۱ :

الف) $\begin{pmatrix}۰\\۳\\۵\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}۴\\-۱\\۷\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۰+۴\\۳+(-۱)\\۵+۷\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۴\\۲\\۱۲\end{pmatrix}$

ب) $۲\begin{pmatrix}-۷\\۷\\۳\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}۵\\۴\\۶\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-۱۴\\۱۴\\۶\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}۵\\۴\\۶\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-۱۴+۵\\۱۴+۴\\۶+۶\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-۹\\۱۸\\۱۲\end{pmatrix}$

ج) $۳\begin{pmatrix}۴\\۱۱\\-۵\end{pmatrix}+۲\begin{pmatrix}۵\\۳\\۰\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۱۲\\۳۳\\-۱۵\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}۱۰\\۶\\۰\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۱۲+۱۰\\۳۳+۶\\-۱۵+۰\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۲۲\\۳۹\\-۱۵\end{pmatrix}$

د) $\begin{pmatrix}۱۳\\۸\\۹\\-۲\end{pmatrix}+۳\begin{pmatrix}۶\\۴\\۹\\-۸\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۱۳\\۸\\۹\\-۲\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}۱۸\\۱۲\\۲۷\\-۲۴\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۳۱\\۲۰\\۳۶\\-۲۶\end{pmatrix}$

هـ) $\begin{pmatrix}-۱\\۱\\۵\\۷\end{pmatrix}+۳\begin{pmatrix}۶\\۲\\۸\\۴\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}۴\\۶\\۱\\-۲\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-۱\\۱\\۵\\۷\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}۱۸\\۶\\۲۴\\۱۲\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-۴\\-۶\\-۱\\۲\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۱۳\\۱\\۲۸\\۲۱\end{pmatrix}$

۲:

الف)

$$X+\begin{pmatrix}۴\\-۲\\۰\\۵\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۷\\۸\\۲\\۳\end{pmatrix}\rightarrow X=\begin{pmatrix}۷\\۸\\۲\\۳\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}۴\\-۲\\۰\\۵\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۷-۴\\۸-(-۲)\\۲-۰\\۳-۵\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۳\\۱۰\\۲\\-۲\end{pmatrix}$$

ب)

$$۳X+\begin{pmatrix}۷\\۰\\۳\\-۳\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-۶\\۵\\۰\\۳\end{pmatrix}\rightarrow ۳X=\begin{pmatrix}-۶\\۵\\۰\\۴\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}۷\\۰\\۳\\-۳\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-۱۳\\۵\\-۳\\۷\end{pmatrix}\rightarrow X=\frac{۱}{۳}\begin{pmatrix}-۱۳\\۵\\-۳\\۷\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-۱۳}{۳}\\\frac{۵}{۳}\\-۱\\\frac{۷}{۳}\end{pmatrix}$$

۳:

فرض کنیم a یک nـ بردار سطری باشد. $a=(a_۱,a_۲,\dots,a_n)$

$$(\mu+\lambda)a=(\mu+\lambda)(a_۱,a_۲,\dots,a_n)=((\mu+\lambda)a_۱,(\mu+\lambda)a_۲,\dots,(\mu+\lambda)a_n)$$
$$=(\mu a_۱+\lambda a_۱,\mu a_۲+\lambda a_۲,\dots,\mu a_n+\lambda a_n)$$
$$=(\mu a_۱,\mu a_۲,\dots,\mu a_n)+(\lambda a_۱,\lambda a_۲,\dots,\lambda a_n)$$
$$=\mu(a_۱,a_۲,\dots,a_n)+\lambda(a_۱,a_۲,\dots,a_n)=\mu a+\lambda a$$

بنابراین $(\mu+\lambda)a=\mu a+\lambda a$

$$\mu(\lambda a)=\mu(\lambda(a_۱,\dots,a_n))=\mu(\lambda a_۱,\lambda a_۲,\dots,\lambda a_n)$$
$$=(\mu(\lambda a_۱),\mu(\lambda a_۲),\dots,\mu(\lambda a_n))$$

μ و λ و a_i اعداد حقیقی اند لذا خاصیت شرکت پذیری برقرار است یعنی

$$\mu(\lambda a_i)=(\mu\lambda)a_i$$
$$=((\mu\lambda)a_۱,(\mu\lambda)a_۲,\dots,(\mu\lambda)a_n)=(\mu\lambda)(a_۱,a_۲,\dots,a_n)=(\mu\lambda)a$$

لذا $\mu(\lambda a)=(\mu\lambda)a$

$$1.a = 1.(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (1.a_1, 1.a_2, \ldots, 1.a_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n) = a$$

$$\Rightarrow 1.a = a$$

۴ :

$$a + 3b = a \Rightarrow (-a) + (a + 3b) = (-a) + a$$
$$\Rightarrow (-a + a) + 3b = (-a + a)$$
$$\Rightarrow 0 + 3b = 0 \Rightarrow 3b = 0 \rightarrow b = 0$$

۵ :

قسمت اول :

$$\alpha x = 0 \xrightarrow{\alpha \neq 0} \frac{1}{\alpha}(\alpha x) = 0 \rightarrow (\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha)x = 0 \rightarrow 1.x = 0 \rightarrow x = 0$$

قسمت دوم :

$$\alpha x = \beta x \rightarrow (\alpha - \beta)x = 0 \xrightarrow{\alpha \neq \beta} \frac{1}{\alpha - \beta}((\alpha - \beta)x) = 0$$
$$\rightarrow (\frac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta}) \cdot x = 0 \rightarrow 1.x = 0 \rightarrow x = 0$$

۶ :

مثال ۱ :

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \alpha a = b \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 0 = 1 \\ \alpha = 0 \end{matrix}$$ تناقض

لذا حل پذیر نیست .

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \alpha a = b \rightarrow \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 3\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \alpha = \frac{3}{2} \\ \alpha = \frac{2}{3} \end{matrix}$$ تناقض

۷ :

$$((x-a)+c)+(-c)=(a+b)+(-c)$$

$$(x-a)+(c+(-c))=a+b-c$$

$$x-a+0=a+b-c \to x-a=a+b-c \to (x-a)+a=(a+b-c)+a$$

$$\to x+(-a+a)=2a+b-c \to x+0=2a+b-c \to x=2a+b-c$$

۸ :

$$\begin{matrix} x+2y=a \\ 2x+5y=b \end{matrix} \to \begin{matrix} x+2y=a \\ y=b-2a \end{matrix} \to \begin{matrix} x=5a-2b \\ y=b-2a \end{matrix}$$

۹ :

هر n ـ بردار n مولفه دارد و هر مولفه به دو حالت با عددهای ۰ و ۱ پر می شود لذا پر کردن n مؤلفه با دو عدد ۰ و ۱ با $2\times2\times\cdots\times2=2^n$ ممکن خواهد بود .

۱۰:

برهان : نشان می دهیم اعداد مختلط همان دوتایی های مرتب هستند یعنی $\mathbb{C}=R^2$

$$a+bi=a(1,0)+b(0,1)=(a,b)\in R^2$$

فرض کنیم a ، b و c ، n ـ بردار هایی باشند که مؤلفه های آنها اعداد مختلط باشندقرار می دهیم:

$$a=((a_1,a'_1),(a_2,a'_2),\ldots,(a_n,a'_n)) \quad , \quad b=((b_1,b'_1),(b_2,b'_2),\ldots,(b_n,b'_n))$$

$$c=((c_1,c'_1),(c_2,c'_2),\ldots,(c_n,c'_n))$$

که درآن ها ، $a_i,b_i,c_i,a'_i,b'_i,c'_i\in R$ ، $\forall i=1,\ldots,n$

تحقیق جابجایی :

$$\vec{a}+\vec{b}=\big((a_1,a_1')+(b_1,b_1'),\ldots,(a_n,a_n')+(b_n,b_n')\big)$$
$$=\big((a_1+b_1,a_1'+b_1'),\ldots,(a_n+b_n,a_n'+b_n')\big)$$
$$=\big((b_1+a_1,b_1'+a_1'),\ldots,(b_n+a_n,b_n'+a_n')\big)$$
$$=\big((b_1,b_1')+(a_1,a_1'),\ldots,(b_n,b_n')+(a_n,a_n')\big)$$
$$=\big((b_1,b_1'),\ldots,(b_n,b_n')\big)+\big((a_1,a_1'),\ldots,(a_n,a_n')\big)=\vec{b}+\vec{a}$$

$\Rightarrow \vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \Rightarrow$ قانون جابجایی برقرار است.

تحقیق قانون شرکت پذیری :

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=$$
$$=\big((a_1,a_1'),\ldots,(a_n,a_n')\big)+\big((b_1,b_1'),\ldots,(b_n,b_n')\big)+\big((c_1,c_1'),\ldots,(c_n,c_n')\big)$$
$$=\big((a_1,a_1')+(b_1,b_1'),\ldots,(a_n,a_n')+(b_n,b_n')\big)+\big((c_1,c_1'),\ldots,(c_n,c_n')\big)$$
$$=\big((a_1+b_1,a_1'+b_1'),\ldots,(a_n+b_n,a_n'+b_n')\big)+\big((c_1,c_1'),\ldots,(c_n,c_n')\big)$$
$$=\big((a_1+b_1,a_1'+b_1')+(c_1,c_1'),\ldots,(a_n+b_n,a_n'+b_n')+(c_n,c_n')\big)$$
$$=\big((a_1+b_1)+c_1,(a_1'+b_1')+c_1',\ldots,(a_n+b_n)+c_n,(a_n'+b_n')+c_n'\big)$$
$$=\big((a_1+(b_1+c_1),a_1'+(b_1'+c_1'),\ldots,a_n+(b_n+c_n),a_n'+(b_n'+c_n')\big)$$
$$=\big((a_1,a_1')+(b_1+c_1,b_1'+c_1'),\ldots,(a_n,a_n')+(b_n+c_n,b_n'+c_n')\big)$$
$$=\big((a_1,a_1'),\ldots,(a_n,a_n')\big)+\big((b_1+c_1,b_1'+c_1'),\ldots,(b_n+c_n,b_n'+c_n')\big)$$
$$=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})\Rightarrow \qquad (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

تحقیق قانون عضو خنثی :

$\bar{\mathrm{a}}=\bar{\mathrm{o}}+\bar{\mathrm{a}}=\bar{\mathrm{a}}+\bar{\mathrm{o}}=\bar{\mathrm{a}}$ که در آن $\bar{\mathrm{a}}$ برداری بـا مؤلفـه هـای مختلـط و $\bar{\mathrm{o}}$ بـرداری n تـایی بـا مؤلفه های دوتایی که هر دو مؤلفه آن صفرند یعنی :

$$= ((\circ,\circ),(\circ,\circ),\ldots,(\circ,\circ))$$

$$+\vec{a} = \big((\circ,\circ),(\circ,\circ),\ldots,(\circ,\circ)\big) + \big((a_1,a'_1),\ldots,(a_n,a'_n)\big)$$
$$= \big((\circ,\circ)+(a_1,a'_1),\ldots,(\circ,\circ)+(a_n,a'_n)\big)$$
$$= \big((\circ+a_1,\circ+a'_1),\ldots,(\circ+a_n,\circ+a'_n)\big)$$
$$= \big((a_1+\circ,a'_1+\circ),\ldots,(a_n+\circ,a'_n+\circ)\big)$$
$$= \big((a_1,a'_1)+(\circ,\circ),\ldots,(a_n,a'_n)+(\circ,\circ)\big)$$
$$= \big((a_1,a'_1),\ldots,(a_n,a'_n)\big) + \big((\circ,\circ),(\circ,\circ),\ldots,(\circ,\circ)\big)$$
$$= \vec{a}+\overline{o}$$

$$\overline{o}+\vec{a} = \vec{a}+\overline{o} = (a_1+\circ,a'_1+\circ),\ldots,(a_n+\circ,a'_n+\circ)$$
$$= \big((a_1,a'_1),\ldots,(a_n,a'_n)\big) = \vec{a}$$

لذا حکم اثبات شد یعنی $\overline{o}+\vec{a}=\vec{a}+\overline{o}=\vec{a}$

تحقیق قانون $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\circ$

$$\big((a_1,a'_1),\ldots,(a_n,a'_n)\big) + \big((-a_1,-a'_1),\ldots,(-a_n,-a'_n)\big) =$$
$$= \big((a_1-a_1,a'_1-a'_1),\ldots,(a_n-a_n,a'_n-a'_n)\big) \qquad (I)$$
$$= \big((\circ,\circ),\ldots,(\circ,\circ)\big) = \vec{\circ}$$

$$\big((-a_1,-a'_1),\ldots,(-a_n,-a'_n)\big) + \big((a_1,a'_1),\ldots,(a_n,a'_n)\big) =$$
$$= \big((-a_1+a_1,-a'_1+a'_1),\ldots,(-a_n+a_n,-a'_n+a'_n)\big) \qquad (II)$$
$$= \big((\circ,\circ),\ldots,(\circ,\circ)\big) = \circ$$

$$I,II \Rightarrow \vec{a}+(-\vec{a}) = (-\vec{a})+\vec{a} = \circ$$

تحقیق قانون $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=$$

$$\lambda\left(((a_1,a_1'),\ldots,(a_n,a_n'))+((b_1,b_1'),\ldots,(b_n,b_n'))\right)=$$

$$=\lambda\left((a_1+b_1,a_1'+b_1'),\ldots,(a_n+b_n,a_n'+b_n')\right)$$

$$=\left(\lambda(a_1+b_1,a_1'+b_1'),\ldots,\lambda(a_n+b_n,a_n'+b_n')\right)$$

$$=\left((\lambda a_1+\lambda b_1,\lambda a_1'+\lambda b_1'),\ldots,(\lambda a_n+\lambda b_n,\lambda a_n'+\lambda b_n')\right)$$

$$=\left((\lambda a_1,\lambda a_1'),\ldots,(\lambda a_n,\lambda a_n')\right)+\left((\lambda b_1,\lambda b_1'),\ldots,(\lambda b_n,\lambda b_n')\right)$$

$$=\lambda\left((a_1,a_1'),\ldots,(a_n,a_n')\right)+\lambda\left((b_1,b_1'),\ldots,(b_n,b_n')\right)=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$$

$$\rightarrow \lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$$

تحقيق قانون $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$

$$(\lambda+\mu)a=(\lambda+\mu)\left((a_1,a_1'),\ldots,(a_n,a_n')\right)$$

$$=\left((\lambda+\mu)(a_1,a_1'),\ldots,(\lambda+\mu)(a_n,a_n')\right)$$

$$=\left(((\lambda+\mu)a_1,(\lambda+\mu)a_1'),\ldots,((\lambda+\mu)a_n,(\lambda+\mu)a_n')\right)$$

$$=\left((\lambda a_1+\mu a_1,\lambda a_1'+\mu a_1'),\ldots,(\lambda a_n+\mu a_n,\lambda a_n'+\mu a_n')\right)$$

$$=\left(\lambda(a_1,a_1')+\mu(a_1,a_1'),\ldots,\lambda(a_n,a_n')+\mu(a_n,a_n')\right)$$

$$=\lambda\left((a_1,a_1'),\ldots,(a_n,a_n')\right)+\mu\left((a_1,a_1'),\ldots,(a_n,a_n')\right)=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$$

لذا $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$

تحقيق قانون $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$

$$\lambda(\mu\vec{a})=\lambda\left(\mu((a_1,a_1'),\ldots,(a_n,a_n'))\right)=\lambda\left(\mu(a_1,a_1'),\ldots,\mu(a_n,a_n')\right)$$

$$=\lambda\left((\mu a_1,\mu a_1'),\ldots,(\mu a_n,\mu a_n')\right)$$

$$=\left((\lambda(\mu a_1),\lambda(\mu a_1')),\ldots,(\lambda(\mu a_n),\lambda(\mu a_n'))\right)$$

$$=\left(((\lambda\mu)a_1),(\lambda\mu)a_1')),\ldots,((\lambda\mu)a_n),(\lambda\mu)a_n'))\right)$$

$$=\left(\lambda\mu((a_1,a_1'),\ldots,(a_n,a_n'))\right)$$

$$=\lambda\mu\left((a_1,a_1'),\ldots,(a_n,a_n')\right)=(\lambda\mu)\vec{a}$$

$$\rightarrow \lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$$

تحقیق قانون $1.\vec{a}=\vec{a}$

$$1.\vec{a}=1.((a_1,a'_1),\dots,(a_n,a'_n))=(1.(a_1,a'_1),\dots,1.(a_n,a'_n))$$
$$=((1\times a_1,1\times a'_1),\dots,(1\times a_n,1\times a'_n))$$

$$\forall x\in R \qquad 1\times x=x$$
$$=((a_1,a'_1),\dots,(a_n,a'_n))=\vec{a}\to 1.\vec{a}=\vec{a}$$

:۱۱

$$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+3y\\2x+7y\end{pmatrix}\leftrightarrow \begin{matrix}3=x+3y\\4=2x+7y\end{matrix}\to\begin{matrix}x+3y=3\\y=-2\end{matrix}\to\begin{matrix}x=9\\y=-2\end{matrix}$$

:۱۲

$$\begin{matrix}2\lambda+5\mu+2\gamma=0\\\lambda+9\mu-3\gamma=0\end{matrix}\to\begin{matrix}-13\mu+8\gamma=0\\\lambda+9\mu-3\gamma=0\end{matrix}\to\begin{matrix}\mu-\frac{8}{13}\gamma=0\\\lambda+\frac{72}{13}\mu-3\gamma=0\end{matrix}\to\begin{matrix}\mu=\frac{8}{13}\gamma\\\lambda=-\frac{33}{13}\gamma\end{matrix}$$

اگر $\gamma=0$ در این صورت جواب بدیهی $(0,0,0)$ دارد درغیر این صورت دارای جواب غیر بدیهی $(\lambda,\mu,\gamma)=(\frac{-33}{13}\gamma,\frac{8}{13}\gamma,\gamma)$ است.

قسمت دوم: $a=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix},c=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$

لذا (I)
$$\begin{matrix}\lambda a_1+\mu b_1+\gamma c_1=0\\\lambda a_2+\mu b_2+\gamma c_2=0\end{matrix}$$

دستگاه I دارای ۲ سطر و ۳ مجهول است و از اینکه تعداد سطرها کمتر از تعداد مجهولات است دستگاه جواب غیر بدیهی دارد. یعنی جوابی وجود دارد که در آن یکی از λ ، μ ، γ صفر نیست.

۱۳ :الف)

$$v=\begin{pmatrix}23\\10\\6\end{pmatrix}\to v_1=\begin{pmatrix}21\\11\\7\end{pmatrix}\to v_2=\begin{pmatrix}19\\12\\8\end{pmatrix}\to v_3=\begin{pmatrix}17\\13\\9\end{pmatrix}\to v_4=\begin{pmatrix}15\\14\\10\end{pmatrix}\to v_5=\begin{pmatrix}13\\15\\11\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow v_6 = \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix} \rightarrow v_7 = \begin{pmatrix} 12 \\ 14 \\ 13 \end{pmatrix} \rightarrow v_8 = \begin{pmatrix} 13 \\ 12 \\ 14 \end{pmatrix} \rightarrow v_9 = \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots$$

ادامه این فرآیند همواره یکی از بردارهای v_6 ، v_7 ، v_8 خواهد بود.

ب) بعد از ۹ بار انجام این عمل به v_9 رسیده ایم و اگر این فرآیند تکرار شود بعد از ۳ مرحله دوباره همان v_9 خواهد شد و بعد از ۳۰ دور که ۹۰ مرحله خواهد شد همان v_9 خواهد بود و یک مرحلهٔ دیگر v_{10} خواهد شد که با ۹ مرحله قبل ، جمعاً ۹۰ مرحله خواهد شد و به $v_{10} = \begin{pmatrix} 12 \\ 14 \\ 13 \end{pmatrix}$ خواهیم رسید.

:۱٤

بردار $\frac{1}{30}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{30})$ یک ٤ ـ بردار است.

معنی بردار $\frac{1}{30}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{30})$ بترتیب مؤلفه ها متوسط درصدی از درآمد است که هر خانواده برای غذا ، مسکن لباس و سایر موارد خرج می کند.

:۱۵

وضع اولیه دستگاه را با بردار

$$n = \begin{pmatrix} 500 \\ 450 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \text{ جمعیت دهکدهٔ} \\ B \text{ جمعیت دهکدهٔ} \\ C \text{ جمعیت دهکدهٔ} \end{pmatrix}$$

و هر مرحله از عملیات را با یک بردار ۳ ـ تـایی مشـخص مـی کنیـم . بـردار $s_1 = \begin{pmatrix} -50 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$

مشخص کنندهٔ مرحله اول است بردارهای $s_2 = \begin{pmatrix} 30 \\ -60 \\ 30 \end{pmatrix}$ و $s_3 = \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ -80 \end{pmatrix}$ مشخص کننده مراحل دوم و سوم هستند.

وضع نهایی دستگاه با بردار $n+10(s_1+s_2+s_3)$ مشخص می شود.

$$s_1+s_2+s_3=\begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix}$$ چون

وضع نهایی بعد از ۱۰ سال برابر است با

$$n+10(s_1+s_2+s_3)=\begin{pmatrix} 500 \\ 450 \\ 600 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 200 \\ 0 \\ -200 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 700 \\ 450 \\ 400 \end{pmatrix}$$

:۱۶

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n &= y_1 \\ x_2+x_3+\cdots+x_n &= y_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ x_{n+1}+x_n &= y_{n-1} \\ x_n &= y_n \end{aligned}$$

با کم کردن هر سطر از سطر ماقبل دستگاه زیر بدست می آید.

$$\begin{aligned} x_1 \qquad &= y_1-y_2 \\ x_2 \qquad &= y_2-y_3 \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \\ x_{n+1} \qquad &= y_{n-1}-y_n \\ x_n &= y_1 \end{aligned}$$

پاسخ تمرینات فصل ۲ بخش ۲

۱ :

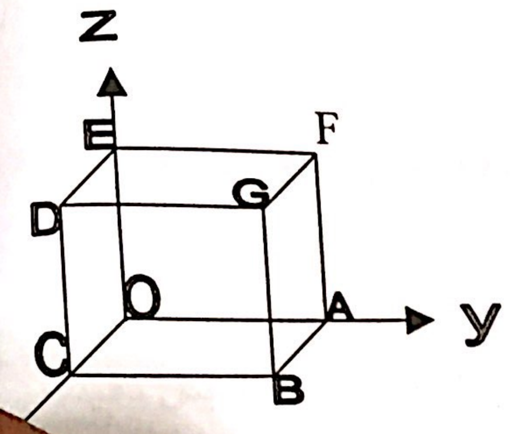
الف) $-۲i + j - k = (-۲,۱,-۱)$

ب) $i + j + k = (۱,۱,۱)$

ج) $-i + j + k = (-۱,۱,۱)$

د) $۲i - j + k = (۲,-۱,۱)$

۲ :



$$\overrightarrow{OD} = (۱,۰,۱) \qquad \overrightarrow{OA} = (۰,۱,۰)$$

$$\overrightarrow{OE} = (۰,۰,۱) \qquad \overrightarrow{OB} = (۱,۱,۰)$$

$$\overrightarrow{OF} = (۰,۱,۱) \qquad \overrightarrow{OC} = (۱,۰,۰)$$

$$\overrightarrow{OG} = (۱,۱,۱)$$

۳ :

$$a = i = (۱,۰,۰)$$
$$b - a = i + j + k = (۱,۱,۱) \rightarrow l(t) = a + (b-a)t$$
$$= (۱,۰,۰) + (۱,۱,۱)t = (۱+t, t, t)$$

نقطه تلاقی با صفحه $x = ۰$:

$$x_{l(t)} = ۰ \Rightarrow ۱ + t = ۰ \rightarrow t = -۱ \rightarrow A = (۰,-۱,-۱)$$

نقطه تلاقی با صفحه $y = ۲$:

$$t = ۲ \Rightarrow B = (۳,۲,۲)$$

٤ :

$$a = (-۱,-۱,۰) \qquad b - a = (۳,۲,۲)$$
$$b = (۲,۱,۲)$$
$$L(t) = a + (b-a)t = (-۱,-۱,۰) + (۳,۲,۲)t = (-۱+۳t, -۱+۲t, ۲t)$$

اگر خط صفحه $x = ۰$ را قطع کند مؤلفه x آن صفر خواهد شد لذا

$$-۱ + ۳t = ۰ \rightarrow t = \frac{۱}{۳}$$

نقطه تلاقی $(\circ,-\frac{۱}{۲},۱)$ خواهد بود.

۵ : معادله خط گذرنده از نقطه $(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ موازی با $u=(A,B,C)$ بـه صـورت زیـر است

$$\frac{x-x_\circ}{A}=\frac{y-y_\circ}{B}=\frac{z-z_\circ}{C}$$

$$\begin{aligned} x(t)&=\alpha+\lambda t \\ y(t)&=\beta+\mu t \\ z(t)&=\gamma+\nu t \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} \frac{x(t)-\alpha}{\lambda}&=t \\ \frac{y(t)-\beta}{\mu}&=t \\ \frac{z(t)-\gamma}{\nu}&=t \end{aligned} \qquad \frac{x(t)-\alpha}{\lambda}=\frac{y(t)-\beta}{\mu}=\frac{z(t)-\gamma}{\nu}:L(t)$$

$L(t)$ معادله خط گذرنده از نقطه (α,β,γ) و موازی بردار (λ,μ,υ) است .

:٦

$$\begin{aligned} OA^۲&=z^۲+r^۲ \\ r^۲&=x^۲+y^۲ \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} OA^۲&=x^۲+y^۲+z^۲ \\ |\overrightarrow{OA}|&=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲} \end{aligned}$$

:۷

$$\begin{aligned} a&=(-۱,-۱,\circ) \\ b&=(۱,۱,۱) \end{aligned} \qquad b-a=(۲,۲,۱)$$

$$L(t)=a+(b-a)t=(-۱,-۱,\circ)+(۲,۲,۱)t=(-۱+۲t,-۱+۲t,t)$$

اگر فاصله این خط تا مبداء را با $x(t)$ نشان دهیم داریم

$$x^۲(t)=۲-۸t+۹t^۲=L(t)$$

اگر $R(t)=x^۲(t)$ را مینیمم کنیم ، $x(t)$ را مینیمم کرده ایم

$$R'(t)=-۸+۱۸t=\circ \Rightarrow t=\frac{۴}{۹}$$

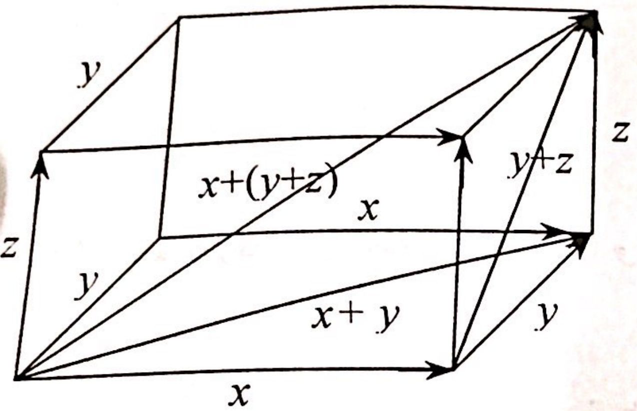
$$R''(t)=۱۸>\circ$$

لذا نقطه مینیمم به ازای $t = \frac{۴}{۹}$ بدست می آید. یعنــی نقطــه $(\frac{۴}{۹}, -\frac{۱}{۹}, -\frac{۱}{۹})$ تــا مبـدا کمـترین فاصله را دارد.

:۸

از روی شکل واضح است که $x + (y + z)$ قطر متوازی السطوح است.

$x + (y + z)$ و $(x + y) + z$ هر دو اندازهٔ قطر متوازی‌الســطوح اســت کــه از دو مســـیر متفــاوت بدست آمده است.



:۹

$$(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$$

تعبیر هندسی : اگر بردار a را در اسکالر $(\lambda + \mu)$ ضرب کنیم بردار $(\lambda + \mu)a$ بدست می‌آید بردار حاصل برابر است با ضرب بردار a در اسکالر λ با اضافه ضـرب بـردار a در اسکالر μ یعنی : $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$

$$\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$$

تعبیر هندسی : اگر بردار $a+b$ که جمع دو بـردار a و b مـی باشـد در اسـکالر λ ضـرب شود بردار $\lambda(a+b)$ بدست می آید که برابر است با ضرب اسکالر λ در بردار a باضافه ضرب اسکالر λ در بردار b.

$\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$ *

تعبیر هندس : $\lambda(\mu a)$ یعنی بردار a را ابتدا در اسکالر μ ضرب کنیم تا بردار μa بدست آید و بعد بردار حاصل را در اسکالر λ ضرب کنیم تا بردار $\lambda(\mu a)$ بدست آید و بـا توجـه به تساوی * این عمل هم ارز با اینست که ابتدا بردار a را در اسکالر $\lambda\mu$ ضرب کنیم.

:۱۰

$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0$$

$$\lambda + \mu + \nu = 0 \quad \rightarrow \lambda = -(\mu + \nu) \rightarrow (-\mu - \nu)x + \mu y + \upsilon z = 0$$

$$\rightarrow x = \frac{\mu}{\mu+\nu} y + \frac{\nu}{\mu+\nu} z$$

x ترکیب خطی از y و z است لذا سه نقطه روی یک خط قرار دارند.

بالعکس : فرض کنید x، y و z روی یک خط باشند لذا (I) $\quad x = \alpha y + \beta z$

$$\rightarrow x - \alpha y - \beta z = 0$$

$$\lambda = 1$$

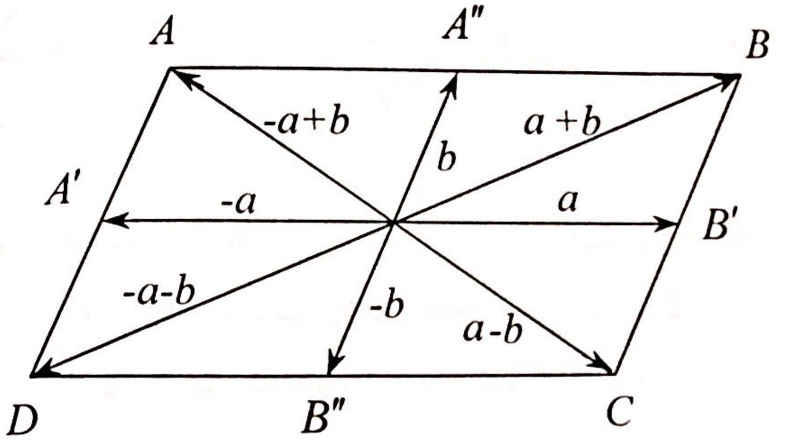
$$\mu = -\alpha \rightarrow \quad \lambda + \mu + \nu = 1 - \alpha - \beta = 0 \rightarrow \alpha + \beta = 1$$

$$\nu = -\beta$$

لذا کافی است در رابطه (I) فرض کنیم $\alpha + \beta = 1$ و با توجه به اینکه x، y و z نقاط رأسی نیستند چنین فرضی منطقی است.

:۱۱

زیرا :



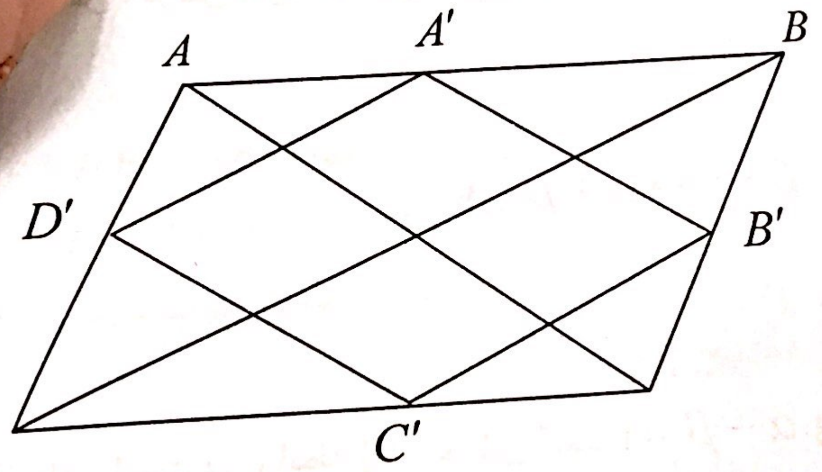
$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel A'B' \\ DC \parallel A'B' \end{array}\right. \rightarrow AB \parallel DC$$

$$\left.\begin{array}{l} BC \parallel A''D'' \\ AD \parallel A''D'' \end{array}\right. \rightarrow BC \parallel AD$$

اضلاع مقابل چهار ضلعی $ABCD$ موازیند لذا $ABCD$ متوازی الاضلاع است.

۱۲ :

قضیه : اگر د رمثلثی وسط های دو ضلع را به هم وصل کنیم
پاره خط حاصل موازی ضلع سوم است.



در مثلث ABC : (۱) $A'B' \parallel AC$

در مثلث ADC : (۲) $D'C' \parallel AC$

در مثلث ABD : (۳) $A'D' \parallel BD$

در مثلث BDC : (٤) $B'C' \parallel BD$

از(۱)و (۲)نتیجه می گیریم $A'B' \parallel D'C'$. I

از(۳) و (٤) نتیجه می گیریم $A'D' \| B'C'$ II

از روابط I و II نتیجه می شود که اضلاع مقابل چهارضلعی $A'B'C'D'$ موازیند لـذا چهار ضلعی $A'B'C'D'$ متوازی الاضلاع است.

۱۳:

الف: $M_1 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

ب: $M_2 = (1,1,0)$

ج: $M_3 = (0,0,1)$

۱٤ :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = t$$

$$\Rightarrow x - x_1 = (x_2 - x_1)t \to x = x_1 + (x_2 - x_1)t$$

$$y - y_1 = (y_2 - y_1)t \to y = y_1 + (y_2 - y_1)t \qquad I$$

$$z - z_1 = (z_2 - z_1)t \to z = z_1 + (z_2 - z_1)t$$

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2} = \frac{1}{3}(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2})$$

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = \frac{1}{9}(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$t^2\left((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\right) = \frac{1}{9}\left((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\right)$$

$$\Rightarrow t^2 = \frac{1}{9} \to t = \pm\frac{1}{3}$$

$$I \to x = x_۱ \pm \frac{۱}{۳}(x_۲ - x_۱)$$

$$y = y_۱ \pm \frac{۱}{۳}(y_۲ - y_۱)$$

$$z = z_۱ \pm \frac{۱}{۳}(z_۲ - z_۱)$$

۱۶ :

براینده دو نیرو در راستای محور xها $F_۱ = -۱۰$ در جهت منفی محور x ها است. حال برآیند $F_۱$ با $F_۱ = ۱۵$ را بدست می آوریم.

$$F_۳ = \sqrt{F_۱^۲ + F_۲^۲} = \sqrt{۱۰^۲ + ۱۵^۲} = \sqrt{۱۰۰ + ۲۲۵} = \sqrt{۳۲۵}$$

۱۷ :

$$(۰,۰) = ۰ \times i + \times j = ۰$$

$$(۰,۱) = j$$

$$(۱,۰) = i$$

$$(۱,۱) = i + j$$

مختصات مرکز جرم:

$$r_c = \frac{۱ \times ۰ + ۲ \times j + ۳ \times i + ۴(i + j)}{۱۰} = \frac{۷}{۱۰} i + \frac{۶}{۱۰} j = (\frac{۷}{۱۰}, \frac{۶}{۱۰})$$

:۱

الف $(i+j^{۲})_{(۲,۲)}=\begin{pmatrix} ۱+۱^{۲} & ۱+۲^{۲} \\ ۲+۱^{۲} & ۲+۲^{۲} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۱ & ۵ \\ ۳ & ۶ \end{pmatrix}$

ب $(ij)_{(۲,۳)}=\begin{pmatrix} ۱\times۱ & ۱\times۲ & ۱\times۳ \\ ۲\times۱ & ۲\times۲ & ۲\times۳ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۲ & ۶ \end{pmatrix}$

ج) $(i^{۲}+j^{۲})_{(۲,۳)}=\begin{pmatrix} ۱^{۲}+۱^{۲} & ۱^{۲}+۲^{۲} & ۱^{۲}+۳^{۲} \\ ۲^{۲}+۱^{۲} & ۲^{۲}+۲^{۲} & ۲^{۲}+۳^{۲} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۲ & ۵ & ۱۰ \\ ۵ & ۸ & ۱۳ \end{pmatrix}$

د) $(۲i+۳j)_{(۳,۳)}=\begin{pmatrix} ۲\times۱+۳\times۱ & ۲\times۱+۳\times۲ & ۲\times۱+۳\times۳ \\ ۲\times۲+۳\times۱ & ۲\times۲+۳\times۲ & ۲\times۲+۳\times۳ \\ ۲\times۳+۳\times۱ & ۲\times۳+۳\times۲ & ۲\times۳+۳\times۳ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۵ & ۸ & ۱۱ \\ ۷ & ۱۰ & ۱۳ \\ ۹ & ۱۲ & ۱۵ \end{pmatrix}$

:۲

الف)

$$\begin{pmatrix} ۲ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۵ \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -۱ & ۴ & ۸ \\ ۵ & -۳ & ۴ \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۵ & ۶ & ۷ \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} ۲-۱-۰ & ۳+۴-۱ & ۱+۸-۰ \\ ۰+۵-۵ & ۰-۳-۶ & ۵+۴-۷ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۱ & ۶ & ۹ \\ ۰ & -۹ & ۲ \end{pmatrix}$$

ب)

$$\begin{pmatrix} ۳ & ۹ \\ ۱ & -۲ \end{pmatrix}+۲\begin{pmatrix} ۶ & ۰ \\ -۱ & ۵ \end{pmatrix}-۳\begin{pmatrix} ۲ & -۴ \\ ۱ & ۲ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۳+۱۲-۶ & ۹+۰+۱۲ \\ ۱-۲-۳ & -۲+۱۰-۶ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۹ & ۲۱ \\ -۴ & ۲ \end{pmatrix}$$

ج)

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۳ & ۶ \\ ۴ & ۲ & ۷ \\ ۰ & ۳ & ۵ \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} ۹ & ۰ & ۳ \\ ۰ & -۱ & ۳ \\ ۴ & ۹ & ۰ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۱۰ & ۳ & ۹ \\ ۴ & ۱ & ۱۰ \\ ۴ & ۱۲ & ۵ \end{pmatrix}$$

:۳

$$X + A + B - C = ۳X + ۴A$$

$$X - ۳X = ۴A - A - B + C \rightarrow -۲X = ۳A - B + C$$

$$\rightarrow X = -\frac{۱}{۲}(۳A - B + C)$$

:٤

جابه‌جایی A+B=B+A

$$A + B = (a_{ij})_{m\times n} + (b_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n} = (b_{ij} + a_{ij})_{m\times n} =$$

$$= (a_{ij})_{m\times n} + (b_{ij})_{m\times n} = B + A$$

عضو قرینه :

$$A = (a_{ij})_{m\times n} \rightarrow -A = (-a_{ij})_{m\times n}$$

$$A + (-A) = (a_{ij})_{m\times n} + (-a_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} - a_{ij})_{m\times n} = (\circ)_{m\times n}$$

$$(-A) + A = (-a_{ij})_{m\times n} + (a_{ij})_{m\times n} = (-a_{ij} + a_{ij})_{m\times n} = (\circ)_{m\times n} = \cdot$$

$$\rightarrow A + (-A) = (-A) + A = \circ$$

$$A = (a_{ij})_{m\times n} \rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m۱} & a_{m۲} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A + \bar{\circ} = \begin{pmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m۱} & a_{m۲} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \circ & \circ & \cdots & \circ \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \circ & \circ & \cdots & \circ \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{۱۱} + \circ & a_{۱۲} + \circ & \cdots & a_{۱n} + \circ \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m۱} + \circ & a_{m۲} + \circ & \cdots & a_{mn} + \circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \circ + a_{۱۱} & \circ + a_{۱۲} & \cdots & \circ + a_{۱n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \circ + a_{m۱} & \circ + a_{m۲} & \cdots & \circ + a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \bar{\circ} + A = A \rightarrow A + \bar{\circ} = \bar{\circ} + A = A$$

عضو خنثی

قوانین ضرب

$$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$$

$$(\alpha+\beta)A=(\alpha+\beta)(a_{ij})_{m\times n}=((\alpha+\beta)a_{ij})_{m\times n}=(\alpha a_{ij}+\beta a_{ij})_{m\times n}=$$

$$=(\alpha a_{ij})_{m\times n}+(\beta a_{ij})_{m\times n}=\alpha(a_{ij})_{m\times n}+\beta(a_{ij})_{m\times n}=\alpha A+\beta A\rightarrow$$

$$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$$

$$\alpha(\beta A)=\alpha(\beta(a_{ij})_{m\times n})=\alpha((\beta a_{ij})_{m\times n})=(\alpha(\beta a_{ij}))_{m\times n}=$$

$$=((\alpha\beta)a_{ij})_{m\times n}=(\alpha\beta)(a_{ij})_{m\times n}=(\alpha\beta)A\rightarrow\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$$

۵:

$$۱.A=(۱.a_{ij})_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}=A\rightarrow ۱.A=A$$

۶:

$$\begin{matrix}۲X-۳Y=A\\X+۲Y=B\end{matrix}\rightarrow\begin{matrix}-Y=A-۲B\\X+۲Y=B\end{matrix}\rightarrow\begin{matrix}Y=-A=۲B\\X=۲A-۳B\end{matrix}$$

۷: دستگاه(I)دارای دو معادله و ۳ مجهول X,Y,Z است لذا دستگاه جواب غیر بدیهی دارد یعنی جوابی مانند (X,Y,Z)وجود دارد که لااقل یکی از مولفه‌های آن صفر نیست.

یک ماتریس ۲×۳ دارای ۶ درایه است و هر کدام از درایه ها با اعداد ۰ و۱ به دو طریق پر می‌شوند لذا ۶ درایهٔ ماتریس ۲×۳ با $۲^۶$ روش با اعداد ۰ و۱ پر می‌شود.

۸: فرض کنیم $A=\begin{pmatrix}x&y\\z&e\end{pmatrix}$.

الف

$$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&y\\z&e\end{pmatrix}\rightarrow\begin{matrix}a=x\\b=y\\c=z\\d=e\end{matrix}$$

ب)

$$A=\begin{pmatrix}-a+b+c+d & a-b+c+d\\ a+b-c+d & a+b+c-d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & e\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases}-a+b+c+d=x\\ a-b+c+d=y\\ a+b-c+d=z\\ a+b+c-d=e\end{cases} \quad *$$

دستگاه * دارای چهار معادله و چهار مجهول است لذا دستگاه جواب نا صفر دارد .

(دترمینان ماتریس ضرایب ناصفر است)

لذا a,b,c,d تعیین می‌شوند.

:۹

$$A=\begin{pmatrix}a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & a_{۱۴}\\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} & a_{۲۴}\\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} & a_{۳۴}\\ a_{۴۱} & a_{۴۲} & a_{۴۳} & a_{۴۴}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۰ & ۱ & ۲ & ۱\\ ۱ & ۰ & ۱ & ۲\\ ۲ & ۱ & ۰ & ۱\\ ۱ & ۲ & ۱ & ۰\end{pmatrix}$$

:۱۰

$$A=\begin{pmatrix}p_{۱۱} & p_{۱۲} & p_{۱۳} & p_{۱۴}\\ p_{۲۱} & p_{۲۲} & p_{۲۳} & p_{۲۴}\\ p_{۳۱} & p_{۳۲} & a_{۳۳} & p_{۳۴}\\ p_{۴۱} & p_{۴۲} & a_{۴۳} & p_{۴۴}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۰ & \sqrt{۲} & \sqrt{۵} & \sqrt{۵}\\ \sqrt{۲} & ۰ & \sqrt{۵} & ۳\\ \sqrt{۵} & \sqrt{۵} & ۰ & \sqrt{۲}\\ \sqrt{۵} & ۳ & ۲ & ۰\end{pmatrix}$$

:۱۱

ماتریسهای $A_۳ ، A_۲ ، A_۱$ به ترتیب ماتریسهای نگاره‌های ۲،۱و۳ هستند .

$$A_۱ = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{pmatrix} ،$$

$$A_۲ = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} ، A_۳ = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

:۱۲

$a_{۲۳}$نشان دهنده رابطهٔ بین B,C است که در آن $B = ۲C$ و $a_{۳۴}$ نشان دهندهٔ رابطهٔ بین C,D است که در آن $C = ۴D$ لذا داریم $B = ۲C = ۲(۴D) = ۸D$ رابطهٔ $B = ۸D$ نشان دهندهٔ $a_{۲۴}$ است یعنی یک واحد از B، ۸ واحد از D است.

بطور کلی a_{ij} نشان دهندهٔ رابطهٔ بین سطر iام و ستون jام و a_{jk} نشان دهندهٔ رابطه بین سطر jام و ستون kام است لذا $a_{ij}\, a_{jk}$ نشان دهندهٔ رابطهٔ بین سطر iام و ستون kام است که این همان a_{ik} خواهد بود . بنابراین

$$a_{ij}\, a_{jk} = a_{ik}$$

پاسخ تمرینات فصل ۲ بخش ٤

:۱

الف) $\begin{pmatrix} ۱ & ۵ \\ ۳ & ۲ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۳ & -۲ \\ ۲ & ۴ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱\times۳+۵\times۲ & -۲+۲۰ \\ ۹+۴ & -۶+۸ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱۳ & ۱۸ \\ ۱۳ & ۲ \end{pmatrix}$

ب) $\begin{pmatrix} ۸ \\ ۲ \\ ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ & -۱ & ۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۸ & -۸ & ۱۶ \\ ۲ & -۲ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$

ج) $\begin{pmatrix} -۳ & ۲ \\ ۵ & ۳ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۳ & ۱ \\ ۱۴ & ۱۱ \end{pmatrix}$

د) $\begin{pmatrix} ۳ & ۲ & ۱ \end{pmatrix}_۳\begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۲ \end{pmatrix} = ۴$

هـ) $\begin{pmatrix} ۳ & ۰ & ۳ \\ ۲ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۴ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & -۱ \\ ۳ & ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱۲ & ۹ \\ ۸ & ۵ \\ ۱۳ & ۴ \end{pmatrix}$

و) $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -۱ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -۱ & ۵ & ۸ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{pmatrix}$

:۲

الف) $AB = \begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۳ & -۱ \\ -۳ & ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۳ & -۱ \\ ۳ & -۱ \end{pmatrix}$

ب) $(AB)C = \left(\begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۳ & -۱ \\ -۳ & ۱ \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۳ & -۱ \\ ۳ & -۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۲ & -۱ \\ ۲ & -۱ \end{pmatrix}$

ج) $BC = \begin{pmatrix} ۳ & -۱ \\ -۳ & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۲ & -۱ \\ -۲ & ۱ \end{pmatrix}$

هـ) $BA = \begin{pmatrix} ۳ & -۱ \\ -۳ & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۳ & ۱ \\ -۳ & -۱ \end{pmatrix}$

و) $AB-BA=\begin{pmatrix}۳ & -۱\\ ۳ & -۱\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}۳ & ۱\\ -۳ & -۱\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۰ & -۲\\ ۶ & ۰\end{pmatrix}$

ز) $IA=\begin{pmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۲ & ۱\\ ۳ & ۲\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۲ & ۱\\ ۳ & ۲\end{pmatrix}$

ل) $DB=\begin{pmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & ۱\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۳ & -۱\\ -۳ & ۱\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۰\end{pmatrix}$

ح) $AI=\begin{pmatrix}۲ & ۱\\ ۳ & ۲\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۲ & ۱\\ ۳ & ۲\end{pmatrix}$

م) $CC=\begin{pmatrix}۱ & ۰\\ ۱ & ۱\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۱ & ۰\\ ۱ & ۱\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۱ & ۰\\ ۲ & ۱\end{pmatrix}$

ی) $BI=\begin{pmatrix}۳ & -۱\\ -۳ & ۱\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۳ & -۱\\ -۳ & ۱\end{pmatrix}$

ک) $BD=\begin{pmatrix}۳ & -۱\\ -۳ & ۱\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & ۱\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۲ & ۲\\ -۲ & -۲\end{pmatrix}$

:۳

$$\left(\begin{pmatrix}۱ & ۲ & ۰\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۱ & ۴ & ۳\\ ۰ & ۱ & ۲\\ ۳ & ۲ & ۱\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}۱\\ ۲\\ -۱\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۱ & ۶ & ۵\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۱\\ ۲\\ -۱\end{pmatrix}=۸$$

:٤

فرض کنیم $A_{m\times n}$ و $B_{p\times q}$ باشد از اینکه AB تعریف است لذا تعداد ستونهای A با تعداد سطرهای B برابر است لذا n=p و از اینکه BA تعریف شده است لذا تعداد ستونهای B برابر تعداد سطرهای A است یعنی q=m.

$$AB=A_{m\times n}.B_{P\times q}=A_{m\times n}.B_{n\times m}=(AB)_{m\times m}$$

$$BA=B_{p\times q}.A_{m\times n}=B_{n\times m}.A_{m\times n}=(BA)_{n\times n}$$

$$AB=BA\rightarrow m=n$$

لذا $A_{m\times n} = A_{n\times n}$ و $B_{p\times q} = B_{n\times m} = B_{n\times m}$ بنابراین A, B هم مرتبه‌اند .

:۵

اگر ۰ عدد باشد .

$$B\times \circ = (b_{ij})_{m\times n}.\circ = (b_{ij}.\circ)_{m\times n} = (\circ)_{m\times n} = \bar{\circ}$$

$$\circ \times B = (\circ \times (b_{ij})) = (\circ . b_{ij})_{m\times n} = \bar{\circ}$$

۰ ماتریس باشد

$$B\times \bar{\circ} = (\sum_{j=1}^{n} b_{ij}.\circ_{jk}) = (\circ) = \bar{\circ}$$

$$\rightarrow B\times \bar{\circ} = \bar{\circ}\times B = \bar{\circ}$$

$$\bar{\circ}\times B = (\sum_{j=1}^{n} \circ_{jk}.b_{ij}) = (\circ) = \bar{\circ}$$

:٦

از اینکه AB تعریف شده است تعداد سطرهای B برابر تعداد ستونهای A است لذا B ،۲ سطر دارد. بنابراین $(AB) = (d_{ij})_{2\times k}$.

از اینکه $(AB)_{2\times k} C_{4\times 4}$ تعریف شده است لذا تعداد سطرهای Cبرابر تعداد ستونهای (AB)است یعنی K=4یعنی $B_{2\times 4}$است .

:٧

$$A = (a_{ij})_{m\times n} \quad ، \quad B = (b_{ij}) m\times n \quad \rightarrow \quad A+B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$$

$$C = (C_{ij})_{n\times p}$$

$$(A+B)C = (\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij}) C_{jk})_{(mp)} = (\sum_{j=1}^{n} (a_{ij}.c_{jk} + b_{ij}.c_{jk})) \quad I$$

$$AC = (\sum_{j=1}^{n} (a_{ij}.c_{jk}))_{(m\times p)} \quad , \quad BC = (\sum_{j=1}^{n} (b_{ij}.c_{jk}))_{(m\times p)}$$

$$AC+BC=\Big(\sum_{j=۱}^{n}(a_{ij}.c_{jk})\Big)_{(m\times p)}+\Big(\sum_{j=۱}^{n}(b_{ij}.c_{jk})\Big)_{(m\times p)}=$$

$$=\Big(\sum_{j=۱}^{n}(a_{ij}.c_{jk}+b_{ij}.c_{jk})\Big)\qquad II$$

$$I,II\rightarrow (A+B)C=AC+BC$$

:۸

$$\begin{matrix} ۲a+b=۱ \\ ۳a+۲b=۰ \end{matrix}\rightarrow\begin{matrix} a=۲ \\ b=-۳ \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} ۲c+d=۲ & \qquad -c=-۳\rightarrow c=۳ \\ ۳c+۲d=۱ & \qquad d=-۴ \end{matrix}$$

:۹ فرض کنیم $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ باشد.

$$\begin{pmatrix} ۱ & -۱ \\ ۳ & -۳ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}\rightarrow\begin{matrix} a-c=۰ \\ b-d=۰ \\ ۳(a-c)=۰ \\ ۳(b-d)=۰ \end{matrix}\rightarrow\begin{matrix} a=c \\ b=d \end{matrix}$$

لذا $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ به صورت زیر در می‌آید $B=\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$

:۱۰

فرض کنیم A با $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ جابجا شود یعنی $A\begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}A$ نشان می دهیم A به صورت $\begin{pmatrix} a & b \\ ۰ & a \end{pmatrix}$ خواهد بود. فرض کنیم $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ باشد.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$a = a + c \rightarrow c = 0$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow a + b = b + d \rightarrow a = d$$

$$c + d = d \rightarrow c = 0$$

لذا $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ خواهد بود. بالعکس فرض کنیم $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ نشان می‌دهیم A با $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ جابجا می‌شود.

$$A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}A$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

.۱۱

$$AX = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 3x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow x_1 = -x_2 \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$YA = 0 \rightarrow (y_1, y_2)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 2y_1 + 3y_2 \\ 2y_1 + 3y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow y_1 = -\frac{3}{2}y_2$$

اگر قرار دهیم $y_2 = 2$ ، $y_1 = -3$ خواهد شد. بنابراین $Y = (-3,2)$.

.۱۲

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

$$a_1 + a_3 = 1$$

$$a_2 + a_4 = 1$$

$$b_1 + b_3 = 1$$

$$b_2 + b_4 = 1$$

$$\rightarrow AB = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_2 + a_2b_4 \\ a_3b_1 + a_4b_3 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{pmatrix}$$

نشان می‌دهیم جمع ستونهای AB برابر است.

ستون ۱: $a_1b_1 + a_2b_3 + a_3b_1 + a_4b_3 = (a_1 + a_3)b_1 + (a_2 + a_4)b_3 = 1.b_1 + 1.b_3 = 1$

ستون ۲: $a_1b_2 + a_2b_4 + a_3b_2 + a_4b_4 = (a_1 + a_3)b_2 + (a_2 + a_4)b_4 = b_2 + b_4 = 1$

اثبات تمام است .

۱۳:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 5x_1 + 3x_3 & 5x_2 + 3x_4 \\ 2x_1 + x_3 & 2x_2 + x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 5x_1 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 5x_2 + 3x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x_2 + 3x_4 = 0 \\ -6x_2 - 3x_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x_2 + 3x_4 = 0 \\ -x_2 = 0 \rightarrow x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

بنابراین $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

۱۴:

$$AB = \begin{bmatrix} 200\times500+100\times800 & 200\times800+100\times1000 & 200\times800+100\times800 \\ 180\times800+80\times800 & 180\times800+80\times1000 & 180\times800+80\times800 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \text{شهریه} & \text{منزل} & \text{غذا} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{پسران} \\ \text{دختران} \end{array} & \begin{bmatrix} 180000 & 260000 & 240000 \\ 154000 & 224000 & 208000 \end{bmatrix} \end{array}$$

:۱۵

$$TS_۱=\begin{pmatrix} ۵۰۰۰ & ۲۰۰۰ & ۱۵۰۰ \\ ۲۰۰۰ & ۳۰۰۰ & ۱۰۰۰ \end{pmatrix}_{۲\times۳}\begin{pmatrix} ۲ \\ ۴ \\ ۳ \end{pmatrix}_{۳\times۱}=\begin{bmatrix} ۲۲۵۰۰ \\ ۱۷۰۰۰ \end{bmatrix}\begin{matrix} \to M \ \text{مبلغ فروش در بازار} \\ \to N \ \text{مبلغ فروش در بازار} \end{matrix}$$

$$TS_۲=\begin{pmatrix} ۵۰۰۰ & ۲۰۰۰ & ۱۵۰۰ \\ ۲۰۰۰ & ۳۰۰۰ & ۱۰۰۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱/۸ \\ ۳/۵ \\ ۲/۵ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۱۹۷۵۰ \\ ۱۶۶۰۰ \end{pmatrix}\begin{matrix} \to M \ \text{مبلغ فروش در بازار} \\ \to N \ \text{مبلغ فروش در بازار} \end{matrix}$$

$$TS_۱-TS_۲=\begin{pmatrix} ۳۵۰۰ \\ ۴۰۰ \end{pmatrix}\begin{matrix} \to M \ \text{سود در بازار} \\ \to N \ \text{سود در بازار} \end{matrix}$$

:۱٦

با توجه به اینکه بازارهای M,N بعد از ۵ سال بترتیب ۵۰٪ و ۴۰٪ افزایش خواهند داشت لذا باید ماتریس B را چنان پیداکنیم که

ماتریس
$$BT=\begin{array}{c} \\ M \\ N \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۷۵۰۰ & ۳۰۰۰ & ۲۲۵۰ \\ ۲۸۰۰ & ۴۲۰۰ & ۱۴۰۰ \end{bmatrix} \end{array}$$
، ماتریس فروش بعد از ۵ سال باشد.

فرض کنیم $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ بنابراین داریم :

$$\begin{matrix} ۵۰۰۰a+۲۰۰۰b=۷۵۰۰ \\ ۲۰۰۰a+۳۰۰۰b=۳۰۰۰ \end{matrix}\Rightarrow b=۰, a=\frac{۳}{۲}$$

$$\begin{matrix} ۵۰۰۰c+۲۰۰۰d=۲۸۰۰ \\ ۲۰۰۰c+۳۰۰۰d=۴۲۰۰ \end{matrix}\Rightarrow c=۰, d=\frac{۷}{۵}$$

بنابراین $B=\begin{pmatrix} ۳/۲ & ۰ \\ ۰ & ۷/۵ \end{pmatrix}$.

:۱۷

$$AC = CA,\ BC = CB \rightarrow (AB)C \stackrel{?}{=} C(AB)$$

$$(AB)C = A(BC) = A(CB) = (AC)B = (CA)B = C(AB)$$

:۱۸

$$A = \begin{pmatrix} a_۱ & a_۲ \\ a_۳ & a_۴ \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

حکم: $AB = BA$

$$\begin{pmatrix} a_۱ & a_۲ \\ a_۳ & a_۴ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_۱ & a_۲ \\ a_۳ & a_۴ \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -a_۲ & a_۱ \\ -a_۴ & a_۳ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_۳ & a_۴ \\ -a_۱ & -a_۲ \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{matrix} a_۲ = -a_۳ \\ a_۱ = a_۴ \end{matrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} a_۱ & a_۲ \\ -a_۲ & a_۱ \end{pmatrix} \quad و \quad B = \begin{pmatrix} b_۱ & b_۲ \\ -b_۲ & b_۱ \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_۱ & a_۲ \\ -a_۲ & a_۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_۱ & b_۲ \\ -b_۲ & b_۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_۱b_۱ - a_۲b_۲ & a_۱b_۲ + a_۲b_۱ \\ -b_۱a_۲ - a_۱b_۲ & -a_۲b_۲ + a_۱b_۱ \end{pmatrix} \qquad I$$

$$BA = \begin{pmatrix} b_۱ & b_۲ \\ -b_۲ & b_۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_۱ & a_۲ \\ -a_۲ & a_۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_۱b_۱ - a_۲b_۲ & b_۱a_۲ + b_۲a_۱ \\ -b_۲a_۱ - b_۱a_۲ & -a_۲b_۲ + a_۱b_۱ \end{pmatrix} \qquad II$$

$$\mathrm{I,II} \rightarrow AB = BA$$

:۱۹

فرض کنیم $A = (a_{ij})_{m\times n}$ داریم :

$$Ae_i = \begin{pmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱i} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۱۲} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲i} & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m۱} & a_{m۲} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۰ \\ \vdots \\ ۱ \\ \vdots \\ ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{۱i} \\ a_{۲i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} = A^i$$

A^i ستون i ام ماتریس A است .

:۲۰

فرض کنیم e_i نمایش n− بردار ستونی باشد که همهٔ مولفه‌هایش بجز مؤلفهٔ iام آن صفرند و مؤلفهٔ iام آن ۱ است . و A را ماتریسی $m\times n$ بصورت زیر انتخاب می‌کنیم .

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

از اینکه به ازای هر X داریم $AX=0$ لذا بردارهای e_iنیز در $AX=0$ صدق می‌کننـد. اگر بنویسیم $Ae_1=0$ درایه‌های ستون اول A همگی صفر و $Ae_2=0$ درایــه‌های ستـون دوم مساوی صفر و ... و همین طور درایه‌های ستــون n ام در $Ae_n=0$ صفـر خواهنـد شد لذا ماتریس A همهٔ ستون‌هایش صفر خواهند شد و از آن داریم $A=0$.

پاسخ تمرینات فصل ۲ بخش ۵

۱:

$$I_n = (\delta_{ij})_{n\times n} \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} ۱ & i = j \\ ۰ & i \neq j \end{cases}$$

$$AI_n = \left[\sum_{j=۱}^{n} a_{ij}\delta_{jk}\right]_{(mn)} = (a_{ik})_{m\times n} = A \to AI_n = A$$

$$\sum_{j=۱}^{n} a_{ij}\delta_{jk} = a_{ik}\delta_{kk} = a_{ik}$$

$$I_m A = \left[\sum_{j=۱}^{m} \delta_{jk} a_{jk}\right]_{(mn)} = (a_{ik})_{(mn)} = A \to I_m A = A$$

۲: الف)

$$\begin{pmatrix} ۶ & ۷ \\ ۵ & ۶ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۶ & -۷ \\ -۵ & ۶ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ۶ & -۷ \\ -۵ & ۶ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۶ & ۷ \\ ۵ & ۶ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

ب)

$$\begin{pmatrix} ۷ & ۴ \\ ۳ & ۲ \end{pmatrix}\left(\frac{۱}{۲}\begin{pmatrix} ۲ & -۴ \\ -۳ & ۷ \end{pmatrix}\right) = \frac{۱}{۲}\begin{pmatrix} ۱۴-۱۲ & -۲۸+۲۸ \\ ۶-۶ & -۱۲+۱۴ \end{pmatrix} = \frac{۱}{۲}\begin{pmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

$$\frac{۱}{۲}\begin{pmatrix} ۲ & -۴ \\ -۳ & ۷ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۷ & ۴ \\ ۳ & ۲ \end{pmatrix} = \frac{۱}{۲}\begin{pmatrix} ۱۴-۱۲ & ۸-۸ \\ -۲۱+۲۱ & -۱۲+۱۴ \end{pmatrix} = \frac{۱}{۲}\begin{pmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} ۷ & ۴ \\ ۳ & ۲ \end{pmatrix}^{-۱} = \frac{۱}{۲}\begin{pmatrix} ۲ & -۴ \\ -۳ & ۷ \end{pmatrix}$$

ج)

$$\begin{pmatrix} ۳ & ۶ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۸ \\ ۲ & ۴ & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -۳۱ & -۲ & ۴۷ \\ ۱۶ & ۱ & -۲۴ \\ -۲ & ۰ & ۳ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -۳۱ & -۲ & ۴۷ \\ ۱۶ & ۱ & -۲۴ \\ -۲ & ۰ & ۳ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۳ & ۶ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۸ \\ ۲ & ۴ & ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -۹۳+۹۴ & -۱۸۶+۱۸۶ & -۳۱-۱۶+۴۷ \\ ۴۸-۴۸ & ۹۶+۱-۹۶ & ۱۶+۸-۲۴ \\ -۶+۶ & -۱۲+۱۲ & -۲+۳ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} ۳ & ۶ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۸ \\ ۲ & ۴ & ۱ \end{pmatrix}^{-۱} = \begin{pmatrix} -۳۱ & -۲ & ۴۷ \\ ۱۶ & ۱ & -۲۴ \\ -۲ & ۰ & ۳ \end{pmatrix}$$

د)

$$\begin{pmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۴ \end{pmatrix}\left(\frac{۱}{۵}\begin{pmatrix} -۱۰ & ۴ & ۹ \\ ۱۵ & -۴ & -۱۴ \\ -۵ & ۱ & ۶ \end{pmatrix}\right) = \frac{۱}{۵}\begin{pmatrix} -۲۰+۴۵-۲۰ & ۸-۱۲+۴ & ۱۸-۴۲+۲۴ \\ -۴۰+۴۵-۵ & ۱۶-۱۲+۱ & ۳۶-۴۲+۶ \\ -۱۰+۳۰-۲۰ & ۴-۸+۴ & ۹-۲۸+۲۴ \end{pmatrix}$$

$$= \frac{۱}{۵}\begin{pmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} \qquad (I)$$

$$\frac{۱}{۵}\begin{pmatrix} -۱۰ & ۴ & ۹ \\ ۱۵ & -۴ & -۱۴ \\ -۵ & ۱ & ۶ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۴ \end{pmatrix} = \frac{۱}{۵}\begin{pmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{pmatrix} = I_۳ \qquad (II)$$

$$(I),(II) \rightarrow \begin{pmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۴ \end{pmatrix}^{-۱} = \frac{۱}{۵}\begin{pmatrix} -۱۰ & ۴ & ۹ \\ ۱۵ & -۴ & -۱۴ \\ -۵ & ۱ & ۶ \end{pmatrix}$$

:۳

$$A^{2} = A.A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} A^{3} = A^{2}.A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A^{3} = A.A^{2} \end{array}\right\} \rightarrow A^{2}.A = A.A^{2} = I \rightarrow A^{-1} = A^{2}$$

۴ :الف) $|A| = 1 \Rightarrow$ A وارون‌پذیر است.

ب)

$$f(A) = I + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{2} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$$

ج)

$$f(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}$$

د)

$$f(A) = \alpha_{0} I + \alpha_{1}\begin{pmatrix} d_{1} & 0 \\ 0 & d_{2} \end{pmatrix} + \alpha_{2}\begin{pmatrix} d_{1} & 0 \\ 0 & d_{2} \end{pmatrix}^{2}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_{0} + \alpha_{1} d_{1} + \alpha_{2} d_{1}^{2} & 0 \\ 0 & \alpha_{0} + \alpha_{1} d_{2} + \alpha_{2} d_{2}^{2} \end{pmatrix}$$

$$f(A)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^{3}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^{2}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

زیرا $A^{2}=I$

هـ)

$$A^{2}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$A^{3}=A^{2}.A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=0$$

$$\vdots$$

$$A^{n}=0$$

$$f(A)=\alpha_0 I+\alpha_1 A+\alpha_2 A^{2}=\begin{pmatrix}\alpha_0&0&0\\0&\alpha_0&0\\0&0&\alpha_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_1&0&0\\0&0&\alpha_1\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&\alpha_2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha_0&\alpha_1&\alpha_2\\0&\alpha_0&\alpha_1\\0&0&\alpha_0\end{pmatrix}$$

:۵

$$n=1\to\begin{pmatrix}1&x&y\\0&1&x\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&x&y\\0&1&x\\0&0&1\end{pmatrix}$$ ⟵ درست

فرض کنیم حکم برای n درست باشد نشان می‌دهیم برای $n+1$ نیز درست است.

$$n\to n+1$$

$$\begin{pmatrix}1&x&y\\0&1&x\\0&0&1\end{pmatrix}^{n+1}=\begin{pmatrix}1&x&y\\0&1&x\\0&0&1\end{pmatrix}^{n}\begin{pmatrix}1&x&y\\0&1&x\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&nx&ny+\frac{n(n-1)}{2}x^2\\0&1&nx\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&x&y\\0&1&x\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&x+nx&ny+nx^2+\frac{n(n-1)}{2}x^2\\0&1&x+nx\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&(1+n)x&ny+\frac{n(n+1)}{2}x^2\\0&1&(1+n)x\\0&0&1\end{pmatrix}$$

لذا حکم برای $n+1$ نیز درست است.

:۶

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\5&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\5&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\5&0&0\\0&5&0\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2.A=\begin{pmatrix}0&1&0\\5&0&0\\0&5&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\5&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix}=d\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=5I_3$$

$$\to A^3=5I_3$$

$$A^2.A=5I_3\to A.\left(\frac{1}{5}A^2\right)=I_3\to A^{-1}=\frac{1}{5}A^2$$

:۷

$$A=\begin{pmatrix} d_۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & d_۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & d_۳ \end{pmatrix} \quad \to \quad A^۲=\begin{pmatrix} d_۱^۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & d_۲^۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & d_۳^۲ \end{pmatrix}$$

$$A^۲=I_۳ \to \begin{pmatrix} d_۱^۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & d_۲^۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & d_۳^۲ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} \to \begin{matrix} d_۱^۲=۱ \\ d_۲^۲=۱ \\ d_۳^۲=۱ \end{matrix} \to \begin{matrix} d_۱=\pm۱ \\ d_۲=\pm۱ \\ d_۳=\pm۱ \end{matrix}$$

هشت ماتریس قطری با این خاصیت موجودند.

۸: الف)

$$P_tP_s=\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \cos t\cos s-\sin t\sin s & -\cos t\sin s-\sin t\cos s \\ \sin t\cos s+\cos t\sin t & -\sin t\sin s+\cos t\cos s \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \cos(t+s) & -\sin(t+s) \\ \sin(t+s) & \cos(t+s) \end{pmatrix}=P_{t+s}$$

ب) روش استقراء:

فرض می‌کنیم برای n درست باشد نشان می‌دهیم، برای $n+۱$ نیز درست است.

$n=۱ \qquad P_t=P_t$

$$n=k \qquad (P_t)^k=P_{kt}=\begin{pmatrix} \cos kt & -\sin kt \\ \sin kt & \cos kt \end{pmatrix}$$

$$n=k+۱ \qquad (P_t)^{k+۱}=(P_t)^k.P_t=\begin{pmatrix} \cos kt & -\sin kt \\ \sin kt & \cos kt \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos kt\cos t-\sin kt\sin t & -\cos kt\sin t-\sin kt\cos t\\ \sin kt\cos t+\cos kt\sin t & -\sin kt\sin t+\cos kt\cos t\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(k+۱)t & -\sin(k+۱)t\\ \sin(k+۱)t & \cos(k+۱)t\end{pmatrix}=P(k+۱)_t \to (P_t)^{k+۱}=P_{(k+۱)t}$$

$$\forall n\in N \qquad (P_t)^n=P_{nt}$$

ج)

$$P_tP_{-t}=P_{t+(-t)}=P_{\circ}=\begin{pmatrix}\cos\circ & -\sin\circ\\ \sin\circ & \cos\circ\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۱ & \circ\\ \circ & ۱\end{pmatrix}$$

$$\to P_t^{-۱}=P_{-t}$$

$$P_{-t}P_t=P_{\circ}=\begin{pmatrix}۱ & \circ\\ \circ & ۱\end{pmatrix}$$

۹:

$$A^P=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{\text{بار } p}$$

$$(A^p)^q=\underbrace{A^p\cdot A^p\cdot\ldots\cdot A^p}_{\text{بار } q}=\underbrace{\overbrace{(A\cdot\ldots\cdot A)}^{\text{بار } p}\cdot\overbrace{(A\cdot\ldots\cdot A)}^{\text{بار } p}\cdot\ldots\cdot\overbrace{(A\cdot\ldots\cdot A)}^{\text{بار } p}}_{\text{بار } q}$$

$$=\underbrace{(A\cdot\ldots\cdot A)}_{\text{بار } pq}=(A)^{pq}$$

$$A^pA^q=\underbrace{(A\cdot A\cdot\ldots\cdot A)}_{\text{بار } p}\underbrace{(A\cdot A\cdot\ldots\cdot A)}_{\text{بار } q}=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{\text{بار } p+q}=A^{p+q}$$

۱۰: از اینکه A وارون‌پذیر $n\times n$ است. فرض کنیم وارون آن $A^{-۱}$ باشد. لذا

$$AA^{-۱}=A^{-۱}A=I_n$$

$$AB=\circ\to A^{-۱}(AB)=\circ\to(A^{-۱}A)B=\circ\to I_nB=\circ\to B_{n\times p}=\circ$$

۱۱ : الف)

$$\begin{pmatrix} ۱ & -۲ \\ ۷ & -۱۴ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \end{pmatrix} \to \begin{matrix} x_۱ - ۲x_۲ = ۰ \\ ۷x_۱ - ۱۴x_۲ = ۰ \end{matrix} \to x_۱ = ۲x_۲ \to X = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \end{pmatrix}$$

اگر ماتریس $\begin{pmatrix} ۱ & -۲ \\ ۷ & -۱۴ \end{pmatrix}$ نامنفرد باشد $x = ۰$ خواهد شد.

ب)

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۷ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۳ & -۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix} \to \begin{matrix} x_۱ + ۷x_۲ + x_۳ = ۰ \\ ۲x_۲ + x_۳ = ۰ \\ x_۱ + ۳x_۲ - x_۳ = ۰ \end{matrix} \to \begin{matrix} x_۱ + ۷x_۲ + x_۳ = ۰ \\ x_۲ + \frac{۱}{۲}x_۳ = ۰ \\ -۴x_۲ - ۲x_۳ = ۰ \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x_۱ - \frac{۵}{۳}x_۳ = ۰ \\ x_۲ + \frac{۱}{۲}x_۳ = ۰ \end{matrix} \to \begin{matrix} x_۱ = \frac{۵}{۳}x_۳ \\ x_۲ = -\frac{۱}{۲}x_۳ \end{matrix} \quad x_۳ = ۱ \to \left(\frac{۵}{۳}, \frac{-۱}{۲}, ۱\right) = X^t$$

لذا $X = \begin{pmatrix} \frac{۵}{۳} \\ \frac{-۱}{۲} \\ ۱ \end{pmatrix}$ جواب خواهد بود لذا ماتریس داده شده منفرد است. زیرا در غیر اینصورت $X = ۰$ خواهد بود.

۱۲ :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ba \\ cd-dc & ad-bc \end{pmatrix}=(ad-bc)\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & bd-bd \\ -ac+ac & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & ۰ \\ ۰ & ad-bc \end{pmatrix}$$

$$= (ad-bc)\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

قسمت دوم:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = (ad-bc)\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \left|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\right| = (ad-bc)^{۲}\,|I_{۲}| = (ad-bc)^{۲}$$

$$\rightarrow \left|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\right| = (ad-bc)^{۲}$$

$$|A| = \left|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right| = ad-bc$$

$|A| \neq ۰$ اگر و فقط اگر A وارون‌پذیر باشد لذا $|A| \neq ۰$ اگر و فقط اگر $ad-bc \neq ۰$، اگر $ad-bc \neq ۰$ ماتریس A وارون دارد و برابر است با

$$A^{-۱} = \frac{۱}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

۱۳:

$$A = \begin{pmatrix} a_{۱۱} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n۱} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} & \cdots & b_{۱n} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} & \cdots & b_{۲n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n۱} & b_{n۲} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$a.A=(a.a_{ij})_{n\times n}\rightarrow aA+bB=\begin{pmatrix} aa_{11}+bb_{11} & aa_{12}+bb_{12} & \cdots & aa_{1n}+bb_{1n} \\ aa_{21}+bb_{21} & aa_{22}+bb_{22} & \cdots & aa_{2n}+bb_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ aa_{n1}+bb_{n1} & aa_{n2}+bb_{n2} & \cdots & aa_{nn}+bb_{nn} \end{pmatrix}$$

ستون i ام و j ام را از ماتریس $aA+bB$ در نظر گرفته با هم جمع می‌کنیم.

$$\begin{array}{cc} \text{ستون } i \text{ ام} & \text{ستون } j \text{ ام} \\ \begin{pmatrix} aa_{1i}+bb_{1i} \\ aa_{2i}+bb_{2i} \\ \vdots \\ aa_{ni}+bb_{ni} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} aa_{1j}+bb_{1j} \\ aa_{2j}+bb_{2j} \\ \vdots \\ aa_{nj}+bb_{nj} \end{pmatrix} \end{array}$$

جمع درایه‌های ستون j ام $=a(a_{1j}+\cdots+a_{nj})+b(b_{1j}+\cdots+b_{nj})$ (I)

جمع درایه‌های ستون i ام $=a(a_{1j}+\cdots+a_{nj})+b(b_{1j}+\cdots+b_{nj})$ (II)

از اینکه B , A نیم‌جادویی‌اند داریم :

$$a_{1j}+\cdots+a_{nj}=a_{1i}+\cdots+a_{ni}$$

$$b_{1j}+\cdots+b_{nj}=b_{1i}+\cdots+b_{ni}$$

لذا داریم $(I)=(II)$ و از اینکه j,i دلخواه بودند لذا جمع درایه‌های تمام ستونهای $aA+bB$ همواره مقدار ثابتی است.

سطر i ام $=(aa_{i1}+bb_{i1},aa_{i2}+bb_{i2},\cdots,aa_{in}+bb_{in})$

سطر j ام $=(aa_{j1}+bb_{j1},aa_{j2}+bb_{j2},\cdots,aa_{jn}+bb_{jn})$

جمع درایه‌های سطر i ام $=a(a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in})+b(b_{j1}+b_{j2}+\cdots+b_{nj})$ (III)

جمع درایه‌های سطر j ام $=a(a_{j1}+a_{j2}+\cdots+a_{jn})+b(b_{j1}+b_{j2}+\cdots+b_{nj})$ (IV)

B , A مربعی نیم‌جادویی‌اند.

$$a_{j1}+a_{j2}+\cdots+a_{jn}=a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in}$$

$$b_{j1}+b_{j2}+\cdots+b_{jn}=a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in}$$

لذا روابط $(IV),(III)$ برابرند در نتیجه حکم برای سطرهای ماتریس $aA+bB$ نیز برقرار است. حال با در نظر گرفتن سطر i ام و ستون j ام باید داشته باشیم:

$$a(a_{i1}+\cdots+a_{in})+b(b_{i1}+\cdots+b_{in})\overset{*}{=}a(a_{1j}+\cdots+a_{nj})+b(b_{ij}+\cdots+b_{nj})$$

و از اینکه B ، A نیم‌جادویی‌اند داریم:

$$a_{i1}+\cdots+a_{in}=a_{1j}+\cdots+a_{nj}$$
$$b_{i1}+\cdots+b_{in}=b_{1j}+\cdots+b_{nj}$$

لذا رابطهٔ * برقرار است.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{22} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1n}+a_{12}b_{2n}+\cdots+a_{1n}b_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}b_{11}+a_{n2}b_{21}+\cdots+a_{nn}b_{n1} & \cdots & a_{n1}b_{1n}+a_{n2}b_{2n}+\cdots+a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$(a_{i1}b_{11}+a_{i2}b_{21}+\cdots+a_{in}b_{n1}, \ \cdots \ , a_{i1}b_{1n}+a_{i2}b_{2n}+\cdots+a_{in}b_{nn})$$

سطر i ام $=(a_{i1}b_{11}+a_{i2}b_{21}+\cdots+a_{in}b_{n1}, \ \cdots \ , a_{i1}b_{1n}+a_{i2}b_{2n}+\cdots+a_{in}b_{nn})$

سطر j ام $=(a_{i1}b_{11}+a_{i2}b_{21}+\cdots+a_{in}b_{n1},$

جمع درایه‌های سطر i ام

$$=a_{i1}(\underbrace{b_{11}+\cdots+b_{1n}}_{t})+a_{i2}(\underbrace{b_{2}+\cdots+b_{2n}}_{t})+\cdots+a_{in}(\underbrace{b_{n1}+\cdots+b_{nn}}_{t})=t(a_{i1}+\cdots+a_{in})$$

جمع درایه‌های سطر j ام

$$=a_{j1}(\underbrace{b_{11}+\cdots+b_{1n}}_{t})+a_{j2}(\underbrace{b_{21}+\cdots+b_{2n}}_{t})+\cdots+a_{jn}(\underbrace{b_{n1}+\cdots+b_{nn}}_{t})=t(a_{j1}+\cdots+a_{jn})$$

$\Rightarrow$ جمع درایه‌های سطر j ام = جمع درایه‌های سطر i ام

ستون i ام $=\begin{pmatrix} a_{i1}b_{11}+\cdots+a_{in}b_{n1} \\ a_{i1}b_{12}+\cdots+a_{in}b_{n2} \\ \vdots \\ a_{i1}b_{1n}+\cdots+a_{in}b_{nn} \end{pmatrix}$ ستون j ام $=\begin{pmatrix} a_{j1}b_{11}+\cdots+a_{jn}b_{n1} \\ a_{j1}b_{12}+\cdots+a_{jn}b_{n2} \\ \vdots \\ a_{j1}b_{1n}+\cdots+a_{jn}b_{nn} \end{pmatrix}$

جمع درایه‌های ستون i ام

$$= a_{i1}(\underbrace{b_{11} + b_{12} + \cdots + b_{1n}}_{t}) + \cdots + a_{in}(\underbrace{b_{n1} + b_{n2} + \cdots + b_{nn}}_{t}) = t(a_{i1} + \cdots + a_{in})$$

جمع درایه‌های ستون j ام

$$= a_{j1}(\underbrace{b_{11} + b_{12} + \cdots + b_{1n}}_{t}) + \cdots + a_{jn}(\underbrace{b_{n1} + b_{n2} + \cdots + b_{nn}}_{t}) = t(a_{j1} + \cdots + a_{jn})$$

A نیم‌جادویی است لذا $a_{j1} + \cdots + a_{jn} = a_{i1} + \cdots + a_{in}$ و لذا جمع درایه‌های ستون دلخواه i ام و j ام یکی است.

حکم برای ستونهای دلخواه نیز ثابت شد در نتیجه برای کلیه ستونهای AB برقرار است.

جمع درایه‌های سطر i ام $= t(a_{i1} + \cdots + a_{in}) \qquad (I)$

جمع درایه‌های سطر j ام $= t(a_{j1} + \cdots + a_{jn}) \qquad (II)$

از اینکه A نیم‌جادویی است جمع هر ستون با جمع هر سطر برابر است لذا $(II) = (I)$.

۱٤ :

$$C^{-1}(AB)C = C^{-1}(AI_nB)C = C^{-1}(A(CC^{-1})B)C$$

$$= C^{-1}((AC)(C^{-1}B))C$$

$$= (C^{-1}(AC))((C^{-1}B)C) = (C^{-1}AC)(C^{-1}BC)$$

$$C^{-1}(A)^k C = (C^{-1}AC)^k$$

$k = 1 \rightarrow C^{-1}AC = C^{-1}AC$ حکم برقرار است.

$$C^{-1}(A^{n+1})C = C^{-1}(A^n A)C = (C^{-1}A^n C)(C^{-1}AC) = (C^{-1}AC)^n (C^{-1}AC)$$

$$= (C^{-1}AC)^{n+1} \rightarrow C^{-1}(A^{n+1})C = (C^{-1}AC)^{n+1}$$

۱۵ : الف)

$$V_1 = TV_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b \\ \frac{2}{3}a + \frac{1}{2}b \end{pmatrix}$$

بردار $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b \\ \frac{2}{3}a + \frac{1}{2}b \end{pmatrix}$ توزیع بازار بعد از یک سال است که در آن مؤلفهٔ اول مشتریان A را نشان می‌دهد که $\frac{1}{3}$ از مشتریان قبلی شرکت A و $\frac{1}{2}$ از شرکت B آمده‌اند. و مؤلفهٔ دوم مشتریان B را نشان می‌دهد که $\frac{2}{3}$ از مشتریان شرکت A هستند که به B آمده‌اند و $\frac{1}{2}$ از مشتریان شرکت B هستند.

قسمت دوم : $k = 1$ ، $V_1 = T^1 . V_0$ درست.

فرض کنیم $V_k = T^k V_0$ نیز درست باشد نشان می‌دهیم V_{k+1} درست است.

$$T^{k+1}V_0 = T^k (TV_0) = T^k (V_1) = V_{k+1} \quad \Rightarrow$$

V_{k+1} درست است.

ب) $V_0 = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix}$

$$V_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} + \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} + \frac{2}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix} \rightarrow$$

پایدار است.

ج)

$$TV_0 = V_0 \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b = a \\ \frac{2}{3}a + \frac{1}{2}b = b \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{matrix} \frac{2}{3}a - \frac{1}{2}b = 0 \\ \frac{2}{3}a + \frac{1}{2}b = \frac{b}{2} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \frac{2}{3}a = \frac{b}{2} \rightarrow a = \frac{3}{4}b \\ a + b = 1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \frac{3}{4}b + b = 1 \rightarrow b = \frac{4}{7} \\ a = \frac{3}{4}b = \frac{3}{4} \times \frac{4}{7} = \frac{3}{7} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{۲}{۳} & \frac{۱}{۴} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۳}{۴} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rightarrow \frac{۲}{۳}a + \frac{۱}{۴}b = a \Rightarrow \frac{b}{۴} = \frac{a}{۳} \rightarrow b = \frac{۴}{۳}a$$

$$a + b = ۱ \rightarrow a + \frac{۴}{۳}a = ۱ \rightarrow a = \frac{۳}{۷} \quad , \quad b = \frac{۴}{۷}$$

۱۷: الف)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{۱}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} ۱ & ۳ \\ -۱ & ۴ \end{pmatrix} \rightarrow C^{-۱} = \frac{۱}{|C|}\begin{pmatrix} ۴ & -۳ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix} = \frac{۱}{۷}\begin{pmatrix} ۴ & -۳ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix}$$

ب)

$$C^{-۱}TC = \begin{pmatrix} \frac{۴}{۷} & \frac{-۳}{۷} \\ \frac{۱}{۷} & \frac{۱}{۷} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۲}{۳} & \frac{۱}{۲} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ & ۳ \\ -۱ & ۴ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{۴}{۲۱} - \frac{۶}{۲۱} & \frac{۲}{۷} - \frac{۳}{۱۴} \\ \frac{۱}{۲۱} + \frac{۲}{۲۱} & \frac{۱}{۱۴} + \frac{۱}{۴} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ & ۳ \\ -۱ & ۴ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-۲}{۲۱} & \frac{۱}{۱۴} \\ \frac{۳}{۲۱} & \frac{۲}{۱۴} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ & ۳ \\ -۱ & ۴ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-۲}{۲۱} - \frac{۱}{۱۴} & \frac{-۶}{۲۱} + \frac{۲}{۷} \\ \frac{۳}{۲۱} - \frac{۱}{۷} & \frac{۳}{۴} + \frac{۴}{۷} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-۷}{۴۲} & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{۱}{۶} & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

اثبات به استقراء:

$k = ۱$ $\qquad C^{-۱}TC = \begin{pmatrix} \frac{-۱}{۶} & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$ درست است.

فرض کنیم به ازای k درست باشد نشان می‌دهیم به ازای $k + ۱$ درست است.

$$C^{-1}T^{k+1}C=C^{-1}T^kTC=C^{-1}T^kCC^{-1}TC=\begin{pmatrix}(\frac{-1}{6})^k & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{-1}{6} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\frac{-1}{6})^{k+1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

لذا به ازای $k+1$ نیز درست است.

بنابراین حکم همواره درست است.

۱۸ : الف)

$$T=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}$$

ب) ماتریس T^2 به معنی اینست که عمل تغییر مکان دو بار متوالی انجام می‌گیرد.

ج)

$$V_0=\begin{pmatrix}50\\40\\50\end{pmatrix}$$

$$TV_0=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}50\\40\\50\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}35+10+10\\10+20+10\\10+10+30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}50\\40\\50\end{pmatrix}=V_0\rightarrow TV_0=V_0$$

۱۹ :

$$V_{k+1}=\begin{pmatrix}P_{k+3}\\P_{k+2}\\P_{k+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_{k+2}+P_{k+1}+P_k\\P_{k+2}\\P_{k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_{k+2}\\P_{k+1}\\P_k\end{pmatrix}=TV_k$$

که در آن ماتریس T برابر $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ است.

۲۰ : فرض کنیم $AB = BA$

$$(A-B)(A+B) = A^2 + AB - BA + B^2 = A^2 + AB - AB - B^2 = A^2 - B^2$$

$$\rightarrow (A-B)(A+B) = A^2 - B^2$$

فرض $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2 \rightarrow A^2 + AB - BA - B^2 = A^2 - B^2$

$$\rightarrow AB - BA = 0 \rightarrow AB = BA$$

حکم برقرار است.

۲۱ : فرض کنیم f یک چندجمله‌ای از درجه n بصورت زیر باشد.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

$$f(D) = a_0 I + a_1 D + \cdots + a_n D^n$$

فرض $n = 1 \rightarrow D^1 = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$ $\qquad D^n = \begin{pmatrix} d_1^n & 0 & 0 \\ 0 & d_2^n & 0 \\ 0 & 0 & d_3^n \end{pmatrix}$

فرض : $n = k$ درست

ح : $n = k+1$ $\quad D^{k+1} = D^k D = \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & 0 \\ 0 & d_2^k & 0 \\ 0 & 0 & d_3^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} d_1^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & d_2^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & d_3^{k+1} \end{pmatrix} \rightarrow D^{k+1} = \begin{pmatrix} d_1^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & d_2^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & d_3^{k+1} \end{pmatrix}$$

$$\to f(D)=\begin{pmatrix} a_{۰} & ۰ & ۰ \\ ۰ & a_{۰} & ۰ \\ ۰ & ۰ & a_{۰} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_{۱}d_{۱} & ۰ & ۰ \\ ۰ & a_{۱}d_{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & a_{۱}d_{۳} \end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix} a_n d_{۱}^n & ۰ & ۰ \\ ۰ & a_n d_{۲}^n & ۰ \\ ۰ & ۰ & a_n d_{۳}^n \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{۰}+a_{۱}d_{۱}+\cdots+a_n d_{۱}^n & ۰ & ۰ \\ ۰ & a_{۰}+a_{۱}d_{۲}+\cdots+a_n d_{۲}^n & ۰ \\ ۰ & ۰ & a_{۰}+a_{۱}d_{۳}+\cdots+a_n d_{۳}^n \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} f(d_{۱}) & ۰ & ۰ \\ ۰ & f(d_{۲}) & ۰ \\ ۰ & ۰ & f(d_{۳}) \end{pmatrix}\to f(D)=\begin{pmatrix} f(d_{۱}) & ۰ & ۰ \\ ۰ & f(d_{۲}) & ۰ \\ ۰ & ۰ & f(d_{۳}) \end{pmatrix}$$

۲۲:

$$\left.\begin{array}{l} A=\begin{pmatrix} d_{۱} & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & d_{۱} & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & d_n \end{pmatrix} \qquad |A|\neq ۰ \\ \det A = d_{۱}\begin{vmatrix} d_{۲} & \cdots & ۰ \\ ۰ & \ddots & ۰ \\ ۰ & \cdots & d_n \end{vmatrix} = d_{۱}d_{۲}\ldots d_n \end{array}\right\}\to d_{۱}d_{۲}\ldots d_n\neq ۰\Rightarrow \forall i \quad d_i\neq ۰$$

$$A^{-۱}=\begin{pmatrix} \frac{۱}{d_{۱}} & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{d_{۲}} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \ddots & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \frac{۱}{d_n} \end{pmatrix}$$

$$AA^{-۱}=I_n=A^{-۱}A$$

:۲۳

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}+b_{22} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}$$

$A+B$ قطری است.

$$\left.\begin{array}{l} AB=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix} \\ \\ BA=\begin{pmatrix} b_{11}a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22}a_{22} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn}a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow AB=BA$$

خاصیت جابجایی برقرار است.

:۲۴ A , B وارون‌پذیرند لذا

$$\det A \neq 0$$

$$\det B \neq 0$$

$$\det(AB)=\det A.\det B \neq 0 \Rightarrow \det(AB)\neq 0 \Leftrightarrow$$ AB وارون‌پذیر است

$$AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AIA^{-1}=AA^{-1}=I$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB)=B^{-1}(A^{-1}A)B=B^{-1}B=I \qquad \rightarrow (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

۲۵:

$\det A \neq 0$

$\det(A^m) = (\det A)^m$

$$A^m(A^{-1})^m = (\underbrace{A\ldots A}_{m})(\underbrace{A^{-1}\ldots A^{-1}}_{m}) = (\underbrace{A\ldots A}_{m-1})(AA^{-1})(\underbrace{A^{-1}\ldots A^{-1}}_{\text{بار } m-1})$$

$$= (\underbrace{A\ldots A}_{m-1})I(\underbrace{A^{-1}\ldots A^{-1}}_{m-1}) = I$$

$$(A^{-1})^m.A^m = (\underbrace{A^{-1}\ldots A^{-1}}_{\text{بار } m})(\underbrace{A\ldots A}_{m}) = (\underbrace{A^{-1}\ldots A^{-1}}_{m-1})(A^{-1}A)(\underbrace{A\ldots A}_{m-1}) = I$$

$$\Rightarrow (A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$$

۲۶:

پوچ توان است. $N \to \exists k \in N \quad s.t \quad N^k = \bar{0} \to |N^k| = |\bar{0}| = 0$

$\to |N|^k = 0 \to |N| = 0 \leftrightarrow$ N وارون ندارد.

۲۷:

$$(I_n - N)(I_n + N + N^2 + \cdots + N^{k-1}) = I_n - N^k = I_n - 0 = I_n$$

$$(I_n + N + N^2 + \cdots + N^{k-1})(I_n - N) = I_n - N^k = I_n - 0 = I_n$$

از اینکه $I_n + N + \cdots + N^{k-1}$ معکوس چپ و راست $I_n - N$ است لذا $I_n - N$ وارون دارد و $(I_n - N)^{-1} = I_n + N + \cdots + N^{k-1}$.

۲۸: الف)

$$I_2 - N = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to N = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(I_2 - N)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = I_2 + N + N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_3 - N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(I_3 - N)^{-1} = I_3 + N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ج)

$$I_3 - N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow N^3 = 0$$

$$(I_3 - N)^{-1} = I_3 + N + N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

د)

$$I_4 - N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow N^2 = \overline{O}_{4\times 4}$$

$$(I_4-N)^{-1}=I_4+N=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&-1&-1\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

۲۹ : الف)

$$E_{ij}=\begin{array}{c c}& \text{ستون } j \text{ ام}\\ \text{سطر } i \text{ ام} & \begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots&&\vdots\\ 0&0&\cdots&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots&&\vdots\\ 0&0&\cdots&0&\cdots&0\end{pmatrix}\end{array}$$

$$E_{ij}E_{kl}=\begin{cases}E_{il} & j=k\\ 0 & j\neq k\end{cases}\qquad (I)$$

$$\delta_{jk}=\begin{cases}1 & j=k\\ 0 & j\neq k\end{cases}\rightarrow\ \delta_{jk}E_{il}=\begin{cases}E_{il} & j=k\\ 0 & j\neq k\end{cases}\qquad (II)$$

$$(I),(II)\rightarrow E_{ij}E_{kl}=\delta_{jk}E_{il}$$

ب) در قسمت (الف) نشان دادیم که
$$E_{ij}E_{kl}=\begin{cases}E_{il} & j=k\\ 0 & j\neq k\end{cases}$$

ج)
$$E_{ij}^2=E_{ij}E_{ij}=\begin{cases}E_{ij} & j=i\\ 0 & j\neq i\end{cases}$$

$$E_{ij}A=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&1&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&0&\cdots&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1j}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ a_{i1}&\cdots&a_{ij}&\cdots&a_{in}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nj}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

$$
=\begin{pmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn}\\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}
$$

د)

$$
AE_{ij}=\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n}\\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in}\\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix}
\begin{array}{c}
\text{ستون } j \text{ ام}\\
\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \cdots & 1 & \cdots & 0\\
\vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l}
\\ \\ \rightarrow \text{سطر } i \text{ ام} \\ \\ \\
\end{array}
$$

$$
=\begin{pmatrix}
0 & \cdots & a_{1i} & \cdots & 0\\
0 & \cdots & a_{2i} & \cdots & 0\\
\vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \cdots & a_{ni} & \cdots & 0
\end{pmatrix}
$$

مثال:

$$
A_{3\times 3}E_{3\times 3}=\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13}\\
a_{21} & a_{22} & a_{23}\\
a_{31} & a_{32} & a_{33}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
=\begin{pmatrix}
0 & 0 & a_{13}\\
0 & 0 & a_{23}\\
0 & 0 & a_{33}
\end{pmatrix}
=(0,0,A_3)
$$

A_3 ستون سوم

۳۰: برای ماتریسهای ۲×۲ حکم را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم A ماتریسی ۲×۲ باشد که با همهٔ ماتریسهای ۲×۲ جابجا شود فرض کنیم $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ، $B=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ ماتریسی دلخواه باشد. از فرض داریم : $AB=BA$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} ax+cy & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+cy & bx+dy \\ az+ct & bz+dt \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ay+bt=dy+bx \overset{b=0}{\Rightarrow} ay=dy \overset{y \text{ دلخواه}}{\Rightarrow} a=d \\ cx+dz=az+ct \\ cy+dt=bz+dt \Rightarrow cy=bz \xrightarrow{x,y,z \text{ دلخواه}} b=c=0 \end{cases}$$

بنابراین $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=aI$

بالعکس : فرض کنیم $\underset{a\neq 0}{A=aI_n}$ و $B_{n\times n}$ دلخواه باشد.

$$AB=(aI_n)B=a(I_nB)=a(BI_n)=(Ba)I_n=B(aI_n)\Rightarrow AB=BA$$

۳۱:

$i\neq j\to$ پوچ توان $E_{ij}\to \exists k\in N \quad s.t \quad E_{ij}^k=0$

از اینکه E_{ij} پوچ توان است با توجه به تمرین ۲۷ ، I_n+E_{ij} وارون‌پذیر است.

روش دوم :

از اینکه $i\neq j$ لذا E_{ij} روی قطر اصلی ۰ و یکی از عناصر غیر قطر اصلی ۱ خواهد بود. لذا ماتریس I_n+E_{ij} ماتریس بالا مثلثی است که درایه‌های روی قطر اصلی همگی ۱ هستند. $E_{ij}+I_n$ وارون‌پذیر است. $\det(E_{ij}+I_n)=1\to$

۳۲:

$$BA=AB\overset{?}{\Leftrightarrow}C_1C_2=C_2C_1$$

$$C_1C_2=(\alpha_1A+\beta_1B)(\alpha_2A+\beta_2B)=\alpha_1\alpha_2A^2+\alpha_1\beta_2AB+\beta_1\alpha_2BA+\beta_1\beta_2B^2$$

$$C_2C_1=(\alpha_2A+\beta_2B)(\alpha_1A+\beta_1B)=\alpha_2\alpha_1A^2+\alpha_2\beta_1AB+\beta_2\alpha_1BA+\beta_2\beta_1B^2$$

$$C_1C_2=C_2C_1\Leftrightarrow$$

$$\alpha_1\alpha_2A^2+\alpha_1\beta_2AB+\beta_1\alpha_2BA+\beta_1\beta_2B^2=\alpha_2\alpha_1A^2+\alpha_2\beta_1AB+\beta_2\alpha_1BA+\beta_2\beta_1B^2$$

$$\Leftrightarrow\alpha_1\beta_2AB+\beta_1\alpha_2BA=+\alpha_2\beta_1AB+\beta_2\alpha_1BA$$

$$\Leftrightarrow(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)AB=(\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2)BA\underset{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\neq 0}{\Leftrightarrow}AB=BA$$

۳۳:

$$(A+B)A^{-1}(A-B)=(A+B)(A^{-1}A-A^{-1}B)=(A+B)(I-A^{-1}B)$$

$$=A.I-A^{-1}AB+B.I-BA^{-1}B=A-B+B-BA^{-1}B=A-BA^{-1}B \qquad (I)$$

$$(A-B)A^{-1}(A+B)=(A-B)(A^{-1}A+A^{-1}B)=(A-B)(I+A^{-1}B)$$

$$=A.I+AA^{-1}B-BI-BA^{-1}B=A-BA^{-1}B \qquad (II)$$

$$(I)(II)\to(A+B)A^{-1}(A-B)=(A-B)A^{-1}(A+B)$$

۳٤: ابتدا نشان می‌دهیم اگر $AB=BA$ آنگاه $AB^n=B^nA$

استقراء: اگر $n=1$ بنابر فرض درست است.

فرض کنیم حکم برای n درست باشد نشان می‌دهیم برای $n+1$ نیز درست است.

$$AB^{n+1}=AB^nB=B^nAB=B^nBA=B^{n+1}A$$

و اثبات تمام است.

حالا برای اثبات رابطهٔ $A^mB^n=B^nA^m$ استقراء روی m را بکار می‌بریم.

برای $m=1$، $AB^n=B^nA$ اثبات شد.

فرض کنیم برای m درست باشد نشان می‌دهیم برای $m+1$ درست است.

$$A^{m+1}B^n=A^mAB^n=A^mB^nA=B^n(A^mA)=B^nA^{m+1}$$

$$\to A^{m+1}B^n=B^nA^{m+1}$$

لذا $\quad A^mB^n=B^nA^m \qquad \forall m\in N,\forall n\in N$

۳۵:

الف ← ب

$AB = BA$

$\rightarrow ABB^{-1} = BAB^{-1} \rightarrow A.I = BAB^{-1} \rightarrow A = BAB^{-1}$

$\rightarrow B^{-1}A = B^{-1}BAB^{-1} = IAB^{-1} = AB^{-1} \rightarrow AB^{-1} = B^{-1}A$

ب ← ج

$AB^{-1} = B^{-1}A \rightarrow A^{-1}AB^{-1} = A^{-1}B^{-1}A \rightarrow IB^{-1} = A^{-1}B^{-1}A$

$\rightarrow B^{-1}A^{-1} = A^{-1}B^{-1}AA^{-1} = A^{-1}B^{-1}I = A^{-1}B^{-1} \rightarrow A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

ج ← الف

$A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1} \rightarrow AA^{-1}B^{-1} = AB^{-1}A^{-1}$

$\rightarrow I.B^{-1} = AB^{-1}A^{-1} \rightarrow B^{-1}A = AB^{-1}A^{-1}A = AB^{-1}$

$\rightarrow B.B^{-1} = BA.B^{-1} \rightarrow A = BAB^{-1} \rightarrow AB = BA$

۱:

الف)

$$\begin{pmatrix} ۳ & -۴ & ۵ & -۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۱۰ & ۴ & ۲ \\ ۱ & -۱ & ۳ & ۱ & ۳ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \\ x_۴ \\ x_۵ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ -۱ \end{pmatrix}$$

ب)

$$\begin{pmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۱ & -۲ & ۱ \\ ۳ & -۱ & ۴ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۸ \end{pmatrix}$$

۲:

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۴ & ۳ & ۳ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ & -۲ & ۱ & ۰ \\ ۱ & -۲ & ۲ & -۳ \\ ۰ & ۱ & -۱ & ۱ \\ -۲ & ۳ & -۲ & ۳ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

اگر $AB = I$ آنگاه A, B وارون همدیگرند(B, A مربعی باشند)

اگر B معکوس چپ یا راست ماتریس A باشد Bمعکوس A است .

حل دستگاه

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۴ & ۳ & ۳ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \\ x_۴ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_۱ \\ y_۲ \\ y_۳ \\ y_۴ \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} ۱ & -۲ & ۱ & ۰ \\ ۱ & -۲ & ۲ & -۳ \\ ۰ & ۱ & -۱ & ۱ \\ -۲ & ۳ & -۲ & ۳ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_۱ \\ y_۲ \\ y_۳ \\ y_۴ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \\ x_۴ \end{pmatrix}$$

$$x_1 = y_1 - ۲y_۲ + y_۳$$
$$x_1 = y_1 - ۲y_۲ + ۲y_۳ - y_۴$$
$$\to x_۲ = y_۲ - y_۳ + y_۴$$
$$x_۴ = -۲y_1 + ۳y_۲ - ۲y_۳ + ۳y_۴$$

:۳

$$\begin{pmatrix} ۱۳ & ۱۹ \\ ۲ & ۳ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۳ & -۱۹ \\ -۲ & ۱۳ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۳۹-۳۸ & -۱۳\times۱۹+۱۳\times۱۹ \\ ۶-۶ & -۳۸+۳۹ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} ۱۳ & ۱۹ \\ ۲ & ۳ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۳ & -۱۹ \\ -۲ & ۱۳ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۳a - ۱۹b \\ -۲a + ۱۳b \end{pmatrix}$$

:٤

الف) نشان می دهیم $X = By$ جواب دستگاه است .

$$X = B_{n\times m} y_{m\times ۱} = By$$
$$\to AX = A(By) = (AB)y = I_m y = y$$

ب)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -۱۷ & -۲ \\ -۸ & -۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -۱۷\alpha - ۲\beta \\ -۸\alpha - \beta \\ ۰ \end{pmatrix}$$

:۵

$$AB = \bar{0} \to \begin{pmatrix} a_{۱۱} & \cdots & a_{۱n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m۱} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{۱۱} & \cdots & b_{۱p} \\ b_{۲۱} & \cdots & b_{۲p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n۱} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = \bar{0}_{m\times p}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\dots+a_{1n}b_{n1} & \dots & a_{11}b_{1p}+\dots+a_{1n}b_{np} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+\dots+a_{2n}b_{n1} & \dots & a_{21}b_{1p}+\dots+a_{2n}b_{np} \\ \vdots & \dots & \\ a_{m1}b_{11}+a_{m2}b_{21}+\dots+a_{mn}b_{n1} & \dots & a_{m1}b_{1p}+\dots+a_{mn}b_{np} \end{pmatrix}$$

$$= \bar{0}_{m\times p} \rightarrow \begin{matrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\dots+a_{1n}b_{n1}=0 \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+\dots+a_{2n}b_{n1}=0 \\ \vdots \\ a_{m1}b_{11}+a_{m2}b_{21}+\dots+a_{mn}b_{n1}=0 \end{matrix} \quad I\dots$$

$$\rightarrow \begin{matrix} a_{11}b_{1p}+\dots+a_{1n}b_{np}=0 \\ a_{21}b_{1p}+\dots+a_{2n}b_{np}=0 \\ \vdots \\ a_{m1}b_{1p}+\dots+a_{mn}b_{np}=0 \end{matrix} \quad Ip$$

در هر یک از دستگاهای $\{I_i\}_{i=1}^{p}$ تعداد مجهولات بیشتر از تعداد معادلات است زیرا $(m<n)$ لذا هر کدام از دستگاههای فوق یک جواب مخالف صفر دارد.

بعنوان مثال در دستگاه I_1 مجهولات جملات دنبالهٔ $\{b_{i1}\}_{i=1}^{n}$ می‌باشند و همینطور در دستگاه I_p مجهولات $\{b_{ip}\}_{i=1}^{n}$ می‌باشند.

لذا ماتریس $B\neq 0$ وجود دارد بطوریکه $AB=0$

:۶

$AX=y_1 \rightarrow \exists X_1 \;\; s.t \;\; AX_1=y_1$ حل پذیر است

$$\rightarrow AX_1+AX_2=y_1+y_2$$

$AX=y_2 \rightarrow \exists X_2 \;\; s.t \;\; AX_2=y_2$ حل پذیر است

$$\rightarrow A(X_1+X_2)=y_1+y_2$$

لذا X_1+X_2 جواب دستگاه $AX=y_1+y_2$ می‌باشد.

:۱

الف) $A^T = \begin{pmatrix} ۱ & -۳ \\ -۳ & ۰ \end{pmatrix}$

ب) $A^T = \begin{pmatrix} ۱ & -۳ \\ ۳ & ۰ \end{pmatrix}$

ج) $A^T = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۴ & ۱ & -۱ & ۳ \end{pmatrix}$

د) $A^T = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ -۷ & ۱ \\ ۰ & ۰ \\ ۶ & ۲ \\ ۳ & -۳ \end{pmatrix}$

:۲

اثبات :

$$A=(a_{ij})_{m\times n} \to \alpha A=(\alpha a_{ij})_{m\times n} \to (\alpha A)^T=(\alpha a_{ij})^T=(\alpha a_{ji})_{m\times n}$$

$$=\alpha(a_{ji})_{n\times m}=\alpha A^T \to (\alpha A)^T=\alpha A^T$$

$$A=(a_{ij})_{m\times n} \to A^T=(a_{ji})_{n\times m} \to (A^T)^T=(a_{ji})^T_{n\times m}=(a_{ij})_{m\times n}=A$$

$$\to (A^T)^T=A$$

:۳

$$(A+B)^*=\overline{((A+B)^T)}=\overline{(A^T+B^T)}=\overline{(A^T)}+\overline{(B^T)}=A^*+B^*$$

$$\to (A+B)^*=A^*+B^*$$

$$(AB)^*=\overline{((AB)^T)}=\overline{(B^TA^T)}=\overline{(B^T)}\,\overline{(A^T)}=B^*A^* \to (AB)^*=B^*A^*$$

$$(\alpha A)^* = \overline{((\alpha A)^T)} = \overline{(\alpha A^T)} = \overline{\alpha}\,\overline{(A^T)} = \overline{\alpha} A^* \rightarrow (\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$$

$$(A^*)^* = \left(\overline{(A^T)}\right)^* = \left(\overline{\overline{((A^T)^T)}}\right) = (A^T)^T = A$$

:٤

A متقارن است اگر و فقط اگر $A^T=A$.

$$(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A \Rightarrow$$

A^TA متقارن است.

:۵

فرض کنیم $A = (a_{ij})_{m\times n}$ لذا $A^T = (a_{ji})_{n\times m}$

A متقارن است لذا $A^T=A$ بنابراین $(a_{ji})_{n\times m} = (a_{ij})_{m\times n}$ در نتیجه m=n یعنی $A_{m\times m}=A_{n\times n}$ یعنی A ماتریسی مربعی است.

:٦

A هرمیتی است هرگاه $A^* = A$

$$(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A$$

$$(AA^*)^* = (A^*)^*A^* = AA^*$$

$$(A + A^*)^* = A^* + (A^*)^* = A^* + A = A + A^*$$

:۷

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \circ & & \cdots & \circ \\ \circ & a_{22} & & \cdots & \circ \\ \circ & \circ & a_{33} & \cdots & \circ \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n} \rightarrow A^T = A$$

:۸

$A^* = A$

$$A=(a_{ij})_{n\times n} \rightarrow A^* = (b_{ij})_{n\times n} \qquad b_{ij} = \overline{a_{ji}} = a_{ij}$$

لذا مزدوج اعداد روی قطر اصلی با خود عدد برابر است در نتیجه اعداد روی قطر اصلی حقیقی‌اند زیرا اگر $a+bi$ روی قطر اصلی باشد در ماتریس هرمیتی داریم

$$\overline{a+bi} = a+bi \rightarrow a-bi = a+bi \Rightarrow b = ۰$$

و $a+bi$ روی قطر اصلی حقیقی خواهد بود.

:۹

کافی است نشان دهیم $(AB)^T=AB$

$$(AB)^T = B^T.A^T = BA = AB \qquad \Rightarrow (AB)^T = AB$$

بالعکس $AB = (AB)^T = B^T A^T = BA \rightarrow AB = BA$

:۱۰

$$\left.\begin{aligned} A^T.(A^{-۱})^T &= (A^{-۱}A)^T = I^T = I \\ (A^{-۱})^T A^T &= (A.A^{-۱})^T = I^T = I \end{aligned}\right\} \rightarrow$$ A^T وارون پذیر است

وارونِ A^T برابر $(A^{-۱})^T$ است یعنی

$$(A^T)^{-۱} = (A^{-۱})^T$$

:۱۱

$$\begin{aligned} X_۱ &= A^T + A \\ X_۲ &= -A^T + A \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} X_۱^T &= (A+A^T)^T = A^T + A \\ X_۲^T &= (A-A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -(A-A^T) \end{aligned}$$

لذا $X_۱$ متقارن و $X_۲$ متقارن کج است

قرار می‌دهیم $y_۲ = \frac{۱}{۲}X_۲, y_۱ = \frac{۱}{۲}X_۱$ لذا $y_۱$ و $y_۲$ متقارن و متقارن کج‌اند .

$$y_۱ + y_۲ = \frac{۱}{۲}X_۱ + \frac{۱}{۲}X_۲ = \frac{۱}{۲}(X_۱+X_۲) = \frac{۱}{۲}\left(A + A + A^T - A^T\right) = \frac{۱}{۲}(۲A) = A$$

لذا A بصورت جمع دو ماتریس $y_۱$ و $y_۲$ که به ترتیب متقارن و متقارن کج‌اند نوشته شده‌است .

:۱۲

$$A^T B^T = (BA)^T = (AB)^T = B^T A^T$$

:۱۳

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}\to A^T=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$$

$$A.A^T=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&5\end{pmatrix}\to A.A^T\neq A^T.A$$

$$A^T.A=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\2&4\end{pmatrix}$$

:۱٤

$$f(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$$

$$A=(a_{ij})\to A^T=(a_{ji})$$

$$f(A^T)=a_0+a_1A^T+\dots+a_n(A^T)^n=a_0I+a_1A^T+\dots+a_n(A^n)^T$$

$$=(a_0I+a_1A+\dots+a_nA^n)^T=(f(A))^T$$

:۱۵

فرض $H=\frac{1}{2}(A^*+A)\to H^*=\frac{1}{2}((A^*)^*+A^*)=\frac{1}{2}(A+A^*)=H$

لذا H هرمیتی است

فرض $K=\frac{1}{2}i(A^*-A)\to K^*=-\frac{1}{2}i((A^*)^*-A^*)=\frac{1}{2}i(A^*-A)=K$

لذا K هرمیتی است

از طرفی $\frac{1}{2}(A^*+A)+i\left(\frac{1}{2}i(A^*-A)\right)=\frac{1}{2}(A^*+A-A^*+A)=\frac{1}{2}(2A)=A$

$$\to A=H+iK$$

که در آن H,K هرمیتی‌اند.

(الف

$$A = H_1 + iK$$
$$\to H_1 + iK_1 = H_2 + iK_2 \to H_1 - H_2 = i(K_2 - K_1)$$
$$A = H_2 + iK_2$$
$$K_2 - K_1 = 0 \to K_2 = K_1$$
$$\to H_1 - H_2 = 0 \to H_2 = H_1$$
$$A = H_1 + iK_1 \to A = H + iK$$ منحصر به فرد است.

ب)

$$HK = KH \leftrightarrow AA^* = A^* A$$
$$AA^* = A^* A \leftrightarrow (H + iK)(H^* - iK^*) = (H^* - iK^*)(H + iK)$$
$$\leftrightarrow HH^* - iHK^* + iKH^* + KK^* = H^* H + iH^* K - iK^* H + K^* K$$

H,K هرمیتی‌اند

$$-iHK + iKH = iHK - iKH$$
$$\to 2iKH = 2iHK \leftrightarrow KH = HK$$

۱۶:

$$A = (a_{ij})_{n\times n}$$
$$\to A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{n\times n}$$
$$B = (b_{ij})_{n\times n}$$
$$tr(A+B) = (a_{11} + b_{11}) + (a_{22} + b_{22}) + \ldots + (a_{nn} + b_{nn})$$
$$= (a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}) + (b_{11} + b_{22} + \ldots + b_{nn})$$
$$= tr(A) + tr(B)$$

ب)

$$aA = (aa_{ij})_{n\times n} \to trA = aa_{11} + aa_{22} + \ldots + aa_{nn}$$
$$= a(a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}) = atrA$$

ج)

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & & \\ d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

$$tr(AB)=\sum_{i=1}^{n} C_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik}=\sum_{k=1}^{n} d_{kk}=tr(BA)$$

:۱۷

$$A=(a_{ij})\rightarrow A^{T}=(b_{ij})=(a_{ji})\rightarrow A.A^{T}=(C_{ij})$$

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}\rightarrow C_{ii}=\sum_{k=1}^{n} a^{2}{}_{ik}$$

$$tr(A.A^{T})=\sum_{i=1}^{n} C_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{ik}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a^{2}{}_{ik} \quad (1)$$

رابطه (۱) جمع تمام درایه های ماتریس A است .

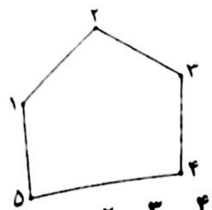
:۱۸

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$tr(A.A^T)=0 \to \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a^t_{ik}a_{ki}=0 \to \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a^2{}_{ki} = \Rightarrow \underset{\substack{i=1,\dots,n\\ k=1,\dots,n}}{a_{ki}=0} \Rightarrow A=0$$

:۱۹

نگار زیر را که دارای ۵ رأس است در نظر می گیریم لذا نگار فوق دارای ماتریسی ۵×۵ است که به صورت زیر تعریف می شود .



$$A=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\end{array}\\ \begin{pmatrix}0&1&0&0&1\\1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&1\\1&0&0&1&0\end{pmatrix}\end{array} \to A^T=\begin{pmatrix}0&1&0&0&1\\1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&1\\1&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$\to A^T = A \to$ A متقارن است

:۲۰

$$A=\begin{array}{c} \\ p_1\\p_2\\ \vdots\\ p_n\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}p_1&p_2&\cdots&p_n\end{array}\\ \begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&&&\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\end{array}$$

ماتریس $A=(a_{ij})_{n\times n}$ ماتریسی است که به نگار مسئله نسبت داده می شود

$a_{ij}=d(p_i,p_j)=d(p_j,p_i)=a_{ji}$ لذا $A=(a_{ij})=(a_{ji})=A^T$ بنابراین $A^T=A$ یعنی A متقارن است .