

قلمت علم نکتہ افکار

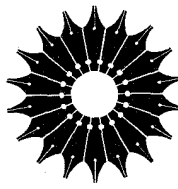


مرکز نشر و اشاعت

جبر خطی

مایکل اونان

ترجمہ علی اکبر محمدی حسن آبادی



جبر خطی

مایکل اونان

ترجمه علی اکبر محمدی حسن آبادی

مرکز نشر دانشگاهی

فهرست

صفحه	عنوان
نه	پیشگفتار مترجم
۱	پیشگفتار مؤلف
۱	دستگاههای معادلات خطی
۵	۱. مقدمه
۱۰	۲. هم ارزی دستگاههای معادلات خطی
۱۳	۳. روش حذفی گاوسی
۲۵	۴. دستگاههای همگن
	۲ بردارها و ماتریسها
۳۱	۱. بردارها
۴۰	۲. تعبیر هندسی R^2 و R^3
۵۲	۳. ماتریسها
۵۸	۴. ضرب ماتریسها
۶۶	۵. ماتریسهای مربعی
۷۷	۶. معادلات خطی به صورت ماتریسی
۸۰	۷. ترانزاد یک ماتریس
	۳ دترمینانها
۸۵	۱. دترمینان ماتریسهای 2×2
۸۹	۲. تعریف و خواص اصلی دترمینانها
۱۰۰	۳. یک خاصیت ضربی دترمینانها

۴. اعمال سطری و بسطهای همسازه‌ای ۱۰۳
۵. وارون یک ماتریس ۱۱۰
۶. قاعده کرامر ۱۱۵
۷. حذف ترکیبی ۱۲۱

۴ فضاهای برداری

۱. تعریف فضای برداری ۱۲۷
۲. خواص دیگری از فضاهای برداری ۱۳۶
۳. زیر فضاها ۱۴۰
۴. پدید آوردن ۱۴۹
۵. استقلال خطی ۱۵۴
۶. پایه ۱۶۲
۷. بعد ۱۶۸
۸. خواص دیگری از فضاهای متناهی البعد ۱۷۵
۹. تغییر مختصات ۱۸۰

۵ تبدیلات خطی

۱. تعریف تبدیلات خطی ۱۹۳
۲. خواص دیگری از تبدیلات خطی ۲۰۴
۳. فضای مقادیر ۲۱۳
۴. فضای پوچ ۲۲۰
۵. رتبه، و ماتریسهای مقدماتی ۲۲۹
۶. یکریختی ۲۴۴
۷. جبر تبدیلات خطی ۲۵۱
۸. نمایش ماتریسی تبدیل خطی ۲۶۸

۶ ضربها

۱. ضرب داخلی و ضرب خارجی در R^3 ۲۸۵
۲. ضرب داخلی در R^n و C^n ۳۰۰
۳. مکملهای متعامد و نامساویهای مربوطه ۳۰۹
۴. ماتریسها و عملگرهای متعامد یکانی ۳۱۹
۵. ضرب داخلی در حالت کلی ۳۲۶

۷ مقادیر ویژه و صورتهای متعارف

۱. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ۳۳۳

۳۴۷	۲. ماتریسهای متقارن
۳۵۳	۳. صورت بالا مثلثی
۳۶۲	۴. صورت نرمال ژوردان
۳۷۵	۵. صورتهای دوخطی
۳۸۳	جواب تمرینهای برگزیده
۳۹۱	واژه نامه فارسی به انگلیسی
۳۹۵	واژه نامه انگلیسی به فارسی
۳۹۹	فهرست راهنما
۴۰۵	فهرست اسامی خاص

بسم الله الرحمن الرحيم

پیشگفتار مترجم

ضمن سالها تدریس جبرخطی در دانشگاه اصفهان، همواره سعی می کرده‌ام با ارائه مثالهای کاربردی در زمینه‌های مختلف، دانشجویان را در فراگیری مطالب یاری دهم. کتاب حاضر، که از روی چاپ دوم جبرخطی نوشته‌مایکل اونان ترجمه شده، حاوی مجموعه‌ای از مثالها و تمرینهای ملموس و متنوع است که هم از لحاظ ریاضی جالب و غنی است و هم نشان‌دهنده کاربردهای جبرخطی در زمینه‌های گوناگون علوم و مهندسی است. شیوه ارائه مطالب آن، حرکت از مفاهیم عینی و ساده به سوی مفاهیم انتزاعی است؛ این روش از لحاظ آموزشی دارای این فایده است که دانشجویان آسانتر می‌توانند به يك دید تجریدی از مفاهیم دست یابند. به همین دلایل بود که تصمیم به ترجمه کتاب حاضر گرفته شد. در ترجمه، تا حد امکان از واژه‌های پیشنهادی انجمن ریاضی ایران استفاده شده و واحدها نیز در دستگاه متری آورده شده‌اند.

از خوانندگان کتاب تقاضا می‌شود که چنانچه به‌مواردی از اشکال، درروانی جملات یا احیاناً نقل مفاهیم، برخورد کردند، بر مترجم منت نهاده و او را از آن موارد آگاه سازند تا انشاءالله در چاپهای بعدی، کتاب از نواقص احتمالی پیراسته گردد.

مترجم، از همکاران مرکز نشر دانشگاهی بویژه جناب آقای دکتر نصرالله پورجوادی مدیر مرکز، جناب آقای دکتر علی اکبر جعفریان سرپرست گروه تخصصی ریاضی، آمار، و کامپیوتر، به‌خاطر همکاریهای بی‌دریغشان، جناب آقای سیامک کاظمی به واسطه ویرایش ارزنده متن ترجمه، از کلیه کارکنان گروه تخصصی ریاضی، آمار، و کامپیوتر، از کلیه کارکنان واحد تولید مرکز نشر دانشگاهی، و چاپخانه دانشگاه صنعتی شریف، تشکر و سپاسگزاری می‌نماید.

علی اکبر محمدی حسن آبادی

گروه ریاضی

دانشگاه اصفهان

پیشگفتار مؤلف

از زمان انتشار چاپ اول این کتاب، بسیاری از استادان و دانشجویانی که آن را مطالعه کرده‌اند، ابراز علاقه نموده‌اند که تعداد بیشتری از مثالهایی را که جنبه کاربردی دارند، در کتاب بگنجانیم. این چاپ شامل بسیاری از این گونه مثالهاست که از رشته‌های متعددی چون فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، و علوم رفتاری برگزیده شده‌اند. به‌طور کلی، مثالها کاملاً ساده‌اند و از آوردن مثالهایی که نیاز به توضیح طولانی دارند، اجتناب شده است.

سایر تجدید نظرهایی که در متن به عمل آمده، از سه نوع‌اند. اول اینکه بسیاری از موضوعات، بویژه هم ارزی دستگاههای خطی و اعمال سطری و ستونی دترمینانها، به صورت ساده‌تری مورد بحث قرار گرفته‌اند. دوم اینکه مطالبی که مورد علاقه عموم خوانندگان نبوده‌اند، از قبیل چند مثال پیچیده و پاره‌ای مطالب غیر ضروری درباره رتبه، حذف شده‌اند. سوم اینکه بحث مربوط به مقادیر ویژه و صورتهای متعارف، تفصیل بیشتری یافته است و تمرینهای جدیدی که بسیاری از آنها ماهیت کاربردی دارند، اضافه شده‌اند.

با این همه، خلصت اساسی کتاب تغییر نکرده است؛ هسته اصلی آن برای یک درس نیمساله در سطح سال دوم دانشگاه در نظر گرفته شده است. با افزودن بعضی مطالب جدید، می‌توان آن را در سطح سال سوم نیز تدریس کرد.

برای اینکه موضوعات کتاب تجریدی نباشند، به آنها جوهر هندسی بخشیده‌ایم. هر یک از مفاهیم و مثالها به‌طور عینی با تجسم مناسب خود در فضای دو (و سه) بعدی مربوط شده است. معرفی مفاهیم جدید، با مثالهای عددی مشروحی همراه است. کلیه مسائل عینی در مورد مفاهیمی که در پنج فصل اول آمده‌اند، با روشهایی شبیه به روش حذفی گاوسی، قابل حل‌اند. هر جا ممکن بوده، با ارائه مدل، پدیده‌های جبر خطی را عینیت بخشیده‌ایم. به این جهت، مثلاً، ضرب و توان ماتریسها، و ماتریسهای جابجایی ناپذیر، در جبر ماتریسها مورد بحث قرار گرفته‌اند. هر مفهوم جبری، از نظر تجربی تشریح شده است. به این دلایل، مطالب کتاب باید برای تمام دانشجویان، صرف نظر از رشته تخصصی آنها، قابل استفاده باشد. طرح کلی کتاب، حرکت از مفاهیم عینی به سوی مفاهیم مجرد است. مطالب کتاب به‌طور طبیعی به دو قسمت تقسیم شده‌اند. در قسمت نخست، به معادلات خطی، بردارهای ستونی، ماتریسها، و دترمینانها پرداخته‌ایم؛ در قسمت دوم، فضاها، برداری، تبدیلات خطی، و ضرب داخلی بررسی شده‌اند. به این ترتیب، خواننده می‌تواند تدریجاً از روشهای محاسباتی به

سمت مفاهیم پیچیده تر برود بدون آنکه در اعماق تجرید ریاضی سقوط کند (یا به ارتفاعات آن صعود کند، بسته به نظرگاه خواننده). این ترتیب مباحث، فایده دیگری نیز دارد و آن این است که وقتی فضاهای برداری، تبدیلات خطی و سایر اشیاء مجرد معرفی می شوند، مسائل مربوط به آنها از قبل فراهم شده است. هر جا میسر بوده، تعبیر هندسی طبیعی مفاهیم، ارائه شده است؛ مثلاً بردارها به عنوان پاره خطهای جهت دار، دترمینانها به عنوان سطوحها و حجمها، تبدیلات خطی به عنوان دورانها، تقارن‌ها و تصویرها، و غیره، تعبیر شده‌اند.

در فصل ۱، دستگاههای معادلات مورد بحث قرار می گیرند و بویژه بر روش حذفی گاوسی برای حل آنها تأکید می شود.

فصل ۲، با مطالعه بردارها در فضای سه بعدی حقیقی آغاز می شود. پس از تعریف هندسی جمع، و ضرب اسکالر، اعمال معمولی روی مؤلفه‌ها را استنتاج می کنیم که متناظرند با اعمال روی بردارها. خطها و سایر اشیاء هندسی در این رابطه مورد مطالعه قرار می گیرند. فضاهای با بعد بزرگتر، به عنوان فضاهای بردارهای ستونی معرفی می شوند. سپس ماتریسها، و اعمال جمع و ضرب روی آنها، تعریف می شوند. مفهوم وارون ماتریس و سودمندی آن در حل دستگاههای معادلات خطی، مورد تأکید خاص قرار می گیرند.

در فصل ۳، به دترمینانها می پردازیم و این بحث را با بررسی حالت 2×2 آغاز می کنیم. این کار عمدتاً برای آشنا ساختن دانشجویان با اعمال سطری و ستونی، و با توجه به این امر صورت می گیرد که احتمالاً دانشجویان، دترمینان را از قبل می شناسند. برای حالتی که با بعدهای بزرگتر سروکار داریم، یک تعریف استقرایی با استفاده از بسط همسازهای ارائه می شود. بیشتر تأکید بر خواص دترمینان (اعمال سطری و ستونی) است تا بر تعریف رسمی آن. خاصیت ضربی دترمینانها ثابت می شود و سودمندی آنها در یافتن وارون ماتریسها و حل دستگاههای معادلات خطی، خاطر نشان می گردد. بعلاوه، تکنیک عملی تر وارون کردن ماتریسها از طریق حذف ترکیبی، به دانشجویان عرضه می شود.

در فصل ۴، فضاهای برداری مجرد معرفی می شوند. چون ممکن است این، اولین برخورد دانشجویان با اشیاء مجرد ریاضی باشد، رهیافتی آهسته و تدریجی اختیار شده است. بخشهای جداگانه‌ای به هر یک از مفاهیم پدید آوردن، استقلال خطی، زیر فضاها و پایه اختصاص یافته است. در هر مورد، تعبیر مفهوم مربوطه در فضای دو (و سه) بعدی می آید و سپس قضایای اصلی درباره بعد و پایه به دست می آیند.

در فصل پنجم، تبدیلات خطی تعریف و تشریح می شوند. در این فصل نیز مانند فصل ۴، حرکت ما کند است؛ بخش کاملی به فضای مقادیر تبدیل خطی اختصاص یافته است و در بخشهای دیگر، فضای پوچ مورد بررسی قرار می گیرد. سپس تکنیک محاسبه رتبه ماتریس با استفاده از اعمال سطری و ستونی را شرح می دهیم. (چون این بخش برای مطالب بعدی ضروری نیست، می توان آن را حذف کرد.) پس از آن مفاهیم وارون و یکریختی را مطالعه می کنیم. نمایش ماتریسی تبدیل خطی نیز، که به انتخاب پایه بستگی دارد، در این فصل شرح داده می شود. قضایای معمولی راجع به ارتباط رتبه و پوچی تبدیلات خطی به دست می آیند و همین طور قضایای راجع به یکریختی و بعد.

در فصل ۶، ابتدا ضرب نقطه‌ای و برداری در فضای سه بعدی مطالعه می‌شود تا زمینه‌ای برای بررسی ضربهای داخلی در حالت کلی به دست آید. تعریف هندسی و تعریف جبری این کمیتها ارائه می‌شود. بخشهای بعدی، تعریف ضربهای داخلی در R^n و C^n را دربردارند و تعامد، مکملهای متعامد، پایه متعامد یکبه و غیره را مورد بحث قرار می‌دهند. نتایجی از قبیل نامساوی کوشی - شوارتز، نامساوی بسل و روش متعامد سازی گرام اشمیت به دست می‌آیند.

در فصل آخر، مقادیر ویژه تعریف، و خواص اصلی آنها بیان می‌شوند. همچنین خاصیت قطری شدن ماتریسهای متقارن را نشان می‌دهیم. سپس صورت نرمال ژوردان به دست می‌آید و بالاخره، با صورتهای دو خطی باختصار آشنا می‌شوید.

هر بخش، شامل تمرینات بسیار است؛ برخی از این تمرینها برای آن است که دانشجو بتواند در عملیات محاسباتی معمولی مهارت یابد، و برخی دیگر ادراک او را از نظریه می‌آزمایند و او را به اثبات نتایج عمیقتر فرا می‌خوانند. پاسخ تمرینهای برگزیده را در پایان کتاب می‌توان یافت.

مایکل اوان^۱

دستگاههای معادلات خطی

۱ مقدمه

ضمن حل مسائل در ریاضیات و یا کاربردهای آن در علوم فیزیکی، زیستی، یا اجتماعی، غالباً به دستگاههای معادلات خطی برمیخوریم. از لحاظ تاریخی، جبر خطی در اثر تلاش برای ارائه روشهایی جهت حل این دستگاهها ایجاد شده است. لذا، مقتضی است که این کتاب را با بررسی دستگاههای معادلات خطی آغاز کنیم.

به عنوان اولین مثال، مسئله یافتن کلیه اعداد حقیقی x و y ای را که در دومعادله

$$x + y = 4$$

$$2x - y = 5$$

صدق می کنند در نظر می گیریم.

این مسئله تعبیری هندسی دارد. هر معادله، خطی را در صفحه دکارتی تعریف می کند. از آنجا که خواست مسئله یافتن نقطه ای است که در هر دومعادله صدق کند، باید نقطه ای را تعیین کنیم که در آن، دوخط یکدیگر را قطع می کنند. این دوخط نه موازی اند و نه منطبق برهم. پس نقطه تقاطع یکتاست. (ر. ک. شکل ۱-۱). برای تعیین مختصات نقطه تقاطع، به روش آشنای حذفی متوسل می شویم. از دستگاه معادلات اولیه شروع می کنیم.

$$x + y = 4$$

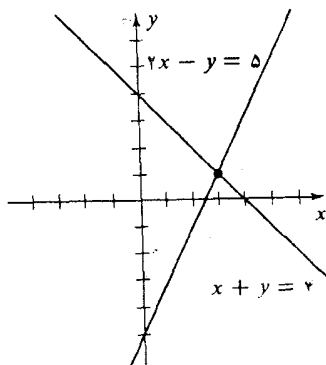
$$2x - y = 5$$



$$x + y = 4$$

$$3x = 9$$

معادله اول را به معادله دوم می افزاییم.



شکل ۱۰۱

معادله دوم را در $1/3$ ضرب می‌کنیم.

↓

$$x + y = 2$$

$$x = 3$$

↓

$$y = 1$$

$$x = 3$$

معادله دوم را از معادله اول کم می‌کنیم.

به این ترتیب، می‌بینیم که نقطه $(3, 1)$ تنها جواب دستگاه معادلات جدید است. از سوی دیگر، چون هر مرحله از رشته اعمال فوق برگشتپذیر است، مشاهده می‌کنیم که $(3, 1)$ در واقع یک جواب برای دستگاه معادلات اولیه می‌باشد.

در این مثال، دیدیم که دستگاه معادلات خطی جوابی یکتا دارد. لکن، دستگاههایی از معادلات هستند که هیچ جوابی ندارند و دستگاههایی از معادلات وجود دارند که دارای بینهایت جواب می‌باشند.

به عنوان مثالی از نوع اول، دستگاه

$$2x + 4y = 3$$

$$3x + 6y = 1$$

را داریم.

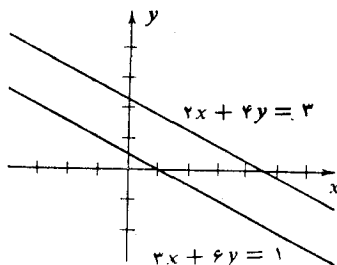
برای ملاحظه این مطلب، فرض می‌کنیم جوابی برای دستگاه فوق وجود داشته باشد. معادله اول را در ۳ و معادله دوم را در ۲ ضرب می‌کنیم. خواهیم داشت

$$6x + 12y = 9$$

$$6x + 12y = 2$$

دستگاههای معادلات خطی ۷

که به معنی $۲ = ۹$ می باشد، و بوضوح نامعقول است. لذا، در این حالت برای دستگاه معادلات مفروض هیچ جوابی وجود ندارد. از نظر هندسی، خطوط تعیین شده به وسیله معادلات فوق، خطوط موازی متمایزی هستند (ر. ک. شکل ۲۰۱)، و تلاش برای یافتن نقطه تقاطع بیهوده است.



شکل ۲۰۱

به عنوان مثالی از یک دستگاه با بینهایت جواب، دستگاه معادلات

$$x + 2y = 3$$

$$3x + 6y = 9$$

را داریم.

در این حالت، معادلات از نظر ظاهری با یکدیگر متفاوت اند، ولی، درحقیقت، هر دو نمایانگر یک خط هستند. در واقع معادله دوم ضربی از معادله اول می باشد. واضح است که تمامی خط، مجموعه جوابهای دستگاه خواهد بود.

مسائل بسیاری، هم عملی و هم سرگرم کننده، وجود دارند که جواب آنها را می توان با حل دستگاهی از معادلات خطی به دست آورد. یکی از آنها را که جوابی یکتا دارد عرضه می کنیم.

مثال ۱ مردی دارای یک پسر و یک دختر است. سن مرد چهار برابر سن پسر است و پسر چهار سال از دختر بزرگتر می باشد. سه سال دیگر سن مرد پنج برابر سن دختری شود. سن مرد، پسر، و دختر را بیابید.

فرض می کنیم سن مرد m ، سن پسر s ، و سن دختر d باشد. چون سن مرد چهار برابر سن پسر است، $m = 4s$. چون پسر چهار سال از دختر بزرگتر است، $s = d + 4$. سه سال دیگر سن مرد $m + 3$ و سن دختر $d + 3$ خواهد بود. لذا، $m + 3 = 5(d + 3)$. پس از مرتب کردن، دستگاه معادلات

$$m - 4s = 0$$

$$s - d = 4$$

$$m - 5d = 12$$

را به دست می آوریم. معادله اول را از معادله سوم کم می کنیم.

$$\begin{array}{rcl} \downarrow & & \\ m - 4s & = & 0 \\ s - d & = & 4 \\ 4s - 5d & = & 12 \end{array}$$

معادله دوم را در ۴ - ضرب کرده، حاصل را به معادله سوم می افزاییم.

$$\begin{array}{rcl} \downarrow & & \\ m - 4s & = & 0 \\ s - d & = & 4 \\ -d & = & -4 \end{array}$$

معادله سوم را از دومی کم می کنیم.

$$\begin{array}{rcl} \downarrow & & \\ m - 4s & = & 0 \\ s & = & 8 \\ -d & = & -4 \end{array}$$

معادله دوم را در ۴ ضرب کرده، حاصل را به معادله اول می افزاییم. در نتیجه:

$$\begin{array}{rcl} m & = & 32 \\ s & = & 8 \\ -d & = & -4 \end{array}$$

$$d = 4, s = 8, m = 32$$

مثال بعدی چگونگی پیدایش یک دستگاه معادلات خطی در یک مسئله فیزیکی ساده را نشان می دهد.

مثال ۲ سه گوی فلزی و یک خطکش داده شده اند. می خواهیم جرم گوی ۱ و جرم گوی ۲ را بیابیم درحالی که می دانیم جرم گوی ۳ دو کیلوگرم است. مرکز مترجویی روی یک نقطه اتکا قرار گرفته است و گویها به وسیله نخ (که از وزنش صرف نظر می کنیم) از آن آویزان شده اند. برای اینکه خطکش در حالت تعادل باشد، گویها را در دو وضعیت می توان قرار داد.

در اولین وضعیت پایدار، گوی ۱ در ۴۰ سانتیمتری سمت چپ، گوی ۲ در ۱۵ سانتیمتری سمت چپ، و گوی ۳ در ۵۰ سانتیمتری سمت راست نقطه اتکا قرار می گیرند. در وضعیت دوم، گوی ۱ در ۵۰ سانتیمتری سمت راست، گوی ۲ در ۲۵ سانتیمتری سمت چپ، و گوی ۳ در ۲۵ سانتیمتری سمت راست نقطه اتکا واقع می شوند. (ر.ک. شکل ۳۰۱).

جرم گوی ۱ و گوی ۲ را بیابید. فرض می کنیم x و y ، ترتیب اجرام گویهای ۱ و ۲ باشند. یک اصل بنیادی فیزیکی می گوید که وقتی دستگاه در حال تعادل باشد، مجموع گشتاورها در سمت چپ نقطه اتکا باید

۹ دستگاه‌های معادلات خطی

با مجموع گشتاورها در سمت راست آن برابر باشد. گشتاور، مساوی حاصلضرب جرم جسم در فاصله‌اش تا نقطه اتکا تعریف می‌شود. در اولین وضعیت تعادل، گشتاور گویهای ۱، ۲، و ۳ برتریب عبارت است از $۴۰x$ ، $۱۵y$ ، و ۵۰ . لذا $۴۰x + ۱۵y = ۱۰۰$. در حالت دوم، گشتاور گویهای ۲، ۳، و ۱ برتریب $۲۵y$ ، ۲×۲۵ ، و $۵۰x$ خواهد بود. پس

$$۲۵y = ۵۰ + ۵۰x$$

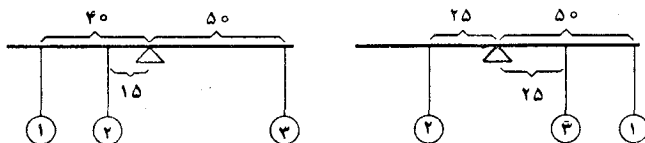
$$۴۰x + ۱۵y = ۱۰۰$$

$$-۵۰x + ۲۵y = ۵۰$$

را به دست می‌آوریم.

چنانچه این دستگاه را مانند دستگاههای قبلی حل کنیم، در می‌یابیم که $x = ۱$ و

$$y = ۴$$



شکل ۳۰۱

تمرینات

۱. دستگاههای معادلات خطی دوجمله‌ای زیر را در نظر بگیرید. برای هرزوج از معادلات معین کنید که آیا جواب وجود دارد و، اگر وجود دارد، این جواب چیست، و آن را به طور هندسی تعبیر کنید.

$$(الف) \quad ۲x + y = ۷ \quad (ب) \quad x + y = ۳ \quad (ج) \quad ۴x - ۳y = ۸$$

$$x - ۳y = ۲ \quad ۳x + ۲y = ۸ \quad ۸x - ۶y = ۲۴$$

$$(د) \quad x - y = ۸ \quad (ه) \quad x + ۲y = ۳ \quad (و) \quad ۲x - ۶y = ۷$$

$$۲x + ۸y = ۶ \quad ۲x + ۴y = ۶ \quad ۳x - ۹y = ۴$$

۲. دستگاه معادلات

$$ax + by = 0 \quad cx + dy = 0$$

را که در آن a, b, c, d اعداد حقیقی اند در نظر بگیرید.

(الف) نشان دهید که دستگاه دارای حداقل یک جواب است.

(ب) اگر $ad - bc \neq 0$ ، نشان دهید که دستگاه فقط یک جواب دارد. جواب

خود را به طور هندسی تعبیر کنید.

۳. دستگاههای زیر را حل کنید.

$$\begin{array}{ll} x - y + z = 0 \quad (\text{ب}) & x + y + z = 6 \quad (\text{الف}) \\ 2x - y + z = 1 & 3x - 2y + 3z = 3 \\ 3x + y - 3z = 2 & 2x - y + z = 4 \end{array}$$

۴. در مجتمعی از جانداران، یک صد جانور از نوع معینی وجود دارند. پنج سال بعد تعداد آنها به ۲۴۰ می‌رسد. در طی این پنج سال، عددها در هر دو برابر و عددها سه برابر می‌شود. در ابتدا چند نفر و چند ماده در مجتمع بوده است؟

۵. کارخانه‌ای دارای دو ماشین M و N است. M روزانه ۱۵ ساعت و N روزانه ۱۰ ساعت می‌تواند کار کند. کارخانه دوم محصول تولید می‌کند، A و B . برای ساختن یک واحد از A ، لازم است از هر یک از M و N به مدت یک ساعت استفاده شود. برای تولید یک واحد از B ، ماشین M نیم ساعت و ماشین N ربع ساعت باید کار کنند. چند واحد از A و B بایسد در روز تولید شود تا مطمئن باشیم که M و N در تمام مدتی که قابل استفاده بوده‌اند کار می‌کرده‌اند.

۶. عمومی‌ترین جواب معادله دیفرانسیل $y'' - y = 0$ ، تابعی است به شکل $y(x) = Ae^x + Be^{-x}$. جوابی را بیابید که برای آن، $y(0) = 1$ و $y'(0) = 0$.

۲ هم‌ارزی دستگاههای معادلات خطی

در بخش قبلی، برای حل چند دستگاه معادلات خطی، روش حذفی را به کار بردیم. اکنون می‌خواهیم از این مثالها استفاده کرده چند اصل و روش کلی برای بررسی دستگاههای معادلات خطی عرضه کنیم.

منظور از معادله خطی معادله‌ای به صورت $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ است که در آن a_1, a_2, \dots, a_n و b مقادیر ثابت‌اند و x_1, x_2, \dots, x_n کمیت‌هایی هستند که باید معین شوند. x_i ها را مجهولهای معادله می‌نامند. در این معادله a_i ضریب x_i نامیده می‌شود. جواب این معادله به صورت n تایی (c_1, c_2, \dots, c_n) از اعداد حقیقی است به طوری که $a_1c_1 + a_2c_2 + \dots + a_nc_n = b$. برای مثال، $3x_1 - x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 12$ ، $a_1c_1 + a_2c_2 + \dots + a_nc_n = b$ یک معادله خطی است. در این معادله مجهولها x_1, x_2, x_3, x_4 هستند. ضریب x_1 عدد ۳ و ضریب x_4 عدد ۱- است و همین‌طور الی آخر. $(0, 0, 0, 0)$ و $(4, 0, 0, 0)$ و $(0, 2, 7, 0)$ جوابهایی از این معادله‌اند.

دستگاه معادلات خطی، گردآورده‌ای است از چند معادله خطی. برای مثال،

$$\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

یک دستگاه معادلات خطی است.

منظور از جواب یک دستگاه معادلات خطی n مجهولی، یک n تایی از اعداد است

که در هر یک از معادلات دستگاه صدق کند. مثلاً $(۲, ۰, ۱, -۳)$ یک جواب دستگاه

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 &= 10 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ 10x_1 + 3x_2 &+ x_4 = 29\end{aligned}$$

است.

فرض می‌کنیم دو دستگاه معادلات خطی n مجهولی داده شده باشند، گوئیم این دو دستگاه هم‌ارزند اگر هر n تایی از اعداد که جواب یکی از این دستگاههاست، جواب دستگاه دیگر نیز باشد. به عبارت دیگر دو دستگاه هم‌ارزند اگر دارای جوابهای یکسان باشند. بنا بر این تعریف، دستگاههای

$$\begin{array}{rcl}x + y = 4 & & 2x + 2y = 8 \\ & \text{و} & \\ 2x - y = 5 & & 4x + y = 13\end{array}$$

هم‌ارزند، زیرا در هر دومی، جواب دستگاه $(۱, ۳)$ است.

واضح است که عوض کردن ترتیب معادلات در یک دستگاه، تغییری در جوابها نمی‌دهد و بنابراین، یک دستگاه معادلات هم‌ارز با دستگاه اولی ایجاد می‌کند. علاوه بر این، دو اصل ساده دیگر برای تبدیل یک دستگاه معادلات به دستگاه دیگری که هم‌ارز با آن باشد، وجود دارد.

(۱) اگر یک معادله از دستگاه معادلات خطی مفروضی را در یک عدد غیر صفر ضرب کنیم و بقیه معادلات دستگاه را بدون تغییر گذاریم، دستگاه معادلات خطی دیگری حاصل می‌شود که با دستگاه اولی هم‌ارز است.

اثبات گیریم $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ معادله‌ای از دستگاه اول باشد که در یک عدد غیر صفر c ضرب می‌شود. این معادله در دستگاه دوم عبارت است از:

$$ca_1x_1 + ca_2x_2 + \dots + ca_nx_n = cb \quad \text{اگر } (g_1, g_2, \dots, g_n)$$

یک جواب دستگاه اول باشد، داریم: $a_1g_1 + a_2g_2 + \dots + a_ng_n = b$. بنابراین، $(ca_1)g_1 + (ca_2)g_2 + \dots + (ca_n)g_n = cb$. چون بقیه معادلات دو دستگاه یکسان‌اند، (g_1, g_2, \dots, g_n) یک جواب دستگاه دوم نیز هست. از طرف دیگر، فرض می‌کنیم (h_1, h_2, \dots, h_n) یک جواب دستگاه دوم باشد. در این صورت،

$$ca_1h_1 + ca_2h_2 + \dots + ca_nh_n = cb$$

اگر این معادله را در c^{-1} ضرب کنیم، داریم: $a_1h_1 + a_2h_2 + \dots + a_nh_n = b$. باز، همه معادلات دیگر در دو دستگاه یکسان‌اند. بنابراین (h_1, h_2, \dots, h_n) یک جواب دستگاه اول نیز هست.

برای مثال، طبق این اصل، می بینیم که دستگاههای

$$\begin{array}{rcl} x + 5y - 2z = 0 & & x + 5y - 2z = 0 \\ 2x + 3y + z = 3 & \text{و} & 6x + 9y + 3z = 9 \end{array}$$

هم ارزند. همین طور، با دوبار استفاده از (۱)، نتیجه می شود که

$$\begin{array}{rcl} x + 3y = 2 & & 2x + 6y = 4 \\ -x + 4y = 2 & \text{و} & x - 4y = -2 \end{array}$$

هم ارزند.

اصل دوم هم ارزی (درمورد دستگاههای معادلات خطی) چنین است:

(۲) اگر معادله ای از یک دستگاه معادلات خطی مفروض را به معادله دیگری از این دستگاه بیفزاییم و بقیه معادلات را به همان صورت اولیه باقی گذاریم، دستگاه معادلات خطی دیگری حاصل می شود که با دستگاه اول هم ارز است.

بنابر اصل دوم، دستگاه معادلات

$$\begin{array}{rcl} x + y - z = 1 \\ x + 3y - 2z = 0 \\ x + y + 4z = 1 \end{array}$$

با دستگاه معادلات

$$\begin{array}{rcl} x + y - z = 1 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ x + y + 4z = 1 \end{array}$$

هم ارز است؛ زیرا معادله دوم در دستگاه دوم، از افزودن معادله اول به معادله دوم در دستگاه اول حاصل شده است و بقیه معادلات دو دستگاه یکسان اند.

اثبات گیریم $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ معادله ای از دستگاه اول باشد. فرض کنیم $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = d$ آن معادله از دستگاه اول باشد که به معادله $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ افزوده می شود. به این ترتیب، به جای معادله $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ از دستگاه اول، معادله

$$(a_1 + c_1)x_1 + (a_2 + c_2)x_2 + \dots + (a_n + c_n)x_n = b + d$$

قرار می گیرد و بقیه معادلات بدون تغییر می مانند تا دستگاه دوم به دست آید. حال فرض می کنیم (g_1, g_2, \dots, g_n) یک جواب دستگاه اول باشد. پس، داریم:

$$a_1 g_1 + a_2 g_2 + \dots + a_n g_n = b$$

$$c_1 g_1 + c_2 g_2 + \dots + c_n g_n = d$$

بنابراین، $(a_1 + c_1)g_1 + (a_2 + c_2)g_2 + \dots + (a_n + c_n)g_n = b + d$ چون همه معادلات دیگر دستگاه اول و دستگاه دوم یکسان اند، نتیجه می شود که (g_1, g_2, \dots, g_n) یک جواب دستگاه دوم نیز هست.

حال، فرض می کنیم (h_1, h_2, \dots, h_n) یک جواب دستگاه دوم باشد. در این صورت،

$$(a_1 + c_1)h_1 + (a_2 + c_2)h_2 + \dots + (a_n + c_n)h_n = b + d$$

$$c_1 h_1 + c_2 h_2 + \dots + c_n h_n = d$$

بنابراین، $a_1 h_1 + a_2 h_2 + \dots + a_n h_n = b$. باز همه معادلات دیگر دو دستگاه یکسان اند و لذا (h_1, h_2, \dots, h_n) یک جواب دستگاه اول نیز می باشد. ●

با استفاده مکرر از دو اصل فوق، می توان دستگاههای ساده تری از معادلات را به دست آورد.

تمرینات

۱. با استفاده از تعریف هم ارزی دستگاههای معادلات خطی، معین کنید که کدام زوج از دستگاههای زیر هم ارزند.

$$(الف) \quad \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \quad (ب) \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + y = 5 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$(ج) \quad \begin{cases} 3x - y = 0 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \quad (د) \quad \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$(ه) \quad \begin{cases} x + y = 5 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \quad (و) \quad \begin{cases} x + 2y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + 6y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + y = 4 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

۲. دو دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \quad c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \quad c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 = 0$$

اگر $b_1 \neq 0$ یا $b_2 \neq 0$ ، نشان دهید که این دو دستگاه هم ارز نیستند.

۳ روش حذفی گاوسی

فرض کنیم دستگاه زیر مرکب از m معادله خطی n مجهولی داده شده باشد.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

که در این دستگاه m و n اعداد صحیح مثبت اند و a_{ij} و b_i ها مقادیر ثابت (به ازای $i = 1, 2, \dots, m$ و $j = 1, 2, \dots, n$) مجهول است (به ازای $j = 1, 2, \dots, n$)، روش ساده کردن زیر را به کار می‌بریم.

(۱) مجهولی را که ضریب غیر صفری داشته باشد انتخاب می‌کنیم. فرض می‌کنیم x_i چنین مجهولی است و ضریب در معادله i ام، $a_{ii} \neq 0$ می‌باشد. معادله i ام را در a_{ii}^{-1} ضرب می‌کنیم.

(۲) به ازای هر $i \neq t$ و $i = 1, 2, \dots, m$ ، i برابر معادله t ام را به معادله i ام دستگاه حاصل از مرحله (۱)، می‌افزاییم. این کار، x_i را از تمام معادلات، بجز معادله t ام، حذف می‌کند. x_i را مجهول به کار رفته و معادله t ام را معادله به کار رفته می‌نامیم.

(۳) حال مجهول جدیدی مثل x_r را که دارای ضریب غیر صفری در یک معادله به کار نرفته است، انتخاب می‌کنیم، مراحل (۱) و (۲) را برای حذف x_r از همه معادلات دیگر، از جمله معادلاتی که تا کنون به کار رفته‌اند، به کار می‌بریم.

باز، معادله‌ای را که در این مرحله مورد استفاده قرار دادیم، به کار رفته می‌نامیم. مرحله (۳) را آنقدر تکرار می‌کنیم تا دیگر هیچ معادله به کار نرفته‌ای باقی نماند، یا آنکه فقط معادلاتی به صورت $0 = c$ ، به ازای یک عدد c ، باقی بمانند.

اگر جوابهایی برای این دستگاه معادلات وجود داشته باشند، همگی از این روش به دست می‌آیند. اگر جوابی وجود نداشته باشد، با استفاده از همین روش، یک تناقض به دست می‌آید.

تذکر این نکته مهم است که بنا به اصول بخش قبلی، آخرین دستگاهی که حاصل می‌شود با دستگاه اصلی هم ارز است. اکنون چند مثال برای روشن ساختن این روش می‌آوریم:

مثال ۱

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 6x - 2z &= -8 \\ 3y - z &= -3 \end{aligned}$$

↓

گیریم y اولین مجهولی باشد که به کار می‌رود. معادله سوم را به عنوان معادله‌ای که باید به کار رود انتخاب کرده، آن را در $1/3$ ضرب می‌کنیم.

دستگاههای معادلات خطی ۱۵

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 1 \\ 6x & - & 2z = -8 \\ y - \frac{1}{3}z & = & -1 \end{array}$$

↓

معادله سوم را در (-1) ضرب کرده، حاصل را به معادله اول می‌افزاییم. معادله سوم را در 0 ضرب کرده، حاصل را به معادله دوم می‌افزاییم.

$$\begin{array}{rcl} x & + & \frac{1}{3}z = 2 \\ 6x & - & 2z = -8 \\ y - \frac{1}{3}z & = & -1 \end{array}$$

↓

معادله اول و مجهول z را به عنوان معادله و مجهولی که در این مرحله باید به کار روند، انتخاب می‌کنیم. معادله اول را در 3 ضرب می‌کنیم.

$$\begin{array}{rcl} 3x & + & z = 6 \\ 6x & - & 2z = -8 \\ y - \frac{1}{3}z & = & -1 \end{array}$$

↓

دو برابر معادله اول را به معادله دوم می‌افزاییم؛ $1/3$ معادله اول را به معادله سوم می‌افزاییم.

$$\begin{array}{rcl} 3x & + & z = 6 \\ 12x & & = 4 \\ x + y & = & 1 \end{array}$$

↓

معادله دوم و x را به عنوان معادله و مجهولی که باید به کار روند انتخاب کرده، معادله دوم را در $1/12$ ضرب می‌کنیم.

$$\begin{array}{rcl} 3x & + & z = 6 \\ x & = & \frac{1}{3} \\ x + y & = & 1 \end{array}$$

↓

(-3) برابر معادله دوم را به معادله اول می‌افزاییم؛ (-1) برابر معادله دوم را به معادله سوم می‌افزاییم.

$$\begin{array}{rcl} z & = & 5 \\ x & = & \frac{1}{3} \\ y & = & \frac{2}{3} \end{array}$$

پس، در این حالت جوابی یکتا به دست می آید.

مثال ۲

$$\begin{array}{rcl} 2x + 4y & = & 3 \\ 3x + 6y & = & 1 \end{array}$$

↓

مجهول x و معادله اول را به عنوان اولین مجهول و اولین معادله ای که باید به کار روند انتخاب می کنیم. معادله اول را در $1/2$ ضرب می کنیم.

$$x + 2y = \frac{3}{2}$$

$$3x + 6y = 1$$

↓

(۳-) برابر معادله اول را به معادله دوم می افزاییم.

$$x + 2y = \frac{3}{2}$$

$$0 = -\frac{7}{2}$$

معادله دوم این دستگاه، البته نامعقول است؛ این معادله، به شکل دقیقتر، باید به صورت $0 \cdot x + 0 \cdot y = -7/2$ نوشته می شد، و این معادله هیچ جوابی ندارد. حال ببینیم مفهوم این عبارت چیست. تعریف هم ارزی دو دستگاه معادلات خطی را دوباره به یاد آورید: دو دستگاه هم ارزند اگر دارای جوابهای یکسان باشند. در این مثال، آخرین دستگاهی که به دست آورده ایم جواب ندارد. در نتیجه، دستگاه اول جواب ندارد. همان طور که در بخش اول عمل کردیم می توان تحقیق کرد که این معادلات، معرف خطوط موازی متمایزی در صفحه هستند و لذا، این خطوط نقطه مشترکی ندارند.

مثال ۳

$$x_1 - x_3 + 2x_4 = 0$$

$$2x_1 - 3x_2 - 4x_4 = 0$$

$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0$$

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

↓

مجهول x_1 و معادله اول را به کار می بریم.

$$\begin{aligned}
 x_1 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\
 -3x_2 + 2x_3 - 8x_4 &= 0 \\
 x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\
 -2x_2 + 4x_3 - 5x_4 &= 0
 \end{aligned}$$

↓

مجهول x_4 و معادله سوم را به کار می‌بریم.

$$\begin{aligned}
 x_1 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\
 8x_3 + x_4 &= 0 \\
 x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\
 8x_3 + x_4 &= 0
 \end{aligned}$$

↓

مجهول x_4 و معادله دوم را به کار می‌بریم.

$$\begin{aligned}
 x_1 - 17x_3 &= 0 \\
 8x_3 + x_4 &= 0 \\
 x_2 - 22x_3 &= 0 \\
 0 &= 0
 \end{aligned}$$

چون تنها مجهول به کار نرفته، x_3 ، در معادله به کار نرفته، دارای ضریب صفر است، عمل را نمی‌توان بیشتر ادامه داد. از دستگاه معادلات فوق می‌بینیم که اگر مقدار دلخواهی برای x_3 ، مثلاً $x_3 = c$ ، انتخاب کنیم و سپس قرار دهیم

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 17x_3 = 17c \\
 x_4 &= -8x_3 = -8c \\
 x_2 &= 22x_3 = 22c
 \end{aligned}$$

یک جواب برای دستگاه فوق به دست آورده‌ایم و هر جواب دستگاه (به ازای یک مقدار c) از همین نوع است. به عبارت دیگر، عمومی‌ترین جواب، 4 تایی $(17c, 22c, c, -8c)$ است. چون c هر عدد حقیقی می‌تواند باشد، بینهایت جواب برای این دستگاه وجود دارد. حال که سه مثال از روش حذفی دیده‌ایم، شاید بجا باشد که ویژگی نتایج حاصل از این مثالها را مورد بحث قرار دهیم.

در مثال اول، معادلات سازگار بودند و جواب دقیقاً معین می‌شد. در مثال دوم، جوابی وجود نداشت؛ در این موارد گوییم که دستگاه ناسازگار یا «زیاد مقید» است. در مثال سوم، بینهایت جواب وجود داشت. در این حالت دستگاه سازگار ولی «کم مقید» است.

حالت اول، احتمالاً آشنا ترین حالت است. در یک مسئله واقعی، این حالت وقتی پیش می‌آید که مسئله خوش طرح باشد و مفروضات کافی برای تعیین جواب وجود داشته باشد. در مثالهای ۱ و ۲، از بخش قبلی، با این گونه مسائل مواجه بودیم. در هر دو این مسائل، داده‌ها سازگار، و برای حل مسئله کافی بودند.

ساختن دستگاههای ناسازگار نیز آسان است؛ دستگاهی از معادلات را که فقط یک

جواب داشته باشد، در نظر می گیریم. معادله دیگری انتخاب می کنیم که این جواب در آن صدق نکند و این معادله را به دستگاه اضافه می کنیم. برای مثال، با اضافه کردن معادله $3x + 6y - z = 8$ به دستگاه سه معادله مثال ۱، دستگاه بزرگتری می سازیم. چون $x = 1/3$ و $y = 2/3$ و $z = 5$ جواب این معادله نیست، این دستگاه جدید ناسازگار است. در عمل، به دلایل زیادی معادلات ناسازگار به وجود می آیند. اشتباه در فرمولبندی ریاضی یک مسئله ممکن است ناسازگاری ایجاد کند. لکن، بعضی مسائل را به این ترتیب می توان حل کرد که نشان دهیم دستگاه مربوطه ناسازگار است. نمونه ای از این نوع مسئله را ارائه می دهیم.

مثال ۴ آیا نقاط $P_1 = (1, 0)$ ، $P_2 = (1, 1)$ ، $P_3 = (0, 2)$ و $P_4 = (-1, 3)$ روی یک دایره قرار دارند؟

برای حل این مسئله، یادآوری می کنیم که معادله دایره به صورت

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

است. سعی می کنیم A ، B ، و C را طوری انتخاب کنیم که چهار نقطه مفروض روی این دایره قرار گیرند. اگر مختصات این چهار نقطه را در معادله دایره قرار دهیم، چهار معادله برای A ، B ، و C به دست می آوریم:

$$A + C = -1$$

$$A + B + C = -2$$

$$2B + C = -4$$

$$-A + 3B + C = -10$$

↓

مجهول A و معادله اول را به کار می بریم.

$$A + C = -1$$

$$B + C = -1$$

$$2B + C = -4$$

$$3B + 2C = -11$$

↓

مجهول B و معادله دوم را به کار می بریم.

$$A + C = -1$$

$$B = -1$$

$$C = -2$$

$$2C = -4$$

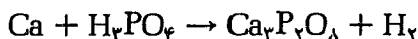
می توانستیم این عمل را همچنان ادامه دهیم ولی هم اکنون از دو معادله اخیر به این تناقض رسیده ایم که $C = -2$ و $C = -4$. لذا، دستگاه معادلات ناسازگار است؛ یعنی نمی توانیم A ، B ، و C را طوری انتخاب کنیم که چهار نقطه مفروض در معادله

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ صدق کنند. به عبارت دیگر، این چهار نقطه روی یک دایره قرار ندارند.

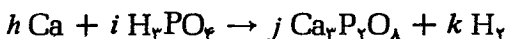
اگر نقاط P_i این مثال را طوری تغییر دهیم که همگی روی یک دایره قرارگیرند، به جای رسیدن به تناقض، A ، B ، و C و معادله دایره را خواهیم یافت.

دستگاههای ناسازگار از وجود تناقض در داده‌ها، و دستگاههای دارای بینهایت جواب از کمبود داده‌ها ناشی می‌شوند. گرچه، وقتی جواب دستگاهی از معادلات یکتا نباشد، این جواب ممکن است قانع کننده به نظر نرسد، معینا مسائلی وجود دارند که در آنها چنین جوابی همه اطلاعات خواسته شده را ارائه می‌دهد. در این مورد مثالی از شیمی می‌آوریم.

مثال ۵ معادله شیمیایی زیر را موازنه می‌کنیم:



در اینجا، مسئله عبارت است از یافتن اعداد صحیح h ، i ، j ، و k ، به طوری که در معادله



تعداد اتمهای هر عنصر در سمت راست مساوی با تعداد اتمهای همان عنصر در سمت چپ باشد. در سمت چپ معادله، h اتم کلسیم و در سمت راست آن $3j$ اتم کلسیم وجود دارند. لذا، $h = 3j$. در مورد تیدروژن، $3i = 2k$. در مورد فسفر $j = i$. و بالاخره، در مورد اکسیژن $4i = 8j$. در نتیجه، داریم:

$$h - 3j = 0$$

$$3i - 2k = 0$$

$$i - 2j = 0$$

$$4i - 8j = 0$$

↓

معادله سوم و مجهول i را به کار می‌بریم.

$$h - 3j = 0$$

$$6j - 2k = 0$$

$$i - 2j = 0$$

$$0 = 0$$

اکنون واضح است که اگر j دلخواه باشد، $(3j, 2j, j, 3j)$ جواب دستگاه است. معمولاً j را مساوی یک اختیار می‌کنیم و بقیه را بر حسب آن حساب می‌کنیم. ولی اگر j را برابر ۲ بگیریم و بقیه اعداد را از قاعده فوق بدست آوریم، باز هم موازنه معادله برقرار خواهد بود.

مثال ۶

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1$$

$$x_1 + x_3 = 1$$

↓

$$x_2 + x_4 = 0$$

$$-x_2 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 1$$

↓

$$x_2 + x_4 = 0$$

$$0 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 1$$

مجهول x_1 و معادله سوم را به کار می‌بریم.مجهول x_2 و معادله اول را به کار می‌بریم.

چون هر دو مجهول به کار نرفته x_3 و x_4 در تنها معادله به کار نرفته، ضریب صفر دارند، نمی‌توانیم این عمل را ادامه دهیم. در نتیجه، اگر x_3 و x_4 را به طور دلخواه انتخاب کنیم، یعنی $x_3 = c$ و $x_4 = d$ و اگر بنویسیم

$$x_2 = -x_4 = -d$$

$$x_1 = 1 - x_3 = 1 - c$$

آنگاه $(d, c, -d, 1-c)$ یک جواب دستگاه است. پس، در این حالت، یک «خانواده دو پارامتری» از جوابها به دست می‌آوریم. بعداً خواهیم دید که این مطلب را چگونه به صورت دقیقتری بیان می‌کنند.

مثال ۷ می‌خواهیم با استفاده از روش حذفی، مقادیر a, b, c ای را یابیم که به ازای آنها دستگاه

$$2x - y + z = a$$

$$x + 2y + z = b$$

$$3x + y + 2z = c$$

↓

جواب داشته باشد. مجهول x و معادله دوم را به کار می‌بریم.

$$-5y - z = a - 2b$$

$$x + 2y + z = b$$

$$-5y - z = c - 3b$$

↓

مجهول z و معادله اول را به کار می‌بریم.

$$-5y - z = a - 2b$$

$$\begin{aligned}x - 3y &= a - b \\ 0 &= c - a - b\end{aligned}$$

در اینجا فرایند حذف به پایان می‌رسد زیرا در معادله به کار نرفته (معادله سوم) همه مجهولها ضریب صفر دارند. از معادله سوم نتیجه می‌شود برای اینکه جوابی وجود داشته باشد، باید داشته باشیم $c = a + b$.

اگر فرض کنیم که این شرط برقرار است و y را به طور دلخواه انتخاب کنیم و فرض کنیم $x = 3y + (a - b)$ و $z = -5y - a + 2b$ ، آنگاه یک جواب برای دستگاه سوم داریم که به علت هم‌ارز بودن دستگاهها، جوابی برای دستگاه اول نیز می‌باشد. پس، شرط لازم و کافی برای اینکه دستگاه اول دارای جواب باشد آن است که $c = a + b$.

قبل از اتمام این بخش، متذکر می‌شویم که، در حالت کلی، ارتباطی بین سازگاری یک دستگاه معادلات و تعداد معادلات و مجهولات آن دستگاه وجود ندارد. برای مثال، کاملاً امکان دارد که دستگاهی از دو معادله و ده مجهول وجود داشته باشد که ناسازگار باشد، همین‌طور ممکن است دستگاهی از ده معادله و دو مجهول داشته باشیم که سازگار باشد. در اینجا مثالی از یک نوع مسئله که اغلب در علوم رفتاری پیش می‌آید، عرضه می‌کنیم. در این دستگاه تعداد معادلات از تعداد مجهولات بیشتر است.

مثال ۸ در کشوری دو حزب سیاسی وجود دارد: D و R . هر شخصی عضو یکی از این احزاب است و هر سال یک دوره انتخابات انجام می‌گیرد. در طی یک سال، $4/5$ اعضای حزب D در این حزب باقی می‌مانند و $1/5$ آنها به عضویت R در می‌آیند؛ همچنین $3/5$ از اعضای حزب R در R می‌مانند و $2/5$ بقیه عضو D می‌شوند.

علی‌رغم تمامی تغییر عضویتها، هر سال در موقع رأی‌گیری، نسبت اعضای D و نیز نسبت اعضای R ، به کل جمعیت، ثابت می‌مانند. چه نسبت از رأی‌دهندگان متعلق به D هستند؟

برای حل این مسئله، گیریم x نسبت اعضای D به کل جمعیت، و y همین نسبت در مورد R باشد (برای مثال، $x = 5/9$ اگر $5/9$ مردم عضو D باشند). چون همه مردم عضو D یا عضو R هستند، داریم: $x + y = 1$

با در نظر گرفتن دو عامل زیر، وضع عضویت در D را در یک سال بعد محاسبه می‌کنیم: (۱) $4/5$ اعضای D در این حزب باقی می‌مانند، (۲) $2/5$ اعضای R جذب D می‌شوند.

پس، $4/5$ از اعضای حزب D در این حزب می‌مانند و اعضای آن x قسمت از کل جمعیت را تشکیل می‌دهند. از این قرار، نسبت افراد باقی‌مانده در D ، به کل جمعیت $x(4/5)$ است. همچنین، $2/5$ اعضای R جذب D می‌شوند و نسبت اعضای R به کل جمعیت y می‌باشد. پس نسبت افراد جذب شده در D ، به کل جمعیت $y(2/5)$ است. در نتیجه یک سال بعد، نسبت همه اعضای D به کل جمعیت $x(4/5) + y(2/5)$ خواهد بود. از آنجا که نسبت اعضای D در سال قبل نیز همین بوده است، داریم

$$\left(\frac{2}{5}\right)x + \left(\frac{2}{5}\right)y = x \quad \text{یا} \quad -\left(\frac{1}{5}\right)x + \left(\frac{2}{5}\right)y = 0$$

همین استدلال برای R نتیجه می‌دهد که $(1/5)x + (3/5)y = y$ یا $(1/5)x - (2/5)y = 0$. در نتیجه، دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ -\left(\frac{1}{5}\right)x + \left(\frac{2}{5}\right)y &= 0 \\ \left(\frac{1}{5}\right)x - \left(\frac{2}{5}\right)y &= 0 \end{aligned}$$

را به دست می‌آوریم. پس از حل دستگاه، به روش معمول، درمی‌یابیم که $x = 2/3$ و $y = 1/3$.

برای سادگی، در این مسئله فرض کردیم که فقط دو حزب وجود دارد. در نتیجه دو معادله آخر تقریباً یکسان بودند. لکن، اگر این نوع مسئله در حالت سه حزبی بررسی می‌شد، چهار معادله می‌داشتیم. در حالت کلی این چهار معادله کاملاً متفاوت‌اند (ر.ک. تمرین ۰۱۴). در قسمتهای بعد، با مسائل دیگری از این نوع روبرو خواهیم شد و روشهای کاراتری برای فرمولبندی آنها ارائه خواهیم نمود.

تمرینات

۱. دستگاههای معادلات خطی زیر را حل کنید. در هر مورد، با انجام محاسبات لازم مشخص کنید که دستگاه جواب دارد یا نه، و اگر تعداد زیادی جواب دارد، صورت کلی جوابها را ارائه دهید.

$$(الف) \quad x - y + z = 5 \quad (ب) \quad x_1 - x_2 + 2x_3 = -5$$

$$2x + y - z = -2 \quad 3x_1 + 2x_2 + 15x_3 = 2$$

$$3x - y - z = -7 \quad 2x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

$$(ج) \quad x + 2y + z = 2 \quad (د) \quad 2x - 3y + 4z = 3$$

$$3x + 4y - z = 1 \quad x - y + z = 1$$

$$x - 2y - 3z = 1 \quad x - 2y + 3z = 2$$

$$(ه) \quad x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \quad (و) \quad x - y + z = 9$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \quad 2x + y - 3z = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \quad x + 4y + z = 4$$

$$3x + y - 5z = -1$$

$$(ز) \quad 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \quad (ح) \quad -x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad x_1 - x_2 + x_3 = 2$$

$$4x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \quad x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

۲. اگر a, b, c و مقادیر دلخواهی باشند، دستگاههای زیر را حل کنید:

$$(الف) \quad x_1 + x_2 = a \quad (ب) \quad 2x + 5y = a$$

$$x_1 + x_2 = b \quad x + 3y = b$$

$$x_1 + x_2 = c$$

۳. با حل دستگاه معادلات زیر، x و y را به صورت توابعی از t بیابید.

$$(1-t)x + ty = 0$$

$$-tx + (1+t)y = 1$$

۴. برای هر یک از دستگاههای معادلات زیر، یک شرط لازم و کافی برای a, b, c و بیابید تا دستگاه دارای جواب باشد.

$$(الف) \quad 2x + 3y - 2z = a \quad (ب) \quad x + 4y - 2z = a$$

$$x - 2y + z = b \quad 2x - 2y + 3z = b$$

$$x - 9y + 5z = c \quad x - 6y + 5z = c$$

۵. فرض کنید A, B, C, D اعداد حقیقی دلخواهی باشند. ثابت کنید که یک چند-جمله‌ای f ، حداکثر از درجه ۳، وجود دارد به طوری که $f(0) = A, f'(0) = B, f(1) = C, f'(1) = D$ (در اینجا $f'(a)$ نمایشگر مشتق f در نقطه a می‌باشد).

۶. خانواده‌ای متشکل از مادر، پدر، یک دختر، و یک پسر است. پدر دوسال از مادر بزرگتر است. دوسال دیگر سن پدر سه برابر سن پسر می‌شود و سن پسر دو برابر سن دختر. سه سال دیگر سن مادر پنج برابر سن دختر می‌شود. سن هر یک از اعضای این خانواده را بیابید.

۷. سه فنجان روی یک میز قرار دارند و تعداد معینی سکه یک ریالی در هر فنجان می‌باشد. تعداد سکه‌های موجود در هر زوج از فنجانها را می‌دانیم. آیا می‌توانید بگویید که در هر فنجان چند یک ریالی موجود است؟

۸. با فرض اینکه می‌دانیم صفر درجه سانتیگراد مساوی است با ۳۲ درجه فارنهایت، و ۱۰۰ درجه سانتیگراد برابر است با ۲۱۲ درجه فارنهایت، فرمولی برای تبدیل درجه حرارت از سانتیگراد به فارنهایت به دست آورید. (عقل سلیم حکم می‌کند که این معادله خطی است).

۹. چهار وزنه و یک خطکش داده شده‌اند. مرکز خطکش روی یک نقطه اتکا قرار دارد و وزنه‌ها از خطکش آویزان شده‌اند. سه وضعیت تعادل، به صورتی که در جدول زیر توصیف شده‌اند، مشاهده کرده‌ایم.

وزنه اول	وزنه دوم	وزنه سوم	وزنه چهارم	
۵۰ (چپ)	۲۰ (چپ)	۱۰ (راست)	۳۰ (راست)	وضعیت ۱
۲۵ (چپ)	۵۰ (چپ)	۵۰ (راست)	۳۰ (راست)	وضعیت ۲
۲۰ (چپ)	۳۰ (چپ)	۳۰ (راست)	۲۰ (راست)	وضعیت ۳

سه تا از وزنه‌ها را برحسب وزنه چهارم بیاید.

۱۰. آیا نقاط $(۲, ۹)$ و $(۵, ۱۲)$ و $(۱۸, -۴)$ روی یک دایره قرار دارند؟

۱۱. معادله شیمیایی زیر را موازنه کنید:



۱۲. چهار عنصر شیمیایی A, B, C ، و D داده شده‌اند. همچنین می‌دانیم که ترکیبات شیمیایی ABC ، ABD ، و A_2C وجود دارند. درباره ظرفیت این عناصر شیمیایی، چه می‌توان گفت؟

۱۳. یک شرکت حمل و نقل سه نوع کامیون در اختیار دارد: ۱، ۲، و ۳. این شرکت قرارداد بسته است که سه نوع محموله L, M ، و N را جا به جا کند. جدول زیر نشان می‌دهد که هر کامیون چند واحد از هر نوع محموله را می‌تواند حمل کند.

محموله	کامیون		
	۱	۲	۳
L	۲	۱	۵
M	۴	۲	۳
N	۳	۱	۱

برای مثال، یک کامیون از نوع ۲ می‌تواند یک واحد از L ، دو واحد از M ، و یک واحد از N را حمل کند. فرض کنید سفارش حمل بیست واحد از L ، بیست و شش واحد از M ، و پانزده واحد از N داده شده است. چند کامیون از هر نوع باید داشته باشیم تا همگی دارای بار کامل باشند؟

۱۴. مثال ۸ را گسترش داده، فرض کنید سه حزب A, B ، و C وجود دارند. همچنین فرض کنید در هر سال، $۷/۱۰$ از اعضای A در این حزب باقی می‌مانند، $۲/۱۰$ از اعضای A عضو B می‌شوند و $۱/۱۰$ بقیه به C می‌پیوندند. همین‌طور $۶/۱۰$ از اعضای B در این حزب مانده، $۳/۱۰$ به A و $۱/۱۰$ به C ملحق می‌شوند. و نیز $۷/۱۰$ از اعضای C در C می‌مانند، $۲/۱۰$ به عضویت A و $۱/۱۰$ بقیه به عضویت B درمی‌آیند. فرض کنید نسبت اعضای A, B ، و C به کل جمعیت به ترتیب x, y ، و z باشد. همانند مثال ۸، فرض کنید نسبت رأی دهندگان به هر حزب، از سالی به سال دیگر ثابت بماند.

(الف) نشان دهید که $x + y + z = ۱$

(ب) با بررسی اعضاء A ، نشان دهید که $\left(\frac{۷}{۱۰}\right)x + \left(\frac{۳}{۱۰}\right)y + \left(\frac{۲}{۱۰}\right)z = x$

(ج) با بررسی اعضاء B ، نشان دهید که $\left(\frac{۲}{۱۰}\right)x + \left(\frac{۶}{۱۰}\right)y + \left(\frac{۱}{۱۰}\right)z = y$

$$\left(\frac{1}{10}\right)x + \left(\frac{1}{10}\right)y + \left(\frac{7}{10}\right)z = z \quad \text{(د) با بررسی اعضاء C، نشان دهید که}$$

$$(x, y, z) \text{ را بیابید.}$$

۴ دستگاههای همگن

دستگاه معادلاتی به صورت

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

را دستگاه همگن گوئیم. به عبارت دیگر، دستگاه همگن است اگر تمام مقادیر طرف راست معادلات آن صفر باشند.

هر دستگاه معادلات همگن همیشه دارای حداقل یک جواب $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ است. این جواب را اغلب جواب بدیهی می نامند. هر جواب دیگر، غیر بدیهی خوانده می شود.

حالتی وجود دارد که در آن می توان تضمین کرد که یک دستگاه همگن دارای جواب غیر بدیهی است. در دستگاه معادلات فوق فرض می کنیم $m < n$ ، یعنی تعداد مجهولات بیشتر از تعداد معادلات باشد. در این حالت قضیه مهم زیر را داریم:

قضیه در یک دستگاه معادلات خطی همگن، اگر تعداد معادلات کمتر از تعداد مجهولات باشد، یک جواب غیر بدیهی وجود دارد.

اثبات دستگاه

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

را در نظر می گیریم که در آن $m < n$.

اگر همه ضرایب x_1 در این دستگاه صفر باشند، یعنی، اگر

$$x_1 = 1, x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0, a_{11} = a_{21} = \dots = a_{m1} = 0$$

یک جواب غیر بدیهی است. لذا فرض می کنیم یک ضریب x_1 صفر نباشد. با شماره گذاری

مجدد معادلات دستگاه، می‌توانیم فرض کنیم $a_{11} \neq 0$. معادله اول را در a_{11}^{-1} ضرب کرده، x_1 را از بقیه معادلات حذف می‌کنیم، داریم

$$x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \dots + b_{1n}x_n = 0$$

$$b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + \dots + b_{2n}x_n = 0$$

$$\vdots$$

$$b_{m2}x_2 + b_{m3}x_3 + \dots + b_{mn}x_n = 0$$

اگر ضرایب x_2 در تمام معادلات بجز در معادله اول صفر باشند، یعنی، اگر $b_{22} = b_{32} = \dots = b_{m2} = 0$ می‌نویسیم $x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$ و $x_1 = -b_{12}$ و به این ترتیب یک جواب غیربدیهی پیدا می‌کنیم. حال، پس از شماره گذاری مجدد معادلات، فرض می‌کنیم $b_{22} \neq 0$. معادله دوم را در b_{22}^{-1} ضرب می‌کنیم و x_2 را از بقیه معادلات حذف می‌نماییم، داریم:

$$x_1 + c_{13}x_3 + \dots + c_{1n}x_n = 0$$

$$x_2 + c_{23}x_3 + \dots + c_{2n}x_n = 0$$

$$\vdots$$

$$c_{m3}x_3 + \dots + c_{mn}x_n = 0$$

با ادامه این فرایند و با استفاده از این فرض که تعداد مجهولات بیشتر از تعداد معادلات است، بالاخره دستگاهی به صورت

$$x_1 + d_{1r}x_r + \dots + d_{1n}x_n = 0$$

$$x_2 + d_{2r}x_r + \dots + d_{2n}x_n = 0$$

$$\vdots$$

$$x_{r-1} + d_{r-1r}x_r + \dots + d_{r-1n}x_n = 0$$

$$0 = 0$$

$$\vdots$$

به دست می‌آوریم که در آن $r < n$. با انتخاب $x_r = 1$ ، $x_{r+1} = \dots = x_n = 0$ و $x_1 = -d_{1r}$ ، $x_2 = -d_{2r}$ ، \dots ، $x_{r-1} = -d_{r-1r}$ ، یک جواب غیربدیهی برای دستگاه به دست می‌آید.

برای روشن ساختن اثبات فوق چند مثال می‌آوریم.

مثال ۱

$$x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$$

$$-x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$$

↓

معادله اول و مجهول x_1 را به کار می‌بریم.

$$x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

$$-10x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0$$

$$8x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0$$

↓

معادله دوم را در $1/10$ ضرب می‌کنیم.

$$x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

$$x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{5}x_4 = 0$$

$$8x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0$$

↓

معادله دوم و مجهول x_2 را به کار می‌بریم.

$$x_1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{2}{5}x_4 = 0$$

$$x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{5}x_4 = 0$$

$$2x_3 + \frac{7}{5}x_4 = 0$$

معادله سوم را در $1/2$ ضرب می‌کنیم.

$$x_1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{2}{5}x_4 = 0$$

$$x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{5}x_4 = 0$$

$$x_3 + \frac{7}{10}x_4 = 0$$

معادله سوم و x_3 را به کار می‌بریم.

$$x_1 + \frac{1}{20}x_4 = 0$$

$$x_2 + \frac{11}{20}x_4 = 0$$

$$x_3 + \frac{7}{10}x_4 = 0$$

لذا، اگر $x_4 = c$ یک عدد حقیقی دلخواه باشد،

$$(-1/20c, -11/20c, -7/10c, c)$$

جواب دستگاه است. اگر $c \neq 0$ ، جواب غیر بدیهی است.

مثال ۲

$$2x - 2y + z = 0$$

$$3x - y + 2z = 0$$

↓

معادله اول را در $1/2$ ضرب می‌کنیم.

$$x - y + \frac{1}{2}z = 0$$

$$3x - y + 2z = 0$$

↓

معادله اول و مجهول x را به کار می‌بریم.

$$x - y + \frac{1}{2}z = 0$$

$$2y + \frac{1}{2}z = 0$$

↓

معادله دوم را در $1/2$ ضرب می‌کنیم.

$$x - y + \frac{1}{2}z = 0$$

$$y + \frac{1}{4}z = 0$$

↓

معادله دوم و مجهول y را به کار می‌بریم

$$x + \frac{3}{4}z = 0$$

$$y + \frac{1}{4}z = 0$$

با انتخاب $z = c \neq 0$ ، $x = -(3/4)c$ و $y = -(1/4)c$ ، یک جواب غیر بدیهی داریم.

تمرینات

۱. دستگاههای معادلات زیر را حل کنید.

$$x + y - 3z = 0 \quad (\text{ب}) \quad 3x + y + z = 0 \quad (\text{الف})$$

$$2x + 3y + z = 0 \quad x - 2y + z = 0$$

$$-x + 4y + 2z = 0$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \quad (\text{د}) \quad 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \quad (\text{ج})$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \quad x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \quad 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$$

۲. فرض کنید یک دستگاه معادلات همگن n مجهولی داشته باشیم که (h_1, h_2, \dots, h_n) یک جواب و (g_1, g_2, \dots, g_n) جوابی دیگر از این دستگاه باشند. نشان دهید که $(h_1 + g_1, h_2 + g_2, \dots, h_n + g_n)$ و $(ch_1, ch_2, \dots, ch_n)$ نیز جواب همین دستگاه معادلات هستند.

۳. فرض کنید (h_1, h_2, \dots, h_n) یک جواب دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} (1) \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned}$$

باشد و (g_1, g_2, \dots, g_n) جوابی برای همین دستگاه وقتی که (b_1, b_2, \dots, b_m) را با $(0, 0, \dots, 0)$ جایگزین کنیم. نشان دهید که $(h_1 + g_1, h_2 + g_2, \dots, h_n + g_n)$ جوابی برای دستگاه (۱) است.

۴. یک دستگاه m معادله خطی n مجهولی مفروض است. فرض کنید که n بزرگتر از m و دستگاه دارای جواب باشد. نشان دهید که جواب یکتا نیست.

۵. فرض کنید $(x_1, y_1), \dots, (x_5, y_5)$ پنج نقطه در صفحه باشند. نشان دهید که این نقاط روی یک مقطع مخروطی واقع اند، یعنی یک منحنی با معادله

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

که در آن حداقل یکی از ضرایب A, B, C, D و E صفر نیست.

۲

بردارها و ماتریسها

۱ بردارها

بسیاری از کمیت‌های فیزیکی مانند حرارت، جرم، و انرژی را می‌توان برحسب تنها یک عدد حقیقی r و یک واحد توصیف کرد. همان‌طور که در مطالعهٔ دستگاه‌های معادلات خطی، اغلب لازم می‌دیدیم که n تاییهای اعداد را در نظر گیریم، برای سایر توصیفات فیزیکی دقیق مانند مکان یا سرعت یک جسم در فضا نیز لازم است که از چند عدد حقیقی استفاده کنیم. از این رو، در این بخش می‌خواهیم n تاییهای اعداد و روشهای محاسبه با آنها را با تفصیل بیشتری مطالعه کنیم.

n -بردار ستونی را به عنوان یک n تایی از اعداد تعریف می‌کنیم که به‌طور عمودی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

اگر u_i ها اعداد حقیقی باشند، یک n -بردار ستونی حقیقی، و اگر مختلط باشند، یک n -بردار ستونی مختلط داریم. عدد u_i را که در محل i ام قرار دارد مؤلفهٔ i ام بردار گویند. برای مثال

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 14 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1+i \\ 0 \\ 1-i \end{bmatrix}$$

بردارهای ستونی هستند. اولی یک ۲-بردار ستونی حقیقی؛ دومی یک ۴-بردار ستونی

حقیقی؛ و چهارمی یک ۳-بردار ستونی مختلط است. در بردار دوم، اولین مؤلفه ۳، مؤلفه دوم ۵، مؤلفه سوم ۵، و مؤلفه چهارم ۶- می باشد.

با روشی مشابه، n -بردار سطری را به عنوان یک n تایی از اعداد تعریف می کنیم که به طور افقی به صورت $[u_1, u_2, \dots, u_n]$ نوشته می شود. لذا $[3, 4, 1, -5]$ یک ۴-بردار سطری است.

مجموعه تمام n -بردارهای ستونی حقیقی را R^n می نامیم. با این تعریف، R^2 متشکل از تمام بردارهای ستونی به صورت $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ است، که در آن a و b اعداد حقیقی اند. مجموعه تمام n -بردارهای ستونی مختلط را با C^n نشان می دهیم.

$$\text{اگر } a = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \text{ و } b = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \text{ دو } n\text{-بردار ستونی باشند، گوییم } a = b$$

اگر و فقط اگر $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n$.

به عبارت دیگر، دو بردار مساوی اند وقتی و فقط وقتی که به ازای هر i ، مؤلفه i ام آنها یکسان باشد.

اکنون می خواهیم گرد آورده همه n -بردارهای ستونی را بایک ساختار جبری مجهز کنیم. اگر a و b دو n -بردار ستونی باشند، حاصل جمع a و b را که به شکل $a + b$ نوشته می شود، به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\text{اگر } a = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \text{ و } b = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \text{ آنگاه}$$

$$a + b = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{bmatrix}$$

برای مثال،

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

توجه کنید که جمع دو بردار فقط وقتی تعریف می شود که دو بردار دارای اندازه یکسان باشند؛ یعنی، وقتی تعداد مؤلفه های آنها برابر باشد.
در حالت کلی، وقتی با بردار سروکار داریم، عدد را اسکالر می نامیم. اعداد حقیقی اسکالرهایی حقیقی، و اعداد مختلط اسکالرهایی مختلط هستند.
عمل مهم دیگر، ضرب اسکالر است. اگر c یک n -بردار ستونی و α یک اسکالر باشد، مضروب اسکالر بردار c با ضریب اسکالر α را با αc نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\alpha c = \begin{bmatrix} \alpha c_1 \\ \alpha c_2 \\ \vdots \\ \alpha c_n \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad \text{اگر } c \text{ آنگاه}$$

برای مثال،

$$(-1) \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad 3 \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ -31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 0 \\ -93 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 14 \end{bmatrix}$$

تعاریف مشابهی برای جمع n -بردارهای مختلط، و ضرب n -بردارهای مختلط در اسکالرهایی مختلط می توان ارائه داد.

این تعاریف را می توان برحسب مؤلفه ها به صورت زیر بیان کرد:

مؤلفه i ام حاصلجمع دو بردار عبارت است از حاصلجمع مؤلفه های i ام آن دو بردار. مؤلفه i ام αc برابر مؤلفه i ام c است.

اعمال جمع، و ضرب اسکالر بردارها در چند قانون جبری صدق می کنند که ارزش یادآوری دارند. ذیلاً، فرض می کنیم a ، b ، c و n -بردار و λ و μ اسکالر باشند و

$$c = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad b = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \quad a = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

اول صحت قانون جابجایی را در مورد جمع برداری تحقیق می کنیم.

$$a + b = b + a \quad \text{گزاره ۱}$$

اثبات بنا به تعریف جمع برداری،

$$\mathbf{b} + \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \beta_1 + \alpha_1 \\ \beta_2 + \alpha_2 \\ \vdots \\ \beta_n + \alpha_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{bmatrix}$$

چون برای همه اعداد حقیقی، $\alpha_i + \beta_i = \beta_i + \alpha_i$ ، با استفاده از تعریف تساوی بردارها،

$$\bullet \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

حال صحت قانون انجمنی را در مورد جمع برداری نشان می‌دهیم.

$$\text{گزاره ۲} \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$$

اثبات بنا به تعریف جمع برداری،

$$\mathbf{b} + \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \beta_1 + \gamma_1 \\ \beta_2 + \gamma_2 \\ \vdots \\ \beta_n + \gamma_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 + (\beta_1 + \gamma_1) \\ \alpha_2 + (\beta_2 + \gamma_2) \\ \vdots \\ \alpha_n + (\beta_n + \gamma_n) \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \begin{bmatrix} (\alpha_1 + \beta_1) + \gamma_1 \\ (\alpha_2 + \beta_2) + \gamma_2 \\ \vdots \\ (\alpha_n + \beta_n) + \gamma_n \end{bmatrix}$$

چون برای همه اعداد حقیقی، $\alpha_i + (\beta_i + \gamma_i) = (\alpha_i + \beta_i) + \gamma_i$ ، با استفاده از

$$\bullet \quad \text{تعریف تساوی بردارها داریم: } (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$$

بردار صفر، که آن را با \mathbf{o} نشان می‌دهیم، عبارت است از n -بردار

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

یعنی، برداری که همه مؤلفه‌های آن صفرند. از فحوای مطلب روشن خواهد بود که چه

اندازه‌ای برای برداری که با \mathbf{o} نشان می‌دهیم، مورد نظر است.

$$\text{گزاره ۳} \quad \mathbf{o} + \mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{o} = \mathbf{a}$$

اثبات بنا به تعریف جمع برداری،

$$o + a = \begin{bmatrix} o + \alpha_1 \\ o + \alpha_2 \\ \vdots \\ o + \alpha_n \end{bmatrix}$$

لکن، می‌دانیم که برای هر عدد حقیقی α_i ، $o + \alpha_i = \alpha_i$ ، لذا

$$o + a = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = a.$$

به همین ترتیب $a + o = a$.

اگر a یک بردار باشد، قرینه a ، که آن را با $-a$ نشان می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$-a = \begin{bmatrix} -\alpha_1 \\ -\alpha_2 \\ \vdots \\ -\alpha_n \end{bmatrix} \text{ اگر } a = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \text{ آنگاه}$$

بنابراین،

$$-\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

اکنون گزاره زیر مستقیماً از تعریف فوق نتیجه می‌شود:

$$a + (-a) = (-a) + a = o \quad \text{گزاره ۴}$$

ضرب اسکالر نیز در چند قانون جبری صدق می‌کند.

$$\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b \quad \text{گزاره ۵}$$

اثبات بنا به تعریف جمع برداری،

$$\lambda(a + b) = \begin{bmatrix} \lambda(\alpha_1 + \beta_1) \\ \lambda(\alpha_2 + \beta_2) \\ \vdots \\ \lambda(\alpha_n + \beta_n) \end{bmatrix}, \text{ پس، بنا به تعریف ضرب اسکالر، } a + b = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{bmatrix}$$

و همین طور

$$\lambda \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \lambda \beta_1 \\ \lambda \beta_2 \\ \vdots \\ \lambda \beta_n \end{bmatrix}, \text{ لذا، بنا به تعریف جمع برداری } \lambda \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \lambda \alpha_1 \\ \lambda \alpha_2 \\ \vdots \\ \lambda \alpha_n \end{bmatrix}$$

$$\lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \lambda \alpha_1 + \lambda \beta_1 \\ \lambda \alpha_2 + \lambda \beta_2 \\ \vdots \\ \lambda \alpha_n + \lambda \beta_n \end{bmatrix}.$$

چون به ازای همه اعداد حقیقی، $\lambda(\alpha_i + \beta_i) = \lambda \alpha_i + \lambda \beta_i$ ، با استفاده از تعریف تساوی برداری، داریم: $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$.

اثبات قوانین مهم زیر به عهده خواننده گذاشته می‌شود:

$$(\lambda + \mu) \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{a},$$

$$\lambda(\mu \mathbf{a}) = (\lambda \mu) \mathbf{a},$$

$$1 \mathbf{a} = \mathbf{a}.$$

تفاضل بردارها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: اگر \mathbf{a} و \mathbf{b} دو بردار باشند، $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$. این تساوی را بر حسب مؤلفه‌ها می‌توان چنین نوشت:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\beta_1 \\ -\beta_2 \\ \vdots \\ -\beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 - \beta_1 \\ \alpha_2 - \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n - \beta_n \end{bmatrix}.$$

قوانینی که به دست آوردیم، از این جهت مفیدند که به ما امکان می‌دهند محاسبات جبری با بردارها را بدون رجوع مستمر به مؤلفه‌های آنها انجام دهیم.

برای مثال، جهت حل معادله $\mathbf{x} + \mathbf{a} = \mathbf{b}$ نسبت به بردار \mathbf{x} ، $\mathbf{a} - \mathbf{a}$ را به طرفین این تساوی می‌افزاییم تا چنین حاصل شود

$$(\mathbf{x} + \mathbf{a}) + (-\mathbf{a}) = \mathbf{b} + (-\mathbf{a}),$$

$$\mathbf{x} + (\mathbf{a} - \mathbf{a}) = \mathbf{b} - \mathbf{a},$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{o} = \mathbf{b} - \mathbf{a},$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{a}.$$

در این مثال، عمده تمام مراحل را که حل این معادله دربردارد، نشان دادیم. لکن، پس از کمی تمرین، می‌توان جواب را بلافاصله نوشت. به طور کلی، قوانین جبری که در بالا ارائه شد ما را قادر می‌سازند تا محاسبات برداری را به طرز بسیار شبیه محاسبات جبری انجام دهیم.

همان طور که قبلاً تذکر دادیم، بردار را می توان برای توصیف یک شیء به وسیله یک نماد ریاضی، وقتی که نتوان این شیء را با یک عدد تنها توصیف کرد، به کار برد. برای نشان دادن این که چگونه این مطلب می تواند مفید واقع شود، مسئله ساده ای را مطرح می کنیم.

چهار ظرف روی یک میز قرار دارد و تعدادی گوی در هر یک از این ظروف جای داده شده است. در ظرف اول ۳۵ گوی، در ظرف دوم ۱۸، در سوم ۲۱، و در چهارمی ۳۷ گوی قرار دارند. می خواهیم گویها را طبق قاعده زیر بین ظروف جابجا کنیم:

- (۱) چهار گوی از ظرف اول برمی داریم، سه تای آنها را در ظرف دوم و یکی را در ظرف سوم قرار می دهیم.
- (۲) سه گوی از ظرف دوم برمی داریم و در ظرف سوم قرار می دهیم.
- (۳) دو گوی را از ظرف سوم به ظرف چهارم منتقل می کنیم.
- (۴) از ظرف چهارم پنج گوی برمی داریم، یکی را در ظرف اول و چهارتای دیگر را در ظرف دوم قرار می دهیم.

اگر تمام این عملیات پنج بار تکرار شود، در هر ظرف چند گوی خواهد بود؟ دستگاه را با برداری که مؤلفه نام آن تعداد گویهای موجود در ظرف نام است، توصیف می کنیم. لذا، اولین وضع دستگاه با بردار

$$n = \begin{bmatrix} 35 \\ 18 \\ 21 \\ 37 \end{bmatrix}$$

داده می شود.

همچنین هر مرحله از دنباله عملیات را با یک بردار توصیف می کنیم. بردار

$$s_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

مشخص کننده مرحله اول است.

ملاحظه می کنیم که از افزودن s_1 به n همان نتیجه حاصل می شود که از انجام مرحله اول عملیات. یعنی، از مؤلفه اول ۴ واحد برداشته شده، به دومی ۳ واحد و به سومی یک واحد اضافه شده است. لذا، بردار $n + s_1$ بردار معرف وضع دستگاه پس از انجام مرحله اول می باشد. بردارهای

$$s_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}, s_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, s_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

توصیف کننده سه مرحله باقیمانده هستند.

لذا، در مرحله دوم، از مؤلفه دوم ۳ واحد برداشته می شود و در مؤلفه سوم ۳ واحد قرار می گیرد و به همین ترتیب.

پس از انجام مرحله دوم، بردار $n + s_1 + s_4$ معرف وضع دستگاه می باشد. پس از اجرای مراحل سوم و چهارم، وضع دستگاه عبارت است از $n + s_1 + s_4 + s_5 + s_6$. بالاخره اگر تمام عملیات پنج بار تکرار شود، بردار $(s_1 + s_4 + s_5 + s_6) + n$ مشخص کننده وضع دستگاه است.

$$s_1 + s_4 + s_5 + s_6 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \text{چون}$$

وضع نهایی، با بردار

$$n + \delta \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 18 \\ 21 \\ 37 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -15 \\ 20 \\ 10 \\ -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 38 \\ 31 \\ 22 \end{bmatrix}$$

داده می شود. البته، این نتیجه را بدون استفاده از بردارها نیز می توانستیم به دست آوریم. لکن خواننده فکور می فهمد که به کار بردن بردارها روشی با اسلوب برای جدول بندی داده ها است و از اشتباهات ناشی از بی دقتی جلوگیری می نماید.

تمرینات

۱. محاسبات زیر را انجام دهید.

$$2 \begin{bmatrix} -7 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{bmatrix} 13 \\ 8 \\ 9 \\ -2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 9 \\ -8 \end{bmatrix} \quad (\text{د}) \quad 3 \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ -5 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (\text{ه})$$

۲. هر یک از معادلات زیر را نسبت به x حل کنید.

$$۳x + \begin{bmatrix} ۷ \\ ۰ \\ ۳ \\ -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۶ \\ ۵ \\ ۰ \\ ۴ \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad x + \begin{bmatrix} ۴ \\ -۲ \\ ۰ \\ ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۷ \\ ۸ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

۳. قوانین زیر را ثابت کنید:

$$(\mu + \lambda)a = \mu a + \lambda a$$

$$\mu(\lambda a) = (\mu\lambda)a$$

$$۱ \cdot a = a.$$

۴. اگر a و b دو n -بردار باشند و $a + ۳b = a$ ، نشان دهید که $b = ۰$.

۵. اگر $\alpha x = ۰$ و $\alpha \neq ۰$ ، نشان دهید که $x = ۰$. اگر $\alpha x = \beta x$ و $\alpha \neq \beta$ ، نشان دهید که $x = ۰$.

۶. دو ۲ -بردار a و b را بیابید به طوری که معادله $\alpha a = b$ نسبت به اسکالر α حل پذیر نباشد.

۷. اگر x, a, b, c و n -بردار باشند، معادله $(x - a) + c = a + b$ را نسبت به x و بر حسب a, b, c حل کنید.

۸. معادلات $x + ۲y = a$ و $۲x + ۵y = b$ را برای یافتن بردارهای x و y بر حسب بردارهای a و b حل کنید.

۹. نشان دهید که دقیقاً ۲^n n -بردار وجود دارد که همه مؤلفه‌های آنها ۰ و ۱ است.

۱۰. نشان دهید که تمام قوانین جمع برداری، و ضرب اسکالر در مورد بردارهای مختلط برقرارند.

۱۱. اسکالرهای x و y را بیابید به طوری که $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} ۳ \\ ۷ \end{bmatrix}$.

۱۲. برای ۲ -بردارهای $a = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$ ، $b = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۹ \end{bmatrix}$ و $c = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۳ \end{bmatrix}$ ،

اسکالرهای λ, μ, γ را بیابید به طوری که لااقل یکی از آنها صفر نباشد و

$$\lambda a + \mu b + \gamma c = ۰.$$

ثابت کنید که در حالت کلی، اگر a, b, c و ۲ -بردارهای دلخواه باشند، این کار ممکن است.

۱۳. سه ظرف که در هر یک تعداد معینی گسوی است، روی یک میز قرار دارند. تعداد

گویهای موجود در هر ظرف را با بردار $v = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$ ، که در آن n_i تعداد گویهای ظرف

i ام است، نشان می‌دهیم. فرض کنید که در ابتدا $v = \begin{bmatrix} ۲۳ \\ ۱۰ \\ ۶ \end{bmatrix}$ عمل تغییر مکان زیر انجام

می‌گیرد: از ظرفی که حاوی بیشترین تعداد گوی است دو گوی برمی‌داریم و یک گوی در هر یک از دو ظرف دیگر قرار می‌دهیم.
(الف) اگر این عمل به اندازه کافی تکرار شود، نشان دهید که تنها اوضاع دستگاه

$$\begin{bmatrix} 14 \\ 13 \\ 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 \\ 14 \\ 13 \end{bmatrix}, \text{ و } \begin{bmatrix} 13 \\ 12 \\ 14 \end{bmatrix} \text{ است.}$$

(ب) وضع دستگاه پس از ۱۰۰ بار انجام این عمل چیست؟

۱۴. یک بررسی اقتصادی در مورد ۳۰ خانواده انجام می‌شود تا معین گردد که این

$$x_i = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad \text{خانواده‌ها چگونه پولهایشان را خرج می‌کنند. به خانواده‌ای نام یک بردار}$$

نسبت داده شده است، که در آن a_1, a_2, a_3, a_4 ، درصدی از درآمد خانواده است که، بترتیب، برای غذا، مسکن، لباس، و سایر موارد خرج می‌گردد. معنی بردار $(x_1 + x_2 + \dots + x_{30})$ چیست؟

۱۵. سه دهکده A, B ، و C ، بترتیب، دارای ۵۰۰، ۴۵۰، و ۶۰۰ نفر جمعیت هستند. در طی یک سال عادی، ۵۰ نفر A را ترک می‌کنند که ۲۰ نفر آنها به B و ۳۰ نفر به C می‌روند. در طی یک سال عادی، ۵۰ نفر B را ترک می‌کنند که نصف آنها به A و نصف دیگر به C می‌روند و بالاخره، در طی یک سال عادی، ۸۰ نفر C را ترک می‌کنند که نصف آنها در A و نصف دیگر در B ساکن می‌شوند. با فرض اینکه از لحاظ دیگر جمعیت ثابت باشد، جمعیت A, B ، و C را پس از انقضای ده سال بیابید.

۱۶. اگر

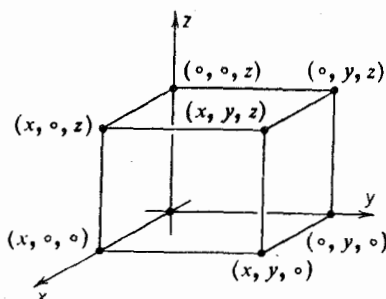
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n &= y_1 \\ x_2 + x_3 + \dots + x_n &= y_2 \\ x_3 + \dots + x_n &= y_3 \\ &\vdots \\ x_{n-1} + x_n &= y_{n-1} \\ x_n &= y_n \end{aligned}$$

x_1, x_2, \dots, x_n را بر حسب y_1, y_2, \dots, y_n بیابید، که در آن x_1, x_2, \dots, x_n و y_1, y_2, \dots, y_n بردار هستند.

۲ تعبیر هندسی R^2 و R^3

همان طور که نقاط صفحه را می‌توان به صورت زوجهای مرتب از اعداد حقیقی نمایش داد، نقاط فضا را نیز می‌توان به صورت سه تایی‌های مرتب از اعداد حقیقی نمایاند. برای

اجرای این طرز نمایش، سه خط دو به دو متعامد را که در یک نقطه از فضا یکدیگر را قطع می‌کنند انتخاب می‌کنیم. این خطوط را محور x ها، محور y ها، و محور z ها و نقطه تلاقی آنها را مبدأ می‌نامند. (ر. ک. شکل ۱.۲).



شکل ۱.۲

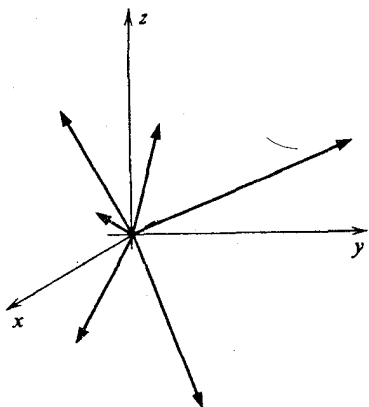
صفحه متشکل از محور y ها و محور z ها را صفحه yz گویند. (صفحه xy و صفحه xz به روش مشابه معین می‌گردند). برای یافتن مختص x یک نقطه P در فضا، صفحه‌ای را که از نقطه P به موازات صفحه yz می‌گذرد، در نظر می‌گیریم. نقطه تلاقی این صفحه با محور x ها، مختص x نقطه P نامیده می‌شود. مختص y این نقطه با تعیین نقطه تلاقی صفحه‌ای که از نقطه P به موازات صفحه xz می‌گذرد با محور y ها به دست می‌آید. و همین طور برای مختص z نقطه P . با استفاده از این روش، می‌توانیم به هر نقطه P در فضا یک سه تایی از اعداد حقیقی (x, y, z) نسبت دهیم. همچنین، به هر سه تایی از اعداد حقیقی می‌توانیم نقطه‌ای از فضا را نسبت دهیم که این سه تایی مختصات آن است. نقطه $(0, 0, 0)$ را که در آن سه محور یکدیگر را قطع می‌کنند مبدأ دستگاه مختصات می‌نامند.

برای مثال، جهت تعیین نقطه $(4, -3, 4)$ ، روی محور x ها، چهار واحد جلو می‌رویم، سپس به موازات محور y ها، ۳— واحد پایین می‌آییم، و بالاخره به موازات محور z ها (به سمت بالا) ۴ واحد پیش می‌رویم. این وضعیت در شکل ۲.۲ تشریح شده است.

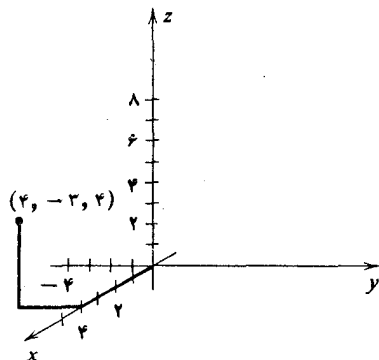
با این روش نمایش نقاط، می‌بینیم که محور x ها متشکل از نقاطی به صورت $(\alpha, 0, 0)$ است که در آن α یک عدد حقیقی است. صفحه xy متشکل از نقاطی به صورت $(\alpha, \beta, 0)$ است. نقاط محور y ها و محور z ها و بقیه صفحات را به طریق مشابه می‌توان نشان داد.

از دیدگاه هندسی، بردار را به عنوان پاره خطی جهت‌دار که ابتدای آن مبدأ مختصات و انتهایش یک نقطه در فضا است، تعریف می‌کنیم. شکل ۳.۲ چند بردار را نشان می‌دهد. بردارها را می‌توان به صورت پیکانهایی که از مبدأ شروع می‌شوند در نظر گرفت.

اگر انتهای بردار v نقطه (x, y, z) در فضا باشد، برای سهولت، اغلب می‌نویسیم $v = v(x, y, z)$. لذا $v(4, -3, 4)$ پاره خط جهت‌داری است در فضا که از مبدأ شروع و به نقطه $(4, -3, 4)$ ختم می‌شود. این ساده نویسی به ما توانایی می‌دهد که بردارهایی را که در بخش قبلی به عنوان اشیاء جبری تعریف کردیم، به طور هندسی تجسم کنیم.



شکل ۳.۲

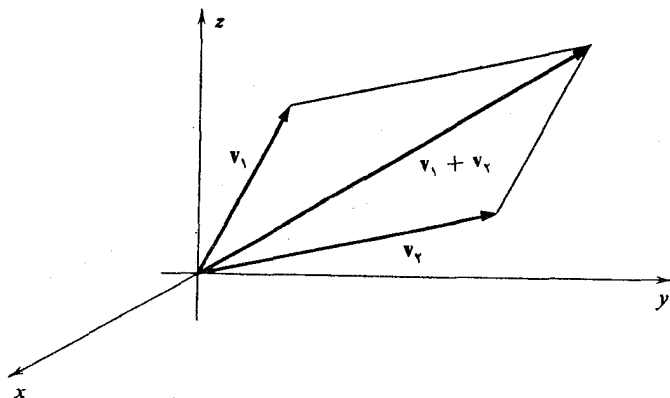


شکل ۳.۲

لذا، ۳- بردار ستونی $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ را به عنوان بردار هندسی $v(x, y, z)$ در نظر می‌گیریم.

در بخش قبلی، جمع و ضرب اسکالر بردارها از دیدگاهی جبری مورد بررسی قرار گرفت. در این بخش، این اعمال را از دیدگاه هندسی مورد بحث قرار می‌دهیم. جمع برداری را، به طور هندسی، به صورت زیر تعریف می‌کنیم. در صفحه متشکل از بردارهای v_1 و v_2 (ر. ک. شکل ۳.۲)، متوازی‌الاضلاعی بسازید که v_1 و v_2 دو ضلع مجاور آن باشند. بردار $v_1 + v_2$ را به عنوان پاره خط جهت داری در امتداد قطر متوازی-الاضلاع تعریف می‌کنیم. گیریم $v_1 = v(x, y, z)$ و $v_2 = v(x', y', z')$. آنگاه

v_1 و v_2 متناظر با بردارهای ستونی $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$ هستند. حاصلجمع این دو بردار



شکل ۳.۲

است، که نظیر بردار $\begin{bmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{bmatrix}$ می باشد. می خواهیم

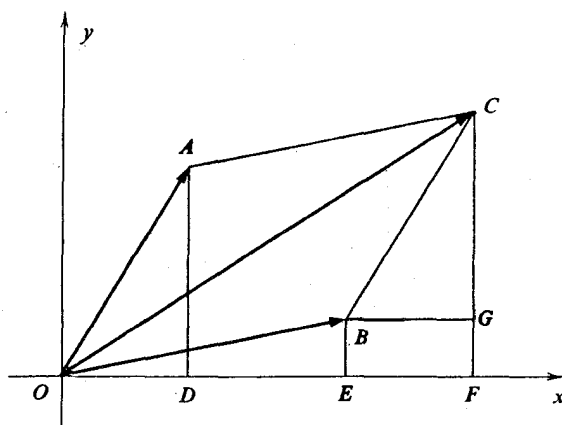
نشان دهیم که تعاریف جبری و هندسی جمع برداری سازگارند. برای این کار باید نشان دهیم که $\nabla(x, y, z) + \nabla(x', y', z') = \nabla(x + x', y + y', z + z')$. این امر را در صفحه ثابت می کنیم، و فرموله کردن آن در فضای سه بعدی را به عهده خواننده علاقه مند می گذاریم. لذا، می خواهیم نشان دهیم که

$$\nabla(x, y) + \nabla(x', y') = \nabla(x + x', y + y')$$

در شکل ۵.۲، گیریم $\nabla(x, y)$ برداری باشد که انتهایش نقطه A است و $\nabla(x', y')$ آن برداری که انتهایش نقطه B است. انتهای بردار $\nabla(x, y) + \nabla(x', y')$ رأس C از متوازی الاضلاع $OBAC$ می باشد. نشان می دهیم که

$$\nabla(x, y) + \nabla(x', y') = \nabla(x + x', y + y'),$$

یا به عبارت دیگر، $(x + x', y + y')$ مختصات رأس C است.

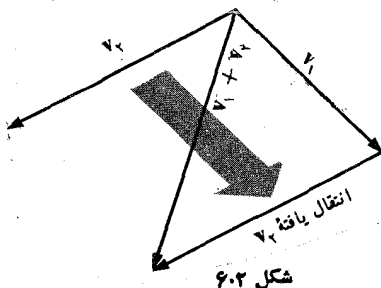


شکل ۵.۲

می توان در شکل مشاهده کرد که مثلث OAD با مثلث CBG همبسته است. همچنین، مشاهده می کنیم که $OD = x$ و $OE = x'$ طول OE با استفاده از رابطه همبستگی طول $OD = BG$ ، و چون $BGFE$ یک مربع مستطیل است، داریم طول $EF = OD$. اما طول $OF = OE + EF$ طول OF ، و لذا $OF = x + x'$ طول OF . در نتیجه، $x + x'$ مختص x نقطه C است. به طریق مشابه می توان ثابت کرد که $y + y'$ مختص y نقطه C می باشد. از اینجا، می بینیم که تعریف هندسی جمع برداری هم ارز است با تعریف جبری که در آن مؤلفه ها را جمع می کنیم.

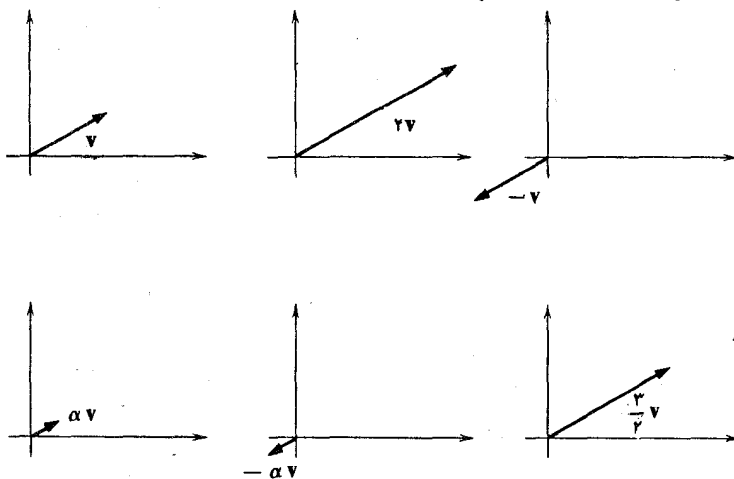
شکل ۵.۲، نشان می دهد که جمع برداری را همچنین می توان به این ترتیب در نظر

گرفت: پاره خط جهت‌دار معرف \vec{v} را طوری انتقال می‌دهیم که ابتدای آن بر انتهای \vec{v}_1 قرار گیرد. نقطهٔ انتهایی پاره خط جهت‌دار حاصل، انتهای بردار $\vec{v}_1 + \vec{v}$ است.



شکل ۶.۲

مضارب اسکالر بردارها دارای تعبیر هندسی مشابهی هستند. اگر α یک اسکالر و \vec{v} یک بردار باشد، $\alpha\vec{v}$ را می‌توان به‌عنوان برداری تعریف کرد که طول آن $|\alpha|$ برابر طول \vec{v} و جهت آن، وقتی $\alpha > 0$ ، همان جهت \vec{v} است و وقتی $\alpha < 0$ ، خلاف جهت \vec{v} می‌باشد. شکل ۷.۲، نشان دهندهٔ چند مثال است.



شکل ۷.۲

با استدلالی بر اساس تشابه مثلثها، می‌توانیم ثابت کنیم که

$$\alpha\vec{v}(x, y, z) = \vec{v}(\alpha x, \alpha y, \alpha z).$$

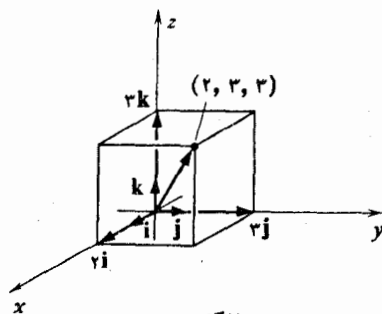
باز، تعریف هندسی منطبق با تعریف جبری است.

بردار $\vec{b} - \vec{a}$ چیست؟ چون $\vec{b} = \vec{a} + (\vec{b} - \vec{a})$ ، واضح است که $\vec{b} - \vec{a}$ آن برداری است که وقتی به \vec{a} اضافه می‌شود، \vec{b} را نتیجه می‌دهد. با توجه به این نکته، $\vec{b} - \vec{a}$ موازی پاره خط جهت‌داری است که از نقطهٔ انتهایی \vec{a} شروع و در نقطهٔ انتهایی \vec{b} ختم می‌شود. (ر. ک، شکل ۸.۲)

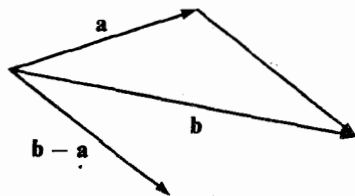
اگر برداری را که انتهایش $(1, 0, 0)$ است با \mathbf{i} و برداری را که در $(0, 1, 0)$ ختم می‌شود با \mathbf{j} ، و برداری با نقطهٔ انتهایی $(0, 0, 1)$ را با \mathbf{k} نشان دهیم، آنگاه

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x, y, z) &= \mathbf{v}(x, 0, 0) + \mathbf{v}(0, y, 0) + \mathbf{v}(0, 0, z) \\ &= x\mathbf{v}(1, 0, 0) + y\mathbf{v}(0, 1, 0) + z\mathbf{v}(0, 0, 1) \\ &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \end{aligned}$$

در نتیجه، هر بردار در فضای سه بعدی را می‌توان برحسب بردارهای یک‌ه‌ای \mathbf{i} ، \mathbf{j} ، و \mathbf{k} نشان داد. برای مثال، برداری با نقطهٔ انتهایی $(2, 3, 3)$ ، عبارت از $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ است، و آن که در $(0, -1, 4)$ ختم می‌شود، $4\mathbf{k} - \mathbf{j}$ می‌باشد. (ر. ک. شکل ۹.۲).



شکل ۹.۲



شکل ۸.۲

همچنین داریم

$$\begin{aligned} (xi + yj + zk) + (x'i + y'j + z'k) \\ = (x + x')i + (y + y')j + (z + z')k \end{aligned}$$

و

$$\alpha(xi + yj + zk) = (\alpha x)i + (\alpha y)j + (\alpha z)k$$

به علت تناظر بین بردارها و نقاط، گاهی ممکن است در حالتی که \mathbf{a} به عنوان یک بردار تعریف شده است، آن را نقطهٔ \mathbf{a} بنامیم. خواننده باید تشخیص دهد که مقصود ما نقطهٔ انتهایی بردار \mathbf{a} است.

به عنوان مثالی از کاربرد این مفاهیم، جهت توصیف نقاطی که درون و روی محیط متوازی‌الاضلاع یا اضلاع مجاور \mathbf{a} و \mathbf{b} هستند از بردارها استفاده می‌کنیم. (ر. ک. شکل ۱۰.۲). اگر P نقطه‌ای در متوازی‌الاضلاع باشد و خطوط l_1 و l_2 را به ترتیب، به موازات بردارهای \mathbf{a} و \mathbf{b} رسم کنیم، می‌بینیم که l_1 ضلعی از متوازی‌الاضلاع را که با بردار \mathbf{b} مشخص شده است در یک نقطهٔ tb قطع می‌کند که در آن $0 \leq t \leq 1$ همین‌طور، l_2 ضلع مشخص شده با بردار \mathbf{a} را در یک نقطهٔ sa که در آن $0 \leq s \leq 1$ است، قطع می‌کند. چون در این صورت P نقطهٔ انتهایی قطر متوازی‌الاضلاع با اضلاع مجاور \mathbf{a} و \mathbf{b}

است، اگر v نشان دهنده برداری باشد که به P ختم می‌شود، می‌بینیم که $v = sa + tb$. لذا، همه نقاط داخل متوازی‌الاضلاع، نقاط انتهایی بردارهایی به صورت $sa + tb$ که $0 \leq s \leq 1$ و $0 \leq t \leq 1$ هستند. با معکوس کردن مراحل فوق به آسانی می‌بینیم که نقاط انتهایی همه این قبیل بردارها داخل متوازی‌الاضلاع می‌باشند.

مثال ساده‌ای از این مطلب که اعمال برداری چگونه در مسائل فیزیکی پیش می‌آیند، با استفاده از مفهوم مرکز جرم فراهم می‌آید. فرض می‌کنیم دستگاهی از k جسم با جرمهای m_1, m_2, \dots, m_k و بترتیب با بردارهای مکان r_1, r_2, \dots, r_k در صفحه وجود دارد. به عبارت دیگر در نقطه انتهایی بردار r_k جسمی به جرم m_k قرار دارد. مرکز جرم دستگاه، بنا به تعریف، انتهای بردار

$$r_c = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + \dots + m_k r_k}{m_1 + m_2 + \dots + m_k}$$

می‌باشد. یک اصل بنیادی فیزیک می‌گوید که اگر صفحه به طور افقی از مرکز جرم آویزان شود، دستگاه در حال تعادل باقی می‌ماند. در واقع، مفهومی که در این اصل نهفته است با مفهومی که از آن برای تعادل خط‌کشی در مثال ۲ از بخش ۱.۱ استفاده کردیم، هیچ فرقی ندارد. لکن، در این حالت چون اجسام بجای خط روی صفحه پراکنده‌اند، مکان مرکز جرم با بردار مشخص می‌شود و نه با اسکالر.

برای مثال، فرض می‌کنیم سه جسم در صفحه دارای مکانهای $(1, 0)$ ، $(0, 1)$ ، و $(-1, -1)$ و بترتیب دارای جرمهای ۲، ۱، و ۳ باشند. در این صورت بردارهای مکان این سه جسم $r_1 = i$ ، $r_2 = j$ ، $r_3 = -i - j$ است. پس

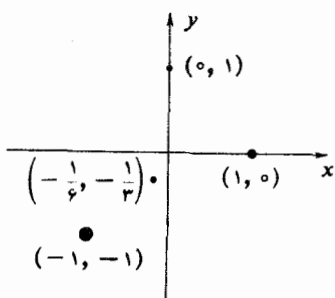
$$r_c = \frac{2i + j + 3(-i - j)}{2 + 1 + 3} = \frac{1}{6}(-i - 2j)$$

بنابراین، مختصات مرکز جرم $(1/3, -1/6)$ می‌باشد. (ر. ک. شکل ۱۱.۲). اگر صفحه به طور افقی از نقطه $(1/3, -1/6)$ آویزان شده باشد، دستگاه در حال تعادل باقی می‌ماند.

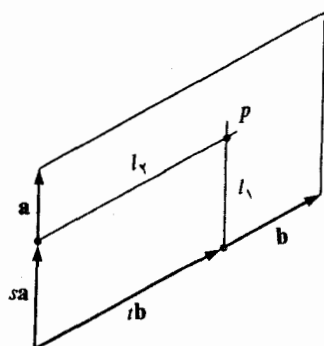
حال، معادله پارامتری خط را در فضای سه بعدی به دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم L خطی در فضا باشد، v برداری در امتداد L و a برداری که انتهایش روی L است. (ر. ک. شکل ۱۲.۲)

گیریم L' خطی باشد در امتداد بردار v که از مبدأ می‌گذرد. وقتی t روی تمام اعداد حقیقی تغییر کند، نقاط به صورت tv همگی مضارب اسکالر بردار v هستند. لذا، همه نقاط روی L' به صورت tv می‌باشند.

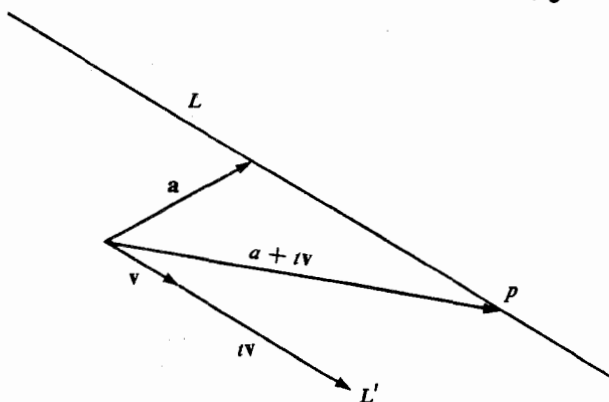
حال اگر P نقطه‌ای روی L باشد، P نقطه انتهایی قطر متوازی‌الاضلاع است که یک ضلع آن a می‌باشد و ضلع دیگرش روی L' قرار دارد. آن ضلع متوازی‌الاضلاع که روی L' قرار دارد به صورت tv است. لذا، P نقطه انتهایی بردار $a + tv$ می‌باشد. در نتیجه، این خط را می‌توان به صورت پارامتری با معادله $I(t) = a + tv$ بیان کرد.



شکل ۱۱.۲



شکل ۱۰.۲



شکل ۱۲.۲

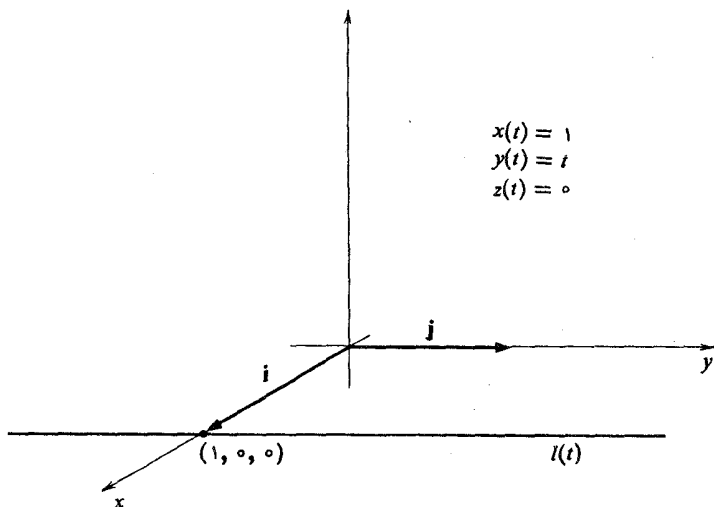
به ازای $t = 0$ ، $\mathbf{l}(0) = \mathbf{a}$. همچنانکه t صعود می‌کند، نقطه $\mathbf{l}(t)$ در جهت \mathbf{v} از \mathbf{a} دور می‌شود. وقتی t با اختیار مقادیر منفی از $t = 0$ نزول می‌کند، $\mathbf{l}(t)$ در جهت $-\mathbf{v}$ از \mathbf{a} دور می‌شود.

البته اشکال پارامتری دیگری برای همین خط وجود دارند. این اشکال را می‌توان با انتخاب نقطه دیگری روی این خط و تشکیل معادله پارامتری خطی که از آن نقطه شروع می‌شود و در امتداد \mathbf{v} است، به دست آورد. برای مثال، نقطه $\mathbf{a} + \mathbf{v}$ روی خط $\mathbf{a} + t\mathbf{v}$ است، و لذا $\mathbf{l}'(t) = \mathbf{a} + \mathbf{v} + t\mathbf{v}$ معرف همان خط است.

اشکال پارامتری دیگری را می‌توان، با مشاهده این امر که اگر $\alpha \neq 0$ ، بردار $\alpha\mathbf{v}$ در جهت یا خلاف جهت \mathbf{v} است، به دست آورد. لذا، $\mathbf{l}'(t) = \mathbf{a} + \alpha t\mathbf{v}$ شکل پارامتری دیگری از $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$ را به دست می‌دهد.

مثال ۱ معادله خطی را که از نقطه $(0, 0, 1)$ در امتداد \mathbf{j} می‌گذرد معین کنید. خط مطلوب را به طور پارامتری، می‌توان به صورت $\mathbf{l}(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{j}$ مشخص کرد.

(ر. ک. شکل ۰.۱۳.۲) بر حسب مختصات، $x(t) = 1$ ، $y(t) = t$ و $z(t) = 0$ در این حالت، خط مزبور فصل مشترک صفحات $x = 1$ و $z = 0$ است.



شکل ۰.۱۳.۲

همچنین، می‌توانیم معادله خطی را که از نقاط انتهایی دو بردار مفروض a و b می‌گذرد، پیدا کنیم.

در این حالت، بردار $b - a$ موازی پاره خط جهت‌دار از a به b است؛ آنچه در واقع می‌خواهیم انجام دهیم، محاسبه معادلات پارامتری خطی است که در امتداد $b - a$ از a می‌گذرد. (ر. ک. شکل ۰.۱۴.۲) بنا براین $l(t) = a + t(b - a)$ ، یا

$$l(t) = (1 - t)a + tb.$$

همچنانکه t از ۰ به ۱ صعود می‌کند، بردار $t(b - a)$ با شروع از بردار صفر، در حالی که طول آن زیاد می‌شود، در جهت $b - a$ افزایش می‌یابد تا به ازای $t = 1$ ، مساوی $b - a$ می‌شود. لذا، در $l(t) = a + t(b - a)$ ، همچنانکه t از ۰ به ۱ صعود می‌کند، $l(t)$ در امتداد پاره خط جهت‌دار از a به b ، از نقطه انتهایی a به طرف نقطه انتهایی b حرکت می‌کند.

مثال ۲ معادله خطی را بیابید که از نقاط $(-1, 1, 0)$ و $(0, 0, 1)$ می‌گذرد. (ر. ک. شکل ۰.۱۵.۲)

گیریم $j + (-i) = a$ و $k = b$ داریم

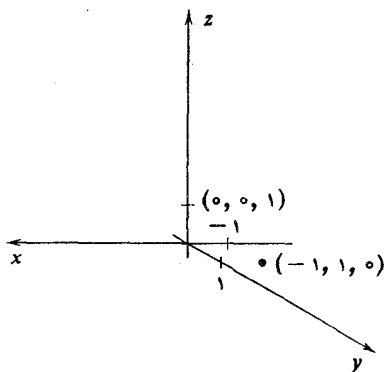
$$\begin{aligned} l(t) &= (1 - t)(-i + j) + tk \\ &= -(1 - t)i + (1 - t)j + tk \end{aligned}$$

$$z(t) = t \quad y(t) = 1 - t \quad x(t) = -1 + t$$

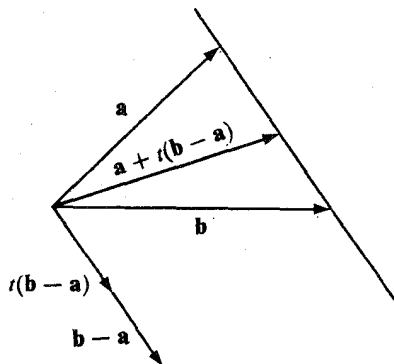
قبل از ادامه بحث، متذکر می‌شویم که هر بردار c به صورت $c = \lambda a + \mu b$ ، که در آن $\lambda + \mu = 1$ ، روی خطی است که از a و b می‌گذرد. زیرا،

$$c = (1 - \mu)a + \mu b = a + \mu(b - a)$$

و لذا، c روی خطی است که از a و b می‌گذرد.



شکل ۱۶.۲



شکل ۱۶.۴

به عنوان مثال دیگری از روشهای برداری، ثابت می‌کنیم که قطرهای یک متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند.

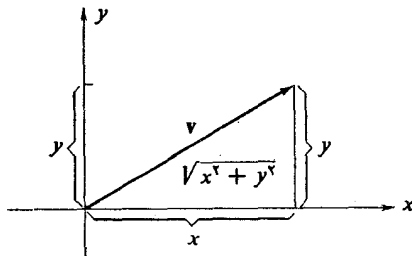
گیریم اضلاع مجاور متوازی‌الاضلاع با بردارهای a و b آن طور که در شکل ۱۶.۲ می‌بینید، نشان داده شده باشند. ابتدا برداری را که نقطه انتهایی اش وسط پاره خط PQ است به دست می‌آوریم. می‌دانیم که $a - b$ موازی پاره خط جهت دار از P به Q است و بنا براین، $(b - a)/2$ موازی پاره خط جهت دار از P به وسط PQ است. لذا، بردار $a + (b - a)/2 = (1/2)a + (1/2)b$ در وسط PQ ختم می‌شود.

سپس، برداری را که انتهایش وسط پاره خط OR است به دست می‌آوریم. می‌دانیم که $a + b$ در R ختم می‌شود، لذا نقطه انتهایی $(a + b)/2$ وسط OR است. چون می‌دانیم که نقطه انتهایی بردار $(1/2)a + (1/2)b$ هم وسط PQ است و هم وسط OR ، بنا براین PQ و OR یکدیگر را نصف می‌کنند.

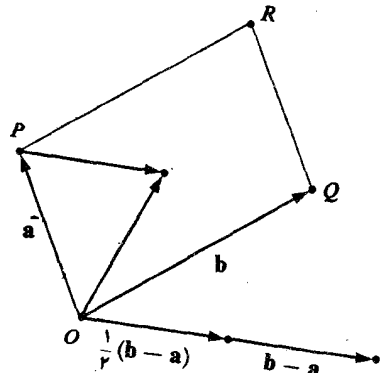
بردار در فضا هم طول دارد و هم جهت. بحث کاملی درباره طول و مفاهیم وابسته به آن در فصل ششم عرضه خواهد شد. لکن در حال حاضر، ارائه فرمولی جهت محاسبه طول به هیچ وجه مشکل نیست.

گیریم $v = xi + yj$ برداری در R^2 باشد. در این صورت با استفاده از قضیه فیثاغورث (ر.ک. شکل ۱۷.۲)، $\sqrt{x^2 + y^2}$ طول v است. برای مثال، طول بردار $3i + 4j$ برابر 5 است. فرمول طول یک بردار متعلق به R^2 در تمرین ۶ داده شده است. بردارهایی که به طور هندسی تعریف شده‌اند و آنها را در این بخش مورد بحث قرار داده‌ایم، در فیزیک و مهندسی مورد استفاده بسیارند. بسیاری از کمیت‌های فیزیکی، مانند نیرو،

گشتاور زاویه‌ای، سرعت، و شتاب، به طور خیلی طبیعی با بردارهایی از این نوع توصیف شده‌اند. برای مثال، اگر نیروی \vec{f} روی جسم مفروضی اثر کند، طول بردار \vec{f} ، اندازه نیرو است و جهت نیرو همان جهت \vec{f} می‌باشد. وقتی چند نیرو بر جسمی وارد شوند، نیروی برآیند وارد بر جسم همان حاصلجمع برداری نیروهاست.



شکل ۱۷.۲

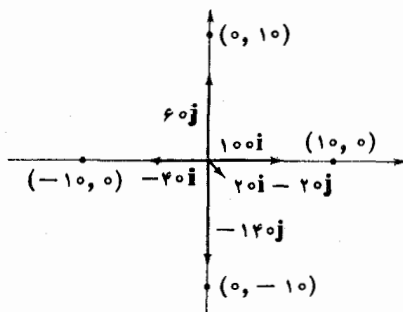
شکل ۱۶.۲ $a + \frac{1}{2}(b-a) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$

مثال ۳ چهار نفر در یک مسابقه طناب کشی شرکت می‌کنند. این چهار نفر روی دایره‌ای به شعاع ۳ متر در فواصل یکسان قرار می‌گیرند. چهار طناب، به یک حلقه فلزی که در مرکز دایره قرار دارد، گره زده شده‌اند و به هر نفر یک طناب داده شده است. اگر این افراد، بترتیب (در جهت خلاف عقربه‌های ساعت) نیروهای ۵۰، ۶۰، ۴۰ و ۷۰ کیلوگرمی وارد کنند، برآیند نیروهای وارد به حلقه چقدر است؟

برای حل این مسئله، دستگاه مختصاتی را که مبدأ آن مرکز دایره است در نظر می‌گیریم. همان طور که در شکل ۱۸.۲ می‌بینید، این افراد در مکانهای $(3, 0)$ ، $(0, 3)$ ، $(-3, 0)$ ، و $(0, -3)$ قرار گرفته‌اند.

فردی که در مکان $(3, 0)$ است یک نیروی ۵۰ کیلوگرمی در جهت مثبت محور x ها وارد می‌کند. این نیرو را می‌توان به صورت بردار $50\hat{i}$ در نظر گرفت. فردی که در مکان $(0, 3)$ قرار دارد، نیروی $60\hat{j}$ را وارد می‌کند و دو نفر دیگر بترتیب نیروهای $40\hat{i} - 70\hat{j}$ را وارد می‌نمایند. نیروی برآیند، حاصلجمع برداری این چهار بردار، یعنی $10\hat{i} - 10\hat{j}$ است و اندازه آن طول این بردار، یعنی $10\sqrt{2}$ می‌باشد. جهت بردار برآیند در امتداد محمل بردار $\hat{j} - \hat{i}$ است.

در سراسر این بخش، بردارها را به عنوان پاره خطهای جهت داری که از مبدأ شروع می‌شوند در نظر گرفتیم. در بسیاری از کاربردها، بخصوص در فیزیک، مفهوم بردار آزاد بسیار مفید است. بردار آزاد، چیزی نیست جز پاره خط جهت داری در فضا. دو بردار آزاد مساوی‌اند اگر همجهت و همطول باشند. با بردارهای آزاد می‌توانیم همانند بردارهایی که تا کنون داشته‌ایم عمل کنیم. فعلاً اشاره‌ای گذرا به این نکته می‌کنیم، ولی ایده مزبور در زمینه‌های



شکل ۱۸-۲

دیگر، ارائه تغییر هندسی طبیعی تری از بردارها را می‌سازد.

تمرینات

۱. بردارهای زیر را رسم کنید.

(الف) $2i + j - k$ (ب) $i + j + k$ (ج) $-i + j + k$ (د) $2i - j + k$

۲. مکعب محصور بین شش صفحه $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, و $z = 1$ را در نظر بگیرید. بردارهایی را بیابید که نقاط انتهایی آنها رئوس این مکعب باشند.

۳. معادله پارامتری خطی را که از نقطه انتهایی i در امتداد $i + j + k$ می‌گذرد، بیابید. نقطه تلاقی این خط با صفحه $x = 0$ و با صفحه $y = 2$ کدام است؟

۴. معادله خطی را بیابید که از نقاط $(-1, -1, 0)$ و $(2, 1, 2)$ می‌گذرد. نقطه تلاقی این خط با صفحه $x = 0$ کدام است؟

۵. نشان دهید که

$$x(t) = \alpha + \lambda t$$

$$y(t) = \beta + \mu t$$

$$z(t) = \gamma + \nu t$$

معادلات یک خط راست در فضا هستند.

۶. با استفاده از قضیه فیثاغورث، نشان دهید که طول بردار $xi + yj + zk$ برابر $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ است.

۷. کدام نقطه از پاره خط واصل $(-1, -1, 0)$ به $(1, 1, 1)$ ، به مبداء نزدیکتر است؟

۸. اگر سه بردار x , y , و z در یک صفحه نباشند، نشان دهید که $x + (y + z)$ قطر متوازی‌السطوحی است که اضلاعش x , y , و z هستند. قانون انجمنی $x + (y + z) = (x + y) + z$ را به طور هندسی تعبیر کنید.

۹. قوانین

$$(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$$

$$\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$$

$$\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$$

را که در آنها، a و b بردار و λ و μ اسکالر هستند، به طور هندسی تعبیر کنید.

۱۰. نشان دهید که نقاط انتهایی بردارهای x ، y ، و z روی یک خط هستند اگر و فقط اگر اسکلرهای λ ، μ ، و γ وجود داشته باشند به طوری که لااقل یکی از آنها صفر نباشد و

$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0$$

$$\lambda + \mu + \nu = 0$$

۱۱. اگر a و b بردارهایی ناهمخط باشند، نشان دهید که $a + b$ ، $-a + b$ ، $a - b$ ، و $-a - b$ رئوس یک متوازی الاضلاع هستند.

۱۲. نشان دهید که شکل حاصل از وصل کردن اواسط اضلاع مجاور یک متوازی الاضلاع، متوازی الاضلاع است.

۱۳. نقطه وسط پاره خط واصل بین هر زوج از نقاط زیر را بیابید و آنها را نمایش دهید.

(الف) $(0, 0, 0)$ و $(1, 1, 1)$ ؛

(ب) $(1, 1, 1)$ و $(1, 1, -1)$ ؛

(ج) $(1, 1, 2)$ و $(-1, -1, 0)$.

۱۴. نقطه‌ای که روی پاره خط واصل (x_1, y_1, z_1) به (x_2, y_2, z_2) قرار دارد و فاصله‌اش از نقطه (x_1, y_1, z_1) ، برابر $1/3$ طول پاره خط مذکور است، کدام است؟

۱۵. اگر $I_1(t)$ و $I_2(t)$ معادلات پارامتری دوخط باشند، نشان دهید که این خطوط موازی‌اند اگر و فقط اگر مقادیر ثابت λ_1 و λ_2 وجود داشته باشند به طوری که حداقل یکی از آنها صفر نباشد و $\lambda_1 I_1(t) + \lambda_2 I_2(t)$ بردار ثابتی باشد.

۱۶. سه نیرو بر جسمی اثر می‌کنند. مکان جسم در مبدأ است. یک نیرو به اندازه ۱۰ کیلوگرم در جهت مثبت محور x هاست. یک نیروی دیگر به اندازه ۱۵ کیلوگرم در جهت مثبت محور y ها اثر می‌کند، و سومی به اندازه ۲۰ کیلوگرم در جهت منفی محور x هاست. نیروی برآیند وارد بر جسم را بیابید.

۱۷. چهار جسم در چهار گوشه مربع یک، یعنی در $(0, 0)$ ، $(0, 1)$ ، $(1, 1)$ ، و $(1, 0)$ قرار دارند. جرم آنها، بترتیب، ۱، ۲، ۳، و ۴ است. مرکز جرم دستگاه را بیابید.

۳ ماتریسها

ماتریس را به عنوان آرایه‌ای مستطیلی از اعداد حقیقی یا مختلط تعریف می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

اعداد داخل آرایه را عناصر یا درایه‌های ماتریس می‌نامیم. زیرنویسهای i و j عنصر a_{ij} ، برای مشخص کردن سطر و ستونی که a_{ij} در آنها قرار دارد، به کار می‌روند.

برای مثال

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 13 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

یک ماتریس است. عنصر a_{33} در سطر دوم و ستون سوم قرار دارد و در این مثال، این عنصر ۲ می‌باشد. درایه (۳، ۳) صفر است.

ماتریسی را که دارای m سطر و n ستون باشد، ماتریس $m \times n$ یا ماتریس m در n می‌نامیم. وقتی که $m = n$ ، یعنی، وقتی که ماتریس مربعی است فقط گوییم که ماتریس

از مرتبه n است. برای مثال $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ یک ماتریس 3×2 است، حال آنکه

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$
 یک ماتریس 2×3 می‌باشد.

در جدول‌بندی داده‌ها، وقتی که تعداد آنها زیاد است، موضوع استفاده از ماتریسها به طور طبیعی پیش می‌آید. برای مثال، فاصله‌های بین شهرهای تهران، اصفهان، شیراز، و مشهد را می‌توان به صورت یک ماتریس جدول‌بندی کرد:

	اصفهان	تهران	شیراز	مشهد
اصفهان	0	414	481	1338
تهران	414	0	895	924
شیراز	481	895	0	1786
مشهد	1338	924	1786	0

در این مثال، a_{12} فاصله اصفهان تا تهران، a_{13} فاصله اصفهان تا شیراز، و a_{44} فاصله مشهد تا تهران است. در نظر داشته باشید که در این مثال $a_{ij} = a_{ji}$ و $a_{ii} = 0$.

اغلب، نماد فوق را به صورت $[a_{ij}]_{(mn)}$ خلاصه می‌کنیم. زیرنویس $m \times n$ اندازه ماتریس را نشان می‌دهد و کل نماد به معنی یک ماتریس $m \times n$ است که درایه (ج، i) آن a_{ij} است. برای مثال، با این نماد، $[ij]_{(23)}$ یعنی ماتریس 2×3 ای که در آن حاصلضرب

$$[ij]_{(23)} \text{ در مکان } (i \text{ و } j) \text{ است، یا } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

دو ماتریس فقط و فقط وقتی مساوی اند که دارای مرتبه یکسان باشند، و به ازای هر i ، و هر j ، درایه $(i \text{ و } j)$ آنها یکی باشد. به عبارت دیگر، $[a_{ij}]_{(mn)} = [b_{ij}]_{(pq)}$ اگر و فقط اگر $n = q$ ، $m = p$ و به ازای هر i و هر j ، $a_{ij} = b_{ij}$.

اگر $A = [a_{ij}]_{(mn)}$ و $B = [b_{ij}]_{(mn)}$ دو ماتریس $m \times n$ باشند، $A + B$ را به صورت $[a_{ij} + b_{ij}]_{(mn)}$ تعریف می‌کنیم. برای مثال:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 13 & 7 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -3 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -4 & 3 \\ 0 & \frac{25}{2} & 8 \\ 10 & 10 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 4 & \frac{22}{3} \end{bmatrix}$$

ماتریس $-A$ را به صورت $-A = [-a_{ij}]_{(mn)}$ تعریف می‌کنیم. به عنوان مثال:

$$-\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

به عبارت دیگر، برای جمع کردن ماتریسها، درایه‌های متناظر را با هم جمع می‌کنیم. برای به دست آوردن قرینه یک ماتریس، قرینه درایه‌های مربوطه را به دست می‌آوریم. مضرب اسکالر ماتریس A با ضریب اسکالر α را که به صورت αA نوشته می‌شود، با $\alpha A = [\alpha a_{ij}]_{(mn)}$ تعریف می‌کنیم. مثلاً،

$$2 \begin{bmatrix} 7 & 0 & 7 \\ -8 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 0 & 14 \\ -16 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

این اعمال را با یک مثال ساده تشریح می‌کنیم. دانشگاهی دارای دو دانشکده است. تعداد دانشجویان دختر و پسر دوره لیسانس و فوق لیسانس، در ماتریسهای زیر جدولبندی شده است:

لیسانس	فوق لیسانس	لیسانس	فوق لیسانس
$A_1 =$ پسر	$\begin{bmatrix} 80 & 30 \\ 60 & 20 \end{bmatrix}$	$A_2 =$ پسر	$\begin{bmatrix} 200 & 90 \\ 160 & 70 \end{bmatrix}$
دختر		دختر	

لذا، برای مثال، ۸۰ دانشجوی پسر در دوره لیسانس در دانشکده اول وجود دارد، و ۷۰ دانشجوی دختر در سطح فوق لیسانس در دانشکده دوم. حاصل جمع دو ماتریس

$$A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} 280 & 120 \\ 220 & 90 \end{bmatrix}$$

تعداد دانشجویان در هر دسته را برای کل دانشگاه می‌دهد. بنابراین، ۱۲۰ دانشجوی

پسر وجود دارند که دانشجوی فوق لیسانس نیز می باشند.
جمع ماتریسها و ضرب اسکالر آنها در همان قوانین جمع، و ضرب اسکالر اعداد حقیقی و بردارها صدق می کنند.

$$\text{گزاره ۱} \quad (A + B) + C = A + (B + C).$$

اثبات گیریم

$$C = [c_{ij}]_{(mn)}, B = [b_{ij}]_{(mn)}, A = [a_{ij}]_{(mn)}$$

$$(A + B) + C = [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}]_{(mn)} \quad \text{حال آنکه}$$

$$A + (B + C) = [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})]_{(mn)}$$

$$\text{ولی، برای همه اعداد حقیقی، } (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}),$$

$$\text{بنابراین } (A + B) + C = A + (B + C).$$

قوانین دیگر نیز، اثبات مشابهی دارند.

$$\text{گزاره ۲} \quad A + B = B + A$$

گزاره ۳ $A + (-A) = -A + A = 0$ ، که در آن ۰ نشان دهنده ماتریسی هم مرتبه با A است که همه درایه هایش صفرند.

$$\text{گزاره ۴} \quad A + 0 = 0 + A = A$$

گزاره ۵

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$$

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$$

$$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$$

$$1A = A$$

بر طبق تعریفی که در بخش ۱.۲ عرضه شد، ماتریس $1 \times n$ یک بردار ستونی است و ماتریس $n \times 1$ یک بردار سطری.

تمرینات

۱. ماتریسهای زیر را به صورت آرایه ماتریسی بنویسید.

$$[i+j]_{(22)} \quad (\text{الف}) \quad [i+j^2]_{(22)} \quad (\text{ب})$$

$$[2i+3j]_{(33)} \quad (\text{د}) \quad [i^2+j^2]_{(22)} \quad (\text{ج})$$

۲. عبارات زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 4 & 8 \\ 5 & -3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 9 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

۳. فرض کنید X, A, B ، و C ماتریسهای $m \times n$ باشند. معادله

$$(X + A) + (B - C) = 2X + 4A$$

را نسبت به X و بر حسب A, B ، و C حل کنید.

۴. قوانین جمع ماتریسها و ضرب اسکالر آنها (گزاره‌های ۲-۵) را، که در متن اثبات نشدند، ثابت کنید.

۵. اگر A, B, X ، و Y ماتریسهای $m \times n$ باشند، دستگاه معادلات

$$2X + 3Y = A$$

$$X + 2Y = B$$

را حل کنید و X و Y را بر حسب A و B بیابید.

۶. نشان دهید که ماتریسهای 2×2 ای مانند X, Y ، و Z ، که لااقل یکی از آنها صفر نیست، وجود دارند که در معادلات زیر صدق می‌کنند:

$$a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z = 0$$

$$a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z = 0$$

در این معادلات a_{ij} ها اعداد حقیقی دلخواه‌اند.

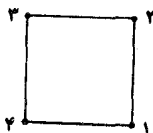
۷. چند ماتریس 3×2 وجود دارند که همه درایه‌هایشان ۰ یا ۱ است؟

۸. برای ماتریس 2×2 ای مانند A ، نشان دهید که اعداد a, b, c ، و d وجود دارند به طوری که

$$A = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$A = a \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

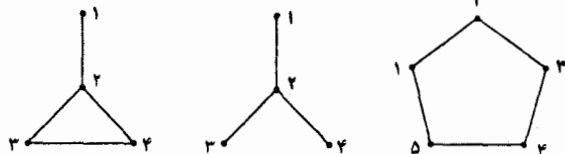
۹. اضلاع مربع زیر به طول واحدند.



با این نمادگذاری، فرض کنید a_{ij} فاصله بین i و j باشد. ماتریس فواصل، $A = [a_{ij}]_{(۴۴)}$ را تشکیل دهید.

۱۰. چهار نقطه از صفحه با $P_1 = (1, 1)$ ، $P_2 = (0, 2)$ ، $P_3 = (-1, 0)$ و $P_4 = (0, -1)$ داده شده‌اند. ماتریس A را، که درایه (i, j) آن فاصله P_i تا P_j است تشکیل دهید.

۱۱. نگار، مجموعه‌ای است از نقاطی که با خطوط معینی به هم وصل شده‌اند. اشکال زیر مثالهایی از نگار هستند.



نقاط نگار را اغلب رأس می‌نامند. به نگاری که دارای k رأس باشد، ماتریس $k \times k$ ای مانند A نسبت می‌دهیم که آن را ماتریس برخورد نگار گوئیم. درایه‌های a_{ij} ماتریس طبق این قاعده داده می‌شوند که $a_{ij} = 0$ اگر i و j به هم وصل نباشد، و $a_{ij} = 1$ اگر i به j وصل باشد.

لذا، در مورد نگار اول، ماتریس برخورد عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

توجه کنید که طبق قرارداد، $a_{ii} = 0$. ماتریس برخورد دونگار دیگر را بیابید.

۱۲. فرض کنید A ، B ، C ، و D چهار واحد طول باشند. ماتریس زیر یک جدول تبدیل واحد است.

$$\begin{array}{c|cccc} & A & B & C & D \\ \hline A & 1 & 3 & 6 & 24 \\ B & \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8 \\ C & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ D & \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{array}$$

بنابراین، یک واحد از A شش واحد از C است، یک واحد از B هشت واحد از D است، و یک واحد از C نصف واحد از B است. این جدول را به عنوان یک ماتریس در نظر بگیرید و شرح دهید که چرا $a_{ij} a_{jk} = a_{ik}$.

۴ ضرب ماتریسها

علاوه بر اعمال جمع و ضرب اسکالری که در مورد ماتریسها تعریف شد، عمل جبری سومی بنام ضرب ماتریسی وجود دارد که اغلب با آن روبرو می‌شویم.

گیریم $A = [a_{ij}]_{(mn)}$ یک ماتریس $m \times n$ و $B = [b_{ij}]_{(np)}$ یک ماتریس $n \times p$ باشد. حاصلضرب A و B ، ماتریس $m \times p$ ای مانند AB است که به صورت

$$AB = \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right]_{(mp)}$$

تعریف می‌شود.

در حالت 2×2 ، این تعریف به صورت واضحتری درمی‌آید:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

توجه داریم که جهت یافتن درایه (i, k) ماتریس حاصلضرب، در طول سطر i ام ماتریس اول و در عمق ستون k ام ماتریس دوم پیش می‌رویم.

$$i \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{1k} & b_{2k} & \cdots & b_{nk} \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

برای مثال،

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 4 + 1 \times 3 + (-2) \times 1 & 3 \times 7 + 1 \times 0 + (-2) \times 2 \\ 6 \times 4 + 3 \times 3 + 4 \times 1 & 6 \times 7 + 3 \times 0 + 4 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 17 \\ 37 & 50 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times (-1) + 0 \times (-2) + 7 \times 0 & 1 \times 3 + 0 \times 1 + 7 \times 2 & 1 \times 7 + 0 \times 6 + 7 \times 8 \\ 0 \times (-1) + 3 \times (-2) + 1 \times 0 & 0 \times 3 + 3 \times 1 + 1 \times 2 & 0 \times 7 + 3 \times 6 + 1 \times 8 \\ 2 \times (-1) + 4 \times (-2) + 6 \times 0 & 2 \times 3 + 4 \times 1 + 6 \times 2 & 2 \times 7 + 4 \times 6 + 6 \times 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 17 & 63 \\ -6 & 5 & 26 \\ -10 & 22 & 86 \end{bmatrix}$$

در باره تعداد سطرها و ستونهای ماتریسهای A و B ، در تشکیل ماتریس حاصلضرب آنها، دو موضوع ارزش به خاطر سپردن دارند. اول، به منظور این که ماتریس حاصلضرب AB تعریف شود باید تعداد ستونهای A برابر با تعداد سطرهای B باشد. دوم، تعداد سطرهای حاصلضرب AB با تعداد سطرهای A و تعداد ستونهای B برابر است.

مثال زیر نشان می‌دهد که چگونه ضرب ماتریسها ممکن است در یک مبحث زیست-شناسی پیش‌آید.

مثال ۱ در یک ناحیه، دو نوع جانور گوشتخوار C_1 و C_2 و دو نوع جانور گیاهخوار H_1 و H_2 که جانوران گوشتخوار از آنها تغذیه می‌کنند، وجود دارد. گیاهخواران از سه نوع گیاه P_1 ، P_2 و P_3 تغذیه می‌کنند. ماتریس زیر مقدار گیاه از هر نوع را که یک گیاهخوار متوسط در یک روز می‌خورد، برحسب گرم مشخص می‌کند.

$$\begin{matrix} & P_1 & P_2 & P_3 \\ \begin{matrix} H_1 \\ H_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 200 & 350 & 150 \\ 300 & 150 & 200 \end{bmatrix} \end{matrix} = A$$

پس، یک عضو نوعی H_2 مقدار ۱۵۰ گرم از P_2 را در یک روز مصرف می‌کند. ماتریس دیگری تعداد گیاهخوارانی را که یک گوشتخوار متوسط در یک روز می‌خورد، مشخص می‌نماید.

$$\begin{matrix} & H_1 & H_2 \\ \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix} = B$$

لذا، یک عضو متوسط C_2 ، چهار عضو از H_1 و دو عضو از H_2 را در یک روز می‌خورد.

می‌خواهیم تعیین‌کنیم که هرگوشتخوار چند گرم از هر نوع گیاه را به طور غیرمستقیم در یک روز مصرف می‌کند.

برای مثال، یک عضو از C_1 ، چند گرم از P_1 را به طور غیرمستقیم مصرف می‌کند؟ اولاً، یک عضو C_1 ، سه عضو H_1 را می‌خورد. هر عضو H_1 ، ۲۰۰ گرم از P_1 را می‌خورد. لذا، با خوردن اعضای H_1 ، یک عضو از C_1 به طور غیرمستقیم 3×200 گرم از P_1 را مصرف می‌کند. همچنین یک عضو C_1 ، یک عضو از H_2 را می‌خورد و این دومی، ۳۰۰ گرم از P_1 را. پس از این منبع، یک عضو C_1 به طور غیرمستقیم 1×300 گرم از P_1 را مصرف می‌کند. پس، رویهم‌رفته یک عضو از C_1 ، $3 \times 200 + 1 \times 300$ گرم از P_1 را به طور غیرمستقیم مصرف می‌کند. ملاحظه می‌کنیم که این عدد همان درایه (۱، ۱) ماتریس حاصلضرب BA است. همین‌طور، درایه (۱، ۲) آن مقداری از P_2 برحسب گرم است که یک عضو از C_1 به طور غیرمستقیم می‌خورد، و به همین ترتیب.

حاصل ضرب BA را حساب می‌کنیم

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 & 350 & 150 \\ 300 & 150 & 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 900 & 1200 & 650 \\ 1400 & 1700 & 1000 \end{bmatrix}$$

از اینجا، اطلاعات مطلوب را می‌توانیم بخوانیم. برای مثال، هر عضو از C به طور غیرمستقیم ۱۰۰۰ گرم از P را مصرف می‌کند.

چند قانون جبری مربوط به ضرب ماتریسها وجود دارد که اینک آنها را بیان می‌کنیم.

گزاره ۱ اگر A یک ماتریس $m \times n$ ، B یک ماتریس $n \times p$ و C یک ماتریس $p \times q$ باشد، آنگاه $(AB)C = A(BC)$. (قانون انجمنی در مورد ضرب ماتریسها).

اثبات گیریم

$$C = [c_{kl}]_{(pq)}, B = [b_{jk}]_{(np)}, A = [a_{ij}]_{(mn)}$$

در این صورت

$$AB = \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right]_{(mp)}$$

$$\begin{aligned} (AB)(C) &= \left[\sum_{k=1}^p \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right) c_{kl} \right]_{(mq)} \\ &= \left[\sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} c_{kl} \right]_{(mq)} \end{aligned}$$

$$BC = \left[\sum_{k=1}^p b_{jk} c_{kl} \right]_{(nq)}$$

$$\begin{aligned} A(BC) &= \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} \left(\sum_{k=1}^p b_{jk} c_{kl} \right) \right]_{(mq)} \\ &= \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p a_{ij} b_{jk} c_{kl} \right]_{(mq)} \end{aligned}$$

● چون $(AB)C = A(BC)$ داریم $\sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} c_{kl} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p a_{ij} b_{jk} c_{kl}$ مثلاً،

$$\begin{aligned} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 11 & 22 & 11 \\ 3 & -4 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -6 & -3 \\ 6 & 14 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 11 & 22 & 11 \\ 3 & -4 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

همچنین می‌توانیم قوانین توزیعپذیری را در مورد ضرب ماتریسها ثابت کنیم.

گزاره ۲ $A(B + C) = AB + AC$ و $(A + B)C = AC + BC$ اثبات گیریم

$$C = [c_{jk}]_{(np)}, B = [b_{jk}]_{(np)}, A = [a_{ij}]_{(mn)}$$

در این صورت

$$B + C = [b_{jk} + c_{jk}]_{(np)}$$

$$A(B + C) = \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} (b_{jk} + c_{jk}) \right]_{(mp)}$$

$$AC = \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} c_{jk} \right]_{(mp)} \text{ و } AB = \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right]_{(mp)}$$

$$AB + AC = \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} + \sum_{j=1}^n a_{ij} c_{jk} \right]_{(mp)}$$

چون $A(B + C) = AB + AC$ داریم $\sum_{j=1}^n a_{ij} (b_{jk} + c_{jk}) = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} + \sum_{j=1}^n a_{ij} c_{jk}$ اثبات قانون دیگر توزیعپذیری را به عنوان تمرین به‌عهده خواننده می‌گذاریم. ●

دو قانون اخیر نشان می‌دهند که ضرب ماتریسها تا حدی مانند ضرب اسکارها رفتار می‌کند. معهذا تفاوت‌های بسیاری بین آنها وجود دارد.

مثلاً، در حالت کلی چنین نیست که $AB = BA$. اگر A را یک ماتریس $m \times n$ و B را یک ماتریس $n \times p$ بگیریم، این مطلب بسادگی دیده می‌شود. برای این که BA تعریف شود، باید داشته باشیم $m = p$. لذا، AB را می‌توان تعریف کرد ولی احتمالاً BA را نمی‌توان. بعلاوه، حتی اگر A و B هر دو ماتریس مربعی با مرتبه n باشند، که در این حالت AB و BA هر دو تعریف شده‌اند، باز هم $AB = BA$ لزوماً برقرار نیست. برای مثال

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$$

به زبان ریاضی می‌گوییم که در حالت کلی ضرب ماتریسها غیرجابجایی است. در حالتی که AB و BA هر دو تعریف شده باشند و $AB = BA$ ، می‌گوییم که A و B جابجا می‌شوند.

مثال زیر، به صورتی تجربی، نشان می‌دهد که چرا در حالت کلی ماتریسها جابجا نمی‌شوند.

مثال ۲ سه لوله آزمایش با اندازه‌های یکسان، روی یک میز قرار دارند. مقدار آب داخل لوله‌های آزمایش با بردار $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ داده شده است. لذا، در لوله اول x_1 واحد

✦

از آب موجود است و به همین ترتیب.

یک عمل دومرحله‌ای روی دو لوله آزمایش انجام می‌شود.

(۱) مقدار آب را در دو لوله اولی تنظیم می‌کنیم به طوری که سطح آب در این دو لوله یکسان شود. سومی را به حال خود می‌گذاریم.

(۲) مقدار آب را در لوله‌های دوم و سوم تنظیم می‌کنیم به طوری که سطح آب در هر دو لوله یکسان شود. لوله اول را به حال خود می‌گذاریم.

پس از اینکه مرحله اول انجام شد، سطح آب در لوله‌های آزمایش با بردار

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ x_3 \end{bmatrix}$$

مشخص می‌شود. اثر انجام مرحله اول عمل روی بردار \mathbf{v} را می‌توان

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

با ضرب \mathbf{v} در یک ماتریس مناسب به دست آورد. درحقیقت، اگر

آنگاه $A_1 \mathbf{v}$ بردار سطح آب پس از انجام مرحله اول است. به عبارت دیگر، ضرب A_1 در \mathbf{v} به همان صورتی بر \mathbf{v} اثر می‌کند که انجام مرحله اول بر سطح آب لوله‌ها.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

مرحله دوم را نیز می‌توان با ضرب ماتریسی بیان کرد. گیریم

این صورت ضرب A_2 در بردار سطح آب، دقیقاً همان تأثیری را بر این بردار دارد که انجام مرحله دوم روی سطح آب لوله‌ها. لذا، بردار سطح آب، پس از انجام مرحله اول، $A_1 \mathbf{v}$ و پس از انجام هر دو مرحله $A_2 A_1 \mathbf{v}$ می‌باشد. با محاسبه حاصلضرب ماتریسی، داریم

$$A_2 A_1 \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

بنابراین، تأثیر کل عمل روی بردار سطح آب را

می توان از ضرب آن بردار در $A_2 A_1$ به دست آورد.
 لکن، اکنون فرض می کنیم این مراحل بترتیب عکس انجام شوند. در این صورت بردار سطح آب لوله ها،

$$A_1 A_2 \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

است. مشاهده می کنیم که $A_1 A_2 \neq A_2 A_1$. این بدان معنی است که اگر ترتیب انجام مراحل تفاوت کند، نتیجه نیز فرق خواهد کرد. به عنوان یک مثال مشخص، فرض می کنیم

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}, \text{ در این صورت } A_2 A_1 \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ ولی } A_1 A_2 \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

حالت غیرجابجایی بودن تعبیر ملموسی دارد.
 مورد برجسته دیگری که در آن ضرب ماتریسها متفاوت با ضرب اسکالر است، نقض قانون حذف است: ممکن است داشته باشیم $AB = AC$ و $A \neq 0$ بدون اینکه $B = C$.
 به عنوان مثال،

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

همچنین ممکن است داشته باشیم $AB = 0$ درحالی که $A \neq 0$ و $B \neq 0$. مثلاً

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نقض قانون حذف را با استفاده از دو مرحله مثال ۲ تشریح می کنیم. فرض می کنیم

سطح اولیه آب با $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}$ داده شده باشد. پس با انجام مراحل ۱ و ۲ حاصل می شود

$$A_2 A_1 \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}. \text{ اکنون فرض می کنیم سطح اولیه آب با } \mathbf{v}' = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ داده شده است. در}$$

این صورت $A_2 A_1 \mathbf{v}' = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$. لذا، با هریک از این دو توزیع اولیه، حاصل نهایی یکی

است. اگر این مطلب را به صورت حاصلضربهای ماتریسی بنویسیم، داریم $A_2 A_1 \mathbf{v} = A_2 A_1 \mathbf{v}'$ ولی $\mathbf{v} \neq \mathbf{v}'$. در این حالت توجه به این نکته جالب است که انجام مرحله اول، تأثیر یکسانی بر \mathbf{v} و \mathbf{v}' دارد.

تمرینات

۱. حاصلضربهای ماتریسی زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{array}{ll}
 \text{(الف)} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} & \text{(ب)} \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\
 \text{(ج)} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} & \text{(د)} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\
 \text{(ه)} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} & \text{(و)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

۲. اگر

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

ماتریسهای زیر را حساب کنید.

$$\begin{array}{ccccccc}
 AB - BA & (الف) AB & (ب) (AB)C & (ج) BC & (د) A(BC) & (ه) BA & (و) AB - BA \\
 CC & (ز) IA & (ح) AI & (ط) IB & (ی) BI & (ک) BD & (ل) DB & (م) CC
 \end{array}$$

$$\text{۳. ماتریس} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ را بیابید.}$$

۴. فرض کنید A و B دو ماتریس باشند. فرض کنید که AB و BA تعریف شده باشند و $AB = BA$. نشان دهید که A و B ماتریسهای مربعی با مرتبه یکسان هستند.

۵. اگر B یک ماتریس باشد، نشان دهید که $B \times 0 = 0 \times B = 0$.

۶. فرض کنید A یک ماتریس 2×2 و C یک ماتریس 4×4 باشد. فرض کنید B ماتریس دیگری باشد که برای آن حاصلضرب $(AB)C$ تعریف شده است. مرتبه B چیست؟

۷. قانون توزیعپذیری ضرب ماتریسها، $(A + B)C = AC + BC$ ، را ثابت کنید.

$$\text{۸. اگر} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{؛ } a, b, c, d \text{ را بیابید.}$$

۹. اگر B یک ماتریس 2×2 باشد به طوری که $B = 0$ ، $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ ، نشان دهید که

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix} \text{ اعداد } a \text{ و } b \text{ وجود دارند به طوری که}$$

۱۰. نشان دهید که ماتریس 2×2 ای مانند A فقط و فقط وقتی با ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

جابجا می شود که اعداد a و b وجود داشته باشند به طوری که $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$.

۱۱. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ ، یک بردار ستونی غیر صفر x بیاید به طوری که $AX = 0$.

یک بردار سطری غیر صفر y بیاید به طوری که $yA = 0$.

۱۲. اگر A و B دو ماتریس 2×2 باشند که حاصلجمع درایه های هرستون آنها برابر ۱ است، نشان دهید که حاصلجمع درایه های هرستون AB برابر ۱ می باشد.

۱۳. اگر X یک ماتریس 2×2 باشد به طوری که $X = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، نشان دهید که $X = 0$.

۱۴. در دانشکده ای، تعداد دانشجویان دوره لیسانس و فوق لیسانس، پسر و دختر، با ماتریس

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} \text{فوق لیسانس} \\ \text{لیسانس} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{پسر} \\ \text{دختر} \end{array} & \begin{bmatrix} 200 & 100 \\ 180 & 80 \end{bmatrix} \end{array}$$

داده شده است. بنابراین، برای مثال، ۱۰۰ نفر دانشجوی پسر فوق لیسانس وجود دارد. مخارج شهریه، منزل، و غذا برای دانشجویان دوره لیسانس و فوق لیسانس با ماتریس

$$B = \begin{array}{ccc} & \begin{array}{c} \text{غذا} \\ \text{منزل} \\ \text{شهریه} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{فوق لیسانس} \\ \text{لیسانس} \end{array} & \begin{bmatrix} 800 & 800 & 500 \\ 800 & 1000 & 800 \end{bmatrix} \end{array}$$

داده شده است. ماتریس AB را حساب کنید و توضیح دهید که درایه های AB چه معنی دارند.

۱۵. کارخانه داری سه محصول A ، B ، و C را در دو بازار M و N می فروشد. تعداد واحدهای فروخته شده هر محصول در هر بازار در یک سال معین با ماتریس

$$T = \begin{array}{ccc} & \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \\ \begin{array}{c} M \\ N \end{array} & \begin{bmatrix} 5000 & 2000 & 1500 \\ 2000 & 3000 & 1000 \end{bmatrix} \end{array}$$

داده شده است. ماتریسهای

$$S_2 = \begin{bmatrix} 180 \\ 350 \\ 250 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad S_1 = \begin{bmatrix} 200 \\ 400 \\ 300 \end{bmatrix}$$

بترتیب، قیمت فروش و قیمت تمام شده هر واحد از A ، B ، و C را می دهند. درایه های هر یک از ماتریسهای TS_1 ، TS_2 ، و $TS_1 - TS_2$ را تعبیر کنید.

۱۶. کارخانه داری که در مسئله قبلی توصیف شد، درمی یابد که پنج سال بعد فروش در بازار

M ، ۵۰٪ و در بازار N ، ۴۰٪ افزایش یافته است. ماتریس 2×2 ای مانند B تشکیل دهید به طوری که حاصلضرب ماتریسی BT ، تعداد واحد از هر محصول را که بعداً در هر بازار فروخته شده است، بدهد.

۱۷. فرض کنید A ، B ، و C ماتریسهای $n \times n$ باشند. اگر A با C ، و B با C جابجا شود، نشان دهید که AB با C جابجا می‌شود.

۱۸. فرض کنید A و B دو ماتریس 2×2 باشند. اگر A و B با $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ جابجا شوند، نشان دهید که A با B جابجا می‌شود.

۱۹. فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد و

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \left. \vphantom{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}} \right\} i$$

نمایشگر n -بردار ستونی باشد که همه مؤلفه‌هایش بجز مؤلفه i ام آن صفرند و مؤلفه i ام آن ۱ است. نشان دهید که Ae_i ستون i ام ماتریس A است.

۲۰. فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد. اگر به ازای هر بردار x ، $Ax = 0$ ، نشان دهید که $A = 0$. [راهنمایی: ر.ک. تمرین ۱۹.]

۵ ماتریسهای مربعی

ماتریسهای مربعی از مرتبه یکسان، خواصی دارند که سبب می‌شود موضوعات جالبی برای مطالعه باشند. برای مثال، فرض می‌کنیم A و B هر دو مربعی و از مرتبه یکسان باشند. آنگاه، همه حاصلضربهای AA ، BB ، AB ، و BA ، طبق تعریف بامعنی‌اند. همان‌طور که بعداً در این بخش خواهیم دید، می‌توانیم تواناها و چند جمله‌ایها را نیز در مورد ماتریسهای A و B تعریف کنیم.

ابتدا ماتریس همانی با مرتبه n را بررسی خواهیم کرد. این ماتریس همان نقشی را در ضرب ماتریسهای با مرتبه n دارد که ۱ در ضرب اعداد.

تابع دلتای کرونکر δ_{ij} را، به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{اگر } i = j$$

$$\delta_{ij} = 0 \quad \text{اگر } i \neq j$$

برای مثال، $\delta_{11} = 1$ ، $\delta_{22} = 1$ ، $\delta_{33} = 1$ ، $\delta_{45} = 0$ ،

با استفاده از این نماد، ماتریس I_n را به صورت $I_n = [\delta_{ij}]_{(nn)}$ ، که ماتریسی $n \times n$ است تعریف می‌کنیم. درایه‌های قطری این ماتریس ۱ هستند و درایه‌های غیرقطریش صفرند. برای مثال،

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس I_n را ماتریس همانی با مرتبه n گویند.

قضیه ۱ اگر A ماتریسی $n \times n$ باشد، $AI_n = I_n A = A$ اثبات گیریم $A = [a_{ij}]_{(nn)}$ در این صورت

$$AI_n = \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} \delta_{jk} \right]_{(nn)} = [a_{ij}]_{(nn)}$$

چون در حاصل جمع $\sum_{j=1}^n a_{ij} \delta_{jk}$ داریم $a_{ij} \delta_{jk} = 0$ مگر اینکه $j = k$ و در این صورت $a_{ij} \delta_{kk} = a_{ij}$ ؛ لذا، $AI_n = A$. به روشی مشابه، $I_n A = A$.

برای مثال،

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

اگر α اسکالر باشد، ماتریسی به صورت αI_n را ماتریس اسکالر گویند. این ماتریس را می‌توان به عنوان ماتریسی توصیف کرد که درایه‌های قطری آن همگی α ، و درایه‌های غیرقطریش همگی صفرند.

درکار با ماتریسها، مفهوم وارون ماتریس از اهمیت زیادی برخوردار است. اگر A ماتریسی $m \times m$ باشد و ماتریسی $m \times m$ مانند B وجود داشته باشد به طوری که $AB = BA = I_m$ ، A را وارون‌پذیر و B را وارون A می‌نامند.

با بیان این تعریف، اولین سؤالی که طبیعتاً پیش می‌آید، آن است که آیا یک ماتریس A می‌تواند دارای دو وارون متفاوت باشد؟ قضیه ۲ نشان می‌دهد که چنین چیزی ممکن نیست.

قضیه ۲ گیریم A ماتریسی $m \times m$ و B وارون A باشد. اگر C ماتریس دیگری باشد به طوری که $AC = CA = I_m$ ، آنگاه $C = B$.

اثبات بنا به فرض قضیه، می‌دانیم $AB = BA = I_m$ و $AC = CA = I_m$. در نتیجه $C = CI_m = C(AB) = (CA)B = I_mB = B$.

لذا، اگر ماتریسی دارای وارون باشد، فقط یک وارون دارد. اگر A دارای وارون باشد، آن را با A^{-1} نشان می‌دهیم و A را وارون‌پذیر می‌نامیم. برای مثال،

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -11 & -3 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} -11 & -3 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 11 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -11 & -3 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \text{ بنابراین}$$

در فصل مربوط به دترمینانها، شرطی لازم و کافی برای اینکه ماتریسی وارون داشته باشد خواهیم یافت. در اینجا فقط به ذکر چند مثال می پردازیم. ابتدا نشان می دهیم که چگونه از طریق حل دستگاههای معادلات خطی، وارون ماتریس به دست می آید.

مثال ۱ وارون $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ را، در صورت وجود، می یابیم. این ماتریس را A می نامیم. می خواهیم ماتریس B را بیابیم به طوری که $AB = BA = I_2$. گیریم $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. چون $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ دستگاه معادلات خطی زیر را برای a, b, c, d به دست می آوریم.

$$\begin{aligned} 3a + 5c &= 1 & 3b + 5d &= 0 \\ a + 2c &= 0 & b + 2d &= 1 \end{aligned}$$

با حل این دستگاه، به روش فصل اول، به دست می آوریم $a = 2, b = -5, c = -1, d = 3$. با قرار دادن این مقادیر عددی در B ، می توان ثابت کرد که $AB = BA = I_2$. لذا $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

حال یک مثال از ماتریسی می آوریم که وارون نداشته باشد.

مثال ۲ ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ وارون ندارد. برای مشاهده این مطلب، فرض کنیم $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ وارون A باشد. در این صورت $BA = I_2$ ولی

$$BA = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a+b \\ 0 & c+d \end{bmatrix}$$

چون درایه $(1, 1)$ ماتریس $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ برابر ۱ است، نمی توان B را طوری انتخاب کرد که $BA = I_2$. لذا A وارون ندارد.

ماتریسهایی را که وارون ندارند وارون ناپذیر یا منفرد گویند. در بخشهای بعد، روش اصولی تر و منظمتری را جهت تحقیق وارون پذیری یک

ماتریس و یافتن وارون آن عرضه می‌کنیم. همچنین خواهیم دید که وارون، در صورت وجود، وسیله ارزشمندی برای حل دستگاههای معادلات است.

توانهای یک ماتریس مربعی A به طریق معمولی تعریف می‌شوند: $A^1 = A$ ،
 $A^2 = AA$ ، $A^3 = AA^2$ ، ...، $A^n = AA^{n-1}$. بنا بر قانون انجمنی، همان A است
 که، بدون توجه به ترتیب انجام عمل ضرب، n بار در خودش ضرب شده است. مثلاً، اگر
 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، آنگاه $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. در
 این حالت، استقراء نشان خواهد داد که $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

مثال بعدی نشان می‌دهد که چگونه مسئله‌ای در مطالعه جمعیت حیوانات ممکن است
 ما را به استفاده از توانهای ماتریسها وادارد. برای سادگی، محدودیتهایی عددی قائل
 می‌شویم که ممکن است تا حدی غیر واقعی باشند، ولی بدون این محدودیتها نیز، این اصل
 اساسی در حالت کلی برقرار است.

مثال ۳ نوعی حیوان داریم که حداکثر چهار سال عمر می‌کند. این حیوان دوجنس نروماده
 دارد که نسبت جمعیت نرها به جمعیت ماده‌ها ثابت است. لذا از نرها صرف‌نظر می‌کنیم و
 فقط جمعیت ماده‌ها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. داده‌های زیر را داریم:

(۱) تعداد ماده‌ها در سنین ۱-۰، ۲-۱، ۳-۲، و ۴-۳، بترتیب، با اعداد
 n_1 ، n_2 ، n_3 ، و n_4 داده شده است. بنا بر این، تعداد ماده‌ها بین سنین ۱ و
 ۲ عبارت است از n_4 .

(۲) تعداد ماده‌هایی که در یک سال توسط یک ماده عادی در هر یک از
 گروههای سنی فوق به دنیا می‌آید بترتیب ۱/۱۰، ۱/۲، ۳/۴، و ۱/۴
 است. لذا، یک ماده بین سنین ۲ و ۳ به طور متوسط ۳/۴ بچه به دنیا
 می‌آورد.

(۳) احتمال اینکه ماده مفروضی از هر گروه سنی زننده بماند تا به گروه سنی
 بالاتر برسد، بترتیب ۴/۵، ۳/۴، ۱/۳، و ۰ است. لذا یک حیوان ماده
 بین سنین ۰ و ۱ دارای شانس ۴/۵ برای زنده ماندن به مدت یک سال
 دیگر است. به عبارت دیگر، یک سال بعد، $(4/5)n_1$ از اعضای گروه
 سنی اول هنوز زنده‌اند.

با استفاده از این داده‌ها می‌خواهیم جمعیت ماده‌ها را پس از یک سال، دو سال، و

$$\text{غیره پیش‌بینی کنیم. این را با بردار } P = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{bmatrix} \text{ نشان می‌دهیم.}$$

همچنین ماتریس

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

را در نظر می‌گیریم. ادعا می‌کنیم که جمعیت ماده‌ها در گروه‌های سنی متفاوت در یک سال بعد با بردار

$$TP = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10}n_1 + \frac{1}{2}n_2 + \frac{3}{4}n_3 + \frac{1}{4}n_4 \\ \frac{4}{5}n_1 \\ \frac{3}{4}n_2 \\ \frac{1}{3}n_3 \end{bmatrix}$$

معین می‌شود.

برای ملاحظه این مطلب، اول تعداد ماده‌های بین سنین ۵ و ۱ را در یک سال بعد حساب می‌کنیم. البته، این فقط تعداد ماده‌های متولد شده در یک سال است. حال n_1 ماده از گروه سنی اول وجود دارد و هر یک به طور متوسط $1/10$ بچه ماده تولید می‌کند. لذا، اولین گروه سنی رویهم‌رفته $n_1(1/10)$ ماده جدید تولید می‌کند. گروه سنی دوم، جمعاً $n_2(1/2)$ ، گروه سنی سوم $n_3(3/4)$ ، و گروه سنی چهارم $n_4(1/4)$ ماده جدید تولید می‌کند. در نتیجه، تعداد ماده‌های جدید، از جمع این چهار عدد به دست می‌آید و درحقیقت اولین درایه بردار فوق است.

درایه‌های دیگر حتی از این هم ساده‌ترند. به یاد آورید که پس از یک سال، $4/5$ ماده‌های گروه سنی اول زنده هستند. لذا، پس از یک سال تعداد ماده‌ها در گروه سنی دوم $n_1(4/5)$ است. بقیه اعداد به طریق مشابه به دست می‌آیند. بنابراین، بردار جمعیت پس از یک سال با فرمول TP داده می‌شود. پس از دو سال، این فرمول T^2P ، پس از سه سال، T^3P ، و غیره می‌باشد.

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1000 \\ 800 \\ 600 \\ 200 \end{bmatrix} \text{ با جالب توجه است که اگر جمعیت را ابتدا با } P_0 \text{ داده شده باشد، آنگاه}$$

$TP_0 = P_0$. یعنی، جمعیت از سالی به سال دیگر ثابت می‌ماند.

در اینجا چند جمله‌ایهای ماتریسی را نیز می‌توان بررسی کرد. اگر

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n$$

یک چند جمله‌ای باشد، $f(A)$ را به صورت $f(A) = \alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \dots + \alpha_n A^n$

تعریف می‌کنیم. لذا، مثلاً اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $f(x) = 1 + x + 2x^2$

$$f(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

اگر $f(x) = x^2 - 2x + 1$

$$f(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

یک ماتریس مربعی را ماتریس قطری گوئیم اگر همه درایه‌های غیر قطری آن صفر باشند. برای مثال، ماتریسهای زیر قطری هستند.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تمرینات

۱. اگر A ماتریسی $m \times n$ باشد، نشان دهید که $AI_n = A$ و $I_m A = A$.

۲. صحت هریک از تساویهای زیر را بررسی کنید.

$$\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -31 & -2 & 47 \\ 16 & 1 & -24 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -10 & 4 & 9 \\ 15 & -4 & -14 \\ -5 & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad (\text{د})$$

۳. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

A^2 و A^3 را حساب کنید. نشان دهید که A وارون پذیر است و $A^{-1} = A^2$.

۴. در هریک از حالات زیر $f(A)$ را حساب کنید.

$$f(x) = 1 + 3x + x^2 \text{ و } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ (الف)}$$

$$f(x) = x + x^2 \text{ و } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ (ب)}$$

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \text{ و } A = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \text{ (ج)}$$

$$f(x) = x^2 - x^2 - x + 1 \text{ و } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ (د)}$$

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n \text{ و } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (ه)}$$

۵. با استقراء یا روش دیگری، نشان دهید که

$$\begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & nx & ny + \frac{n(n-1)}{2} x^2 \\ 0 & 1 & nx \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۶. اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، نشان دهید که $A^3 = 5I_3$. ماتریس A^{-1} چیست؟

۷. همه ماتریسهای قطری A را بیابید که 3×3 هستند و $A^2 = I_3$.

۸. فرض کنید $P_t = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$ ، که در آن t یک عدد حقیقی است. نشان دهید

(الف) $P_t P_s = P_{t+s}$ ، (ب) $(P_t)^n = P_{nt}$ برای هر عدد صحیح n ،

(ج) $(P_t)^{-1} = P_{-t}$.

۹. اگر A ماتریسی $n \times n$ باشد و p و q اعداد صحیح مثبت باشند، ثابت کنید که

$$(A^p)^q = A^{pq} \text{ و } A^p A^q = A^{p+q}$$

۱۰. فرض کنید A یک ماتریس وارون پذیر $n \times n$ باشد. فرض کنید B ماتریسی

$n \times p$ باشد به طوری که $AB = 0$. نشان دهید که $B = 0$.

۱۱. با یافتن بردارهای غیر صفر x به طوری که $Ax = 0$ ، نشان دهید که ماتریسهای

زیر مفردند.

(الف) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 7 & -14 \end{bmatrix}$ ، (ب) $\begin{bmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

(توجه کنید که اگر X پیدا شود، تمرین ۱۰ وارون ناپذیری ماتریسها را تضمین می‌کند.)

۱۲. ثابت کنید که

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = (ad - bc) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

نشان دهید که $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ وارون پذیر است اگر و فقط اگر $ad - bc \neq 0$. چنانچه $ad - bc \neq 0$ ، فرمولی برای A^{-1} پیدا کنید.

۱۳. یک ماتریس $n \times n$ را ماتریس مربعی نیم جادویی گویند اگر حاصلجمع درایه‌های همه

سطرها و ستونهای آن یکسان باشد. برای مثال، یک ماتریس مربعی نیم-جادویی است.

فرض کنید A و B ماتریسهای مربعی نیم جادویی با اندازه یکسان باشند. نشان دهید که $aA + bB$ به ازای هر دو عدد حقیقی a و b ، ماتریسهای مربعی نیم-جادویی هستند.

۱۴. فرض کنید A و B دو ماتریس دلخواه $n \times n$ و C یک ماتریس وارون پذیر $n \times n$ باشند. ثابت کنید که $(C^{-1}(AB)C = (C^{-1}AC)(C^{-1}BC)$ و برای هر عدد صحیح مثبت k ، $C^{-1}(A^k)C = (C^{-1}AC)^k$.

۱۵. محصول معینی توسط دو شرکت رقیب A و B ، که بازار را به طور کامل در دست دارند، تولید می‌شود. هر سال شرکت A ، $1/3$ مشتریان خود را حفظ می‌کند و $2/3$ آنها به B روی می‌آورند. هر سال $1/2$ از مشتریان B برای B باقی می‌ماند و $1/2$ بقیه مشتری

A می‌شوند. این موضوع را با ماتریس $T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ بیان می‌کنیم. فرض کنید

$v_0 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ توزیع اولیه بازار را نشان دهد. (برای مثال، $a = \frac{2}{5}$ و $b = \frac{3}{5}$ ، اگر $\frac{2}{5}$ بازار در دست A و $\frac{3}{5}$ آن در دست B باشد.)

(الف) نشان دهید که $v_1 = Tv_0$ توزیع بازار در یک سال بعد است. نشان دهید که توزیع بازار پس از k سال، $v_k = T^k v_0$ است.

(ب) اگر $a = 3/7$ و $b = 4/7$ ، نشان دهید که بازار پایدار است یعنی، ازسالی به سال دیگر تغییر نمی‌کند.

(ج) اگر v_0 یک توزیع پایدار باشد، نشان دهید که $a = 3/7$ و $b = 4/7$.

(اگر v_0 پایدار باشد، $Tv_0 = v_0$. همچنین بنا به تعریف v_0 ، $a + b = 1$.)

۱۶. در مسئله قبلی، اگر $T = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ ، وضع پایدار را بیابید.

۱۷. دو مثال اخیر، مثالهایی از فرایندهای مارکوف هستند. یک اصل اساسی در مطالعه این فرایندها می‌گوید که آنها، صرف‌نظر از نقطه آغاز خود، سرانجام به سمت وضع پایدار میل می‌کنند. در اینجا طرح مختصری از اثبات این مطلب را برای تمرین ۱۵ ارائه می‌کنیم.

(الف) اگر $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ ، نشان دهید که $C^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(ب) نشان دهید که $C^{-1}TC = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $C^{-1}T^kC = \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{6}\right)^k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(ج) نشان دهید که $T^k = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{7} \left(-\frac{1}{6}\right)^k \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$.

(د) نشان دهید که تفاضل $T^k v_0$ و بردار $\begin{bmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \\ \frac{4}{7} \end{bmatrix}$ ، برداری است که قدرمطلق مؤلفه‌های

آن حداکثر $1/6^k$ است. (به یاد آورید که $a + b = 1$ و $a \geq 0$ و $b \geq 0$).

(ه) وقتی $k \rightarrow \infty$ ، نشان دهید که توزیع بازار به $(3/7, 4/7)$ میل می‌کند. (درحقیقت، پس از پنج سال تفاضل a و $3/7$ کمتر از 0.00013 است).

۱۸. سه ظرف به نامهای A ، B ، و C روی یک میز قرار دارند. در هر ظرف تعداد معینی

گوی جای داده شده است. فرض کنید $v_0 = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$ برداری باشد که تعداد گویها در هر

ظرف را نشان می‌دهد. لذا، n_1 گوی در A ، n_2 گوی در B ، و n_3 گوی در C وجود دارد. یک عمل تغییر مکان گویها از ظرفی به ظرف دیگر انجام می‌گیرد. در هر مرحله از عمل، سه کار انجام می‌شود:

(۱) $3/5$ گویهای A در A باقی می‌مانند، $1/5$ آنها به B و $1/5$ دیگر به C برده می‌شوند.

(۲) در همان زمان، $1/4$ گویهای B به A و $1/4$ آنها به C منتقل می‌شوند و $1/2$ بقیه در همان ظرف B باقی می‌مانند.

(۳) همزمان با آن، $1/5$ از گویهای C در A و $1/5$ آنها در B قرار می‌گیرند، و $3/5$ بقیه در C باقی می‌مانند.

(الف) یک ماتریس T بنویسید به طوری که Tv تعداد گویها در هر ظرف را پس از اینکه عمل تغییر مکان یک بار انجام شد، معین کند.

(ب) ماتریس T^2 را تغییر کنید.

(ج) اگر توزیع اولیه گویها عبارت باشد از ۵۰، ۴۰، و ۵۰، نشان دهید که این عمل روی توزیع گویها تأثیری ندارد.

۱۹. مشاهده شده است که جمعیت مجتمعی از باکتریها تابع قاعده زیر است: میزان جمعیت در هر ساعت مفروض، حاصلجمع جمعتهای سه ساعت قبل است. اگر در ساعت k ام

میزان جمعیت این باکتریها p_k باشد و اگر $v_k = \begin{bmatrix} p_{k+2} \\ p_{k+1} \\ p_k \end{bmatrix}$ جمعیت را در سه ساعت متوالی نشان دهد، یک ماتریس T بیابید به طوری که $v_{k+1} = T(v_k)$.

۲۰. اگر A و B ماتریسهایی $n \times n$ باشند، نشان دهید که $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$ اگر و فقط اگر A و B باهم جابجا شوند.

۲۱. فرض کنید D یک ماتریس قطری 3×3 و f یک چند جمله ای باشد. اگر

$$f(D) = \begin{bmatrix} f(d_1) & 0 & 0 \\ 0 & f(d_2) & 0 \\ 0 & 0 & f(d_3) \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$$

نشان دهید که $f(D)$ نشان دهید که

۲۲. نشان دهید که یک ماتریس قطری وارون پذیر است اگر و فقط اگر همه درایه های قطری آن غیر صفر باشند. وارون آن چیست؟

۲۳. نشان دهید که حاصلجمع و حاصلضرب ماتریسهای قطری، قطری است. نشان دهید که هر دو ماتریس قطری باهم جابجا می شوند.

۲۴. اگر A و B دو ماتریس وارون پذیر باشند، نشان دهید که AB وارون پذیر است و $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

۲۵. اگر A وارون پذیر باشد، نشان دهید که A^m نیز وارون پذیر است و $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$.

۲۶. ماتریس N را پوچ توان می نامیم اگر، برای یک عدد صحیح مثبت k ، داشته باشیم $N^k = 0$. نشان دهید که ماتریس پوچ توان وارون پذیر نیست.

۲۷. اگر N یک ماتریس پوچ توان $n \times n$ باشد، به طوری که $N^k = 0$ ، نشان دهید که $I_n - N$ وارون پذیر است و

$$(I_n - N)^{-1} = I_n + N + N^2 + \dots + N^{k-1}$$

۲۸. با استفاده از تمرین ۲۷، وارون هریک از ماتریسهای زیر را حساب کنید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (د) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (ج)$$

۲۹. فرض کنید E_{ij} نشانگر ماتریسی $n \times n$ باشد که تمام درایه‌های آن بجز درایه (i, j) صفر و درایه (i, j) آن ۱ است.

(الف) نشان دهید که $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$.

(ب) اگر $j \neq i$ ، ثابت کنید که $E_{ij} = 0$ و اگر $j = i$ ، نشان دهید که $E_{ij} = E_{ii}$.

(ج) اگر $A = [a_{ij}]_{(nn)}$ ، نشان دهید که تمام درایه‌های $E_{ij}A$ بجز در سطر i ام که همان سطر j ام A است، صفرند.

(د) نشان دهید که تمام درایه‌های AE_{ij} بجز در ستون j ام که همان ستون i ام A است، صفرند. [راهنمایی: اگر برایتان مشکل است، مسئله را در حالت 3×3 به طور مشروح بنویسید.]

۳۰. نشان دهید که یک ماتریس $n \times n$ که با همه ماتریسهای $n \times n$ جابجا می‌شود، باید مضرب اسکالری از ماتریس همانی باشد. بعلاوه، نشان دهید که هر مضرب اسکالری از ماتریس همانی با همه ماتریسهای $n \times n$ جابجا می‌شود. [راهنمایی: از تمرین ۲۹ استفاده کنید.]

۳۱. اگر E_{ij} همان طور که در تمرین ۲۹ آمده است، تعریف شود و $j \neq i$ ، نشان دهید که $I_n + E_{ij}$ وارون پذیر است. [راهنمایی: از تمرین ۲۷ استفاده کنید.]

۳۲. فرض کنید A و B دو ماتریس $n \times n$ باشند و $C_1 = \alpha_1 A + \beta_1 B$ و $C_2 = \alpha_2 A + \beta_2 B$ ؛ فرض کنید $\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \neq 0$. نشان دهید که C_1 و C_2 با هم جابجا می‌شوند اگر و فقط اگر A و B با هم جابجا شوند.

۳۳. اگر A و B ماتریسهای مربعی باشند و A وارون پذیر باشد، نشان دهید که

$$(A + B)A^{-1}(A - B) = (A - B)A^{-1}(A + B)$$

۳۴. اگر A و B دو ماتریس مربعی باشند که با هم جابجا می‌شوند، نشان دهید که A^m و B^n (m و n اعداد صحیح مثبت) با هم جابجا می‌شوند.

۳۵. اگر A و B دو ماتریس مربعی وارون پذیر باشند، نشان دهید که احکام زیر هم ارزند:

(الف) A با B جابجا می‌شود.

(ب) A با B^{-1} جابجا می‌شود.

(ج) A^{-1} با B^{-1} جابجا می‌شود.

۶ معادلات خطی به صورت ماتریسی

فرض کنیم دستگاه معادلات خطی زیر را داریم

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = y_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = y_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = y_3$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = y_m$$

می توان این دستگاه معادلات را با استفاده از نماد ماتریسی به صورت فشرده تری بیان کرد. ماتریس $A = [a_{ij}]_{(mn)}$ را به عنوان ماتریس ضرایب، بردار $\mathbf{x} = [x_j]_{(n)}$ را به عنوان ماتریس مجهولات و بردار $\mathbf{y} = [y_i]_{(m)}$ را به صورت $\mathbf{y} = [y_i]_{(m)}$ تعریف می کنیم. دستگاه فوق، با نماد ماتریسی تبدیل می شود به $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

برای مثال، دستگاه

$$3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 1$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = -1$$

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

تبدیل می شود به

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

طبق تعریفی که در بخش ۴.۱ ارائه شد، دستگاههایی را که به صورت $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ اند، همگن می نامند. اینک قضیه زیر را داریم:

قضیه اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد که در آن $m < n$ ، یک n -بردار \mathbf{x} ، $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ وجود دارد به طوری که $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

اثبات اگر بنویسیم

$$A = [a_{ij}]_{(mn)}$$

$$\mathbf{x} = [x_j]_{(n)}$$

در دستگاه معادلات خطی همگن متناظر، تعداد مجهولات بیشتر از تعداد معادلات است و لذا بنا به قضیه بخش ۴.۱، یک جواب غیربدیهی وجود دارد.

لذا، برای مثال، با مفروض بودن ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & 3 \\ 4 & 2 & -7 & 1 \\ -3 & 7 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

می‌توانیم یک ۴-بردار x بیابیم به طوری که $AX = 0$.
فرض می‌کنیم یک دستگاه n معادله n مجهولی داشته باشیم، که در آن ماتریس ضرایب وارون پذیر است. در این حالت می‌توانیم نشان دهیم که دستگاه جوابی یکتا دارد. دستگاه، با نماد ماتریسی تبدیل می‌شود به $AX = y$
اگر فرض کنیم $x = A^{-1}y$ ، داریم

$$AX = A(A^{-1}y) = (AA^{-1})y = I_n y = y$$

لذا، دستگاه حل پذیر است. برای اینکه ببینیم جواب یکتاست، فرض می‌کنیم x_1 و x_2 دو جواب دستگاه باشند، یعنی، $AX_1 = y$ و $AX_2 = y$.
در این صورت، $AX_1 = AX_2$ و می‌توانیم طرفین این تساوی را در A^{-1} ضرب کنیم تا به دست آوریم

$$A^{-1}(AX_1) = A^{-1}(AX_2)$$

یا

$$(A^{-1}A)x_1 = (A^{-1}A)x_2$$

در نتیجه $x_1 = x_2$

برای مثال،

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

لذا، وقتی با دستگاه معادلات

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 = y_1$$

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 = y_2$$

$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 = y_3$$

مواجهه باشیم، داریم:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7y_1 - 3y_2 - 3y_3 \\ -y_1 + y_3 \\ -y_1 + y_2 \end{bmatrix}$$

مزیت این جواب عمومی روشن است. اگر لازم بود مسئله را درحالتی حل کنیم که y_1, y_2 و y_3 مقادیر متفاوت زیادی را اختیار می‌کنند، فرمول فوق باعث صرفه جویی در مقداری از کار می‌شد.

تمرینات

۱. دستگاههای معادلات خطی زیر را به صورت ماتریسی تبدیل کنید.

$$3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 = 1 \quad (\text{الف})$$

$$x_1 - x_2 + 10x_3 + x_4 + 2x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 = -1$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 1 \quad (\text{ب})$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

$$3x_1 - x_2 + 4x_3 = 8$$

۲. نشان دهید که

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

و دستگاه معادلات

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = y_1$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = y_2$$

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 = y_3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = y_4$$

را حل کنید.

۳. نشان دهید که $\begin{bmatrix} 13 & 19 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -19 \\ -2 & 13 \end{bmatrix}$ ، و دستگاه

$$13x + 19y = a$$

$$2x + 3y = b$$

را حل کنید.

۴. (الف) اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد و اگر ماتریس $B, n \times m$ وجود داشته باشد به طوری که $AB = I_m$ ، نشان دهید که معادله $AX = y$ همیشه حل پذیر است.

(ب) با استفاده از تساوی

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 8 & -17 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -17 & -2 \\ -8 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

جوابهای دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} -x + 2y &= \alpha \\ 8x - 17y + z &= \beta \end{aligned}$$

را بیابید.

۵. اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد و $m < n$ ، نشان دهید که ماتریس غیر صفر $n \times p$ ای مانند B وجود دارد به طوری که $AB = 0$.

۶. اگر A یک ماتریس $m \times n$ ، x یک n -بردار، و y_1 و y_2 دو m -بردار باشند به طوری که $Ax = y_1$ و $Ax = y_2$ حل پذیر باشند، نشان دهید که $Ax = y_1 + y_2$ نیز حل پذیر است.

۷ ترانهاد یک ماتریس

اگر A ماتریس $m \times n$ ای به صورت $A = [a_{ij}]_{(mn)}$ باشد، ماتریس جدیدی، به نام ترانهاد A را، که با A^T نمایش داده می شود، در نظر می گیریم. این ماتریس را به صورت $A^T = [b_{ij}]_{(nm)}$ تعریف می کنیم، که در آن $b_{ij} = a_{ji}$.
برای مثال،

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ -1 & 2 & 8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 7 \\ 8 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

اگر A یک ماتریس مختلط باشد، می توان ماتریسی مشابه ترانهاد برای A تعریف کرد. این ماتریس را ماتریس الحاقی A می نامیم و آن را با A^* نشان می دهیم. در این حالت $A^* = [b_{ij}]_{(nm)}$ که در آن $b_{ij} = \bar{a}_{ji}$ (نماد \bar{a} نشانگر مزدوج مختلط عدد a است).
لذا،

$$\begin{bmatrix} i & 0 \\ -i & 1 \\ 0 & 1+i \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} -i & i & 0 \\ 0 & 1 & 1-i \end{bmatrix}$$

اگر A یک ماتریس حقیقی باشد، $A^* = A^T$.
عمل ترانهادن در قوانین معینی صادق است که در زیر می آوریم.

$$(۱) (A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(۲) (\alpha A)^T = \alpha A^T$$

$$(۳) (AB)^T = B^T A^T$$

$$(۴) (A^T)^T = A$$

اثبات (۱) گیریم $A = [a_{ij}]_{(mn)}$ و $B = [b_{ij}]_{(mn)}$ پس $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{(mn)}$ و $(A + B)^T = [c_{ij}]_{(nm)}$ ، که در آن $c_{ij} = a_{ji} + b_{ji}$ ، حال،

$$A^T + B^T = [\alpha_{ij}]_{(nm)} + [\beta_{ij}]_{(nm)} = [\alpha_{ij} + \beta_{ij}]_{(nm)}$$

که در آن $\alpha_{ij} = a_{ji}$ و $\beta_{ij} = b_{ji}$ چون $c_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}$ داریم

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

اثبات (۳) گیریم $A = [a_{ij}]_{(mn)}$ و $B = [b_{ij}]_{(np)}$ بنا براین

$$(AB) = \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right]_{(mp)}$$

پس، $(AB)^T = [c_{ik}]_{(pm)}$ ، که در آن $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{kj} b_{ji}$ ، پس، $B^T A^T = [\alpha'_{ik}]_{(pm)}$ ، که در آن $\alpha'_{ik} = a_{kj}$ و $\beta_{ij} = b_{ji}$ ، لکن $B^T A^T = [c'_{ik}]_{(pm)}$ ، که در آن $c'_{ik} = \sum_{j=1}^n b_{ji} a_{kj} = \sum_{j=1}^n a_{kj} b_{ji}$ ، داریم $(AB)^T = B^T A^T$ ، چون $c'_{ik} = c_{ik}$ ،

اثبات قسمتهای (۲) و (۴) را به عنوان تمرین به عهده خواننده می‌گذاریم.

گوئیم ماتریس A متقارن است اگر $A = A^T$ و آن را هرمیتی گوئیم اگر $A = A^*$.

برای مثال $\begin{bmatrix} ۱ & ۷ & ۸ \\ ۷ & ۵ & ۴ \\ ۸ & ۴ & -۱ \end{bmatrix}$ متقارن و $\begin{bmatrix} -۱ & i & ۴ \\ -i & ۵ & -i \\ ۴ & i & ۲ \end{bmatrix}$ هرمیتی است.

مثال دیگری از ماتریس متقارن، ماتریس فواصل شهرها، ارائه شده در آغاز بخش ۳.۲، است.

به عنوان مثالی از کاربرد قوانین ترانهش، نشان می‌دهیم که AA^T متقارن است. داریم

$$(AA^T)^T = (A^T)^T A^T \quad [\text{بنا به (۳)}]$$

$$= AA^T \quad [\text{بنا به (۴)}]$$

چون $(AA^T)^T = AA^T$ ، ماتریس AA^T متقارن است.

تمرینات

۱. برای هریک از ماتریسهای A ، ماتریس A^T را بیابید.

(الف) $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۳ \\ -۳ & ۵ \end{bmatrix}$ (ب) $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ -۳ & ۵ \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \quad (د)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (ج)$$

۲. ثابت کنید که $(\alpha A)^T = \alpha A^T$ و $(A^T)^T = A$.

۳. ثابت کنید

$$(A + B)^* = A^* + B^* \quad (\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$$

$$(AB)^* = B^* A^* \quad (A^*)^* = A$$

[راهنمایی: توجه کنید که $A^* = \overline{(A^T)}$ ، و اگر $B = [b_{ij}]$ ، آنگاه $\bar{B} = [\bar{b}_{ij}]$]

۴. (الف) نشان دهید که $A^T A$ متقارن است.

(ب) نشان دهید که $A + A^T$ متقارن است.

۵. ثابت کنید که همه ماتریسهای متقارن ماتریسهای مربعی اند.

۶. نشان دهید که $A^* A$ ، $A A^*$ ، و $A + A^*$ هرمیتی هستند.

۷. ثابت کنید که همه ماتریسهای قطری متقارن اند.

۸. نشان دهید که همه درایه‌های قطری یک ماتریس هرمیتی حقیقی اند.

۹. اگر A و B دوماتریس متقارن باشند، نشان دهید که AB متقارن است اگر و فقط اگر A با B جابجا شود.

۱۰. اگر A وارون پذیر باشد، نشان دهید که A^T وارون پذیر است و $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

۱۱. یک ماتریس را متقارن کج می‌نامند اگر $A^T = -A$. نشان دهید که هر ماتریس را می‌توان به طور یکتا به صورت حاصلجمع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس متقارن-کج نوشت.

۱۲. اگر A با B جابجا شود، نشان دهید که A^T با B^T جابجا می‌شود.

۱۳. یک ماتریس 2×2 بیابید به طوری که $AA^T \neq A^T A$.

۱۴. اگر A یک ماتریس $n \times n$ ، و $f(x)$ یک چند جمله‌ای باشد، نشان دهید که $f(A^T) = (f(A))^T$.

۱۵. نشان دهید که هر ماتریس مربعی A را می‌توان به شکل عبارت $A = H + iK$ نوشت، که در آن H و K ماتریسهای هرمیتی هستند.

(الف) نشان دهید که این عبارت یکتاست.

(ب) نشان دهید که H با K جابجا می‌شود اگر و فقط اگر A با A^* جابجا شود.

۱۶. اگر $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس $n \times n$ باشد، $tr(A)$ را به صورت

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

تعریف می‌کنیم. به عبارت دیگر $tr(A)$ عبارت است از مجموع درایه‌های قطری A ؛ $tr(A)$ را اثر ماتریس A می‌نامند.

(الف) نشان دهید که $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$.

(ب) اگر a یک اسکالر باشد، نشان دهید که $tr(aA) = a \cdot tr(A)$.

(ج) نشان دهید که $tr(AB) = tr(BA)$.

۱۷. نشان دهید که $tr(AA^T)$ حاصلجمع مربعات درایه‌های A است.

۱۸. اگر A یک ماتریس حقیقی $n \times n$ باشد و $AA^T = 0$ ، نشان دهید که $A = 0$.

۱۹. نشان دهید که ماتریس برخورد یک نگار، متقارن است. (برای تعاریف لازم، ر.ک. تمرین ۱۱ از بخش ۳.۲).

۲۰. فرض کنید P_1, P_2, \dots, P_n نقاطی در صفحه باشند و $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس $n \times n$ که در آن a_{ij} فاصله نقطه P_i از نقطه P_j است. نشان دهید که A یک ماتریس متقارن است.

دترمینانها

۱ دترمینان ماتریسهای 2×2

به هر ماتریس $n \times n$ ، اسکالری به نام دترمینان آن ماتریس، نسبت داده می‌شود. بعداً خواهیم دید که اگر ماتریسی دارای دترمینان غیر صفر باشد، دارای وارون نیز هست. برعکس، ماتریسی با دترمینان صفر، منفرد است. دترمینان، کاربردهای دیگری نیز در مواردی نظیر حل معادلات خطی و محاسبهٔ وارون ماتریس دارد. مطالعهٔ دترمینانها را با بررسی حالت 2×2 آغاز می‌کنیم.

اگر $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ یک ماتریس 2×2 باشد، تعریف می‌کنیم:

$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. مقدار $\det A$ را دترمینان ماتریس A می‌نامند. دترمینان A را اغلب به صورت $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ می‌نویسند، ولی به خاطر سپردن این نکته مهم است که دترمینان، یک اسکالراست و نه آرایه‌ای از اعداد. چند نمونهٔ عددی از دترمینانهای 2×2 عبارت‌اند از:

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -6 - 10 = -16 \quad \text{و} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 5 - 1 \times 3 = 7$$

اگر دترمینان ماتریس 2×2 ای مانند A ، غیر صفر باشد، ماتریس A وارون پذیر است. در واقع، در این مورد فرمول

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

را داریم.

برای مشاهدهٔ این مطلب، فرمول فوق را امتحان می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
 A^{-1}A &= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{bmatrix} \\
 &= I_2
 \end{aligned}$$

همین‌طور $AA^{-1} = I_2$. در این مورد، دو مثال عددی می‌آوریم

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

بنابراین، واضح است که دترمینان نقش مهمی در محاسبه وارون یک ماتریس 2×2 ایفا می‌کند.

در این فصل، اغلب ماتریس A را با $[A_1, A_2, \dots, A_n]$ نشان می‌دهیم، که در آن A_i ستون i ام A می‌باشد. لذا،

$$\text{اگر } A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 4 & 7 & 0 \\ 8 & 3 & 6 \end{bmatrix}, \text{ آنگاه } A_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

در این حالت، می‌نویسیم $A = [A_1, A_2, A_3]$.

کارترین روش برای محاسبه دترمینان ماتریسهای $n \times n$ ، اگر n بزرگتر از ۳ باشد، محتملاً استفاده از اعمال ستونی است. در بقیه این بخش، اعمال ستونی را برای ماتریسهای 2×2 مطالعه می‌کنیم. در بخشهای بعد خواهیم دید که برای دترمینانهای با مراتب بالاتر، می‌توان عملیاتی را به کار برد که در اساس با اینها یکسان است. برای سادگی، خواص مربوط به این اعمال را $(D_1) - (D_2)$ می‌نامیم.

$$\begin{aligned}
 (D_1) \quad \det[A_1 + A'_1, A_2] &= \det[A_1, A_2] + \det[A'_1, A_2] \\
 \det[A_1, A_2 + A'_2] &= \det[A_1, A_2] + \det[A_1, A'_2]
 \end{aligned}$$

$$\left| \begin{array}{cc} 1+4 & 7 \\ -2 & 3+6 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} 1 & 7 \\ -2 & 6 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} 4 & 7 \\ 3 & 6 \end{array} \right|, \text{ مثلاً,}$$

برای اثبات (D_1) ، گیریم

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}, A'_1 = \begin{bmatrix} a'_{11} \\ a'_{21} \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$$

در این صورت

$$\begin{aligned}
 \det[A_1 + A'_1, A_2] &= \begin{vmatrix} a_{11} + a'_{11} & a_{12} \\ a_{21} + a'_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\
 &= (a_{11} + a'_{11})a_{22} - (a_{21} + a'_{21})a_{12} \\
 &= (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) + (a'_{11}a_{22} - a'_{21}a_{12}) \\
 &= \det[A_1, A_2] + \det[A'_1, A_2]
 \end{aligned}$$

اثبات (D۱) در مورد ستون دیگر به روشی کاملاً مشابه انجام می‌گیرد. خاصیت دیگری که نسبتاً شبیه به خاصیت اولی است، عبارت است از:

$$(D۲) \quad \det[cA_1, A_2] = c \det[A_1, A_2] \\ \det[A_1, cA_2] = c \det[A_1, A_2]$$

مثلاً، $\begin{vmatrix} 5 & 3c \\ 3 & -c \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix} 5c & 3 \\ 3c & -1 \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$ ، برای اثبات (D۲)، همان نمادهای قبلی را به کار می‌بریم. در این صورت

$$\det[cA_1, A_2] = \begin{vmatrix} ca_{11} & a_{12} \\ ca_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = ca_{11}a_{22} - ca_{21}a_{12} = c \det[A_1, A_2]$$

دو خاصیت دیگر عبارت‌اند از:

$$(D۳) \quad \det[A, A] = 0$$

$$(D۴) \quad \det I_2 = 1$$

برای اثبات (D۳)، ملاحظه می‌کنیم که

$$\det[A, A] = \begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0$$

خاصیت (D۳) می‌گوید که دترمینانی با دو ستون مساوی، برابر صفر است. بنا به (D۴)، دترمینان ماتریس همانی برابر ۱ است. با استفاده از (D۱)، (D۲)، (D۳)، و (D۴)، می‌توانیم خواص دیگری برای دترمینان به دست آوریم.

$$(D۵) \quad \det[A_1, A_2 + cA_1] = \det[A_1, A_2]$$

$$\det[A_1 + cA_2, A_2] = \det[A_1, A_2]$$

$$(D۶) \quad \det[A_1, A_2] = -\det[A_2, A_1]$$

$$(D۷) \quad \det[A, 0] = \det[0, A] = 0$$

خاصیت (D۵) می‌گوید که اگر مضرب اسکالری از یک ستون را به ستون دیگر بیفزاییم مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند. خاصیت (D۶) می‌گوید که تعویض دو ستون علامت دترمینان را تغییر می‌دهد. (D۷) بدین معنی است که اگر یکی از ستونهای دترمینان صفر باشد، دترمینان صفر است.

به عنوان مثالهایی از (D۵) و (D۶)، داریم

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{vmatrix} 1 & 6 + c \\ 3 & 8 + 3c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$$

برای اثبات (D۵)، مشاهده می‌کنیم که

$$\det[A_1, A_2 + cA_1] = \det[A_1, A_2] + \det[A_1, cA_1] \quad [\text{بنابه (D۱)}]$$

$$= \det[A_1, A_2] + c \det[A_1, A_1] \quad [\text{بنابه (D۲)}]$$

$$= \det[A_1, A_2] + c \cdot 0 \quad [\text{بنابه (D۳)}]$$

$$= \det[A_1, A_2]$$

برای اثبات (D۶)، مشاهده می‌کنیم که

$$\det[A_1, A_2] = \det[A_1 + A_2, A_2] \quad [\text{بنابه (D۵)}]$$

$$= \det[A_1 + A_2, -A_1] \quad [\text{بنابه (D۵)}]$$

$$= \det[A_2, -A_1] \quad [\text{بنابه (D۵)}]$$

$$= -\det[A_2, A_1] \quad [\text{بنابه (D۲)}]$$

با استفاده از خواص (D۱) - (D۷)، دترمینان را بدون مراجعه به تعریف اصلی می‌توان حساب کرد. برای مثال،

$$\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -7 + 7 \times 1 \\ 2 & 3 + 7 \times 2 \end{vmatrix} \quad [\text{بنابه (D۵)}]$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 17 \end{vmatrix}$$

$$= 17 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \quad [\text{بنابه (D۲)}]$$

$$= 17 \begin{vmatrix} 1 + (-2) \times 0 & 0 \\ 2 + (-2) \times 1 & 1 \end{vmatrix} \quad [\text{بنابه (D۵)}]$$

$$= 17 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 17 \quad [\text{بنابه (D۴)}]$$

در مورد ماتریسهای 2×2 ، محاسبه مستقیم دترمینان از روی تعریف آن، محتملاً آسانتر است. لکن برای دترمینانهای بزرگ، استفاده مکرر از خواصی مشابه با (D۱) - (D۷)، روش کاراتری است.

تمرینات

۰۱. دترمینانهای زیر را حساب کنید.

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{ج}) \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \quad (\text{ب}) \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{و}) \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \quad (\text{ه}) \quad \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \quad (\text{د})$$

۰۲. هریک از تساویهای زیر به ازای چه مقداری از λ برقرار است؟

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{ب}) \quad \begin{vmatrix} \lambda & \lambda \\ 3 & \lambda-2 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{الف})$$

$$\begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 \\ 2+2\lambda & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{ج})$$

۳. اگر $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = 0$ ، نشان دهید که

$$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = 0$$

نشان دهید که $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ وارون ندارد.

۴. مطلوب است محاسبه

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{ج}) \quad \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{ب}) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{ه}) \quad \begin{bmatrix} 1-a & a \\ -a & 1+a \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{د})$$

۵. تابع $D(A)$ که روی ماتریسهای 2×2 تعریف شده و در خواص $(D1) - (D4)$ صدق می‌کند، مفروض است. نشان دهید که $D(A) = \det A$. به عبارت دیگر، نشان دهید که خواص $(D1) - (D4)$ دترمینان را به طور کامل مشخص می‌کنند.

۶. نشان دهید که خواص $(D1) - (D7)$ همان طور که برای ستونها برقرارند، در مورد سطرها نیز برقرارند.

۲ تعریف و خواص اصلی دترمینانها

در این بخش، تعریفی استقرایی از دترمینان یک ماتریس $n \times n$ ارائه می‌دهیم. به عبارت دیگر، با دانستن اینکه دترمینان ماتریس 2×2 چگونه تعریف می‌شود، دترمینان ماتریس 3×3 را تعریف می‌کنیم و سپس با استفاده از آن، تعریف مربوطه را در مورد ماتریس 4×4 ارائه می‌دهیم. در حالت کلی، با استفاده از تعریف دترمینان $(n-1) \times (n-1)$ ، دترمینان ماتریس $n \times n$ را تعریف می‌کنیم.

اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد، ماتریس حاصل از حذف سطر i ام و ستون j ام را با \hat{A}_{ij} نشان می‌دهیم. لذا، اگر

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -7 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \hat{A}_{31} = \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \hat{A}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{آنگاه}$$

با فرض اینکه دترمینان ماتریسهای $(n-1) \times (n-1)$ تعریف شده باشد، دترمینان یک ماتریس $n \times n$ به صورت $A = [a_{ij}]$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{1+1} a_{11} \det \hat{A}_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det \hat{A}_{12} \\ &\quad + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det \hat{A}_{1n} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det \hat{A}_{1j} \end{aligned}$$

در مورد ماتریسهای 3×3 ، این تعریف به صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} &= a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} \\ &\quad + a_{13} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} + a_{12} a_{23} a_{31} \\ &\quad - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} \end{aligned}$$

اغلب می‌نویسیم

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}_n$$

برای مثال،

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} &= 3 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3(8 - 2) - 2(2 - 0) + (1 - 0) = 18 - 4 + 1 = 15 \end{aligned}$$

در مورد ماتریسهای 4×4 ، تعریف فوق به صورتی مشروحتر، چنین می‌شود.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ &\quad + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

با این فرمول می‌توان هر دترمینان 4×4 را از طریق محاسبهٔ چهار دترمینان 3×3 ، حساب کرد و در بالا چگونگی محاسبهٔ دترمینان 3×3 را دیده‌ایم. همین‌طور می‌توانیم فرمولی برای دترمینانهای 5×5 بنویسیم. در این صورت محاسبهٔ یک دترمینان 5×5

از طریق محاسبه پنج دترمینان 4×4 صورت می‌گیرد. این روند می‌تواند به طور نامتناهی ادامه پیدا کند، ولی از لحاظ محاسباتی کارایی ندارد. به جای این‌کار، خواص مشابه با $(D_1) - (D_7)$ از بخش ۱۰۳ را شرح و بسط می‌دهیم. استفاده از این خواص و روشی شبیه به روش حذفی گاوسی، که زحمت آن از نوشتن فرمولهای دترمینان بسیار کمتر است، به ما امکان می‌دهد که هر دترمینانی را حساب کنیم.

در بیان و اثبات خواص مشابه با $(D_1) - (D_7)$ از بخش ۱۰۳ برای دترمینانهای با مرتبه بالا، بجز در مورد مثالها، بحث را به حالت 3×3 محدود می‌کنیم. لکن، از آغاز باید متوجه بود که مطالبی که بیان می‌کنیم و روشهایی که ارائه می‌دهیم کاملاً جنبه کلی دارند. علت اینکه فقط به حالت 3×3 می‌پردازیم، آن است که از نمادها و عملیات خسته کننده احتراز شود. خاصیت (D_1) را در این حالت بیان و ثابت خواهیم کرد. پس از انجام این مرحله، تغییر و تبدیل مقتضی برای دترمینانهای 4×4 تقریباً واضح خواهد بود. با کمی تفکر بیشتر، می‌توان استدلالی استقرائی ارائه نمود که تمام حالات را دربر داشته باشد. با در نظر گرفتن این مطلب، خاصیت (D_1) عبارت است از:

$$(D_1) \quad \begin{aligned} \det[A_1 + A'_1, A_2, A_3] &= \det[A_1, A_2, A_3] + \det[A'_1, A_2, A_3] \\ \det[A_1, A_2 + A'_2, A_3] &= \det[A_1, A_2, A_3] + \det[A_1, A'_2, A_3] \\ \det[A_1, A_2, A_3 + A'_3] &= \det[A_1, A_2, A_3] + \det[A_1, A_2, A'_3] \end{aligned}$$

مثلاً،

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 7 & -1 \\ -5 & 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 6 & 2 & -1 \\ -5 & 5 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 6 & 7 & -1 \\ -5 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

اکنون (D_1) را در حالت 3×3 ثابت می‌کنیم. توجه کنید که در واقع اثبات این موضوع فقط به تعریف دترمینان و (D_1) در حالت 2×2 ، بستگی دارد. در حالت 3×3 ، در مورد ستون دوم، (D_1) به صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + a'_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + a'_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + a'_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a'_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a'_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

برای اثبات این مطلب، مشاهده می‌کنیم که بنا به تعریف دترمینان

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + a'_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + a'_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + a'_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} + a'_{22} & a_{23} \\ a_{32} + a'_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - (a_{12} + a'_{12}) \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &\quad + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} + a'_{22} \\ a_{31} & a_{32} + a'_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

با استفاده از خاصیت (D_1) در حالت 2×2

$$\begin{vmatrix} a_{22} + a'_{22} & a_{23} \\ a_{32} + a'_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{22} & a_{23} \\ a'_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} + a'_{22} \\ a_{31} & a_{32} + a'_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{21} & a'_{22} \\ a_{31} & a'_{32} \end{vmatrix}$$

لذا،

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &+ a_{11} \begin{vmatrix} a'_{22} & a_{23} \\ a'_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a'_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a'_{22} \\ a_{31} & a'_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a'_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a'_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

اثبات (D۱) در مورد سایر ستونها به همین ترتیب انجام می‌شود. خاصیت بعدی عبارت است از:

(D۲)

$$\det [cA_1, A_2, A_3] = c \det [A_1, A_2, A_3]$$

$$\det [A_1, cA_2, A_3] = c \det [A_1, A_2, A_3]$$

$$\det [A_1, A_2, cA_3] = c \det [A_1, A_2, A_3]$$

$$\cdot \begin{vmatrix} -1 & 4c & 8 \\ 2 & 3c & 7 \\ -7 & 8c & 1 \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} -1 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 7 \\ -7 & 8 & 1 \end{vmatrix}, \text{ برای مثال،}$$

اثبات، در مورد ستون دوم، به صورت زیر انجام می‌گیرد:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & ca_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ca_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ca_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} ca_{22} & a_{23} \\ ca_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - ca_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & ca_{22} \\ a_{31} & ca_{32} \end{vmatrix}$$

با استفاده از (D۲) در حالت 2×2 ،

$$\Delta = ca_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - ca_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + ca_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

خاصیت سوم عبارت است از:

(D۳) $\det I_n = 1$ ، که در آن I_n ، طبق معمول، ماتریس همانی از مرتبه n می‌باشد.

در حالت 3×3 داریم:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

اثبات این مطلب برای مقادیر بزرگتر n هم به همین سادگی است. خاصیت بعدی بآسانی با جمله زیر بیان می‌شود:

(D۴) دترمینان ماتریسی که دارای دو ستون مساوی است، صفر است.

در حالت 3×3 ، این را می‌توان به صورت

$$\det[A, A, B] = \det[A, B, A] = \det[B, A, A] = 0$$

نوشت.

$$\text{برای مثال} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 17 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

برای اثبات (D۴)، دترمینان

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & b_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_2 \\ b_3 & b_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

را در نظر می‌گیریم.

بنا به (D۴) در حالت 2×2 اولین جمله صفر است، و دو جمله آخری قرینه یکدیگرند و حذف می‌شوند.

به همین ترتیب

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & b_1 \\ b_2 & a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = b_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_2 \\ b_3 & b_3 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} b_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

بنا به (D۶) در حالت 2×2 ،

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

لذا، جملات اول و آخر قرینه یکدیگرند و حذف می‌شوند و بنا به (D۴) در حالت 2×2 ، جمله دوم صفر است.

هر تابع اسکالر، تعریف شده روی تمام ماتریسهای $n \times n$ ، که در (D۱) - (D۴) صدق کند، مساوی با دترمینان است؛ ما این مطلب را بدون اثبات می‌گذاریم. از اینجا نتیجه می‌شود که با استفاده از (D۱) - (D۴)، می‌توان مقدار هر دترمینانی را حساب کرد. به طور کلی، این روش بسیار کاراتر از مراجعه به تعریف اصلی است.

در عمل، خاصیتی که برای محاسبهٔ دترمینان بیشترین استفاده را دارد، محتملاً خاصیت زیر است:

(D۵) اگر مضرب اسکلاری از یک ستون را به ستون دیگر بیفزاییم، مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند.

$$\cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4+1c & 1 \\ 1 & -3+7c & 7 \\ 2 & 1+3c & 3 \end{vmatrix} \quad \text{مثلاً،}$$

(D۵) را با استفاده از (D۱) - (D۴) می‌توان ثابت کرد. مثلاً، فرض می‌کنیم که در یک دترمینان 3×3 ، c برابر ستون سوم به ستون اول افزوده شده است. باید نشان دهیم که مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند، یا

$$\det[A_1 + cA_3, A_2, A_3] = \det[A_1, A_2, A_3].$$

بنا به (D۱)

$$\cdot \det[A_1 + cA_3, A_2, A_3] = \det[A_1, A_2, A_3] + \det[cA_3, A_2, A_3]$$

بنا به (D۲)، $\det[cA_3, A_2, A_3] = c \det[A_3, A_2, A_3]$ با توجه به (D۴)،

$$\cdot \det[A_1 + cA_3, A_2, A_3] = \det[A_1, A_2, A_3] + c \det[A_3, A_2, A_3]$$

لذا، $\det[A_3, A_2, A_3] = 0$

اثبات سایر حالات، اساساً همین‌طور است.

خاصیت بعدی نیز بآسانی قابل بیان است:

(D۶) تعویض دو ستون یک دترمینان با هم، علامت دترمینان را تغییر می‌دهد.

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{برای مثال،}$$

اثبات (D۶) در واقع همان است که در بخش ۱.۳ ارائه شد و در اینجا آن را

تکرار نمی‌کنیم. بالاخره، داریم

(D۷) اگر تمام درایه‌های یک ستون صفر باشند، دترمینان صفر است.

در واقع بنا به (D۲)،

$$\det[A_1, 0, A_3] = \det[A_1, 0 \times 0, A_3] = 0 \cdot \det[A_1, 0, A_3]$$

و جملهٔ آخر صفر است.

با استفادهٔ مکرر از این خواص می‌توانیم هر دترمینانی را حساب کنیم. همان‌طور که

در مثالهای زیر خواهیم دید، احتمالاً مفیدترین این خواص، (D۵) است.

مثال ۱ دترمینان زیر را حساب می‌کنیم.

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 7 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 + (-4) & 1 & 3 \\ 2 + (-4) & 0 & 7 \\ -1 + (-4) & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 7 \\ -13 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

بنا به (D۵)،

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & + & (-3) & 1 \\ 2 & 0 & 7 & + & (-3) & 0 \\ -13 & 3 & 2 & + & (-3) & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \\ -13 & 3 & -7 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -13 & -7 \end{vmatrix} \\ = 14 - 91 = -77$$

ایده نهفته در این مثال کاملاً ساده و همان ایده حذفی گاوسی است. ستونی را که درایه اولین سطر آن غیر صفر باشد، انتخاب می‌کنیم. (دراین مثال، ستون دوم را انتخاب کردیم.) با افزودن مضارب مناسبی از این ستون به تمامی ستونهای دیگر، تمام درایه‌های دیگر سطر اول را به صفر تبدیل می‌کنیم. بنا به (D۵)، مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند. سپس از تعریف دترمینان استفاده می‌کنیم. بنا براین در مثال فوق، مسئله به محاسبه یک دترمینان 2×2 تحویل یافت، که به اندازه کافی آسان می‌باشد. به هر حال، در حالت کلی دترمینانی با اندازه کوچکتر به دست می‌آوریم که تمام عملیات روی آن تکرار می‌شود.

در مثال بعدی این روش را برای محاسبه یک دترمینان 4×4 به کار می‌بریم.

مثال ۲ دترمینان زیر را حساب کنید.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad [\text{بنا به (D۵)}]$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & + & (-2)(1) & -3 & + & (3)(1) & 1 & + & (-1)(1) \\ -3 & 0 & + & (-2)(-3) & 3 & + & (3)(-3) & 0 & + & (-1)(-3) \\ 4 & 1 & + & (-2)(4) & 0 & + & (3)(4) & 0 & + & (-1)(4) \\ 1 & 2 & + & (-2)(1) & 2 & + & (3)(1) & 1 & + & (-1)(1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -6 & 3 \\ 4 & -7 & 12 & -4 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -6 & 3 \\ -7 & 12 & -4 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 6 & + & (-2)(3) & -6 & + & (2)(3) & 3 \\ -7 & + & (-2)(-4) & 12 & + & (2)(-4) & -4 \\ 0 & + & (-2)(0) & 5 & + & (2)(0) & 0 \end{vmatrix} \quad [\text{بنا به (D۵)}]$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -4 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 15$$

مثال ۳ نشان می‌دهیم که

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{4n} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn}$$

به عبارت دیگر، اگر تمام درایه‌های زیرقطر یک ماتریس صفر باشند (چنین ماتریسی را، ماتریس بالا مثلثی می‌نامند)، دترمینان آن برابر حاصلضرب درایه‌های قطری آن است. اگر $a_{11} = 0$ ، ستون اول صفر است. بنا به (D۷)، دترمینان مساوی صفر می‌باشد؛ و نیز چون $a_{11} a_{22} \dots a_{nn} = 0$ ، تساوی برقرار است و اثبات تمام می‌شود. بنا براین، فرض می‌کنیم که $a_{11} \neq 0$. در این صورت با ضرب ستون اول در اسکالره‌ای مناسب و کم کردن این حاصلضربها از بقیه ستونها، درمی‌یابیم که دترمینان برابر است با

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{4n} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

بر طبق تعریف، این دترمینان برابر است با

$$a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{4n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

حال به وسیله استقرا، یا تکرار استدلال فوق، دیده می‌شود که دترمینان اخیر برابر $a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn}$ است. لذا، دترمینان اصلی $a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$ است. در مسائل متعددی بدون محاسبه مقدار دترمینان می‌توان ثابت کرد که دو دترمینان مساوی‌اند. برای نمونه،

مثال ۴ ثابت می‌کنیم که

$$D = \begin{vmatrix} na_1 + b_1 & nb_1 + c_1 & nc_1 + a_1 \\ na_2 + b_2 & nb_2 + c_2 & nc_2 + a_2 \\ na_3 + b_3 & nb_3 + c_3 & nc_3 + a_3 \end{vmatrix} = (1 + n^3) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

می‌نویسیم

$$\begin{aligned} D &= \det[nA + B, nB + C, nC + A] \\ &= \det[nA + B, nB + C - n(nA + B), nC + A] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \det[nA + B, C - n^{\vee}A, nC + A] \\
 &= \det[nA + B, C - n^{\vee}A, nC + A - n(C - n^{\vee}A)] \\
 &= \det[nA + B, C - n^{\vee}A, (1 + n^{\vee})A] \\
 &= (1 + n^{\vee}) \det[nA + B, C - n^{\vee}A, A] \\
 &= (1 + n^{\vee}) \det[nA + B - nA, C - n^{\vee}A + n^{\vee}A, A] \\
 &= (1 + n^{\vee}) \det[B, C, A] = -(1 + n^{\vee}) \det[B, A, C] \\
 &= (1 + n^{\vee}) \det[A, B, C]
 \end{aligned}$$

تمرینات

۱. دترمینانهای زیر را حساب کنید.

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad (\text{ج}) \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad (\text{ب}) \quad \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & -2 \\ 7 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad (\text{ه}) \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 6 & 9 & 8 \end{vmatrix} \quad (\text{د})$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{ز}) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 7 & 9 \\ 3 & 5 & 6 & 10 \end{vmatrix} \quad (\text{و})$$

۲. نشان دهید که

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & -b_1 & a_1 \\ c_2 & -b_2 & a_2 \\ c_3 & -b_3 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

۳. نشان دهید که

$$\begin{vmatrix} a+b & 1 & b+1 \\ b+c & 1 & c+1 \\ c+d & 1 & d+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & b \\ b & 1 & c \\ c & 1 & d \end{vmatrix}$$

۴. فرض کنید A یک ماتریس مربعی است که یک ستون آن مضرب اسکالری از ستون دیگرش می باشد. نشان دهید که $\det A = 0$.

۵. ثابت کنید که

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 + xa_1 & c_1 + yb_1 + za_1 \\ a_2 & b_2 + xa_2 & c_2 + yb_2 + za_2 \\ a_3 & b_3 + xa_3 & c_3 + yb_3 + za_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

۶. نشان دهید که

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 1 & \delta & \varepsilon \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

۷. مقدار دترمینان زیر را بیابید.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

۸. تمام مقادیر x را بیابید که به ازای آنها

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{ب}) \quad \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ 0 & x-4 & 1 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{الف})$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{ج})$$

۹. فرض کنید A یک ماتریس مربعی با مرتبه n باشد. نشان دهید که $\det \alpha A = \alpha^n \det A$.۱۰. نشان دهید که $\det[X_1 + X_2, X_2 + X_3, X_3 + X_1] = 2 \det[X_1, X_2, X_3]$.۱۱. نشان دهید که $\det[X_1 + X_2, X_2 + X_3, X_3 + X_4, X_4 + X_1] = 0$.

۱۲. نشان دهید که

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}_n = x^{n-2}(x^2 - 1)$$

۱۳. فرض کنید A ماتریسی باشد که هر ستون آن دارای یک و فقط یک درایه غیر صفر است که این درایه ۱ می باشد. نشان دهید که $\det A$ مساوی 1 ، -1 یا 0 است. برای هر یک از این سه حالت مثالی بیاورید.

۱۴. نشان دهید که

$$\begin{aligned} \det[X_1, X_2, X_3] &= -\det[X_2, X_1, X_3] = \det[X_2, X_3, X_1] \\ &= -\det[X_3, X_2, X_1] = \det[X_3, X_1, X_2] = -\det[X_1, X_3, X_2] \end{aligned}$$

۱۵. بدون محاسبه، نشان دهید که

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & (\alpha+1)^2 & (\alpha+2)^2 & (\alpha+3)^2 \\ \beta^2 & (\beta+1)^2 & (\beta+2)^2 & (\beta+3)^2 \\ \gamma^2 & (\gamma+1)^2 & (\gamma+2)^2 & (\gamma+3)^2 \\ \delta^2 & (\delta+1)^2 & (\delta+2)^2 & (\delta+3)^2 \end{vmatrix} = 0$$

۱۶. نشان دهید که

$$\begin{vmatrix} 1 & -(x_1 + x_2) & x_1 x_2 & 0 \\ 0 & 1 & -(x_1 + x_2) & x_1 x_2 \\ 1 & -(y_1 + x_2) & y_1 y_2 & 0 \\ 0 & 1 & -(y_1 + y_2) & y_1 y_2 \end{vmatrix} = (x_1 - y_1)(x_1 - y_2)(x_2 - y_1)(x_2 - y_2)$$

۱۷. با استفاده از تمرین ۱۶، نشان دهید که چند جمله‌ایهای

$$\begin{aligned} a_0 x^2 + a_1 x + a_2 &= 0, & a_0 &\neq 0 \\ b_0 x^2 + b_1 x + b_2 &= 0, & b_0 &\neq 0 \end{aligned}$$

دارای یک ریشه مشترک‌اند اگر و فقط اگر

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

۱۸. نشان دهید که

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_0 \\ -1 & x & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & -1 & x & 0 & \dots & 0 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & -1 & x & \dots & 0 & \alpha_3 \\ & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & \alpha_{n-1} + x \end{vmatrix} = x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_0$$

۱۹. نشان دهید که

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & a_{22} & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & a_{32} & a_{33} & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & \dots & 1 & 1 \\ & & & \vdots & & & & \\ 1 & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & a_{n5} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (a_{22} - 1)(a_{33} - 1) \dots (a_{nn} - 1)$$

۲۰. تمام ریشه‌های x معادله زیر را پیدا کنید.

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & x & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & x_1 & x & x_3 & x_4 \\ 1 & x_1 & x_2 & x & x_4 \\ 1 & x_1 & x_2 & x_3 & x \end{vmatrix} = 0$$

۳ یک خاصیت ضربی دترمینانها

در این بخش، نشان می‌دهیم که اگر A و B ماتریسهای $n \times n$ باشند، $\det AB = \det A \det B$. به عبارت دیگر، دترمینان حاصلضرب A و B برابر است با حاصلضرب دترمینانهای آنها. ابتدا، نتیجه‌ای از این مطلب را متذکر می‌شویم.

نتیجه اگر A وارون‌پذیر باشد، $\det A \neq 0$.

اثبات اگر A وارون‌پذیر باشد، $AA^{-1} = I$. لذا، $\det AA^{-1} = \det I = 1$.

چون $\det AA^{-1} = \det A \det A^{-1}$ ، نتیجه می‌شود که $\det A \det A^{-1} = 1$.

بنابراین، $\det A \neq 0$.

مثال ۱ از آنجا که

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3-3(1) & 2-2(1) \\ 3 & 2-3(3) & -1-2(3) \\ 1 & 4-3(-1) & 5-2(-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & -7 \\ 1 & 7 & 7 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{ماتریس} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} \text{ وارون‌پذیر نیست.}$$

قضیه $\det A \det B = \det AB$.

اثبات قضیه را فقط برای ماتریسهای 2×2 ثابت می‌کنیم. اثباتی که می‌آوریم به طور سراسر تعمیم داده می‌شود ولی نوشتن نمادها و انجام عملیات مربوط به آن تا حدی خسته‌کننده است.

گیریم $A = [A_1, A_2]$ و $B = [b_{ij}]$. در این صورت مشاهده می‌کنیم که

$$AB = [b_{11}A_1 + b_{21}A_2, b_{12}A_1 + b_{22}A_2]$$

برای ملاحظه این مطلب، گیریم $A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$ و $A_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$. سپس حاصلضرب

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

اول AB ، بردار ستونی $b_{11}A_1 + b_{21}A_2$ است. به همین ترتیب $b_{12}A_1 + b_{22}A_2$ ستون دوم است.

لذا،

$$\begin{aligned}\det AB &= \det [b_{11}A_1 + b_{21}A_2, b_{12}A_1 + b_{22}A_2] \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 2}} b_{i1}b_{j2} \det [A_i, A_j]\end{aligned}$$

مرحلهٔ اخیر با استفادهٔ مکرر از (D۱) و (D۲) از بخش ۱.۳، انجام یافت. جمع فوق، روی تمام زوجهای مرتب $(i, j) = (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$ صورت گرفته است. اگر در جمله‌ای از حاصلجمع فوق، $i = j$ ، آنگاه $A_i = A_j$. لذا، $\det [A_i, A_j] = 0$. زیرا دو ستون دترمینان مساوی اند. بنابراین، در حاصلجمع فقط کافی است که حالات (i, j) مساوی $(1, 2)$ یا $(2, 1)$ را بررسی کنیم. اگر این مطلب را به طور مشروح بنویسیم، $\det [A_1, A_2] = \det A$ چون $\det AB = b_{11}b_{22}\det [A_1, A_2] + b_{21}b_{12}\det [A_2, A_1]$ و $\det [A_2, A_1] = -\det A$ نتیجه می‌شود که

●
$$\det AB = (b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}) \det A = \det B \det A$$

مثال ۲ در اینجا مثالی عددی می‌آوریم.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 4 = -7 \quad \text{و}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{همچنین}$$

بالاخره، دترمینان حاصلضرب فوق را حساب می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -11 & -2 \\ 2 & -6 & -3 \end{vmatrix} = 21$$

تمرینات

(در تمرینات زیر فرض کنید تمام ماتریسها مربعی باشند.)

۱. نشان دهید که $\det A^n = (\det A)^n$

۲. اگر A وارون‌پذیر باشد، نشان دهید که $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$

۳. اگر A یک ماتریس حقیقی $n \times n$ باشد و به ازای یک عدد صحیح فرد k ، داشته باشیم

$$A^k = I_n, \quad \det A = 1$$

۴. اگر $A^2 = I_n$ ، نشان دهید که $\det A = \pm 1$.

۵. اگر C وارون پذیر باشد، نشان دهید که برای هر ماتریس X که هم مرتبه با C باشد،

$$\det CXC^{-1} = \det X$$

۶. نشان دهید که ماتریسهای زیر وارون پذیر نیستند.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad (\text{د}) \quad \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{ج}) \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

۷. نشان دهید هیچ ماتریس حقیقی B وجود ندارد که در تساویهای زیر صدق کند.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

۸. اگر A یک ماتریس پوچ توان باشد (یعنی، به ازای یک عدد صحیح مثبت

$\det A = 0$ ، نشان دهید که $A^n = 0$ ، n

۹. با ضرب $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ در $\begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}$ و محاسبه دترمینان، نشان دهید که

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

۱۰. استدلالی را که برای اثبات $\det A \det B = \det AB$ در متن درس ارائه دادیم

به طور مشروح برای حالت 3×3 بیاورید.

۱۱. فرض کنید $Q = \begin{bmatrix} b & c & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & a & b \end{bmatrix}$. با محاسبه $\det Q^T \det Q$ و $\det(QQ^T)$ ، نشان

دهید که

$$\begin{vmatrix} b^2 + c^2 & ab & ac \\ ab & a^2 + c^2 & bc \\ ac & bc & a^2 + b^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$$

۱۲. دو ماتریس A و B را نسبت به هم پاد جابجایی گویند اگر $AB = -BA$. هرگاه

A و B ماتریسهایی 3×3 و نسبت به هم پاد جابجایی باشند، نشان دهید که لااقل یکی از این دو ماتریس وارون ناپذیر است.

۱۳. نشان دهید که

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۱۴. فرض کنید ماتریس 3×3 ای مانند C را بتوان به صورت حاصلضرب یک

ماتریس 3×2 در یک ماتریس 3×3 نوشت. نشان دهید که $\det C = 0$.
۱۵. با محاسبه حاصلضرب

$$\begin{bmatrix} \sin x_1 & \cos x_1 \\ \sin x_2 & \cos x_2 \\ \sin x_3 & \cos x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos x_1 & \cos x_2 & \cos x_3 \\ \sin x_1 & \sin x_2 & \sin x_3 \end{bmatrix}$$

نشان دهید که

$$\begin{vmatrix} \sin 2x_1 & \sin(x_1 + x_2) & \sin(x_1 + x_3) \\ \sin(x_1 + x_2) & \sin 2x_2 & \sin(x_2 + x_3) \\ \sin(x_1 + x_3) & \sin(x_2 + x_3) & \sin 2x_3 \end{vmatrix} = 0$$

۴ اعمال سطری و بسطهای همسازهای

در بخش ۲.۳، دیدیم که اعمال بخصوصی روی ستونهای یک دترمینان انجام می‌شود که مقدار دترمینان را به روشی خاص تغییر می‌دهد. در این بخش، می‌بینیم که مشابه این اعمال را می‌توان روی سطرها انجام داد که تأثیری شبیه به تأثیر اعمال ستونی روی مقدار دترمینان دارد. هفت خاصیت مربوط به اعمال ستونی را $(D_1) - (D_7)$ نامیدیم. خواص مشابه آنها برای سطرها را $(D'_1) - (D'_7)$ می‌نامیم. از جایگزینی «ستون» با «سطر» در تعریف خواص ستونی، می‌توان فرمولبندی صحیح خواص سطری را به دست آورد؛ یا اینکه می‌توانیم تساوی مربوط به خواص ستونی را بنویسیم و همه دترمینانهای مربوطه را ترانهاد کنیم، لذا نمی‌تواند ابهامی وجود داشته باشد. چند مثال می‌آوریم.

در حالت 3×3 ، فرمولبندی خاصی از (D'_1) عبارت است از:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

البته با انجام همین عمل روی سطرهای اول و سوم، دو فرمولبندی دیگر برای (D'_1) در حالت 3×3 به دست می‌آید.

نمونه‌ای از (D'_2) به صورت زیر است:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ db_1 & db_2 & db_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = d \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

البته در این حالت (D'_3) مطلب جدیدی دربر ندارد. همان طور که در مورد ستونها گفتیم، (D'_4) را می‌توان باسانی بیان کرد: مقدار دترمینانی با دو سطر مساوی، صفر است.

در حالت 2×2 ، صحت خواص سطری را، به همان روشی که در بخش ۱.۳ برای اعمال ستونی دیدیم، می‌توان نشان داد. روش دیگر این است که ملاحظه کنیم $\det A = \det A^T$ و در تساویهای مربوطه، A^T را با A جایگزین نماییم. بعداً در ایسن بخش، ثابت خواهیم

کرد که به ازای هر ماتریس $n \times n$ ای مانند A داریم $\det A = \det A^T$. لکن برای حالت 2×2 ، اثبات خیلی ساده است. داریم:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \quad \text{و} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

اثبات صحت خواص مربوط به سطرها خیلی شبیه به اثبات صحت خواص مربوط به ستونهاست. از این رو، ما دو مثال ارائه خواهیم کرد و بقیه را به عهده خواننده علاقه‌مند می‌گذاریم.

ابتدا، $(D'1)$ را که در بالا بیان شد، ثابت می‌کنیم. گیریم D دترمینان طرف چپ باشد. آنگاه، بنا به تعریف دترمینان،

$$D = a_1 \begin{vmatrix} b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \\ d_2 & d_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 + c_1 & b_3 + c_3 \\ d_1 & d_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 + c_1 & b_2 + c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}$$

حال با استفاده از $(D'1)$ در حالت 2×2 ، نتیجه می‌شود که

$$D = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ d_2 & d_3 \end{vmatrix} + a_1 \begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ d_2 & d_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ d_1 & d_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ d_1 & d_3 \end{vmatrix} \\ + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}$$

اکنون مشاهده می‌کنیم که در این عبارت، حاصلجمع جملات اول، سوم، و پنجم همان

دترمینان $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$ است. همین طور، حاصلجمع جملات دوم، چهارم، و ششم همان

دترمینان $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$ است. لذا D ، حاصلجمع این دو دترمینان می‌باشد، و این همان

است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

اکنون نمونه خاصی از $(D'4)$ را در حالت 3×3 ثابت می‌کنیم.

فرض می‌کنیم D دترمینانی باشد که سطرهاى اول و سوم آن مساوی‌اند. می‌خواهیم

نشان دهیم $D = 0$. گیریم $D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$. حال اگر $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ ، بنا به

تعریف دترمینان، $D = 0$. لذا می‌توان فرض کرد که لااقل یک a_i صفر نیست. ابتدا، فرض

می‌کنیم $a_1 \neq 0$. آنگاه بسنا به $(D2)$ ، $D = a_1 \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 \\ b_1/a_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$. حال، a_2 برابر

ستون اول را از ستون دوم و a_3 برابر ستون اول را از ستون سوم کم می‌کنیم. نتیجه می‌شود

$$D = a_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1/a_1 & c_2 & c_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

به خود نمی‌دهیم. با استفاده از تعریف دترمینان، $D = a_1 \begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ اگر $a_2 \neq 0$.

آنگاه تعویض ستونهای اول و دوم علامت دترمینان را تغییر می‌دهد و دترمینانی از همان نوع به وجود می‌آورد که درایه (۱، ۱) آن صفر نیست. بنا به آنچه نشان داده‌ایم، دترمینان دوم، و از آنجا دترمینان اول صفر است. اگر $a_3 \neq 0$ ، همین استدلال به نتیجه می‌رسد.

احتمالاً برایتان مشکل نخواهد بود که این استدلال را برای حالت 4×4 و حالت‌های دیگر به طور مناسب تغییر دهید. همچنین، توجه کنید که اگر سطرهای دوم و سوم مساوی باشند، خیلی آسان‌تر می‌توان نشان داد که مقدار دترمینان صفر است.

حال خواص $(D'5)$ ، $(D'6)$ ، و $(D'7)$ را می‌توانیم با استفاده از $(D'1) - (D'4)$ ، همان‌طور که خواص مشابهشان را برای ستونها به دست آوردیم، ثابت کنیم. این خواص را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$(D'5)$ اگر مضرب اسکالری از یک سطر را به سطر دیگر بیفزاییم، مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند.

$(D'6)$ تعویض دو سطر با هم، علامت دترمینان را تغییر می‌دهد.

$(D'7)$ دترمینان ماتریسی که دارای یک سطر صفر باشد، صفر است.

$(D'5)$ مانند $(D5)$ بیشترین کاربرد را در محاسبه دترمینانها دارد.

در بعضی از مثالها، محاسبه دترمینان با استفاده از سطرها سریعتر از محاسبه با ستونها انجام می‌پذیرد.

مثال ۱ دترمینان زیر را حساب کنید.

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

در این مثال می‌بینیم که سطرهای اول و دوم تقریباً یکسان‌اند. اگر سطر دوم را از سطر اول کم کنیم، داریم:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 18$$

تعریف اگر $A = [a_{ij}]_{(n,n)}$ یک ماتریس باشد، همساز $A(i, j)$ که با A_{ij} نشان داده می‌شود، عبارت است از: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det \hat{A}_{ij}$ ، که در آن \hat{A}_{ij} ماتریس $(n-1) \times (n-1)$ حاصل از حذف سطر i ام و ستون j ام A می‌باشد.

مثلاً، اگر $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ ، آنگاه

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 3 \text{ و } A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -7$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \text{ و } A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -2$$

با استفاده از این نمادگذاری، می‌توانیم تعریف اصلی دترمینان را به صورت

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{1j} A_{1j}$$

بنویسیم.

این فرمول می‌گوید که دترمینان A عبارت است از مجموع حاصلضربهای درایه‌های سطر اول در همسازیه‌های متناظرشان. همسازیه نظیر a_{1j} عبارت است از دترمینان ماتریس حاصل از حذف سطر اول و ستون j ام ضرب در $(-1)^{1+j}$. می‌خواهیم این فرمول را به فرمول زیر گسترش دهیم:

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$$

یعنی، دترمینان A عبارت است از مجموع حاصلضربهای درایه‌های سطر i ام در همسازیه‌های متناظرشان.

این فرمول را بسط همسازیه‌ای برحسب سطر i ام گویند و به وسیله آن دترمینان را می‌توان به طرق مختلف حساب کرد. برای مثال، در حالت 3×3 ،

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

یا

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

یک مثال عددی (برحسب سطر دوم) عبارت است از:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-3)(-5) + (2)(-4) - (1)(-1) = 8$$

اکنون ثابت می‌کنیم که بسط همسازیه‌ای برحسب سطر i ام، مقدار درست دترمینان را

به دست می‌دهد.

$$\text{قضیه ۱} \quad \det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$$

اثبات گیریم $A = [a_{ij}]$. از ماتریس A ، ماتریس B را به صورت زیر به دست می آوریم:
 سطر i ام A را با سطر $(i-1)$ ام آن عوض می کنیم. سپس سطر $(i-1)$ ام جدید را با
 سطر $(i-2)$ ام عوض می کنیم و به همین ترتیب. نتیجه نهایی این عمل آن است که سطر
 i ام A سطر اول B است و سطرهاى اول، ...، و $(i-1)$ ام A بترتیب سطرهاى دوم، ...، و
 i ام B خواهند بود. چون ماتریس B ، از $(i-1)$ بار تعویض سطرهاى A حاصل شد،
 داریم $\det B = (-1)^{i-1} \det A$. حال ماتریس \hat{B}_{ij} همان ماتریس \hat{A}_{ij} است. چون

$$\det B = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} b_{ij} \det \hat{B}_{ij} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det \hat{A}_{ij}$$

در نتیجه،

$$\bullet \quad \det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det \hat{A}_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{A}_{ij}$$

برای بعضی از دترمینانها، بسط همسازهای برحسب سطری غیر از سطر اول ممکن
 است سریعترین راه رسیدن به جواب باشد.

$$\text{مثال ۲} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 30$$

بسط همسازهای را برحسب ستونها نیز می توان نوشت.

$$\text{قضیه ۲} \quad \det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}$$

مثلاً، در حالت 4×4 ، این فرمول را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

اثبات اثبات را به حالت 4×4 محدود می کنیم و اثبات حالت کلی را به عهده خواننده
 می گذاریم. بنا به (D۱)،

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

با استفاده از $(D2)$ ، می‌توانیم a_{11} ، a_{21} ، a_{31} و a_{41} را از ستونهای اول هر یک از دترمینانهای فوق فاکتور بگیریم. با این کار ستونهای اول بترتیب به صورت

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

درمی‌آیند.

سپس، با افزودن مضرب مناسبی از ستون اول به هریک از دیگر ستونها، خواهیم داشت

$$\Delta = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{21} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{41} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

با تعویض سطرها با هم، داریم:

$$\Delta = a_{11} \det \hat{A}_{11} + (-1) a_{21} \det \hat{A}_{21} + a_{31} \det \hat{A}_{31} + (-1) a_{41} \det \hat{A}_{41} \\ = a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31} + a_{41} A_{41}.$$

قضیه زیر را با استفاده از بسطهای همسازهای سطری و ستونی، می‌توان ثابت کرد.

قضیه ۳ $\det A = \det A^T$.

اثبات استدلال به وسیله استقرا روی n انجام می‌شود. در حالت 2×2 داریم

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

اگر $A = [a_{ij}]_{(nn)}$ ، $B = A^T = [b_{ij}]_{(nn)}$ ، که در آن $b_{ij} = a_{ji}$. توجه

کنید که $\hat{B}_{ij} = \hat{A}_{ji}^T$. بنا به تعریف،

$$\begin{aligned}\det B &= \sum_{j=1}^n b_{1j} (-1)^{1+j} \det \hat{B}_{1j} \\ &= \sum_{j=1}^n a_{j1} (-1)^{1+j} \det \hat{A}_{j1}^T \\ &= \sum_{j=1}^n a_{j1} (-1)^{1+j} \det \hat{A}_{j1}\end{aligned}$$

مرحلهٔ اخیر مبتنی است بر فرض استقرار در مورد ماتریسهای $(n-1) \times (n-1)$.
لذا، با استفاده از بسط همسازهای ستونی A

$$\det B = \sum_{j=1}^n a_{j1} A_{j1} = \det A.$$

پس، برای مثال،

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ d & 1 & c \\ e & f & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & d & e \\ a & 1 & f \\ b & c & 1 \end{vmatrix}$$

تمرینات

۱. دترمینانهای زیر را حساب کنید.

$$\begin{array}{lll} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & 6 & 9 & -2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \\ \text{(د)} & \text{(ج)} & \text{(ب)} & \text{(الف)} & & \text{(و)} & \text{(ه)} \end{array}$$

۲. ثابت کنید که

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & 7 & 12 & 17 & 22 \\ 3 & 8 & 13 & 18 & 23 \\ 4 & 9 & 14 & 19 & 24 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 \end{vmatrix} = 0$$

[راهنمایی: ابتدا سطر چهارم را از سطر پنجم و سپس سطر سوم را از سطر چهارم

کم کنید.]

۳. اگر n یک عدد صحیح فرد باشد و A یک ماتریس $n \times n$ به طوری که $A^T = -A$ ، نشان دهید که $\det A = 0$.

۴. اگر Q یک ماتریس حقیقی باشد، نشان دهید که $\det QQ^T \geq 0$.

۵. فرض کنید $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس $n \times n$ باشد. فرض کنید که اعداد c و d وجود دارند به طوری که به ازای هر i و هر j ، $a_{ij} = ci + dj$ ، (مثلاً اگر $n = 2$ ،

$$A = \begin{bmatrix} c+d & c+2d \\ 2c+d & 2c+2d \end{bmatrix}.$$

۶. اگر سطری از یک ماتریس، مضرب اسکالری از سطر دیگر باشد، نشان دهید که دترمینان آن ماتریس صفر است.

۷. اگر A یک ماتریس متقارن باشد، نشان دهید که

$$\det[A+B] = \det[A+B^T]$$

۸. نشان دهید که

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}$$

۹. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد. فرض کنید که همه درایه‌های قطری A یکسان و برابر عدد a و همه درایه‌های غیر قطری آن یکسان و برابر عدد b باشند. نشان دهید که $\det A = (a + (n-1)b)(a-b)^{n-1}$. [راهنمایی: ستون‌های ۲، ۳، ...، n را به ستون اول بیفزایید. از ستون اول $a + (n-1)b$ را فاکتور بگیرید. سپس b برابر ستون اول را از ستون‌های ۲، ۳، ...، n کم کنید.]

۱۰. فرض کنید $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس $n \times n$ باشد. ماتریس جدید B را که به طریق زیر حاصل می‌شود، در نظر بگیرید: اگر $i + j$ فرد باشد، هر a_{ij} را با $-a_{ij}$ و اگر $i + j$ زوج باشد، هر a_{ij} را با a_{ij} جایگزین کنید. به عبارت دیگر، $B = [(-1)^{i+j}a_{ij}]$. نشان دهید که $\det B = \det A$.

۱۱. فرض کنید Q یک ماتریس $n \times n$ باشد. اگر $QQ^T = I_n$ ، نشان دهید که $\det Q = \pm 1$.

۵ وارون يك ماتریس

به هر ماتریس مفروض $A = [a_{ij}]$ ، ماتریس مفیدی بنام ماتریس الحاقی کلاسیک A نسبت داده می‌شود، که آن را با A نشان می‌دهیم، و به صورت $A = [A_{ij}]^T$ تعریف می‌کنیم. به عبارت دیگر، ماتریس الحاقی کلاسیک A ، ترانژاد ماتریس همسازهای A است.

برای مثال، اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، آنگاه ماتریس همسازها $\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ ، و ماتریس

الحاقی کلاسیک $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ می‌باشد. برای $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ ماتریس همسازها،

$$\begin{bmatrix} 3 & 9 & -3 \\ -2 & -6 & 20 \\ 19 & 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ و ماتریس الحاقی کلاسیک} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 19 \\ 9 & -6 & 3 \\ -3 & 20 & -1 \end{bmatrix} \text{ است.}$$

در حالت 2×2 ، توجه کنید که

$$A_0 A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix}$$

همین طور به آسانی نشان داده می شود که $AA = (\det A)I_2$.

می خواهیم این حکم را برای ماتریسهای دلخواه $n \times n$ تعمیم بدهیم ولی ابتدا نیاز به اثبات لم زیر داریم.

لم مجموع حاصلضربهای عناصر یک سطر (ستون) از A در همسازهای عناصر متناظر سطر (ستون) دیگری از A ، همیشه صفر است.

اثبات مجموع مورد نظر، اساساً دترمینان ماتریسی است که دارای دو سطر (ستون) مساوی است. بنا به $(D4)$ یا $(D'4)$ ، این دترمینان صفر است. در حالت 3×3 ، این را مفصلاً می نویسیم.

$$\text{گیریم } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ نشان خواهیم داد که مجموع حاصلضربهای عناصر}$$

سطر اول در همسازهای متناظر سطر سوم، صفر است. به عبارت دیگر نشان خواهیم داد که $a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} = 0$. به جای A_{31} ، A_{32} و A_{33} تعاریف آنها را بر حسب درایه های A قرار می دهیم. پس از این جایگزینی، می بینیم که

$$a_{11} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33}$$

$$\bullet \quad \text{اما عبارات اخیر برابر است با } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \text{ که مساوی صفر است.}$$

قضیه ۱ گیریم A یک ماتریس $n \times n$ باشد. در این صورت

$$A_0 A = AA = (\det A)I_n$$

اثبات حاصلضرب $A_0 A$ را در نظر می گیریم

$$A_0 A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} & a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + \dots + \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + \dots + a_{2n}A_{1n} & a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + \dots + \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}A_{11} + a_{n2}A_{12} + \dots + a_{nn}A_{1n} & a_{n1}A_{21} + a_{n2}A_{22} + \dots + \\ & + a_{n1}A_{2n} \dots a_{11}A_{n1} + a_{12}A_{n2} + \dots + a_{1n}A_{nn} \\ & + a_{21}A_{2n} \dots a_{21}A_{n1} + a_{22}A_{n2} + \dots + a_{2n}A_{nn} \\ & \vdots \\ & + a_{n1}A_{2n} \dots a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + \dots + a_{nn}A_{nn} \end{bmatrix}$$

بنا به لم، تمام درایه‌های غیر قطری صفرند، و لسی هر درایه قطری برابر $\det A$

می‌باشد. بنا بر این $A \cdot A = (\det A)I_n$. اثبات مشابهی نشان می‌دهد که $A \cdot A = (\det A)I_n$.

قضیه ۲ اگر $\det A \neq 0$ ، آنگاه A^{-1} وجود دارد و $A^{-1} = (\det A)^{-1} A$.

اثبات با انتخاب $B = (\det A)^{-1} A$ داریم $AB = BA = I_n$ ، لذا A^{-1} وجود دارد

و برابر با B است.

بنابراین، دترمینان به طور دقیق نشان می‌دهد که یک ماتریس وارون دارد یا خیر. یک ماتریس وارون پذیر است اگر و فقط اگر دترمینانش غیر صفر باشد. همچنین دترمینان روشی (نه الزاماً کاراترین روش) برای محاسبه وارون ارائه می‌دهد.

مثال ۱ اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $ad - bc \neq 0$ ، آنگاه

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

مثال ۲ اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ ، آنگاه $\det A = 54$ و نیز $A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & -3 \\ -2 & -6 & 20 \\ 19 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{54} \begin{bmatrix} 3 & 9 & -3 \\ -2 & -6 & 20 \\ 19 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{بنابراین}$$

مثال ۳ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ -x & 1 & x \\ 0 & -x & 1 \end{bmatrix}$ ، آنگاه

$$\det A = 1 \times (1 + x^2) + (-x)(-x) = 1 + 2x^2.$$

پس اگر x حقیقی باشد، A وارون پذیر است. ماتریس همسازهای A عبارت است از:

$$A^{-1} = \frac{1}{1 + 2x^2} \begin{bmatrix} 1 + x^2 & -x & x^2 \\ x & 1 & -x \\ x^2 & x & 1 + x \end{bmatrix} \quad \text{بنابراین} \quad \begin{bmatrix} 1 + x^2 & x & x^2 \\ -x & 1 & x \\ x^2 & -x & 1 + x^2 \end{bmatrix}$$

تمرینات

(فرض کنید تمام ماتریسهای زیر مربعی باشند.)

۱. وارون هر یک از ماتریسهای زیر را بیابید.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{د}) \quad \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad (\text{ج}) \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (\text{ز}) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{و}) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ه})$$

۲. اگر $A = G_1 G_2 \dots G_n$ وارون پذیر باشد، نشان دهید که G_1, G_2, \dots, G_n وارون پذیرند.

۳. نشان دهید

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

۴. اگر

$$Q = \begin{bmatrix} \alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & -\alpha_4 & \alpha_3 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & -\alpha_2 \\ \alpha_4 & -\alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \end{bmatrix}$$

نشان دهید که

$$Q^{-1} = \frac{1}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2)} Q^T$$

۵. اگر $\det A \neq 0$ و $AB = AC$ ، نشان دهید که $B = C$.

۶. اگر $AB = I_n$ ، نشان دهید که A^{-1} وجود دارد و برابر است با B .

۷. اگر AB یک مضرب غیر صفر ماتریس همانی باشد، نشان دهید که $AB = BA$.

۸. اگر A و B دو ماتریس غیر صفر باشند و $AB = 0$ ، نشان دهید که $\det A = 0$ و $\det B = 0$.

۹. اگر $P^2 = P$ و $P \neq I_n$ ، نشان دهید که $\det P = 0$.

۱۰. فرض کنید $P^2 = P$. اگر $\lambda \neq 1$ ، ثابت کنید که $I_n - \lambda P$ وارون پذیر است و

$$(I_n - \lambda P)^{-1} = I_n + (\lambda / (1 - \lambda)) P$$

۱۱. فرض کنید A یک ماتریس متقارن با همسازهای A_{ij} باشد. نشان دهید که $A_{ij} = A_{ji}$.

۱۲. نشان دهید که یک ماتریس بالا مثلثی وارون پذیر است اگر و فقط اگر تمام درایه‌های قطری آن غیر صفر باشند.

۱۳. معین کنید که به ازای چه مقداری از x ، هر یک از ماتریسهای زیر وارون پذیر است و وارون را بیابید.

$$\begin{bmatrix} 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & x \\ x & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ج}) \quad \begin{bmatrix} x & -1 & 0 \\ -1 & x & -1 \\ 0 & -1 & x \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

۱۴. ماتریسهای 2×2 ای مانند X و Y بیابید به طوری که

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} X - \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۱۵. اگر a, b, c اعدادی حقیقی باشند، نشان دهید که وارون پذیر $\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ -a & 1 & c \\ -b & -c & 1 \end{bmatrix}$

است و وارون آن را محاسبه کنید.

۱۶. فرض کنید A و B ماتریسهای متقارن وارون پذیر باشند به طوری که $AB = BA$. نشان دهید که $AB, A^{-1}B, B^{-1}A$ و $A^{-1}B^{-1}$ متقارن اند.

۱۷. اگر یک ماتریس بالامثلثی وارون داشته باشد، نشان دهید که وارون آن نیز بالامثلثی است.

۱۸. فرض کنید A و B دو ماتریس $n \times n$ باشند و $AB = I_n$. نشان دهید که A وارون پذیر است و $B = A^{-1}$.

۱۹. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد که همه درایه‌های آن اعداد صحیح هستند. نشان دهید که احکام زیر هم ارزند.

(الف) $\det A = \pm 1$

(ب) همه درایه‌های A^{-1} اعداد صحیح اند.

۲۰. در هر یک از موارد زیر، ماتریس 2×2 ای چون X بیابید که در معادله مربوطه صدق کند.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

۲۱. فرض کنید U ماتریسی با خاصیت $\det U = 1$ و U_{ij} همسازۀ (i, j) آن باشد. نشان دهید که $u_{ij} = U_{ij}$ اگر و فقط اگر $UU^T = I_n$.

۲۲. فرض کنید A_1, A_2, A_3, X و Y ماتریسهای $n \times n$ و سه ماتریس اولی وارون پذیر باشند. اگر $Y = A_1 X A_2 X A_3$ ، نشان دهید که Y وارون پذیر است اگر و فقط اگر X وارون پذیر باشد.

۲۳. چند ماتریس 2×2 ی وارون پذیر وجود دارد که درایه‌های آنها فقط ۰ و ۱ باشند؟

ع قاعده کرامر^۱

در این بخش، از مفهوم وارون ماتریس جهت ارائه فرمول مشروحی برای حل یک دستگاه n معادله خطی n مجهولی، مشروط بر آنکه دترمینان ماتریس ضرایب صفر نباشد، استفاده می‌کنیم. این امر، هم از لحاظ تاریخی و هم به‌طور کلی جالب توجه است، اما در عمل چندان کارایی ندارد. در مسائل واقعی، روش حذفی گausسی برای حل دستگاههای معادلات خطی روش کاراتری است.

گیریم دستگاه مورد نظر به‌صورت

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

باشد.

فرض می‌کنیم $A = [a_{ij}]_{(nn)}$ ماتریس ضرایب و $\mathbf{x} = [x_i]_{(n)}$ بردار مجهولات این دستگاه باشند، و $\mathbf{b} = [b_i]_{(n)}$ در این صورت، دستگاه با نماد ماتریسی به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

اگر $\det A \neq 0$ ، می‌دانیم که A^{-1} وجود دارد. گیریم $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ ، می‌بینیم که

$$\begin{aligned} A(A^{-1}\mathbf{b}) &= (AA^{-1})\mathbf{b} \\ &= I_n \mathbf{b} \\ &= \mathbf{b} \end{aligned}$$

لذا، این دستگاه معادلات، حل پذیر است و جواب آن $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ می‌باشد. همچنین جواب یکتا است. زیرا اگر $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ دارای دو جواب \mathbf{x}_1 و \mathbf{x}_2 باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} A\mathbf{x}_1 &= \mathbf{b} = A\mathbf{x}_2 \\ A\mathbf{x}_1 &= A\mathbf{x}_2 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} A^{-1}(A\mathbf{x}_1) &= A^{-1}(A\mathbf{x}_2) \\ \mathbf{x}_1 &= \mathbf{x}_2 \end{aligned}$$

با استفاده از فرمول مشروحی که در بخش ۵.۳ برای وارون ماتریس به دست آمد، می‌بینیم که

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11}A_{21} \cdots A_{n1} \\ A_{12}A_{22} \cdots A_{n2} \\ \vdots \\ A_{1n}A_{2n} \cdots A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1} \\ b_1A_{12} + b_2A_{22} + \cdots + b_nA_{n2} \\ \vdots \\ b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \cdots + b_nA_{nn} \end{bmatrix}$$

اگر بنویسیم $A = [A_1, A_2, \dots, A_n]$ و بسطهای همسازهای را به کار ببریم، جوابها را می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$x_1 = \frac{\det[\mathbf{b}, A_2, A_3, \dots, A_n]}{\det[A_1, A_2, A_3, \dots, A_n]} = \frac{b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1}}{\det A}$$

$$x_2 = \frac{\det[A_1, \mathbf{b}, A_3, \dots, A_n]}{\det[A_1, A_2, A_3, \dots, A_n]} = \frac{b_1A_{12} + b_2A_{22} + \cdots + b_nA_{n2}}{\det A}$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{\det[A_1, A_2, \dots, \mathbf{b}]}{\det[A_1, A_2, \dots, A_n]} = \frac{b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \cdots + b_nA_{nn}}{\det A}$$

این روش حل دستگاههای خطی را قاعده کرامر می نامند. برای مثال، در حالت 3×3 داریم:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

در حالت خاص، اگر مقادیر طرف راست دستگاه صفر باشند، یعنی $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ، یا به عبارت دیگر، اگر یک دستگاه معادلات همگن داشته باشیم، می بینیم که چنانچه دترمینان ماتریس ضرایب صفر نباشد، $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ تنها جواب معادله $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ است.

در عمل، استفاده از قاعده کرامر مستلزم وارون کردن ماتریس ضرایب با استفاده از فرمول بخش قبلی است. مثالهایی در این باره می آوریم.

مثال ۱ دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$x_1 + x_2 + x_3 = y_1$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = y_2$$

$$x_1 - x_2 - x_3 = y_3$$

ماتریس ضرایب یعنی $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ را وارون می‌کنیم. ابتدا، داریم:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

حال

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2, A_{12} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{21} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0, A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2, A_{23} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ و همین طوری آخر. بنابراین، درمی یابیم که ماتریس همسازها}$$

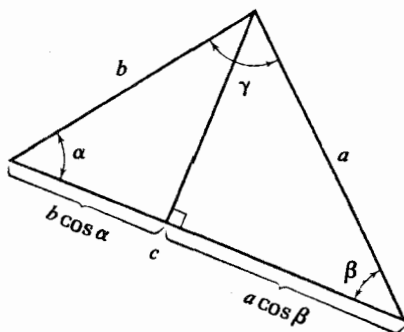
$$\text{است، و } A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ در نتیجه}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} y_1 + y_3 \\ y_2 - y_3 \\ y_1 - y_2 \end{bmatrix}$$

مثال ۲ قانون کسینوسها را به دست می‌آوریم.

مثلثی را در نظر می‌گیریم که اضلاع آن a ، b ، و c ، و زوایای مقابل این اضلاع α ، β ، و γ هستند (ر. ک. شکل ۱.۳). با استفاده از تعاریف مثلثاتی داریم:

$$\begin{aligned} c(\cos \beta) + b(\cos \gamma) &= a \\ c(\cos \alpha) + a(\cos \gamma) &= b \\ b(\cos \alpha) + a(\cos \beta) &= c \end{aligned}$$



شکل ۱.۳

می‌خواهیم این دستگاه را بر حسب $\cos \alpha$ ، $\cos \beta$ ، و $\cos \gamma$ حل کنیم. یعنی، می‌خواهیم ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{bmatrix}$$

را وارون کنیم. دترمینان این ماتریس Δ_{abc} است. بنابراین A وارون پذیر است اگر $a \neq 0$ ، $b \neq 0$ ، و $c \neq 0$ ، که مسلماً در مثلث این شرایط برقرار است. در این حالت

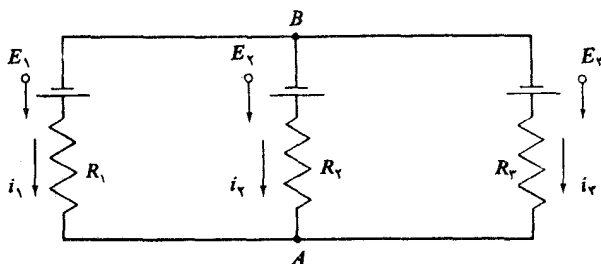
$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta_{abc}} \begin{bmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\cos \alpha = \frac{-a^2 + ab^2 + ac^2}{\Delta_{abc}} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$\cos \gamma$ و $\cos \beta$ نیز به صورت عبارات مشابهی به دست می‌آیند.

مثال ۳ شکل زیر، نمودار یک مدار ساده الکتریکی است.



E_1 ، E_2 و E_3 معرف سه منبع تولید الکتریسته، مثلاً باتری و یا مولد می‌باشند و R_1 ، R_2 و R_3 سه مقاومت هستند. این مقاومتها انرژی الکتریکی را به گرما تبدیل می‌کنند. درعمل، ممکن است بخاری برقی یا اجاق برقی باشند. کمیت‌های i_1 ، i_2 و i_3 معرف جریان الکتریکی در هر شاخه از دستگاه می‌باشند. E ها را با ولت، R ها را با اهم و i ها را با آمپر، که می‌تواند منفی باشد (وقتی که جریان در خلاف جهتی باشد که پیکان نشان می‌دهد)، اندازه‌گیری می‌کنند.

وقتی E ها و R ها داده شده باشند، می‌توان i ها را به وسیله قوانین کیرشهوف محاسبه کرد. این قوانین عبارت‌اند از:

(۱) حاصلجمع جبری تمام جریان‌هایی که به یک‌انشعاب می‌رسند باید صفر باشد.

(به عبارت دیگر، کل جریانی که به یک انشعاب وارد می شود باید از آن خارج گردد.)

(۲) در هر مدار بسته ای از شبکه، حاصل جمع جبری E ها (منابع اختلاف پتانسیل) باید برابر حاصل جمع جبری Ri ها (منابع افت پتانسیل) باشد.

توجه کنید که جریانهای i_1 ، i_2 و i_3 همگی به انشعاب A مدار وارد می شوند. از قانون اول نتیجه می شود که $i_1 + i_2 + i_3 = 0$ و نیز دقت کنید که استفاده از این قانون در انشعاب B همین معادله را می دهد. با دورزدن حلقه اول در جهت حرکت عقربه های ساعت، دیده می شود که حاصل جمع جبری E ها برابر است با $E_2 - E_1$. حاصل جمع جبری جملات Ri برابر $R_2 i_2 - R_1 i_1$ است. لذا، بنا به قانون دوم داریم:

$$-R_1 i_1 + R_2 i_2 = E_2 - E_1$$

از حلقه دوم، خواهیم داشت: $-R_2 i_2 + R_3 i_3 = E_3 - E_2$. پس دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 + i_3 &= 0 \\ -R_1 i_1 + R_2 i_2 &= E_2 - E_1 \\ -R_2 i_2 + R_3 i_3 &= E_3 - E_2 \end{aligned}$$

را داریم، که آن را به صورت

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_2 - E_1 \\ E_3 - E_2 \end{bmatrix}$$

می نویسیم.

با انجام محاسبه، درمی یابیم که

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \begin{bmatrix} R_2 R_3 - R_1 - R_3 & -R_2 & R_1 \\ R_1 R_3 & R_3 & -R_1 \\ R_1 R_2 & R_2 & R_1 + R_3 \end{bmatrix}$$

به این ترتیب، می توانیم مقدار جریان هر شاخه را بر حسب R ها و E ها بیان کنیم.

تمرینات

۱. دستگاههای زیر را حل کنید.

$$2x + y + 2z = 0$$

$$3x - 2y + z = 1$$

$$-x + 2y + 2z = -7$$

(ب)

$$2x + y - z = 0$$

$$x - y + 3z = 1 \quad (\text{الف})$$

$$2x + 2y + z = 7$$

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -9$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 3$$

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 3$$

(د)

$$2x + 8y + z = 10$$

$$-x + 3y + 2z = -2 \quad (\text{ج})$$

$$4x + 4y - 5z = 4$$

۲. با محاسبه وارون ماتریس ضرایب، دستگاههای زیر را حل کنید.

$$\begin{array}{ll} x + 2y + 3z = a & 2x - 3y + z = a \\ -x + 3y - 2z = b & x + 2y + 3z = b \quad (\text{الف}) \\ 2x - y + z = c & 3x - y + 2z = c \end{array} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{array}{ll} 6x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = y_1 & 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = y_1 \\ 2x_1 - x_2 & = y_2 \quad (\text{د}) \\ x_1 + x_2 + x_3 & = y_3 \\ -3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 & = y_4 \end{array} \quad \begin{array}{ll} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = y_2 & (\text{ج}) \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = y_3 \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 2x_4 = y_4 \end{array}$$

۳. دستگاه زیر را در نظر بگیرید:

$$ax + by = \alpha + \beta t$$

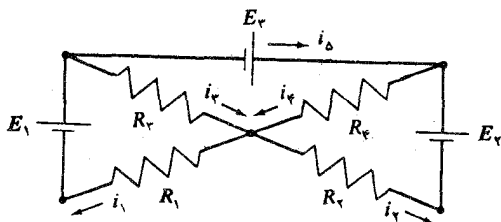
$$cx + dy = \gamma + \delta t$$

که در آن $\alpha, \beta, \gamma, \delta \neq 0$ ، $\beta^2 + \delta^2 = 0$ ، و t یک پارامتر است. نشان دهید وقتی که t تغییر می‌کند، مجموعه جوابها، یک خط راست است. نشان دهید که این خط در امتداد بردار $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \beta \\ \delta \end{bmatrix}$ است.

۴. سه ذره از مبدأ حرکت کرده در امتداد یک خط راست با سرعت ثابت پیش می‌روند. مکان آنها، به عنوان تابعی از زمان، با روابط $\mathbf{r}_1(t) = (\mathbf{i} + \mathbf{j})t$ ، $\mathbf{r}_2(t) = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j})t$ ، $\mathbf{r}_3(t) = (3\mathbf{i} + \mathbf{j})t$ معین می‌شود. فرض کنید $\mathbf{s}(t)$ نقطه‌ای باشد که در زمان t به فاصله مساوی از سه ذره قرار دارد. $\mathbf{s}(t)$ را بیابید. [راهنمایی: معادله دایره‌ای به مرکز $(-A/2, -B/2)$ به صورت $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ است. A, B, C را در زمان t پیدا کنید به طوری که نقاط انتهایی این سه بردار روی دایره باشند].

۵. سه جسم با جرمهای m_1, m_2, m_3 و m_4 ، بترتیب در نقاط $(-1, 1)$ ، $(-1, -1)$ ، و $(1, 2)$ قرار دارند. فرض کنید که مرکز ثقل این دستگاه در نقطه $(0, 0)$ و حاصل جمع جرمها برابر یک باشد. جرمهای m_1, m_2 و m_3 را بیابید.

۶. در شبکه الکتریکی



کار بست قوانین کیرشهوف معادلات زیر را نتیجه می‌دهد.

$$\begin{aligned}
 i_1 - i_2 - i_3 &= 0 \\
 i_2 - i_4 + i_5 &= 0 \\
 R_1 i_1 + R_2 i_2 &= E_1 \\
 R_1 i_2 + R_4 i_4 &= E_2 \\
 -R_2 i_2 + R_4 i_4 &= E_3
 \end{aligned}$$

نشان دهید که

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & 0 & -R_1 \\ 0 & R_2 + R_4 & -R_2 \\ -R_2 & R_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_2 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}$$

و ماتریس را وارون کنید.

۷. فرض کنید $A = [a_{ij}]$ ، $B = [b_{ij}]$ ، $C = [c_{ij}]$ و $D = [d_{ij}]$ ماتریسهایی 2×2 باشند. فرض کنید \mathbf{r} و \mathbf{s} ، 2 -بردار باشند. نشان دهید که معادلات

$$A\mathbf{x} + B\mathbf{y} = \mathbf{r}$$

$$C\mathbf{x} + D\mathbf{y} = \mathbf{s}$$

را همیشه می‌توان نسبت به 2 -بردارهای \mathbf{x} و \mathbf{y} حل کرد اگر

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & b_{21} & b_{22} \\ c_{11} & c_{12} & d_{11} & d_{12} \\ c_{21} & c_{22} & d_{21} & d_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

۷ حذف توکیبی

فرمولی که در بخش ۵.۳ برای محاسبهٔ وارون ماتریس ارائه شد، از لحاظ محاسباتی کارایی خیلی کمی دارد. فایدهٔ فرمول مزبور عمدتاً در این است که اثباتی برای وجود A^{-1} ، اگر $\det A \neq 0$ ، به دست می‌دهد. روش عملی تری که برای وارون کردن ماتریس وجود دارد، روش حذف توکیبی است، که اکنون آن را شرح می‌دهیم.

فرض کنیم ماتریس $A = [a_{ij}]_{(n \times n)}$ داده شده است. دستگاه معادلات زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= y_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= y_2 \\
 &\vdots \\
 a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= y_n
 \end{aligned}$$

که در آن x_1, x_2, \dots, x_n مجهول و y_1, y_2, \dots, y_n متغیرند. برای حل این دستگاه با روش حذفی گاوسی، فقط اعمال ضرب یک معادله در یک مقدار ثابت غیر صفر و افزودن مضارب اسکالری از یک معادله به معادله دیگر، را انجام می‌دهیم. لذا، اگر $\det A \neq 0$ ، دستگاه قابل حل است و جوابها به صورت

$$\begin{aligned}x_1 &= b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \dots + b_{1n}y_n \\x_2 &= b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \dots + b_{2n}y_n \\&\vdots \\x_n &= b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \dots + b_{nn}y_n\end{aligned}$$

می باشند. گیریم $B = [b_{ij}]_{(nn)}$. نشان خواهیم داد که B وارون A است.

ملاحظه می کنیم که اگر X بردار دلخواهی باشد، داریم $AX = Y$ و $BY = X$. در نتیجه برای هر بردار X ، داریم $BAX = X$ ، یا $(BA - I_n)X = 0$. اکنون می را ثابت می کنیم که برقراری تساوی $BA - I_n = 0$ را تضمین می کند.

لم اگر C یک ماتریس $m \times n$ باشد و به ازای هر n -بردار X داشته باشیم $CX = 0$. آنگاه $C = 0$.

اثبات گیریم $C = [c_{ij}]_{(mn)}$ ؛ در این صورت

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{bmatrix}$$

بنا به فرض،

$$C \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

پس، $c_{11} = c_{21} = \dots = c_{m1} = 0$. به روشی مشابه، با ضرب متوالی C در n -بردارهای

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

درمی یابیم که همه ستونهای دیگر صفرند.

لذا، می بینیم که $BA = I_n$. استدلال مشابهی نشان می دهد که $AB = I_n$. بنا براین $B = A^{-1}$.

مثال ۱ در بخش قبلی، وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ را با روش نسبتاً خسته-

کننده ای که مستلزم محاسبه تمام همسازها بود، به دست آوردیم. اکنون، وارون آن را با روش

حذف ترکیبی می‌یابیم. دستگاه معادلات

$$x_1 + x_2 + x_3 = y_1$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = y_2$$

$$x_1 - x_2 - x_3 = y_3$$

↓

را در نظر می‌گیریم. معادله اول و مجهول x_1 را به‌کار می‌بریم.

$$x_1 + x_2 + x_3 = y_1$$

$$-2x_3 = y_2 - y_1$$

$$-2x_2 - 2x_3 = y_3 - y_1$$

↓

معادله دوم و مجهول x_3 را به‌کار می‌بریم.

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2$$

$$x_3 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2$$

$$-2x_2 = y_3 - y_2$$

↓

معادله سوم و مجهول x_2 را به‌کار می‌بریم.

$$x_1 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2$$

$$x_3 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2$$

$$x_2 = \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3$$

لذا، $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ در مورد ماتریسهای بزرگتر، کارایی این روش

بیشتر است.

مثال ۲. ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

را وارون می‌کنیم.

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = y_1$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = y_2$$

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 = y_3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = y_4$$

مجهول x_1 و معادله اول را به کار می‌بریم.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= y_1 \\ x_2 + x_4 &= -y_1 + y_2 \\ -3x_3 + x_4 &= -2y_1 + y_2 \\ -x_2 - 2x_3 &= -y_1 + y_4 \end{aligned}$$

مجهول x_2 و معادله دوم را به کار می‌بریم.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_3 - x_4 &= 3y_1 - 2y_2 \\ x_2 + x_4 &= -y_1 + y_2 \\ -3x_3 + x_4 &= -2y_1 + y_2 \\ -2x_3 + x_4 &= -2y_1 + y_2 + y_4 \end{aligned}$$

مجهول x_3 و معادله سوم را به کار می‌بریم.

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 - 2y_2 + y_3 \\ x_2 + 3x_3 &= y_1 + y_2 - y_3 \\ -3x_3 + x_4 &= -2y_1 + y_2 \\ x_3 &= y_2 - y_3 + y_4 \end{aligned}$$

مجهول x_3 و معادله چهارم را به کار می‌بریم.

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 - 2y_2 + y_3 \\ x_2 &= y_1 - 2y_2 + 2y_3 - 3y_4 \\ x_4 &= -2y_1 + 3y_2 - 2y_3 + 3y_4 \\ x_3 &= y_2 - y_3 + y_4 \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{در نتیجه}$$

تمرینات

۱. وارون هر یک از ماتریسهای زیر را بیابید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{ج}) \quad \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -6 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ -4 & 0 & -5 & 14 \end{bmatrix} \quad (\text{ه}) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{د})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (ز) \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 14 \\ 2 & 2 & 3 & 14 \end{bmatrix} \quad (و)$$

۲. درمورد هر یک از ماتریسهای A زیر، به ازای چه مقداری از x ، ماتریس $xI - A$ وارون پذیر است؟ وارون $xI - A$ کدام است؟

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (د) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (ج) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (الف)$$

۳. با استفاده از حذف ترکیبی وارون ماتریس زیر را بیابید.

$$\begin{bmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ \lambda_2 & 1 + \lambda_2 a_2 & \lambda_2 a_3 & \dots & \lambda_2 a_n \\ \lambda_3 & \lambda_3 a_2 & 1 + \lambda_3 a_3 & \dots & \lambda_3 a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n-1} & \lambda_{n-1} a_2 & \lambda_{n-1} a_3 & \dots & \lambda_{n-1} a_n \\ \lambda_n & \lambda_n a_2 & \lambda_n a_3 & \dots & 1 + \lambda_n a_n \end{bmatrix}$$

۴. گیریم A یک ماتریس $n \times n$ باشد که دارای یک و فقط یک درایه غیر صفر در هر سطر و هر ستون است. نشان دهید که A وارون پذیر است و وارون آن ماتریسی از نوع A است.

۵. ماتریس مثال ۳ از بخش ۵.۲ را وارون کنید. اگر در آن مثال، $n_1 = 1300$ ، $n_2 = 1000$ ، $n_3 = 600$ و $n_4 = 300$ ؛ یک سال قبل، چند عضو در گروههای سنی مختلف وجود داشته است؟

۶. وارون هریک از ماتریسهای $n \times n$ زیر را بیابید.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (الف)$$

۷. وارون ماتریس $n \times n$ زیر را بیابید

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ & & & & \vdots & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

۸. اگر $a \neq 0$ ، وارون ماتریس

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

را بیابید.

فضاهای برداری

۱ تعریف فضای برداری

در یکی از فصلهای قبلی، قواعدی برای جمع، و ضرب اسکالر بردارها و ماتریسها ارائه دادیم. دیدیم که این اعمال از قوانینی پیروی می کنند که با استفاده از آنها می توانیم عملیات جبری را، بدون رجوع مستمر به تعاریف اصلی، انجام دهیم. در این فصل، موجودات مجردی به نام فضاهای برداری را مطالعه می کنیم که برای آنها اعمال جمع، و ضرب اسکالر نیز تعریف شده اند: این اعمال در همان قواعد جمع، و ضرب اسکالر، که در فصل دوم برای بردارها ارائه شد، صدق می کنند.

این اشیاء را به طور مجرد مطالعه می کنیم و برای پروراندن نظریه فضای برداری فقط از اصول بنیادی استفاده می نماییم. با اتخاذ چنین روشی، اثبات بسیاری از قضایا را ساده و واضح می سازیم، و به علاوه به گستره وسیعی از حوزه کاربرد نتایج مربوطه دست می یابیم.

بنابراین، در سراسر این فصل، مجموعه هایی از اشیاء موسوم به بردار را، فقط به این علت بررسی می کنیم که برای چهارچوب مجرد بحث ما مناسب اند. بردارهای ستونی، چند-جمله ایهای یک متغیره با متغیر x ، ماتریسها، و توابع روی یک فاصله، همگی ممکن است بردار نامیده شوند، زیرا پس از ارائه تعاریف بخصوصی، می بینیم که هر کدام، عضوی از یک مجموعه است که می تواند به عنوان یک فضای برداری در نظر گرفته شود.

فضای برداری، مجموعه ای مانند V است مرکب از اشیائی به نام بردار، با دو عمل تعریف شده بر روی آن: جمع، و ضرب اسکالر. جمع بردارها به این معنی است که با مفروض بودن دو بردار x و y در V ، قاعده ای وجود دارد که برداری مانند $x + y$ را، که آن نیز در V است، معین می کند، و این بردار را حاصل جمع x و y می نامند. منظورمان از ضرب اسکالر، قاعده ای است که به هر بردار x در V و هر اسکالر حقیقی α ، یک بردار αx در V نسبت

می‌دهد. این بردار را **مضرب اسکالر** بردار x با ضریب اسکالر α می‌نامند.

برای مثال، اگر مجموعه V ، گردآورده همه چند جمله‌ایهای با ضرایب حقیقی باشد، می‌توانیم حاصلجمع $g + f$ از دو چند جمله‌ای f و g را به صورت حاصلجمع معمولی در نظر بگیریم. ضرب اسکالر را می‌توانیم به صورت ضرب یک عدد α در یک چند جمله‌ای f ، به حساب آوریم، که حاصل آن αf است و برای اینکه ثابت کنیم V یک فضای برداری است، باید تحقیق کنیم که اعمال جمع، و ضرب اسکالر در اصول خاصی، که در زیر می‌آوریم، صدق می‌کنند. البته، می‌توان جمع، و ضرب اسکالر بردارها را با قواعد دیگری تعریف کرد، ولی اگر بخواهیم که مجموعه چند جمله‌ایها یک فضای برداری بسازند، اعمال جدید باید در همه اصول یک فضای برداری صدق کنند.

گیریم V مجموعه‌ای باشد که برای آن جمع، و ضرب اسکالر بردارها تعریف شده‌اند، و گیریم x, y, z و z متعلق به V ، و α و β اعدادی حقیقی باشند. اصول فضای برداری عبارت‌اند از:

$$(V1) \quad x + y = y + x \quad (\text{قانون جابجایی برای جمع بردارها.})$$

$$(V2) \quad (x + y) + z = x + (y + z) \quad (\text{قانون انجمنی برای جمع بردارها.})$$

$$(V3) \quad \text{عنصری در } V \text{ وجود دارد، که آن را با } 0 \text{ نشان می‌دهیم، به طوری که}$$

$$0 + x = x + 0 = x$$

$$(V4) \quad \text{برای هر } x \text{ در } V، \text{ یک عنصر } -x \text{ در } V \text{ وجود دارد به طوری که}$$

$$x + (-x) = (-x) + x = 0$$

$$(V5) \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

$$(V6) \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

$$(V7) \quad (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$$

$$(V8) \quad 1 \cdot x = x$$

مجموعه‌ای مانند V را که اعمال تعریف شده بر آن در فهرست شرایط فوق صدق کنند، **فضای برداری حقیقی** یا **فضای برداری روی اعداد حقیقی** می‌خوانند. بردار 0 را، که وجودش در V به عنوان اصل پذیرفته شده است، **بردار صفر**، و بردار $-x$ را **منفی** (یا **قرینه**) بردار x می‌نامند.

فضای برداری مختلط به طریق مشابه تعریف می‌شود. فقط این را به عنوان اصل می‌پذیریم که مضرب اسکالر بردار x با ضریب اسکالر α برای هر x در V و هر عدد مختلط α ، تعریف شده است.

اهمیت مفهوم فضای برداری از فهرست وسیع مثالهای اشیائی که در اصول فضای برداری صدق می‌کنند، بخوبی روشن می‌شود.

مثال ۱ گیریم R^n فضای n -بردارهای ستونی با جمع، و ضرب اسکالری که در فصل دوم تعریف شده، باشد.

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{bmatrix}$$

$$\mu \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu\alpha_1 \\ \mu\alpha_2 \\ \vdots \\ \mu\alpha_n \end{bmatrix}$$

در اینجا خواننده می‌تواند به عنوان یک تمرین مفید، اثبات‌های مربوطه از فصل ۲ را تکرار کند تا نشان دهد که جمع، و ضرب اسکالری که در فوق تعریف شد، در اصول لازمه فضای برداری صدق می‌کنند.

\mathbf{R}^n را به طرق مختلف، می‌توان الگویی برای فضای برداری حقیقی در نظر گرفت. اصول فضای برداری با مشخص کردن مهمترین خواص جمع، و ضرب اسکالر بردارهای ستونی فرمولبندی شد. از این خواص جهت اثبات قضایای کلی‌تری، شبیه به آنهایی که در \mathbf{R}^n برقرارند، استفاده می‌شود. و به‌علاوه، به مفهومی که بعداً روشن خواهد شد، فضا‌های برداری حقیقی که «خیلی بزرگ» نباشند، از لحاظ جبری به‌طور طبیعی هم ارز با \mathbf{R}^n می‌باشند (n ، عددی صحیح است).

مثال ۲ فضای n -بردارهای ستونی مختلط یک فضای برداری مختلط است، که آن را با \mathbf{C}^n نشان می‌دهند. عمل جمع به صورت

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{bmatrix}$$

تعریف می‌شود، که در آن $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ اعداد مختلط هستند، و ضرب اسکالر به صورت

$$\mu \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu\alpha_1 \\ \mu\alpha_2 \\ \vdots \\ \mu\alpha_n \end{bmatrix}$$

تعریف می‌شود، که در آن μ یک اسکالر مختلط است. به همان صورت که \mathbf{R}^n الگوی فضای برداری حقیقی است، \mathbf{C}^n الگوی فضای برداری مختلط می‌باشد.

مثال ۳ گیریم $M_{m \times n}$ نشانگر گردآورده ماتریسهای $m \times n$ با درایه‌های حقیقی باشد. جمع، و ضرب اسکالر همانند بخش ۳.۲ تعریف شده است.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\mu \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu a_{11} & \mu a_{12} & \cdots & \mu a_{1n} \\ \mu a_{21} & \mu a_{22} & \cdots & \mu a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu a_{m1} & \mu a_{m2} & \cdots & \mu a_{mn} \end{bmatrix}$$

برای اینکه نشان دهیم M_{mn} یک فضای برداری است، لازم است بررسی کنیم که اصول $(V1) - (V8)$ فضای برداری برقرارند. همه این قوانین در بخش ۳.۲ بیان شد و تعدادی از آنها ثابت گردید. چون n -بردارهای ستونی همان ماتریسهای $1 \times n$ هستند، مثال ۱ حالت خاصی از این مثال است.

مثال ۴ گیریم P_n نشانگر گردآورده همه چند جمله‌ای‌های با ضرایب حقیقی و با درجه نایبتر از n باشد. اگر f و g متعلق به P_n باشند، آنها را به طریق معمولی با هم جمع می‌کنیم: فرض می‌کنیم

$$\begin{aligned} g &= b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n \quad \text{و} \quad f = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \\ &= \sum_{k=0}^n b_kx^k \quad \quad \quad = \sum_{k=0}^n a_kx^k \end{aligned}$$

در این صورت

$$\begin{aligned} f + g &= a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n \\ &= \sum_{k=0}^n (a_k + b_k)x^k. \end{aligned}$$

به همین ترتیب، ضرب اسکالر نیز به طریق معمولی تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \alpha f &= \alpha a_0 + (\alpha a_1)x + \cdots + (\alpha a_n)x^n \\ &= \sum_{k=0}^n (\alpha a_k)x^k \end{aligned}$$

برای اینکه برقراری اصول فضای برداری را در این مورد بتفصیل تحقیق کنیم، فرض می‌کنیم

$$h = \sum_{k=0}^n c_kx^k, \quad g = \sum_{k=0}^n b_kx^k, \quad f = \sum_{k=0}^n a_kx^k$$

و α, β اسکالرهایی حقیقی باشند.

اکنون بررسی می‌کنیم که اصول (V۱) - (V۸) برقرارند. جهت اثبات برقراری (V۱) باید نشان دهیم که $f + g = g + f$. در مورد (V۲) باید صحت $(f + g) + h = f + (g + h)$ را بررسی کنیم و الی آخر. البته، هرکس با کمی تجربه ریاضی تشخیص می‌دهد که این قواعد برقرارند. معهذاً، همه آنها را به طور مشروح تحقیق می‌کنیم.

$$f + g = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) x^k \quad (V1)$$

$$g + f = \sum_{k=0}^n (b_k + a_k) x^k$$

چون a_k و b_k اعداد حقیقی‌اند، $a_k + b_k = b_k + a_k$ ، و لذا خواهیم داشت $f + g = g + f$.

$$(f + g) + h = \sum_{k=0}^n ((a_k + b_k) + c_k) x^k \quad (V2)$$

$$f + (g + h) = \sum_{k=0}^n (a_k + (b_k + c_k)) x^k$$

چون a_k, b_k و c_k اعداد حقیقی‌اند، داریم $(a_k + b_k) + c_k = a_k + (b_k + c_k)$ ، و لذا $(f + g) + h = f + (g + h)$.

(V۳) گیریم ۰ چند جمله‌ای صفر باشد، یعنی، چند جمله‌ای که همه ضرایبش صفر است. در این صورت $f + 0 = 0 + f = f$.

(V۴) اگر

$$-f = \sum_{k=0}^n (-a_k) x^k, \quad f = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

آنگاه

$$f + (-f) = \sum_{k=0}^n (a_k + (-a_k)) x^k = \sum_{k=0}^n 0 \cdot x^k = 0$$

(V۵) بنا به تعریف،

$$(\alpha + \beta)f = \sum_{k=0}^n (\alpha + \beta) a_k x^k$$

درعین حال

$$\beta f = \sum_{k=0}^n \beta a_k x^k, \quad \alpha f = \sum_{k=0}^n \alpha a_k x^k$$

و لذا

$$\alpha f + \beta f = \sum_{k=0}^n (\alpha a_k + \beta a_k) x^k$$

در مورد اعداد حقیقی، می‌دانیم که $(\alpha + \beta) a_k = \alpha a_k + \beta a_k$ ، و بنابراین

$$(\alpha + \beta) f = \alpha f + \beta f$$

(V۶) داریم $f + g = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) x^k$ ، و لذا $\alpha(f + g) = \sum_{k=0}^n (\alpha(a_k + b_k)) x^k$ ، همچنین $\alpha f + \alpha g = \sum_{k=0}^n (\alpha a_k + \alpha b_k) x^k$ چون $\alpha(a_k + b_k) = \alpha a_k + \alpha b_k$ داریم

$$\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$$

(V۷) بنا به تعریف، $\beta f = \sum_{k=0}^n (\beta a_k) x^k$ ، پس $\alpha(\beta f) = \sum_{k=0}^n (\alpha(\beta a_k)) x^k$ ، درعین حال $(\alpha\beta)f = \sum_{k=0}^n ((\alpha\beta)a_k) x^k$ ، ولی در اعداد حقیقی داریم $\alpha(\beta a_k) = (\alpha\beta)a_k$ و بنابراین

$$\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f$$

$$1 \cdot f = \sum_{k=0}^n (1 \cdot a_k) x^k = \sum_{k=0}^n a_k x^k = f. \quad (V۸)$$

بنابراین، چند جمله‌ای‌های با درجهٔ نایبتر از n ، با ضرایب حقیقی، و با جمع، و ضرب اسکالر آن طور که در بالا تعریف شد، یک فضای برداری حقیقی تشکیل می‌دهند. به همین علت، تمام قضایایی که دربارهٔ فضاها، برداری در حالت کلی ثابت می‌شود، در مورد فضای برداری چند جمله‌ایها نیز برقرار است.

به روشی مشابه، می‌توان نشان داد که چند جمله‌ای‌های با درجهٔ نایبتر از n ، با ضرایب مختلط، و تحت اعمال جمع، و ضرب اسکالر معمولی، یک فضای برداری مختلط تشکیل می‌دهند.

در مثالهای فوق، جمع و ضرب، به تعبیری «طبیعی» اند. در بیشتر مثالهایی که بعد از این می‌آید، چنین خواهد بود. لکن، می‌توان فضاهایی برداری ساخت که در آنها برقراری این اصول چندان واضح نیست. برای ملاحظهٔ قاعدهٔ کلی که در مثال ۵ نهفته است، به تمرین ۷ در آخر همین بخش مراجعه کنید.

مثال ۵. بر روی زوجهای مرتب از اعداد حقیقی (x, y) یک عمل جمع تعریف می‌کنیم، که برای تمایز آن با جمع معمولی، آن را با \oplus نشان می‌دهیم.

$$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x' + 1, y + y' + 1)$$

ضرب اسکالر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\alpha * (x, y) = (\alpha x + \alpha - 1, \alpha y + \alpha - 1)$$

اکنون برقراری $(V1) - (V8)$ را بررسی می‌کنیم.

$$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x' + 1, y + y' + 1) \quad (V1)$$

$$(x', y') \oplus (x, y) = (x' + x + 1, y' + y + 1)$$

چون $x + x' + 1 = x' + x + 1$ و $y + y' + 1 = y' + y + 1$ می‌بینیم که
 $(x, y) \oplus (x', y') = (x', y') \oplus (x, y)$

$$\begin{aligned} ((x, y) \oplus (x', y')) \oplus (x'', y'') &= (x + x' + 1, y + y' + 1) \oplus (x'', y'') \quad (V2) \\ &= (x + x' + x'' + 2, y + y' + y'' + 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x, y) \oplus ((x', y') \oplus (x'', y'')) &= (x, y) \oplus (x' + x'' + 1, y' + y'' + 1) \\ &= (x + x' + x'' + 2, y + y' + y'' + 2) \end{aligned}$$

لذا

$$((x, y) \oplus (x', y')) \oplus (x'', y'') = (x, y) \oplus ((x', y') \oplus (x'', y'')).$$

$(V3)$ عنصر صفر فضا کدام است؟ مشاهده می‌کنیم که

$$\begin{aligned} (x, y) \oplus (-1, -1) &= (x + (-1) + 1, y + (-1) + 1) \\ &= (x, y) \end{aligned}$$

بنابراین، می‌بینیم که $(-1, -1)$ نقش عنصر صفر را بازی می‌کند.

$(V4)$ قرینه هر (x, y) مفروض را $(-x - 2, -y - 2)$ می‌گیریم، زیرا

$$\begin{aligned} (x, y) \oplus (-x - 2, -y - 2) &= (x + (-x - 2) + 1, y + (-y - 2) + 1) \\ &= (-1, -1) \end{aligned}$$

که عنصر صفر است.

$$(\alpha + \beta) * (x, y) \quad (V5) \text{ (بنا به تعریف *)}$$

$$= ((\alpha + \beta)x + (\alpha + \beta) - 1, (\alpha + \beta)y + (\alpha + \beta) - 1)$$

همچنین، بنا به تعریف *،

$$\alpha * (x, y) = (\alpha x + \alpha - 1, \alpha y + \alpha - 1)$$

$$\beta * (x, y) = (\beta x + \beta - 1, \beta y + \beta - 1)$$

برطبق تعریف \oplus ،

$$\begin{aligned} (\alpha * (x, y)) \oplus (\beta * (x, y)) \\ = ((\alpha x + \alpha - 1) + (\beta x + \beta - 1) + 1, (\alpha y + \alpha - 1) + (\beta y + \beta - 1) + 1) \end{aligned}$$

$$= ((\alpha + \beta)x + (\alpha + \beta) - 1, (\alpha + \beta)y + (\alpha + \beta) - 1) \\ = (\alpha + \beta) * (x, y).$$

$$\alpha * ((x, y) \oplus (x', y')) = \alpha * (x + x' + 1, y + y' + 1) \quad (V6) \\ = (\alpha(x + x' + 1) + \alpha - 1, \alpha(y + y' + 1) + \alpha - 1)$$

درعین حال

$$\alpha * (x, y) \oplus \alpha * (x', y') \\ = (\alpha x + \alpha - 1, \alpha y + \alpha - 1) \oplus (\alpha x' + \alpha - 1, \alpha y' + \alpha - 1) \\ = (\alpha x + \alpha - 1 + \alpha x' + \alpha - 1 + 1, \alpha y + \alpha - 1 + \alpha y' + \alpha - 1 + 1) \\ = \alpha * ((x, y) \oplus (x', y'))$$

$$\alpha * (\beta * (x, y)) = \alpha * (\beta x + \beta - 1, \beta y + \beta - 1) \quad (V7) \\ = (\alpha \beta x + \alpha \beta - \alpha + \alpha - 1, \alpha \beta y + \alpha \beta - \alpha + \alpha - 1) \\ = (\alpha \beta x + \alpha \beta - 1, \alpha \beta y + \alpha \beta - 1) \\ = (\alpha \beta) * (x, y)$$

$$1 * (x, y) = (x + 1 - 1, y + 1 - 1) = (x, y) \quad (V8)$$

پس، گردآورده زوجهای مرتب اعداد حقیقی با عمل جمع \oplus ، و ضرب اسکالر $*$ یک فضای برداری روی اعداد حقیقی تشکیل می‌دهد.

تمرینات

۱. در زیر فهرستی از مجموعه‌ها با اعمال جمع، و ضرب اسکالر که روی آنها تعریف شده‌اند، ارائه می‌شود. در مورد هر مجموعه، نشان دهید که آن مجموعه، همراه اعمال تعریف شده روی آن، یک فضای برداری روی اعداد حقیقی تشکیل می‌دهد.

(الف) مجموعه ماتریسهای به صورت

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

با اعمال

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + c & -(b + d) \\ b + d & a + c \end{bmatrix} \\ \alpha \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a & -\alpha b \\ \alpha b & \alpha a \end{bmatrix}$$

(ب) مجموعه ماتریسهای حقیقی به صورت

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

با اعمال جمع، و ضرب اسکالر معمولی.

(ج) مجموعه سه تایی‌های مرتب از اعداد حقیقی (x, y, z) ، به طوری که $z = x + y$ ، با

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$$

$$\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z) \quad \text{و}$$

(د) چند جمله‌ای‌های زوج با درجه نایبتر از n ، (n عددی است صحیح و مثبت)، و با اعمال جمع، و ضرب اسکالر معمولی چند جمله‌ایها.

(ه) چند جمله‌ای‌های فرد با درجه نایبتر از n ، (n عددی است صحیح و مثبت)، و با اعمال جمع، و ضرب اسکالر معمولی چند جمله‌ایها.

(و) چند جمله‌ای‌های f ، با درجه نایبتر از n ، به طوری که $f(1) = 0$ ، و با اعمال جمع، و ضرب اسکالر که به روش معمولی تعریف شده‌اند.

(ز) زوجهای مرتب از اعداد حقیقی (x, y) با

$$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x' + 1, y + y')$$

$$\alpha * (x, y) = (\alpha x + \alpha - 1, \alpha y)$$

(ح) توابع مشتق پذیر روی فاصله $(0, 1)$ با

$$(\alpha f)(x) = \alpha(f(x)), \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

و جمع، و ضرب اسکالر معمولی توابع.

۲. روی مجموعه سه تایی‌های مرتب از اعداد حقیقی (x, y, z) ، جمع را با

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$$

و ضرب اسکالر را با $\alpha(x, y, z) = (0, 0, 0)$ تعریف کنید. نشان دهید که همه اصول فضای برداری، بجز $(V8)$ ، برقرارند.

۳. روی مجموعه زوجهای مرتب از اعداد حقیقی (x, y) ، جمع را با

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

و ضرب اسکالر را با $\alpha(x, y) = (\alpha^2 x, \alpha^2 y)$ تعریف کنید. نشان دهید که همه اصول فضای برداری، بجز $(V5)$ ، برقرارند.

۴. روی مجموعه زوجهای مرتب از اعداد حقیقی، جمع را با

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

و ضرب اسکالر را با $\alpha(x, y) = (3\alpha x, 3\alpha y)$ تعریف کنید. نشان دهید که همه اصول

فضای برداری، بجز (V۷) و (V۸)، برقرارند.

۵. فرض کنید X یک مجموعه باشد. ϕ ، خانواده تمام توابع از X به اعداد حقیقی، را در نظر بگیرید. جمع، و ضرب اسکالر را به صورت

$$(\alpha f)(x) = \alpha(f(x)), (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

تعریف کنید. نشان دهید که این خانواده مفروض از توابع با این اعمال، یک فضای برداری تشکیل می‌دهد.

۶. فرض کنید U یک فضای برداری مختلط باشد. با همان عمل جمع، و لسی با ضرب اسکالر αx برای $x \in U$ و عدد حقیقی α . نشان دهید که U یک فضای برداری حقیقی است. (این تعریف معنی دارد، زیرا اعداد حقیقی در مجموعه اعداد مختلط قرار دارند.)

۷. فرض کنید V یک فضای برداری حقیقی باشد که جمع آن را با $+$ و ضرب اسکالر را با \cdot نشان می‌دهیم. فرض کنید t بردار ثابتی در V باشد. جمع جدیدی روی V با $x \oplus y = x + y + t$ و ضرب اسکالر جدیدی روی V با $\alpha * x = \alpha x + (\alpha - 1)t$ تعریف کنید. نشان دهید که V با اعمال \oplus و $*$ یک فضای برداری است.

۸. روی مجموعه زوجهای مرتب از اعداد حقیقی (x, y) ، جمع، \oplus ، را با

$$(x, y) \oplus (x', y') = ((x^3 + (x')^3)^{1/3}, (y^3 + (y')^3)^{1/3})$$

و ضرب اسکالر را با $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$ تعریف کنید. نشان دهید که مجموعه فوق با این اعمال یک فضای برداری تشکیل می‌دهد.

۲ خواص دیگری از فضاهای برداری

در مورد هر فضای برداری، می‌توانیم از اصول (V۱) - (V۸) جهت به‌دست آوردن قواعد دیگری برای عملیات جبری روی بردارها، استفاده کنیم.

قضیه ۱. گیریم V یک فضای برداری و x و y دو بردار در V باشند. در این صورت یک و فقط یک u متعلق به V وجود دارد، به طوری که $x + u = y$.

اثبات ابتدا باید نشان دهیم که u ای از این نوع وجود دارد. برای انجام این کار، گیریم $u = (-x) + y$ در این صورت

$$\begin{aligned} x + u &= x + ((-x) + y) \\ &= (x + (-x)) + y && [\text{بنا به (V۲)}] \\ &= 0 + y && [\text{بنا به (V۴)}] \\ &= y && [\text{بنا به (V۳)}] \end{aligned}$$

حال نشان می‌دهیم که فقط یک u از این نوع وجود دارد. فرض می‌کنیم u_1 و u_2 بردارهایی در V باشند، به نحوی که

$$x + u_2 = y \text{ و } x + u_1 = y$$

پس $x + u_1 = x + u_2$ لذا

$$(-x) + (x + u_1) = (-x) + (x + u_2)$$

$$((-x) + x) + u_1 = ((-x) + x) + u_2 \quad [\text{بنا به (V2)}]$$

$$0 + u_1 = 0 + u_2 \quad [\text{بنا به (V4)}]$$

$$u_1 = u_2 \quad [\text{بنا به (V3)}]$$

معمولاً بردار $y + (-x)$ را که در بالا مورد بررسی قرار گرفت با $y - x$ نشان می‌دهند. بردار $y - x$ را بردار حاصل از کم کردن x از y می‌نامند. به عنوان مثالی دیگر از نتایجی که از اصول فضای برداری می‌توان به دست آورد، قضیه زیر را می‌آوریم.

قضیه ۲ گیریم V یک فضای برداری، x برداری در V ، و α یک اسکالر باشد. آنگاه

$$\alpha \cdot 0 = 0 \quad (1)$$

$$0 \cdot x = 0 \quad (2)$$

$$\alpha x = 0 \text{ نتیجه می‌دهد که یا } \alpha = 0 \text{ و یا } x = 0 \quad (3)$$

اثبات برای اثبات (۱)، بنا به (V3)، مشاهده می‌کنیم که

$$0 + 0 = 0$$

پس

$$\alpha(0 + 0) = \alpha \cdot 0$$

$$\alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0 = \alpha \cdot 0 \quad [\text{بنا به (V6)}]$$

طبق قضیه ۱، می‌دانیم که فقط یک بردار u وجود دارد چنانکه $\alpha \cdot 0 + u = \alpha \cdot 0$. بنا به (V3)، برداری از این نوع، صفر است. پس $\alpha \cdot 0 = 0$. به طریق دیگر با افزودن $-\alpha \cdot 0$ به طرفین تساوی $\alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0 = \alpha \cdot 0$ ، خواهیم داشت

$$((\alpha \cdot 0) + (\alpha \cdot 0)) + (-\alpha \cdot 0) = (\alpha \cdot 0) + (-\alpha \cdot 0)$$

$$= 0 \quad [\text{بنا به (V4)}]$$

$$(\alpha \cdot 0) + (\alpha \cdot 0 + (-\alpha \cdot 0)) = 0 \quad [\text{بنا به (V2)}]$$

$$(\alpha \cdot 0) + 0 = 0 \quad [\text{بنا به (V4)}]$$

$$\alpha \cdot 0 = 0 \quad [\text{بنا به (V3)}]$$

برای اثبات (۲)، مشاهده می‌کنیم که $x(0 + 0) = x \cdot 0$ ، زیرا $0 = 0 + 0$.

لذا، طبق (V۵)، $0 \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$ ، مانند قبل، با افزودن $0 \cdot x$ - به طرفین تساوی قلی، خواهیم داشت $0 \cdot x = 0$.

برای اثبات (۳)، فرض می‌کنیم که $\alpha x = 0$. اگر $\alpha \neq 0$ ، می‌توانیم طرفین این تساوی را در α^{-1} ضرب کنیم تا داشته باشیم:

$$\alpha^{-1}(\alpha x) = \alpha^{-1} \cdot 0 = 0 \quad [\text{بنا به (۱)}]$$

$$(\alpha^{-1}\alpha)x = 0 \quad [\text{بنا به (V۷)}]$$

$$1 \cdot x = 0$$

$$x = 0 \quad [\text{بنا به (V۸)}]$$

لذا، اگر $\alpha \neq 0$ ، داریم $x = 0$. بنابراین باید داشته باشیم $\alpha = 0$ و یا $x = 0$.

قضیهٔ زیر می‌گوید که ضرب اسکالر $x(-1)$ از بردار x با قرینه‌اش $-x$ مساوی است.

قضیهٔ ۳ اگر V یک فضای برداری و x برداری در V باشد، در این صورت

$$(-1)x = -x.$$

اثبات چون $0 = (-1) + 1$ ، داریم

$$(1 + (-1))x = 0 \cdot x = 0 \quad [\text{بنا به (۲) از قضیهٔ ۲}]$$

لذا، طبق (V۵)،

$$(1)x + (-1)x = 0$$

یا با استفاده از (V۸)،

$$x + (-1)x = 0$$

اگر $-x$ را به طرفین این تساوی بیفزاییم، خواهیم داشت $(-1)x = -x$.

به طور کلی، اصول فضای برداری به ما امکان می‌دهد که اعمال جبری را تقریباً به همان طریقی که روی بردارهای ستونی انجام می‌دادیم، روی بردارهای مجرد نیز انجام دهیم. در نظر داشتن این مطلب، ضرورت مراجعه به اصول (V۱) - (V۸) فضای برداری را از میان می‌برد.

تمرینات

۱. فرض کنید V یک فضای برداری باشد. فرض کنید x و e اعضای V باشند به طوری که $x + e = x$. نشان دهید که $e = 0$.

۲. اگر V یک فضای برداری باشد. $x \in V$ و $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ اسکالر باشند، با استفاده از

استقرا ثابت کنید که $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)x = \alpha_1 x + \alpha_2 x + \dots + \alpha_n x$

۳. اگر V یک فضای برداری، x_1, x_2, \dots, x_n متعلق به V ، و α یک اسکالر باشد، با استفاده از استقرا نشان دهید که

$$\alpha(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \alpha x_1 + \alpha x_2 + \dots + \alpha x_n.$$

۴. اگر V یک فضای برداری حقیقی و x متعلق به V باشد و $x + x = 0$ ، نشان دهید که $x = 0$.

۵. اگر V یک فضای برداری باشد و x_1, x_2, y_1 و y_2 متعلق به V باشند،

$$ax_1 + bx_2 = y_1$$

$$cx_1 + dx_2 = y_2$$

و

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

x_1 و x_2 را بر حسب y_1 و y_2 بیابید.

۶. اگر V یک فضای برداری، x متعلق به V ، و α و β دو اسکالر باشند، و اگر $\alpha x = \beta x$ و $\alpha \neq \beta$ ، نشان دهید که $x = 0$.

۷. اگر V یک فضای برداری باشد و $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ بردارهایی در V باشند، و

$$x_1 + x_2 + x_3 = y_1$$

$$-2x_1 + x_2 - 2x_3 = y_2$$

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 = y_3$$

نشان دهید که $y_1 + y_2 - y_3 = 0$.

۸. اگر V یک فضای برداری باشد و $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ متعلق به V باشند و

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1$$

$$x_1 + \dots + x_n = y_2$$

$$\vdots$$

$$x_n = y_n$$

x_1, x_2, \dots, x_n را بر حسب y_1, y_2, \dots, y_n بیابید.

۹. فضایی برداری مانند V بیابید که دارای دو بردار x و y باشد و هیچیک از این دو بردار، مضرب اسکالر دیگری نباشد.

۱۵. نشان دهید که هر مجموعه V با اعمال جمع، و ضرب اسکالری که در $(V2) - (V8)$ صدق می‌کند، باید در $(V1)$ نیز صدق کند. [راهنمایی: $(x + y)(1 + 1)$ را به دو طریق با استفاده از $(V5)$ و $(V6)$ حساب کنید.]

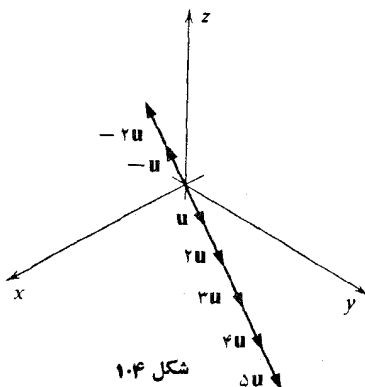
۳ زیرفضاها

اگر V یک فضای برداری روی اعداد حقیقی (یا اعداد مختلط) باشد، زیرمجموعه‌های معینی از V ، به نام زیرفضا، وجود دارند که تحت همان اعمال جبری، خود نیز فضای برداری‌اند. هدف این بخش، مطالعه چنین اشیا‌یی است.

تعریف اگر V یک فضای برداری و H زیر مجموعه‌ای غیر تهی از V با خواص زیر باشد
(۱) هرگاه x و y متعلق به H باشند، $x + y$ آنگاه $x + y$ متعلق به H است.
(۲) اگر x متعلق به H و α یک اسکالر باشد، آنگاه αx متعلق به H است. آنگاه H را یک زیر فضای برداری V می‌نامند.

به عبارت دیگر، یک زیر فضای V زیر مجموعه‌ای است که تحت اعمال جبری جمع، و ضرب اسکالر بسته باشد.

به عنوان مثال، گیریم L در فضای R^3 مجموعه بردارهایی باشد که روی خطی که از مبدأ می‌گذرد، قرار دارند. (ر.ک، شکل ۱۰۴). از روی بیان هندسی فرایند ضرب اسکالر، واضح است که همه بردارهای L مضارب اسکالر یک بردار غیر صفر در L ، مثلاً u ، هستند. اگر x و y متعلق به L باشند، به ازای اسکالرهایی مناسب α و β ، داریم $x = \alpha u$ و $y = \beta u$. در این صورت، $x + y = (\alpha + \beta)u$ ، لذا $x + y$ به عنوان مضرب اسکالری از u ، الزاماً باید متعلق به L باشد. بعلاوه، چون $\lambda x = \lambda(\alpha u) = (\lambda\alpha)u$ ، همچنین می‌بینیم که اگر x متعلق به L و λ یک اسکالر باشد، آنگاه λx به L تعلق دارد. پس، با تحقیق برقراری شرایط (۱) و (۲) از تعریف زیرفضا، می‌بینیم که L زیر فضایی از R^3 است.



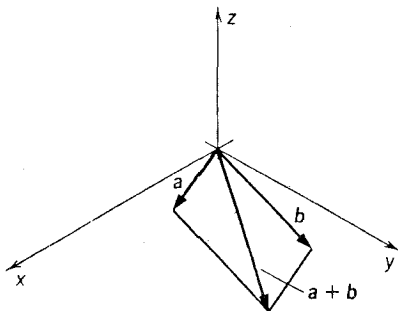
به عنوان مثال دیگری از یک زیر فضای R^3 ، گیریم H مجموعه آن بردارهایی از R^3 باشد که در صفحه xy قرار دارند. به عبارت دیگر، H مرکب از بردارهایی به صورت

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$ است. اگر $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{bmatrix}$ دو بردار از این نوع باشند، آنگاه حاصلجمع آنها

$\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ 0 \end{bmatrix}$ هم در H است. همچنین اگر $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$ در H و α یک اسکالر باشد، آنگاه

$\alpha \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ 0 \end{bmatrix}$ و این بردار نیز در H می باشد. در نتیجه H زیرفضایی از \mathbb{R}^3 است.

زیر فضا بودن H را می توان به طریق هندسی نیز تعبیر کرد. اگر \mathbf{a} و \mathbf{b} دو بردار در صفحه xy باشند، آنها را می توان به عنوان پاره خطهای جهت داری که از مبدأ شروع شده و در صفحه xy واقع اند، در نظر گرفت. در این صورت بردار $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ را می توان به عنوان قطر متوازی الاضلاعی که اضلاع مجاورش \mathbf{a} و \mathbf{b} هستند به حساب آورد. واضح است که این بردار نیز در صفحه xy قرار دارد. (ر.ک. شکل ۲.۴). همین طور، مضارب اسکالر بردارهای صفحه xy نیز در صفحه xy واقع اند.



شکل ۲.۴

هر فضای برداری V دارای حداقل دو زیرفضاست. یکی به نام زیرفضای صفر، که فقط شامل بردار صفر است. واضح است که این مجموعه تحت اعمال جمع، و ضرب اسکالر بسته است. زیرفضای دیگر V ، زیرفضای مرکب از تمام بردارهای V است. زیر-فضایی که نه زیرفضای صفر است و نه تمام فضا، زیرفضای سره نامیده می شود. اکنون احکامی را درباره زیرفضاها ثابت می کنیم.

گزاره ۱ اگر H زیرفضایی از فضای برداری V باشد، $\mathbf{0}$ متعلق به H است.

اثبات گیریم \mathbf{x} عنصری از H باشد. آنگاه، چون مضارب اسکالر بردارهای H متعلق به H هستند، $\mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{x}$ نیز متعلق به H است. ●

گزاره ۲ اگر H زیرفضایی از فضای برداری V باشد، و \mathbf{x} متعلق به H ، آنگاه $-\mathbf{x}$ نیز

متعلق به H است.

اثبات اگر x متعلق به H باشد، چون H تحت ضرب اسکالر بسته است، $x = -x$ (۱-)
 به H تعلق دارد.

قضیه اگر H زیرفضایی از فضای برداری V باشد، آنگاه H تحت اعمال جمع، و ضرب اسکالر تعریف شده روی V ، یک فضای برداری است.

در این حالت، واقعاً چیز خیلی زیادی برای اثبات نداریم. H یک مجموعه است. جمع، و ضرب اسکالر همان طور روی H تعریف شده اند که روی V . بنا به شرط (۱)، از تعریف زیرفضا، حاصل جمع دو عنصر H نیز عنصری از H است. برطبق (۲) ضرب اسکالر عنصری از H نیز در H است. لذا، H دارای یک قاعده جمع، و ضرب اسکالر است که عناصر H را به دست می دهند. اکنون بررسی این نکته باقی می ماند که H در اصول (۷۱) - (۷۸)، صدق می کند. (۷۱) و (۷۲) در H برقرارند، زیرا در V چنین است. بنا به گزاره ۱، ۵ در H واقع است. در نتیجه (۷۳) در H برقرار است. با استفاده از گزاره ۲، نتیجه می شود که (۷۴) نیز در H درست است. H دارای خواص (۷۵) - (۷۸) است، زیرا V این خواص را دارد.

این قضیه به ما امکان می دهد که بدون تحقیق برقراری اصول (۷۱) - (۷۸) فضای برداری - که کار خسته کننده ای است - مثالهای جدید بسیاری بسازیم.

مثال ۱ گیریم L زیرمجموعه ای از R^n باشد، مرکب از آن بردارهایی که مؤلفه اولشان صفر است. چون حاصل جمع دو بردار با مؤلفه اول صفر، باز برداری است که مؤلفه اولش صفر است، L تحت عمل جمع بسته است. همین طور یک ضرب اسکالر از برداری با مؤلفه اول صفر، برداری است که مؤلفه اول آن صفر است. لذا مضارب اسکالر بردارهای L نیز در L هستند. بنا براین، L یک زیرفضاست.
 بنا به قضیه فوق می توانیم نتیجه بگیریم که n تایی های مرتب متعلق به L ، یک فضای برداری حقیقی تشکیل می دهند.

مثال ۲ گیریم A ماتریس ثابت $n \times m$ ای با درایه های حقیقی باشد و

$$N = \{x: Ax = 0, x \in R^n\}.$$

ادعا می کنیم که N زیرفضایی از R^n است.

ابتدا، فرض می کنیم که $x_1 \in N$ و $x_2 \in N$ ؛ آنگاه

$$\begin{aligned} A(x_1 + x_2) &= Ax_1 + Ax_2 \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

لذا، $x_1 + x_4 \in N$. حال اگر $\alpha \in N$ یک اسکالر باشد،

$$\begin{aligned} A(\alpha x) &= \alpha A(x) \\ &= \alpha \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

پس، $\alpha x \in N$.

با تحقیق برقراری شرایط (۱) و (۲) از تعریف زیرفضا، می بینیم که N زیرفضایی از \mathbb{R}^4 است. قضیه قبلی تضمین می کند که با تعریف مناسب جمع، و ضرب اسکالر، N به نوبه خود یک فضای برداری است. فرمولبندی ملموستری از مثال ۲ را می توان با بررسی جوابهای دستگاه معادلات همگن

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

به دست آورد. اگر

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

دو جواب از این نوع باشند، حاصل جمع آنها را با

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_1' \\ x_2 + x_2' \\ x_3 + x_3' \\ x_4 + x_4' \end{bmatrix}$$

و حاصل ضرب اسکالر را با

$$\alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \\ \alpha x_4 \end{bmatrix}$$

تعریف می کنیم.

با تبدیل دستگاه معادلات به نماد ماتریسی و به کار بردن مثال ۲، می بینیم که مجموعه جوابهای دستگاه معادلات همراه با جمع، و ضرب اسکالر فوق، یک فضای برداری روی اعداد حقیقی تشکیل می دهد. البته، می توان با بررسی مشروح اصول (V۱) - (V۸) فضای برداری به همین نتیجه رسید.

مثال ۳ در فضای P_n ، یعنی مجموعه چند جمله‌ای‌های با درجه نایشت از n و با ضرایب حقیقی، زیر مجموعه

$$H = \left\{ f \mid \int_0^1 f(x) dx = 0 \text{ و } f \in P_n \right\}$$

یک زیر فضا است. ابتدا فرض می‌کنیم $f \in H$ و $g \in H$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} \int_0^1 (f(x) + g(x)) dx &= \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 g(x) dx \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

بنابراین $f + g \in H$. حال فرض می‌کنیم $f \in H$ و α یک اسکالر باشد، در این صورت

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\alpha f(x)) dx &= \alpha \int_0^1 f(x) dx \\ &= \alpha \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

پس، $\alpha f \in H$.

با تحقیق برقراری شرایط (۱) و (۲) از تعریف زیر فضا، نتیجه می‌گیریم که H زیر فضایی از P_n است. سپس از قضیه فوق چنین برمی‌آید که H ، با تعاریف مناسب جمع، و ضرب اسکالر، خود یک فضای برداری است.

حال که چند مثال از آن زیر مجموعه‌های فضای برداری که زیر فضا هستند را دیده‌ایم، بررسی چند زیر مجموعه از R^2 که زیر فضا نیستند می‌تواند مفید باشد.

مثال ۴ در R^2 ، گیریم

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \mid \alpha \geq 0 \text{ و } \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \in R^2 \right\}$$

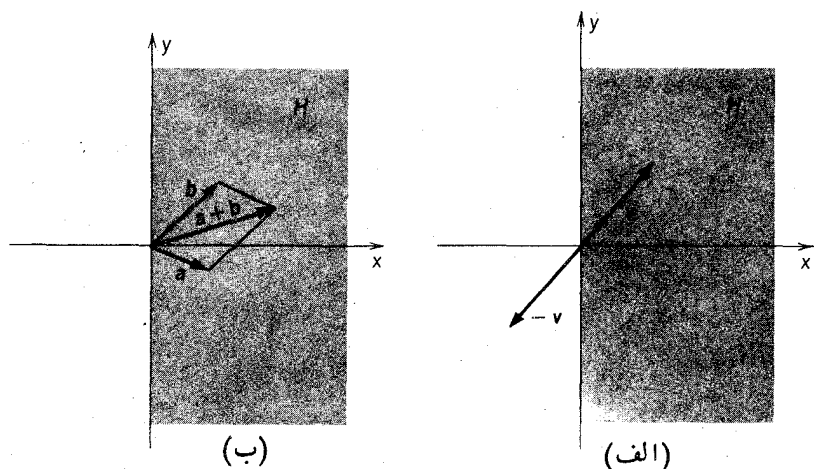
این مجموعه از لحاظ هندسی متناظر است با نیم صفحه سمت راست. (ر.ک. شکل ۳.۴ الف). اگر $x_1 \in H$ و $x_2 \in H$ ، آنگاه

$$x_2 = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \text{ و } x_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$$

که در آن $\alpha_1 \geq 0$ و $\alpha_2 \geq 0$.

پس

$$x_1 + x_2 = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ \beta_1 + \beta_2 \end{bmatrix}$$



شکل ۳.۴

که در آن $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 0$ ، ولذا $x_1 + x_2 \in H$. از اینرو H تحت عمل جمع بسته است. لکن، چون

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in H$$

$$(-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

در H نیست، مضارب اسکالر بردارهای واقع در H ، در H نیستند. (ر.ک. شکل ۳.۴ (ب)). در نتیجه، H زیرفضایی از \mathbb{R}^2 نیست. در این حالت، نکته جالب توجه آن است که اگر $x \in H$ و $\alpha \geq 0$ ، αx نیز متعلق به H است.

مثال ۵ در \mathbb{R}^2 ، گیریم

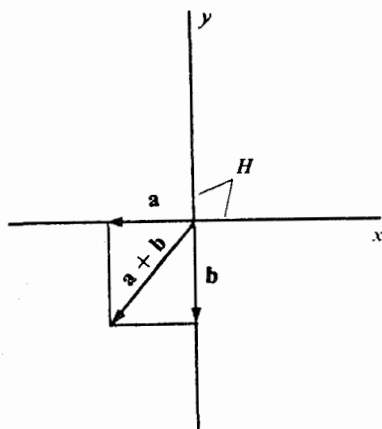
$$H = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \mid \beta = 0 \text{ یا } \alpha = 0 \text{ و } \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

این مجموعه، از نظر هندسی، مرکب از همه نقاط روی دو محور مختصات است. (ر.ک. شکل ۴.۴). مضارب اسکالر بردارهای H نیز در H هستند، ولی H تحت عمل جمع بسته نیست. زیرا داریم

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in H \text{ و } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in H$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ولی

متعلق به H نیست.

شکل ۴.۴

تمرینات

۱. کدامیک از زیر مجموعه‌های \mathbb{R}^2 که در زیر آمده‌اند، زیر فضا هستند؟

- | | | | |
|--------------------------------------|-----|-----------------------------|-------|
| $\{(x, y) \mid x^2 = y^2\}$ | (ب) | $\{(x, y) \mid x = 3y\}$ | (الف) |
| $\{(x, y) \mid x = y^2\}$ | (د) | $\{(x, y) \mid x + y = 1\}$ | (ج) |
| $\{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ | (و) | $\{(x, y) \mid y = 0\}$ | (ه) |
| | | $\{(x, y) \mid x = y\}$ | (ز) |

۲. کدامیک از زیر مجموعه‌های \mathbb{R}^3 که در زیر آمده‌اند، زیر فضا هستند؟

- | | |
|---|-------|
| $\{(x, y, z) \mid y + z = 0 \text{ و } x + 3y = 0\}$ | (الف) |
| $\{(x, y, z) \mid y = 0 \text{ یا } x = 0\}$ | (ب) |
| $\{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$ | (ج) |
| $\{(x, y, z) \mid z \geq 0 \text{ و } y \geq 0 \text{ و } x \geq 0\}$ | (د) |
| $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ | (ه) |
| $\{(x, y, z) \mid z = 2x + 2y\}$ | (و) |
| $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ و } z = 0\}$ | (ز) |

۳. فرض کنید H_i ، زیر مجموعه‌ای از \mathbb{R}^n ، مرکب از بردارهایی باشد که مؤلفه i ام آنها صفر است. نشان دهید که H_i زیر فضایی از \mathbb{R}^n است.۴. فرض کنید P_n مجموعه چند جمله‌ای‌های با درجه نایبتر از n باشد. فرض کنید H_e گردآورده چند جمله‌ای‌های زوج P_n و H_o گردآورده چند جمله‌ای‌های فرد P_n باشد. نشان دهید که H_e و H_o زیر فضاهایی از P_n هستند.۵. در موارد زیر نشان دهید که زیر مجموعه‌های داده شده از فضای ماتریسهای 2×2 ،

$M_{\mathbb{R}}$ ، زیرفضا هستند.

(الف) همه ماتریسهای به صورت $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ ، که در آن a و b اعداد حقیقی اند.

(ب) همه ماتریسهای به صورت $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ ، که در آن a و b اعداد حقیقی اند.

(ج) همه ماتریسهای به صورت $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ ، که در آن a, b, c اعداد حقیقی اند.

(د) همه ماتریسهای به صورت $\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$ ، که در آن a, b, c اعداد حقیقی اند.

(ه) همه ماتریسهای به صورت $\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix}$ ، که در آن a و b اعداد حقیقی اند.

(و) همه ماتریسهای به صورت $\begin{bmatrix} a & c \\ -c & b \end{bmatrix}$ ، که در آن a, b, c اعداد حقیقی اند.

(ز) همه ماتریسهای به صورت $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ ، که در آن a و b اعداد حقیقی اند.

۶. فرض کنید P نشانگر گردآورده همه چند جمله‌ایهای با ضرایب حقیقی باشد.

(الف) نشان دهید که P یک فضای برداری روی اعداد حقیقی است.

(ب) نشان دهید که زیر مجموعه‌هایی از P که در زیر آمده‌اند، زیرفضا هستند.

$$(۱) \quad n \text{ عدد صحیح مثبت ثابتی است، } \{f \mid (f \text{ درجه } f) \leq n\}$$

$$(۲) \quad \{f \mid f(\alpha) = 0 \text{ و } \alpha \text{ عدد ثابتی است}\}$$

$$(۳) \quad \{f \mid f(\alpha) = f(\beta) \text{، که در آن } \alpha \text{ و } \beta \text{ اعداد ثابتی هستند}\}$$

$$(۴) \quad \{f \mid f'(\alpha) = 0 \text{، که در آن } \alpha \text{ عدد ثابتی است}\}$$

$$(۵) \quad \{f \mid f \text{ بر } (x-1) \text{ قابل قسمت است}\}$$

$$(۶) \quad \{f \mid f(0) = f'(0) = f''(0) = 0\}$$

$$(۷) \quad \{f \mid f(0) - \int_0^1 f(x) dx = 0\}$$

۷. در فضای ماتریسهای $n \times n$ با درایه‌های حقیقی، $A = [a_{ij}]_{(nn)}$ ، گوئیم که ماتریس،

بالا مثلثی است اگر $a_{ij} = 0$ برای $i > j$. نشان دهید که ماتریسهای بالا مثلثی زیرفضایی

از فضای ماتریسهای $n \times n$ تشکیل می‌دهند.

۸. نشان دهید که ماتریسهای متقارن، زیر فضایی از فضای ماتریسهای $n \times n$ تشکیل

می‌دهند. آیا ماتریسهای هرمیتی زیر فضایی از فضای ماتریسهای $n \times n$ با درایه‌های مختلط

تشکیل می‌دهند؟

۹. نشان دهید که ماتریسهای قطری، زیر فضایی از فضای ماتریسهای $n \times n$ تشکیل می‌دهند.

۱۰. فرض کنید V یک فضای برداری روی اعداد حقیقی باشد و H زیر مجموعه‌ای از

V . نشان دهید که (الف)، (ب)، و (ج) هم ارزند.

(الف) H یک زیر فضا است.

(ب) اگر $x, y \in H$ ، آنگاه $x + y \in H$.

اگر $x \in H$ ، آنگاه $-x \in H$.

اگر $x \in H$ و $\alpha \geq 0$ یک اسکالر حقیقی باشد، آنگاه $\alpha x \in H$.

(ج) اگر $x, y \in H$ و β یک اسکالر باشد، آنگاه $x + \beta y \in H$.

۱۱. فرض کنید M_{nn} نشانگر فضای برداری ماتریسهای $n \times n$ با درایه‌های حقیقی باشد. در این فضا

(الف) نشان دهید که مجموعه ماتریسهای وارون پذیر $n \times n$ ، زیر فضایی از M_{nn} نیست.

(ب) نشان دهید که مجموعه ماتریسهای وارون ناپذیر $n \times n$ ، تحت ضرب اسکالر بسته است؛ یعنی، مضرب اسکالرها ماتریس وارون ناپذیر، وارون ناپذیر است. ولی این مجموعه، زیر فضایی از M_{nn} نیست.

۱۲. فرض کنید B یک ماتریس ثابت در M_{nn} باشد. نشان دهید که زیر مجموعه‌های M_{nn} ، مذکور در زیر، زیر فضا هستند.

$$\{A \mid AB = BA \text{ و } A \in M_{nn}\} \quad (\text{الف})$$

$$\{A \mid AB + BA = 0 \text{ و } A \in M_{nn}\} \quad (\text{ب})$$

$$\{A \mid AB = 0 \text{ و } A \in M_{nn}\} \quad (\text{ج})$$

$$\{A \mid BA = 0 \text{ و } A \in M_{nn}\} \quad (\text{د})$$

مثالهایی ارائه دهید که نشان دهد، (ج) و (د) الزاماً معرف زیر فضاهای یکسان نیستند.

۱۳. فرض کنید a_1, a_2, \dots, a_n اعداد حقیقی باشند. نشان دهید که بردارهای

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

در \mathbb{R}^n ، به طوری که $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0$ زیر فضایی از \mathbb{R}^n تشکیل می‌دهند. چرا این یک حالت خاص از مثال ۲ در متن است؟

۱۴. فرض کنید V یک فضای برداری باشد و H و K زیر فضاهایی از V . نشان دهید که مجموعه $H \cap K = \{x \mid x \in K \text{ و } x \in H\}$ زیر فضایی از V است.

۱۵. فرض کنید V یک فضای برداری و H و K دو زیر فضای V باشند. نشان دهید که مجموعه $\{x \mid x = h + k, h \in H \text{ و } k \in K\}$ در آن $H + K = \{x \mid k \in K \text{ و } h \in H\}$ زیر فضایی از V است.

۱۶. اگر H زیر فضایی از فضای برداری V باشد و x_1, x_2, \dots, x_n متعلق به V و به علاوه $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ اسکالر باشند، با استفاده از استقرا ثابت کنید که

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$ متعلق به H است.

۴ پدید آوردن

گیریم V یک فضای برداری باشد، x_1, x_2, \dots, x_n بردارهایی در V ، و $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ اسکالر باشند. اگر بردار y در V را بتوان به صورت $y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$ نوشت، آنگاه y را یک ترکیب خطی x_1, x_2, \dots, x_n گویند. مثلاً در P_2 ، مجموعه چند جمله‌ای‌های با درجهٔ نایشتتر از ۲، هر عنصر را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از $1, x, x^2$ نوشت. زیرا داریم، $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ در R^3 ، اگر انتهای بردار v نقطهٔ (x, y, z) باشد، داریم $v = xi + yj + zk$ و لذا v ترکیبی خطی از i, j, k است.

زیرفضاها را می‌توان با استفاده از مفهوم ترکیب خطی به صورت زیر مشخص کرد: زیرمجموعهٔ H از فضای برداری V ، زیرفضاست اگر و فقط اگر، وقتی x_1, x_2, \dots, x_n متعلق به H باشند، هر ترکیب خطی از x_1, x_2, \dots, x_n نیز متعلق به H باشد. برای تولید زیرفضاهای یک فضای برداری V ، روشی طبیعی، مبتنی بر استفاده از ترکیبات خطی، وجود دارد. اگر S زیرمجموعه‌ای از فضای برداری V باشد، مجموعهٔ پدید آمده توسط S ، که آن را با $sp(S)$ نشان می‌دهیم، برحسب تعریف، مجموعهٔ بردارهایی است که هر کدام از آنها را بتوان به صورت ترکیبی خطی از بردارهای S نوشت. برای مثال، در R^3 ، مجموعهٔ پدید آمده توسط

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

مرکب از تمام بردارهای به صورت

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}$$

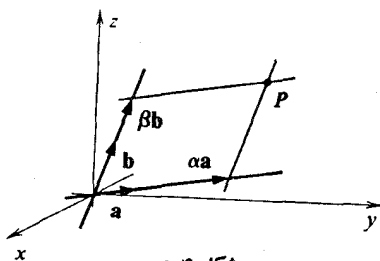
است. در این حالت، مجموعهٔ پدید آمده، دقیقاً آن زیرمجموعه از R^3 است که مؤلفهٔ سوم بردارهای عضو آن، صفر است. اگر مجموعهٔ پدید آمده توسط

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

را در نظر بگیریم، در می‌یابیم که این مجموعه، دقیقاً عبارت است از همین گردآورده از بردارها. درواقع، مؤلفهٔ سوم هر ترکیب خطی از سه بردار فوق، صفر است. از طرف دیگر، واضح است که هر بردار را که مؤلفهٔ سومش صفر باشد، می‌توان به صورت ترکیبی خطی از دو بردار اولی مجموعهٔ فوق، و لذا الزاماً، به صورت ترکیبی خطی از هر سه بردار این مجموعه نوشت.

برای روشن کردن معنی هندسی پدید آوردن، مجموعه پدید آمده توسط دوبردار ناهمخط a و b در R^3 را مشخص می‌کنیم. نشان خواهیم داد که مجموعه پدید آمده توسط a و b ، متشکل از بردارهای واقع در صفحه‌ای است که از مبدأ می‌گذرد و با بردارهای a و b معین می‌گردد. (ر. ک. شکل ۵.۴).

برای شروع کار متذکر می‌شویم که، برطبق معنی هندسی جمع، و ضرب اسکالر بردارها، هر ترکیب خطی از a و b باید در صفحه‌ای واقع باشد که توسط a و b معین می‌شود. زیرا، کافی است توجه کنیم که بردار $\alpha a + \beta b$ چیست. واضح است که αa و βb (که هریک روی خطی قرار دارد که از مبدأ می‌گذرد و بترتیب توسط a و b معین می‌گردد.) هر دو، در صفحه‌ای که از مبدأ می‌گذرد و با بردارهای a و b معین می‌گردد، واقع اند. چون $\alpha a + \beta b$ در صفحه‌ای قرار دارد که αa و βb هر دو در آن واقع اند، $\alpha a + \beta b$ در صفحه‌ای واقع است که با بردارهای a و b معین می‌شود.



شکل ۵.۴

ازطرف دیگر، گیریم P نقطه‌ای در صفحه معین شده توسط بردارهای ناهمخط a و b باشد. در این صفحه، خط l_P را طوری رسم می‌کنیم که از نقطه P به موازات پاره خط جهت‌دار وابسته به بردار a بگذرد. چون a و b ناهمخط هستند، l_P موازی خط تولید شده توسط b نیست و بنابراین آن را در نقطه‌ای، مثلاً در انتهای بردار βb قطع می‌کند. همین‌طور، اگر خط l_P را طوری رسم کنیم که از نقطه P به موازات بردار b بگذرد، می‌بینیم که خط تولید شده توسط بردار a را در نقطه انتهایی برداری مانند αa قطع می‌کند. برطبق این نحوه ترسیم، P الزاماً انتهای قطر یک متوازی الاضلاع است که اضلاع مجاورش با بردارهای αa و βb معرفی می‌شوند. ازاینرو، اگر v برداری باشد که نقطه انتهایی آن P است، آنگاه $v = \alpha a + \beta b$. بنابراین، هر بردار واقع در صفحه معین شده توسط a و b ، ترکیبی خطی از a و b است.

شاید، به تشابه بین این روش و روش پیدا کردن مختصات دکارتی در صفحه، توجه کرده باشید. از مثالهای قبلی، خاصیت مهمی از $sp(S)$ را به دست می‌آوریم.

قضیه اگر V یک فضای برداری باشد و S زیرمجموعه‌ای از V ، آنگاه $sp(S)$ زیرفضایی از V است.

اثبات فرض می‌کنیم x و y متعلق به $sp(S)$ باشند. دراین صورت

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n$$

$$\mathbf{y} = \beta_1 \mathbf{y}_1 + \beta_2 \mathbf{y}_2 + \dots + \beta_m \mathbf{y}_m$$

که در آن $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ و $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ اسکالرنند و $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ و $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_m$ بردارهایی در S می باشند. پس

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n + \beta_1 \mathbf{y}_1 + \dots + \beta_m \mathbf{y}_m$$

لذا، $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ ترکیبی خطی از بردارهای S است و بنا بر این $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ متعلق به $\text{sp}(S)$ است. به علاوه، اگر α یک اسکالر باشد، داریم

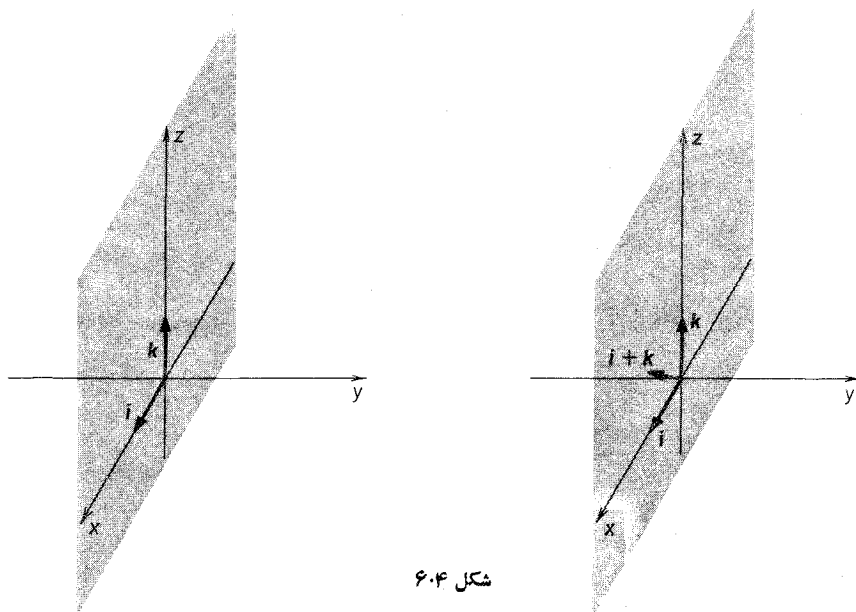
$$\alpha \mathbf{x} = \alpha(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n) = (\alpha \alpha_1) \mathbf{x}_1 + \dots + (\alpha \alpha_n) \mathbf{x}_n$$

پس $\alpha \mathbf{x}$ به عنوان ترکیبی خطی از بردارهای S ، الزاماً متعلق به $\text{sp}(S)$ می باشد. ●

اگر این قضیه را برای مثال قبلی به کار ببریم، می بینیم که مجموعه بردارهای واقع در صفحه‌ای که از مبدأ می گذرد، زیرفضایی از \mathbb{R}^3 می سازد.

به عنوان مثالی دیگر، گیریم P نشانگر فضای چند جمله‌ایهای یک متغیره با متغیر x و با ضرایب حقیقی باشد. فضای پدید آمده توسط چند جمله‌ایهای $1, x, x^2, \dots, x^n$ در P دقیقاً P_n است، یعنی مجموعه چند جمله‌ایهای با درجه نایبتر از n ، که البته زیرفضایی از P است.

اگر H زیرفضایی از فضای برداری V باشد و $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ گردآورده‌ای از بردارهای V ، به طوری که $\text{sp}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = H$ می گوئیم $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$



فضای H را پدید می‌آورند. به عبارت دیگر، ترکیبات خطی بردارهای x_1, x_2, \dots, x_n ، زیرفضای H را پر می‌کنند.

تذکر این نکته مهم است که یک گردآورده مفروض S از بردارها، که زیرفضای H از فضای برداری V را پدید می‌آورد، ممکن است زوائدی داشته باشد، بدین مفهوم که ممکن است اعضاء بخصوصی از S را بتوان حذف کرد و زیرمجموعه‌ای به دست آورد که همان فضا را پدید آورد. مثلاً، مجموعه بردارهای $\{i, k, i + k\}$ در R^3 را در نظر می‌گیریم (ر. ک. شکل ۶.۴). این بردارها صفحه xyz در R^3 را پدید می‌آورند. لکن، اگر هر عضوی از این مجموعه را حذف کنیم، یک جفت بردار ناهمخط در همین صفحه به دست می‌آوریم. بنا به مثال قبلی، این دو بردار نیز صفحه xyz را پدید می‌آورند.

دربخش بعدی شرطی را روی مجموعه‌ای از بردارهای $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ بررسی می‌کنیم که در صورت برقراری آن، این تکرارها مطمئناً پیش نخواهد آمد.

تمرینات

۱. نشان دهید که هر یک از مجموعه‌های بردارهای زیر، فضایی برداری را که مقابل آن نوشته شده، پدید می‌آورد.

$$R^3 : \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$R^3 : \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

$$R^3 : \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

$$R^3 : \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{د})$$

$$P_4 : x^2, x, 1 \quad (\text{ه})$$

$$P_4 : (1+x)^2, (1+x), 1 \quad (\text{و})$$

$$\text{فضای ماتریسهای متقارن } 2 \times 2 : \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ز})$$

$$\text{فضای ماتریسهای متقارن کج.} : \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ح})$$

$$P_4 : 1 + 2x^2, 1 + x^2, 1 + 2x, 1 + x \quad (\text{ط})$$

$$\text{فضای ماتریسهای قطری } 3 \times 3 : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ی})$$

۲. برای هر یک از صفحات زیر در R^3 ، دو بردار بیابید که آن را پدید آورند.

(الف) صفحه $x = 0$.

(ب) صفحه $x = y$.

(ج) صفحه $y = z$.

۳. n بردار بیابید که R^n را پدید آورند.

۴. چهار عنصر بیابید که فضای ماتریسهای 2×2 را پدید آورند.

۵. فرض کنید $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ مجموعه‌ای از بردارها در فضای برداری V باشد. اگر y_1, y_2, \dots, y_n متعلق به $sp(x_1, x_2, \dots, x_n)$ باشند و y_1, y_2, \dots, y_n فضای V را پدید آورند، نشان دهید که $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ نیز فضای V را پدید می‌آورد.

۶. فرض کنید V یک فضای برداری و x_1, x_2, \dots, x_n بردارهایی در V باشند. نشان دهید که $sp(x_1, x_2, \dots, x_n)$ کوچکترین زیر فضای V است که شامل x_1, x_2, \dots, x_n می‌باشد. به عبارت دیگر، اگر H زیر فضایی از V شامل x_1, x_2, \dots, x_n باشد، نشان دهید که H شامل $sp(x_1, x_2, \dots, x_n)$ نیز هست.

۷. فرض کنید V یک فضای برداری باشد و x_1, x_2, y_1, y_2 بردارهایی در V . اگر

$$x_2 = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 \quad \text{و} \quad x_1 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$$

که در آن

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

نشان دهید که $sp(x_1, x_2) = sp(y_1, y_2)$.

۸. اگر A و B زیر مجموعه‌هایی از فضای برداری V باشند و $A \subset B$ ، نشان دهید که $sp(A) \subset sp(B)$.

۹. اگر y متعلق به $sp(x_1, x_2, \dots, x_n, z)$ باشد ولی به $sp(x_1, x_2, \dots, x_n)$ تعلق نداشته باشد، نشان دهید که z متعلق است به $sp(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$.

۱۰. نشان دهید که

$$sp(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = sp(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

اگر فقط اگر y ترکیبی خطی از x_1, x_2, \dots, x_n باشد.

۱۱. نشان دهید که ماتریسهای وارون پذیر 2×2 ، فضای ماتریسهای 2×2 را پدید می‌آورند. نشان دهید که ماتریسهای وارون نا پذیر 2×2 فضای ماتریسهای 2×2 را پدید می‌آورند.

۱۲. نشان دهید که ماتریسهای

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فضای ماتریسهای 2×2 را پدید نمی آورند.

۱۳. نشان دهید که فضای برداری P از همه چند جمله ایها، نمی تواند توسط تعدادی متناهی از عناصرش پدید آید.

۱۴. نشان دهید که ماتریسهای به صورت $AB - BA$ ، فضای ماتریسهای $n \times n$ را پدید نمی آورند.

۱۵. آیا ممکن است که فضای ماتریسهای $n \times n$ با استفاده از توانهای یک ماتریس A ، یعنی با I_n, A, A^2, \dots, A^n پدید آید؟

۵ استقلال خطی

مفهوم استقلال خطی ارتباط نزدیکی با مفهوم «پدید آوردن»، که در بخش قبلی مورد بحث قرار گرفت، دارد.

گردآورده $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ از بردارهای یک فضای برداری را مستقل خطی گوئیم اگر

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0,$$

ایجاب کند $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. به عبارت دیگر، اگر تنها ترکیب خطی از x_1, x_2, \dots, x_n که مساوی صفر است، ترکیب زیر باشد:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0.$$

برای مثال، در R^2 ، بردارهای

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

مستقل خطی اند. زیرا اگر فرض کنیم

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

آنگاه

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ولذا $\alpha = 0$ و $\beta = 0$. بنابراین، نشان داده ایم که اگر

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

آنگاه $\alpha = \beta = 0$. پس، بردارهای

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

مستقل خطی اند.

به عنوان مثالی دیگر، در P_2 ، مجموعه چند جمله‌ای‌های با ضرایب حقیقی و با درجه نایبتر از ۲؛ بردارهای ۱، $(1+x)$ ، و $(1+x)^2$ مستقل خطی اند. زیرا اگر فرض کنیم

$$\alpha \cdot 1 + \beta(1+x) + \gamma(1+x)^2 = 0$$

آنگاه

$$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 + \beta x + \gamma \cdot 1 + 2\gamma x + \gamma x^2 = 0$$

یا

$$(\alpha + \beta + \gamma) + (\beta + 2\gamma)x + \gamma x^2 = 0$$

چون یک چند جمله‌ای فقط وقتی صفر است که همه ضرایبش صفر باشد، باید داشته باشیم

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$\beta + 2\gamma = 0$$

$$\gamma = 0$$

از اینجا بلافاصله حاصل می‌شود که $\alpha = \beta = \gamma = 0$. حال که نشان داده‌ایم رابطه $\alpha \cdot 1 + \beta(1+x) + \gamma(1+x)^2 = 0$ مستلزم $\alpha = \beta = \gamma = 0$ می‌باشد، می‌توانیم نتیجه بگیریم که $\{1, (1+x), (1+x)^2\}$ یک مجموعه مستقل خطی از بردارهاست.

اگر مجموعه‌ای از بردارها مستقل خطی نباشد، گوئیم که آن مجموعه وابسته خطی است. لذا اگر $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ یک مجموعه وابسته خطی از بردارها باشد، اسکالرهای $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ که لااقل یکی از آنها صفر نیست وجود دارند به طوری که

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0.$$

پس، در R^2 ، بردارهای

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وابسته خطی اند، زیرا داریم

$$(1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

به عنوان مثالی دیگر، در R^3 ، بردارهای

$$\begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 16 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

وابسته خطی اند، زیرا که

$$(-2) \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} + (-2) \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + (+1) \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

قضیه زیر ارتباط بین پدید آوردن و استقلال خطی را آشکار می‌سازد.

قضیه گیریم $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ گردآورده‌ای از بردارهای یک فضای برداری V باشد. در این صورت $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ یک مجموعه وابسته خطی از بردارهاست اگر و فقط اگر یکی از این بردارها ترکیبی خطی از بقیه بردارهای این مجموعه باشد.

اثبات فرض می‌کنیم $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ وابسته خطی باشد. پس

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0,$$

که در آن لااقل یکی از اسکالرها $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ صفر نیست. فرض می‌کنیم $\alpha_i \neq 0$. در این صورت

$$\begin{aligned} \alpha_i x_i &= (-\alpha_1) x_1 + \dots + (-\alpha_{i-1}) x_{i-1} + (-\alpha_{i+1}) x_{i+1} + \dots + (-\alpha_n) x_n \\ x_i &= (-\alpha_1^{-1} \alpha_1) x_1 + \dots + (-\alpha_{i-1}^{-1} \alpha_{i-1}) x_{i-1} + (-\alpha_{i+1}^{-1} \alpha_{i+1}) x_{i+1} \\ &\quad + \dots + (-\alpha_n^{-1} \alpha_n) x_n \end{aligned}$$

بنابراین، x_i ترکیبی خطی از $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ است.

از طرف دیگر، فرض می‌کنیم یکی از بردارها، مثلاً x_i ، ترکیبی خطی از $\{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n\}$ باشد. پس

$$x_i = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_{i-1} x_{i-1} + \beta_{i+1} x_{i+1} + \dots + \beta_n x_n$$

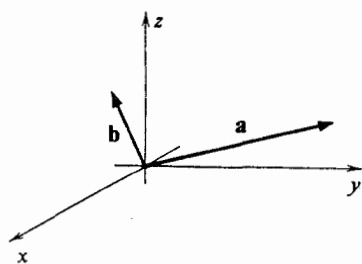
یا

$$\beta_1 x_1 + \dots + \beta_{i-1} x_{i-1} + (-1) x_i + \beta_{i+1} x_{i+1} + \dots + \beta_n x_n = 0$$

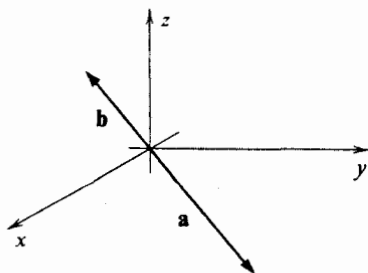
چون ضریب x_i ، یعنی -1 ، مخالف صفر است، بردارهای $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ وابسته خطی اند.

برای مثال، در P_2 ، چند جمله‌ایهای $1+x$ ، $(1+x)^2$ ، و x^2 وابسته خطی اند، زیرا $(1+x)^2 = 1 \times x^2 + 2x(1+x) + (-1) \times 1$.

اکنون معنی هندسی استقلال خطی را بررسی می‌کنیم. ابتدا فرض می‌کنیم a و b دو بردار وابسته خطی در R^3 باشند. بنا به قضیه اخیر، یکی مضرب اسکالر دیگری است. لذا، a و b هر دو روی خطی که از مبدأ می‌گذرد قرار دارند. از طرف دیگر، اگر a و b هر دو روی خطی که از مبدأ می‌گذرد واقع باشند، یکی مضرب اسکالر دیگری است. در نتیجه، برطبق قضیه اخیر، a و b وابسته خطی اند. بنابراین، a و b مستقل خطی اند اگر و فقط اگر ناهمخط باشند. (ر. ک. شکل ۰.۷.۴)



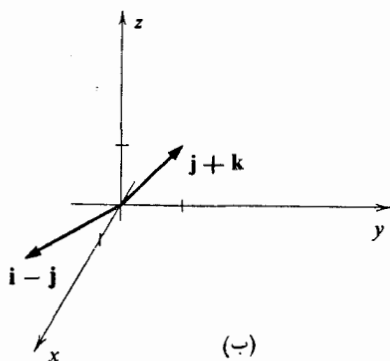
استقلال خطی



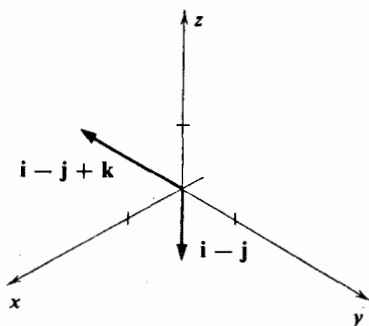
وابستگی خطی

شکل ۷.۴

پس، برای مثال، دو بردار $\{i - j + k \text{ و } i + j\}$ و $\{i - j + k \text{ و } j + k\}$ مستقل خطی اند. (ر. ک. شکل ۸.۴). از طرف دیگر، دو بردار $\{i + j \text{ و } -i - j\}$ و $\{i + 2j + k \text{ و } 2i + 4j + 2k\}$ وابسته خطی اند. (ر. ک. شکل ۹.۴)

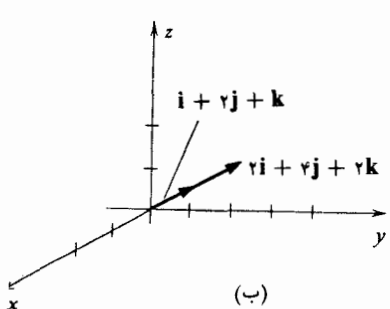


(ب)

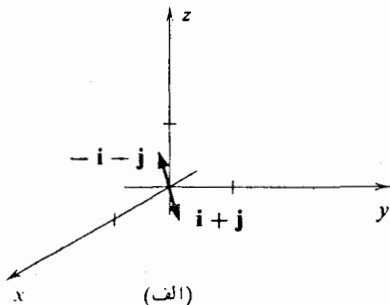


(الف)

شکل ۸.۴



(ب)

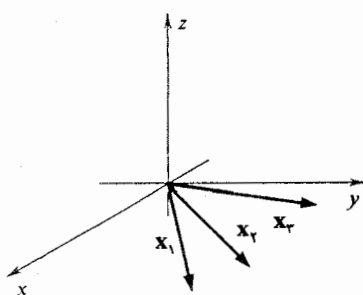


(الف)

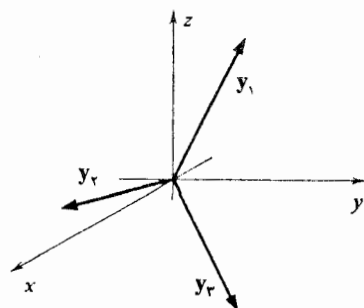
شکل ۹.۴

برای تشخیص اینکه آیا مجموعه‌ای از سه بردار در R^3 وابسته خطی است یا نه، محکی هندسی نیز وجود دارد: مجموعه‌ای از سه بردار R^3 وابسته خطی است اگر و فقط اگر همگی آنها در صفحه‌ای که از مبدأ می‌گذرد واقع باشند. این را به صورت زیر ثابت می‌کنیم:

فرض می‌کنیم سه بردار X_1, X_2, X_3 و R^3 وابسته خطی باشند. (ر. ک. شکل ۱۰.۴). باید نشان دهیم که همگی آنها در یک صفحه واقع‌اند. بنا به قضیه این بخش، یکی از این بردارها، مثلاً X_1 ، ترکیبی خطی از X_2 و X_3 است. یعنی، $X_1 = \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3$. دو حالت وجود دارد. یا X_2 و X_3 همخط‌اند یا همخط نیستند. اگر X_2 و X_3 همخط نباشند، در مثالی از بخش قبلی دیده‌ایم که آنها صفحه‌ای را که از مبدأ می‌گذرد پدید می‌آورند. چون X_1 ترکیبی خطی از X_2 و X_3 است، الزاماً در صفحه پدید آمده توسط X_2 و X_3 قرار دارد. لذا، X_1, X_2, X_3 همگی در یک صفحه که از مبدأ می‌گذرد واقع‌اند. اگر X_2 و X_3 همخط باشند، خطی را که از مبدأ می‌گذرد پدید می‌آورند. X_1 ، که ترکیبی خطی از X_2 و X_3 است، الزاماً روی این خط قرار دارد. چون X_1, X_2, X_3 و X_3 روی یک خط واقع‌اند، الزاماً در یک صفحه، و در حقیقت در هر صفحه‌ای که شامل این خط است جای دارند و لذا، الزاماً هم‌صفحه‌اند.



وابستگی خطی

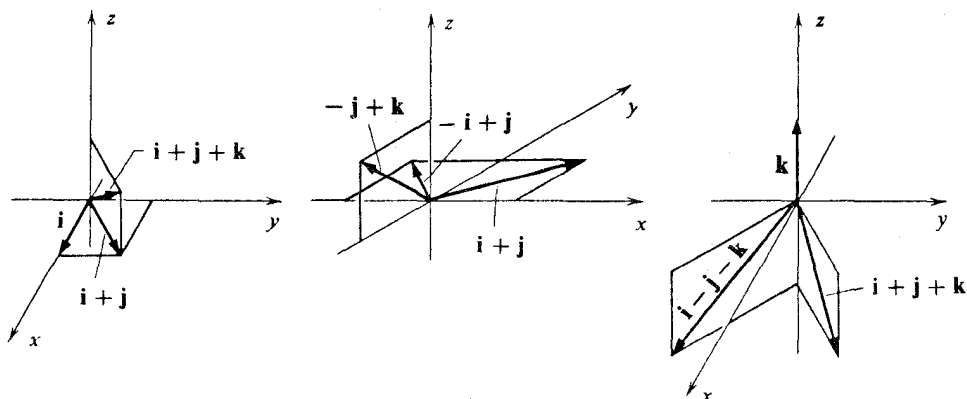


استقلال خطی

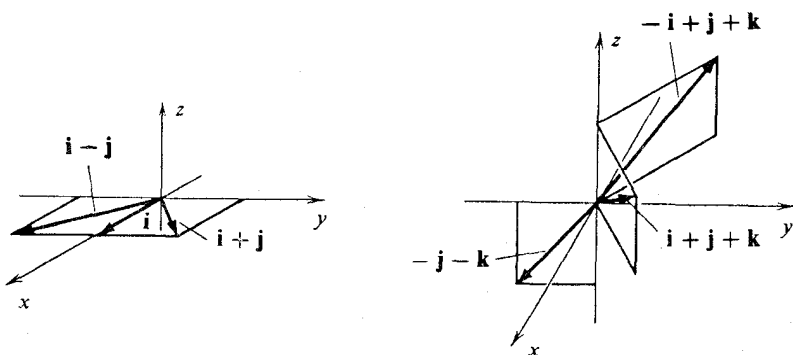
شکل ۱۰.۴

اکنون، می‌بینیم که اگر X_1, X_2, X_3 همگی روی یک صفحه قرار داشته باشند، وابسته خطی‌اند. اگر دوتا از این بردارها، مثلاً X_2 و X_3 ، همخط نباشند، بنا به مثال بخش قبلی، صفحه‌ای را که در آن قرار دارند پدید می‌آورند، ولی بنا به فرض، X_1 متعلق به این صفحه است و بنابراین، ترکیبی خطی از X_2 و X_3 می‌باشد. پس، X_1, X_2, X_3 وابسته خطی‌اند. از طرف دیگر، اگر هر زوج از بردارهای مجموعه $\{X_1, X_2, X_3\}$ همخط نباشند، آنگاه هر سه بردار باید روی خطی که از مبدأ می‌گذرد واقع باشند. از اینرو، هر سه مضارب اسکالر یک بردارند، و بنا بر این X_1, X_2, X_3 و X_3 وابسته خطی‌اند.

با استفاده از این محک می‌بینیم که مجموعه‌های بردارهای $\{i, i+j, i+j+k\}$ ، $\{i+j-k, i-j-k, k\}$ ، و $\{i+j, -i+j, -j+k\}$ مستقل خطی‌اند. (ر. ک. شکل ۱۱.۴). حال آنکه مجموعه‌های $\{i+j, i-j, i\}$ و $\{i+j+k, -i+j+k, -j-k\}$ وابسته خطی‌اند. (ر. ک. شکل ۱۲.۴).
 ما حاصل مطالب گفته شده این است که، سه بردار وابسته خطی‌اند اگر هم‌صفحه باشند و دو بردار وابسته خطی‌اند اگر همخط باشند. این مطلب را عمدتاً برای تسهیل شهود هندسی خاطر نشان می‌سازیم. در حل مسائل مشخصی که به استقلال خطی مربوط‌اند، حل



شکل ۱۱.۴



شکل ۱۲.۴

معادلات خطی احتمالاً آسانتر از رسم تصاویر است. مثالی که اکنون می‌آوریم مثال مهمی از مفهوم پدید آوردن و استقلال خطی است. در \mathbb{R}^n ، $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ را در نظر می‌گیریم که در آن e_i برداری است که همه مؤلفه‌هایش بجز مؤلفه i ام آن صفر است و مؤلفه i ام آن ۱ می‌باشد:

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Bigg\} i$$

ابتدا مشاهده می‌کنیم که این بردارها مستقل خطی اند. زیرا اگر فرض کنیم

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0$$

آنگاه

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

یا

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

همچنین توجه به این نکته مهم است که بردارهای e_1, e_2, \dots, e_n فضای R^n را پدید می آورند. زیرا اگر $x \in R^n$

$$\begin{aligned} x = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} &= \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n \end{aligned}$$

چون هر بردار x ترکیب خطی مناسبی از e_1, e_2, \dots, e_n است، می بینیم که e_1, e_2, \dots, e_n فضای R^n را پدید می آورند.

تمرینات

۱. کدامیک از مجموعه های زیر از بردارهای R^2 ، مستقل خطی اند؟ به طور هندسی نشان دهید.

$$\begin{aligned} & \text{(الف)} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{(ب)} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{(ج)} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \end{bmatrix} \\ & \text{(د)} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{(ه)} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \\ & \text{(و)} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{(ز)} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

۲. در فضای ماتریسهای 2×2 ، $M_{2 \times 2}$ ، کدامیک از مجموعه های زیر مستقل خطی اند؟

$$\begin{aligned} & \text{(الف)} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \text{(ب)} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

۳. در فضای P_4 ، کدامیک از مجموعه‌های زیر مستقل خطی اند؟

(الف) $t^2, t, 1, t + 1, t^2 + 3$

(ب) $t^2, t, 1, t + 1, t^2 + 3$

۴. فرض کنید V یک فضای برداری باشد و x, y, z بردارهای مستقل خطی در V باشند. نشان دهید که $x + y, x + z, y + z$ مستقل خطی اند.

۵. کدامیک از مجموعه‌های زیر از بردارهای R^3 ، مستقل خطی اند؟

(الف) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

۶. چهار بردار در R^3 بیابید به طوری که هر دو تا از آنها مستقل خطی و هر سه تا از آنها وابسته خطی باشند.

۷. فرض کنید A_1, A_2, \dots, A_p ماتریسهایی $m \times n$ باشند و B یک ماتریس $n \times p$ باشد. اگر $A_1 B, A_2 B, \dots, A_p B$ در فضای ماتریسهای $m \times p$ مستقل خطی باشند، نشان دهید که A_1, A_2, \dots, A_p در فضای ماتریسهای $m \times n$ مستقل خطی اند.

۸. اگر x و y دو بردار مستقل خطی باشند، نشان دهید که بردارهای

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y \quad \text{و} \quad \beta_1 x + \beta_2 y$$

مستقل خطی اند اگر و فقط اگر

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

۹. نشان دهید که هیچ مجموعه مستقل خطی از بردارها نمی‌تواند شامل بردار صفر باشد.

۱۰. نشان دهید که هر زیر مجموعه از یک مجموعه مستقل خطی از بردارها، مستقل خطی است.

۱۱. نشان دهید که بردارهای

$$e_1 + e_2 + e_3 + \dots + e_n, \dots, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2, e_1$$

در R^n مستقل خطی اند.

۱۲. فرض کنید S گردآورده‌ای از بردارها در یک فضای برداری باشد به نحوی که هر زیر مجموعه دو عنصری از آن وابسته خطی است. نشان دهید که همه بردارهای S مضارب اسکالر یک بردار هستند.

۱۳. فرض کنید $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ مجموعه‌ای از بردارهای مستقل خطی در یک فضای برداری V باشد. قرار دهید

$$y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$$

چه شرطی روی اسکالرهایی α_i تضمین خواهد کرد که به ازای هر i ، بردارهای $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n$ مستقل خطی باشند؟

۱۴. فرض کنید x_1, x_2, \dots, x_k ماتریسهای $m \times n$ ای باشند که در فضای ماتریسهای $m \times n$ مستقل خطی اند. اگر A یک ماتریس وارون پذیر $m \times m$ و B یک ماتریس وارون پذیر $n \times n$ باشد، نشان دهید که ماتریسهای $AX_1 B, AX_2 B, \dots, AX_k B$ در فضای ماتریسهای $m \times n$ مستقل خطی اند.

۱۵. فرض کنید V یک فضای برداری و x_1, x_2, \dots, x_n بردارهایی در V باشند. اگر $x_1 \notin \text{sp}(\{x_1\}), x_2 \notin \text{sp}(\{x_1, x_2\}), \dots, x_n \notin \text{sp}(\{x_1, \dots, x_{n-1}\})$ ، نشان دهید که بردارهای x_1, x_2, \dots, x_n مستقل خطی اند.

۱۶. فرض کنید f_1 و f_2 دو چند جمله‌ای هستند و نقاط x_1 و x_2 وجود دارند به طوری که

$$\begin{aligned} f_2(x_1) &= 0, & f_1(x_1) &= 1 \\ f_2(x_2) &= 1, & f_1(x_2) &= 0 \end{aligned}$$

نشان دهید که f_1 و f_2 در فضای همه چند جمله‌ایها مستقل خطی اند.

۱۷. اگر $A \neq 0$ یک ماتریس متقارن باشد و $B \neq 0$ یک ماتریس متقارن کج در فضای ماتریسهای $n \times n$ ، نشان دهید که A و B مستقل خطی اند.

۱۸. اگر f و g دو چند جمله‌ای باشند و

$$\begin{vmatrix} f(0) & g(0) \\ f'(0) & g'(0) \end{vmatrix} \neq 0$$

نشان دهید که f و g در فضای چند جمله‌ایها مستقل خطی اند.

۶ پایه

در آخرین مثال از بخش قبلی، متذکر شدیم که مجموعه $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ از بردارها، مستقل خطی است و فضای \mathbb{R}^n را پدید می‌آورد. این قبیل مجموعه‌ها در نظریه فضای برداری اهمیت فراوان دارند و لذا تعریف زیر را داریم:

تعریف گیریم V یک فضای برداری باشد و $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ گردآورده‌ای از بردارها در V . مجموعه $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ را یک پایه برای V می‌نامند اگر

$$(1) \quad \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ یک مجموعه مستقل خطی از بردارها باشد، و}$$

$$(2) \quad \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ فضای } V \text{ را پدید آورد.}$$

برطبق این تعریف، بردارهای e_1, e_2, \dots, e_n پایه‌ای برای R^n تشکیل می‌دهند. این پایه به خصوص، آنقدر زیاد به کار می‌رود که آن را پایه متعارف برای R^n می‌نامند. به عنوان مثالی دیگر، مجموعه بردارهای $\{x_1, x_2, x_3\}$ را در نظر می‌گیریم که در آن

$$x_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

برای اینکه نشان دهیم این مجموعه از بردارها فضای R^3 را پدید می‌آورد، باید نشان دهیم که به ازای هر بردار مفروض

$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ در } R^3.$$

اسکالارهای $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ وجود دارند به نحوی که $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$ با رجوع به مؤلفه‌ها، این تساوی تبدیل می‌شود به

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_3 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \end{bmatrix}$$

به عبارت دیگر، باید دستگاه معادلات خطی زیر را برای $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ حل کنیم.

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 + 2\alpha_3 \\ y &= -\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 \\ z &= \alpha_1 + \alpha_2 \end{aligned}$$

چون دترمینان این دستگاه،

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -7$$

است، می‌بینیم که دستگاه معادلات حل پذیر است و از اینجا نتیجه می‌شود که $\{x_1, x_2, x_3\}$ فضای R^3 را پدید می‌آورد.

برای اینکه ثابت کنیم مجموعه فوق مستقل خطی است، فرض می‌کنیم اسکالرهایی $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ وجود داشته باشند به طوری که $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$ با تبدیل این تساوی به دستگاه معادلات خطی، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$

چون دترمینان ماتریس ضرایب غیر صفر است، تنها جواب دستگاه $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$ و

$\alpha_p = 0$ است. لذا، بردارهای x_1, x_2, \dots, x_p و x_{p+1} مستقل خطی اند. و با توجه به اینکه آنها فضای R^3 را پدید می آورند، می بینیم که $\{x_1, x_2, x_3\}$ پایه ای برای فضای R^3 است. خاصیت جالبی از پایه ها در قضیه زیر نشان داده می شود.

قضیه مجموعه $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ در فضای برداری V ، پایه ای است برای V اگر و فقط اگر به ازای هر $x \in V$ ، اسکالرهای یکتای $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ وجود داشته باشند به طوری که $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$.

اثبات فرض کنیم $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ یک پایه باشد. در این صورت $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ فضای V را پدید می آورد. لذا، اسکالرهای $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ وجود دارند به طوری که

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$$

برای اینکه نشان دهیم اسکالر ها یکتا هستند، فرض می کنیم که در ضمن داشته باشیم

$$x = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n$$

در این صورت

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n$$

یا

$$(\alpha_1 - \beta_1) x_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) x_n = 0$$

چون $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ یک مجموعه مستقل خطی است، داریم

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0, \dots, \alpha_n - \beta_n = 0$$

یا

$$\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$$

در نتیجه اسکالرهای $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ یکتا هستند.

از طرف دیگر، فرض می کنیم $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ مجموعه ای باشد که هر $x \in V$ را بتوان به طور یکتا به صورت $x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$ نوشت. در این صورت واضح است که $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ فضای V را پدید می آورد. برای اینکه ثابت کنیم $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ مستقل خطی است، فرض می کنیم $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$ می دانیم که $0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n = 0$. بنابراین، بردار صفر به صورت دو ترکیب خطی از x_1, \dots, x_p, x_n نوشته شده است، و چون بنا به فرض، ضرایب این دو ترکیب خطی به طور یکتا معین شده اند، باید داشته باشیم $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0$. پس، ثابت کرده ایم که مجموعه فوق مستقل خطی است.

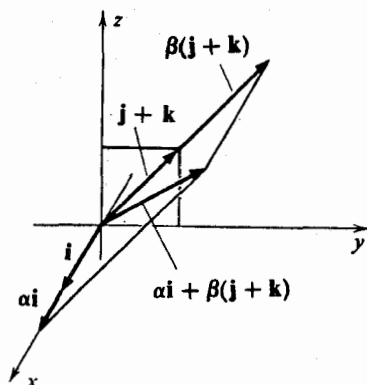
برای مثال، در P_n هر عنصر را می توان به صورت ترکیب خطی یکتایی از

$\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ نوشت. پس، می‌بینیم که $\{1, x, \dots, x^n\}$ پایه‌ای برای P_n تشکیل می‌دهد.

گیریم L زیرفضایی از R^3 ، مرکب از بردارهای واقع بر صفحه معینی که از مبدأ می‌گذرد، باشد.

در بخش ۴.۴ که مفهوم پدید آوردن را بررسی کردیم، دیدیم که هر دو بردار ناهمخط در L ، این زیرفضا را پدید می‌آورند. در بخش ۵.۴ که در باب استقلال خطی بود، دیدیم که هر دو بردار ناهمخط در R^3 مستقل خطی‌اند. لذا، اگر a و b بردارهای ناهمخط در L باشند، می‌بینیم که a و b را پدید می‌آورند و مستقل خطی‌اند. از اینرو، به منظور یافتن پایه‌ای برای L ، فقط احتیاج داریم که دو بردار ناهمخط در L انتخاب کنیم.

برای مثال، در R^3 ، صفحه مرکب از نقاط (x, y, z) را که در آنها $y = z$ ، در نظر می‌گیریم. (ر. ک. شکل ۱۳.۴)



شکل ۱۳.۴

یک جفت بردار ناهمخط روی این صفحه عبارت است از $\{i, j + k\}$ ، لذا، هر بردار واقع بر صفحه $y = z$ را می‌توان به طور یکتا به صورت $\alpha i + \beta(j + k)$ نوشت.

تمرینات

۱. کدامیک از زیرمجموعه‌های زیر پایه‌ای برای R^3 است؟

- (الف) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 14 \\ 7 \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
- (د) $\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ (ه) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$ (و) $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$
- (ز) $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

۲. کدامیک از زیرمجموعه‌های زیر پایه‌ای برای R^3 است؟

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -1 \end{array} \right] \text{ (ب)} & \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 2 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ 5 \\ 2 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 2 \end{array} \right] \text{ (الف)} \\
 & \left[\begin{array}{c} 3 \\ 0 \\ 4 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right] \text{ (د)} & \left[\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 0 \end{array} \right] \text{ (ج)} \\
 & \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] \text{ (و)} & \left[\begin{array}{c} -3 \\ -1 \\ 4 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] \text{ (ه)}
 \end{aligned}$$

۳. نشان دهید که هریک از زیرمجموعه‌های داده شده در زیر، پایه‌ای برای زیرفضایی از فضای ماتریسهای 2×2 است که مقابل آن نوشته شده است.

$$\begin{aligned}
 & \text{(الف)} \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right]; \text{ ماتریسهای متقارن } 2 \times 2. \\
 & \text{(ب)} \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \right]; \text{ ماتریسهای متقارن کج } 2 \times 2. \\
 & \text{(ج)} \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right]; \text{ ماتریسهای متقارن } 2 \times 2. \\
 & \text{(د)} \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right]; \text{ ماتریسهای بالا مثلثی } 2 \times 2. \\
 & \text{(ه)} \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right]; \text{ تمام ماتریسهای } 2 \times 2. \\
 & \text{(و)} \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right]; \text{ ماتریسهای } 2 \times 2 \text{ ای مانند } A \text{ به طوری که} \\
 & A \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

$$\text{(ز)} \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right]; \text{ ماتریسهای } 2 \times 2 \text{ که با } \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right] \text{ جابجا می‌شوند.}$$

۴. نشان دهید که هریک از مجموعه‌های زیر، پایه‌ای برای P_3 ، فضای چند جمله‌ایهای یک متغیره با متغیره t ، است.

$$\begin{aligned}
 & \text{(الف)} 1, t, t^2, t^3, t^4, t^5, t^6, t^7, t^8, t^9, t^{10} \\
 & \text{(ب)} (1+t)^3, (1+t)^2, 1+t, 1 \\
 & \text{(ج)} 1+t^3, 1+t^2, 1+t, 1 \\
 & \text{(د)} 1+t+t^2+t^3, 1+t+t^2, 1+t, 1 \\
 & \text{(ه)} t^2-t^3, t^2+t^3, 1-t, 1+t
 \end{aligned}$$

۵. گردآورده تمام چند جمله‌ایهای دو متغیره که درجه آنها بیشتر از ۲ نباشد، یعنی، چند-جمله‌ایهای به صورت

$$a_0 + b_1x + b_2y + c_1x^2 + c_2xy + c_3y^2$$

را، با تعاریف معمولی جمع، ضرب اسکالر، در نظر بگیرید. نشان دهید که این چندجمله‌ایها یک فضای برداری تشکیل می‌دهند و پایه‌ای برای این فضا معین کنید.

۶. پایه‌ای برای هریک از فضاهای زیر بیابید.

(الف) ماتریسهای متقارن 3×3 .

(ب) ماتریسهای متقارن کج 3×3 .

(ج) ماتریسهای 2×3 .

(د) ماتریسهای 3×2 .

(ه) چندجمله‌ایهای زوج از درجه نایبتر از n .

(و) زیرفضایی از فضای برداری چندجمله‌ایهای از درجه نایبتر از ۳، که در $x=1$ ، صفر می‌شوند.

(ز) زیرفضایی از R^n مرکب از بردارهایی که دو مؤلفه اول آنها صفر باشند.

(ح) ماتریسهای قطری 4×4 .

۷. در فضای ماتریسهای $n \times m$ ، فرض کنید E_{ij} نشانگر ماتریسی باشد که درایه (i, j) آن ۱ و بقیه درایه‌هایش صفر باشند.

(الف) نشان دهید که ماتریسهای E_{ij} پایه‌ای برای فضای ماتریسهای $n \times m$ تشکیل می‌دهند.

(ب) با انتخاب زیرمجموعه مناسبی از E_{ij} ها، پایه‌ای برای فضای ماتریسهای بالامتلی و نیز فضای ماتریسهای قطری بیابید.

۸. پایه‌ای برای فضای ماتریسهای 2×2 بیابید که مرکب است از:

(الف) فقط ماتریسهای A به طوری که $A^2 = A$ (ماتریس را خود توان می‌نامند اگر $A^2 = A$)؛

(ب) فقط ماتریسهای وارون پذیر.

۹. نشان دهید که نمی‌توان پایه‌ای برای فضای ماتریسهای $n \times n$ یافت به قسمی که هر دو عنصر از این پایه با هم جابجا شوند.

۱۰. ماتریسهای

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

را ماتریسهای اسپین پائولی^۱ می‌نامند.

(الف) نشان دهید که

$$\sigma_x \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x$$

$$\sigma_x \sigma_z = -\sigma_z \sigma_x$$

$$\sigma_y \sigma_z = -\sigma_z \sigma_y$$

(ب) نشان دهید که این ماتریسها همراه با ماتریس همانی پایه‌ای برای فضای ماتریسهای 2×2 با درایه‌های مختلط تشکیل می‌دهند.

۱۱. آیا می‌توان پایه‌ای برای P_n یافت چنانکه هر عنصر آن بر چند جمله‌ای $f(x) = x$ قابل قسمت باشد؟

۱۲. فرض کنید A_1, A_2, \dots, A_m گردآورده‌ای از ماتریسهای $n \times n$ باشد. اگر $x \neq 0$ یک n -بردار باشد به طوری که $A_1 x = A_2 x = \dots = A_m x = 0$ نشان دهید که ماتریسهای A_1, A_2, \dots, A_m پایه‌ای برای فضای ماتریسهای $n \times n$ تشکیل نمی‌دهند.

۱۳. اگر x_1, x_2, x_3 و x_4 پایه‌ای برای فضای برداری حقیقی V تشکیل دهند، نشان دهید که به ازای هر عدد حقیقی t ، $(t^2 + t)x_1 + (1 + t^2)x_2 + (t^2 + t)x_3$ غیر صفر است.

۷ بعد

به منظور مطالعه بیشتر موضوع، گردآورده‌ای از فضاهای برداری را که به تعبیری «کوچک» هستند و مخصوصاً برای کاربرد مناسب‌اند، انتخاب می‌کنیم. لذا، گوئیم که فضای برداری V متناهی‌البعد است اگر تعدادی متناهی از بردارها بتوانند آن را پدیدآورند. مثالهای قبلی نشان می‌دهند که هم R^n و هم P_n متناهی‌البعدند.

اولین هدف ما اثبات این مطلب است که هر فضایی که توسط تعداد متناهی بردار پدیدآید دارای یک پایه متناهی است. قبل از آن لم زیر را ثابت می‌کنیم.

لم گیریم V یک فضای برداری باشد. فرض می‌کنیم x_1, x_2, \dots, x_n فضای V را پدید می‌آورند و بردارهای x_1, x_2, \dots, x_n وابسته خطی‌اند. در این صورت با حذف بردار مناسبی از مجموعه $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ، مثلاً x_i ، می‌توانیم مجموعه

$$\{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n\}$$

را به دست آوریم که آن هم V را پدید می‌آورد.

اثبات چون بردارهای x_1, x_2, \dots, x_n وابسته خطی‌اند، طبق قضیه بخش ۵.۴، یکی از این بردارها، مثلاً x_i ، ترکیبی خطی از بقیه بردارهای این مجموعه است؛ پس به ازای اسکالرهای $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n$ داریم:

$$x_i = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_{i-1} x_{i-1} + \beta_{i+1} x_{i+1} + \dots + \beta_n x_n$$

حال، گیریم x برداری دلخواه در V باشد. چون $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ فضای V را پدید می‌آورد، اسکالرهای $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ وجود دارند به نحوی که

$$x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{i-1} x_{i-1} + \alpha_i x_i + \alpha_{i+1} x_{i+1} + \dots + \alpha_n x_n$$

اگر در تساوی اخیر به جای x_i مقدارش را از تساوی قبلی قرار دهیم، می بینیم که x را می توان به صورت ترکیبی خطی از $x_1, \dots, x_{i+1}, x_{i-1}, \dots, x_n$ نوشت.
 بنا براین، هر بردار در V ، ترکیبی خطی از $x_1, \dots, x_{i+1}, x_{i-1}, \dots, x_n$ است، که نشان می دهد این مجموعه فضای V را پدید می آورد.

با استفاده از این لم، می توانیم قضیه زیر را ثابت کنیم.

قضیه ۱ گیریم V فضایی برداری باشد که توسط تعداد متناهی بردار پدیدآمده باشد. در این صورت V دارای یک پایه متناهی است.

اثبات فرض می کنیم $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ فضای V را پدید می آورد. اگر $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ یک مجموعه مستقل خطی باشد، یک پایه است، و اثبات تمام می شود. پس فرض می کنیم این مجموعه مستقل خطی نباشد. بنا به لم قبلی، می توان برداری از این مجموعه حذف کرد و مجموعه کوچکتری به دست آورد که آن هم V را پدید می آورد. اگر این مجموعه جدید مستقل خطی باشد، اثبات تمام است، زیرا در این صورت یک پایه متناهی داریم. اگر مستقل خطی نباشد، می توانیم مجموعه بازهم کوچکتری که فضای V را پدید آورد به دست آوریم. با تکرار این فرایند، بالاخره به یک مجموعه مستقل خطی می رسیم که فضای V را پدید می آورد و به این ترتیب قضیه ثابت می شود.

در واقع اثبات فوق حکم قوی تری را به دست می دهد: اگر $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ یک فضای برداری V را پدید آورد، زیر مجموعه ای از $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ پایه ای برای V است. گیریم H زیر فضایی از R^3 باشد که از بردارهای واقع بر یک صفحه معین ما برمیخیزد تشکیل شده است. می خواهیم تعداد اعضای یک پایه H را معین کنیم. در بخش ۵.۴ دیدیم که هر مجموعه مرکب از سه بردار هم صفحه در R^3 ، الزاماً وابسته خطی است. لذا، یک پایه برای H ، از آنجا که باید متشکل از بردارهای مستقل خطی باشد، دارای حداکثر دو بردار است. چون اعضای هر پایه H یک صفحه را پدید می آورند، هیچ پایه H نمی تواند فقط یک بردار داشته باشد. لذا، هر پایه H باید دقیقاً دو عضو داشته باشد.

این موضوع جالب و مفید، یعنی اینکه تعداد بردارهای هر دو پایه مساوی است، در هر فضای برداری متناهی البعد درست است. این نتیجه از قضیه بعدی بلافاصله حاصل می شود.

قضیه ۲ گیریم V یک فضای برداری متناهی البعد باشد و $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ یک پایه n عنصری برای V ، اگر $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ مجموعه m بردار مستقل خطی در V باشد، آنگاه $m \leq n$.

قضیه ۲ را به این صورت نیز می توان بیان کرد: اگر V فضای برداری متناهی البعدی باشد که دارای یک پایه n عنصری است، و $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ مجموعه ای از بردارهای V

به طوری که $m > n$ ، آنگاه بردارهای y_1, y_2, \dots, y_m وابسته خطی اند. حکم دوم را ثابت می‌کنیم.

اثبات فرض می‌کنیم $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ پایه‌ای برای V باشد. برای اینکه نشان دهیم مجموعه $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ وابسته خطی است، باید اسکالرهایی $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ را که لااقل یکی از آنها صفر نیست، داشته باشیم به‌قسمی که

$$\sum_{j=1}^m \beta_j y_j = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \dots + \beta_m y_m = 0$$

چون $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ پایه‌ای برای V است، اسکالرهایی α_{ij} وجود دارند به طوری که

$$y_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} x_i$$

لذا، می‌خواهیم $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ را بیابیم به نحوی که

$$\sum_{j=1}^m \beta_j \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} x_i \right) = 0$$

یا

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \beta_j \right) x_i = 0$$

پس، اگر بتوانیم جوابی غیر بدیهی برای دستگاه معادلات همگن

$$\alpha_{11}\beta_1 + \dots + \alpha_{1m}\beta_m = 0$$

$$\alpha_{21}\beta_1 + \dots + \alpha_{2m}\beta_m = 0$$

$$\vdots$$

$$\alpha_{n1}\beta_1 + \dots + \alpha_{nm}\beta_m = 0$$

بیابیم، قضیه ثابت می‌شود. چون $m > n$ ، تعداد مجهولات در این دستگاه بیشتر از تعداد معادلات است، ازاینرو، بنا به بخش ۴.۱، می‌دانیم که یک جواب غیر بدیهی وجود دارد. ●

بلافاصله، قضیه زیر را به دست می‌آوریم.

قضیه ۳ تعداد عناصر هر دو پایه برای یک فضای برداری متناهی البعد، مساوی است.

اثبات گیریم $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ و $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ دو پایه برای فضای برداری متناهی-البعد V باشند. چون $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ یک مجموعه مستقل خطی است و $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ یک پایه است، بنا به قضیه قبلی، $m \geq n$. همچنین چون $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ یک مجموعه مستقل خطی است و $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ یک پایه است، داریم $n \geq m$. در نتیجه

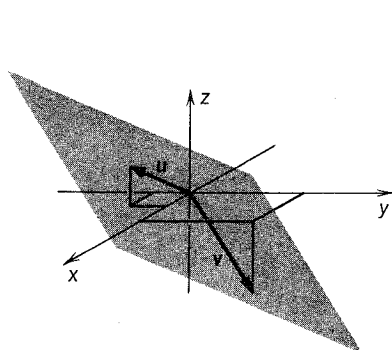
$$m = n$$

برای R^n ، پایه متعارف $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ با n عنصر را ارائه دادیم. طبق قضیه ۳، می بینیم که هر پایه دیگر نیز باید دارای n عنصر باشد.

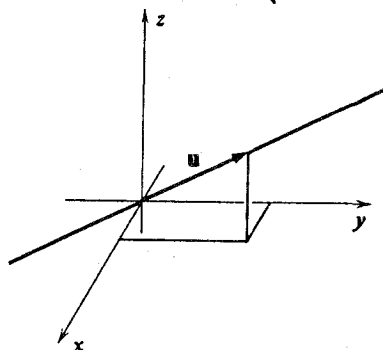
اگر V یک فضای متناهی البعد باشد، بعد V بنا به تعریف، عبارت است از تعداد عناصر یک پایه V . طبق قضیه ۳، این عدد مستقل از پایه ای است که انتخاب می کنیم. بعد V را اغلب با $\dim V$ نشان می دهند. بر طبق این تعریف $\dim R^n = n$.

دیده ایم که در R^3 ، بردارهای واقع بر هر خطی که از مبدأ می گذرد، همگی مضارب اسکالر یک بردارند. لذا، اگر H نشانگر زیر فضایی از R^3 باشد که فقط از بردارهای واقع بر یک خط ماربمبدأ، تشکیل شده است، می بینیم که $\dim H = 1$. پس با تعریفی که برای بعد ارائه دادیم، عبارت: خط یک «شیء یک بعدی» است، عبارت دقیقی است. (ر. ک. شکل ۱۴.۴)

اگر به طور مشابه، فرض کنیم K نشانگر بردارهای واقع بر یک صفحه ماربمبدأ باشد، آنگاه، همچنانکه دیده ایم K ، دارای پایه ای با دو بردار است و لذا $\dim K = 2$. از اینرو می بینیم که عبارت: صفحه یک «شیء دو بعدی» است، کاملاً با معنی است. (ر. ک. ۱۵.۴)



شکل ۱۵.۴



شکل ۱۴.۴

مثال ۱. گیریم P_n فضای چند جمله ایهایی باشد که درجه آنها بیشتر از n نیست. دیده ایم که $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ پایه ای برای P_n است. چون مجموعه $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ دارای $n+1$ عنصر است، می بینیم که $\dim P_n = n+1$.

مثال ۲. مجموعه ماتریسهای 2×2 با درایه های حقیقی، M_{22} ، را در نظر می گیریم. مشاهده می کنیم که ماتریسهای

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

یک پایه تشکیل می دهند.

برای بررسی این مطلب، توجه می کنیم که

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

$$= a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لذا، مجموعه داده شده، فضای ماتریسهای 2×2 را پدید می آورد. اگر

$$a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

آنگاه

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین $a = b = c = d = 0$

پس، مجموعه ماتریسهای داده شده، مستقل خطی است. چون فضای ماتریسهای 2×2 با درایه‌های حقیقی، دارای پایه‌ای با چهارعنصر است، بعد آن ۴ می باشد.

مثال ۳ دستگاه معادلات همگن

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$$

را در نظر می گیریم.

آن را به صورت ماتریسی می نویسیم،

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

در مثال ۲، از بخش ۳.۴، دیده‌ایم که مجموعه جوابها زیر فضایی از R^4 تشکیل می دهد. می خواهیم پایه‌ای برای این زیر فضا یابیم و بعد آن را حساب کنیم. روش حذفی گاوسی را به کار می بریم.

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$$

↓

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

$$-3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$$

↓

$$x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0$$

$$-3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$$

مجهول x_1 و معادله اول را به کار می بریم.

مجهول x_4 و معادله دوم را به کار می بریم.

چون همه معادلات را به کار برده ایم، این جریان به پایان می رسد. اگر بگیریم $x_4 = c$ و $x_3 = d$ که c و d اعداد دلخواه اند و آنگاه انتخاب کنیم

$$x_1 = -5c + 3d$$

$$x_4 = 3c - 2d$$

می بینیم که هر جوابی از دستگاه به صورت

$$\begin{bmatrix} -5c + 3d \\ c \\ d \\ 3c - 2d \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

است. از اینرو ملاحظه می شود که بردارهای

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

فضای جوابها را پدید می آورند. چون این دو بردار بوضوح مستقل خطی اند، پایه ای برای فضای جوابها تشکیل می دهند. از آنجا که فضای جوابها، یک فضای برداری دوبعدی است، معنی دقیق این جمله که: جوابها یک «خانواده دوپارامتری» تشکیل می دهند، معلوم است.

تمرینات

۱. در هر یک از موارد زیر، بعد زیرفضای داده شده از فضای ماتریسهای 2×2 را حساب کنید.

(الف) ماتریسهای قطری.

(ب) ماتریسهای متقارن.

(ج) ماتریسهای متقارن کج.

(د) ماتریسهای به صورت $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$.

(ه) ماتریسهای به صورت $\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix}$.

(و) ماتریسهای بالا مثلثی.

(ز) ماتریسهای به صورت $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & c \end{bmatrix}$.

۲. در هر یک از موارد زیر، بعد زیرفضای داده شده از فضای برداری P_3 را حساب کنید.

(الف) $\{f \mid f(0) = 0\}$

(ب) $\{f \mid f(1) = 0\}$

(ج) $\{f \mid f(0) = f'(0) = 0\}$

(د) $\{f \mid f'(0) + f(0) = 0\}$

۳. فرض کنید $i_1 < i_2 < \dots < i_n$ اعداد صحیح باشند. بعد زیرفضایی از \mathbb{R}^m متشکل از تمام بردارهایی که مؤلفه‌های i_1, i_2, \dots, i_n ام آنها صفرند، را حساب کنید. ($m \geq n$).
۴. پایدهای برای فضای جوابهای هر یک از دستگاههای معادلات خطی همگن زیر بیابید. بعد هر یک از فضاها چقدر است؟

$$\begin{array}{ll} \text{(الف)} & x + y + z = 0 \\ & x - y + z = 0 \\ \text{(ب)} & x + y + z = 0 \\ & x + 2y + 3z = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(ج)} & x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ & x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ \text{(د)} & x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0 \\ & x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ & 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (ه) \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \end{array}$$

۵. نشان دهید که مجموعه اعداد مختلط با جمع و ضرب اسکالر معمولی، یک فضای برداری دو بعدی روی اعداد حقیقی تشکیل می‌دهد.

۶. بعد فضای ماتریسهای قطری $n \times n$ چقدر است؟

۷. اگر f یک چند جمله‌ای از درجه n باشد، نشان دهید که $f, f', f'', \dots, f^{(n)}$ پایه‌ای برای P_n تشکیل می‌دهند.

۸. نشان دهید که بعد فضای ماتریسهای $m \times n$ برابر است با mn .

۹. فرض کنید H_e زیرفضایی از P_n متشکل از چند جمله‌ایهای زوج و H_o زیرفضایی از P_n مرکب از چند جمله‌ایهای فرد باشد. بعد H_o و بعد H_e چقدر است؟

۱۰. بعد فضای ماتریسهای بالا مثلثی $n \times n$ چقدر است؟

۱۱. نشان دهید که بعد فضای ماتریسهای متقارن $n \times n$ ، برابر $n(n+1)/2$ است. حال آنکه بعد فضای ماتریسهای متقارن کج، $n(n-1)/2$ می‌باشد.

۱۲. فرض کنید V یک فضای برداری n بعدی باشد. اگر V توسط $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ مجموعه‌ای از n بردار پدید آمده باشد، نشان دهید که $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ مستقل خطی است.

۱۳. نشان دهید که فضای چند جمله‌ایهای دو متغیره‌ای که درجه آنها بیشتر از n نیست، یعنی، همه چند جمله‌ایهای به صورت

$$\sum_{\substack{0 \leq i+j \leq n \\ 0 \leq i \leq j}} a_{ij} x^i y^j$$

تحت جمع، و ضرب اسکالر معمولی، یک فضای برداری تشکیل می‌دهند، و نشان دهید که

بعد این فضا، $۲/(n+2)(n+1)$ است.

۱۴. اگر x, y, z پایه‌ای برای یک فضای برداری ۳ بعدی تشکیل دهند، نشان دهید که $x+y, y+z, x+z$ نیز یک پایه تشکیل می‌دهند.

۱۵. اگر f_0, f_1, \dots, f_{n+1} چند جمله‌ایهایی باشند که درجه آنها بیشتر از n نیست، نشان دهید اسکالرهایی $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ که لااقل یکی از آنها صفر نیست، وجود دارند به طوری که $\alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_{n+1} f_{n+1} = 0$.

۱۶. نشان دهید که هر ماتریس $n \times n$ با درایه‌های حقیقی، در یک معادله چند جمله‌ای $f(A) = 0$ صدق می‌کند، که $f(x)$ یک چند جمله‌ای غیر صفر با ضرایب حقیقی است. [راهنمایی: نشان دهید که ماتریسهای A, A^2, \dots, A^{n+1} وابسته خطی باشند.]

۱۷. فرض کنید A و B اعداد حقیقی ثابتی باشند. فرض کنید V گردآورده همه دنباله‌های حقیقی نامتناهی $(c_0, c_1, c_2, c_3, \dots)$ باشد که در رابطه بازگشتی $c_{k+2} = Ac_k + Bc_{k+1}$ صدق می‌کنند.

(الف) با جمع معمولی (یعنی جمله به جمله) و ضرب اسکالر معمولی، نشان دهید که V یک فضای برداری حقیقی است.

(ب) نشان دهید که c_0 و c_1 تمام جملات دیگر دنباله را معین می‌کنند.

(ج) نشان دهید که هر عنصر V ، ترکیبی خطی از دنباله‌های $(0, 1, 0, \dots)$ و $(1, 0, \dots)$ است.

(د) نشان دهید که $\dim V = 2$.

(ه) فرض کنید t ریشه‌ای از چند جمله‌ای $0 = x^2 - Bx - A$ باشد. نشان دهید که (اگر t حقیقی باشد) دنباله $(1, t, t^2, t^3, \dots)$ در V است.

(و) اگر $x^2 - Bx - A$ دارای دو ریشه متمایز حقیقی s و t باشد، نشان دهید که هر عنصر V ، ترکیبی خطی از $(1, s, s^2, s^3, \dots)$ و $(1, t, t^2, t^3, \dots)$ است.

(ز) دنباله فیبوناچی^۱ به این صورت تعریف می‌شود: جمله صفرام دنباله ۰ است، جمله اولش ۱ و از آن به بعد، هر جمله حاصل جمع دو جمله قبل از خودش می‌باشد؛ این دنباله به صورت $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$ است. نشان دهید که

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

۱۸. اگر دنباله $(0, 1, 3, 13, 51, \dots)$ با قاعده تمرین قبلی معین شده باشد، A و B را بیابید و فرمولی کلی برای جمله n ام این دنباله به دست آورید.

۸ خواص دیگری از فضاهای متناهی البعد

در این بخش، بعضی از نتایج قضایای بخشهای قبلی را می‌آوریم.

قضیه ۱ گیریم V یک فضای برداری باشد و فرض کنیم x_1, x_2, \dots, x_n فضای V را پدید آورند. در این صورت $\dim V \leq m$.

اثبات بنا به قضیه ۱، از بخش ۷.۴، زیر مجموعه‌ای از x_1, x_2, \dots, x_n پایه‌ای برای V است. اما $\dim V$ تعداد عناصر هر زیر مجموعه‌ای از V است که پایه باشد. در نتیجه $\dim V \leq m$.

به عنوان مقدمه‌ای بر قضایای بعدی، داریم:

لم گیریم V یک فضای برداری و H زیر فضایی از آن باشد. فرض کنیم $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ پایه‌ای برای H باشد و y متعلق به H نباشد. در این صورت مجموعه $\{y, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ مستقل خطی است.

اثبات نشان می‌دهیم که اگر $\{y, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ وابسته خطی باشد، آنگاه $y \in H$ که نتیجه حاصل است.

پس فرض می‌کنیم که $\{y, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ وابسته خطی باشد. بنا بر این اسکالرهای $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$ که لااقل یکی از آنها غیر صفر است، وجود دارند به طوری که

$$\beta y + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$$

حال، β صفر نیست. زیرا اگر $\beta = 0$ ، آنگاه $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$.

چون لااقل یکی از اسکالرهای $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ صفر نیست، نتیجه می‌شود که x_1, x_2, \dots, x_n وابسته خطی اند. اما بنا به فرض، x_1, x_2, \dots, x_n مستقل خطی اند. در نتیجه $\beta \neq 0$.

چون $\beta \neq 0$ ، داریم $y = (-\beta^{-1} \alpha_1) x_1 + \dots + (-\beta^{-1} \alpha_n) x_n$. لذا، y یک ترکیب خطی از بردارهای H است و در نتیجه متعلق به H می‌باشد.

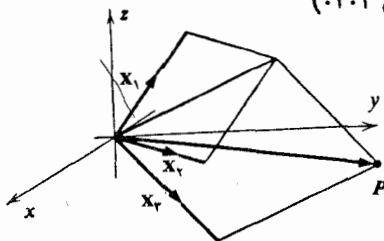
گیریم H زیر فضایی از \mathbb{R}^3 ، مرکب از بردارهای واقع بر صفحه ثابتی که از مبدأ می‌گذرد، باشد. در بخش ۴.۴، دیدیم که ترکیبات خطی دوبردار ناهمخط در H ، زیر فضای H را پرمی‌کنند. بیان این موضوع با اصطلاحات جبری به این صورت است: دوبردار مستقل خطی در H ، زیر فضای H را پدید می‌آورند و بنا بر این پایه‌ای برای H تشکیل می‌دهند. تعمیم این نتیجه به فضاهای متناهی البعد دلخواه در قضیه بعدی عرضه می‌شود.

قضیه ۲ گیریم V یک فضای برداری با بعد n باشد. اگر $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ مجموعه‌ای از n بردار مستقل خطی در V باشد، آنگاه $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ پایه‌ای برای V است.

اثبات گیریم $L = \text{sp}(x_1, x_2, \dots, x_n)$. می‌خواهیم نشان دهیم که $L = V$. اگر $L \neq V$ ، برداری مانند y در V وجود دارد به قسمی که $y \notin L$. بنا به لم قبل، بردارهای مجموعه $\{y, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ مستقل خطی اند. اما مجموعه $\{y, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ دارای

۱ + n عنصر است و طبق قضیه ۲ از بخش ۷.۴، می‌دانیم که در هر فضای برداری n بعدی، می‌توانیم حداکثر n بردار مستقل خطی بیابیم.
لذا، فرض $L \neq V$ غلط است و بنابراین $L = V$.

این قضیه را می‌توانیم در R^3 تعبیر کنیم. اگر x_1, x_2, x_3 سه بردار مستقل خطی دلخواه در R^3 باشند، آنگاه x_1, x_2 و x_3 پایه‌ای برای R^3 تشکیل می‌دهند. در اصطلاح هندسی، هر سه بردار ناهم‌صفحه (یعنی، مستقل خطی) در R^3 فضای R^3 را پدید می‌آورند. شکل ۱۶.۴، این مطلب را نشان می‌دهد. به‌عنوان یک تمرین با ارزش، همین نتیجه را از طریق هندسی با استفاده از روشی مشابه باروش ساختن مختصات دکارتی در فضای سه‌بعدی، ثابت کنید. (ر. ک. بخش ۲.۲).



شکل ۱۶.۴

قضیه دیگری داریم که آن نیز به‌طور شهودی قابل قبول است.

قضیه ۳. گیریم V یک فضای برداری متناهی‌البعده باشد. اگر H زیرفضایی از V باشد، H متناهی‌البعده است و $\dim H \leq \dim V$.

اثبات اگر $H = \{0\}$ ، یعنی H زیرفضای صفر باشد، آنگاه $\dim H = 0 \leq \dim V$. اگر H زیرفضای صفر نباشد، دارای یک عنصر غیر صفر، مثلاً x_1 است. $\text{sp}(x_1)$ را در نظر می‌گیریم. اگر $\text{sp}(x_1) = H$ ، متناهی‌البعده است. اگر $\text{sp}(x_1) \neq H$ ، آنگاه بردار x_2 ای در H ولی در خارج $\text{sp}(x_1)$ وجود دارد. بنا به لم این بخش، $\{x_1, x_2\}$ یک مجموعه مستقل خطی است. اگر $H = \text{sp}(x_1, x_2)$ ، متناهی‌البعده است. اگر $H \neq \text{sp}(x_1, x_2)$ ، بردار x_3 ای در H ولی در خارج $\text{sp}(x_1, x_2)$ وجود دارد. طبق همان لم، $\{x_1, x_2, x_3\}$ یک مجموعه مستقل خطی است.

با ادامه این روند، مجموعه‌های بردارهای مستقل خطی $\{x_1, x_2, \dots, x_i\}$ را به دست می‌آوریم. مادامی که $\text{sp}(x_1, x_2, \dots, x_i)$ زیرمجموعه سره‌ای از H باشد، می‌توانیم بردار x_{i+1} ای در H ولی در خارج $\text{sp}(x_1, x_2, \dots, x_i)$ پیدا کنیم. در این صورت بنا به لم، مجموعه بزرگتری از بردارهای مستقل $\{x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}\}$ را به دست می‌آوریم. لکن، می‌دانیم که V یک فضای متناهی‌البعده است و هر مجموعه مستقل خطی از بردارهای V حداکثر دارای $\dim V$ عنصر است.

بدین ترتیب، سرانجام باید داشته باشیم $\text{sp}(x_1, x_2, \dots, x_i) = H$ و بنابراین

متناهی البعد است. اگر پایه‌ای برای H انتخاب کنیم، طبق تعریف بعد، می‌دانیم که تعداد عناصر این پایه، برابر $\dim H$ است. بنا به قضیه ۲ از بخش ۷.۴، $\dim H \leq \dim V$. ●

توجه کنید که قسمت عمده قضیه قبلی، اثبات این نکته بود که H متناهی البعد است. به محض اینکه نکته مزبور را ثابت کردیم، این موضوع که $\dim H \leq \dim V$ ، فوراً نتیجه شد.

به عنوان کاربردی از این قضایا، می‌خواهیم همه زیرفضاهای R^3 را معین کنیم. بنا به قضیه ۳، می‌دانیم که هر زیر فضای H از R^3 متناهی البعد است و در نامساوی $0 \leq \dim H \leq 3$ صدق می‌کند.

اگر $\dim H = 0$ ، $H = \{0\}$ ، یعنی H زیر فضای صفر است.

اگر $\dim H = 3$ ، پایه‌ای با سه عنصر برای H انتخاب می‌کنیم. طبق قضیه ۲، این پایه، که دارای سه عنصر است، پایه‌ای برای R^3 نیز می‌باشد. لذا $H = R^3$. با توجه به این دو موضوع، می‌بینیم که بعد هر زیر فضای سره H از R^3 باید در نامساوی $1 \leq \dim H \leq 2$ صدق کند.

اگر $\dim H = 1$ ، H مرکب از تمام مضارب اسکالر یک بردار است، یا به عبارت دیگر، H مرکب از تمام بردارهای واقع بر خطی است که از مبدأ می‌گذرد.

اگر $\dim H = 2$ ، H متشکل از تمام ترکیبات خطی دو بردار ناهمخط است، یا همان طور که قبلاً دیده‌ایم، H متشکل از تمام بردارهای واقع بر صفحه‌ای است که از مبدأ می‌گذرد.

بنابراین، همان طور که به طور شهودی نیز قابل قبول است، می‌بینیم که همه زیر-فضاهای سره R^3 ، از خطوط و صفحاتی که از مبدأ می‌گذرند، تشکیل شده‌اند.

تمرینات

۱. اگر H زیر فضایی از فضای ماتریسهای 2×2 باشد، نشان دهید که $\dim H$ مساوی است با ۰، ۱، ۲، ۳، یا ۴.

۲. نشان دهید که چند جمله‌ایهای $1, x - \alpha, (x - \alpha)^2, \dots, (x - \alpha)^n$ پایه‌ای برای P_n تشکیل می‌دهند. (α یک عدد حقیقی دلخواه است.)

۳. اگر f یک چند جمله‌ای از درجه n ، و g یک چند جمله‌ای از درجه نایبتر از n باشند، نشان دهید که مقادیر ثابت $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ وجود دارند به طوری که
$$g = \alpha_0 f + \alpha_1 f' + \alpha_2 f'' + \dots + \alpha_n f^{(n)}$$

۴. اگر X برداری غیر صفر در یک فضای برداری متناهی البعد باشد. نشان دهید که X متعلق به یک پایه است.

۵. اگر یک فضای برداری V توسط X_1, X_2, \dots, X_k پدید آمده باشد، نشان دهید که هر مجموعه‌ای از $k + 1$ بردار در V ، وابسته خطی است.

۶. مجموعه‌ای مرکب از $n + 1$ بردار متعلق به R^n بیابید به نحوی که هر زیر مجموعه n عنصری آن، مستقل خطی باشد.

۷. فرض کنید $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ مجموعه‌ای از بردارهای مستقل خطی در یک فضای برداری V باشد. اگر $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ زیر مجموعه هیچ مجموعه بزرگتری از بردارهای مستقل خطی V نباشد، نشان دهید که $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ پایه‌ای برای V است.

۸. اگر V و W زیر فضاهایی از یک فضای برداری باشند و $V \subset W$ و $\dim V = \dim W$ ، نشان دهید که $V = W$.

۹. نشان دهید که هر مجموعه مستقل خطی $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ از بردارها در یک فضای متناهی البعد V ، رami توان به پایه‌ای برای V گسترش داد. یعنی، بردارهای $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ وجود دارد به قسمی که $\{x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n\}$ پایه‌ای برای V است.

۱۰. فرض کنید S مجموعه‌ای از بردارها باشد، که هر زیر مجموعه آن که مرکب از $k + 1$ بردار باشد، وابسته خطی است ولی زیر مجموعه‌ای مرکب از k بردار دارد که مستقل خطی است. نشان دهید که هر بردار در S ترکیبی خطی از این k بردار است.

۱۱. اگر V و W زیر فضاهایی از یک فضای برداری باشند و $V \subset W$ و $\dim V \leq l \leq \dim W$ ، نشان دهید که زیر فضایی مانند U وجود دارد به طوری که $V \subset U \subset W$ و $\dim U = l$.

۱۲. اگر f, f_1, \dots, f_n چند جمله‌ایهایی در P_n باشند به قسمی که $\deg f_i = i$ ، نشان دهید که f, f_1, \dots, f_n پایه‌ای برای P_n تشکیل می‌دهند.

۱۳. اگر $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ فضای V را پدید آورد ولی هیچ زیر مجموعه کوچکتر از آن V را پدید نیاورد، نشان دهید که $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ پایه‌ای برای V است.

۱۴. فرض کنید $n + 1$ عدد حقیقی متمایز $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ داده شده باشند. چند جمله‌ایهای $p_i(x) = (x - \alpha_0) \dots (x - \alpha_{i-1})(x - \alpha_{i+1}) \dots (x - \alpha_n)$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که p_0, p_1, \dots, p_n پایه‌ای برای P_n تشکیل می‌دهند.

۱۵. اگر H زیر فضایی از یک فضای برداری متناهی البعد V باشد، نشان دهید زیر فضایی مانند K وجود دارد به طوری که

$$H + K = V \text{ و } H \cap K = 0$$

۱۶. فرض کنید V یک فضای متناهی البعد باشد.

(الف) فرض کنید $H_0 \leq H_1 \leq H_2 \leq H_3 \leq \dots$ یک گردآورده صعودی از زیر-

فضاهای V باشد. نشان دهید که نهایتاً باید داشته باشیم $H_n = H_{n+1} = H_{n+2} = \dots$.

(ب) فرض کنید $H_0 \geq H_1 \geq H_2 \geq H_3 \geq \dots$ یک خانواده نزولی از زیر-

فضاهای V باشد. نشان دهید که نهایتاً باید داشته باشیم $H_n = H_{n+1} = H_{n+2} = \dots$.

۱۷. فرض کنید V یک فضای برداری باشد و x_1, x_2, \dots, x_n گردآورده‌ای از بردارهای

V . فرض کنید y_1, y_2, \dots, y_n متعلق به $\text{sp}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ و μ تعداد بیشینه

بردارهای مستقل خطی در $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ و ν تعداد بیشینه بردارهای مستقل خطی در $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ باشند. نشان دهید که $\mu \leq \nu$.

۱۸. اگر x_1, \dots, x_n بردارهای مستقل خطی در یک فضای برداری V باشند و اگر $x \notin \text{sp}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ نشان دهید که $\{x_1 + x, x_2 + x, \dots, x_n + x\}$ نیز در V مستقل خطی اند.

۱۹. فرض کنید S مجموعه بردارهایی در R^n باشد که دارای دقیقاً دو مؤلفه غیرصفر و این مؤلفه‌های غیرصفر، هر دو ۱ می‌باشند. نشان دهید که S یک مجموعه مستقل خطی از بردارهاست اگر و فقط اگر $n \leq 3$.

۲۰. اگر a یک عدد مختلط غیرحقیقی باشد، نشان دهید که a و a^2 پایه‌ای برای فضای اعداد مختلط، به عنوان فضایی برداری روی اعداد حقیقی، تشکیل می‌دهند.

۹ تغییر مختصات

در بسیاری از مسائل مربوط به ریاضی و علوم، استفاده از پایه متعارف مختصات $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ مناسبترین نحوه پرداختن به یک مسئله خاص نیست. برای مثال، در مطالعه مقاطع مخروطی در هندسه تحلیلی مسطحه، اغلب مناسب است که معادلات مقاطع مخروطی را به وسیله دوران محورها به یک صورت متعارف تبدیل کنیم. مطالب این بخش برای تسهیل این گونه تغییر مختصات، عرضه می‌گردد.

لذا، گیریم V یک فضای n بعدی و $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ پایه‌ای برای V باشد. همان طور که دیده‌ایم، به ازای هر x در V ، اسکالرهای یکتای $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ وجود دارند به طوری که $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$. این امر به ما امکان می‌دهد که فضا را با یک دستگاه مختصات نسبت به پایه مفروض، مجهز سازیم. این روش مشابه روش تجهیز R^n با یک دستگاه مختصات نسبت به پایه متعارف $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ است. زیرا اگر x برداری در R^n باشد،

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$$

در این حالت، مختص i ام بردار x ، همان ضریب e_i در عبارت خطی نمایشگر x نسبت به پایه $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ است.

پس، اگر $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ پایه‌ای برای V باشد و x برداری در V و $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$ ، گوئیم که α_i مختص i ام x نسبت به پایه \mathcal{B} است. پس می‌توانیم به بردار x ، n تایی مختصات آن را نسبت به پایه \mathcal{B} منسوب سازیم.

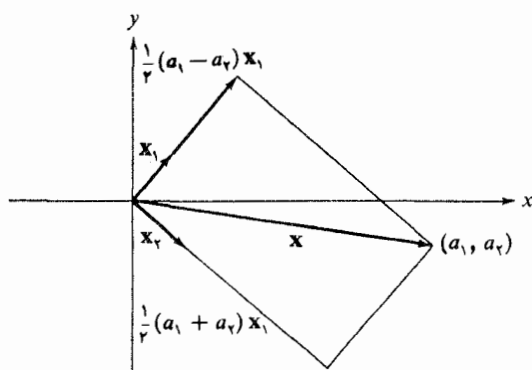
$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\mathcal{B}} \mathbf{x}$$

نماد \mathcal{B} زیرپیکان، نشانگر آن است که $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ مختصات \mathbf{x} نسبت به \mathcal{B} هستند. چون عبارت $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n$ برای \mathbf{x} نسبت به پایه \mathcal{B} یکتاست، مختصات \mathbf{x} نسبت به پایه \mathcal{B} به طور یکتا معین می‌گردند.

به عنوان مثال، می‌خواهیم مختصات یک بردار $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$ را نسبت به پایه $\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ که در آن $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ، حساب کنیم. مشاهده می‌کنیم که $\mathbf{e}_1 = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)/2$ و $\mathbf{e}_2 = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)/2$. از اینجا، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} &= \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 \\ &= \frac{1}{2} \alpha_1 (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) + \frac{1}{2} \alpha_2 (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \frac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha_2) \mathbf{x}_1 + \frac{1}{2} (\alpha_1 - \alpha_2) \mathbf{x}_2. \end{aligned}$$

لذا، $\mathbf{x} \xleftrightarrow{\mathcal{B}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) \\ \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) \end{bmatrix}$ ، نمایش هندسی برای تجسم این فرایند در شکل ۱۷.۴ آمده است.



شکل ۱۷.۴

برای محاسبه مختصات یک بردار نسبت به یک پایه، مثلاً $\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ ، با استفاده از مختصاتش نسبت به پایه دیگری، مثلاً $\mathcal{B}' = \{\mathbf{x}'_1, \dots, \mathbf{x}'_n\}$ ، قاعده مفیدی وجود دارد. نسبت به پایه‌های \mathcal{B} و \mathcal{B}' داریم:

$$\mathbf{x} \xleftrightarrow{\mathcal{B}'} \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{x} \xleftrightarrow{\mathcal{B}} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

حال، مختصات $\mathbf{x}'_1, \dots, \mathbf{x}'_n$ را نسبت به پایه \mathcal{B} پیدا می‌کنیم. فرض می‌کنیم $\mathbf{x}'_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \mathbf{x}_i = a_{1j} \mathbf{x}_1 + \dots + a_{nj} \mathbf{x}_n$ به صورت $A = [a_{ij}]_{(nn)}$ باشد. (یعنی، ستون j از A ، n تایی مختصات \mathbf{x}'_j نسبت به پایه \mathcal{B} است.) پس،

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{bmatrix}$$

برای اثبات این مطلب، مشاهده می‌کنیم که

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \sum_{j=1}^n \alpha'_j \mathbf{x}'_j \\ &= \sum_{j=1}^n \alpha'_j \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \mathbf{x}_i \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} \alpha'_j \mathbf{x}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha'_j \right) \mathbf{x}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{x}_i \end{aligned}$$

پس، حاصل می‌شود

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha'_j = \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

اگر این نتیجه را با استفاده از ضرب ماتریسها تعبیر کنیم، نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

$$\mathbf{x}'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{x}'_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}'_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}'_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

مثلاً در \mathbb{R}^3 ، گیریم

$$\mathbf{x}'_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}'_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

با $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \alpha'_4, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ مختصات

$$\text{قاعده} \quad \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \alpha'_3 \end{bmatrix} \text{ به هم مربوط اند.}$$

نکته جالب توجه آن است که ماتریس حاصل از تغییر مختصات همیشه وارون پذیر است.

برای مشاهده این مطلب، فرض می‌کنیم $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ یک پایه باشد و $\mathcal{B}' = \{x'_1, x'_2, \dots, x'_n\}$ پایه‌ای دیگر. گیریم

$$\begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\mathcal{B}']{x} \xleftrightarrow[\mathcal{B}]{\alpha} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

n تایی‌های مختصات بردار x نسبت به پایه‌های \mathcal{B} و \mathcal{B}' باشند.

فرض کنیم $x'_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i$ نمایش x'_j نسبت به پایه \mathcal{B} ، $A = [a_{ij}]_{(nn)}$ و $x_j = \sum_{i=1}^n b_{ij} x'_i$ نمایش x_j نسبت به پایه \mathcal{B}' ، $B = [b_{ij}]_{(nn)}$ باشند. در بالا دیدیم که

$$\begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{bmatrix}$$

بنابراین، برای همه n تایی‌ها

$$\begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{bmatrix} = BA \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = AB \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

بنا به لم بخش ۷.۳، نتیجه می‌شود که

$$BA = I_n \quad \text{و} \quad AB = I_n$$

لذا، ماتریس A وارون پذیر است و وارونش ماتریس B می‌باشد.

تذکره دوباره متذکر می‌شویم که ستون i ام A همان n تایی مختصات x'_i نسبت به پایه \mathcal{B} است. ستون i ام B n تایی مختصات x_i نسبت به پایه \mathcal{B}' است.

مثال ۱ گیریم P_4 ، مطابق معمول، فضای چند جمله‌ای‌های یک متغیره با متغیر x و با درجه نایبتر از ۴ باشد. دو پایه $1, x, x^2, x^3, x^4$ و $1, (1+x), (1+x)^2, (1+x)^3$ را برای P_4 در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم f در P_4 باشد. پس

$$f = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 \\ = \beta_0 + \beta_1(1+x) + \beta_2(1+x)^2 + \beta_3(1+x)^3 + \beta_4(1+x)^4$$

اگر ماتریس A را تشکیل دهیم، که ستونهایش، مختصات $1, x, x^2, x^3, x^4$ نسبت به پایه $(1+x)^4, (1+x)^3, (1+x)^2, 1+x, 1$ هستند، خواهیم داشت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لذا،

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix}$$

اگر ماتریس B را تشکیل دهیم، که ستونهایش، مختصات $1, x, x^2, x^3, x^4$ نسبت به پایه $1, 1+x, (1+x)^2, (1+x)^3, (1+x)^4$ هستند، با توجه به تساوی $x^k = ((1+x) - 1)^k$ می بینیم که

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

این ماتریسها روش مناسبی برای تبدیل نمایش یک چندجمله‌ای نسبت به یک پایه، به نمایش آن نسبت به پایه دیگر، فراهم می آورند. به عنوان یک نتیجه کمکی می بینیم که

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال ۲ با استفاده از روشهای این بخش، فرمولهای متعارف دوران محورها، در هندسه تحلیلی مسطحه، را به دست می آوریم.

گیریم

$$\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ و } \mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

پایه متعارف R^2 باشد.

فرض می‌کنیم

$$\mathbf{j}_\theta = -(\sin \theta)\mathbf{i} + (\cos \theta)\mathbf{j} \text{ و } \mathbf{i}_\theta = (\cos \theta)\mathbf{i} + (\sin \theta)\mathbf{j}$$

بترتیب، بردارهای حاصل از دوران \mathbf{i} و \mathbf{j} به اندازه θ درجه باشند.

می‌خواهیم رابطه‌ای بین مختصات یک نقطه نسبت پایه $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ و مختصات همان نقطه نسبت به پایه $\{\mathbf{i}_\theta, \mathbf{j}_\theta\}$ بیابیم. توجه‌کنید که ماتریس $[\mathbf{i}_\theta, \mathbf{j}_\theta]$ عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

گیریم $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ عبارت خطی معرف بردار \mathbf{v} نسبت به پایه $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ باشد، و

$\mathbf{v} = x_\theta\mathbf{i}_\theta + y_\theta\mathbf{j}_\theta$ عبارت خطی معرف بردار \mathbf{v} نسبت به پایه $\{\mathbf{i}_\theta, \mathbf{j}_\theta\}$. آنگاه بنا به یکی از نتایج قبلی، داریم:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\theta \\ y_\theta \end{bmatrix}$$

چون پایه $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ می‌تواند از دوران پایه $\{\mathbf{i}_\theta, \mathbf{j}_\theta\}$ به اندازه $-\theta$ درجه حاصل

شود، نتیجه می‌شود که

$$\begin{bmatrix} x_\theta \\ y_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

از عبارات فوق، فرمولهای متعارف دوران‌محورها در هندسه تحلیلی به دست می‌آیند.

از نتایج قبلی حاصل می‌شود.

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

(که خواننده ممکن است آن را از طرق دیگری نیز به دست آورد.)

به عنوان کاربرد دیگری از مفاهیم این بخش، داریم:

قضیه ۱ گیریم $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ بردارهایی در R^n (یا C^n) باشند. فرض کنیم $A = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n]$ ماتریسی باشد که ستون زام آن، بردار \mathbf{x}_j است. در این صورت احکام زیر هم‌ارزند:

(۱) بردارهای $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ مستقل خطی‌اند.

(۲) ماتریس A وارون پذیر است.

(۳) $\det A \neq 0$.

اثبات از فصل سوم، می‌دانیم که (۲) و (۳) هم‌ارزند. لذا، کافی است نشان دهیم که (۱) و (۲) هم‌ارزند.

ابتدا، فرض می‌کنیم که بردارهای x_1, x_2, \dots, x_n مستقل خطی باشند. طبق قضیه ۲ از بخش ۸.۴، می‌دانیم که x_1, x_2, \dots, x_n پایه‌ای برای R^n تشکیل می‌دهند. بنا بر این، ماتریس A نمایشگر تغییر مختصات از پایه متعارف $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ به پایه $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ می‌باشد، و در بالا دیده‌ایم که ماتریسی از این نوع، وارون پذیر است. پس قسمت (۱)، قسمت (۲) را نتیجه می‌دهد.

سپس، فرض می‌کنیم که بردارهای x_1, x_2, \dots, x_n وابسته خطی باشند. در این صورت یکی از بردارها، مثلاً x_1 ، ترکیبی خطی از بقیه بردارهاست:

$$x_1 = \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \dots + \alpha_n x_n$$

پس

$$\det A = \det [x_1, x_2, \dots, x_n]$$

[بنا به (D۵)]

$$= \det [x_1 - \alpha_2 x_2 - \alpha_3 x_3 - \dots - \alpha_n x_n, x_2, \dots, x_n]$$

$$= \det [0, x_2, \dots, x_n]$$

$$= 0$$

[بنا به (D۷)]

لذا، ماتریس A وارون پذیر نیست. از اینجا می‌بینیم که قسمت (۲)، قسمت (۱) را نتیجه می‌دهد.

برای آزمون این مطلب که مجموعه مفروضی از بردارها یک پایه تشکیل می‌دهد یا نه، قضیه فوق وسیله مناسبی است.

مثال ۳ آیا بردارهای

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

تشکیل پایه‌ای برای R^4 می‌دهند؟ بنا به قضیه قبلی فقط لازم است که دترمینان زیر را حساب کنیم:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -11 & 1 \\ 4 & -3 & -24 & 4 \\ 8 & -1 & -47 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & 20 & 4 \\ -8 & 15 & 41 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 20 \\ 15 & 41 \end{vmatrix} = 205 - 300 = -95 \neq 0$$

پس، این بردارها واقعاً تشکیل پایه می‌دهند.

مثال ۴ آیا بردارهای

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

مستقل خطی اند؟ دترمینان زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -5 \\ -1 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -5 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

از اینرو، این بردارها وابسته خطی اند.

درواقع، روش اثبات قضیه ۱ نتیجه قویتری را به دست می‌دهد.

گیریم V یک فضای برداری n بعدی باشد و x_1, x_2, \dots, x_n پایه‌ای برای V . فرض کنیم x'_1, x'_2, \dots, x'_n و x_n بردار در V باشند و $x'_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} x_i$ نمایش x'_j نسبت به پایه x_1, x_2, \dots, x_n باشد. در این صورت احکام زیر هم‌ارزند.

(۱) بردارهای x'_1, x'_2, \dots, x'_n مستقل خطی اند.

(۲)

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ & & \ddots & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

وارون پذیر است.

(۳) $\det A \neq 0$.

قضیه ۲ گیریم

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0$$

دستگاهی از معادلات خطی همگن n مجهولی باشد. این دستگاه دارای جوابی غیربديهی است، یعنی، جوابی که در آن لااقل یکی از x_i ها صفر نیست، اگر فقط اگر

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

اثبات فرض می‌کنیم $A = [a_{ij}]$ ماتریس ضرایب دستگاه باشد. در این صورت $A = [A_1, A_2, \dots, A_n]$ که در آن A_j ستون j ام A است. اگر $\det A = 0$ بنا به قضیه ۱، می‌دانیم که ستونهای ماتریس A وابسته خطی اند. لذا، اسکالرهایی $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ که لااقل یکی از آنها صفر نیست، وجود دارند به طوری که

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_n A_n = 0.$$

اما

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \cdots + \alpha_n a_{1n} \\ \alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} + \cdots + \alpha_n a_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_1 a_{n1} + \alpha_2 a_{n2} + \cdots + \alpha_n a_{nn} \end{bmatrix} \\ = [\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_n A_n] = 0$$

پس، $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$ یک جواب غیربدیهی برای دستگاه فوق می‌باشد.

از طرف دیگر، اگر، $\det A \neq 0$ ، آنگاه A^{-1} وجود دارد. بنابراین اگر $AX = 0$ آنگاه $A^{-1}(AX) = X = 0$ وجود ندارد. ●

مثال ۵ در دستگاه

$$x + 2y - z = 0$$

$$x + 3y + 2z = 0$$

$$x + 5y + 8z = 0$$

دترمینان ماتریس ضرایب عبارت است از:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

بنابراین، دستگاه دارای جواب غیر بدیهی است؛ برای مثال $x = -7, y = 3, z = -1$.

تمرینات

۱. در هریک از موارد زیر، مختصات بردار $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ از \mathbb{R}^2 را نسبت به پایه داده شده برای

\mathbb{R}^2 معین کنید.

$$\begin{array}{ll} \left[\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right] & \text{(ب)} \quad \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right] & \text{(الف)} \\ \left[\begin{array}{c} 5 \\ 3 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right] & \text{(د)} \quad \left[\begin{array}{c} -1 \\ -1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right] & \text{(ج)} \end{array}$$

۲. درهریک ازموارد زیر، مختصات بردار $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ را نسبت به پایه داده شده برای R^3 بیابید.

$$\begin{array}{ll} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right] & \text{(ب)} \quad \left[\begin{array}{c} 1 \\ 5 \\ 3 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] & \text{(الف)} \\ \left[\begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right] & \text{(د)} \quad \left[\begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 3 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 0 \end{array} \right] & \text{(ج)} \end{array}$$

۳. معین کنید کدامیک از مجموعه‌های بردارهای زیر، در فضای برداری داده شده، مستقل خطی اند.

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right] \quad \text{(الف)}$$

در فضای ماتریسهای 2×2 .

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{array} \right] \quad \text{(ب)}$$

در فضای ماتریسهای بالا مثلثی 2×2 .

$$\begin{array}{l} 1 + x - x^2 + x^3, 1 - x + x^2 + x^3, 1 + x + x^2 + x^3 \quad \text{(ج)} \\ 1 + x + x^2 - x^3 \text{ در فضای } P_3. \end{array}$$

۴. مجموعه‌های بردارهای زیر به ازای چه مقدار λ تشکیل پایه‌ای برای R^3 می‌دهند؟

$$\begin{array}{ll} \left[\begin{array}{c} \lambda \\ 0 \\ 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \lambda \end{array} \right] & \text{(ب)} \quad \left[\begin{array}{c} 0 \\ \lambda \\ 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} \lambda \\ 1 \\ \lambda \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{array} \right] & \text{(الف)} \\ \left[\begin{array}{c} \lambda \\ \lambda \\ 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} \lambda \\ 0 \\ \lambda \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ \lambda \\ \lambda \end{array} \right] & \text{(د)} \quad \left[\begin{array}{c} \lambda^2 \\ \lambda \\ 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} \lambda \\ 1 \\ 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] & \text{(ج)} \end{array}$$

۵. دستگاههای معادلات زیر به ازای چه مقدار حقیقی λ دارای جواب غیر بدیهی اند؟

$$\begin{array}{ll} x + y + z = 0 & \text{(ب)} \quad \lambda x + y + z = 0 & \text{(الف)} \\ \lambda x + y + z = 0 & & x + \lambda y + z = 0 \\ \lambda^2 x + y + z = 0 & & x + y + \lambda z = 0 \end{array}$$

۶. فرض کنید (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) و (x_3, y_3) مختصات سه نقطه در صفحه باشند. نشان دهید که این نقاط روی یک خط هستند اگر و فقط اگر

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

۷. فرض کنید (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) ، (x_3, y_3) و (x_4, y_4) مختصات چهار نقطه در صفحه باشند. نشان دهید که این نقاط روی یک خط یا روی یک دایره قرار دارند اگر و فقط اگر

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

۸. در فضای P_3 ، ماتریسهای مربوط به تغییر از پایه $1, x, x^2, x^3$ به پایه $1, (1+x), (1+x)^2, (1+x)^3$ را بیابید.

۹. اگر x_1, x_2, \dots, x_n پایه‌ای برای فضای برداری V تشکیل دهند، نشان دهید که مجموعه‌های بردارهای زیر نیز پایه‌ای برای V تشکیل می‌دهند.

$$(الف) \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n, \dots, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2, x_1$$

$$(ب) \quad x_1 - x_2 + x_3 + \dots + x_n, x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + (-x_n), \dots, x_1 + x_2 - x_3 + \dots + x_n$$

$$(ج) \quad x_1 + x_n, \dots, x_1 + x_3, x_1 + x_2, x_1$$

۱۰. نشان دهید که هر مجموعه از سه بردار متمایز که نقاط انتهایی آنها روی سهمی به معادله پارامتری

$$z(t) = t^2, y(t) = t, x(t) = 1$$

قرار دارند، پایه‌ای برای \mathbb{R}^3 تشکیل می‌دهد.

۱۱. فرض کنید

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad و \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

سه بردار در \mathbb{R}^n باشند. اگر

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

نشان دهید که سه بردار مستقل خطی اند.

۱۲. اگر p_0, p_1, p_2 و p_2 چند جمله‌ایهای مستقل خطی در P_2 باشند و x_0, x_1, x_2 و x_2 اعداد حقیقی متمایز، نشان دهید که بردارهای

$$\begin{bmatrix} p_0(x_2) \\ p_1(x_2) \\ p_2(x_2) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p_0(x_1) \\ p_1(x_1) \\ p_2(x_1) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p_0(x_0) \\ p_1(x_0) \\ p_2(x_0) \end{bmatrix}$$

مستقل خطی اند.

۱۳. اگر x_1, x_2, \dots, x_n پایه‌ای برای یک فضای برداری V باشد، نشان دهید که بردارهای $x_1 - x, x_2 - x, \dots, x_n - x$ پایه‌ای برای فضای برداری V تشکیل می‌دهند اگر و فقط اگر x را بتوان به صورت

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$$

با ضابطه

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$$

نوشت.

۱۴. تابع f روی R^3 با قاعده زیر تعریف شده است: اگر $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ، آنگاه

$$f(v) = x^2 + 2xy - 4xz + y^2 + z^2$$

فرض کنید \mathcal{B} ، پایه $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ برای فضا باشد و $v \xleftrightarrow{\mathcal{B}} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$ نشان دهید

که $f(v) = 2(x')^2 - (y')^2 + 4(z')^2$. (این نشان می‌دهد که چگونه می‌توان یک فرمول را با انتخاب مناسب مختصات، ساده کرد.)

۱۵. نشان دهید که $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ مستقل خطی اند اگر و فقط اگر

$$3x + 3y - 3z \neq 0.$$



تبدیلات خطی

۱ تعریف تبدیلات خطی

در فصل قبلی، فضاهای برداری را مطالعه کردیم. در این فصل، تبدیلات خطی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. یک تبدیل خطی، در اساس، تابعی است از یک فضای برداری به فضای برداری دیگر که ساختار جبری را حفظ می‌کند. در فصل گذشته، فضای بردارهای ستونی با تعداد مؤلفه‌های ثابت را به عنوان الگوی فضای برداری اختیار کردیم و آن را بیش از هر فضای برداری دیگری به کار بردیم. در این فصل، ماتریس را به عنوان الگوی تبدیل خطی در نظر می‌گیریم. همچنین خواهیم دید که می‌توان، به مفهومی بسیار دقیق، هر فضای برداری را به عنوان فضای بردارهای ستونی، و هر تبدیل خطی را به عنوان ماتریس، در نظر گرفت.

تعریف فرض کنیم V و W فضاهایی برداری باشند و T تابعی از V به W با خواص زیر باشد:

$$(الف) \quad T(x + y) = T(x) + T(y), \quad x, y \text{ در } V$$

$$(ب) \quad T(\alpha x) = \alpha T(x), \quad \alpha \text{ هر اسکالر در } V \text{ و } x \text{ هر بردار در } V$$

در این صورت T را یک **تبدیل خطی** از V به W می‌نامند.

برای نمایش یک تبدیل خطی T از فضای برداری V به فضای برداری W اغلب

$$\text{می‌نویسیم } T: V \rightarrow W$$

مثال ۱ فرض کنیم A ماتریسی $m \times n$ با درایه‌های حقیقی باشد. تابع T_A از \mathbb{R}^n به \mathbb{R}^m را که به صورت زیر تعریف می‌شود، در نظر می‌گیریم

$$T_A(x) = Ax,$$

که در آن x یک n -بردار است.

اگر x یک n -بردار باشد، مطمئناً حاصلضرب Ax تعریف شده است و یک m -بردار می باشد. پس T_A تابعی از R^n به R^m تعریف می کند.

برای اینکه ثابت کنیم T_A خطی است، ملاحظه می کنیم که اگر x و y متعلق به R^n باشند و α یک اسکالر باشد، آنگاه داریم

$$\begin{aligned} T_A(x+y) &= A(x+y) && (\text{بنا به تعریف } T_A) \\ &= Ax + Ay && (\text{بنا به قانون توزیع پذیری ضرب ماتریسها}) \\ &= T_A(x) + T_A(y) && (\text{طبق تعریف } T_A) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} T_A(\alpha x) &= A(\alpha x) \\ &= \alpha Ax \\ &= \alpha T_A(x) \end{aligned}$$

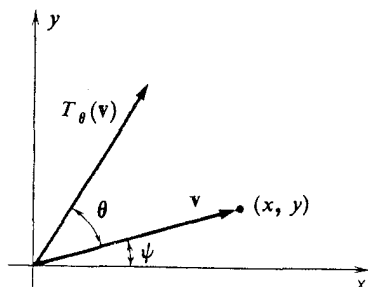
برای مثال، تابع T ، از R^2 به R^2 ، که به صورت

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y + z \\ y + z \end{bmatrix}$$

تعریف می شود، خطی است.

مثال ۲ اگر A ماتریسی $m \times n$ با درایه های مختلط باشد، تابع T_A که به ازای هر $x \in C^n$ به صورت $T_A(x) = Ax$ تعریف می شود، یک تبدیل خطی از C^n به C^m تعریف می کند.

مثال ۳ فرض کنیم T_θ تابعی از R^2 به R^2 باشد که به صورت زیر تعریف می شود:
اگر v برداری در صفحه باشد، $T_\theta(v)$ از دوران v به اندازه θ درجه در جهت خلاف حرکت عقربه های ساعت، حاصل می شود (ر. ک. شکل ۱۰۵).



شکل ۱۰۵

فرض کنیم r طول بردار \mathbf{v} ، و ψ زاویه‌ای باشد که بردار \mathbf{v} با محور x ها می‌سازد. اگر انتهای بردار \mathbf{v} در نقطه (x, y) از صفحه واقع باشد، داریم $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. با استفاده از قواعد مثلثات، نتیجه می‌شود که $x = r \cos \psi$ و $y = r \sin \psi$. لذا

$$\mathbf{v} = (r \cos \psi)\mathbf{i} + (r \sin \psi)\mathbf{j}$$

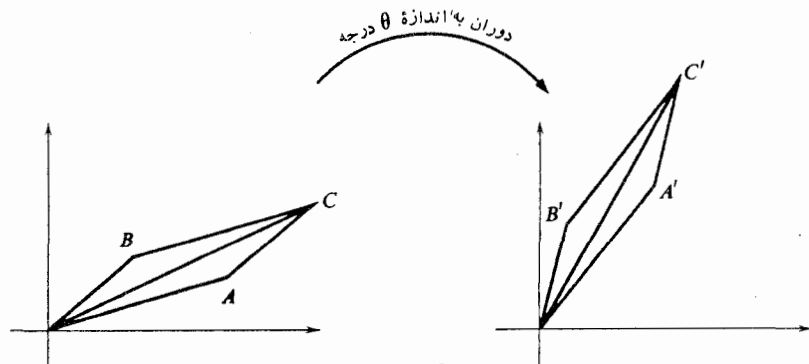
چون بردار $T_\theta(\mathbf{v})$ از دوران \mathbf{v} به اندازه θ درجه حاصل می‌شود، طول $T_\theta(\mathbf{v})$ همان طول \mathbf{v} است، یعنی مساوی است با r ، و زاویه بین $T_\theta(\mathbf{v})$ و محور x ها، $\theta + \psi$ درجه است. از اینرو،

$$\begin{aligned} T_\theta(\mathbf{v}) &= (r \cos(\theta + \psi))\mathbf{i} + (r \sin(\theta + \psi))\mathbf{j} \\ &= (r \cos \theta \cos \psi - r \sin \theta \sin \psi)\mathbf{i} \\ &\quad + (r \cos \theta \sin \psi + r \sin \theta \cos \psi)\mathbf{j} \\ &= (x \cos \theta - y \sin \theta)\mathbf{i} + (y \cos \theta + x \sin \theta)\mathbf{j} \end{aligned}$$

که برحسب ماتریسها و بردارهای ستونی چنین می‌شود:

$$T_\theta \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

از مثال ۱ چنین برمی‌آید که T_θ تبدیلی خطی از \mathbb{R}^2 به خودش است. در این مثال، جهت به دست آوردن عبارتی جبری برای T_θ ، از هندسه استفاده کردیم. سپس با انجام عملیات روی این عبارت جبری، نشان دادیم که T_θ خطی است. لکن، با روش هندسی محض نیز می‌توانیم خطی بودن T_θ را ثابت کنیم.



شکل ۲.۵

برای مثال، نشان می‌دهیم که $T_\theta(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T_\theta(\mathbf{u}) + T_\theta(\mathbf{v})$. در شکل ۲.۵، فرض کنیم \mathbf{u} و \mathbf{v} بردارهایی باشند که انتهای آنها به ترتیب A و B است. در این صورت، انتهای $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ نقطه C است. همچنین انتهای $T_\theta(\mathbf{u})$ ، $T_\theta(\mathbf{v})$ و $T_\theta(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ به ترتیب در A' ، B' و C' واقع است. نکته مهم آن است که، چون T_θ یک دوران است و $OACB$ یک متوازی‌الاضلاع، نیزیک متوازی‌الاضلاع می‌باشد. پس، بنا به جمع برداری نتیجه می‌شود که $T_\theta(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T_\theta(\mathbf{u}) + T_\theta(\mathbf{v})$. همین‌طور، می‌توان

نشان داد که $T_\theta(\alpha u) = \alpha T_\theta(u)$.

مثال ۴ سه شرکت L ، M ، و N که بازار را به طور کامل در دست دارند محصول خاصی را تولید می کنند. در طی یک سال، هر شرکت درصد معینی از مشتریهای خود را حفظ می کند و درصد دیگری از آنها به شرکتهای رقیب روی می آورند. میزان حفظ و از دست دادن مشتریها را با ماتریس

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} L & M & N \end{matrix} \\ \begin{matrix} L \\ M \\ N \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

نشان می دهیم. اگر ستون اول را از بالا به پایین بخوانیم، می بینیم که $1/2$ از مشتریان L خریدار این شرکت می مانند و $1/4$ آنها به M و $1/4$ باقیمانده به N روی می آورند.

دو ستون دیگر را نیز به همین ترتیب می توان تفسیر کرد. حال بردار $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ را چنین

تعریف می کنیم که x کسری از بازار است که در زمانی بخصوص در دست L است، y کسر مربوط به M ، و z کسر مربوط به N می باشد. گوئیم که v نمایشگر وضع بازار است. فرض می کنیم $T(v)$ وضع بازار پس از یک سال باشد. در این صورت $T(v) = Av$ برای مثال، پس از انقضای یک سال، سهم M را از بازار بررسی می کنیم. پس از این مدت، $1/4$ از مشتریان شرکت L جذب شرکت M شده اند و از این منبع، $x/4$ از بازار به دست شرکت M می افتد. همچنین شرکت M نصف مشتریان خود را حفظ می کند که $y/2$ بازار را شامل می شود. از N نیز $z/6$ از بازار نصیب شرکت M می شود. لذا، روی هم رفته بعد از یک سال، سهم M از بازار $x/4 + y/2 + z/6$ است. البته، این عبارت دومین مؤلفه بردار Av است.

در این حالت، کاملاً طبیعی است که T را به عنوان تابعی در نظر گیریم که با فرمول $T(v) = Av$ روی تمامی \mathbb{R}^3 تعریف شده است. مثال ۱ فوق نشان می دهد که T تبدیلی خطی از \mathbb{R}^3 به خودش است. در این مثال، T وضع بازار را در یک سال معین، به وضع بازار در سال بعد از آن تبدیل می کند.

ماتریس A ، مثال خاصی از ماتریس تصادفی است. ماتریس تصادفی، ماتریسی است که همه درایه های غیر منفی و حاصل جمع درایه های هر ستونش برابر ۱ باشد. قبلاً در این کتاب، نمونه های زیادی از این قبیل ماتریسها را دیدیم. در مثال ۲، از بخش ۴.۲، ماتریسهای A_1, A_2, A_3 و A_4 همگی ماتریسهای تصادفی هستند. این قبیل ماتریسها در مطالعه فرایندهای مارکوف، که هم این مثال و هم مثال بخش ۴.۲ نمونه هایی از آن هستند، اهمیت

زیادی دارند. در مطالعهٔ این فرایندها که با ماتریسهای تصادفی سروکار دارند، نظریهٔ تبدیلات خطی خیلی مفید است.

این گونه مثالها غالباً در مدلهای ریاضی معمول در علوم رفتاری و علوم اجتماعی پیش می‌آیند.

در تمام مثالهای فوق، برای تعریف تبدیلات خطی از ماتریسها استفاده شد، ولی همان طور که در مثال زیر خواهیم دید، لزومی ندارد که همیشه چنین باشد.

مثال ۵ فرض کنیم M_{nm} و M_{mn} بترتیب نشانگر فضای ماتریسهای $m \times n$ و $n \times m$ با درایه‌های حقیقی باشند. تابع T از M_{mn} به M_{nm} را که به ازای هر ماتریس $m \times n$ به صورت $T(A) = A^T$ تعریف می‌شود، در نظر می‌گیریم. چون ترانهاد یک ماتریس $m \times n$ ، ماتریسی $n \times m$ است، T تابعی خوش-تعریف از M_{mn} به M_{nm} است. اگر A و B ماتریسهای $m \times n$ باشند و α یک اسکالر باشد،

$$\begin{aligned} T(A+B) &= (A+B)^T && (\text{بنا به تعریف } T) \\ &= A^T + B^T && (\text{بخش } ۷.۲) \\ &= T(A) + T(B) && (T \text{ طبق تعریف}) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} T(\alpha A) &= (\alpha A)^T && (\text{بنا به تعریف } T) \\ &= \alpha A^T && (\text{بخش } ۷.۲) \\ &= \alpha T(A) && (T \text{ طبق تعریف}) \end{aligned}$$

در نتیجه T تبدیلی خطی است.

مثال ۶ فرض کنیم D تابعی از P_n به P_n باشد که به صورت $D(f) = f'$ مشتق f' (است) تعریف می‌شود. چون مشتق یک چند جمله‌ای با درجهٔ نایشتتر از n ، یک چند-جمله‌ای با درجهٔ نایشتتر از n است، D تابعی خوش تعریف از P_n به P_n است. برای اثبات خطی بودن D ، ملاحظه می‌کنیم که

$$\begin{aligned} D(f+g) &= (f+g)' && (\text{بنا به تعریف } D) \\ &= f' + g' && (\text{طبق قواعد حساب دیفرانسیل و انتگرال}) \\ &= D(f) + D(g) && (\text{بنا به تعریف } D) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} D(\alpha f) &= (\alpha f)' && (\text{بنا به تعریف } D) \\ &= \alpha f' && (\text{طبق قواعد حساب دیفرانسیل و انتگرال}) \\ &= \alpha D(f) && (\text{بنا به تعریف } D) \end{aligned}$$

اگر X برداری در فضای برداری V باشد و T تبدیلی خطی از V به فضای برداری W ، و اگر $T(X) = Y$ ، گوئیم که بردار Y نگارهٔ بردار X تحت تبدیل T است. همچنین

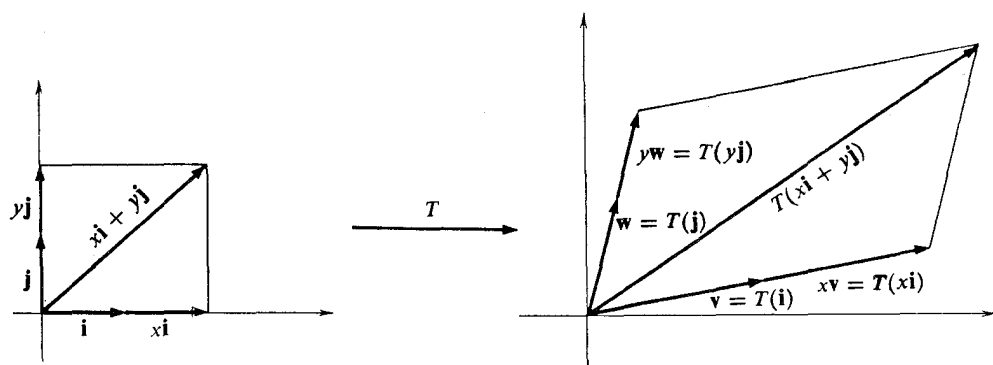
می‌توان گفت که تحت تبدیل T ، x به y می‌رود، یا x توسط T به y فرستاده می‌شود. لذا، مثلاً، نگارهٔ $1 + x + 3x^2$ تحت عملگر مشتقگیری مثال ۴، برابر $6x + 1$ است. در بسیاری از موارد، تبدیل خطی از یک فضای برداری به خودش را عملگر خطی می‌نامند.

اگر T عملگری خطی روی R^2 باشد و اگر نگارهٔ بردارهای پایهٔ i و j تحت تبدیل T معلوم باشد، می‌توان نگارهٔ یک بردار دلخواه از R^2 را معین کرد. فرض می‌کنیم $T(i) = v$ و $T(j) = w$. در این صورت،

$$T(xi + yj) = T(xi) + T(yj) = xT(i) + yT(j) = xv + yw.$$

پس، می‌توان نگارهٔ $xi + yj$ را با استفاده از v و w حساب کرد. این مطلب در شکل ۳.۵ نشان داده شده است.

در واقع، بررسیهای مشابهی نشان می‌دهد که نگاره‌های دو بردار مستقل خطی تحت T ، نگاره‌های تمام بردارهای R^2 را معین می‌کنند. این مطلب در بعضی از کاربردها ممکن است مفید باشد.



شکل ۳.۵

مثال ۷. یک مؤسسه انرژی، زغال سنگ و گاز طبیعی تولید می‌کند. کسر معینی از زغال سنگی که مؤسسه استخراج می‌کند در خود مؤسسه برای تولید زغال سنگ و گاز طبیعی بیشتر مصرف می‌شود. همین‌طور، مقداری از گاز نیز به مصرف داخلی مؤسسه می‌رسد.

مقدار زغال سنگ استخراج شده و گاز به دست آمده در یک هفته را با بردار $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$

نشان می‌دهیم. در اینجا u مقدار زغال سنگی است که در یک هفته استخراج می‌شود و v مقدار گاز به دست آمده در یک هفته است. این بردار را مقدار تولید ناخالص می‌نامیم.

مقدار زغال سنگ و گاز موجود در یک هفته برای فروش، تابعی است از مقدار

تولید ناخالص در آن هفته. بنابراین، هرگاه مقدار تولید ناخالص با بردار $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ داده شده

باشد، چنین تعریف می‌کنیم: $T\left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$ ، که در آن s و t به ترتیب مقادیر

زغال سنگ و گاز طبیعی است که مؤسسه برای فروش تولید می‌کند. بردار $\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$ را مقدار تولید خالص می‌نامیم. در این حالت T تابعی است که مقدار تولید ناخالص را به مقدار تولید خالص تبدیل می‌کند.

احساس شهودی ما ممکن است باعث این فکر شود که T خطی است. برای مثال، قابل قبول به نظر می‌رسد که وقتی مقدار تولید ناخالص دو برابر شود، مقدار تولید خالص نیز دو برابر گردد. در هر حال، در بسیاری از الگوهای ریاضی دستگاههای اقتصادی، فرض بر این است. بنابراین، فرض می‌کنیم T خطی است.

گیریم که مقدار تولید ناخالص و خالص در یک هفته، به ترتیب $\begin{bmatrix} 1600 \\ 1200 \end{bmatrix}$ و

$\begin{bmatrix} 900 \\ 700 \end{bmatrix}$ ، و در هفته دیگر، $\begin{bmatrix} 2400 \\ 2000 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1300 \\ 1200 \end{bmatrix}$ باشند. اگر در هفته‌ای مقدار تولید

ناخالص $\begin{bmatrix} 2000 \\ 1600 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار تولید خالص چقدر است؟

با ملاحظه اینکه $\begin{bmatrix} 2000 \\ 1600 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2400 \\ 2000 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1600 \\ 1200 \end{bmatrix}$ و با استفاده از

خطی بودن T ، داریم $T\left(\begin{bmatrix} 2000 \\ 1600 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}T\left(\begin{bmatrix} 2400 \\ 2000 \end{bmatrix}\right) + \frac{1}{2}T\left(\begin{bmatrix} 1600 \\ 1200 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1100 \\ 950 \end{bmatrix}$

این یک مثال ساده از الگوی ورودی - خروجی لئونتیف است که در مطالعه دستگاههای اقتصادی به کار می‌رود.

به عنوان مثالی از ماهیت هندسی تبدیلات خطی، نشان می‌دهیم که یک عملگر خطی روی \mathbb{R}^2 ، خطوط را به نقاط و یا به خطوط می‌برد.

برای ملاحظه این مطلب، گیریم $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$ معادله پارامتری یک خط باشد، که در آن \mathbf{a} و \mathbf{b} بردارهایی در \mathbb{R}^2 هستند و t یک پارامتر حقیقی است. اگر T عملگری خطی روی \mathbb{R}^2 باشد، نگاره $\mathbf{r}(t)$ عبارت است از $\mathbf{s}(t) = T(\mathbf{r}(t))$. چون T خطی است، داریم:

$$\mathbf{s}(t) = T(\mathbf{r}(t)) = T(\mathbf{a} + t\mathbf{b}) = T(\mathbf{a}) + T(t\mathbf{b}) = T(\mathbf{a}) + tT(\mathbf{b})$$

حال، ملاحظه می‌کنیم که اگر $T(\mathbf{b}) \neq \mathbf{0}$ ، $\mathbf{s}(t)$ معادله خطی است که از نقطه $T(\mathbf{a})$ در امتداد بردار $T(\mathbf{b})$ می‌گذرد. اگر $T(\mathbf{b}) = \mathbf{0}$ ، $\mathbf{s}(t) = T(\mathbf{a})$ مقدار ثابتی است. لذا، $\mathbf{r}(t)$ توسط T به یک نقطه برده می‌شود.

مطلب زیر نشان می‌دهد که هر دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد. عملگر خطی را

که به صورت $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$ روی \mathbb{R}^2 تعریف می‌شود، در نظر

می‌گیریم.

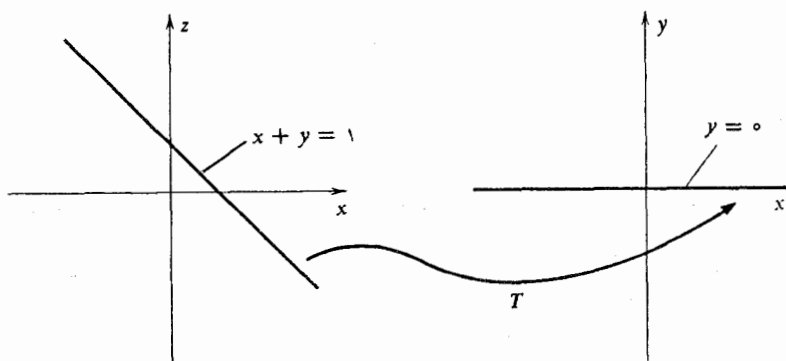
صورت پارامتری خط $x + y = 1$ عبارت است از:

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (1 - t)\mathbf{j}$$

نگاره آن عبارت است از:

$$\mathbf{s}(t) = T(t\mathbf{i} + (1 - t)\mathbf{j}) = t\mathbf{i}$$

که صورت پارامتری خط $y = 0$ می باشد. (ر. ک. شکل ۴.۵)



شکل ۴.۵

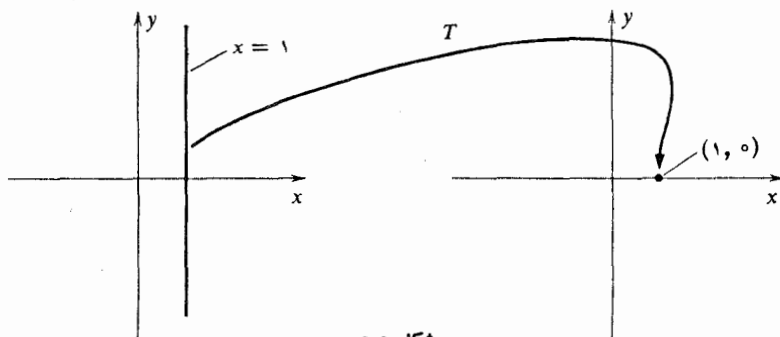
از طرف دیگر، صورت پارامتری خط $x = 1$ عبارت است از:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{j}$$

که به

$$\mathbf{s}(t) = T(\mathbf{r}(t)) = T(\mathbf{i} + t\mathbf{j}) = \mathbf{i}$$

که نقطه $(1, 0)$ است، برده می شود. (ر. ک. شکل ۵.۵)



شکل ۵.۵

خواننده می تواند تحقیق کند که تبدیل خطی T ، هر خط موازی با محور y ها را به یک نقطه می برد، حال آنکه همه خطوط دیگر تحت T به خط $y = 0$ برده می شوند.

تمرینات

۱. معین کنید کدامیک از توابع زیر که از R^2 به R^2 تعریف شده‌اند، خطی است.

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+1 \\ y \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix} \quad (\text{د}) \quad T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x^2 \\ y \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ (x^2+y^2)^{1/2} \end{bmatrix} \quad (\text{و}) \quad T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x-3y \\ y \end{bmatrix} \quad (\text{ا})$$

۲. فرض کنید T تابعی از R^2 به R^2 باشد که هر نقطه را به قرینه آن نسبت به محور x ها می‌برد. نشان دهید که T خطی است و $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$

۳. نشان دهید توابع زیر، که از R^3 به R^3 تعریف شده‌اند، خطی هستند.

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+3y+2z \\ x+y \\ 2x+y+z \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-y+z \\ x+z \\ x+y \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

۴. فرض کنید R_θ تابعی باشد که به هر بردار v برداری مانند $R_\theta(v)$ نسبت می‌دهد که از دوران بردار v به اندازه θ درجه حول محور z ها حاصل می‌شود. در طی دوران، نقطه انتهایی v در صفحه‌ای عمود بر محور z ها باقی می‌ماند.

(الف) نشان دهید که R_θ خطی است و

$$R_\theta\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

(ب) اگر در مطالب فوق محور z ها را جایگزین محور z ها کنیم، نشان دهید که

$$R_\theta\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

۵. در مثال ۷ متن کتاب، فرض کنید v بردار مقدار تولید ناخالص باشد. یک ماتریس A بیابید به طوری که $T(v) = Av$.

۶. در مثال ۷ متن کتاب، فرض کنید v بردار مقدار تولید ناخالص باشد. نشان دهید که $T(v) - v$ مقدار مصرف داخلی زغال سنگ و گاز را به عنوان تابعی از v ، می‌دهد. نشان

دهید که نگاشت $S(v) = v - T(v)$ خطی است.

۷. دو لوله آزمایش محتوی آب را روی میزی قرار داده ایم. مقدار آب در دو لوله با بر دار $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نشان داده شده است، که در آن x مقدار آب در لوله اول و y مقدار آب در لوله دوم است. عملی دو مرحله ای روی لوله ها انجام می شود:

$$(۱) \quad \frac{2}{3} \text{ محتوای لوله اول در لوله دوم ریخته می شود.}$$

$$(۲) \quad \frac{1}{3} \text{ سسپس محتوای لوله دوم در لوله اول ریخته می شود.}$$

فرض کنید $T(v)$ برداری باشد که مقدار آب در دو لوله را پس از انجام هر دو مرحله نشان می دهد.

(الف) ماتریسی مانند A بیابید به طوری که $T(v) = Av$
(ب) نشان دهید که T خطی است.

۸. فرض کنید T عملگری خطی روی R^2 باشد به نحوی که $T(i + j) = j$ و $T(2i - j) = i + j$ بردارهای $T(i)$ و $T(j)$ را بیابید.

۹. دو نفر در مورد طرح زیر برای تعدیل درآمد خود توافق می کنند. فرد اولی نصف پولش را به دومی می دهد و دومی $\frac{1}{3}$ پول خود را به اولی تسلیم می کند. فرض کنید

$v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ برداری باشد که مؤلفه های x و y آن، به ترتیب مقدار پول فرد اول و مقدار پول فرد دوم، قبل از انجام طرح هستند. فرض کنید $T(v)$ برداری باشد که مقدار پول هر کدام را بعد از اجرای طرح نشان می دهد. ماتریسی مانند A بیابید به طوری که $T(v) = Av$.

۱۰. اگر A ماتریسی $m \times n$ باشد، تابع T از M_{np} به M_{mp} را که به صورت زیر تعریف شده است، در نظر بگیرید:

$$T(B) = AB, \quad B \in M_{np}$$

نشان دهید که T خطی است.

۱۱. تابعی مانند T از R^3 به R^3 مثال بنویسید که به ازای هر $v \in R^3$ و هر اسکالر α ، در $T(\alpha v) = \alpha T(v)$ صدق کند ولی خطی نباشد.

۱۲. اگر B ماتریس $n \times n$ وارون پذیری باشد، نشان دهید که تابع T از M_{nn} به M_{nn} که به صورت $T(A) = BAB^{-1}$ تعریف می شود، یک تبدیل خطی است.

۱۳. اگر B ماتریس ثابت $n \times n$ ای باشد، نشان دهید توابع زیر که از M_{nn} به M_{nn}

تعریف می‌شوند، خطی‌اند.

$$T(A) = AB + BA \quad (\text{ب}) \quad T(A) = AB - BA \quad (\text{الف})$$

$$T(A) = AB - B^T A \quad (\text{ج})$$

۱۴. اگر V فضایی برداری و α یک اسکالر ثابت باشد، نشان دهید که تابع $T: V \rightarrow V$ که به صورت $T(x) = \alpha x$ تعریف می‌شود، خطی است. اگر $V = \mathbb{R}^2$ ، این تابع را به طور هندسی تعبیر کنید.

۱۵. فرض کنید V فضایی برداری باشد و x_1, x_2, \dots, x_n پایه‌ای برای V . در این صورت اگر x برداری در V باشد، اسکالرهایی یکتای $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ وجود دارند به طوری که $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$. تابع $f(x) = \alpha_1 x$ را در نظر بگیرید، که در آن، α_1 مختص اول x نسبت به پایه x_1, x_2, \dots, x_n است. نشان دهید که f خطی است.

۱۶. فرض کنید $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ و $g: V \rightarrow \mathbb{R}$ دو تبدیل خطی از فضای برداری V به \mathbb{R} باشند. نشان دهید که

$$T(x) = \begin{bmatrix} f(x) \\ g(x) \end{bmatrix}$$

تبدیلی خطی از V به \mathbb{R}^2 است. این مطلب را در مورد n تابع تعمیم دهید.

۱۷. فرض کنید P_n فضای چند جمله‌ایهای یک متغیره با متغیر x ، از درجه نایشتز از n ، و با ضرایب حقیقی باشد. نشان دهید توابع زیر که از P_n به P_n تعریف می‌شوند، تبدیلاتی خطی‌اند.

(الف) $(T(f))(x) = f(x + \alpha)$ ، که در آن α عدد حقیقی ثابتی است. به عبارت دیگر، T ، $f(x)$ را به $f(x + \alpha)$ می‌برد.

(ب) $T(f) = a_0 f + (b_0 + b_1 x) f' + (c_0 + c_1 x + c_2 x^2) f''$ ، که در آن f' و f'' بترتیب مشتقات اول و دوم f هستند و $a_0, b_0, b_1, c_0, c_1, c_2$ اعداد حقیقی‌اند.

$$(T(f))(x) = \int_0^x t f''(t) dt \quad (\text{ج})$$

$$(T(f))(x) = f(\alpha x) \quad \alpha \text{ عددی حقیقی است.} \quad (\text{د})$$

$$T(f) = f(\alpha) \quad \alpha \text{ عددی حقیقی است.} \quad (\text{ه})$$

۱۸. آیا تابع $f(A) = \det A$ از M_{nn} به اعداد حقیقی، تبدیلی خطی است؟

۱۹. فرض کنید $T: M_{33} \rightarrow M_{22}$ ، تابع

$$T \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

باشد. نشان دهید که T خطی است.

۲۰. فرض کنید P فضای تمام چندجمله‌ایهای یک متغیره بامتغیر x و با ضرایب حقیقی باشد. نشان دهید که توابع S و T از P به P که به صورت

$$(T(f))(x) = \int_0^x f(t) dt \quad \text{و} \quad S(f) = xf$$

تعریف می‌شوند، تبدیلاتی خطی از P به P هستند.

۲۱. فرض کنید T تابعی از فضای برداری حقیقی V به V باشد به نحوی که

$$T(x + y) = T(x) + T(y) \quad (۱)$$

$$T(\alpha x) = \alpha T(x), \alpha \geq 0 \quad (۲)$$

نشان دهید که T تبدیلی خطی است.

۲ خواص دیگری از تبدیلات خطی

در این بخش، توجه خود را به خواص مهم دیگری از تبدیلات خطی معطوف می‌کنیم.

گزاره فرض کنیم V و W فضاهایی برداری باشند، و $T: V \rightarrow W$ تبدیلی خطی باشد. در این صورت

$$T(0) = 0 \quad (\text{الف})$$

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y) \quad (\text{ب})$$

$$T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(x_i) \quad (\text{ج})$$

$$T(0) = T(0 \cdot x) = 0 \cdot T(x) = 0 \quad (\text{الف}) \quad \text{اثبات}$$

$$T(\alpha x + \beta y) = T(\alpha x) + T(\beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y) \quad (\text{ب})$$

$$(\text{ج}) \quad \text{این قسمت را با استقرا روی } n \text{ ثابت می‌کنیم. اگر } n = 1, \text{ بنا به شرط (ب)}$$

از تعریف تبدیل خطی، واضح است که (ج) برقرار است.

اگر $n > 1$ داریم

$$T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) = T\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i + \alpha_n x_n\right)$$

$$= T\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i\right) + T(\alpha_n x_n)$$

$$T\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i T(x_i) \quad \text{بنا به فرض استقرا}$$

پس،

$$T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i T(x_i) + \alpha_n T(x_n)$$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i T(x_i)$$

برای هر فضای برداری V ، دو تبدیل خطی مهم می‌توان تعریف کرد. اولی تابع N است که روی V ، به ازای هر $x \in V$ ، به صورت $N(x) = 0$ تعریف می‌شود. چون $N(x+y) = N(x) + N(y)$ ، می‌بینیم که $N(x) = N(y) = 0$ و $N(x+y) = 0$. همچنین از آنجا که $N(x) = 0$ و $N(\alpha x) = 0$ ، در نتیجه $N(\alpha x) = \alpha N(x)$ از اینرو، N خطی است. مناسب است که N را تبدیل صفر بنامیم.

تبدیل خطی دیگری که در هر فضای برداری V تعریف می‌شود، تابع I_V است که به ازای هر $x \in V$ به صورت $I_V(x) = x$ تعریف می‌شود. I_V خطی است، زیرا طبق تعریف، $I_V(x+y) = I_V(x) + I_V(y)$ ، لذا $I_V(y) = y$ ، $I_V(x) = x$ ، $I_V(x+y) = x+y$ همچنین $I_V(\alpha x) = \alpha x = \alpha I_V(x)$ را تبدیل همانی روی فضای برداری V می‌نامند. هرگاه فضای برداری V از فضای برداری W دو تبدیل خطی از فضای برداری V به فضای برداری W باشند. T_1 و T_2 در چه صورتی مساوی‌اند؟ گوییم T_1 و T_2 مساوی‌اند اگر و فقط اگر به عنوان دو تابع مساوی باشند. به عبارت دیگر T_1 و T_2 مساوی‌اند اگر و فقط اگر به ازای هر بردار $x \in V$ داشته باشیم: $T_1(x) = T_2(x)$. اگر T_1 و T_2 مساوی باشند، می‌نویسیم $T_1 = T_2$.

روشی کلی برای ساختن تبدیلات خطی در قضیه زیر ارائه شده است:

قضیه ۱ فرض کنیم V فضایی برداری باشد و x_1, \dots, x_n پایه‌ای برای V گیریم. فضای برداری دیگری باشد و y_1, \dots, y_n بردار دلخواه در W باشند. در این صورت یک و فقط یک تبدیل خطی T از V به W وجود دارد به نحوی که به ازای $T(x_i) = y_i, i = 1, 2, \dots, n$.

اثبات ابتدا، نشان می‌دهیم که چنین تبدیل خطی وجود دارد.

چون x_1, \dots, x_n پایه است، اگر x برداری در V باشد، اسکالره‌ای یکتای $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ وجود دارند به طوری که $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$. حال $T(x)$ را به صورت $T(x) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n$ تعریف می‌کنیم. چون اسکالره‌ای $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ به طور یکتا توسط x معین می‌گردند، تابع T خوش-تعریف است.

ثابت می‌کنیم که T خطی است. فرض می‌کنیم x و y دو بردار در V باشند. در این صورت به ازای اسکالره‌ای مناسب $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ و β_1, \dots, β_n داریم:

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$$

$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n$$

بنابراین $x + y = (\alpha_1 + \beta_1)x_1 + (\alpha_2 + \beta_2)x_2 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)x_n$ بنا

به تعریف T ، داریم:

$$T(\mathbf{x}) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n$$

$$T(\mathbf{y}) = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \dots + \beta_n y_n$$

و

$$T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (\alpha_1 + \beta_1)y_1 + (\alpha_2 + \beta_2)y_2 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)y_n$$

لذا،

$$T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$$

اگر \mathbf{x} متعلق به V و α یک اسکالر باشد، به ازای اسکالرهایی مناسب $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

داریم $\alpha \mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n$ پس

$$\alpha \mathbf{x} = (\alpha \alpha_1) \mathbf{x}_1 + (\alpha \alpha_2) \mathbf{x}_2 + \dots + (\alpha \alpha_n) \mathbf{x}_n.$$

از اینرو، بنا به تعریف T ،

$$T(\mathbf{x}) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n$$

$$T(\alpha \mathbf{x}) = (\alpha \alpha_1) y_1 + (\alpha \alpha_2) y_2 + \dots + (\alpha \alpha_n) y_n$$

از این قرار $T(\alpha \mathbf{x}) = \alpha T(\mathbf{x})$

بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم که T خطی است. طبق تعریف T ، داریم:

$$T(\mathbf{x}_i) = y_i, \text{ و بدین ترتیب نیمه اول قضیه ثابت شده است.}$$

نیمه دوم قضیه می‌گوید که فقط یک تبدیل خطی وجود دارد به طوری که

$$T(\mathbf{x}_n) = y_n, \dots, T(\mathbf{x}_2) = y_2, T(\mathbf{x}_1) = y_1$$

برای اثبات این مطلب، فرض می‌کنیم S و T دو عملگر خطی باشند به نحوی که به

ازای $i = 1, 2, \dots, n$ داشته باشیم $T(\mathbf{x}_i) = y_i$ و $S(\mathbf{x}_i) = y_i$. می‌خواهیم نشان دهیم

$$T = S. \text{ یعنی به ازای هر } \mathbf{x} \in V, T(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x}).$$

اگر \mathbf{x} متعلق به V باشد، اسکالرهایی $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ وجود دارند به طوری که

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n \text{ پس}$$

$$T(\mathbf{x}) = \alpha_1 T(\mathbf{x}_1) + \alpha_2 T(\mathbf{x}_2) + \dots + \alpha_n T(\mathbf{x}_n)$$

$$= \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n$$

و

$$S(\mathbf{x}) = \alpha_1 S(\mathbf{x}_1) + \alpha_2 S(\mathbf{x}_2) + \dots + \alpha_n S(\mathbf{x}_n)$$

$$= \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n$$

از اینرو، $T(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x})$ چون \mathbf{x} برداری دلخواه بود، نتیجه می‌شود که $T = S$. ●

توجه کنید که قضیه دارای دو قسمت است. قسمت اول، با تبدیل مناسبی از بردارهای

پایه، که در نتیجه نگاره بقیه بردارها با استفاده از خطی بودن به دست می‌آیند، ما را قادر

به ساختن تبدیلات خطی می‌سازد. برای مثال، تبدیل خطی صفر را می‌توان با انتخاب به ساختن تبدیلات خطی می‌ساخت. $y_n = 0, \dots, y_p = 0, y_1 = 0$ و $V = W$ انتخاب را با انتخاب $y_n = x_n, \dots, y_p = x_p, y_1 = x_1$ می‌توان ساخت. همچنین می‌توان یک تبدیل خطی T روی P_p ساخت به نحوی که

$$x^3 \rightarrow 3x^2, x^2 \rightarrow 2x, x \rightarrow 1, 1 \rightarrow 0$$

عملگر خطی حاصل، همان عملگر مشتقگیری مثال ۶ از بخش ۱۰۵ است.

نیمه دوم قضیه دارای صورتبندی دیگری است. اگر T و S دو تبدیل خطی از فضای برداری V به فضای برداری دیگر W باشند و اثر آنها روی بردارهای یک پایه V یکی باشد، آنگاه اثر T و S روی تمامی V یکی است. این گزاره، مطلبی را که در بخش قبلی ثابت کردیم به فضاهای برداری متناهی‌البعدها تعمیم می‌دهد. در آنجا، دیدیم که یک تبدیل خطی از R^2 به R^2 توسط نگاره‌های بردارهای پایه i و j کاملاً معین می‌شود.

حال وقت آن است که با تعمیم نتیجه‌ای از بخش قبلی، نشان دهیم هر تبدیل خطی از R^n به R^m را می‌توان از ضرب بردارهای R^n در ماتریس مناسبی به دست آورد.

قضیه ۲ فرض کنیم $T: R^n \rightarrow R^m$ یک تبدیل خطی باشد. در این صورت ماتریس $m \times n$ ای مانند A با درایه‌های حقیقی وجود دارد به طوری که به ازای هر $x \in R^n$ $T(x) = Ax$

اثبات فرض کنیم e_1, \dots, e_n پایه متعارف R^n و e'_1, \dots, e'_m پایه متعارف R^m باشد.

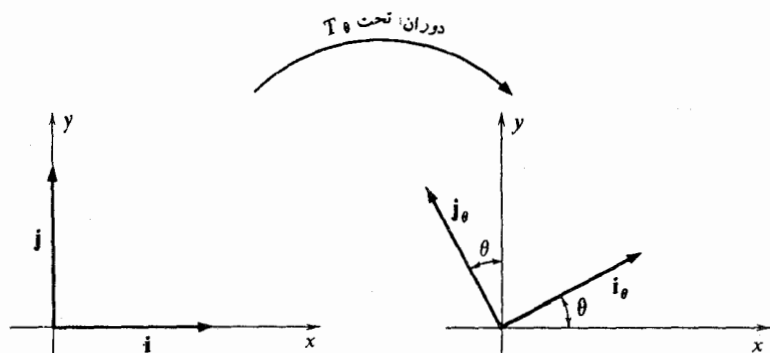
چون e'_1, \dots, e'_m پایه‌ای برای R^m است، اسکالرهای a_{ij} وجود دارند به طوری که $T(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} e'_i$. اگر $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ برداری در R^n باشد، داریم:

$$\begin{aligned} T(x) &= T\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j T(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} e'_i\right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} x_j e'_i \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j\right) e'_i. \end{aligned}$$

از اینرو، مؤلفه i ام بردار $T(x)$ دقیقاً برابر $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$ است. اگر فرض کنیم $A = [a_{ij}]_{(mn)}$ ، آنگاه مؤلفه i ام حاصل ضرب AX دقیقاً عبارت است از $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$.

از این قرار مؤلفه‌های i ام ($i = 1, 2, \dots, m$) بردارهای AX و $T(x)$ یکسان‌اند، و بنابراین $T(x) = AX$. پس تبدیل خطی T دقیقاً از ضرب بردارهای R^n در ماتریس A ، القا شده است.

اگر A ماتریس $m \times n$ ای باشد، غالباً تبدیل خطی از \mathbb{R}^n به \mathbb{R}^m را که توسط A القا می‌شود با T_A نشان می‌دهیم. توجه به این نکته مهم است که ستون i ام ماتریس A بردار $T(e_i)$ است. لذا، اگر T عملگری خطی از \mathbb{R}^n به \mathbb{R}^m باشد، برای محاسبه ماتریس وابسته به آن، فقط به محاسبه نگاره بردارهای پایه e_1, e_2, \dots, e_n و تشکیل ماتریس $A = [T(e_1), T(e_2), \dots, T(e_n)]$ احتیاج داریم. همچنین واضح است که ماتریس A به طور یکتا، توسط نگاره بردارهای پایه e_1, e_2, \dots, e_n تحت T ، معین می‌گردد. به عنوان مثال، تبدیل خطی T_θ را به یاد آورید که بردارهای صفحه را به اندازه θ درجه دوران می‌دهد. (ر. ک. شکل ۶.۵)



شکل ۶.۵

چون

$$i_\theta = T_\theta(i) = (\cos \theta)i + (\sin \theta)j$$

$$j_\theta = T_\theta(j) = -(\sin \theta)i + (\cos \theta)j$$

می‌بینیم که ماتریس وابسته به T_θ عبارت است از:

$$A_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

این فرمول از نوشتن بردار i_θ در ستون اول و بردار j_θ در ستون دوم ماتریس A_θ به دست می‌آید.

مثال ۱ در مثال ۷ از بخش ۱.۵، فرض می‌کنیم به ازای بردارهای مقدار تولید ناخالص

$$\begin{bmatrix} 500 \\ 1000 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 800 \\ 1200 \end{bmatrix}, \text{ بترتیب بردارهای مقدار تولید ناخالص } \begin{bmatrix} 200 \\ 400 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 400 \\ 400 \end{bmatrix}$$

را داشته باشیم. یک ماتریس A بیابید به نحوی که $T(v) = Av$.

بنا به قضیه ۲، می‌دانیم که چنین ماتریس A ای وجود دارد. فرض کنیم

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ چون } T\left(\begin{bmatrix} 500 \\ 1000 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 200 \\ 400 \end{bmatrix} \text{، معادلات } 500a + 1000b = 200 \text{ و } 500c + 1000d = 400$$

و $400 = 500c + 1000d$ را به دست می آوریم. چون $T\left(\begin{bmatrix} 800 \\ 1200 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 400 \\ 400 \end{bmatrix}$

داریم $800a + 1200b = 400$ و $800c + 1200d = 400$. پس از تقسیم بر ۱۰۰، دستگاههای

$$5a + 10b = 2 \quad 5c + 10d = 4$$

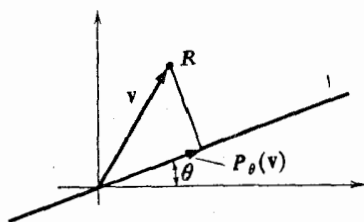
$$8a + 12b = 4 \quad 8c + 12d = 4$$

را به دست می آوریم.

با حل این دستگاهها، درمی یابیم که

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad d = \frac{3}{5}, \quad c = -\frac{2}{5}, \quad b = -\frac{1}{5}, \quad a = \frac{4}{5}$$

مثال ۲ به عنوان مثالی دیگر، تبدیل تصویری زیر را مورد بررسی قرار می دهیم. فرض کنیم l خطی در صفحه است که از مبدأ می گذرد و با محور x ها زاویه θ درجه می سازد. اگر برداری در صفحه با انتهای R باشد، فرض می کنیم $P_\theta(v)$ برداری در امتداد خط l باشد که انتهایش نقطه S ، یعنی پای عمودی است که از نقطه R بر خط l رسم می شود. خط l رسم (ر. ک. شکل ۷.۵) $l(7.5)$



شکل ۷.۵

خطی بودن تابع P_θ را، که به طور هندسی تعریف شد، می توان به روشی ثابت کرد که کاملاً مشابه است با روشی که در بخش ۲.۲ برای اثبات

$$v(x, y) + v(x', y') = v(x + x', y + y')$$

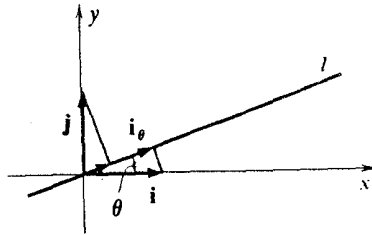
(یعنی اثبات این امر که تعریف جبری و تعریف هندسی بردارها هم ارزند) به کار رفت. در واقع، اگر $\theta = 0$ ، یعنی اگر خط l خود محور x ها باشد، اثباتها کاملاً یکسان اند، زیرا

$$P_\theta(v(x, y)) = x\hat{i}$$

با اثبات خطی بودن تابع P_θ به روش هندسی، می بینیم که ماتریسی، مثلاً B_θ

وجود دارد به طوری که $P_\theta(v) = B_\theta v$

تعیین تابع P_θ را با یافتن ماتریس B_θ به پایان می‌رسانیم. برای به دست آوردن ماتریس B_θ فقط لازم است $P_\theta(\mathbf{i})$ و $P_\theta(\mathbf{j})$ را تعیین کنیم. (ر. ک. شکل ۸.۵).



شکل ۸.۵

اگر برداری به طول واحد در امتداد خط l باشد، واضح است که

$$\mathbf{i}_\theta = (\cos \theta)\mathbf{i} + (\sin \theta)\mathbf{j}.$$

از درس مثلثات می‌دانیم که $\cos \theta$ طول بردار $P_\theta(\mathbf{i})$ و $\sin \theta$ طول بردار $P_\theta(\mathbf{j})$ می‌باشند. از اینرو،

$$P_\theta(\mathbf{i}) = (\cos \theta)\mathbf{i}_\theta = (\cos^2 \theta)\mathbf{i} + (\cos \theta \sin \theta)\mathbf{j}$$

$$P_\theta(\mathbf{j}) = (\sin \theta)\mathbf{i}_\theta = (\sin \theta \cos \theta)\mathbf{i} + (\sin^2 \theta)\mathbf{j}$$

بنابراین

$$P_\theta \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

مثال ۳ یک کارخانه تولید کننده چادر، سه نوع چادر تولید می‌کند. برای تولید یک چادر از نوع اول، ۴ متر مربع پارچه کرباس و ۱۰ متر طناب لازم است. برای دومی ۶ متر مربع کرباس و ۱۶ متر طناب و برای سومی ۱۰ متر مربع کرباس و ۳۰ متر طناب لازم

است. فرض کنیم $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ برداری باشد که هر یک از مؤلفه‌های آن، تعداد چادرهای تولید

شده از یک نوع چادر باشد. فرض کنیم $T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ که در آن، a مقدار کرباس بر حسب

متر مربع است که برای تولید x_1 چادر از نوع اول، x_2 چادر از نوع دوم، و x_3 چادر از نوع سوم لازم است، و b مقدار طناب مورد نیاز بر حسب متر است. در این صورت

$$T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 10 \\ 10 & 16 & 30 \end{bmatrix} \mathbf{v}$$

توجه کنید که عناصر ستون i ام این ماتریس، بترتیب مقدار

کرباس و طناب لازم برای تولید یک چادر از نوع i ام هستند.

در این مثال، تبدیل T ، بردار محصول \mathbf{v} را به بردار مواد مورد نیاز، $T(\mathbf{v})$ ،

تبدیل می‌کند.

تمرینات

۱. تمام آن عملگرهای خطی روی \mathbb{R}^2 را بیابید که بردارهای واقع بر خط $x = 0$ را به بردارهای روی خط $x = 0$ ، و بردارهای واقع بر خط $y = 0$ را به بردارهای روی خط $y = 0$ می‌برند.

۲. T عملگری خطی روی \mathbb{R}^2 است. ماتریسی مانند A بیابید به طوری که $T(v) = Av$ و

$$T(j) = i - j \text{ و } T(i) = i + j \text{ (الف)}$$

$$T(i - j) = j \text{ و } T(i + j) = i \text{ (ب)}$$

۳. فرض کنید T عملگری خطی روی \mathbb{R}^2 باشد و u و v بردارهایی مستقل خطی در \mathbb{R}^2 باشند. اگر $T(u) = u$ و $T(v) = v$ ، نشان دهید که T همانی است.

۴. اگر T تبدیلی خطی بین دو فضای برداری V و W باشد، و x_1, x_2, \dots, x_n بردارهایی در V باشند به نحوی که $T(x_1), T(x_2), \dots, T(x_n)$ مستقل خطی باشند، نشان دهید که x_1, x_2, \dots, x_n در V مستقل خطی اند.

۵. فرض کنید $T: V \rightarrow W$ و $S: V \rightarrow W$ تبدیلاتی خطی باشند. اگر x_1, x_2, \dots, x_n بردارهایی در V باشند به طوری که $\text{sp}(x_1, x_2, \dots, x_n) = V$ ، و اگر

$$T(x_1) = S(x_1), T(x_2) = S(x_2), \dots, T(x_n) = S(x_n)$$

نشان دهید که $T = S$.

۶. مثالی از یک تبدیل خطی T از \mathbb{R}^2 به \mathbb{R}^2 بیاورید به قسمی که x_1 و x_2 مستقل خطی ولی $T(x_1)$ و $T(x_2)$ وابسته خطی باشند.

۷. تمام آن تبدیلات خطی از \mathbb{R}^2 به \mathbb{R}^2 را بیابید که

(الف) خط $x = 0$ را به خط $x = 0$ ببرند.

(ب) خط $y = 0$ را به خط $y = 0$ ببرند.

(ج) خط $x = y$ را به خط $x = y$ ببرند.

۸. در نوع معینی از حیوانات، سه گروه سنی وجود دارد. تعداد حیوانات در هر یک از سه

گروه سنی را با یک بردار $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ نمایش می‌دهیم. فرض کنید $T(v)$ نشانگر جمعیت

در هر یک از سه گروه سنی پس از طی یک سال باشد. همانند مثال ۳، از بخش ۵.۲، فرض کنید T خطی باشد.

مشاهده شده است که بردارهای جمعیت در چهار سال متوالی عبارت‌اند از:

$$\begin{bmatrix} 1325 \\ 1050 \\ 450 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1400 \\ 900 \\ 600 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1200 \\ 1200 \\ 400 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1600 \\ 800 \\ 400 \end{bmatrix}$$

نشان دهید که $T(v) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & & \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ و همانند مثال ۳ از بخش ۵.۲، آن را تعبیر کنید.

[راهنمایی: با کمی تفکر معلوم می‌شود که احتیاج به حل هیچ معادله خطی نیست.]

۹. دو لوله آزمایش حاوی آب روی میزی قرار دارند. فرض کنید $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نشانگر مقدار آب در هر یک از دو لوله باشد. عملی دو مرحله‌ای روی دو لوله انجام می‌شود. (۱) a برابر محتوای لوله اول را در لوله دوم می‌ریزیم. (۲) سپس b برابر محتوای لوله دوم را در لوله اول می‌ریزیم ($a < 1, b < 1$). فرض کنید $T(v)$ نشانگر مقدار آب در هر یکس از لوله‌ها پس از انجام عمل فوق باشد.

(الف) نشان دهید که $T(v) = \begin{bmatrix} 1-a+ba & b \\ a-ba & 1-b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

(ب) این عمل دو بار انجام می‌گیرد. نتایج آن عبارت‌اند از:

$$\begin{bmatrix} 90 \\ 90 \end{bmatrix} \xrightarrow{a} \begin{bmatrix} 130 \\ 50 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 180 \\ 30 \end{bmatrix} \xrightarrow{b} \begin{bmatrix} 160 \\ 50 \end{bmatrix}$$

۱۰. فرض کنید V یک فضای برداری دوبعدی و x_1, x_2, x_3 بردارهایی در V باشند به طوری که هر دو تا از آنها نسبت به هم مستقل خطی‌اند، و نیز فرض کنید $T: V \rightarrow V$ تبدیلی خطی باشد به نحوی که به ازای اسکالرهایی $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ و α_3 ،

$$T(x_1) = \alpha_1 x_1, T(x_2) = \alpha_2 x_2, T(x_3) = \alpha_3 x_3.$$

نشان دهید که اسکالری مانند α وجود دارد به طوری که به ازای هر $x \in V$ ، $T(x) = \alpha x$ اگر $V = \mathbb{R}^2$ این مطلب را به طور هندسی تعبیر کنید.

۱۱. فرض کنید

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

بردارهایی مستقل خطی در \mathbb{R}^2 باشند. فرض کنید T تبدیلی خطی از \mathbb{R}^2 به \mathbb{R}^2 باشد به قسمی که

$$T\left(\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{bmatrix} \text{ و } T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

نشان دهید $T(x) = Ax$ که در آن، A ماتریس 2×2 می‌باشد.

$$A = \begin{bmatrix} y_1 & y'_1 \\ y_2 & y'_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x'_1 \\ x_2 & x'_2 \end{bmatrix}^{-1}$$

است.

۱۲. فرض کنید T تبدیلی خطی از R^3 به R^3 باشد. نشان دهید که T هر صفحه‌ای را که از مبدأ می‌گذرد به یک صفحه یا یک خط مار بر مبدأ، و یا به خود مبدأ، می‌برد. مثالی برای هر یک از این حالات بیاورید.

۱۳. جمعیت پایتختی با بردار $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = v$ مشخص می‌گردد، که در آن x جمعیت شهر و y جمعیت حومه آن است. در طی یک دوره دهساله، معلوم شده است که کسر معین a از ساکنین شهر به حومه تغییر مکان می‌دهند، و کسر معین b از حومه نشینان در شهر سکونت می‌گزینند. بجز این موارد، عامل دیگری جمعیت را تغییر نمی‌دهد. در سه دهه متوالی بردارهای جمعیت عبارت‌اند از: $\begin{bmatrix} 1000,000 \\ 400,000 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 920,000 \\ 480,000 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 852,000 \\ 548,000 \end{bmatrix}$ ، تابعی مانند T بیابید به طوری که $T(v)$ جمعیت پایتخت پس از ده سال باشد. مقادیر a و b چیست؟

۱۴. اگر $f: R^n \rightarrow R^n$ تبدیلی خطی باشد، نشان دهید که اسکالرهای a_1, a_2, \dots, a_n وجود دارند به نحوی که

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

۱۵. اگر e_1, e_2, \dots, e_n پایه متعارف R^n باشد، نمایش ماتریسی عملگر خطی T را بیابید در صورتی که

$$T(e_n) = 0, T(e_{n-1}) = e_n, \dots, T(e_2) = e_3, T(e_1) = e_2 \quad (\text{الف})$$

$$T(e_n) = e_1, T(e_{n-1}) = e_n, \dots, T(e_2) = e_3, T(e_1) = e_2 \quad (\text{ب})$$

$$T(e_{n-1}) = e_{n-1} + e_{n-2}, \dots, T(e_2) = e_2 + e_1, T(e_1) = e_1 \quad (\text{ج})$$

$$T(e_n) = e_n + e_{n-1}$$

۱۶. نمایش ماتریسی تبدیل خطی از R^n به R^n را بیابید که بردار x را به بردار αx ، که در آن α اسکالری ثابت است، می‌برد.

۳ فضای مقادیر

فرض کنیم T تبدیلی خطی از فضای برداری V به فضای برداری W باشد. می‌خواهیم آن بردارهای W را که هریک، نگاره برداری از V است، مورد مطالعه قرار دهیم. این مجموعه از بردارها را فضای مقادیر تبدیل خطی T می‌نامیم، و آن را با R_T نشان می‌دهیم. لذا، $\{y \in W \mid \text{به ازای } x \text{ ای در } V, y = T(x)\}$ ، $R_T = \{y \mid y = T(x), x \in V\}$ برای توجیه این نامگذاری قضیه زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۱ فرض کنیم $T: V \rightarrow W$ تبدیلی خطی از فضای برداری V به فضای برداری W باشد. در این صورت مجموعه بردارهای $\{y \in W \mid \text{به ازای } x \text{ ای در } V, y = T(x)\}$ ، $R_T = \{y \mid y = T(x), x \in V\}$

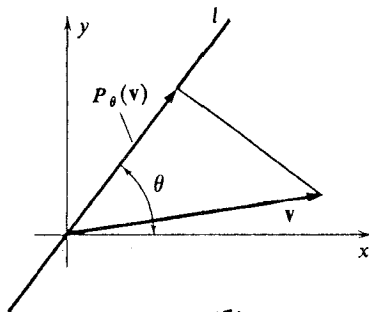
زیر فضایی از W است.

اثبات فرض می‌کنیم y_1 و y_p بردارهایی متعلق به R_T باشند. بنا به تعریف R_T ، بردارهای x_1 و x_p در V وجود دارند به قسمی که $T(x_1) = y_1$ و $T(x_p) = y_p$. چون T خطی است، $T(x_1 + x_p) = T(x_1) + T(x_p) = y_1 + y_p$ ، و از اینرو چون $y_1 + y_p \in R_T$ داریم، یعنی نگاره $x_1 + x_p$ تحت تبدیل T است، داریم $y_1 + y_p \in R_T$.
حال فرض می‌کنیم y متعلق به R_T و α یک اسکالر باشد. چون y در R_T است، یک بردار x در V وجود دارد به قسمی که $T(x) = y$. به دلیل خطی بودن T ، $T(\alpha x) = \alpha T(x) = \alpha y$. چون αy نگاره برداری در V ، یعنی نگاره αx تحت تبدیل T است، می‌بینیم که αy متعلق به R_T است. از آنجا که زیرمجموعه R_T تحت اعمال جبری جمع، و ضرب اسکالر بسته است، نتیجه می‌شود که R_T زیر فضایی از W است. ●

برای مثال، فضای مقادیر تبدیل صفر، N ، دقیقاً زیر فضای صفر است. اگر $I_V: V \rightarrow V$ عملگر همانی روی فضای برداری V باشد، فضای مقادیر، تمامی فضای V است.

با استفاده از این مطلب که R_T زیر فضایی از فضای برداری W است و با به کار بردن قضیه ۳ از بخش ۸.۴، بلافاصله می‌توان نتیجه گرفت که $\dim R_T \leq \dim W$.
کمیت $\dim R_T$ آنقدر مهم است که نام بخصوصی به آن داده شده است. آن را رتبه T می‌نامند و با $r(T)$ نشان می‌دهند.

مثال ۱ در مثال ۲ از بخش ۲.۵، تبدیل تصویری P_θ از \mathbb{R}^2 به \mathbb{R}^2 را تعریف کردیم. بردار $P_\theta(v)$ به این طریق به دست می‌آید که بردار v را به طور عمودی روی خطی که با محور x زاویه θ درجه می‌سازد تصویر می‌کنیم. (ر. ک. شکل ۹.۵). از تعریف P_θ بلافاصله نتیجه می‌شود که هر بردار در فضای مقادیر P_θ ، مضرب اسکالری از بردار $i_\theta = (\cos \theta)i + (\sin \theta)j$ است. لذا R_{P_θ} زیرفضای یک بعدی \mathbb{R}^2 است که توسط بردار i_θ پدید می‌آید. بعلاوه $r(P_\theta) = 1$.



شکل ۹.۵

مثال ۲ فرض می‌کنیم

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = y_1$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = y_1$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = y_m$$

دستگاهی از m معادله خطی n مجهولی باشد. با استفاده از نمادگذاری ماتریسی به صورت $\mathbf{y} = [y_j]_{(m)}$ ، $\mathbf{x} = [x_i]_{(n)}$ ، $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{(mn)}$ معادله $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

فرض کنیم $T_A: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ تبدیلی خطی باشد که به صورت $T_A(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ تعریف می شود. فضای مقادیر T_A مرکب از تمام آن بردارهای \mathbf{y} در \mathbf{R}^m است که به ازای آنها یک بردار \mathbf{x} در \mathbf{R}^n وجود داشته باشد به قسمی که $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$. به عبارت دیگر، فضای مقادیر دقیقاً گردآورده بردارهایی است که به ازای آنها دستگاه $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ قابل حل باشد.

روش حذفی گاوسی که در فصل اول مورد بحث قرار گرفت تکنیکی محاسباتی برای تعیین فضای مقادیر تبدیل خطی وابسته به یک ماتریس به دست می دهد. مثلاً اگر داشته باشیم

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

می توانیم تبدیل خطی T از \mathbf{R}^2 به \mathbf{R}^3 را که به صورت $T_A(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ تعریف می شود، در نظر بگیریم. برای به دست آوردن فضای مقادیر T_A ، باید آن بردارهای ستونی را بیابیم که به ازای مؤلفه های آنها u, v, w دستگاه معادلات زیر قابل حل باشد:

$$\begin{aligned} x - y &= u \\ 3x + y + 7z &= v \\ 4x &+ 7z = w \end{aligned}$$

از روش حذفی پیروی می کنیم:

$$\begin{aligned} x - y &= u \\ 3x + y + 7z &= v \\ 4x &+ 7z = w \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} x - y &= u \\ 4y + 7z &= v - 3u \\ 4y + 7z &= w - 4u \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} x - y &= u \\ 4y + 7z &= v - 3u \\ 0 &= w - v - u \end{aligned}$$

مجهول x و معادله اول را بکار می بریم.

مجهول z و معادله دوم را به کار می بریم.

چون در تنها معادله‌ای که به کار گرفته است، یعنی درسومی، همه متغیرها دارای ضریب صفرند، فرایند متوقف می‌شود. لذا، برای اینکه دستگاه سازگار باشد، باید داشته باشیم $0 = u - v - w$. از طرف دیگر، اگر فرض کنیم $y = 0$ و x و z را با استفاده از دو معادله اول پیدا کنیم، می‌بینیم که در واقع دستگاه دارای یک جواب است. پس، فضای مقادیر تبدیل خطی T_A دقیقاً مرکب از بردارهایی است که برای آنها داریم $w = v + u$. به منظور تعیین $r(T_A)$ ، باید بعد فضای مقادیر را بیابیم. واضح است که بردارهای

$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ هر دو عضو R_{T_A} هستند. چون هیچیک از a و b ضربی از دیگری نیست، a و b مستقل خطی‌اند. فرض کنیم c برداری در R_{T_A} باشد که مؤلفه‌هایش u, v, w هستند. پس $w = u + v$. لذا،

$$c = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ u + v \end{bmatrix} = u \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = ua + vb$$

بنابراین، a و b فضای R_{T_A} را پدید می‌آورند. از اینرو $\dim R_{T_A} = 2$ و $r(T_A) = 2$.

در بخشهای بعدی روشهای دیگری برای تعیین رتبه و فضای مقادیر تبدیل خطی وابسته به یک ماتریس عرضه خواهیم کرد. برای توضیح بیشتر مثال فوق، قضیه ۲ را بیان و ثابت می‌کنیم.

قضیه ۲ فرض کنیم A ماتریسی $m \times n$ و T_A تبدیلی خطی از \mathbb{R}^n به \mathbb{R}^m باشد که توسط A القا می‌شود. در این صورت ستونهای ماتریس A فضای مقادیر T_A را پدید می‌آورند. **اثبات** فرض کنیم e_1, e_2, \dots, e_n پایه متعارف \mathbb{R}^n باشد. اگر x در \mathbb{R}^n باشد اسکالرهایی $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ وجود دارند به نحوی که $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$. پس،

$$\begin{aligned} T_A(x) &= T_A(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n) \\ &= \alpha_1 T_A(e_1) + \alpha_2 T_A(e_2) + \dots + \alpha_n T_A(e_n) \\ &= \alpha_1 (Ae_1) + \alpha_2 (Ae_2) + \dots + \alpha_n (Ae_n) \end{aligned}$$

اما Ae_i همان ستون i ام ماتریس A است. چون هر بردار در R_{T_A} را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n نوشت، نتیجه مطلوب، حاصل است. ●

برای مثال، اگر A ماتریس 4×2

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

باشد، قضیه فوق می‌گوید که بردارهای

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

فضای مقادیر T_A را پدید می آورند. چون بردارهای

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

پایه ای برای R^2 تشکیل می دهند، دیده می شود که $R_{T_A} = R^2$ و $r(T_A) = 2$.

مثال ۳ فرض کنیم A ماتریس وارون پذیر $n \times n$ ای باشد. اگر T_A عملگری خطی روی R^n باشد که توسط A القا می شود، آنگاه $R_{T_A} = R^n$.

زیرا تحت این شرایط، معادله $T_A(x) = y$ ، یعنی $AX = y$ ، همیشه قابل حل است. در حقیقت، جواب این معادله، $x = A^{-1}y$ می باشد.

مثال ۴ فرض کنیم S تابعی از M_{nn} به M_{nn} باشد که به صورت $S(A) = A + A^T$ تعریف می شود.

ابتدا، می بینیم که S خطی است. زیرا اگر A و B ماتریسهایی $n \times n$ باشند و α یک اسکالر باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} S(A+B) &= A+B+(A+B)^T = A+B+A^T+B^T \\ &= A+A^T+B+B^T = S(A)+S(B) \end{aligned}$$

$$S(\alpha A) = \alpha A + (\alpha A)^T = \alpha(A+A^T) = \alpha S(A) \quad \text{و}$$

ادعا می کنیم که فضای مقادیر S دقیقاً فضای ماتریسهای متقارن است. اگر B متعلق به R_S باشد، آنگاه به ازای ماتریسی مانند A ، $B = A + A^T$. از اینرو

$$B^T = (A + A^T)^T = A^T + A = B.$$

پس، هر ماتریس در R_S متقارن است.

اکنون، نشان می دهیم که هر ماتریس متقارن متعلق به R_S است. اگر B متقارن باشد، داریم $S(B/2) = B/2 + (B/2)^T = (1/2 + 1/2)B = B$ ، لذا، B متعلق به R_S است.

از مطالب فوق چنین برمی آید که R_S دقیقاً فضای ماتریسهای متقارن است. چون بعد فضای ماتریسهای متقارن $n(n+1)/2$ است (ر. ک. تمرین ۱۱، بخش ۷.۴)، دیده می شود که $r(S) = n(n+1)/2$.

اگر برای تبدیل خطی مفروض $T: V \rightarrow W$ داشته باشیم $R_T = W$ ، T را پوشا می نامند. مثلاً، I_V عملگر همانی روی یک فضای برداری V ، پوشاست. در مثال ۳ فوق، تبدیل خطی T_A از R^n به R^n که توسط ماتریس وارون پذیری القا شده است، پوشاست. اگر A ماتریسی $m \times n$ باشد، تبدیل خطی T_A از R^n به R^m که توسط A القا می شود، پوشاست اگر و فقط اگر دستگاه معادلات $AX = y$ همیشه قابل حل باشد.

تمرینات

۱. پایه‌ای برای فضای مقادیر و نیز مرتبه تبدیل خطی القا شده توسط هر یک از ماتریسهای زیر را بیابید.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad (\text{ج}) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (\text{ه}) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{د})$$

۲. فرض کنید $D: P_n \rightarrow P_n$ عملگر مشتقگیری روی P_n باشد. نشان دهید که $R_D = P_{n-1}$ و $r(D) = n$.

۳. اگر $T: V \rightarrow W$ تبدیلی خطی باشد و اگر $R_T = 0$ ، نشان دهید که T عملگر صفر است.

۴. فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ باشد. اگر $T: M_{nn} \rightarrow M_{nn}$ تبدیلی خطی باشد که به صورت $T(B) = AB$ تعریف شده است، نشان دهید که T پوشاست اگر و فقط اگر A وارون پذیر باشد.

۵. فرض کنید T تبدیلی خطی بین دو فضای برداری V و W باشد. اگر $x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_n$ بردارهایی در V باشند به طوری که $\text{sp}(x_1, x_{p+1}, \dots, x_n) = V$ ، نشان دهید که $T(x_1), \dots, T(x_p), T(x_{p+1}), \dots, T(x_n)$ فضای R_T را پدید می‌آورند.

۶. فرض کنید $T: M_{nn} \rightarrow M_{nn}$ عملگری خطی باشد که روی فضای ماتریسهای $n \times n$ به صورت $T(A) = A^T$ تعریف می‌شود؛ نشان دهید که T پوشاست.

۷. پایه‌ای برای فضای مقادیر و نیز مرتبه هر یک از عملگرهای خطی روی P_n را که در زیر آمده‌اند بیابید.

(الف) $T(f) = xf'$ که f' مشتق f است.

(ب) $(T(f))(x) = \int_0^x f''(t) dt$ ، که f'' مشتق دوم f است.

(ج) $(T(f))(x) = f(x+1)$.

۸. فرض کنید V فضایی برداری باشد و $x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_n$ پایه‌ای برای V ؛ و همچنین T تابعی از V به R^n باشد که بردار x در V را به n تایی مختصات آن در R^n نسبت به پایه $x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_n$ می‌برد. نشان دهید که T تبدیل خطی پوشایی از V به R^n است.

۹. فرض کنید A ماتریس قطری 2×2 ای باشد که مضرب اسکالری از ماتریس همانی نیست و فرض کنید $C: M_{22} \rightarrow M_{22}$ عملگری خطی باشد که به صورت $C(B) = AB - BA$ تعریف می‌شود. نشان دهید که ماتریسهای

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

پایه‌ای برای R_C تشکیل می‌دهند.

۱۰. فرض کنید $x \neq 0$ بردار ثابتی در R^n باشد. نشان دهید تابعی از فضای ماتریسهای $n \times n$ به R^n که به ازای هر ماتریس $n \times n$ ای مانند A به صورت $P(A) = AX$ تعریف می‌شود، تبدیل خطی پوشایی روی R^n است.

۱۱. فرض کنید $S: M_{nn} \rightarrow M_{nn}$ عملگری خطی باشد که به صورت $S(A) = A - A^T$ تعریف می‌شود. نشان دهید که R_S دقیقاً مرکب از ماتریسهای متقارن کج است. یعنی مرکب از ماتریسهای است که در شرط $B^T = -B$ صدق می‌کنند.

۱۲. فرض کنید D ماتریس قطری $n \times n$ ای باشد $Dx = T(x)$ تبدیلی خطی از R^n به R^n باشد که توسط D القا می‌شود. نشان دهید که رتبه D دقیقاً عبارت است از تعداد درایه‌های غیر صفر روی قطر D .

۱۳. فرض کنید A و B ماتریسهای $n \times n$ ای باشند و B وارون‌پذیر باشد و فرض کنید $S(x) = (AB)x$ و $T(x) = Ax$ تبدیلاتی خطی روی R^n باشند که بترتیب توسط AB و A القا می‌شوند. نشان دهید که T و S دارای فضای مقادیر یکسان‌اند.

۱۴. فرض کنید $T: R^n \rightarrow R^n$ عملگری خطی با رتبه ۱ باشد. نشان دهید که اسکالرهای $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ وجود دارند به طوری که $T(x) = Ax$ که در آن

$$A = \begin{bmatrix} b_1 a_1 & b_2 a_1 & \dots & b_n a_1 \\ b_1 a_2 & b_2 a_2 & \dots & b_n a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 a_n & b_2 a_n & \dots & b_n a_n \end{bmatrix}$$

برعکس، نشان دهید که هر ماتریسی از این نوع، تبدیلی خطی از R^n به R^n با رتبه ۱ القا می‌کند.

۱۵. فرض کنید $T: R^n \rightarrow R^n$ تبدیلی خطی با رتبه r باشد و فرض کنید $x_1, x_2, \dots, x_r, \dots, x_n$ پایه‌ای برای R_T باشد. اگر $T(e_j) = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jr}x_r$ ، نشان دهید که

$$T(x) = [x_1, x_2, \dots, x_r] \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1r} & \dots & a_{nr} \end{bmatrix} x$$

که در آن $[x_1, x_2, \dots, x_r]$ ماتریسی $n \times r$ است که ستونهایش، بترتیب x_1, x_2, \dots, x_r ‌اند. این مطلب نشان می‌دهد که ماتریسی با رتبه r را می‌توان به صورت حاصلضرب یک ماتریس $n \times r$ و یک ماتریس $r \times n$ نوشت. چگونه می‌توان از این مطلب، تمرین ۱۴ را نتیجه گرفت؟

۱۶. فرض کنید A و B دو ماتریس $n \times n$ باشند و T_A, T_B, T_{A+B} تبدیلاتی خطی روی

\mathbb{R}^n که بترتیب توسط ماتریسهای A, B ، و $A + B$ القا شده‌اند. نشان دهید که

$$r(T_A) + r(T_B) \geq r(T_{A+B})$$

۱۷. یک تبدیل خطی بیابید که فضای ماتریسهای 3×3 را به‌طور پوشا به فضای ماتریسهای 2×2 برسد.

۱۸. فرض کنید A ماتریس ثابت $n \times n$ ای باشد و T تابعی از P_n به M_{nn} باشد که چندجمله‌ای $f(x)$ را به ماتریس $f(A)$ می‌برد. یعنی، اگر

$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n$ ، آنگاه $T(f) = \alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \dots + \alpha_n A^n$. نشان دهید که T تبدیلی خطی از P_n به M_{nn} است. اگر $n > 1$ ، چرا T پوشا نیست؟

۴ فضای پوچ

فرض کنیم T تبدیلی خطی از فضای برداری V به فضای برداری W باشد. زیر-فضایی از V وجود دارد که به تبدیل T وابسته است و به تعبیری مکمل فضای مقادیری باشد که در بخش قبلی مورد بحث قرار گرفت. این زیر فضای V که با N_T نشان داده می‌شود مرکب از بردارهای x ای است که در شرط $T(x) = 0$ صدق می‌کنند. به عبارت دیگر، عناصر N_T فقط آن بردارهایی هستند که تحت تبدیل خطی T به صفر برده می‌شوند. N_T را فضای پوچ T می‌نامند. این نامگذاری با توجه به قضیه زیر نامگذاری بجایی است.

قضیه ۱ فرض کنیم $T: V \rightarrow W$ تبدیلی خطی از فضای برداری V به فضای برداری W باشد. در این صورت $N_T = \{x \mid x \in V, T(x) = 0\}$ زیر فضایی از V است.

اثبات فرض کنیم x و y متعلق به N_T باشند. در این صورت

$$T(x + y) = T(x) + T(y) = 0 + 0 = 0.$$

لذا $x + y$ متعلق به N_T است. اگر x در N_T و α یک اسکالر باشد،

$$T(\alpha x) = \alpha T(x) = \alpha \cdot 0 = 0,$$

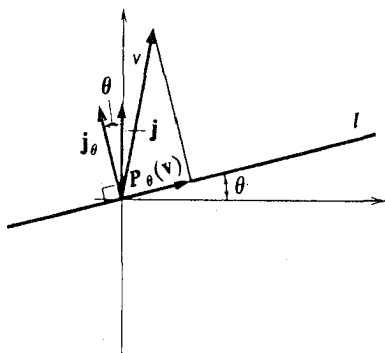
و بنابراین αx به N_T تعلق دارد، پس N_T زیر فضایی از V است.

اگر T عملگر صفر از V به W باشد، چون T همه بردارهای V را به 0 می‌برد، دیده می‌شود که $N_T = V$. اگر I_V عملگر همانی روی V باشد و $I_V(x) = 0$ نتیجه می‌شود که $x = 0$ ، زیرا $I(x) = x$. پس $N_{I_V} = 0$ زیر فضای صفر است.

کمیت $\dim N_T$ ، همانند $\dim R_T$ ، مورد توجه است. آن را پوچی T می‌نامند و با $n(T)$ نشان می‌دهند.

مثال ۱ فرض کنیم P_θ تبدیل تصویری \mathbb{R}^2 باشد که در بخش ۲.۵ تعریف شد. یادآور می‌شویم که $P_\theta(v)$ با رسم عمودی از انتهای v بر خط l ، که با محور x ها زاویه θ درجه می‌سازد، به دست می‌آید. بنابراین، انتهای $P_\theta(v)$ نقطه تقاطع خط l با عمودی است که از انتهای v رسم می‌شود. (ر. ک. شکل ۱۰.۵) از این تعریف هندسی واضح است که

بردار v متعلق به فضای پوچ P_θ است وقتی و فقط وقتی که بردار $i_\theta = (\cos\theta)i + (\sin\theta)j$ عمود باشد؛ یا به عبارت دیگر، اگر و فقط اگر بردار v مضرب اسکالری از بردار $j_\theta = -(\sin\theta)i + (\cos\theta)j$ باشد. لذا، فضای پوچ P_θ توسط بردار j_θ پدیدمی آید و در نتیجه $n(P_\theta) = 1$.



شکل ۱۰۵

مثال ۲ فرض کنیم A ماتریسی $m \times n$ باشد. و T_A تبدیلی خطی از R^n به R^m باشد که توسط A القا شده است. بردار x متعلق به فضای پوچ T_A است اگر و فقط اگر $Ax = 0$. بنا براین می بینیم که فضای پوچ T_A همان فضای جوابهای دستگاه معادلات خطی همگنی است که با نماد ماتریسی به صورت $Ax = 0$ نوشته می شود.

با استفاده از روش حذفی گاوسی، می توان پایه ای برای فضای پوچ عملگر خطی القا شده توسط یک ماتریس به دست آورد. برای مثال، اگر T تبدیلی خطی از R^5 به R^3 باشد که به صورت

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

تعریف می شود، برای یافتن فضای پوچ آن باید دستگاه معادلات زیر را حل کنیم:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 &+ x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &+ 2x_5 = 0 \end{aligned}$$

↓

مجهول x_5 و معادله دوم را به کار می بریم.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 &+ x_5 = 0 \\ -7x_1 + x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

مجهول x_4 و معادله سوم را به کار می‌بریم.

↓

$$-6x_1 + 8x_3 + 2x_4 = 0$$

$$11x_1 - 7x_3 + x_4 = 0$$

$$-7x_1 + x_3 + 5x_4 = 0$$

فرض می‌کنیم مجهول x_4 و معادله اول را به کار برده‌ایم تا به این ترتیب دستگاهی پیدا شود که در آن همه معادلات به کار رفته‌اند.

بافرض $x_1 = c$ و $x_3 = d$ ، دیده می‌شود که عمومیترین جواب به این صورت است:

$$\begin{bmatrix} c \\ 7c - 5d \\ d \\ 3c - 4d \\ -11c + 7d \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ 3 \\ -11 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

چون بردارهای سمت راست تساوی فوق بوضوح مستقل خطی‌اند و فضای N_T را پدید می‌آورند، پایه‌ای برای N_T تشکیل می‌دهند. چون N_T دارای پایه‌ای مرکب از دو بردار است، داریم $n(T) = 2$.

مثال ۳ فرض کنیم $D: P_n \rightarrow P_n$ عملگر مشتقگیری روی فضای چندجمله‌ایهای از درجه نایبتر از n باشد، $D(f) = f'$. اگر چند جمله‌ای f متعلق به N_D باشد، آنگاه $f' = 0$. با توجه به مطالب حساب دیفرانسیل و انتگرال و یا با استفاده از پایه متعارف $1, x, x^2, \dots, x^n$ برای P_n ، دیده می‌شود که f باید یک چندجمله‌ای ثابت باشد. یعنی، f مضرب اسکالری از چند جمله‌ای ۱ است. پس، چند جمله‌ای ۱ پایه‌ای برای N_D تشکیل می‌دهد و از اینجا $n(D) = 1$.

مثال ۴ فرض کنیم S همان عملگر خطی روی M_{nn} باشد که در مثال ۴ بخش ۳.۵ تعریف شد. در این صورت $S(A) = A + A^T$. بنا براین N_S دقیقاً مرکب از ماتریسهای مانتند است که در $S(A) = A + A^T = 0$ صدق کنند. از اینرو A متعلق است به N_S اگر و فقط اگر $A^T = -A$ ، یعنی، A باید یک ماتریس متقارن کج باشد.

تبدیل خطی $T: V \rightarrow W$ را یک به یک گویند اگر $T(x_1) = T(x_2)$ نتیجه دهد $x_1 = x_2$. به عبارت دیگر، اگر هر بردار از W نگاره حداقل یک بردار از V باشد. برای مثال، اگر A ماتریس وارون پذیر $n \times n$ ای باشد، عملگری خطی روی R^n که به صورت $T_A(x) = Ax$ تعریف می‌شود یک به یک است. درواقع، اگر $AX_1 = AX_2$ ، با ضرب طرفین این تساوی در A^{-1} ، خواهیم داشت $A^{-1}(AX_1) = A^{-1}(AX_2)$ یا $x_1 = x_2$.

از طرف دیگر، به عنوان مثالی از یک تبدیل خطی که یک به یک نیست، عملگر مشتقگیری

D روی P_n را در نظر می‌گیریم. داریم $D(1) = D(0) = 0$ ولی $1 \neq 0$.

تبدیلات یک به یک را می توان بر حسب فضای پوچ آنها مشخص کرد.

قضیه ۲ فرض کنیم $T: V \rightarrow W$ تبدیلی خطی بین دوفضای برداری V و W باشد. در این صورت، T یک به یک است اگر و فقط اگر $N_T = 0$ ، یعنی، $n(T) = 0$.

اثبات ابتدا فرض می کنیم T یک به یک باشد. گیریم x برداری متعلق به N_T باشد. پس، $T(x) = 0$. چون $T(0) = 0$ ، نتیجه می شود که نگاره بردارهای 0 و x در W ، یکسان اند. چون T یک به یک است، این بردارها باید مساوی باشند. یعنی، $x = 0$. پس، ثابت کردیم که هر بردار متعلق به N_T صفر است، و از این قرار N_T زیرفضای صفر می باشد.

از طرف دیگر، اگر N_T زیرفضای صفر باشد، فرض می کنیم $T(x_1) = T(x_2)$. پس $T(x_1 - x_2) = T(x_1) - T(x_2) = 0$. اما چون $N_T = 0$ داریم $x_1 - x_2 = 0$ ، یا $x_1 = x_2$. از آنجا که $T(x_1) = T(x_2)$ نتیجه می دهد T یک به یک است. ●

فرض کنیم تبدیل خطی T ، که توسط ماتریس $m \times n$ ای مانند A القا شده، یک به یک باشد. از این مطلب چه نتیجه ای درباره دستگاه معادلات خطی $AX = y$ می توان گرفت؟ این فرض بدان معنی نیست که جوابی برای دستگاه وجود دارد و درحقیقت ممکن است هیچ جوابی وجود نداشته باشد. لکن، وقتی که دستگاه قابل حل باشد، جوابها یکتا هستند. بجاست که خاصیت پوشا بودن را با خاصیت یک به یک بودن مقایسه کنیم. وقتی T پوشا باشد، دستگاه $AX = y$ همیشه قابل حل است، ولی لازم نیست که جواب آن یکتا باشد. در مورد رتبه و پوچی یک تبدیل خطی، قضیه ای بنیادی وجود دارد که در زیر می آوریم.

قضیه ۳. فرض کنیم $T: V \rightarrow W$ تبدیلی خطی بین دوفضای برداری متناهی البعد باشد. در این صورت، $\dim R_T + \dim N_T = \dim V$ ، و یا $r(T) + n(T) = \dim V$.

اثبات فرض کنیم x_1, \dots, x_r پایه ای برای R_T و y_1, \dots, y_n پایه ای برای N_T باشد. در این صورت $\dim R_T = r$ و $\dim N_T = n$. چون y_1, \dots, y_n متعلق به R_T هستند، بردارهای z_1, \dots, z_r متعلق به V وجود دارند به طوری که

$$T(z_1) = y_1, T(z_2) = y_2, \dots, T(z_r) = y_r$$

می خواهیم نشان دهیم که $x_1, \dots, x_r, z_1, \dots, z_r$ پایه ای برای V تشکیل می دهند. اولاً، بردارهای فوق مستقل خطی اند. زیرا فرض می کنیم داشته باشیم

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_r x_r + \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \dots + \beta_r z_r = 0$$

و سپس تبدیل T را روی این تساوی اعمال می کنیم

$$\alpha_1 T(x_1) + \alpha_2 T(x_2) + \dots + \alpha_r T(x_r) + \beta_1 T(z_1) + \beta_2 T(z_2) + \dots + \beta_r T(z_r) = 0$$

چون $T(x_1) = T(x_2) = \dots = 0$ هستند، N_T متعلق به x_m, \dots, x_2, x_1 است، لذا $\beta_1 T(z_1) + \beta_2 T(z_2) + \dots + \beta_n T(z_n) = 0$ اما بنا به فرض، $T(z_n) = y_n, \dots, T(z_2) = y_2, T(z_1) = y_1$ پس $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m = 0$ و بنابراین $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0$ چون x_m, \dots, x_2, x_1 پایه‌ای برای N_T است، داریم $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$ از اینرو بردارهای $x_m, \dots, x_2, x_1, z_n, \dots, z_2, z_1$ مستقل خطی اند.

ثانیاً، بردارهای $x_m, \dots, x_2, x_1, z_n, \dots, z_2, z_1$ فضای V را پدید می‌آورند. زیرا اگر فرض کنیم x برداری در V باشد، آنگاه $T(x)$ برداری در R_T است و چون y_n, \dots, y_2, y_1 پایه‌ای برای R_T است، اسکالرهای $\beta_n, \dots, \beta_2, \beta_1$ وجود دارند به نحوی که $T(x) = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \dots + \beta_n y_n$ بردار $a = x - \beta_1 z_1 - \beta_2 z_2 - \dots - \beta_n z_n$ را در نظر می‌گیریم. ملاحظه می‌کنیم که

$$\begin{aligned} T(a) &= T(x) - \beta_1 T(z_1) - \beta_2 T(z_2) - \dots - \beta_n T(z_n) \\ &= \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \dots + \beta_n y_n - \beta_1 y_1 - \beta_2 y_2 - \dots - \beta_n y_n \\ &= 0 \end{aligned}$$

پس $a \in N_T$ و چون x_m, \dots, x_2, x_1 پایه‌ای برای N_T است، اسکالرهای $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ وجود دارند به قسمی که $a = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m$ یا $a = x - \beta_1 z_1 - \beta_2 z_2 - \dots - \beta_n z_n = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m$ دیده می‌شود که

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m + \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \dots + \beta_n z_n.$$

بنابراین، بردارهای $x_m, \dots, x_2, x_1, z_n, \dots, z_2, z_1$ فضای V را پدید می‌آورند و چون در بالا ثابت کردیم که مستقل خطی اند، دیده می‌شود که $z_1, x_m, \dots, x_2, x_1, z_n$ پایه‌ای برای V تشکیل می‌دهند. لذا،

$$\begin{aligned} \dim V &= m + n \\ &= \dim N_T + \dim R_T \end{aligned}$$

●

نتیجه ۱ اگر $T: V \rightarrow W$ تبدیلی خطی باشد، آنگاه $\dim R_T \leq \dim V$.

اثبات از قضیه فوق، می‌دانیم که $\dim V = \dim R_T + \dim N_T \geq \dim R_T$.

حال فرض می‌کنیم $\dim W > \dim V$. چون $\dim V \geq \dim R_T$ باید داشته باشیم $\dim W > \dim R_T$. پس، اگر $T: V \rightarrow W$ تبدیلی خطی باشد و $\dim W$ بزرگتر از $\dim V$ باشد، T پوشان نیست.

مثال ۵ فرض کنیم

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= y_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= y_m \end{aligned}$$

دستگاهی از m معادله n مجهولی باشد. اگر $m > n$ ، یعنی اگر تعداد معادلات بیشتر از تعداد مجهولات باشد، بنا به نتیجه ۱، می توان مقادیری برای y_1, y_2, \dots, y_m یافت به طوری که دستگاه قابل حل نباشد.

نتیجه ۲ اگر $T: V \rightarrow W$ تبدیلی خطی باشد و $\dim W < \dim V$ ، آنگاه $N_T \neq \emptyset$ ، یعنی $n(T) > 0$.

اثبات می دانیم که $\dim N_T + \dim R_T = \dim V$. چون R_T زیرفضایی از W است، $\dim R_T \leq \dim W < \dim V$ لذا $\dim N_T = \dim V - \dim R_T > 0$.

مثال ۶ فرض کنیم

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

دستگاهی از m معادله خطی همگن n مجهولی باشد، که در آن $m < n$ ، یعنی تعداد معادلات کمتر از تعداد مجهولات است. طبق معمول فرض می کنیم $A = [a_{ij}]_{(m,n)}$ و تبدیل خطی $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ وابسته به ماتریس A را در نظر می گیریم. چون $\dim \mathbb{R}^m < \dim \mathbb{R}^n$ ، بنا به نتیجه ۲، N_{T_A} علاوه بر بردار صفر باید شامل بردار دیگری نیز باشد. این بیان دیگری از مطلبی است که در فصل اول ثابت کردیم، یعنی اینکه دستگاه فوق دارای جواب غیر-بدیهی است.

نتیجه ۳ فرض کنیم $T: V \rightarrow W$ تبدیلی خطی باشد و $\dim V = \dim W$. در این صورت T یک به یک است اگر و فقط اگر پوشا باشد.

اثبات بنا به قضیه ۳، $\dim R_T + \dim N_T = \dim V = \dim W$. از اینرو $\dim N_T = \dim W - \dim R_T$. پس، $\dim N_T = 0$ (یعنی، T یک به یک است) اگر و فقط اگر $\dim W = \dim R_T$ (یعنی T پوشا باشد).

مثال ۷ فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ باشد. دستگاه معادلات خطی $AX = y$ را در نظر

می‌گیریم که در آن x و y ، n -بردار هستند. طبق نتیجه ۳، می‌بینیم که، مقدار y هر چه باشد دستگاه $AX = y$ قابل حل است اگر و فقط اگر دستگاه $AX = 0$ فقط دارای جواب بدیهی $x = 0$ باشد.

مثال ۸ فرض کنیم P_n نشانگر فضای تمام چندجمله‌ایهای حقیقی از درجه نایشتتر از n باشد. عملگر خطی T را روی P_n به صورت

$$T(f) = (c_0 + c_1x + c_2x^2)f'' + (b_0 + b_1x)f' + a_0f$$

تعریف می‌کنیم که در آن a ها، b ها، و c ها همگی اعداد حقیقی‌اند. بآسانی می‌توان تحقیق کرد که T خطی است و چندجمله‌ایهای از درجه n را به چندجمله‌ایهای از درجه نایشتتر از n می‌برد. در واقع، عملگر T مثالی از یک نوع عملگر دیفرانسیلی خطی است. چنین عملگرهایی در مطالعه معادلات دیفرانسیل دارای اهمیت‌اند. حال این سؤال پیش می‌آید که: اگر g یک چندجمله‌ای باشد، آیا می‌توانیم معادله دیفرانسیل

$$(c_0 + c_1x + c_2x^2)f'' + (b_0 + b_1x)f' + a_0f = g$$

را حل کنیم؟ به این سؤال بآسانی می‌توان جواب داد.

یا (۱) به ازای هر چندجمله‌ای g ، معادله دارای یک جواب چندجمله‌ای یکتای f است،

و یا

$$(2) \text{ معادله } (c_0 + c_1x + c_2x^2)f'' + (b_0 + b_1x)f' + a_0f = 0$$

دارای یک جواب چندجمله‌ای غیر صفر است.

برای ملاحظه این مطلب، فرض می‌کنیم که g یک چندجمله‌ای از درجه n باشد. در این صورت T عملگری خطی روی P_n است. اگر $N_T \neq 0$ ، نتیجه‌گیری دوم برقرار است. لذا، می‌توانیم فرض کنیم $N_T = 0$. پس T یک به یک است. بنا به نتیجه ۳، T پوشاست. از اینرو معادله $T(f) = g$ را می‌توان به ازای هر چندجمله‌ای g حل کرد.

تمرینات

۱. پایه‌ای برای فضای پوچ و نیز پوچی تبدیل خطی وابسته به هر یک از ماتریسهای زیر را بیابید.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 10 \end{bmatrix} \quad (\text{ج}) \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad (\text{ه}) \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad (\text{د})$$

۲. فرض کنید a_1, a_2, \dots, a_n عدد حقیقی باشند که لااقل یکی از آنها صفر نیست. نشان دهید که تابع

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

از \mathbb{R}^n به \mathbb{R} خطی است. نشان دهید که فضای پوچ این تابع دارای بعد $n - 1$ است.

۳. فرض کنید D^k تبدیلی خطی از P_n به P_n باشد که هر چند جمله‌ای را به مشتق k ام آن می‌برد. نشان دهید که فضای پوچ D^k دارای بعد k است.

۴. فرض کنید T عملگری خطی روی P_2 باشد که به صورت

$$T(f) = f - xf' + (a - x^2)f''$$

تعریف می‌شود، که در آن a عدد مفروضی است. نشان دهید که چند جمله‌ای x فضای N_T را پدید می‌آورد.

۵. یک تبدیل خطی T از \mathbb{R}^2 به \mathbb{R}^2 بیابید به طوری که $R_T = N_T$.

۶. فرض کنید D ماتریس قطری $n \times n$ ای باشد و $T_D(X) = DX$ عملگری خطی روی \mathbb{R}^n که توسط D القا شده است. نشان دهید که پوچی T_D عبارت است از تعداد صفرهای روی قطر D .

۷. فرض کنید V فضایی برداری باشد و x_1, x_2, \dots, x_n پایه‌ای برای V ، و نیز فرض کنید $T: V \rightarrow V$ تبدیلی خطی باشد به نحوی که

$$T(x_1) = x_2, T(x_2) = x_3, \dots, T(x_{n-1}) = x_n, T(x_n) = 0$$

$n(T)$ را بیابید.

۸. فرض کنید $T: V \rightarrow V$ تبدیلی خطی با این خاصیت باشد که $N_T = V$. نشان دهید که T عملگر صفر است.

۹. اگر A ماتریس $n \times n$ ای باشد و n -بردار غیر صفری مانند x وجود داشته باشد به قسمی که $Ax = 0$ ، نشان دهید که $r(A) < n$. عکس این مطلب را نیز ثابت کنید.

۱۰. فرض کنید A ماتریس ثابت $n \times n$ ای باشد. بعد فضای پوچ عملگر القا شده توسط A روی \mathbb{R}^n را k بگیرید. اگر T تبدیلی خطی از فضای ماتریسهای $n \times n$ به خودش باشد که به صورت $T(B) = AB$ تعریف می‌شود،

(الف) نشان دهید که B متعلق به N_T است اگر و فقط اگر هرستون B متعلق به N_A باشد.

(ب) نشان دهید که $n(T) = nk$.

(پ) نشان دهید که $r(T) = nr(A)$.

۱۱. فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد. فرض کنید $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ تبدیل خطی

$T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ باشد که در آن، $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. احکام زیر را ثابت کنید.

(الف) T_A پوشاست اگر و فقط اگر ستونهای A فضای \mathbb{R}^m را پدیدآورند.

(ب) T_A یک به یک است اگر و فقط اگر ستونهای A مستقل خطی باشند.

(ج) اگر T_A یک به یک و پوشا باشد، آنگاه $m = n$.

۱۲. فرض کنید T تبدیلی خطی از فضای برداری V به فضای برداری W باشد و $\mathbf{y} \in W$. اگر معادله $T(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ نسبت به $\mathbf{x} \in V$ به طور یکتا قابل حل باشد، نشان دهید که T یک به یک است.

۱۳. فرض کنید $T: P_n \rightarrow P_n$ عملگری خطی روی فضای چند جمله‌ایهای یک متغیره با متغیر x و از درجهٔ نایبتر از n باشد که به صورت $T(f) = f + xf'$ تعریف می‌شود. نشان دهید که T یک به یک و پوشاست.

۱۴. مثالی از یک تبدیل خطی روی \mathbb{R}^3 با رتبهٔ ۱، و نیز با رتبهٔ ۲ بیاورید.

۱۵. فرض کنید T تبدیلی خطی روی \mathbb{R}^2 باشد، $T \neq 0$ و T پوشا نباشد. $r(T)$ و $n(T)$ را به دست آورید.

۱۶. فرض کنید $T: V \rightarrow W$ تبدیلی خطی با این خاصیت باشد که هرگاه $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ در V مستقل خطی باشند، $T(\mathbf{x}_1), T(\mathbf{x}_2), \dots, T(\mathbf{x}_n)$ در W استقلال خطی داشته باشند. نشان دهید که T یک به یک است. برعکس اگر T یک به یک باشد، نشان دهید که T این خاصیت را دارد.

۱۷. فرض کنید $T: P_n \rightarrow P_n$ تابعی باشد که چند جمله‌ای $f(x)$ را به چند جمله‌ای $\frac{1}{x}(f(x) + f(-x))$ می‌برد.

(الف) نشان دهید که T خطی است.

(ب) نشان دهید که R_T دقیقاً مرکب از چند جمله‌ایهای زوج در P_n است.

(ج) نشان دهید که N_T دقیقاً مرکب از چند جمله‌ایهای فرد در P_n است.

۱۸. فرض کنید $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ عملگر خطی

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

باشد. نشان دهید که N_T توسط آن n -بردار ستونی که همهٔ مؤلفه‌هایش ۱ است پدید می‌آید. $r(T)$ چقدر است؟

۱۹. فرض کنید A ماتریس ثابت $n \times n$ ای باشد. فرض کنید T تبدیلی خطی از M_{nn} به M_{nn} باشد که به صورت $T(B) = AB - BA$ تعریف می‌شود. نشان دهید که T

یک به یک نیست.

۲۰. اگر f یک چند جمله‌ای از درجه نایبتر از n باشد، نشان دهید که یک چند جمله‌ای g از درجه نایبتر از n وجود دارد به قسمی که $g + g' = f$.

۲۱. فرض کنید T تبدیلی خطی بین دو فضای برداری V و W باشد. فرض کنید $\text{sp}(x_1, x_2, \dots, x_n) = N_T$ اگر V باشند. اگر y_1, \dots, y_r بردارهایی در V باشند، $\text{sp}(T(y_1), T(y_2), \dots, T(y_r)) = R_T$ و نشان دهید که

$$\text{sp}(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_r) = V.$$

۲۲. فرض کنید $T: V \rightarrow V$ عملگری خطی روی فضای برداری V باشد. اگر $R_T = N_T$ ، نشان دهید که $\dim V$ زوج است.

۲۳. اگر A ماتریسی $m \times n$ باشد. نشان دهید که ماتریس $n \times n$ ای مانند B ، $B \neq 0$ وجود دارد به طوری که $AB = 0$ اگر و فقط اگر $r(A) < n$.

۲۴. اگر A ماتریسی $m \times n$ باشد، نشان دهید که ماتریس $m \times m$ ای مانند B ، $B \neq 0$ وجود دارد به نحوی که $BA = 0$ اگر و فقط اگر $r(A) < m$.

۲۵. فرض کنید $0 \leq k \leq n$. نشان دهید که تبدیلی خطی روی R^n وجود دارد که k پوچی آن k است.

۵ رتبه، و ماتریسهای مقدماتی

اگر A ماتریسی $m \times n$ باشد، A تبدیل خطی $T_A: R^n \rightarrow R^m$ را، که به صورت $T_A(x) = Ax$ تعریف می‌شود، القا می‌کند. رتبه T_A را به عنوان بعد فضای مقادیر T_A تعریف کردیم. منظور از رتبه ماتریس A ، همان رتبه تبدیل خطی T_A است. همچنین فضای مقادیر T_A را فضای مقادیر A نیز می‌نامیم.

ستونهای ماتریس A را با A_1, A_2, \dots, A_n نشان می‌دهیم؛ در بخش ۳.۵ دیدیم که فضای مقادیر T_A توسط m -بردارهای A_1, A_2, \dots, A_n پدید می‌آید؛ به همین دلیل فضای مقادیر T_A راگاهی فضای ستونی ماتریس A می‌نامند. لذا، رتبه ماتریس A را می‌توان به عنوان بعد فضای پدید آمده توسط m -بردارهای A_1, A_2, \dots, A_n نیز تعریف کرد. بنابه قضیه ۱ از بخش ۷.۴، می‌بینیم که رتبه A بیشینه تعداد بردارهای مستقل خطی در گردآورده A_1, A_2, \dots, A_n است، در این بخش، مسئله محاسبه رتبه یک ماتریس را با ارائه الگوریتمی برای این محاسبه، به صورت ساده‌ای درمی‌آوریم. قضیه زیر برای ارائه فرایند محاسبه رتبه، مهم است.

قضیه ۱ فرض کنیم A ماتریسی $m \times n$ ، B ماتریسی $m \times m$ و C ماتریسی $n \times n$ باشد.

در این صورت $r(BA) \leq r(A)$ و $r(AC) \leq r(A)$.

اثبات ابتدا ثابت می‌کنیم که $r(BA) \leq r(A)$.

فرض می‌کنیم $y_1, y_2, \dots, y_{r(A)}$ پایه‌ای برای فضای مقادیر A باشد. لذا، اگر x متعلق به R^n باشد، اسکالرهایی $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r(A)}$ وجود دارند به قسمی که

$$Ax = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_{r(A)} y_{r(A)}$$

از اینرو

$$\begin{aligned}(BA)(x) &= B(Ax) \\ &= B(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_{r(A)} y_{r(A)}) \\ &= \alpha_1 B y_1 + \alpha_2 B y_2 + \dots + \alpha_{r(A)} B y_{r(A)}\end{aligned}$$

پس، بردارهای $By_1, By_2, \dots, By_{r(A)}$ فضای مقادیر BA را پدید می‌آورند. بنا به قضیه ۱ از بخش ۸.۴، می‌بینیم که $\dim R_{BA} \leq \dim R_A$. لذا، $r(BA) \leq r(A)$. اکنون، نشان می‌دهیم که $r(AC) \leq r(A)$. ادعا می‌کنیم که فضای مقادیر AC زیر مجموعه‌ای است از فضای مقادیر A . فرض می‌کنیم y متعلق به فضای مقادیر AC باشد، $y = (AC)(x) = A(Cx)$ پس، y نگاره برداری، یعنی نگاره بردار Cx تحت A است و بنابراین y متعلق به فضای مقادیر A می‌باشد. لذا، فضای مقادیر AC زیر فضایی از فضای مقادیر A است. از اینرو بنا به قضیه ۳ از بخش ۸.۴، $\dim R_{AC} \leq \dim R_A$ یا $r(AC) \leq r(A)$.

از قضیه فوق نتیجه زیر را بلافاصله به دست می‌آوریم:

قضیه ۲ فرض کنیم A ماتریسی $m \times n$ ، B یک ماتریس وارون پذیر $m \times m$ ، و C ماتریس وارون پذیر $n \times n$ ای باشد. در این صورت

$$r(AC) = r(A) \quad \text{و} \quad r(BA) = r(A)$$

اثبات بنا به قضیه ۱، $r(BA) \leq r(A)$. باز طبق قضیه ۱، $r(B^{-1}(BA)) \leq r(BA)$ ، یا $r(A) \leq r(BA)$. لذا $r(A) = r(BA)$. اثبات تساوی $r(AC) = r(A)$ نیز به همین ترتیب است.

برای مثال، فرض می‌کنیم

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{در این صورت} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

چون $\det A = 1$ و A وارون پذیر است. پس $r(BA) = r(B)$. چون BA دقیقاً دارای دو ستون مستقل خطی است، نتیجه می‌شود که $r(B) = 2$.

قضیه ۲ را می‌توان به صورت زیر بیان کرد: اگر ماتریس وارون پذیری را در یک ماتریس ضرب کنیم، رتبه آن عوض نمی‌شود. هدف بعدی ما یافتن خانواده‌ای از ماتریسهای ساده وارون پذیر است که به ما امکان می‌دهد ماتریس مفروضی را با انجام رشته‌ای از ضربهای ماتریسی، به ماتریسی که محاسبه رتبه‌اش آسان است تبدیل کنیم. خانواده ماتریسهای مقدماتی که در زیر توصیف می‌کنیم این خاصیت را دارند.

فرض کنیم ماتریس E حاصل یکی از سه عمل زیر روی ماتریس همانی باشد:

- (۱) تعویض دو ستون از ماتریس همانی.
 (۲) ضرب یک ستون از ماتریس همانی در یک اسکالر غیر صفر.
 (۳) افزودن مضرب اسکالری از یک ستون ماتریس همانی به ستون دیگرش.

در این صورت، E را یک ماتریس مقدماتی می نامند.
 ماتریسهای زیر همگی مثالهایی از ماتریسهای مقدماتی هستند.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس اولی با تعویض ستونهای اول و سوم ماتریس I_3 ، دومی با ضرب ستون دوم I_3 در ۲، و سومی با افزودن (-7) برابر ستون اول I_3 به ستون سومش، به دست آمده اند.

برای توصیف نتیجه ضرب یک ماتریس مقدماتی در یک ماتریس دیگر، روش بسیار ساده ای وجود دارد. ابتدا شرح می دهیم که ماتریس $m \times n$ ای مانند A ، وقتی ماتریس مقدماتی $n \times n$ ای مثل E را از سمت راست در آن ضرب می کنیم، یعنی وقتی حاصلضرب AE را تشکیل می دهیم، چه تغییری می کند.

در آنچه بعداً می آید، از مطلب زیر استفاده فراوان خواهیم کرد که: اگر A ماتریس $m \times n$ ای باشد و e_i بردار i ام پایه متعارف \mathbb{R}^n ، آنگاه Ae_i همان ستون i ام ماتریس A است که آن را با A_i نشان می دهیم.

گزاره ۱ فرض می کنیم E ماتریس مقدماتی حاصل از تعویض ستونهای i و j ($i < j$) از ماتریس I_n باشد. در این صورت، حاصلضرب AE به این طریق حاصل می شود که ستونهای i و j در ماتریس A با هم تعویض می شوند و بقیه ستونها ثابت می مانند.

اثبات چون E از تعویض ستونهای i و j ماتریس I_n به دست می آید، ستون i ام E ، e_j و ستون j ام آن، e_i است و به ازای j ، $k \neq i$ ستون k امش e_k است. لذا، $Ee_i = e_j$ ، $Ee_j = e_i$ و به ازای j ، $k \neq i$ داریم $Ee_k = e_k$. لذا

$$(AE)e_i = A(Ee_i) = Ae_j = A_j$$

$$(AE)e_j = A(Ee_j) = Ae_i = A_i$$

$$(AE)e_k = A(Ee_k) = Ae_k = A_k \quad k \neq i, j, \text{ به ازای } j$$

پس معلوم می شود که A_j ستون i ام AE ، A_i ستون j ام AE ، و به ازای j ، $k \neq i$ ، A_k ستون k ام AE است. به عبارت دیگر AE با تعویض ستونهای i و j از ماتریس A به دست می آید.

مثلاً اگر $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ ، و ماتریس $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ حاصل از تعویض

ستونهای دوم و سوم ماتریس همانی باشد، آنگاه

$$AE = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

همان ماتریس حاصل از تعویض ستونهای دوم و سوم ماتریس A است.

گزاره ۲ فرض می‌کنیم ماتریس مقدماتی E با ضرب ستون i ام ماتریس همانی در یک اسکالر غیر صفر α به دست آمده باشد. حاصل ضرب AE ، ماتریس حاصل از ضرب ستون i ام ماتریس A در اسکالر α و ثابت نگهداشتن ستونهای دیگر آن است.

اثبات واضح است که ستون i ام E عبارت از αe_i است، حال آنکه ستون k ام E ، به ازای $k \neq i$ عبارت است از e_k . لذا، $Ee_i = \alpha e_i$ و به ازای $k \neq i$ ، $Ee_k = e_k$.

$$(AE)e_k = A(Ee_k) = Ae_k = A_k, \quad k \neq i \quad \text{به ازای } k \neq i$$

$$(AE)e_i = A(Ee_i) = A(\alpha e_i) = \alpha Ae_i = \alpha A_i$$

از اینجا دیده می‌شود که اگر $k \neq i$ ، ستون k ام AE همان A_k است. ستون i ام AE

عبارت است از αA_i ، یعنی، AE با ضرب ستون i ام A در α به دست می‌آید.

● به عنوان مثال، اگر $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ و $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، آنگاه

$$AE = \begin{bmatrix} a_1 & xb_1 & c_1 \\ a_2 & xb_2 & c_2 \\ a_3 & xb_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

ماتریس حاصل از ضرب ستون دوم A در x است.

گزاره ۳ فرض می‌کنیم ماتریس مقدماتی E با افزودن α برابر ستون j ام I_n به ستون i ام I_n ($i \neq j$)، حاصل شده باشد. در این صورت ماتریس AE با افزودن α برابر ستون j ام ماتریس A به ستون i ام آن و ثابت نگهداشتن ستونهای دیگر A حاصل می‌شود.

اثبات واضح است که ستون k ام E ، $Ee_k = e_k$ ($k \neq i$) عبارت از e_k و ستون i ام آن عبارت از $e_i + \alpha e_j$ است. لذا،

$$Ee_k = e_k, \quad k \neq i$$

$$Ee_i = e_i + \alpha e_j$$

بنابراین

$$(AE)e_k = A(Ee_k) = Ae_k = A_k, \quad k \neq i$$

$$(AE)e_i = A(Ee_i) = A(e_i + \alpha e_j) = A_i + \alpha A_j$$

از اینرو دیده می‌شود که ستون k ام AE ($k \neq i$) عبارت از A_k است، و ستون i ام

عبارت از $A_i + \alpha A_j$ می‌باشد. در نتیجه AE را می‌توان با افزودن α برابر ستون j ام A به ستون i ام آن به دست آورد.

به عنوان مثال، اگر $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ ، و ماتریس $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ از افزودن

α برابر ستون اول به ستون سوم ماتریس همانی حاصل شده باشد، آنگاه

$$AE = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 + \alpha a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 + \alpha a_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 + \alpha a_3 \end{bmatrix}$$

همان ماتریس حاصل از افزودن α برابر ستون اول A به ستون سوم آن است.

گزاره‌های ۱، ۲، و ۳ را می‌توان در قاعده زیر با هم ترکیب کرد: ضرب ماتریس مقدماتی E در ماتریس A از سمت راست، عملی روی A است که از نوع عمل انجام‌شده برای به دست آوردن E از ماتریس همانی است. به عنوان نتیجه‌ای از گزاره‌های ۱، ۲، و ۳ داریم:

قضیه ۳ هر ماتریس مقدماتی وارون پذیر است و وارون آن ماتریسی مقدماتی است.

اثبات (الف) فرض کنیم E ماتریس مقدماتی حاصل از تعویض ستونهای i و j ماتریس همانی ($i < j$) باشد. در این صورت EE ، ماتریس حاصل از ضرب E در E از سمت راست، ماتریسی است که از تعویض ستونهای i و j ماتریس E به دست می‌آید. پس $EE = I_n$. بنابراین E وارون پذیر است و وارون آن E است، که خود ماتریس مقدماتی می‌باشد، (ب) فرض کنیم E ماتریس مقدماتی حاصل از ضرب ستون i از ماتریس همانی در یک اسکالر غیر صفر α باشد. در این صورت E^{-1} همان ماتریس حاصل از ضرب ستون i از ماتریس همانی در اسکالر α^{-1} است.

(ج) فرض کنیم E ماتریس مقدماتی حاصل از افزودن α برابر ستون j از ماتریس همانی به ستون i از آن باشد. در این صورت، E^{-1} ماتریس حاصل از افزودن $(-\alpha)$ برابر ستون j از ماتریس همانی به ستون i از آن خواهد بود.

مثلاً

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

به‌طریقی مشابه می‌توان نتیجه ضرب یک ماتریس مقدماتی $m \times m$ مانند E را در ماتریس $m \times n$ ای مثل A از سمت چپ، یعنی تشکیل حاصلضرب EA را، تعیین کرد. تذکر اینکه، ماتریس حاصل از تعویض دو سطر از ماتریس همانی یا ضرب یک سطر آن در یک اسکالر غیر صفر یا افزودن مضرب اسکالری از یک سطر به سطر دیگر، باز یک ماتریس مقدماتی است.

(الف') اگر E ماتریس مقدماتی حاصل از تعویض سطریهای i و j از ماتریس همانی باشد، EA از تعویض سطریهای i و j از ماتریس A به دست می‌آید.

(ب') اگر E ماتریس مقدماتی حاصل از ضرب سطر i ام ماتریس همانی در یک اسکالر غیر صفر α باشد، EA از ضرب سطر i ام ماتریس A در اسکالر α به دست می‌آید.
 (ج') اگر E ماتریس مقدماتی حاصل از افزودن α برابر سطر j ام ماتریس همانی به سطر i ام آن ($i \neq j$) باشد، آنگاه ماتریس EA از افزودن α برابر سطر j ام ماتریس A به سطر i ام آن به دست می‌آید.

به عنوان مثال، دیده می‌شود که

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha a_2 & \alpha b_2 & \alpha c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + \alpha a_3 & b_1 + \alpha b_3 & c_1 + \alpha c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

در مورد ماتریس A ، گاهی واژه خط را به معنی سطر یا ستون A به کار می‌بریم. هر یک از تبدیلات زیر را یک عمل مقدماتی روی ماتریس A می‌نامیم.

- (۱) تعویض دو خط موازی A
- (۲) ضرب یک خط A در یک مقدار ثابت غیر صفر.
- (۳) افزودن مضرب اسکالری از یک خط A به خط دیگری موازی با آن.

در بالا دیده‌ایم که هر عمل مقدماتی روی A را می‌توان از طریق ضرب A در سمت چپ یا راست یک ماتریس مقدماتی مناسب انجام داد. هدف از معرفی اعمال مقدماتی، تسهیل فرایند محاسبهٔ رتبهٔ ماتریس است. اهمیت اعمال مقدماتی در فرایند مزبور اساساً از قضیهٔ زیر ناشی می‌شود.

قضیهٔ ۴ فرض کنیم A و A' دو ماتریس $m \times n$ باشند و فرض کنیم A' توسط یک عمل مقدماتی روی A حاصل شده باشد. در این صورت $r(A) = r(A')$.

اثبات چون A' ، ماتریس حاصل از انجام یک عمل مقدماتی روی A است، داریم $A' = EA$ یا $A' = AE$ ، که در آن E یک ماتریس مقدماتی مناسب است. چون بنا به قضیهٔ ۳ فوق، هر ماتریس مقدماتی وارون‌پذیر است، و از آنجا که، طبق قضیهٔ ۲، ضرب یک ماتریس وارون‌پذیر در A ، رتبهٔ آن را عوض نمی‌کند، دیده می‌شود که $r(A') = r(A)$. ●

اگر ماتریس B را بتوان توسط رشته‌ای متناهی از اعمال مقدماتی روی ماتریس A

به دست آورد، گوئیم ماتریسهای A و B هم‌ارزاند می‌نویسیم $A \sim B$. بنا به قضیه ۴، $A \sim B$ نتیجه می‌دهد $r(A) = r(B)$. به خواص هم‌ارزی زیر توجه کنید:

$$A \sim A \quad (۱)$$

$$A \sim B \quad \text{نتیجه می‌دهد} \quad B \sim A \quad (۲)$$

$$A \sim B \quad \text{و} \quad B \sim C \quad \text{نتیجه می‌دهند} \quad A \sim C \quad (۳)$$

خاصیت اول واضح است. برای اثبات (۲)، متذکر می‌شویم که اگر $A \sim B$ ، ماتریسهای مقدماتی E_1, E_2, \dots, E_m و F_1, F_2, \dots, F_n وجود دارند به طوری که $B = E_1 E_2 \dots E_m A F_1 F_2 \dots F_n$ ، بنا براین،

$$A = E_m^{-1} E_{m-1}^{-1} \dots E_1^{-1} B F_n^{-1} F_{n-1}^{-1} \dots F_1^{-1}$$

چون وارون یک ماتریس مقدماتی باز ماتریسی مقدماتی است، بنا به قضیه ۳، می‌بینیم که A را می‌توان توسط اعمال مقدماتی روی B به دست آورد و لذا $B \sim A$. خاصیت (۳) می‌گوید که اگر B توسط اعمال مقدماتی روی A و C توسط اعمال مقدماتی روی B حاصل شوند، آنگاه C را می‌توان با انجام اعمال مقدماتی روی A به دست آورد. به عنوان مثالی از موارد استفاده اعمال مقدماتی داریم

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

↓

دو برابر ستون اول را به ستون دوم می‌افزاییم.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

↓

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

↓

(۱-) برابر ستون دوم را به ستون سوم می‌افزاییم.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

↓

(۳-) برابر سطر اول را به سطر سوم می‌افزاییم.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

(۸ -) برابر سطر دوم را به سطر سوم اضافه می‌کنیم.

$$\downarrow$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

چون

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

پایه‌ای برای فضای مقادیر ماتریس اخیر است، دیده می‌شود که رتبه این ماتریس ۲ است. چون ماتریسهای هم ارز دارای رتبه یکسان‌اند، رتبه ماتریس اولی، و در حقیقت رتبه تمام ماتریسهای وسطی هم، ۲ است.

با استفاده از روشی مشابه با روش حذفی گاوسی و برآمده از مثال قبل، می‌توان نشان داد که هر ماتریسی، هم ارز با یکی از ماتریسهای

$$I_r, \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} I_r \\ 0 \end{array} \right]$$

است.

I_r ماتریس همانی از مرتبه r است و 0 نمایشگر یک بلوک صفر می‌باشد. این هم‌ارزی ممکن است با روش زیر حاصل شود:

- (۱) با استفاده از تعویض سطرها و ستونها، یک درایه غیر صفر (که بهتر است یک باشد) در اولین سطر و ستون به دست آوریم.
- (۲) ستون اول را بر این درایه تقسیم کنیم.
- (۳) با افزودن مضرب مناسبی از ستون اول به هر یک از دیگر ستونها و سپس با افزودن مضرب مناسبی از سطر اول به دیگر سطرها، ماتریسی به صورت زیر به دست می‌آوریم که هم ارز با ماتریس اولی است:

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{array} \right]$$

(۴) همان اعمال را روی زیرماتریس

$$\left[\begin{array}{cccc} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{array} \right]$$

تکرار می‌کنیم.

(۵) همان طور که گفته شد، یکی از ماتریسهای

$$I_r, \left[\begin{array}{c|c} I_r & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right], [I_r \mid \mathbf{0}], \left[\begin{array}{c} I_r \\ \hline \mathbf{0} \end{array} \right]$$

به دست می‌آید.

چون e_1, e_2, \dots, e_r پایه‌ای برای فضای مقادیر هر یک از ماتریسهای اخیر است، واضح است که رتبه هر یک از این ماتریسها r است. گویند این‌گونه ماتریسها به صورت نرمال هستند. پس، هر ماتریس هم‌ارز با ماتریسی به صورت نرمال است. مثال ۱ رتبه ماتریس زیر را حساب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & 7 \\ -1 & -3 & -1 & -5 \\ 7 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

↓

ستونهای اول و دوم را با هم تعویض می‌کنیم.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 7 \\ -3 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 7 & 2 & 9 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

↑

مضارب مناسبی از ستون اول را به دیگر ستونها می‌افزاییم.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 8 & 8 & 16 \\ 0 & 7 & 2 & 9 \\ 1 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

↓

مضارب مناسبی از سطر اول را به دیگر سطرها می‌افزاییم.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 16 \\ 0 & 7 & 2 & 9 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

↓

ستونهای دوم و سوم و پنجم را باهم و سپس سطرهاي دوم و پنجم را با هم تعویض می‌کنیم.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 8 & 8 & 16 \end{bmatrix}$$

مضارب مناسبی از ستون دوم را به هر یک از ستونهای دیگر می‌افزاییم. سپس، مضارب مناسبی از سطر دوم را به سایر سطرها اضافه می‌کنیم.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -8 & -8 \end{bmatrix}$$

↓

(۱-) برابر ستون سوم را به ستون چهارم می‌افزاییم.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

↓

سطر سوم را در $1/3$ ضرب می‌کنیم و مضارب مناسبی از آن را به هریک از سطرهاى دیگر اضافه می‌کنیم.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

پس رتبه ماتریس اولی ۳ است.

این روش محاسباتی که برای محاسبه رتبه ماتریس به کار رفت، در حل مسائل دیگری نیز که با بعد سر و کار دارند، قابل استفاده است.

مثال ۲ بعد فضای جوابهای دستگاه معادلات خطی همگن زیر را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ -3x_1 + x_2 + 7x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

به عبارت دیگر، می‌خواهیم بعد فضای پوچ تبدیل خطی $T: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ را بیابیم.

می‌توان نوشت

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 7 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

چون $\dim R_T + \dim N_T = 5$ ، برای تعیین $\dim N_T$ کافی است رتبه T را، که رتبه ماتریس زیر است، تعیین کنیم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 7 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

↓

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

↓

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 7 & -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

↓

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

↓

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مضارب مناسبی از ستون اول را به هر یک از مضارب دیگر اضافه می‌کنیم.

مضارب مناسبی از سطر اول را به هر یک از سطرهاي دیگر می‌افزاییم.

(۱ -) برابر سطر دوم را به سطر سوم می‌افزاییم.

ستون دوم را در $1/7$ ضرب می‌کنیم و سپس مضارب مناسبی از آن را به ستونهای دیگر اضافه می‌کنیم.

لذا، $r(T) = 2$. بنابراین $\dim N_T = 3$.

مثال ۳ بعد زیر فضایی از \mathbb{R}^4 را که توسط بردارهای

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

پدید می‌آید می‌یابیم. ملاحظه می‌کنیم، زیر فضایی از \mathbb{R}^4 که توسط این سه بردار پدید می‌آید دقیقاً فضای ستونی ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

است. بنابراین، کافی است که $r(A)$ را معین کنیم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

پس، مجموعه بردارهای داده شده، فضایی با بعد ۲ را پدید می آورد.
با استفاده از روش تبدیل به صورت نرمال، قضیه ۵ را به دست می آوریم.

قضیه ۵ فرض کنیم A ماتریس $m \times n$ ای با رتبه r ، و N ماتریس $m \times n$ ای با رتبه r به صورت نرمال باشد. در این صورت، ماتریسهای $m \times m$ مقدماتی، E_1, \dots, E_p و ماتریسهای $n \times n$ مقدماتی F_1, \dots, F_q وجود دارند به نحوی که

$$A = E_1 E_p \dots E_k N F_1 F_q \dots F_l.$$

اثبات می دانیم که $A \sim N$. لذا، ماتریسهای $m \times m$ مقدماتی G_1, \dots, G_p و ماتریسهای $n \times n$ مقدماتی H_1, \dots, H_q وجود دارند به قسمی که

$$N = G_1 G_p \dots G_k A H_1 H_q \dots H_l$$

یا

$$A = G_k^{-1} \dots G_1^{-1} N H_l^{-1} \dots H_1^{-1}$$

چون بنا به قضیه ۳، وارون یک ماتریس مقدماتی، یک ماتریس مقدماتی است، با تغییر نام $H_1^{-1}, \dots, H_q^{-1}$ و $G_1^{-1}, \dots, G_p^{-1}$ ، نتیجه مطلوب را به دست می آوریم. ●

نتیجه ۹ هر دو ماتریس که دارای رتبه های مساوی باشند، هم ارزند.

اثبات اگر A و B دو ماتریس $m \times n$ با رتبه r باشند، آنگاه

$$B = G_1 \dots G_p N H_1 \dots H_q \text{ و } A = E_1 \dots E_k N F_1 \dots F_l$$

(G_i, F_i, E_i و H_i ماتریسهای مقدماتی اند). پس

$$G_1 \dots G_p E_k^{-1} \dots E_1^{-1} A F_l^{-1} \dots F_1^{-1} H_1 \dots H_q = B$$

بنابراین A و B هم ارزند.

نتیجه ۲ هر ماتریس وارون پذیر $n \times n$ را می توان به حاصلضرب ماتریسهای مقدماتی تجزیه کرد.

اثبات چون A وارون پذیر است، رتبه آن n است و صورت نرمال آن همان ماتریس I_n است. از اینرو، ماتریسهای مقدماتی $E_1, \dots, E_r, E_k, \dots, E_r$ و F_1, \dots, F_r وجود دارند به قسمی که $A = (E_1 E_r \dots E_k) I_n (F_1 F_r \dots F_r)$.

تمرینات

۱. رتبه هریک از ماتریسهای زیر را بیابید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 8 \\ -2 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 7 & 7 & 14 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -3 & 5 \\ 0 & 6 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{د})$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{و})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 7 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 7 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix} \quad (\text{ه})$$

۲. بعد فضای جوابهای هریک از دستگاههای معادلات خطی همگن زیر را معین کنید.

$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 - x_4 &= 0 & (\text{ب}) & \quad -7x + 2y - 3z = 0 & (\text{الف}) \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 & & \quad x + 3y + 5z = 0 & \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 &= 0 & & \quad -2x - y - 4z = 0 & \end{aligned}$$

۳. وارون هریک از ماتریسهای مقدماتی زیر را بیابید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{د})$$

$$\alpha \neq 0, \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

۴. هریک از ماتریسهای زیر را به صورت حاصلضرب ماتریسهای مقدماتی بنویسید.

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \quad (\text{د})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

۵. اگر A ماتریس $n \times n$ ای باشد، نشان دهید که ماتریسهای وارون پذیر B و C وجود دارند به طوری که

(الف) AB پایین مثلثی است.

(ب) CA بالا مثلثی است.

۶. اگر A ماتریسی $m \times n$ و B ماتریسی $n \times p$ باشند، نشان دهید که

$$r(AB) \leq \min(r(A), r(B)).$$

۷. اگر A ماتریسی $m \times n$ باشد، نشان دهید که ماتریس وارون پذیر $m \times m$ ای مانند B و ماتریس وارون پذیر $n \times n$ ای مانند C وجود دارند به نحوی که BAC ماتریسی به صورت نرمال است.

۸. به دو طریق مختلف ثابت کنید که ضرب از راست ماتریس A در یک ماتریس مقدماتی E ، عملی است مقدماتی روی A ، از همان نوع توصیف شده در متن (الف) از این مطلب که ترانژاد یک ماتریس مقدماتی، ماتریسی مقدماتی است و از تساوی $(EA)^T = A^T E^T$ استفاده کنید.

(ب) از یک پایه متعارف برای فضای n بردارهای سطری استفاده کنید.

۹. اگر A ماتریس $m \times n$ ای باشد، نشان دهید که $r(A) = r(A^T)$.

۱۰. فرض کنید A ماتریس $(2n+1) \times (2n+1)$ زیر باشد:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نشان دهید که $r(A) = n+1$.

۱۱. فرض کنید A ماتریسی از مرتبه $2n$ باشد که از تعویض سطر ۱ با سطر ۲، سطر ۳ با سطر ۴، ...، سطر $2n-1$ با سطر $2n$ ماتریس همانی به دست آمده است. نشان دهید که $A^{-1} = A$.

۱۲. فرض کنید A ماتریس $m \times n$ ای باشد و H زیرفضایی از \mathbb{R}^n که توسط ستونهای A پدید می آید و K زیرفضایی از \mathbb{R}^m که توسط سطرهای A پدید می آید. نشان دهید که $\dim H = \dim K$. [راهنمایی: از تمرین ۹ استفاده کنید.]

۱۳. اگر A ماتریس $m \times n$ ای با رتبه $r(A)$ باشد و $0 \leq k \leq r(A)$ ، نشان دهید که ماتریس $m \times m$ ای مانند B وجود دارد به طوری که $r(BA) = k$ و ماتریس $n \times n$ ای مانند C وجود دارد به قسمی که $r(AC) = k$.

۱۴. بعد زیرفضایی از \mathbb{R}^n را بیابید که توسط هریک از مجموعه‌های بردارهای زیر پدید می‌آید.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (\text{الف}) \\ & \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (\text{ج}) \end{aligned}$$

۱۵. اگر A و B دو ماتریس $m \times n$ باشند، نشان دهید که احکام زیر هم ارزند.

$$r(A) = r(B) \quad (\text{الف})$$

(ب) ماتریس $m \times m$ ای مانند C و ماتریس $n \times n$ ای مانند D ، که هر دو وارون پذیرند، وجود دارند به نحوی که $A = CBD$.

۱۶. اگر A و B دو ماتریس $m \times n$ باشند، نشان دهید که احکام زیر هم ارزند.

(الف) فضاهاى مقادیر A و B ، به عنوان زیرفضاهایی از \mathbb{R}^m ، مساوی‌اند.

(ب) ماتریس وارون پذیر $n \times n$ ای مانند C وجود دارد به طوری که $A = BC$.

۱۷. اگر A ماتریس $m \times n$ ای با این خاصیت باشد که هر r تا از ستونهای آن مستقل خطی و هر $r + 1$ تای آنها وابسته خطی‌اند، نشان دهید که $r(A) = r$.

۱۸. نشان دهید که هر ماتریس مربعی با رتبه r ، حاصلجمع r ماتریس با رتبه ۱ است.

۱۹. نشان دهید که هر ماتریس وارون پذیر 2×2 را می‌توان به صورت حاصلضرب ماتریسهایی به شکل

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نوشت.

۲۰. دستگاه معادلات خطی

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = y_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = y_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = y_m$$

را در نظر بگیرید. نشان دهید که این دستگاه دارای جواب است اگر و فقط اگر رتبه ماتریس

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

با رتبه ماتریس زیر یکی باشد:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & y_m \end{bmatrix}$$

۲۱. فرض کنید $(i = 1, 2, \dots, k)$ به ازای $A_i x + B_i y + C_i = 0$ مجموعه‌ای از k خط باشد. نشان دهید که این خطوط در یک نقطه تلاقی می‌کنند، یا باهم موازی‌اند، اگر و فقط اگر رتبه ماتریس

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_k & B_k & C_k \end{bmatrix}$$

کمتر از ۲ یا مساوی با ۲ باشد.

۲۲. رتبه ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{bmatrix}$ را به عنوان تابعی از x معین کنید.

۶. یکرختی

فرض کنیم $T: V \rightarrow W$ تبدیلی خطی از فضای برداری V به فضای برداری W باشد. اگر T هم یک به یک و هم پوشا باشد، آن را **یکرختی** می‌نامند. به عبارت دیگر، T یکرختی است اگر $N_T = 0$ و $R_T = W$.

مثال ۱ فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ باشد و T_A عملگری خطی روی \mathbb{R}^n که به صورت $T_A(x) = Ax$ تعریف می‌شود.

گیریم A وارون پذیر باشد. در این صورت بنا به مثال ۳ از بخش ۳.۵، T_A پوشاست و در بخش ۴.۵ دیدیم که یک به یک نیز هست. لذا، T_A یکرختی است.

از طرف دیگر، اگر A وارون پذیر نباشد، $\det A = 0$ و بنا به قضیه ۲ از بخش ۹.۴، $Ax = 0$ دارای جواب غیر صفر است. پس T_A یک به یک نیست.

در نتیجه، T_A یکرختی است اگر و فقط اگر A وارون پذیر باشد.

مثال ۲ تبدیل خطی T از \mathbb{R}^2 به \mathbb{R}^2 را که به صورت $T(e_1) = 1$ و $T(e_2) = x$ و

$T(e_p) = x^2$ تعریف می‌شود در نظر می‌گیریم. بنا به قضیه بخش ۲.۵، چنین تبدیل خطی وجود دارد. طبق تعریف T ،

$$T(ae_1 + be_p + ce_p) = a + bx + cx^2$$

از اینرو T یک به یک و پوشاست، و بنابراین T یک یکرختی از R^3 به P_2 است.

مثال ۳ در فصل ۲، بردارهای R^3 را به دو طریق مختلف تعریف کردیم: جبری و هندسی. این بردارها را در تعریف جبری به صورت ستونهایی از اعداد و در تعریف هندسی به صورت پاره خط‌های جهت‌داری که از مبدأ شروع می‌شوند، در نظر گرفتیم. براساس تعریف جبری بردارها، قواعدی جبری برای جمع برداری و ضرب اسکالر ارائه دادیم. براساس تعریف هندسی، جمع برداری را به وسیله قانون متوازی‌الاضلاع تعریف کردیم و ضرب اسکالر را به عنوان بزرگساز علامت‌دار طول در نظر گرفتیم.

حال تبدیل T را از فضای بردارهای ستونی به فضای پاره خط‌های جهت‌داری که از

مبدأ شروع می‌شوند بررسی می‌کنیم، یعنی $v(x, y, z) = T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)$ را. به عبارت

دیگر، تبدیل T به یک بردار ستونی با مؤلفه‌های x, y, z ، پاره خط جهت‌داری را که در نقطه (x, y, z) ختم می‌شود نسبت می‌دهد. به علت وجود تناظر بین سه تایی‌های مرتب اعداد حقیقی و نقاط فضا، تبدیل T یک به یک و پوشاست. در بخش ۲.۲ دیدیم که

$$v(x, y, z) + v(x', y', z') = v(x + x', y + y', z + z')$$

$$\alpha v(x, y, z) = v(\alpha x, \alpha y, \alpha z) \quad \text{و}$$

با استفاده از تبدیل T که در بالا تعریف شد، این مطلب را دوباره تفسیر می‌کنیم. داریم:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}\right)$$

و

$$T\left(\alpha \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \alpha T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)$$

به عبارت دیگر، T تبدیلی خطی از بردارهایی که به طور جبری تعریف شده‌اند به بردارهایی که به طور هندسی تعریف شده‌اند، تعریف می‌کند. چون T یک به یک و پوشاست، پس یکرختی است.

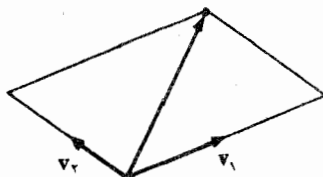
به علت وجود این تناظر بین بردارهایی که به صورت جبری تعریف شده‌اند و آنهایی که تعریف هندسی دارند، قرار بر این می‌گذاریم که بردارهای جبری و هندسی را هم ارز با هم در نظر بگیریم. وجود این تناظر به روشن شدن مفهوم اصلی یکرختی کمک می‌کند.

واژه «یکریختی» از واژه‌های «یک» و «ریخت = صورت» گرفته شده است. در اینجا این سؤال مناسب پیش می‌آید که چرا دو فضا دارای «یک صورت» هستند. دو فضا بدین مفهوم دارای یک صورت‌اند که T تناظر یک به یکی القا می‌کند که دو تعریف جمع برداری و ضرب اسکالر را هم‌ارز می‌سازد. با استفاده از این هم‌ارزی، می‌توانیم قضا یا را در هر فضایی که مناسبتر باشد ثابت کنیم و از یکریختی برای انتقال قضا یا به فضا های دیگر استفاده کنیم، و بدین وسیله تناظری بین احکام جبری و هندسی برقرار سازیم.

برای مثال، به واسطه یکریختی T ، دو حکم هندسی و جبری زیر هم‌ارزند:

(الف) اگر v_1 و v_2 دو پاره‌خط جهت‌دار ناممخط در صفحه باشند که از مبدأ شروع می‌شوند، آنگاه هر پاره‌خط جهت‌دار در صفحه که از مبدأ شروع شود قطر متوازی‌الاضلاع است که اضلاع مجاورش روی خطوط معین شده توسط امتدادهای v_1 و v_2 قرار دارند.

(ب) اگر v_1 و v_2 بردارهایی مستقل خطی در \mathbb{R}^2 باشند، ترکیبات خطی آنها فضای \mathbb{R}^2 را پدید می‌آورند. (ر. ک. شکل ۱۱.۵)



شکل ۱۱.۵

تبدیل $T: V \rightarrow W$ ، در حالتی که یکریختی بین دو فضای برداری باشد، اعمال جبری در V را هم‌ارز با اعمال جبری در W می‌سازد. قضیه بعدی به بیان دقیقتر این حکم کمک می‌کند.

قضیه ۱ فرض کنیم $T: V \rightarrow W$ یکریختی بین دو فضای برداری باشد. در این صورت،

(الف) اگر x_1, \dots, x_p, x_n در V مستقل خطی باشند، $T(x_1), \dots, T(x_p), T(x_n)$ در W مستقل خطی‌اند.

(ب) اگر x_1, \dots, x_p, x_n فضای V را پدید آورند، $T(x_1), \dots, T(x_p), T(x_n)$ فضای W را پدید می‌آورند.

(ج) اگر x_1, \dots, x_p, x_n پایه‌ای برای V تشکیل دهند، $T(x_1), \dots, T(x_p), T(x_n)$ پایه‌ای برای W تشکیل می‌دهند.

(د) $\dim V = \dim W$

اثبات (الف) فرض کنیم x_1, \dots, x_p, x_n در V مستقل خطی باشند. اگر در فضای W ، $\alpha_1 T(x_1) + \alpha_2 T(x_2) + \dots + \alpha_n T(x_n) = 0$ ، چون T یک به یک است، داریم $T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) = 0$. از آنجا که x_1, \dots, x_p, x_n در V مستقل

خطی اند، $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. پس، تساوی

$$\alpha_1 T(x_1) + \alpha_2 T(x_2) + \dots + \alpha_n T(x_n) = 0$$

ایجاب می‌کند که $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. در نتیجه $T(x_1), T(x_2), \dots, T(x_n)$ در W مستقل خطی اند.

(ب) فرض کنیم x_1, x_2, \dots, x_n فضای V را پدید آورند و y برداری در W باشد. چون T پوشاست، بردار x ی در V وجود دارد به طوری که $T(x) = y$. از آنجا که x_1, x_2, \dots, x_n و فضای V را پدید می‌آورند، اسکالرهای $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ وجود دارند به نحوی که $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$. لذا

$$\begin{aligned} y = T(x) &= T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \\ &= \alpha_1 T(x_1) + \alpha_2 T(x_2) + \dots + \alpha_n T(x_n) \end{aligned}$$

پس، اگر y متعلق به W باشد، ترکیبی خطی از $T(x_1), T(x_2), \dots, T(x_n)$ است. بنابراین $T(x_1), T(x_2), \dots, T(x_n)$ فضای W را پدید می‌آورند.

(ج) فرض کنیم x_1, x_2, \dots, x_n پایه‌ای برای V باشد. بنا به (الف)، $T(x_1), T(x_2), \dots, T(x_n)$ در W مستقل خطی اند و بنا به (ب)، $T(x_1), T(x_2), \dots, T(x_n)$ و فضای W را پدید می‌آورند. بنابراین $T(x_1), T(x_2), \dots, T(x_n)$ پایه‌ای برای W تشکیل می‌دهد.

(د) اگر $\dim V = n$ ، آنگاه پایه‌ای، مثلاً x_1, x_2, \dots, x_n با n عنصر برای V وجود دارد. چون $T(x_1), T(x_2), \dots, T(x_n)$ پایه‌ای با n عنصر برای W است، دیده می‌شود که $\dim V = \dim W$.

در بررسی این امر که یک تبدیل خطی یکره‌یختی هست یا نه، در نظر داشتن حکم زیر ممکن است مفید باشد.

فرض می‌کنیم $T: V \rightarrow W$ تبدیلی خطی بین دو فضای برداری متناهی‌البعد باشد به قسمی که $\dim V = \dim W$. در این صورت گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

(۱) T یکره‌یختی است.

(۲) T یک به یک است.

(۳) T پوشاست.

این حکم را ثابت می‌کنیم. واضح است که اگر T یکره‌یختی باشد، یک به یک و پوشاست. پس فرض می‌کنیم T یک به یک باشد. در این صورت، $N_T = 0$. چون $\dim N_T + \dim R_T = \dim V$ ، نتیجه می‌شود که $\dim R_T = \dim V$. از آنجا که $\dim V = \dim W$ ، داریم $\dim R_T = \dim W$. چون R_T زیرفضایی از W است، $R_T = W$ و T پوشاست.

همین طور، اگر T پوشا باشد، $\dim R_T = \dim W = \dim V$. از تساوی $\dim N_T + \dim R_T = \dim V$ نتیجه می شود که $\dim N_T = 0$. لذا، $N_T = 0$ و T یک به یک است.

پس، در بررسی این امر که یک عملگر خطی یکرختی هست یا نه، کافی است که یکی از موارد یک به یک بودن یا پوشا بودن را درباره آن تحقیق کنیم.

مثال ۴ تبدیلی خطی از P_n به P_n را که به صورت $H(f) = f + f'$ مشتق f (است) تعریف می شود، در نظر می گیریم.

در این مورد، باسانی دیده می شود که H خطی است. می خواهیم نشان دهیم که H یکرختی است. بنا به آنچه هم اکنون نشان داده ایم، کافی است ثابت کنیم که H یک به یک است.

پس فرض می کنیم $H(f) = 0$. در این صورت $f + f' = 0$. از اینرو $f' = -f$. اگر f یک چند جمله ای غیر صفر از درجه k باشد، آنگاه f' یک چند جمله ای از درجه $k-1$ است. از این قرار، اگر $f \neq 0$ ، ممکن نیست که f مساوی با f' باشد. بنا بر این $f = 0$ و H یک به یک است. در نتیجه H یکرختی است.

از قضیه ۱ چنین برمی آید که اگر f_0, f_1, \dots, f_n پایه ای برای P_n باشد، آنگاه $f'_0 + f_0, f'_1 + f_1, \dots, f'_n + f_n$ پایه دیگر آن است. برای مثال، x, x^2, \dots, x^n پایه ای برای P_n است. لذا،

$$1, x, x^2 + 2x, x^3 + 3x^2, \dots, x^{n-1} + nx^{n-2}, \dots, x^n$$

نیز پایه ای برای P_n است.

بنا به قضیه ۱، اگر یکرختی بین دو فضای برداری وجود داشته باشد، آنگاه بعد این دو فضای برداری یکی است. آنچه بیشتر جالب توجه است، آن است که اگر بعد دو فضای برداری مساوی باشد، آنگاه یکرختی بین آنها وجود دارد.

قضیه ۲ فرض کنیم V و W دو فضای برداری حقیقی n بعدی باشند. در این صورت یکرختی بین V و W وجود دارد.

اثبات فرض می کنیم x_1, x_2, \dots, x_n پایه ای برای V باشد و y_1, y_2, \dots, y_n پایه ای برای W . بنا به قضیه بخش ۲.۵، یک تبدیل خطی T از V به W وجود دارد به قسمی که به ازای $i = 1, 2, \dots, n$ ، $T(x_i) = y_i$. ادعا می کنیم که T یکرختی است. چون V و W دارای بعد مساوی اند، بنا به مطالب قبلی، کافی است نشان دهیم که T یک به یک است.

فرض کنیم x برداری در V باشد و $T(x) = 0$. از آنجا که x_1, x_2, \dots, x_n پایه ای برای V است، اسکالرهای $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ وجود دارند به نحوی که $x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$ در این صورت:

$T(\mathbf{x}) = T(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n) = \alpha_1 T(\mathbf{x}_1) + \dots + \alpha_n T(\mathbf{x}_n) = \mathbf{0}$
 چون $T(\mathbf{x}_i) = \mathbf{y}_i$ ، نتیجه می شود که $\alpha_1 \mathbf{y}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{y}_n = \mathbf{0}$. از آنجا که $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ ، نتیجه می شود که $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ پایه ای برای W است،
 پس، $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ و T یک به یک است. ●

اغلب وقتی یکرختی بین دو فضای برداری وجود دارد، گوییم که این دو فضا یکرخت اند.

نتیجه اگر V یک فضای برداری n بعدی باشد، با \mathbf{R}^n یکرخت است. مفهوم این نتیجه آن است که یکرختی از V به \mathbf{R}^n وجود دارد. به همین معنی است که \mathbf{R}^n الگویی برای فضاهای متناهی البعد حقیقی است. با استفاده از اثباتی شبیه به اثبات قضیه ۲، می توانیم نتیجه بگیریم که هر دو فضای برداری n بعدی مختلط یکرخت اند و هر فضای برداری n بعدی مختلط با \mathbf{C}^n یکرخت است. قبلاً دیده ایم که فضای P_n فضایی برداری با بعد $n+1$ است. بنابراین، P_n و \mathbf{R}^{n+1} یکرخت اند. به همین نحو، دیده می شود که فضای ماتریسهای 2×2 حقیقی، که بعدش ۴ است، با \mathbf{R}^4 یکرخت است.

تمرینات

۱. کدامیک از ماتریسهای زیر یکرختی روی \mathbf{R}^n القا می کند؟

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (\text{الف}) \quad \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 7 & 5 & 12 \end{bmatrix} \quad (\text{ج}) \quad \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{د})$$

۲. فرض کنید V فضایی برداری با پایه $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ باشد. و T تابعی از V به \mathbf{R}^n باشد که به هر بردار \mathbf{x} ، n تایی مختصات آن نسبت به پایه $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ را نسبت می دهد. نشان دهید که T یکرختی از V به \mathbf{R}^n است.

۳. فرض کنید P فضای برداری چند جمله ایهای زوج یک متغیره با متغیر x و از درجه نایبتر از $2n$ و P_0 فضای برداری چند جمله ایهای فرد از درجه نایبتر از $2n+1$ باشد. نشان دهید که تابع $T: P \rightarrow P_0$ که به صورت $T(f) = xf$ تعریف می شود یکرختی از P بر روی P_0 است.

۴. نشان دهید که تابعی از فضای ماتریسهای $n \times n$ به خودش که A را به A^T می برد، یکرختی است.

۵. فرض کنید T نگاشتی از P_n به P_n باشد که به صورت

$$T(f) = f + \alpha_1 f' + \alpha_2 f'' + \dots + \alpha_n f^{(n)}$$

($\alpha_1, \dots, \alpha_n$ اعداد حقیقی اند) تعریف می شود. نشان دهید که T یکریختی است.

۶. فرض کنید A یک ماتریس وارون پذیر $n \times n$ باشد. نشان دهید که تبدیلات خطی زیر از فضای ماتریسهای $n \times n$ به خودش، یکریختی اند.

$$T(B) = BA \quad (\text{ب}) \quad T(B) = AB \quad (\text{الف})$$

$$T(B) = ABA^{-1} \quad (\text{د}) \quad T(B) = ABA \quad (\text{ج})$$

۷. فرض کنید $T: V \rightarrow W$ تبدیلی خطی بین دو فضای برداری متناهی البعد باشد. نشان دهید که احکام زیر هم ارزند.

(الف) T یکریختی است.

(ب) اگر x_1, x_2, \dots, x_n در V مستقل خطی باشند، آنگاه $T(x_1), T(x_2), \dots, T(x_n)$ در W مستقل خطی اند و اگر y_1, y_2, \dots, y_n فضای V را پدید آورند، آنگاه $T(y_1), T(y_2), \dots, T(y_n)$ فضای W را پدید می آورند.

(ج) اگر x_1, x_2, \dots, x_n پایه ای برای V باشد، آنگاه $T(x_1), T(x_2), \dots, T(x_n)$ پایه ای برای W است.

۸. نشان دهید که تبدیلی خطی روی P_n که $f(x)$ را به $f(x+\alpha)$ (α عددی است حقیقی) می برد یکریختی روی P_n است.

۹. فرض کنید T یکریختی روی \mathbb{R}^3 باشد. نشان دهید که T صفحات گذرنده از مبدأ را به صفحاتی گذرنده از مبدأ و خطوط گذرنده از مبدأ را به خطوطی گذرنده از مبدأ می برد.

۱۰. یکریختی بین فضای ماتریسهای 4×3 و فضای ماتریسهای 6×2 بسازید. در حالت کلی، چه وقت می توان یکریختی بین فضای ماتریسهای $k \times l$ و فضای ماتریسهای $m \times n$ یافت؟

۱۱. نشان دهید که فضای ماتریسهای بالامثلثی با فضای ماتریسهای پایین مثلثی یکریخت است.

۱۲. نشان دهید که تابعی از اعداد مختلط (اینجا به عنوان یک فضای برداری حقیقی)

به فضای ماتریسهای 2×2 به صورت $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ که با ضابطه $T(a+bi) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ تعریف می شود یکریختی است. نشان دهید که این یکریختی ضرب را حفظ می کند، یعنی،

$$T(a+bi)T(c+di) = T((a+bi)(c+di))$$

۱۳. فرض کنید V فضایی برداری باشد و t برداری ثابت در V . اعمال جدیدی روی V به صورت

$$\alpha * x = \alpha x + (1 - \alpha)t \quad \text{و} \quad x \oplus y = x + y + t$$

تعریف کنید. نشان دهید که V تحت اعمال \oplus و $*$ فضایی برداری است. نشان دهید تابع $T(x) = x + t$ که V را به عنوان یک فضای برداری تحت اعمال $+$ و $*$ ، به V به عنوان

یک فضای برداری تحت اعمال \oplus و $*$ می برد، یکریختی القا می کند.

۱۴. به ازای چه مقادیری از λ تابعی از P_n به P_n که به صورت $T(f) = \lambda f - x f'$ تعریف می شود یکریختی روی P_n است؟

۱۵. فرض کنید x_1, x_2, x_3 مجموعه ای از بردارهای مستقل خطی در R^3 باشد و y_1, y_2, y_3 مجموعه دیگری از بردارهای مستقل خطی در همین فضا و فرض کنید T عملگری خطی روی R^3 باشد به طوری که $T(x_i) = y_i$ ($i = 1, 2, 3$). (الف) نشان دهید که T یکریختی است.

(ب) نشان دهید $T(x) = Ax$ ، که در این رابطه A ماتریس 3×3 ی

$$[y_1, y_2, y_3][x_1, x_2, x_3]^{-1}$$

است که $[y_1, y_2, y_3]$ ماتریس 3×3 با ستونهای y_1, y_2, y_3 و $[x_1, x_2, x_3]$ ماتریس 3×3 با ستونهای x_1, x_2, x_3 است.

۱۶. کدام زوج از فضاهای زیر یکریخت اند؟

(الف) ماتریسهای متقارن کج 3×3 با درایه های حقیقی و R^3 .

(ب) ماتریسهای قطری $n \times n$ با درایه های حقیقی و P_n .

(ج) ماتریسهای متقارن $(n-1) \times (n-1)$ با درایه های حقیقی و

ماتریسهای متقارن کج $n \times n$ با درایه های حقیقی.

۲ جبر تبدیلات خطی

در فصل ۲، جمع و ضرب ماتریسها را مورد بررسی قرار دادیم. با توجه به ارتباط نزدیک بین تبدیلات خطی و ماتریسها، جا دارد پرسیم که آیا می توان اعمال مشابهی روی تبدیلات خطی انجام داد یا خیر. در این بخش، این قبیل اعمال را تعریف می کنیم و می بینیم که کاملاً مشابه با اعمال نظیر خود روی ماتریسها هستند.

اگر V و W دو فضای برداری باشند، خانواده تمام تبدیلات خطی از V به W را $L(V, W)$ نشان می دهیم. چند عمل جبری معمولی روی $L(V, W)$ تعریف شده اند، که در این بخش مورد مطالعه قرار می گیرند. فرض کنیم T_1 و T_2 دو عضو $L(V, W)$ باشند، یعنی تبدیلاتی خطی از فضای برداری V به فضای برداری W باشند. حاصلجمع T_1 و T_2 را که با $T_1 + T_2$ نشان داده می شود به صورت $(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x)$ تعریف می کنیم.

برای اینکه تعریف فوق جالب باشد، حاصلجمع نیز باید یک تبدیل خطی باشد. برای اثبات اینکه واقعاً هم چنین است، فرض کنیم x و y متعلق به V باشند. در این صورت

$$\begin{aligned} (T_1 + T_2)(x + y) &= T_1(x + y) + T_2(x + y) && (\text{بنا به تعریف } T_1 + T_2) \\ &= T_1(x) + T_1(y) + T_2(x) + T_2(y) && (\text{بنا به خطی بودن } T_1 \text{ و } T_2) \\ &= T_1(x) + T_2(x) + T_1(y) + T_2(y) && [\text{بنا به } (V_1)] \\ &= (T_1 + T_2)(x) + (T_1 + T_2)(y) && (\text{طبق تعریف } T_1 + T_2) \end{aligned}$$

همین‌طور، اگر x متعلق به V و α یک اسکالر باشد، داریم

$$\begin{aligned}(T_\lambda + T_\gamma)(\alpha x) &= T_\lambda(\alpha x) + T_\gamma(\alpha x) && (T_\lambda + T_\gamma \text{ تعریف}) \\ &= \alpha T_\lambda(x) + \alpha T_\gamma(x) && (\text{بنا به خطی بودن } T_\gamma, T_\lambda) \\ &= \alpha(T_\lambda(x) + T_\gamma(x)) && [\text{بنا به } (V \ 6)] \\ &= \alpha(T_\lambda + T_\gamma)(x) && (T_\lambda + T_\gamma \text{ تعریف})\end{aligned}$$

همچنین یک عمل معمولی ضرب اسکالر روی $L(V, W)$ وجود دارد. اگر T متعلق به $L(V, W)$ باشد، مضروب اسکالر T با ضرب اسکالر α را که با αT نشان داده می‌شود، به صورت $(\alpha T)(x) = \alpha(T(x))$ تعریف می‌کنیم.

αT نیز یک تبدیل خطی است، زیرا اگر x و y متعلق به V باشند،

$$\begin{aligned}\alpha T(x + y) &= \alpha(T(x + y)) && (\alpha T \text{ تعریف}) \\ &= \alpha(T(x) + T(y)) && (\text{بنا به خطی بودن } T) \\ &= \alpha T(x) + \alpha T(y) && [\text{طبق } (V \ 6)] \\ &= (\alpha T)(x) + (\alpha T)(y) && (\alpha T \text{ تعریف})\end{aligned}$$

بعلاوه، اگر x برداری در V و β یک اسکالر باشد، داریم

$$\begin{aligned}(\alpha T)(\beta x) &= \alpha(T(\beta x)) && (\alpha T \text{ تعریف}) \\ &= \alpha(\beta T(x)) && (\text{بنا به خطی بودن } T) \\ &= (\alpha\beta)(T(x)) && [\text{طبق } (V \ 7)] \\ &= \beta(\alpha T(x)) && [\text{بنا به } (V \ 7)] \\ &= \beta(\alpha T)(x) && (\alpha T \text{ تعریف})\end{aligned}$$

با استفاده از ترکیبات خطی تبدیلات خطی شناخته شده، می‌توانیم مثالهای متعددی از تبدیلات خطی بسازیم. با استفاده از قوانین فوق، بدون دردرس می‌توانیم خطی بودن تبدیلاتی را که به دست می‌آوریم تحقیق کنیم. بسیاری از مثالهایی که قبلاً ساختیم، از این طریق به دست آمده‌اند. برای مثال، در بخش قبلی، عملگری خطی روی P_n را بررسی کردیم که با ضابطه $H(f) = f + f'$ تعریف شد. قبل از آن، تعریف کردیم $I(f) = f$ و $D(f) = f'$. از این قرار $H = I + D$. در نتیجه H خطی است. همین‌طور $K(f) = 3f - f'$ و $L(f) = f + 7f'$ عملگرهایی خطی روی P_n هستند. با توجه به نماد گذاری که انتخاب کرده‌ایم، احتمالاً انتظار قضیه زیر را دارید:

قضیه ۱ $L(V, W)$ ، با اعمال جمع برداری و ضرب اسکالری که در بالا تعریف شد، یک فضای برداری است.

اثبات فرض‌کنیم $T_\lambda, T_\gamma, T_\delta$ اعضای $L(V, W)$ ، و α و β اسکالر باشند، و x برداری دلخواه در V باشد.

(V ۱)

$$\begin{aligned}(T_\lambda + T_\gamma)(x) &= T_\lambda(x) + T_\gamma(x) && (\text{بنا به تعریف } T_\lambda + T_\gamma) \\ &= T_\gamma(x) + T_\lambda(x) && [\text{با استفاده از } (V \ 1) \text{ در } W] \\ &= (T_\gamma + T_\lambda)(x) && (T_\gamma + T_\lambda \text{ تعریف})\end{aligned}$$

(V ۲)

$$\begin{aligned}
 ((T_1 + T_2) + T_3)(x) &= (T_1 + T_2)(x) + T_3(x) \quad [(T_1 + T_2) + T_3 \text{ تعریف}] \\
 &= (T_1(x) + T_2(x)) + T_3(x) \quad (T_1 + T_2 \text{ تعریف}) \\
 &= T_1(x) + (T_2(x) + T_3(x)) \quad [\text{با استفاده از (V ۲)}] \\
 &= T_1(x) + (T_2 + T_3)(x) \quad (T_2 + T_3 \text{ تعریف}) \\
 &= (T_1 + (T_2 + T_3))(x) \quad [T_1 + (T_2 + T_3) \text{ تعریف}] \\
 &\quad (V ۳)
 \end{aligned}$$

فرض کنیم O نمایشگر تبدیل خطی صفر از V به W باشد، یعنی، عملگری که همه بردارهای V را به o می برد. در این صورت

$$\begin{aligned}
 (O + T_1)(x) &= O(x) + T_1(x) \quad (O + T_1 \text{ تعریف}) \\
 &= o + T_1(x) \quad (O \text{ تعریف}) \\
 &= T_1(x) \quad [\text{با استفاده از (V ۳)}] \\
 &\quad (V ۴)
 \end{aligned}$$

به ازای $T \in L(V, W)$ ، منفی T را با ضابطه $(-T)(x) = -(T(x))$ تعریف می کنیم. در این صورت

$$\begin{aligned}
 (T + (-T))(x) &= T(x) + (-T)(x) \quad [T + (-T) \text{ تعریف}] \\
 &= T(x) - T(x) \quad [(-T)(x) \text{ تعریف}] \\
 &= o \quad [\text{با استفاده از (V ۴)}] \\
 &= O(x) \quad (T \text{ به تعریف عملگر صفر})
 \end{aligned}$$

تحقیق صحت بقیه خواص (V ۵) - (V ۸) به همین ترتیب است و از آن صرف نظر می کنیم.

مثال ۱ فرض کنیم A و B ماتریسهای $m \times n$ ای با درایه های حقیقی باشند و T_B و T_A تبدیلاتی خطی از \mathbb{R}^n به \mathbb{R}^m که با ضابطه $T_A(x) = Ax$ و $T_B(x) = Bx$ ، به ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$ ، تعریف شده اند. پس، نتیجه می شود که

$$\begin{aligned}
 (T_A + T_B)(x) &= T_A(x) + T_B(x) = Ax + Bx = (A + B)x \\
 &= T_{A+B}(x)
 \end{aligned}$$

چون x برداری دلخواه در \mathbb{R}^n است، نتیجه می شود که $T_A + T_B = T_{A+B}$. یعنی، عمل جمع تبدیلات خطی نظیر جمع ماتریسها است. همین طور، به آسانی ثابت می شود که $\alpha T_A = T_{\alpha A}$. این، بدین معنی است که ضرب اسکالر تبدیلات خطی نظیر ضرب اسکالر ماتریسها است.

فرض کنیم L نشانگر تابعی از $M_{m,n}$ ، فضای ماتریسهای $m \times n$ با درایه های حقیقی، به $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ باشد که با ضابطه $L(A) = T_A$ تعریف می شود. به عبارت دیگر، L ماتریس A را به تبدیل خطی القا شده به وسیله ضرب بردارهای \mathbb{R}^n در A ، می برد. چون

$$L(A + B) = T_{A+B}$$

$$\begin{aligned}
 &= T_A + T_B \\
 &= L(A) + L(B)
 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
 L(\alpha A) &= T_{\alpha A} \\
 &= \alpha T_A \\
 &= \alpha L(A)
 \end{aligned}$$

دیده می‌شود که L خطی است.

در قضیه ۲، از بخش ۲.۵، دیدیم که هر تبدیل خطی از \mathbb{R}^n به \mathbb{R}^m به وسیله ضرب بردارهای \mathbb{R}^n در یک ماتریس مناسب $m \times n$ القا می‌شود. یعنی، به ازای هر تبدیل خطی $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ، ماتریسی مانند A وجود دارد به نحوی که $T = T_A$. به عبارت دیگر، تابع L از M_{mn} به $(\mathbb{R}^n \text{ و } \mathbb{R}^m)$ پوشاست.

تابع L یک به یک نیز هست. زیرا اگر $L(A) = 0$ ، آنگاه به ازای هر بردار x در \mathbb{R}^n ، $T_A(x) = Ax = 0$. با فرض $x = e_1, e_2, \dots, e_n$ ، می‌بینیم که همه ستونهای A صفرند و لذا $A = 0$.

پس، تابع L که در بالا تعریف شد، یکریختی از فضای ماتریسهای $m \times n$ به فضای تبدیلات خطی از \mathbb{R}^n به \mathbb{R}^m ، القا می‌کند.

همچنان که اعمال جمع برداری و ضرب اسکالر تبدیلات خطی، مشابه همین اعمال روی ماتریسها هستند، روشی برای ترکیب تبدیلات خطی وجود دارد که نظیر ضرب ماتریسهاست.

فرض کنیم $T: U \rightarrow V$ و $S: V \rightarrow W$ تبدیلاتی خطی باشند، که در آنها U, V و W فضاهایی برداری اند. ترکیب S و T را که با $S \circ T$ ، یا برای سادگی فقط با ST ، نشان می‌دهیم به صورت

$$(S \circ T)(x) = S(T(x)) \quad \text{به ازای هر } x \text{ در } U$$

تعریف می‌کنیم.

طبعاً انتظار داریم که ترکیب دو تبدیل خطی، تبدیلی خطی باشد. درواقع نیز چنین است، زیرا اگر x_1 و x_2 بردارهایی در V باشند، داریم:

$$\begin{aligned}
 (S \circ T)(x_1 + x_2) &= S(T(x_1 + x_2)) && (\text{طبق تعریف } S \circ T) \\
 &= S(T(x_1) + T(x_2)) && (\text{بنا به خطی بودن } T) \\
 &= S(T(x_1)) + S(T(x_2)) && (\text{بنا به خطی بودن } S) \\
 &= (S \circ T)(x_1) + S \circ T(x_2) && (\text{طبق تعریف } S \circ T)
 \end{aligned}$$

همین طور، برای $x \in U$ و اسکالر α ، داریم

$$\begin{aligned}
 (S \circ T)(\alpha x) &= S(T(\alpha x)) && (\text{طبق تعریف } S \circ T) \\
 &= S(\alpha T(x)) && (\text{بنا به خطی بودن } T)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \alpha S(T(\mathbf{x})) && (\text{بنا به خطی بودن } S) \\
 &= \alpha(S \circ T)(\mathbf{x}) && (S \circ T \text{ تعریف})
 \end{aligned}$$

از آنجا که ثابت کردیم شرایط (الف) و (ب) در تعریف تبدیل خطی، در مورد $S \circ T$ برقرارند، این تابع تبدیلی خطی از U به W است.

مثال ۲ در اینجا هدف ما این است که تناظر بین ترکیب تبدیلات خطی و ضرب ماتریسها را دقیقاً نشان دهیم.

فرض می‌کنیم $T_A: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ و $T_B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ تبدیلاتی خطی باشند که بترتیب توسط ماتریس $p \times n$ ای مانند A و ماتریس $m \times n$ ای مانند B القا شده‌اند. یعنی $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ (به ازای هر \mathbf{x} در \mathbb{R}^p)، و $T_B(\mathbf{y}) = B\mathbf{y}$ (به ازای هر \mathbf{y} در \mathbb{R}^n). در این صورت به ازای هر \mathbf{x} در \mathbb{R}^p ،

$$\begin{aligned}
 (T_B \circ T_A)(\mathbf{x}) &= T_B(T_A(\mathbf{x})) && (\text{بنا به تعریف } T_B \circ T_A) \\
 &= T_B(A\mathbf{x}) && (T_A \text{ تعریف}) \\
 &= B(A\mathbf{x}) && (\text{بنا به تعریف } T_B) \\
 &= (BA)\mathbf{x} && (\text{بنا به قانون انجمنی ضرب ماتریسها})
 \end{aligned}$$

چون \mathbf{x} دلخواه بود، داریم $T_B \circ T_A = T_{BA}$ ، که در آن T_{BA} تبدیل خطی القا شده توسط ماتریس $m \times p$ BA است.

این تناظر طبیعی بین ترکیب توابع خطی و ضرب ماتریسها، غالباً به ما امکان می‌دهد که ضرب ماتریسی را به صورت هندسی تعبیر کنیم. برای مثال، عملگر T_θ از \mathbb{R}^2 به \mathbb{R}^2 را که در بخش ۱۰۵ مورد بحث قرار گرفت، در نظر می‌گیریم. $T_\theta(\mathbf{v})$ به عنوان بردار حاصل از دوران یک بردار مفروض \mathbf{v} به اندازه θ درجه، تعریف شده بود. اگر θ_1 و θ_2 دو عدد باشند، ترکیب $T_{\theta_1} \circ T_{\theta_2}$ چیست؟

اگر \mathbf{v} برداری در صفحه باشد، $T_{\theta_1}(\mathbf{v})$ از دوران \mathbf{v} به اندازه θ_1 درجه حاصل می‌شود. بنا براین $T_{\theta_2}(T_{\theta_1}(\mathbf{v}))$ از دوران $T_{\theta_1}(\mathbf{v})$ به اندازه θ_2 درجه به دست می‌آید. پس رویهمرفته، $T_{\theta_2}(T_{\theta_1}(\mathbf{v}))$ بردار حاصل از دوران بردار \mathbf{v} به اندازه $\theta_1 + \theta_2$ درجه است. به عبارت دیگر $T_{\theta_1 + \theta_2} = T_{\theta_2} \circ T_{\theta_1}$. چون

$$T_\theta \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

دید می‌شود که

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

البته، این نتیجه را می‌توان مستقیماً از ضرب کردن دوماترینس نیز به دست آورد.

مثال ۳ در مثال ۳، از بخش ۲.۵، مقدار کرباس و طناب مورد نیاز یک کارخانه چادر سازی را به عنوان تابعی از تعداد هریک از انواع چادر تولید شده در نظر گرفتیم. در آن مثال، فرض کردیم

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

نمایشگر تعداد هریک از انواع چادر باشد. بنابراین

$$T(v) = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 10 \\ 10 & 16 & 30 \end{bmatrix} v.$$

برداری است که مقدار کرباس و طناب به کار رفته در تولید x_1 چادر از نوع ۱، x_2 چادر از نوع ۲، و x_3 چادر از نوع ۳ را می‌دهد.

همچنین فرض می‌کنیم تولید کننده، کرباس و طناب مورد نیازش را از پنبه، کنف، و الیاف کتان بسازد. یک واحد کرباس احتیاج به ۵ واحد پنبه، ۲ واحد کنف، و ۳ واحد الیاف کتان دارد. یک واحد طناب احتیاج به یک واحد پنبه، ۲ واحد کنف، و ۵ واحد الیاف کتان دارد.

فرض کنیم $u = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ برداری باشد که مؤلفه‌هایش مقدار کرباس و طناب تولید شده‌اند

در این صورت $S(u) = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ برداری است که مؤلفه‌هایش، بترتیب، مقدار پنبه،

کنف، و الیاف کتان مورد نیاز در تولید a واحد کرباس و b واحد طناب می‌باشند. می‌خواهیم بردار پنبه، کنف، و الیاف کتان لازم را به عنوان تابعی از بردار v محصول چادر بیاییم.

در این حالت، T ، بردار v محصول چادر را به بردار $u = T(v)$ کرباس و طناب مورد نیاز، تبدیل می‌کند. S بردار u کرباس و طناب لازم را به بردار $S(u)$ پنبه، کنف، و الیاف کتان مورد نیاز، تبدیل می‌کند. لذا، $S(T(u))$ ، پنبه، کنف، و الیاف کتان مورد نیاز را به عنوان تابعی از v می‌دهد. پس، داریم

$$S(T(v)) = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 6 & 10 \\ 10 & 16 & 30 \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} 30 & 46 & 80 \\ 28 & 44 & 80 \\ 12 & 18 & 30 \end{bmatrix} v$$

از این ماترینس، می‌توانیم مواد لازم برای تولید یک واحد از هر نوع چادر را با خواندن ستون مربوطه از بالا به پایین، بیاییم. از اینرو، یک چادر از نوع ۲ احتیاج به ۴۶ واحد پنبه، ۴۴ واحد کنف، و ۱۸ واحد الیاف کتان دارد.

نقش تبدیل همانی در ترکیب تبدیلات خطی مشابه نقش ماترینس همانی در ضرب

ماترینسهاست.

قضیه ۲ فرض کنیم $T: V \rightarrow W$ تبدیلی خطی بین دو فضای برداری V و W باشد و $I_V: V \rightarrow V$ و $I_W: W \rightarrow W$ ، بترتیب، تبدیلات خطی همانی روی V و W باشند. در این صورت

$$I_W \circ T = T \text{ و } T \circ I_V = T$$

اثبات فرض کنیم x برداری در V باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} (T \circ I_V)(x) &= T(I_V(x)) & (\text{بنا به تعریف } I_V) \\ &= T(x) & (I_V \text{ تعریف}) \end{aligned}$$

چون این مطلب به ازای هر x برقرار است، داریم $T \circ I_V = T$. اثبات $I_W \circ T = T$ نیز همین طور است.

اکنون، تحقیق می‌کنیم که ترکیب تبدیلات خطی در قانون انجمنی صدق می‌کند.

قضیه ۳ فرض کنیم $T_1: V_1 \rightarrow V_2$ ، $T_2: V_2 \rightarrow V_3$ و $T_3: V_3 \rightarrow V_4$ تبدیلاتی خطی باشند. (V_1, V_2, V_3, V_4) و V_4 فضاهایی برداری‌اند. در این صورت

$$T_3 \circ (T_2 \circ T_1) = (T_3 \circ T_2) \circ T_1$$

اثبات فرض کنیم x برداری در V_1 باشد. پس

$$\begin{aligned} (T_3 \circ (T_2 \circ T_1))(x) &= T_3((T_2 \circ T_1)(x)) & [\text{بنا به تعریف } (T_2 \circ T_1)] \\ &= T_3(T_2(T_1(x))) & (T_2 \circ T_1 \text{ تعریف}) \\ &= (T_3 \circ T_2)(T_1(x)) & (\text{بنا به تعریف } T_3 \circ T_2) \\ &= ((T_3 \circ T_2) \circ T_1)(x) & [(T_3 \circ T_2) \circ T_1 \text{ تعریف}] \end{aligned}$$

چون به ازای هر x در V_1 ، $((T_3 \circ T_2) \circ T_1)(x) = (T_3 \circ (T_2 \circ T_1))(x)$ ، پس ثابت می‌شود که $T_3 \circ (T_2 \circ T_1) = (T_3 \circ T_2) \circ T_1$.

از قضیه ۳، چنین برمی‌آید که ضرب ماتریسها انجمنی است. زیرا اگر A_1, A_2, A_3 ماتریسهایی با مرتبه مناسب باشند، بنا به قضیه ۳ داریم

$$T_{A_3} \circ (T_{A_2} \circ T_{A_1}) = (T_{A_3} \circ T_{A_2}) \circ T_{A_1}$$

با استفاده مکرر از $T_{AB} = T_A \circ T_B$ ، داریم

$$T_{A_3} \circ T_{A_2 A_1} = T_{A_3 A_2} \circ T_{A_1}$$

$$T_{A_3(A_2 A_1)} = T_{(A_3 A_2) A_1}$$

چون رابطه $T_A = T_B$ ایجاب می‌کند که $A = B$ ، داریم $T_A(A_2 A_1) = (A_3 A_2) A_1$

نتیجه‌ای که در فصل ۲، به روشی کاملاً متفاوت ثابت شد.
با توجه به رابطه نزدیک بین ضرب ماتریسی و ترکیب تبدیلات خطی، طبیعی است که قوانین توزیعپذیری زیر نیز برقرار باشند.

قضیه ۴ فرض کنیم $T_\gamma: V_\gamma \rightarrow V_\gamma$ و $T_\gamma: V_\gamma \rightarrow V_\gamma$, $T'_\gamma: V_\gamma \rightarrow V_\gamma$, $T_\gamma: V_\gamma \rightarrow V_\gamma$ و $T_\gamma: V_\gamma \rightarrow V_\gamma$ باشند (فضاهایی برداری اند). در این صورت تبدیلاتی خطی باشند (V_γ, V_γ) و (V_γ, V_γ) .

$$(T_\gamma + T'_\gamma) \circ T_\gamma = T_\gamma \circ T_\gamma + T'_\gamma \circ T_\gamma$$

و

$$T_\gamma \circ (T_\gamma + T'_\gamma) = T_\gamma \circ T_\gamma + T_\gamma \circ T'_\gamma$$

اثبات فرض کنیم x برداری در V_γ باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} ((T_\gamma + T'_\gamma) \circ T_\gamma)(x) &= (T_\gamma + T'_\gamma)(T_\gamma(x)) && \text{(بنا به تعریف } (T_\gamma + T'_\gamma) \circ T_\gamma \text{)} \\ &= T_\gamma(T_\gamma(x)) + T'_\gamma(T_\gamma(x)) && \text{(طبق تعریف } T_\gamma + T'_\gamma \text{)} \\ &= (T_\gamma \circ T_\gamma)(x) + (T'_\gamma \circ T_\gamma)(x) && \text{(بنا به تعاریف } T'_\gamma \circ T_\gamma \text{ و } T_\gamma \circ T_\gamma \text{)} \\ &= (T_\gamma \circ T_\gamma + T'_\gamma \circ T_\gamma)(x) && \text{(طبق تعریف } T_\gamma \circ T_\gamma + T'_\gamma \circ T_\gamma \text{)} \end{aligned}$$

چون تساوی فوق به ازای هر x در V_γ برقرار است، پس ثابت می‌شود که

$$(T_\gamma + T'_\gamma) \circ T_\gamma = T_\gamma \circ T_\gamma + T'_\gamma \circ T_\gamma$$

قانون توزیعپذیری دوم نیز به همین ترتیب ثابت می‌شود.

فرض کنیم $T: V \rightarrow V$ عملگری خطی روی فضای برداری V باشد. توانهای T را به طریق معمولی تعریف می‌کنیم:

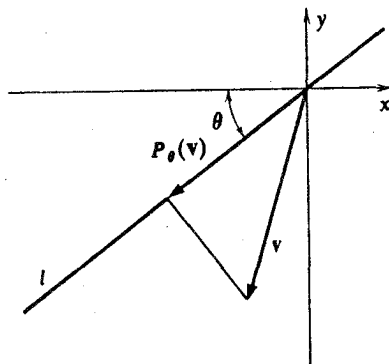
$$T^0(x) = T(T(x)), T^1(x) = T(T^0(x)), \dots, T^n(x) = T(T^{n-1}(x))$$

به علت اینکه قانون انجمنی در اینجا صادق است، T^n حاصل n بار ترکیب T با خودش است (صرفنظر از ترتیب انجام عمل ترکیب).

مثال ۴ فرض کنیم D عملگر مشتقگیری روی P_n باشد. یعنی، $D(f) = f'$. در این صورت $D^2(f) = D(D(f)) = D(f') = f''$. لذا، $D^k(f) = f^{(k)}$. یعنی، $D^k(f) = f^{(k)}$. f را به مشتق k ام f می‌برد. چون مشتق $(n+1)$ ام یک چند جمله‌ای در P_n صفر است، دیده می‌شود که $D^{n+1} = 0$. عملگرهایی با این خاصیت را که توانی از آنها صفر است پوچ توان می‌نامند.

مثال ۵ فرض کنیم P_θ تبدیل تصویری روی R^2 باشد (ر. ک. بخش ۲.۵). به یاد داریم که $P_\theta(v)$ برداری است واقع بر خط l ی که بامحور x ها زاویه θ درجه می‌سازد و $P_\theta(v)$

از رسم عمودی از انتهای v بر l به دست می‌آید (ر. ک. شکل ۱۲.۵). اگر u برداری روی l باشد، می‌بینیم که $P_\theta(u) = u$ ، لذا، چون $P_\theta(v)$ روی l قرار دارد، $P_\theta(P_\theta(v)) = P_\theta(v)$ یا $P_\theta^2(v) = P_\theta(v)$. از آنجا که این مطلب به ازای هر v در R^2 درست است، داریم $P_\theta^2 = P_\theta$.



شکل ۱۲.۵

این‌گونه عملگرها را که مساوی با مریضان هستند خود توان می‌نامند. در مثال ۴ از بخش ۱۰.۵، موردی را بررسی کردیم که در آن، سه شرکت بازار محصول معینی را در دست داشتند. در آن مثال تبدیلی خطی وجود داشت که تغییرات بازار را از یک سال به سال دیگر پیش‌بینی می‌کرد. در مثالی که اکنون می‌آید، می‌بینیم که اگر چنین جریانی در مدت زمانی طولانی ادامه یابد، چه اتفاقی می‌افتد. برای ساده شدن مسئله، فرض می‌کنیم بجای سه شرکت دو شرکت وجود داشته باشند.

مثال ۶ دو شرکت A و B بازار محصول معینی را به طور کامل در دست دارند. هر سال $7/10$ مشتریان A پا برجا می‌مانند، و $3/10$ آنها به B روی می‌آورند. همچنین در هر سال $6/10$ مشتریان B ، خریدار B باقی می‌مانند و $4/10$ آنها به A می‌پیوندند. چشم‌انداز وضع هر شرکت را در مدت طولانی توصیف کنید.

فرض کنیم $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ معرف وضع بازار در زمان معینی باشد. در اینجا x کسری از بازار است که در دست A است و y کسری که در اختیار B می‌باشد. برای مثال اگر A ، $2/5$ بازار را در دست داشته باشد داریم $x = 2/5$ و $y = 3/5$. فرض کنیم $T(v)$ وضع بازار در یک سال بعد باشد. در این صورت همانند مثال ۴، از بخش ۱۰.۵، $T.T(v) = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ به وضع بازار در یک سال بعد تبدیل می‌کند. اگر $T(v)$ وضع بازار در یک سال بعد باشد، $T^2(v)$ وضع بازار در ۲ سال بعد است. در حالت کلی، وضع بازار در k سال بعد $T^k(v)$

است. پس، برای حل مسئله باید توانهای ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۰.۷ & ۰.۴ \\ ۰.۳ & ۰.۶ \end{bmatrix}$ را حساب کنیم. چند تا از توانهای A عبارت اند از:

$$A^2 = \begin{bmatrix} ۰.۶۱ & ۰.۵۲ \\ ۰.۳۹ & ۰.۴۸ \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} ۰.۵۸۳ & ۰.۵۵۶ \\ ۰.۴۱۷ & ۰.۴۴۴ \end{bmatrix},$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} ۰.۵۷۴۹ & ۰.۵۶۶۸ \\ ۰.۴۲۵۱ & ۰.۴۳۳۲ \end{bmatrix}, \quad A^5 = \begin{bmatrix} ۰.۵۷۲۴۷ & ۰.۵۷۰۰۴ \\ ۰.۴۲۷۵۳ & ۰.۴۲۹۹۶ \end{bmatrix}.$$

با نگاهی اجمالی به نظر می‌رسد که این دنباله از ماتریسها به سمت یک حد میل

می‌کند و در حقیقت نیز چنین است. در اینجا، حد مزبور در واقع $\begin{bmatrix} \frac{4}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$ می‌باشد (تذکر: می‌کند و در حقیقت نیز چنین است. در اینجا، حد مزبور در واقع

$\frac{4}{7} = ۰.۵۷۱۴۲۸۵ \dots$). این بدان معنی است که در حد، وضع بازار با

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7}(x+y) \\ \frac{3}{7}(x+y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

این توزیع تا ۰.۰۰۱ دره تقریب صحیح است.

در مورد این مثال، دونکته شایان توجه است. اول اینکه وضع اولیه بازار هرچه

باشد، بازار به طور کاملاً سریع به توزیع $\begin{bmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} \end{bmatrix}$ میل می‌کند. بعلاوه، اگر وضع اولیه

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} \end{bmatrix} \text{ باشد، در آن صورت، چون } T\left(\begin{bmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

همانند آنچه در مثال ۴ از بخش ۱.۵ دیدیم، A نمونه‌ای از یک ماتریس تصادفی است. بسیاری از ماتریسهای تصادفی این خاصیت را دارند که دنباله توانهای آنها همگراست. (تذکر: اگر خواننده‌ای در مورد حد دنباله A ، A^2 ، A^3 ، ... شک داشته باشد، از طریق استقرا بسادگی می‌توان نشان داد که

$$A^n = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} + \frac{1}{7} \left(\frac{3}{10}\right)^n \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

با توجه به نقش مهمی که وارون ماتریس در بعضی مسائل مربوط به ماتریسها دارد، طبعاً این سؤال پیش می‌آید که آیا مفهوم وارون برای تبدیلات خطی نیز وجود دارد؟

تعریف فرض کنیم $T: V \rightarrow W$ تبدیلی خطی بین دو فضای برداری V و W باشد. اگر یک تبدیل خطی $S: W \rightarrow V$ وجود داشته باشد به طوری که $S \circ T = I_V$ و $T \circ S = I_W$ ، آنگاه T وارون پذیر است و S را وارون T می نامند.

اگر تبدیل خطی T وارون داشته باشد، این وارون یکتاست. برای ملاحظه این مطلب، فرض می کنیم S_1 و S_2 دو تبدیل خطی از W به V باشند که در شرایط تعریف وارون صدق می کنند. در این صورت

$$\begin{aligned} S_1 &= S_1 \circ I_W && (\text{بنا به قضیه ۲}) \\ &= S_1 \circ (T \circ S_2) && (\text{چون طبق فرض، } T \circ S_2 = I_W) \\ &= (S_1 \circ T) \circ S_2 && (\text{بنا به قضیه ۳}) \\ &= I_V \circ S_2 && (\text{چون طبق فرض، } S_1 \circ T = I_V) \\ &= S_2 && (\text{بنا به قضیه ۲}) \end{aligned}$$

لذا، اگر وارون وجود داشته باشد، یکتاست. وارون تبدیل خطی T را عموماً با T^{-1} نشان می دهند.

مثال ۷ فرض کنیم A ماتریس وارون پذیر $n \times n$ ای باشد و T_A عملگری خطی روی \mathbb{R}^n که با ضابطه $T_A(x) = Ax$ تعریف می شود. در این صورت، عملگر $T_{A^{-1}}$ روی \mathbb{R}^n نیز وجود دارد که به صورت $T_{A^{-1}}(x) = A^{-1}x$ تعریف می شود. عملگر $T_A \circ T_{A^{-1}}$ را می یابیم.

$$(T_A \circ T_{A^{-1}})(x) = T_A(T_{A^{-1}}(x)) = T_A(A^{-1}x) = A(A^{-1}x) = x$$

پس، می بینیم که $T_A \circ T_{A^{-1}} = I$. همین طور، می توان نشان داد که $T_{A^{-1}} \circ T_A = I$. در نتیجه T_A وارون پذیر است و $(T_A)^{-1} = T_{A^{-1}}$.

مثال ۸ فرض کنیم $S: P_n \rightarrow P_n$ عملگری خطی باشد که چند جمله ای $f(x)$ را به چند جمله ای $f(x+1)$ می برد، یا $(S(f))(x) = f(x+1)$. از اینرو x به $x+1$ ، x^2 به $(x+1)^2$ ، تبدیل می شوند و همین طور الی آخر.

حال، اگر $T: P_n \rightarrow P_n$ عملگری خطی باشد که $f(x)$ را به $f(x-1)$ می برد، یا $(T(f))(x) = f(x-1)$ ، آنگاه S وارون پذیر است و $S^{-1} = T$. زیرا داریم

$$\begin{aligned} ((S \circ T)(f))(x) &= (S(T(f)))(x) && (\text{بنا به تعریف } S \circ T) \\ &= (T(f))(x+1) && (\text{بنا به تعریف } S) \\ &= f((x+1)-1) && (\text{بنا به تعریف } T) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

از این قرار، به ازای هر f ، داریم $(S \circ T)f = f$ ، در نتیجه $S \circ T = I$. به همین ترتیب، می توان نشان داد که $T \circ S = I$.

مفهوم وارون یک عملگر خطی با مفهوم یکرختی رابطه نزدیکی دارد. این ارتباط در قضیه زیر روشن می گردد.

قضیه ۵ فرض کنیم $T: V \rightarrow W$ تبدیلی خطی بین دو فضای برداری V و W باشد. در این صورت T وارون پذیر است اگر و فقط اگر T یکرختی باشد.

اثبات فرض کنیم T وارون پذیر باشد و $T^{-1}: W \rightarrow V$ وارون آن. اگر $T(x) = 0$ ، آنگاه $T^{-1}(T(x)) = T^{-1}(0) = 0$ اما $T^{-1}(T(x)) = x$ ، لذا، $x = 0$. چون $T(x) = 0$ ایجاب می کند $x = 0$ ، دیده می شود که $N_T = 0$. اکنون نشان می دهیم که T پوشاست. اگر y برداری در W باشد، فرض کنیم $x = T^{-1}(y)$. پس

$$T(x) = T(T^{-1}(y)) = y.$$

از اینرو، y نگاره x تحت T است. از اینجا نتیجه می شود که T پوشاست. چون T یک به یک و پوشاست، یکرختی است.

حال فرض می کنیم T یکرختی باشد. بایست وارونی برای آن بسازیم. چون T پوشاست، برای $y \in W$ یک بردار $x \in V$ وجود دارد به نحوی که $T(x) = y$. تعریف می کنیم $S(y) = x$. در این صورت S خوش تعریف است، زیرا اگر $T(x_1) = y$ و $T(x_2) = y$ ، فرض یک به یک بودن T دلالت بر این می کند که $x_1 = x_2$. لذا، S تابعی از W به V است.

اکنون باید نشان دهیم که S خطی است. فرض کنیم y_1 و y_2 بردارهایی در W باشند. در این صورت بردارهای x_1 و x_2 در V وجود دارند به قسمی که $T(x_1) = y_1$ و $T(x_2) = y_2$ و بنا به خطی بودن T ، $T(x_1 + x_2) = y_1 + y_2$. بنا براین، طبق تعریف S ، $S(y_1) = x_1$ ، $S(y_2) = x_2$ ، و $S(y_1 + y_2) = x_1 + x_2$. از اینرو $S(y_1 + y_2) = S(y_1) + S(y_2)$.

حال، فرض می کنیم y متعلق به W و α یک اسکالر باشد. چون T پوشاست، به ازای $x \in V$ ، $T(x) = y$. پس بنا به خطی بودن T ، $T(\alpha x) = \alpha T(x) = \alpha y$. طبق تعریف S ، $S(y) = x$ و $S(\alpha y) = \alpha x$. از این قرار $S(\alpha y) = \alpha S(y)$. در نتیجه S خطی است.

اکنون ادعا می کنیم که $S \circ T = I_V$ و $T \circ S = I_W$. بردار x ای را از V انتخاب و فرض می کنیم $T(x) = y$. طبق تعریف S داریم $S(y) = x$. لذا

$$\begin{aligned} (S \circ T)(x) &= S(T(x)) & (\text{بنا به تعریف } S \circ T) \\ &= S(y) & [\text{چون } y = T(x)] \end{aligned}$$

$$= x$$

(طبق تعریف S)بنابراین، ثابت کرده ایم که $S \circ T = I_V$.

سپس، بردار y ای را از W انتخاب می کنیم. چون T پوشاست، x ای در V وجود دارد چنان که $T(x) = y$. بنا به تعریف S ، داریم $S(y) = x$. پس

$$\begin{aligned} (T \circ S)(y) &= T(S(y)) && (\text{طبق تعریف } T \circ S) \\ &= T(x) && (\text{بنا به تعریف } S) \\ &= y && (\text{چون } T(x) = y) \end{aligned}$$

در نتیجه $T \circ S = I_W$.

به این ترتیب، ثابت کرده ایم که هریکریختی دارای وارون است.

در بعضی از انواع مسائل، روشی را که هم اینک شرح داده شد، می توان برای یافتن وارون یک تبدیل خطی مفروض به کاربرد. درواقع، اگر $T: V \rightarrow W$ یکریختی بین V و W باشد و x_1, x_2, \dots, x_r پایه ای برای V ، از قضیه ۱ در بخش ۶.۵ نتیجه می شود که $T(x_1) = y_1, T(x_2) = y_2, \dots, T(x_r) = y_r$ پایه ای برای W است. از اینرو T^{-1} تابعی خطی است که با ضابطه

$$T^{-1}(y_1) = x_1, T^{-1}(y_2) = x_2, \dots, T^{-1}(y_r) = x_r$$

تعریف می شود. ارائه یک مثال، می تواند به روشن شدن این روش کمک کند.

مثال ۹ تبدیل خطی $T(f) = f + f'$ از P_4 به P_4 را، که در مثال ۴ از بخش ۶.۵ تعریف شد، در نظر می گیریم. دیدیم که T یک یکریختی روی P_4 بود. نگاره بردارهای پایه $1, x, x^2, x^3, x^4$ را حساب می کنیم: $T(1) = 1 + x$, $T(x) = 1 + 2x$, $T(x^2) = 2x + x^2$, $T(x^3) = 3x^2 + x^3$, $T(x^4) = 4x^3 + x^4$. پس

$$\begin{aligned} T^{-1}(1) &= 1, T^{-1}(1+x) = x, T^{-1}(2x+x^2) = x^2, \\ T^{-1}(3x^2+x^3) &= x^3, T^{-1}(4x^3+x^4) = x^4 \end{aligned}$$

سپس، با استفاده از خطی بودن T^{-1}

$$\begin{aligned} T^{-1}(1) &= 1, \\ T^{-1}(x) &= T^{-1}((x+1) - 1) = x - 1, \\ T^{-1}(x^2) &= T^{-1}((x^2+2x) - 2x) = x^2 - 2(x-1) = x^2 - 2x + 2 \\ T^{-1}(x^3) &= T^{-1}((x^3+3x^2) - 3x^2) = x^3 - 3(x^2 - 2x + 2) \end{aligned}$$

$$= x^3 - 3x^2 + 6x - 6,$$

$$T^{-1}(x^4) = T^{-1}((x^4 + 4x^3) - 4x^3) = x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24$$

چون نگارهٔ هریک از عناصر پایه تحت T^{-1} معلوم است، با استفاده از خطی بودن می‌توانیم نگارهٔ هر بردار را تحت T^{-1} تعیین کنیم.

تمرینات

۱. فرض کنید S, T ، و U عملگرهایی خطی روی R^2 باشند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$S\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

$$U\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ماتریسهای وابسته به هر یک از تبدیلات خطی زیر را بیابید.

$$S^{-1} \text{ (الف)} \quad S^3 \text{ (ب)} \quad S^2 \text{ (ج)} \quad T \circ S \text{ (د)} \quad S \circ T \text{ (ه)}$$

$$S \circ T - T \circ S \text{ (و)} \quad (S \circ T) \circ U \text{ (ز)} \quad S \circ (T \circ U) \text{ (ح)}$$

$$U^2 - I_2 \text{ (ط)} \quad T \circ U - U \circ T \text{ (ی)}$$

۲. فرض کنید S, T ، و U عملگرهایی خطی روی P_2 باشند که به صورت $S(f) = f' + f$ ، $T(f) = f + xf'$ و $U(f) = f''$ تعریف می‌شوند. عملگرهای خطی زیر را حساب کنید.

$$T \circ U - U \circ T \text{ (الف)} \quad T \circ U \text{ (ب)} \quad U \circ T \text{ (ج)} \quad U \circ S \text{ (د)} \quad S \circ U \text{ (ه)}$$

$$S \circ T \text{ (و)} \quad U^2 \text{ (ز)} \quad S^2 \text{ (ح)} \quad T \circ S \text{ (ط)} \quad S^3 \text{ (ی)}$$

۳. کدامیک از ماتریسهای زیر عملگر خطی وارون پذیر روی R^* القا می‌کند؟ وارون را در صورت وجود بیابید.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & -4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ (الف)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ (ب)} \quad \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 6 & -8 \end{bmatrix} \text{ (ج)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ (د)}$$

۴. کدامیک از عملگرهای زیر روی P_2 وارون پذیرند؟

$$T(f) = f + 2f' \text{ (الف)} \quad D(f) = f' \text{ (ب)} \quad S(f)(x) = f(x) + f(-x) \text{ (ج)}$$

۵. فرض کنید a, b, c اعدادی حقیقی باشند و T عملگری خطی روی P_n باشد که با ضابطهٔ $T(f) = af + bxf' + cx^2f''$ تعریف می‌شود.

$$\text{(الف)} \text{ نشان دهید که } T(x^n) = (a + bn + cn(n-1))x^n$$

(ب) اگر a, b, c مثبت باشند، نشان دهید که T وارون پذیر است.

(ج) مقادیر غیر صفری از a, b, c را انتخاب کنید به طوری که T وارون ناپذیر باشد.

۶. تبدیلی خطی از P_4 به R^3 به صورت $T(f) = \begin{bmatrix} f(1) \\ f(0) \\ f(-1) \end{bmatrix}$ تعریف می‌شود. نشان دهید که T وارون پذیر است.

۷. یک تولید کنندهٔ ائانهٔ خانه دو نوع قفسهٔ کتاب تولید می‌کند. نوع اول به ۳ متر مربع چوب، ۴۰ میخ، و ۲ ساعت کار احتیاج دارد. نوع دوم به ۱۰ متر مربع چوب، ۶۰ میخ، و ۳ ساعت کار نیاز دارد.

فرض کنید $V = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ برداری باشد که مؤلفهٔ i ام آن تعداد قفسه‌هایی است که باید از نوع i ام ساخته شود و نیز فرض کنید $T(V) = U = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ نمایشگر تعداد واحدهای چوب، میخ، و ساعت کاری باشد که برای تولید x_1 قفسه از نوع ۱ و x_2 قفسه از نوع ۲ مورد نیاز است.

(الف) ماتریسی مانند A بیابید به طوری که $T(V) = AV$.
 قیمت یک واحد چوب، میخ، و ساعت کار، بترتیب، ۷۰ ریال، ۱/۴ ریال، و ۲۴۵ ریال است. فرض کنید $S(U)$ قیمت a واحد چوب، b واحد میخ، و c ساعت کار باشد.
 (ب) ماتریسی مانند B بیابید به نحوی که $S(U) = BU$.
 (ج) تابع $S \circ T(V)$ را پیدا کنید و آن را تفسیر کنید.
 یک قفسهٔ کتاب از نوع ۱ را به قیمت ۷۰۰۰ ریال و یک قفسه کتاب از نوع ۲ را به قیمت ۱۱۲۰۰ ریال می‌فروشند. فرض کنید $R(V)$ قیمت کل x_1 واحد از نوع ۱ و x_2 واحد از نوع ۲ باشد.

(د) ماتریسی مانند C بیابید به قسمی که $R(V) = CV$.
 (ه) تابع $(R - S \circ T)(V)$ را محاسبه و تفسیر کنید.

۸. با استفاده از استقرا ثابت کنید که

$$\begin{bmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{bmatrix}^n = \frac{1}{a+b} \begin{bmatrix} b & b \\ a & a \end{bmatrix} + \frac{(1-a-b)^n}{a+b} \begin{bmatrix} a-b & \\ -a & b \end{bmatrix}$$

۹. فرض کنید a و b اعدادی حقیقی باشند به قسمی که $0 < a < 1$ و $0 < b < 1$. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{bmatrix}$$

نشان دهید که دنبالهٔ ماتریسهای A, A^2, A^3, \dots به $\frac{1}{a+b} \begin{bmatrix} b & b \\ a & a \end{bmatrix}$ میل می‌کند.

۱۰. در مثال ۶ از این بخش، فرض کنید که شرکت A تعداد $1-a$ نفر از مشتریان خود را حفظ می‌کند و a نفر از مشتریان به B روی می‌آورند. همچنین $1-b$ نفر از مشتریان B خریدار B می‌مانند و b نفر از آنها به A می‌پیوندند. فرض کنید $0 < a < 1$ و

۱. $0 < b < 1$. چشم انداز دراز مدت هر یک از شرکتها را معین کنید. (راهنمایی: از تمرینهای ۸ و ۹ استفاده کنید.)

۱۱. فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ باشد و

$$T_+(A) = \frac{1}{2}(A - A^T) \quad \text{و} \quad T_-(A) = \frac{1}{2}(A + A^T)$$

(الف) نشان دهید که $T_-^2 = T_-$ ، یعنی T_- خود توان است.

(ب) نشان دهید که $T_+^2 = T_+$ ، یعنی T_+ خود توان است.

(ج) نشان دهید که $T_+ T_- = T_- T_+ = 0$.

۱۲. فرض کنید $T: V \rightarrow V$ عملگری خطی روی فضای برداری V باشد به طوری که $T^2 = I_V$ نشان دهید که

(الف) اگر $T = \frac{1}{2}(1 + T)$ ، $T_+ = I$ ، آنگاه $T_+^2 = T_+$ ، یعنی T_+ خود توان است.

(ب) اگر $T = \frac{1}{2}(I - T)$ ، $T_- = I$ ، آنگاه $T_-^2 = T_-$ ، یعنی T_- خود توان است.

(ج) $T_+ + T_- = I_V$ و $T_+ T_- = T_- T_+ = 0$.

(د) $R_{T_+} = N_{T_-}$ و $R_{T_-} = N_{T_+}$.

(ه) اگر $V = P_n$ ، فضای چندجمله‌ایهای یک متغیره با متغیر x و از درجه نایبتر

از n باشد و $T(f(x)) = f(-x)$ ، نشان دهید که $T^2 = I_{P_n}$. عملگرهای T_+ و T_- که بر طبق تعریف (الف) و (ب) به دست می‌آیند، کدام‌اند؟ کدام چند جمله‌ایها متعلق به R_{T_+} و R_{T_-} می‌باشند؟

(و) اگر $V = P_n$ مانند قسمت (ه)، و $(T(f))(x) = f(1-x)$ ، نشان دهید که

$$T^2 = I_{P_n}$$

۱۳. اگر V یک فضای برداری باشد و x_1, x_2, \dots, x_n پایه‌ای برای V ، نشان دهید که عملگر $T^* = \alpha I_V$ در رابطه $T(x_n) = \alpha x_n, T(x_{n-1}) = x_n, \dots, T(x_2) = x_3, T(x_1) = x_2$ صدق می‌کند. اگر $\alpha \neq 0$ ، T^{-1} چیست؟

۱۴. فرض کنید V_1, V_2, V_3 و V_4 فضای برداری، و $S: V_1 \rightarrow V_2$ و $T: V_2 \rightarrow V_3$ دو تبدیل خطی باشند.

(الف) اگر S و T ، هر دو، یک به یک باشند، نشان دهید که $T \circ S$ یک به یک است.

(ب) اگر S و T ، هر دو، پوشا باشند، نشان دهید که $T \circ S$ پوشا است.

(ج) اگر S و T ، هر دو، یکریختی باشند، نشان دهید که $T \circ S$ یکریختی است و

$$(T \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ T^{-1}$$

۱۵. فرض کنید $T: V \rightarrow V$ و $S: V \rightarrow V$ عملگرهایی خطی روی فضای برداری متناهی البعد V باشند.

(الف) اگر $T \circ S$ یک به یک باشد، نشان دهید که T یکریختی است.

(ب) اگر $T \circ S$ پوشا باشد، نشان دهید که T یکریختی است.

(ج) اگر T^k یکریختی باشد (k یک عدد صحیح مثبت است)، نشان دهید که T یکریختی است.

(د) اگر T^k وارون پذیر باشد (k یک عدد صحیح مثبت است)، و $(T^k)^{-1} = S$ ، نشان دهید که $T^{-1} = T^{k-1} \circ S$.

۱۶. اگر T و S عملگرهایی خطی روی فضای برداری V باشند و

$$(T + S)^2 = T^2 + 2S \circ T + S^2$$

نشان دهید که S و T جابجا می‌شوند. یعنی $S \circ T = T \circ S$.

۱۷. اگر T تبدیلی خطی از فضای برداری متناهی‌البعد V بر روی فضای برداری W باشد، نشان دهید که

(الف) $\dim W \leq \dim V$ متناهی است و

(ب) تبدیلی خطی مانند $S: W \rightarrow V$ وجود دارد به‌قسمی که $T \circ S = I_W$.

۱۸. اگر T یک تبدیل خطی یک به یک از فضای برداری V به فضای برداری متناهی‌البعد W باشد، نشان دهید که

(الف) V متناهی‌البعد است.

(ب) تبدیلی خطی مانند $S: W \rightarrow V$ وجود دارد به‌طوری که $S \circ T = I_V$.

۱۹. اگر T عملگری خطی روی فضای برداری V باشد و اگر $T^2 - T + I_V = 0$ ، نشان دهید که T وارون پذیر است.

۲۰. فرض کنید $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ عملگری خطی روی \mathbb{R}^n باشد. اگر $m < n$ ، و تبدیلات خطی $S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ و $U: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ وجود داشته باشند به‌نحوی که $T = U \circ S$ ، نشان دهید که $m \leq r(T)$ و T وارون پذیر نیست.

۲۱. اگر T عملگری خطی روی فضای برداری متناهی‌البعد V باشد، نشان دهید که $r(T) = r(T^2)$ اگر و فقط اگر $N_T \cap R_T = 0$ ، یعنی، فضای پوچ و فضای مقادیر T فقط در بردار صفر اشتراک دارند.

۲۲. فرض کنید D عملگر مشتق‌گیری روی P_n باشد و T_α عملگری که با ضابطه $T_\alpha(f)(x) = f(\alpha x)$ تعریف می‌شود. نشان دهید که $D \circ T_\alpha = \alpha T_\alpha \circ D$.

۲۳. فرض کنید T عملگری خطی روی فضای برداری V باشد.

(الف) اگر به ازای یک عدد صحیح مثبت k داشته باشیم $R(T^k) = R(T^{k+1})$ ، نشان دهید که $R(T^{k+1}) = R(T^{k+2})$.

(ب) اگر به ازای یک عدد صحیح مثبت k داشته باشیم $N(T^k) = N(T^{k+1})$ ، نشان دهید که $N(T^{k+1}) = N(T^{k+2})$.

۲۴. فرض کنید V یک فضای برداری باشد و x_1, x_2, \dots, x_n پایه‌ای برای V . فرض کنید $T: V \rightarrow V$ عملگری خطی باشد که به صورت $T(x_1) = \lambda_1 x_1$ ، $T(x_2) = \lambda_2 x_2$ ،

$T(\mathbf{x}_n) = \lambda_n \mathbf{x}_n, \dots, \lambda_p, \lambda_1$ اسکالرهایی $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda_n$ اگر $i \neq j$ ، تعریف می شود. فرض کنید $T \circ S = S \circ T$ ، که S عملگری خطی روی V است. نشان دهید که اسکالرهایی $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ وجود دارند به قسمی که

$$S(\mathbf{x}_n) = \alpha_n \mathbf{x}_n, \dots, S(\mathbf{x}_2) = \alpha_2 \mathbf{x}_2, S(\mathbf{x}_1) = \alpha_1 \mathbf{x}_1$$

۲۵. فرض کنید $T: V \rightarrow V$ عملگری خطی روی فضای برداری متناهی البعد V باشد. نشان دهید که T با سایر عملگرهای خطی روی V جابجا می شود اگر و فقط اگر $T = \alpha I_V$. یعنی اگر و فقط اگر T مضرب اسکالری از عملگر همانی روی V باشد.

۲۶. فرض کنید V و W دو فضای برداری باشند. فرض کنید \mathbf{x} بردار ثابت غیر صفری در V باشد. نشان دهید که تابعی از $L(V, W)$ به W ، که به صورت $L(T) = T(\mathbf{x})$ تعریف می شود، یک تبدیل خطی از $L(V, W)$ بر روی W است.

۲۷. اگر $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ عملگری خطی روی \mathbb{R}^n با رتبه r باشد، نشان دهید که تبدیل خطی پوشای $S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$ و تبدیل خطی یک به یک $U: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$ وجود دارند به طوری که $T = U \circ S$. این نتیجه را بر حسب ماتریسها تعبیر کنید.

۲۸. فرض کنید T عملگری خطی روی \mathbb{R}^3 باشد به طوری که $T \neq 0$ ولی $T^2 = 0$. نشان دهید که $r(T) = 1$.

۲۹. اگر $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ عملگری خطی باشد به نحوی که $T^{n-1} \neq 0$ ولی $T^n = 0$ ، نشان دهید که $r(T) = n - 1$. یک مثال از چنین T ای ارائه دهید.

۳۰. اگر $T: V \rightarrow V$ و $S: V \rightarrow V$ عملگرهایی خطی روی فضای برداری V باشند، نشان دهید که $T \circ S = 0$ اگر و فقط اگر $R_S \subset N_T$.

۳۱. اگر $T: V \rightarrow V$ عملگری خطی روی فضای برداری متناهی البعد V باشد و $T^2 = 0$ ، نشان دهید که $r(T) \leq \frac{1}{2} \dim V$.

۸ نمایش ماتریسی تبدیل خطی

فرض کنیم $T: V \rightarrow W$ تبدیلی خطی بین دو فضای برداری متناهی البعد V و W باشد. اگر $V = \mathbb{R}^n$ و $W = \mathbb{R}^m$ ، در بخش ۲۰۵، دیدیم که با استفاده از پایه های متعارف \mathbb{R}^n و \mathbb{R}^m می توان ماتریسی $m \times n$ مانند A یافت به قسمی که $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. در این بخش با استفاده از پایه های دلخواهی برای V و W ، عمل مشابهی را انجام می دهیم.

فرض کنیم $\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ پایه ای برای V و $\mathcal{C} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_m\}$ پایه ای برای W باشد. چون \mathcal{C} پایه ای برای W است، اسکالرهایی a_{ij} وجود دارند به طوری که

$$T(\mathbf{x}_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \mathbf{y}_i$$

$$T(\mathbf{x}_j) \xleftrightarrow{\mathcal{C}} \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

ماتریس A_T $n \times m$ را به صورت $A_T = [a_{ij}]_{(mn)}$ تعریف می‌کنیم. توجه کنید که ستون j ام A_T ، m تایی مختصات $T(\mathbf{x}_j)$ نسبت به پایه $\mathcal{C} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_m\}$ برای W است.

اگر \mathbf{x} متعلق به V باشد، می‌توان به \mathbf{x} ، مختصات n تایی آن را نسبت به پایه \mathcal{B} نظیر کرد.

$$\mathbf{x} \xleftrightarrow{\mathcal{B}} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

که البته، بدین معنی است که $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n$ اگر $m - n$ برداری به صورت زیر تعریف شود:

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

ادعا می‌کنیم که

$$T(\mathbf{x}) \xleftrightarrow{\mathcal{C}} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}$$

یا به عبارت دیگر

$$T(\mathbf{x}) = \beta_1 \mathbf{y}_1 + \beta_2 \mathbf{y}_2 + \dots + \beta_m \mathbf{y}_m$$

برای اثبات این حکم، متذکر می‌شویم که

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{x}_j$$

$$T(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \alpha_j T(\mathbf{x}_j)$$

$$= \sum_{j=1}^n \alpha_j \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \mathbf{y}_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j \right) \mathbf{y}_i$$

پس، مختص i ام $T(\mathbf{x})$ نسبت به پایه $\mathcal{C} = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m\}$ عبارت است از:

$$\beta_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j$$

به عبارت دیگر، همین که پایه‌ای مانند \mathcal{B} برای V و پایه‌ای مانند \mathcal{C} برای W معین شود، یک ماتریس A_T وجود دارد که دارای خاصیت زیر است: حاصلضرب A_T در بردار مختصات \mathbf{x} نسبت به \mathcal{B} ، بردار مختصات $T(\mathbf{x})$ نسبت به \mathcal{C} است.

اگر $V = W$ ، یعنی اگر $T: V \rightarrow V$ عملگری خطی روی V باشد، معمول است که در هر دو فضای اولی و دومی از یک پایه استفاده شود (یعنی فرض شود $\mathcal{B} = \mathcal{C}$). اگر $I_V: V \rightarrow V$ عملگر همانی روی V و $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\} = \mathcal{B}$ پایه‌ای برای V باشد، از تساوی $I_V \mathbf{x}_j = \mathbf{x}_j$ نتیجه می‌شود که ماتریس وابسته به I_V ، ماتریس همانی از مرتبه n ، یعنی I_n است. همین طور ماتریس وابسته به عملگر صفر، ماتریس صفر است.

مثال ۱ فرض کنیم $M_{\mathbb{R}^2}$ نشانگر فضای ماتریسهای حقیقی 2×2 باشد. تبدیل خطی T از $M_{\mathbb{R}^2}$ به \mathbb{R}^2 را، که به صورت $T(A) = A \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ تعریف می‌شود، در نظر می‌گیریم. T خطی است، زیرا اگر A و B متعلق به $M_{\mathbb{R}^2}$ باشند و α یک اسکالر باشد،

$$T(A + B) = (A + B) \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = T(A) + T(B)$$

و

$$T(\alpha A) = \alpha A \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \alpha T(A)$$

برای $M_{\mathbb{R}^2}$ ، پایه \mathcal{B} متشکل از

$$E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

و برای \mathbb{R}^2 ، پایه \mathcal{C} متشکل از

$$\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

را در نظر می‌گیریم و با استفاده از آنها نمایش ماتریسی T را حساب می‌کنیم.

$$T(E_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, T(E_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(E_4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, T(E_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

از اینرو $A_T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. تذکر اینکه ماتریس A_T با قرار دادن مختصات

$T(E_1), T(E_2), T(E_3), T(E_4)$ نسبت به پایه $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ در ستونهای متوالی به دست می‌آید.

$$\text{اگر } M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ آنگاه } M \xleftrightarrow{\mathcal{B}} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \text{ و بنابراین}$$

$$T(M) \xleftrightarrow{\mathcal{C}} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a + 2b \\ 3c + 2d \end{bmatrix}$$

مثال ۲ فرض کنیم P_3 به طریق معمولی تعریف شده باشد و $D: P_3 \rightarrow P_3$ عملگر مشتقگیری، $D(f) = f'$ باشد. پایه $1, x, x^2, x^3$ را برای P_3 انتخاب می‌کنیم. در این صورت $D(1) = 0, D(x) = 1, D(x^2) = 2x, D(x^3) = 3x^2$. پس ماتریس A_D عبارت است از:

$$A_D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

که با قرار دادن مختصات $D(1), D(x), D(x^2), D(x^3)$ نسبت به پایه $1, x, x^2, x^3$ در ستونهای متوالی به دست آمده است. اگر $f = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$ ، آنگاه

$$D(f) \xleftrightarrow{\mathcal{B}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ 2\alpha_2 \\ 3\alpha_3 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ و } f \xleftrightarrow{\mathcal{B}} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

$$D(f) = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2, \text{ یعنی}$$

نمایش ماتریسی تبدیل خطی، که به پایه انتخاب شده بستگی دارد، اغلب می‌تواند مسائل مربوط به تبدیلات خطی را به مسائل مربوط به ماتریسها و معادلات خطی، یعنی مسائلی که برای آنها روشهای محاسباتی قابل اجرا ارائه داده‌ایم، تبدیل کند.

برای مثال، اگر T تبدیلی خطی از فضای برداری V به فضای برداری W باشد، می‌خواهیم فضای بروج و رتبه T را بیابیم. فرض کنیم $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ پایه‌ای برای V باشد، و $\mathcal{C} = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ پایه‌ای برای W . فرض کنیم A_T ماتریس

$$x \xleftrightarrow{\mathcal{B}} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \text{ اگر } x \text{ متعلق به } V \text{ باشد، و } m \times n \text{ وابسته به } T \text{ نسبت به پایه‌های فوق باشد.}$$

$$A_T \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = 0 \text{ اگر و فقط اگر } T(x) = 0 \text{ از اینرو } T(x) \xleftrightarrow{\mathcal{C}} A_T \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \text{ آنگاه}$$

به عبارت دیگر بردار x از V متعلق به N_T است اگر و فقط اگر n تایی متشکل از مشخصات آن متعلق به فضای پوچ A_T باشد. این مطلب، یک روش محاسباتی برای تعیین فضای پوچ یک تبدیل خطی به دست می‌دهد. در واقع، همه مسئله به حل یک دستگاه معادلات خطی همگن تحویل می‌یابد. همچنین نتیجه می‌شود که $n(T) = n(A_T)$. چون

$$r(A_T) = \dim V - n(A_T) \text{ و } r(T) = \dim V - n(T)$$

نتیجه می‌شود که $r(T) = r(A_T)$. پس، رتبه و پوچی یک تبدیل خطی همان رتبه و پوچی ماتریس وابسته به آن است.

رتبه ماتریس در مثال ۱ برابر است با ۲. از اینرو $r(T) = 2$. چون $n(T) = 4 - r(T) = 2$ ، نتیجه می‌شود که بعد فضای پوچ T نیز ۲ است.

در مثال ۲ فوق، رتبه ماتریس A_D برابر است با ۳ و $n(D) = 4 - 3 = 1$. اگر به هر تبدیل خطی در $L(V, W)$ ، ماتریس آن نسبت به پایه‌های \mathcal{B} و \mathcal{C} را نسبت دهیم، یک تابع $G(T) = A_T$ از $L(V, W)$ به M_{mn} ، فضای ماتریسهای $m \times n$ (با درایه‌های حقیقی، اگر V و W فضاهای برداری حقیقی باشند، و با درایه‌های مختلط، اگر V و W فضاهای برداری مختلط باشند) پیدا می‌کنیم. با توجه به مثالهای بخش ۷.۵، قضیه زیر دور از انتظار نیست.

قضیه ۱ اگر \mathcal{B} پایه‌ای برای V و \mathcal{C} پایه‌ای برای W باشد، تابعی که به هر T متعلق به $L(V, W)$ ، ماتریس آن نسبت به پایه‌های \mathcal{B} برای V و \mathcal{C} برای W را نسبت می‌دهد یکره‌پذیری از $L(V, W)$ به M_{mn} ، فضای ماتریسهای $m \times n$ است.

اثبات این تابع را با G نشان می‌دهیم. ابتدا ثابت می‌کنیم که G خطی است. برای این منظور، فرض می‌کنیم S و T تبدیلاتی خطی از V به W باشند. در این صورت، اگر

$$S(x_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \quad T(x_j) = \sum_{i=1}^m b_{ij} y_i$$

$$\text{چون } G(T) = A_T = [b_{ij}]_{(mn)} \text{ و } G(S) = A_S = [a_{ij}]_{(mn)}$$

$$(S + T)(x_j) = S(x_j) + T(x_j)$$

$$= \sum_{i=1}^m (a_{ij} + b_{ij}) y_i$$

$$A_{S+T} = [a_{ij} + b_{ij}]_{(mn)} = A_S + A_T \quad \text{پس داریم:}$$

بنابراین، $G(S + T) = G(S) + G(T)$. استدلالی مشابه نتیجه می‌دهد که $G(\alpha S) = \alpha G(S)$.

اکنون نشان می‌دهیم که G یک به یک است. فرض می‌کنیم T عملگری خطی باشد به طوری که $G(T) = A_T = 0$ در این صورت، $T(x_j) = \sum_{i=1}^m 0 \cdot y_i = 0$ چون T همه بردارهای پایه را به صفر می‌برد، $T = 0$. پس $G(T) = 0$ ایجاب می‌کند که $T = 0$. بنابراین G یک به یک است.

بالاخره نشان می‌دهیم که G پوشاست. اگر A ماتریس $n \times m$ ای باشد، یعنی $A = [a_{ij}]_{(mn)}$ ، باید یک تبدیل خطی T از V به W بیابیم به قسمی که

$$T(x_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} y_i$$

زیرا در این صورت طبق تعریف $A_T = A$ داریم. بنا به قضیه ۲ از بخش ۲.۵ چنین تبدیل خطیبی وجود دارد. از اینرو G پوشاست.

● چون G خطی، یک به یک، و پوشاست، پس یکرختی است.

در حالت خاص، اگر $T: V \rightarrow V$ عملگری خطی روی فضای برداری V و x_1, \dots, x_n پایه‌ای برای V باشد، تابعی که به عملگر T ماتریس $n \times n$

$$A_T = [a_{ij}]_{(nn)} \quad \text{که در آن} \quad T(x_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i$$

را نسبت می‌دهد، یکرختی از $L(V, V)$ به فضای ماتریسهای $n \times n$ القا می‌کند. با در نظر گرفتن حالت $V = \mathbb{R}^n$ منطقی است که انتظار داشته باشیم ناظر $T \rightarrow A_T$ ضرب را حفظ کند. قضیه بعدی نشان می‌دهد که انتظار ما بجا است.

قضیه ۲ فرض کنیم $S: V \rightarrow V$ و $T: V \rightarrow V$ عملگرهایی خطی روی فضای برداری V باشند و $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ پایه‌ای برای V باشد. همچنین A_S, A_T به ترتیب، ماتریسهای $n \times n$ وابسته به S, T و $S \circ T$ باشند. در این صورت $A_{S \circ T} = A_S A_T$.

اثبات $A_S = [a_{ij}]_{(nn)}$ و $A_T = [b_{ij}]_{(nn)}$ که در آنها $T(x_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i$ و $S(x_j) = \sum_{i=1}^n b_{ij} x_i$. این تساویها از تعاریف A_T و A_S حاصل می‌شوند. از اینرو

$$\begin{aligned} (S \circ T)(x_k) &= S(T(x_k)) = S\left(\sum_{j=1}^n b_{jk} x_j\right) = \sum_{j=1}^n b_{jk} S(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^n b_{jk} \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i\right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}\right) x_i \end{aligned}$$

بنابراین، $(S \circ T)(x_k) = \sum_{i=1}^n c_{ik} x_i$ ، که در آن $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$. چون بنا به تعریف $A_{S \circ T} = A_S A_T$ داریم $A_{S \circ T} = [c_{ik}]_{(nn)}$ ، نتیجه می‌شود

● نتیجه عملگر خطی T روی V وارون پذیر است اگر و فقط اگر ماتریس A_T وارون پذیر باشد. بعلاوه $(A_T)^{-1} = A_{T^{-1}}$.

اثبات فرض کنیم T وارون پذیر باشد. در این صورت، بنا به قضیه ۲،

$$A_T A_{T^{-1}} = A_{T T^{-1}} = A_I = I.$$

همین طور $A_{T^{-1}} A_T = I$. پس A_T وارون پذیر است و $A_{T^{-1}} = (A_T)^{-1}$.
فرض کنیم A_T وارون پذیر باشد. چون تناظر $T \rightarrow A_T$ پوشاست، یک عملگر S وجود دارد به نحوی که $A_S = (A_T)^{-1}$. در این صورت $A_S A_T = (A_T)^{-1} A_T = I$ و $A_S \circ T = I$ چون تناظر $T \rightarrow A_T$ یک به یک است، و چون $A_I = I$ ، نتیجه می شود که $S \circ T = I$ همین طور، $T \circ S = I$.

در مثال ۸ از بخش ۴.۵، نشان دادیم که بعضی از معادلات دیفرانسیل خطی همیشه دارای جوابهای چند جمله ای هستند. حال نشان می دهیم که چگونه این جوابها را می توان یافت.

مثال ۳ فرض کنیم P_y نشانگر فضای همه چند جمله ایهای یک متغیره با متغیر x ، از درجه نایبتر از ۲، و با ضرایب حقیقی باشد؛ و فرض کنیم \mathcal{D} گردآورده عملگرهایی خطی روی P_y باشد که به صورت زیر تعریف شده اند:

$$\begin{aligned} T(f) &= a_0 f + (b_0 + b_1 x) f' + (c_0 + c_1 x + c_2 x^2) f'' \\ &= a_0 I(f) + (b_0 + b_1 x) D(f) + (c_0 + c_1 x + c_2 x^2) D^2(f) \end{aligned}$$

که $a_0, b_0, b_1, c_0, c_1, c_2$ اعدادی حقیقی اند.

واضح است که هر T ی به این صورت، یک عملگر خطی روی P_y است. چون حاصل جمع دو عملگر در \mathcal{D} عملگری در \mathcal{D} است و نیز ضرب اسکالری از یک عملگر در \mathcal{D} ، متعلق به \mathcal{D} است، \mathcal{D} زیرفضایی از $L(P_y, P_y)$ می باشد.

ماتریس 3×3 وابسته به

$$T = a_0 I + (b_0 + b_1 x) D + (c_0 + c_1 x + c_2 x^2) D^2$$

را نسبت به پایه $1, x, x^2$ حساب می کنیم.

چون

$$T(1) = a_0$$

$$T(x) = b_0 + (a_0 + b_1)x$$

$$T(x^2) = 2c_0 + (2c_1 + 2b_0)x + (2c_2 + 2b_1 + a_0)x^2,$$

داریم

$$L(T) = A_T = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 & 2c_0 \\ 0 & a_0 + b_1 & 2b_0 + 2c_1 \\ 0 & 0 & a_0 + 2b_1 + 2c_2 \end{bmatrix}$$

که در آن L نشانگر تبدیلی خطی از $L(P_y, P_y)$ به $M_{3 \times 3}$ است که با ضابطه $L(T) = A_T$ تعریف شده است. توجه کنید که اگر T متعلق به \mathcal{D} باشد، A_T یک ماتریس بالا مثلثی است، یعنی همه درایه های زیر قطر آن صفرند. زیرفضایی از $M_{3 \times 3}$ را که مرکب از ماتریسهای

بالا مثلثی است، با \mathcal{J} نشان می‌دهیم، لذا، L تبدیلی خطی از \mathcal{D} به \mathcal{J} القا می‌کند. ادعا می‌کنیم که $\mathcal{J}: \mathcal{D} \rightarrow L: \mathcal{D}$ یکریختی است در حقیقت، اگر $M: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{D}$ را با ضابطه

$$M \left(\begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 \\ 0 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & \gamma_2 \end{bmatrix} \right) = \alpha_0 I + (\beta_0 + (\beta_1 - \alpha_0)x)D \\ + \left(\frac{1}{2}\gamma_0 + \left(\frac{1}{2}\gamma_1 - \beta_0 \right)x + \left(\frac{1}{2}\gamma_2 + \frac{1}{2}\alpha_0 - \beta_1 \right)x^2 \right) D^2$$

تعریف کنیم، محاسبه ساده‌ای نشان می‌دهد که

$$M = L^{-1} \text{ یا } L \circ M = I_{\mathcal{J}}, M \circ L = I_{\mathcal{D}}$$

واضح است که زیر فضای \mathcal{J} تحت ضرب بسته است، یعنی، اگر A و B متعلق به \mathcal{J} باشند، AB نیز متعلق به \mathcal{J} است. بعلاوه، اگر $\alpha_0 \beta_1 \gamma_2 \neq 0$

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 \\ 0 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & \gamma_2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\alpha_0 \beta_1 \gamma_2} \begin{bmatrix} \beta_1 \gamma_2 - \beta_0 \gamma_2 & \beta_0 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_0 \\ 0 & \alpha_0 \gamma_2 - \alpha_0 \gamma_1 \\ 0 & 0 & \alpha_0 \beta_1 \end{bmatrix}$$

از این قرار اگر A در \mathcal{J} وارون پذیر باشد، A^{-1} نیز متعلق به \mathcal{J} است. با استفاده از این دو مطلب و با توجه به اینکه $A_{S \circ T} = A_S A_T$ نتیجه می‌شود که

(۱) تحت ترکیب بسته است، یعنی اگر S و T متعلق به \mathcal{D} باشند، $S \circ T$ نیز متعلق به \mathcal{D} است.

(۲) اگر S متعلق به \mathcal{D} و وارون پذیر باشد، S^{-1} نیز متعلق به \mathcal{D} است.

با استفاده از فرمولهای فوق، می‌توانیم وارون عملگرهای متعلق به \mathcal{D} را به طور صریح محاسبه کنیم. توجه کنید که T وارون پذیر است اگر و فقط اگر

$$\det A_T = a_0 (a_0 + b_1) (a_0 + 2b_1 + 2c_2) \neq 0$$

برای مثال، $T(f) = f + f' + (1 - x^2)f''$ را در نظر می‌گیریم.

$$(A_T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ و } A_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$T^{-1} = M(A_T^{-1})^* = M((A_T)^{-1}) \\ = I - D + (2x - x^2)D^2$$

یا

$$T^{-1}(f) = f - f' + (2x - x^2)f''$$

درمورد نمایش ماتریسی یک عملگر خطی روی فضای برداری V ، طبعاً سؤالی پیش

می‌آید و آن اینکه چه ارتباطی بین نمایش ماتریسی یک عملگر خطی نسبت به یک پایه و نمایش ماتریس همان عملگر خطی نسبت به پایه دیگر وجود دارد؟ جواب این سؤال در قضیه بعدی آمده است.

قضیه ۳ فرض کنیم $T: V \rightarrow V$ عملگری خطی روی فضای برداری V باشد و

$$\mathcal{B}' = \{\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \dots, \mathbf{x}'_n\} \text{ و } \mathcal{B} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$$

دو پایه برای V باشند. فرض کنیم Q ماتریس وابسته به تغییر مختصات از پایه \mathcal{B} به پایه \mathcal{B}' باشد. یعنی، $Q = [q_{ij}]_{(nn)}$ ، که در آن

$$\mathbf{x}'_j = \sum_{i=1}^n q_{ij} \mathbf{x}_i$$

فرض کنیم A_T ماتریس وابسته به T نسبت به پایه \mathcal{B} و A'_T ماتریس وابسته به T نسبت به پایه \mathcal{B}' باشد. در این صورت

$$Q^{-1} A_T Q = A'_T$$

اثبات فرض کنیم \mathbf{x} برداری در V باشد و

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\mathcal{B}]{} \mathbf{x} \xleftrightarrow[\mathcal{B}']{} \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{bmatrix}$$

بترتیب، n تایی‌های متشکل از مختصات بردار \mathbf{x} نسبت به پایه‌های \mathcal{B} و \mathcal{B}' باشند. با توجه به تعریف ماتریسهای A_T و A'_T ، می‌دانیم که

$$A_T \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\mathcal{B}]{} T(\mathbf{x}) \xleftrightarrow[\mathcal{B}']{} A'_T \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{bmatrix}$$

همچنین، بنا به مطالب بخش ۹.۴، داریم

$$A_T \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = Q A'_T \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{bmatrix}$$

پس،

$$A_T Q \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{bmatrix} = Q A'_T \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{bmatrix}$$

چون این رابطه برای هر n تایی مرکب از مختصات x نسبت به \mathcal{B}' ، برقرار است، بنا به لم بخش ۷.۳، داریم

$$A_T Q = Q A'_T$$

یا

$$Q^{-1} A_T Q = A'_T$$

• دو ماتریس $n \times n$ مانند A و B ، را مشابه گویند اگر ماتریس وارون پذیری مانند Q وجود داشته باشد به طوری که $A = QBQ^{-1}$. قضیه قبلی را می توان به صورت زیر بیان کرد: دو ماتریسی که یک عملگر خطی را نسبت به دو پایه (احتمالاً متفاوت) نمایش می دهند مشابه اند. به عبارت دیگر، دو ماتریس مشابه اند اگر و فقط اگر نمایشگر یک عملگر خطی نسبت به دو پایه (احتمالاً متفاوت) باشند.

اگر A و B دو ماتریس مشابه باشند، داریم $\det A = \det B$. پس، می توانیم درمینان یک عملگر خطی را به عنوان درمینان نمایش ماتریسی آن نسبت به یک پایه، تعریف کنیم. بنا به ملاحظات قبلی، می بینیم که این تعریف به پایه انتخاب شده بستگی ندارد. بسیاری از مسائل مربوط به ماتریسها و عملگرهای خطی با انتخاب پایه مناسب آسانتر حل می شوند.

مثال ۴ در مثال ۲ از بخش ۴.۲، عملی دو مرحله ای روی سه لوله آزمایش حاوی آب را بررسی کردیم: در مرحله اول، آب در لوله های اول و دوم همسطح است، و در مرحله دوم سطح آب در لوله های دوم و سوم یکی است. فرض کنیم ۷ بردار سطوح آب در لوله ها و $T(v)$ برداری باشد که سطوح آب بعد از انجام عمل را می دهد. در این صورت می بینیم که

$$T(v) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

ماتریسی را که در اینجا بدید می آید B می نامیم.

در اینجا نیز همانند مثال ۶ از بخش ۷.۵، می خواهیم ببینیم که اگر این عمل به دفعات زیادی انجام گیرد، چه اتفاقی می افتد. خواهیم دید که آب در سه لوله به سرعت همسطح می شود.

در این حالت، مسئله عبارت از محاسبه B^n به ازای مقادیر بزرگ n است. این کار را با محاسبه نمایش ماتریسی T نسبت به یک پایه مناسب انجام خواهیم داد. در فصلهای بعدی، روشهای انتخاب پایه را شرح می دهیم ولی در اینجا به ذکر پایه مناسب اکتفا کرده، از آن برای ساده کردن محاسبات استفاده می کنیم.

ماتریس B ی فوق، T را نسبت به پایه متعارف $x_1 = e_1, x_2 = e_2, x_3 = e_3$

نمایش می‌دهد. پایه جدید $\mathbf{x}'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $\mathbf{x}'_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ، $\mathbf{x}'_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ را در نظر

می‌گیریم و مشاهده می‌کنیم که $T(\mathbf{x}'_1) = \mathbf{x}'_1$ ، $T(\mathbf{x}'_2) = \mathbf{0}$ ، $T(\mathbf{x}'_3) = \mathbf{0}$. فرض کنیم Q ماتریس وابسته به تغییر مختصات از پایه اول به پایه دوم باشد. در این صورت

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad Q^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$
 بنا به قضیه ۳،

$$Q^{-1} B Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ & & 4 \end{bmatrix} = D$$

\mathbf{x}'_3 نمایش می‌دهد.

حال، D^n با آسانی محاسبه می‌شود و از این مطلب برای محاسبه B^n استفاده می‌کنیم.

$$\text{داریم } D^n = (Q^{-1} B Q)^n = Q^{-1} B^n Q.$$

$$B^n = Q D^n Q^{-1} = Q \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ & & 4^n \end{bmatrix} Q^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3 \times 4^n} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

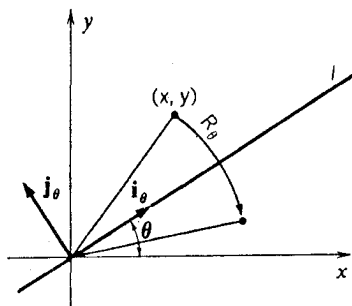
$$T^n(\mathbf{v}) = B^n \mathbf{v} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{3 \times 4^n} \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}$$

حال، این عبارت را تفسیر می‌کنیم. مشاهده می‌کنیم که در فرمول $T^n(\mathbf{v})$ ، همچنان که n بزرگ می‌شود، مقدار $1/4^n$ خیلی سرعت کوچک می‌گردد، حال آنکه مقادیر دیگر تغییر نمی‌کنند. این بدان معنی است که دستگاه به حالتی میل می‌کند که در آن $1/3$ آب در هر یک از لوله‌ها قرار دارد. برای مثال، فرض می‌کنیم 3 لیتر آب در لوله اول باشد و دولوله دیگر خالی از آب باشند. همچنین فرض کنیم کل عملیات شش بار تکرار شود. در این صورت در هر لوله تقریباً یک لیتر آب خواهد بود. مقدار دقیق آب در هر لوله حداکثر به اندازه یک قاشق چایخوری با یک لیتر تفاوت دارد.

همانند مثال ۴ از بخش ۱۰.۵ و مثال ۶ از بخش ۷.۵، این نمونه‌ای از فرایند مارکف است.

مثال ۵ تابع R_θ از صفحه به خودش را طوری معین می‌کنیم که هر نقطه را به قرینه آن نسبت به خط l که با محور OX زاویه θ درجه می‌سازد، ببرد. اگر جمع برداری را با قانون متوازی‌الاضلاع و ضرب اسکالر را به صورت تغییر طول و علامت‌دار تغییر کنیم، بسادگی دیده می‌شود که R_θ خطی است.

فرض کنیم $\mathbf{i}_\theta = (\cos \theta)\mathbf{i} + (\sin \theta)\mathbf{j}$ بردار یک در امتداد خط l باشد. فرض کنیم $\mathbf{j}_\theta = -(\sin \theta)\mathbf{i} + (\cos \theta)\mathbf{j}$ (ر. ک. شکل ۱۳.۵). البته بردارهای \mathbf{i}_θ ، \mathbf{j}_θ حاصل از دوران \mathbf{i} و \mathbf{j} ، بردارهای پایه متعارف، به اندازه θ درجه هستند. نمایش ماتریسی تبدیل خطی R_θ را در دستگاه مختصات \mathbf{i}_θ ، \mathbf{j}_θ به دست می آوریم.



شکل ۱۳.۵

واضح است که باید داشته باشیم $R_\theta(\mathbf{i}_\theta) = \mathbf{i}_\theta$ و $R_\theta(\mathbf{j}_\theta) = -\mathbf{j}_\theta$. لذا، نمایش ماتریسی R_θ نسبت به دستگاه \mathbf{i}_θ ، \mathbf{j}_θ به صورت $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ است. فرض کنیم B_θ نمایش ماتریسی R_θ نسبت به پایه $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ و $Q = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ ماتریس وابسته به تغییر پایه، از پایه $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ به پایه $\{\mathbf{i}_\theta, \mathbf{j}_\theta\}$ باشد.

بنا به قضیه ۳، داریم $Q^{-1}BQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ، یا

$$\begin{aligned} B &= Q \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} Q^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta / \sin \theta \\ -\sin \theta / \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ 2 \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}, \\ R_\theta \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

بنابراین،

به همین نحو می توان فرمولی برای عملگر تصویری در بخش ۱.۵ به دست آورد.

تمرینات

۱. فرض کنید S و T عملگرهایی خطی روی \mathbb{R}^2 باشند که به صورت

$$T(v) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad S(v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

تعریف می‌شوند. ماتریسهای وابسته به S و T را نسبت به پایه‌های داده شده برای R^3 ، بیابید.

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \quad (\text{ب}) \quad \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \quad (\text{الف})$$

۲. فرض کنید T عملگر خطی روی M_{22} باشد که با ضابطه $T(A) = A^T$ تعریف می‌شود. نمایش ماتریسی T را نسبت به پایه‌های داده شده برای M_{22} ، بیابید.

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \quad (\text{الف})$$

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \quad (\text{ب})$$

۳. نمایش ماتریسی عملگرهای خطی زیر روی P_3 را نسبت به پایه $1, x, x^2, x^3$ بیابید.

$$T(f) = f - f(0) \quad (\text{ج}) \quad T(f) = xf'(x) \quad (\text{ب}) \quad T(f) = f + f' \quad (\text{الف})$$

$$T(f) = f(0) + f(1)x + f(2)x^2 + f(3)x^3 \quad (\text{ه}) \quad (T(f))(x) = f(x+1) \quad (\text{د})$$

$$T_\theta(i_\theta) = i_\theta = (\cos \theta)i + (\sin \theta)j \quad \text{اگر} \quad ۴$$

$$T_\theta(j_\theta) = 2j_\theta = 2[(-\sin \theta)i + (\cos \theta)j] \quad \text{و}$$

نمایش ماتریسی عملگر T_θ را نسبت به پایه $\{i, j\}$ برای R^2 ، بیابید.

۵. نمایش ماتریسی عملگر $T(f) = f - xf'$ روی P_n را نسبت به پایه $1, x, x^2, \dots, x^n$ بیابید.

۶. فرض کنید

$$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

بردارهایی مستقل خطی در R^2 باشند. T تبدیلی خطی روی R^2 باشد به طوری که

$$T\left(\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

نشان دهید که

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} cd - ab & a^2 - c^2 \\ d^2 - b^2 & ab - cd \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

۷. نشان دهید که همه ماتریسهای به صورت

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

مشابه‌اند.

۸. فرض کنید T_α عملگری خطی روی P_n باشد که به صورت $T_\alpha(f(x)) = f(x + \alpha)$ تعریف می‌شود. نمایش ماتریسی T_α را نسبت به پایه $1, x, x^2, \dots, x^n$ برای P_n ، معین کنید. با اثبات اینکه $T_{-\alpha}^{-1} = (T_\alpha)^{-1}$ ، وارون این ماتریس را حساب کنید.

۹. فرض کنید V فضایی برداری باشد و X_1, X_2, \dots, X_n پایه‌ای برای V . نمایش ماتریسی عملگرهای خطی زیر روی V را نسبت به پایه X_1, X_2, \dots, X_n حساب کنید.

$$T(X_n) = 0, T(X_{n-1}) = X_n, \dots, T(X_2) = X_3, T(X_1) = X_2 \quad (\text{الف})$$

$$T(X_n) = \alpha X_1, T(X_{n-1}) = X_n, \dots, T(X_2) = X_3, T(X_1) = X_2 \quad (\text{ب})$$

$$\dots, T(X_2) = X_1 + X_2, T(X_1) = X_1 \quad (\text{ج})$$

$$T(X_n) = X_1 + X_2 + \dots + X_n, T(X_{n-1}) = X_1 + X_2 + \dots + X_{n-1}$$

$$T(X_n) = \lambda_n X_n, \dots, T(X_2) = \lambda_2 X_2, T(X_1) = \lambda_1 X_1 \quad (\text{د})$$

۱۰. فرض کنید در R^2 داشته باشیم

$$j_\theta = -(\sin \theta)i + (\cos \theta)j \quad \text{و} \quad i_\theta = (\cos \theta)i + (\sin \theta)j$$

فرض کنید T_θ عملگری خطی باشد که i_θ را به j_θ و j_θ را به 0 می‌برد.

(الف) نمایش ماتریسی T را نسبت به پایه $\{i, j\}$ برای R^2 ، حساب کنید.

(ب) نشان دهید که $T^2 = 0$.

۱۱. فرض کنید A ماتریس 2×2 پوچ توانی با درایه‌های حقیقی باشد. نشان دهید که اعداد حقیقی x و y وجود دارند به طوری که

$$A = \pm \begin{bmatrix} xy & -x^2 \\ y^2 & -xy \end{bmatrix}$$

نشان دهید که هر ماتریس از این نوع پوچ توان است.

۱۲. فرض کنید S و T عملگرهای خطی روی P_2 باشند که به صورت

$$T(f) = f + f' + \frac{1}{2}f'' + \frac{1}{6}f''' \quad \text{و} \quad (S(f))(x) = f(x+1)$$

تعریف شده‌اند. نشان دهید که $S = T$.

۱۳. جوابهای چند جمله‌ای معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید.

$$x^2 f''' + x f' + f = 1 + x + x^2 \quad (\text{الف})$$

$$x^3 f''' + f = x^2 + x^2 + 1 \quad (\text{ب})$$

$$(1 - x^2)f''' - 2x f' + f = x^2 + 1 \quad (\text{ج})$$

۱۴. جوابهای چند جمله‌ای غیر صفر معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید.

$$(1 - 2x^2)f'' + x f' + 2f = 0 \quad (\text{ب}) \quad x f' - f = 0 \quad (\text{الف})$$

$$x^3 f''' + (1 - x^2)f''' + x f' - 3f = 0 \quad (\text{د}) \quad (1 - x^2)f''' - 2x f' + 6f = 0 \quad (\text{ج})$$

۱۵. فرض کنید ماتریس $n \times n$ ای مانند A مشابه با ماتریسی قطری با درایه‌های قطری d_1, \dots, d_n باشد. نشان دهید که

$$\det[xI + yA] = (x + yd_1)(x + yd_2) \dots (x + yd_n)$$

۱۶. فرض کنید V یک فضای برداری متناهی‌البعاد با پایه B باشد، و نیز فرض کنید S و T عملگرهایی خطی روی V باشند و A_S و A_T نمایش ماتریسی آنها نسبت به پایه B .

(الف) نشان دهید که S و T جابجا می‌شوند اگر و فقط اگر A_S و A_T جابجا شوند.

(ب) نشان دهید که T پوچ توان است اگر و فقط اگر A_T پوچ توان باشد.

(ج) نشان دهید که T خود توان است اگر و فقط اگر A_T خود توان باشد.

۱۷. فرض کنید T عملگری خطی روی \mathbb{R}^2 باشد به قسمی که $T^2 = I$.

(الف) اگر \mathbf{x} متعلق به فضای مقادیر عملگر $(I+T)/2$ باشد، نشان دهید که $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$

(ب) اگر \mathbf{x} متعلق به فضای مقادیر عملگر $(I-T)/2$ باشد، نشان دهید که $T(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$

(ج) اگر $T \neq \pm I$ ، نشان دهید که بردارهای غیر صفر \mathbf{x}_1 و \mathbf{x}_2 وجود دارند به قسمی

که $T(\mathbf{x}_1) = -\mathbf{x}_1$ و $T(\mathbf{x}_2) = \mathbf{x}_2$. نشان دهید که این بردارها مستقل خطی اند.

(د) اگر $A^2 = I$ و $A \neq \pm I$ (یک ماتریس 2×2 است) نشان دهید

که A مشابه با ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ است.

۱۸. همانند مثال ۴، از بخش ۱۰.۵، سه شرکت بازاری، محصول معینی را در دست دارند.

ولی در این مورد، ماتریس حفظ و از دست دادن مشتریها، A ، عبارت است از $\begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.7 \end{bmatrix}$

اگر \mathbf{v} وضع کنونی بازار باشد، آنگاه $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ وضع بازار در یک سال بعد است.

(الف) یک بردار غیر صفر \mathbf{x}_1 بیابید به نحوی که $T(\mathbf{x}_1) = \mathbf{x}_1$

(ب) یک بردار غیر صفر \mathbf{x}_2 بیابید به طوری که $T(\mathbf{x}_2) = 0.4\mathbf{x}_2$

(ج) یک بردار غیر صفر \mathbf{x}_3 بیابید به قسمی که $T(\mathbf{x}_3) = 0.6\mathbf{x}_3$

(د) نشان دهید که $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ یک پایه است و نمایش ماتریسی T را نسبت به

این پایه حساب کنید.

(ه) نشان دهید که دنباله توانهای A همگراست و حد آن ماتریس $\frac{1}{24} \begin{bmatrix} 11 & 11 & 11 \\ 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$

است. چشم انداز وضع هر شرکت را در مدت طولانی پیش بینی کنید.

۱۹. فرض کنید $T: V \rightarrow V$ عملگری خطی روی فضای n بعدی V باشد. اگر $r(T) = 1$

نشان دهید که نمایش ماتریسی T نسبت به هر پایه V به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \dots & a_n b_n \end{bmatrix}$$

۲۰. ثابت کنید که معادلهٔ دیفرانسیل

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) y'' + (b_0 + b_1 x) y' + c_0 y = 0$$

دارای جواب چند جمله‌ای غیر صفر است اگر و فقط اگر به ازای یک عدد صحیح غیر منفی n ، $n(n-1)a_2 + nb_1 + c_0 = 0$.

۲۱. اگر V و W فضاهاى بردارى متناهی البعدى باشند، نشان دهید که $L(V, W)$ متناهی-البعد است و $\dim L(V, W) = \dim V \dim W$.

۲۲. فرض کنید A ماتریس 2×2 ای باشد، و C_A تبدیلی خطی از فضای ماتریسهای 2×2 به خودش باشد که به صورت

$$C_A(B) = AB - BA$$

تعریف می‌شود.

(الف) نشان دهید که $C_A = 0$ اگر و فقط اگر A مضرب اسکالری از ماتریس همانی باشد.

(ب) اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، نشان دهید که ماتریس وابسته به C_A نسبت به پایه

$$E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} 0 & c & -b & 0 \\ b & d-a & 0 & -b \\ -c & 0 & a-d & c \\ 0 & -c & b & 0 \end{bmatrix}$$

(ج) اگر A مضرب اسکالری از ماتریس همانی نباشد، نشان دهید که رتبهٔ ماتریس فوق ۲ است.

(د) اگر A مضرب اسکالری از ماتریس همانی نباشد، نشان دهید همهٔ ماتریسهایی را که با A جابجا می‌شوند می‌توان به صورت $\alpha I_2 + \beta A$ تبدیل کرد.

۲۳. نشان دهید که هر ماتریس $n \times n$ با رتبهٔ r مشابه با ماتریسی به صورت

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2r} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nr} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

است.

۲۴. فرض کنید W زیر فضایی از M_{nn} باشد (M_{nn} فضای ماتریسهای $n \times n$ است). اگر همهٔ عناصر غیر صفر W وارون پذیر باشند، نشان دهید که $\dim W \leq n$. (راهنمایی: n -برداری مانند v را انتخاب کنید و تبدیلی خطی را که T متعلق به W را به Tv متعلق به R^n می برد، بررسی کنید.)

۶

ضربها

۱ ضرب داخلی و ضرب خارجی در R^3

تا کنون در مطالعه بردارها، این مسئله را که تحت چه شرایطی صحبت از ضرب دو بردار معنی‌دار است، مسکوت گذاشته بودیم. در این بخش، با بررسی دو نوع ضرب که اغلب در کاربردهای فیزیکی بسیار مفیدند، این غفلت را جبران می‌کنیم. اولین ضربی که مورد بحث قرار می‌گیرد، ضرب داخلی است که آن را ضرب نقطه‌ای یا ضرب اسکالر نیز می‌گویند.

فرض کنیم $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ دو بردار در R^3 باشند. حاصلضرب داخلی \mathbf{a} و \mathbf{b} را که به صورت (\mathbf{a}, \mathbf{b}) می‌نویسیم به عنوان عدد حقیقی $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ تعریف می‌کنیم. عدد (\mathbf{a}, \mathbf{b}) را غالباً با $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ نشان می‌دهیم، که اسم ضرب نقطه‌ای هم از همین نمادگذاری گرفته شده است. توجه کنید که حاصلضرب داخلی دو بردار، کمیتی اسکالر است.

اگر قرارداد کنیم که ماتریسهای 1×1 را با اسکالرها یکی بگیریم، ضرب داخلی را بر حسب ضرب ماتریسی نیز می‌توان نوشت. در حقیقت، داریم

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = [a_1 \ a_2 \ a_3] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

از این تعریف، بعضی از خواص ضرب داخلی بلافاصله نتیجه می‌شوند. فرض کنیم $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ بردارهایی در R^3 ، و α و β اسکالرهایی حقیقی باشند.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \geq 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{a} = 0 \text{ اگر و فقط اگر } (\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$$

$$(\alpha a, b) = \alpha(a, b) \quad (۲)$$

$$(a, \beta b) = \beta(a, b)$$

$$(a, b + c) = (a, b) + (a, c) \quad (۳)$$

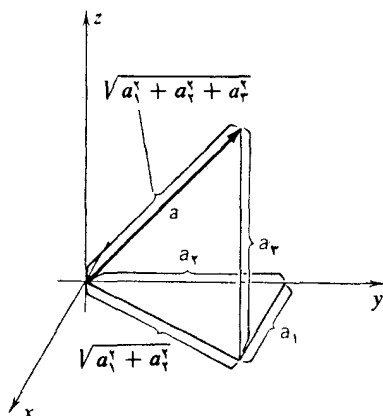
$$(a + b, c) = (a, c) + (b, c)$$

$$(a, b) = (b, a) \quad (۴)$$

برای اثبات (۱)، ملاحظه می‌کنیم که اگر $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ ، آنگاه $(a, a) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ ، چون a_1, a_2, a_3 و اعدادی حقیقی‌اند، داریم $a_1^2 \geq 0, a_2^2 \geq 0, a_3^2 \geq 0$ و لذا، $(a, a) \geq 0$. بعلاوه، اگر $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$ ، آنگاه، $a = 0$. بنابراین، $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

سایر خواص ضرب داخلی را می‌توان بسادگی ثابت کرد.

از قضیه فیثاغورث چنین برمی‌آید که طول بردار $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ عبارت است از $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ (ر. ک. شکل ۱۰۶). طول بردار a را با $|a|$ نشان می‌دهیم. این کمیت را اغلب نرم a می‌نامند. چون $(a, a) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ ، داریم $|a| = (a, a)^{1/2}$ ، بردارهای با نرم ۱ را بردارهای یک‌ه می‌نامند.

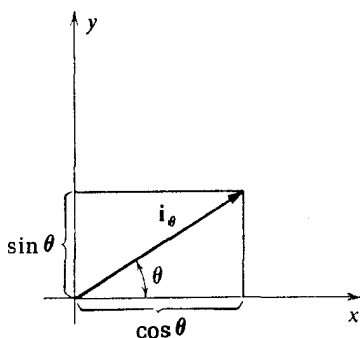


شکل ۱۰۶

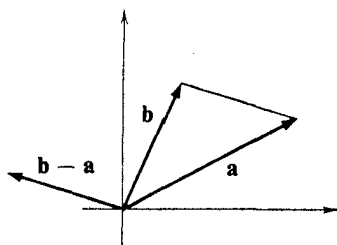
برای مثال، بردار $i_\theta = (\cos \theta)i + (\sin \theta)j$ در صفحه، بردار یک‌ه‌ای است که با محور x زاویه θ درجه می‌سازد (ر. ک. شکل ۲۰۶).

دیدیم که اگر a و b دو بردار باشند، بردار $b - a$ موازی پاره خط جهت داری از نقطه انتهایی a به نقطه انتهایی b است. در نتیجه فاصله بین نقاط انتهایی a و b عبارت است از $|b - a|$ (ر. ک. شکل ۳۰۶). این فاصله را اغلب با $d(a, b)$ نشان می‌دهند. مثلاً، فاصله بین نقطه انتهایی بردار i ، یعنی نقطه $(1, 0, 0)$ ، و نقطه انتهایی بردار j ، یعنی نقطه $(0, 1, 0)$ ، برابر است با:

$$\sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{2}$$

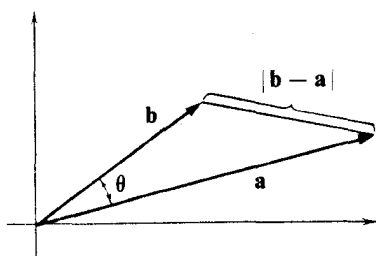


شکل ۲.۶



شکل ۳.۶

با توجه به آنچه که قبلاً در مورد بردارها گفته‌ایم، منطقاً انتظار داریم که حاصلضرب داخلی دو بردار دارای تعبیری هندسی باشد. فرض کنیم \mathbf{a} و \mathbf{b} دو بردار در \mathbb{R}^3 باشند و θ زاویه بین آنها باشد (ر. ک. شکل ۴.۶). نشان خواهیم داد که $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$.



شکل ۴.۶

با استفاده از قانون کسینوسها (بخش ۶.۳) در مورد مثلثی که یک رأس آن در مبدأ واقع است و دو ضلع مجاورش با بردارهای \mathbf{a} و \mathbf{b} معین می‌گردند، نتیجه می‌شود که

$$|\mathbf{b} - \mathbf{a}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta \quad (*)$$

چون $|\mathbf{b}|^2 = (\mathbf{b}, \mathbf{b})$ و $|\mathbf{a}|^2 = (\mathbf{a}, \mathbf{a})$ ، $|\mathbf{b} - \mathbf{a}|^2 = (\mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{b} - \mathbf{a})$ می‌توان تساوی (*) را به صورت زیر نوشت:

$$(\mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{b} - \mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \mathbf{a}) + (\mathbf{b}, \mathbf{b}) - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$$

حال،

$$\begin{aligned}
 (b-a, b-a) &= (b, b-a) - (a, b-a) \\
 &= (b, b) - (b, a) - (a, b) + (a, a) \\
 &= (a, a) + (b, b) - 2(a, b)
 \end{aligned}$$

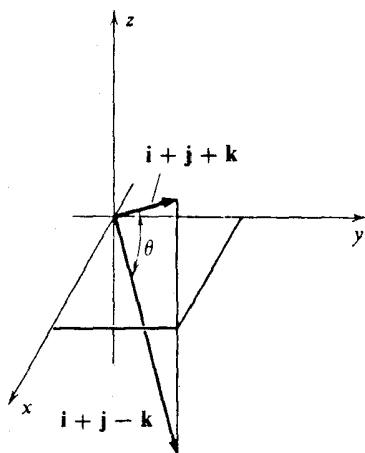
پس، $(a, a) + (b, b) - 2(a, b) = (a, a) + (b, b) - 2|a||b|\cos\theta$ ، یا $(a, b) = |a||b|\cos\theta$

این فرمول بدان معنی است که حاصلضرب داخلی دو بردار، مساوی حاصلضرب طول آن دو بردار در کسینوس زاویه بین آنهاست. در مسائلی که ماهیت هندسی دارند این رابطه غالباً به کار می آید.

مثال ۱ زاویه بین بردارهای $i+j+k$ و $i+j-k$ را که در شکل ۵.۶ نشان داده شده است می یابیم. بنا به آنچه در بالا گفته شد،

$$(i+j+k, i+j-k) = |i+j+k||i+j-k|\cos\theta$$

بنا بر این $\cos\theta = 1/3$ ، یا $1+1-1 = (\sqrt{3})(\sqrt{3})\cos\theta$. از اینرو $\theta = \cos^{-1}(1/3)$.

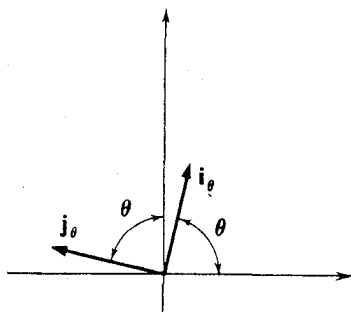


شکل ۵.۶

اگر a و b دو بردار غیر صفر در R^3 باشند و θ زاویه بین آنها باشد، می بینیم که $(a, b) = 0$ اگر و فقط اگر $\cos\theta = 0$. از اینجا نتیجه می شود که حاصلضرب داخلی دو بردار غیر صفر، صفر است اگر و فقط اگر آن دو بردار برهم عمود باشند. بردارهای عمود برهم را غالباً متعامد می نامند. قرارداد می کنیم که بردار صفر بر همه بردارها عمود است. برای مثال، بردارهای

$$i_\theta = (\cos\theta)i + (\sin\theta)j \quad \text{و} \quad j_\theta = -(\sin\theta)i + (\cos\theta)j$$

متعامدند. زیرا $(i_\theta, j_\theta) = -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta = 0$ (ر.ک. شکل ۶.۶).

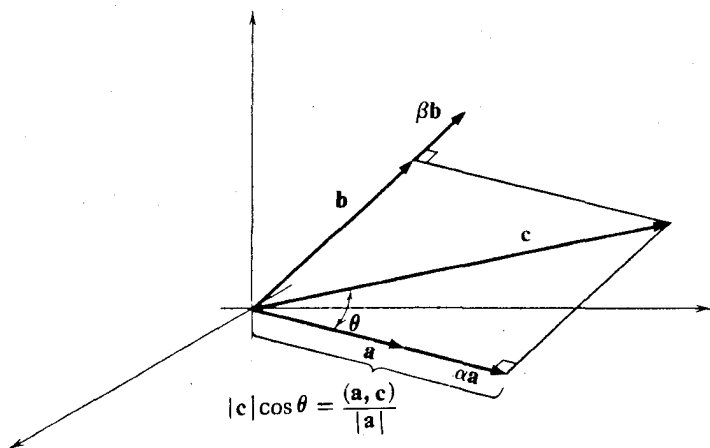


شکل ۶.۶

مثال ۲ فرض کنیم a و b دو بردار متعامد غیر صفر باشند و c برداری دیگر در صفحه پدید آمده توسط a و b باشد. همان طور که دیدیم، اسکالرهای α و β وجود دارند به طوری که $c = \alpha a + \beta b$. با استفاده از ضرب داخلی، α و β را تعیین می‌کنیم (ر. ک. شکل ۷.۶).

$$(a, c) = (a, \alpha a + \beta b) = \alpha(a, a) + \beta(a, b)$$

چون a و b متعامدند، $(a, b) = 0$ و لذا $\alpha = (a, c) / (a, a) = (a, c) / |a|^2$ ؛ همین-طور $\beta = (b, c) / (b, b) = (b, c) / |b|^2$.

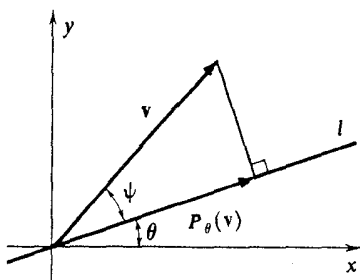


شکل ۷.۶

مثال ۳ عملگر تصویری P_θ از بخش ۲.۵ را به یاد بیاورید. اگر l خطی باشد که بامحور x زاویه θ درجه می‌سازد، $P_\theta(v)$ برداری است در امتداد l که انتهای آن، نقطه تقاطع خط l با عمودی است که از نقطه انتهایی v بر خط l رسم می‌شود (ر. ک. شکل ۸.۶). اکنون با استفاده از ضرب داخلی فرمولی برای $P_\theta(v)$ به دست می‌آوریم.

می‌دانیم که $i_\theta = (\cos \theta)i + (\sin \theta)j$ بردار یکه در امتداد l است. اگر ψ زاویه بین بردار v و خط l باشد،

$$P_{\theta}(\mathbf{v}) = (|\mathbf{v}| \cos \psi) \mathbf{i}_{\theta} = (\mathbf{v}, \mathbf{i}_{\theta}) \mathbf{i}_{\theta}$$



شکل ۸.۶

$$\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \text{ اگر}$$

$$\begin{aligned} P_{\theta}(\mathbf{v}) &= P_{\theta}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}, \mathbf{i}_{\theta}) \mathbf{i}_{\theta} \\ &= (x \cos \theta + y \sin \theta) ((\cos \theta) \mathbf{i} + (\sin \theta) \mathbf{j}) \end{aligned}$$

یا

$$P_{\theta} \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

علاوه بر ضرب داخلی، نوع دیگری از ضرب بردارها وجود دارد که گاهی مفید است. فرض کنیم $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ بردارهایی در \mathbb{R}^3 باشند. حاصلضرب خارجی \mathbf{a} و \mathbf{b} ، که آن را با $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ نشان می‌دهیم، به صورت

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

یا

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

تعریف می‌شود، که در آن بسط صوری دترمینان برحسب سطر اول، مورد نظر است. توجه داشته باشید که حاصلضرب خارجی دو بردار، خود یک بردار است. همان‌طور که گاهی ضرب داخلی را ضرب اسکالر می‌نامند، ضرب خارجی را گاهی ضرب برداری می‌نامند. بعضی از خواص جبری ضرب خارجی نیز بلافاصله از تعریف آن نتیجه می‌شوند. فرض کنیم \mathbf{a} ، \mathbf{b} ، و \mathbf{c} سه بردار و α ، β ، و γ سه اسکالر باشند.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \quad (۱)$$

$$\mathbf{a} \times (\beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}) = \beta(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \gamma(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \quad (۲)$$

$$(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

دقت کنید که بنا به (۱)، $a \times a = -(a \times a)$ ، پس، $a \times a = 0$ ، مثلاً

$$(2i - j + k) \times (i + 2j - k) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \\ = -i + 2j + 3k.$$

اکنون هدف ما ارائهٔ تعبیری هندسی برای حاصلضرب خارجی، مشابه تعبیر حاصلضرب داخلی، است.

ابتدا فرمول حاصلضرب $(b \times c) \cdot a$ را به دست می‌آوریم. اگر

$$c = c_1 i + c_2 j + c_3 k, \quad b = b_1 i + b_2 j + b_3 k, \quad a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

آنگاه

$$a \cdot (b \times c) = (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \cdot \left(\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} k \right) \\ = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

که این عبارت را می‌توان به طور فشرده‌تر به صورت

$$a \cdot (b \times c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

نوشت.

حال، فرض می‌کنیم a برداری باشد در زیرفضایی از R^3 که توسط بردارهای b و c پدیدمی‌آید. این بدان معنی است که در شکل دترمینانی $a \cdot (b \times c)$ ، سطراول ترکیبی خطی از سطرهاي دوم و سوم است و بنا براین $a \cdot (b \times c) = 0$. به عبارت دیگر، بردار $b \times c$ عمود بر هر برداری است که در صفحهٔ پدیدآمده توسط b و c قرار داشته باشد، و بخصوص بر هردوی b و c ، عمود است.

اکنون، بزرگی $b \times c$ را حساب می‌کنیم. توجه کنید که

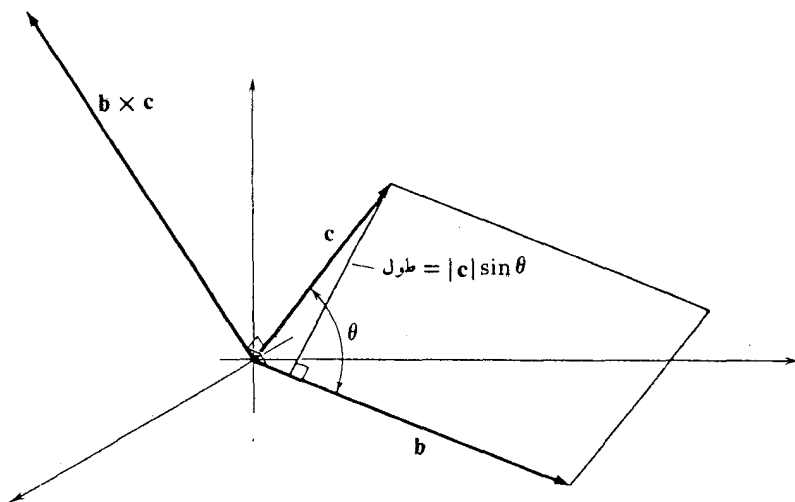
$$|b \times c|^2 = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}^2 \\ = (b_2^2 + b_3^2 + b_1^2)(c_2^2 + c_3^2 + c_1^2) - (b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3)^2 \\ = |b|^2 |c|^2 - |b \cdot c|^2 \cos^2 \theta = |b|^2 |c|^2 \sin^2 \theta$$

که در آن θ زاویهٔ بین b و c است.

از ترکیب نتایج فوق، می‌بینیم که $b \times c$ برداری است عمود بر b و c با طول $|b| |c| \sin \theta$.

اگر b و c وابستهٔ خطی باشند، $\theta = 0$ و لذا $b \times c = 0$. اگر b و c مستقل

خطی باشند، صفحه‌ای پس‌دیده می‌آورند و $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ بر این صفحه عمود است. طول بردار $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ عبارت است از $|\mathbf{b}||\mathbf{c}|\sin\theta$ ؛ این طول، برابر مساحت متوازی‌الاضلاع است که اضلاع مجاورش بردارهای \mathbf{b} و \mathbf{c} می‌باشند (ر. ک. شکل ۹.۶).



شکل ۹.۶

مثال ۴ بردار یک‌ه‌ای عمود بر بردارهای $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ و $\mathbf{j} + \mathbf{k}$ می‌یابیم. برداری که بر $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ و $\mathbf{j} + \mathbf{k}$ هر دو، عمود باشد، بردار

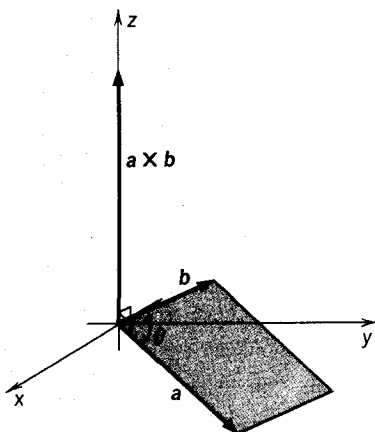
$$(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (\mathbf{j} + \mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

است. چون $|\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}| = \sqrt{3}$ ، بردار $(\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{3}$ بردار یک‌ه‌ای است عمود بر $\mathbf{j} + \mathbf{k}$ و $\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

با استفاده از ضرب برداری، می‌توان تغییر هندسی جالبی برای دترمینانها به دست آورد. فرض کنیم $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ و $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$ دو بردار در صفحه باشند. اگر θ زاویه بین \mathbf{a} و \mathbf{b} را نشان دهد، دیدیم که $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$. همان طور که در بالا متذکر شدیم، $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$ مساحت متوازی‌الاضلاع است که اضلاع مجاورش \mathbf{a} و \mathbf{b} هستند (ر. ک. شکل ۱۰.۶).

با استفاده از تعریف ضرب خارجی داریم:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

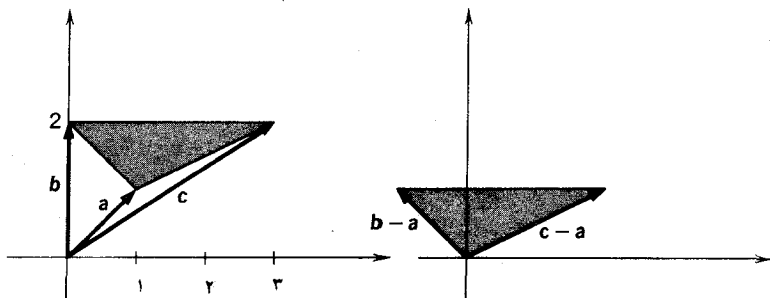


شکل ۱۰-۶

از اینرو، $|a \times b|$ قدر مطلق دترمینان $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ است.

از اینجا، نتیجه می‌شود که قدر مطلق دترمینان فوق، مساحت متوازی الاضلاعی با اضلاع مجاور $a_1i + a_2j$ و $b_1i + b_2j$ است.

مثال ۵ مساحت مثلثی به رئوس $(1, 1)$ ، $(0, 2)$ ، و $(3, 2)$ را می‌یابیم (ر. ک. شکل ۱۱-۶).



شکل ۱۱-۶

فرض کنیم $a = i + j$ ، $b = 2j$ ، $c = 3i + 2j$. واضح است که مساحت مثلثی که رئوس آن نقاط انتهایی بردارهای a ، b ، و c باشند، با مساحت مثلثی به رئوس انتهایی بردارهای 0 ، $b - a$ ، و $c - a$ ، یکی است. در واقع، مثلث دومی صرفاً حاصل انتقال مثلث اولی است. چون مساحت این مثلث نصف مساحت متوازی الاضلاعی است که اضلاع مجاور آن $b - a$ و $c - a$ هستند، درمی‌یابیم که مساحت مثلثی به رئوس $(1, 1)$ ، $(0, 2)$ ، و $(3, 2)$ ، قدر مطلق $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \frac{1}{2}$ ، یعنی $\frac{3}{2}$ است.

همان‌طور که دترمینان 2×2 را به عنوان مساحت تعبیر کردیم، دترمینان 3×3

را به عنوان حجم تعبیر می‌کنیم. فرض کنیم

$$\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k} \text{ و } \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}, \mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

بردارهایی در \mathbf{R}^3 باشند (ر. ک. ۱۲.۶). نشان خواهیم داد که حجم متوازی السطوحی با

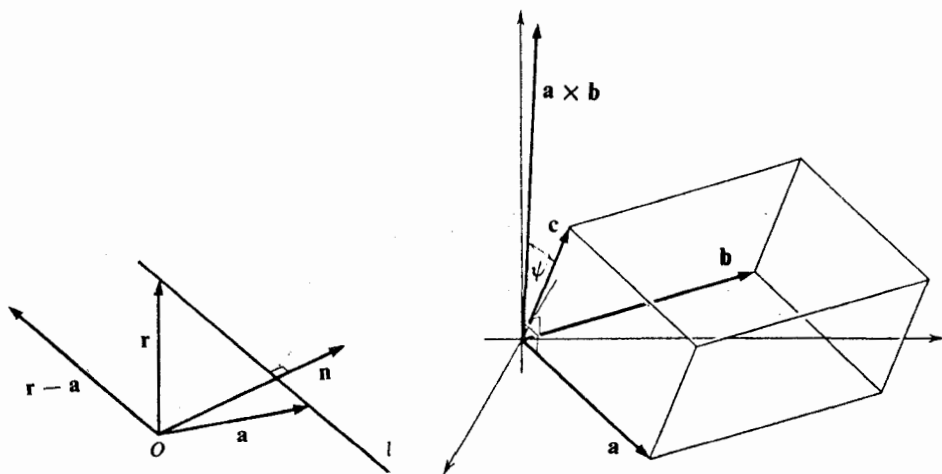
$$\text{اضلاع مجاور } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \text{ و } \mathbf{c} \text{ قدر مطلق دترمینان } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{ است.}$$

همان طور که اکنون دیدیم، $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ مساحت متوازی الاضلاعی با اضلاع مجاور \mathbf{a} و \mathbf{b} است. بعلاوه، $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ عبارت است از $|\mathbf{c}| |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cos \psi$ که در آن ψ زاویه‌ای است که \mathbf{c} با خط عمود بر صفحه پدید آمده توسط \mathbf{a} و \mathbf{b} می‌سازد. چون حجم متوازی السطوحی با اضلاع مجاور $\mathbf{a}, \mathbf{b},$ و \mathbf{c} برابر حاصلضرب مساحت قاعده، یعنی $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ ، در ارتفاع، یعنی $|\mathbf{c}| \cos \psi$ ، است، نتیجه می‌شود که حجم متوازی السطوح $|\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})|$ است.

قبلاً دیدیم که $|\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})|$ قدر مطلق دترمینان

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

است. بنابراین، قدر مطلق این دترمینان حجم متوازی السطوحی است که اضلاع مجاور آن $\mathbf{a}, \mathbf{b},$ و \mathbf{c} باشد.



شکل ۱۲.۶

شکل ۱۲.۶

تذکر این نکته مهم است که ضرب خارجی نه جایجایی است و نه انجمنی. درواقع، قبلاً دیدیم که $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$. برای ملاحظه این امر که ضرب خارجی انجمنی نیست، $\mathbf{j} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j})$ و $\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j})$ را در نظر می‌گیریم؛ داریم

$$i \times (j \times j) = i \times o = o \quad \text{و} \quad (i \times j) \times j = k \times j = -i$$

پس $(i \times j) \times j \neq i \times (j \times j)$ ، و ضرب خارجی انجمنی نیست.
 با استفاده از روشهای برداری، می توانیم معادله یک خط در صفحه را به دست آوریم.
 فرض کنیم l یک خط، a یک بردار ثابت که انتهایش برخط l واقع است، و n بردار
 غیر صفری عمود برخط l باشد (ر. ک. شکل ۱۳.۶). اگر r بردار دلخواهی باشد که
 انتهایش روی این خط است، بردار $r - a$ عمود بر n می باشد، و لذا $(r - a, n) = 0$.
 برعکس، اگر $(r - a, n) = 0$ ، $r - a$ بر n عمود است. از اینرو انتهای بردار
 $r = (r - a) + a$ روی خط l قرار دارد.

اگر $r = x_i + y_j$ ، $n = n_1 i + n_2 j$ ، $a = a_1 i + a_2 j$ ، نتیجه می شود که
 این خط مکان هندسی نقاط (x, y) است به طوری که $(x - a_1)n_1 + (y - a_2)n_2 = 0$
 یا $n_1 x + n_2 y = a_1 n_1 + a_2 n_2$.

مثال ۶ بردار یکه ای عمود برخط $1 = 2x + 3y$ می یابیم.
 بنا به استدلال قبلی واضح است که همه بردارهای عمود برخط $2x + 3y = 1$
 به صورت $2\alpha i + 3\alpha j$ هستند. α را طوری انتخاب می کنیم که $|2\alpha i + 3\alpha j| = 1$ یا
 $\alpha = \pm 1/\sqrt{13}$. بنا براین، بردار $j(3/\sqrt{13}) + i(2/\sqrt{13})$ بردار یکه ای عمود بر
 خط مفروض است.

به روشی شبیه روش فوق، می توان معادله یک صفحه در فضا را معین کرد. فرض کنیم
 P صفحه ای در فضا، a برداری که انتهایش بر این صفحه واقع است، و n یک بردار عمود
 بر صفحه باشد (ر. ک. شکل ۱۴.۶).
 اگر r برداری در R^3 باشد، انتهای r روی صفحه P است اگر و فقط اگر
 $(r - a, n) = 0$.

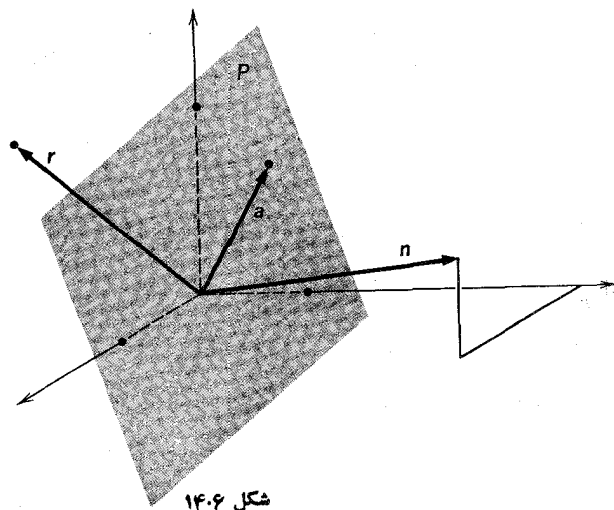
اگر $r = xi + yj + zk$ ، $n = n_1 i + n_2 j + n_3 k$ ، $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$
 نتیجه می شود که این صفحه، مکان هندسی نقاط (x, y, z) است به طوری که

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z = n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3$$

پس، مکان هندسی نقاطی در فضا که در معادله ای به صورت $Ax + By + Cz + D = 0$
 (که در آن لااقل یکی از ضرایب A, B, C و D صفر نیست) صدق می کنند، یک صفحه است.

مثال ۷ معادله صفحه عمود بر بردار $k - j + 2i$ و شامل نقطه $(2, 2, 1)$ را می یابیم.
 از مطالب فوق چنین برمی آید که معادله این صفحه به صورت $2x + y - z = D$
 است. چون $(2, 2, 1)$ روی این صفحه قرار دارد، داریم: $D = 2 + 2 - 2 = 2$. پس،
 معادله صفحه عبارت است از: $2x + y - z = 2$.

مثال ۸ معادله صفحه ای را می یابیم که شامل نقاط $(1, 1, 1)$ ، $(2, 2, -1)$ ، و



شکل ۱۴.۶

$(-1, 1, 3)$ باشد.

دش اول: معادله صفحه به صورت $Ax + By + Cz + D = 0$ است. چون نقاط $(1, 1, 1)$ ، $(2, 2, -1)$ و $(3, 1, -1)$ روی این صفحه قرار دارند، دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} A + B + C + D &= 0 & -2A &+ 2C &= 0 \\ 2A + 2B - C + D &= 0 & \rightarrow & -A + B &= 0 \\ 3A + B - C + D &= 0 & 3A + B - C + D &= 0 \end{aligned}$$

را به دست می آوریم، که نتیجه می دهد $A = B = C$ و $D = -3A$. قرار می دهیم $A = 1$. پس داریم $B = C = 1$ و $D = -3$. از اینرو معادله صفحه، $x + y + z = 3$ قرار می دهیم.

دش دوم: فرض کنیم $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ، $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ و $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$. در این صورت بردارهای $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ و $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ با این صفحه موازی اند. از این قرار خط عمود بر صفحه، بر بردارهای $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ و $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ عمود است. در نتیجه

$$\mathbf{n} = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

عمود بر صفحه است. چون $\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ پس معادله

به صورت $-2x - 2y - 2z = D$ است. چون $(1, 1, 1)$ روی صفحه قرار دارد، $D = -6$. از اینرو معادله صفحه عبارت است از $-2x - 2y - 2z = -6$ که پس از ضرب در $1/2$ به صورت $x + y + z = 3$ در می آید.

درفصل دوم، گفتیم که بردارهای متعلق به R^3 به عنوان نیرو، سرعت، و سایر کمیتها

در مسائل فیزیکی ظاهر می شوند. وقتی کمیتی فیزیکی توسط یک بردار نمایانده می شود، طول بردار، بزرگی آن کمیت را می دهد. برای مثال، اگر $\mathbf{F} = i + 2j + 2k$ یک نیرو باشد، با هر واحد اندازه گیری، مثلاً کیلوگرم نیرو یا دین، بزرگی نیرو ۳ واحد است. همین طور $3i + 4j + 10k$ بترتیب نیروهای ۵ و ۱۰ واحدی را نمایش می دهند.

همچنین می توان این جریان را معکوس کرد. برای مثال، نیرویی ۱۰ واحدی در جهت بردار $i + j$ می توان یافت. $(i + j)/\sqrt{2}$ ، بردار یکه ای در جهت $i + j$ است؛ پس $\mathbf{F} = 10(i + j)/\sqrt{2}$ نیروی مطلوب را می نمایاند، زیرا جهت و بزرگی آن، همان است که می خواهیم.

وقتی دو نیرو بر یک نقطه وارد می شوند، نیروی برابند، حاصل جمع برداری آن نیروهاست. همین مطلب برای سرعتها نیز درست است. برای مثال، اگر شخصی در یک قطار در حال حرکت قدم بزند، بردار سرعت او نسبت به زمین، حاصل جمع بردار سرعت قطار و بردار سرعت خودش نسبت به قطار است. مثال زیر این مطلب را به طریق دیگری تشریح می کند.

مثال ۹ ناخدای یک کشتی یدک کش می خواهد با بیشترین سرعت ممکن یدک کش، که ۱۷ گره است، به سمت مشرق حرکت کند. در آن محل، جریانی با سرعت ۸ گره به سمت شمال در حرکت است.

کشتی را در چه جهتی هدایت کند تا مطمئن شود که به سوی شرق در حرکت است، و سرعت آن چقدر باید باشد؟

سرعت جریان آب ۸j است. فرض کنیم ۷ برداری با بزرگی ۱۷ در جهتی باشد که کشتی باید برود. می خواهیم ۷ را طوری تعیین کنیم که مطمئن شویم کشتی به سمت مشرق در حرکت است. بردار ۷ سرعت کشتی نسبت به آب است. سرعت حقیقی کشتی حاصل جمع سرعت کشتی نسبت به آب و سرعت آب است. سرعت حقیقی کشتی $7i + 8j$ است.

چون کشتی باید به سمت مشرق هدایت شود، ۷ را باید طوری انتخاب کرد که $7i + 8j$ مضربی از i باشد، مثلاً ki ، که i بردار یکه در جهت شرق است. پس، $7i + 8j = ki$ یا $8j = ki - 7i$. چون طول ۷ برابر ۱۷ است، داریم: $k^2 = 64 + 196 = 260$. بنابراین $k = \sqrt{260} = 16.12$ یا $k = -16.12$. از اینرو $8j = ki - 7i$ یا $8j = 16.12i - 7i$ یا $8j = 9.12i$ یا $j = 1.14i$. اگر کشتی در این جهت حرکت کند، سرعت حقیقی آن ۱۵ گره به سمت مشرق خواهد بود.

تمرینات

۱. زوایای بین بردارهای $i + j$ ، $i + k$ ، $j + k$ و $i + j + k$ را بیابید.
۲. بردار $i + j + k$ را به مؤلفه هایی که موازی با، یا عمود بر $k - j$ هستند، تجزیه کنید.
۳. بردار یکه ای در جهت هریک از بردارهای زیر بیابید.

(الف) $2i + 3j$ (ب) $i + 2j + 2k$ (ج) $6i + 2j + 2k$

۴. معادله خط عمود بر $x + y = 1$ و گذرنده بر $(-1, 2)$ را بیابید.
۵. کسینوس زوایای داخلی مثلثی به رئوس $(0, 1)$ ، $(1, 0)$ ، و $(2, 3)$ را بیابید.
۶. معادله صفحه عمود بر بردار $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ و شامل نقطه $(1, 1, 1)$ را بیابید.
۷. زاویه بین صفحاتی با معادلات $x + y + z = 1$ و $x + y - z = 3$ را بیابید.
۸. طول قطر مکعبی را بیابید که طول ضلع آن ۵ باشد.
۹. مساحت متوازی الاضلاعی را بیابید که اضلاع آن $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ و $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ هستند.
۱۰. نقاط $(1, 2)$ ، $(4, 5)$ ، $(3, 6)$ ، و $(1, 2)$ ، رئوس متوالی یک چهارضلعی در صفحه هستند. نشان دهید که این چهارضلعی یک متوازی الاضلاع است و مساحت آن را بیابید.
۱۱. معادله صفحه‌ای را بیابید که شامل نقاط $(1, 2, 0)$ ، $(1, 1, 1)$ و $(3, -1, 1)$ باشد.
۱۲. فرض کنید A ماتریس حقیقی 2×2 ای باشد و $\det A \neq 0$. و نیز فرض کنید T عملگر خطی روی \mathbb{R}^2 باشد که با ضابطه $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ تعریف می‌شود و P متوازی الاضلاعی باشد که یک رأس آن در مبدأ و مساحتش S است. نشان دهید که $T(P)$ متوازی الاضلاعی با مساحت $|\det A|S$ است.
۱۳. اگر (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) و (x_3, y_3) رئوس یک مثلث باشند، نشان دهید که مساحت این مثلث قدر مطلق $\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$ است.
۱۴. سه ذره از مبدأ حرکت می‌کنند و در امتداد خط راستی با سرعت ثابت پیش می‌روند. سرعت دو ذره اولی $2\mathbf{k} + \mathbf{j} - \mathbf{i}$ و $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ است و سه ذره همواره روی یک خط قرار می‌گیرند. اگر ذره سوم در صفحه xy باشد، سرعت آن را بیابید.
۱۵. هواپیمایی از مبدأ حرکت می‌کند و در جهت بردار $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ با سرعت ۷۵۰ کیلومتر در ساعت پرواز می‌کند. در همان زمان از نقطه‌ای در ۳۰۰ کیلومتری شرق مبدأ، هواپیمای دیگری حرکت کرده، در امتداد یک خط راست با سرعت ۹۰۰ کیلومتر در ساعت پرواز می‌کند. هواپیمای دوم چه مسیری را باید انتخاب کند تا دو هواپیما از کنار یکدیگر بگذرند؟ این دو هواپیما چه وقت به هم می‌رسند؟
۱۶. رئوس یک چهارضلعی در نقاط $(1, 1)$ ، $(3, 2)$ ، $(4, 4)$ ، و $(0, 2)$ است. مساحت آن را بیابید.
۱۷. اگر \mathbf{x} و \mathbf{y} دو بردار باشند، نشان دهید که

$$\frac{1}{4}(|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2) = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2$$

این مطلب را به طور هندسی تعبیر کنید.

۱۸. نشان دهید که نقاط (x_1, y_1, z_1) ، (x_2, y_2, z_2) ، (x_3, y_3, z_3) و (x_4, y_4, z_4) همصفحه‌اند اگر و فقط اگر

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

۱۹. اگر a و b دو بردار در R^3 باشند، نشان دهید که مکان هندسی نقاط متساوی الفاصله از انتهای a و انتهای b ، مجموعه نقاط r روی صفحه

$$(r, b - a) = \frac{1}{2}((b, b) - (a, a))$$

است.

۲۰. اگر x برداری یکه و α یک اسکالر باشد، تحت چه شرایطی αx برداری یکه است؟

۲۱. زاویه بین قطر یک مکعب و یک ضلع آن را بیابید؛ همچنین زاویه بین قطر یک مکعب و قطر یکی از وجوه آن را بیابید.

۲۲. نشان دهید که نقاط انتهایی بردارهای x, y, z و همخط‌اند اگر و فقط اگر $(x - y) \times (z - y) = 0$.

۲۳. اگر w, x, y, z چهار بردار باشند، ثابت کنید که

$$(w \times x) \cdot (y \times z) = \begin{vmatrix} w \cdot y & w \cdot z \\ x \cdot y & x \cdot z \end{vmatrix}$$

۲۴. بردار یکه‌ای عمود بر بردارهای i و ik و i (عددی است حقیقی) بیابید.

۲۵. فرض کنید n بردار ثابتی باشد. مکان هندسی نقاط r را به طوری که $r \cdot n > 0$ مشخص کنید.

۲۶. اگر x, y, z بردار باشند، ثابت کنید که

$$x \times (y \times z) = (x, z)y - (x, y)z.$$

۲۷. نشان دهید که کسینوس زاویه بین بردار $ai + bj + ck$ و محور x ها برابر $a/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ است. کسینوس زاویه بین همین بردار را با محورهای y ها و z ها بیابید.

۲۸. برداری بیابید که از مبدأ شروع و به نقطه تقاطع میانه‌های مثلثی بهرئوس $(0, 0, 1)$ ، $(0, 1, 0)$ و $(1, 0, 0)$ ختم می‌شود.

۲۹. اگر x و y دو بردار باشند، نشان دهید که $(|x|y + |y|x) / |x||y|$ زاویه بین x و y را نصف می‌کند.

۳۰. فرض کنید x برداری در R^3 باشد، و P تابعی از R^3 به R^3 باشد که با ضابطه

$P_x(z) = x \times z$ تعریف می‌شود.

(الف) نشان دهید که P_x عملگری خطی روی R^3 است.

(ب) اگر $x \neq 0$ ، نشان دهید که N_{P_x} توسط x پدید می‌آید.

(ج) نشان دهید که فضای مقادیر P_x دقیقاً مرکب از بردارهای عمود بر x است.

(د) نشان دهید که نمایش ماتریسی P_x نسبت به پایه متعارف i, j, k ، یک ماتریس

مقارن کج است.

(ه) نشان دهید نگاشتی که بردار x در R^3 را به P_x می‌برد، یک یکریختی از R^3

به فضای ماتریسهای مقارن کج تعیین می‌کند.

۳۱. فرض کنید a و b بردارهای متعامد یکه‌ای باشند که صفحه‌ای در R^3 را پدید می‌آورند و

فرض کنید z بردار دیگری در R^3 باشد. نشان دهید که نزدیکترین بردار به z در این صفحه،

بردار $(z, a)a + (z, b)b$ است. تابع P از R^3 به R^3 را که به صورت

$$P(z) = (z, a)a + (z, b)b$$

تعریف می‌شود، به طور هندسی توجیه کنید.

۲ ضرب داخلی در R^n و C^n

همانند حالت سه بعدی، حاصلضرب داخلی دو بردار

$$b = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \text{ و } a = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

در R^n را که با (a, b) نشان داده می‌شود، به عنوان عدد حقیقی

$$(a, b) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_n\beta_n$$

تعریف می‌کنیم. خواصی که در بخش ۱۰۶ برای ضرب داخلی گفته شد، در مورد ضرب داخلی

در فضای n بعدی نیز برقرارند.

به روشی مشابه، نرم بردار a را، که با $|a|$ نشان داده می‌شود، به صورت

$$|a| = (a, a)^{1/2} = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2}$$

تعریف می‌کنیم.

متذکر می‌شویم که

$$|a| \geq 0 \quad (۱)$$

$$|a| = 0 \text{ اگر و فقط اگر } a = 0$$

$$|\alpha a| = |\alpha| |a| \quad (۲)$$

برای مثال، (۲) به صورت زیر ثابت می‌شود:

$$\begin{aligned} |\alpha \mathbf{a}| &= \sqrt{(\alpha \alpha_1)^2 + \dots + (\alpha \alpha_n)^2} = \sqrt{\alpha^2 (\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2)} \\ &= |\alpha| \sqrt{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2} \\ &= |\alpha| |\mathbf{a}| \end{aligned}$$

حاصلضرب داخلی (\mathbf{a}, \mathbf{b}) را می‌توان به صورت $\mathbf{a}^T \mathbf{b}$ نیز نوشت. زیرا داریم

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n] \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_n \beta_n$$

نامساوی مهمی وجود دارد که حاصلضرب داخلی دوبردار را با حاصلضرب نرمهای آن دوبردار مربوط می‌سازد.

قضیه ۱ نامساوی کوشی - شوارتز^۱ اگر \mathbf{x} و \mathbf{y} متعلق به R^n باشند، آنگاه

$$|(x, y)| \leq |\mathbf{x}| |\mathbf{y}|$$

اثبات اگر $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ یا $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ داریم $(x, y) = 0$ و لذا $|(x, y)| = |\mathbf{x}| |\mathbf{y}|$. اگر $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ و $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ ، آنگاه

$$\left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} - \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}, \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} - \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|} \right) \geq 0$$

و

$$\left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}, \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|} \right) \geq 0$$

از اینرو

$$\frac{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}{|\mathbf{x}|^2} - \frac{2(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}| |\mathbf{y}|} + \frac{(\mathbf{y}, \mathbf{y})}{|\mathbf{y}|^2} \geq 0$$

$$\frac{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}{|\mathbf{x}|^2} + \frac{2(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}| |\mathbf{y}|} + \frac{(\mathbf{y}, \mathbf{y})}{|\mathbf{y}|^2} \geq 0$$

چون $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^2$ و $(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = |\mathbf{y}|^2$ ، داریم

$$2 - \frac{2(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}| |\mathbf{y}|} \geq 0$$

$$2 + \frac{2(x, y)}{|x||y|} \geq 0$$

یا

$$-|x||y| \leq (x, y) \leq |x||y|$$

$$\bullet \quad |(x, y)| \leq |x||y| \quad \text{در نتیجه}$$

دیدیم که در R^2 ، $(x, y) = |x||y| \cos \theta$ ، که در آن θ زاویه بین x و y است. چون $|\cos \theta| \leq 1$ ، نامساوی کوشی-شوارتس در R^3 پیامدی از تعبیر هندسی ضرب داخلی است. از نامساوی کوشی - شوارتس، نتیجه زیر را مستقیماً به دست می آوریم.

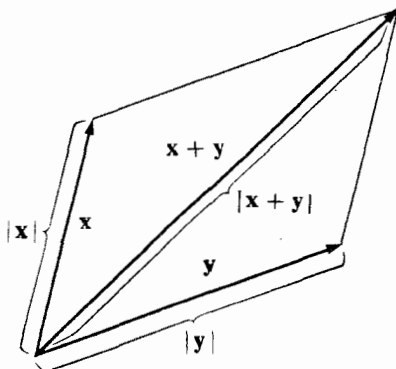
قضیه ۲ اگر x و y متعلق به R^n باشند، آنگاه $|x + y| \leq |x| + |y|$

اثبات بنا به تعریف

$$\begin{aligned} |x + y|^2 &= (x + y, x + y) \\ &= (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \\ &\leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \\ &= (|x| + |y|)^2 \end{aligned}$$

● چون $|x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2$ ، نتیجه می شود که $|x + y| \leq |x| + |y|$.

قضیه ۲ را می توان به طور هندسی تعبیر کرد. اگر بردارهای x و y نشانگر اضلاع یک متوازی الاضلاع باشند، آنگاه $x + y$ قطر آن متوازی الاضلاع را نمایش می دهد. لذا، قضیه ۲ را می توان چنین تعبیر کرد که حاصلجمع طولهای دوضلع مجاور یک متوازی الاضلاع ناکمتر از طول قطر آن است (ر. ک. شکل ۱۵.۶).



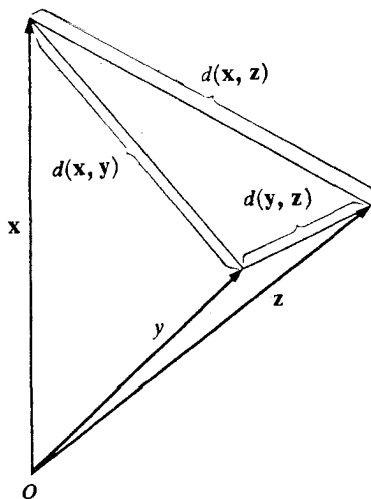
شکل ۱۵.۶

$d(x, y)$ را مساوی $|x - y|$ یعنی فاصله بین نقاط انتهایی بردارهای x و y ، قرار

می‌دهیم. بنا به قضیه ۲ داریم $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$ یا

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

اکنون اگر مثلثی را که رئوس آن نقاط انتهایی بردارهای x ، y و z هستند، در نظر بگیریم، نامساوی اخیر را می‌توان به صورت زیر تعبیر کرد: طول یک ضلع مثلث کمتر از حاصل جمع طولهای دو ضلع دیگر یا مساوی با آن است (ر. ک. شکل ۱۶.۶).



شکل ۱۶.۶

همانند حالت ۳ بعدی، در اینجا هم بردارهای با نرم ۱ را بردارهای یکه می‌نامند. به دو بردار که حاصل ضرب داخلی آنها صفر باشد، بردارهای متعامد گفته می‌شود.

تحت چه شرایطی نامساوی کوشی - شوارتس، به تساوی تبدیل می‌شود؟ اگر x و y بردارهایی در R^n باشند و $|x| |y| = |(x, y)|$ ، آنگاه کسینوس زاویه بین x و y ، برابر ± 1 است. در هر دو حالت x و y وابسته خطی اند (چرا؟). قضیه زیر نشان می‌دهد که این مطلب همیشه درست است.

قضیه ۳ فرض کنیم x و y بردارهایی در R^n باشند. در این صورت $|x| |y| = |(x, y)|$ ، اگر و فقط اگر x و y وابسته خطی باشند.

اثبات ابتدا فرض می‌کنیم $|x| |y| = |(x, y)|$. اگر $x = 0$ یا $y = 0$ ، واضح است که x و y وابسته خطی اند. اگر چنین نباشد، داریم

$$(x, y) = |x| |y| \quad \text{یا} \quad (x, y) = -|x| |y|$$

در حالت اول، نتیجه می‌شود که

$$\left(\frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|}, \frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|} \right) = 0$$

در حالت دوم

$$\left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}, \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|} \right) = 0$$

و در هر حال

$$\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} = \pm \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}$$

پس، \mathbf{x} و \mathbf{y} وابسته خطی اند.

از طرف دیگر، اگر \mathbf{x} و \mathbf{y} وابسته خطی باشند، یکی از آنها، مثلاً \mathbf{x} ، ضرب اسکالری از دیگری است؛ از اینرو $\mathbf{x} = \beta \mathbf{y}$.

بنابراین $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\beta \mathbf{y}, \mathbf{y}) = \beta(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = \beta|\mathbf{y}|^2$ ، حال آنکه $|\mathbf{x}| = |\beta||\mathbf{y}|$ ، پس،
 $|\mathbf{x}|^2 = |\beta|^2 |\mathbf{y}|^2$ ، $|\mathbf{x}| = |\beta| |\mathbf{y}|$.

نتیجه اگر \mathbf{a} و \mathbf{b} بردارهای یک‌ه باشند و $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1$ ، آنگاه $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.
 گردآورده بردارهای $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ در R^n را دستگاه متعامد یک‌ه گویند اگر هر دو بردار متمایز، متعامد باشند و نرم هر بردار ۱ باشد. برحسب دلتای کرونگر داریم

$$(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \delta_{ij}$$

برای مثال، در R^3 ، اگر $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ، آنگاه بردارهای

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -b \\ a \\ d \\ -c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -c \\ -d \\ a \\ b \end{bmatrix}$$

یک دستگاه متعامد یک‌ه تشکیل می‌دهند.

از تعریف، واضح است که هر زیرمجموعه از یک مجموعه متعامد یک‌ه از بردارها، خود یک مجموعه متعامد یک‌ه است.

اگر دستگاه متعامد یک‌ه پایه‌ای برای R^n باشد، آن را پایه متعامد یک‌ه می‌نامند. برای

مثال، پایه متعارف $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ یک پایه متعامد یک‌ه برای R^n است. در R^3 ،
 $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$

و در R^3 ، $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ ، $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ ، $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ، $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ ، مثالهایی از پایه متعامد یک‌ه هستند.

قضیه ۴ فرض کنیم x_1, x_2, \dots, x_p بردارهای از بردارهای متعامد غیرصفر در R^n باشد. در این صورت x_1, x_2, \dots, x_p مستقل خطی اند.

اثبات فرض می‌کنیم $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k = 0$ اگر حاصلضرب داخلی طرفین در x_i را تشکیل دهیم، حاصل می‌شود $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k, x_i) = 0$ یا $\alpha_1 (x_1, x_i) + \dots + \alpha_k (x_k, x_i) = 0$ چون به ازای $j \neq i$ ، $(x_j, x_i) = 0$ داریم $\alpha_i (x_i, x_i) = 0$ و چون $x_i \neq 0$ داریم $(x_i, x_i) \neq 0$ پس، $\alpha_i = 0$ لذا، اگر $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k = 0$ آنگاه $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ در نتیجه x_1, x_2, \dots, x_p مستقل خطی اند.

از این قضیه چنین برمی‌آید که هریک از مجموعه‌های زیر از بردارهای R^3 ، مستقل خطی است.

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

یک نوع ضرب داخلی روی C^n وجود دارد که به ضرب داخلی روی R^n مربوط است. اگر a و b دو بردار در C^n باشند،

$$b = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}, a = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

حاصلضرب داخلی a و b ، یعنی (a, b) ، را به صورت

$$(a, b) = \alpha_1 \bar{\beta}_1 + \alpha_2 \bar{\beta}_2 + \dots + \alpha_n \bar{\beta}_n$$

تعریف می‌کنیم، که در آن $\bar{\beta}$ نشانگر مزدوج مختلط عدد مختلط β است. اگر a و b بردارهایی در R^n باشند، یعنی اگر همه مؤلفه‌های a و b حقیقی باشند، این تعریف حاصلضرب داخلی، با تعریف قبلی تطبیق می‌کند.

خواص ضرب داخلی مختلط مشابه با خواص ضرب داخلی حقیقی است. فرض می‌کنیم a, b, c و c متعلق به C^n باشند و α و β اسکالرهایی مختلط.

$$(a, a) \geq 0 \quad (1)$$

$$(a, a) = 0 \text{ اگر و فقط اگر } a = 0$$

$$(a, b + c) = (a, b) + (a, c) \quad (2)$$

$$(a + b, c) = (a, c) + (b, c)$$

$$(\alpha a, b) = \alpha (a, b) \quad (3)$$

$$(a, \beta b) = \bar{\beta} (a, b)$$

$$(a, b) = \overline{(b, a)} \quad (4)$$

مثلاً برای اثبات (۱) ملاحظه می‌کنیم که

$$(a, a) = \alpha_1 \bar{\alpha}_1 + \alpha_2 \bar{\alpha}_2 + \dots + \alpha_n \bar{\alpha}_n = |\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2$$

چون $|\alpha_1|^2 \geq 0, \dots, |\alpha_n|^2 \geq 0$ ، داریم $(a, a) \geq 0$. اگر $(a, a) = 0$ ، آنگاه $a = 0$ که ایجاب می‌کند $|\alpha_1|^2 = |\alpha_2|^2 = \dots = |\alpha_n|^2 = 0$.

برای اثبات (۲)، ملاحظه می‌کنیم که

$$(b, a) = \beta_1 \bar{\alpha}_1 + \dots + \beta_n \bar{\alpha}_n \quad \text{و} \quad (a, b) = \alpha_1 \bar{\beta}_1 + \dots + \alpha_n \bar{\beta}_n$$

$$(b, a) = \bar{\beta}_1 \alpha_1 + \dots + \bar{\beta}_n \alpha_n = (a, b) \quad \text{پس،}$$

اثبات خواص دیگر کاملاً مشابه با اینهاست.

مانند گذشته، نرم بردار a را، که با $|a|$ نشان داده می‌شود، به صورت $|a| = (a, a)^{1/2}$ تعریف می‌کنیم. در اینجا نیز خواص زیر را از روی خواص ضرب داخلی به دست می‌آوریم.

$$|a| \geq 0 \quad (۱)$$

$$a = 0 \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad |a| = 0$$

$$|\alpha a| = |\alpha| |a| \quad (۲)$$

نامساوی کوشی-شوارتس در حالت مختلط نیز برقرار است.

قضیه ۵ اگر a و b متعلق به C^n باشند، آنگاه $|(a, b)| \leq |a| |b|$.

اثبات اگر $a = 0$ ، $b = 0$ ، یا $(a, b) = 0$ ، نتیجه واضح است. پس فرض می‌کنیم $a \neq 0$ ، $b \neq 0$ و $(a, b) \neq 0$.

چون

$$\left(\frac{b}{|b|} - \frac{(a, b)}{(a, b)} \cdot \frac{a}{|a|}, \frac{b}{|b|} - \frac{(a, b)}{(a, b)} \cdot \frac{a}{|a|} \right) \geq 0$$

داریم

$$\begin{aligned} \frac{(b, b)}{|b|^2} - \frac{|(a, b)|^2}{|a|^2 |b|^2} (b, a) - \frac{|(a, b)|}{|a| |b|} (a, b) \\ + \frac{|(a, b)|^2}{(a, b) \overline{(a, b)}} \cdot \frac{(a, a)}{|a|^2} \geq 0 \end{aligned}$$

از آنجا که $(b, b) = |b|^2$ ، $(a, b) \overline{(a, b)} = |(a, b)|^2$ ، $\overline{(a, b)} = (b, a)$ و $(a, a) = |a|^2$ نتیجه می‌شود که

$$2 - 2 \frac{|(a, b)|}{|a||b|} \geq 0$$

یا

$$|(a, b)| \leq |a||b|.$$

نامساوی کوشی-شوارتس، مثل قبل، نامساوی نرمی $|a + b| \leq |a| + |b|$ را به دست می‌دهد.

تعریف تعامد، دستگاه متعامد یکه، و پایه برای بردارهای مختلط، از لحاظ صوری عیناً نظیر تعریف این مفاهیم برای بردارهای حقیقی است. بعلاوه، درمورد بردارهای مختلط و ضرب داخلی مختلط، قضایایی مشابه آنچه که در مورد بردارهای حقیقی و ضرب داخلی حقیقی داشتیم، برقرار است.

تمرینات

۱. ثابت کنید که هریک از مجموعه‌های زیر از بردارها، متعامد است.

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c} 5 \\ -2 \\ 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} -1 \\ -2 \\ 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right] \quad (\text{ب}) \qquad \left[\begin{array}{c} -4 \\ 3 \\ 3 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 4 \end{array} \right] \quad (\text{الف}) \\ & \left[\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right] \quad (\text{ج}) \end{aligned}$$

۲. دستگاههای متعامد یکه زیر را به پایه‌های متعامد یکه برای R^4 بسط دهید.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right], \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{array} \right], \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right] \quad (\text{الف}) \\ & \frac{1}{5} \left[\begin{array}{c} -2 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{array} \right], \frac{1}{5} \left[\begin{array}{c} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -4 \end{array} \right], \frac{1}{5} \left[\begin{array}{c} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right] \quad (\text{ب}) \end{aligned}$$

۳. اگر a و b بردارهای متعامد یکه‌ای در R^3 باشند، نشان دهید که $a \times b$ یک پایه متعامد یکه برای R^3 است.

۴. نشان دهید که بردارهای $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}$ در C^2 متعامدند.

۵. فرض کنید u_1, \dots, u_n پایه متعامد یکه‌ای برای R^n باشد و نیز فرض کنید $x = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$. نشان دهید که $\alpha_i = (x, u_i)$.

۶. اگر y_1, y_2, \dots, y_n بردارهایی عمود بر بردار x باشند، نشان دهید که هر بردار در $\text{sp}(y_1, y_2, \dots, y_n)$ بر x عمود است.

۷. فرض کنید x_1, x_2, \dots, x_n بردارهایی در R^n باشند. همچنین فرض کنید A ماتریسی باشد که ستونهایش x_1, x_2, \dots, x_n هستند. نشان دهید که $A^T A$ قطری است اگر و فقط اگر هر زوج از بردارهای متمایز در x_1, x_2, \dots, x_n متعامد باشند.

۸. اگر x و y دوبردار باشند، نشان دهید که

$$\frac{1}{2}(|x+y|^2 + |x-y|^2) = |x|^2 + |y|^2$$

۹. نشان دهید که هر پایه متعامد یک‌ه برای R^2 ، به صورت $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}$ یا به صورت $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix}$ است که در آنها $a^2 + b^2 = 1$.

۱۰. فرض کنید f تبدیلی خطی از R^n به R^n باشد. نشان دهید که بردار y ای متعلق به R^n وجود دارد به طوری که به ازای هر x متعلق به R^n داریم، $f(x) = (x, y)$.

۱۱. طول قطر یک مکعب n بعدی را که طول هر ضلع آن ۱ است، بیابید.

۱۲. پایه متعامد یک‌ه‌ای برای فضای جوابهای دستگاه معادلات زیر بیابید.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

۱۳. فرض کنید T عملگری خطی روی R^n باشد با این خاصیت که به ازای هر $x, y \in R^n$ ، $(T(x), x) = 0$. نشان دهید که به ازای هر $x \in R^n$ ،

$$(T(x), y) = -(T(y), x).$$

[راهنمایی: $(T(x+y), x+y) = 0$ را بسط دهید].

۱۴. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ و T عملگری خطی روی R^n باشد که با ضابطه $T(x) = Ax$ تعریف می‌شود. اگر $A = [a_{ij}]$ ، نشان دهید که $(T(e_i), e_j) = a_{ji}$.

۱۵. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ و T عملگری خطی روی R^n باشد که با ضابطه $T(x) = Ax$ تعریف می‌شود. فرض کنید $(T(x), x) = 0$.

(الف) نشان دهید که A متقارن کج است. [راهنمایی: از تمرینهای ۱۳ و ۱۴ استفاده کنید].

(ب) اگر n فرد باشد، نشان دهید که T وارون ناپذیر است.

(ج) اگر $n = 2$ ، نشان دهید که T مضرب اسکالری از R است، که R دورانی به اندازه 90° درجه است.

۱۶. اگر x_1, x_2, \dots, x_n مجموعه متعامدی از بردارها باشد، نشان دهید که

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2$$

۱۷. اگر $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ نشان دهید که بردارهای

$$\begin{bmatrix} -d \\ c \\ -b \\ a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -c \\ -d \\ a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -b \\ a \\ d \\ -c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

پایه متعامدیکه‌ای برای R^4 تشکیل می‌دهند.

۱۸. تبدیل خطی غیر صفری مانند T' از R^2 به R^2 بیابید به طوری که به ازای هر x ، $(T(x), x) = 0$.

۱۹. اگر x و y بردارهای متعامدیکه‌ای باشند، نشان دهید که $|x - y| = \sqrt{2}$.

۲۰. فرض کنید x یک برداریکه باشد. تابع f را که به صورت $f(y) = |x - y|$ روی بردارهای با نرم ۱ تعریف می‌شود، در نظر بگیرید.

(الف) نشان دهید که مقدار بیشینه f ، ۲ است.

(ب) نشان دهید که مقدار کمینه f ، ۰ است.

(ج) نشان دهید که $f(y) = \sqrt{2}$ اگر و فقط اگر x و y متعامد باشند.

۲۱. اگر x و y دو بردار باشند، نشان دهید که $|x + y| = |x| + |y|$ اگر و فقط اگر x و y وابسته خطی باشند.

۲۲. اگر x و y بردارهایی حقیقی باشند، مقدار کمینه تابع $f(\lambda) = |x + \lambda y|^2$ را معین کنید.

۲۳. نشان دهید که اقطار یک مکعب در R^3 متعامد نیستند.

۲۴. اگر a و b دو بردار متعامدیکه باشند، نشان دهید که بردارهای $\alpha a + \beta b$ و $\gamma a + \delta b$ متعامدند اگر و فقط اگر $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$.

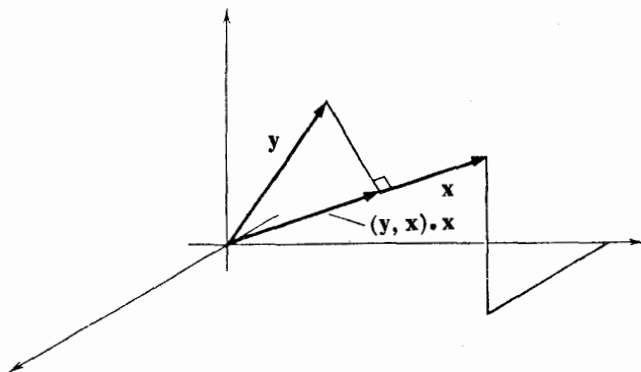
۳ مکملهای متعامد و نامساویهای مربوطه

اگر x برداری یک‌ه در R^n (یا C^n) باشد و y بردار دیگری در همان فضا، کمیت (y, x) را مؤلفه y در جهت x می‌نامند. بردار $(y, x)x$ تصویر y بر x نامیده می‌شود. اگر x و y دو بردار در R^3 باشند، آنگاه $(y, x)x$ برداری است که انتهای آن نقطه تقاطع خطی است در امتداد x با عمودی که از نقطه انتهایی y برای این خط رسم می‌شود (ر. ک. شکل ۱۷.۶). اگر x_1, x_2, \dots, x_n پایه متعامدیکه‌ای برای R^n (یا C^n) باشد، اسکالرهای $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ وجود دارند به قسمی که $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$ در نتیجه

$$(x, x_i) = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n, x_i) = \alpha_i (x_i, x_i) = \alpha_i$$

$$x = (x, x_1)x_1 + (x, x_2)x_2 + \dots + (x, x_n)x_n$$

در این حالت می‌بینیم که مؤلفه x در جهت x_i همان مؤلفه i ام x نسبت به پایه



شکل ۱۷.۶

x_1, x_2, \dots, x_n است. با توجه به این مطلب، نامگذاری ما معقول است.

قضیه ۱ اگر x بردار یکه‌ای در R^n (یا C^n) باشد و y بردار دیگری در همین فضا، بردار y را می‌توان به صورت حاصلجمع دو بردار u و v نوشت، که u موازی x ، و v عمود بر x است. این تجزیه، یکتاست.

اثبات فرض کنیم $u = (y, x)x$ و $v = y - (y, x)x$. واضح است که u موازی x است و $u + v = y$ چون

$$(v, x) = (y - (y, x)x, x) = (y, x) - (y, x)(x, x) = 0$$

پس v بر x عمود است. لذا امکان تجزیه، به صورتی که درقضیه بیان شد، ثابت شده است. یکتایی تجزیه را با اثبات این امر که هر تجزیه‌ای دقیقاً همان است که در بالا عرضه شد، ثابت می‌کنیم. بدین منظور، فرض می‌کنیم $y = u + v$ ، که در آن به ازای یک اسکالر $u = \alpha x$ و $(v, x) = 0$. در این صورت

$$(y, x) = (u + v, x) = (u, x) + (v, x)$$

چون $(v, x) = 0$ و $u = \alpha x$ داریم: $(y, x) = \alpha(x, x) = \alpha$. لذا

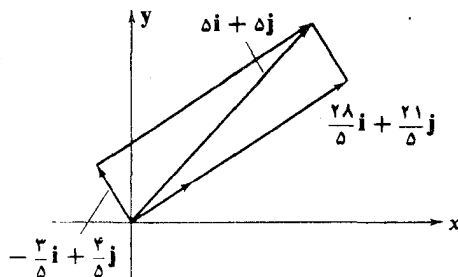
$$v = y - (y, x)x \text{ و } u = (y, x)x$$

مثال ۱ بردار $5i + 5j$ را به دو قسمت تجزیه می‌کنیم که یک قسمت موازی با و قسمت دیگر عمود بر بردار $5i + 5j$ باشد.

چون $(5i + 5j, 5i + 5j) = 50$ ، مؤلفه $5i + 5j$ در جهت $5i + 5j$ عبارت است از $5i + 5j$. پس، بنا به قضیه ۱،

$$5i + 5j = \left(\frac{28}{5}i + \frac{21}{5}j\right) + \left(-\frac{3}{5}i + \frac{4}{5}j\right)$$

در این تجزیه، بردار اولی موازی با $\frac{3}{5}\mathbf{j} + \frac{4}{5}\mathbf{i}$ و بردار دومی عمود بر آن است (ر. ک. شکل ۱۸.۶).



شکل ۱۸.۶

اکنون، روشی برای به دست آوردن یک مجموعه متعامدیکه، از گردآورده دلخواهی از بردارهای مستقل خطی، ارائه می‌دهیم.

فرض کنیم $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p$ گردآورده‌ای از بردارهای مستقل خطی در R^n (یا C^n) باشد. دنباله جدیدی از بردارهای $\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \dots, \mathbf{x}'_k$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'_1 &= \mathbf{x}_1 / |\mathbf{x}_1| \\ \mathbf{x}'_2 &= (\mathbf{x}_2 - (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}'_1)\mathbf{x}'_1) / |\mathbf{x}_2 - (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}'_1)\mathbf{x}'_1| \\ &\vdots \\ \mathbf{x}'_i &= \frac{\mathbf{x}_i - (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_1)\mathbf{x}'_1 - \dots - (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_{i-1})\mathbf{x}'_{i-1}}{|\mathbf{x}_i - (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_1)\mathbf{x}'_1 - \dots - (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_{i-1})\mathbf{x}'_{i-1}|} \\ &\vdots \\ \mathbf{x}'_k &= \frac{\mathbf{x}_k - (\mathbf{x}_k, \mathbf{x}'_1)\mathbf{x}'_1 - \dots - (\mathbf{x}_k, \mathbf{x}'_{k-1})\mathbf{x}'_{k-1}}{|\mathbf{x}_k - (\mathbf{x}_k, \mathbf{x}'_1)\mathbf{x}'_1 - \dots - (\mathbf{x}_k, \mathbf{x}'_{k-1})\mathbf{x}'_{k-1}|}\end{aligned}$$

قضیه ۲ فرایند متعامد سازی گرام - اشمیت^۱ فرض کنیم $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p$ گردآورده‌ای از بردارهای مستقل خطی در R^n (یا C^n) باشد. در این صورت بردارهای $\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \dots, \mathbf{x}'_k$ که در بالا تعریف شدند، دارای خواص زیرند:

$$(1) \quad \mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \dots, \mathbf{x}'_k \text{ یک مجموعه متعامدیکه از بردارهاست.}$$

$$(2) \quad \text{به ازای } i = 1, 2, \dots, k, \quad \text{sp}(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \dots, \mathbf{x}'_i) = \text{sp}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_i)$$

اثبات بنا به استقلال خطی $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p$ واضح است که $\mathbf{x}_i \neq 0$ و لذا، تعریف $\mathbf{x}'_i = \mathbf{x}_i / |\mathbf{x}_i|$ با معنی است. همچنین واضح است که $|\mathbf{x}'_i| = 1$ و $\text{sp}(\mathbf{x}'_i) = \text{sp}(\mathbf{x}_i)$ با فرض درست بودن قضیه برای $i - 1$ ، ثابت می‌کنیم که قضیه برای i نیز درست است. ابتدا، نشان می‌دهیم که $\mathbf{x}_i - (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_1)\mathbf{x}'_1 - \dots - (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_{i-1})\mathbf{x}'_{i-1} \neq 0$ و

از آنجا تعریف \mathbf{x}'_i بامعنی خواهد بود. در واقع، اگر

$$\mathbf{x}_i - (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_1) \mathbf{x}'_1 - \dots - (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_{i-1}) \mathbf{x}'_{i-1} = \mathbf{0}$$

آنگاه \mathbf{x}_i متعلق به $\text{sp}(\mathbf{x}'_1, \dots, \mathbf{x}'_{i-1}) = \text{sp}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1})$ است. از اینجا نتیجه می‌شود که \mathbf{x}_i ترکیبی خطی از $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}$ است که این نتیجه متناقض با استقلال خطی $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i$ می‌باشد. از اینرو،

$$\mathbf{x}_i - (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_1) \mathbf{x}'_1 - \dots - (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_{i-1}) \mathbf{x}'_{i-1} \neq \mathbf{0}$$

از تعریف \mathbf{x}'_i بلافاصله نتیجه می‌شود که $|\mathbf{x}'_i| = 1$. حال، اگر $j < i$ ،

$$(\mathbf{x}'_i, \mathbf{x}'_j) = \left(\frac{\mathbf{x}_i - (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_1) \mathbf{x}'_1 - \dots - (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_{i-1}) \mathbf{x}'_{i-1}}{|\mathbf{x}_i - (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_1) \mathbf{x}'_1 - \dots - (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_{i-1}) \mathbf{x}'_{i-1}|}, \mathbf{x}'_j \right)$$

$$= \frac{1}{|\mathbf{x}_i - (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_1) \mathbf{x}'_1 - \dots - (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_{i-1}) \mathbf{x}'_{i-1}|} ((\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_j) - (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_j)(\mathbf{x}'_j, \mathbf{x}'_j))$$

در مرحلهٔ اخیر، از این فرض که $\mathbf{x}'_1, \dots, \mathbf{x}'_i, \mathbf{x}'_{i-1}$ یک دستگاه متعامد یک‌ه است استفاده کردیم. چون $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_j) - (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_j)(\mathbf{x}'_j, \mathbf{x}'_j) = 0$ داریم $(\mathbf{x}'_i, \mathbf{x}'_j) = 0$. لذا، $\mathbf{x}'_1, \dots, \mathbf{x}'_i, \mathbf{x}'_{i-1}$ یک دستگاه متعامد یک‌ه است.

چون $\mathbf{x}'_1, \dots, \mathbf{x}'_i$ متعلق به $\text{sp}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_i)$ است، داریم

$$\text{sp}(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \dots, \mathbf{x}'_i) \subset \text{sp}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_i)$$

بنا به قضیهٔ ۴، از بخش ۲.۶، $\mathbf{x}'_1, \dots, \mathbf{x}'_i, \mathbf{x}'_{i-1}$ مستقل خطی‌اند. چون $\text{sp}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_i)$ زیرفضایی با بعد i است، طبق قضیهٔ ۲، از بخش ۸.۴، $\mathbf{x}'_1, \dots, \mathbf{x}'_i, \mathbf{x}'_{i-1}$ پایه‌ای برای $\text{sp}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_i)$ است. لذا

$$\bullet \quad \text{sp}(\mathbf{x}'_1, \dots, \mathbf{x}'_i) = \text{sp}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i).$$

مثال ۲ یک پایهٔ متعامد یک‌ه برای زیرفضایی از \mathbb{R}^4 که توسط بردارهای

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

پدید می‌آید، می‌یابیم.

$$\mathbf{x}_2 - (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}'_1) \mathbf{x}'_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{x}'_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{لذا} \quad |\mathbf{x}_1| = 3$$

$$\text{پس،} \quad \mathbf{x}'_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{در این صورت}$$

$$\mathbf{x}_3 - (\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_1')\mathbf{x}_1' - (\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2')\mathbf{x}_2' = \mathbf{x}_3 - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{x}_1' - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{x}_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{بنابراین} \quad \mathbf{x}_3' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{از اینرو}$$

یک پایه متعامد یکه برای زیرفضایی از \mathbb{R}^4 است که توسط $\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1$ پدید می‌آید.

قضیه ۳ فرض کنیم H زیرفضایی از \mathbb{R}^n (یا \mathbb{C}^n) باشد؛ در این صورت H دارای یک پایه متعامد یکه است.

اثبات پایه دلخواهی برای H انتخاب می‌کنیم و فرایند متعامد سازی گرام - اشمیت را در مورد آن به کار می‌بریم تا یک پایه متعامد یکه برای H به دست آید.

فرض کنیم H زیرفضایی از \mathbb{R}^n (یا \mathbb{C}^n) باشد. مکمل متعامد H ، که آن را با H^\perp نشان می‌دهیم، مجموعه $\{y \mid (h, y) = 0, h \text{ هر ازای } H\}$ متعلق به H^\perp است. به عبارت دیگر، H^\perp از بردارهایی تشکیل شده است که بر همه اعضای H عمودند.

اگر $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ پایه‌ای برای H باشد، بردار y متعلق به H^\perp است اگر و فقط اگر بر همه بردارهای $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ عمود باشد. در واقع، اگر y متعلق به H^\perp باشد، آنگاه بر همه اعضای H و منجمله بر $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ عمود است. از طرف دیگر، اگر y بر $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ عمود باشد و اگر x متعلق به H باشد، اسکالرهای $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ وجود دارند به نحوی که $x = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{x}_k$ از اینرو

$$\begin{aligned} (x, y) &= (\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{x}_k, y) \\ &= \alpha_1 (\mathbf{x}_1, y) + \alpha_2 (\mathbf{x}_2, y) + \dots + \alpha_k (\mathbf{x}_k, y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

پس، y بر همه اعضای H عمود است و بنابراین متعلق است به H^\perp .

مثال ۳ مکمل متعامد زیرفضایی از \mathbb{R}^3 را که توسط بردارهای $\mathbf{j} + \mathbf{k}$ و $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ پدید می‌آید، می‌یابیم.

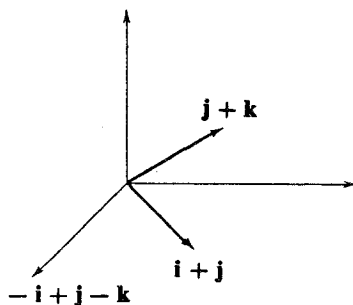
برای این کار، کافی است بردارهایی از \mathbb{R}^3 را که بر $\mathbf{j} + \mathbf{k}$ و $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ عمودند، معین کنیم. فرض کنیم $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ یک چنین برداری باشد. نتیجه می‌شود که

$$x + y = 0$$

$$y + z = 0$$

اگر این دستگاه را حل کنیم، می‌بینیم که مکمل متعامد، از بردارهایی به صورت $-ci + cj - ck$ تشکیل شده است. لذا، مکمل متعامد، زیرفضایی از R^3 است که توسط بردار $-i + j - k$ پدید می‌آید.

در این مثال، مکمل متعامد، همان فضای بردارهای عمود بر صفحه‌ای است که توسط $i + j$ و $j + k$ پدید می‌آید (ر. ک. شکل ۱۹.۶).



شکل ۱۹.۶

قضیه زیر می‌گوید که مکمل متعامد یک زیرفضای مفروض، خود همواره یک زیر-فضاست.

قضیه ۴ فرض کنیم H زیرفضایی از R^n (یا C^n) باشد و H^\perp مکمل متعامد آن. در این صورت، H^\perp یک زیرفضاست.

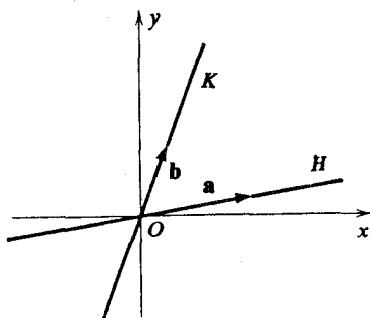
اثبات فرض می‌کنیم y_1 و y_2 متعلق به H^\perp باشند. در این صورت به ازای هر x در H ، داریم: $(y_1, x) = 0$ و $(y_2, x) = 0$. پس $(y_1 + y_2, x) = (y_1, x) + (y_2, x) = 0$. از اینرو $y_1 + y_2$ که بر هر عضو H عمود است، متعلق به H^\perp می‌باشد. همین‌طور، اگر α یک اسکالر و y متعلق به H^\perp باشد، آنگاه به ازای هر $x \in H$ ،

$$(\alpha y, x) = \alpha(y, x) = 0$$

در نتیجه αy متعلق است به H^\perp .

دو زیرفضای H و K از یک فضای برداری V را مکمل یکدیگر گویند اگر $H \cap K = 0$ و $H + K = V$. به عبارت دیگر، اگر H و K فقط در بردار صفر مشترک باشند و هر بردار از V را بتوان به صورت حاصلجمع برداری در H و برداری در K نوشت. مثلاً، اگر a و b بردارهایی مستقل خطی در R^2 باشند، فرض کنیم H زیرفضای پدیدآمده توسط a ، و K زیرفضای پدیدآمده توسط b باشد. در این صورت H و K مکمل

یکدیگرند. در واقع، اگر z هم متعلق به H و هم متعلق به K باشد، آنگاه به ازای اسکالرهایی مناسب α و β ، داریم $z = \alpha a = \beta b$. لذا، $\alpha a - \beta b = 0$. ولی، چون a و b مستقل خطی اند، $\alpha = 0$ و $\beta = 0$. پس $z = 0$ و $H \cap K = 0$. همین طور، چون a و b مستقل خطی اند، R^2 را پدید می آورند. از این رو، هر بردار در R^2 ترکیبی خطی از a و b است و $H + K = R^2$ (ر. ک. شکل ۲۰.۶).



شکل ۲۰.۶

قضیه ۵ اگر H زیرفضایی از R^n (یا C^n) باشد، آنگاه زیرفضاهای H و H^\perp مکمل یکدیگرند. یعنی، $H + H^\perp = R^n$ و $H \cap H^\perp = 0$.

اثبات ابتدا، نشان می دهیم که H و H^\perp تنها در بردار صفر مشترک اند. فرض می کنیم y برداری متعلق به هر دوی H و H^\perp باشد. در این صورت چون y متعلق است به H^\perp ، بر همه بردارهای H عمود است. چون y متعلق به H نیز هست، داریم $(y, y) = 0$. بنابراین $y = 0$ از این رو H و H^\perp فقط در بردار صفر مشترک اند.

حال نشان می دهیم که هر بردار از R^n را می توان به صورت حاصلجمع برداری در H و برداری در H^\perp نوشت. فرض کنیم y بردار دلخواهی در R^n باشد. همچنین فرض کنیم x_1, x_2, \dots, x_k پایه متعامد یک‌ای برای H باشد قرار می دهیم

$$z = (y, x_1)x_1 + (y, x_2)x_2 + \dots + (y, x_k)x_k$$

واضح است که z به H تعلق دارد. پس $y = z + (y - z)$. برای تکمیل اثبات، باید نشان دهیم که $y - z$ متعلق به H^\perp است، توجه داریم که

$$\begin{aligned} (y - z, x_i) &= (y, x_i) - (z, x_i) \\ &= (y, x_i) - ((y, x_1)x_1 + \dots + (y, x_k)x_k, x_i) \\ &= (y, x_i) - (y, x_i)(x_i, x_i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

چون $y - z$ بر همه بردارهای موجود در یک پایه H عمود است، پس $y - z$ بر هر برداری از H عمود می باشد و لذا متعلق است به H^\perp .

برای مثال، اگر H زیرفضایی از \mathbb{R}^3 ، مرکب از بردارهای واقع بر یک صفحه گذرنده از مبدأ باشد، H^\perp مرکب از همه مضارب اسکالر برداری عمود بر صفحه خواهد بود. هر بردار در فضا را می توان به صورت حاصلجمع یک بردار روی صفحه و یک بردار عمود بر صفحه نوشت. واضح است که صفحه و خط عمود بر آن فقط در 0 مشترک اند.

اگر H و K زیرفضاهایی از \mathbb{R}^n (یا \mathbb{C}^n) باشند، خواص دیگر مکمل متعامد عبارت اند از:

$$(1) \text{ اگر } H \subset K, \text{ آنگاه } H^\perp \supset K^\perp.$$

$$(2) (H^\perp)^\perp = H.$$

برای اثبات (۱)، مشاهده می کنیم که اگر y متعلق به K^\perp باشد، بر همه بردارهای K و لذا بر همه بردارهای H عمود است. بنابراین $y \in H^\perp$.

برای اثبات (۲)، ابتدا توجه می کنیم که اگر x متعلق به H باشد، بنا به تعریف H^\perp ، بر همه بردارهای H^\perp عمود است. پس x به $(H^\perp)^\perp$ تعلق دارد. از اینرو، $H \subset (H^\perp)^\perp$. حال، فرض می کنیم y متعلق به $(H^\perp)^\perp$ باشد. در این صورت $y = h + k$ ، که h به H و k به H^\perp تعلق دارند. پس

$$\begin{aligned} (y, y) &= (h + k, h + k) \\ &= (h, h) + (h, k) + (k, h) + (k, k) \\ &= (h, h) + (k, k) \end{aligned}$$

بنابراین، $|y|^2 = |h|^2 + |k|^2$. همچنین

$$(y, y) = (y, h + k) = (y, h) + (y, k)$$

طبق فرض، y متعلق است به $(H^\perp)^\perp$. لذا، $(y, k) = 0$ و

$$(y, y) = (y, h) = (h + k, h) = (h, h).$$

پس $|h|^2 = |y|^2$. بنابراین $|k|^2 = 0$ و لذا $k = 0$ و $y = h$ متعلق به H است. بنا بر ترکیب این نتیجه و نتیجه قبلی، دیده می شود که $(H^\perp)^\perp = H$.

نامساوی مفیدی وجود دارد که نرم یک بردار را به مؤلفه های آن نسبت به یک دستگاه متعامد یکم مربوط می کند. این نامساوی، به نامساوی بسل^۱ مشهور است.

قضیه ۶ فرض کنیم x_1, x_2, \dots, x_k مجموعه متعامد یکم ای از بردارهای \mathbb{R}^n (یا \mathbb{C}^n) باشد. همچنین فرض کنیم x بردار دیگری در همین فضا باشد. در این صورت

$$|x|^2 \geq \sum_{i=1}^k |(x, x_i)|^2$$

بعلاوه، اگر x_1, x_2, \dots, x_k پایه متعامدیکه باشد، تساوی برقرار است.

اثبات فرض کنیم H زیرفضای پدیدآمده توسط x_1, x_2, \dots, x_k باشد. بنا به قضیه ۵، $h = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k$ به H و l به H^\perp تعلق دارند. از اینرو $h = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k$ و $x = h + l = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k + l$ را پدید می آورند و x_1, x_2, \dots, x_k فضای H متعلق به H^\perp است،

$$\begin{aligned}(x, x_i) &= (\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k + l, x_i) \\ &= \alpha_i + (l, x_i) \\ &= \alpha_i\end{aligned}$$

در نتیجه می توانیم x را به صورت $x = (x, x_1)x_1 + \dots + (x, x_k)x_k + l$ بنویسیم. بنا براین

$$\begin{aligned}(x, x) &= ((x, x_1)x_1 + \dots + (x, x_k)x_k + l, (x, x_1)x_1 + \dots + (x, x_k)x_k + l) \\ &= |(x, x_1)|^2 + \dots + |(x, x_k)|^2 + (l, l)\end{aligned}$$

پس $|x|^2 \geq |(x, x_1)|^2 + \dots + |(x, x_k)|^2$ اگر x_1, x_2, \dots, x_k پایه متعامدیکه ای باشد، $H^\perp = 0$ ، لذا، $l = 0$ و

$$|x|^2 = |(x, x_1)|^2 + \dots + |(x, x_k)|^2.$$

تمرینات

۱. نشان دهید که مکمل متعامد زیرفضایی از R^2 که توسط $i_\theta = (\cos \theta)i + (\sin \theta)j$ پدید می آید، زیرفضای پدیدآمده توسط $j_\theta = -(\sin \theta)i + (\cos \theta)j$ است.

۲. در هر یک از موارد زیر، نشان دهید که u یک بردار یکه است و مؤلفه x در جهت u را بیابید.

$$x = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, u = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

۳. یک پایه متعامد یکه برای زیرفضایی از R^n که توسط هر یک از مجموعه های بردارهای زیر پدید می آید، بیابید.

$$\begin{aligned}& \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{الف}) \\ & \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \quad (\text{ج})\end{aligned}$$

۴. فرض کنید x_1, \dots, x_k دستگاه متعامد یکه‌ای در R^n باشد. نشان دهید که x_1, x_2, \dots, x_k زیرمجموعه‌ای از یک پایه متعامد یکه برای R^n است.

۵. هر یک از مجموعه‌های بردارهای زیر، یک زیرفضای V از R^n را پدید می‌آورد. یک پایه متعامد یکه برای مکمل متعامد V بیابید.

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right] \quad (\text{ج}) \quad \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right] \quad (\text{ب}) \quad \left[\begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ -1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right] \quad (\text{الف}) \end{aligned}$$

۶. فرض کنید u_1, u_2, u_3 یک پایه متعامد یکه برای R^3 باشد. همچنین فرض کنید v بردار یکه‌ای عمود بر u_3 باشد. نشان دهید $v = au_1 + bu_2$ که در آن $a^2 + b^2 = 1$.

۷. فرض کنید a و b بردارهایی مستقل خطی در R^3 باشند و فرض کنید H زیرفضای پدیدآمده توسط a و b باشد. نشان دهید که $a \times b$ مکمل متعامد H را پدید می‌آورد.

۸. دیدیم که اگر H زیرفضایی از R^n باشد و H^\perp مکمل متعامد آن، هر بردار از R^n را می‌توان به صورت حاصلجمع برداری در H و برداری در H^\perp نوشت. نشان دهید که عبارت حاصل یکتاست.

۹. اگر x_1, x_2, \dots, x_k یک مجموعه متعامد یکه از بردارهایی در R^n باشد، نشان دهید که x_1, x_2, \dots, x_k یک پایه متعامد یکه است اگر و فقط اگر به ازای هر $x \in R^n$

$$|x|^2 = |(x, x_1)|^2 + |(x, x_2)|^2 + \dots + |(x, x_k)|^2$$

۱۰. نشان دهید که زیرفضاهایی از R^4 که توسط جفتهای زیر از بردارها پدید می‌آیند، مکمل یکدیگرند.

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right] \quad (\text{ج}) \quad \left[\begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right] \quad (\text{ب}) \quad \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] \quad (\text{الف}) \end{aligned}$$

۱۱. فرض کنید H زیرفضایی از R^n باشد و x_1, x_2, \dots, x_k پایه متعامد یکه‌ای برای H .

اگر $x \in R^n$ فرض کنید $P(x) = (x, x_1)x_1 + (x, x_2)x_2 + \dots + (x, x_k)x_k$ (الف) نشان دهید که P یک تبدیل خطی است.

(ب) نشان دهید که $P^2 = P$.

(ج) نشان دهید که فضای مقادیر P ، H است و فضای پوچ آن، H^\perp .

(د) نشان دهید که فضای مقادیر $(I - P)$ ، H^\perp است و فضای پوچ آن، H .

(ه) اگر x برداری در R^n و y برداری در H باشد، نشان دهید که

$$|x - y| \geq |x - P(x)|$$

یعنی، $P(x)$ نزدیکترین بردار به x در H است.

۱۲. اگر x_1, x_2, \dots, x_n پایه متعامد یک‌ه‌ای برای R^n باشد و y و z دو بردار در R^n باشند، نشان دهید که

$$(y, z) = (y, x_1)(z, x_1) + (y, x_2)(z, x_2) + \dots + (y, x_n)(z, x_n)$$

۱۳. اگر H زیرفضایی h بعدی از R^n ، و K زیرفضای مکمل H باشد، نشان دهید که K دارای بعد $n - h$ است.

۱۴. اگر H و K زیرفضاهایی از R^n باشند که مکمل متعامد آنها یکی است، نشان دهید که $H = K$.

۱۵. اگر x_1, x_2, \dots, x_n پایه متعامد یک‌ه‌ای برای R^n باشد، نشان دهید که

$$(\text{sp}(x_1, x_2, \dots, x_i))^\perp = \text{sp}(x_{i+1}, \dots, x_n)$$

۱۶. اگر H زیرفضایی از R^n و x_1, x_2, \dots, x_k یک مجموعه متعامد از بردارهایی در H ، و y_1, y_2, \dots, y_k یک مجموعه متعامد از بردارهایی در H^\perp باشد، نشان دهید که $x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_k + y_k$ یک مجموعه متعامد از بردارهایی در R^n است.

۴ ماتریسها و عملگرهای متعامد و یکانی

اگر A یک ماتریس حقیقی $n \times n$ باشد و $A^T A = I_n$ را ماتریس متعامد می‌نامند.

مثلاً، اگر

$$A = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ \frac{9}{25} & \frac{4}{5} & -\frac{12}{25} \\ \frac{12}{25} & \frac{3}{5} & \frac{16}{25} \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{9}{25} & \frac{12}{25} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{12}{25} & \frac{16}{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ -\frac{9}{25} & \frac{4}{5} & -\frac{12}{25} \\ \frac{12}{25} & \frac{3}{5} & \frac{16}{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

پس، A یک ماتریس متعامد است. همچنین

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

از اینرو

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

یک ماتریس متعامد است. واضح است که هر ماتریس متعامد وارون‌پذیر است و $A^{-1} = A^T$.

اگر A یک ماتریس $n \times n$ و A_1, A_2, \dots, A_n ستونهایش باشند، آنگاه

$$A^T A = \begin{bmatrix} (A_1, A_1) & (A_1, A_2) & \dots & (A_1, A_n) \\ (A_2, A_1) & (A_2, A_2) & \dots & (A_2, A_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (A_n, A_1) & (A_n, A_2) & \dots & (A_n, A_n) \end{bmatrix}$$

از این قرار، ماتریس A متعامد است اگر و فقط اگر ستونهایش یک پایه متعامد یک برای \mathbb{R}^n تشکیل دهند.

ماتریس $n \times n$ مختلط U را یکانی نامند اگر $U^* U = I_n$. درست مانند حالت حقیقی، ماتریس U یکانی است اگر و فقط اگر ستونهایش یک پایه متعامد یک برای \mathbb{C}^n تشکیل دهند. برای مثال، اگر $|a|^2 + |b|^2 = 1$ ، ماتریس

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}$$

یکانی است. در واقع،

$$\begin{bmatrix} \bar{a} & -b \\ \bar{b} & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |a|^2 + |b|^2 & 0 \\ 0 & |a|^2 + |b|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

اگر A یک ماتریس $n \times n$ متعامد باشد، از $A^T A = I_n$ چنین برمی آید که

$$\det A = \pm 1 \quad \text{یا} \quad \det A^T \det A = 1$$

اگر A یک ماتریس $n \times n$ متعامد باشد، عملگری خطی روی \mathbb{R}^n را که به صورت $T(x) = Ax$ تعریف می شود، در نظر می گیریم. در این صورت

$$\begin{aligned} (T(x), T(y)) &= (T(x))^T (T(y)) \\ &= (Ax)^T (Ay) \\ &= (x^T A^T) (Ay) \\ &= x^T (A^T A) y = x^T y = (x, y) \end{aligned}$$

به عبارت دیگر، عملگر خطی القا شده توسط یک ماتریس متعامد، حاصلضرب داخلی را بدون تغییر می گذارد. همین طور، عملگر خطی روی \mathbb{C}^n ، القا شده توسط یک ماتریس یکانی، حاصلضرب داخلی مختلط را بدون تغییر می گذارد.

اگر $\bar{T}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (یا $T: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$) عملگری خطی باشد به قسمی که به ازای هر دو بردار x و y ، $(T(x), T(y)) = (x, y)$ را همانمتری می نامند. همان طور که در بالا دیدیم، هر عملگر خطی القا شده توسط یک ماتریس متعامد یا یکانی، همانمتری است. قضیه زیر تعدادی از خواص مهم همانمترها را جمع بندی می کند.

قضیه ۱ فرض کنیم $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (یا $T: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$) یک همانمتری باشد. در این صورت

$$|T(x)| = |x| \quad (\text{الف})$$

(ب) T یکر یختی است.

(ج) اگر x و y بردارهای متعامدی باشند، $T(x)$ و $T(y)$ نیز متعامدند.

(د) اگر x_1, \dots, x_n یک پایه متعامد یکه باشد، $T(x_1), \dots, T(x_n)$ نیز یک پایه متعامد یکه است.

اثبات (الف) چون T همانمتری است، $(T(x), T(x))^{1/2} = (x, x)^{1/2} = |T(x)| = |x|$ ، لذا،

(ب) چون T عملگری خطی روی یک فضای متناهی البعد است، اگر یک به یک باشد، یکر یختی است. چون $|T(x)| = |x|$ ، اگر $T(x) = 0$ ، آنگاه $x = 0$ پس، T یک به یک است.

(ج) اگر $(x, y) = 0$ ، آنگاه $(T(x), T(y)) = 0$.

(د) اگر x_1, \dots, x_n یک پایه متعامد یکه باشد، بنا به قسمت (الف)، هر یک از $T(x_1), \dots, T(x_n)$ یک بردار یکه است. بنا به (ج)، اگر $i \neq j$ ، $T(x_i)$ و $T(x_j)$ متعامدند، زیرا که x_i و x_j متعامدند. طبق قسمت (ب)، اگر x_1, \dots, x_n یک پایه تشکیل دهند، $T(x_1), \dots, T(x_n)$ نیز یک پایه تشکیل می دهند. پس، $T(x_1), \dots, T(x_n)$ پایه متعامد یکه ای را تشکیل می دهند.

همان طور که ممکن است با توجه به نتایج قبلی انتظار داشته باشیم، نمایش ماتریسی یک همانمتری نسبت به یک پایه متعامد یکه، صورت مخصوصی دارد.

قضیه ۲ فرض کنیم $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ عملگری خطی باشد و x_1, \dots, x_n یک پایه متعامد یکه برای \mathbb{R}^n و نیز فرض کنیم A_T نمایش ماتریسی T نسبت به پایه x_1, \dots, x_n است. در این صورت T همانمتری است اگر و فقط اگر A_T یک ماتریس متعامد باشد.

اثبات اگر

$$T(x_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i$$

$$A_T = [a_{ij}]_{(nn)}$$

داریم چون x_1, \dots, x_n یک پایه متعامد یکه است،

$$\begin{aligned} (T(x_j), T(x_k)) &= \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i, \sum_{i=1}^n a_{ik} x_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ij} a_{ik} \end{aligned}$$

اگر T یک همانمتری باشد، $T(x_1), \dots, T(x_n)$ یک پایه متعامد یکه است و لذا

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}a_{ik} = 0, j \neq k \text{ و } \sum_{i=1}^n a_{ij}a_{ij} = 1$$

بنابراین، ستونهای A_T یک پایه متعامد یکه تشکیل می‌دهند و A_T متعامد است. از طرف دیگر، اگر A_T متعامد باشد،

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}a_{ik} = 0, j \neq k \text{ و } \sum_{i=1}^n a_{ij}a_{ij} = 1$$

لذا $(T(\mathbf{x}_j), T(\mathbf{x}_i)) = 1$ و اگر $j \neq k$ ، $(T(\mathbf{x}_j), T(\mathbf{x}_k)) = 0$. پس، بردارهای $T(\mathbf{x}_1), \dots, T(\mathbf{x}_r), T(\mathbf{x}_{r+1}), \dots, T(\mathbf{x}_n)$ یک پایه متعامد یکه برای \mathbf{R}^n تشکیل می‌دهند. اگر $\mathbf{z} = \sum_{i=1}^n \gamma_i \mathbf{x}_i$ و $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{x}_i$ دو بردار در \mathbf{R}^n باشند، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} (T(\mathbf{y}), T(\mathbf{z})) &= (\beta_1 T(\mathbf{x}_1) + \dots + \beta_n T(\mathbf{x}_n), \gamma_1 T(\mathbf{x}_1) + \dots + \gamma_n T(\mathbf{x}_n)) \\ &= \beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2 + \dots + \beta_n \gamma_n \\ &= (\mathbf{y}, \mathbf{z}) \end{aligned}$$

بنابراین، T یک همانمتری از \mathbf{R}^n است.

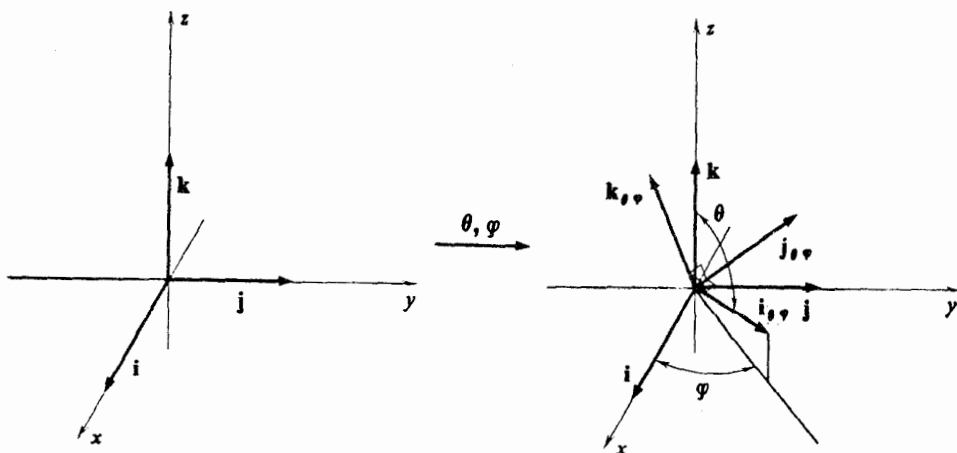
به عنوان مثال، پایه متعامد یکه زیر را برای \mathbf{R}^3 در نظر می‌گیریم.

$$\mathbf{i}_{\theta\varphi} = (\sin\theta \cos\varphi)\mathbf{i} + (\sin\theta \sin\varphi)\mathbf{j} + (\cos\theta)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{j}_{\theta\varphi} = -(\sin\varphi)\mathbf{i} + (\cos\varphi)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{k}_{\theta\varphi} = (\cos\theta \cos\varphi)\mathbf{i} + (\cos\theta \sin\varphi)\mathbf{j} - (\sin\theta)\mathbf{k}$$

(ر. ک. شکل ۲۱.۶)



اگر

$$A_{\theta \varphi} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & -\sin \varphi & \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \end{bmatrix}$$

چون ستونهای $A_{\theta \varphi}$ دستگاه متعامد یک‌ای تشکیل می‌دهند، $A_{\theta \varphi}$ یک ماتریس متعامد است. لذا، عملگر خطی $T(x) = A_{\theta \varphi} x$ یک همانمتری روی R^3 است. به عنوان نتیجه‌ای دیگر، تمام ماتریسهای متعامد 2×2 را تعیین می‌کنیم.

مثال ۱ فرض کنیم A ماتریس متعامد 2×2 ای باشد. در این صورت برای یک عدد حقیقی θ ، داریم

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

برای اثبات این مطلب، ابتدا توجه می‌کنیم که اگر A ماتریس متعامد 2×2 ای باشد، ستونهایش، مثلاً a و b ، یک پایه متعامد یک‌ای برای R^2 تشکیل می‌دهند. فرض کنیم θ زاویه‌ای باشد که a با محور x ها می‌سازد. چون a برداری یک‌ای است،

$$a = i_{\theta} = (\cos \theta)i + (\sin \theta)j;$$

و چون b یک برداری عمود بر a است، $b = \pm j_{\theta} = \pm(-(\sin \theta)i + (\cos \theta)j)$ پس

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

در فصل قبل، دیدیم که ماتریسی از نوع اول، دورانی از صفحه به اندازه θ درجه را القا می‌کند، حال آنکه ماتریسهای نوع دوم، تقارنی از صفحه را نسبت به خطی که با محور x ها زاویه $\theta/2$ درجه می‌سازد، القا می‌کنند. از اینرو، هر ماتریس متعامد 2×2 یک دوران یا یک تقارن از صفحه را القا می‌کند.

تمرینات

۱. کدامیک از ماتریسهای زیر متعامدند؟

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{الف}) \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{د}) \quad \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 6 & 3 & -2 \\ -2 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix} \quad (\text{ج}) \end{aligned}$$

۲. نشان دهید که یک همانمتری روی R^3 ، زاویه بین هر دو بردار را حفظ می‌کند.

۳. نشان دهید که در R^n ، $(x, y) = (|x + y|^2 - |x|^2 - |y|^2)/2$.

۴. اگر $A: R^n \rightarrow R^n$ عملگری خطی باشد به طوری که به ازای هر $x \in R^n$ داشته باشیم

۵. نشان دهید که A یک همانمتری است. [راهنمایی: از تمرین ۳ استفاده کنید].
۶. اگر S و T همانمتریهای روی R^n (یا روی C^n) باشند، نشان دهید که $S \circ T$ و T^{-1} نیز همانمتری اند.
۷. اگر U و V دو ماتریس متعامد باشند، نشان دهید که UV و U^{-1} نیز ماتریسهای متعامد هستند. همین مطلب را وقتی U و V ماتریسهای یکانی باشند ثابت کنید.
۸. نشان دهید که به ازای هر بردار x در R^n ، ماتریس متعامدی وجود دارد که ستون اولش x است.
۹. فرض کنید u و v دو بردار متعامد باشند. اگر $u + v$ و $u - v$ متعامد باشند، نشان دهید که $|u| = |v|$.
۱۰. فرض کنید T عملگری خطی روی R^2 باشد که دارای خاصیت زیر است: هرگاه a و b متعامد باشند، $T(a)$ و $T(b)$ نیز متعامدند. نشان دهید که T مضرب اسکالری از یک همانمتری است. [راهنمایی: فرض کنید $u = T(i)$ و $v = T(j)$ و با استفاده از تمرین ۸ نشان دهید که $|u| = |v|$].
۱۱. فرض کنید T عملگری خطی روی R^3 باشد که زاویه بین هر دو بردار را حفظ می‌کند. نشان دهید که T مضرب اسکالر غیر صفری از یک همانمتری است و برعکس.
۱۲. اگر A یک ماتریس متعامد باشد، $\det A = 1$ ، a_{ij} و A_{ij} بترتیب درایه و همساز (i, j) باشند، نشان دهید که $a_{ij} = A_{ij}$ اگر $\det A = -1$ ، چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟
۱۳. اگر U یک ماتریس یکانی باشد، نشان دهید که $|\det U| = 1$.
۱۴. اگر x_1, \dots, x_n بردارهایی در R^n باشند و $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ یک ماتریس $n \times n$ باشد که ستون i امش بردار x_i است، نشان دهید که
- $$|\det [x_1, x_2, \dots, x_n]| \leq |x_1| |x_2| \dots |x_n|;$$
- این مطلب را به طور هندسی در R^2 و R^3 تعبیر کنید.
۱۵. اگر A یک ماتریس متعامد و $I_n + A$ نامنفرد باشد، نشان دهید که
- $$(I_n - A)(I_n + A)^{-1}$$
- مقارن کج است.
۱۶. مطلوب است محاسبه ماتریس متعامد وابسته به دورانی در R^3 به اندازه θ درجه حول محور z ها.
۱۷. ماتریس متعامد وابسته به دورانی از R^3 به اندازه θ درجه حول محور z ها، و سپس دورانی به اندازه θ درجه حول محور z ها، را حساب کنید.
۱۸. نشان دهید که هر ماتریس یکانی 2×2 با دترمینان ۱، به صورت

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}$$

است که در آن $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

۱۸. فرض کنید T عملگری خطی روی R^n باشد و x_1, x_2, \dots, x_n یک پایه متعامد یکه برای R^n . اگر $T(x_1), T(x_2), \dots, T(x_n)$ پایه متعامد یکه‌ای برای R^n باشد، نشان دهید که T همانمتری است.

۱۹. فرض کنید T تبدیلی خطی روی R^2 باشد که دایره یکه را به خودش می‌برد. نشان دهید که T همانمتری است.

۲۰. فرض کنید U یک ماتریس متعامد باشد. نشان دهید که احکام زیر هم‌ارزند:
(الف) U متقارن است و (ب) $U^T = I$.

۲۱. فرض کنید C ماتریس $n \times n$ ای باشد که همه درایه‌های قطریش a و همه درایه‌های غیرقطریش b هستند. اگر C متعامد باشد و $b \neq 0$ ، نشان دهید که $a = -(n-2)d/n$ و $b = \pm 1$ و $d = \pm 1$.

۲۲. اگر Q ماتریس حقیقی $n \times n$ ای باشد به قسمی که $Q^T Q$ مضرب اسکالری از ماتریس همانی باشد، نشان دهید که Q مضرب اسکالری از یک ماتریس متعامد است.

۲۳. نشان دهید که ماتریس

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+i) & i/\sqrt{3} & (3+i)/2\sqrt{15} \\ -\frac{1}{2} & 1/\sqrt{3} & (4+3i)/2\sqrt{15} \\ \frac{1}{2} & -i/\sqrt{3} & 5i/2\sqrt{15} \end{bmatrix}$$

یکانی است.

۲۴. فرض کنید $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ اعداد مختلطی با قدر مطلق ۱ باشند. اگر ستونهای یک ماتریس یکانی بترتیب در $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ضرب شوند، نشان دهید که ماتریس حاصل یکانی است.

۲۵. اگر یک ماتریس متعامد، مثلی باشد، ثابت کنید که این ماتریس قطری است و همه درایه‌های قطریش ± 1 هستند.

۲۶. فرض کنید A یک ماتریس متقارن حقیقی و S یک ماتریس متقارن کج حقیقی باشد. و همچنین $AS = SA$ و $\det[A - S] \neq 0$ نشان دهید که $(A + S)(A - S)^{-1}$ متعامد است.

۲۷. فرض کنید a بردار $a = i + j + k$ در R^3 باشد. ماتریس متعامدی را بیابید که نمایشگر دورانی است به اندازه θ درجه، حول خطی که با بردار a مشخص می‌شود.

۲۸. فرض کنید A ماتریس حقیقی $n \times n$ ای باشد و $S(A)$ تابعی که به A ، حاصلجمع مربعات درایه‌های A را نسبت می‌دهد. اگر Q یک ماتریس متعامد باشد، نشان دهید که

$$S(QAQ^{-1}) = S(A).$$

۲۹. فرض کنید x_1, x_2, \dots, x_n و y_1, y_2, \dots, y_n پایه‌های متعامد یکه‌ای برای R^n باشند. نشان دهید که یک همانمتری وجود دارد به نحوی که

$$T(x_n) = y_n, \dots, T(x_2) = y_2, T(x_1) = y_1$$

۵ ضرب داخلی در حالت کلی

درست همان طور که مفهوم فضای برداری مجرد با مطالعه خواص اصلی جمیع برداری و ضرب اسکالر روی R^n فرمولبندی شد، می‌توان فضاهای ضرب داخلی مجرد را بامشخص کردن مهمترین خواص ضرب نقطه‌ای روی R^n بررسی کرد. اگر V یک فضای برداری حقیقی باشد، تابعی را که به هر زوج از بردارهای x و y در V یک عدد حقیقی (x, y) نسبت می‌دهد، ضرب داخلی روی V گویند اگر این تابع دارای خواص زیر باشد:

$$(x, x) \geq 0 \quad (۱)$$

$$(x, x) = 0 \text{ اگر و فقط اگر } x = 0$$

$$(x, y + z) = (x, y) + (x, z) \quad (۲)$$

$$(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$$

$$(\alpha x, y) = \alpha (x, y) \quad (۳)$$

$$(x, \beta y) = \beta (x, y)$$

$$(x, y) = (y, x) \quad (۴)$$

گوئیم فضای برداری V ، همراه با این ضرب داخلی، یک فضای ضرب داخلی تشکیل می‌دهد.

همان طور که قبلاً اشاره کردیم، اگر $V = R^n$ و به ازای هر x و y در R^n ، تعریف کنیم $(x, y) = x^T y$ ، یک ضرب داخلی روی R^n به دست می‌آوریم. علاوه بر این، انواع متعدد دیگری از ضرب داخلی وجود دارد.

مثال ۱ اگر $V = R^n$ و c_1, c_2, \dots, c_n عدد حقیقی اکیداً مثبت باشند، و اگر به‌ازای

$$y = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \text{ و } x = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

چنین تعریف کنیم:

$$(x, y) = c_1 \alpha_1 \beta_1 + c_2 \alpha_2 \beta_2 + \dots + c_n \alpha_n \beta_n,$$

آنگاه $(,)$ یک ضرب داخلی روی R^n است.

مثال ۲ اگر $V = P_n$ ، فضای چند جمله‌ایهای یک متغیره با متغیر x ، با ضرایب حقیقی، و

از درجه نایبتر از n ، باشد و اگر تعریف کنیم

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

که در آن a و b اعدادی حقیقی با ضابطه $a < b$ هستند، یک ضرب داخلی روی P_n به دست می‌آوریم.

بعضی از خواص ضرب داخلی را در این حالت ثابت می‌کنیم

(۱) اگر f یک چند جمله‌ای حقیقی باشد، آنگاه $f^2(x) \geq 0$. لذا

$$(f, f) = \int_a^b f^2(x) dx \geq 0$$

اگر $(f, f) = 0$ ، آنگاه $\int_a^b f^2(x) dx = 0$. چون $f^2(x) \geq 0$ ، فقط وقتی رابطه برقرار است که f همه جا در فاصله $[a, b]$ صفر باشد. اما هر چند جمله‌ای از درجه نایبتر از n که دارای بیش از n ریشه است باید متحد با صفر باشد. پس، $f = 0$.

$$(f, g + h) = \int_a^b f(x) (g(x) + h(x)) dx \quad (2)$$

$$= \int_a^b f(x) g(x) dx + \int_a^b f(x) h(x) dx \\ = (f, g) + (f, h)$$

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx = \int_a^b g(x) f(x) dx = (g, f) \quad (3)$$

اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد، $A = [a_{ij}]_{(nn)}$. اثر A ، که آن را با $\text{tr } A$ نشان می‌دهیم، قبلاً به صورت زیر تعریف شد:

$$\text{tr } A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

توجه کنید که اثر A ، حاصل جمع درایه‌های قطری A است. نتایج مستقیم این تعریف عبارتند از:

$$\text{tr}(\alpha A) = \alpha \text{tr } A$$

$$\text{tr}(A + B) = \text{tr } A + \text{tr } B$$

$$\text{tr } A = \text{tr } A^T$$

از دو خاصیت اولی چنین برمی‌آید که تابع اثر، یک تبدیل خطی از فضای ماتریسها به اعداد حقیقی (یا اعداد مختلط، اگر با ماتریسهای مختلط سر و کار داشته باشیم) است.

مثال ۳ با استفاده از تابع اثر، یک ضرب داخلی روی فضای ماتریسهای $n \times n$ به صورت

زیر تعریف می‌کنیم: اگر A و B ماتریسهای $n \times n$ باشند،

$$(A, B) = \text{tr } AB^T$$

برای اثبات (۱)، متذکر می‌شویم که

$$\text{tr } AA^T = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 \text{، آنگاه } A = [a_{ij}]_{(nn)} \text{ اگر}$$

از اینرو، اثر AA^T حاصلجمع مربعات درایه‌های A است. بنابراین $\text{tr } AA^T \geq 0$ اگر $\text{tr } AA^T = 0$ ، همه درایه‌های A باید صفر باشند و لذا $A = 0$.

برقراری خواص دیگر ضرب داخلی، از خواص متناظر اثر ماتریس بآسانی نتیجه می‌شود.

تعاریف و قضایای مربوط به ضرب داخلی مجرد از لحاظ صوری همانند تعاریف و قضایای ضرب داخلی در حالات خاص‌اند، که در اولین پنج بخش این فصل مورد بحث قرار گرفت. برای مثال، نرم بردار x ، که آن را مانند گذشته با $|x|$ نشان می‌دهیم، به‌صورت $(x, x)^{1/2}$ تعریف می‌شود. دوبردار x و y متعامدند اگر $(x, y) = 0$. برداری بانرم ۱ را بردار یک می‌نامند. مجموعه‌های متعامد یک‌ه از بردارها و پایه‌ها همانند گذشته تعریف می‌شوند.

همه قضایایی که برای حالات خاص ضرب داخلی روی R^n ثابت شد برای ضرب داخلی درحالت کلی نیز برقرارند. درواقع، مرور کوتاهی بر اثبات این قضایا که در بخشهای قبلی ارائه شده است نشان می‌دهد که، در جریان اثبات، تنها خواص (۱) - (۴) به کار رفته‌اند. پس، این قضایا برای تمام توابعی که روی زوجیهایی از بردارها تعریف شده و دارای خواص (۱) - (۴) باشند، یعنی برای حالت کلی ضرب داخلی نیز، برقرارند. لذا، در این حالت نیز، به‌ازای بردارهای x و y در V ، نامساوی کوشی - شوارتس $|(x, y)| \leq |x||y|$ و همچنین نامساوی نرمی $|x + y| \leq |x| + |y|$ برقرار است. درمورد مثال ۲ بالا، نامساوی کوشی - شوارتس به صورت زیر درمی‌آید

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2(x)dx \right)^{1/2}$$

درحالت مثال ۳، این نامساوی به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$|\text{tr } AB^T| \leq (\text{tr } AA^T)^{1/2} (\text{tr } BB^T)^{1/2}$$

به همین نحو، دیده می‌شود که هر مجموعه از بردارهای متعامد غیرصفر، مستقل خطی است، روش متعامد سازی گرام - اشمیت معتبر است، و هر فضای برداری حقیقی متناهی‌البعد با یک ضرب داخلی، دارای یک پایه متعامد یک‌ه نسبت به این ضرب داخلی است. این مطالب را با چند مثال تشریح می‌کنیم.

مثال ۴ در فضای P_3 ، با قانون ضرب داخلی

$$(f, g) = \int_{-1}^{+1} f(x)g(x) dx$$

چند جمله ایهای $x, x^3/5, x^2 - 1/3, x^3 - 3x/5$ گردآورده ای از بردارهای متعامد تشکیل می دهند، لذا، مستقل خطی اند و یک پایه می سازند. با ضرب هر چند جمله ای در یک مقدار ثابت مناسب، می توانیم یک پایه متعامد یکه به دست آوریم.

مثال ۵ فضای ماتریسهای حقیقی 2×2 را با ضرب داخلی مثال ۳ی فوق در نظر می گیریم. تحقیقی ساده نشان می دهد که ماتریسهای

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

یک پایه متعامد یکه تشکیل می دهند.

اگر V_1 و V_2 دو فضای برداری حقیقی و بترتیب با ضربهای داخلی، $(\cdot, \cdot)_1$ و $(\cdot, \cdot)_2$ باشند، تبدیل خطی وارون پذیر $T: V_1 \rightarrow V_2$ را همانمتری گویند اگر به ازای هر دو بردار x و y در V_1

$$(T(x), T(y))_2 = (x, y)_1$$

همان طور که R^n الگوی فضای برداری حقیقی است، با قانون ضرب داخلی متعارف، الگوی فضای ضرب داخلی حقیقی نیز هست. در این مورد قضیه زیر را می آوریم.

قضیه فرض کنیم V_1 و V_2 دو فضای ضرب داخلی حقیقی n بعدی باشند که قوانین ضرب داخلی آنها بترتیب $(\cdot, \cdot)_1$ و $(\cdot, \cdot)_2$ است. در این صورت، یک همانمتری از V_1 به V_2 وجود دارد.

اثبات فرض کنیم x_1, \dots, x_n پایه متعامد یکه ای برای V_1 و y_1, \dots, y_n پایه متعامد یکه ای برای V_2 باشد. بنا به بخش ۲.۵، تبدیل خطی T از V_1 به V_2 وجود دارد به طوری که $T(x_1) = y_1, T(x_2) = y_2, \dots, T(x_n) = y_n$. واضح است که T یکریختی است. برای اینکه ثابت کنیم T همانمتری است، فرض کنیم $x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$ و $y = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n$ دو بردار در V_1 باشند. در این صورت

$$(x, y)_1 = (\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n, \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n) = \alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_n \beta_n$$

زیرا x_1, \dots, x_n یک پایه متعامد یکه است، و

$$\begin{aligned} (T(x), T(y))_2 &= (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \dots + \beta_n y_n) \\ &= \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_n \beta_n. \end{aligned}$$

زیرا y_1, \dots, y_n یک پایه متعامد یکه است. پس، $(T(x), T(y))_2 = (x, y)_1$. بنابراین T یک همانمتری از V_1 به V_2 است.

با استفاده از این قضیه می توان بسیاری از احکام مربوط به فضاهای ضرب داخلی

دلخواه را به احکامی مربوط به R^n با ضرب نقطه‌ای (به عنوان ضرب داخلی) تبدیل کرد. همچنین می‌توان حالت کلی ضرب داخلی مختلط را با تجرید خواص ضرب داخلی مختلط متعارف روی C^n ، تعریف کرد. همه خواص، تعاریف، قضایا، و اثباتها همانند همین مفاهیم در R^n می‌باشند.

تمرینات

۱. فرض کنید $x = \alpha_1 i + \alpha_2 j$ و $y = \beta_1 i + \beta_2 j$. نشان دهید که توابع زیر:

$$(x, y) = 2\alpha_1\beta_1 + 3\alpha_2\beta_2 \quad (\text{الف})$$

$$(x, y) = 2\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_2 \quad (\text{ب})$$

ضرب‌هایی داخلی روی R^2 هستند.

۲. فرض کنید m یک تابع پیوسته اکیداً مثبت روی فاصله $[a, b]$ باشد. اگر f و g چند-جمله‌ایهایی در P_n باشند، نشان دهید که

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)m(x) dx$$

یک ضرب داخلی روی P_n است.

۳. ضرب داخلی $(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$ را روی P_3 در نظر بگیرید.

(الف) حاصلضربهای $(1, x)$ ، $(1, x^2)$ ، $(x+1, x)$ ، (x^2, x^3) ، و $(1+x^2, x)$ را حساب کنید.

(ب) یک پایه متعامد یکه برای P_3 بیابید.

(ج) یک پایه متعامد یکه برای مکمل متعامد زیرفضای پدید آمده توسط ۱ و x بیابید.

۴. ضرب داخلی روی فضای ماتریسهای $n \times n$ را، که در مثال ۳ تعریف شد، در نظر بگیرید و نشان دهید که نرم ماتریس A ریشه دوم حاصلجمع مربعات درایه‌های A است.

۵. فرض کنید قانون ضرب داخلی f و g در P_n ، به صورت زیر داده شده باشد:

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$$

(الف) نشان دهید که مکمل متعامد زیرفضای مرکب از چند جمله‌ایهای زوج در P_n ، عبارت است از زیرفضای مرکب از چند جمله‌ایهای فرد در P_n .

(ب) نشان دهید تبدیلی خطی که $f(x)$ را به $f(-x)$ می‌برد، همانمتری است.

۶. فرض کنید V یک فضای برداری حقیقی باشد. نشان دهید که حاصلجمع دو ضرب داخلی روی V ، یک ضرب داخلی روی V است.

۷. فرض کنید V یک فضای برداری حقیقی متناهی البعد و (\cdot) یک ضرب داخلی روی V باشد. همچنین فرض کنید $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ تبدیلی خطی از V به \mathbb{R} باشد. نشان دهید که بردار یکتایی مانند y در V وجود دارد به قسمی که به ازای هر $x \in V$

$$f(x) = (x, y)$$

۸. فرض کنید x_1, x_2, x_3, x_4 چهار نقطه متمایز روی محور حقیقی باشند. اگر f و g در P_3 باشند، (f, g) را به صورت زیر تعریف کنید:

$$(f, g) = f(x_1)g(x_1) + f(x_2)g(x_2) + f(x_3)g(x_3) + f(x_4)g(x_4)$$

نشان دهید که این یک ضرب داخلی است. اگر به جای چهار نقطه، سه نقطه به کار می رفت، آیا باز هم یک ضرب داخلی می داشتیم؟

۹. فرض کنید x_1, x_2, \dots, x_n پایه ای برای \mathbb{R}^n باشد. نشان دهید که ضربی داخلی روی \mathbb{R}^n وجود دارد که نسبت به آن، x_1, x_2, \dots, x_n یک پایه متعامد یکه است.

۱۰. اگر مجموعه اعداد مختلط را به عنوان یک فضای برداری روی اعداد حقیقی به حساب آوریم، ضرب را به صورت $(z_1, z_2) = (z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1)/2$ تعریف کنید.

(الف) نشان دهید که (\cdot) یک ضرب داخلی است.

(ب) اگر $z_1 = \alpha_1 + \alpha_1 i$ و $z_2 = \beta_1 + \beta_1 i$ ، نشان دهید که

$$(z_1, z_2) = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2$$

ثابت کنید که (z, z) مربع قدر مطلق عدد مختلط z به معنی معمولی آن است.

(ج) فرض کنید M_a تبدیلی خطی روی C^n باشد که به صورت $M_a(z) = az$ تعریف می شود. نشان دهید که $(M_a(z_1), M_a(z_2)) = a \bar{a} (z_1, z_2)$.

(د) اگر M_a همانند قسمت (ج) تعریف شده باشد، نشان دهید که M_a همانمتری است اگر و فقط اگر $|a| = 1$.

(ه) با فرض $T(z) = \bar{z}$ ، نشان دهید که T همانمتری است.

۱۱. در فضای ماتریسهای $n \times n$ با ضرب داخلی تعریف شده در مثال ۳، فرض کنید E_{ij} ماتریس $n \times n$ ای باشد که همه درایه هایش بجز درایه (i, j) آن صفرند و درایه (i, j) آن ۱ می باشد. نشان دهید که ماتریسهای E_{ij} ، $1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq n$ ، یک پایه متعامد یکه برای M_{nn} تشکیل می دهند.

۱۲. در فضای ماتریسهای $n \times n$ با ضرب داخلی تعریف شده در مثال ۳، فرض کنید T عملگری خطی باشد که با ضابطه $T(B) = AB$ ، که در آن A یک ماتریس $n \times n$ است، تعریف می شود. نشان دهید که T همانمتری است.

۱۳. فرض کنید x_1, x_2, \dots, x_n پایه متعامد یکه ای برای \mathbb{R}^n با ضرب داخلی متعارف باشد. نشان دهید که ماتریسهای $A_{ij} = x_i x_j^T$ یک پایه متعامد یکه برای فضای ماتریسهای $n \times n$ با ضرب داخلی تعریف شده در مثال ۳ تشکیل می دهند.

۱۴. در فضای P_n مرکب از چند جمله‌ای‌های یک متغیره با متغیر x ، با درجه نایشتز از n ، و با ضرایب حقیقی، ضربهای داخلی

$$(f, g)_1 = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

$$(f, g)_2 = \int_c^d f(x)g(x) dx$$

را در نظر بگیرید که در آنها $a < b$ و $c < d$. فرض کنید T تابعی از P_n (به عنوان یک فضای ضرب داخلی با قانون ضرب داخلی اولی) به P_n (به عنوان یک فضای ضرب داخلی با قانون ضرب داخلی دومی) باشد که به صورت

$$(T(f))(x) = \sqrt{\frac{b-a}{d-c}} f\left(\frac{b-a}{d-c}x + \frac{ad-bc}{d-c}\right)$$

تعریف می‌شود. نشان دهید که T همانمتری است.

۱۵. فضای ماتریسهای $n \times n$ را با ضرب داخلی تعریف شده در مثال ۳ در نظر بگیرید.

(الف) نشان دهید که مکمل متعامد زیر فضای ماتریسهای قطری، زیر فضای ماتریسهای است که همه درایه‌های قطریشان صفرند.

(ب) نشان دهید که مکمل متعامد زیر فضای ماتریسهای متقارن، زیر فضای ماتریسهای متقارن کج است.



مقادیر ویژه و صورتهای متعارف

۱. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

در بسیاری از کاربردهای نظریه تبدیلات خطی، مسئله زیر پیش می‌آید: برای عملگر خطی مفروض T روی فضای برداری V ، اسکالرهایی λ و بردارهای x در V را طوری معین کنید که در معادله $T(x) = \lambda x$ صدق کنند. این مسئله به نام مسئله مقدار ویژه معروف است.

اگر T عملگری خطی روی فضای برداری V باشد و به ازای یک بردار غیر صفر x در V و یک اسکالر λ داشته باشیم $T(x) = \lambda x$ ، آنگاه λ را یک مقدار ویژه T می‌نامند. بردار x یک بردار ویژه T مشاظر با مقدار ویژه λ نامیده می‌شود. مقادیر ویژه را مقادیر مشخصه (یا سرشت‌نما) و بردارهای ویژه را بردارهای مشخصه (یا بردارهای سرشت‌نما) می‌نامند. اگر A ماتریس $n \times n$ ای با درایه‌های حقیقی باشد، عدد حقیقی λ را که به ازای آن یک n -بردار ستونی غیر صفر x وجود دارد به طوری که $Ax = \lambda x$ ، یک مقدار ویژه A و x را یک بردار ویژه A می‌نامند. مقادیر ویژه مختلط و بردارهای ویژه مختلط به طور مشابه تعریف می‌شوند.

از دیدگاه شهودی، بردارهای ویژه، نشان دهنده جهتهایی هستند که تحت عملگر خطی T ثابت می‌مانند.

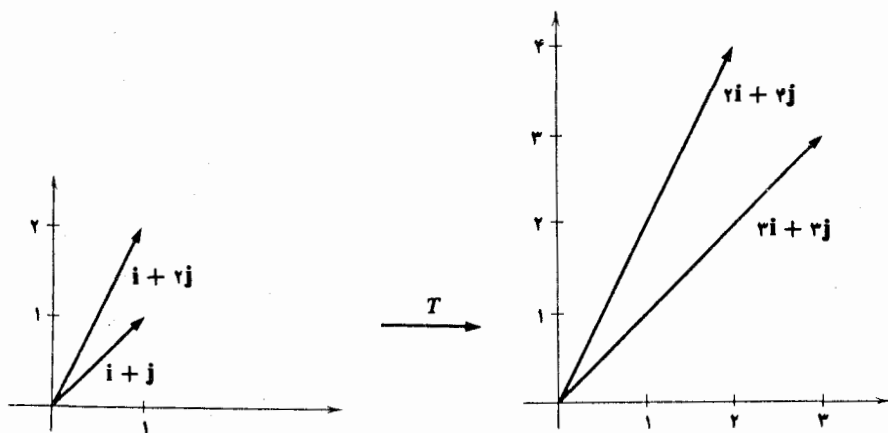
مثال ۱ فرض کنیم T عملگری خطی روی R^2 باشد که با ضابطه $T(x) = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} x$

تعریف می‌شود. چون $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

نتیجه می‌شود که ۳ و ۲ مقادیر ویژه T هستند که بردارهای ویژه نظیر آنها، بترتیب،

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ می باشند. در این حالت، عملگر خطی T خطوطی را که از مبدأ مختصات می گذرند و با مضارب اسکالری از بردارهای ویژه معین می گردند، ثابت نگه می دارد. (ر. ک. شکل ۱۰.۷)



شکل ۱۰.۷

در این کتاب قبلاً به مثالهای متعددی از مقادیر ویژه و بردارهای ویژه برخوردیم، گرچه در آن موقع آنها را تحت این عناوین در نظر نگرفتیم. برای نمونه، در مثال ۳ از بخش ۵.۲، مدلی برای رشد جمعیت را بررسی کردیم که در آن ۴ - بردار P ، جمعیت هر گروه سنی را نشان می داد. ضرب P در ماتریس T ، توزیع جمعیت TP را در یک سال بعد می داد. در آخر آن مثال متذکر شدیم که یک بردار P وجود دارد به قسمی که $TP = P$. پس، T دارای مقدار ویژه ۱ می باشد و P بردار ویژه متناظر با آن است. در این مثال، تعیین تمام بردارهای ویژه متناظر با مقدار ویژه ۱، توزیعهای جمعیت را که از یک سال به سال دیگر ثابت می مانند، ارائه می دهد.

مثال ۲ در مثال ۴ از بخش ۱.۵، وضعیتی را بررسی کردیم که در آن، سه شرکت بازار محصول معینی را در دست داشتند. یک ماتریس A داده شده بود که میزان حفظ و ازدست دادن مشتریان را نشان می داد. اگر توزیع بازار با ۳ - بردار v داده شده باشد، آنگاه توزیع در یک سال بعد با Av معین می شود.

توزیعهای پایدار بازار کدام اند؟

در اینجا مسئله عبارت از یافتن آن بردارهای v است که در $Av = v$ صدق می کنند. یعنی، همه بردارهای ویژه متناظر با مقدار ویژه ۱. به دیگر سخن، می خواهیم آن بردارهای v را تعیین کنیم که به ازای آنها $(A - I)v = 0$. به عبارت دیگر، باید دستگاه معادلات خطی

$$-\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}z = 0$$

$$\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{6}z = 0$$

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{6}y - \frac{1}{3}z = 0$$

را نسبت به مجهول‌های x, y, z حل کنیم. پس از حل دستگاه به روش معمولی، درمی‌یابیم که $x = 10c, y = 9c$ و $z = 12c$ که c دلخواه است. در این حالت، طبیعتاً c را طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم $x + y + z = 1$ یا $c = 1/31$ از اینرو، در یک بازار پایدار، سهم شرکتها بترتیب $10/31, 9/31, 12/31$ است. بردار v با این مؤلفه‌ها، یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه 1 است.

از آنجا که $T(x) = \lambda x$ هم ارز با $(T - \lambda I)(x) = 0$ است، نتیجه می‌شود که x یک بردار ویژه T متناظر با مقدار ویژه λ است اگر و فقط اگر در فضای $\lambda I - T$ باشد. مجموعه بردارهای ویژه‌ای از T را که با مقدار ویژه λ متناظرند فضای ویژه T متناظر با مقدار ویژه λ می‌نامیم. در نتیجه فضای ویژه متناظر با مقدار ویژه λ ، همان فضای بوج $\lambda I - T$ می‌باشد، واضح است که فضای ویژه زیرفضایی است از فضای برداری که T روی آن عمل می‌کند.

مثال ۳ فرض کنیم T عملگری خطی روی P_n باشد که با ضابطه $T(f)(x) = f(-x)$ تعریف می‌شود. به عبارت دیگر T چند جمله‌ای $f(x)$ را به چند جمله‌ای $f(-x)$ می‌برد. چون $T(1) = 1$ ، مقدار ویژه‌ای از T است. چون $T(x) = -x$ ، 1 و -1 نیز یک مقدار ویژه T می‌باشد. فضاهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه 1 و -1 را معین می‌کنیم. فضای ویژه متناظر با مقدار ویژه 1 ، مرکب از آن چند جمله‌ایهای f است که در رابطه $f(x) = f(-x)$ صدق می‌کنند، یعنی چند جمله‌ایهای زوج. چند جمله‌ایهای $1, x^2, x^4, \dots$ یک پایه برای این فضا تشکیل می‌دهند. فضای ویژه متناظر با مقدار ویژه -1 ، مرکب از آن چند جمله‌ایهای f است که در رابطه $f(x) = -f(-x)$ صدق می‌کنند، یعنی چند جمله‌ایهای فرد. چند جمله‌ایهای x, x^3, x^5, \dots یک پایه برای این فضا تشکیل می‌دهند.

در مثال ۲، دیدیم که تعیین بردارهای ویژه متناظر با یک مقدار ویژه مفروض، با حل دستگاههای معادلات خطی چند مجهولی انجام می‌پذیرد. حال، روشی را برای تعیین اینکه کدامیک از اسکالرها مقادیر ویژه عملگر خطی مفروضی هستند، ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱ فرض کنیم T عملگری خطی روی فضای برداری حقیقی V ، و λ عددی حقیقی باشد. یک بردار غیر صفر x در V وجود دارد به نحوی که $T(x) = \lambda x$ اگر و فقط اگر

$$\det[T - \lambda I] = 0$$

اثبات توجه کنید که فضای پوچ $T - \lambda I$ غیر صفر است اگر و فقط اگر $\det[T - \lambda I] = 0$.

اگر در قضیه فوق، همه جا واژه «مختلط» جایگزین واژه «حقیقی» شود، قضیه مشابهی برقرار می شود.

چند جمله ای $f(x) = \det[xI - T]$ را چند جمله ای مشخصه T گوئیم و آن را با C_T نشان می دهیم. با انتخاب پایه ای برای فضای برداری V و تعیین نمایش ماتریسی عملگر T نسبت به این پایه، چند جمله ای مشخصه T محاسبه می شود. اگر A نمایش ماتریسی T نسبت به پایه انتخاب شده باشد، داریم $C_T(x) = \det[xI_n - A]$. اگر A' را نسبت به پایه دیگری نمایش دهد، در بخش ۸.۵ دیدیم که یک ماتریس وارون پذیر B وجود دارد به طوری که $A' = BAB^{-1}$. پس

$$\begin{aligned}\det[xI_n - A'] &= \det[xI_n - BAB^{-1}] \\ &= \det[B(xI_n - A)B^{-1}] \\ &= \det B \det[xI_n - A] \det B^{-1} \\ &= \det[xI_n - A]\end{aligned}$$

در نتیجه، چند جمله ای مشخصه T مستقل از پایه ای است که در محاسبه آن به کار می رود.

به طور مشابه، چند جمله ای مشخصه ماتریس A را با C_A نشان می دهیم. از پاراگراف قبلی چنین برمی آید که چند جمله ایهای مشخصه ماتریسهای مشابه، یکسان اند. از تعریف چند جمله ای مشخصه و قضیه ۱ نتیجه می شود که ریشه های چند جمله ای مشخصه دقیقاً مقادیر ویژه عملگر خطی اند.

اگر $A = [a_{ij}]_{(nn)}$ یک ماتریس $n \times n$ باشد،

$$C_A(x) = \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & -a_{23} & \dots & -a_{2n} \\ -a_{31} & -a_{32} & x - a_{33} & \dots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \dots & x - a_{nn} \end{vmatrix}$$

واضح است که $C_A(x)$ یک چند جمله ای از درجه n و با ضریب پیشرو ۱ است:

$$C_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0.$$

بسط دترمینان مربوط به $C_A(x)$ نتیجه می دهد که ضریب x^{n-1}

$$-(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) = -\text{tr} A$$

است.

جمله ثابت a_0 در چند جمله ای فوق را می توان با قرار دادن $x = 0$ حساب کرد.

$$a_0 = C_A(0) = \det(-A) \quad \text{یا} \quad a_0 = (-1)^n \det A$$

مثال ۴ فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریس 2×2 ای باشد. در این صورت

$$C_A(x) = \begin{vmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{vmatrix} = x^2 - (a+d)x + ad - bc$$

$$= x^2 - (\text{tr}A)x + \det A$$

پس، در حالت دو بعدی، چند جمله‌ای مشخصه A توسط دترمینان و اثر A کاملاً معین می‌شود. با حل معادله $x^2 - (\text{tr}A)x + \det A = 0$ مقادیر ویژه A را می‌توان یافت. برای مثال، اگر

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \text{tr}A = 0, \det A = -1, \text{ و } C_A(x) = x^2 - 1$$

چون ریشه‌های معادله $x^2 - 1 = 0$ عبارت‌اند از 1 و -1 ، مقادیر ویژه A ، 1 و -1 می‌باشند. با حل معادلات مربوطه بردارهای ویژه متناظر با این مقادیر، یعنی $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ را به دست می‌آوریم.

مثال ۵ فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ ؛ مقادیر ویژه A را می‌یابیم.

$$C_A(x) = \begin{vmatrix} x-0 & -1 & -1 \\ -1 & x & 1 \\ -1 & -5 & x-3 \end{vmatrix} = x(x^2 - 3x + 5) + (-x + 3 + 1) - (5 + x)$$

$$= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$$

از این قرار تنها مقدار ویژه A ، 1 می‌باشد. بردارهای ویژه A متناظر با مقدار ویژه 1 را می‌توان با تعیین فضای پوچ $I_1 - A$ یافت.

محاسبه چند جمله‌ای مشخصه بعضی از ماتریسها بسیار آسان است. مثلاً، بسهولت دیده می‌شود که $(x-1)^n$ چند جمله‌ای مشخصه I_n است. در حالت کلیتر، اگر D یک ماتریس قطری $n \times n$ با دزایه‌های قطری d_1, d_2, \dots, d_n باشد، چند جمله‌ای مشخصه D عبارت است از $(x-d_1)(x-d_2)\dots(x-d_n)$. چند خاصیت دیگر از چند جمله‌ای مشخصه را در زیر می‌آوریم.

قضیه ۲ فرض کنیم A یک ماتریس $n \times n$ باشد. در این صورت $C_{A^T}(x) = C_A(x)$ علاوه، اگر A وارون پذیر باشد، داریم:

$$C_{A^{-1}}(x) = (\det A)^{-1}(-x)^n C_A\left(\frac{1}{x}\right)$$

اثبات حکم اول را ثابت می‌کنیم. داریم

$$C_{A^T}(x) = \det [xI_n - A^T] = \det [(xI_n - A)^T] \\ = \det [xI_n - A] = C_A(x)$$

حال، فرض می‌کنیم A وارون پذیر باشد. در این صورت

$$C_{A^{-1}}(x) = \det [xI_n - A^{-1}] = \det [A^{-1}(xA - I_n)] \\ = (\det A)^{-1} \det [xA - I_n] = (\det A)^{-1} (-x)^n \det \left[\frac{1}{x} I_n - A \right] \\ = (\det A)^{-1} (-x)^n C_A\left(\frac{1}{x}\right).$$

مثال ۶ ماتریس 3×3 و متعامد U را ماتریس دوران گویند اگر $\det U = 1$. نشان خواهیم داد که ۱ مقدار ویژه‌ای برای ماتریس دوران است. از نظر هندسی، این بدان معنی است که هر دوران R^3 یک بردار، یعنی بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه ۱ را ثابت نگه می‌دارد. به عبارت دیگر، هر دوران R^3 یک محور دارد.

می‌خواهیم نشان دهیم که $C_U(1) = 0$. بنا به قضیه ۲ داریم $C_U(1) = C_{U^T}(1)$ و

$$C_{U^{-1}}(1) = 1(-1)^3 C_U(1) = -C_U(1)$$

چون $UU^T = I_3$ داریم $U^T = U^{-1}$. پس $C_U(1) = -C_U(1)$. در نتیجه $C_U(1) = 0$. استدلالی مشابه نشان می‌دهد که یکت ماتریس متعامد 3×3 با دترمینان ۱ -، دارای مقدار ویژه ۱ - است.

مثال ۷ یادآوری می‌کنیم که ماتریس مربعی A ، تصادفی است اگر همه درایه‌هایش غیر-منفی و حاصلجمع درایه‌های هر ستونش برابر ۱ باشد. در مثال ۴، از بخشهای ۱.۵ و ۸.۵، نمونه‌هایی از این نوع ماتریسها را دیدیم. در بسیاری از کاربردهای این ماتریسها، با بردارهایی مانند v سر و کار داریم که $Av = v$. یعنی، بردارهای ویژه متناظر با مقدار ویژه ۱. در مثال ۲ فوق، چنین بردارهای ویژه‌ای را یافتیم. نشان خواهیم داد که ۱ همیشه یک مقدار ویژه ماتریس تصادفی است. لذا، همیشه بردارهای غیرصفر v وجود دارند به قسمی که $Av = v$.

فرض می‌کنیم A ماتریس $n \times n$ ای باشد که حاصلجمع درایه‌های هر ستون آن برابر ۱ است. همچنین فرض می‌کنیم u یک n -بردار ستونی باشد که همه درایه‌هایش ۱ هستند. توجه داریم که حاصلجمع درایه‌های هر سطر ماتریس A^T برابر ۱ می‌شود. در نتیجه $A^T u = u$. چون $u \neq 0$ ، ۱ مقدار ویژه‌ای از A^T است. پس، $C_{A^T}(1) = 0$. از تساوی $C_{A^T}(x) = C_A(x)$ چنین برمی‌آید که $C_A(1) = 0$. از اینرو، ۱ مقدار ویژه‌ای برای A است.

توجه به این نکته مهم است که یک ماتریس حقیقی ممکن است دارای هیچ مقدار ویژه حقیقی نباشد. برای مثال، ماتریس زیر را در نظر می‌گیریم:

$$B_{\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

دیدیم که B_{θ} دوران صفحه به اندازه θ درجه را القا می‌کند. اگر $0 < \theta < \pi$ ، واضح است که هیچ برداری از R^2 به مضرب اسکالری از خودش برده نمی‌شود. لذا B_{θ} دارای هیچ مقدار ویژه حقیقی نیست.

در این حالت، چند جمله‌ای مشخصه عبارت است از $x^2 - (2\cos\theta)x + 1$. ریشه‌های آن $\cos\theta + i\sin\theta$ و $\cos\theta - i\sin\theta$ هستند. اگر $0 < \theta < \pi$ ، آنگاه $\sin\theta \neq 0$ و هیچیک از ریشه‌ها حقیقی نیست و این نتیجه‌ای است که از بررسی هندسی فوق انتظارش می‌رفت.

می‌دانیم که هر چند جمله‌ای با ضرایب مختلط دارای یک ریشه مختلط است. پس، هر ماتریس $n \times n$ با درایه‌های مختلط دارای یک مقدار ویژه مختلط است. در نتیجه هر ماتریس حقیقی دارای مقدار ویژه مختلطی می‌باشد. گاهی این مطلب به اضافه اطلاعات دیگری راجع به یک ماتریس مفروض، می‌تواند برای اثبات اینکه آن ماتریس دارای مقدار ویژه حقیقی است، به کار رود.

رابطه مهمی بین بردارهای ویژه و استقلال خطی وجود دارد که در قضیه زیر بیان شده است.

قضیه ۳ فرض کنیم T عملگری خطی روی فضای برداری V باشد. اگر $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه متمایز T و x_1, x_2, \dots, x_n بترتیب، بردارهای ویژه (الزاماً بردارهایی غیر-صفر) متناظر با $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ باشند، آنگاه بردارهای x_1, x_2, \dots, x_n مستقل خطی اند.

اثبات فرض می‌کنیم $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$. اگر T را بر این معادله اثر دهیم و تساوی $T(x_i) = \lambda_i x_i$ را به کار گیریم، داریم

$$\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \alpha_2 \lambda_2 x_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n x_n = 0$$

اگر طرفین معادله اول را در λ_1 ضرب و حاصل را از طرفین معادله دوم کم کنیم، به دست می‌آوریم:

$$\alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_1) x_2 + \alpha_3 (\lambda_3 - \lambda_1) x_3 + \dots + \alpha_n (\lambda_n - \lambda_1) x_n = 0$$

با اثر دادن T بر طرفین این معادله داریم:

$$\alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_1) \lambda_2 x_2 + \alpha_3 (\lambda_3 - \lambda_1) \lambda_3 x_3 + \dots + \alpha_n (\lambda_n - \lambda_1) \lambda_n x_n = 0$$

اگر معادله سومی را در λ_2 ضرب و از معادله چهارمی کم کنیم، حاصل می‌شود:

$$\alpha_3 (\lambda_3 - \lambda_1) (\lambda_3 - \lambda_2) x_3 + \dots + \alpha_n (\lambda_n - \lambda_1) (\lambda_n - \lambda_2) x_n = 0$$

با تکرار این عمل، بالاخره معادله زیر را به دست می‌آوریم:

$$\alpha_n (\lambda_n - \lambda_1) (\lambda_n - \lambda_2) \dots (\lambda_n - \lambda_{n-1}) x_n = 0$$

چون $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ متمایزند، داریم $(\lambda_n - \lambda_1) \dots (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \neq 0$ و چون $x_n \neq 0$ ، نتیجه می‌شود که $\alpha_n = 0$.

از اینرو $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1} = 0$ با انجام مکرر عمل فوق روی این معادله، درمی یابیم که

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$$

در نتیجه نشان دادیم که هرگاه $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$ آنگاه $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ و لذا x_1, x_2, \dots, x_n مستقل خطی اند.

یادآوری می کنیم که دو ماتریس حقیقی C و D را مشابه گوئیم اگر یک ماتریس حقیقی وارون پذیر B وجود داشته باشد به طوری که $B^{-1}CB = D$. چنین تعریفی برای تشابه ماتریسهای مختلط نیز وجود دارد. گوئیم که یک ماتریس حقیقی روی اعداد حقیقی قطری شدنی است اگر آن ماتریس روی اعداد حقیقی، مشابه با یک ماتریس قطری حقیقی باشد. چنین تعریفی برای ماتریسهای مختلط قطری شدنی نیز وجود دارد.

عملگر خطی T روی فضای برداری V را قطری شدنی گوئیم، اگر پایه ای برای V وجود داشته باشد به قسمی که نمایش ماتریسی T نسبت به این پایه قطری باشد. چگون نمایشهای ماتریسی T نسبت به پایه های مختلف V همگی مشابه اند، T قطری شدنی است اگر و فقط اگر یکی از (و در نتیجه همه) نمایشهای ماتریسی T قطری شدنی باشد.

فرض کنیم عملگر خطی T نسبت به پایه x_1, x_2, \dots, x_n با ماتریس قطری D نمایش داده شود، که درایه های قطری آن d_1, d_2, \dots, d_n هستند. در این صورت $T(x_i) = d_i x_i$. پس بردارهای پایه x_1, x_2, \dots, x_n بردارهای ویژه T هستند. از اینرو اگر T قطری شدنی باشد، پایه ای وجود دارد که همه اعضای آن بردارهای ویژه T هستند. برعکس، اگر پایه ای وجود داشته باشد که همه اعضای آن بردارهای ویژه T باشند، آنگاه نمایش ماتریسی T نسبت به این پایه قطری است، و لذا T قطری شدنی است.

بیان این عبارت بر حسب ماتریسها چنین است: ماتریس $n \times n$ ای مانند A روی اعداد حقیقی قطری شدنی است اگر و فقط اگر R^* دارای پایه ای باشد مرکب از بردارهای ویژه A .

حکم مشابهی در مورد قطری کردن ماتریسهای مختلط برقرار است. شرطی روی چند جمله ای مشخصه ارائه می دهیم که قابلیت قطری شدن یک ماتریس را تضمین می کند.

قضیه ۴ فرض کنیم A یک ماتریس $n \times n$ با درایه های حقیقی باشد و فرض کنیم

$$C_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_n),$$

که در آن $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ اعداد حقیقی متمایزند. در این صورت A روی اعداد حقیقی قطری شدنی است.

اثبات فرض کنیم x_1, x_2, \dots, x_n بردارهای ویژه A باشند که بترتیب متناظر با مقادیر ویژه $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ هستند. بنا به قضیه ۳ی فوق و با توجه به این امر که $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ اعداد حقیقی متمایزند، x_1, x_2, \dots, x_n مستقل خطی اند. بعلاوه، بنا به قضیه ۲ از بخش

۸.۲، x_1, x_2, \dots, x_n فضای R^n را پدید می‌آورند. از اینرو R^n دارای پایه‌ای است که اعضای آن بردارهای ویژه A هستند. در نتیجه A قطری شدنی است.

در این حالت، همچنین می‌توان روش مناسبی برای محاسبه ماتریس B به نحوی که $B^{-1}AB = D$ قطری باشد ارائه داد. در واقع، اگر x_1, x_2, \dots, x_n بردارهای ویژه متناظر با $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ باشند، این بردارها را می‌توان از حل دستگاه معادلات خطی $(A - \lambda I_n)x = 0$ به دست آورد.

فرض کنیم $B = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ یعنی B ماتریسی باشد که ستون i ام آن x_i است. در این صورت $Be_i = x_i$ و $B^{-1}x_i = e_i$. در نتیجه

$$\begin{aligned}(B^{-1}AB)e_i &= B^{-1}(Ax_i) \\ &= B^{-1}(\lambda_i x_i) \\ &= \lambda_i e_i\end{aligned}$$

پس، $B^{-1}AB$ یک ماتریس قطری است که درایه‌های قطری آن متوالیاً عبارت‌اند از $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

مثال ۸

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

آنگاه

$$C_A(x) = \begin{vmatrix} x+2 & -3 & -1 \\ 0 & x-1 & -1 \\ 3 & -4 & x-1 \end{vmatrix} = x^3 - 4x = x(x-2)(x+2)$$

لذا، مقادیر ویژه A عبارتند از: ۰، ۲، و -۲، که اعدادی حقیقی و متمایزند. پس ماتریس حقیقی وارون پذیر 3×3 ای مانند B وجود دارد به طوری که

$$B^{-1}AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

ماتریس B چنین به دست می‌آید که بردارهای ویژه متناظر با ۰، ۲، و -۲ را پیدا کنیم و آنها را به صورت ستون‌های متوالی یک ماتریس بنویسیم.

مثال ۹ فرض کنیم

$$B_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

قبلاً دیدیم که B_θ دارای مقادیر ویژه مختلط

$$\cos \theta - i \sin \theta \quad \text{و} \quad \cos \theta + i \sin \theta$$

می باشد. از اینرو، بنا به قضیه ۴، ماتریس مختلطی مانند C وجود دارد به قسمی که

$$CB_{\theta} C^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta + i \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta - i \sin \theta \end{bmatrix}$$

توجه داریم که، اگر چه B_{θ} دارای مقادیر ویژه حقیقی نیست، این ماتریس روی اعداد مختلط قطری شدنی است.

بسیاری از محاسبات مربوط به ماتریسهای قطری بآسانی انجام پذیر است. برای مثال، محاسبه توانهای بزرگ یک ماتریس قطری بسیار آسان است. این قبیل محاسبات برای ماتریسهای قطری شدنی نیز انجام پذیرند. مثلاً اگر C قطری شدنی و $B^{-1}CB = D$ قطری باشد، برای محاسبه C^n ، فقط نیاز به محاسبه D^n داریم. در این صورت $C^n = BD^nB^{-1}$. در مثال ۴ از بخش ۸.۵، این روش جهت محاسبه توانهای بزرگ یک ماتریس تصادفی به کار رفت. مثال دیگری از این نوع در زیر ارائه می شود.

$$\text{مثال ۱۰ اگر } C = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ مطلوب است محاسبه } C^n.$$

در این مثال، چند جمله ای مشخصه C عبارت است از

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3).$$

لذا، مقادیر ویژه C ، برابر ۲ و ۳ هستند، و بنا به قضیه ۴، C قطری شدنی است. بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه ۲ و ۳ را می توان، بترتیب، از حل دستگاههای

$$-2x + 2y = 0 \quad \text{و} \quad -x + 2y = 0$$

$$x - y = 0 \quad \text{و} \quad -x + 2y = 0$$

به دست آورد. می بینیم که $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، بترتیب، بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه

۲ و ۳ هستند. فرض کنیم $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. نتیجه می شود که $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ و

$$B^{-1}CB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{بنابراین}$$

$$\begin{aligned} C^n &= B \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \times 2^n - 2^n & -2 \times 2^n + 2^{n+1} \\ 2^n - 2^n & -3^n + 2^{n+1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

به روش مشابهی دیده می شود که اگر f چند جمله ای دلخواهی باشد،

$$f(C) = \begin{bmatrix} 2f(3) - f(2) & -2f(3) + 2f(2) \\ f(3) - f(2) & -f(3) + 2f(2) \end{bmatrix}$$

انجام محاسبه با استفاده از ماتریسهای قطری شدنی آسان است. ولی همه ماتریسهای قطری شدنی نیستند.

مثال ۱۱ اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، آنگاه $C_A(x) = x^2$.

فرض می‌کنیم A قطری شدنی باشد. در این صورت یک ماتریس وارون پذیر C وجود دارد به نحوی که $C^{-1}AC = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}$. چون ماتریسهای مشابه دارای چندجمله‌ایهای مشخصه یکسان‌اند، $x^2 = (x - d_1)(x - d_2)$. از اینرو $d_1 = d_2 = 0$. لذا $C^{-1}AC = 0$. اگر این معادله را از طرف چپ در C و از طرف راست در C^{-1} ضرب کنیم، نتیجه می‌گیریم که $A = 0$ ، که یک تناقض است. بنابراین A قطری شدنی نیست.

تمرینات

۱. چند جمله‌ای مشخصه و مقادیر ویژه هر یک از ماتریسهای زیر را بیابید.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \text{ (ج)} & \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \text{ (ب)} & \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \text{ (الف)} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (و)} & \begin{bmatrix} 7 & 8 & 8 \\ -10 & -11 & -10 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ (ه)} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ (د)} \\ & & & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ (ز)} \end{aligned}$$

۲. مقادیر ویژه هر یک از ماتریسهای زیر و فضاها و ویژه متناظر با آنها را بیابید.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -5 & 3 & 0 \\ -6 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ (ب)} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (الف)} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ (د)} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ (ج)} \end{aligned}$$

۳. نشان دهید که ماتریسهای زیر قطری شدنی هستند و ماتریس قطری را که هر یک با آن مشابه است بیابید.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -2 & -4 & -5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ (ج)} & \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ (ب)} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ (الف)} \end{aligned}$$

۴. محور دوران هریک از ماتریسهای دوران زیر را بیابید.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ج}) \quad \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -6 & -3 & 2 \\ 2 & -6 & -3 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

۵. چند جمله‌ای مشخصه و مقادیر ویژه هریک از عملگرهای زیر روی P_3 را بیابید.

$$(S(f))(x) = f(x+1) \quad (\text{ب}) \quad D(f) = f' \quad (\text{الف})$$

$$T(f) = (1-x^2)f'' - 2xf' \quad (\text{ج})$$

۶. اگر $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس $n \times n$ بالا مثلثی باشد، نشان دهید که

$$C_A(x) = (x - a_{11})(x - a_{22}) \cdots (x - a_{nn})$$

۷. اگر A ماتریسی $n \times n$ باشد که چند جمله‌ای مشخصه آن $(x-a)^n$ است و اگر A قطری شدنی باشد، نشان دهید که $A = aI_n$.

۸. فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ باشد. اگر حاصلجمع درایه‌های هریک از ستونهای A برابر s باشد، نشان دهید که s یک مقدار ویژه A است.

۹. همانند مثال ۴ از بخش ۱۰۵، سه شرکت بازار محصول معینی را در دست دارند و ماتریسهای تصادفی زیر میزان حفظ کردن و از دست دادن مشتریها را می‌دهند. حالات پایدار بازار را بیابید.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{4}{9} \end{bmatrix} \quad (\text{ج}) \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{4}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

۱۰. برای هریک از ماتریسهای A ی زیر، یک ماتریس B بیابید به طوری که $B^{-1}AB$ قطری باشد.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 8 & 4 & -5 \end{bmatrix} \quad (\text{ج}) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad \begin{bmatrix} 6 & 1 & -3 \\ -5 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & -4 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

۱۱. نشان دهید که دو ماتریس قطری شدنی، مشابه‌اند اگر و فقط اگر چندجمله‌ایهای مشخصه آنها یکی باشند.

۱۲. (الف) اگر A ماتریسی $n \times n$ باشد و $A^T = \lambda A$ و اگر $A \neq 0$ ، نشان دهید که $\lambda = \pm 1$.

(ب) نشان دهید که تنها مقادیر ویژه یک تبدیل خطی از فضای ماتریسهای $n \times n$ به همین فضا، که به صورت $T(A) = A^T$ تعریف می‌شود، ± 1 هستند.

(ج) فضای ویژه متناظر با هریک از این مقادیر ویژه را بیابید.
۱۳. فرمولی کلی برای توان n ام هریک از ماتریسهای زیر بیابید.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ (ج)} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ (ب)} \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \text{ (الف)}$$

۱۴. فرض کنید T عملگری خطی روی فضای برداری متناهی‌البعاد V باشد. نشان دهید که T وارون پذیر است اگر و فقط اگر 0 یک مقدار ویژه T نباشد.

۱۵. فرض کنید $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ یک ماتریس حقیقی 2×2 باشد به قسمی که همه درایه‌های آن اعداد مثبت باشند.

(الف) نشان دهید که مقادیر ویژه A با فرمول زیر معین می‌شوند.

$$((a + d) \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}) / 2$$

(ب) نشان دهید که مقادیر ویژه A حقیقی و متمایز اند.

(ج) نشان دهید که حداقل یکی از مقادیر ویژه A مثبت است.

(د) نشان دهید که یک بردار ویژه متناظر با بزرگترین مقدار ویژه وجود دارد که هر دو مؤلفه آن مثبت اند.

۱۶. همانند مثال ۳ از بخش ۵.۲، تغییرات جمعیت نوعی حیوان بخصوص را بررسی کنید. در اینجا فرض کنید که فقط سه گروه سنی وجود دارند. v را ۳-بردار فرض کنید که مؤلفه‌های آن تعداد اعضای هر گروه سنی را می‌دهد. فرض کنید $T(v)$ توزیع جمعیت را پس از انقضای یک سال بدهد، و به صورت

$$T(v) = Av = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{5}{6} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix} v$$

نشان داده شود.

(الف) درایه‌های ماتریس A را تفسیر کنید.

(ب) چند جمله‌ای مشخصه و مقادیر ویژه A را بیابید.

(ج) یک ماتریس B بیابید به قسمی که AB^{-1} قطری باشد.

(د) ثابت کنید که

$$A^n = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 16 & 16 & 4 \\ 12 & 12 & 3 \\ 8 & 8 & 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{30} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \begin{bmatrix} 20 & -20 & -10 \\ -30 & 30 & 15 \\ 40 & -40 & -20 \end{bmatrix} + \frac{1}{30} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \begin{bmatrix} -6 & 4 & 6 \\ 18 & -12 & -18 \\ -48 & 32 & 48 \end{bmatrix}$$

(ه) اگر جمعیت اولیه $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ باشد، نشان دهید که پس از گذشت زمان کافی توزیع جمعیت

$$\text{به } \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ میل می‌کند.} \quad \frac{(4x_1 + 4x_2 + x_3)}{30}$$

(درحقیقت، پس از ۱۰ سال، این توزیع با تقریب یک درصد کل جمعیت صحیح است.)

۱۷. فرض کنید A_1, A_2, A_3, \dots دنباله‌ای از ماتریسهای $n \times n$ حقیقی باشد. گوییم که این دنباله به حد L میل می‌کند اگر به ازای هر i و هر j ، دنباله درایه‌های (i, j) ماتریسهای A_n به درایه (i, j) ماتریس L میل کند. این مطلب را به صورت $\lim A_n = L$ می‌نویسیم. (الف) اگر $\lim A_n = L$ ، و B یک ماتریس وارون پذیر $n \times n$ باشد، نشان دهید که $\lim B^{-1} A_n B = B^{-1} L B$.

(ب) فرض کنید A یک ماتریس 2×2 با درایه‌های مثبت باشد. نشان دهید که دنباله A, A^2, A^3, \dots از توانهای A دارای حد است اگر و فقط اگر مقادیر ویژه λ_1 و λ_2 از A در ضوابط $1 < \lambda_1 \leq 1$ و $1 < \lambda_2 \leq 1$ صدق کنند. [راهنمایی: از تمرین ۱۵ استفاده کنید.]

(ج) اگر هیچیک از مقادیر ویژه در قسمت (ب) برابر ۱ نباشد، نشان دهید که حد دنباله فوق، ماتریس صفر است.

۱۸. نشان دهید که عملگر خطی $T(f) = xf'$ ، روی فضای برداری P_n ، قطری-شدنی است.

۱۹. برای هر یک از ماتریسهای A زیر، یک ماتریس مختلط B بیابید به نحوی که AB^{-1} قطری باشد.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ج}) \quad \begin{bmatrix} - & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

۲۰. فرض کنید a, b, c و اعدادی دلخواه باشند. دنباله‌ای بر طبق قاعده زیر تعریف می‌شود: $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c$ و به ازای هر $k > 3, x_k$ برابر با متوسط سه عنصر ماقبل خود در دنباله است. پس $x_4 = (a+b+c)/3, x_5 = (a+2b+2c)/9, \dots$ نشان دهید که حد این دنباله $(a+2b+3c)/6$ است. [راهنمایی: فرض کنید v_k برداری باشد که مؤلفه‌های اول، دوم، و سوم آن بترتیب x_k, x_{k+1}, x_{k+2} باشند. ماتریسی مانند A بیابید به طوری که به ازای هر $k, v_{k+1} = Av_k$ و توانهای A را حساب کنید.]

۲۱. فرض کنید A و B دو ماتریس $n \times n$ (حقیقی یا مختلط) باشند و x یک اسکالر ثابت باشد.

(الف) اگر λ به اندازه کافی بزرگ باشد، نشان دهید که

$$\det[xI_n - (A - \lambda I_n)B] = \det[xI_n - B(A - \lambda I_n)]$$

[راهنمایی: اگر λ به اندازه کافی بزرگ باشد، $A - \lambda I_n$ وارون پذیر است.]
(ب) با استفاده از قسمت (الف)، نشان دهید که به ازای هر λ

$$\det[xI_n - (A - \lambda I_n)B] = \det[xI_n - B(A - \lambda I_n)]$$

[راهنمایی: دو چند جمله‌ای که در بی‌نهایت نقطه مساوی باشند، همه جا مساوی‌اند.]
(ج) نشان دهید که $C_{AB}(x) = C_{BA}(x)$.

۲۲. فرض کنید A یک ماتریس حقیقی $n \times n$ با n مقدار ویژه حقیقی متمایز باشد. اگر ماتریس حقیقی B با A جابجا شود، نشان دهید که B قطری شدنی است.

۲۳. اگر

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

نشان دهید که ضریب x در $C_A(x)$ برابر است با

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

۲ ماتریسهای متقارن

اگر A و B دو ماتریس $n \times n$ باشند و ماتریس متعامد U وجود داشته باشد به قسمی که $A = U^{-1}BU$ ، گوئیم A و B به طور متعامد مشابه‌اند. چون U متعامد است، $U^{-1} = U^T$. لذا $A = U^TBU$. اگر U یکانی باشد و $A = U^{-1}BU$ ، گوئیم که A و B به طور یکانی مشابه‌اند. در این بخش، نشان می‌دهیم که هر ماتریس متقارن به طور متعامد مشابه با یک ماتریس قطری است. بخصوص، نتیجه می‌شود که هر ماتریس متقارن قطری شدنی است. در این بخش، اغلب از ضرب داخلی متعارف روی R^n ، که با ضابطه $(x, y) = x^T y$ تعریف می‌شود، استفاده می‌کنیم. روی C^n ضرب داخلی $(x, y) = x^* y$ از بخش ۲.۶ را به کار می‌بریم.

فرض می‌کنیم A یک ماتریس متقارن حقیقی باشد و $AX = T(x)$ عملگر خطی القا شده توسط A . ملاحظه می‌کنیم که

$$(T(x), y) = (T(x))^T y = (Ax)^T y = x^T A^T y = x^T Ay = (x, T(y))$$

پس، T دارای این خاصیت است که $(T(x), y) = (x, T(y))$. هر عملگر خطی روی یک فضای ضرب داخلی را که دارای این خاصیت باشد متقارن گویند. با آسانی نشان داده می‌شود (با استفاده از تمرین ۱۴، بخش ۲.۶) که نمایش ماتریسی یک عملگر متقارن، نسبت به پایه متعارف R^n (یا هر پایه متعامد یکدیگر) متقارن است. در اثبات احکام

مربوط به ماتریسهای متقارن، به طور کلی مفید است که خاصیت $(T(x), y) = (x, T(y))$ را در نظر داشته باشیم.

هدف اولیه ما این است که ثابت کنیم همه مقادیر ویژه یک ماتریس متقارن اعداد حقیقی اند.

قضیه ۱ فرض کنیم A یک ماتریس متقارن حقیقی $n \times n$ باشد. در این صورت هر مقدار ویژه A حقیقی است.

اثبات فرض کنیم T عملگری خطی روی C^n باشد که به صورت $T(x) = Ax$ تعریف می شود. فرض کنیم (\cdot) ضرب داخلی متعارف روی C^n باشد. یعنی، به ازای هر x و y متعلق به C^n ، $(x, y) = x^* y$. همان طور که دیدیم $(T(x), y) = (x, T(y))$. اگر $T(x) = \lambda x$

$$(T(x), x) = (\lambda x, x) = \lambda(x, x)$$

و

$$(x, T(x)) = (x, \lambda x) = \bar{\lambda}(x, x)$$

چون T متقارن است، پس $(T(x), x) = (x, T(x))$ و در نتیجه

$$\lambda(x, x) = \bar{\lambda}(x, x).$$

و چون $x \neq 0$ داریم $(x, x) \neq 0$ و $\lambda = \bar{\lambda}$. لذا λ حقیقی است.

توجه داریم که اگر A ماتریس هرمیتی $n \times n$ ای باشد، یعنی $A = A^*$ ، همین نتیجه برقرار است. زیرا،

$$(Ax, y) = (Ax)^* y = x^* A^* y = x^* Ay = (x, Ay)$$

اگر $Ax = \lambda x$ ، اثبات فوق نتیجه می دهد که $\lambda = \bar{\lambda}$.

اگر T عملگر متقارنی روی یک فضای ضرب داخلی باشد، با ملاحظه اینکه نمایش ماتریسی T نسبت به یک پایه متعامد یک، هرمیتی است، نتیجه می شود که همه مقادیر ویژه T حقیقی اند.

گوییم یک ماتریس به طور متعامد قطری شدنی است اگر به طور متعامد مشابه با یک ماتریس قطری باشد. در بخش ۱۰.۷ دیدیم که ماتریس A روی اعداد حقیقی قطری شدنی است اگر و فقط اگر R^n دارای پایه ای باشد که مرکب از بردارهای ویژه A است. به همین ترتیب، می توان نشان داد که ماتریس A به طور متعامد قطری شدنی است اگر و فقط اگر R^n دارای پایه متعامد یک، باشد که مرکب از بردارهای ویژه A است. با توجه به همین مفهوم گوییم که عملگر خطی T روی فضای ضرب داخلی V به طور متعامد قطری شدنی است اگر V دارای یک پایه متعامد یک، مرکب از بردارهای ویژه T باشد. اکنون قضیه اصلی این بخش را ثابت می کنیم.

قضیه ۲ فرض کنیم T عملگر خطی متقارنی روی فضای ضرب داخلی متناهی البعد V باشد. در این صورت V دارای یک پایه متعامد یکه مرکب از بردارهای ویژه T است.

اثبات اثبات را با استقرا روی بعد V انجام می‌دهیم. اگر $\dim V = 1$ ، درستی قضیه واضح است.

می‌دانیم که T دارای یک مقدار ویژه (احتمالاً مختلط) است (ریشه دلخواهی از چندجمله‌ای مشخصه را اختیار کنید). بنا به قضیه ۱، این ریشه حقیقی است. پس T دارای یک مقدار ویژه حقیقی است. فرض کنیم x بردار ویژه‌ای متناظر با این مقدار ویژه باشد. از اینرو $T(x) = \lambda x$ ، که در آن λ حقیقی است. می‌توان فرض کرد $|x| = 1$. فرض کنیم H مکمل متعامد x در V باشد. ادعا می‌کنیم که: اگر h متعلق به H باشد، $T(h)$ نیز متعلق به H است. داریم

$$\begin{aligned}(T(h), x) &= (h, T(x)) && (T \text{ به متقارن بودن}) \\ &= (h, \lambda x) \\ &= \lambda(h, x) \\ &= 0\end{aligned}$$

(چون $h \in H$)

لذا، $T(h)$ نیز متعلق به H است.

بنابراین اگر T به H محدود شود، عملگری خطی روی H است. چون $\dim H = \dim V - 1$ ، بنا به فرض استقرا، H دارای یک پایه متعامد یکه مرکب از بردارهای ویژه T ، مثلاً، x_1, x_2, \dots, x_n است. پس x_1, x_2, \dots, x_n یک پایه متعامد یکه برای V مرکب از بردارهای ویژه T است. ●

به عنوان نتیجه‌ای از این قضیه، داریم

(۱) اگر A یک ماتریس متقارن حقیقی باشد، به طور متعامد مشابه با یک ماتریس حقیقی قطری است.

(۲) اگر A یک ماتریس هرمیتی باشد، به طور یکانی مشابه با یک ماتریس حقیقی قطری است.

این نکته جالب توجه است که تنها ماتریسهایی متقارن اند که به طور متعامد مشابه با ماتریسهای قطری باشند. درواقع، اگر A ماتریسی باشد که به طور متعامد مشابه با ماتریس قطری D است، آنگاه، یک ماتریس متعامد U وجود دارد به طوری که $U^{-1}AU = D$. در نتیجه $A = UDU^{-1}$. چون U متعامد است، $U^{-1} = U^T$. از اینرو $A = UDU^T$. بنابراین

$$A^T = (UDU^T)^T = (U^T)^T D^T U^T = UD^T U^T$$

حال چون D قطری است، $D^T = D$. لذا، $A^T = UDU^T$. پس $A^T = A$ و از اینرو A متقارن است. بنابراین، یک ماتریس حقیقی به طور متعامد قطری شدنی است اگر فقط اگر متقارن باشد.

مثال ۱ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، یک ماتریس متعامد U بیابید به قسمی که $U^{-1}AU$ قطری باشد.

در این حالت، $C_A(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$. لذا، مقادیر ویژه A عبارتند از ۱ و ۳. برای یافتن بردارهای ویژه متناظر با آنها، باید دستگاههای معادلات

$$2x + y = 3x \quad \text{و} \quad 2x + y = x$$

$$x + 2y = 3y \quad \text{و} \quad x + 2y = y$$

را حل کنیم.

با انجام این کار، بردارهای ویژه $\begin{bmatrix} d \\ d \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} c \\ -c \end{bmatrix}$ را، که در آنها c و d دلخواه اند، به دست می آوریم. سپس c و d را طوری انتخاب می کنیم که طول بردارهای ویژه برابر ۱ شود. پس، می نویسیم $c = d = 1/\sqrt{2}$. ماتریس U را می توان با نوشتن بردارهای ویژه در ستونهای متوالی آن به دست آورد. می بینیم که

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

توجه داریم که U یک ماتریس متعامد است. از روش انتخاب U چنین برمی آید که $U^{-1}AU$ ماتریسی قطری است که درایه های قطری آن ۱ و ۳ می باشند. این مطلب را در زیر ثابت می کنیم، اگرچه این کار واقعاً لازم نیست. داریم

$$\begin{aligned} U^{-1}AU &= U^T AU = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

مثال ۲: ماتریس A ی زیر با کدام ماتریس قطری مشابه است؟

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

چون A متقارن است، می دانیم که مشابه با یک ماتریس قطری است. برای یافتن ماتریس قطری که A مشابه با آن باشد، فقط نیاز به محاسبه چند جمله ای ویژه A داریم.

$$C_A(x) = \begin{vmatrix} x-3 & -2 & -2 \\ -2 & x-2 & 0 \\ -2 & 0 & x-4 \end{vmatrix} = x^3 - 9x^2 + 18x = x(x-3)(x-6)$$

از اینرو، A مشابه با یک ماتریس قطری با درایه‌های قطری ۰، ۳، و ۶ است.

مثال ۳ به ازای ماتریس A ی زیر، یک ماتریس U بیابید به نحوی که $U^{-1}AU$ قطری باشد.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

ابتدا، چند جمله‌ای مشخصه A را حساب می‌کنیم.

$$C_A(x) = \begin{vmatrix} x+1 & -2 & -2 \\ -2 & x+1 & -2 \\ -2 & -2 & x+1 \end{vmatrix} = x^3 + 3x^2 - 9x - 27 = (x-3)(x+3)^2$$

پس، فضاهاى ویژه متناظر با مقادیر ویژه ۳ و -۳ را می‌توان با حل دستگاه‌های معادلات زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned} 2x + 2y + 2z &= 0 & -4x + 2y + 2z &= 0 \\ 2x + 2y + 2z &= 0 & 2x - 4y + 2z &= 0 \\ 2x + 2y + 2z &= 0 & 2x + 2y - 4z &= 0 \end{aligned}$$

جواب دستگاه اول $x = y = z = c$ است (c عددی است دلخواه). برای دستگاه دوم، هر برداری که در $x + y + z = 0$ صدق کند یک جواب است. پس،

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

یک بردار ویژه یک‌ت‌متناظر با مقدار ویژه ۳ است. برای مقدار ویژه -۳، باید دو بردار یک‌ت‌متعامد انتخاب کنیم که در $x + y + z = 0$ صدق کنند. یک بردار یک‌ت‌را که در این معادله صدق کند می‌نویسیم. سپس بردار دیگر را، با استفاده از معادله فوق و این امر که بردار دوم باید بر بردار اول عمود باشد، می‌توان تعیین کرد. اولین بردار را

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

می‌گیریم. در این صورت بردار دوم باید در $x + y + z = 0$ و $x - y = 0$ صدق کند. پس این بردار به صورت $x = c$, $y = c$ و $z = -2c$ است. برای حصول اطمینان از اینکه بردار اخیر یک بردار یکه است، قرار می‌دهیم $c = 1/\sqrt{6}$. از اینرو

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

تمرینات

۱. برای هریک از ماتریسهای A زیر، یک ماتریس متعامد U بیابید به طوری که $U^{-1}AU$ قطری باشد.

$$\begin{array}{llll} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ (د)} & \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \text{ (ج)} & \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ (ب)} & \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ (الف)} \\ \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \text{ (ز)} & \begin{bmatrix} -3 & -6 & 0 \\ -6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix} \text{ (و)} & \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \text{ (ه)} \end{array}$$

۲. ماتریس 3×3 ای مانند A بیابید که مقادیر ویژه آن، ۱، ۵، و -۱ و بردارهای ویژه متناظر با این مقادیر ویژه بترتیب

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

باشد.

۳. برای هریک از ماتریسهای A زیر یک ماتریس یکانی U بیابید به قسمی که $U^{-1}AU$ قطری باشد.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{bmatrix} \text{ (ب)} \quad \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \text{ (الف)}$$

۴. فرض کنید B یک ماتریس حقیقی 3×3 مشابه با یک ماتریس قطری با درایه‌های قطری x_1, x_2, x_3 باشد. نشان دهید که $aI_3 + bB$ مشابه با یک ماتریس قطری است که درایه‌های قطریش $a + x_1b, a + x_2b, a + x_3b$ و $a + x_3b, a + x_2b, a + x_1b$ اند. ماتریسهای زیر با کدام ماتریسهای قطری مشابه‌اند؟

$$\begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix} \text{ (ج)} \quad \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix} \text{ (ب)} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \text{ (الف)}$$

۵. ماتریس $\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$ با کدام ماتریس قطری مشابه است؟

۶. فرض کنید A ماتریس مختلط $n \times n$ ای باشد به قسمی که $A^* = -A$. نشان دهید که A به طور یکنانی مشابه با یک ماتریس قطری است که درایه‌های قطری آن موهومی محض‌اند. [راهنمایی: نشان دهید که iA هرمیتی است.]

۷. فرض کنید A یک ماتریس حقیقی متقارن کج $n \times n$ باشد. نشان دهید که $I + A$ وارون‌پذیر و $(I - A)(I + A)^{-1}$ متعامد است.

۸. نشان دهید که دو ماتریس حقیقی متقارن، به طور متعامد مشابه‌اند اگر و فقط اگر چند جمله‌ای‌های مشخصه آنها یکی باشند.

۹. اگر دو ماتریس حقیقی متقارن، مشابه باشند، نشان دهید که به طور متعامد مشابه‌اند.

۱۰. فرض کنید A ماتریس حقیقی متقارنی با مقادیر ویژه $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ باشد. نشان دهید که $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$.

۱۱. نشان دهید که تنها مقادیر ویژه حقیقی یک ماتریس متعامد، ± 1 می‌باشند.

۱۲. فرض کنید A یک ماتریس حقیقی متقارن باشد. نشان دهید که احکام زیر هم‌ارزند: (الف) A متعامد است.

(ب) $A^2 = I_n$.

(ج) مقادیر ویژه A فقط ± 1 هستند.

۱۳. نشان دهید که بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه متمایز یک ماتریس متقارن، متعامدند.

۳ صورت بالا مثلثی

در بخش قبلی، دیدیم که هر ماتریس حقیقی متقارن، مشابه با یک ماتریس قطری است. در این بخش نشان خواهیم داد که هر ماتریس مختلط $n \times n$ ، مشابه با نوع خاصی از ماتریس بالا مثلثی است.

در این بخش، بیشتر با ماتریسهای بلوکی از نوع

$$\begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & B_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_k \end{bmatrix}$$

سرو کار داریم، که در آن B_1 ماتریسی است $n_1 \times n_1$ ، B_2 ماتریسی است $n_2 \times n_2$ ، و الی آخر. برای مثال، می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{11} & c_{12} \\ 0 & 0 & c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

که در آن B و C ماتریسهای 2×2 $[b_{ij}]$ و $[c_{ij}]$ هستند.

محاسبه با ماتریسهای بلوکی بسیار آسان است. مثلاً اگر B_1 و B_2 ماتریسهای 2×2 و C_1 و C_2 ماتریسهای 3×3 باشند، بآسانی نشان داده می‌شود که

$$\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & C_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 & 0 \\ 0 & C_1 + C_2 \end{bmatrix}$$

و

$$\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 B_2 & 0 \\ 0 & C_1 C_2 \end{bmatrix}$$

قضیه اصلی این بخش عبارت است از:

قضیه ۱ فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ باشد که چند جمله‌ای مشخصه آن عبارت است از $C_A(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \dots (x - \lambda_k)^{n_k}$ که در آن $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ متمایزند. در این صورت A مشابه با ماتریسی به صورت

$$\begin{bmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_k \end{bmatrix}$$

است که در آن B_i یک ماتریسی بالامثلثی $n_i \times n_i$ است که همه درایه‌های قطریش λ_i اند. برای مثال، اگر $C_A(x) = (x - \lambda_1)^2 (x - \lambda_2)^2$ که در آن $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ، آنگاه A مشابه با ماتریسی به صورت

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & s & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & t \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

است.

اثبات اثبات را با استقرا روی n انجام می‌دهیم. فرض کنیم $T(x) = Ax$ یک عملگر خطی روی R^n باشد که توسط A القا شده است. اگر $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ مختلط باشند و C^n را جای R^n قرار دهیم، اثبات مشابهی برقرار است.

چون λ_1 یک مقدار ویژه A است، یک بردار $x_1 \neq 0$ وجود دارد به طوری که $T(x_1) = \lambda_1 x_1$. یک پایه x_1, x_2, \dots, x_n برای R^n شامل بردار x_1 انتخاب می‌کنیم.

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_{1r} & \dots & b_{1n} \\ \circ & & & \\ \vdots & & C & \\ \circ & & & \end{bmatrix}$$

است که در آن C یک ماتریس $(n-1) \times (n-1)$ می باشد. چون A و B نمایشهای ماتریسی T نسبت به دو پایه متمایز هستند، پس مشابه اند. از اینرو $C_B(x) = C_A(x)$. همچنین توجه داریم که

$$xI - B = \begin{bmatrix} x - \lambda_1 & -b_{1r} & \dots & -b_{1n} \\ \vdots & xI - C & & \end{bmatrix}$$

در نتیجه $C_A(x) = C_B(x) = (x - \lambda_1) C_C(x)$. بنا براین

$$C_C(x) = (x - \lambda_1)^{n_1-1} (x - \lambda_r)^{n_r} \dots (x - \lambda_k)^{n_k}$$

حال فرض استقرا را در مورد ماتریس C به کار می‌بریم. بنا به این فرض، $R^{-1}CR = D$ که در آن D ماتریسی به صورت

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_k \end{bmatrix}$$

می‌باشد که در آن D_1 یک ماتریس بالا مثلثی $(n_1 - 1) \times (n_1 - 1)$ است که همه درایه‌های قطریش λ_1 اند و به ازای $i, i > 1$ یک ماتریس بالا مثلثی $n_i \times n_i$ با درایه‌های قطری λ_i است. حال، داریم

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & s_1 & \dots & s_n \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \end{bmatrix} R^{-1} C \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \end{bmatrix} R$$

ماتریس آخری مشابه با B و لذا مشابه با A است. این ماتریس، نمایشگر T نسبت به یک پایه y_1, y_2, \dots, y_n برای R^n است. توجه داریم که اولین بلوک این ماتریس، یک ماتریس بالا مثلثی $n_1 \times n_1$ با درایه‌های قطری λ_1 است. بقیه بلوکهای D_i نیز ماتریسهای بالا مثلثی از مرتبه n_i با درایه‌های قطری λ_i هستند. بردارهای پایه y_1, y_2, \dots, y_n را تغییر می‌دهیم تا درایه‌های s_{n_1+1}, \dots, s_n با صفر جایگزین شوند. ابتدا در پایه y_1, y_2, \dots, y_n عضو y_{n_1+1} را با $y_1 + t y_{n_1+1}$ جایگزین می‌کنیم که در آن t را طوری انتخاب می‌کنیم که نمایش ماتریسی T به همان صورت قبلی باشد و

$$s_{n_1+1} = 0$$

حال، $T(y_{n_1+1}) = \lambda_2 y_{n_1+1} + s_{n_1+1} y_1$ ، لذا،

$$\begin{aligned} T(y_{n_1+1} + t y_1) &= \lambda_2 y_{n_1+1} + s_{n_1+1} y_1 + t \lambda_1 y_1 \\ &= \lambda_2 (y_{n_1+1} + t y_1) + (s_{n_1+1} + t(\lambda_1 - \lambda_2)) y_1 \end{aligned}$$

چون $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ را می‌توان طوری انتخاب کرد که $s_{n_1+1} + t(\lambda_1 - \lambda_2) = 0$ در نتیجه $T(y_{n_1+1} + t y_1) = \lambda_2 (y_{n_1+1} + t y_1)$. بنابراین، نمایش ماتریسی T نسبت به پایه $y_1, y_2, \dots, y_{n_1+1}, y_{n_1+1} + t y_1, y_{n_1+2}, \dots, y_n$ به همان صورت قبلی است، بجز اینکه داریم $s_{n_1+1} = 0$

با تکرار فرایند افزودن مضارب مناسبی از y_1 به بقیه بردارهای پایه، بالاخره پایه‌ای به دست می‌آوریم که در آن نمایش ماتریسی T همان صورت قبلی را دارد با این تفاوت که

$$s_{n_1+1} = \dots = s_n = 0$$

حال، اگر A ماتریس مختلط $n \times n$ دلخواهی باشد، $C_A(x)$ را می‌توان به صورت $(x - \lambda_1)^{n_1} \dots (x - \lambda_k)^{n_k}$ تجزیه کرد. پس، A مشابه با یک ماتریس بالا مثلثی است. اگر A یک ماتریس حقیقی $n \times n$ باشد و λ_k و $C_A(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \dots (x - \lambda_k)^{n_k}$ که در آن $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ همگی حقیقی‌اند، آنگاه A مشابه با یک ماتریس بالا مثلثی حقیقی است. معینا اگر A دارای مقدار ویژه مختلط غیر حقیقی باشد، مشابه با یک ماتریس بالا مثلثی حقیقی نیست. (رک. تمرین ۶، بخش ۱۰.۷)

اکنون هدف ما ارائه روشی برای یافتن ماتریس بالا مثلثی مشابه با یک ماتریس مفروض است. ابتدا خاصیتی از ماتریس بالا مثلثی با درایه‌های قطری مساوی را ذکر می‌کنیم.

لم فرض کنیم D ماتریس بالا مثلثی $n \times n$ ای باشد که همه درایه‌های قطری آن مساوی λ اند. در این صورت $(D - \lambda I)^n = 0$.

اثبات اثبات این لم در حالت کلی مشکل نیست، ولی آن را برای $n = 3$ به تفصیل می‌نویسیم.

فرض می‌کنیم $B = \begin{bmatrix} \lambda & a & b \\ 0 & \lambda & c \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$. در این صورت $B - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ و

$$\bullet \quad (B - \lambda I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad (B - \lambda I)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

اکنون مفهوم جدیدی را مطرح می‌سازیم. اگر T عملگری خطی روی فضای برداری V باشد و $C_T(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \dots (x - \lambda_k)^{n_k}$ ، آنگاه فضای ویژه تعمیم یافته T متناظر با مقدار ویژه λ_i ، فضای پوچ عملگر $(T - \lambda_i I)^{n_i}$ است. برای مثال، اگر D یک ماتریس بالا مثلثی $n \times n$ با درایه‌های قطری λ باشد، لم اخیر نشان می‌دهد که فضای ویژه تعمیم یافته، برابر همه V است.

مثال ۱ فرض می‌کنیم T عملگری خطی روی \mathbb{R}^3 باشد که توسط ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

القا شده است. در این صورت

$$C_A(x) = \begin{vmatrix} x + 1 & -1 & -1 \\ 2 & x - 2 & -1 \\ 1 & -1 & x - 1 \end{vmatrix} = x^3 - 2x^2 + x = x(x - 1)^2$$

حال، فضای ویژه تعمیم یافته متناظر با مقدار ویژه ۱ را پیدا می‌کنیم. ملاحظه می‌کنیم که

$$(A - I)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A - I = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

فضای پوچ ماتریس اخیر توسط بردارهای $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ و \mathbf{j} پدید آمده است. این فضا، فضای ویژه تعمیم یافته متناظر با ۱ می‌باشد. در این مثال، فضای ویژه تعمیم یافته متناظر با ۰، فضای پوچ A است.

اکنون داریم:

قضیه ۲ فرض کنیم T عملگری خطی روی فضای برداری V باشد که برای آن $C_T(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \dots (x - \lambda_k)^{n_k}$ که $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ متمایزند. در این صورت

(۱) فضای ویژه تعمیم یافته T متناظر با λ_i دارای بعد n_i است.

(۲) اگر T دارای نمایش بلوکی قضیه ۱ نسبت به پایه y_1, \dots, y_n باشد، آنگاه

y_1, \dots, y_{n_1} پایه‌ای برای فضای ویژه تعمیم یافته متناظر با λ_1 است، و همین طور الی آخر.

اثبات بنا به قضیه ۱، یک پایه y_1, y_2, \dots, y_{n_1} برای V وجود دارد به قسمی که نمایش ماتریسی T نسبت به این پایه

$$\begin{bmatrix} B_1 & \circ & \dots & \circ \\ \circ & B_2 & \dots & \circ \\ & & \ddots & \\ \circ & \circ & \dots & B_k \end{bmatrix}$$

است که در آن B_i یک ماتریس بالا مثلثی $n_i \times n_i$ با درایه‌های قطری λ_i است. حال، نمایش ماتریسی $(T - \lambda_1 I)^{n_1}$ نسبت به این پایه، به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} (B_1 - \lambda_1 I)^{n_1} & \circ & \dots & \circ \\ \circ & (B_2 - \lambda_1 I)^{n_1} & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & (B_k - \lambda_1 I)^{n_1} \end{bmatrix}$$

اکنون B_1 ماتریس $n_1 \times n_1$ ای با درایه‌های قطری λ_1 است. بنا به لم، $(B_1 - \lambda_1 I)^{n_1} = \circ$. سایر ماتریسهای بالا مثلثی، دارای درایه‌های قطری $(\lambda_i - \lambda_1)^{n_i} = \circ$ هستند به طوری که $(\lambda_i - \lambda_1)^{n_i} \neq \circ$. لذا، فضای پوچ این ماتریس دارای بعد n_1 می‌باشد و توسط بردارهای y_1, y_2, \dots, y_{n_1} پدید آمده است. ●

نتیجه (کیلی - همیلتون) $C_T(T) = \circ$.

اثبات $C_T(T) = (T - \lambda_1 I)^{n_1} \dots (T - \lambda_k I)^{n_k}$. حال، $C_T(T)$ را نسبت به پایه y_1, y_2, \dots, y_{n_1} که در قضیه ۲ داشتیم، حساب می‌کنیم. همان طور که در اثبات قضیه ۲ دیدیم، $(T - \lambda_1 I)^{n_1}$ روی اولین بلوک صفر است. همچنین، $(T - \lambda_2 I)^{n_2}$ روی دومین بلوک صفر است، و همین طور الی آخر. هرگاه حاصلضرب تمام ماتریسها را تشکیل دهیم، درمی‌یابیم که $C_T(T) = \circ$. ●

درواقع، آنچه نتیجه فوق می‌گوید آن است که هر ماتریس در چند جمله‌ای مشخصه خودش صدق می‌کند.

مثال ۲ فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. در این صورت $C_A(x) = x^2 - 7x + 10$ و

$$A^2 - 7A + 10I = \begin{bmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{bmatrix} - 7 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

اکنون آلگوریتمی برای محاسبه پایه‌ای که نمایش ماتریسی قضیه ۱ را می‌دهد، عرضه می‌کنیم. قضیه ۲، درواقع، می‌گوید که باید پایه‌هایی برای هریک از فضاها و ویژه تعمیم یافته حساب کنیم. اگر کمی بیشتر دقت کنیم، می‌توانیم مطمئن شویم که ماتریس حاصل به صورت بالا مثلثی است. توجه کنید که زیرفضاهای تو در توی زیر را داریم

$$N_{T-\lambda_1 I} \subset N_{(T-\lambda_1 I)^2} \subset N_{(T-\lambda_1 I)^3} \subset \dots$$

درواقع، واضح است که اگر $(T - \lambda_1 I)^k x = 0$ ، آنگاه، $(T - \lambda_1 I)^{k+1} x = 0$. برای یافتن یک پایه بالا مثلثی، ابتدا یک پایه x_1, x_2, \dots, x_p برای $N_{T-\lambda_1 I}$ می‌یابیم. سپس، این پایه‌ها را به پایه $x_1, x_2, \dots, x_p, y_1, y_2, \dots, y_q$ برای $N_{(T-\lambda_1 I)^2}$ گسترش می‌دهیم. آنگاه با افزودن بردارهای z_1, z_2, \dots, z_r پایه‌ای برای $N_{(T-\lambda_1 I)^3}$ پیدا می‌کنیم. این فرایند را ادامه می‌دهیم تا پایه‌ای مرکب از n_1 بردار برای فضای ویژه تعمیم یافته بیابیم. سپس کل اعمال را برای سایر مقادیر ویژه تکرار می‌کنیم. توجه داریم که چون $(T - \lambda_1 I)^2 y_i = 0$ ، بردار $(T - \lambda_1 I)y_i$ ترکیبی خطی از x_1, x_2, \dots, x_p است. ازاینرو $T(y_i) = \lambda_1 y_i + c_{1i}x_1 + \dots + c_{pi}x_p$. اگر این استدلال را برای z ها و \dots تکرار کنیم، درمی‌یابیم که نمایش ماتریسی T ، بالا مثلثی است. در بخش بعدی، شکل ظریفتری از این فرایند را عرضه می‌کنیم که صورت بالا مثلثی مناسبتری به‌دست می‌دهد.

مثال ۳ پایه‌ای بیابید به نحوی که تبدیل خطی القا شده توسط ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 1 \\ -6 & 3 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

بالا مثلثی باشد. در این مثال

$$\begin{aligned} C_A(x) &= \begin{vmatrix} x+3 & -2 & -1 & -1 \\ 6 & x-3 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & x-2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & 0 & -1 & -x-1 \\ 0 & x+3 & -3 & -3x-1 \\ 2x+3 & -2x-2 & x & x^2-2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x+1 & 0 & -x-1 \\ 0 & x+3 & -3x-1 \\ 2x+3 & -2x-2 & x^2-2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x+1 & 0 & 0 \\ 0 & x+3 & -3x-1 \\ 2x+3 & -2x-2 & x^2+2x+1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (x+1)((x+3)(x^2+2x+1) - (2x+2)(3x+1)) \\
 &= (x+1)^2((x+3)(x+1) - 2(3x+1)) \\
 &= (x+1)^2(x^2-2x+1) = (x+1)^2(x-1)^2
 \end{aligned}$$

سپس فضای پوچ ماتریسهای $A+I$ ، $A-I$ ، $(A+I)^2$ و $(A-I)^2$ را به دست می آوریم. داریم

$$(A+I)^2 = \begin{bmatrix} -13 & 8 & 6 & 3 \\ -23 & 12 & 10 & 5 \\ -13 & 8 & 6 & 3 \\ -13 & 8 & 6 & 3 \end{bmatrix} \text{ و } A+I = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 & 1 \\ -6 & 4 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

با حل معادلات مربوطه دیده می شود که فضای پوچ ماتریسهای فوق بترتیب توسط بردارهای

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ و } X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

پدید آمده اند.

محاسبات مشابهی نشان می دهد که فضای پوچ $A-I$ و $(A-I)^2$ بترتیب توسط

$$X_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, X_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ و } X_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

پدید می آیند.

اکنون داریم:

$$AX_4 = X_4 + 2X_5, AX_5 = X_5, AX_6 = -X_1 - X_2, AX_1 = -X_1$$

اگر قرار دهیم $B = [X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6]$ ، نتیجه می شود که

$$B^{-1}AB = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تمرینات

۱. چند جمله ای مشخصه و فضای ویژه تعمیم یافته هر یک از ماتریسهای زیر را بیابید.

$$\begin{aligned}
 &\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ج}) \quad \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -6 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})
 \end{aligned}$$

۲. برای هر یک از ماتریسهای A زیر یک ماتریس B بیابید به طوری که $B^{-1}AB$ به صورت بالا مثلثی مذکور در قضیه ۱ باشد.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{الف}) \\ & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \\ & \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad (\text{ج}) \end{aligned}$$

۳. فرض کنید A ماتریس $n \times n$ ای باشد که مقادیر ویژه متمایز آن $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ هستند. نشان دهید که A قطری شدنی است اگر و فقط اگر به ازای هر i ، فضای ویژه متناظر با λ_i ، همان فضای ویژه تعمیم یافته متناظر با λ_i باشد.

۴. اگر A یک ماتریس پوچ توان $n \times n$ باشد، نشان دهید که تنها مقدار ویژه A صفر است.

۵. اگر A یک ماتریس پوچ توان $n \times n$ باشد، نشان دهید که $A^n = 0$.

۶. نشان دهید که ماتریس 2×2 ای چون A وجود ندارد به قسمی که $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

۷. فرض کنید A ماتریس حقیقی 3×3 ای باشد به نحوی که $\det A > 0$ نشان دهید که A دارای یک مقدار ویژه مثبت است.

۸. فرض کنید A یک ماتریس حقیقی 2×2 و X یک 2×2 -بردار باشد به طوری که X و AX مستقل خطی باشند. نشان دهید عملگر خطی T که توسط A روی \mathbb{R}^2 القا می‌شود نسبت به پایه X, AX ، با ماتریس $\begin{bmatrix} 0 & -\det A \\ 1 & \text{tr } A \end{bmatrix}$ نمایش داده می‌شود.

۹. فرض کنید T عملگری خطی روی \mathbb{R}^2 باشد به قسمی که به ازای هر بردار X متعلق به \mathbb{R}^2 ، بردارهای X و $T(X)$ مستقل خطی باشند. نشان دهید که T مضرب اسکالری از تبدیل خطی همانی است.

۱۰. فرض کنید A و B دو ماتریس حقیقی 2×2 اند که هیچیک از آنها مضرب اسکالری از ماتریس همانی نیست. فرض کنید $C_B(x) = C_A(x)$. نشان دهید که A و B مشابه‌اند. (راهنمایی: از تمرینهای ۸ و ۹ استفاده کنید.)

۱۱. نشان دهید که $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ ، چند جمله‌ای مشخصه ماتریس

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix} \quad \text{است.}$$

۱۲. فرض کنید A یک ماتریس 2×2 با مقادیر ویژه متمایز s و t باشد. نشان دهید که $A^2 = (s+t)A - stI$ (الف)

(ب) از طریق استقرا، فرمول

$$A^n = \left(\frac{s^n - t^n}{s - t} \right) A + \left(\frac{st^n - ts^n}{s - t} \right) I_r$$

را ثابت کنید.

۱۳. فرض کنید A یک ماتریس تصادفی 2×2 به صورت $\begin{bmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{bmatrix}$ باشد،

که در آن $0 < a < 1$ و $0 < b < 1$. ثابت کنید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = \frac{1}{a+b} A + \frac{a+b-1}{a+b} I_r = \frac{1}{a+b} \begin{bmatrix} b & b \\ a & a \end{bmatrix}$$

[راهنمایی: از تمرین ۱۲ استفاده کنید.]

۱۴. فرض کنید T عملگری خطی روی V باشد که چند جمله‌ای مشخصه آن $(x - \lambda_1)^{n_1} \dots (x - \lambda_k)^{n_k}$ است، که در آن $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ اسکالرهای متمایزند. اگر $n_i \geq j$ ، نشان دهید که $r((T - \lambda_i)^j) = n - n_i$ ، که در آن $n = \dim V$. [راهنمایی: پایه‌ای انتخاب کنید به قسمی که T دارای نمایش ماتریسی مذکور در قضیه ۱ باشد و بقیه کار را همانند قضیه ۲ ادامه دهید.]

۱۵. فرض کنید N یک ماتریس پوچ توان $n \times n$ باشد. نشان دهید که $I + N$ ریشه دوم دارد. یعنی، یک ماتریس B وجود دارد به نحوی که $B^2 = I + N$. برای این کار، انجام مراحل زیر پیشنهاد می‌گردد:

(الف) فرض کنید $(1+x)^{1/2} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ بسط ماکلورن^۱ تابع $(1+x)^{1/2}$ باشد. نشان دهید که $a_0^2 = 1$ ، $2a_0a_1 = 1$ ، و اگر $m \geq 2$ ، $\sum_{i=0}^m a_i a_{m-i} = 0$.

(ب) فرض کنید $B = a_0I + a_1N + a_2N^2 + \dots$ و نشان دهید که $B^2 = I + N$.

۱۶. فرض کنید A ماتریس مختلط $n \times n$ ای باشد. اگر $\det A \neq 0$ ، نشان دهید که A ریشه دوم دارد. [راهنمایی: از قضیه ۱ و تمرین ۱۵ استفاده کنید.]

۴ صورت نرمال ژوردان^۲

در بخش قبلی، ثابت کردیم که هر ماتریس مختلط $n \times n$ مشابه با ماتریسی به صورت

$$A = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & B_k \end{bmatrix}$$

است که در آن B_i یک ماتریس بالا مثلثی $n_i \times n_i$ با درایه‌های قطری λ_i می‌باشد.

در این بخش، آن عده از عملگرهای خطی را مطالعه می‌کنیم که چند جمله‌ای مشخصه آنها، به ازای یک λ عبارت است از $^*(x - \lambda)$. یعنی آن عملگرهای خطی که دارای فقط یک مقدار ویژه λ می‌باشند. بنا به قضیه ۱ از بخش ۳.۷، نمایش ماتریسی چنین عملگری نسبت به یک پایانه مناسب، یک ماتریس بالا مثلثی است که درایه‌های قطری آن همگی λ اند. هدف ما فرمولبندی یک صورت بالا مثلثی دقیقتر است. خواهیم دید که یک ماتریس B با چند جمله‌ای مشخصه $^*(x - \lambda)$ ، مشابه است با ماتریس

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & J_r \end{bmatrix}$$

که در آن J_i یک ماتریس $m_i \times m_i$ به صورت

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}$$

است. به عبارت دیگر، J_i ماتریسی است که همه درایه‌های قطریش λ ، همه درایه‌هایی که بلافاصله در بالای قطر آن واقع‌اند ۱، و همه درایه‌های دیگرش صفرند. J_i را بلوک ژوردان با اندازه m_i گویند. ماتریس J را صورت نرمال ژوردان B می‌نامند. فهرست همه صورتهای نرمال ژوردان ممکن درحالت‌های 2×2 و 3×3 را برای ماتریسهایی که چند جمله‌ای مشخصه آنها $^*(x - \lambda)$ است، در زیر می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

ماتریس اول دارای یک بلوک ژوردان با اندازه ۲ است. دومی دو بلوک ژوردان با اندازه ۱ دارد. هر ماتریس 2×2 با چند جمله‌ای مشخصه $^*(x - \lambda)$ ، مشابه است با ماتریس اول یا دوم. اولین ماتریس 3×3 دارای یک بلوک ژوردان با اندازه ۳ می‌باشد، دومی یک بلوک ژوردان با اندازه ۲ و یکی با اندازه ۱ دارد، و سومی دارای ۳ بلوک ژوردان با اندازه ۱ است. هر ماتریس 3×3 با چند جمله‌ای مشخصه $^*(x - \lambda)$ ، مشابه است با یکی از این سه ماتریس. همین‌طور، پنج صورت نرمال ژوردان برای ماتریسهای 4×4 که چند جمله‌ای مشخصه آنها $^*(x - \lambda)$ است، وجود دارد.

صورت نرمال ژوردان یک ماتریس دلخواه $n \times n$ مانند C به صورت زیر تعریف می‌شود: ابتدا یک ماتریس بالا مثلثی به صورتی که در آغاز این بخش آمد می‌یابیم که مشابه با C باشد. سپس صورت نرمال ژوردان هریک از بلوکهای B_i را تعیین می‌کنیم. در نتیجه C مشابه است با ماتریس

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & J_m \end{bmatrix}$$

که در آن هر J_i یک بلوک ژوردان با درایه قطری λ_i است. بلوکهای ژوردان متمایز، ممکن است دارای درایه‌های قطری متمایز باشند. این بدان معنی است که در حالت 3×3 ، سه صورت نرمال ژوردان دیگر وجود دارد.

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

که در اینجا، فرض می‌کنیم λ, μ, ν همگی متمایزند. هر ماتریسی با چند جمله‌ای مشخصه $(x - \lambda)^2(x - \mu)$ مشابه با ماتریس اولی یا دومی است. قبلاً دیده‌ایم (قضیه ۴ از بخش ۱۰.۷) که هر ماتریس با چند جمله‌ای مشخصه $(x - \lambda)(x - \mu)(x - \nu)$ مشابه با ماتریس سومی است.

از اینرو، در اثبات وجود یک صورت نرمال ژوردان، می‌توانیم توجه خود را به حالتی که ماتریس تنها دارای یک مقدار ویژه است محدود کنیم.

فرض می‌کنیم T یک عملگر خطی روی فضای برداری V است که چند جمله‌ای مشخصه آن $(x - \lambda)^n$ می‌باشد. بنا به قضیه کیلی - هیلتون، $(T - \lambda I)^n = 0$. بنابراین، اگر قرار دهیم $D = T - \lambda I$ ، نتیجه می‌شود که $D^n = 0$ ، یعنی D پوچ توان است. نشان خواهیم داد که هر عملگر پوچ توان دارای یک صورت نرمال ژوردان است. سپس، چون $T = \lambda I + D$ ، نتیجه می‌شود که T دارای یک صورت نرمال ژوردان است. بنابراین، در آنچه که به دنبال خواهد آمد، توجه خود را روی عملگرهای پوچ توان متمرکز می‌کنیم.

پس، فرض می‌کنیم که D عملگری پوچ توان روی فضای برداری متناهی‌البعاد V باشد. با ارائه الگوریتمی برای محاسبه صورت نرمال ژوردان، ثابت می‌کنیم که D دارای یک صورت نرمال ژوردان است. اثبات خود را به حالتی که در آن $D^2 = 0$ است محدود می‌کنیم. اثبات در حالت کلی اساساً همین‌طور است و فقط به طی مراحل بیشتری احتیاج دارد. قبل از اینکه خود اثبات را شروع کنیم به اثبات دولم می‌پردازیم.

لم ۱ فرض کنیم $x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s$ پایه‌ای برای فضای برداری V باشد و نیز v_1, \dots, v_r بردارهایی باشند که ترکیباتی خطی از بردارهای x_1, \dots, x_r هستند. در این صورت $x_1, \dots, x_r, y_1 + v_1, \dots, y_s + v_s, y_1, \dots, y_s$ نیز پایه‌ای برای V است.

اثبات بنا به قضیه ۲ از بخش ۸.۴، کافی است نشان دهیم که این گردآورده بردارها مستقل خطی است. لذا، فرض می‌کنیم

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_j x_j + \beta_1 (y_1 + v_1) + \dots + \beta_k (y_k + v_k) = 0$$

چون بردارهای v_1, \dots, v_k ترکیباتی خطی از بردارهای x_1, \dots, x_j هستند، نتیجه می‌شود که اسکالرهای $\gamma_1, \dots, \gamma_j$ وجود دارند به قسمی که

$$\gamma_1 x_1 + \dots + \gamma_j x_j + \beta_1 y_1 + \dots + \beta_k y_k = 0.$$

چون $x_1, \dots, x_j, y_1, \dots, y_k$ مستقل خطی‌اند، نتیجه می‌شود که

$$\gamma_1 = \dots = \gamma_j = \beta_1 = \dots = \beta_k = 0.$$

پس، داریم $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_j x_j = 0$. بنابراین $\alpha_1 = \dots = \alpha_j = 0$ زیرا که x_1, \dots, x_j مستقل خطی‌اند.

لم ۲ فرض کنیم T عملگری خطی روی فضای برداری V و u_1, \dots, u_m پایه‌ای برای N_T باشد و فرض کنیم v_1, \dots, v_n بردارهایی در V باشند به نحوی که $T(v_1), \dots, T(v_n)$ پایه‌ای برای R_T باشد. در این صورت $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$ پایه‌ای برای V است.

این لم را در ضمن اثبات قضیه ۳ از بخش ۴.۵ ثابت کردیم. حال، یک عملگر خطی D روی فضای برداری متناهی‌البعده V را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $D^2 = 0$. روشی برای یافتن پایه‌ای برای V ، به طوری که نمایش ماتریسی D نسبت به این پایه به صورت نرمال ژوردان باشد، ارائه می‌دهیم. فرایند یافتن چنین پایه‌ای به سه مرحله تقسیم می‌شود.

(۱) بردارهای x_1, \dots, x_r را در V به‌قسمی انتخاب می‌کنیم که $D^2(x_1), \dots, D^2(x_r)$ پایه‌ای برای R_{D^2} باشد.

واضح است که چنین انتخابی همیشه ممکن است: فرض کنیم u_1, \dots, u_r پایه‌ای برای R_{D^2} باشد و x_1, \dots, x_r را طوری انتخاب کنیم که $D^2(x_i) = u_i$.

حکم ۱: بردارهای $D^2(x_1), D^2(x_2), \dots, D^2(x_r), D(x_1), D(x_2), \dots, D(x_r)$ و x_1, \dots, x_r مستقل خطی‌اند.

اثبات حکم: فرض می‌کنیم

$$0 = \alpha_1 D^2(x_1) + \beta_1 D(x_1) + \gamma_1 x_1 + \dots + \alpha_r D^2(x_r) + \beta_r D(x_r) + \gamma_r x_r$$

عملگر D^2 را روی این معادله اعمال می‌کنیم. چون $D^4(x_i) = D^2(x_i) = 0$ ، نتیجه می‌شود که $\gamma_1 D^2(x_1) + \dots + \gamma_r D^2(x_r) = 0$ در این صورت، چون $D^2(x_1), \dots, D^2(x_r)$ پایه‌ای برای R_{D^2} است، نتیجه می‌شود که $\gamma_1 = \dots = \gamma_r = 0$. پس

$$0 = \alpha_1 D^2(x_1) + \beta_1 D(x_1) + \dots + \alpha_r D^2(x_r) + \beta_r D(x_r)$$

اکنون، عملگر D را روی این تساوی اعمال می‌کنیم و از این مطلب که $D^3(x_i) = 0$ استفاده می‌کنیم. نتیجه می‌شود که $\beta_1 D^2(x_1) + \dots + \beta_r D^2(x_r) = 0$. از اینرو، همانند گذشته،

$\beta_1 = \dots = \beta_r = 0$. بنا براین $\alpha_1 D^2(x_1) + \dots + \alpha_r D^2(x_r) = 0$. باز نتیجه می شود که $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$ و حکم ثابت شده است.

از این حکم چنین برمی آید که $D(x_1), D^2(x_1), \dots, D(x_r), D^2(x_r)$ بردارهای مستقل خطی در R_D هستند.

(۲) بردارهای y_1, \dots, y_s را در V طوری انتخاب می کنیم که

$$D(y_1), \dots, D(y_s), D(x_1), D^2(x_1), \dots, D(x_r), D^2(x_r)$$

پایه ای برای R_D باشد و نیز به قسمی که $D^2(y_1) = \dots = D^2(y_s) = 0$. ابتدا نشان می دهیم که انتخاب چنین بردارهای y_1, \dots, y_s چگونه ممکن است. با انتخاب بردارهای t_1, \dots, t_s در R_D به طوری که

$$t_1, \dots, t_s, D(x_1), D^2(x_1), \dots, D(x_r), D^2(x_r)$$

پایه ای برای R_D باشد، کار را شروع می کنیم.

چون t_1, \dots, t_s متعلق به R_D هستند، $D(t_1), \dots, D(t_s)$ به R_{D^2} تعلق دارند. چون $D^2(x_1), \dots, D^2(x_r)$ پایه ای برای R_{D^2} است، نتیجه می شود که اسکالرهای η_1, \dots, η_r وجود دارند به قسمی که

$$D(t_i) = \eta_1 D^2(x_1) + \dots + \eta_r D^2(x_r) = D(v_i)$$

که در آن $v_i = \eta_1 D(x_1) + \dots + \eta_r D(x_r)$. پس، $D(t_i - v_i) = 0$ و ترکیبی خطی از $D(x_1), \dots, D(x_r)$ است. از لم ۱ چنین برمی آید که

$$t_i - v_i, \dots, t_s - v_s, D(x_1), D^2(x_1), \dots, D(x_r), D^2(x_r)$$

نیز پایه ای است برای R_D . از این رو می توانیم y_1, \dots, y_s را در V انتخاب کنیم به نحوی که $D(y_i) = t_i - v_i$ چون $D(t_i - v_i) = 0$ داریم $D^2(y_i) = 0$. پس، مرحله ۲ را همیشه می توان انجام داد.

حکم ۲: بردارهای $D^2(x_1), D^2(x_r), \dots, D(x_1), D(x_r), D(y_1), \dots, y_s, D(y_s)$ مستقل خطی اند.

اثبات حکم: فرض می کنیم

$$0 = \alpha_1 D^2(x_1) + \beta_1 D(x_1) + \gamma_1 x_1 + \dots + \delta_1 D(y_1) + \varepsilon_1 y_1 + \dots$$

عملگر D را روی این تساوی اعمال می کنیم. سپس چون $D^2(x_i) = 0$ و $D^2(y_i) = 0$ نتیجه می شود که

$$0 = \beta_1 D^2(x_1) + \gamma_1 D(x_1) + \dots + \varepsilon_1 D(y_1) + \dots$$

چون $D^2(x_1), \dots, D(x_1), D(y_1), \dots$ پایه ای برای R_D است، داریم

$$\beta_1 = \dots = \gamma_1 = \dots = \varepsilon_1 = \dots = 0.$$

بنا بر این $0 = \alpha_1 D^2(x_1) + \dots + \delta_1 D(y_1) + \dots$ بنا به استدلالی که در بالا به کار رفت، داریم $0 = \alpha_1 = \dots = \delta_1 = \dots$ که حکم را ثابت می‌کند. حال، توجه کنید که بنا به حکم،

$$D(y_s), \dots, D(y_1), D^2(x_r), \dots, D^2(x_1)$$

مجموعه‌ای مستقل خطی از بردارهای N_D است.

(۳) بردارهای z_1, \dots, z_r را در N_D طوری انتخاب می‌کنیم که

$$D(y_s), \dots, D(y_1), D^2(x_r), \dots, D^2(x_1), z_1, \dots, z_r \text{ پایه‌ای برای } N_D \text{ باشد.}$$

حکم ۳: $D^2(x_1), D(x_1), x_1, D(y_1), y_1, \dots, z_1, \dots$ پایه‌ای برای V است.

اثبات حکم: لم ۲ را با بردارهای $D^2(x_1), \dots, D(y_1), z_1, \dots$ به جای بردارهای u_1, \dots, u_m به کار می‌بریم. طرز انتخاب بردارهای z_1, \dots, z_r در مرحله ۳ تضمین می‌کند که بردارهای u_1, \dots, u_m پایه‌ای برای N_D تشکیل می‌دهند. به جای v_1, \dots, v_n بردارهای $D(x_1), x_1, y_1, \dots$ را قرار می‌دهیم. طرز انتخاب در مرحله ۲ تضمین می‌کند که بردارهای $D^2(x_1), D(x_1), D(y_1), \dots$ پایه‌ای برای R_D تشکیل می‌دهند. لذا، حکم ثابت شده است.

حال، نمایش ماتریسی D را نسبت به پایه

$$D^2(x_1), D(x_1), x_1, D(y_1), y_1, \dots, z_1, \dots$$

به دست می‌آوریم.

ملاحظه می‌کنیم که عملگر D ، $D^2(x_1)$ را به 0 ، $D(x_1)$ را به $D^2(x_1)$ و x_1 را به $D(x_1)$ می‌برد. لذا، روی زیرفضای پدید آمده توسط $D^2(x_1), D(x_1), x_1$ عملگر D توسط ماتریس

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. البته، این یک بلوک ژوردان با اندازه ۳ است. روی هر یک از زیرفضاهایی که $D^2(x_i), D(x_i), x_i$ پایه‌ای برای آن باشد، عملگر D نسبت به این پایه به صورت یک بلوک ژوردان با اندازه ۳ نمایانده می‌شود.

به همین ترتیب، عملگر D ، $D(y_i)$ را به 0 می‌برد (زیرا، بنا به مرحله ۲، $D^2(y_i) = 0$) و y_i را به $D(y_i)$ می‌برد. پس، روی زیرفضای V با پایه $D(y_i), y_i$ عملگر D نسبت به این پایه توسط ماتریس

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ژوردان با اندازه ۲ است. بالاخره، چون $D(z_i) = 0$ ، هر بردار پایه z_i بلوکی با اندازه ۱ ایجاد می‌کند.

بنابراین، نسبت به پایه

$$\dots, z_6, \dots, y_1, D(y_1), \dots, x_1, D(x_1), D^2(x_1)$$

عملگر D با ماتریسی به صورت

$$\begin{bmatrix} \circ & 1 & \circ & & & & \\ \circ & \circ & 1 & & & & \\ \circ & \circ & \circ & & & & \\ & & \vdots & \vdots & & & \\ & & & \circ & 1 & \circ & \\ & & & \circ & \circ & 1 & \\ & & & \circ & \circ & \circ & \\ & & & & \circ & 1 & \\ & & & & \circ & \circ & \\ & & & & \vdots & \vdots & \\ & & & & & \circ & 1 \\ & & & & & \circ & \circ \\ & & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & & & \circ \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & \circ \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود.

ازاینرو، با انتخاب پایه مناسب، نمایش ماتریسی D به صورت نرمال ژوردان درمی‌آید. با کمی سعی بیشتر، می‌توانیم تعداد بلوکهای ژوردان با یک اندازه معین را مشخص کنیم. بلوکهای ژوردان با اندازه ۳ از بردارهای پایه

$$x_r, D(x_r), D^2(x_r), \dots, x_1, D(x_1), D^2(x_1)$$

به دست می‌آیند. لذا، r بلوک ژوردان با اندازه ۳ وجود دارد. از مرحله ۱ نتیجه می‌شود که r ، بعد R_{D^2} است. پس $r = r(D^2)$ ، رتبه D^2 است. از بردارهای پایه

$$y_s, D(y_s), \dots, y_1, D(y_1)$$

تعداد s بلوک ژوردان با اندازه ۲ به دست می‌آید. از مرحله ۲ چنین برمی‌آید که $2r + s = r(D)$. بنابراین $s = r(D) - 2r(D^2)$. تعداد بلوکهای ژوردان با اندازه ۱ برابر t است. طبق مرحله ۳، $r + s + t = n(D) = \dim V - r(D)$ ، در نتیجه، $t = \dim V - 2r(D) + r(D^2)$. با این قرارداد که $D^0 = I$ ، تساوی مزبور را می‌توان به صورت $t = r(D^0) - 2r(D) + r(D^2)$ نوشت. بسط روشهای فوق نتیجه کلی زیر را به دست می‌دهد.

قضیه اگر D عملگری بوج توان روی فضای برداری متناهی البعد V باشد، نمایش ماتریسی D نسبت به یک پایه مناسب V به صورت نرمال ژوردان است. تعداد بلوکهای ژوردان

با اندازه i ، با فرمول $r(D^{i-1}) - 2r(D^i) + r(D^{i+1})$ داده می‌شود.

در تمرینات نشان خواهیم داد که چگونه فرمول کلی تعداد بلوکهای ژوردان را به دست می‌آوریم. در اینجا فقط صورت نرمال ژوردان ماتریس پوچ توان مشخصی را می‌یابیم.

مثال ۱ برای ماتریس پوچ توان D ی زیر، یک ماتریس B می‌یابیم به طوری که $B^{-1}DB$ به صورت نرمال ژوردان باشد.

$$D^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -4 \\ -2 & 0 & 2 & -2 & 8 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D^3 = 0$$

طبق معمول، e_1, \dots, e_5 پایه متعارف R^5 است. توجه داریم که De_i همان ستون i ام D است. فرض کنیم v برداری باشد که ستون اول D^2 است. ابتدا پایه‌هایی برای R_{D^2} و R_D می‌یابیم.

واضح است که v پایه‌ای برای R_{D^2} است و $r(D^2) = 1$. حال ملاحظه می‌کنیم که De_1, De_4, De_5 پایه‌ای برای R_D است. بآسانی تحقیق می‌شود که این بردارها مستقل خطی اند. چون $De_1 = De_5 - 3De_4 - De_5$ و $De_4 = 2De_5 - De_4$ ، این بردارها را پدید می‌آورند. لذا، $r(D) = 3$. از فرمولهای ارائه شده قبلی چنین برمی‌آید که صورت نرمال ژوردان D دارای $r(D^2) = 1$ بلوک ژوردان با اندازه ۳ و $r(D) - 2r(D^2) = 1$ بلوک ژوردان با اندازه ۲ است و بلوک ژوردانی با اندازه ۱ ندارد. برای یافتن ماتریس B ، روش مذکور در کتاب را دنبال می‌کنیم.

ابتدا، باید x را پیدا کنیم به قسمی که $D^2(x)$ فضای R_{D^2} را پدید آورد. با بررسی D^2 ، درمی‌یابیم که امکانات متعددی برای انتخاب وجود دارد. فرض کنیم $x = e_1$. سپس باید y را پیدا کنیم به نحوی که $D^2y = 0$ و نیز به قسمی که D^2x, Dx, Dy پایه‌ای برای R_D باشد. از اینرو باید $t = Dy$ را در R_D طوری بیابیم که $Dt = 0$ ، و نیز D^2x, Dx, t پایه‌ای برای R_D باشد. داریم $Dx = De_4$ و

$$D^2x = DDe_4 = D(-e_1) = -De_1$$

پس $\text{sp}(D^2x, Dx) = \text{sp}(De_4, De_1)$. از این قرار، t باید به عنوان عضوی از $\text{sp}(De_4, De_1, De_5)$ که متعلق به $\text{sp}(De_4, De_1)$ نیست و نیز به طوری که $Dt = 0$ ، انتخاب شود. ملاحظه می‌کنیم که $D^2e_5 = v$ ، $D(De_5) = 0$ و $D(De_1) = -4v$. لذا، اگر فرض کنیم $t = De_5 + 4De_1$ ، داریم $Dt = 0$ و t به $\text{sp}(De_4, De_1)$ تعلق ندارد. حال y را طوری انتخاب می‌کنیم که $Dy = t$. یک انتخاب مناسب y عبارت است از: $e_5 + 4e_1$.

پس، نمایش ماتریسی D نسبت به پایه D^2x, Dx, x, Dy, y به صورت نرمال ژوردان است. اگر پایه را بر حسب $x = e_\varphi + 2e_\varphi$ و $y = e_\delta + 2e_\varphi$ بنویسیم، داریم

$$e_\delta + 2e_\varphi, De_\delta + 2De_\varphi, e_\varphi, De_\varphi, D^2e_\varphi$$

اگر B ماتریسی باشد که ستونهای متوالیش این بردارها هستند، می بینیم که $B^{-1}DB$ به صورت نرمال ژوردان است. از اینرو،

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

اکنون تعیین صورت نرمال ژوردان عملگری که فقط یک مقدار ویژه دارد، مسئله ساده ای است. در واقع، T را عملگری خطی روی فضای برداری V می گیریم که چند جمله ای مشخصه آن $(x - \lambda)^*$ است. قرار می دهیم $D = T - \lambda I$. در این صورت، بنا به قضیه کیلی - همیلتون، $D^* = 0$. لذا، یک پایه x_1, \dots, x_n وجود دارد به قسمی که نمایش ماتریسی D نسبت به این پایه به صورت نرمال ژوردان است. نمایشهای ماتریسی D و $T = \lambda I + D$ نسبت به این پایه عبارتند از:

$$\begin{bmatrix} \lambda I + J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda I + J_2 & \dots & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda I + J_k \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & J_k \end{bmatrix}$$

که در آنها J_1, J_2, \dots, J_k بلوکهای ژوردان با درایه های قطری ۰ می باشند. پس، $\lambda I + J_1, \dots, \lambda I + J_k$ بلوکهای ژوردان با درایه های قطری λ هستند. چون تعداد بلوکهای ژوردان با اندازه k برای D برابر است با $r(D^{k+1}) - 2r(D^k) + r(D^{k-1})$ ، تعداد بلوکهای ژوردان با اندازه k برای T برابر خواهد بود با

$$r((T - \lambda I)^{k-1}) - 2r((T - \lambda I)^k) + r((T - \lambda I)^{k+1})$$

مثال ۲ صورت نرمال ژوردان ماتریس زیر را می یابیم:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

کار را با یافتن چند جمله ای مشخصه A شروع می کنیم.

$$C_A(x) = \begin{vmatrix} x+2 & 1 & -2 \\ -2 & x-2 & 1 \\ 3 & 1 & x-3 \end{vmatrix} = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$$

سپس $A - I$ و $(A - I)^2$ و رتبه این ماتریسها را محاسبه می‌کنیم.

$$(A - I)^3 = 0, (A - I)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, A - I = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

واضح است که ستونهای اول و دوم $A - I$ مستقل خطی اند. لذا، $r(A - I) \geq 2$. چون $A - I$ منفرد است، $r(A - I) = 2$. همچنین $r(A - I)^2 = 1$. در نتیجه یک بلوک ژوردان با اندازه ۳ در صورت نرمال ژوردان A وجود دارد. پس، صورت نرمال ژوردان A به شکل زیر است:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

همچنین، وقتی که تبدیل خطی تعداد متعددی مقدار ویژه متمایز داشته باشد، می‌توان تعداد بلوکهای ژوردان از یک نوع مفروض را مشخص کرد. ابتدا لم زیر را می‌آوریم:

لم ۳ فرض کنیم C ماتریس بلوکی

$$C = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

باشد که در آن A یک ماتریس $m \times m$ و B یک ماتریس $n \times n$ است. در این صورت $r(C) = r(A) + r(B)$.

اثبات فرض می‌کنیم A دارای رتبه s و B دارای رتبه t باشد. در بخش ۵.۵، دیدیم که ماتریسهای وارون‌پذیر G_A و G_B از مرتبه m و H_A و H_B از مرتبه n وجود دارند به قسمی که

$$H_A B H_A = \begin{bmatrix} I_t & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } G_A A G_A = \begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

از اینرو

$$\begin{bmatrix} G_A & 0 \\ 0 & H_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_A & 0 \\ 0 & H_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

و

$$\begin{bmatrix} G_i & 0 \\ 0 & H_i \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} G_i^{-1} & 0 \\ 0 & H_i^{-1} \end{bmatrix}$$

از این روابط چنین برمی‌آید که C دارای رتبه $s + t$ است.

نتیجه فرض کنیم T عملگری خطی روی فضای برداری متناهی البعد V ، و λ یک مقدار

ویژه T باشد. در این صورت، تعداد بلوکهای ژوردان با اندازه k و با درایه‌های قطری λ در صورت نرمال ژوردان T برابر است با

$$r((T - \lambda I)^{k-1}) - 2r((T - \lambda I)^k) + r((T - \lambda I)^{k+1})$$

اثبات فرض می‌کنیم چندجمله‌ای مشخصه T ، برابر $(x - \lambda_1)^{n_1} \dots (x - \lambda_m)^{n_m}$ باشد که در آن $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ متمایزند و $\lambda = \lambda_1$. فرض کنیم X_1, X_2, \dots, X_p پایه‌ای برای V باشد به نحوی که نمایش ماتریسی T نسبت به این پایه دارای صورت بلوکی قضیه ۱ در بخش قبلی است. نسبت به این پایه، نمایشهای ماتریسی T و $(T - \lambda_1 I)^p$ به ترتیب عبارتند از:

$$\begin{bmatrix} (B_1 - \lambda_1 I)^p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (B_2 - \lambda_1 I)^p & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & (B_m - \lambda_1 I)^p \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & B_m \end{bmatrix}$$

که در آنها B_i یک ماتریس بالا مثلثی $n_i \times n_i$ با درایه‌های قطری λ_i است. به سبب دیده می‌شود که رتبه ماتریس $(B_1 - \lambda_1 I)^p$ ، $(B_1 - \lambda_1 I)^p$ ، همگی ماتریسهای بالا مثلثی اند که درایه‌های قطری غیر صفر آنها به ترتیب $(\lambda_1 - \lambda_1)^p, \dots, (\lambda_p - \lambda_1)^p, \dots, (\lambda_m - \lambda_1)^p$ می‌باشند. نتیجتاً رتبه پایین‌ترین بلوک سمت راست، $n_1 + \dots + n_p = n - n_1$ است. بنا به لم ۳، رتبه $(T - \lambda_1 I)^p$ برابر است با $r((B_1 - \lambda_1 I)^p) + n - n_1$. حال، به سبب دیده می‌شود که تعداد بلوکهای ژوردان T با اندازه k و با درایه‌های قطری λ_1 ، برابر تعداد بلوکهای ژوردان B_1 با اندازه k ، یعنی برابر $r((B_1 - \lambda_1 I)^{k-1}) - 2r((B_1 - \lambda_1 I)^k) + r((B_1 - \lambda_1 I)^{k+1})$ است. هرگاه در عبارت فوق قراردیم $(n - n_1) = r((B_1 - \lambda_1 I)^p) = r((T - \lambda_1 I)^p) - (n - n_1)$ ، نتیجه مطلوب به دست می‌آید. ●

پس، برای یافتن صورت نرمال ژوردان یک ماتریس A ، ابتدا لازم است که $C_A(x)$ را پیدا کنیم. سپس $C_A(x)$ را به صورت $C_A(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \dots (x - \lambda_k)^{n_k}$ تجزیه و به ازای هر i ، دنباله نزولی اعداد

$$r(A - \lambda_i I) \geq r((A - \lambda_i I)^2) \geq r((A - \lambda_i I)^3) \geq \dots$$

را حساب می‌کنیم؛ اگر $p \geq n_i$ ، اثبات نتیجه فوق نشان می‌دهد که

$$r((A - \lambda_i I)^p) = n - n_i$$

از اینرو، فقط لازم است جملات این دنباله را تا وقتی به جمله $n - n_i$ برسیم حساب کنیم. پس از آن دنباله ثابت است. آنگاه از نتیجه فوق تعداد بلوکهای ژوردان با هر اندازه‌ای را می‌توان به دست آورد.

مثال ۳ صورت نرمال ژوردان ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

را می‌یابیم. داریم

$$C_A(x) = \begin{vmatrix} x+2 & -1 & -3 & 1 \\ -3 & x & 2 & -2 \\ -1 & -1 & x-2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+2 & x+1 & 3x+3 & x^2+2x+1 \\ -3 & x-3 & -7 & -3x-2 \\ -1 & -2 & x-5 & -x-1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (x+1) \begin{vmatrix} 1 & 3 & x+1 \\ x-3 & -7 & -3x-2 \\ -2 & x-5 & -x-1 \end{vmatrix}$$

$$= (x+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x-3 & -3x+2 & -x^2-x+1 \\ -2 & x+1 & x+1 \end{vmatrix} = (x+1)^2 (x-1)^2$$

$$A - I = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \text{ و } A + I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \text{ حال}$$

اکنون با سانی تحقیق می‌شود که سه ستون اول هر دوی این ماتریسها مستقل خطی اند. از اینرو $r(A+I) = r(A-I) = 3$. با توجه به مطالب قبل، اگر $p > 2$ ، آنگاه $r((A+I)^p) = r((A-I)^p) = 2$. لذا، تعداد ۲- بسوکه‌های ژوردان متناظر با هر دوی ۱ و ۱- برابر است با $1 = 2 + 2 \times 2 - 3$. در نتیجه، صورت نرمال ژوردان ماتریس A عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

تمرینات

۱. صورت نرمال ژوردان هر یک از ماتریسهای زیر را بیابید.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{الف}) \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \quad (\text{ج}) \quad \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{د})$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ز}) \quad \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -9 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{و}) \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{ه})$$

۲. برای هر یک از ماتریسهای پوچ توان A ی زیر، یک ماتریس B بیابید به طوری که $B^{-1}AB$ به صورت نرمال ژوردان باشد.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 2 \\ -4 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \\ -4 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

۳. نشان دهید که ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ دارای فقط یک بلوک ژوردان با اندازه ۳ است اگر و فقط اگر $ab \neq 0$.

۴. فرض کنید D عملگری خطی روی P_n باشد که با ضابطه $D(f) = f'$ تعریف می شود. نشان دهید که نمایش ماتریسی T نسبت به پایه $1, x, x^2/2, x^3/6, \dots, x^n/n!$ به صورت نرمال ژوردان است.

۵. فرض کنید A یک ماتریس مختلط $n \times n$ باشد. نشان دهید که A روی اعداد مختلط مشابه با A^T است.

۶. فرض کنید J ماتریس پوچ توان $n \times n$ ای باشد که تنها یک بلوک ژوردان آن دارای اندازه n است. نشان دهید که $r(J^k) = n - k$.

۷. فرض کنید D یک ماتریس پوچ توان $n \times n$ باشد که دارای J_1 بلوک ژوردان با اندازه ۱، J_2 بلوک ژوردان با اندازه ۲، \dots ، و J_k بلوک ژوردان با اندازه k است. فرض کنید $d_i = r(D^i)$ نشان دهید که

$$\begin{aligned} J_1 + 2J_2 + 3J_3 + \dots + kJ_k &= d_0 (= n) \\ J_2 + 2J_3 + \dots + (k-1)J_k &= d_1 \\ J_3 + \dots + (k-2)J_k &= d_2 \\ &\vdots \\ J_k &= d_k \end{aligned}$$

[راهنمایی: از تمرین ۶ و لم ۳ استفاده کنید.]

۸. با اثبات تساوی زیر

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k \\ 0 & 1 & 2 & \dots & k-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & k-2 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

و با استفاده از تمرین ۷، فرمولی را که در قضیه این بخش (بخش ۴.۷) آمد، به دست آورید.

۹. نشان دهید که هر عملگر روی R^n با رتبه ۱، قطری شدنی یا پوچ توان است.

۱۰. فرض کنید A یک ماتریس مختلط $n \times n$ باشد که همه مقادیر ویژه آن حقیقی‌اند. نشان دهید که A مشابه با یک ماتریس حقیقی است.

۱۱. فرض کنید M یک ماتریس $n \times n$ باشد. نشان دهید که احکام زیر هم ارزند:

$$(الف) \quad M^2 = 0$$

(ب) $M = AB$ که در آن A و B ماتریس‌هایی $n \times n$ هستند به‌طوری که $BA = 0$.

۱۲. فرض کنید D یک ماتریس پوچ توان و J_i تعداد بلوک‌های ژوردان D با اندازه i باشد. نشان دهید که یک ماتریس B وجود دارد به قسمی که $B^i = D$ اگر و فقط اگر $J_1 \geq J_2 + \dots + J_k$ ، که در آن k اندازه بزرگترین بلوک ژوردان است.

۱۳. فرض کنید A یک ماتریس مختلط $n \times n$ باشد. نشان دهید که وقتی m به سمت بینهایت میل می‌کند تمام درایه‌های A^m به ۰ می‌گرایند اگر و فقط اگر قدر مطلق هر یک از مقادیر ویژه A کمتر از ۱ باشد.

۱۴. فرض کنید N یک ماتریس پوچ توان و c یک عدد غیر صفر باشد. نشان دهید که Nc و cN مشابه‌اند.

۱۵. فرض کنید D ماتریس پوچ توان $n \times m$ ای باشد به نحوی که $D^{n-1} \neq 0$. نشان دهید که D دارای یک بلوک ژوردان است.

۱۶. فرض کنید A ماتریس 2×2 ای باشد که چند جمله‌ای مشخصه آن $(x - \lambda)^2$ است. نشان دهید که $A^n = (1 - n)\lambda^n I_2 + n\lambda^{n-1} A$.

۱۷. فرض کنید A یک ماتریس مختلط $n \times n$ باشد. نشان دهید A حاصلجمع دو ماتریس B و N است، که B قطری شدنی است و N پوچ توان است، و B و N جابجا می‌شوند.

۵ صورت‌های دو خطی

در یکی از بخش‌های قبلی این کتاب، ضرب داخلی و خارجی را مورد بحث قرار دادیم. دیدیم که

$$(\alpha a + \beta b) \times c = \alpha(a \times c) + \beta(b \times c)$$

$$a \times (\beta b + \gamma c) = \beta(a \times b) + \gamma(a \times c)$$

$$(\alpha a + \beta b, c) = \alpha(a, c) + \beta(b, c)$$

$$(a, \beta b + \gamma c) = \beta(a, b) + \gamma(a, c)$$

حال می‌خواهیم توابعی از این نوع را در حالت کلی مطالعه کنیم. بنابراین، تابع دو خطی b از فضای برداری V به فضای برداری W را به‌عنوان تابعی روی زوج‌های مرتب عناصر V ، باضوابط زیر تعریف می‌کنیم: به‌ازای هر x, y, z و D در V و اسکالرهای دلخواه α, β, γ ،

$$b(\alpha x + \beta y, z) = \alpha b(x, y) + \beta b(y, z)$$

$$b(x, \beta y + \gamma z) = \beta b(x, y) + \gamma b(x, z)$$

در این بخش، همه فضاها برداری حقیقی اند. در تعریف فوق، اگر $W = R$ ، تابع دوخطی را صورت دوخطی می‌نامند. لذا، ضرب داخلی یک صورت دوخطی است، ولی ضرب خارجی یک صورت دوخطی نیست.

یک تابع دوخطی متقارن است اگر به ازای هر x و y متعلق به V ، $b(x, y) = b(y, x)$.

آن را متناوب یا متقارن کج می‌نامند اگر به ازای هر x و y متعلق به V ، $b(x, y) = -b(y, x)$. ضرب خارجی متناوب، و ضرب داخلی متقارن است.

اگر b یک صورت دو خطی باشد و بردار غیر صفری مانند x وجود داشته باشد به طوری که، به ازای هر y در V ، $b(x, y) = 0$ ، صورت دوخطی را تبهگون می‌نامند. به یک صورت دو خطی که تبهگون نباشد، ناتبهگون گفته می‌شود. ضرب داخلی یک صورت دوخطی ناتبهگون است. در واقع، اگر x برداری در R^n باشد به قسمی که، به ازای هر y متعلق به R^n ، $b(x, y) = 0$ ، آنگاه $b(x, x) = 0$. از اینرو $x = 0$.

یک صورت دو خطی را مثبت گویند اگر به ازای هر بردار x ، $b(x, x) \geq 0$. اگر به ازای هر بردار x ، $b(x, x) \leq 0$ ، صورت دو خطی b را منفی می‌نامند. همان طور که دیدیم، ضرب داخلی یک صورت دو خطی مثبت است.

اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد، واضح است که تابع $b(x, y) = x^T A y$ ، که به ازای هر زوج از بردارهای x و y متعلق به R^n تعریف می‌شود، دوخطی است. اگر $A = I_n$ ، این صورت دو خطی همان ضرب داخلی است. نشان خواهیم داد که همه صورتهای دوخطی روی R^n از این نوع اند.

قضیه ۱ اگر b یک صورت دوخطی روی R^n باشد، ماتریس حقیقی $n \times n$ یکتایی مانند A وجود دارد به قسمی که به ازای هر x و y متعلق به R^n ، $b(x, y) = x^T A y$.

اثبات تعریف می‌کنیم $A = [b(e_i, e_j)]_{(n,n)}$ ، که در آن e_1, \dots, e_n پایه متعارف R^n است. توجه داریم که $e_i^T A e_j = b(e_i, e_j)$. فرض کنیم c صورت دو خطی $c(x, y) = x^T A y$ باشد. بنابراین، صورتهای دو خطی b و c به ازای تمام بردارهای پایه مقادیر مساوی اختیار می‌کنند. نشان می‌دهیم که آنها همه جا مقادیر مساوی اختیار می‌کنند.

$$\begin{aligned} b\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j\right) &= \sum_{i,j} x_i y_j b(e_i, e_j) \\ &= \sum_{i,j} x_i y_j c(e_i, e_j) \\ &= c\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j\right) \end{aligned}$$

از اینرو، $b(x, y) = x^T A y$.

A یکتاست، زیرا اگر $b(x, y) = x^T A' y$ آنگاه $b(e_i, e_j) = e_i^T A' e_j$. اگر

$a'_{ij} = [a'_{ij}]_{(nn)}$ داریم $b(e_i, e_j) = a'_{ij}$ قبلاً دیدیم که $b(e_i, e_j) = a_{ij}$ لذا $a'_{ij} = a_{ij}$.
 از اینرو $A = A'$.

صورت دوخطی $b_A(x, y) = x^T A y$ متقارن است اگر و فقط اگر ماتریس A متقارن باشد.
 زیرا چون $x^T A y$ عددی حقیقی است، $(x^T A y)^T = x^T A y$ پس $y^T A^T x = x^T A y$. بنا براین، اگر $x^T A y = y^T A x$ اگر و فقط اگر $y^T A^T x = y^T A x$ بنا به یکتا بودن A (مذکور در قسمتی از قضیه قبل)، تساوی اخیر هم ارز است با $A^T = A$.
 به همین نحو، می‌توان نشان داد که b_A متقارن کج است اگر و فقط اگر A متقارن کج باشد.

تابع Q از R^n به R را صورت درجه دوم می‌نامند اگر دوخطی b روی R^n وجود داشته باشد به نحوی که $Q(x) = b(x, x)$. بنا به قضیه ۱، هر صورت درجه دوم را می‌توان به ازای ماتریس $n \times n$ ای مانند $A = [a_{ij}]_{(nn)}$ ، به صورت $x^T A x$ نوشت. از اینرو، اگر $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ ، آنگاه

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

پس، به عنوان مثال، هر صورت درجه دوم روی R^2 را می‌توان به صورت $a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2$ نوشت. البته این عبارت برابر است با $a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2$. بنا براین صورت درجه دوم وابسته به ماتریس

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

همان صورت درجه دوم وابسته به ماتریس متقارن

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}(a_{12} + a_{21}) \\ \frac{1}{2}(a_{12} + a_{21}) & a_{22} \end{bmatrix}$$

است. محتوای قضیه زیر این است که هر صورت درجه دوم، صورت درجه دوم وابسته به یک صورت دوخطی متقارن است.

قضیه ۲ هر گاه Q یک صورت درجه دوم روی R^n باشد، آنگاه یک صورت دوخطی متقارن یکتای b روی R^n وجود دارد به طوری که $Q(x) = b(x, x)$.
 اثبات اگر Q یک صورت درجه دوم باشد، صورتی دوخطی مانند c (که الزاماً متقارن نیست) وجود دارد به قسمی که $Q(x) = c(x, x)$. تعریف می‌کنیم

$$b(x, y) = \frac{1}{2}(c(x, y) + c(y, x)).$$

واضح است که b یک صورت دوخطی است. همین‌طور واضح است که

$b(x, y) = b(y, x)$. لذا، b متقارن است. علاوه $b(x, x) = c(x, x) = Q(x)$. حال، نشان می‌دهیم که b توسط Q به طور یکتا معین می‌شود. فرض می‌کنیم b_1 و b_2 صورت‌های دوخطی متقارنی باشند و $Q(x) = b_1(x, x) = b_2(x, x)$ ، در این صورت

$$\begin{aligned} b_1(x, y) &= \frac{1}{4}(b_1(x+y, x+y) - b_1(x-y, x-y)) \\ &= \frac{1}{4}(b_2(x+y, x+y) - b_2(x-y, x-y)) \\ &= b_2(x, y) \end{aligned}$$

از اینرو، b به طور یکتا معین می‌شود.

اگر C ماتریس نامنفرد $n \times n$ ای باشد و b یک صورت دوخطی روی R^n می‌توانیم صورت دو خطی جدیدی به شکل $b'(x, y) = b(Cx, Cy)$ تعریف کنیم. گوییم که b' همبستگی با b است.

اکنون همبستگی را بر حسب ماتریسها تعبیر می‌کنیم. اگر $b(x, y) = x^T A y$ و $b'(x, y) = x^T B y$ باشد، ماتریس نامنفرد $n \times n$ ای مانند C وجود دارد به نحوی که $x^T B y = x^T C^T A C y$. چون این تساوی به ازای هر x و هر y برقرار است، بنا به قضیه ۱، $B = C^T A C$.

برعکس اگر $B = C^T A C$ ، آنگاه $b'(x, y) = b(Cx, Cy)$ و b' همبستگی با b است. اگر $B = C^T A C$ ، آنگاه $A = (C^{-1})^T B C^{-1}$. پس اگر b' همبستگی با b باشد، نیز همبستگی با b' خواهد بود.

اگر b یک صورت دو خطی باشد، گوییم رتبه b ، رتبه ماتریس وابسته به آن، یعنی رتبه A است. اگر b و b' صورت‌های دوخطی همبستگی باشند و b وابسته به ماتریس A باشد، آنگاه b' وابسته به ماتریس $C^T A C$ (به ازای یک ماتریس نامنفرد C) است. بنابراین نتیجه می‌شود که صورت‌های دوخطی b و b' دارای رتبه یکسان اند.

درست همان‌طور که هم ارزی و هم ارزی متعامد ماتریسها را تعریف کردیم، می‌توانیم همبستگی و همبستگی متعامد صورت‌های دوخطی و صورت‌های درجه دوم را تعریف کنیم. گوییم که صورت‌های دوخطی b و b' به طور متعامد همبستگی اند اگر ماتریس متعامدی مانند A وجود داشته باشد به قسمی که $b(x, y) = b(Ax, Ay)$. همین‌طور، دو صورت درجه دوم Q و Q' به طور متعامد همبستگی اند اگر به ازای ماتریس متعامدی مانند A ، $Q'(x) = Q(Ax)$. و این هم ارز است با اینکه صورت‌های دوخطی متقارن وابسته به آنها به طور متعامد همبستگی اند. واضح است که ساده‌ترین رده صورت‌های درجه دوم، عبارت‌اند از صورت‌هایی به شکل

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$$

اینها متناظر با ماتریسهای قطری اند. از اینرو قضیه زیر، قضیه جالبی است.

قضیه ۳ هر صورت درجه دوم Q ، با صورتی از نوع زیر، به طور متعامد همبستگی است:

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$$

اثبات بنا به قضیه ۲ از همین بخش، به ازای یک ماتریس متعارف A ، $Q(x) = x^T A x$ طبق قضیه ۲ از بخش ۲.۷، ماتریس متعامدی مانند C وجود دارد به طوری که $C^T A C$ قطری است.

مثال ۱ نشان دهید که منحنی

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d, \quad d \neq 0$$

بیضی است اگر $4ac - b^2 > 0$ و هذلولی است اگر $4ac - b^2 < 0$. فرض کنیم

$$Q(x) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

واضح است که $Q(x) = d$ نمایشگر منحنی فوق است. بنا به قضیه ۳، ماتریس متعامدی مانند A وجود دارد به قسمی که $Q(Ax) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2$ و

$$A^T \begin{bmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

منحنی $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = d$ بیضی است اگر $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ و هذلولی است اگر $\lambda_1 \lambda_2 < 0$. چون A متعامد است، $A^T = A^{-1}$ و

$$\det \left(A^T \begin{bmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{bmatrix} A \right) = ac - \frac{1}{4}b^2 = \lambda_1 \lambda_2$$

چون منحنی $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = d$ از منحنی $ax^2 + bxy + cy^2 = d$ با دوران محور-ها به دست آمد، منحنی $ax^2 + bxy + cy^2 = d$ بیضی است اگر $4ac - b^2 > 0$ و هذلولی است اگر $4ac - b^2 < 0$.

قضیه بعدی بلافاصله از قضیه ۳ حاصل می‌شود.

قضیه ۴ هر صورت درجه دوم همبسته با صورتی از نوع

$$x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$$

است.

اثبات اگر x_i را با $x_i/\sqrt{\lambda_i}$ (وقتی $\lambda_i > 0$)، و با $x_i/\sqrt{-\lambda_i}$ (وقتی $\lambda_i < 0$) جایگزین کنیم نتیجه حاصل است.

پس، هر صورت دو خطی متقارن b همبستگی با صورتی از نوع

$$x_1 y_1 + \dots + x_k y_k - x_{k+1} y_{k+1} - \dots - x_{k+r} y_{k+r}$$

است. واضح است که رتبه این صورت $k+r$ است. عدد $k-r$ را نشان صورت می نامند. ثابت می کنیم که نشان به طور یکتا معین می شود. به عبارت دیگر، اگر b همبستگی با

$$x_1 y_1 + \dots + x_{k'} y_{k'} - x_{k'+1} y_{k'+1} - \dots - x_{k'+r'} y_{k'+r'}$$

نیز باشد، می خواهیم ثابت کنیم که $k' - r' = k - r$. چون صورتهای همبستگی دارای رتبه یکسان اند، $k + r = k' + r'$. لذا، برای اثبات $k - r = k' - r'$ ، کافی است نشان دهیم که $k = k'$.

لم هرگاه W زیر فضایی از R^n باشد به نحوی که برای هر x در W ، داشته باشیم $b(x, x) \leq 0$ که عبارت است از صورت دوخطی

$$x_1 y_1 + \dots + x_k y_k - x_{k+1} y_{k+1} - \dots - x_{k+r} y_{k+r}$$

آنگاه، $\dim W \leq n - k$.

اثبات فرض کنیم V زیر فضایی از R^n باشد که توسط e_1, \dots, e_{k+1} پدید آمده است. واضح است که $\dim V = n - k$. فرض کنیم U زیر فضایی از R^n باشد که توسط e_1, \dots, e_k پدید می آید و y_1, \dots, y_m پایه ای برای W باشد. در این صورت هر y_i را می توان به طور یکتا به صورت $u_i + v_i$ نوشت به قسمی که $u_i \in U$ و $v_i \in V$. اگر $m > n - k$ ، اسکالرهایی حقیقی $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ که لااقل یکی از آنها صفر نیست، وجود دارند به طوری که

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i v_i = 0$$

در این صورت

$$z = \sum_{i=1}^m \alpha_i y_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i (u_i + v_i) = \sum_{i=1}^m \alpha_i u_i$$

متعلق به W است. از اینرو $b(z, z) \leq 0$.

اما z متعلق به U نیز هست و صورت دو خطی b روی U همان ضرب داخلی مذکور در بخش ۲.۶ است. پس، $b(z, z) \geq 0$. در نتیجه $b(z, z) = 0$. چون b روی U ، همان ضرب داخلی مذکور در بخش ۲.۶ است، $z = 0$. بنا براین $\sum_{i=1}^m \alpha_i y_i = 0$ که متناقض است با این امر که y_1, \dots, y_m پایه ای برای W است و لااقل یکی از α_i ها صفر نیست. پس، باید داشته باشیم $m \leq n - k$.

قضیه ۵ (قانون لختی سیلوستر)^۱ نشان یک صورت دو خطی متقارن، به طور یکتا تعیین

می‌شود.

اثبات با توجه به نمادگذاری قبل از لم، باید ثابت کنیم که $k = k'$. بنا به لم داریم

$$n - k' \leq n - k \text{ و } n - k \leq n - k'$$

در نتیجه $k = k'$.

تمرینات

۱. نشان دهید که صورت‌های دو خطی روی \mathbb{R}^n با اعمال جمع و ضرب اسکالر معمولی توابع حقیقی، یک فضای برداری تشکیل می‌دهند. نشان دهید که این فضا با فضای ماتریسهای حقیقی $n \times n$ یکریخت است.

۲. رتبه و نشان هر یک از صورت‌های درجه دوم زیر را معین کنید:

$$(الف) \quad x^2 + xy + y^2 \quad (ب) \quad x^2 + xy + 3y^2$$

$$(ج) \quad x^2 + 2xy + y^2 \quad (د) \quad x^2 - y^2$$

۳. فرض کنید $b_A(x, y) = x^T A y$ یک صورت دو خطی متقارن باشد. نشان دهید که b_A مثبت است اگر و فقط اگر مقادیر ویژه A غیرمنفی باشند. نشان دهید که b_A ناتهیگون است اگر و فقط اگر هیچیک از مقادیر ویژه A صفر نباشد.

۴. فرض کنید b یک صورت دو خطی متقارن روی \mathbb{R}^n باشد. نشان دهید که b مثبت است اگر و فقط اگر رتبه و نشان آن با یکدیگر مساوی باشند.

۵. فرض کنید b یک صورت دو خطی روی فضای برداری V باشد. W را گردآورده همه بردارهای x در V بگیرید به طوری که به ازای هر y در V ، $b(x, y) = 0$. (الف) نشان دهید که W زیرفضایی از V است.

(ب) اگر r رتبه b باشد، نشان دهید که $\dim W + r = \dim V$.

۶. فرض کنید A ماتریس متقارن 2×2 ی غیرصفری با رتبه ۱ باشد. به ازای هر مقدار c ، مجموعه $b_A(x, x) = c$ را به طور هندسی تعبیر کنید.

۷. نشان دهید که دو صورت دو خطی متقارن همبسته‌اند اگر و فقط اگر رتبه و نشان آنها مساوی یکدیگر باشند.

۸. رتبه و نشان صورت درجه دوم $xy + yz + xz$ را معین کنید.

۹. نشان دهید که هر صورت دو خطی را می‌توان به طور یکتا به صورت حاصلجمع یک صورت دو خطی متقارن و یک صورت دو خطی متقارن کج نوشت. این مطلب را بر حسب ماتریسها تعبیر کنید.

جواب تمرینهای برگزیده

بخش ۱.۱

۱. (الف) $x = 23/7, y = 3/7$ (ج) جواب ندارد. (ه) $x + 2y = 3$.

۳. (الف) $x = 4, y = 3, z = -1$.

۵. پنج واحد از A ، بیست واحد از B .

بخش ۲.۱

۱. (الف) هم ارز نیستند؛ جواب دستگاه اول $(1/3, 1/3)$ ، و جواب دستگاه

دوم $(1, 2)$ است.

(ج) هم ارز نیستند؛ جواب دستگاه اول $(0, 0)$ است، و دستگاه دوم دارای جواب

$x + y = 0$ است.

(ه) هم ارز نیستند؛ جواب دستگاه اول $(3, 1)$ ، و جواب دستگاه دوم $(0, 4)$ است.

بخش ۳.۱

۱. (الف) $x = 1, y = 3, z = 7$ (ج) جواب ندارد. (ه) جواب ندارد.

(ز) $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = a/2 + b, x_4 = -3a/2$.

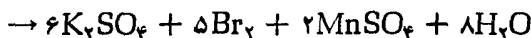
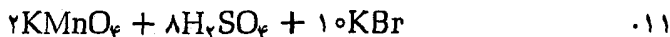
۳. $y = 1 - t$ و $x = -t$.

۴. (الف) $a - 3b + c = 0$.

۷. بله، با استفاده از تمرین ۲ (الف).

۹. گیریم a وزن اولی باشد. آنگاه، وزن دومی، سومی، و چهارمی به ترتیب، $3a/2$ ،

$a/2$ ، و $5a/2$ هستند.



۱۳. سه تا از نوع اول، چهار تا از نوع دوم، و دو تا از نوع سوم.

بخش ۴.۱

$$۱. \quad (الف) \quad x = 3, y = -2c, z = -7c \quad (ج) \quad x_1 = -3a, x_2 = 5a, x_3 = a, x_4 = 5a$$

بخش ۱۰.۲

$$۱. \quad (الف) \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 12 \end{bmatrix} \quad (ج) \quad \begin{bmatrix} 22 \\ 39 \\ -15 \end{bmatrix} \quad (ه) \quad \begin{bmatrix} 13 \\ 1 \\ 28 \\ 21 \end{bmatrix}$$

$$۱۱. \quad y = -2, x = 9$$

$$۱۳. \quad \begin{bmatrix} 12 \\ 14 \\ 13 \end{bmatrix} \quad ۱۵. \quad 400 \text{ و } 450 \text{ و } 700$$

بخش ۲.۲

$$۳. \quad r(t) = i + t(i + j + k), (0, -1, -1), (3, 2, 2) \\ ۷. \quad (-1/9, -1/9, 4/9) \\ ۱۳. \quad (الف) \quad (1, 1/2, 1/2) \quad (ب) \quad (1, 1, 0) \quad (ج) \quad (0, 0, 1) \\ ۱۷. \quad (7/10, 5/10)$$

بخش ۳.۲

$$۱. \quad (الف) \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad (ج) \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 & 10 \\ 5 & 8 & 13 \end{bmatrix}$$

$$۲. \quad (ب) \quad \begin{bmatrix} 9 & 21 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$۳. \quad X = -3A/2 + B/2 - C/2$$

$$۵. \quad Y = -A + 2B \text{ و } X = 2A - 3B$$

$$۷. \quad ۶۴$$

بخش ۴.۲

$$۱. \quad (الف) \quad \begin{bmatrix} 13 & 18 \\ 13 & 2 \end{bmatrix} \quad (ج) \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 14 & 11 \end{bmatrix} \quad (ه) \quad \begin{bmatrix} 12 & 9 \\ 8 & 5 \\ 13 & 4 \end{bmatrix}$$

۰۳. [۶].

بخش ۱۰۳

۱. (الف) ۲۵ (ب) ۹ - (ج) ۲ (د) ۱ (ه) ۱ (و) ۱ -

بخش ۲۰۳

۱. (الف) ۱۴ - (ج) ۱ (ه) ۳۴۰ (ز) ۳ -

۰۷. $a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$

بخش ۴۰۳

۱. (الف) ۱۸ - (ج) ۶ - (ه) ۹ (ز) ۱۰۴.

بخش ۵۰۳

$$\begin{aligned}
 & ۱. (الف) \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -۶ & -۵ & ۴ \\ ۳ & ۵ & -۲ \\ ۷ & ۵ & -۳ \end{bmatrix} (ج) \begin{bmatrix} ۱ & -۴ & ۱ \\ ۱ & ۱ & -۲ \\ -۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \\
 & (ه) \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۱ & ۰ \\ ۱ & -۲ & ۲ & -۳ \\ ۰ & ۱ & -۱ & ۱ \\ -۲ & ۳ & -۲ & ۳ \end{bmatrix} (ز) \frac{1}{40} \begin{bmatrix} -۹ & ۱ & ۱ & ۱۱ \\ ۱ & ۱ & ۱۱ & -۹ \\ ۱ & ۱۱ & -۹ & ۱ \\ ۱۱ & -۹ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \\
 & ۱۳. (الف) \frac{1}{1+x^2} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -x \\ ۰ & ۱+x^2 & ۰ \\ x & ۰ & ۱ \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$(x \neq 0, \pm \sqrt{2}) \quad \frac{1}{x^2 - 2x} \begin{bmatrix} x^2 - 1 & x & 1 \\ x & x^2 & x \\ 1 & x & x^2 - 1 \end{bmatrix} \quad (ب)$$

$$(x \neq -1, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}) \quad \frac{1}{x^2 + 1} \begin{bmatrix} -x & 1 & x^2 \\ x^2 & -x & 1 \\ 1 & x^2 & -x \end{bmatrix} \quad (ج)$$

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + 1} \begin{bmatrix} 1 + c^2 & -a - bc & -b + ac \\ a - bc & 1 + b^2 & -c - ab \\ b + ac & c - ab & 1 + a^2 \end{bmatrix} \quad ۱۵$$

بخش ۶.۳

$$z = ۲۳/۱۳, y = ۴۵/۱۳, x = -۱۱/۱۳ \quad (\text{الف})$$

$$z = ۴, y = -۱, x = ۷ \quad (\text{ج})$$

$$\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & -۵ & ۲ \\ -۲ & ۱ & ۳ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۸ & -۳ \\ ۱ & -۱ & ۳ & -۱ \end{bmatrix} \quad (\text{ج}) \quad \frac{1}{۱۴} \begin{bmatrix} -۷ & -۵ & ۱۱ \\ -۷ & -۱ & ۵ \\ ۷ & ۷ & -۷ \end{bmatrix} \quad (\text{الف}) \quad ۲$$

$$۰.۱/۳, ۰.۱/۲, ۰.۱/۶ \quad ۵$$

بخش ۷.۳

$$\begin{bmatrix} ۷ & -۳ & -۳ \\ -۱ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad (\text{ج}) \quad \frac{1}{۵} \begin{bmatrix} -۱۰ & ۵ & ۵ \\ ۰ & -۱ & ۲ \\ ۵ & -۱ & -۳ \end{bmatrix} \quad (\text{الف}) \quad ۱$$

$$\frac{1}{۴} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & -۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} \quad (\text{ج}) \quad \frac{1}{۳} \begin{bmatrix} -۳۰ & ۳ & ۱ & ۶ \\ ۲۴ & -۱۰ & -۲ & -۴ \\ -۴ & ۶ & ۲ & ۰ \\ -۱۰ & ۳ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{bmatrix} ۱ + a_1 \lambda_1 + \dots + a_n \lambda_n & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \\ -\lambda_1 & ۱ & ۰ & \dots & ۰ \\ -\lambda_2 & ۰ & ۱ & \dots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda_n & ۰ & ۰ & \dots & ۱ \end{bmatrix} \quad ۳$$

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۳ \\ ۴ & -\frac{1}{۲} & -\frac{۸}{۳} & -۹ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} ۱۲۵۰ \\ ۸۰۰ \\ ۹۰۰ \\ ۸۰۰ \end{bmatrix} \quad ۵$$

$$\frac{1}{۲} \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & \dots & ۰ \\ ۱ & ۰ & -۱ & ۰ & \dots & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & -۱ & \dots & ۰ \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ \\ ۳-n & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \quad ۷$$

بخش ۹.۴

$$۱. \begin{pmatrix} x & -y \\ y & \end{pmatrix} \text{ (الف)} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x+y) \\ \frac{1}{2}(x-y) \end{pmatrix} \text{ (ب)}$$

$$\begin{pmatrix} -x+y \\ -x \end{pmatrix} \text{ (ج)} \quad \begin{pmatrix} 3x-5y \\ -x+2y \end{pmatrix} \text{ (د)}$$

$$۵. \text{ (الف)} \quad \lambda = -2 \text{ یا } \lambda = 1 \quad \text{ (ب) همه مقادیر } \lambda.$$

بخش ۱۰.۵

$$۵. \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$۷. \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

بخش ۲۰.۵

$$۱. \text{ همگی توسط ماتریسهای به صورت } \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \text{ القاء شده‌اند.}$$

$$۷. \text{ همگی توسط ماتریسهای به صورت:}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & a+b-c \end{bmatrix} \text{ (ج)} \quad \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \text{ (ب)} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \text{ (الف)}$$

القاء شده‌اند.

بخش ۵.۵

$$۱. \text{ (الف)} \quad ۲ \quad \text{ (ج)} \quad ۳ \quad \text{ (د)} \quad ۳.$$

بخش ۸.۵

$$۱. \text{ (الف)} \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$۱۳. \text{ (الف)} \quad 1+x/2+x^2/5 \quad \text{ (ب)} \quad x^2/7+x^2+1 \quad \text{ (ج)} \quad -x^2/5+7/5$$

بخش ۱۰۶

$$\cos^{-1}(\sqrt{2/3}), \cos^{-1}(\sqrt{2/3}), \cos^{-1}(1/2) \quad .۱$$

$$\frac{1}{3}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \quad (\text{ب}) \quad \frac{1}{\sqrt{13}}(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \quad .۳$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \quad (\text{ج})$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right), \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right), 90^\circ \quad .۵$$

$$\cos^{-1}(1/3) \quad .۷$$

$$۱ \quad .۹$$

$$x + y + z = 3 \quad .۱۱$$

۱۳. خط سیر توسط $\mathbf{r}(t) = (200 - 200\sqrt{5}t)\mathbf{i} + 600t\mathbf{j}$ معین می شود. در زمان $t = 2/(3 + 2\sqrt{5})$ به هم می رسند.

$$\cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right), \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad .۲۱$$

بخش ۱۰۷

$$-1, 2; x^2 - x - 2 \quad (\text{ج}) \quad -1, 1; x^2 - 1 \quad (\text{الف}) \quad .۱$$

$$-1, 2; x^3 - 3x - 2 \quad (\text{ب}) \quad -1, 1; x^3 + x^2 - x - 1 \quad (\text{ه}) \quad .۲$$

$$\text{sp}(\mathbf{k}) - 1; \text{sp}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \quad .۱ \quad (\text{ج}) \quad \text{sp}(\mathbf{i}), 1 \quad (\text{الف})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad .۳$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ج}) \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{الف}) \quad .۴$$

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{12} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad (\text{ج}) \quad \begin{bmatrix} \frac{5}{12} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad (\text{الف}) \quad .۹$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -(-2)^n & -2 + 2(-2)^n \\ 2 & -2(-2)^n & -1 + 2(-2)^n \end{bmatrix} \quad (\text{الف}) \quad .۱۳$$

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 + 3^n & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 1 + 3^n \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

بخش ۲۰۷

$$۱. (الف) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (ج) \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(ه) \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$۳. (الف) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$۵. \frac{1}{2} \left[a + b + \sqrt{(a-b)^2 + 4c^2} \quad a + b - \sqrt{(a-b)^2 + 4c^2} \right]$$

بخش ۳۰۷

$$۱. (الف) \text{sp}(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) ; (x-1)^2$$

$$(ج) x(x-1)^2 ; \text{مقادیر ویژه و فضاهاى ویژه تعمیم یافته عبارت اند از:}$$

$$\text{sp}(\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}), -1 ; \text{sp}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}), 1 ; \text{sp}(\mathbf{i} + \mathbf{k}), 0$$

بخش ۴۰۷

$$۱. (الف) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (ج) \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (ه) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(ز) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

واژه نامه فارسی به انگلیسی

basis	پایه	trace	اثر
standard —	— متعارف	— of a matrix	— یک ماتریس
orthonormal —	— متعامد یکه	independence	استقلال
— of a vector	— یک فضای برداری	linear —	— خطی
space		operations	اعمال
span	پدید آوردن (مجموعه پدید آمده)	column —	— ستونی
nilpotent	پوچ توان	row —	— سطری
nullity	پوچی	adjoint	الحاقی
onto	پوشا	classical —	— کلاسیک
function	تابع	vector	بردار
bilinear —	— دو خطی	column —	— ستونی
transformation	تبدیل	row —	— سطری
identity —	— همانی	zero —	— صفر
linear transformation	تبدیل خطی	characteristic —	— مشخصه
onto —	— پوشا	eigen —	— ویژه
zero —	— صفر	unit —	— یکه
one - one —	— یک، به یک	orthogonal vectors	بردارهای متعامد
degenerate	تبهگون	cofactor expansion	بسط همسازه‌ای
transpose	ترانهاد	dimension	بعد
— of a matrix	— یک ماتریس	block	بلوک
composition	ترکیب	Jordan —	— ژوردان
— of linear	— تبدیلات خطی	directed line	پاره خط جهت‌دار
transformations		segment	
combination	ترکیب		

gaussian	روش حذفی گاوسی	linear —	خطی —
elimination method		similarity	تشابه
		— of matrices	— ماتریسها
angle	زاویه	orthogonal —	— متعامد
subspace	زیرفضا	unitary —	— یکانی
proper —	— ی سره	stochastic	تصادفی
complementary —	— ی مکمل	change of basis	تغییر پایه
		change of coordinates	تغییر مختصات
consistent	سازگار	power	توان
column	ستون		
proper	سره	addition	جمع
		solution	جواب
plane	صفحه		
quadratic form	صورت درجه دوم	polynomial	چند جمله‌ای
bilinear form	صورت دو خطی	characteristic —	— مشخصه
degenerate —	— تهگون		
normal form	صورت نرمال	synthetic elimination	حذف ترکیبی
Jordan —	— ژوردان	range	حوزه مقادیر
		— of a function	— یک تابع
multiplication	ضرب	idempotent	خودتوان
noncommutative —	— ناجابجایی		
cross	ضرب (حاصلضرب) خارجی	determinant	دترمینان
product		entry	درايه
inner	ضرب (حاصلضرب) داخلی	system	دستگاه
product			
complex inner	ضرب داخلی مختلط	orthonormal —	— متعامد یکه
product		— of equations	— معادلات
dot product	ضرب (حاصلضرب) نقطه‌ای	inconsistent —	— ناسازگار
coefficient	ضریب	equivalent — s	— های هم ارز
leading —	— پیشرو	Kronecker delta	دلتای کرونیکر
		bilinear	دو خطی
operation	عمل	rotation	دوران
elementary —	— مقدماتی		
operator	عملگر	rank	رتبه

diagonal —	قطری	normal to plane	عمود بر صفحه
diagonalizable —	قطری شدنی	nonzero	غیر صفر
orthogonal —	متعامد	Markov process	فرایند مارکوف
skew-symmetric —	مقارن کج	formula	فرمول
square —	مربعی	space	فضا
elementary —	مقدماتی	null —	ی پوچ
singular —	منفرد	column —	ی ستونی
invertible —	وارون پذیر	range —	ی مقادیر
noninvertible —	وارون نا پذیر	vector space	فضای برداری
hermitian —	هرمیتی	complex —	مختلط
identity —	همانی	finite dimensional —	متناهی البعد
unitary —	یکانی	real —	حقیقی
matrices	ماتریسها	eigenspace	فضای ویژه
commuting —	ی جا بجا شونده	generalized —	تعمیم یافته
commutative —	ی جا بجایی	law	قانون
standard	متعارف	associative —	انجمنی
orthogonal	متعامد	distributive —	توزیع پذیری
variable	متغیر	commutative —	جا بجایی
symmetric	مقارن	cosines —	کسینوسها
parallelepiped	متوازی السطوح	parallelogram —	متوازی الاضلاع
coordinates	مختصات	negative	قرینه (منفی)
order of a matrix	مرتبه یک ماتریس	— of a vector	یک بردار
center of mass	مرکز ثقل	diagonal	قطری
similar	مشابه	matrix	ماتریس
characteristic	مشخصه (سرشت نما)	scalar —	اسکالر
equation	معادله	upper triangular —	بالا مثلثی
parametric —	پارامتری	incidence —	بر خورد
linear —	خطی	block —	بلوکی
homogeneous	معادلات همگن	transposed —	ترانهاد
equations		stochastic —	تصادفی
scalar multiple	مضرب اسکالر	rotation —	دوران
— of a vector	یک بردار	zero —	صفر
value	مقدار		
characteristic —	مشخصه		
eigen —	ویژه		

inverse	وارون	complement	مکمل
invertible	وارون پذیر	singular	منفرد
noninvertible	وارون ناپذیر	component	مؤلفه
isometry	همانمتری	inequality	نامساوی
cofactor	همسازه	nonsingular	نامنفرد
	همنهشتی صورتهای دوخطی	norm	نرم
congruence of bilinear forms		– of a vector	– یک بردار
unitary	یکانی	signature	نشان
one - one	یک به یک	graph	نگار
isomorphism	یکریختی	image	نگاره
unit	یکه	dependence	وابستگی
		linear –	– خطی

واژه نامه انگلیسی به فارسی

addition	جمع	cofactor	همسازه
adjoint	الحاقی	– expansion	بسط – ای
angle	زاویه	column	ستون
associative law	قانون انجمنی	– operations	اعمال – ی
		– space	فضای – ی
basis	پایه	– vector	بردار – ی
– of a vector space	– یک فضای برداری	combination	ترکیب
bilinear	دوخطی	commutative law	قانون جابجایی
– form	صورت –	complement	مکمل
– function	تابع –	complementary subspace	زیر فضای مکمل
block matrix	ماتریس بلوکی	complex	مختلط
		– inner product	ضرب داخلی –
center of mass	مرکز ثقل	– vector space	فضای برداری –
change of basis	تغییر پایه	component	مؤلفه
change of coordinates	تغییر مختصات	composition	ترکیب
characteristic	مشخصه (سرشت‌نا)	– of linear transformations	– تبدیلات خطی
– polynomial	چند جمله‌ای –		
– value	مقدار –	congruence	همنهشتی
– vector	بردار –	consistent	سازگار
classical adjoint	الحاقی کلاسیک	coordinates	مختصات
coefficient	ضریب	cosines law	قانون کسینوسها

cross product ضرب (حاصلضرب) خارجی

degenerate تبهگون

– bilinear form – صورت دوخطی

determinant دترمینان

diagonal matrix ماتریس قطری

diagonalizable matrix ماتریس قطری شدنی

dimension بعد

directed line segment پاره خط جهت دار

distributive law قانون توزیع پذیری

dot product ضرب (حاصلضرب) نقطه ای

eigenspace فضای ویژه

eigenvalue مقدار ویژه

eigenvector بردار ویژه

elementary operation عمل مقدماتی

entry درایه

equivalent هم ارز

– systems – دستگاههای

finite dimensional vector space فضای برداری متناهی البعد

formula فرمول

gaussian elimination method روش حذفی گاوسی

generalized eigenspace فضای ویژه تعمیم یافته

graph نگار

hermitian matrix ماتریس هرمیتی

homogeneous equations

معادلات همگن

idempotent خود توان

identity همانی

– matrix – ماتریس

– transformation – تبدیل

image نگاره

incidence matrix ماتریس برخورد

inconsistent system دستگاه

ناسازگار

inequality نامساوی

inner product ضرب (حاصلضرب) داخلی

inverse وارون

invertible matrix ماتریس وارون پذیر

isometry همانمتری

isomorphism یکریمتی

Jordan ژوردان

– block – بلوک

– normal form – صورت نرمال

kronecker delta دلتای کرونگر

leading پیشرو

– coefficient – ضریب

linear خطی

– combination – ترکیب

– dependence – وابستگی

– independence – استقلال

– equation – معادله

– transformation – تبدیل

Markov مارکوف

process	فرایند	proper subspace	زیر فضای سره
matrix	ماتریس	quadratic form	صورت درجه دوم
multiplication	ضرب	range	حوزه مقادیر
negative	قرینه (منفی)	— of a function	— یک تابع
nilpotent	پوچ توان	range space	فضای مقادیر
noncommutative	ناجا بجایی	rank	رتبه
— multiplication	ضرب —	real vector space	فضای برداری حقیقی
nonzero	غیر صفر	rotation matrix	ماتریس دوران
noninvertible matrix	ماتریس وارون ناپذیر	row	سطر
norm	نرم	— operations	اعمال — ی
— of a vector	— یک بردار	— vector	بردار — ی
normal form	صورت نرمال	scalar	اسکالر
normal to plane	عمود بر صفحه	— matrix	ماتریس —
nullity	پوچی	— multiple	مضرب —
null space	فضای پوچ	signature	نشان
one - one	یک به یک	similar	مشابه
onto	پوشا	similarity	تشابه
operation	عمل	— of matrices	— ماتریسها
operator	عملگر	singular matrix	ماتریس منفرد
order	مرتبه	skew-symmetric matrix	ماتریس متقارن کج
orthogonal	متعامد	solution	جواب
— matrix	ماتریس —	span	پدید آوردن (مجموعه پدید آمده)
— similarity	تشابه —	square matrix	ماتریس مربعی
— vectors	بردارهای —	standard basis	پایه متعارف
orthonormal	متعامد یکه	stochastic matrix	ماتریس تصادفی
— basis	پایه —	subspace	زیر فضا
— system	دستگاه —	symmetric	متقارن
parallelepiped	متوازی السطوح	synthetic elimination	حذف ترکیبی
parametric equation	معادله پارامتری	system of equations	دستگاه معادلات
plane	صفحه	trace	اثر
polynomial	چند جمله ای	— of a matrix	— یک ماتریس
power	توان	transformation	تبدیل

transpose of a matrix	ترانهاد	variable	متغیر
	یک ماتریس	vector	بردار
		– space	فضای – ی
unit vector	بردار یکه	zero	صفر
unitary	یکانی	– linear transformation	تبدیل خطی –
– matrix	ماتریس –	– matrix	ماتریس –
– similarity	تشابه –	– vector	بردار –
upper triangular matrix	ماتریس بالامثلثی	transposed matrix	ماتریس ترانهاد

فهرست راهنما

- اثر ماتریس ۳۲۷، ۸۳
 استقلال خطی ۱۵۴
 اثبات - توسط دترمینانها ۱۸۶، ۱۸۵
 بردارهای متعامد ۳۵۵
 بردارهای ویژه ۳۳۹
 اسکالر
 تعریف - ۳۳
 ضرب - ۲۸۵
 ماتریس - ۶۷
 اعداد فیبوناچی ۱۷۵
 اعمال ستونی
 روی دترمینانها ۹۱، ۹۴
 روی ماتریسها ۲۳۴، ۲۳۱
 اعمال سطری
 روی دترمینانها ۱۵۵، ۱۵۳
 روی ماتریسها ۲۳۳
 الحاقی
 ماتریس - ۸۵
 ماتریس - کلاسیک ۱۱۵
 بردار
 به عنوان پاره خط جهت دار ۴۱
 تساوی - ها ۳۲
 تعریف - ۱۲۷، ۳۱
 تفریق - ها ۳۶
 جمع - ها ۱۲۷، ۳۲
 ستونی ۳۱
 سطری ۳۲
 صفر ۱۲۸، ۳۴
 ضرب - ی ۲۹۵
 طول - ۲۸۶، ۴۹
 قرینه - ۱۲۸، ۳۵
 متعامد ۲۸۸
 مختصات ۱۸۱
 مشخصه ۳۳۳
 مضرب اسکالر - ۱۲۸، ۳۳
 مؤلفه - ۳۱
 نرم - ۲۸۶
 ویژه ۳۳۳
 هندسی ۴۱
 یکه ۲۸۶
 بسطهای دترمینانها ۱۵۷، ۱۵۶، ۸۹
 بسط همسازهای ۱۵۶
 بعد ۱۷۱
 بلوک ژوردان ۳۶۳
 پایه ۱۶۲
 تغییر ۱۸۱

توانها	متعارف ۱۶۳، ۱۵۹، ۴۵
محاسبه - ی ماتریس ۳۴۲، ۲۷۷	متعامد یکه ۳۰۴
ی تبدیل خطی ۲۵۸	پدید آوردن (مجموعه پدید آمده) ۱۴۹
ی ماتریس ۶۹	پوچ توان
جمع	تبدیل خطی - ۲۵۸
بردارها ۳۲	صورت نرمال - ۳۶۴
برطبق قانون متوازی الاضلاع ۴۲	ماتریس - ۷۵
تبدیلهای خطی ۲۵۱	پوچی ۲۲۰
ماتریسها ۵۴	تابع دو خطی ۳۷۵
جواب	تبدیل خطی
یک دستگاه معادلات خطی ۱۰	پوشا ۲۱۷
یک معادله خطی ۱۰	ترکیب تبدیل‌های خطی ۲۵۴
چند جمله‌ای مشخصه ماتریس ۳۳۶	تعریف - ۱۹۳
چند جمله‌ایهای ماتریسی ۷۱	جمع تبدیل‌های خطی ۲۵۱
حاصلجمع	حوزه مقادیر - ۲۱۳
بردارها ۳۲	رتبه - ۲۱۴
تبدیلهای خطی ۲۵۱	صفر ۲۰۵
ماتریسها ۵۴	ماتریس - ۲۷۰، ۲۶۸
حاصلضرب (ضرب)	مضرب اسکالر - ۲۵۲
اسکالر ۲۸۵	منفی - ۲۵۳
برداري ۲۹۰	وارون - ۲۶۱
خارجی ۲۹۰	همانی ۲۰۵
داخلی در حالت کلی ۳۲۶	یک بیک ۲۲۲
داخلی در C^n ۳۰۵	ترانهاد ماتریس ۸۰
داخلی در R^n ۲۸۵	ترکیب خطی ۱۴۹
داخلی در R^n ۳۰۰	تساوی
دترمینانها ۱۰۰	بردارها ۳۲
ماتریس در ماتریس همانی ۶۷	تبدیل‌های خطی ۲۰۵
ماتریسها ۵۸	ماتریسها ۵۴
نقطه‌ای ۲۸۵	تشابه
حجم متوازی السطوح ۲۹۴	ماتریسها ۲۷۷
حذف	متعامد ۳۴۷
	یکانی ۳۴۷
	تغییر مختصات ۱۸۰

سر ۱۴۱	ترکیبی ۱۲۴، ۱۲۱
ی R^3 ۱۷۸	روش - ی گاوسی ۱۳
ساده‌ترین ردهٔ صورتهای دو خطی ۳۷۸	خط
شبکه‌های الکتریکی ۱۱۸	معادلهٔ ۴۷
صفحه	خود توان
معادلهٔ ۲۹۵	عملگر خطی - ۲۵۹
صفر	ماتریس - ۱۶۷
بردار - ۳۴، ۱۲۸	دترمینان
تبدیل خطی - ۲۰۵	ترانهاد ۱۰۸
ماتریس - ۵۵	حاصلضرب (ضرب) - ۱۰۰ ها
صورت	ماتریس 2×2 ۸۵
بالا مثلثی ۳۵۳	ماتریس $n \times n$ ۸۹
درجه دوم ۳۷۷	ماتریس بالا مثلثی ۹۶
دو خطی تبهگون ۳۷۶	ماتریس منفرد ۱۰۰
دو خطی مثبت ۳۷۶	درایه‌های ماتریس ۵۳
دو خطی منفی ۳۷۶	دستگاه
صورت نرمال ۲۳۷	تعریف - ۱۰
ژوردان ۳۶۲، ۳۶۳	جواب - ۱۰
ضرایب معادلهٔ خطی ۱۰	سازگار ۱۷
ضرب	ناسازگار ۱۷
اسکالر ۲۸۵	های هم ارز ۱۱
برداری ۲۹۰	همگن ۲۵
خارجی ۲۹۰	دستگاه متعامد یک ۳۰۴
داخلی در حالت کلی ۳۲۶	دلنای کرونگر ۶۶
داخلی در C^n ۳۰۵	رتبه
داخلی در R^3 ۲۸۵	تبدیل خطی ۲۱۴
داخلی در R^n ۳۰۰	حاصلضرب ۲۲۹
دترمینانها ۱۰۰	صورت دو خطی ۳۷۸
ماتریس در ماتریس همانی ۶۷	ماتریس ۲۲۹
ماتریسها ۵۸	زاویه ۲۸۶
نقطه‌ای ۲۸۵	زیر فضا
	تعریف - ۱۴۰

- طول بردار ۲۸۶، ۴۹
 بردار ۱۲۸، ۳۵
 ماتریس ۵۴
 قضیه کیلی - همیلتون ۳۵۸
 قوانین کیرشهوف ۱۱۸
 ماتریس
 اثر - ۸۳
 اسکالر ۶۷
 الحاقی ۸۰
 الحاقی کلاسیک ۱۱۰
 بالا مثلثی ۹۶
 برخورد ۵۷
 بلوکی ۳۰۰
 ترانهاد - ۸۰
 تساوی - ها ۵۴
 تصادفی ۱۹۶
 تعریف - ۵۲
 توانهای - ۶۹
 جمع - ها ۵۴
 چند جمله‌ای‌های - ی ۷۱
 خاصیت انجمنی جمع - ها ۵۵
 خاصیت جابجایی در مورد ضرب - ها ۶۱
 خود توان ۱۶۷
 دترمینان - ۸۵، ۸۹
 دوران ۳۳۸
 رتبه - ۲۲۹
 صفر ۵۵
 ضرایب ۷۷
 ضرب - ها ۵۸
 قرینه - ۵۴
 قطری ۷۱
 قطری شدنی ۳۴۰
 متعامد
 متقارن ۸۱
 متقارن کج ۸۲
 عملگر خطی ۱۹۸
 خود توان ۲۵۹
 عمل مقدماتی روی ماتریس ۲۳۴
 عمود بر صفحه ۲۹۴
 فاصله بین دو بردار ۲۸۶
 فرایند مارکوف ۷۴
 فضای برداری ۱۲۷
 بعد - ۱۷۱
 حقیقی ۱۲۸
 متناهی البعد ۱۶۸
 مختلط ۱۲۸
 فضای بوج ۲۲۰
 فضای ستونی ماتریس ۲۲۹
 فضای مقادیر ۲۱۳
 فضای ویژه ۳۳۵
 تعمیم یافته ۳۵۷
 قاعده کرامر ۱۱۶
 قانون انجمنی
 ترکیب تبدیلهای خطی ۲۵۷
 جمع بردارها ۳۲، ۱۲۷
 جمع ماتریسها ۵۵
 ضرب ماتریسها ۶۰
 قانون توزیعپذیری
 ترکیب تبدیلهای خطی ۲۵۸
 ضرب ماتریسها ۶۱
 قانون جابجایی
 جمع بردارها ۳۳، ۱۲۸
 جمع ماتریسها ۵۵
 قانون کسینوسها ۱۱۷
 قانون لختی سیلواستر ۳۸۰
 قرینه

حل - توسط قاعده کرامر ۱۱۶

جواب - ۱۰

دستگاه - ۱۰

سازگار ۱۷

ناسازگار ۱۷

همگن ۲۵

معادله خط ۴۶

معادله صفحه ۲۹۵

مقدار مشخصه ۳۳۳

مقدار ویژه ۳۳۳

مقدماتی

اعمال - ۲۳۴

ماتریس - ۲۳۱

منفی

تبدیل خطی ۲۵۳

نامساوی بسل ۳۱۶

نامساوی کوشی شوارتز ۳۰۱

نرم بردار ۲۸۶

نشان ۳۸۰

نگار ۵۷

نگاره ۱۹۷

نمایش ماتریسی تبدیل خطی ۲۶۸

وابستگی خطی ۱۵۵

وارون

تبدیل خطی ۲۶۱

ماتریس ۶۷

ماتریس مقدماتی ۲۳۳

یابی توسط حذف ترکیبی ۱۲۲

یابی توسط قاعده کرامر ۱۱۶

وارون پذیر

تبدیل خطی - ۲۶۱

ماتریس - ۶۷

وارون کردن ماتریس

محاسبات روی - ها ۱۱۱، ۱۲۱

مربعی ۶۶

مرتبه - ۵۳

مقدماتی ۲۳۱

منفرد ۶۸

نرمال ۲۳۷

وارون - ۶۷

وارون پذیر ۶۷

وارون ناپذیر ۶۸

های جابجا شونده ۶۱

های مشابه ۲۷۷

های هم ارز ۲۳۵

هرمیتی ۸۱

همانی ۶۷

یکانی ۳۲۰

متعامد

بردارهای - ۲۸۸

تشابه - ۳۴۷

ماتریس - ۳۱۹

ماتریس قطری شدنی به طور - ۳۴۸

مکمل - ۳۱۳

همنهشتی - ۳۷۸

متقارن

عملگر - ۳۴۷

ماتریس - ۸۱

مرتبه ماتریس ۵۳

مرکز جرم ۴۶

مساحت متوازی الاضلاع ۲۹۲

مضرب اسکالر

بردار ۳۳، ۱۲۸

تبدیل خطی ۲۵۲

ماتریس ۵۴

معادلات خطی

تعریف - ۱۰

حل - به روش حذفی گاوسی ۱۳

ماتریس - ۶۷

همسازه ۱۰۵

همنهشتی صورتهای دو خطی ۳۷۸

یکانی

تشابه - ۳۴۷

ماتریس - ۳۲۰

یکریختی ۲۴۴

توسط حذف ترکیبی ۱۲۲

فرمول - ۱۱۱

وارون ناپذیر

ماتریس - ۶۸

همانمتری ۲۷۲

همانی

تبدیل - ۲۰۵

فهرست اسامی خاص

Schmidt	اشمیت
Bessel	بسل
Jordan	ژوردان
Sylvester	سیلوستر
Schwartz	شوارتس
Fibonacci	فیبوناتچی
Cramer	کرامر
Kronecker	کرونکر
Kirchhoff	کیرشهف
Cauchy	کوشی
Cayley	کلی
Gauss	گوس
Gram	گرام
Hermit	هرمیت
Hamilton	همیلتون
Markov	مارکوف