پاسخ تمرینات فصل ۱ بخش ۱

۱ : الف)

$$\begin{matrix} ۲x+y=۷ \\ x-۳y=۲ \end{matrix} \quad \begin{matrix} ۷y=۳ \\ x-۳y=۲ \end{matrix} \rightarrow \quad y=\frac{۳}{۷}$$

$$x-۳y=۲$$

$$x=۲+\frac{۹}{۷}=\frac{۱۴+۹}{۷}=\frac{۲۳}{۷} \rightarrow \quad y=\frac{۳}{۷} \ , \ x=\frac{۲۳}{۷}$$

تعبیر هندسی , معادلات دستگاه خط راست هستند که در نقطه $(\frac{۲۳}{۷},\frac{۳}{۷})$ متقاطعند.

ب)

$$\begin{matrix} x+y=۳ \\ ۳x+۲y=۸ \end{matrix} \rightarrow \quad \begin{matrix} x+y=۳ \\ -y=-۱ \end{matrix} \rightarrow \quad \begin{matrix} x=۲ \\ y=۱ \end{matrix}$$

تعبیر هندسی : معادلات دستگاه دو خط راستند که در نقطه (۲,۱) متقاطعند.

ج)

$$\begin{matrix} ۴x-۳y=۸ \\ ۸x-۶y=۲۴ \end{matrix} \rightarrow \quad \begin{matrix} ۸x-۶y=۱۶ \\ ۸x-۶y=۲۴ \end{matrix} \rightarrow \quad ۱۶=۲۴ \quad \text{تناقض}$$

دستگاه جواب ندارد.

تعبیبر هندسی : خطوط دستگاه موازی غیر متقاطعند.

کانال ریاضیات از نگاهی نو
@math_new

د)

$$\begin{matrix} x-y=۸ \\ ۲x+۸y=۶ \end{matrix} \rightarrow \quad \begin{matrix} x-y=۸ \\ ۱۰x=۷۰ \end{matrix} \rightarrow \quad \begin{matrix} -y=۱ \rightarrow y=-۱ \\ x=۷ \end{matrix}$$

تعبیر هندسی : خطوط دستگاه فوق در نقطه (۷,−۱) متقاطعند.

هـ)

$$\begin{matrix} x+۲y=۳ \\ ۲x+۴y=۶ \end{matrix} \rightarrow \quad \begin{matrix} ۲x+۴y=۶ \\ ۲x+۲y=۶ \end{matrix}$$

تعبیر هندسی : در دستگاه فوق معادلات منطبقند لذا دستگاه بیشمار جواب دارد.

و)

$$\begin{matrix} ۲x-۶y=۷ \\ ۳x-۹y=۴ \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x-۳y=\frac{۷}{۲} \\ x-۳y=\frac{۴}{۳} \end{matrix} \rightarrow \frac{۷}{۲}=\frac{۴}{۳} \text{ تناقض}$$

تعبیر هندسی : دستگاه فوق جواب ندارد یعنی معادلات دستگاه همدیگر را قطع نمی کنند و چون نقطهٔ مشترک ندارند موازی غیر منطبقند.

۲ :

الف) $(x,y)=(۰,۰)$ جوا ب معادلات فوق است.

ب)

$$\begin{matrix} ax+by=۰ \\ cx+dy=۰ \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=۰ \qquad (I)$$

تذکر : در معادله $Ax=۰$ اگر $|A|\neq ۰$ باشد آنگاه $x=۰$ (معادله جواب بدیهی دارد)، اگر $|A|=۰$ آنگاه معادله $Ax=۰$ جواب غیر صفر دارد.

در رابطهٔ (I) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc\neq ۰$ لذا معادله فقط جواب بدیهی $(۰,۰)$ را دارد .

تعبیر هندسی : دو خط در مبدأ مختصات همدیگر را قطع می‌کنند.

۳ : الف)

$$\begin{matrix} x+y+z=۶ \\ -۵y=-۱۵ \\ -۳y-z=-۸ \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x+y+z=۶ \\ y=۳ \\ ۳y+z=۸ \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x+\ \ +z=۳ \\ y=۳ \\ z=-۱ \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x=۴ \\ y=۳ \\ z=-۱ \end{matrix}$$

ب)

$$\begin{matrix} x-y+z=۰ \\ ۲x-y+z=۱ \\ ۳x+y-۳z=۲ \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x-y+z=۰ \\ y-z=۱ \\ ۳y-۶z=۲ \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x=۱ \\ y-z=۱ \\ ۰-۲z=-۲ \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x=۱ \\ y=۲ \\ z=۱ \end{matrix}$$

دستگاه دارای جواب $(۱,۲,۱)$ می باشد.

٤ :

عدهٔ ماده ها y ، عدهٔ نرها x

$$\begin{matrix} x+y=۱۰۰ \\ ۲x+۳y=۲۴۰ \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x+y=۱۰۰ \\ y=۴۰ \end{matrix} \quad \begin{matrix} x=۶۰ \\ y=۴۰ \end{matrix}$$

تعداد نرها در ابتدا ۶۰ و تعداد ماده ها در ابتدا ۴۰ بوده است .

٥ :

	A	B	ساعت مورد نیاز
M	۱	$\frac{۱}{۲}$	۱۵
N	۱	$\frac{۱}{۴}$	۱۰

x تعداد محصول A

y تعداد محصول B

$$\begin{matrix} x+\frac{۱}{۲}y=۱۵ \\ x+\frac{۱}{۴}y=۱۰ \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} ۲x+y=۳۰ \\ ۴x+y=۴۰ \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} ۲x+y=۳۰ \\ ۲x=۱۰ \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} y=۲۰ \\ x=۵ \end{matrix}$$

۲۰ واحد از B و ۵ واحد از A باید تولید شود.

٦ :

$$\begin{matrix} y(x)=Ae^{x}+Be^{-x} \\ y'(x)=Ae^{x}-Be^{-x} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} y(۰)=۱ \Rightarrow A+B=۱ \\ y'(۰)=A-B=۰ \end{matrix} \rightarrow A=B=\frac{۱}{۲}$$

لذا $y(x)=\frac{۱}{۲}e^{x}-\frac{۱}{۲}e^{-x}$

پاسخ تمرینات فصل ۱ بخش ۲

۱. تذکر : دو دستگاه از معادلات هم ارزند اگر و فقط اگر دارای جواب های یکسان باشند.

الف)

$$\begin{matrix} ۲x+y=۱ \\ x-y=۰ \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} ۳x=۱ \\ x=y \end{matrix} \rightarrow x=y=\frac{۱}{۳}$$

$(\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳})$ جواب دستگاه می باشد.

$$\begin{matrix} x+۲y=۰ \\ ۳x+y=۵ \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x+۲y=۵ \\ -۵y=-۱۰ \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x=۱ \\ y=۲ \end{matrix}$$

$(۱,۲)$ جواب دستگاه می باشد.

دو دستگاه هم ارز نیستند زیرا جوابهای آنها یکی نیست.

ب)

$$\begin{matrix} x+y=۰ \\ x-۲y=۰ \end{matrix} \quad \begin{matrix} x+y=۰ \\ ۳x=۰ \end{matrix} \rightarrow x=y=۰$$

لذا دو دستگاه فوق هم ارز هستند.

$$\begin{matrix} ۳x+۲y=۰ \\ x-y=۰ \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} ۵x=۰ \\ x-y=۰ \end{matrix} \rightarrow x=y=۰$$

ج)

$$\begin{matrix} x+y=۰ \\ x-۳y=۰ \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x+y=۰ \\ ۳x=۰ \end{matrix} \rightarrow x=y=۰$$

$$\begin{matrix} ۲x+۲y=۰ \\ ۳x+۳y=۰ \end{matrix} \rightarrow x=-y \rightarrow \text{بیشمار جواب دارد}$$

لذا هم ارز نیستند.

د)

$$\begin{matrix} ۲x+y=۵ \\ x-y=-۲ \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} ۳x=۳ \\ x-y=-۲ \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x=۱ \\ -y=-۳ \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x=۱ \\ y=۳ \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} ۳x-y=۰ \\ x+y=۴ \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x=\frac{y}{۳} \\ ۴x=۴ \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} y=۳x \\ x=۱ \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} y=۳ \\ x=۱ \end{matrix}$$

جواب دو دستگاه یکی است لذا هم ارزند .

هـ)

$$\begin{matrix} x-y=۲ \\ x+y=۴ \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x-y=۲ \\ ۲x=۶ \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} -y=-۱ \\ x=۳ \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} y=۱ \\ x=۳ \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x+۲y=۸ \\ ۳x+y=۴ \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x+۲y=۸ \\ -۵y=-۲۰ \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x=۰ \\ y=۴ \end{matrix}$$

هم ارز نیستند زیرا جوابهای دو دستگاه یکی نیست.

و)

$$\begin{matrix} x+۲y=۱ \\ ۳x+۶y=۰ \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x+۲y=۱ \\ x+۲y=۰ \end{matrix} \rightarrow ۰=۱$$ تناقض . جواب ندارد .

$$\begin{matrix} x+y=۵ \\ ۲x-y=۱ \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x+y=۵ \\ ۳x=۶ \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} y=۳ \\ x=۲ \end{matrix}$$

هم ارز نیستند .

۲ : $(۰,۰,۰)$ جواب دستگاه $\begin{matrix} c_{۱۱}x_۱+c_{۱۲}x_۲+c_{۱۳}x_۳=۰ \\ c_{۲۱}x_۱+c_{۲۲}x_۲+c_{۲۳}x_۳=۰ \end{matrix}$ است اما جواب دستگاه دیگر نیست لذا دو دستگاه معادلات هم ارز نیستند.

۱ :

الف)

$$\begin{array}{llll} x-y+z=5 & x-y+z=5 & x=1 & x=1 \\ 2x+y-z=-2 \rightarrow & y-z=-4 \rightarrow & y-z=-4 \rightarrow & y=3 \\ 3x-y-z=-7 & y-2z=-11 & -z=-7 & z=7 \end{array}$$

ب)

$$\begin{array}{llll} x_1-x_2+2x_3=-5 & x_1-x_2+2x_3=5 & x_1-x_3=6 & x_1=4 \\ 3x_1+4x_2+15x_3=2 \rightarrow & 7x_2+9x_3=17 \rightarrow & 30x_3=-60 \rightarrow & x_3=-2 \\ 2x_1-x_2+x_3=1 & x_2-3x_3=11 & x_2-3x_3=11 & x_2=5 \end{array}$$

جواب دستگاه $(x_1,x_2,x_3)=(4,5,-2)$

ج)

$$\begin{array}{ll} x+3y+z=2 & x+3y+z=2 \\ 3x+4y-z=1 \rightarrow & -5y-4z=-5 \rightarrow -1=-5 \\ x-2y-3y=1 & -5y-4z=-1 \end{array}$$

تناقض ، دستگاه جواب ندارد.

د)

$$\begin{array}{lllll} 2x-3y+4z=3 & -y+2z=1 & y-2z=-1 & & \\ x-y+z=1 \rightarrow & x-y+z=1 \rightarrow & x-z=0 \rightarrow & x=z & \\ x-2y+3z=2 & -y+2z=1 & y-2z=-1 & y-2z=-1 & \end{array}$$

اگر قرار دهیم $x=c$ معادله دارای جواب کلی $(c,2c-1,c)$ است.

هـ)

$$\begin{array}{ll} x_1+2x_2+x_3-2x_4=1 & x_1+2x_2+x_3-2x_4=1 \\ 2x_1+x_2-x_3+x_4=0 \rightarrow & -3x_2-3x_3+5x_4=-2 \rightarrow 0=-2 \\ x_1-x_2-2x_3+3x_4=1 & -3x_2-3x_3+5x_4=0 \end{array}$$

تناقض

دستگاه جواب ندارد.

و)

ز)

$$\begin{array}{lll} x-y+z=۹ & x-y+z=۹ & x+z=۸ \\ ۲x+y-۳z=۰ & ۳y-۵z=-۱۸ & ۵z=۱۵ \\ x+۴y+z=۴ & ۵y=-۵ & y=-۱ \\ ۳x+y-۵z=-۱ & ۴y-۸z=-۲۸ & ۸z=۲۴ \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} x=۵ \\ z=۳ \\ y=-۱ \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} ۲x_۱+x_۲-x_۳+x_۴=۰ & ۳x_۲-۳x_۳-x_۴=۰ & -x_۳-x_۴=۰ \\ x_۱-x_۲+x_۳+x_۴=۰ & x_۱-x_۲+x_۳+x_۴=۰ & x_۱+\frac{۱}{۳}x_۳+x_۴=۰ \\ ۴x_۱-x_۲+x_۳+۳x_۴=۰ & ۳x_۲-۲x_۳=۰ & x_۲-\frac{۲}{۳}x_۳=۰ \end{array}$$

ح)

$$x_۳+x_۴=۰$$

$$\rightarrow x_۱+\frac{۲}{۳}x_۳=۰ \rightarrow (x_۱,x_۲,x_۳,x_۴)=(+\frac{۲}{۳}x_۴,-\frac{۲}{۳}x_۴,-x_۴,x_۴)$$

$$x_۲=\frac{۲}{۳}x_۳$$

$$\begin{array}{lll} -x_۱+x_۲+x_۳=۴ & -x_۱+x_۲+x_۳=۴ & x_۱=۱ \\ x_۱-x_۲+x_۳=۲ & \rightarrow ۲x_۳=۶ & \rightarrow x_۲=۲ \\ x_۱+x_۲-x_۳=۰ & ۲x_۲=۴ & x_۳=۳ \end{array}$$

۲ :الف)

$$\begin{array}{lll} x_۲+x_۳=a & x_۲+x_۳=a & x_۲=\frac{۱}{۲}(a+c-b) \\ x_۱+x_۳=b & \rightarrow x_۱+x_۳=b & \rightarrow x_۳=\frac{۱}{۲}(b-c+a) \\ x_۱+x_۲=c & x_۱-x_۳=c-a & x_۱=\frac{۱}{۲}(c-a+b) \end{array}$$

ب)

$$\begin{matrix} ۲x+۵y=a \\ x+۳y=b \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} -y=a-۲b \\ x+۳y=b \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} y=۲b-a \\ x=۳a-۵b \end{matrix}$$

۳:

$$\begin{matrix} (۱-t)x+ty=۰ \\ x-\frac{t+۱}{t}y=-\frac{۱}{t} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} (\frac{۱-t^۲}{t}+t)y=\frac{۱-t}{t} \\ x-\frac{۱+t}{t}y=-\frac{۱}{t} \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{matrix} \frac{۱}{t}y=\frac{۱-t}{t} \rightarrow y=۱-t \\ x=\frac{۱-t^۲}{t}-\frac{۱}{t}=\frac{۱-۲t^۲}{t} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x=\frac{۱-۲t^۲}{t} \\ y=۱-t \end{matrix}$$

٤: الف)

$$\begin{matrix} ۲x+۳y-۲z=a \\ x-۲y+z=b \\ x-۹y+۵z=c \end{matrix} \quad \begin{matrix} ۲۱y-۱۲z=a-۲c \rightarrow ۷y-۴z=\frac{۱}{۳}(a-۲c) \\ \rightarrow \quad ۷y-۴z=b-c \\ x-۹y+۵z=c \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad b-c=\frac{۱}{۳}(۹-۲c) \Leftrightarrow \quad ۳b-۳c=a-۲c$$ شرط لازم و کافی اینست که

$$۳b-c-a=۰$$

ب)

$$\begin{matrix} x+۴y-۲z=a \\ ۲x-۲y+۳z=b \\ x-۶y+۵z=c \end{matrix} \quad \begin{matrix} x+۴y-۲z=a \\ \rightarrow \quad -۱۰x+۷z=b-۲a \\ -۱۰y+۷z=c-a \end{matrix}$$

$b=a+c \Leftrightarrow b-a-c=۰ \Leftrightarrow b-۲a=c-a$ دستگاه جواب دارد اگر و فقط اگر

۵ :

$$f(x)=a'x^3+b'x^2+c'x+d' \qquad f'(x)=3a'x^2+2b'x+c'$$

$$f(0)=A=d'$$

$$f(1)=c \Rightarrow a'+b'+c'+d'=c \Rightarrow a'+b'=c-c'-d'=c-A-B$$

$$f'(0)=c'=B$$

$$f'(1)=3a'+2b'+c'=D \Rightarrow 3a'+2b'=D-B$$

$$a'+b'=C-A-B \qquad a'+b'=C-A-B$$

$$\rightarrow$$

$$3a'+2b'=D-B \qquad -b'=D+2B+3A-3C$$

$$c'=B \qquad c'=B$$

$$d'=A \qquad d'=A$$

$$a'=-2C+B+2A+d$$

$$b'=3C-D-2B-3A$$

$$\rightarrow$$

$$c'=B$$

$$d'=A$$

با توجه به اینکه ضرایب a',b',c',d' وجود دارند لذا چند جمله‌ای f معین خواهد بود.

۶:

سن مادر : x سن پدر : y سن دختر : z سن پسر : w

$$y-x=2$$

$$y+2=3(w+2)$$

$$w+3=2(z+2)$$

$$x+3=5(z+3)$$

$$\rightarrow$$

$$x-y=-2$$

$$y-3w=4$$

$$w-2z=2$$

$$x-5z=12$$

$$\rightarrow$$

$$x-3w=2$$

$$y-3w=4$$

$$w-2z=2$$

$$x-5z=12$$

از حذف z در دستگاه معادله $\begin{cases} w-2z=2 \\ x-5z=12 \end{cases}$ بدست می آید که اگر آن را با $x-3w=2$ یک دستگاه بگیریم جواب $x=32$ و $w=10$ بدست می آید و اگر $y-3w=4$ قرار دهیم $w=10$ را در معادله $x-5z=12$ و $x=32$ را در معادله جوابهای $z=4$ و $y=34$ بدست می اید. بدین ترتیب سن هر یک بدست می آید.

۷ :

$$\begin{matrix} x+y=a \\ x+z=b \\ y+z=c \end{matrix} \quad \begin{matrix} y-z=a-b \\ \Rightarrow \quad x+z=b \\ y+z=c \end{matrix} \quad \begin{matrix} y-z=a-b \\ \Rightarrow \quad x+z=c \\ y+z=c \end{matrix}$$

$$z=\frac{۱}{۲}(c-a+b)$$

$$\Rightarrow \quad y=\frac{۱}{۲}(c+a-b)$$

$$z=\frac{۱}{۲}(a+c-b)-c+b=\frac{۱}{۲}(a+b-c)$$

لذا x، y و z بصورت فوق خواهند بود.

۸ :

$$F=a.c+b$$

$$۳۲=۰.a+b \rightarrow b=۳۲$$

$$۲۱۲=۱۰۰a+b \rightarrow ۲۱۲=۱۰۰a+۳۲ \rightarrow a=۱/۸$$

لذا $F=(۱/۸)c+۳۲$

۹ :

$$\begin{matrix} ۵۰x_۱+۲۰x_۲-۱۰x_۳-۳۰x_۴=۰ \\ ۲۵x_۱+۵۰x_۲-۵۰x_۳-۳۰x_۴=۰ \\ ۲۰x_۱+۳۰x_۲-۳۰x_۳-۲۰X_۴=۰ \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} ۵x_۱+۲x_۲-x_۳-۳x_۴=۰ \\ ۵x_۱+۱۰x_۲-۱۰x_۳-۶x_۴=۰ \\ ۲x_۱+۳x_۲-۳x_۳-۲x_۴=۰ \end{cases}$$

$$-\frac{۱۱}{۲}x_۲+\frac{۱۳}{۲}x_۳+۲x_۴=۰ \qquad x_۳-\frac{۱}{۵}x_۴=۰ \qquad x_۳=\frac{۱}{۵}x_۴$$

$$\rightarrow \frac{۵}{۲}x_۲-\frac{۵}{۲}x_۳-x_۴=۰ \qquad \rightarrow x_۲-x_۳-\frac{۲}{۵}x_۴=۰ \rightarrow x_۲=\frac{۳}{۵}x_۴$$

$$x_۱+\frac{۳}{۲}x_۲-\frac{۳}{۲}x_۳-x_۴=۰ \qquad x_۱-\frac{۲}{۵}x_۴=۰ \qquad x_۱=\frac{۲}{۵}x_۴$$

۱۰:

معادلهٔ یک دایره در حالت کلی به صورت زیر است.

$$x^۲ + y^۲ + Ax + By + C = ۰$$

$$۴ + ۸۱ + ۲A + ۹B + C = ۰ \qquad ۲A + ۹B + C = -۸۵$$

$$۱۴۴ + ۱۲B + C = ۰ \rightarrow \quad ۱۲B + C = -۱۴۴$$

$$۱۶ + ۳۲۴ - ۴A + ۱۸B + C = ۰ \qquad -۴A + ۱۸B + C = -۳۴۰$$

$$A + \frac{۹}{۲}B + \frac{۱}{۲}C = -\frac{۸۵}{۲}$$

$$\rightarrow B + \frac{۱}{۱۲}C = -۱۲$$

$$۳۶B + ۳C = -۵۱۰$$

$$A + \frac{۹}{۵}B + \frac{۱}{۲}C = -\frac{۸۵}{۲}$$

$$\rightarrow B + \frac{۱}{۱۲}C = -۱۲ \qquad \rightarrow -۱۲ = -\frac{۵۱۰}{۳۶}$$ تناقض

$$B + \frac{۱}{۱۲}C = -\frac{۵۱۰}{۳۶}$$

نقاط داده شده روی یک دایره نیستند.

۱۱:

$$aKMnO_۴ + bH_۲SO_۴ + cKBr \longrightarrow dK_۲SO_۴ + eBr_۲ + fMnSO_۴ + pH_۲O$$

$$b = p$$

$$a - f = ۰ \qquad p = ۴a$$

$$a + c - ۲d = ۰ \qquad f = a$$

$$۴a + ۴b - ۴d - ۴f - p = ۰ \rightarrow \quad c = ۵a$$

$$\rightarrow \qquad d = b - f = ۴a - a = ۳a$$

$$۲b - ۲p = ۰$$

$$c - ۲e = ۰ \qquad e = \frac{c}{۲} = \frac{۵}{۲}a$$

$$b - d - f = ۰$$

$\rightarrow$

$$aKMnO_4 + 4aH_2SO_4 + 5aKBr \longrightarrow 3aK_2SO_4 + \frac{5}{2}aBr_2 + aMnSO_4 + 4aH_2O$$

با حذف a داریم :

$$KMnO_4 + 4H_2SO_4 + 5KBr \longrightarrow 3K_2SO_4 + \frac{5}{2}Br_2 + MnSO_4 + 4H_2O$$

با ضرب طرفین در ۲ داریم :

$$2KMnO_4 + 8H_2SO_4 + 10KBr \longrightarrow 6K_2SO_4 + 5Br_2 + 2MnSO_4 + 8H_2O$$

۱۳ :

کامیون نوع اول: x

کامیون نوع دوم: y

کامیون نوع سوم: z

$$2x + y + 5z = 20$$
$$4x + 2y + 3z = 26$$
$$3x + y + z = 15$$

$$x + \frac{1}{2}y + \frac{5}{2}z = 10$$

$$\rightarrow -zz = -14 \qquad \rightarrow z = 2 \qquad \rightarrow z = 2$$

$$-\frac{1}{2}y - \frac{13}{2}z = -15 \qquad y + 13z = 30 \qquad y = 4$$

$$x + -82z = -5 \qquad x = 3$$

۱۴ : الف)

$$x = \frac{A \text{ جمعیت}}{\text{کل جمعیت}} \qquad y = \frac{B \text{ جمعیت}}{\text{کل جمعیت}} \qquad z = \frac{C \text{ جمعیت}}{\text{کل جمعیت}}$$

$$x + y + z = \frac{A \text{ جمعیت} + B \text{ جمعیت} + C \text{ جمعیت}}{\text{کل جمعیت}} = \frac{\text{کل جمعیت}}{\text{کل جمعیت}} = 1$$

ب : نسبت اعضای A به کل جمعیت برابر x است لذا اگر $\frac{7}{10}$ این نسبت در A بمانند و $\frac{3}{10}$ اعضای B عضو A شوند و $\frac{2}{10}$ اعضای C عضو A شوند با توجه به اینکه نسبت بعد از یک سال ثابت است و این نسبت x است لذا داریم :

$$\frac{۷}{۱۰}x+\frac{۳}{۱۰}y+\frac{۲}{۱۰}z=x$$

ج : این نسبت برای مجموعه B به کل جمعیت برابر y است لذا اگر $\frac{۶}{۱۰}$ این نسبت یعنی $(\frac{۶}{۱۰}y)$ در B و $\frac{۲}{۱۰}$نسبت موجود در A و $\frac{۱}{۱۰}$ نسبت موجود در C به B می آیند با توجه به اینکه نسبت بعد از یک سال ثابت است لذا

$$(\frac{۲}{۱۰})x+(\frac{۶}{۱۰})y+(\frac{۱}{۱۰})z=y$$

د : با توجه به اینکه نسبت موجود در C به کل جمعیت برابر z است و از طرفی $\frac{۷}{۱۰}$ این نسبت یعنی $\frac{۷}{۱۰}z$ در c می مانند و $\frac{۱}{۱۰}$نسبت اعضای B یعنی $\frac{۱}{۱۰}y$ و $\frac{۱}{۱۰}$ نسبت اعضای A یعنی $\frac{۱}{۱۰}x$ به مجموعهٔ c اضافه می شوند.و z بعد از یک سال ثابت است لذا

$$(\frac{۱}{۱۰})x+(\frac{۱}{۱۰})y+(\frac{۷}{۱۰})z=z$$

هـ)

$$\frac{۷}{۱۰}x+\frac{۳}{۱۰}y+\frac{۶}{۱۰}z=x$$

$$\frac{۲}{۱۰}x+\frac{۶}{۱۰}y+\frac{۱}{۱۰}z=y \rightarrow$$

$$\frac{۱}{۱۰}x+\frac{۱}{۱۰}y+\frac{۷}{۱۰}z=z$$

$$-۳x+۳y+۲z=۰$$

$$۲x-۴y+z=۰ \quad *$$

$$x+y-۳z=۰$$

از حل دستگاه *جواب $y=\frac{۷}{۶}z$ و $x=\frac{۱۱}{۶}z$ بدست می آید که اگر $x+y+z=۱$ آنها را در شرط $x+y+z=۱$ قرار دهیم $z=\frac{۱}{۴}$ خواهد شد و از آن $x=\frac{۱۱}{۲۴}$ و $y=\frac{۷}{۲۴}$ خواهد بود.

۱ :

الف)

$$\begin{matrix} ۳x+y+z=۰ \\ x-۲y+z=۰ \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} ۷y-۲z=۰ \\ x-۲y+z=۰ \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} y-\frac{۲}{۷}z=۰ \\ x+\frac{۳}{۷}z=۰ \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} y=\frac{۲}{۷}z \\ x=\frac{-۳}{۷}z \end{matrix}$$

ب) اگر قرار دهیم $z=c\neq ۰$ معادله دارای جواب غیر بدیهی $(\frac{-۳}{۷}c,\frac{۲}{۷}c,c)$ است .

$$\begin{matrix} x+y-۳z=۰ \\ ۲x+۳y+z=۰ \\ -x+۴y+۲z=۰ \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x+y-۳z=۰ \\ y+۷z=۰ \\ ۵y-z=۰ \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x-۱۰z=۰ \\ y=-۷z \\ y=\frac{۱}{۵}z \end{matrix} \quad (I)$$

فقط به ازای $z=۰$ روابط (I) برقرارند و اگر $z=۰$ باشد x و y نیز صفرند لذا دستگاه دارای جواب $(۰,۰,۰)$ است.

ج)

$$\begin{matrix} ۲x_۱+۲x_۲+x_۳-x_۴=۰ \\ x_۱-x_۲+x_۳+x_۴=۰ \\ ۲x_۱-x_۲+x_۳+۲x_۴=۰ \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} ۴x_۲-۵x_۳-۳x_۴=۰ \\ x_۱-x_۲+۳x_۳+x_۴=۰ \\ x_۲-۵x_۳=۰ \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{matrix} ۱۵x_۳-۳x_۴=۰ \\ \rightarrow x_۱-۲x_۳+x_۴=۰ \\ x_۲-۵x_۳=۰ \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x_۳=\frac{۱}{۵}x_۴ \\ x_۱=۲x_۳-x_۴=-۳x_۳ \\ x_۲=۵x_۳=x_۴ \end{matrix}$$

لذا اگر قرار دهیم $x_۳=c\neq ۰$ دستگاه دارای جواب غیر بدیهی $(-۳c,۵c,c,۵c)$ خواهد بود.

د)

$$\begin{matrix} 2x_1+2x_2+x_3-x_4=0 \\ x_1-x_2+2x_3+x_4=0 \\ 3x_1+x_2+2x_3-x_4=0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 4x_2-3x_3-3x_4=0 \\ x_1-x_2+2x_3+x_4=0 \\ 4x_2-4x_3-4x_4=0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x_3+x_4=0 \\ x_1+x_3=0 \\ x_2-x_3-x_4=0 \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{matrix} x_3=-x_4 \\ x_1=-x_3 \\ x_2=x_3+x_4 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x_3=-x_4 \\ x_1=+x_4 \\ x_2=0 \\ x_4=x_4 \end{matrix}$$

لذا اگر قرار دهیم $x_4=c$ جواب کلی به صورت $(c,0,-c,c)$ خواهد بود، اگر $c\neq 0$ جواب غیر بدیهی خواهد بود.

۲ :

فرض کنید A یک ماتریس $n\times n$ به صورت زیر باشد $A=(a_{ij})_{n\times n}$ و x یک n ـ بردار ستونی به صورت $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ باشد دستگاه همگن دارای n سطر و n مجهول به صورت زیر خواهد بود. $AX=0$

$g\Rightarrow Ag=0$ جواب است

$$\rightarrow Ag+Ah=0\Rightarrow A(g+h)=0$$

$h\Rightarrow Ah=0$ جواب است

$$g+h=(g_1,\ldots,g_n)+(h_1,\ldots,h_n)=(g_1+h_1,\ldots,g_n+h_n)=g+h$$

در نتیجه $g+h$ ، n ـ بردار است.

دستگاه معادلات I را می توان به صورت $AX=b$ نوشت که در آن $b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ و $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ، $A=(a_{ij})_{m\times n}$ ، $g=(g_1,\ldots,g_n)$ جواب $AX=b$ است لذا $Ag=b$

و از طرفی $h=(h_1,\ldots,h_n)$ جواب $AX=0$ است لذا $Ah=0$ ،

$$\begin{matrix} Ag=0 \\ Ah=0 \end{matrix} \rightarrow A(g+h)=Ag+Ah=b+0=b \Rightarrow A(g+h)=b$$

لذا $g+h$ جواب دستگاه $AX=b$ است .

٤ :

فرض کنیم دستگاه بصورت $AX=b$ باشد با توجه به اینکه دستگاه جواب دارد فرض کنیم دو جواب دلخواه x_1 و x_2 را داشته باشد لذا

$$\begin{matrix} Ax_1=b \\ Ax_2=b \end{matrix} \rightarrow A(x_1-x_2)=0$$

قضیه : در یک دستگاه معادلات خطی همگن اگر تعداد معادلات کمتر از تعداد مجهولات باشد، یک جواب غیربدیهی وجود دارد.

$A(x_1-x_2)=0$ جواب غیر بدیهی دارد یعنی نمی توان در هر حالت نتیجه گرفت که دستگاه همگن $A(x_1-x_2)=0$ فقط جواب $x_1-x_2=0$ را دارد و از آن $x_1=x_2$ و ریشه یکتا باشد بلکه ممکن است $x_1-x_2\neq 0$ و از آن $x_1\neq x_2$ یعنی دستگاه جواب یکتا ندارد .

۵:

$$\begin{cases} Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Cy_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F = 0 \\ Ax_2^2 + Bx_2y_2 + Cy_2^2 + Dx_2 + Ey_2 + F = 0 \\ Ax_3^2 + Bx_3y_3 + Cy_3^2 + Dx_3 + Ey_3 + F = 0 \\ Ax_4^2 + Bx_4y_4 + Cy_4^2 + Dx_4 + Ey_4 + F = 0 \\ Ax_5^2 + Bx_5y_5 + Cy_5^2 + Dx_5 + Ey_5 + F = 0 \end{cases} \quad (I)$$

دستگاه (I) یک دستگاه پنج معادله و ۶ مجهول (F,E,D,C,B,A) است که با توجه بـه قضیـه گفته شده در تمرین قبل دارای یک جواب غیر بدیهی برای F,E,D,C,B,A است.