال و بیکاری در مدل $1/G/1$

در این مدل نیز چون ورود مشتریها بر اساس فرآیند پواسون است، مدت زمان بیکاری سیستم دارای توزیع نمایی (با پارامتر λ) است، لذا

پکارچه و همه حالتها برگشت پذیر مثبت با داده بذک هستند، طبق قضیه احتمالات حدی زنجیره‌ای مارکوف، خواهیم داشت:

$$\pi_n = q_0 \pi_0 + \sum_{i=1}^{n+1} q_{(n-i+1)} \pi_i, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (24.8)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$$

پس از حل دستگاه معادلات فوق و با در نظر گرفتن $\rho = 1 - \pi_0$ ، مقادیر π_n (۰.۸) به دست می‌آید. ضمناً می‌توان نشان داد که تبدیل z مقادیر π_n عبارت است از:

$$\pi(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)Q(z)}{Q(z)-z} \quad (25.8)$$

که $Q(z)$ تبدیل z کمینه‌های q_n است؛ یعنی،

$$Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n q_n \quad (26.8)$$

بنابراین، پس از محاسبه q_n ، ابتدا $Q(z)$ و پس $\pi(z)$ را محاسبه می‌کنیم. آن‌گاه از (z) مقادیر π_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) به دست می‌آید.

نوجوه: باید توجه داشت که اگرچه ماتریس گذار زنجیره مارکوف فقط برای زمانهای خروج مشتریها تعریف شده است، در نتیجه π_n و مباره‌های ارزیابی فقط برای همین لحظات به دست آمده است، ثابت می‌شود که در این مدل π_n و مایر معيارهای ارزیابی برای لحظات دیگر نیز معتبر است.

مثال ۳۰.۹ مثال ۱۰.۸ را مجدداً در نظر بگیرید. اگر S مدت زمان خدمت باشد، طبق رابطه (۵.۸)

$$q_n = P(A=n) = \sum_s e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^n}{n!} p_s$$

بنابراین، با توجه به اینکه $\lambda = 1/25$ است

$$q_0 = 0.5075, \quad q_1 = 0.3256, \quad q_2 = 0.1226, \dots$$

از طرف دیگر

$$\pi_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{32.56}{45} = 0.283$$

همه گروههای دیگر نیز صدق می‌کند (به مسئله شارة ۱۱ همین بخش مراجعه شود).
 مثال ۴.۸ را مجدداً در نظر بگیرید. فرض کنید دونوع مشتری به این سیستم مراجعه می‌کنند. مدت زمان خدمت، که در مثال ۴.۸ ارائه شده است، فقط مخصوص مشتریهای دارای اولویت بالاست، که ۳۵٪ کل مراجعتین را تشکیل می‌دهند. مدت زمان دریافت خدمت هفتمد درصد مشتریها، که از اولویت پاییزتری برخوردارند، ثابت و برابر با نیم ساعت است. میانگین مدت زمان انتظار هر گروه از مشتریها را محاسبه کنید.
 حل: در این مدل داریم:

$$\lambda_1 = \frac{۰.۳}{۲۵}$$

$$E(S_1) = ۳۲۰.۲۵$$

$$E(S_2) = ۳۰$$

$$\lambda_2 = \frac{۰.۷}{۲۵}$$

$$E(S_1') = ۱۱۸۶.۲۵$$

$$E(S_2') = ۹۰۰$$

در نتیجه، از رابطه (۳۰.۸)

$$W_{۰۱} = ۱۲۰.۹۵$$

$$W_{۰۲} = ۴۳۰.۸۳$$

و میانگین کل سمت

$$W_0 = \frac{\lambda_1}{\lambda} W_{01} + \frac{\lambda_2}{\lambda} W_{02} = ۳۴۰.۷۷$$

۴.۸ مدل $M/G/1$ با ورود گروهی
 در این مدل نیز، فرض می‌شود که زمان بین دو ددد متوالی مشتریها دادای توزیع نمایی، با پارامتر λ است؛ لیکن، هر بار به جای یک مشتری، گروهی مشتری وارد می‌شوند. احتمال اینکه هر گروه از J مشتری تشکیل شده باشد را با p_j نشان می‌دهیم. بنابراین $p_1 = \lambda, p_2 = \lambda^2, \dots, p_J = \lambda^J$. معرف میانگین تعداد گروههای مشتری از J مشتری است، که در واحد زمان وارد می‌شوند. اکثر N تعداد مشتریهای یک گروه باشد.

$$E(N) = \sum_{j=1}^J j p_j$$

در این مدل، میانگین طول صفت از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$E(I) = \frac{1}{\lambda} \quad (۲۷.۸)$$

از طرف دیگر، در این مدل $\pi = ۱ - \mu$ است. بدین ترتیب، در رابطه (۲۷.۵) بس از جایگزینی π و $E(I)$ نتیجه می‌شود، که

$$E(b) = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{E(S)}{1 - \lambda E(S)} \quad (۲۸.۸)$$

و میانگین تعداد مشتریانی که در یک دوره اشتغال به آنها خدمت ارائه می‌شود، برابر است با

$$E(N_b) = \mu E(b) = \frac{1}{1 - \lambda E(S)} \quad (۲۹.۸)$$

قطع اولویت در مدل $1/M/G/1$

یک مدل $1/M/G/1$ را در نظر بگیرید، که N گروه مشتری با اولویتهای مختلف (و بدون حق انقطاع) داشته باشد. مدت زمان خدمت این گروهها با یکدیگر متفاوت است. فرض کنید λ_i مدت خدمت مشتری گروه i باشد. در این صورت میانگین مدت زمان انتظار هر مشتری در گروه i از رابطه زیر بدست می‌آید (گروه ۱ بالاترین اولویت را دارد)

$$W_{01} = \frac{\sum_{j=1}^N \lambda_j E(S_j)}{2[1 - \lambda_1 E(S_1)]} \quad (۳۰.۸)$$

$$W_{0i} = \frac{\sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j E(S_j)}{2 \left[1 - \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j E(S_j) \right] \left[1 - \sum_{j=1}^i \lambda_j E(S_j) \right]} \quad (۳۱.۸)$$

$E(S_i) = \frac{1}{2/\mu - 1}, E(S_1) = ۱/\mu, M/M/1$ ، که $1/\mu$ و $M/M/1$ ارائه شد.

دش اثبات روابطهای فوق یک مشتری گروه یک را، که بالاترین اولویت دارد، در نظر بگیرید. اگر در زمان ورود او یک مشتری از گروه پاییزتر، در حال دریافت خدمت باشد، تا زمان خروج او این مشتری باید صبر کند و از آن پس می‌توان تصور کرد که در سیسم فقط مشتری گروه ۱ وجود دارد. بنابراین، میانگین مدت زمان انتظار اوضاع است از مجموع زمان مورد نیاز برای دریافت خدمت مشتری که در زمان ورود او مشغول دریافت خدمت است به اندازه مجموع زمان لازم برای خروج مشتریهای هم گروه خود او. همین استدلال در مورد

G/M/1 مدل ۳۰.۸

در این مدل، مدت زمان خدمت دارای توزیع نمایی فرض می‌شود. لیکن، زمان بین دو ورود متواالی مشتریها متغیری تصادفی است، که می‌تواند هر نوع تابع توزیع دلخواهی را داشته باشد. تابع چگالی این متغیر تصادفی را با $a(t)$ بیان می‌کنیم. با توجه به تعریف آهنگ ورود مشتری (λ) و با درنظر گرفتن اینکه میانگین زمان بین دو ورود متواالی برابر با $1/\lambda$ است، می‌توان λ را بر حسب $a(t)$ به شرح زیر بیان کرد:

$$\frac{1}{\lambda} = \int_0^\infty t a(t) dt$$

در حالتی که زمان بین دو ورود متواالی مشتریها متغیر تصادفی گسته باشد و فقط مقادیر مشخص P_1, P_2, \dots را با احتمالات p_1, p_2, \dots از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\frac{1}{\lambda} = \sum_{i=1}^{\infty} i p_i$$

بیان مدل G/M/1 بر حسب زنجیره مارکوف

حالات سیستم را به شرح زیر تعریف می‌کنیم:

$$X_n = \text{تعداد مشتری دیستیم در لحظه } n \text{ بعد مشتری}$$

متغیرهای تصادفی X_n یک زنجیره مارکوف تشكیل می‌دهند؛ زیرا X_{n+1} ، فقط به X_n بستگی دارد. رابطه زیر این موضوع را نشان می‌دهد

$$X_{n+1} = X_n + B \quad (32.8)$$

که B معرف تعداد مشتریهایی است که در فاصله زمانی بین دو ورود متواالی مشتریها خدمت دریافت می‌کنند. برای بیان ماتریس گذار این زنجیره مارکوف، ابتدا مقادیر b_i را به ازای

$i = 0, 1, 2, \dots$ و به شرح زیر تعریف می‌کنیم:

$$b_i = P[B=i] \quad (35.8)$$

بنابراین، ماتریس گذار این زنجیره مارکوف به صورت زیر در می‌آید:

$$P = \begin{bmatrix} 1-b_0 & b_0 & 0 & \dots \\ 1-b_0-b_1 & b_1 & b_0 & \dots \\ \vdots & & & \\ 1-\sum_{i=0}^n b_i & b_0 & b_{n-1} & \dots \end{bmatrix} \quad (36.8)$$

$$L_q = \rho + [\lambda E(N)] \text{Var}(S) + \frac{\rho}{2(1-\rho)} \left[\frac{E(N^2)}{E(N)} - 1 \right] \quad (32.8)$$

بادآوری می‌کنیم که در رابطه فوق، آهنگ ورود مشتری ($\lambda E(N)$) و

$$\rho = \frac{\lambda E(N)}{\mu} = \lambda E(N) E(S)$$

است. در حالات خاصی که تعداد مشتری در هر گروه، ۱ نفر باشد، جمله دوم حذف می‌شود؛ زیرا $E(N) = E(N^2) = E(N)^2$ است.

مثال ۳۰.۸ ۱۰۰ را مجدداً در نظر بگیرید، با این نهادت که زمان بین دو ورود گروهی به طور متوسط پانصد ساعت وربع و هر گروه با احتمال ۵ درصد یک مشتری، با احتمال ۲۵ درصد دو مشتری و با احتمال ۲۵ درصد سه مشتری دارد. میانگین طول صفت را محاسبه کنید.

حل:

$$E(N) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(2) + \frac{1}{4}(3) = \frac{7}{4}, \quad \lambda = \frac{1}{75}$$

$$E(N^2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(4) + \frac{1}{4}(9) = \frac{15}{4}$$

$$\rho = \lambda E(N) E(S) = 0.7525$$

وطبق رابطه (۳۲.۸)،

$$L_q = 3004$$

M/G/m مدل ۳۰.۸

در این مدل ورود مشتریها طبق فرایند پواسون با آهنگ λ ، مدت زمان خدمت متغیری تصادفی دلخواه با تابع چگالی $r(b)$ است و می‌ستم دادای m خدمت دهنده است.

در مدل $M/G/m$ ، میانگین طول صفت از رابطه زیر بدست می‌آید

$$L_q = \frac{r^{m-1} [\lambda^r \text{Var}(S) + r^m]}{r(m-1)! (m-r)! \left[\sum_{j=0}^{m-1} \frac{r^j}{j!} + \frac{r^m}{(m-1)! (m-r)!} \right]} \quad (33.8)$$

که $r = \lambda/\mu = \lambda E(S)$ است.

در حالات خاص، که $m=1$ باشد، رابطه فوق به رابطه $(P-K)/P$ تبدیل می‌شود.

$$P_0 = \sum_{k=0}^{\infty} P_k \left[1 - \sum_{n=0}^k b_n \right] \quad (28.8)$$

$$P_n = \sum_{k=n}^{\infty} P_k b_{k-n+1}, \quad n=1, 2, \dots \quad (29.8)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \quad (20.8)$$

همان طور که در بحث زنجیره های مارکوف گفتیم، یکی از معادلات فرق زائد ماتریس منفاآت است. در رابطه فوق، فرض می شود که در لحظه ورود یک مشتری مشخص، میستن خالی باشد. بنابراین، بلاعاصمه خدمت نداشروع می شود. احتمال اینکه در لحظه ورود مشتری بعدی سیستم باز هم خالی باشد، این است که ارائه خدمت به مشتری مورد نظر تمام شده باشد؛ لیکن، باید توجه داشت که بعد از رفتن این مشتری و قبل از ورود مشتری بعدی خدمت دهنده مدتی بیکاری ماند. بنابراین، اگرچه در این فاصله فقط به یک مشتری خدمت ارائه شده است، امکان ارائه خدمت به پیش از یک مشتری وجود داشته است. به این ترتیب، P_n معادل است با اینکه در فاصله میان دو ورود متواالی مشتریها احتمال داده شود.

$$b_n = P(B=n) = e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^n}{n!} = \frac{e^{-1.5}(1.5)^n}{n!} \quad (21.8)$$

بنابراین، ماتریس گذار این مدل به شرح زیر خواهد بود:

$$P_{i,j} = \begin{cases} P[B=i+1-j] = e^{-1.5} \frac{(1.5)^{i+1-j}}{(i-j+1)!} & 1 \leq j \leq i+1 \\ 1 - \sum_{k=0}^i P(B=k) & j=0 \\ & i+2 \leq j \end{cases}$$

برای نمونه

$$P_{0,1} = P[B=1] = e^{-1.5}$$

$$P_{0,2} = P[B=2] = e^{-1.5} \frac{(1.5)^2}{2!} = 0.527$$

$$P_{2,0} = 1 - b_0 - b_1 - b_2 = 1 - e^{-1.5} \left[1 + 1.5 + \frac{(1.5)^2}{2} \right] = 0.191$$

برای روشن شدن اینکه ماتریس گذار فوق چگونه به دست آمده است، چند عنصر آن را بشرح زیر محاسبه می کنیم. در این محاسبات از رابطه (۲۴.۸) استفاده می شود.

$$p_{0,1} = P[X_{n+1}=1 | X_n=0] = P[B=0] = b_0$$

$$p_{0,2} = P[X_{n+1}=2 | X_n=0] = P[B=-1] = 0$$

$$p_{0,0} = P[X_{n+1}=0 | X_n=0] = P[B \geq 1] = 1 - b_0$$

رابطه آخر، مربوط به محاسبه $P_{0,0}$ (و همچنین سایر مقادیر $P_{i,j}$) با محاسبه عناصر دیگر ماتریس منفاآت است. در رابطه فوق، فرض می شود که در لحظه ورود یک مشتری مشخص، میستن خالی باشد. بنابراین، بلاعاصمه خدمت نداشروع می شود. احتمال اینکه در لحظه ورود مشتری بعدی سیستم باز هم خالی باشد، این است که ارائه خدمت به مشتری مورد نظر تمام شده باشد؛ لیکن، باید توجه داشت که بعد از رفتن این مشتری و قبل از ورود مشتری بعدی خدمت دهنده مدتی بیکاری ماند. بنابراین، اگرچه در این فاصله فقط به یک مشتری خدمت ارائه شده است، امکان ارائه خدمت به پیش از یک مشتری وجود داشته است. به این ترتیب، $P_{0,0}$ معادل است با اینکه در فاصله میان دو ورود متواالی مشتریها حداقل به یک مشتری خدمت داده شود.

برای بدست آوردن مقادیر b_i از رابطه زیر استفاده می شود:

$$b_i = \int_0^{\infty} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^i}{i!} a(t) dt \quad (27.8)$$

G/M/1

در زنجیره مارکوفی که تشریح شد، تعداد مشتریها داخل سیستم در لحظه ورود را حالت سیستم تعریف کردیم. با توجه به اینکه زمان میان دو ورود متواالی مشتریها متغیر تصادفی بدون حافظه نیست، احتمالات مربوط به تعداد مشتریها در سیستم در لحظات مختلف منفاآت است. اگر $a(t)$ ، طبق معمول معروف بودن a مشتری در سیستم در یک لحظه t خواهد P_t معرف احتمال بودن k مشتری در سیستم، در لحظه یک ورود باشد، π_1 و P_t ازوماً یکی نیستند. در زنجیره مارکوف مورده بحث، فقط امکان بدست آوردن احتمالات حدی P وجود دارد. بنابراین، ابتداء میارهای ارزیابی را فقط برای لحظه های ورود حساب می کنیم و آن گاه بمعیارهای ارزیابی در حالت کلی می برداریم.

باتوجه به اینکه این زنجیره مارکوف یکپاچه و تمام حالت های آن پوچشت پذیر مثبت و ندادهای هستند، با استفاده از قضیه احتمالات حدی، معادلات تعادلی در مدل G/M/1 به شرح زیر خواهد بود.

$$P_0 = (1 - x_0) = 0.582$$

$$P_1 = (0.582)^n$$

قضیه ۳۰.۸ معادله مشخصه (۳۰.۸) معادل رابطه زیر است:

$$x = \int_0^\infty e^{-\mu t} (1-x) a(t) dt \quad (۲۰.۸)$$

و اگر زمان بین دورود مشترکها متغیر تصادفی T باشد، معادله مشخصه به صورت زیر بدست می آید:

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\mu t} P(T=t) \quad (۲۰.۸)$$

که T ، معرف زمان بین دو ورود مشترکهاست، که مقادیر گستره را انتخاب می کند.
امثلات: اگر در معادله مشخصه (۳۰.۸)، به جای $a(t)$ مقدار آن از رابطه (۳۰.۷) جایگزین بنمود،

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \int_0^\infty e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^n}{n!} a(t) dt = \int_0^\infty e^{-\mu t} a(t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu t)^n}{n!} dt$$

جهون رابطه $x = e^{-\mu t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu t)^n}{n!}$ برقرار است. لذا پس از جایگزینی و انتگرالگیری، رابطه (۳۰.۸) بدست می آید. رابطه (۳۰.۸) نیز با روش مشابه ثابت می شود.
مثال ۴۰.۸ معادله مشخصه مثال (۶.۸) را با استفاده از قضیه فوق بدست آورید.
حل: چون زمان بین دو ورود ثابت است، از رابطه (۳۰.۸) استفاده می شود. در
این مدل،

$$P(T=\frac{1}{\lambda}) = 1$$

و در نتیجه

$$x = e^{-\lambda(1-x)}$$

قضیه ۴۰.۸ در مدل $1/G/M/1$ ، اگر $\lambda < \mu$ باشد، معادله مشخصه (۳۰.۸) فقط دارای یک جواب x بین صفر و یک خواهد بود و اگر $\lambda \geq \mu$ باشد، معادله مشخصه مذکور در فاصله صفر تا یک هیچ جوابی نخواهد داشت.
امثلات: برای بدست آوردن جواب معادله مشخصه، دو طرف آن را جداگانه بر یک دستگاه محورهای مختصات رسم می کیم. تابع $x^n b_n = y$ محور y را در نقطه $b_n = 0.22$ قطع می کند. این تابع به ازای تمام مقادیر $n \geq 1$ افزایشی و محدب است، زیرا مجموع اول و دوم آن مقادیر مثبت است. بنابراین، این تابع و تابع $x = y$ حداقل

قضیه ۴۰.۸ پس از حل دستگاه معادلات (۳۰.۸) و (۳۰.۸)، احتمالات حدی به شرح زیر بدست می آید:

$$P_n = (1 - x_n) x_n^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (۲۰.۸)$$

که x_n حدی بین صفر و یک جواب معادله مشخصه زیر است.

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n b_n \quad (۲۰.۸)$$

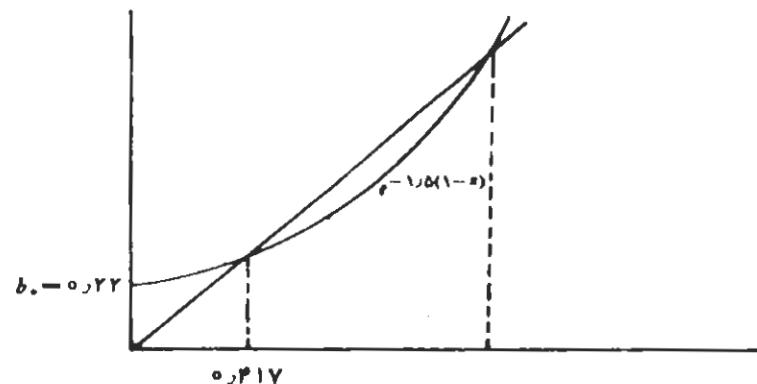
اثبات: به فرض اینکه معادله (۳۰.۸) جوابی بین صفر و یک داشته باشد، با جایگزینی P_n از رابطه (۲۰.۸) در رابطه (۳۰.۸)، صحت این قضیه نشان داده می شود.

مثال ۴۰.۸ احتمالات حدی را در مثال ۴۰.۸ بدست آورید.
حل: برای حل معادله مشخصه (۳۰.۸) از رابطه (۳۰.۸) استفاده می شود. در نتیجه

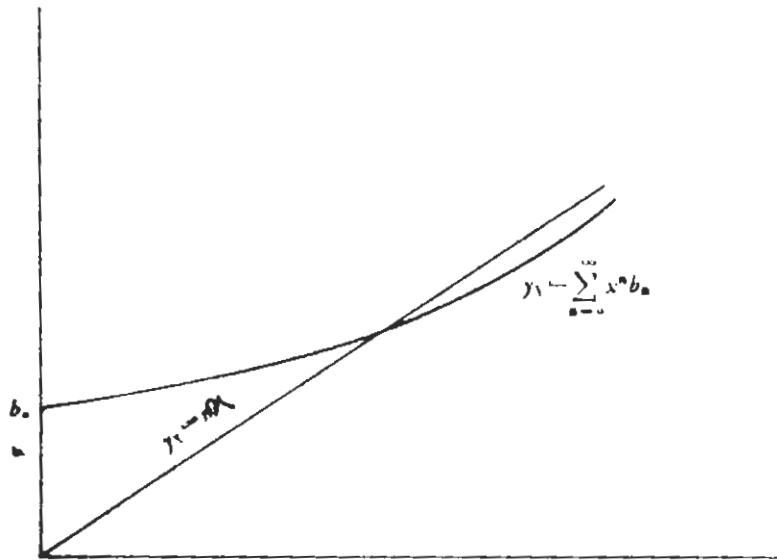
$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n e^{-\lambda(1-x)} \frac{(\lambda(1-x))^n}{n!} = e^{-\lambda(1-x)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda(1-x))^n}{n!}$$

$$x = e^{-\lambda(1-x)} \quad (۲۰.۸)$$

برای حل این معادله مشخصه از روش ترسیمی استفاده می شود. از یک طرف، معادله $x = e^{-\lambda(1-x)}$ و از طرف دیگر تابع $x = y$ ، که نیمساز محورهای مختصات است، رسم می شود. محل تلاقی آنها به ازای $x = 0.22$ ، جواب موردنظر در معادله مشخصه است. در نتیجه



شکل ۴۰.۸ روش ترسیمی برای حل معادله مشخصه مثال ۴۰.۸

شکل ۳.۸ معادله مشخصه در مدل ۱ $G/M/1$ در حالتی که $1 > \rho$ باشد.

اگر مانند شکل ۲.۸، ضریب زاویه، بزرگتر از یک یا $1 > \rho$ باشد، معادله مشخصه، یک جواب بین صفر و یک دارد؛ در غیر این صورت، در این فاصله همواری برای معادله مشخصه وجود نخواهد داشت.

مثال ۹.۸ احتمالات حدی مدل ۱ $M/M/1$ را با استفاده از نتایج مدل ۱ $G/M/1$ بدست آورید.

حل: با استفاده از رابطه (۲۴.۸) و با در نظر گرفتن اینکه $a = \lambda e^{-\lambda t}$ است،

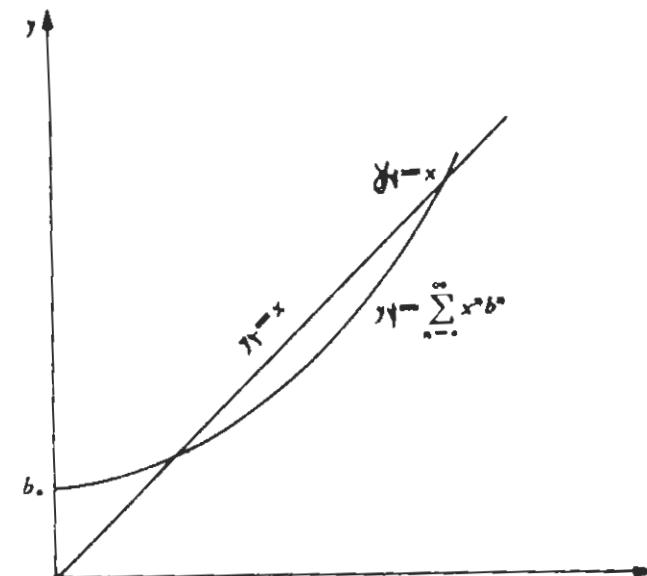
$$x = \int_0^\infty e^{-\mu(t-x)} \lambda e^{-\lambda t} dt = -\frac{\lambda}{\lambda + \mu - \mu x}$$

$$\mu x - (\lambda + \mu)x + \lambda = 0$$

ریشه‌های این معادله عبارت‌اند از:

$$x = \frac{1}{\mu}$$

همان طور که مشاهده می‌شود، یکی از ریشه‌ها همواره یک است. در این مدل، اگر $1 > \rho$ باشد، دیگر معادله $\rho = x$ عددی بین صفر و یک است. اگر $1 < \rho$ باشد، سیستم

شکل ۳.۹ دو نوع ترسیمی حل معادله مشخصه در مدل ۱ $G/M/1$

در دو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند. از طرف دیگر، به مسادگی معلوم می‌شود، که یکی از نقاط تقاطع این دو تابع همواره در نقطه $x = 1$ اتفاقی می‌افتد. بنابراین، این دو تابع جدا از در یک نقطه دیگر با یکدیگر تلاقی ندارند. در این مورد، دو حالت اتفاق می‌افتد. در حالت اول، که در شکل ۲.۸ نشان داده شده است، ضریب زاویه تابع y در نقطه $x = 1$ بزرگر از یک است، که در این صورت، در یک نقطه در فاصله صفر تا یک، این دو منحنی یکدیگر را قطع می‌کند. در حالت دوم، که در شکل ۳.۸ نشان داده شده است، دو منحنی در فاصله صفر تا یک یکدیگر را قطع نمی‌کنند، زیرا، ضریب زاویه تابع y در نقطه $x = 1$ جدا کثیر برآبر با یک است.

از طرف دیگر، ضریب زاویه تابع y در نقطه $x = 1$ برابر است با:

$$\left. \frac{dy_1}{dx} \right|_{x=1} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} b_n \Big|_{x=1} = \sum_{n=0}^{\infty} n b_n$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، عبارت سمت راست معرف میانگین تعداد خدماتهایی است که در فاصله بین دو ورودی ارائه می‌شود و این مقدار برابر است با λ / μ ، زیرا میانگین تعداد موارد خدمت در واحد زمان بین میانگین مدت زمان بین دو ورود λ / μ است. بدین‌ترتیب، ضریب زاویه تابع y در نقطه $x = 1$ ، برابر با λ / μ است. و همان‌طور که گفتیم،



نایابدار است. در حالت پایدار، احتمالات حدی برابر است با:

$$\pi_* = (1 - x_*)x_*^* = (1 - \rho)\rho^*$$

که با تابع فلی که در مدل $G/M/M$ به دست آمد، نطبق می‌کند.

میارهای ارزیابی ده مدل $G/M/1$

ناهنگا نحوه محاسبه احتمالات حدی و به تبع آن میارهای ارزیابی سیستم در لحظه ورود به دست آمد. برای محاسبه میارهای ارزیابی در کل سیستم به شرح ذیر عمل می‌کشد.

نحوه محاسبه W و W_*

پک مشتری را در نظر نگیرید. مدت زمان انتظار این مشتری در صف بستگی به تعداد مشتریها دارد که در لحظه ورود این مشتری در سیستم هستند. بنابراین، برای محاسبه این میار از رابطه احتمال شرطی استفاده می‌کنیم.

$$W_* = E(T_*) = \sum_{n=0}^{\infty} E(T_* | N=n) P_n$$

اگر در لحظه ورود این مشتری، تعداد مشتریها که در سیستم هستند، برابر با n باشد، مدت زمان انتظار او در صف برابر با مجموع مدت زمان خدمت همه مشتریها قبل از آنست. از طرفی، میانگین مدت زمان خدمت هر مشتری برابر با $\mu/1$ است. لذا،

$$E(T_* | N=n) = \frac{n}{\mu}$$

در نتیجه

$$W_* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{\mu} \cdot (1 - x_*)x_*^* = \frac{(1 - x_*)x_*^*}{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} nx_*^{*-1}$$

با استفاده از نتیجه سری $(1 - x_*)^{-1} = 1 / (\sum_{n=0}^{\infty} nx_*^{*-1})$ ، خواهیم داشت:

$$W_* = \frac{x_*^*}{\mu(1 - x_*)} \quad (46.8)$$

$$W = W_* + \frac{1}{\mu(1 - x_*)} \quad (47.8)$$

و با استفاده از استنتاج لیتل

$$L = \lambda W = \frac{\rho}{1 - x_*} \quad (48.8)$$

$$L_* = \frac{\rho \cdot x_*}{1 - x_*} \quad (49.8)$$

از طرف دیگر، در این مدل نیز شبیه سایر مدل‌هایی که پک خدمت‌دهنده دارند،

$$\pi_* = 1 - \rho$$

و می‌توان نشان داد که

$$\pi_* = \rho(1 - x_*)x_*^{*-1}, \quad n \geq 1 \quad (50.8)$$

مثال ۱۰.۸ میارهای ارزیابی مدل $G/M/1$ را با استفاده از مدل $G/M/M$ به دست آورید.

حل: طبق نتیجه مثال (۹.۸)، در مدل $G/M/M$ ، ریشه معادله مشخصه، $\rho = \mu/\lambda$ است (به شرط اینکه $\lambda < \mu$ باشد). در نتیجه

$$\pi_* = (1 - \rho)\rho^n$$

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$W_* = \frac{\rho}{\mu(1 - \rho)}$$

$$L = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

$$L_* = \frac{\rho^n}{1 - \rho}$$

مثال ۱۱.۸ در یک مدل $G/M/1$ ، که مدت زمان خدمت دارای توزیع نمایی با میانگین ۸ دقیقه است، زمان بین دو ورود متوالی مشتریها متغیری گستره است، که مقدار آن ۸ یا ۱۰ یا ۱۲ یا ۱۴ دقیقه با احتمالات، به ترتیب $0.24, 0.23, 0.20$ و 0.13 است. میارهای ارزیابی این مدل را محاسبه کنید.

حل: در این مدل، میانگین مدت زمان بین دو ورود برابر است با،

$$\frac{1}{\lambda} = 1/8 = (0.24)(12) + (0.23)(14) + (0.20)(16) + (0.13)(18)$$

درنتیجه،

$$\pi_0 = 1 - \rho = 0.72$$

$$\pi_n = \rho(1 - x_0)x_0^{n-1} = 0.7288(0.762)^{n-1}, \quad n \geq 1$$

$$W = \frac{1}{\mu(1 - x_0)} = 22.22 \text{ دقیقه}$$

$$W_0 = \frac{x_0}{\mu(1 - x_0)} = 12.22 \text{ دقیقه}$$

$$L = \frac{\rho}{1 - x_0} = 22.22$$

$$L_0 = \frac{\rho x_0}{1 - x_0} = 12.22$$

می‌توان L را از رابطه زیر بدست آورد:

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} n \pi_n = 0.7288 \sum_{n=1}^{\infty} n 0.762^{n-1} = \frac{0.7288}{(1 - 0.762)^2} = 22.22$$

مثال

۱. بهبشن تزریقات یک درمانگاه، که فقط یک مأمور دارد، هر ساعت به طور متوسط ۱۵ نفر مریض مراجعه می‌کنند. ورود این مریضها طبق فراہنگ پرسون است. مدت زمان تزریق، متغیر تصادفی یکنواخت و بین سه تا ع دقیقه است. به طور متوسط یک مریض چه مدت در این درمانگاه وقت صرف می‌کند؟

۲. در مثال ۱، اگر مدت زمان انجام تزریقات ثابت و برابر با ۲۵ دقیقه، به مسئوالات مطرح شده مجلداً پاسخ دهید.

۳. مثال ۱ را مجدداً در نظر بگیرید. فرض کنید کمربندها برای دریافت یکی از چهار نوع خدمات مراجعه می‌کنند. مدت زمان ارائه هر خدمت ثابت و طبق جدول ذیراست. به مسئوالات مطرح شده مجلداً پاسخ دهید.

بنابراین، $1/\lambda = 1/8$ و $\lambda = 1/8$ و $\mu = 0.7288$ است.

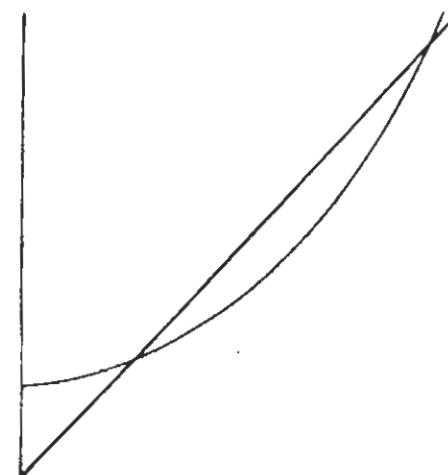
معادله مشخصه این مدل، طبق رابطه (۲۵.۸) به صورت رابطه زیر در می‌آید:

$$x = 0.7288e^{-1.75(1-x)} + 0.72e^{-1.25(1-x)} + 0.3e^{-0.75(1-x)} + 0.1e^{-0.25(1-x)}$$

چون $1 < \mu$ است، طبق قضیه (۳.۸) معادله مشخصه فوق دارای یک جواب x است، که مقدار آن عددی بین صفر و یک است. برای محاسبه x ، جدول زیر را تهیه می‌کنیم:

مقدار سمت راست معادله مشخصه	x
0.7295	0
0.7375	0.72
0.7477	0.74
0.7609	0.76
0.778	0.78
1	1

در شکل ۴۰.۸، دو طرف معادله مشخصه با استفاده از نتایج از تابع جدول فوق رسم شده است. جواب حاصل $x = 0.762$ است.



شکل ۴۰.۸ روش ترسیمی برای حل مثال ۱۱.۸

اج. چنانچه ظرفیت صیف حد اکثر سه باشد، نمودار آهنگ را رسم کنید. در این حالت احتمال اینکه از ورود یک مشتری جلوگیری شود، چیست؟

د. در بند «ج»، احتمال اینکه یک مشتری که وارد سیستم شده است، بتواند بلاگافاصله خدمت دریافت کند، چیست؟

۹. به یک ایستگاه تولید، هر ۵ روز ۸ دقیقه یک بار، قطمه‌ای می‌رسد. این مدت زمان قطعی (غیراحتمالی) است. مدت زمان کار روی هر قطمه در این ایستگاه، نمایی با میانگین عدیقه است. میانگین تعداد قطمهای در این ایستگاه در دو حالت زیر چقدر است؟

الف. لحظه ورود یک قطمه جدید
ب. در یک لحظه مشخص

۱۵. یک مدل $M/G/1/2$ ، که آهنگ ورود مشتريها به آن در هر ساعت برابر ۳ است، را در نظر بگيرید. مدت زمان خدمت، ثابت و برابر با ۱۵ دققه است. اين مدل را به يك زنجيره مارکوف (گسته) تبديل و ماتریس گذار آن را بنویسید. احتمالات حدی این ماتریس را بدست آورید. این احتمالات حدی را با احتمالات حدی مدل $1/M/G/1$ ، با همان آهنگ ورود آهنگ خدمت مقایه کنید.

۱۱) یک لحظه‌مشخص را در نظر بگیرید، که بک مشتری واردیک سیستم $M/G/1$ می‌شود. نشان دهید که میانگین مدت زمانی که طول می‌کشد تا اولین مشتری خارج شود، برابر با $E(S^*)$ است، که در آن λ آهنگت ورود مشتری و μ مدت زمان خدمت است.

۱۲. مسئله ۳۲ فصل هفتم را مجدداً در نظر بگیرید، با این تفاوت که مدت زمان خدمت در استنگاه ۷، منبر تصادفی، یا تو زیمه یکنواخت در فاصله (۵۳ و ۵۵) است.

۱۳- در مسئله ۹ احتمال اینکه موقع خارج شدن یک قطمه از سیستم، دو قطمه دیگر هم در آن استنگاه باشد، چیست؟ احتمال اینکه موقع وارد شدن یک قطمه به سیستم، دو قطمه دیگر هم در آن استنگاه باشد، چیست؟

۱۳. مسئله ۵ فصل هفتم را مجدداً حل کنید، با این تفاوت که مدت زمان خدمت مشتری‌های گروه ۱، ثابت (۶ دقیقه) و زمان خدمت مشتری‌های گروه ۲ متغیر تصادفی با توزیع نرمال (با میانگین ۶ دقیقه و واریانس ۲۵) است.

۱۵- مثلاً ۶ فصل هفتم را مجدداً حل کنید؛ با این تفاوت که مدت زمان بازرسی چمدانها دارای تغییر نمایند و فاصله ۷ تا ۸ دققه است.

۱۶- مسائل ۱ و ۲ را مجدداً حل کنید، با این تفاوت که تعداد مشترکین نزربیفات به جای

۱۷- یک مدل $M/G/\infty$ را در نظر بگیرید. تابع توزیع مدت زمان خدمت، (*i*) $B(t)$ فرض

نوع خدمت	مدت زمان (دقیقه)	درصد مشتریهای متفاوتی این نوع خدمت
۱	۳	۲۰
۲	۲	۳۰
۳	۵	۳۰
۴	۶	۲۰

۴۰. در مسائل ۱ و ۳، واریانس تعداد بیماران درمانگاه را محاسبه کنید.

۵. دریک مر کز کنترل کیفیت، تعداد قطعه‌هایی که برای بازار می‌رسند، طبق فرآیند پواسون است (به طور متوسط هر ۱۲ دقیقه یک قطعه). مدت زمان بازار می‌باشد. متغیر تصادفی و نرمال با میانگین ۸ دقیقه و واریانس ۳۲ (دقیقه)^۴ است. چنانچه به جای بازار می‌فعلن یک ماشین اتوماتیک قرار دهیم، مدت زمان بازار می‌قطبی (غیر احتمالی) خواهد شد. مدت زمان بازار می‌تواند این ماشین با بدجهود باشد. نماینگین تعداد قطعاتی که در مرکز کنترل کیفیت هستند، تغییر نکند.

۶۰. در هر یک سیستم صفت، مشتریها طبق فرایند پردازش با پارامتر ۱۵ مشتری در ساعت وارد می‌شوند، مدت زمان خدمت، طبق توزیع یکنواخت، بین ۳ تا ۵ دقیقه است.

الف. اختلال تعلیمی بودن سیستم چیست؟
ب. میانگین مدت زمان انتظار منظری درسیستم چیست؟
ج. اگر مدت زمان خدمت نا باشد، مقدار آن حد را باید باشد تا جواب بند ن تغییر نکند

۷۰. دزیک سیستم صفر، ورود مشتریها بر اساس فرایند پواسون با میانگین هرساعت مشتری است. نتایج زمان-سنگی در مردم مدت زمان خدمت (بر حسب دقیقه) به شرح زیر است.

مسارهای ارزیابی، این سیستم را محاسبه کنید.

۸- به یک سیستم صفت، هر ساحت به طور متوسطه مشتری طبق فرایند پوامون وارد می شوند. این سیستم فقط یک خدمت دهنده دارد، لیکن مشتریها مقاضی دنوی خدمت هستند. در حدود ۲۵۹ درصد مشتریها مقاضی خدمت نوع ۱ هستند بقیه مقاضی خدمت نوع دو هستند. مدت زمان هر دو خدمت، نمایی، با مانگنهای بتر تر ۲ و ۴ دققه است.

می شود. یک لحظه مخصوص مانند را در نظر بگیرید. ثابت کنید:
الف. احتمال اینکه یکی از مشتریهایی که قبل از لحظه وارد سیستم شده است، هنوز آن را
توک نکرده باشد، برابر است.

$$p = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} B(s-x) dx$$

ب. احتمال اینکه در لحظه و تعداد n مشتری در سیستم باشد، برابر است،

$$e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^n}{n!}$$

که در آن λ آنگه ورود مشتری است.

۹

بهینه‌سازی سیستمهای صفت

۱۰.۹ ظرفیت بهینه و هزینه‌های یک سیستم صفت

هدف از بهینه‌سازی در سیستمهای صفت، تعیین ظرفیت آنهاست، به طوری که نه باعث ایلاف پیش از حد وقت مشتریها شود و نه اینکه ظرفیت سیستم آن قدر زیاد انتخاب شود که از سرمایه‌گذاری انجام شده و هزینه‌های عملیاتی مربوط به ارائه خدمت استفاده کامل به عمل نیاید. به عبارت دیگر، ظرفیت بهینه سیستم ظرفیتی است که مجموع هزینه‌ها را حداقل کند. در یک سیستم، هزینه‌ها را به طور کلی می‌توان به دو گروه تقسیم کرد.

الف. هزینه خدمت‌دهی، در هر سیستم، کاهش طول صفت و زمان انتظار مشتری از طریق افزایش ظرفیت ارائه خدمت آن امکان‌پذیر می‌شود، این کار مستلزم تقلیل هزینه‌هایی است که صرف خرید و نصب تجهیزات جدید و یا صرف استخدام افراد اضافی برای ارائه خدمت می‌گردد. مثلاً، برای افزایش ظرفیت تغایر یک‌بندر، اسکله جدیدساخته و تجهیزات لارم ظرفیت‌های اضافه شود و هرمانم با آن به استخدام و آموزش افراد جدید اقدام گردد، که همه این امور مستلزم هزینه‌های اضافی است. بنابراین، گزرش ظرفیت توأم با افزایش هزینه بهره‌برداری، نگهداری، استهلاک و خسارت ناشی از رکود سرمایه است.

ب. هزینه ایلاف وقت در صفت، وقت مشتری از بطریق اقتصادی - اجتماعی ارزش دارد و ایلاف آن هزینه محسوب می‌شود. در سیستمهای مختلف و سه نوع مشتریهای این ارزشها متفاوت است. برای نمونه، ایلاف ناشی از هرساعت انتظار کشتنی در لنگر گاه

وامکنات لازم برای ارائه خدمت است. کل این هزینه‌ها در واحد زمان C_{sys} است. (اگر C_4 مر بوط به هزینه ایجاد فضای اضافی در سیستم باشد، کل هزینه به صورت $C_4 K$ بیان می‌شود)

د. هزینه‌ای از دست دادن مشتری (ه.). این هزینه را سیستم موقعي متحمل می‌شود که بدليل تکمیل ظرفیت یا اتخاذ سیاستهای دیگر ازورود یک مشتری جلوگیری به عمل آید، یا اینکه خود مشتری به علت تراکم ازورود به سیستم مصرف شود. اگر λ آهنگ مراجعة مشتری بهادار λ آهنگ ورود آنها به سیستم باشد، کل خساره‌ی که سیستم با بت از دست دادن مشتری در واحد زمان متحمل می‌شود، برابر با $(\lambda - \bar{\lambda}) C_4$ است.

ه. هزینه‌ای اکلاف وقت مفتری در واحد زمان (C_5). کل هزینه اکلاف وقت مفتری در واحد زمان (C_5). کل هزینه اکلاف وقت مفتری در واحد زمان (C_5) است.

و. هزینه‌ای اکلاف وقت مشتری در هنگام دریافت خدمت در واحد زمان (C_6). کل هزینه اکلاف وقت مشتری بهایی که درحال دریافت خدمت هستند، برابر با $(L - L_0) C_6$ است. باید توجه داشت که در بیانی ازموارد $C_6 = C_5$ است؛ اما در موادی میزان این دو هزینه متفاوت است. ضمناً بدینه است که چهار هزینه نوع اول هزینه‌های ارائه خدمت و دو نوع هزینه آخر هزینه‌های مر بوط به مشتری است. علاوه بر هزینه‌های فوق، بر حسب مورد و شرایط هزینه‌های متعدد دیگری نیز وجود دارد. مثلث، در یک سیستم که ورود مشتریها به آن به صورت گروهی انجام می‌شود، ممکن است هر ورود گروهی هزینه‌ای را نیز در بر داشته باشد (مثلاً هزینه حمل مشتریها با هزینه پذیرش و بست اطلاعات). هزینه‌های بالاسری کل سیستم و نظایر اینها را نیز می‌توان نام برد. لیکن، با توجه به تنوع سیستمهای صفت ضروری است که در هنگام بررسی هر سیستم، هزینه‌های آن با توجه به شرایط ویژه‌اش به طور مشخص مورد مطالعه قرار گیرد.

هدین ترتیب، با توجه به مطالب فوق، در الحال کلی تابع هزینه یک سیستم صفت را می‌توان به شرح زیر بیان کرد.

$$C = C_1(m - L + L_0) + C_2(L - L_0) + \\ C_3m + C_4(\lambda - \bar{\lambda}) + C_5L_0 + C_6(L - L_0) \quad (1.9)$$

با

$$C = (C_1 + C_2)m + (-C_1 + C_2 + C_5)(L - L_0) + \\ C_5L_0 + C_6(\lambda - \bar{\lambda}) \quad (2.0)$$

در بیانی از مدلها، تعدادی از هزینه‌های فوق وجود ندارد. ضمناً همان‌طور که گفتم بعضی از سیستمهای نیز هزینه‌های خاصی دارند، که به تابع فوق اضافه می‌شوند.

برای تخلیه‌ها بارگیری، هزینه‌گزافی است که به صورت خساره‌ی پرداخت می‌شود. عدم استفاده از ماشینی که در کارخانه خراب شده و منتظر تعمیر است، باعث کاهش میزان تولید خواهد شد. علاوه بر اینها، در سیستمهای تجارتی، در انتظار گذاشتن پیش از حد مشتری باعث از دست دادن او و همچنین از دست دادن سودهای محتمل خواهد شد. در بیمارستان، اتفاق وقت مشتری (مریض) در صفت ممکن است به قیمت جانش تمام شود.

بدینه است که « نوع هزینه فوق ها یکدیگر هم جهت نیستند و از باعث کاهش دیگری می‌شود. بهینه‌سازی سیستم صفت به معنای تعیین ظرفیت آن است، به طوری که مجموع هر دو نوع هزینه حداقل شود. بدینه است که چون عوامل تعیین کننده هزینه ماهیت تصادفی دارند، تنها می‌توان میانگین هزینه‌ها را محاسبه و حداقل کرد.

همان‌طور که در فصلهای قبل مشاهده شد، تعیین ظرفیت سیستم خارج از مقوله تئوری صفت است. در عمل ظرفیت بهینه سیستم به این ترتیب تعیین می‌شود که، به فرض معلوم بودن پارامترهای آن، معیارهای ارزیابی (طول صفت، زمان انتظار، ضریب بهره‌وری ...) مشخص و برآسان آنها، دونوع هزینه فوق را محاسبه می‌کنند. آن‌گاه، تأثیر تغییرات پارامترها بر معیارهای ارزیابی و درنتیجه بر هزینه‌های کل سیستم مجدد بررسی می‌شود. تغییر پارامترها تا آنجا ادامه پیدا می‌کنند، که بالاخره جوابی که هزینه‌ها را حداقل کنند به دست آید.

۲.۹ تابع هزینه

هزینه‌های یک سیستم صفت به طور کلی بستگی به نوع و ماهیت آن دارد. در این بخش، بعضی از انواع هزینه‌ها، که در سیستمهای مختلف وجود دارد، تشریح می‌کنیم. موارد خاصی نیز وجود دارد که باید جداگانه آنها را بررسی کرد.

همدهنرین هزینه‌ها در سیستم صفت عبارت اند از:

الف. هزینه‌ای تک‌هداری یک خدمت‌دهنده بیکار در واحد زمان (C_1). چون میانگین تعداد خدمت‌دهنده‌گانی که مشغول ارائه خدمت هستند، برابر با $(L - L_0)$ است، میانگین کل هزینه‌ای تک‌هداری خدمت‌دهنده‌گان بیکار برابر با $(C_1(m - L + L_0))$ است، که در آن m معرف تعداد خدمت‌دهنده‌گان است.

ب. هزینه‌ای عملیاتی مر بوط به یک خدمت‌دهنده که مشغول ارائه خدمت است (C_2). میانگین تعداد خدمت‌دهنده‌گانی که مشغول ارائه خدمت هستند، طبق آنچه که در بند الف گفتم برابر با $(L - L_0)$ است و درنتیجه مقدار کل این نوع هزینه برابر با $(C_2(L - L_0))$ است.

در بعضی از سیستمهای ممکن است C_2 برابر باشد، اما از واسطه همیشه چنین نیست. هزینه‌ای سرمایه‌گذاری روی یک خدمت‌دهنده یا ایجاد فضای اضافی سیستم در واحد زمان (C_3). این هزینه شامل هزینه استهلاک و بازگشت سرمایه مصرف شده جهت تهیه نیازهای

باشد که $1 < \mu$ شود، از طرفی، در جدول فوق حداقل مقدار m نیز محدود خواهد بود، زیرا نشان داده می‌شود که با افزایش m ابتدا هزینه کل (m^*) کاهش می‌باشد و از آن پس شروع به افزایش می‌کند. به عبارت دیگر، با افزودن تعداد خدمت‌دهنده‌ها ابتدا کاهش هزینه افزایش مر بروط به مشتری باقی توجه است، اما بعد از یک آهنگ کاهش آن نسبت به افزایش هزینه خدمات دهی کمتر می‌شود، بدین ترتیب، افزایش m تا آنجا ادامه می‌باشد، که کل هزینه‌ها روبرو باشند و به محض اینکه افزایش آن شروع شد، متوقف می‌شود.

مثال ۳.۹ تعداد بهبیه خدمت دهندگان را در یک مدل $M/M/m/m$ ، که در آن $\lambda = 15$ و $\mu = 10$ است، تعیین کنید. فرض می‌کنیم که هزینه هرساعت وقت خدمت دهنه ۱۲۵ و هزینه هر ساعت وقت مشتری ۳۶۰ باشد. (فرض براین است که برای افزایش تعداد خدمت دهندگان احتیاج به سرمایه‌کداری نیست ولذا $K=0$ است).

حل: در این مدل چون مقدار m باید کوچکتر از ۱ باشد، حداقل تعداد خدمت دهندگان $m=2$ است. جدول زیر را تهیه می‌کنیم

L_i	$C_i \cdot m$	π_i	m
۱۹۹۲۸۵	۹۲۲۰۲۸	۰۱۲۲۸۵	۲
۰۵۲۲۶۸	۲۲۵۵۳	۰۲۱۰۳	۳
۰۵۰۴۲۷	۲۹۶۱	۰۲۲۱	۴

همانطور که مشاهده می‌شود، تعداد بهبیه خدمت دهندگان برابر با ۳ است.

مثال ۳.۹ در یک مدل $M/M/m/K$ ، تأثیر تغییر هزینه‌مان m و K را تعیین کنید. حل: در این مدل برای افزایش ظرفیت خدمت دهی می‌توان هم تعداد خدمت دهنه وهم فضای سیستم را افزایش داد، برای بعدست آوردن تابع هزینه، رابطه (1.9) ، باید توجه کرد که $\mu = \lambda / L - L_0$ است، که λ معروف آهنگ ورود مشتریان (ونه آهنگ) ورود مراجعين است. از طرف دیگر λ خود تابعی از K است. بنابراین، در تابع هزینه این مدل، $(تابع ۲.۹)$ ، باید $\lambda - \lambda - L_0 = \lambda / K$ را مساوی μ و هزینه مرمایه‌گذاری را C_K (بهای C_K) در نظر گرفت.

مقادیر بهبیه m و K را از راه جستجو می‌توان به دست آورد. با توجه به شرایط، معمولاً افزایش K بیش از مقدار معین محدود نیست؛ لذا، اگر جداکر آن را با K نشان دهیم، با توجه به اینکه $m \leq K$ است، جدولی به شرح زیر تهیه می‌کنیم، که هناصر جدول $C(m, K)$ است.

۳.۹ متغیرهای تصمیم در سیستمهای صفحه هر سیستم صفحه، ظرفیت‌سیستمها دارای پارامترهای قابل کنترل است، که به آنها متغیر تصمیم می‌گویند. با تغییر و تنظیم این متغیرها، ظرفیت سیستم نیز تغییر می‌کند. متغیرهای تصمیم سیستم، طبقاً بستگی به نوع و ماهیت آن دارد؛ لیکن، عدمه‌ترین آنها دایی توان به شرح زیر نام برد:

- تعداد خدمت دهندگان
- آهنگ خدمت دهی
- آهنگ ورود مشتریان
- ظرفیت صفحه
- جمعیت مشتریان

همان طور که مشاهده می‌کنیم، متغیرهای تصمیم فوق، عمدتاً همان ورودیهای سیستم هستند. بنابراین، چنانچه این ورودیها قابل کنترل باشند، ظرفیت سیستم را نیز می‌توان تغییرداد. در عمل ممکن است همزمان چند متغیر تصمیم را در اختیار داشته باشیم، که با این ترتیب در تغییر ظرفیت سیستم انعطاف پذیری بیشتری وجود خواهد داشت.

در این بخش، می‌مثالهایی نمونه‌های بهینه‌سازی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. مثال ۱۰.۹ تأثیر تغییرات در تعداد خدمت دهندگان بر تابع هزینه در مدل $M/M/m/m$ را بررسی کنید.

حل: در این مدل، چون λ و m ثابت فرض می‌شود، لذا فقط هزینه‌هایی را منتظر می‌کنیم که وابسته به تعداد خدمت دهندگان، بعنی m باشد. از طرف دیگر، طبق معادله بالای صفحه $L_0 = \lambda / \mu$ است. لذا تابع هزینه به شرح زیر خواهد بود.

$$C(m) = (C_1 + C_2)m + C_5 L_0 \quad (3.9)$$

که C_1 و C_2 ، طبق تعاریف بخش قبل به ترتیب معرف هزینه نگهداری خدمت دهندگان بیکار، هزینه‌سرمایه‌گذاری روی یک خدمت دهنه و هزینه اتفاق وقوع مشتری در صرف است. هزینه‌هایی متنقل از m ، از تابع هزینه حذف شده است. برای تعیین m ، تابع جدولی به شرح زیر لازم است.

$C(m)$	L_0	π_0	m

از جدول فوق، مقادیر $C(m)$ به ازای مقادیر مختلف m به دست می‌آید. بدین ترتیب، مقدار بهبیه m نیز مشخص می‌شود. بدینهی است که حداقل مقدار m باید طوری

K/m	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
K^*	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
۲۶۶۸	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۲۴۰۸	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۲۲۲۰	۱۸۲۲	۱۶۲۰	۱۴۲۰	۱۲۲۰	۱۰۲۰	۸۲۰	۶۲۰	۴۲۰	۲۲۰	۰	۰	۰	۰
۲۵۴۲	۲۶۶۷	۲۷۶۳	۲۸۵۵	۲۹۴۷	۳۰۳۹	۳۱۳۰	۳۲۳۱	۳۳۳۲	۳۴۳۳	۳۵۳۴	۳۶۳۵	۳۷۳۶	۳۸۳۷
۲۷۷۸۹	۱۸۴۲	۱۲۱۴	۱۲۲۶	۱۲۳۸	۱۲۴۰	۱۲۴۲	۱۲۴۴	۱۲۴۶	۱۲۴۷	۱۲۴۸	۱۲۴۹	۱۲۵۰	۱۲۵۱
۲۹۴۰	۳۰۹۵	۳۱۱۱	۳۱۲۷	۳۱۳۳	۳۱۳۹	۳۱۴۵	۳۱۴۹	۳۱۵۳	۳۱۵۷	۳۱۶۱	۳۱۶۵	۳۱۶۷	۳۱۶۹
۳۰۹۵	۳۲۲۶	۳۲۴۱	۳۲۵۲	۳۲۶۷	۳۲۷۹	۳۲۹۰	۳۳۰۲	۳۳۱۴	۳۳۲۶	۳۳۴۷	۳۳۶۸	۳۳۸۹	۳۴۱۰
۳۲۵۲	۳۱۱۱	۳۲۵۲	۳۲۶۷	۳۲۷۹	۳۲۹۰	۳۳۰۲	۳۳۱۴	۳۳۲۶	۳۳۴۷	۳۳۶۸	۳۳۸۹	۳۴۱۰	۳۴۳۱
۳۳۲۳	۳۲۹۳	۳۲۹۴	۳۲۹۵	۳۲۹۶	۳۲۹۷	۳۲۹۸	۳۲۹۹	۳۳۰۰	۳۳۰۱	۳۳۰۲	۳۳۰۳	۳۳۰۴	۳۳۰۵
۳۴۳۱	۳۲۹۴	۳۲۹۵	۳۲۹۶	۳۲۹۷	۳۲۹۸	۳۲۹۹	۳۳۰۰	۳۳۰۱	۳۳۰۲	۳۳۰۳	۳۳۰۴	۳۳۰۵	۳۳۰۶
۳۴۳۲	۳۲۹۵	۳۲۹۶	۳۲۹۷	۳۲۹۸	۳۲۹۹	۳۳۰۰	۳۳۰۱	۳۳۰۲	۳۳۰۳	۳۳۰۴	۳۳۰۵	۳۳۰۶	۳۳۰۷
۳۴۳۳	۳۲۹۶	۳۲۹۷	۳۲۹۸	۳۲۹۹	۳۳۰۰	۳۳۰۱	۳۳۰۲	۳۳۰۳	۳۳۰۴	۳۳۰۵	۳۳۰۶	۳۳۰۷	۳۳۰۸
۳۴۳۴	۳۲۹۷	۳۲۹۸	۳۲۹۹	۳۳۰۰	۳۳۰۱	۳۳۰۲	۳۳۰۳	۳۳۰۴	۳۳۰۵	۳۳۰۶	۳۳۰۷	۳۳۰۸	۳۳۰۹
۳۴۳۵	۳۲۹۸	۳۲۹۹	۳۳۰۰	۳۳۰۱	۳۳۰۲	۳۳۰۳	۳۳۰۴	۳۳۰۵	۳۳۰۶	۳۳۰۷	۳۳۰۸	۳۳۰۹	۳۳۱۰
۳۴۳۶	۳۲۹۹	۳۳۰۰	۳۳۰۱	۳۳۰۲	۳۳۰۳	۳۳۰۴	۳۳۰۵	۳۳۰۶	۳۳۰۷	۳۳۰۸	۳۳۰۹	۳۳۱۰	۳۳۱۱
۳۴۳۷	۳۳۰۰	۳۳۰۱	۳۳۰۲	۳۳۰۳	۳۳۰۴	۳۳۰۵	۳۳۰۶	۳۳۰۷	۳۳۰۸	۳۳۰۹	۳۳۱۰	۳۳۱۱	۳۳۱۲
۳۴۳۸	۳۳۰۱	۳۳۰۲	۳۳۰۳	۳۳۰۴	۳۳۰۵	۳۳۰۶	۳۳۰۷	۳۳۰۸	۳۳۰۹	۳۳۱۰	۳۳۱۱	۳۳۱۲	۳۳۱۳
۳۴۳۹	۳۳۰۲	۳۳۰۳	۳۳۰۴	۳۳۰۵	۳۳۰۶	۳۳۰۷	۳۳۰۸	۳۳۰۹	۳۳۱۰	۳۳۱۱	۳۳۱۲	۳۳۱۳	۳۳۱۴
۳۴۳۱۰	۳۳۰۳	۳۳۰۴	۳۳۰۵	۳۳۰۶	۳۳۰۷	۳۳۰۸	۳۳۰۹	۳۳۱۰	۳۳۱۱	۳۳۱۲	۳۳۱۳	۳۳۱۴	۳۳۱۵

$C(m, K^*)$	K^*	\bar{K}	...	۲	۱	K/m
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰

در این جدول، K^* معرف ظرفت بهینه سیستم بازای مقدار ثابت m و $C(m, K^*)$ شانده‌شده حداقل کل هزینه‌ای سیستم است. به فرض اینکه تعداد خدمت‌دهندگان برابر با m باشد، سپس، حداقل مقادیر $C(m, K^*)$ از ستون آخر جدول به دست می‌آید، که باین ترتیب مقادیر بهینه K^* و m مشخص می‌شود.

مثال ۴.۹ یک کارگاه نویلیدی را در نظر بگیرید، که کارهای مفارشی مشتریان را می‌پذیرد. به علت محدودیت فضای انبار، حداقل تعداد مشتریانی که پذیرفته می‌شوند، محدود است. هدف، تعیین تعداد ماشینهایی که سفارشات مشتریان با آن انجام می‌شود و همچنین تعیین ظرفت سیستم است، به طوری که هزینه‌ها حداقل شود. مدت زمان خدمت دارای توزیع نمایی با میانگین ۱۵ دقیقه و ورود مشتریها طبق فرایند پواسون با میانگین هر ساعت ۱۶ مشتری است. هزینه‌های مختلف به شرح زیر است:

هزینه ایجاد یک واحد ظرفیت سیستم (دو واحد زمان):
 $C_2 = 10$
 (افزایش فضا برای نگهداری یک مشتری جدید)

هزینه عدم استفاده از یک ماشین در واحد زمان:
 $C_1 = 100$
 $C_2 = 200$

سود حاصل از انجام کار مشتری (با خسارتم از دست دادن مشتری):
 $C_4 = 200$
 $C_5 = C_6 = 150$
 حل: تابع هزینه این مدل عبارت است از:

$$C(m, K) = 100m + 10K + 250(L - L_0) + 150L_0 + 2800\pi_4$$

از طرف دیگر،

$$L - L_0 = \frac{\bar{\lambda}}{\mu} = \frac{\lambda(1 - \pi_4)}{\mu} = \frac{16}{\mu}(1 - \pi_4) = 2 - 2\pi_4$$

در نتیجه

حل: این مسئله، یک مدل $M/M/m/m$ با مدل (λ/λ) است. در این مدل، $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$ و $C_5 = 2$ ، $\mu = 2$ ، $\lambda = 20$ در این مدل به شرح زیر است:

$$C(m) = 2m + 200\pi_m$$

برای بدست آوردن m از جدول زیر استفاده می‌کنیم.

$C(m)$	π_m	m
۶۰۱	۰۰۵	۲۵
۵۹۷۴۳	۰۰۵۳۷	۲۶
۵۹۷۴۶	۰۰۵۲۶	۲۷
۵۹۷۵	۰۰۵۱۸	۲۸

بنابراین، تعداد بهینه اتومبیل در پارکینگ برابر با ۲۷ است.

مثال ۷.۹ در یک مدل $M/M/1$ ، خدمت‌دهنده ماشینی است که می‌توان سرعت آن را تنظیم کرد. اگر آنکه خدمت را مفرض کنیم، هزینه عمایاتی و همچنین هزینه پکاری هر ماشین بستگی به μ دارد، که آن را با $f(\mu)$ نشان می‌دهیم.

حل: با توجه به اینکه تنها متغیر تصمیم در این مدل μ است، تابع هزینه مربوط به شرح زیر خواهد بود:

$$C(\mu) = f(\mu) + C_5 L_0 + C_6 (L - L_0)$$

به جای L ، مقادیر مربوطه را جایگزین می‌کنیم، درنتیجه

$$C(\mu) = f(\mu) + \frac{C_5 \lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} + C_6 \frac{\lambda}{\mu}$$

برای بدست آوردن حداقل آن، از رابطه فوق مشتقگیری می‌کنیم (بداشت اینکه $C(\mu)$ قابل مشتقگیری باشد). درنتیجه،

$$\frac{dC(\mu)}{d\mu} = f'(\mu) - \frac{C_5 \lambda^2 (2\mu - \lambda)}{\mu^2 (\mu - \lambda)^2} - \frac{C_6 \lambda}{\mu^2} = 0$$

در حالت خاص که $C_5 = C_6$ باشد، نتیجه می‌شود که به ازای مقدار بهینه μ

$$f'(\mu) = \frac{C_5 \lambda}{(\mu - \lambda)^2}$$

حدد ۱۰۰۰ را می‌توان از تابع هزینه حذف کرد، چون متغیرهای تصمیم بر آن تأثیری ندارند. با استفاده از جدول زیر، تأثیر تغییرات K و m بر تابع هزینه بررسی می‌شود. همان‌طور که مشاهده می‌شود، حداقل هزینه به ازای $m = 6$ و $K = 11$ حاصل می‌شود و مقدار هزینه بهینه برابر با ۸۱۵ است.

مثال ۷.۹ در یک کارخانه که دارای ۳۵ ماشین است، هدف تعیین تعداد بهینه تعمیر کاران است. مدت زمان تعمیر هر ماشین دارای توزیع نمایی با میانگین ۳ ساعت و مدت زمانی که ماشین کارمی کند (قبل از پنکه خراب شود) بیزدار ای توزیع نمایی با میانگین ۲۴۵ ساعت است. خسارت قطع تولید هر ماشین ساعتی ۱۰۰۰ تومان و سفرق هر ساعت کار تعمیر کار را ۳۵۰ تومان فرض می‌کنیم.

حل: در این مدل $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = 0$ و $C_6 = 1000$ است. لذا تابع هزینه عبارت است از:

$$C(m) = 300m + 1000L$$

برای تعیین m از جدول زیر استفاده می‌کنیم

$C(m)$	L	π_m	m
۷۸۶۲	۶۰۹۶	۰۰۵۴	۴
۷۵۶۹	۳۵۳۷	۰۰۱۶۸	۷
۲۲۷۲	۱۱۹۷	۰۰۳	۵
۲۱۲۲	۱۱۳۴	۰۰۴	۶
۲۱۰۷	۱۱۰۹۷	۰۰۲۸	۷
۲۲۰۱	۵۲۸	۰۰۵۲	۸

همان‌طور که مشاهده می‌شود، حداقل هزینه به ازای $m = 7$ بدست می‌آید. مثال ۷.۹ در مراضی یک پارکینگ، هدف، تعیین فضای آن است. موقعی که ظرفیت پارکینگ تکمیل باشد، اتومبیل‌ها به پارکینگ‌های دیگر می‌روند و این پارکینگ از سود حاصله محروم خواهد شد. اتومبیل‌ها طبق فرایند سوason با میانگین ۵ دستگاه وارد می‌شوند. مدت توقف هر اتومبیل دارای توزیع نمایی با میانگین نیم ساعت است. هزینه ایجاد فضا برای پارک اتومبیل (دوازده زمان) برابر با ۲ و سود حاصله در هر ساعت برابر با ۵ است.

معیار تعیین فاصله دو نقطه هندسی A و B با مختصات (a, b) و (a', b') را در نظر بگیرید. فاصله بین این دو نقطه را بر حسب نیاز و شرایط، با معیارهای مختلف می‌توان اندازه‌گیری کرد. دو معیار مهم اندازه‌گیری فاصله عبارت اند از:

الف. فاصله هندسی بین دو نقطه، یعنی

$$d = \sqrt{(a-a')^2 + (b-b')^2}$$

(در شکل ۱۰.۹، فاصله مستقیم AB ، معرف فاصله هندسی است).

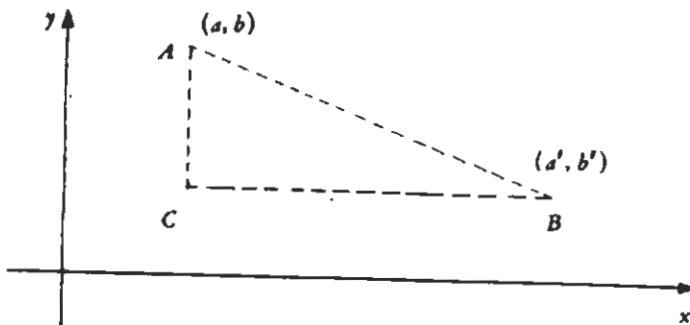
ب. فاصله خطی که فرض می‌شود، مشتری در امتداد محورهای مختصات حرکت می‌کند. برای نمونه، در یک شهر رفت و آمد در امتداد خیابانها و یا در یک کارخانه در امتداد جاده‌ها و مسیرهای مشخص انجام می‌شود. در شکل ۱۰.۹، فاصله خطی بین دو نقطه A و B می‌باشد.

نمودار
نمودار
نمودار

$$d = |X| + |Y| = |a - a'| + |b - b'|$$

که $|X|$ ، فاصله در امتداد محور x ها و $|Y|$ ، فاصله در امتداد محور y هاست؛ یعنی برای محاسبه $|X|$ ، که میانگین فاصله یک مشتری تا مبدأ مختصات در امتداد محور y هاست، از رابطه احتمال شرطی استفاده می‌کنیم. با در نظر گرفتن اینکه مشتریان، طبق توزیع یکنواخت در داخل مستطیل پراکنده‌اند، احتمال اینکه یک مشتری در سمت راست یا چپ محور x ها قرار داشته باشد، به ترتیب برابر با $a/a+b$ و $b/a+b$ است. از طرف دیگر، میانگین فاصله‌طی شده توسط مشتری مستداست و چپ محور y ها، به ترتیب $a/2$ و $b/2$ است؛ لذا،

$$|X| = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{a+b} + \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{a+b} = \frac{a^2 + b^2}{2(a+b)} \quad (10.9)$$



شکل ۱۰.۹ فاصله هندسی و خطی بین دو نقطه

$$f(\mu) = \theta\mu + b$$

اگر (μ) نابین خطی از μ ، مثلاً $a\mu + b$ باشد،

$$a = \frac{C\lambda}{(\mu - \lambda)^2}$$

که با این ترتیب مقدار بهینه μ بدست می‌آید.

$$\mu^* = \lambda + \sqrt{\frac{C\lambda}{a}} \quad (10.9)$$

همان طور که مشاهده می‌شود، در این مدل $\lambda > \mu$ ، یعنی $1 < \mu$ است. مثال ۱۰.۹ در یک خط تولید، سرعت ماشین را می‌توان تغییر داد. تعداد قطعات تولید شده با این ماشین بین ۵۰ تا ۹۵ قطعه در ساعت است. هزینه اداره این ماشین هر ساعت ۲۰۰۰ تومان است، به شرط اینکه با حداقل سرعت کار کند. ولی چنانچه سرعت آن افزایش یابد، هزینه نیز مناسب‌تر و با رابطه‌ای خطی افزایش خواهد یافت. هزینه اداره این ماشین باحداکثر سرعت برابر با ۲۶۵۰ تومان است. اگر تعداد قطعاتی که برای تولید مفارش می‌شود، طبق توزیع پواسون با میانگین ۵۰ قطعه در ساعت، و خسارات حاصل از تأخیر کار در هر ساعت بر اینها ۲۵۵ تومان باشد، سرعت بهینه ماشین را تعیین کنید.

$$\text{حل: } \text{در این مدل } \mu = 200 + 800/\mu \text{ است.}$$

با این ترتیب، $a = 20$ ، $b = 800$ و $\lambda = 50$ است. طبق رابطه (۱۰.۹)

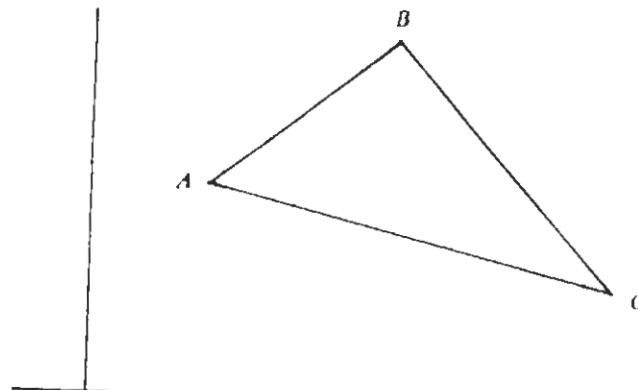
$$\mu^* = 75$$

۱۰.۹ انتخاب محل سیستم صفحه

فرض کنید جمعیت مشتریان بالقوه یک سیستم در منطقه‌ای پراکنده باشد. رفت و برگشت این مشتریان مستلزم صرف وقت و در نتیجه هزینه است. هدف، تعیین محل یا محلهای مناسب استقرار سیستم است، به طوری که کل هزینه‌ها، که شامل هزینه رفت و برگشت مشتریان نیز می‌شود، حداقل شود. بنابراین، برای محاسبه میزان هزینه، لازم است که میانگین زمان (لهت) و برگشت مشتریان نیز تعیین گردد.

کوزیع جمعیت مشتریان

فرض می‌شود که مقاضیان دریافت خدمت (مشتریان)، در منطقه مورد نظر به طور یکنواخت پراکنده هستند.



شکل ۳.۹ برآورده کی مشتریان مثال ۱۰.۹

حل: ایستگاه خدمت را به عنوان مبدأ مختصات انتخاب می‌کنیم. مختصات رئوس مثلث نسبت به این مبدأ مختصات (a, a') و (b, b') و (c, c') خواهد بود. اگر میانگین فاصله خطی هر مشتری تا مبدأ مختصات را با استفاده از احتمال شرطی بعدست آوریم، به اندیشی معلوم می‌شود که می‌توان فرض کرد که تمام مشتریها در مرکز نقل مثلث (در محل تقاطع میانه‌ها) قرار دارند، که فاصله آن تا هر دو برابر فاصله آن تا ضلع مقابل بمعانی رأس است. لذا، در این مثال مختصات نقطه تقاطع میانه برابر است با $\frac{a+a'+b+b'+c+c'}{3}$. در نتیجه، میانگین فاصله مشتری تا ایستگاه خدمت (مبدأ مختصات) برآور است با:

$$|X| = \frac{1}{3}(a+b+c+a'+b'+c')$$

مثال ۱۰.۹ مشتریان یک سیستم صفحه محدود در داخل یک لوگو با قطرهایی به طول a و b ، مطابق شکل ۳.۹، برآورده اند و ایستگاه خدمت مرکز بمعنی نزد مرکز لوگو قرار دارد. میانگین فاصله هر مشتری تا ایستگاه خدمت را به دست آورید.

حل: در اینجا نیز مبدأ مختصات را برآورده ایستگاه خدمت منطبق می‌کنیم. مختصات رئوس لوگوی در شکل نشان داده شده است. برای محاسبه $|X|$ ، از احتمال شرطی استفاده می‌کنیم. مشتریها با درست راست محور y (یعنی در مثلث ABC) و یا درست چپ آن (یعنی در مثلث ADC) قرار دارند. مساحت این دو مثلث هایم برآور است، ولذا مشتریها احتمال ۵٪ را می‌توانند در هر کدام از مثلثها قرار داشته باشد. میانگین فاصله مرکز نقل هر مثلث تا مبدأ مختصات، در امتداد محور y برآورده است. به این ترتیب

$$|X| = \frac{1}{2} \times \frac{a}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{a}{6} = \frac{a}{6}$$

به همین ترتیب،

$$|Y| = \frac{c^2 + d^2}{2(c+d)}$$

و میانگین فاصله رفت و برگشت هر مشتری عبارت است از:

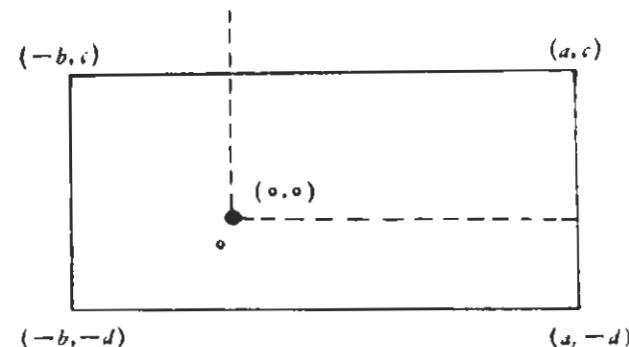
$$E(T) = 2|X| + 2|Y| = \frac{a^2 + b^2}{a+b} + \frac{c^2 + d^2}{c+d}$$

چنانچه تعیین محل ایستگاه خدمت مدنظر باشد، باید a و b و c و d را طوری تعیین کرد که $E(T)$ حداقل شود. با این توجه داشت که $|Y| = AC$ و $|X| = CB$ ، برآور باشد $a+b$ است. علت به کار گرفتن فاصله مطلق نیز مثبت بودن فاصله هاست.

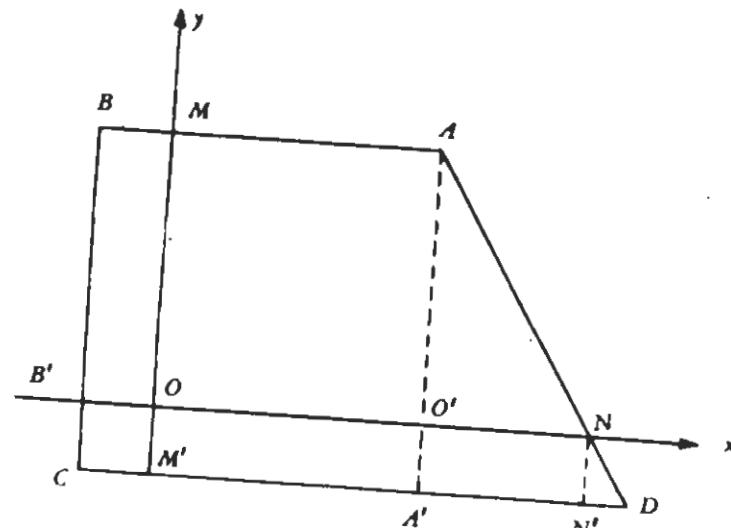
مثال ۱۰.۹ فرض کنید مشتریان یک سیستم در داخل یک مستطیل، طبق توزیع پکتواخت برآورده اند. ایستگاه خدمت در نقطه‌ای در داخل این مستطیل قرار دارد. میانگین فاصله رفت و برگشت یک مشتری را بدست آوردید. اگر هدف، حداقل کردن این کمیت باشد، بهترین نقطه استقرار ایستگاه خدمت کجاست؟

حل: ایستگاه خدمت را به عنوان مبدأ مختصات جدید تعیین می‌کنیم. مختصات گوش‌های مستطیل روی شکل نشان داده شده است. حال فرض کنید، یک مشتری مخصوص در نقطه‌ای به مختصات (y, x) قرار گرفته باشد. مسافت خطی که این مشتری برآور باشد و امتداد محور x را طی کند، برآور باشد $|x|$ (طول مستطیل) و $c+d$ برابر با عرض مستطیل و ثابت است، لذا $E(T) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ می‌شود. به عبارت دیگر، بهترین نقطه برای استقرار ایستگاه خدمت، مرکز مستطیل است.

مثال ۱۰.۹ جمعیت مشتریان در داخل مثلث ABC ، طبق توزیع پکتواخت برآورده اند. اگر ایستگاه خدمت، در نقطه‌ای خارج از مثلث قرار گرفته باشد، میانگین فاصله خطی هر مشتری تا ایستگاه خدمت را محاسبه کنید.



شکل ۳.۹ مرکز بمعنای ۹.۹



شکل ۱۲.۹ پراکندگی مشتریان مثال ۱۲.۹

$$|X| = \frac{1}{22}(1) + \frac{15}{22}(2) + \frac{3}{22}\left(\frac{17}{3}\right) = 2.52$$

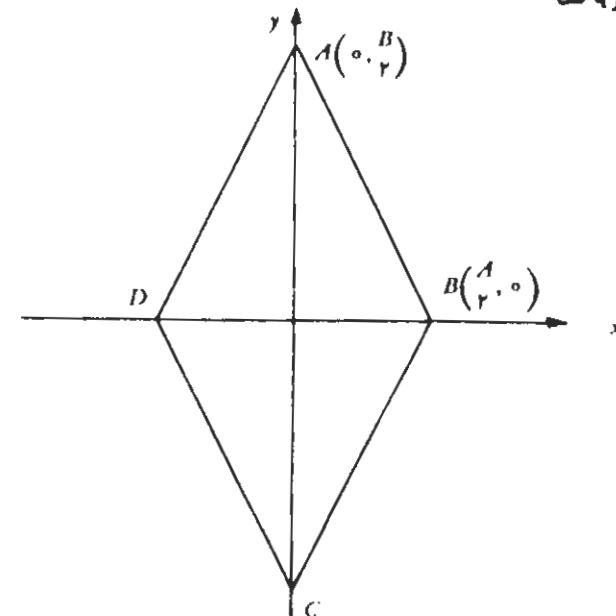
به همین ترتیب، برای محاسبه $|Y|$ ، دو زنقه را به چهار قسم تقسیم می‌کیم، که عبارت انداده:
مستطیل $B'CN'N$ ، مستطیل $B'BAO'$ ، مثلث $AO'N$ و مثلث NND . احتمال بودن مشتریها در این قسمتها به ترتیب برابر با $\frac{3}{22}$ ، $\frac{12}{22}$ ، $\frac{35}{72}$ ، $\frac{1}{72}$ است. میانگین فاصله عمودی مرکز نقل این قسمتها با مبدأ مختصات به ترتیب برابر با $\frac{1}{3}$ و $\frac{5}{3}$ است. لذا

$$|Y| = \frac{12}{22}(1) + \frac{25}{22}(2) + \frac{1}{72}\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{72}\left(\frac{2}{3}\right) = 0.853$$

مثال ۱۲.۹ در مسطح بک شهر بزرگ، که جمعیت آن به طور یکنواخت پراکنده است، خدمت در آن، مطابق شکل ۱۲.۹، قرار دارد. مختصات دو زنقه $(5, 2)$ ، $(-2, 2)$ و $(-1, -2)$ است. میانگین فاصله هر مشتری تا ایستگاه خدمت را بدست آورید.

حل: چون مساحت هر منطقه برابر با $\frac{1}{2}$ است؛ لذا، طول هر ضلع مربع برابر با \sqrt{S} و طول هر قطر لوزی برابر با $\sqrt{2S}$ است. طبق نتایج مثال ۹.۹، در مورد مربع

$$|X| + |Y| = \frac{\sqrt{S}}{2}$$



شکل ۱۲.۹ پراکندگی مشتریان، مثال ۱۲.۹

به همین ترتیب، $|Y|$ بدست می‌آید. لذا،

$$|X| + |Y| = \frac{A+B}{6}$$

باشد توجه داشت که در این مثال نمی‌توان فرض کرد که مرکز نقل همه مشتریها در مرکز لوزی قرار دارد، زیرا جهت حرکت مشتریها در دو زنقه با یکدیگر متفاوت است. و اگر کل لوزی را پیکجا در نظر بگیریم، جهت حرکت مختلف مشتریها، به این معنی شود که میانگین فاصله آنها برابر با صفر شود، که این امر صحیح نیست.

مثال ۱۲.۹ مشتریهای یک سیستم صف داخل دو زنقه $ABCD$ پراکنده‌اند و ایستگاه خدمت در آن، مطابق شکل ۱۲.۹، قرار دارد. مختصات دو زنقه $(5, 2)$ ، $(-2, 2)$ و $(-1, -2)$ است. میانگین فاصله هر مشتری تا ایستگاه خدمت را بدست آورید.

حل: برای محاسبه $|X|$ از احتمال شرطی استفاده می‌کیم. مشتریها یا در مستطیل $BCM'M'A'$ و یا در مثلث $AA'D$ قرار دارند. احتمال بودن يك مشتری در هر کدام از این سه قسمت، متناسب با مساحت آنها یعنی $\frac{6}{22}$ و $\frac{15}{22}$ و $\frac{3}{22}$ است. میانگین فاصله افقی مرکز نقل این سه قسمت تا مبدأ مختصات به ترتیب برابر با $\frac{1}{2} + 1.25$ و $\frac{3}{2}$ است. با این ترتیب،

وطبق نتیجه مثال ۱۱.۹، رزرسدر (ر)

$$|x| + |y| = \frac{\sqrt{2s}}{3}$$

همان طور که مشاهده می شود، میانگین فاصله طی شده توسط یک مشتری در منطقه ای به شکل لوزی کمتر از همین فاصله در منطقه ای به شکل مرربع است.
در حالت کلی ثابت می شود که اگر بخواهیم منطقه بزرگی را به مناطق کوچکتر تقسیم و در هر کدام یک ایستگاه خدمت مستقر کنیم، بهترین روش این است که منطقه را به تعدادی مناطق کوچکتر به شکل لوزی تقسیم کنیم و ایستگاههای خدمت در مرکز این لوزیها قرار گیرد. ضمناً اگر میارستیم فاصله هندسی باشد، منطقه را باید به تعدادی دایره تقسیم کرد.

مال

۱. در مسئله ۲۷ فصل ۶، اگر حقوق تعمیر کار ساعتی ۳۰۰ تومان و هزینه قطع تولید به ازای هر ماشین - ساعت ۴۰۰ تومان باشد، تعداد بهینه ماشینهای تحت مسئولیت این تعمیر کار چقدر است؟

۲. در ابزار ابزار یک کارخانه $\frac{M}{N}$ نفر کار می کنند. مدت زمانی که هر کارمند ابزار هرای بررسی و تعمیل ابزار صرف می کند، متغیری تصادفی با توزیع نمایی و با میانگین $8\frac{1}{2}$ دقیقه است. میانگین فاصله زمانی بین دو متناظری ابزار، که طبق توزیع نمایی فرض می شود، $15\frac{1}{2}$ دقیقه است. حقوق و مایای هزینه های مر بوظ به هر کارمند 150 تومان در ساعت و حقوق تکنیکی هایی که مراجعت می کند (و هزینه های ناشی از تعطیل کار آنها) 300 تومان در ساعت فرض می شود. مقدار بهینه M را تعیین کنید.

۳. در یک سیستم صفحه، که ورود مشتریها طبق فرایند پردازون با میانگین هر ساعت 15 مشتری است، پکی از دو خدمت دهنده را می توان استفاده کرد، که دستمزد آنها به ترتیب دارای 25 و 30 تومان است. مدت زمان خدمت توسط خدمت دهنده اول و دوم به ترتیب دارای توزیع نمایی (بامیانگین $2\frac{1}{2}$ دقیقه) و توزیع نرمال (بامیانگین $3\frac{1}{2}$ دقیقه و انحراف معیار 1 دقیقه) است. هزینه وقت مشتری هر ساعت 125 تومان است. کدام خدمت دهنده مناسبتر است؟

۴. در یک کارخانه، هر ماشین مدتی کار می کند و بعد از آن احتیاج به تعمیر دارد. مدت زمان کار کردن و همچنین تعمیر آن مشتری های تصادفی نمایی با میانگین به ترتیب، 8 دقیقه است. هزینه نگهداری هر ماشین بسته به اینکه در حال کار یا در حال تعمیر باشد، به ترتیب 1500 تومان و 800 تومان است. تعداد بهینه ماشینهای که یک نفر کار گر مسئول باشند تعییر آنهاست، چقدر است؟ اگر کلا 25 ماشین وجود داشته باشد و یک کار گر مسئول باشند،

مشخصی باشد، بلکه هر کار گر بتواند به تعمیر هر ماشین خراب ببردازد، تعداد بهینه کارگران موردنیاز را تعیین کنید:

۵. در مسئله ۴، اگر هزینه نگهداری هر ماشین، صرف نظر از اینکه کار بکند یا نکند، برابر با 1500 تومان باشد، به سوالات مطرح شده در بالا مجدداً پاسخ دهید.

۶. در یک سیستم صفحه مشتریها طبق فرایند پردازون (بامیانگین هر ساعت 12 مشتری) وارد می شوند. مدت زمان خدمت دارای توزیع نرمال (بامیانگین 2 دقیقه و انحراف معیار $1\frac{1}{2}$ دقیقه) است. هر ساعت وقت مشتری 2 برابر وقت خدمت دهنده ارزش دارد. تعداد بهینه خدمت دهنده گان را طوری تعیین کنید که کل هزینه ها حداقل شود.

۷. می خواهیم تعداد بهینه ماشینهای فتوکپی موردنیاز مؤسسه ای را تعیین کنیم. تعداد کارهای فتوکپی این مؤسسه دارای توزیع پردازون (بامیانگین هر ساعت $6\frac{1}{2}$ کار) و مدت زمان چاپ هر کاری دارای توزیع نمایی با میانگین 10 دقیقه است. هزینه نگهداری هر ماشین، شامل استهلاک و حقوق منتصدی ماشین هر ساعت 500 تومان و متنقل از تعداد کار چاپ شده با ماشین است. میانگین هزینه کاغذ و سایر هزینه های مشتری هر کار بر این با 45 تومان است. چنانچه کاری بررسی و ماشین فتوکپی بیکار نباشد، بلا فاصله به صورت سفارش به بروز از مؤسسه ارسال می شود. میانگین هزینه هر کار فتوکپی در شارژ از مؤسسه 180 تومان است. باهدف حداقل کردن هزینه، چند ماشین فتوکپی لازم است؟

۸. در مسئله ۷، اگر مدت زمان چاپ دارای توزیع پکتوانخت در فاصله $(8, 12)$ باشد، به سوال مطرح شده مجدداً پاسخ دهید.

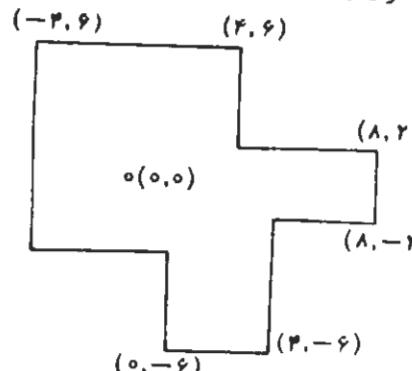
۹. به یک بندر هر روز به طور متوسط 5 کشتی طبق توزیع پردازون وارد می شوند. هزینه های روزانه مر بوظ به یک اسکله بر این راسته نصف خساره روزانه ای است که به یک کشتی، کمتر نظریه است، پرداخت می شود (بایت زمان تخلیه، خساره ای پرداخت نمی شود). مدت زمان تخلیه است، پرداخت می شود (بایت زمان تخلیه، خساره ای پرداخت نمی شود). تعداد بهینه ایشانهای هر کشتی دارای توزیع نمایی با میانگین یک روز است. تعداد بهینه ایشانهای این بندر را تعیین کنید.

۱۰. به یک پمپ بنزین هر ساعت، به طور متوسط 120 اتومبیل طبق فرایند پردازون مرراجعه می کنند. مدت زمان خدمت، نمایی با میانگین 30 دقیقه فرض می شود. سود حاصل از فروش بنزین به هر اتومبیل 25 تومان و هزینه هر دستگاه 1000 ساعتی 35 تومان است. اگر طرف صرف زیاد باشد، بعضی از مشتریها، طبق جدول زیر، از رود به این پمپ بنزین منصرف می شوند.

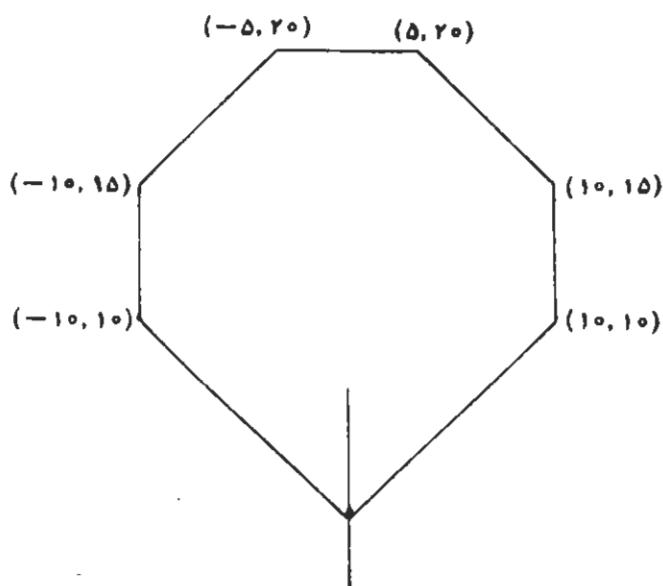
پمپ سرگز

خارات دیر کرد ساخت هر قطعه در دقیقه برابر با 500 است. ورود قطعات به کارگاه بر اساس فرایند پواسون (با میانگین هر 18 دقیقه یک بار) است. سرعت بهینه ماشین را حساب کنید.

۱۵. ایستگاه خدمت در مبدأ مختصات شکل زیر قرار دارد. مختصات گوشه‌ها نیز نشان داده شده است. مشتریان در کل مساحت مرتبه، طبق توزیع پکتواخت، پراکنده شده‌اند. میانگین فاصله یک مشتری را تا ایستگاه خدمت تعیین کنید.



۱۶. در شکل زیر، با فرض پراکندگی پکتواخت مشتریان در سطح کل آن، میانگین فاصله یک مشتری را تا ایستگاه خدمت، که بر مبدأ مختصات منطبق است، محاسبه کنید.



در صد مشتری‌هایی که از ورود منصرف می‌شوند.

طول صفت	در صد مشتری‌هایی که از ورود منصرف می‌شوند.
۵	۵ - ۱۰
۲۰	۱۱ - ۱۵
۴۰	۱۶ - ۲۰
۶۰	۲۱ - ۲۵
۸۰	۲۶ از

تعداد بهینه پیشوا را محاسبه کنید

۱۹. یک مدل $M/M/m$ که آهنگ ورود و خدمت در آن به ترتیب 8 و 12 است، را در نظر بگیرید. هزینه نگهداری هر خدمت دهنده هر ساعت 350 تومان است. جنابجه فقط یک مشتری در سیستم باشد، خارات پرداخت شده به او ساعتی 800 تومان است. اما اگر بیش از یک مشتری در سیستم باشد، به سایر مشتریها (از مشتری شماره 2 به بعد) خاراتی معادل با ساعتی 1000 تومان پرداخت می‌شود. تعداد بهینه خدمت و هندگان را تعیین کنید.

۲۰. در یک ایستگاه، که به بازرسی قطعات ساخته شده می‌پردازد، می‌توان یکی از دو روش بازرسی را انتخاب کرد. در روش اول، که هزینه آن 1500 تومان است، مدت زمان بازرسی دارای توزیع نمایی با میانگین نیم ساعت است. در روش دوم، که هزینه آن معادل 1200 است، بازرسی از دو فعالیت مستقل تشکیل می‌شود، که مدت زمان اجرای هر کدام از آنها دارای توزیع از لانگی با پارامتر $2 = \mu$ است. میانگین مدت زمان فعالیتهای اول و دوم این روش، به ترتیب، برابر با 12 و 22 دقیقه است. تعداد قطعاتی که برای بازرسی به این ایستگاه می‌رسند، براساس فرایند پواسون است و میانگین فاصله رسیدن دو قطعه متواالی 25 دقیقه فرض می‌شود. خارات حاصل از دیررسیدن هر قطعه برابر با 800 تومان است. کدام روش از نظر هزینه بهتر است؟

۲۱. یک سیستم صفت با یک خدمت دهنده را در نظر بگیرید، ورود مشتریها گروهی است. زمان بین ورود دو گروه متواالی، دارای توزیع نمایی با میانگین 25 دقیقه است. تعداد مشتری‌های هر گروه هم متغیر تصادفی بوسیله میانگین 6 مشتری فرض می‌شود. مدت زمان خدمت نیز نمایی با میانگین 3 دقیقه است. هزینه نگهداری هر مشتری در ساعت بسته به اینکه در صفت باشد یا در حال خدمت، به ترتیب، برابر با 300 و 500 است. میانگین هزینه این سیستم را در ساعت محاسبه کنید.

۲۲. در کارگاهی قطعات سفارشی، با مانعینی که سرعت آن قابل تنظیم است، ساخته می‌شود. مدت زمان ساخت هر قطعه، دارای توزیع نمایی است و میانگین آن بین 5 تا 15 دقیقه قابل تنظیم است. هزینه ساخت قطعه، مستکی به سرعت ماشین دارد. اگر میانگین زمان ساخت قطعه، x دقیقه باشد، هزینه ساخت آن در هر دقیقه برابر $1 - 2x - 5x^2$ است.

۱۷. کارگاهی به شکل مستطیل را در نظر بگیرید که ابعاد آن 5×80 متر است. می خواهیم چند انبار ابزار در این کارگاه بسازیم. محلهای مناسب برای ایجاد انبار، نقاط وسط ضلعهای مستطیل است. مشتریان انبار، تکنسینها و کارگران هستند، که در مطلع کارگاه به طور یکروخت پراکنده‌اند. هر مقاضی ابزار بهزدیگرین انبار مراجعت می‌کند. میانگین فاصله یک مشتری با انبار را در حالتها زیر محاسبه کنید:

- الف. فقط یک انبار در وسط ضلع بزرگ مستطیل ایجاد شود.
- ب. فقط یک انبار در وسط ضلع کوچک مستطیل ایجاد شود.
- ج. دو انبار در وسط ضلعهای بزرگ مستطیل ایجاد شود.
- د. دو انبار در وسط ضلعهای کوچک مستطیل ایجاد شود.
- ه. یک انبار در وسط ضلع کوچک و یکی در وسط ضلع بزرگ ایجاد شود.
- و. چهار انبار در وسطهای اضلاع مستطیل ایجاد شود.

مرجعها

1. Cinlar, Erhan; *Introduction to Stochastic Processes*, Prentice Hall, New York, 1975.
2. Cooper, Robert B.; *Introduction to Queueing Theory*, 2nd edition, Elsevier North-Holland, New York, 1981
3. Gross, D. & C.M. Harris; *Fundamentals of Queueing*, 2nd edition, Wiley, New York, 1984.
4. Hillier, F.S. & G.J. Lieberman; *Introduction to Operations Research*, 4th ed., Holden-Day Inc., Oakland, 1986.
5. Hines, W. W. & D. C. Montgomery; *Probability & Statistics in Engineering & Management Science*, 2nd. ed., John Wiley & Sons, New York, 1980.
6. Karlin S. & H. Taylor; *First Course in Stochastic Processes*, 2nd ed., Academic Press, New York, 1975.
7. Kleinrock, L.; *Queueing Systems, Vol. I, Theory*, Wiley New York, 1975.
8. Kleinrock, L.; *Queueing Systems, Vol I: Theory*, Wiley, New York, 1975.
9. Newell, G. F.; *Applications of Queueing Theory*, 2nd ed., Chapman & Hall, London, 1982.
10. Parzen, E.; *Modern Probability Theory & its Application*, Wiley, New York, 1960.
11. Ross S. M.; *Applied Probability Models With Optimization*

- Applications*. Holden - Day, Inc., Sanfrancisco, 1970.
12. Ross, S. M.: *Introduction to Probability Models*, 3rd ed., Academic Press, New York, 1985.
 13. White, J. A., J. W. Schmidt & G. K. Bennett: *Analysis of Queueing Systems*, Academic Press, New York, 1975.

واژه‌نامه

departure rate	آهنگ خروج
arrival rate	آهنگ ورود
Conditional probability	احتمال شرطی
Little's result	استنتاج لیتل
independent increment	افزایش مستقل
service pattern	الگوی خدمت‌دهی
balking	امتناع
expected value	امید ریاضی
conditional expectation	امید شرطی
standard deviation	انحراف میار
firstin - firstout	به ترتیب
optimization	بهینه‌سازی
convolution	پیچش
independent events	پیشامدهای مستقل
dependent events	پیشامدهای وابسته
density function	تابع چگالی
probability distribution function	تابع توزیع احتمال
cumulative distribution function	تابع توزیع تجمعی
joint distribution Function	تابع توزیع توأم

continuous time Markov chain	زنجیره مارکوف با زمان پیوسته	تابع محدب
Imbedded Markov chain	زنجیره محاطی مارکوف	تابع مولدگشتوار
series	سری	تفربیب
networks of queue	شبکه‌های صف	توزیع ارلانگی
queue, waiting line	صف	توزیع برتوولی
utilization factor	ضریب بهره‌وری	توزیع بواسون
finite capacity	ظرفیت متناهی	توزیع حاشیه‌ای
infinite capacity	ظرفیت نامتناهی	توزیع حدی
Poisson process	فرایند بواسون	توزیع دوجمله‌ای
pure birth process	فرایند تولد خالص	توزیع فوق نمایی
stochastic process	فرایند تصادفی	توزیع قطبی
Markov process	فرایند مارکوف	توزیع گاما
bayes' formula	فرمول بیز	توزیع نرمال
sample space	فضای نمونه	توزیع نمایی
law of large numbers	قانون اعداد بزرگ	توزیع هندسی
central limit theorem	قضیه حد مرکزی	توزیع پکتواخت
covariance	کوواریانس	جمعیت مشتریان بالقوه
transition rate matrix	ماتریس آهنگ‌گذار	چرخه انتقال سیستم
transition matrix	ماتریس گذار	حالت ارجکودیک
Markov matrix	ماتریس مارکوف	حالت برگشت‌پذیر نهی
square matrix	ماتریس مربع	حالت برگشت‌پذیر مشبت
unit matrix	ماتریس یکه	حالت پایدار
independent random variables	متغیرهای تصادفی مستقل	حالت جاذب
countable set	مجموعه قابل شمارش	حالت سیستم
polya model	مدل پولیا	خدمت ونه
exponential models	مدلهای نمایی	خدمت گروهی
		دوره انتقال سیستم
		زمان انتظار
		زمان بین دورود

communication of states	مرتبه بودن حالتها
backward equation	معادله پرسرو
forward equation	معادله پیشرو
difference equation	معادله تفاضلی
differential equation	معادله دیفرانسیل
Kolmogorov equation	معادلا کوامو گروف
characteristic equation	معادله مشخصه
mean recurrence time	میانگین زمان برگشت
aperiodic	نادرهای
system Discipline	نظم سیستم
rate diagram	نمودار آهنگ
variance	واریانس
convergence	همگرایی
homogenous	همگن