پاسخ پرسش‌های آزمون میان‌ترم ریاضی عمومی ۲، ترم دوم سال تحصیلی ۹۶-۹۵

۱. تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^3-y^3)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$ مفروض است.

الف) نشان دهید که f در $(0,0)$ پیوسته است.

ب) مشتق سویی f در $(0,0)$ و در سوی بردار یکه‌ی $\mathbf{u}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ را بیابید.

ج) آیا f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر است؟ چرا؟ (۱۲ نمره)

حل. الف) باید نشان دهیم

$$\forall\epsilon>0,\ \ \exists\delta>0,\ \ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \|(x,y)-(0,0)\|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x,y)-f(0,0)|<\epsilon$$

برای $\epsilon>0$ و $(x,y)\neq(0,0)$، با توجه به این که

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(0,0)| &= \left|\frac{\sin(x^3-y^3)}{x^2+y^2}-0\right|\leq\frac{|x^3-y^3|}{x^2+y^2}\\ &\leq \frac{x^2|x|+y^2|y|}{x^2+y^2}\leq|x|+|y|\leq 2\sqrt{x^2+y^2}\end{aligned}$$

برای داشتن $|f(x,y)-f(0,0)|<\epsilon$ کافی است $2\sqrt{x^2+y^2}<\epsilon$ یا $\sqrt{x^2+y^2}<\frac{\epsilon}{2}$. برای این منظور $\delta>0$ را با شرط $\delta\leq\frac{\epsilon}{2}$ انتخاب می‌کنیم.

ب)

$$\begin{aligned}D_uf(0,0) &= \lim_{t\to0}\frac{f(at,bt)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{\sin(a^3t^3-b^3t^3)}{a^2t^2+b^2t^2}-0}{t}\\ &= \lim_{t\to0}\frac{\sin\left((a^3-b^3)t^3\right)}{t^3}=a^3-b^3\end{aligned}$$

ج) اگر f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه برای هر بردار یکه‌ی $\mathbf{u}$ مقدار دو عبارت $D_uf(0,0)$ و $\nabla f(0,0)\cdot\mathbf{u}$ با یکدیگر برابر خواهند بود. اکنون به محاسبه‌ی عبارت دوم می‌پردازیم.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin(x^3)}{x^2}}{x}=1\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{\frac{\sin(-y^3)}{y^2}}{y}=-1\end{aligned}$$

در نتیجه $\nabla f(\circ,\circ)\cdot \mathbf{u}=a-b$ که برای همه مقادیر a و b با شرط $a^{۲}+b^{۲}=۱$ با $D_u f(\circ,\circ)=a^{۳}-b^{۳}$ برابر نیست. (به طور مثال برای $a=-b=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$) در نتیجه f در $(\circ,\circ)$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

---

۲. فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر باشد. اگر z به عنوان تابعی مشتق‌پذیر بر حسب x و y توسط معادله‌ی $f(xz,yz)=۱$ تعریف شده باشد. نشان دهید

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=-z$$

(۸ نمره)

حل. بنا به فرض مسئله، تابع مشتق‌پذیری چون $z(x,y)$ وجود دارد که برای همه مقادیر (x,y) در معادله‌ی $f\big(xz(x,y),yz(x,y)\big)=۱$ صدق می‌کند. اگر قرار دهیم $u(x,y):=xz(x,y)$ و $v(x,y)=yz(x,y)$ آنگاه

$$\forall(x,y),\quad f\big(u(x,y),v(x,y)\big)=۱$$

در نتیجه

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(f\big(u(x,y),v(x,y)\big)\Big)=\circ \quad \text{و} \quad \frac{\partial}{\partial y}\Big(f\big(u(x,y),v(x,y)\big)\Big)=\circ$$

به این ترتیب، با استفاده از قاعده زنجیری،

$$\begin{cases} f_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+f_v\dfrac{\partial v}{\partial x}=\circ \\[2ex] f_u\frac{\partial u}{\partial y}+f_v\frac{\partial v}{\partial y}=\circ\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_u.(z+x\frac{\partial z}{\partial x})+f_v.(y\frac{\partial z}{\partial x})=\circ \\[2ex] f_u.(x\frac{\partial z}{\partial y})+f_v.(z+y\frac{\partial z}{\partial y})=\circ\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{zf_u}{xf_u+yf_v} \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{zf_v}{xf_u+yf_v}\end{cases}$$

در نتیجه

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{z(xf_u+yf_v)}{xf_u+yf_v}=-z$$

---

۳. فرض کنید f تابعی دو متغیره و مشتق پذیر باشد و $w=f(x-y+۳z,x+y-z)$. ثابت کنید

$$\frac{\partial w}{\partial x}-۲\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial z}=\circ$$

(۵ نمره)

حل. قرار می‌دهیم $u(x,y,z) := x - y + ۳z$ و $v(x,y,z) := x + y - z$. بنابر فرض $w = f\big(u(x,y,z), v(x,y,z)\big)$. در نتیجه با استفاده از قاعده‌ی زنجیری

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial x} = f_u \dfrac{\partial u}{\partial x} + f_v \dfrac{\partial v}{\partial x} = f_u + f_v \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} = f_u \dfrac{\partial u}{\partial y} + f_v \dfrac{\partial v}{\partial y} = -f_u + f_v \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} = f_u \dfrac{\partial u}{\partial z} + f_v \dfrac{\partial v}{\partial z} = ۳f_u - f_v \end{cases}$$

و از آنجا

$$\frac{\partial w}{\partial x} - ۲\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} = (f_u + f_v) - ۲(-f_u + f_v) - (۳f_u - f_v) = ۰$$

---

۴. رویه S به معادله‌ی $z = x^۲ - y^۲ + ۲y + ۱$ را در نظر بگیرید.

الف) معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه S در نقطه‌ی $P_۰ = (۱,۱,۳)$ را بیابید.

ب) ثابت کنید که از نقطه‌ی $P_۰ = (۱,۱,۳)$ دو خط راست میگذرند که تماما بر رویه S قرار دارند و معادلات آنها را بیابید.

(۱۰ نمره)

حل. الف) اگر تابع f را با ضابطه‌ی $f(x,y,z) = x^۲ - y^۲ + ۲y + ۱$ در نظر بگیریم آنگاه S رویه‌ی تراز f به ازای ثابت صفر خواهد بود. اگر $\pi_۰$ صفحه‌ی مماس بر S در نقطه‌ی $P_۰ = (۱,۱,۳)$ باشد آنگاه $\nabla f(۱,۱,۳)$ یک بردار نرمال برای این صفحه است.

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} = ۲x\mathbf{i} + (-۲y + ۲)\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

به این ترتیب $\nabla f(۱,۱,۳) = ۲\mathbf{i} - \mathbf{k}$ بردار نرمال صفحه‌ی $\pi_۰$ بوده، معادله‌ی این صفحه به صورت $۲(x-۱) + ۰(y-۱) - (z-۳) = ۰$ یا $۲x - z = -۱$ خواهد بود.

ب) فرض کنیم L خطی گذرنده از $P_۰ = (۱,۱,۳)$ با بردار هادی $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ باشد. در این صورت معادلات پارامتری L به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{cases} x = at + ۱ \\ y = bt + ۱ \quad , \quad t \in \mathbb{R} \\ z = ct + ۳ \end{cases}$$

اکنون a، b و c را به گونه‌ای تعیین می‌کنیم که L بر رویه‌ی S قرار گیرد. برای این منظور توجه می‌کنیم که

$$\begin{aligned} L \subset S \quad &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (at+۱, bt+۱, ct+۳) \in S \\ &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (at+۱)^۲ - (bt+۱)^۲ + ۲(bt+۱) + ۱ - (ct+۳) = ۰ \\ &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (a^۲ - b^۲)t^۲ + (۲a - c)t = ۰ \\ &\Leftrightarrow \quad a^۲ - b^۲ = ۰ \ \text{و} \ ۲a - c = ۰ \end{aligned}$$

با انتخاب $a = ۱$ و با استفاده از معادلات فوق دو بردار هادی به صورت $\mathbf{v}_۱ = \mathbf{i} + \mathbf{j} + ۲\mathbf{k}$ و $\mathbf{v}_۲ = \mathbf{i} - \mathbf{j} + ۲\mathbf{k}$ به دست می‌آیند. به این ترتیب دقیقا دو خط از نقطهِ $P_۰$ عبور کرده و تمامی بر رویه‌ی فوق قرار می‌گیرند که معادلات پارامتری آن‌ها به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{cases} x = t+۱ \\ y = t+۱ \\ z = ۲t+۳ \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad \text{و} \qquad \begin{cases} x = t+۱ \\ y = -t+۱ \\ z = ۲t+۳ \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$