دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست

جزوه درس :

استاتیک

استاد :

جناب آقای مهندس پیدایش

نگارش:

حمید کاظم

(کارشناس عمران دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

(دانشجوی کارشناسی ارشد گرایش سازه دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

تابستان ۱۳۸۹

"بسم الله الرحمن الرحیم"

حمید کاظم

استاتیک

جناب آقای مهندس پیدائی

Refrences :

1) statics by : J.L. Meriam , L.G. kraige

2) statics by : Ferdinand P. Beer , E. Russel johnston

3) statics by : S. Timoshenko , D.H. yong

مباحث:

- مقدمه و کلیات

فصل اول: نیرو و مجموعه‌های نیرویی

فصل دوم: تعادل اجسام صلب

فصل سوم: تحلیل خرپاها و قاب‌ها

فصل چهارم: نیروهای داخلی در سازه‌های معین استاتیکی

فصل پنجم: خواص هندسی سطوح

فصل ششم: تحلیل کابل‌ها

فصل هفتم: تئوری کار مجازی و کاربرد آن در حل مسائل تعادل

حمید کاظم

مقدمه و کلیات

علم مکانیک: عبارت است از شاخه‌ای از فیزیک که به بررسی علم حرکت و سکون می‌پردازد.

مکانیک مهندسی: عبارت است از مجموعه‌ای از اصول و قواعد که از ریاضیات و فیزیک منشعب گشته و در جنبه‌های کاربردی مکانیک تاکید دارد. (Engineering Mechanics)

- علم مکانیک
  - ۱) جامدات
    - ۱) صلب (rigid): تغییر شکل در اثر نیروی وارده ندارند
      - سکون
      - حرکت
    - ۲) تغییر شکل پذیر (deformable)
  - ۲) سیالات
    - ۱) مایعات ـــ تراکم‌ناپذیر
    - ۲) گازها ـــ تراکم‌پذیر

۱) شاخه‌ای از علم مکانیک که به بررسی اجسام جامد صلب در حال سکون می‌پردازد گویند استاتیک.

۲) شاخه‌ای از علم مکانیک که به بررسی اجسام جامد صلب در حال حرکت می‌پردازد گویند دینامیک.

۳) شاخه‌ای از علم مکانیک که به بررسی اجسام جامد تغییر شکل پذیر می‌پردازد گویند مقاومت مصالح.

ضرورت فراگیری مکانیک مهندسی:

- ایفای مسئولیت مهندسی
  - ۱) قدرت تجزیه و تحلیل مؤثر و خلاقیت در سطح عالی
  - ۲) آگاهی‌های حرفه‌ای

ایفای مسئولیت مهندسی با استفاده از دو نکته گفته شده قابل انجام شدن است.

نقش ریاضیات :

انتظارات ما از دانشجو : ایجاد توانایی کشف حرفه‌ای :

۱) به روش منطقی و ساده

۲) با استفاده از چند اصل اساسی که قرار داده شده

مطالب بر پایه ۶ اصل استوار است :

۱، ۲، ۳ ــ قوانین نیوتن

٤ ــ قانون متوازی الاضلاع

۵ ــ اصل قابلیت انتقال

۶ ــ قانون گرانش نیوتن

ــ ساعات مراجعه : دوشنبه ، چهارشنبه ساعت ۱۱ تا ۱۲ (دفتر پژوهش ... دانشکده بتن)

توزیع نمرات :

میان ترم	30%	۶ نمره
پایان ترم	50%	۱۰ نمره
کلاس حل تمرین	10%	۲ نمره
کوییز	10%	۲ نمره

Force & Force Systems — فصل اول : نیرو و مجموعه‌ی نیرویی

تعریف نیرو : عبارتست از عمل یک جسم بر روی جسم دیگر. کششی است که حرکت یا سکون جسم را تغییر می‌دهد و یا در جسم تغییر شکل ایجاد کند.

بنابراین نیرو یک کمیت برداری است.

تقسیم نیرو از نظر طرز اعمال:
- حجمی : به کل ذرات جسم وارد می‌شود (مانند ثقل)
- تماسی : از راه تماس وارد می‌شود.

اسم دیگر نیروی حجمی، القایی یا اثر از راه دور است. تمام نیروها در استاتیک به غیر از ثقل تماسی هستند.

تقسیم از نظر نحوه تاثیر:
- خارجی : نیرویی است که از یک عامل خارجی وارد می‌شود
- داخلی : نیرویی است که توسط یک عامل خارجی در داخل جسم ایجاد می‌شود

نیروهای خارجی مسئولیت حرکت و سکون و نیروهای داخلی مسئولیت تغییر شکل جسم را بر عهده دارند.

تقسیم از نظر نقطه اثر:
- متمرکز (Concentrated) : نقطه اثرش یک نقطه است.
- گسترده (Distributed) : نقطه اثرش یک سطح است (مانند دست بر دیوار)

در واقعیت عموم نیروها گسترده هستند. اما در مطالعات استاتیکی اکثر نیروها را در حالی که گسترده هستند متمرکز فرض می‌کنیم. اگر سطح تاثیر نیرو نسبت به سطح کل جسم ناچیز باشد نیرو را متمرکز فرض می‌کنیم.

$\vec{F}$ اندازه = $|\vec{F}| = F$ اندازه نیرو

سیستم‌های آحاد تصمیم می‌گیرند کمیت‌ها (واحدها) با هم ارتباط داشته باشند. مثلاً در $F = ma$ جرم، $\frac{\text{طول}}{\text{ثانیه}^2}$، نیرو با هم ارتباط دارند. وظیفه‌اش آن است که کمیت‌ها را با هم سازگار کنند.

کمیت‌ها	SI	MKS	اروپایی
طول	m	m	ft
زمان	sec	sec	sec
جرم	kg	kgm (جرم)	lbm / slug
نیرو	N	kgf	lbf

یک نیوتن در سیستم SI نیرویی است که وقتی به جسمی به جرم 1kg وارد می‌شود به آن شتاب $1\,\frac{m}{s^2}$ می‌دهد.

$$1\,N = 1\,kg \times 1\,\frac{m}{s^2}$$

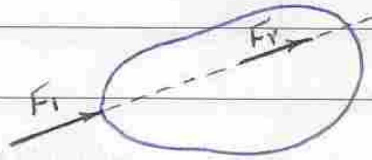
$$1\,kgf = 1\,kgm \times 9.81\,\frac{m}{s^2} \Rightarrow 1\,kgf = 9.81\,N$$

یک پوند جرم جسمی است که اگر به آن یک پوند نیرو وارد شود شتاب ثقل بگیرد.

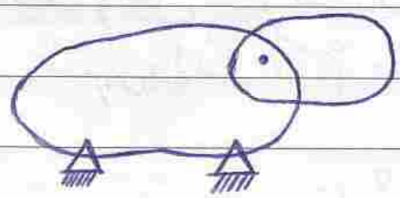
$$1\,lbf = 1\,lbm \times 32.2\,\frac{ft}{sec^2}$$

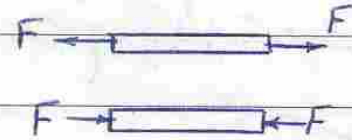
$$1\,lbf = 1\,slug \times 1\,\frac{ft}{sec^2} \Rightarrow 32.2\,lbm = 1\,slug$$

اصل قابلیت انتقال : نیروی اعمال شده بر جسم صلب می تواند بر روی امتداد خود آزادانه جابجا شود بدون آنکه بر روی اثرات خارجی نیروها روی جسم صلب تغییری ایجاد شود.

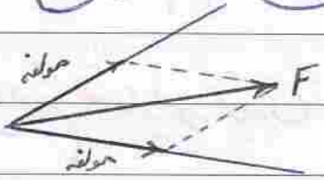


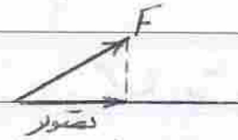
اگر F_1 حذف و F_2 اعمال شود هیچ تغییری در اثرات ایجاد نمی شود.



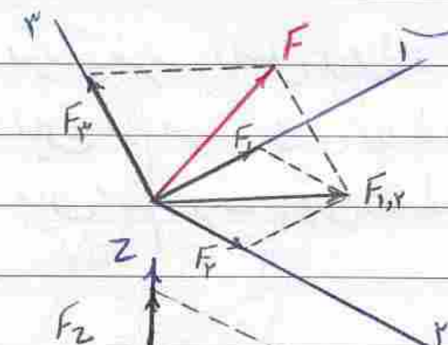


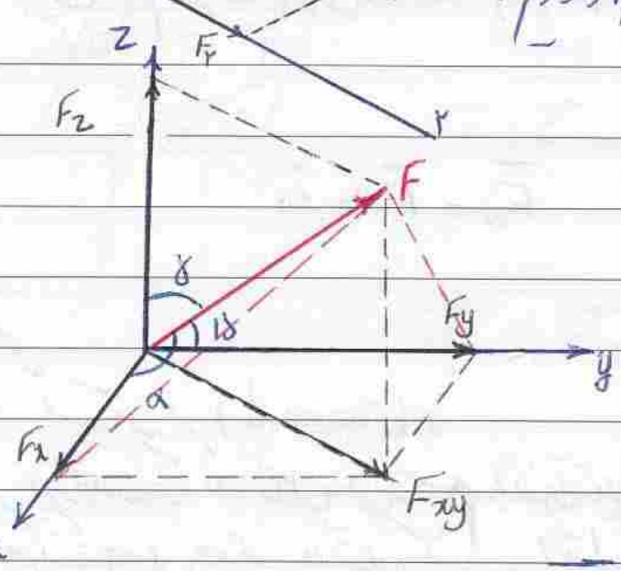
تجزیه نیرو بر حسب مولفه های آن : مولفه عبارتست از بردارهای حاصل از تجزیه که جمع آن ها بردار اصلی خواهد بود.





برای مولفه بندی نیروی F بر روی ۳ امتداد ۱ و ۲ و ۳ در فضا ابتدا صفحه ای از امتداد ۱ و ۲ عبور می دهیم. مولفه های F را بر روی صفحه و امتداد ۳ رسم می کنیم و به ترتیب $F_{1,2}$ و F_3 می نامیم. آنگاه مولفه های F_{12} را بر روی امتداد ۱ و ۲ رسم می کنیم. حال ۳ مولفه F_1 و F_2 و F_3 را داریم.



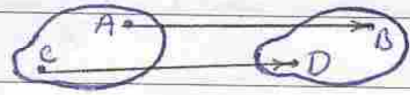


$$F_x = |F|\cos\alpha = |F|.l$$
$$F_y = |F|\cos\beta = |F|.m$$
$$F_z = |F|\cos\gamma = |F|.n$$
$$m^2+n^2+l^2=1$$

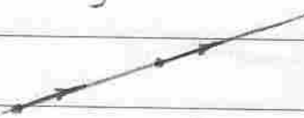
$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$$
$$\vec{F} = |F|\cos\alpha\,\hat{i} + |F|\cos\beta\,\hat{j} + |F|\cos\gamma\,\hat{k}$$

انواع بردارها:

1) بردار آزاد: محدود به یک راستا و مکان خاص در فضا نیست

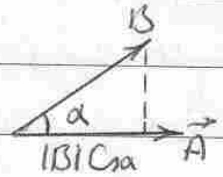


2) بردار لغزنده: برداری است که محدود به یک نقطه از مکان خاص در فضا نیست و در فضا می‌توانند جابه‌جا شوند (مثل نیروی اعمال شده به جسم صلب بدون تغییر در اثرات خارجی نیرو که در راستای خط، همیشه بردارهای لغزنده‌اند)



3) بردار بسته: دقیقاً در راستا و نقطه اثر خود اعمال می‌شود و تغییر مکان آن باعث ایجاد تغییر می‌شود. (اثر نیروهای وارد بر اجسام غیر صلب)

یافتن تصویر نیرو بر روی یک امتداد خاص با استفاده از ضرب داخلی بردارها:

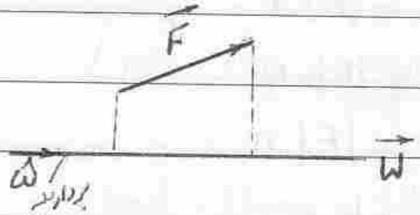


تعریف ضرب داخلی بردارها: $\vec A \cdot \vec B = |\vec A||\vec B|\cos\alpha$

بیان دوم ضرب داخلی بردارها:

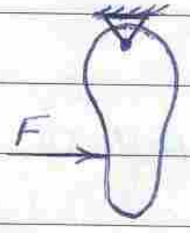
بیان سوم ضرب داخلی بردارها: $\vec A \cdot \vec B = (A_x i + A_y i + A_z j)\cdot(B_x i + B_y j + B_z k)$

$= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$



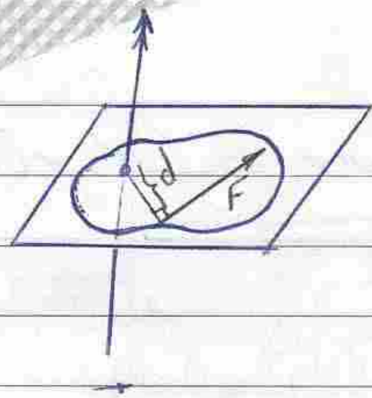
$F_w = \vec F \cdot \hat w \qquad \vec F_w = \vec F \cdot \hat w \; \hat w$

گشتاور (Moment):

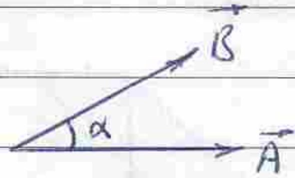


نیرو علاوه بر تمایل دارد جسم را در راستای خود جابجا کند تمایل به چرخش حول هر محور یا امتدادی که نیرو را قطع نکند و با آن موازی نیز نباشد را ایجاد می‌کند. این تمایل به چرخش را گشتاور گویند.

* گشتاور برداری آزاد است



$$|M| = F.d$$
$$\vec{M} = \vec{d} \times \vec{F}$$



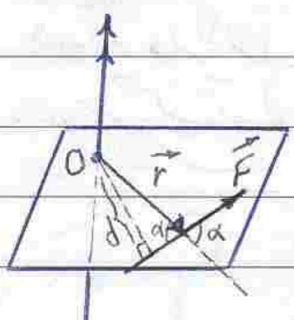
ضرب خارجی بردارها :

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C} : \begin{cases} |C| = |A||B| \sin\alpha \\ \text{امتداد} = \text{عمود بر صفحه دو بردار} \\ \text{جهت} = \text{طبق قانون دست راست} \end{cases}$$

اگر چهار انگشت دست راست از بردار اول به سمت بردار دوم در جهت زاویه کوچکتر بچرخد جهت انگشت شست جهت بردار حاصلضرب است

در تعریف ضرب خارجی راست تعریف شده است.

بیان گشتاور با استفاده از مفهوم ضرب خارجی بردارها :



$$\vec{r} \times \vec{F} = \begin{cases} \text{مقدار} = |r||F| \sin\alpha = F.d \\ \text{امتداد} = \text{عمود بر صفحه دو بردار} \\ \text{جهت} = \text{طبق قانون دست راست} \end{cases} = \vec{M}_O$$

$$\Rightarrow \vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

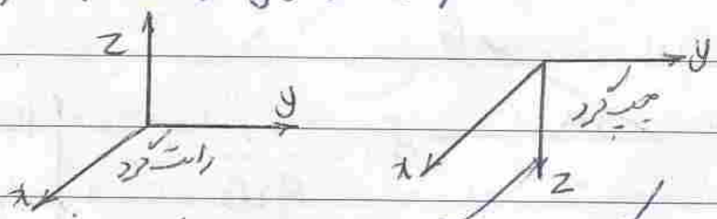
r : برداری است که ابتدایش مرکز گشتاور و انتهایش در نقطه ای بر روی بردار $\vec{F}$ است.
که بردار موقعیت

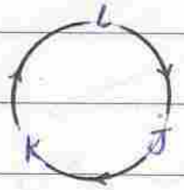
ذره را تا نبود همت عالی حافظ   طالب چشمه خورشید درخشان نشود

بیان دوم ضرب خارجی:

$$A \times B = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) \times (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = 0$$



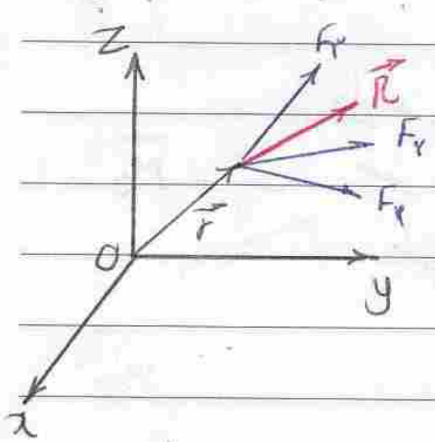


در دستگاه راستگرد: $k\times i = j$ ، $j \times k = i$ ، $i \times j = k$

$$\rightarrow A\times B = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k}$$

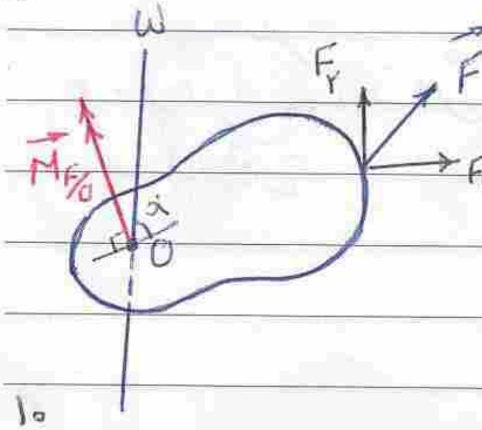
$$A\times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

قضیه وارینیون (Varignon's Theorem): گشتاور یک نیرو نسبت به یک نقطه برابر است با جمع جبری گشتاورهای مولفه‌های نیرو نسبت به همان نقطه.

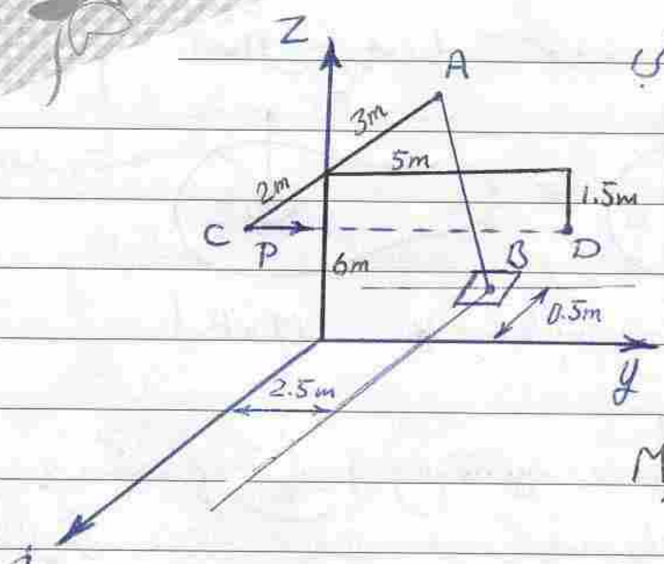


$$\vec{M}_{R/O} = \vec{r}\times\vec{R} = \vec{r}\times(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots)$$
$$= \vec{r}\times\vec{F}_1 + \vec{r}\times\vec{F}_2 + \vec{r}\times\vec{F}_3 + \dots$$
$$= \vec{M}_{F_1/O} + \vec{M}_{F_2/O} + \vec{M}_{F_3/O} + \dots$$

گشتاور یک نیرو نسبت به یک محور دلخواه در فضا:



$$\vec{M}_{F/O} = \vec{r}\times\vec{F}$$
$$M_{F/\omega} = (r\times F)\cdot\hat{\omega}$$
$$\vec{M}_{F/\omega} = [(r\times F)\cdot\hat{\omega}]\,\hat{\omega}$$



مثال: عضو شکسته نشان داده شده توسط کابلی در نقطه B مهار شده است و تحت اثر نیروی P قرار دارد. گشتاور نیروی P را حول محور AB می‌یابید. P=۸kN

حل:

$$M_{P/AB} = \vec{r} \times \vec{P} \cdot \vec{\lambda}_{AB} = \vec{M}_{P/A} \cdot \vec{\lambda}_{AB}$$

$$\vec{P} = |P| \cdot \vec{\lambda}_{CD} = |\vec{P}| \cdot \frac{\vec{CD}}{|\vec{CD}|} = 8 \times \frac{-2\hat{i} + 5\hat{j} - 1.5\hat{k}}{\sqrt{2^2 + 5^2 + 1.5^2}}$$

$$= -2.86\hat{i} + 7.14\hat{j} - 2.14\hat{k}$$

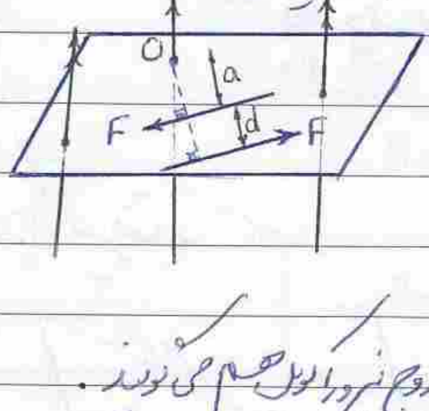
$$\vec{M}_{P/A} = \vec{r}_{AC} \times \vec{P} = (5\hat{i}) \times (-2.86\hat{i} + 7.14\hat{j} - 2.14\hat{k})$$

$$= 35.7\hat{k} + 10.7\hat{j}$$

$$\vec{\lambda}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \frac{2.5\hat{i} + 2.5\hat{j} - 6\hat{k}}{\sqrt{2.5^2 + 2.5^2 + 6^2}} = 0.36\hat{i} + 0.36\hat{j} - 0.86\hat{k}$$

$$M_{P/AB} = -26.85 \ \frac{kN}{m}$$

زوج نیرو: گشتاور حاصل از دو نیروی مساوی با مختلف الجهت و غیر هم راستای موازی را یک زوج نیرو یا Couple می‌گویند.

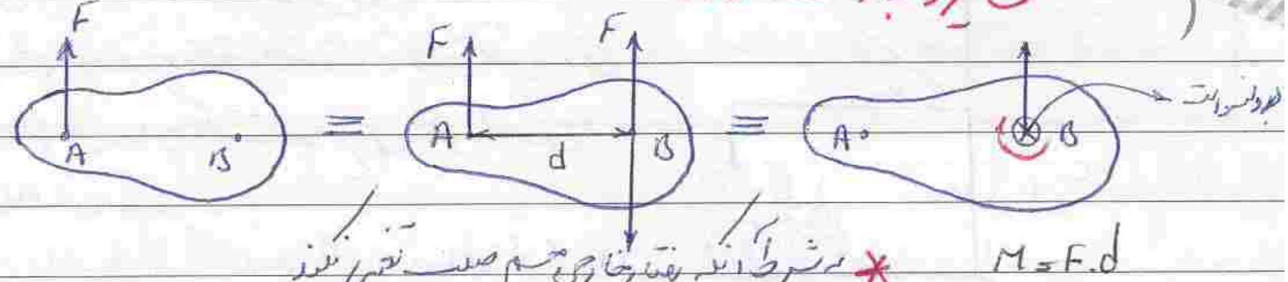


$$M_O = F(a+d) - F.a = F.d$$

* نقطه O را هر جای از صفحه بگیریم M_O تغییر نمی‌کند و فقط به مقدار نیرو و فاصله بین دو نیرو دارد.

گشتاور حاصل از یک زوج نیرو همواره بردار آزاد است. زوج نیرو را کوپل هم می‌گویند.

انتقال نیرو به موازات خودش



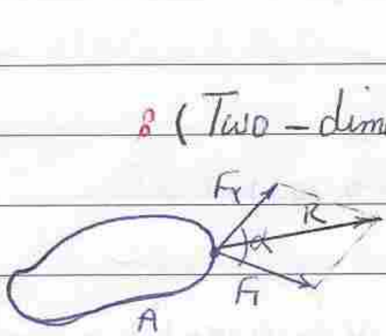
* به شرط آنکه رفتار خارجی جسم صلب تغییر نکند

$M = F.d$

برآیند مجموعه‌های نیروئی (Resultant of force systems): عبارتست از ساده‌ترین شکل ترکیب نیروئی که می‌تواند جایگزین مجموعه نیروی اصلی شود بدون آنکه در رفتار خارجی جسم صلب تغییری ایجاد شود.

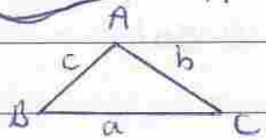
۱) مجموعه‌های نیروئی دوبعدی یا صفحه‌ای (Two-dimensional force systems):

الف) متقارب:



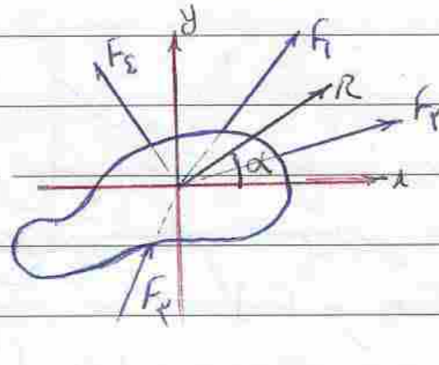
$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}$$

۱) دو برداری:



$$\longrightarrow \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

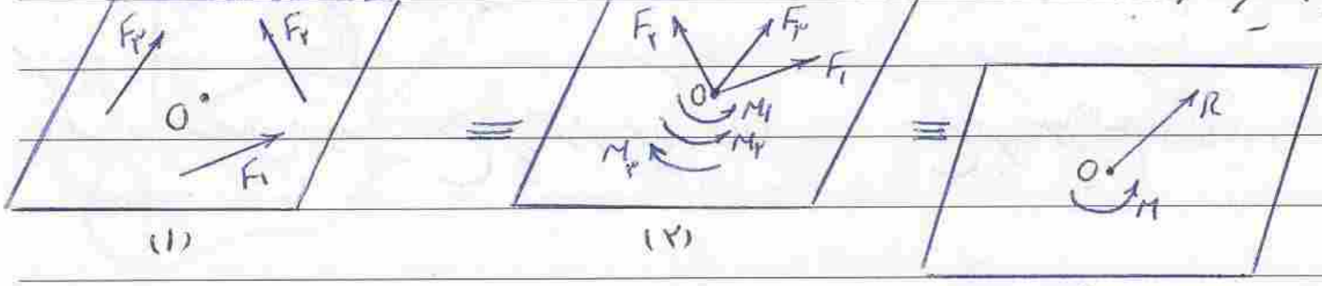
۲) چند برداری:



$$\vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j}$$

$$\begin{cases} R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} \\ R_y = \sum F_{iy} \end{cases} \qquad \alpha = tg^{-1}\frac{R_y}{R_x}$$

ب) غیر متقارب:



(۱) (۲) (۳)

کند در مرحله ۳ :

۱) اگر نقطه O را هرجا انتخاب کنیم R تغییر نمی‌کند ولی M می‌تواند تغییر کند.

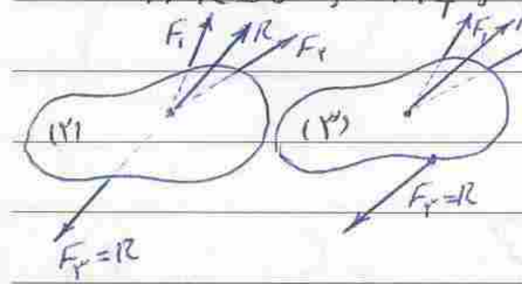
$1)\ R \neq 0 ,\quad M = 0 \text{ یا } \neq 0$

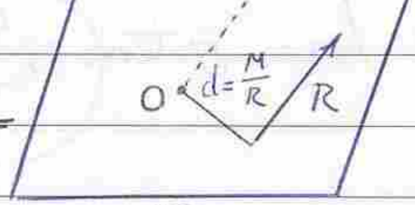
۲) هیچ حرکتی در جسم تولید نمی‌شود (حالت تعادل) →

$2)\ R = 0 ,\quad M = 0$

۳) در این حالت M به نقطه O بستگی ندارد و برای تمام نقاط O، M ثابت است. این حالت زوج نیرو است.

$3)\ R = 0 ,\quad M \neq 0$

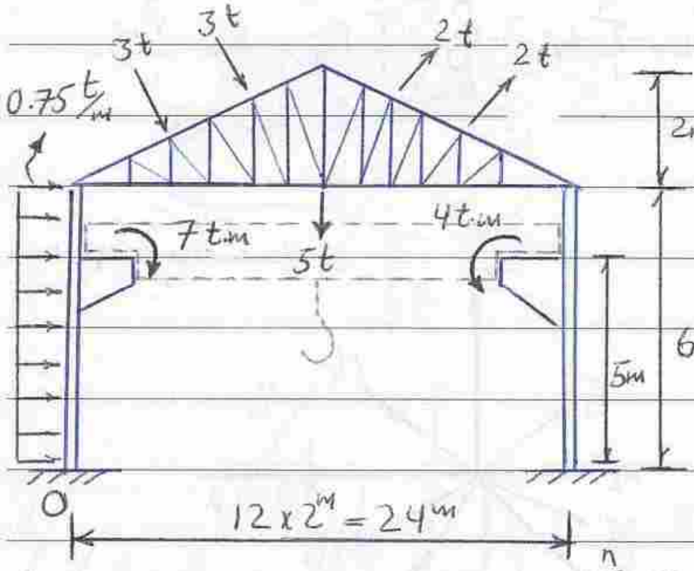




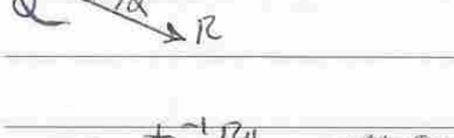
(۳) =

(۴)

مثال: قاب یک سوله صنعتی مطابق شکل تحت اثر نیروهای نشان داده قرار دارد. نیروهای عامل بر سطح شیبدار عمودند. مقدار و محل دقیق برآیند این مجموعه را یافته و موقعیت آن را روی شکل نسبت به نقطه O مشخص نمایید.



$$\theta = tg^{-1}\frac{2}{12} = 9.46^{\circ}$$



$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0.75 \times 6 + 2 \times 3 \times \sin 9.46 + 2 \times 2 \times \sin 9.46 = 6.14t$$

$$R_y = -2 \times 3 \times \cos 9.46^{\circ} + 2 \times 2 \cos 9.46 - 5 = 6.97t$$

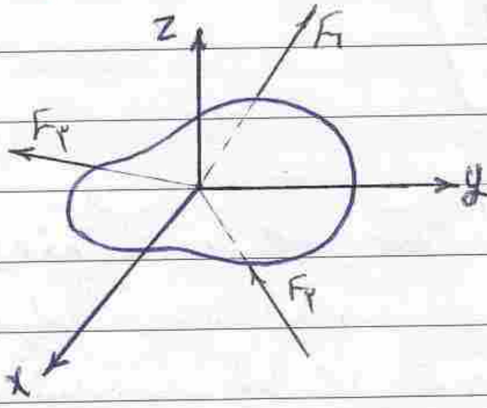
$$|R| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 9.29t$$

$\alpha = tg^{-1}\frac{R_y}{R_x} =$ [redacted] $^{\circ}$ -48.6

$$\overset{+}{\curvearrowright}\ \Sigma M_O = +0.75\times 6\times 3 + 3\times \sin 9.46\,(6+\tfrac{2}{3})$$
$$+ 3\times \cos 9.46\times 4 + 3\times \sin 9.46\times(6+\tfrac{4}{3})$$
$$+ 3\cos 9.46\times 8 + 2\sin 9.46\,(6+\tfrac{4}{3})$$
$$- 2\cos 9.46^\circ\times 16 + 2\sin 9.46\times(6+\tfrac{2}{3})$$
$$- 2\cos 9.46\times 20 + 5\times 12 + 7 - 4$$
$$= +52.5\ t.m$$

$$d = \frac{M_o}{R} = 5.65\ m$$

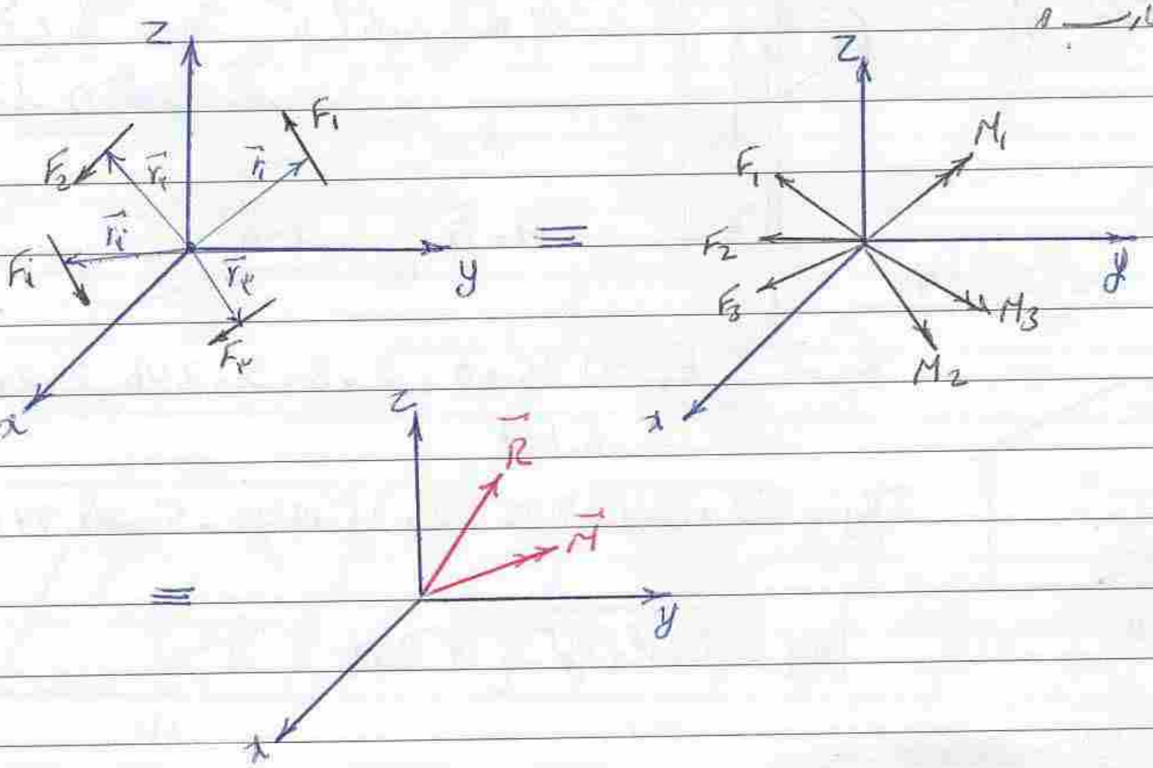
B (Three-dimentional force systems) ۲) مجموعه نیروهای سه بعدی یا فضایی



الف) متقارب

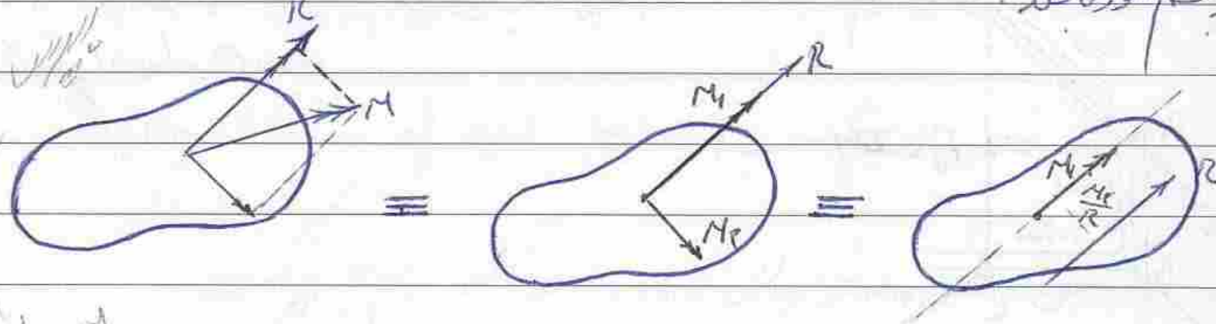
$$\vec{R} = R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k}$$
$$R_x = \sum_{i}^{n} F_{ix} \quad R_y = \sum_{i}^{n} F_{iy} \quad R_z = \sum_{i}^{n} F_{iz}$$

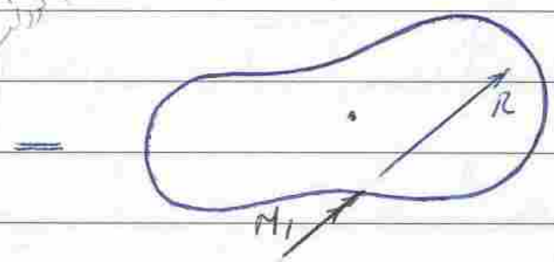
ب) غیر متقارب



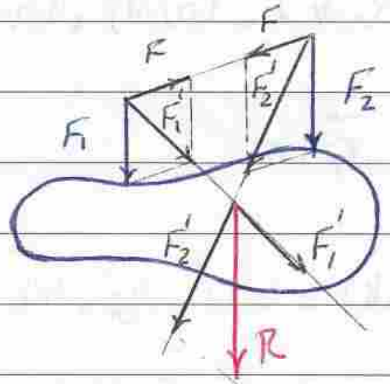
$$\vec{M} = \sum_{1}^{n} \vec{M_i} = \sum_{1}^{n} \vec{r_i} \times \vec{F_i}$$

در حالت کلی به هیچ وجه نمی‌توان R و M را به یک R تنها تبدیل کرد مگر زمانی که R و M بر هم عمود باشند.



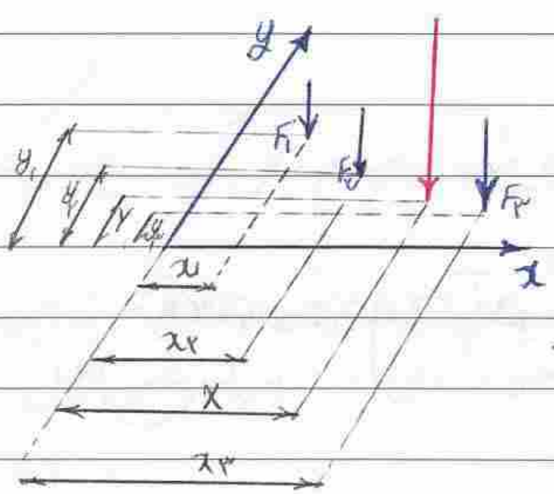


برآیند اجباری (پیچ گوشتی وار)



برآیند نیروهای موازی:

$$|R| = \sum_{1}^{n} F_i$$

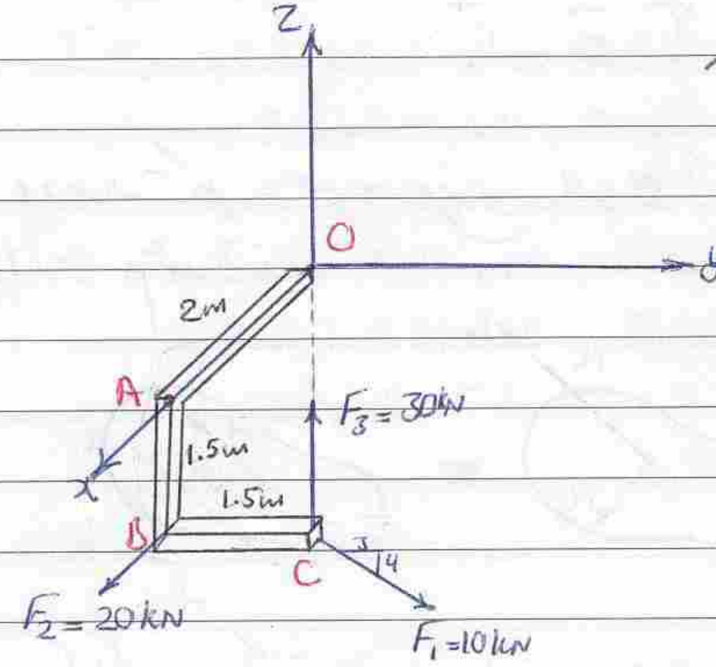


$$\begin{cases} R \cdot \bar{X} = F_1 x_1 + F_2 x_2 + \cdots \\ R \cdot \bar{Y} = F_1 y_1 + F_2 y_2 + \cdots \end{cases}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum F_i x_i}{R}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum F_i y_i}{R}$$

مثال: عضو نشان داده شده تحت اثر نیروهای F_1 و F_2 و F_3 مفروض است. F_1 در صفحه‌ای به موازات صفحه yz و F_2 به موازات محور x است. برآیند این مجموعه نیرو را در نقطه O بیابید.



$$F_1 = +6\hat{j} - 8\hat{k}$$

$$F_2 = 20\,i$$

$$F_3 = 30 \times \frac{\vec{CO}}{|CO|} = 30 \times \frac{-2\hat{i} - 1.5j + 1.5k}{\sqrt{2.25 + 2.25 + 4}} = -20.7\,i - 15.5\hat{j} + 15.5k$$

$$\vec{r}_1 = \vec{OC} \qquad \vec{r}_2 = -1.5\hat{k} + 2\hat{i} \qquad \vec{r}_3 = 0$$

$$M_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = (2\hat{i} + 1.5\hat{j} - 1.5k) \times (6j - 8k) = -3\hat{i} + 16\hat{j} + 12\vec{k}$$

$$M_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (-1.5k)(20\hat{i}) = -30j$$

$$M_3 = r_3 \times F_3 = 0$$

$$\sum M = -3\hat{i} - 14\hat{j} + 12k \qquad \sum F = -0.7\vec{i} - 9.46\vec{j} + 7.46\vec{k}$$

اگر رفتگر خیابان هستید طوری خیابان را جارو کنید که گویی میکل آنژ نقاشی می کند یا بتهوون موسیقی می سازد یا شکسپیر شعر می گوید. خیابان را چنان جارو کنید که ساکنین آسمان و زمین وقتی آن را می بینند درنگ کرده و بگویند اینجا کار رفتگر ارزشمندیست که کارش را خوب انجام داده است. (Martin Loter King)

فصل دوم : تعادل اجسام صلب (Equilibrium of rigid bodies) :

جسم صلب : جسمی است که در اثر نیروهای وارده فاصله نقاطش هیچ تغییری نکند.

مجموعه مکانیکی : عبارتست از یک جسم یا مجموعه ای از اجسام که بتوان آنها را از سایر اجسام محیط جدا کرد.

اجزای تشکیل دهنده یک مجموعه مکانیکی می توانند تک یا چند عضو باشند، صلب یا غیر صلب باشند و یا جامد، سیال یا گاز باشند.

دیاگرام آزاد مجموعه مکانیکی (Free body diagram) :

نیرو:
- خارجی:
  - ۱) عمل action
  - ۲) عکس العمل reaction
- داخلی

نیروهای عمل : نیروهایی هستند که توسط عوامل خارجی بر جسم وارد می شوند و در جسم تمایل به حرکت ایجاد می کنند.

نیروهای عکس العمل : نیروهایی هستند که توسط زمین و سایر اجسام تکیه گاهی بر جسم وارد می شوند و مخالفت با بروز حرکت در جسم می نمایند و جسم را به باقی ماندن در مکان اولیه محدود می کنند. به نیروهای عکس العمل نیروهای مقید کننده گویند.

دیاگرام آزاد یک مجموعه مکانیکی : عبارتست از مجموعه یا جسم منفک شده از کلیه اجسام پیرامونی و مرتبط با آن که توسط یک نمودار نشان داده شود.

مراحل رسم دیاگرام آزاد :

۱) انتخاب جسم یا مجموعه مکانیکی که باید از محیط پیرامونی انفکاک یابد.

۲) رسم حدود خارجی جسم انتخاب شده.

۳) نشان دادن کلیه نیروهای خارجی شامل عمل و عکس العمل (معلوم و مجهول) بر روی جسم

نکته ۱ : نیروهای معلوم تماماً توسط بردارهایی که مقدار، امتداد و جهت آن ها معلوم است نشان داده می شود

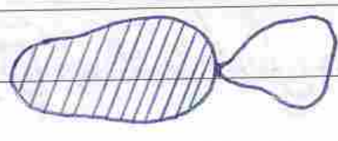
نکته ۲ : نیروهای مجهول توسط بردارهایی که مقدار آن ها مجهول است نشان داده می شود. اگر امتداد نیرو نیز مجهول باشد توسط یک زاویه مجهول و یا با استفاده از مولفه های کارتزین نشان داده می شود. اگر جهت نیرو نیز مجهول باشد به صورت دلخواه فرض می شود، پس از انجام محاسبات در صورت مثبت بودن جواب فرض فوق تایید می شود، در غیر اینصورت جهت واقعی نیرو خلاف جهت فرض شده است.

۴) نشان دادن ابعاد، فواصل و محورهای مختصات در صورت لزوم.

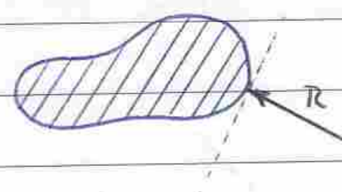
۱) تعادل اجسام صلب در صفحه (دو بعدی) :

الف) شناخت عکس العمل ها :

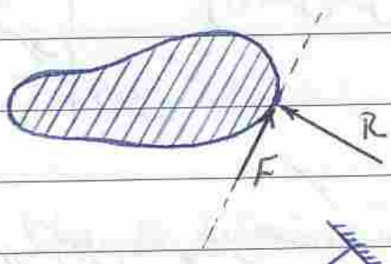
① تماس دو جسم :



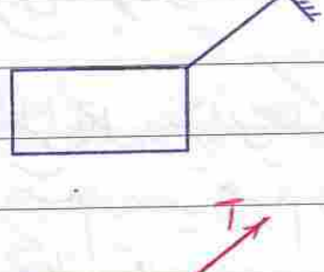
محل تماس سطوح صاف باشد

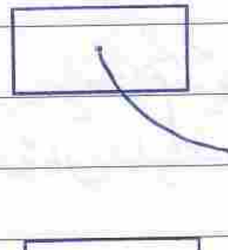


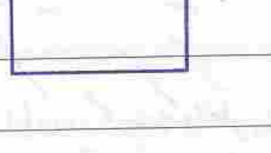
محل تماس سطوح زبر باشد

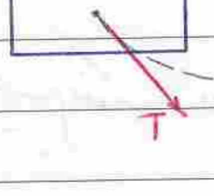


② اثر کابل بر جسم :

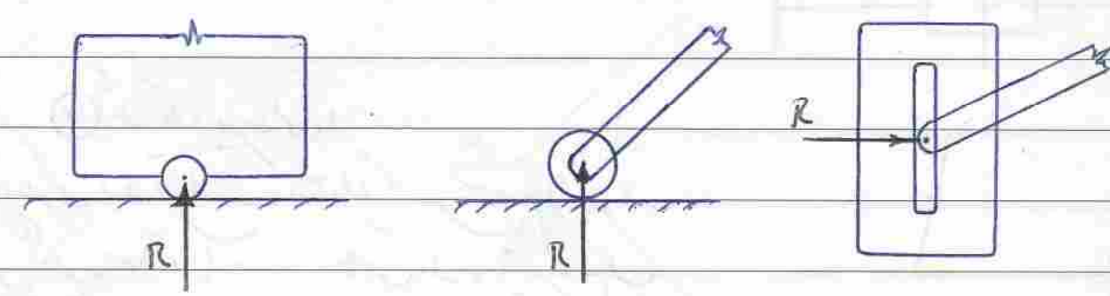


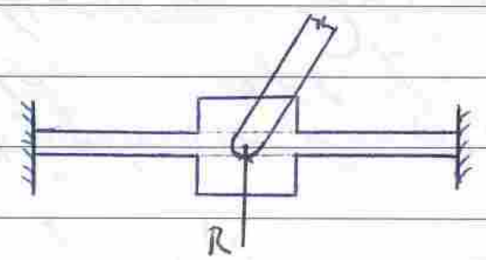


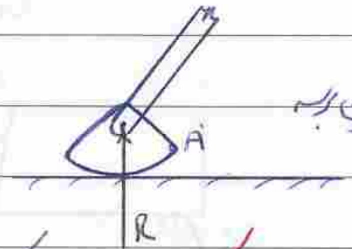




۳) تکیه‌گاه غلتکی (Roller Support) :



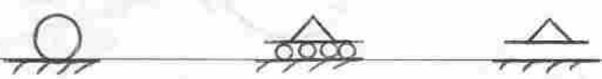




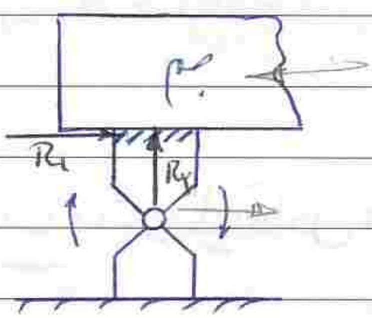
تا زمانی که A به زمین برسد تکیه‌گاه غلتکی است.

* تکیه‌گاه غلتکی فقط جلوی یکی از مولفه‌های حرکت انتقالی را می‌گیرد.
* عمود بر هر مولفه‌ای که آزاد می‌باشد تکیه‌گاه غلتکی (عکس‌العمل) وجود دارد.

علامت اختصاری تکیه‌گاه غلتکی :



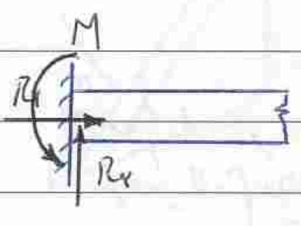
۴) تکیه‌گاه مفصلی (Pinned Support) :



از حرکت‌های انتقالی جلوی دو تا از مولفه‌ها را می‌گیرد و فقط حرکت چرخشی دارد.

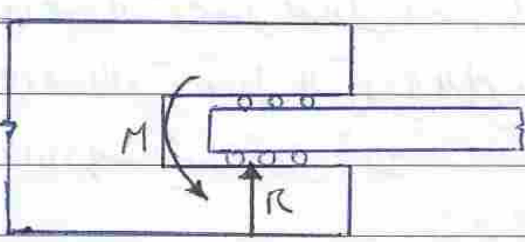
علامت اختصاری تکیه‌گاه مفصلی :

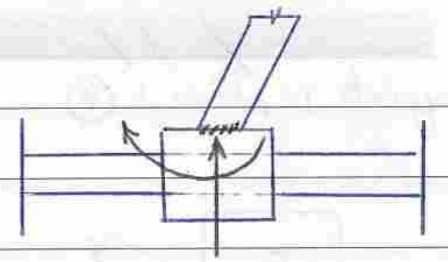
۵) تکیه‌گاه گیردار (Fixed Support) :

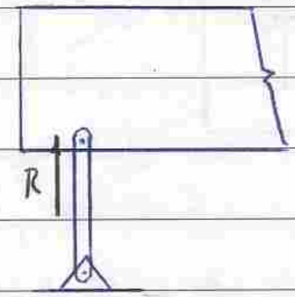


همه مولفه‌ها را محدود می‌کند و هیچ یک از سه نوع حرکت را ندارد. (تکیه‌گاه ۳ مجهولی)

۶) تکیه‌گاه گیردار دو مجهولی :

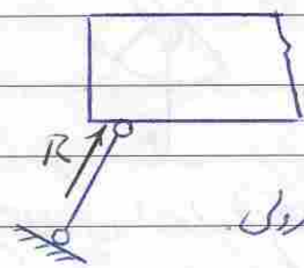






۷) تکیه‌گاه پاندولی:

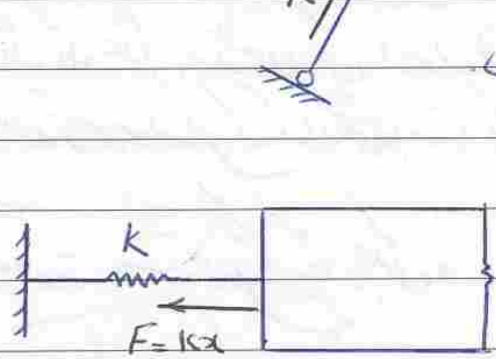
میله پاندولی میله‌ای است که معمولاً محوری مستقیم دارد و دو انتهای آن مفصل است. وزن آن ناچیز و قابل صرفنظر کردن است و هیچ نیروی عمود بر محورش را تحمل نمی‌کند.



* تکیه‌گاه پاندولی شبیه تکیه‌گاه غلتکی است.

* نیروی عکس‌العمل نیرویی است در راستای محور تکیه‌گاه پاندولی.

۸) تکیه‌گاه فنری (الاستیک):



ب) شرایط تعادل:

تعادل: $R=0$, $M=0$

شرایط تعادل ⟵ $\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M = 0 \end{cases}$ (حول z)

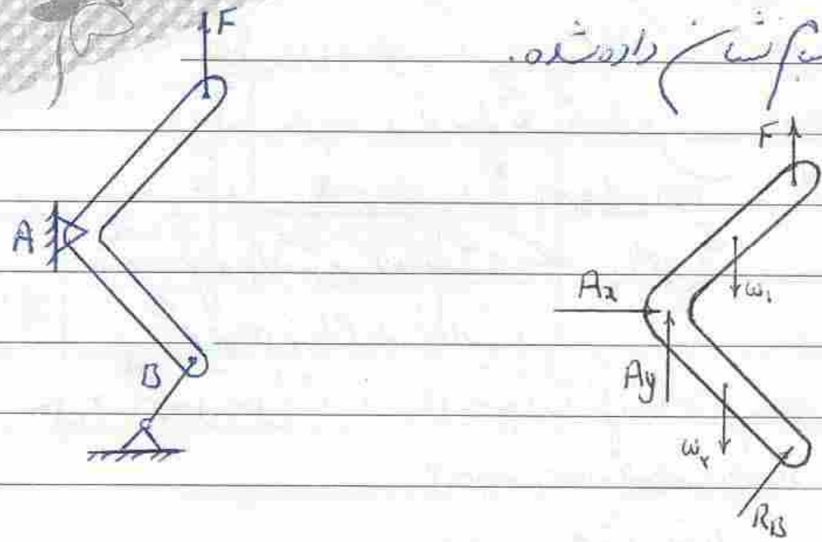
ویژگی‌ها:

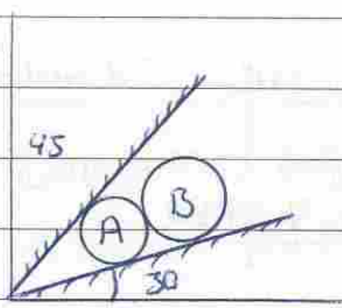
۱) شرایط لازم و کافی تعادل: برقراری سه رابطه بالا شرط کافی تعادل است.

۲) معادلات مستقل تعادل: سه رابطه بالا از هم مستقلند.

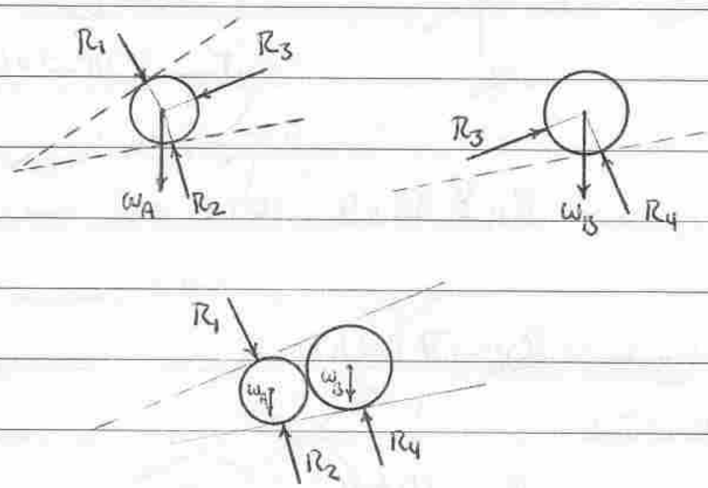
۳) معادلات تعادل استاتیکی: الزامی ندارد جسم ثابت باشد (حرکت سرعت ثابت دارد) اما ما در استاتیک تعادل را در حالت سکون در نظر می‌گیریم. به همین علت تعادل استاتیکی را در نظر می‌گیریم.

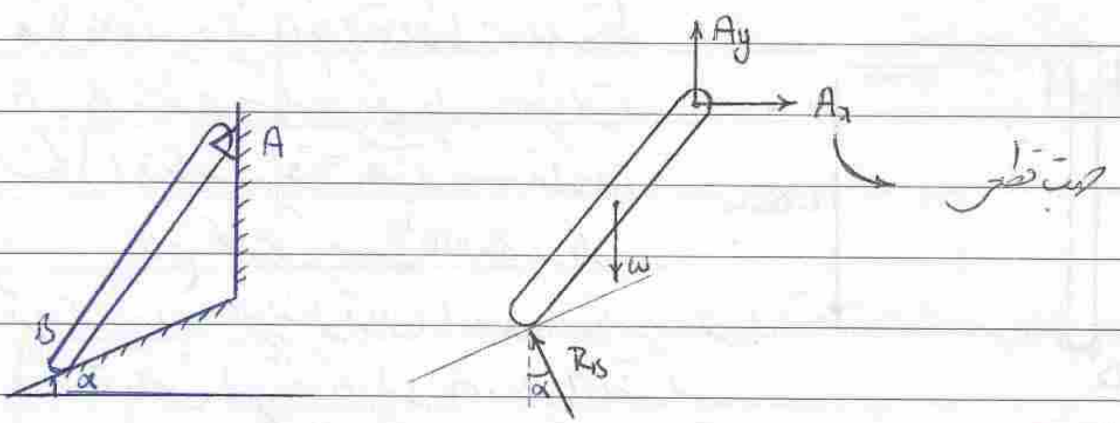
مثال ها: مطلوبست رسم دیاگرام های آزاد جسم نشان داده شده.





(سطوح صاف هستند)





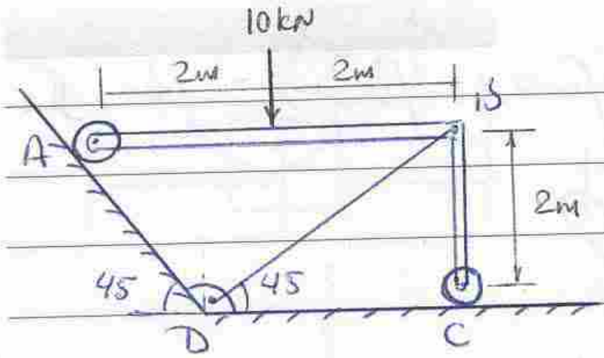
مراحل حل یک مسئله تعادل:

۱) رسم دیاگرام آزاد

۲) مقایسه تعداد مجهولات با تعداد معادلات مستقل تعادل

۳) اعمال معادلات تعادل و یافتن مجهولات

مثال (۱): عضو شکسته ABC که بر صفحه می‌باشد توسط تکیه‌گاه‌های غلتکی A و C و میله بادبندی BD نگاه داشته شده است. عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را به دست آورید.

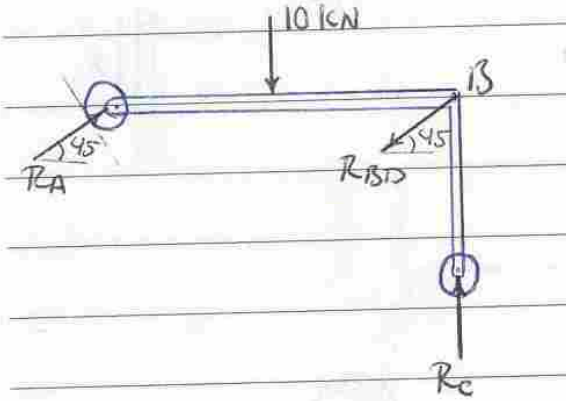


حل: مراحل حل مسئله: ۱) رسم دیاگرام آزاد

۲) مقایسه تعداد مجهولات با تعداد معادلات مستقل تعادل

۳) اعمال معادلات تعادل و یافتن مجهولات

تعداد معادلات ← ۳ تا   تعداد مجهولات ← ۳ تا

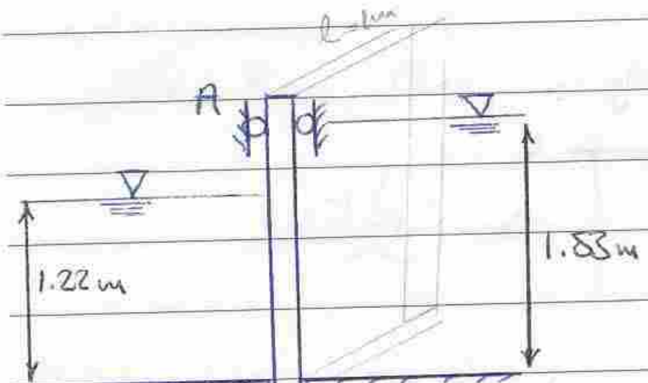


$$\overset{+}{\curvearrowright}\quad \sum M_B = 0 \rightarrow R_A \sin 45 \times 4 - 10 \times 2 = 0 \Rightarrow R_A = 7.07\ kN$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow R_B = 7.07\ kN$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow R_C = 10\ kN$$

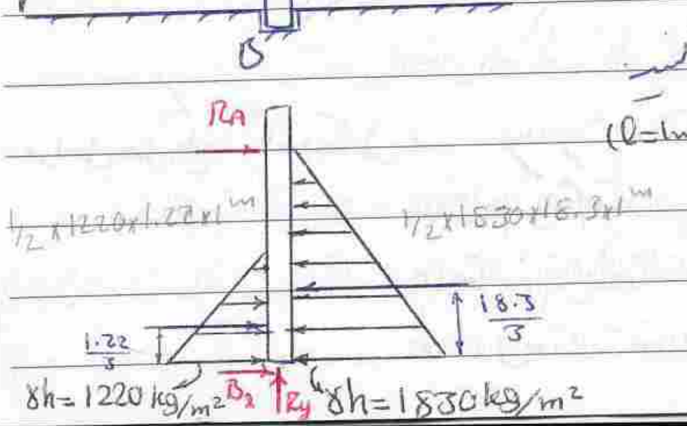
مثال ۲: یک دریچه قائم و بسته در طول خود در نقاط A و B به طور سراسری تکیه دارد و مطابق شکل از دو طرف تحت فشار آب قرار گرفته است. وزن مخصوص آب $\gamma = 1000\ \frac{kg}{m^3}$ در نظر گرفته می‌شود. با صرف‌نظر کردن از وزن دریچه، شدت واکنش‌های تکیه‌گاه‌های A و B را به دست آورید.

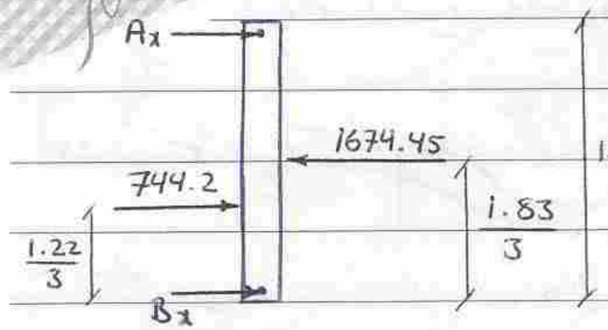


محاسبات را برای طول واحد دریچه حساب می‌کنیم $(l = 1m)$

$$\frac{1}{2} \times 1830 \times 1.83 \times (1m) = 1674.45\ kg$$

$$\frac{1}{2} \times 1220 \times 1.22 \times (1m) = 744.2\ kg$$





$\overset{+}{\curvearrowleft}$

$\sum M_B = 0$

$-1674.45 \times \frac{1.83}{3} - 744.2 \times \frac{1.22}{3}$

$- A_x \times 1.83 = 0$

$\Rightarrow A_x = 392.77$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow 744.2 + B_x + 392.77$

$- 1674.45 = 0$

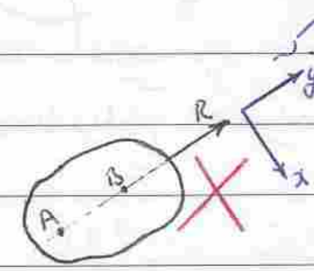
$\Rightarrow B_x = 537.48$

ج) بیان‌های مختلف تعادل در صفحه:

بیان اول: $\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M = 0 \end{cases}$ شرایط لازم و کافی تعادل

بیان دوم: $\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \end{cases}$

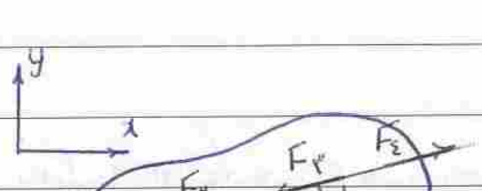
بیان دوم تعادل به شرطی برقرار است که AB عمود بر x نباشد.



بیان سوم: $\begin{cases} \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \\ \sum M_C = 0 \end{cases}$

بیان سوم تعادل به شرطی برقرار است که A و B و C بر یک راستا نباشند.

د) حالات خاص معادلات تعادل:

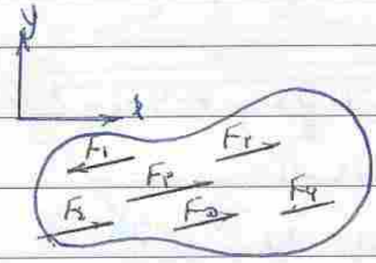


۱) وقتی که همه نیروها بر یک راستا باشند.

$\sum F_x = 0 \Rightarrow \cos\alpha\,(F_1 + F_2 + F_4 - F_3) = 0 \Rightarrow F_1 + F_2 - F_3 + F_4 = 0$

$\sum F_y = 0$ → (همین مستقل نیست) به درد نخورد است $\sum M_O = 0$ به درد نمی‌خورد.

پس تنها یک معادله به درد ما می‌خورد.

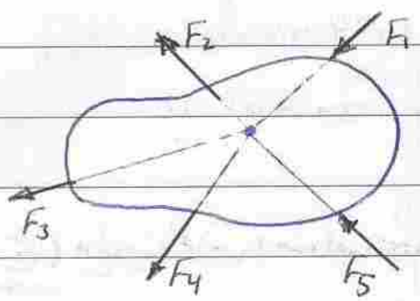


۲) وقتی همه نیروهای جسم موازی باشند.

$\Sigma F_x = 0$

$\Sigma M_x = 0$

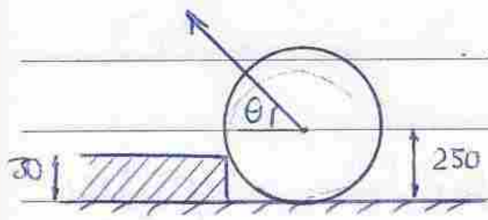
$\Sigma F_y = 0$ واضح است که $\Sigma F_x = 0$ پس به درد نمی‌خورد.



۳) وقتی همه نیروها در یک نقطه متقارب باشند.

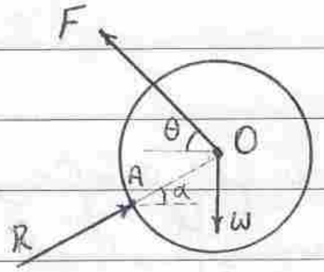
$\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = 0$



مثال: چرخی به وزن 100 N و به قطر 500 mm مفروض است. در صورتیکه $\theta = 30^\circ$ باشد نیروی لازم F برای بالا بردن چرخ از مانعی به ارتفاع 30 mm را بدست آورید.

حل: در این حالت دو مجهول و دو معادله داریم. (در یک نقطه متقاربند)



$\alpha = \sin^{-1}\frac{22}{25} \rightarrow \alpha = 61.6^\circ$

$\Sigma F_x = 0 \rightarrow$

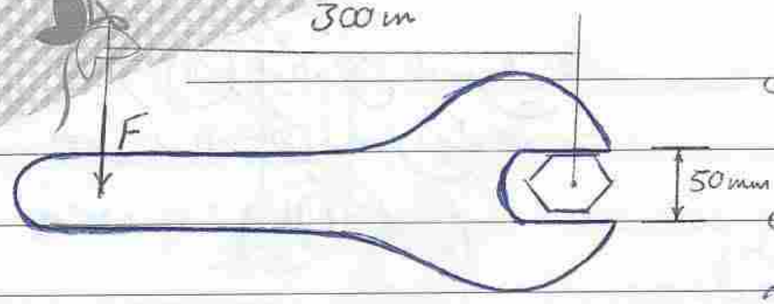
$\rightarrow F\cos 30 - R\cos 61.6 = 0$

$\Sigma F_y = 0$

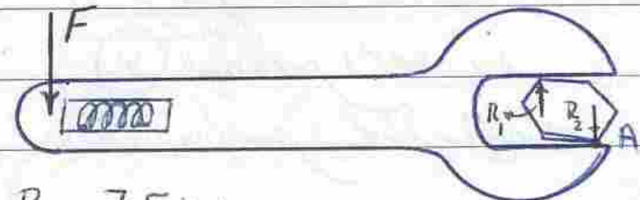
$\rightarrow F\sin 30 + R\sin 61.6 - 100 = 0$

$\rightarrow F = 47.6\,N \;,\; R = 86.62$

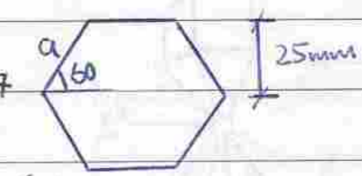
در نقطه A اصطکاک عمود بر R وجود ندارد چون $\Sigma M_O = 0$ پس $f_s.d = 0 \rightarrow f_s = 0$ بنابراین



مثال: سطوح داخلی یک آچار شکل نشان داده شده که از فولاد سخت ساخته شده صیقلی می‌باشد. با توجه به شکل هندسی و چون که تکیه‌گاه‌ها می‌توانند بدون لطمه و تغییر شکل حداکثر نیروی متمرکز برابر 7.5kN را از طرف مهره نشان داده شده تحمل نماید مطلوب است ماکزیمم نیروی F که می‌توان به فاصله 300 mm است به آچار اعمال کرد (فرض کنید در حین مهره گرفتن آچار مقدار کمی باز شده است)



$$a = \frac{25}{\sin 60} = 28.87$$



$R_1 = 7.5\,kN$

$F + R_2 = R_1$

چون نسبتاً فاصله F زیاد است پس مرکز مهره را نقطه اثر R_2 می‌گیریم.

$$\overset{+}{\curvearrowleft}\ \sum M_A = 0 \Rightarrow -R_1 \times 28.87 + F\left(300 + \frac{28.87}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow F = 0.688\ kN$$

۲) تعادل اجسام صلب در فضا (سه بعدی):

الف) شناخت عکس العمل‌ها:

(۱) تماس سطوح اجسام ← ۱) سطح صاف ۲) سطح زبر

(۲) اثر کابل

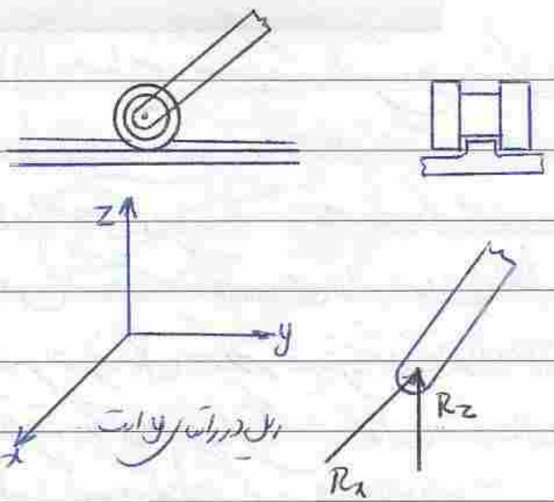
(۳) تکیه‌گاه کروی

(۴) تکیه‌گاه بازویی

۵) تکیه‌گاه چرخ دار روی ریل :

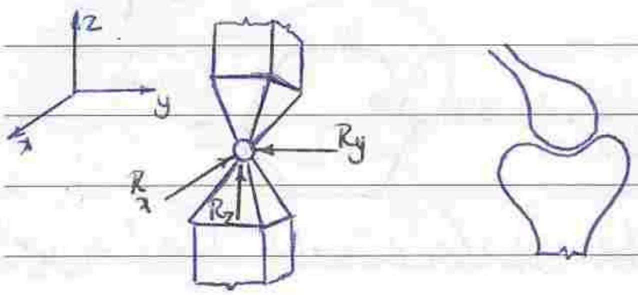
همان تکیه‌گاه غلتکی دو بعدی در ۳ بعد است .

* حول x و z دوران کوچکی داریم .

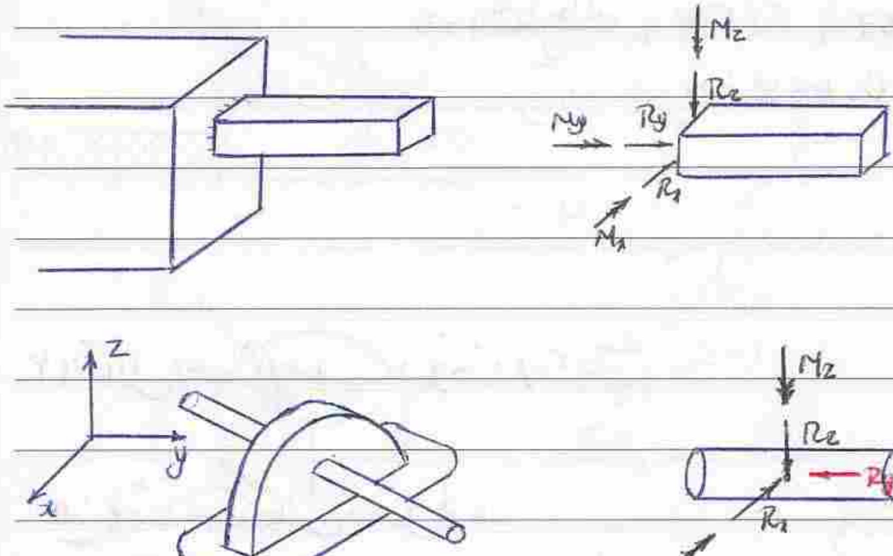


۶) تکیه‌گاه گوی (مفصلی) :

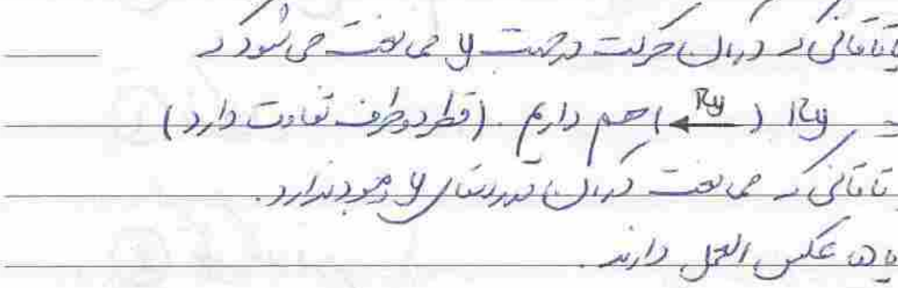
نام دیگر آن کاسه‌ای یا کاسه و ساچمه‌ای است



۷) تکیه‌گاه گیردار :



۸) یاتاقان ها :



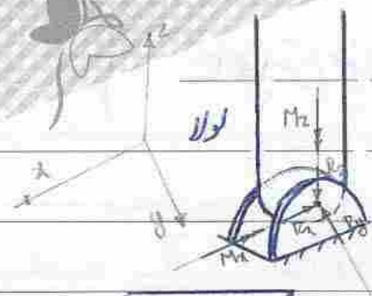
یاتاقان ها دو نوع اند ۱) یاتاقانی که در آن حرکت در جهت y ممانعت می‌شود که R_y هم داریم. ($\xleftarrow{R_y}$) (قطر دو طرف تفاوت دارد)

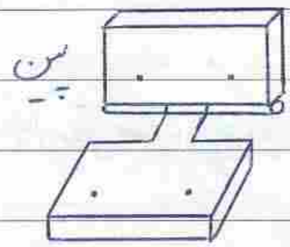
۲) یاتاقانی که ممانعت در آن در راستای y وجود ندارد.

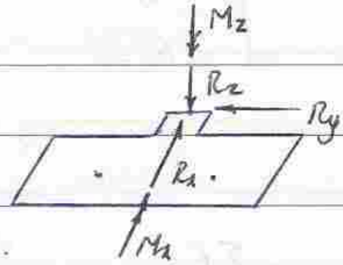
* پس یاتاقان ها بسته به نوعشان ۴ یا ۵ عکس العمل دارند.

۹) لولا یا پین ها:

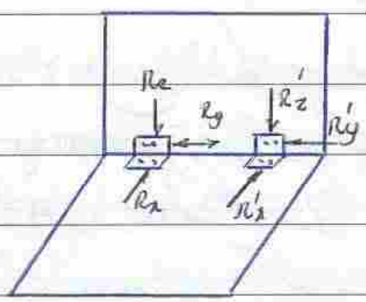
همان تکیه‌گاه مفصلی در سه بعدی است.







* در دو یاتاقان یا دو پین (دو لولا) چون M_z و M_x را تولید می‌کنند می‌توانیم از گشتاورهای عکس‌العمل صرف نظر کنیم و با ۶ معادله ۶ مجهول مسئله را حل کنیم. علت این است که R_x و R_z کوپلی ایجاد می‌کنند که دیگر احتیاجی به M_x و M_z نیست.

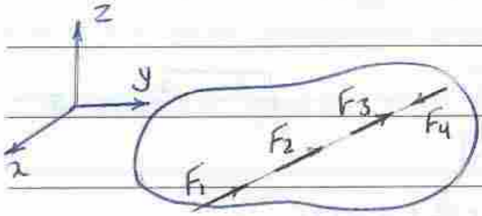


* در کل لولا یا پین یا یاتاقان باید چهار مجهول به کار رود.

ب) شرایط تعادل:

$$M=0,\ R=0 \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x=0 & \sum M_x=0 \\ \sum F_y=0 & \sum M_y=0 \\ \sum F_z=0 & \sum M_z=0 \end{cases}$$

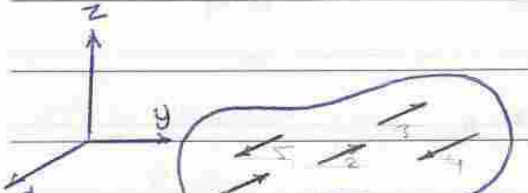
ج) حالات خاص معادلات تعادل:



۱) وقتی همه نیروها در یک راستا باشند.

$\sum F_x=0$

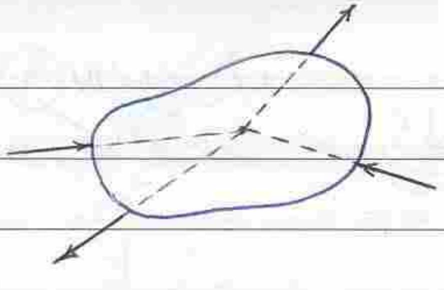
تنها یک معادله به درد می‌خورد.



۲) وقتی همه نیروها با هم موازی باشند.

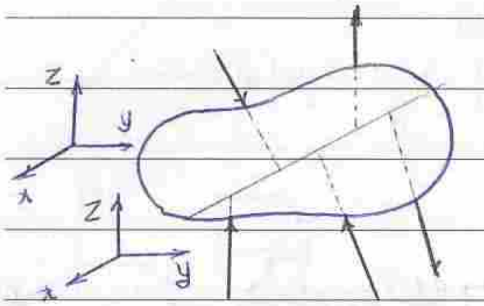
$\sum F_x=0 \quad \sum M_y=0 \quad \sum M_z=0$

فقط سه معادله به درد بخور است.



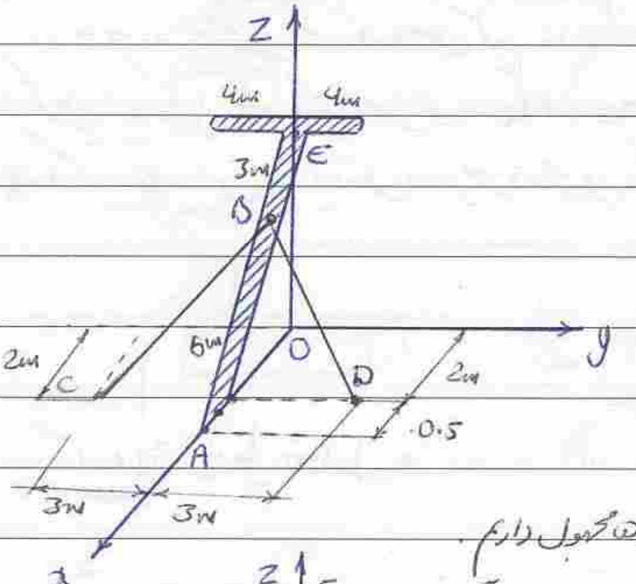
۳) وقتی همه نیروها در یک نقطه متقارب باشند.

$$\begin{cases}\sum F_x=0\\ \sum F_y=0\\ \sum F_z=0\end{cases}$$



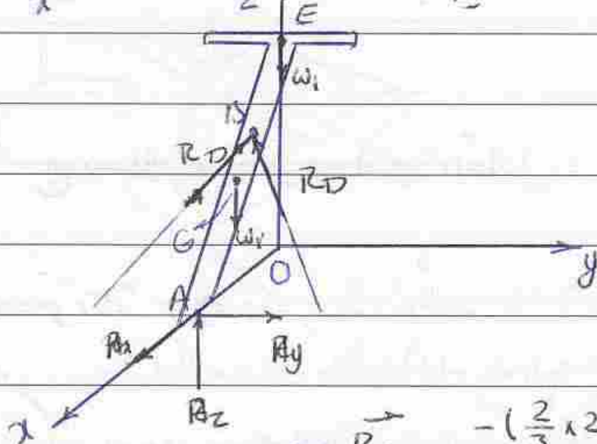
۴) وقتی همه نیروها در یک خط متقارب باشند.

$$\begin{cases}\sum F_x=0\\ \sum F_y=0\\ \sum F_z=0\end{cases}\quad \begin{cases}\sum M_y=0\\ \sum M_z=0\end{cases}$$



مثال: بازوی صلبی متشکل از دو میله جوش شده به جرم 100 kg در هر متر طول توسط یک تکیه‌گاه روی در نقطه A و دو عدد میله یا نیروی BC و BD نگاه داشته شده است. مطلوبست محاسبه عکس العمل نقطه A و نیروهای عکس العمل در میله‌های یا نیروی.

حل: حالت عمومی فضای سه بعدی است پس شش معادله و شش مجهول داریم.



$$\sum \vec{M}_A=0$$

$$\vec{r}_{AB}\times(\vec{R}_C+\vec{R}_D)+\vec{r}_{AE}\times\omega_1+\vec{r}_{AG}\times\omega_2=0$$

$$\vec{R}_C=|R_C|\frac{\vec{CB}}{|\vec{CB}|}\qquad OE=\sqrt{9^2-2.5^2}=8.65$$

$$\rightarrow \vec{R}_C=\frac{-(\frac{2}{3}\times 2.5-0.5)i+3j+(\frac{2}{3}\times 8.65)k}{|\vec{CB}|}|\vec{R}_C|$$

$$\vec{R}_D=|R_D|\frac{\vec{DB}}{|\vec{DB}|}\rightarrow \vec{R}_D=|R_D|\frac{-1.17i-3j+5.77k}{|\vec{DB}|}=|R_d|\frac{-1.17i-3j+5.77k}{6.0}$$

$$R_C=\frac{-1.164i+3j+5.766k}{6.59}\times|\vec{R}_C|$$

$$\vec{r}_{AE} = -2.5\hat{i} + 8.65\hat{k} \qquad \vec{r}_{AB} = \frac{2}{3}\vec{r}_{AE} \qquad \vec{r}_{AG} = \frac{1}{2}(r_{AE})$$

$$r_{AB} = -1.66\hat{i} + 5.77\hat{k}$$

$$r_{AG} = -1.25\hat{i} + 4.325\hat{k}$$

$$\omega_1 = -[(8\times100)\times9.8]\hat{k} = -7840\vec{k}$$

$$\omega_2 = -[(9\times100)\times9.8]\hat{k} = -8820\vec{k}$$

$$R_D = 37.4\times\frac{1}{\overset{5.06}{6.6}}(-1.17i-3j+5.77k) = -6.62i - 16.98j + 32.65\hat{k}$$

$$R_C = 5.67(-1.16\hat{i}+3j+5.76k) = -6.57i + 17.01j + 32.65k$$

$$(-2.6R_C + 2.6R_D)\hat{i} + (2.41R_C + 0.41R_D - 30.66)\hat{j} + (-0.75R_C + 0.75R_D)\hat{k} = .$$

$$R_C = R_D = 37.4 \text{ ton}$$

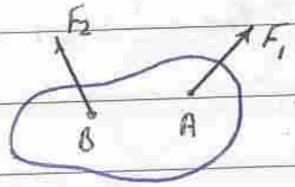
$$\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow Ax\vec{i} + Ay\vec{j} + Az\hat{k} + \vec{R}_C + \vec{R}_D + \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = 0$$

$$Ax i + Ay j + Az k$$

$$+ \hat{i}(-13.19) + \hat{j}(0.5) + k(-10594.71) = 0$$

$$\begin{cases} A_x = 13.19 \\ A_y = 0.5 \\ A_z = 10594.71 \end{cases} \longrightarrow A = 10594.7$$

تعادل جسم دو نیرویی :



جسم دو نیرویی جسمی است که فقط و فقط دو نیرو به آن اعمال شود (مجهول یا غیر مجهول).

$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow$ F_2 از A می‌گذرد

$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow$ F_1 از B می‌گذرد

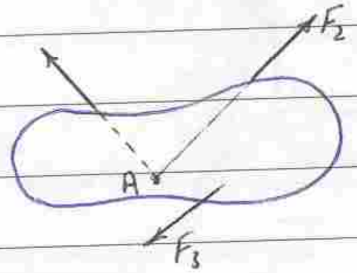
در نتیجه F_1 و F_2 هم راستا هستند.

یعنی اگر جسم دو نیرویی بخواهد در حال تعادل باشد باید حتماً هم راستا باشند.

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_1 = F_2$

نتیجه نهایی : شرط تعادل یک جسم دو نیرویی این است که دو نیرو هم اندازه، هم راستا و مختلف الجهت باشند.

تعادل جسم سه نیرویی :



فرض کنیم سه نیروی F_1 و F_2 و F_3 در یک صفحه و اقتصد به جسمی وارد شود.

$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow$ F_3 از A می‌گذرد

نتیجه نهایی : شرط تعادل جسم سه نیرویی این است که امتداد آنها یک نقطه متقارب باشند.

پایداری و ناپایداری مجموعه‌های مکانیکی صلب (اجسام صلب) :

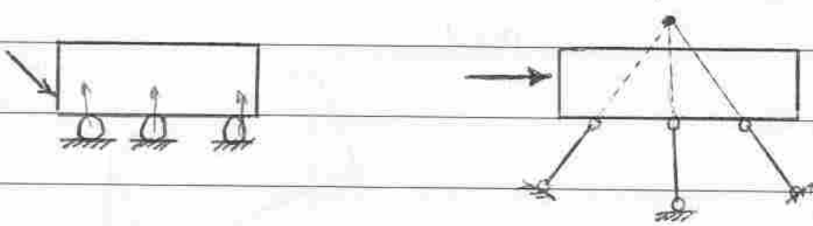
درجات آزادی : مجموعه‌ای مستقل از یکدیگر یا به تعبیر دیگر مختصات مستقلی هستند که موقعیت یک جسم را نسبت به سایر اجسام محیط پیرامون به طور کامل و دقیق مشخص کند.

یک جسم صلب در صفحه دارای ۳ درجه آزادی است و در فضا دارای ۶ درجه آزادی است.

جسم پایدار : جسمی است که کلیه درجات آزادی آن محدود شده باشد.

اگر بخواهیم در صفحه جسم پایدار داشته باشیم باید سه قید (تکیه‌گاه) فراهم شود. در فضا شش قید تکیه‌گاهی باید فراهم شود (حداقل). این مقدار شرط لازم است و کافی نیست.

* به صورت نهایی: شرط لازم و کافی جهت تأمین پایداری جسم صلب در صفحه تأمین حداقل سه قید تکیه‌گاهی و در فضا حداقل شش قید تکیه‌گاهی است که نه با هم موازی و نه متقارب باشند. (منظور از موازی بودن در حالت سه بعدی اعم از آن است که کلیه قیدها تک تک با هم موازی باشند یا در صفحات موازی با هم باشند. و منظور از عدم تقارب در فضا آنست که همه در یک نقطه متقارب نباشند (در فضا)



ناپایداری:
۱) کمّی: ناشی از کمبود تکیه‌گاه
۲) هندسی: ناشی از نامناسب بودن طرز قرار گرفتن تکیه‌گاه‌ها

ناپایداری را که در آن بعد از کمی حرکت پایداری ایجاد می‌شود ناپایداری جزئی گوییم.

معین و نامعین احجام صلب:

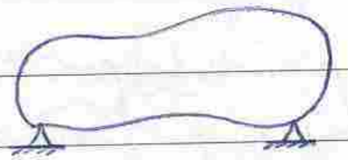
اگر تعداد معادلات مستقل تعادل برای حل مسئله کافی است، سازه مجموعه معین (قابل حل) است. در غیر اینصورت نامعین (غیر قابل حل) است.

مثال: تفاضل بین مجهولات با تعداد معادلات تعادل = n (درجه نامعینی)

۳ معادله ، ۴ مجهول $n=1$

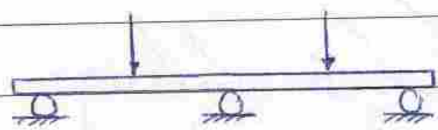
* علت نامعین شدن اضافه داشتن تکیه‌گاه است.

غشای تاق‌ها یا پایدار یا ناپایدار است
اگر ... پایدار است
اگر ... پایدار است
... تعادل ...



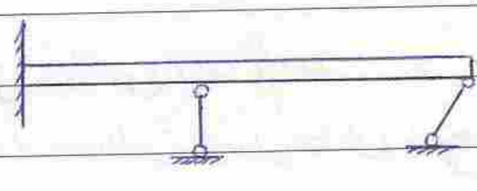
n=1

n=2

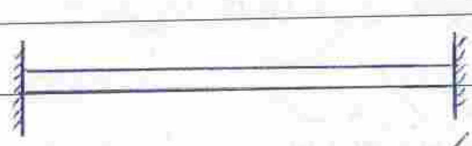


n=1

جسم از نظر کلی ناپایدار است ولی در این حالت خاص پایدار است. پس اجازه داریم درجه معینی و نامعینی کشف کنیم. ۲ تا معادله می‌توان نوشت در حالیکه ۳ مجهول داریم.



n=2



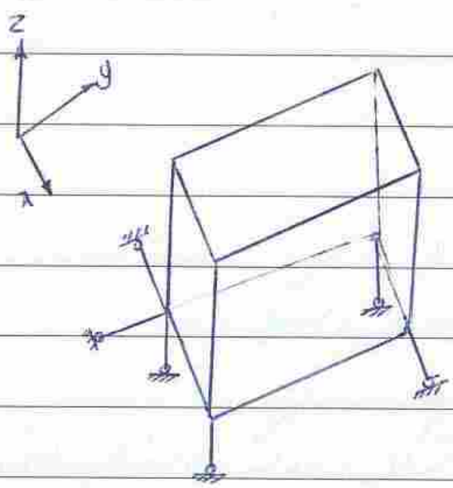
n=3

اگر جسمی ناپایدار باشد دیگر درجه معینی و نامعینی آن کشف نمی‌کنیم.

* هنگامی که ناپایداری هندسی ناشی از موازی بودن تکیه گاه است در یک حالت خاص هم در حالت پایدار است وقتی که برآیند مجموعه نیروهای موازی نیروهای تکیه گاهی باشد.

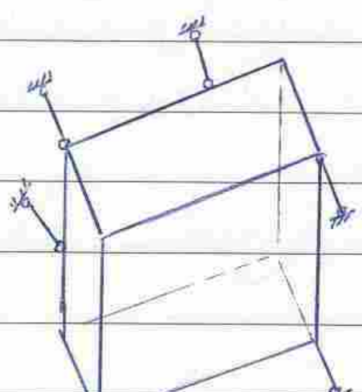
* هنگامی که ناپایداری هندسی ناشی از متقارب بودن نیروهای تکیه گاهی در یک حالت خاص هم در حالت پایدار است و آن وقتی است که برآیند مجموعه نیروها نیز از نقطه تقارب بگذرد.

بیان دیگر معین و نامعین: مجموعه‌هایی هستند که بر روی قیدهای بیش از حداقل لازم برای تأمین پایداری تکیه کرده‌اند نامعین بوده و درجه نامعینی آن معادل تعداد قیدهای مازاد است. در غیر اینصورت معین است.

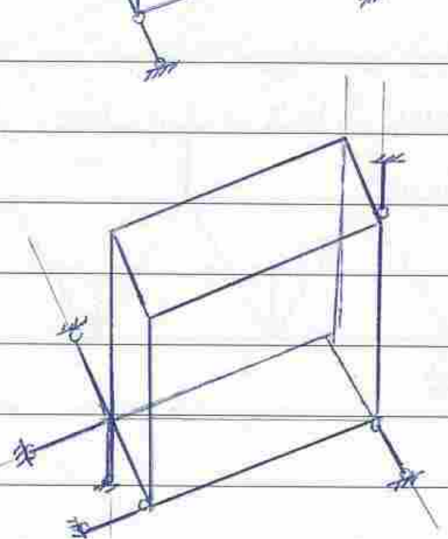


مثال: اجسام نشان داده شده را از جهت پایداری و ناپایداری مقایسه کنید.

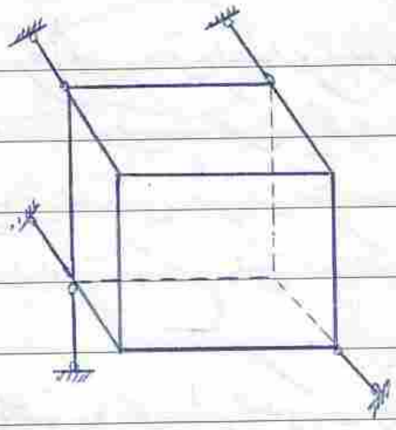
پایدار است. چون شش مولفه تکیه گاهی نه موازی اند و نه متقارب



شکل ناپایدار است. چون ۶ مولفه موازی اند. اما در حالتی که برآیند نیروهای وارده موازی نیروهای تکیه گاهی باشد پایدار می گردد.



ناپایدار است. چون نیروهای تکیه گاهی از یک خط می گذرند. ولی در حالت خاص که برآیند نیروهای وارده هم از همین خط بگذرد پایدار می گردد.



ناپایدار است چون دو صفحه موازی ایجاد کرده است. اما اگر برآیند نیروهای وارده هم موازی صفحه نیروهای تکیه‌گاهی باشد سیستم پایدار می‌گردد.

گر لنگ همی لنگی در شب آدینه‌ها	تا از صدرنشینان جهنم باشی

فصل سوم: تحلیل خرپاها و قاب ها:

تعریف سازه (structure): عبارتست از یک عضو یا مجموعه ای از اجزا که به منظور تحمل و انتقال نیرو به کار می رود.

مراحل تحلیل یک سازه:

۱) بررسی و تأمین پایداری سازه (ناپایدار نباشد)

۲) محاسبه عکس العمل های تکیه گاهی

۳) محاسبه نیروهای داخلی

۴) محاسبه تغییر شکل های سازه

انواع سازه ها از نظر شکل و فرم:

۱) سازه های وزنی (Mass structures):

سازه هایی هستند که مقاومت و پایداری آن ها به وزن شان بستگی دارد.

۲) سازه های قاب بندی (Framed structures):

سازه هایی هستند که از یک سری اعضای لاغر تشکیل شده اند که توسط اتصالاتی به هم وصل شده اند و پایداری آن که در مقابل نیروهای وارده به شکل هندسی آن ها بستگی دارد. وزن کل سازه در مقابل نیروهای اعمال شده به آن مقدار کمی می باشد (خرپاها و قاب ها)

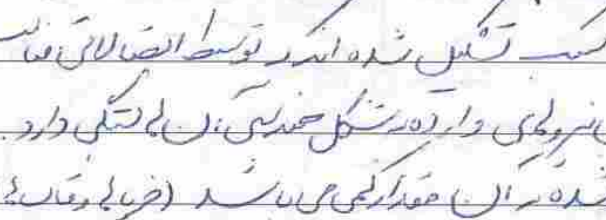
۳) سازه های پوسته ای (shell structures):

سازه هایی هستند به صورت یک صفحه پوسته در مقابل نیروهای وارده مقاومت می کنند مثل سیلوها

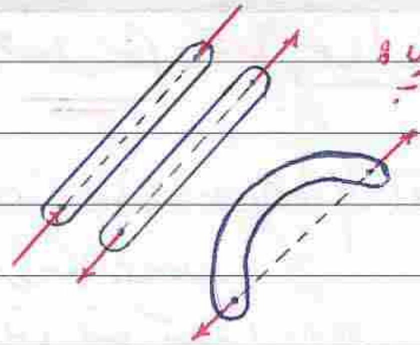
خرپاها (Trusses):

سازه ای است متشکل از تعدادی عضو صلب که توسط مفصل های بدون اصطکاک به یکدیگر متصل شده اند و نیروهای وارده به آن فقط نیروهای متمرکزی هستند که در مفصل ها اثر می کنند (در واقع پس مفصل ها در راستای اعضا هیچ گونه نیرویی اعمال نمی گردد.) بدون اصطکاک

* از وزن اعضا صرف نظر می شود.



نتیجه گیری اساسی از فرضیات مندرج در تعریف خرپا:

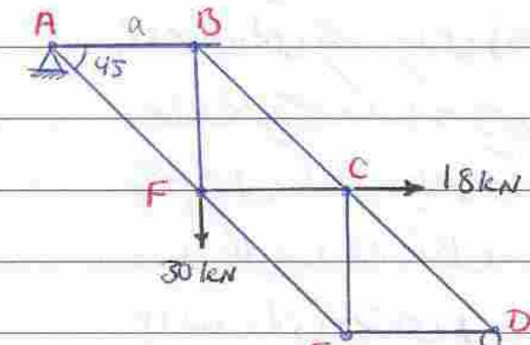


1) اعضای خرپا همگی اعضای دو نیرویی هستند و همگی تحت فشار یا کشش محوری هستند (خمیده نباشد)

روش های تحلیل خرپا:

1) روش گره یا مفصل (Joint Method): اساس روش گره یا مفصل بر آن است که دیاگرام آزاد مفصل های خرپا به طور جداگانه ترسیم می گردد و با اعمال معادلات تعادل مجهولات مربوط به هر دیاگرام آزاد یافت می شود. از آنجایی که دیاگرام آزاد هر مفصل یکی از حالات خاص است که همه نیروهای آن متقارب هستند حداکثر دو معادله مستقل تعادل می توان برای آن نوشت. لذا در ترتیب انتخاب مفصل ها باید دقت گردد که در دیاگرام آزاد هر مفصل حداکثر دو مجهول ظاهر شود.

مثال: در خرپای نشان داده شده نیروهای داخلی کلیه اعضا را بدست آورید.



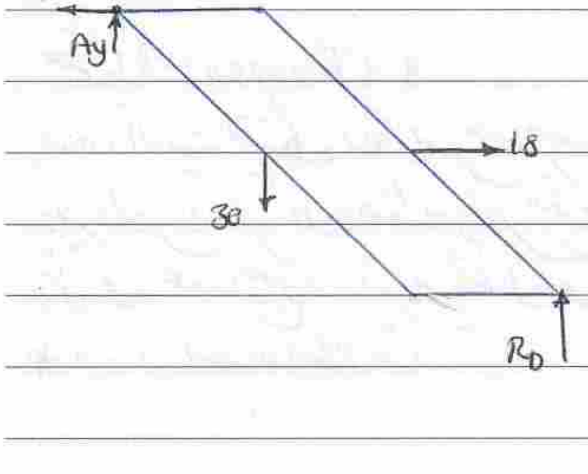
$\sum M_A = 0$

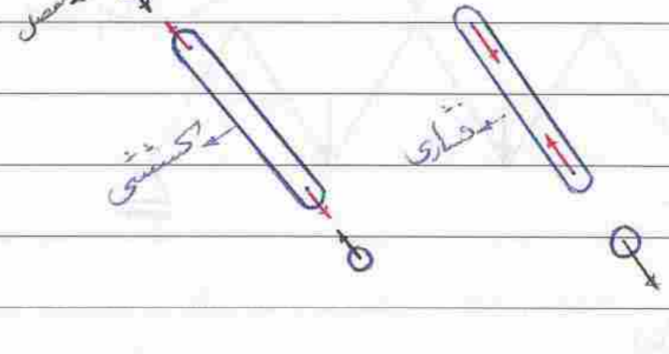
$-30(a) + 18(a) + R_D(3a) = 0$

$\Rightarrow -12a + R_D(3a) = 0 \Rightarrow R_D = 4$

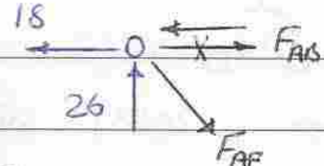
$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 18$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = 26$





مفصل A:



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{AF}\, S45 = 26 \Rightarrow F_{AF} = 36.4\ kN$ (کششی)

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{AB} + 36.4 \times C45 - 18 = 0 \Rightarrow F_{AB} = -8\ kN$ (فشاری)

مفصل B:

$\Sigma F_x = 0 \quad F_{BC}\, C45 = 8 \Rightarrow F_{BC} = 11.2\ kN$ (فشاری)

$\Sigma F_y = 0 \quad F_{BF} = 11.2\, S45 \Rightarrow F_{BF} = 8\ kN$ (کششی)

مفصل F:

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{FE}\, C45 = 8 + 36.4\, C45 - 30$

$\Rightarrow F_{FE} = 5.28\ kN$ (کششی)

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{FC} + 5.28\, C45 = 36.4\, C45 \Rightarrow F_{FC} = 22\ kN$ (کششی)

مفصل C:

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow 18 + 11.2\, C45 = 22 + F_{CD}\, C45$

$\Rightarrow F_{CD} = 5.54\ kN$

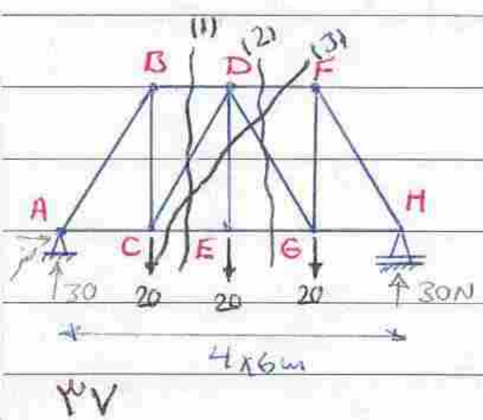
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{CE} + 5.54\, C45 = 11.2\, C45 \Rightarrow F_{CE} = 4\ kN$

مفصل E:

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{ED} = 5.28\, C45 = 3.7\ kN$

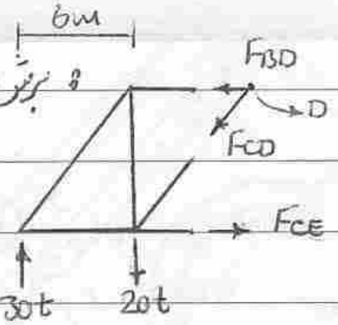
* در این روش در ابتدا واکنش های تکیه گاهی را با استفاده از ۳ معادله تعادلی برای سیستم کل خرپا بدست می آوریم سپس سراغ تک تک اعضا و مفاصل می رویم.

۲) روش مقطع (Section Method): اساس روش مقطع بر این است که با یک برش فرضی کل خرپا را به دو بخش مجزا از هم تقسیم کنیم. سپس با بررسی یکی از آن بخش ها و اعمال معادلات معمول تعادل نیروهای داخلی اعضایی را که توسط آن برش فرضی بریده شده بودند را بدست می آوریم. از آنجا که در هر بخش در حالت کلی حداقل ۳ معادله مستقل تعادل می توان نوشت لذا باید دقت کرد که برش فرضی در جایی زده شود که حداکثر سه عضو مجهول را قطع کند.



مثال: در خرپای نشان داده شده نیروهای داخلی اعضای CE، DE و DF را بدست آورید.

برش (۱)

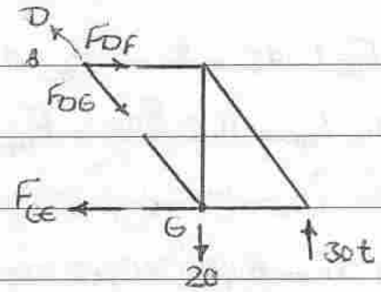


$$\overset{+}{\curvearrowleft}\ \Sigma M_D = 0$$

$$\Rightarrow +20(6) - 30(12) + F_{CE}(6) = 0$$

$$\Rightarrow F_{CE} = 40 \text{ ton}$$

برش (۲)

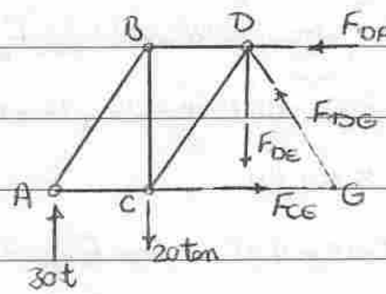


$$\overset{+}{\curvearrowleft}\ \Sigma M_G = 0$$

$$\Rightarrow -F_{DF}(6) + 30(6) = 0$$

$$\Rightarrow F_{DF} = 30 \text{ ton}$$

برش (۲)



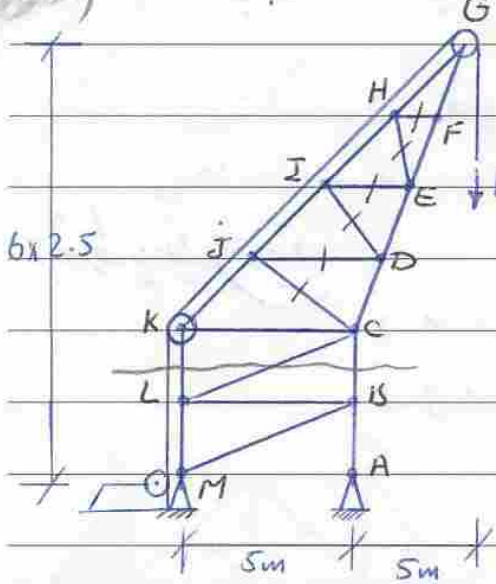
$$\overset{+}{\curvearrowleft}\ \Sigma M_G = 0$$

$$30(6) + F_{DE}(6) + 20(12) - 30(18) = 0$$

$$\Rightarrow F_{DE} = 20 \text{ ton}$$

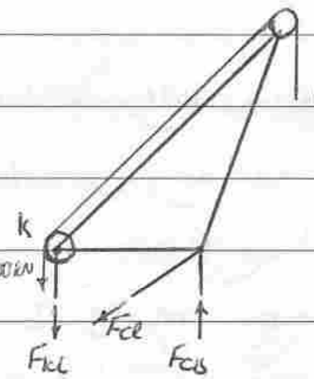
* در این مثال که چند نیرو به پایین خرپا اعمال می‌گردد نیرو در اعضای پایینی خرپا فشاری و در اعضای بالای آن کششی است.

مثال ۵: در خرپای نشان داده شده نیروی اعضای CJ ، CL و CB را بدست آورید. (شعاع قرقره‌ها R می‌باشد)



* در نقطه A تنها یک نیرو وجود دارد

$F_{HF} = F_{HE} = F_{IE} = F_{ID} = F_{JD} = F_{JC} = 0$



$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{CL} = 0$

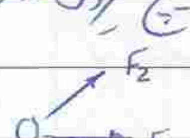
$\sum M_K = 0 \Rightarrow$

$100(R) + F_{CB}(5) - 100(10+R) = 0$

$\Rightarrow F_{CB} = 200$

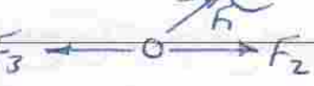
اعضای صفر نیرویی:

۱) اگر به مفصلی از خرپا فقط ۲ عضو متصل باشد (که در یک راستا نباشند) و هیچ نیروی خارجی به آن اعمال نگردد نیروهای داخلی هر دو عضو برابر با صفر خواهد شد.



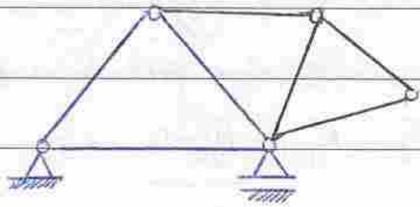
$F_1 = F_2 = 0$

۲) اگر به مفصلی از خرپا فقط ۳ عضو متصل باشد که دو تا از آن‌ها در یک راستا باشند و هیچ نیروی خارجی نیز به مفصل اعمال نگردد نیروی داخلی عضو سوم صفر خواهد بود.



$F_1 = 0$

پایداری و ناپایداری داخلی خرپاها:



خرپای مثلثی پایه یا اولیه

شرط پایداری خرپاها:

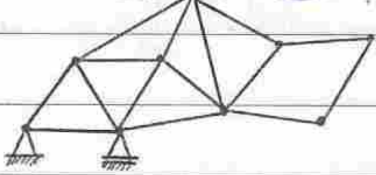
$m-3$: تعداد اعضای اضافه شده به خرپای مثلثی — m : تعداد اعضای خرپا

$2(j-3)$: تعداد مفصل‌های اضافه شده به خرپای مثلثی $\Longrightarrow$ — j : تعداد مفصل‌های خرپا

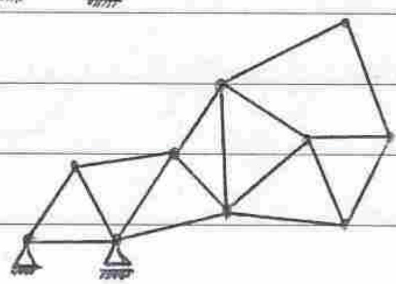
$$m-3 = 2(j-3) \Longrightarrow m = 2j-3$$

تعداد اعضای اضافه شده کمتر از تعداد مفصل‌های اضافه شده است

نتیجه اولیه: اگر $m<2j-3$ باشد خرپا حتماً ناپایدار است، و اگر $m \geq 2j-3$ باشد خرپا یا پایدار است یا ناپایدار. و لذا ضرورت دارد شکل‌بندی و نحوه تشکیل خرپا بررسی شود که آیا خرپا به صورت اضافه شدن‌های دوتایی یک مفصل و دو عضو به خرپای مثلثی پایه تشکیل شده است یا خیر.

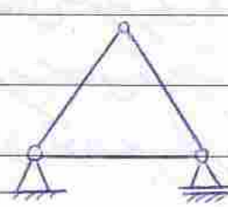


→ ناپایدار



→ پایدار

معینی و نامعینی داخلی خرپاها:



۶ مجهول
۶ معادله

خرپای مثلثی پایه همواره معین است

هر یک مفصلی که اضافه کنیم ۲ تا معادله و ۲ تا مجهول اضافه می‌کند.

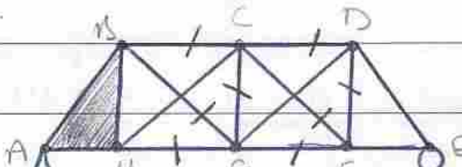
نتیجه‌گیری نهایی بحث: اگر $m<2j-3$ باشد خرپا ناپایدار است. معینی یا نامعینی بررسی نمی‌شود.

۲) اگر $m=2j-3$ باشد خرپا می‌تواند پایدار یا ناپایدار باشد پس باید شبکه‌بندی کنترل شود. اگر پایدار بود معین است.

۳) اگر $m>2j-3$ باشد خرپا می‌تواند پایدار یا ناپایدار باشد پس شبکه‌بندی باید کنترل شود. اما اگر پایدار باشد نامعین است. $m-(2j-3)=$ درجه نامعینی

* خرپاهای بررسی شده اصطلاحاً خرپای ساده نام دارند.

مثال: خرپاهای نشان داده شده را از نظر پایداری و ناپایداری و معینی و نامعینی اعم از خارجی و داخلی کنترل کنید.



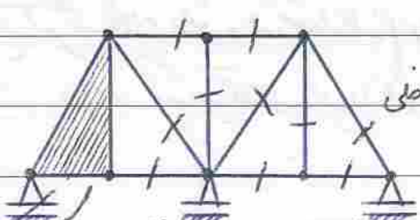
چون پایدار است و $m>2j-3$ پس درجه نامعینی دارد که برابر است با $n=2$

داخلی: $m=15$ $j=8$ $2j-3=13 \Rightarrow m>2j-3$

شبکه‌بندی را چک می‌کنیم که آیا خرپا برابر اضافه شدن پی در پی یک مفصل و دو عضو به خرپای مثلثی ایجاد شده باشد. که اگر اینطور باشد پس پایدار می‌باشد

خارجی: سه قید تکیه‌گاهی داریم که نه متقاربند و نه موازی پس پایدار است

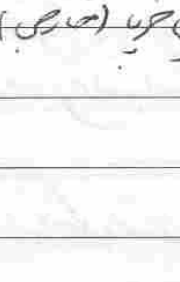
سه تا مجهول و سه تا معادله مستقل داریم پس معین است.



داخلی: $m=13$ $j=8$ $\rightarrow$ $m=2j-3$

از نظر داخلی پایدار است و بنابراین معین است.

خارجی: ناپایدار است چون نیروهای تکیه‌گاهی موازی اند. (در یک حالت خاص پایدار است همچنانکه راستای نیروهای وارده بر خرپا موازی نیروهای قیدهای تکیه‌گاهی باشد. درجه نامعینی خرپا (خارجی) برابر یک است.



$m=6$ $j=4$ $m>2j-3$

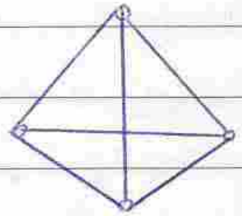
داخلی: نامعین و ناپایدار است (پس از بررسی شبکه‌بندی)

خارجی: معین و پایدار است

در بررسی معینی داخلی 8 معادله داریم 9 مجهول پس نامعین است.

اگر نسبت معینی، نامعینی یا پایداری، ناپایداری را بررسی کنید باید مطالب جمع‌بندی نهایی را شرح دهیم

آشنایی با خرپاهای فضایی:



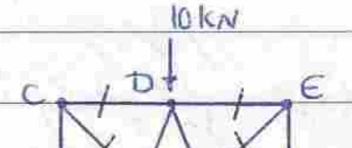
خرپای چهاروجهی پایه

می‌توان با اضافه کردن یک مفصل و سه عضو خرپای پایداری ایجاد نمود.

$m-6$: تعداد اعضای اضافه شده به خرپای چهاروجهی m : تعداد اعضای خرپا

$j-4$: تعداد مفاصل اضافه شده به خرپای چهاروجهی j : تعداد مفصل‌های خرپا

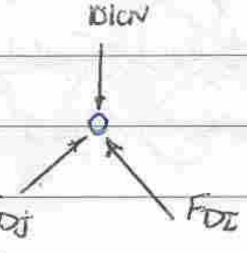
$$\Rightarrow \quad m-6 = 3(j-4) \quad \Rightarrow \quad m = 3j-6$$



مثال: مطلوبست محاسبه نیروهای داخلی اعضای خرپا.

ناپایداری داخلی خرپا بر اثر اضافه شدن یک مولفه تکیه‌گاهی پایدار شده است
(کمبود پایداری داخلی را توسط یک عامل خارجی تأمین کردیم)
اگر قیدهای تکیه‌گاهی بیش از مقدار لازم برای پایداری باشد آنگاه نامعین است. در اینجا قیدهای تکیه‌گاهی بیش از مقدار لازم نیست پس معین است.

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{DJ} = F_{DI}$$

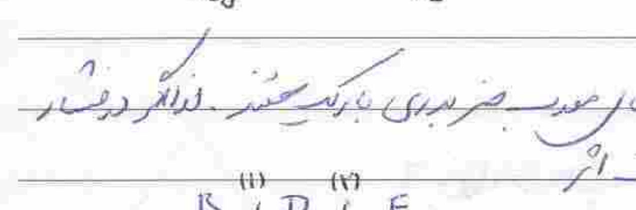


$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{DJ} = F_{DI} = 5.77\,kN$$

$$F_{JK} = F_{AK} = F_{HI} = F_{HG} = 5.77\,kN$$

این خرپا یک خرپای مرکب است.

مثال: خرپای شکل نشان داده شده مفروض است: اعضای مورب ضربدری بار کششی هستند. لذا اگر در فشار واقع شوند کمانش می‌کنند (باری نمی‌توانند تحمل کنند). تحت اثر بارگذاری نشان داده نیرو را در اعضای قطری کششی و فشاری تعیین کرده و همچنین نیروی عضو DE را محاسبه نمایید.



(به این اعضای بار کششی کابل می‌گویند)

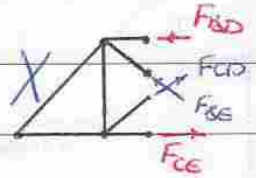
چون تمام نیروها به سمت پایین هستند پس عضو AH می‌خواهد فشرده و عضو BF کشیده شود.

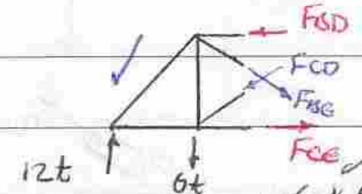
از اینجا می‌دانیم در عضوهای بالایی کشش دارند یا فشار.

$\overset{+}{\curvearrowleft} \sum M_A = 0$

$A_y = 12t \quad , \quad R_H = 15t$

برش ۱

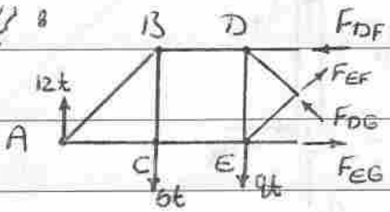




چون F_{CD} فشاری است پس در نظر می‌گیریم.

$\Rightarrow \sum F_y = 0 \Rightarrow \underline{F_{BE} = 10.8t}$

برش (۲)



چون F_{DG} فشاری است پس در نظر می‌گیریم.

$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{EF} \sin 33.69 + 12 = 9 + 6$

$\Rightarrow \underline{F_{EF} = 5.4t}$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{DG} = 0 \quad , \quad F_{EF} =$

$\underline{F_{DE} = 0}$ در مفصل D که سه عضو است که دو عضو در یک راستا اند.

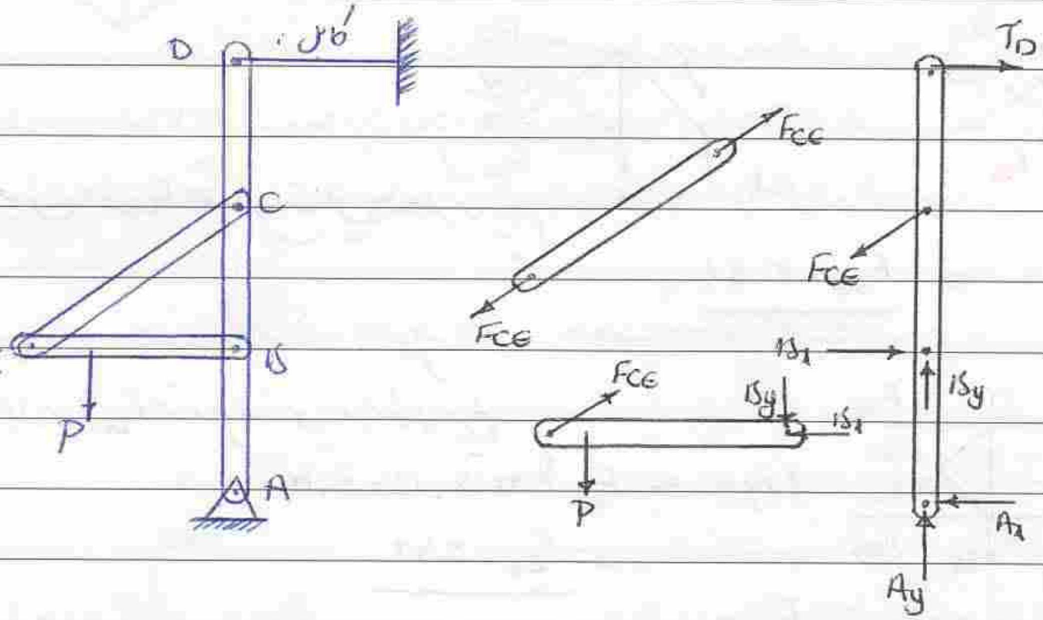
* هرگاه در خرپا دو عضو جدید در مفصل جدید متصل شوند و خود نیز به مفصل جدید به هم متصل گردند خرپایی را که به این طریق ساخته می‌شود خرپای ساده می‌نامند. برای تحلیل کردن خرپای ساده از یک مثلث شروع می‌کنیم و هر دو عضو و مفصل نیز را اضافه می‌کنیم.

نکته: برای رسم دیاگرام آزاد هر یک از اعضای یک **قاب** ما ابتدا اعضای دو نیرویی را در نظر می‌گیریم سپس سراغ اعضای چند نیرویی می‌رویم. در اعضای چند نیرویی مثلاً در یک نقطه مفصل دار چون جهت و مقدار نیروهای وارده معلوم نیست این نیروها را با مولفه‌های x و y نشان داده‌ام.

قاب‌ها (Frames):

قاب‌ها سازه‌هایی هستند که حداقل دارای یک عضو چند نیرویی باشند. (این ویژگی است که قاب را از خرپا متمایز می‌کند.)

مثال:

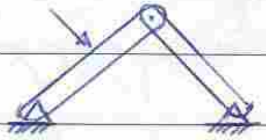


در اینجا ۶ مجهول و ۷ معادله داریم که یک معادله برای عضو CE است و بدرد نمی‌خورد.

انواع قاب‌ها:

صلب: قاب‌هایی هستند که در صورتیکه از تکیه‌گاه‌های خود منفک شوند صلب باقی می‌مانند و هندسه داخلی آن‌ها تغییر نمی‌کند. (قاب شکل)

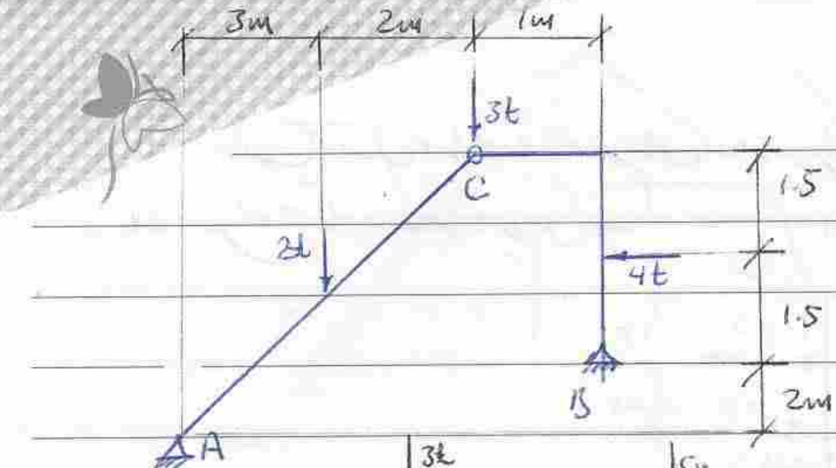
غیر صلب: قاب‌هایی هستند که در صورت انفکاک از تکیه‌گاه‌ها شکل اولیه آن‌ها بهم می‌ریزد و تغییر شکل می‌یابد و پایداری داخلی آن‌ها توسط عکس‌العمل‌های تکیه‌گاه‌های خارجی تأمین شده است.

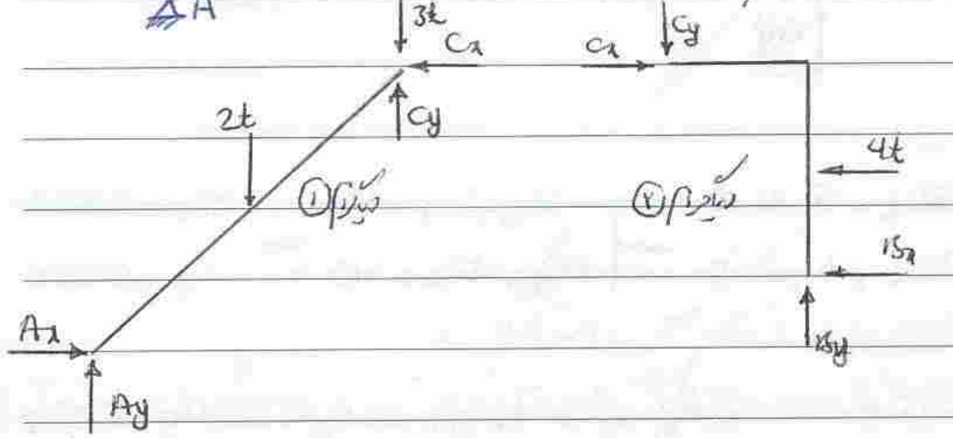


روش‌های تحلیل قاب‌ها: جهت تحلیل قاب‌های صلب ابتدا با رسم دیاگرام آزاد کل قاب عکس‌العمل‌های دیاگرام آزاد را بدست و سپس با جدا کردن تک‌تک اعضا از یکدیگر نیروهای داخلی بین اعضا را بدست می‌آوریم ولی برای تحلیل قاب‌های غیر صلب باید ابتدا کلیه اعضا را از یکدیگر و کلیه اعضا جدا کنیم و سپس با اعمال کلیه معادلات تعادل عکس‌العمل کلیه نیروهای داخلی را توأماً بدست آوریم.

مثال ٥ - برای قاب نشان داده شده عکس العمل های خارجی تکیه گاه ها و نیروهای داخلی در مفصل C را حساب کنید.

یک قاب غیر صلب است. پس ابتدا کلیه اعضا را جدا می کنیم و با اعمال شرط های تعادل نیروها را پیدا می کنیم.

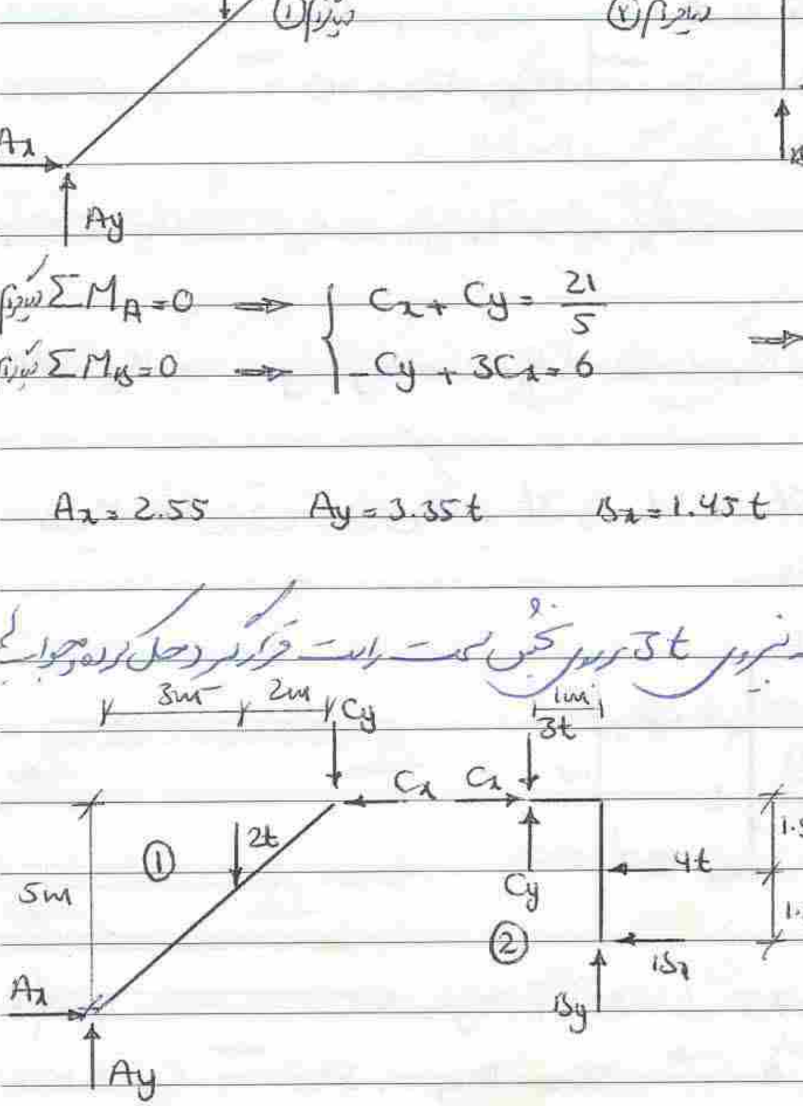




$$\text{عضو ۱: } \Sigma M_A=0 \Rightarrow \begin{cases} C_x + C_y = \frac{21}{5} \\ -C_y + 3C_x = 6 \end{cases} \Rightarrow C_x = 2.55t \quad C_y = 1.65t$$
$$\text{عضو ۲: } \Sigma M_B = 0$$

$A_x = 2.55 \quad A_y = 3.35t \quad B_x = 1.45t \quad B_y = 1.65t$

تمرین ۱۰ مثال فوق را مجدداً با این فرض که نیروی 3t در سمت راست مفصل قرار گیرد حل کرده و جواب ها را مقایسه کنید. $C_y = 1.35$

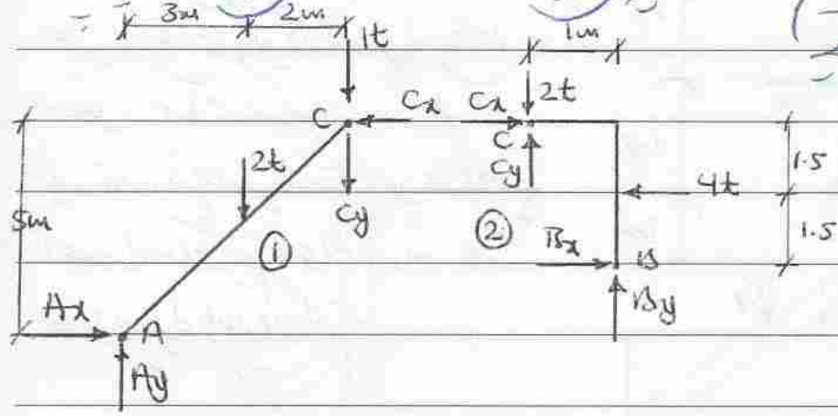


$$\begin{matrix} \Sigma M_A = 0 \Rightarrow \\ \Sigma M_B = 0 \Rightarrow \end{matrix} \begin{cases} 5C_x - 5C_y = 6 \\ -3C_x - C_y = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5C_x - 5C_y = 6 \\ 3C_x + C_y = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5C_x - 5C_y = 6 \\ 15C_x + 5C_y = 45 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} C_y = 1.35t \\ C_x = 2.55t \end{matrix}$$

$\rightarrow \Sigma F_{x_1} = 0 \Rightarrow A_x = 2.55t \qquad \Sigma F_{y_1} = 0 \Rightarrow C_y + 2 = A_y \Rightarrow A_y = 3.35t$

$\Sigma F_{y_2} = 0 \Rightarrow B_y + C_y = 3 \Rightarrow B_y = 1.65t \quad \Sigma F_{x_2} = 0 \Rightarrow C_x = 4 + B_x \Rightarrow B_x = -1.45t$

تمرین ۲: مثال ۲ را مجدداً با این فرض که نیروی متمرکز 3t مقدار 1t رو به پایین سمت چپ و 2t رو به سمت راست قرار گیرد حل کنید.

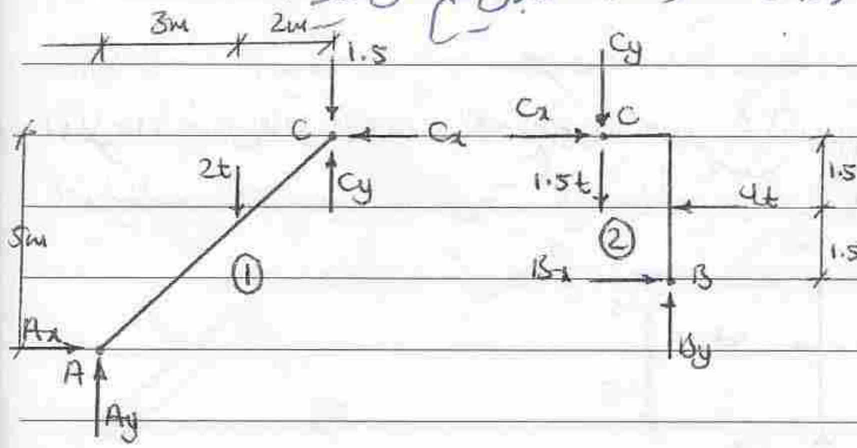


$$\sum M_A=0 \Rightarrow -5C_y+5C_x-5-6=0$$
$$\sum M_B=0 \Rightarrow -C_y-3C_x+6+2=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} -5C_y+5C_x=11 \\ 5C_y+15C_x=40 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} C_x=2.55t \\ C_y=0.35t \end{matrix}$$

$$\rightarrow \sum F_{x_1}=0 \Rightarrow A_x=2.55t \qquad \sum F_{y_1}=0 \Rightarrow 1+C_y+2=A_y \Rightarrow A_y=3.35t$$

$$\rightarrow \sum F_{x_2}=0 \Rightarrow C_x+B_x=4 \Rightarrow B_x=1.45t \quad \sum F_{y_2}=0 \Rightarrow B_y+C_y=2 \Rightarrow B_y=1.65t$$

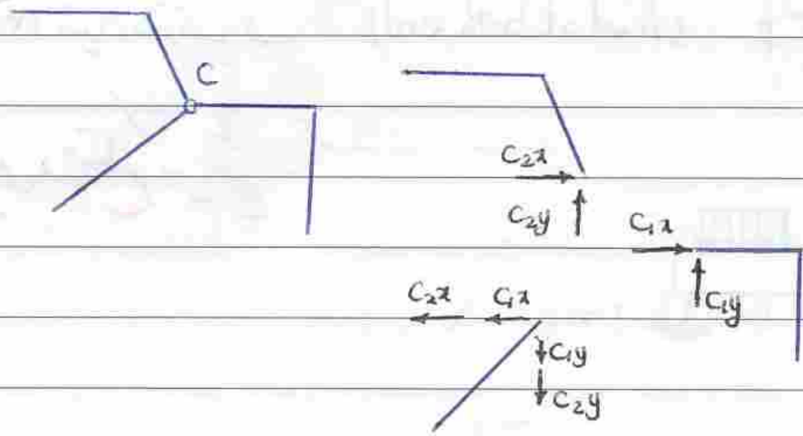
تمرین ۳: مثال فوق را با فرض اینکه 3t را به 1.5t و 1.5t تبدیل کنیم حل کنید.



$$\sum M_A=0 \Rightarrow 5C_x+5C_y=6+7.5 \qquad 5C_x+5C_y=13.5 \qquad C_x=2.55t$$
$$\sum M_B=0 \Rightarrow C_y-3C_x=-1.5-6 \Rightarrow 15C_x-5C_y=+37.5 \Rightarrow C_y=0.15t$$

$$\sum F_{x_1}=0 \Rightarrow A_x=2.55t \qquad \sum F_{y_1}=0 \Rightarrow A_y+C_y=1.5+2 \Rightarrow A_y=3.35t$$

$$\sum F_{x_2}=0 \Rightarrow C_x+B_x=4 \Rightarrow B_x=1.45t \quad \sum F_{y_2}=0 \Rightarrow C_y+1.5=B_y \Rightarrow B_y=1.65$$



فصل چهارم: نیروهای داخلی در سازه‌های معین استاتیکی:
(Internal forces in statically determinate structures)

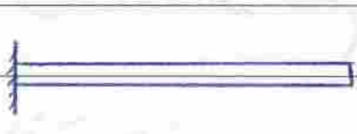
تیر (beam): عبارتست از عضو سازه‌ای که نیروهای وارده را از طریق خمشی که در آن ایجاد می‌شود تحمل می‌کند.

انواع تیرها:

الف) تیرهای معین:

۱) تیر ساده (simply_suported)

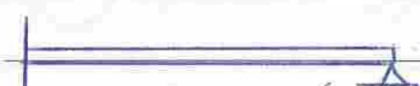
۲) تیر ساده کنسولی (overhanging)



۳) تیر کنسولی یا طره‌ای (cantilever)
گیردار.

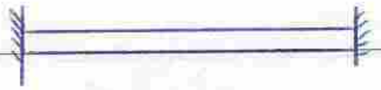
ب) تیرهای نامعین:

۱) تیر ممتد، سراسری، پیوسته، سرتاسری
(continuous beam)



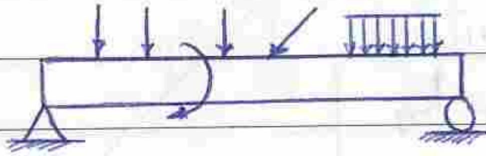
۲) تیر کنسول گیردار، کنسول ساده
(fixed_simply)

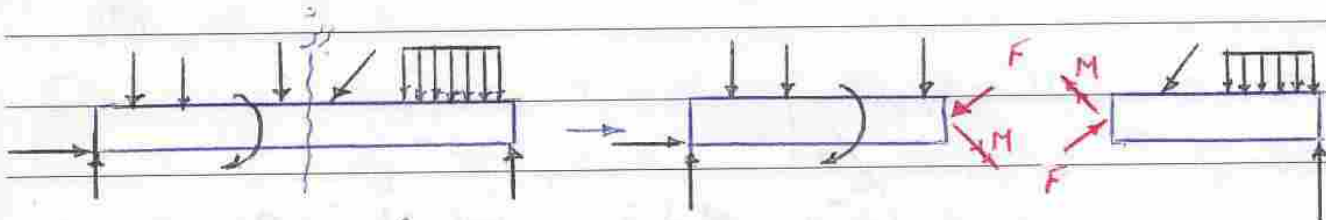
بدون غلتکی هم می‌تواند باشد



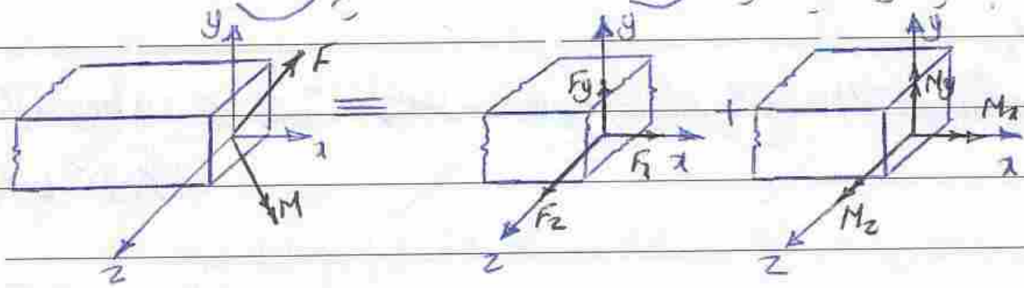
۳) تیر دو سر گیردار (fixed at both end)

نیروهای داخلی در مقطع یک تیر:





در مقطع هر عضو چند نیروی (تیر) نیروهای داخلی عبارتند از یک نیروی F و گشتاور M .



F_x: نیروی محوری axial force M_x: گشتاور پیچشی Torsion Moment

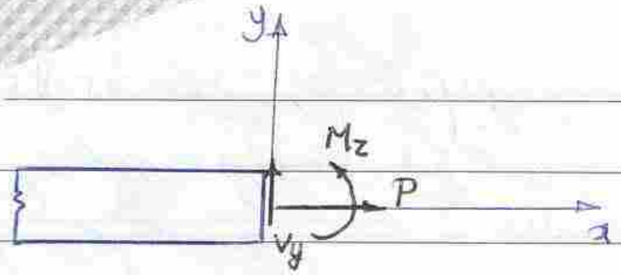
F_y, F_z: نیروی برشی shear force M_y, M_z: گشتاور خمشی bending Moment

من بعد به گشتاور ممان یا لنگر میگوییم.

$F_x \rightarrow P$ $M_x \rightarrow T$

$F_y, F_z \rightarrow V_y, V_z$ یا Q $M_y, M_z \rightarrow M_y, M_z$

حالت خاص دو بعدی:

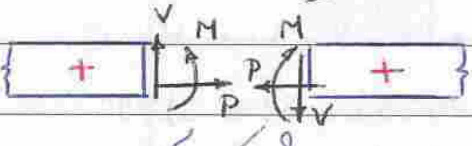


در صفحه سه تا نیرو داریم. (اندیس ها را حذف می کنیم)

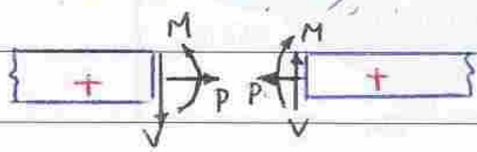
قرارداد جهات مثبت برای نیروهای داخلی تیرها:

الف) سه بعدی: قرارداد مثبت دقیقاً منطبق بر جهات مثبت محورهای دکارتی (کارتزین) است.

ب) دو بعدی:
۱) دقیقاً منطبق بر جهات مثبت دستگاه کارتزین



۲) مانند قرارداد اول با این تفاوت در جهت نیروی برشی عکس آن باشد.



** P و M هم علامت و V علامتی مخالف P و M دارد **

* جهت نیروی برشی در مسائل طراحی مسئلی و مشکل نیست بنابراین دو قرارداد وجود دارد.

* از این به بعد از قرارداد دوم استفاده می کنیم.

نحوه رسم دیاگرام های نیروهای داخلی در طول یک تیر:

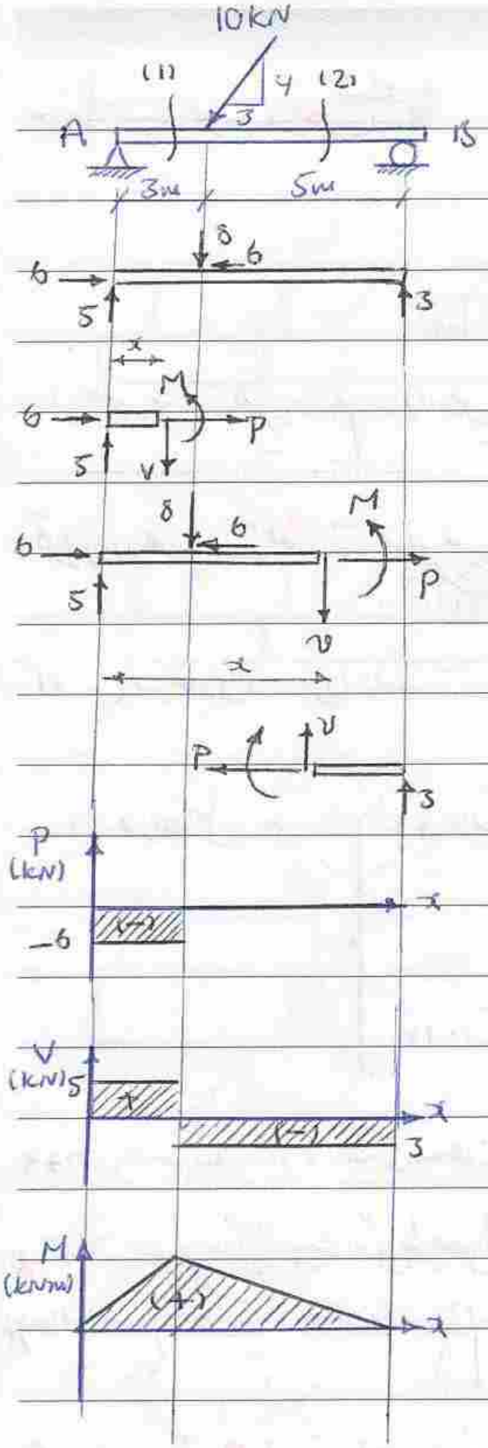
۱) محاسبه عکس العمل های تکیه گاهی در صورت لزوم.

۲) ایجاد مقطع فرضی در تیر و رسم دیاگرام آزاد یکی از بخش های تیر با رعایت جهات قرارداد مثبت برای نیروهای داخلی.

۳) اعمال معادلات تعادل برای دیاگرام آزاد فوق و یافتن نیروهای داخلی در آن مقطع.

۴) انجام مراحل ۲ و ۳ برای کلیه بخش هایی از تیر که بین نیروهای متمرکز، گشتاورها و محدوده بارهای گسترده وصل و انتهای بارهای گسترده قرار دارد.

مثال ۱: مطلوبست رسم دیاگرام های تغییرات نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی در طول تیر نشان داده شده.



$\sum M_A = 0 \Rightarrow -(8)(3) + B_y(8) = 0$

$\Rightarrow B_y = 3\ kN$

$\Rightarrow A_y = 5\ kN$

$A_x = 6\ kN$

برش (۱): $\sum F_x = 0 \Rightarrow P = -6$

$0 \leq x \leq 3$ $\quad \sum F_y = 0 \Rightarrow V = 5$

$\sum M = 0 \Rightarrow M - 5x = 0 \Rightarrow M = 5x$

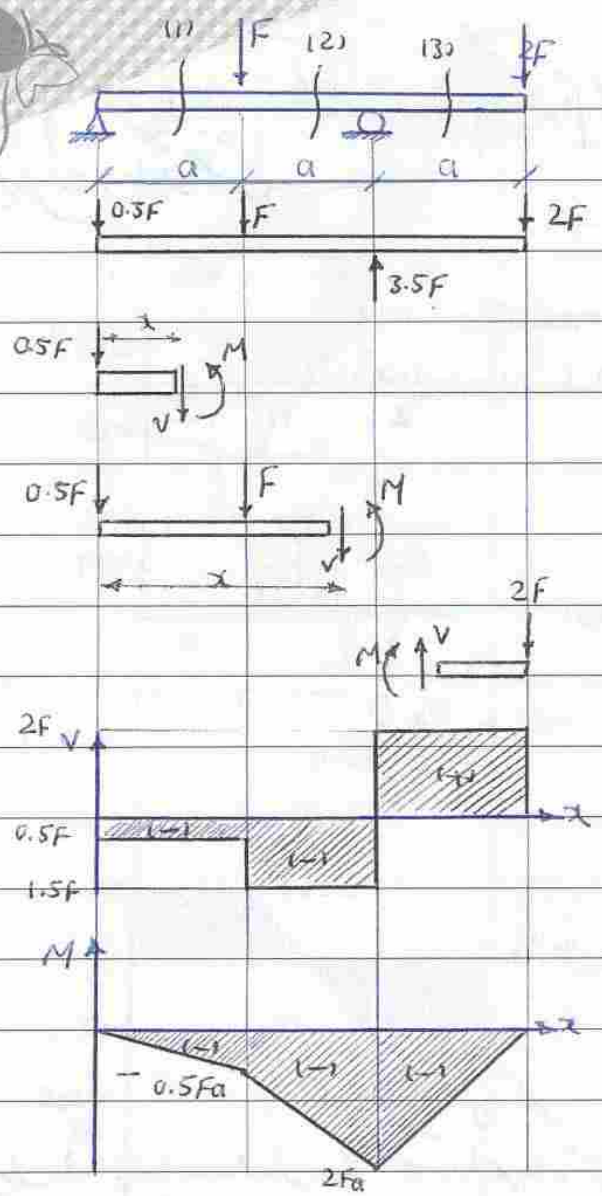
برش (۲): $\sum F_x = 0 \Rightarrow P = 0$

$3 \leq x \leq 8$ $\quad \sum F_y = 0 \Rightarrow V = 5 - 8 \Rightarrow V = -3$

$\sum M = 0 \Rightarrow M - 5x + 8(x-3) = 0$

$\Rightarrow M = -3x + 24$

مثال ۲ : مطلوبست رسم دیاگرام های تغییرات نیرو برشی و لنگر خمشی.



برش (۱) : $\sum F_y=0 \Rightarrow V=-0.5F$

$\sum M_{(1)}=0 \Rightarrow M=-0.5Fx$

برش (۲) : $\sum F_y=0 \Rightarrow V=-1.5F$

$\sum M_{(2)}=0 \Rightarrow M+0.5Fx+F(x-a)=0$

$\Rightarrow M=-1.5Fx+F.a$

برش (۳) : $\sum F_y=0 \Rightarrow V=2F$

$\sum M=0 \Rightarrow M=-2F(3a-x)$

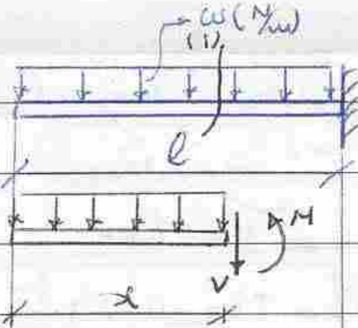
۱) در دیاگرام برشی در زیر محل اعمال نیروی متمرکز در تیر همواره انفصال داریم.

۲) میزان انفصال هم به اندازه همان نیروی انفصال است.

۳) در دیاگرام لنگر خمشی در محل اعمال نیروی متمرکز در تیر همواره شکستگی داریم.

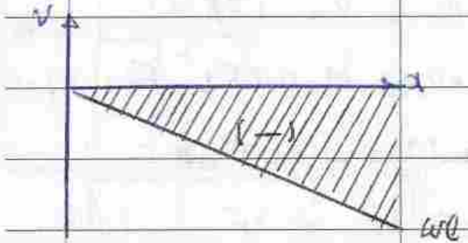
۴) معادله نیروی برشی مشتق معادله لنگر خمشی است.

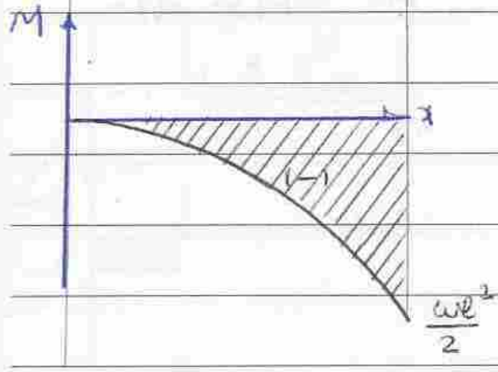
مثال ۳: مطلوبست رسم دیاگرام های تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی.



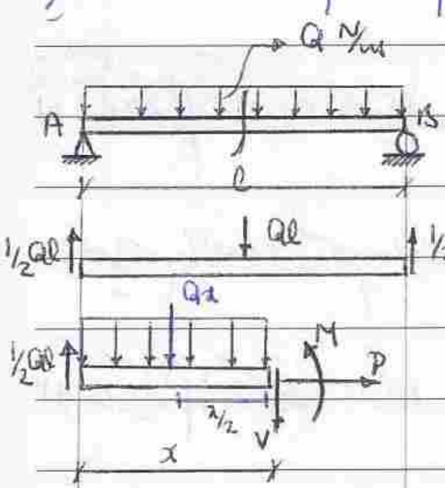
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V = -\omega x$$

$$\sum_{(1)} M = 0 \Rightarrow M = -\frac{\omega x^2}{2}$$





تمرین: تیری به طول l تحت اثر بار یکنواخت $Q\,N/m$ داریم. دیاگرام لنگر خمشی و نیروی برشی را بدست آورید.



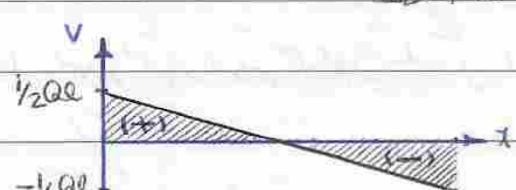
$$\sum M_A = 0 \quad -Ql(l/2) + B_y(l) = 0 \Rightarrow B_y = \frac{1}{2} Ql$$

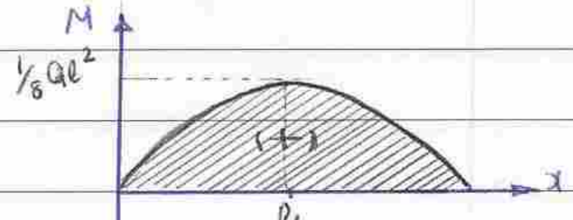
برش:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V = \frac{1}{2} Ql - Qx$$

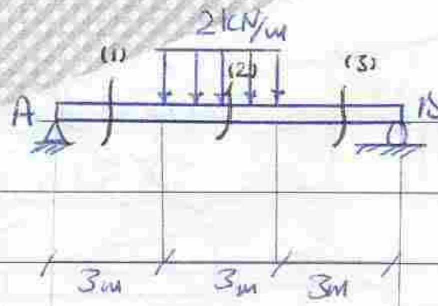
$$\sum M = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} Ql(x) + M + Qx(x/2) =$$

$$\Rightarrow M = \frac{1}{2} Qx(l - x)$$



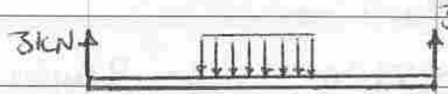


مثال: مطلوب است رسم دیاگرام های تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی.

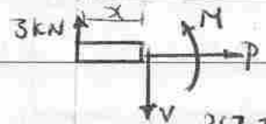


$$\Sigma M_A=0 \Rightarrow -(2\times3)\times4.5+9B_y=0$$

$$\Rightarrow B_y=3kN$$



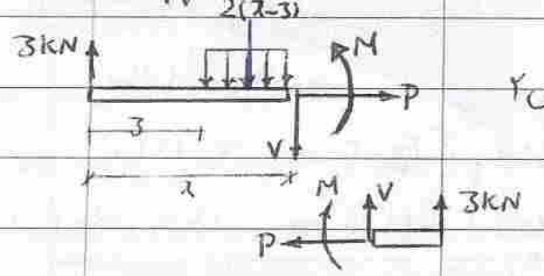
$$\Sigma F_y=0 \Rightarrow A_y=3kN$$



برش ۱:

$$\Sigma F_y=0 \Rightarrow V=3kN$$

$$\Sigma M=0 \Rightarrow -3x+M=0 \Rightarrow M=3x$$



برش ۲:

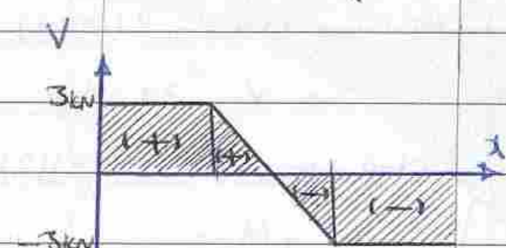
$$\Sigma F_y=0 \Rightarrow 3-2(x-3)-V=0$$

$$\Rightarrow V=-2x+9$$

$$\Sigma M=0 \Rightarrow -3x+\left(\frac{x-3}{2}\right)(x-3)2+M=0$$

$$\Rightarrow M=3x-(x-3)^2$$

$$\Rightarrow M=-x^2+9x+9$$

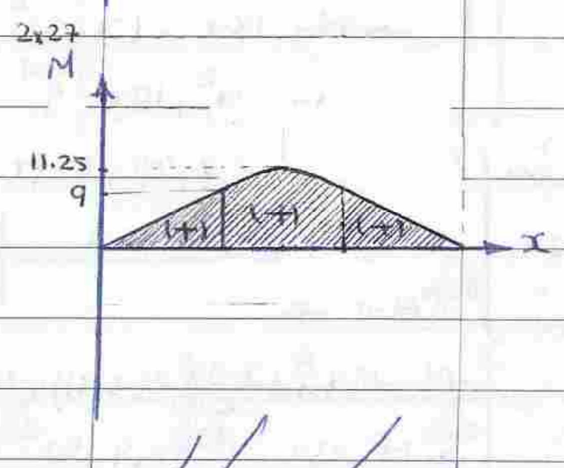


برش ۳:

$$\Sigma F_y=0 \Rightarrow V=-3kN$$

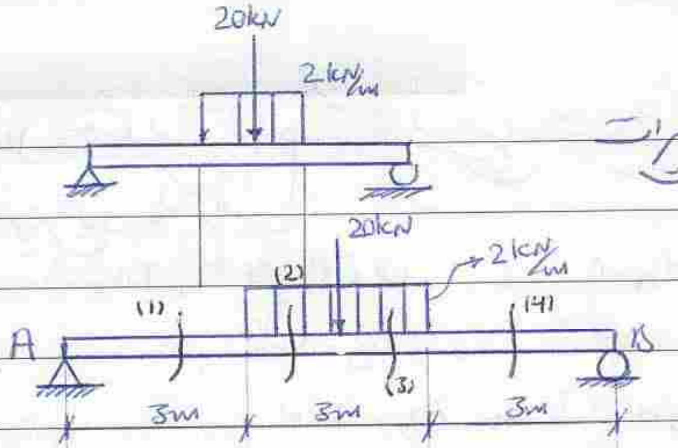
$$\Sigma M=0 \Rightarrow 3(9-x)-M=0$$

$$\Rightarrow M=27-3x$$



نکته بسیار مهم: اگر در قسمتی از تیر بار گسترده داشته باشیم می توانیم برای محاسبه واکنش در تکیه گاه ها این بار گسترده را به بار متمرکز تبدیل کنیم. ولی برای محاسبه نیروهای داخلی در تیر (در صورتی که محل برش محل اعمال نیروی گسترده باشد) از این جایگزینی استفاده نمی کنیم.

مثال: مطلوبست رسم دیاگرام های تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی.



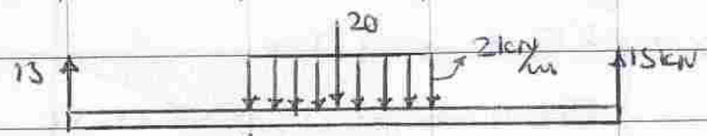
$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow$

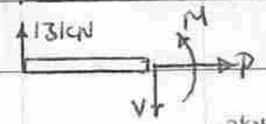
$-4.5(20+2\times 3)+9B_y=0$

$\Rightarrow B_y = 13\,kN$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y + 13 = 20+6$

$\Rightarrow A_y = 13\,kN$

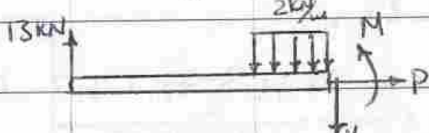




برش (1): $0 \le x \le 3$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V = 13\,kN$

$\Sigma M = 0 \Rightarrow -13x + M = 0 \Rightarrow M = 13$



برش ۲: $3 \le x \le 4.5$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 13 = V + 2(x-3)$

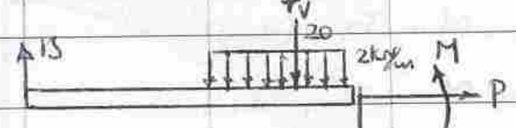
$\Rightarrow V = -2x + 19$

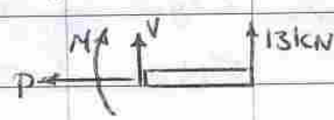
$\Sigma M = 0 \Rightarrow -13x + \left(\frac{x-3}{2}\right)(2)(x-$

$+M=0$

$\Rightarrow M = 13x - (x-3)^2$

$\Rightarrow M = -x^2 + 19x - 9$ $-2x+19$





برش ۳: $4.5 \le x \le 6$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 13 = V + 20 + (2(x-3)$

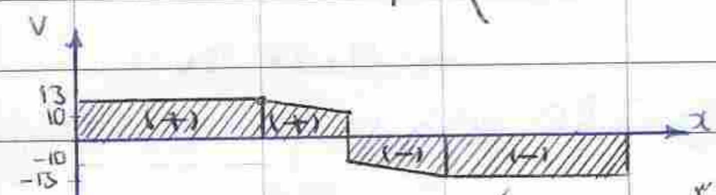
$\Rightarrow V = -2x - 1$

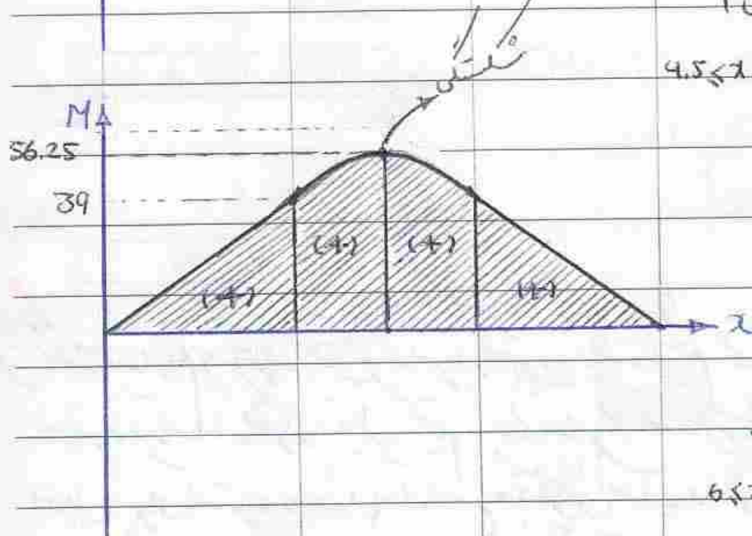
$\Sigma M = 0 \Rightarrow$

$M - 13x + \left(\frac{x-3}{2}\right)(2(x-3)) + 20(4.$

$\Rightarrow M - 13x + x^2 - 6x + 9 - 90 + 20x$

$\Rightarrow M = -x^2 - x + 81$





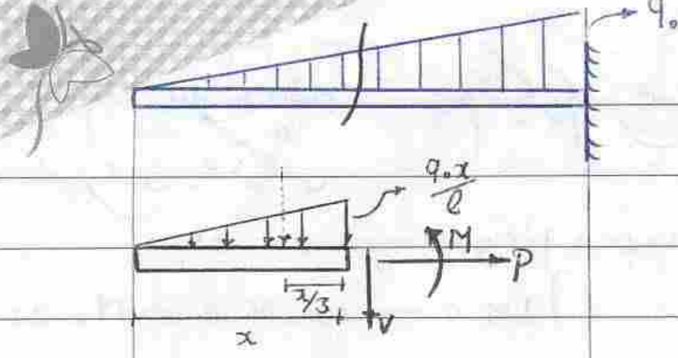
برش ٤: $6 \le x \le 9$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V = -13\,kN$

$\Sigma M = 0 \Rightarrow -M + 13(9-x) = 0$

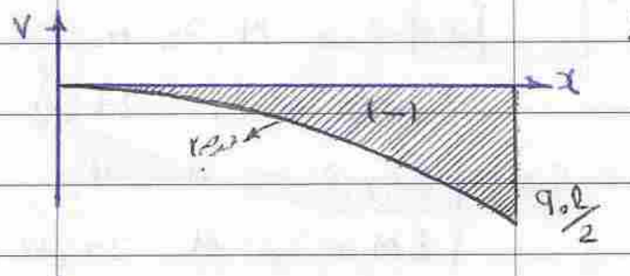
$\Rightarrow M = 117 - 13x$

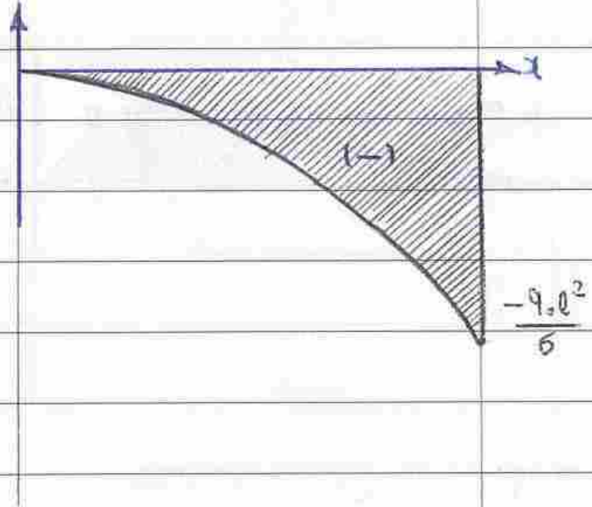
مثال ۵: مطلوبست رسم دیاگرام‌های تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی

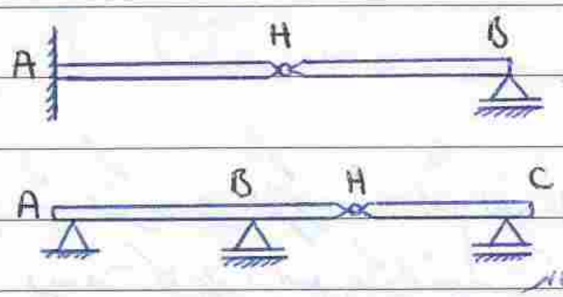


$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V = -\frac{q_0 x^2}{2l}$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow M = -\frac{q_0 x^3}{6l}$$

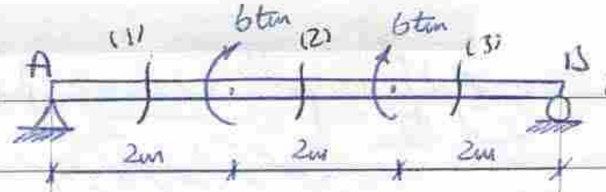


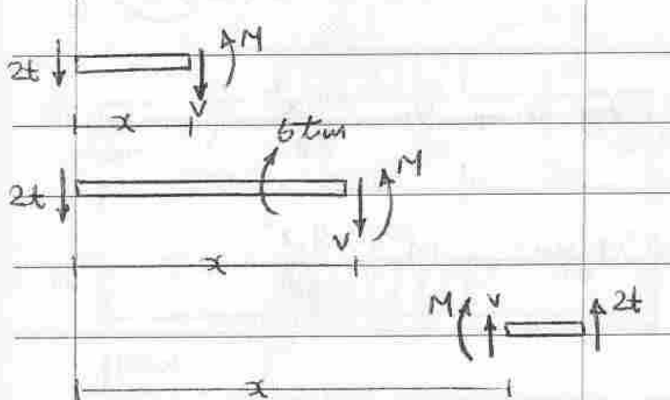




نکته ۸: گاهی دو یا چند تیر به هم مفصل می‌شوند و یک سازه پیوسته را تشکیل می‌دهند. در دو تیر نمونه مفصل در نقطه H وجود دارد. در این تیرها واکنش در تکیه‌گاه‌ها که چهار مجهول دارند و آن‌ها را با رسم نمودار جسم آزاد کل سیستم نمی‌توان تعیین کرد، بلکه باید نمودار جسم آزاد هر تیر را به طور جداگانه در نظر گرفت. در این حالت شش مجهول (شامل دو مولفه نیرو در مفصل) و شش معادله داریم.

مثال: مطلوبست رسم دیاگرام های تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی.





برش ۱: $\begin{cases} \Sigma F_y = 0 \Rightarrow V = -2t \\ \Sigma M = 0 \Rightarrow 2x + M = 0 \Rightarrow M = -2x \end{cases}$

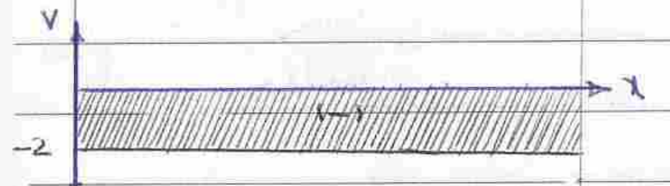
برش ۲: $\begin{cases} \Sigma F_y = 0 \Rightarrow V = -2t \\ \Sigma M = 0 \Rightarrow M + 2x - 6 = 0 \end{cases}$

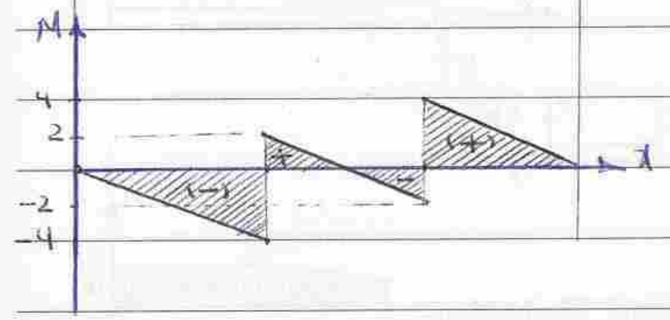
$\Rightarrow M = -2x + 6$

برش ۳: $\begin{cases} \Sigma F_y = 0 \Rightarrow V = -2t \\ \Sigma M = 0 \Rightarrow M = -2x + 12 \end{cases}$

$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -6 - 6 + 6B_y = 0 \Rightarrow B_y = 2t$

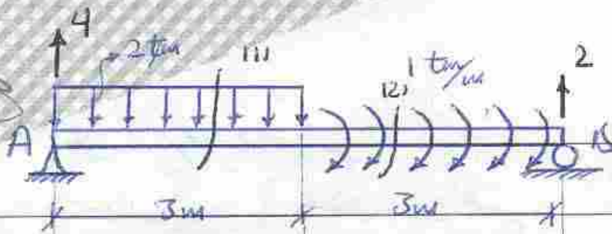
$A_y = -2t$

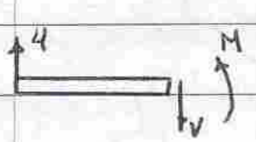




هرگاه لنگرهای خارجی متمرکز داشته باشیم انفصال در نمودار لنگر خمشی داریم.
در حالت کلی برای تیر اصلی لنگرها حالت آزاد ندارند چون در نیروهای داخلی تغییر ایجاد می‌شود.

مثال ٥: مطلوبست رسم دیاگرام های تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی.





$\sum M_A = 0$

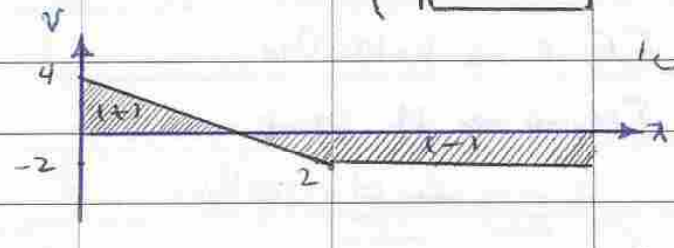
$\Rightarrow -3\times 2\times \frac{3}{2} - 3\times 1 = -6B_y$

$\Rightarrow B_y = 2$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = 4$

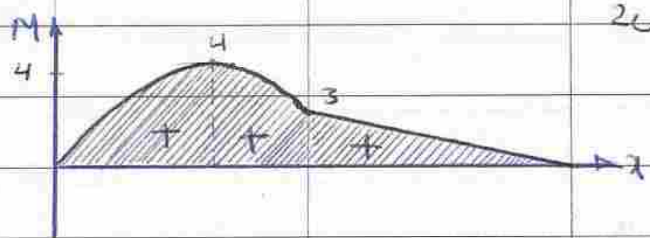
برش 1: $\begin{cases} \sum F_y = 0 \rightarrow V = 4 - 2x \ t \\ \sum M = 0 \rightarrow -4x + (2\times x)\frac{x}{2} + M = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow M = 4x - x^2 \ t.m$



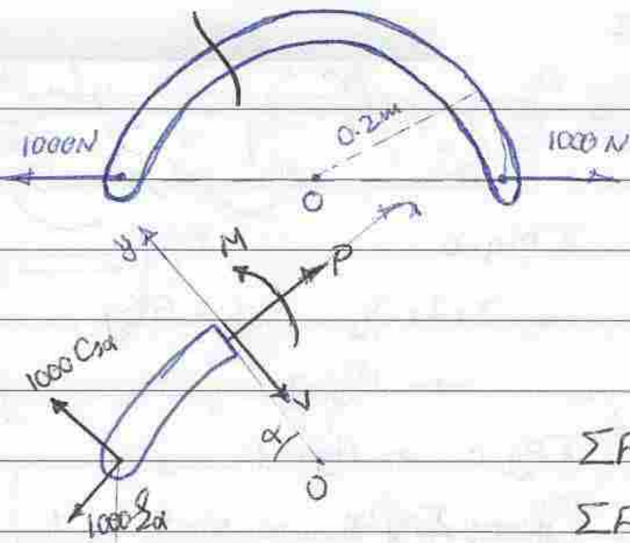
برش 2: $\begin{cases} \sum F_y = 0 \rightarrow V = -2 \\ \sum M = 0 \rightarrow 2(6-x) - 1(6-x) - M = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow M = -x + 6$



* در مورد لنگرهای گسترده الزاماً باید از روش مقطع زدن استفاده شود. از روش جمع زدن نمی توان استفاده کرد.

مثال: تیر خمیده نشان داده شده [به] شکل نیم دایره مفروض است. مطلوبست تعیین معادلات تغییرات نیروهای محوری، برشی و لنگر خمشی در طول و رسم نمودارهای آن‌ها.



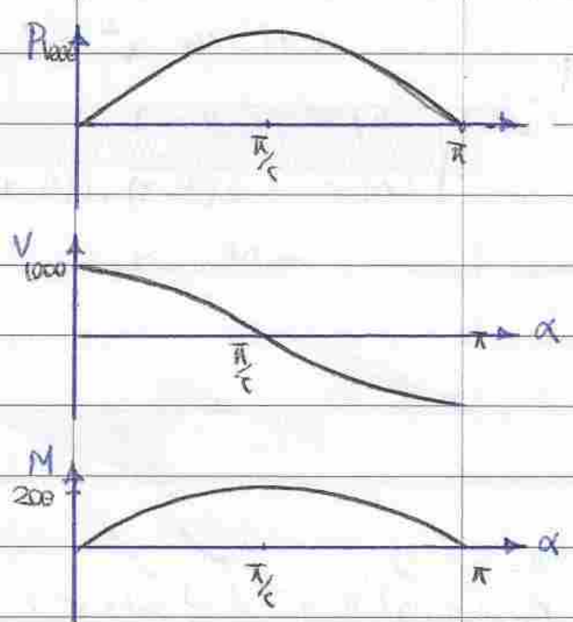
برشی را در زاویه α می‌زنیم.

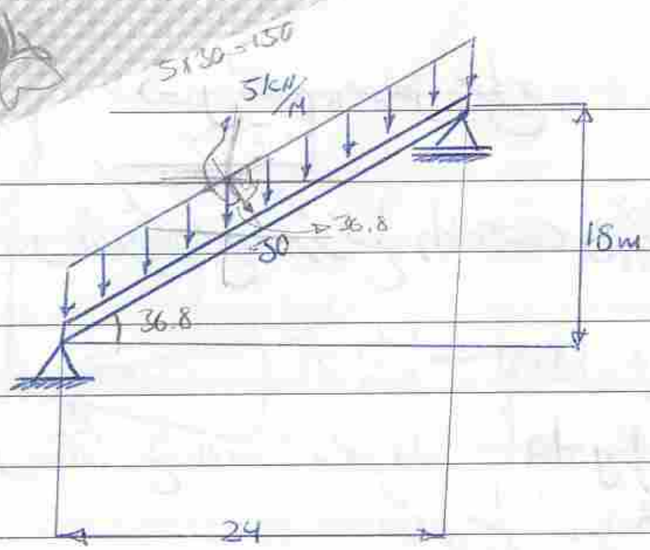
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P = 1000 \sin\alpha$$

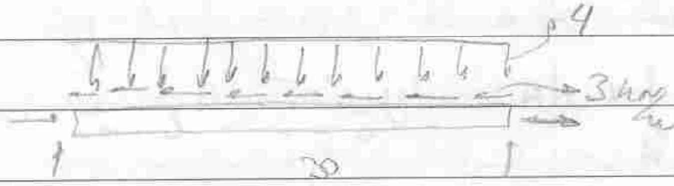
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V = 1000 \cos\alpha$$

$$\sum M_O = 0 \Rightarrow M - Pr = 0$$

$$\Rightarrow M = 200 \sin\alpha$$



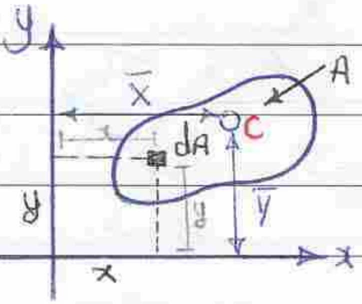




سوال ۵ نمودارهای تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی را رسم کنید.

فصل پنجم: خواص سطوح

۱) ممان استاتیک سطح و مرکز سطح (static moment of area & Centroid):



(x, y) ← مرکز المان

$S_x = \int_A y.dA$ ممان استاتیک سطح A نسبت به محور xها

A ← انتگرال سطح

$S_y = \int_A x.dA$ ممان استاتیک سطح A نسبت به محور yها

$$S_x = \int y.dA = A\bar{y} \qquad \bar{y} = \frac{\int y.dA}{A}$$

$$\Rightarrow \quad C \left| \begin{array}{l} \bar{X} \\ \bar{y} \end{array} \right. \rightarrow \text{مرکز سطح}$$

$$S_y = \int x.dA = A\bar{X} \qquad \bar{X} = \frac{\int x.dA}{A}$$

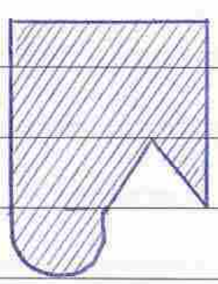
۱) واحد ممان استاتیک سطح cm^3 است.

۲) ممان استاتیک می‌تواند مقادیر مثبت، منفی یا صفر باشد (به وضعیتش نسبت به محور مختصات بستگی دارد)

۳) ممان استاتیک سطح نسبت به هر محوری که مرکز سطح از آن محور بگذرد صفر است.

۴) اگر سطحی دارای محور تقارن باشد مرکز سطح آن حتماً روی محور تقارن است.

۵) اگر سطحی دارای دو محور تقارن باشد مرکز سطح آن محل تقاطع دو محور تقارن است.

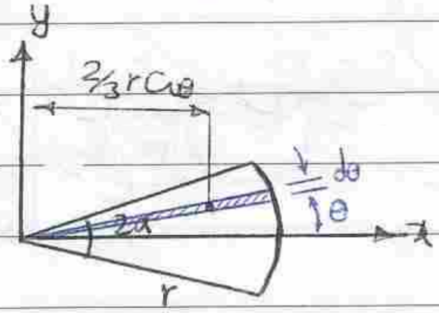


$$S_x = \sum_{i=1}^{n} S_{xi} = \sum_{i=1}^{n} (A_i . \bar{y}_i)$$

$$S_y = \sum_{i=1}^{n} S_{yi} = \sum_{i=1}^{n} (A_i . \bar{X}_i)$$

$$\text{مرکز سطح}\ C \left| \begin{array}{l} \dfrac{\int x dA}{A} \\[2ex] \dfrac{\int y dA}{A} \end{array} \right.$$

مثال: مطلوبست تعیین محل مرکز سطح یک قطاع دایره به شعاع R و زاویه مرکزی ۲α.



$$\bar{X} = \frac{S_y}{A} = \frac{\int x\,dA}{A}$$

مساحت قطاع: $\frac{1}{2}\beta r^2$

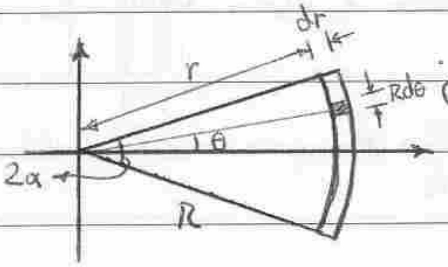
$$\begin{cases} dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta \\ x = \frac{2}{3}r\cos\theta \end{cases}$$

$$\bar{X} = \frac{2}{3}\frac{r\sin\alpha}{\alpha}$$

$$\Rightarrow S_y = \int_{-\alpha}^{\alpha}\left(\frac{2}{3}r\cos\theta\right)\frac{1}{2}r^2 d\theta = \frac{2}{3}r^3\sin\alpha \rightarrow X = \frac{\frac{2}{3}r^3\sin\alpha}{\frac{1}{2}(2\alpha)r^2} = \frac{2}{3}\frac{r\sin\alpha}{\alpha}$$

مثال: مثال فوق را با استفاده از المان قوسی مجدد حل کنید و نتیجه را با هم مقایسه کنید.

توضیح: ابتدا مرکز یک کمان دایره به شعاع R و زاویه مرکزی ۲α را بدست آورده سپس محل مرکز سطح از آن استفاده می‌کنیم.

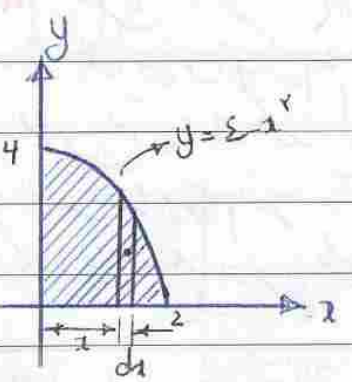


$$X = \frac{\int x\,dl}{l} = \frac{\int r\cos\theta(r\,d\theta)}{2r\alpha} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} r\cos\theta\,d\theta}{2\alpha}$$

$$= \frac{r}{2\alpha}(\sin\alpha)_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{r}{\alpha}\sin\alpha$$

$$\bar{X} = \frac{\int x\,dA}{A} = \frac{\int_0^R \frac{r}{\alpha}\sin\alpha(2r\alpha)dr}{\alpha R^2} = \frac{\int_0^R \sin\alpha(2r^2)dr}{\alpha R^2} = \frac{2\sin\alpha}{\alpha R^2}\int_0^R r^2 dr$$

$$= \frac{2\sin\alpha}{\alpha R^2}\left(\frac{1}{3}R^3\right) = \frac{2}{3}\frac{R\sin\alpha}{\alpha}$$



مثال: مطلوبست تعیین مرکز سطح محصور بین منحنی $y=4-x^2$ و محورهای x و y در ناحیه اول مختصات.

$$\bar{X} = \frac{S_y}{A} \Rightarrow S_y = \int x\,dA = \int_0^2 x(4-x^2)\,dx = 4\ cm^3$$

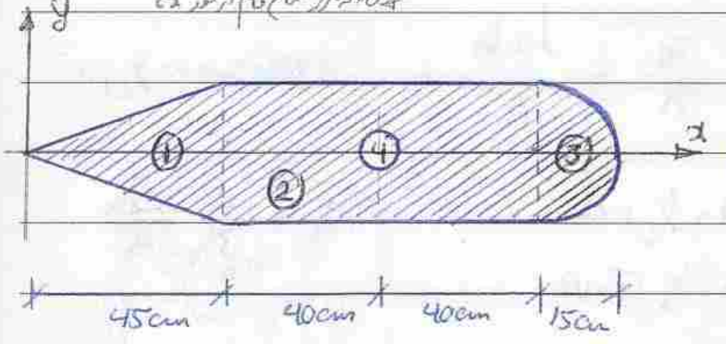
$$A = \int_A dA = 5.33\ cm^3 \rightarrow A = \int_0^2\int_0^{4-x^2} dy\,dx$$

$$\Rightarrow \bar{X} = \frac{4}{5.33} = 0.75$$

1) $S_x = \int y\,dA = \int_0^2 (4-x^2)(x)(-2x) = 8.53$ منحنی

2) $S_x = \int y\,dA = \int_0^2 \left(\frac{4-x^2}{2}\right)(4-x^2)\,dx = 8.53\ cm^3$, $\bar{y} = 1.66$ المان قائم است

فاصله مرکز المان قائم از محور xها



مثال: مقطع یک تیر مطابق شکل می‌باشد محل مرکز سطح آن را بدست آورید. شعاع سوراخ 5cm می‌باشد.

شماره سطح	A_i	$\bar{X}_i$	$A_i \cdot \bar{X}_i$
مثلث (1)	675	30	20250
مستطیل (2)	2400	85	20400
نیم دایره (3)	$\frac{\pi}{2} \times 15 = 353.4$	$\frac{4r}{3\pi} + 125 = 131.4$	46437
4	-78.5	85	-6672

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \bar{X}_i = 264015$$

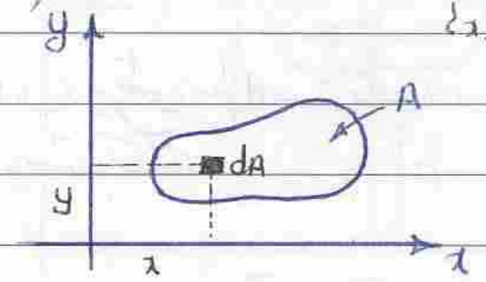
$$\sum_{i=1}^{n} A_i = 3350$$

$$\Longrightarrow \bar{X} = \frac{\sum_1^n A_i X_i}{\sum_1^n A_i} = 78.8\ cm^3$$

* برای بدست آوردن مرکز سطح اشکالی که از ترکیب چند شکل هندسی مشخص بوجود آمده اند به شکل زیر عمل می‌کنیم:
برای یافتن $\bar{x}$ مرکز سطح ابتدا مساحت هر شکل و x مرکز سطح آن را بدست آورده سپس هر دو را در هم ضرب می‌نماییم. سپس تمام A_iX_i ها را با هم جمع می‌کنیم و تقسیم بر مساحت کل می‌نماییم. به این طریق $\bar{x}$ مرکز سطح بدست می‌آید.

مستطیل $\bar{I} = \frac{bh^3}{12}$ مثلث $\bar{I} = \frac{bh^3}{36}$ دایره $\bar{I} = \frac{\pi}{4}R^4$ (شعاع R)

۲) ممان اینرسی سطح (Area Moment of Inertia):

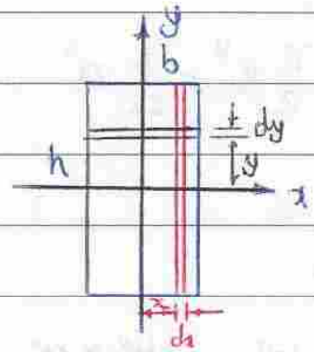


فاصله المان از محور x ها

$$I_{xx} = \int y^2 . dA$$ ممان اینرسی سطح A نسبت به محور x ها

$$I_{yy} = \int x^2 . dA$$ ممان اینرسی سطح A نسبت به محور y ها

* ممان اینرسی هیچگاه منفی و صفر نمی‌شود.

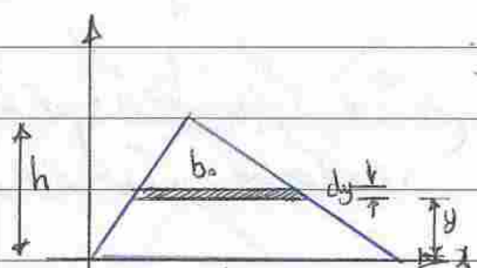


مثال۱: ممان اینرسی مستطیل را حول محورهای تقارن آن بدست آورید.

$$I_{xx} = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 . b\,dy = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{yy} = \int_A x^2 dA = \int_{-b/2}^{b/2} x^2 h\,dx = \frac{hb^3}{12}$$

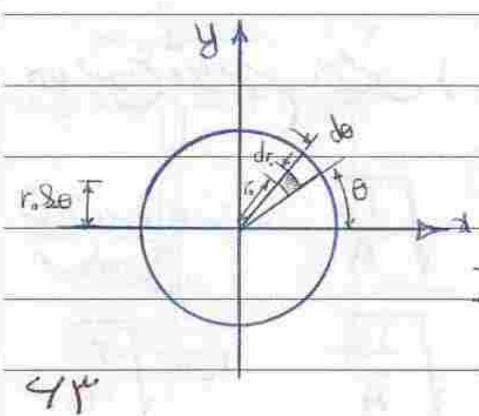
راستایی که در المان حرکت می‌کند توان 3 دارد.



مثال۲: ممان اینرسی مثلث را حول قاعده آن بدست آورید.

$$I_{xx} = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 . \frac{b}{h}(h-y)\,dy = \frac{bh^3}{12}$$

$$dA = b_0 . dy = \frac{b}{h}(h-y)dy$$



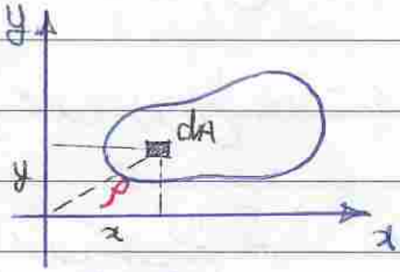
مثال۳: ممان اینرسی دایره را نسبت به مرکز آن بدست آورید.

المانی در موقعیت زاویه‌ای θ و تغییرات زاویه‌ای $d\theta$ و در موقعیت شعاعی r_0 با تغییرات شعاعی dr_0.

$$I_{xx} = \int_A y^2 dA = \int_0^R \int_0^{2\pi} (r_0 \sin\theta)^2 r_0\, d\theta\, dr_0 = \frac{\pi}{4} R^4$$

$$\longrightarrow I = \frac{\pi}{4} R^4$$

۳) ممان اینرسی قطبی (Polar Moment of Inertia):



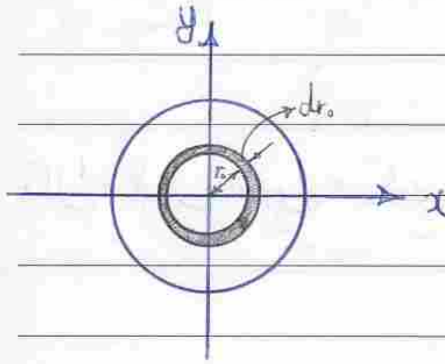
ممان اینرسی قطبی سطح A نسبت به مختصات xy یا نسبت به نقطه O:

$$J=\int_A \rho^2\, dA$$

$$\rho^2=x^2+y^2 \Rightarrow J=\int_A (x^2+y^2)\,dA \Rightarrow J=I_{xx}+I_{yy}$$

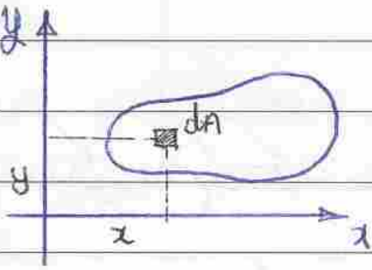
* از ممان های اینرسی سطح $(\bar{I}_x, \bar{I}_y)$ می توان ممان اینرسی قطبی را بدست آورد.

مثال: ممان اینرسی قطبی دایره را نسبت به مرکز آن بدست آورید.



$$J=\int \rho^2\, dA=\int_0^R r_0^2\, 2\pi r_0 \cdot dr_0=\frac{\pi}{2}R^4=\frac{\pi}{32}D^4$$

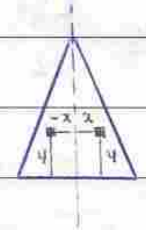
۴) حاصلضرب اینرسی (product of Inertia):



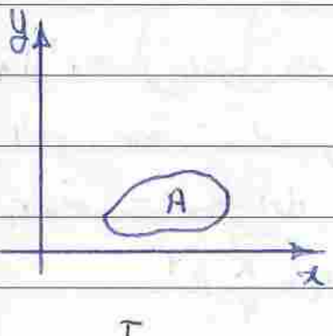
حاصلضرب اینرسی سطح A نسبت به دستگاه xy

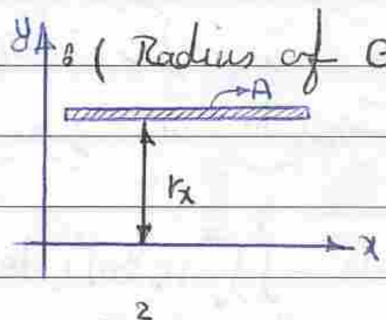
$$I_{xy}=\int_A xy\, dA$$

* نکته مهم: اگر سطحی دارای یک محور تقارن باشد حاصلضرب اینرسی آن سطح نسبت به دستگاه متشکل از این محور و هر محور عمود بر آن صفر خواهد بود.



۵) شعاع ژیراسیون یا چرخش (Radius of Gyration):





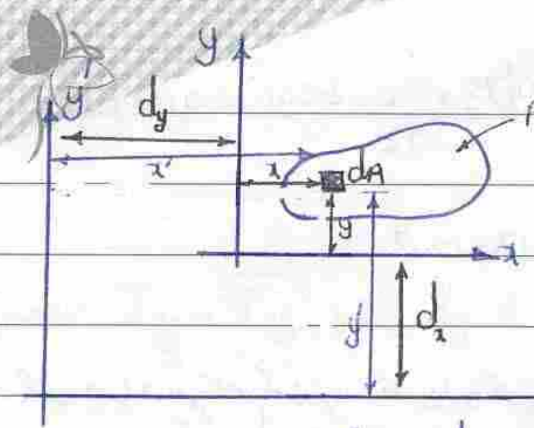
شعاع ژیراسیون A نسبت به محور x ها

$$r_x=\sqrt{\frac{I_{xx}}{A}}$$

I_{xx} $\qquad$ $r_x^2 \cdot A$

$$r_y=\sqrt{\frac{I_{yy}}{A}} \qquad r_0=\sqrt{\frac{J}{A}}$$

۶) انتقال محورهای مختصات :



$$I_{x'}=\int_A y'^2\,dA=\int_A (y+d_x)^2\,dA$$

$$\Rightarrow I_{x'}=I_x+d_x^2 . A+2d_xS_x$$

رابطه انتقال محورهای مختصات نسبت به محور x .   (d_x ، d اسمش d است)

حالت خاص : وقتی که محور x از مرکز سطح A بگذرد : $I_{x'}=\bar{I}_x+d_x^2 . A$

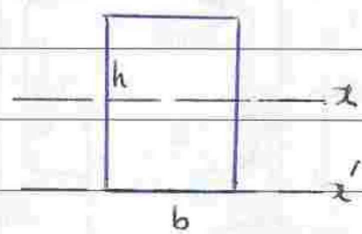
($\bar{I}_x$: ممان اینرسی سطح نسبت به محوری که از مرکز سطح گذشته باشد)

این رابطه برای y ها هم وجود دارد . بنابراین رابطه کلی به شکل زیر است :

$$I=\bar{I}+d^2 . A$$

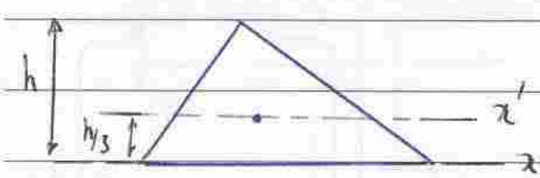
* بنابراین ممان اینرسی سطح نسبت به محوری که از مرکز سطح گذشته باشد کمترین مقدار را دارد .

مثال ۱ : ممان اینرسی مستطیل را نسبت به ضلع آن محاسبه کنید .



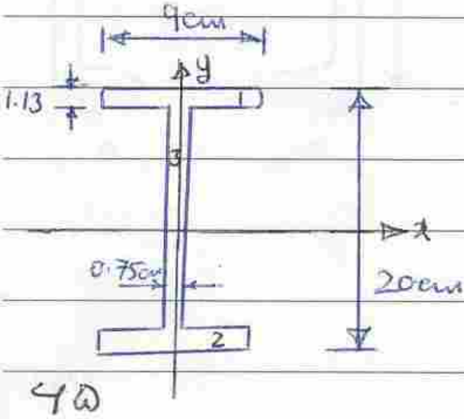
$$I=\frac{bh^3}{12}+\left(\frac{h}{2}\right)^2(bh)=\frac{bh^3+3bh^3}{12}=\frac{bh^3}{3}$$

مثال ۲ : ممان اینرسی مثلث را نسبت به محوری به موازات قاعده و گذرنده از مرکز سطح مثلث بیابید .



$$\frac{bh^3}{12}=\bar{I}+\left(\frac{h}{3}\right)^2\left(\tfrac{1}{2}bh\right)$$

$$\Rightarrow \bar{I}=\frac{bh^3}{36} \Rightarrow \bar{I}_{\text{مثلث}}=\frac{bh^3}{36}$$



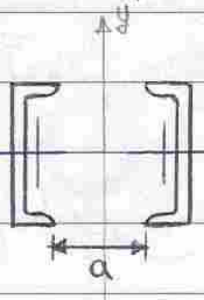
مثال ۳ : مقطع مرکب تیرهای وارده از نوع INP200 با مشخصات مطابق شکل در نظر گرفته شده است . ممان‌های اینرسی این مقطع را حول محورهای مرکزی آن محاسبه نمایید .

$$I_x = \left[\frac{9\times1.13^3}{12} + \left(10-\frac{1.13}{2}\right)^2 \times 9 \times 1.13\right]\times 2 + \frac{0.75\times(20-2.26)^3}{12} = 2162\ cm^4$$

$$I_y = \left[\frac{1.13\times 9^3}{12}\right]\times 2 + \frac{(20-2.26)\times 0.75^3}{12} = 138\ cm^4$$

محور x را در تیرآهن محور قوی و محور y را محور ضعیف گویند چون ممان اینرسی محور x خیلی بیشتر است.

* عضو ① و ② را بال تیرآهن (flange) گویند و عضو ③ را جان تیرآهن (web) می‌گویند.

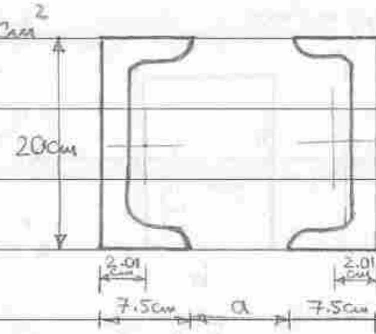


مثال: مقطعی مرکب از دو ناودانی مطابق شکل در نظر گرفته شده است. فاصله a را برای موارد زیر طوری بیابید که ممان‌های اینرسی نسبت به محورهای تقارن مقطع با هم برابر باشند.

الف) ناودانی‌ها نمره 20 باشند.

ب) ناودانی‌ها نمره 30 باشند.

الف) $[200 \rightarrow \bar{I}_x = 1910\ cm^4 \quad \bar{I}_y = 148\ cm^4,\ A = 32.2\ cm^2$



$I_x = 2(1910)$

$I_y = (\bar{I}_y + d^2.A)2 = 2(148 + (\frac{a}{2}+5.49)^2 32.2)$

$I_y = I_x \rightarrow \cancel{2}(1910) = \cancel{2}(148 + (\frac{a}{2}+5.49)^2 32.2)$

$\rightarrow a = 3.81\ cm$

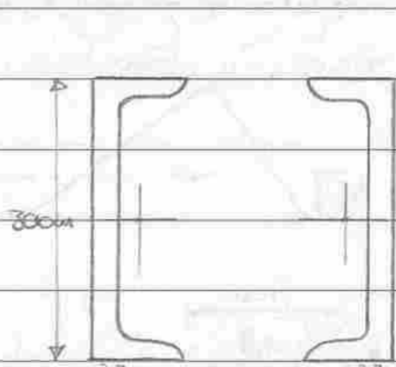
ب) $[300 \rightarrow \bar{I}_x = 8030\ cm^4 \quad \bar{I}_y = 495\ cm^4$

$I_x = 2(8030) \qquad A = 58.8\ cm^2$

$I_y = 2(\bar{I}_y + d^2.A)$

$I_y = I_x \rightarrow \cancel{2}(8030) = \cancel{2}(495 + (\frac{a}{2}+7.3)^2 58.8)$

$\rightarrow a = 8.04\ cm$



ممان اینرسی قطبی $J = \bar{J} + d^2 . A$

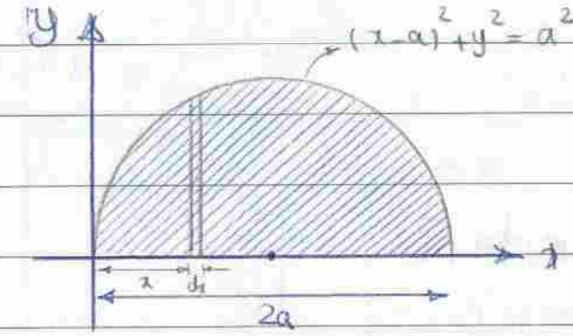
$\bar{J}$: ممان اینرسی سطح نسبت به دستگاهی که مبدأ آن مرکز سطح باشد.

d: فاصله بین مبدأ دستگاه قدیم و دستگاه جدید.

حاصلضرب اینرسی $I_{xy} = \bar{I}_{xy} + d_x . d_y . A$

$\bar{I}_{xy}$: حاصلضرب اینرسی سطح A نسبت به دستگاهی که مبدأ آن مرکز سطح باشد.

← اینجا علامت d_x و d_y مهم است.



مثال: حاصلضرب اینرسی سطح هاشور خورده را نسبت به دستگاه yx به دو روش زیر محاسبه نمایید.

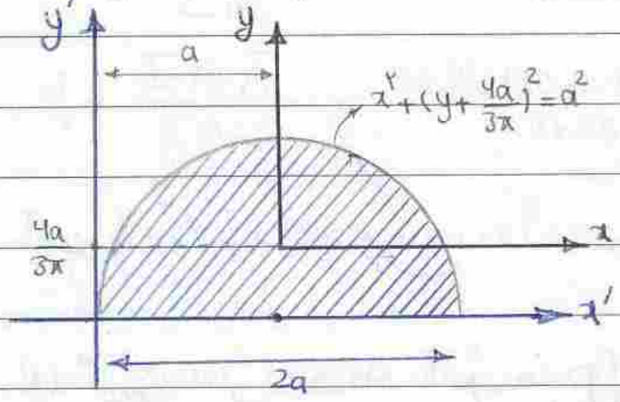
۱) انتگرال گیری مستقیم. $\int xy\,dA$

۲) رابطه انتقال محورهای مختصات. x, y مرکز المان است؟

1) $I_{xy} = \int xy\,dA = \int_0^{2a} \frac{1}{2}x(\sqrt{a^2-(x-a)^2})(\sqrt{a^2-(x-a)^2})dx = \int_0^{2a} x(a^2-(x-a)^2)dx$

$= \int_0^{2a} x(a-(x-a))(a+(x-a))dx = \int_0^{2a} x(2a-x)(x)dx = \int_0^{2a}(2ax^2-x^3)dx$

$= \frac{1}{3}2ax^3 - \frac{1}{4}x^4 \Big]_0^{2a} = \frac{2}{3}a(8a^3) - \frac{1}{4}(16a^4) = \frac{16}{3}a^4 - \frac{16}{4}a^4 = \frac{4}{3}a^4 \times \frac{1}{2}$



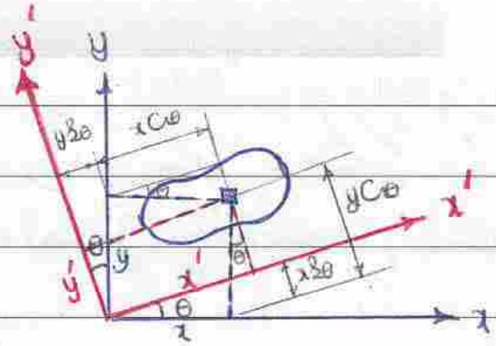
$\bar{I}_{xy} = 0$ حاصلضرب اینرسی سطح نسبت به دستگاهی که یک محور تقارن و هر محور عمود بر آن صفر است.

$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + d_x . d_y . A$

$I_{xy} = 0 + \frac{4a}{3\pi} \times a \times \pi a^2 \times \frac{1}{2}$

$I_{xy} = \frac{4}{3}a^4 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}a^4$

۱۷) چرخش محورهای مختصات:



$$I_{x'} = \int_A y'^2 dA \qquad I_{y'} = \int_A x'^2 dA$$

$$I_{x'y'} = \int x'.y' dA$$

$$I_{x'} = \int y'^2 dA = \int (y\cos\theta - x\sin\theta)^2 dA$$

قرارداد: θ زمانی مثبت است که دوران در جهت مثلثاتی باشد.

$$I_{y'} = \int x'^2 dA = \int (y\sin\theta + x\cos\theta)^2 dA$$

$$I_{x'y'} = \int x'.y' dA = \int (y\cos\theta - x\sin\theta)(y\sin\theta + x\cos\theta) dA$$

$$\begin{cases} I_{x'} = \dfrac{I_x + I_y}{2} + \dfrac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta \\ I_{y'} = \dfrac{I_x + I_y}{2} - \dfrac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta \\ I_{x'y'} = \dfrac{I_x - I_y}{2}\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta \end{cases}$$

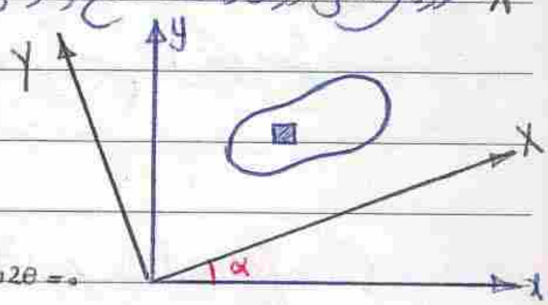
$$I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y = \text{Const} \longrightarrow$$ چون مبدأ مختصات تغییر نکند.

۱۸) محورهای اصلی (Principal Axes):

محورهایی هستند حول آن‌ها ممان اینرسی سطح است که یکی از آن‌ها Max و نسبت به دیگری Min است.
(مثلاً اگر $I_{x'}$ Max باشد $I_{y'}$ حتماً Min است)
این در حالتی اتفاق می‌افتد که زاویه دوران α باشد. برای پیدا کردن α از مشتق استفاده می‌کنیم.

$$\frac{dI_{x'}}{d\theta} = 0 \Rightarrow -(I_x - I_y)\sin 2\theta - 2I_{xy}\cos 2\theta = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}$$

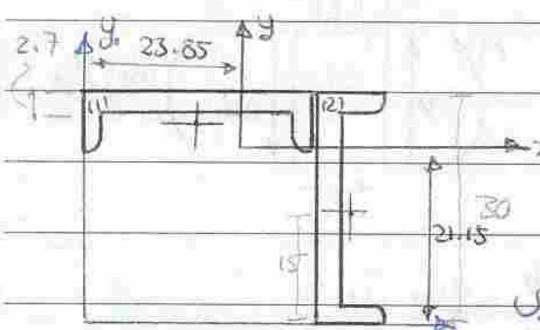
* محورهای اصلی در مقاومت مصالح و طراحی کاربرد فراوانی دارد.



$$I_{\substack{Max\\Min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$I_{xy} = 0 \xrightarrow{tg2\alpha = \frac{2 I_{xy}}{I_y - I_x}} \quad I_{xy} = \frac{I_x - I_y}{2} S_{2\theta} + I_{xy} C_{2\theta} = 0$$

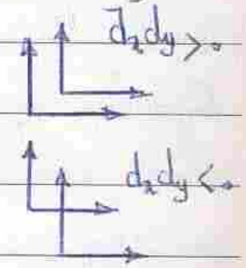
* اگر سطحی دارای یک محور تقارن باشد این محور، محور اصلی است چون $\bar{I}_{xy} = 0$.



مثال: مقطع یک عضو فشاری از دو عدد ناودانی 300 مطابق شکل تشکیل شده است. مطلوبست

الف) تعیین محل محورهای اصلی مرکزی

ب) تعیین ممان های اینرسی حداکثر و حداقل نسبت به محورهای اصلی مرکزی



$$\bar{X}_0 = \frac{\sum A_i \bar{x}_i}{\sum A_i} = \frac{58.8 \times 15 + 56.8(30 + 2.7)}{2 \times 58.8} = 23.85$$

$$\bar{Y}_0 = \frac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i} = \frac{58.8 \times (30 - 2.7) + 58.8 \times 15}{2 \times 58.8} = 21.15$$

$$I_x = \left[495 + (30 - 2.7 - 21.15)^2 \times 58.8\right] + \left[8030 + (21.15 - 15)^2 \times 58.8\right] = 12973\ cm^4$$

$$I_y = \left[8030 + (23.8 - 15)^2 \times 58.8\right] + \left[495 + (32.7 - 23.8)^2 \times 58.8\right] = 17736\ cm^4$$

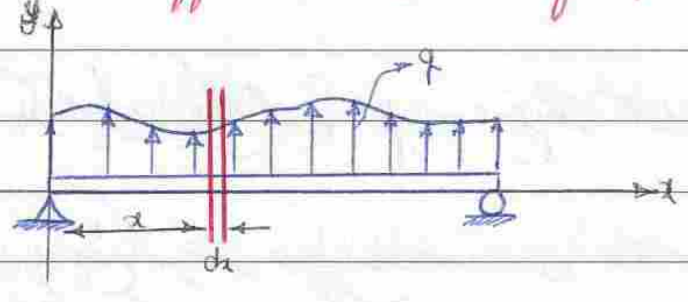
$$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + d_x . d_y . A = \Big[[0] + (-(27.3 - 21.15))(23.85 - 15) \times 58.8\Big]$$
$$+ \left[0 + (6.15)(-8.85) \times 58.8\right] = -64.01$$

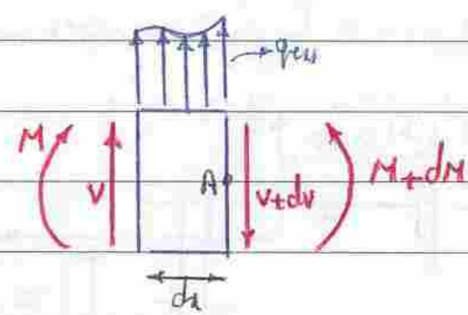
$$tg2\alpha = \frac{2 I_{xy}}{I_y - I_x} = \quad \Rightarrow \alpha = -34.8$$

$I_{Max} = 22184 \qquad I_{min} = 8524$

پس این است دستگاه محور اصلی داریم. اما چون شکلی در دستگاه مختصات اولیه و مکان این دارد. دستگاه محور اصلی مرکزی دستگاهی است که در دستگاه اولیه آن محل مرکز سطح باشد.

معادلات دیفرانسیل تعادل (Differential equation of equilibrium)





$\sum F_y = 0 \Rightarrow V + q(x).dx - (V + dV) = 0 \Rightarrow \dfrac{dV}{dx} = q(x) \quad (1)$

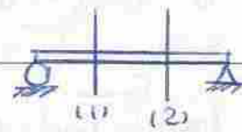
$\sum M_A = 0 \Rightarrow \cancel{M} + dM - \cancel{M} - V.dx - q(x)\, dx\left(\dfrac{dx}{2}\right) = 0 \Rightarrow \dfrac{dM}{dx} = V \quad (2)$

$(1), (2) \Rightarrow \dfrac{d^2M}{dx^2} = q(x) \quad (3)$

(1)، (2)، (3) را معادلات دیفرانسیل تعادل برای نیروهای داخلی گویند.

رسم دیاگرام نیروهای داخلی تیر با استفاده از روش جمع زدن (Summation Method):

معادله (1) $\rightarrow dV = q(x)dx \Rightarrow \int_{(1)}^{(2)} dV = \int_{(1)}^{(2)} q(x)dx \Rightarrow$



$\Rightarrow V_2 - V_1 = \int_{(1)}^{(2)} q(x)dx \quad (4)$

معادله (2) $\rightarrow dM = V.dx \Rightarrow \int_{(1)}^{(2)} dM = \int_{(1)}^{(2)} V.dx$

$\Rightarrow M_2 - M_1 = \int_{(1)}^{(2)} V.dx \quad (5)$

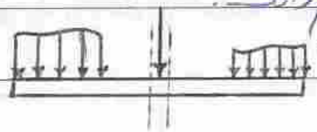
نتایج حاصل از معادلات 1 و 4 :

1) شیب منحنی تغییرات نیروی برشی (V) در هر نقطه برابر است با مقدار نیروی خارجی (q) در همان نقطه.

2) تغییرات نیروی برشی بین هر دو مقطع دلخواه (V_2-V_1) برابر است با جمع جبری نیروهای خارجی بین آن دو مقطع.

3) اگر بین دو مقطع هیچ نیرویی وارد نشود تغییرات نیروی برشی (V_2-V_1) بین آن دو مقطع صفر است و نیروی برشی در این بین ثابت است.

4) اگر یک بار متمرکز وارد جمع جبری [illegible] شود عمل پیوسته جمع زدن نیروهای خارجی اعتبار خود را بین دو مقطع مجاور نقطه حفظ می کند ولی در محل اعمال نیروی متمرکز یک انفصال در نیروی برشی خواهیم داشت.



(اندازه انفصال به اندازه نیروی متمرکز اعمال شده است)

نتایج حاصل از معادلات 2 و 5 :

1) شیب منحنی تغییرات لنگر خمشی (M) در هر نقطه برابر است با مقدار نیروی برشی (V) در آن نقطه

2) تغییرات لنگر خمشی بین هر دو مقطع دلخواه (M_2-M_1) برابر است با جمع جبری سطوح زیر منحنی تغییرات نیروی برشی بین آن دو مقطع.

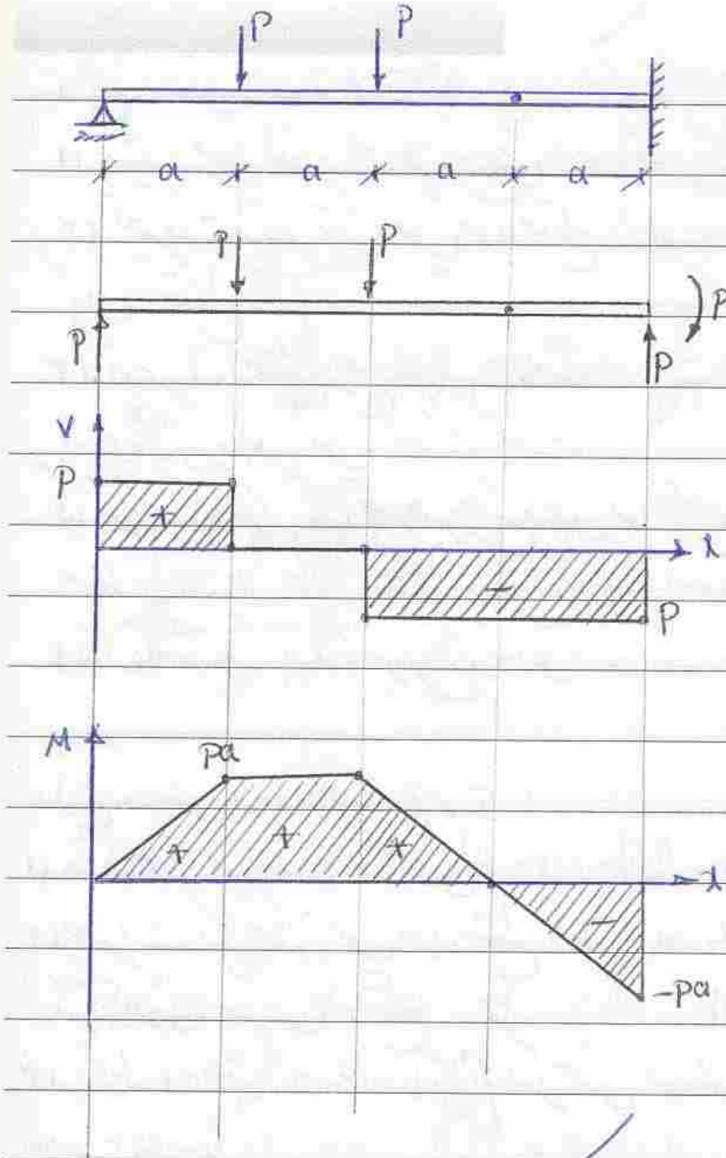
3) نقاط Max و Min در دیاگرام لنگر خمشی در نقاطی اتفاق می افتد که نیروی برشی صفر باشد یا تغییر علامت دهد.

4) اگر یک لنگر متمرکز خارجی به تیر اعمال گردد عمل پیوسته جمع زدن سطوح زیر منحنی نیروی برشی برای رسم منحنی لنگر خمشی اعتبار خود را حفظ می کند ولی در محل لنگر خمشی یک **انفصال** رخ می دهد. درصورتیکه لنگر متمرکز خارجی موافق حرکت عقربه های ساعت باشد انفصال مذکور مثبت بوده و در غیر اینصورت منفی است.

روش رسم دیاگرام ها :

به منظور رسم دیاگرام های نیروی برشی و لنگر خمشی از روش جمع زدن، از ابتدای سمت چپ تیر (مبدأ x) شروع کرده و با جمع زدن نیروهای خارجی دیاگرام نیروی برشی و با جمع زدن سطوح زیر منحنی برشی دیاگرام لنگر خمشی را رسم می کنیم.

* مشتق دوم لنگر خمشی نسبت به x در یک نقطه برابر است با مقدار نیروی خارجی (q) در همان نقطه (شدت اعمال)
* مشتق نیروی برشی نسبت به x در یک نقطه برابر است با مقدار نیروی خارجی (q) در همان نقطه (شیب)
* مشتق لنگر خمشی نسبت به x در یک نقطه برابر است با مقدار نیروی برشی (V) در همان نقطه (شیب)



مثال) به صورت مستقیم رسم دیاگرام

نیروی برشی و لنگر خمشی تیر مفصل دار را که داده شده با استفاده از روش جمع زدن

هنگامی که در تکیه گاه غلتکی و مفصلی لنگر نداریم مگر اینکه یک لنگر متمرکز داشته باشیم.

* در مفصل همواره لنگر خمشی صفر است.

۱) در مورد لنگرهای گسترده اکثراً باید از روش مقطع زدن استفاده کنیم.

۲) حتماً عکس العمل‌ها را دقیق بدست آورید تا مشکلی در رسم دیاگرام نباشد.

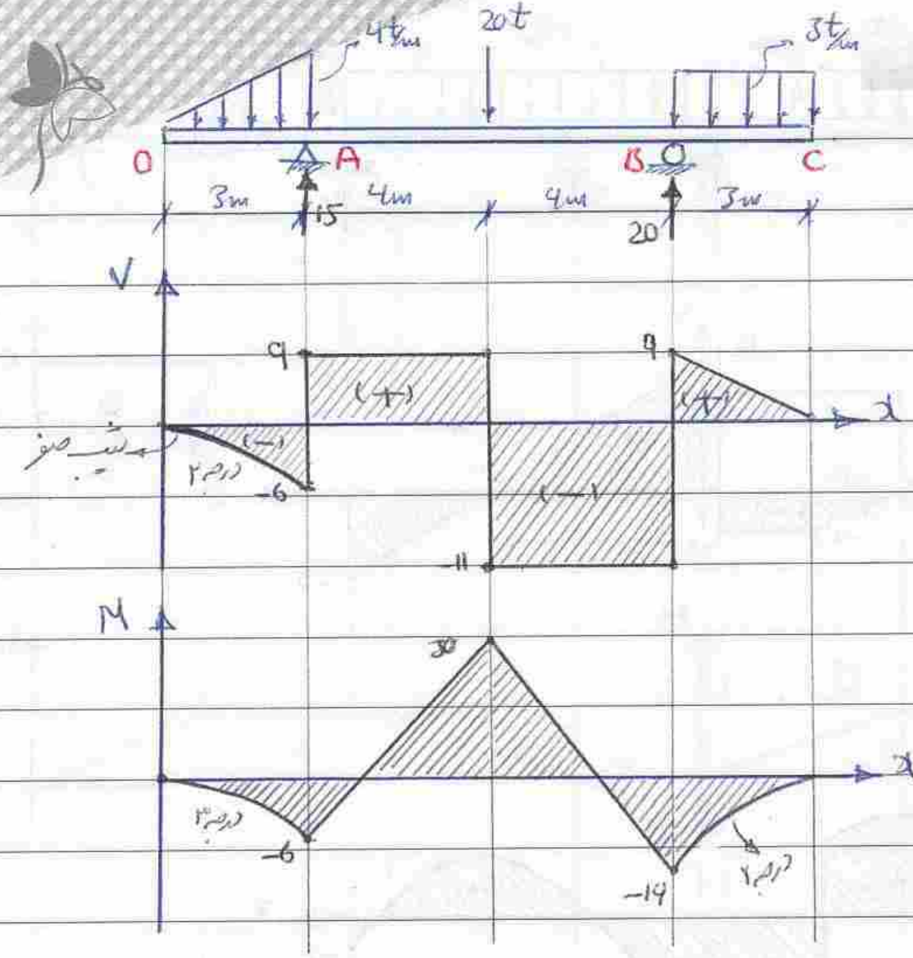
۳) در دیاگرام برشی در زیر محل اعمال نیروی متمرکز در تیر همواره انفصال داریم. میزان انفصال هم به اندازه‌ی همان نیروی انفصالی است.

۴) در دیاگرام لنگر خمشی در محل اعمال نیروی متمرکز در تیر همواره شکستگی داریم.

۵) منحنی نیروی برشی مشتق منحنی لنگر خمشی است.

۶) در تکیه گاه‌های غلتکی و مفصلی در دو سر آزاد تیر (در ابتدا یا انتهای آزاد تیر) اگر لنگر متمرکز خارجی نداشته باشیم نیروی خمشی [لنگر] صفر است.

مثال ۲) مطلوبست رسم دیاگرام نیروی برشی لنگر خمشی تیر با استفاده از روش جمع زدن.



$$\begin{cases} V_2 - V_1 = \int q(x)\,dx \\ M_2 - M_1 = \int V(x)\,dx \\ \dfrac{d^2M}{dx^2} = q(x) \end{cases}$$

$\frac{1}{3}(3 \times 6) = 6$

** کلیه ی تکیه گاه های مفصلی و غلتکی در ابتدا و انتهای آزاد دارای نیروی برشی صفر است. مگر اینکه لنگر متمرکز داشته باشیم (این مسئله برای لنگر خمشی هم صحیح است.)

* اگر منحنی درجه دو داشته باشیم که یک انتهایش دارای شیب صفر باشد سطح زیر منحنی سهمی ۲/۳ مستطیل محیطی آن است.

$\frac{1}{3}$ (مساحت مستطیل)

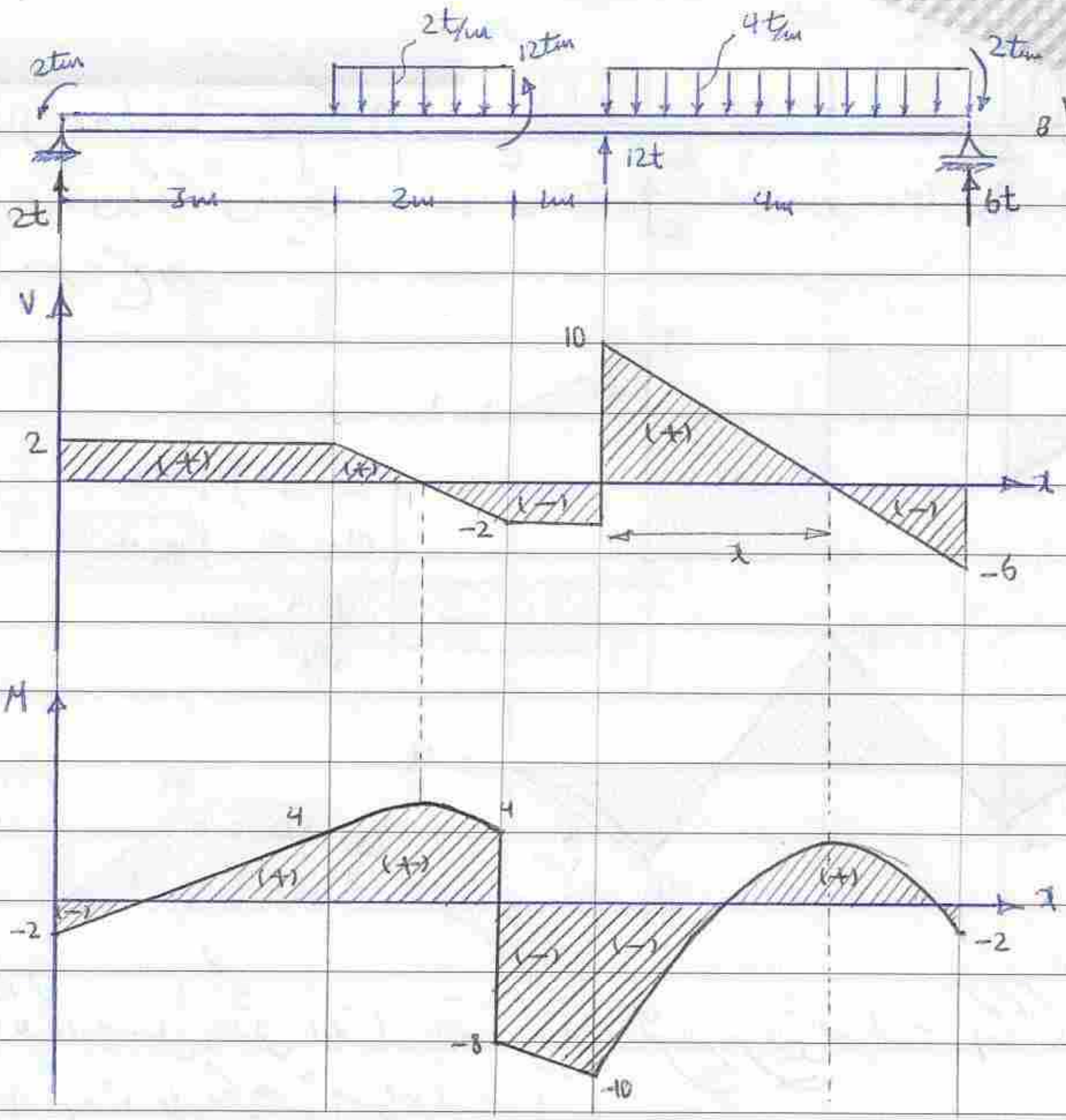
$\frac{2}{3}$ (مساحت مستطیل)

** اگر در ابتدا و انتهای تیر نیروی متمرکز نداشته باشیم نیروی برشی از نقطه صفر آغاز می شود

* q در هر نقطه بین B و C ثابت است پس شیب خط نمودار برشی ثابت می ماند ولی چون q در هر نقطه بین O و A ثابت نیست پس شیب خط نمودار برشی ثابت نیست و سهمی وار است.

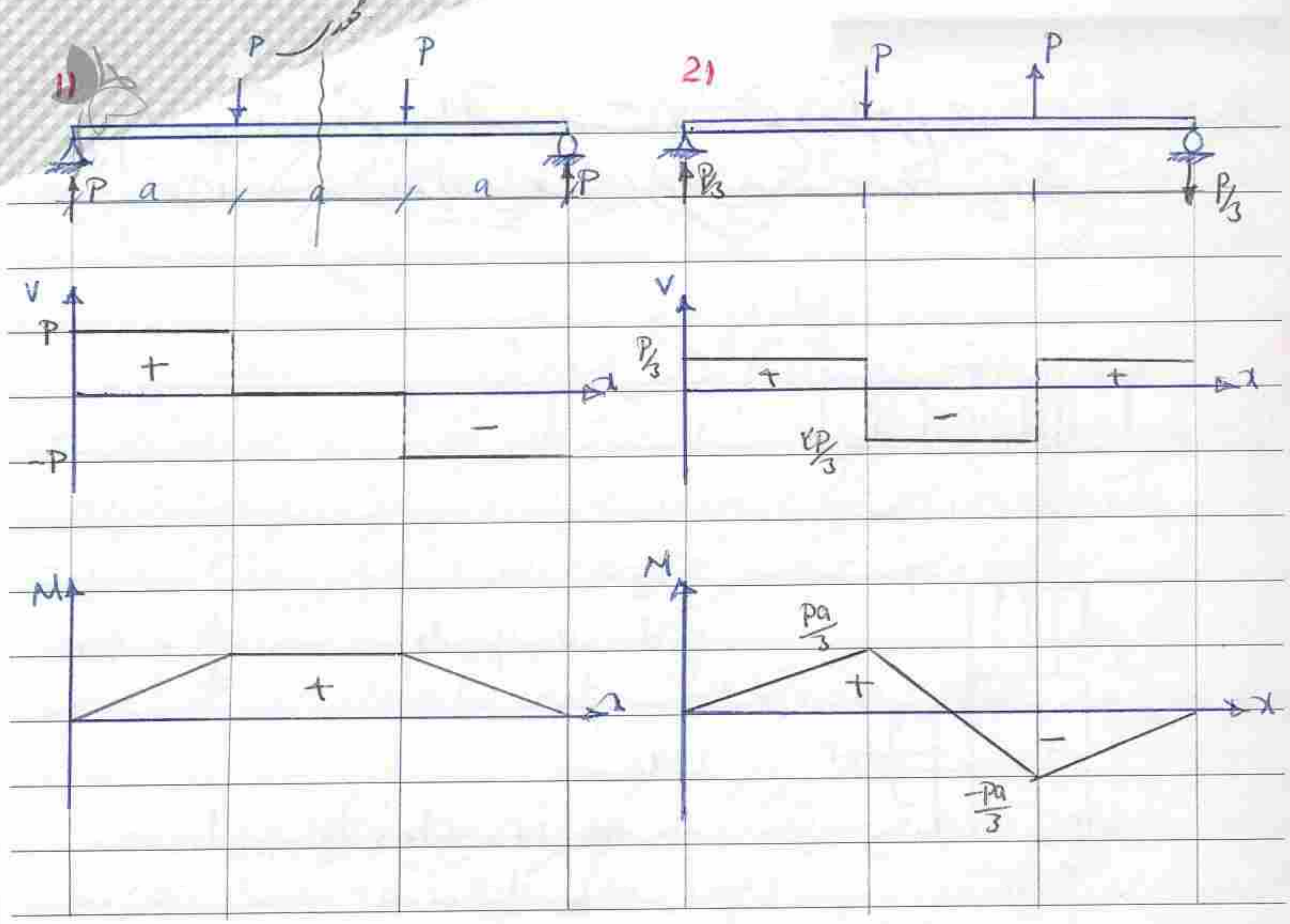
* اگر جهت بار گسترده q رو به سمت پایین باشد جهت تقعر M رو به سمت پایین است و اگر بار گسترده رو به سمت بالا باشد جهت تقعر M رو به سمت بالا است.

مثال ۳



$\frac{x}{4} = \frac{10}{16} \rightarrow x =$

برای رسم نمودار لنگر خمشی در نقطه‌ای که لنگر متمرکز داریم می‌توانیم به راحتی از روش قطع زدن کمک بگیریم.

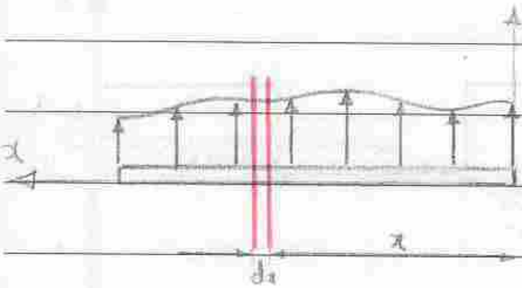


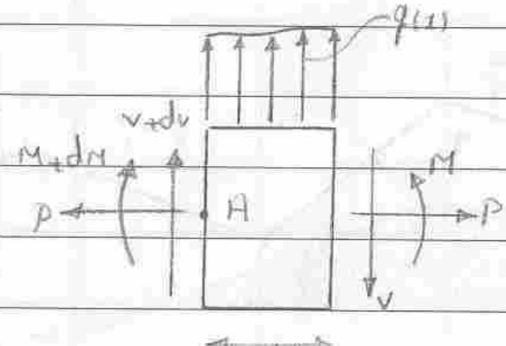
* تیر ۱ دارای تقارن محوری است و تیر ۲ دارای تقارن مرکزی است.

* وقتی تیر دارای تقارن محوری است، نمودار برش آن دارای تقارن مرکزی و نمودار لنگر خمشی آن دارای تقارن محوری است.

* وقتی تیر دارای تقارن مرکزی است، نمودار برش آن دارای تقارن محوری و نمودار لنگر خمشی آن دارای تقارن مرکزی است.

تمرین: اگر مبدأ محور x را انتهای سمت راست تیر در نظر بگیریم و جهت مثبت x به طرف چپ باشد معادلات دیفرانسیل تعادل را بر اساس این حالت بدست آورید.





$$\sum F_y = 0$$

$$V + dV - V + q(x)dx = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dx} = -q(x)$$

$$\sum M_A = 0$$

$$-M - dM + M - V dx + \frac{dx}{2}(q(x)dx) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dM}{dx} = -V$$

رسم منحنی ارتجاعی تیر (elastic Curve)

تعریف: شکل تغییر یافته محور تیر را پس از اعمال نیروهای وارده منحنی تغییر شکل ارتجاعی تیر یا منحنی الاستیک تیر گویند.

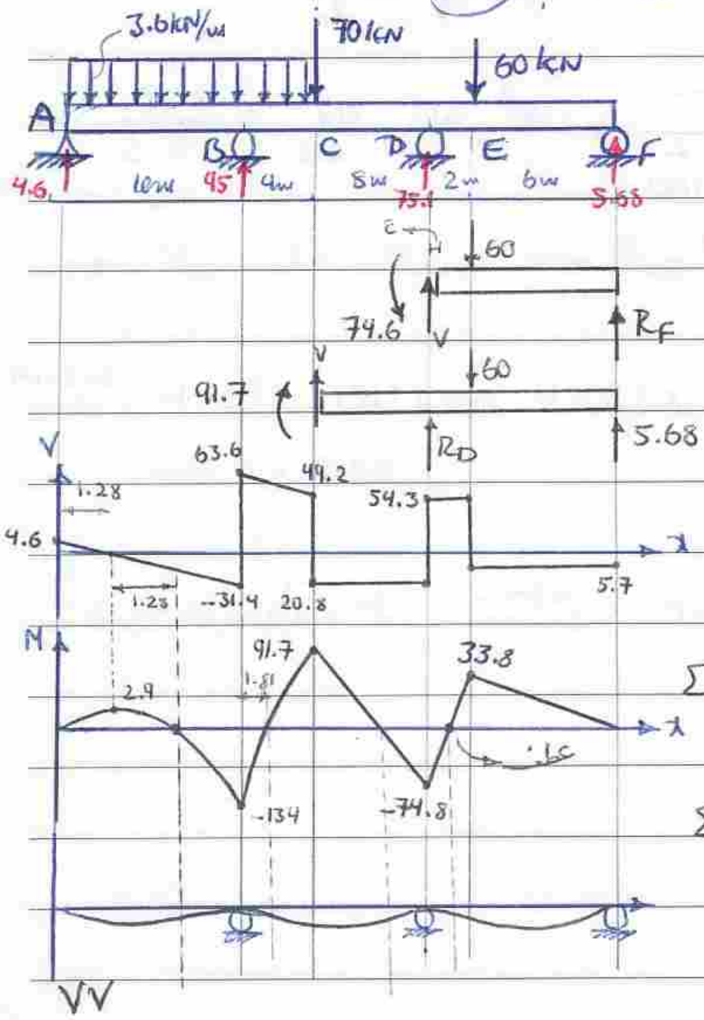
نکته ۱: منحنی ارتجاعی تیر با توجه به دیاگرام لنگر خمشی رسم می‌شود.

نکته ۲: در نواحی از تیر که لنگر خمشی مثبت است تیر دارای تقعر مثبت بوده و اصطلاحاً به صورت کاسه‌ای (تقعر به سمت بالا) تغییر شکل می‌دهد و در ناحیه‌هایی از تیر که لنگر خمشی منفی است تیر دارای تقعر منفی بوده و اصطلاحاً به صورت گنبدی تغییر شکل می‌دهد و در ناحیه‌ای که لنگر خمشی صفر است تیر تغییر شکل ندارد.

نکته ۳: نقاطی از تیر که تغییر تقعر می‌دهد نقطه عطف (Inflection point) و در جایی اتفاق می‌افتد که لنگر خمشی تغییر علامت دهد.

نکته ۴: در رسم منحنی ارتجاعی تیر باید توجه کرد که پیوستگی ارتجاعی تیر حفظ شود.

نکته ۵: در محل تکیه‌گاه‌های ثابت (مفصلی، غلتکی، گیردار و ...) جابه‌جایی و تغییر شکل تیر صفر است و همچنین در محل تکیه‌گاه گیردار شیب منحنی ارتجاعی صفر خواهد بود.



مثال: تیر مقابل نشان داده شده که زیر بعضی می‌باشد که تحت اثر بارهای گسترده و متمرکز نشان داده شده مفروض است. از آنالیز این تیر با روش‌های ماتریسی نشان داده است لنگر خمشی این تیر در مقطع C برابر با $+91.7\ \text{kN.m}$ و در مقطع D برابر با $-74.6\ \text{kN.m}$ می‌باشد. مطلوب است رسم دیاگرام‌های تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی و منحنی ارتجاعی.

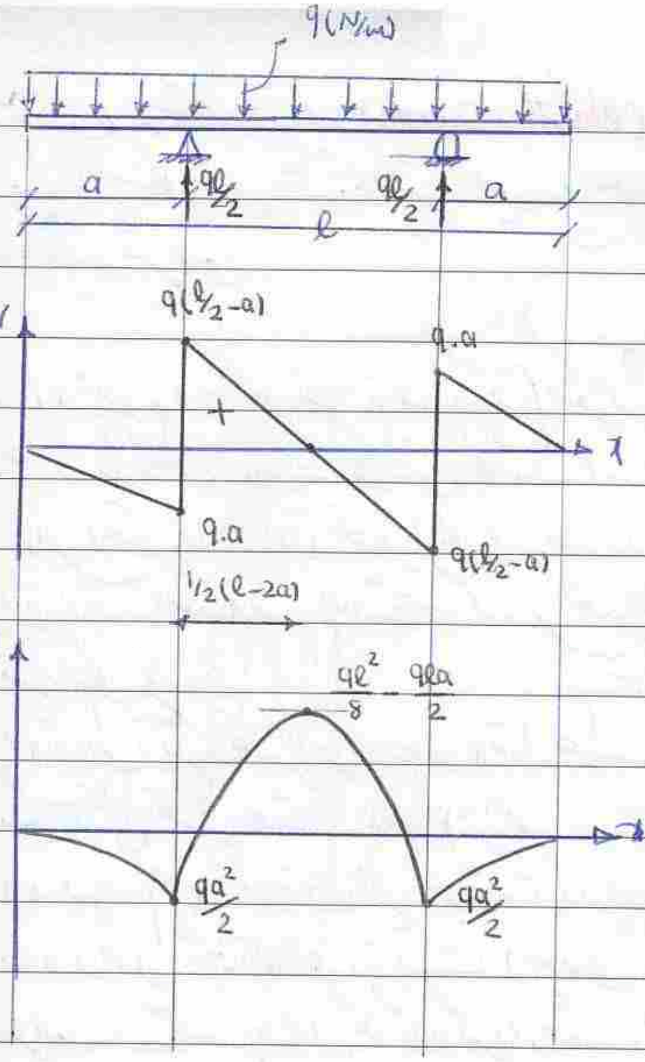
$$\Sigma M_D = 0 \rightarrow R_F \times 8 - 60 \times 2 + 74.6 = 0$$

$$\rightarrow R_F = 5.68\ \text{kN}$$

$$\Sigma M_C = 0 \rightarrow -91.7 + 8R_D - 600 + 16(5.68) = 0$$

$$\rightarrow R_D = 75.1\ \text{kN}$$

$R_A = 4.6\ \text{kN}$ $\qquad$ $R_B = 95\ \text{kN}$



مثال: تیری که داده شده بار گسترده یکنواختی را تحمل می‌کند. مطلوب است تعیین فواصل a برای موضع تکیه‌گاه به طوری که لنگر خمشی Max کمتر به حداقل کاهش یابد و لنگر خمشی Max را بدست آورید.

لنگر خمشی Max وقتی به حداقل می‌رسد که

$$|M^{(+)}_{max}| = |M^{(-)}_{max}|$$

$$\rightarrow a = 0.207l$$

$$M_2 - \left(-\frac{qa^2}{2}\right) = \frac{1}{2}(l-2a)\,q\left(\frac{l}{2}-a\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$M_2 + \frac{qa^2}{2} = \frac{q}{2}\left(\frac{l}{2}-a\right)^2$$

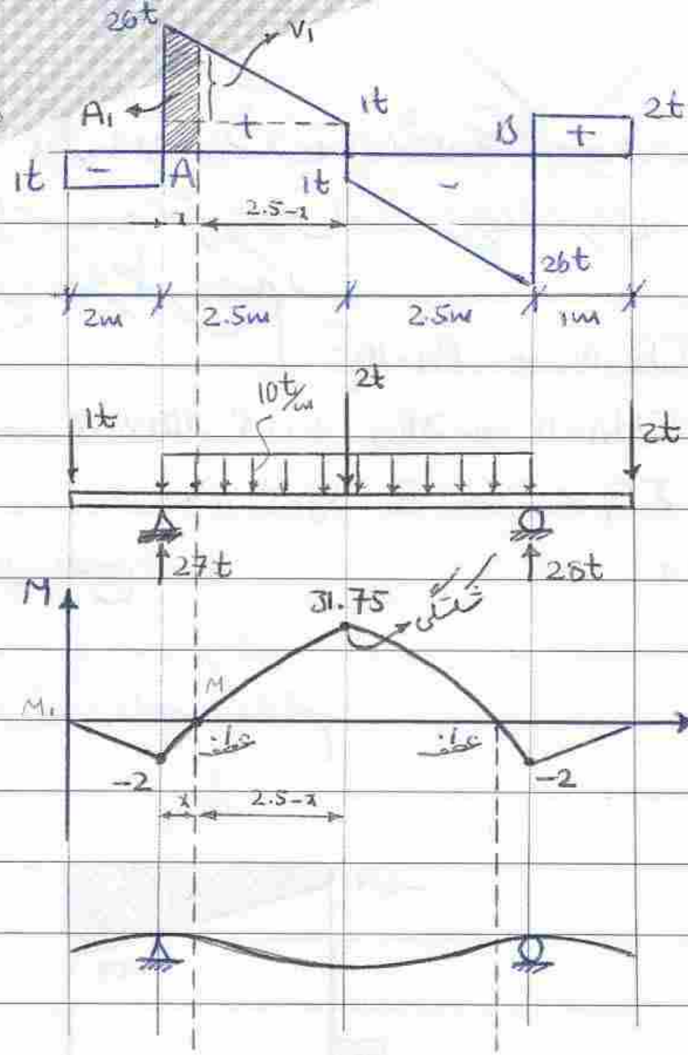
$$M_2 + \frac{qa^2}{2} = \frac{q}{2}\left(\frac{l^2}{4} - la + a^2\right)$$

$$M_2 + \cancel{\frac{qa^2}{2}} = \frac{ql^2}{8} - \frac{qla}{2} + \cancel{\frac{qa^2}{2}}$$

$$\rightarrow M_2 = \frac{ql^2}{8} - \frac{qla}{2}$$

$$|Max^{(+)}| = |Max^{(-)}| \Rightarrow \frac{ql^2}{8} - \frac{qla}{2} = \frac{qa^2}{2} \Rightarrow l^2 - 4la - 4a^2 = 0$$

$$\rightarrow l = 4.82a \Rightarrow a = 0.207\,l$$



مثال: یک تیر ۸ متری در نقاط A و B دارای تکیه گاه مفصلی و غلتکی می باشد. دیاگرام تغییرات نیروی برشی آن مطابق شکل می باشد. مطلوبست بارگذاری تیر را مشخص نموده دیاگرام تغییرات لنگر خمشی را رسم نمایید.

برای اطمینان چند نکته را در اینجا می نویسیم مخصوصاً ΣM.

* اگر $\Sigma M \neq 0$ یعنی احتمالاً لنگر متمرکز در جایی از تیر وجود دارد.
* اگر $\Sigma M = 0$ شد امکان دارد دو لنگر مخالف داشته باشیم که راست باشد باید ذکر کنند.

$$\frac{2.5-x}{2.5} = \frac{V_1}{25}$$

برای یافتن نقطه عطف: $-2 + A_1 = 0$

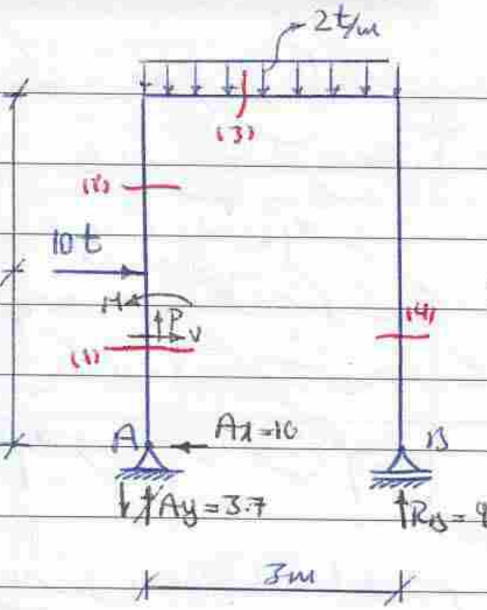
$$\Rightarrow V_1 = 25 - 10x \Rightarrow A_1 = \frac{(26+V_1+1)\times(x)}{2} = \frac{(26+26-10x)x}{2}$$

$$\xrightarrow{A_1-2=0} 4 = (52-10x)x \Rightarrow 4 = 52x - 10x^2 \Rightarrow 10x^2 - 52x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x = 0.08$$

$$M = \int V dx + M_0 \xrightarrow{\text{نقطه عطف}} (M=0) \Rightarrow 0 = \int V dx + M_0 \xrightarrow{M_0=0} \int V dx = 0$$

مثال: قاب نشان داده شده تحت بار گسترده خطی واحد و بار متمرکز مفروض است. نمودار نیروهای محوری، برشی و لنگر خمشی را رسم کنید.



$\Sigma F_x=0 \rightarrow A_x=10t$

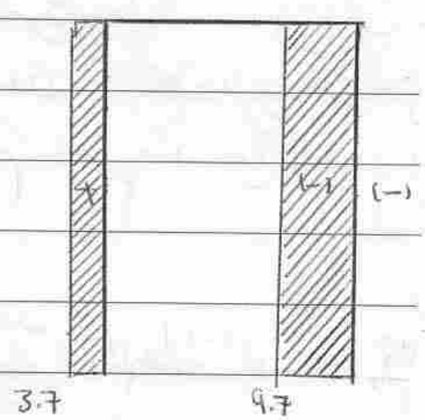
$\Sigma M_A=0 \rightarrow 3R_B-6\times1.5-10\times2=0 \rightarrow R_B=9.7t$

$\Sigma F_y=0 \rightarrow R\ A_y=-3.7t$

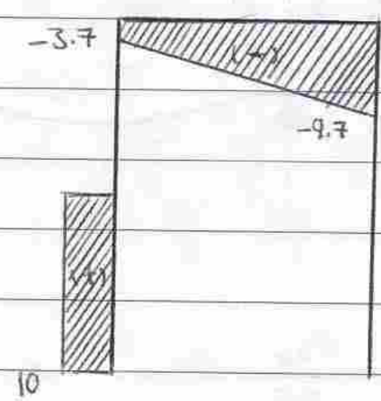
(جهت فرضی اصلاح شود)

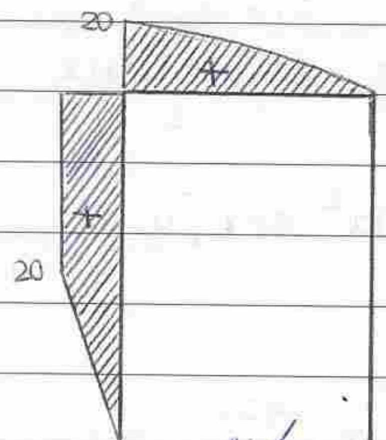
* از داخل قاب به اعضا نگاه می‌کنیم

نیروی محوری



نیروی برشی

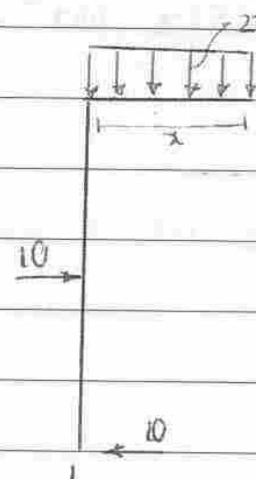




لنگر خمشی (t.m)

برش 1) $P=3.7t$ $V=10t$ $M=10x$

برش 2) $P=3.7t$ $V=0$ $M=10x-(10x-2)$

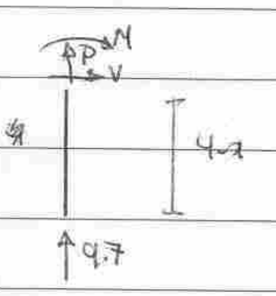


برش 3) $P=0$

$V=-3.7-2x$

$M+3.7x-10\times4+10\times2+x^2=0$

$\Rightarrow M=-x^2-3.7x+20$



* در بندگی خمس در گنج که از یک عضو به عضو دیگر قدر لشکر برابر است .

در صورت لزوم می توانید با آدرس پست الکترونیکی زیر انتقادات و پیشنهادات خود را ارائه فرمائید .

hamid_kazem041@yahoo.com