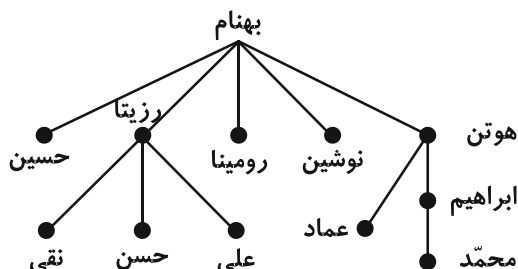


## درخت و ماتریس مجاورت

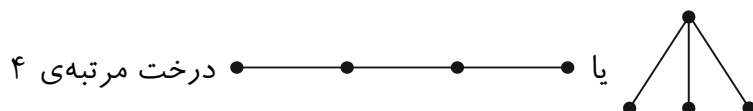
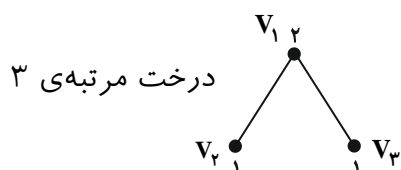
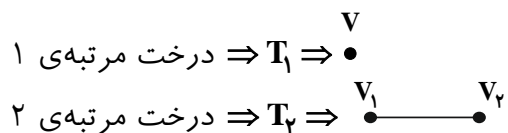
### درخت:

گراف‌یست همبند فاقد دور



### نکات درخت:

۱- در تمام درخت‌ها همواره رابطه‌ی  $q = p - 1$  یافت می‌شود.



۲- بجز درخت مرتبه‌ی ۱ در تمامی درخت‌ها وجود رده‌ی ۱ الزامیست.

۳- اگر در درختی  $K = \text{Maxdeg}$  باشد در این درخت حداقل  $K$  رأس درجه ۱ یافت می‌شود.

۴- اگر دو رأس غیرمجاور یک درخت را به هم وصل کنید فقط یک دور در آن ایجاد می‌شود و دیگر درخت نیست.

۵- اگر یکی از یال‌های درخت را حذف کنید دیگر درخت نیست زیرا ناهمبند می‌شود.

۶- چون بین هر دو رأس متمایز درخت فقط یک مسیر (البته طول‌های آنها می‌تواند متفاوت باشد) وجود

دارد بنابراین تعداد کل مسیرها به طول حداقل ۱ در هر درخت  $\binom{P}{2}$  بوده و تعداد کل مسیرهای

درخت  $\binom{P}{2} + P$  می‌باشد.

۷- در بین گراف‌های هم‌بند و هم‌اندازه (تعداد یال برابر) درخت دارای بیشترین تعداد رأس است.

**مثال:** در چند نوع درخت با دنباله درجه‌ی متمایز رابطه‌ی  $q^2 = 3p + 1$  یافت می‌شود؟

- ۱ (۱)                      ۲ (۲)                      ۳ (۳)                      ۴ (۴)                      ۵ (۵)

$$(p-1)^2 = 3p+1 \Rightarrow p^2 - 2p + 1 = 3p + 1 \Rightarrow \begin{cases} p=0 & \text{غ ق ق} \\ p=5 & \rightarrow \text{درخت با مرتبه‌ی ۵ قابل رسم می‌باشد.} \end{cases}$$

**سؤال:** در گرافی از مرتبه‌ی  $p$  همبند، فاقد دور ۱۰ رأس درجه‌ی ۳ یافت می‌شود و سایر رئوس هم‌درجه‌اند. اندازه این گراف را بیابید.

$$\sum \text{deg} = 2q$$

$$10 \times 3 + k \times 1 = 2q \Rightarrow 30 + k = 2p - 2$$

$$30 + k = 2(10 + k) - 2 \Rightarrow 30 + k = 20 + 2k - 2 \Rightarrow k = 12 \Rightarrow p = 22 \Rightarrow q = 21$$

**سؤال:** میانگین درجات رئوس گرافی همبند که با حذف هر یالش ناهم‌بند می‌شود برابر  $1/8$  می‌باشد. در این صورت تعداد مسیرها بطول حداقل ۲ در این گراف را بیابید.

$$\frac{2q}{p} = 1/8 \Rightarrow \frac{2(p-1)}{p} = 1/8 \Rightarrow p = 10$$

مسیرها بطول یک - مسیرها به طول حداقل ۱ = تعداد مسیرها بطول حداقل ۲

$$\binom{p}{2} - (q = p - 1) = \binom{10}{2} - 9 = 36$$

**سؤال:** مجموع مرتبه و اندازه‌ی یک درخت کدام گزینه می‌تواند باشد؟

- ۱ (۱)                      ۲ (۲)                      ۳ (۳)                      ۴ (۴)                      ۵ (۵)

**پاسخ:** گزینه «۳»

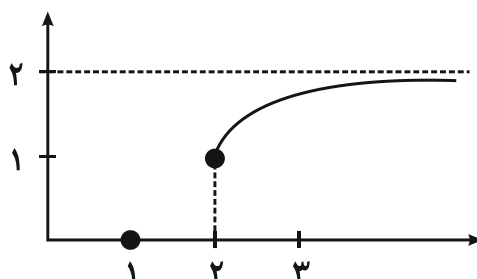
چون مرتبه و اندازه‌ی درخت ۲ عدد متوالی بوده پس مجموع آنها فرد می‌باشد.

**سؤال:** میانگین درجات رئوس گرافی همبند فاقد دور کدام گزینه می‌تواند باشد؟

- ۱ (۱)                      ۲ (۲)                      ۳ (۳)                      ۴ (۴)                      ۵ (۵)

**پاسخ:** گزینه «۳»

به جز  $T_1$  میانگین درجات سایر درخت‌ها در بازه‌ی  $[1, 2]$  می‌باشد. پس گزینه‌ی «۳» صحیح است.



**مثال:** گرافی از مرتبه  $p$  به اندازه  $q$  مفروض است. اگر ۱۱ یال به آن بیفزاییم تبدیل به گرافی می‌شود که تمام رئوسش مجاور و اگر ۱۰ یال از آن کم کنیم تبدیل به گرافی می‌شود که بین هر دو رأس متمایزش فقط یک مسیر یافت می‌شود.  $p+q$  کدام است؟

$$27 \text{ (4)} \qquad 25 \text{ (3)} \qquad 23 \text{ (2)} \qquad 21 \text{ (1)}$$

$$\begin{cases} q+11 = \binom{p}{2} & p=8 \\ q-10 = p-1 & q=17 \end{cases} \Rightarrow + \Rightarrow p+q=25$$

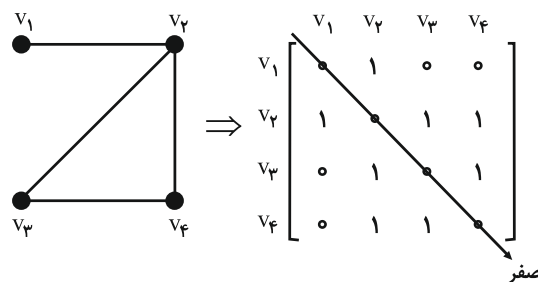
**مثال:** درختی از مرتبه  $p$ ، ۵ رأس از درجه ۴ و ۴ رأس از درجه ۳ و ۳ رأس از درجه ۲ بوده و رأس بیش از درجه ۴ ندارد. تعداد رئوس با درجه یک آن را بیابید.

$$\begin{aligned} & (12+k) \\ & \uparrow \\ \Sigma \text{deg} = 2q & \Rightarrow 5 \times 4 + 4 \times 3 + 3 \times 2 + k \times 1 = 2(p-1) \Rightarrow \\ 38+k = 22+2k & \Rightarrow k=16 \end{aligned}$$

### مشخصات ماتریس مجاورت گراف‌های ساده

- ۱- این ماتریس‌ها مربعی مرتبه  $p$  بوده و دارای  $p^2$  درایه می‌باشد.
  - ۲- قطر اصلی آنها همواره صفر است چون در گراف‌های ساده طوقه تعریف نمی‌شود.
  - ۳- این ماتریس‌ها متقارن هستند یعنی درایه‌ها نسبت به قطر اصلی تقارن دارند.
  - ۴- تعداد یک‌ها (مجموع اعداد) روی هر سطر یا هر ستون بیانگر درجه‌ی مربوط به آن رأس می‌باشد.
  - ۵- تعداد کل یک‌های موجود در ماتریس ۲ برابر تعداد یال‌های گراف می‌باشد.
- نکته مهم:** اگر  $M$  ماتریس مجاورت یک گراف ساده باشد آن‌گاه درجات رئوس این گراف روی قطر اصلی ماتریس  $M^2$  قرار می‌گیرند. پس جمع درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس  $M^2$  برابر  $\Sigma \text{deg} = 2q$  می‌باشد.

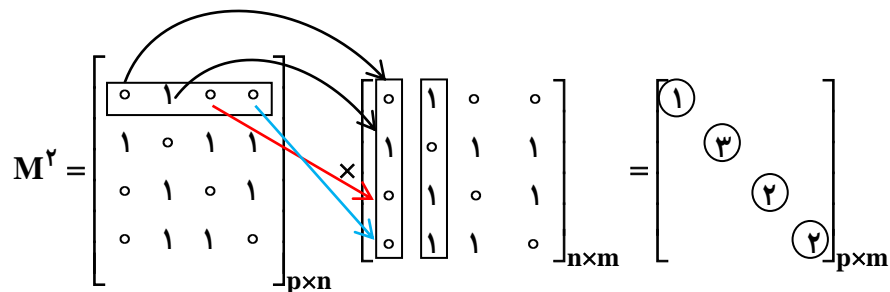
**نکته:** اگر  $M$  ماتریس مجاورت گراف کامل مرتبه  $p$  باشد آن‌گاه در ماتریس  $M$  قطر اصلی همگی صفر و غیر قطراصلی همگی یک می‌باشند و اما در ماتریس  $M^2$  قطر اصلی همگی  $p-1$  و غیرقطر اصلی همگی  $p-2$  می‌باشند.



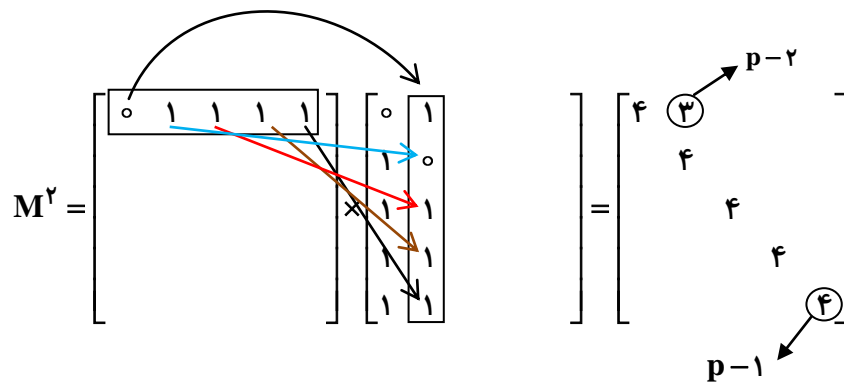
کل = تعداد یک‌ها + تعداد صفرها

$$? + 2q = p^2$$

$$\Rightarrow p^2 - 2q = \text{تعداد صفرها}$$



$$k_\delta \Rightarrow M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



تست: اگر  $M$  ماتریس مجاورت گرافی از مرتبه‌ی ۴ باشد در این صورت کدامیک از گزینه‌های زیر نمی‌تواند حاصلضرب درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس  $M^2$  باشد.

- ۳ (۱)      ۱۲ (۲)      ۱۸ (۳)      ۳۶ (۴)

پاسخ: گزینه «۳»

- ۱)  $3, 1, 1, 1 \leftarrow 3$   
 ۲)  $3, 2, 2, 1 \leftarrow 12$   
 ۳)  $3, 3, 2, 1 \leftarrow 18 \Rightarrow$  نمی‌تواند گراف باشد.  
 ۴)  $3, 3, 2, 2 \leftarrow 36$

**سؤال:** ماتریس مجاورت گرافی همبند فاقد دور دارای ۲۶ درایه‌ی صفری می‌باشد. اندازه این گراف کدام است؟

- (۱) ۴  
(۲) ۵  
(۳) ۶  
(۴) ۷

کل = یک‌ها + صفرها

$$26 + 2q = p^2 \Rightarrow p^2 = 2p - 24 \Rightarrow p^2 - 2p + 24 = 0$$

$$\Rightarrow (p+4)(p-6) = 0 \Rightarrow p = -4 \text{ غ ق ق}$$

$$p = 6 \Rightarrow q = p - 1 = 5$$

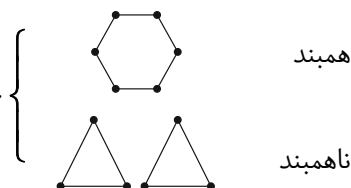
**سؤال:** ماتریس مجاورت یک گراف منتظم دارای ۲۴ درایه‌ی صفر است. این گراف:

- (۱) دو منتظم همبند است.  
(۲) دو منتظم ماهمبند است.  
(۳) دو منتظم است.  
(۴) ۳ - منتظم همبند است.

$$p^2 - rp - 24 = 0$$

$$r = 2 \Rightarrow p^2 - 2p - 24 = 0 \Rightarrow p = 6$$

$$r = 3 \Rightarrow p^2 - 3p - 24 = 0 \Rightarrow p \notin \mathbb{N}$$



**مثال:** اگر  $M$  ماتریس مجاورت یک گراف کامل باشد، بطوری که  $M^2 = A = [a_{i,j}]$  و  $A_{2,3} = 7$  در این صورت تعدد دورها به طول ۴ در این گراف چقدر است؟

$$p - 2 = 7 \Rightarrow p = 9$$

$$\binom{9}{4} \times \frac{(4-1)!}{2} = 378$$

**تست:** اگر  $G$  گرافی کامل و اوپلری باشد و  $M$  ماتریس مجاورت آن باشد در این صورت مجموع درایه‌های غیر قطر اصلی ماتریس  $M^2$  کدام گزینه می‌تواند باشد؟

- (۱)  $4 \times 3 \times 2 \leq 24$   
(۲) ۴۸  
(۳)  $5 \times 4 \times 3 \leq 60$   
(۴) ۷۸

غیرقطر اصلی ضرب سه عدد متوالی

$$(p^2 - p) \times (p - 2) = p(p - 1)(p - 2)$$

کل درایه‌ها چون گراف اوپلری است  $\Leftarrow$  فرد

درایه‌های روی قطر اصلی

$$k_p \Rightarrow M = \begin{bmatrix} & & \\ & \text{یک} & \\ & & \text{یک} \end{bmatrix} \Rightarrow M^2 = \begin{bmatrix} & & \\ & \text{همه} & p-2 \\ & & p-2 \end{bmatrix}$$

صفر

**تست:** کدام یک از گزینه‌های زیر می‌تواند ماتریس مجاورت یک گراف ناهمبند باشد؟ (منظور از  $A$  و  $B$  ماتریس‌های غیرصفر و منظور از  $O$  ماتریس صفر می‌باشد)

$$\left[ \begin{array}{c|c} A & O \\ \hline O & B \end{array} \right] \quad (2)$$

(4) هیچ کدام

$$\left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline O & O \end{array} \right] \quad (1)$$

$$\left[ \begin{array}{c|c} A & O \\ \hline B & O \end{array} \right] \quad (3)$$

پاسخ: گزینه «۲»