ریاضی ۲

فصل دهم– مبتنی بر جزوه زمستان ۹۵

دانشجوی گرامی! اثر پیش روی شما حاصل یک کار تیمی از گروه دانشجویی «نوین‌تیم» است و «هیچ یک ازاساتید» در تدوین و تصحیح آن نقشی ندارند. لذا از نسبت دادن این جزوه به هر یک از اساتید جدا خودداری فرمائید.

با یاد او

فصل ۱۰ : بردارها،هندسه ی مختصات در فضای سه بعدی

بخش ۶.کمی جبر خطی

تعریف ونمادگذاری : فرض میکنیم :

$$R^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in R\}$$

جمع وضرب در اسکالر را به صورت زیر تعریف میکنیم :

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$
$$C\,(x_1, \ldots, x_n) = (Cx_1, \ldots, Cx_n)$$

به R^n همراه باجمع وضرب در اسکالر بالا ، **فضای اقلیدسی** گویند.به اعضای R^n **نقطه** یا **بردار** گویند.

ویژگی های ابتدایی جمع وضرب در اسکالر:

فرض کنید $c, c_1, c_2 \in R$ و $u, v, w \in R^n$ دراین صورت

۱) $u + v = v + u$ خاصیت جابجایی

۲) $(u + v) + w = u + (v + w)$ خاصیت شرکت پذیری

۳) $0 = (0, \ldots, 0) \longrightarrow$ بردار صفر $u + 0 = 0 + u \longrightarrow$ عضوخنثی

۴) اگر $u = (x_1, \ldots, x_n)$, قرار دهیم $-u = (-x_1, \ldots, -x_n)$

$u + (-u) = (-u) + u = 0$ عضو قرینه

۵) $c\,(u + v) = cu + cv$

۶) $(c_1 + c_2)u = c_1u + c_2u$

۷) $1u = u$

تعریف: فرض کنید $u_1, \ldots, u_k \in R^n$ منظور از یک **ترکیب خطی** از $u_1, \ldots, u_k$ برداری است به شکل $c_1u_1 + \ldots + c_ku_k$ که درآن $c_1, \ldots, c_k \in R$

تعریف:فرض کنید $\{u_1, \ldots, u_k\}$ زیرمجموعه از R^n باشند، این مجموعه را مستقل خطی می نامیم هرگاه **هیچ ترکیب خطی از** $u_1, \ldots, u_k$ **بردار صفر نشود مگر آنکه تمام ضرایب صفر باشد**.معادلا:

$$c_1u_1 + \ldots + c_ku_k = 0 \longrightarrow c_1 = \ldots = c_k = 0$$

اگر $u_1,\dots,u_k$ مستقل خطی نباشد،گوییم **وابسته ی خطی** است .معادلا:

$c_1u_1+\dots+c_ku_k=0$ $\longrightarrow$ موجودباشند که **لا اقل یکی غیر صفر** داریم $c_1,c_2,\dots,c_k\in R$

....

مثال ۱ : $\{u_1=(1,2)\ ,\ u_2=(2,4)\}$ وابسته ی خطی است $\longrightarrow$ $2u_1-u_2=0$

مثال ۲ : $\{u_1=(1,2)\ ,u_2=(2,3)\}$ مستقل خطی است.

حل:

فرض میکنیم $c_1u_1+c_2u_2=0$ $\longrightarrow$ $(c_1,2c_1)+(2c_2,3c_2)=0$ $\longrightarrow$ $c_1=c_2=0$

مثال ۳: $\{u_1=(1,2),u_2=(2,3),u_3=(3,4)\}$ وابسته ی خطی است :

حل:

فرض میکنیم $c_1u_1+c_2u_2+c_3u_3=0$

$$\begin{cases}C_1+2c_2+3c_3=0\\2c_1+3c_2+4c_3=0\\c_3=1 \quad \text{فرض}\end{cases}\quad\begin{cases}c_1+2c_2=-3\\2c_1+3c_2=-4\\c_3=1\end{cases}\quad\begin{cases}c_1=1\\c_2=-2\\c_3=1\end{cases}\Longrightarrow U_1-2u_2+u_3=0$$

....

$\{e_1,\dots,e_n\}$ **مستقل خطی** است

$e_i=(0,\dots,1,\dots,0,\dots,0)\in R^n$

محل i ام

گزاره ۱: فرض کنید $u_1\in R^n$ در این صورت u_1 وابسته خطی است اگر وتنها اگر $u_1=0$ باشد.

گزاره ۲: فرض کنید $u_1,u_2\in R^n$ باشند، در این صورت $\{u_1,u_2\}$ وابسته خطی است اگر وتنها اگر $c\in R$ موجود باشد که $u_1=cu_2$.

گزاره ۳: فرض کنید $u_1,u_2,...,u_k \in R^n$ با شند و $k \geq 3$، در این صورت $\{u_1,u_2,...,u_k\}$ وابسته خطی است اگر وتنها اگر **لااقل یکی از u_i ها بر حسب یک ترکیب خطی از بقیه باشد.**

❋ **تذکر:** $\{0,u_1,...,u_k\}$ وابسته خطی است.

❋ **تذکر:** اگر $\{u_1,u_2,...,u_k\}$ مستقل خطی باشد، هر زیرمجموعه از آن نیز مستقل خطی است.

تعریف: فرض کنید E یک زیر مجموعه ناتهی از R^n باشد، می گوییم E یک زیر فضای خطی R^n است هرگاه برای هر $u,v \in E$ وهر $c \in R$:

$$u+v \in E$$
$$cu \in E$$

توجه: همواره $0 \in E$.

توجه: $\{0\}$و R^n زیر فضای خطی R^n هستند.(زیر فضای خطی بدیهی).

گزاره: فرض کنید E_1,E_2 دو زیر فضای خطی R^n با شند، در این صورت $E_1 \cap E_2$ نیز یک زیر فضای خطی R^n است.

گزاره: فرض کنید $u_1,u_2,...,u_k \in R^n$ ،در این صورت مجموعه **تمام ترکیب های خطی** از $u_1,...,u_k$ را با $<u_1,...,u_k>$ نمایش می دهیم ، یعنی:

$$<u_1,...,u_k>=\{c_1u_1+....+c_ku_k \mid c_i \in R\}$$

یک زیر فضای خطی R^n است که شامل $u_1,...,u_k$ است.

به علاوه $<u_1,...,u_k>$ **کوچک ترین فضای خطی** R^n است که $u_1,...,u_k$ را در بردارد؛یعنی اینکه اگر E زیر فضای خطی R^n و $u_1,u_2,...,u_k \in E$، آنگاه:

$$<u_1,...,u_k> \subseteq E$$

....

مثال ۱: در R^2:

$$<(1,2)>=\{t(1,2) \mid t \in R\}=\{(t,2t) \mid t \in R\}$$

خط $Y=2x$ در R^2.

مثال ۲:

$$<(1,2),(2,4)>=\{t(1,2)+s(2,4) \mid t,s \in R\}=\{(t+2s,2t+4s) \mid t,s \in R\}=\{c(1,2) \mid c \in R\}=<(1,2)>$$

خط $Y=2x$ در R^2.

....

تعریف: به $<u_1,\dots,u_k>$ در گزاره قبل زیر فضای خطی تولید شده توسط $u_1,\dots,u_k$ گویند.

لم ۱: فرض کنید $\{u_1,u_2,\dots,u_k\}$ یک زیر مجموعه مستقل خطی در R^n باشد و $v\in R^n$، در این صورت:

$\{u_1,\dots,u_k,v\}$ مستقل خطی است $\Leftrightarrow v\notin<u_1,\dots,u_k>$

برهان: برای اثبات لم کافی است نشان دهیم

$\{u_1,u_2,\dots,u_k,v\}$ وابسته خطی است $\Leftrightarrow v\in<u_1,\dots,u_k>$

اثبات $\leftarrow$ واضح است.

اثبات $\rightarrow$: بنا به فرض اعداد حقیقی $c_1,\dots,c_{k+1}$ وجود دارند که حداقل یکی از آنها غیر صفر است و $c_1u_1+\dots+c_ku_k+c_{k+1}v=0$، $\{u_1,\dots,u_k\},c_{k+1}=0$ که لزوما $c_{k+1}\neq 0$ (چرا؟)

$$\rightarrow v=\frac{-c_1}{c_{k+1}}u_1+\dots+\frac{-c_k}{c_{k+1}}u_k\in<u_1,\dots,u_k>$$

لم ۲: زیر فضای خطی $E=<u_1,\dots,u_k>$ از $\mathbb{R}^n$ را در نظر بگیرید ، اگر $\{v_1,\dots,v_l\}$ یک زیر مجموعه مستقل خطی از E باشد آنگاه $l\leq k$

برهان : فرض کنید $l>k$ (فرض خلف)

$v_1\in E\rightarrow c_1u_1+\dots+c_ku_k=v_1\quad c_1,\dots,c_k\in\mathbb{R}$

توجه : لااقل یکی از $c_1,\dots,c_k$ غیر صفرند$\leftarrow$اگر همه صفر$\leftarrow v_1=0$،اگر $v_1=0$ پس $\{0,v_1,\dots,v_l\}$ وابسته خطی میشود.

مثلا فرض کنیم $c_1\neq 0$

$$u_1=\frac{v_1}{c_1}-\frac{c_2}{c_1}u_2-\dots-\frac{c_k}{c_1}u_k\subseteq E=<v_1,u_2,\dots,u_k>$$

$v_2\in E\rightarrow v_2=d_1v_1+d_2u_2+\dots+d_ku_k\qquad\qquad d_1,\dots,d_k\in\mathbb{R}$

توجه کنید که لااقل یکی از $d_2,\dots,d_k$ غیر صفرند.مثلا فرض کنید $d_2\neq 0$

$$u_2=\frac{1}{d_1}v_2+\frac{-d_1}{d_2}v_1+\frac{-d_3}{d_2}u_3+\dots+\frac{-d_k}{d_2}u_k$$

$$E=<v_1,v_2,\dots,u_k>$$

این فرایند را ادامه میدهیم تا به دست آوریم:

$$E=<v_1,v_2,\dots,v_k>$$

توجه: $v_{k+1}\in E\Rightarrow<v_1,v_2,\dots,v_l>$ وابسته خطی است

واین تناقض است در نتیجه $l \le k$.

توجه در R^n:

$$< e_1, e_2, ..., e_n > = \{t_1 e_1 + ... + t_n e_n \mid t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{(t_1, ..., t_n) \mid t_i \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^n$$

در R^n هر مجموعه مستقل خطی حد اکثر n عضو دارد. $\longrightarrow$ $\mathbb{R}^n = < e_1, ..., e_n >$

معادلا هر زیر مجموعه با بیش از n عضو وابسته خطی است.

تعریف: فرض کنید E یک زیر زیرفضای خطی R^n باشد،میگوییم زیر مجموعه $B = \{u_1, ..., u_k\}$ از E یک **پایه** برای E است هر گاه B مستقل خطی باشد و E را تولید کند یعنی $E = < u_1, ..., u_k >$

قضیه : اگر E یک زیر فضای خطی R^n باشد و $E \ne \{0\}$ آنگاه E لزوما پایه ای دارد و به علاوه تعداد اعضای هردو پایه E با هم برابر است.

برهان:

$E \ne \{0\} \to u_1 \in E$ وجود دارد

$u_1 \ne 0 \to \{u_1\}$ مستقل خطی

اگر $E = < u_1 >$ $\leftarrow$ تک عضوی $\{u_1\}$ یک پایه برای E است

اگر $E \ne < u_1 >$ $\leftarrow$ $< u_1 > \not\subset E$ پس u_2 در E وجود دارد که $u_2 \notin < u_1 > \leftarrow$ طبق لم ۱ $\{u_1, u_2\}$ مستقل خطی است.

اگر $E = < u_1, u_2 >$ $\leftarrow$ آنگاه $\{u_1, u_2\}$ یک پایه برای E است.

در غیر این صورت این فرآیند را ادامه می دهیم و حداکثر در n گام به پایه B برای E می رسیم.

پس E لااقل یک پایه دارد.

حال فرض کنیم $\{u_1, ..., u_k\}$ و $\{v_1, ..., v_L\}$ هر دو پایه E باشند آنگاه طبق قضیه لم ۲ داریم:

$$K = L \Leftarrow \left.\begin{matrix} L \le K \\ K \le L \end{matrix}\right\}$$

تعریف: برای زیر فضای خطی E از R^n بعد E که آن را $\dim E$ نمایش می دهیم را تعداد اعضای یک پایه یا هر پایه ای از E تعریف می کنیم.

گزاره: فرض کنید E یک زیر فضای خطی k بعدی از R^n باشد و $\{u_1, ..., u_k\}$ زیر مجموعه ای مستقل خطی از E . در این صورت می توان مجموعه بالا را به یک پایه برای E گسترش داد یعنی این که

$\{u_1,....,u_L,u_{L+1},...,u_k\}$ پایه

$\exists u_{L+1},......,u_k \in E,:$

نتیجه: E زیر فضای خطی R^n که $\dim E = k$. اگر $\{u_1,\ldots,u_k\}$ مستقل خطی از اعضای E باشد آنگاه پایه ای برای E است.

پایه مجموعه مولد مینیمال و ماکسیمال است.

تعریف: منظور از یک زیر فضای مستوی از R^n زیر مجموعه ای است از R^n مثل $E_1 = a + E$ که در آن $a \in R^n$ و E یک زیر فضای خطی از R^n است. $E_1 = \{a + u \mid u \in E\}$

بعد E_1 را همان بعد E تعریف می کنیم.

E را انتقال یافته E_1 به مبدا می نامند

تعریف: خطوط در R^n = زیر فضاهای مستوی یک بعدی

تعریف: صفحات در R^n = زیر فضاهای مستوی دو بعدی در R^n

تعریف: ابر صفحه در R^n =زیر فضاهای مستوی $n-1$ بعدی

مثال ۱: فرض کنید

$$E = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in R^4 \mid 2x_1 + 3x_2 = 4x_3 + x_4\}$$

$\varnothing \neq E \subset R^4$

E یک زیر فضای خطی R^4 است.

$U = (u_1,u_2,u_3,u_4) \in E \qquad C \in R$

$V = (v_1,v_2,v_3,v_4) \in E$

$U + V \in E$

$CU \in E$

می خواهیم یک پایه برای E پیدا کنیم

$$E = \{\,(s,t,l,2s+3t-4l) \mid t,s,l \in R\} = \{\,se_1 + te_2 + le_3 + (2s + 3t - 4l)e_4 \mid s,t,l \in R\}$$

$$= \{s\,(e_1+2e_4) + t\,(e_2+3e_4) + l\,(e_3-4e_4) \mid s,t,l \in R\} = \langle U_1,U_2,U_3 \rangle$$

توجه می کنیم که $\{U_1,U_2,U_3\}$ مستقل خطی است(چرا؟)

$$Su_1 + tu_2 + lu_3 = 0 \longrightarrow t = s = l = 0$$

پس پایه ای برای E است . $\dim E = 3$

E یک ابرصفحه در R^4 است.

$$2U_1 + 3U_2 - 4U_3 - U_4 = 0$$

تمرین: اگر دو نقطه دلخواه در زیر فضای خطی E در R^n درنظر بگیریم ، خط واصل بین آن دو نقطه نیز در E است(E تخت است)

مثال ۲: در R^4 فرض کنید: $E_1 = < e_1 + e_2 >$

$E_2 = e_4 + < e_1 + e_3 >$

صفحات E_1 , E_2 در R^4

$$\left.\begin{array}{l} E_1 = \{(t,s,0,0) \mid t,s \in R\} \\ E_2 = \{(t_1,0,s_1,1) \mid t_1,s_1 \in R\} \end{array}\right\} \longrightarrow E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$$

همچنین داریم :

$E_1{}^0 = \{(t,s,0,0) \mid t,s \in R\}$

$E_2{}^0 = \{(t_1,0,s_1,0) \mid t_1,s_1 \in R\}$

توجه داریم که : $E_1{}^0 \not\subset E_2{}^0 \quad , \quad E_2{}^0 \not\subset E_1{}^0$

اصطلاحا میگویند E_1 , E_2 متنافرند

تعریف: فرض کنید E_1 , E_2 دو زیر فضای مستوی R^n باشد ، میگوییم E_1 , E_2 :

$$E_1 \cap E_2 \neq \varnothing \begin{cases} \longrightarrow E_1 \subseteq E_2 \ , \ E_2 \subseteq E_1 & \text{منطبق} \\ \longrightarrow E_1 \not\subset E_2 \ , \ E_2 \not\subset E_1 & \text{متقاطع} \end{cases}$$

$$E_1 \cap E_2 = \varnothing \begin{cases} \longrightarrow E_1{}^0 \subseteq E_2{}^0 , \ E_2{}^0 \subseteq E_1{}^0 & \text{موازی} \\ \longrightarrow E_1{}^0 \not\subset E_2{}^0 , \ E_2{}^0 \not\subset E_1{}^0 & \text{متنافر} \end{cases}$$

تمرین: اگر E_1 , E_2 دو زیر فضای خطی باشند $\dim(E_1 \cap E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) = ?$

مثال ۳: در R^4 فرض کنید: $E_1 = < e_1 - e_2, e_3 + e_4 >$

$$E_2 = (1,0,2,-1) + < e_1, e_4 >$$

$E1$, $E2$ دو صفحه در R^4 هستند

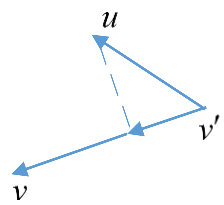
$$E_1 = \{(t, -t, s, s) \mid t, s \in R\}$$

$$E_2 = \{(1+t_1, 0, 2, -1+s_1) \mid t_1, s_1 \in R\}$$

$$E_1 \cap E_2 = \{(0,0,2,2)\}$$

یادآوری از دبیرستان:

در R^2 یا R^3



$$V' = CV$$

$$|V'| = C|V|$$

$$C = \frac{|U|\cos\theta}{|V|} = \frac{|V||U|\cos\theta}{|V|^2} = \frac{U.V}{|V|^2}$$

تعریف: فرض کنید $u = (u_1, \dots\dots, u_n)$ و $v = (y_1, \dots\dots, y_n)$ داده شده اند . ضرب داخلی u , v که بصورت $u.v$ نمایش می دهیم به صورت زیر تعریف می شود:

$$u.v = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \dots\dots\dots + u_n y_n$$

ویژگی های ابتدایی ضرب داخلی: فرض کنید $U \in R^n$ و $C \in R$ داریم:

۱) $U.U \geq 0 \qquad U.U = 0 \rightarrow U = 0$

۲) $U.V = V.U$

۳) $C(U.V) = (CU).V = U.(CV)$

۴) $U.(V + W) = U.V + U.W$

تعریف: برای $U \in R^n$ ، طول U یعنی $|U|$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$|U| = \sqrt{U.U}$$

قضیه(نامساوی کشی-شوارتز): برای هر $U, V \in R^n$ $|u.v| \le |v||u|$ به علاوه تساوی برقرار است

$$\Leftrightarrow$$

$\{U,V\}$ وابسته خطی است

برهان: اگر $\{U,V\}$ وابسته خطی باشند

$$U = CV$$
$$|V.U| = |(CV).V| = |C(V.V)| = |C||V.V| = |C||V|^2$$
$$|U||V| = |CV||V| = |C||V|^2$$

اگر $\{U,V\}$ مستقل خطی باشند

$$\forall \lambda U + V \neq 0$$
$$(\lambda U + V).(\lambda U + V) > 0$$
$$\lambda^2 |U|^2 + 2\lambda(U.V) + |V|^2 > 0$$
$$\Delta < 0 \rightarrow (U.V)^2 - |U|^2|V|^2 < 0 \rightarrow |U.V| < |U||V|$$

تعریف: برای دو بردار ناصفر U, V زاویه بین U, V عدد حقیقی یگانه بین $\alpha \in [0,\pi]$ است به طوری که

$$COS\,\alpha = \frac{U.V}{|V||U|}$$

توجه: بنابر قضیه قبل ، زاویه بین هر دو U, V ناصفری موجود است !

تعریف: بردارهای ناصفر U, V را برهم عمود می نامیم هرگاه $U.V = 0$

یک محاسبه:

$U, V \in R^n \qquad |u+v|^2 = ?$

$$|u+v|^2 = (u+v).(u+v) = |u|^2 + 2(u.v) + |v|^2$$

نتیجه ۱: قضیه فیثاغورس : برای بردار های ناصفر u, v در R^n

$$|u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2 \Leftrightarrow u \perp v$$

نتیجه ۲: قضیه نامساوی مثلث: برای $v,u \in R^n$

$$|u+v| \le |u| + |v|$$

تعریف:برای بردارهای $v,u \in R^n$ و $(V \neq 0)$ تصویر متعامد u بر v برابر است با:

$$= \frac{U.V}{|V||U|}V$$

گزاره:فرض کنید $\{u_1 \ldots\ldots u_k\}$ زیر مجموعه ای متعامد در R^n باشد، یعنی اینکه برای هر $i \neq j$, $u_i.u_j = 0$ در این صورت $\{u_1 \ldots\ldots u_k\}$ مستقل خطی است.

برهان:فرض کنید

$$c_1u_1 + \ldots\ldots + c_ku_k = 0$$
$$(c_1u_1 + \ldots\ldots + c_ku_k).u_1 = 0.u_1 = 0 \rightarrow c_1(u_1.u_1) = 0 \rightarrow c1 = 0$$
$$(c_1u_1 + \ldots\ldots + c_ku_k).u_2 = 0.u_2 = 0 \rightarrow c_2 = 0$$

به همین شکل $c_1 = c_2 = c_3 = \ldots\ldots = c_k = 0$

فرض کنید E یک زیر فضای خطی از R^n باشد که $\dim E = k$. $\{u_1 \ldots\ldots\ldots u_k\}$ را یک زیر مجموعه مستقل خطی در E بگیرید:

$$V_1 := U_1$$
$$V_2 := U_2 - \frac{U_2.V_1}{|V_1|^2}V_1$$

V۱بر V۲ عمود است

$$V_3 = U_3 - \frac{U_3.V_2}{|V_2|^2}V_2 - \frac{U_3.V_1}{|V_1|^2}V_1$$

V1وV2وV3 دوبه دو برهم عمودند

....

$$V_l := U_l - \ldots$$

$\{v_1,\ldots,v_l\}$در E متعامد است$\Leftarrow$مستقل خطی است

این زیر مجموعه مستقل خطی را به عنوان پایه ای برای E گسترش میدهیم ، u_{l+1}راطوری میگیریم که $u_{l+1} \notin < u_1,\ldots,u_l >$ ولی در E باشد.

$$v_{l+1} = u_{l+1} - \frac{u_{l+1}.v_1}{|v_1|^2}v_1 \ldots - \frac{u_{l+1}.v_l}{|v_l|^2}v_l$$

پس $\{v_1,\ldots,v_l,v_{l+1}\}$ یک زیر مجموعه متعامد است$\Leftarrow$مستقل خطی در E است.

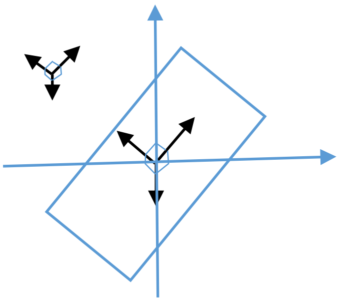
این فرایند را ادامه میدهیم تا به پایه متعامد $\{v_1,\ldots,v_k\}$برای E است.

$$x \in E \Rightarrow x = c_1v_1 + \ldots + c_kv_k$$
$$x.v_j = c_j(v_j.v_j) \Rightarrow c_j = \frac{x.v_j}{|v_j|^2} \qquad j = 1,\ldots,k$$

فرض کنید E یک زیر فضای خطی $\mathbb{R}^n$ و $\dim E = k$، $(1 \le k < n)$

فرض کنید $\{u_1,\dots,u_k\}$ یک پایه متعامد برای E باشد،این پایه را به یک پایه متعامد برای R^n گسترش میدهیم.

$\{u_1,\dots,u_k,\dots,u_n\}$



لم:برای هر $x \in R^n$

$$x \in E \Leftrightarrow x.u_j = 0 \qquad j = k+1,\dots,n$$

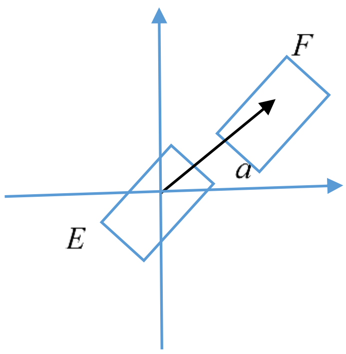
$$x \in E \Rightarrow x = c_1v_1 + \dots + c_kv_k \Rightarrow x.u_j = 0 \qquad c_i \in \mathbb{R}$$

$$x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x = c_1v_1 + \dots + c_kv_k + c_{k+1}v_{k+1} + \dots + c_nv_n \qquad c_i \in \mathbb{R}$$

$$x.u_j = 0 \Rightarrow c_j(u_j.u_j) = 0 \Rightarrow c_j = 0$$

$$x = c_1v_1 + \dots + c_kv_k \Rightarrow x \in E$$

فرض کنید $F = a + E$ یک زیر فضای مستوی R^n باشد.



$$x = (x_1,\dots,x_n)$$
$$a = (a_1,\dots,a_n)$$
$$u_{k+1} = (u_1^{k+1},\dots,u_n^{k+1})$$
$$\dots$$
$$u_n = (u_1^{n},\dots,u_n^{n})$$

$$x \in F \Leftrightarrow x - a \in E$$
$$x - a \in E \Leftrightarrow (x-a).u_{k+1} = 0 \Leftrightarrow u_1^{k+1}(x_1 - a_1) + \dots + u_n^{k+1}(x_n - a_n) = 0$$
$$(x-a).u_n = 0 \Leftrightarrow u_1^{n}(x_1 - a_1) + \dots + u_n^{n}(x_n - a_n)$$

معادلات F(معادلات ابر صفحه که از اشتراک آنها F، پدید می آید)

مثال:فرض کنید

که همگی عضو $\mathbb{R}^4$ هستند

$$u_1=(1,0,1,1)$$
$$u_2=(0,2,0,3)$$
$$u_3=(-3,-1,1,5)$$

به راحتی میتوان دید $\{u_1,u_2,u_3\}$مستقل خطی است.

$$E=<u_1,u_2,u_3>$$

زیر فضای خطی سه بعدی در R^4

میخواهیم برای E یک پایه متعامد پیدا کنیم:

$$v_1=u_1=(1,0,1,1)$$
$$v_2=u_2-\frac{u_2.v_1}{|v_1|^2}v_1=(0,2,0,3)-\frac{3}{3}(1,0,1,1)=(-1,2,-1,2)$$
$$v_3=u_3-\frac{u_3.v_1}{|v_1|^2}v_1-\frac{u_3.v_2}{|v_2|^2}v_2=(-3,-3,1,2)$$

یک پایه متعامد برای Eاست.

این پایه به یک پایه متعامد برای R^4 گسترش میدهیم:

$$u_4\notin E$$
$$E=<u_1,u_2,u_3>$$
$$E=\{tu_1+su_2+lu_3\,|\,t,s,l\in\mathbb{R}\}$$
$$E=\{(t-3l,2s-l,t+l,t+3s+5l)\,|\,t,s,l\in\mathbb{R}\}$$
$$u_4=(0,0,0,1)\notin E$$
$$v_4=u_4-\frac{u_4.v_1}{|v_1|^2}v_1-\frac{u_4.v_2}{|v_2|^2}v_2-\frac{u_4.v_3}{|v_3|^2}v_3=(A,B,C,D)$$

$\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$یک پایه متعامد برای R^4است.

معادله E:

$$Ax_1+Bx_2+Cx_3+Dx_4=0$$

میان ترم اول سال ۹۲ :فرض کنید $A_1,\ldots,A_K$ و B نقاطی از R^n باشند،ثابت کنید اگر $\{A_1,\ldots,A_k\}$ مجموعه ای مستقل خطی و $\{A_1+B,A_2,\ldots,A_k\}$ مجموعه ای وابسته خطی باشد، $\{A_1-B,A_2,\ldots,A_k\}$ مستقل خطی است.

$\{A_1+B,A_2,\ldots,A_k\} \to \exists\{c_1,\ldots,c_k\}\in R$ و لا اقل یکی غیر صفر

لزوما $c_1 \neq 0$ $\quad$ $,c_1(A_1+B)+\ldots+c_kA_k=0$

$$A_1+B=\frac{-c_kA_k}{c_1}-\ldots-\frac{c_2A_2}{c_1}\in<A_2,\ldots,A_k>$$

$$A_1+B\in<A_2,\ldots,A_k>$$

فرض خلف: اگر $\{A_1-B,\ldots,A_k\}$ وابسته خطی $\leftarrow$ $\quad A_1-B\in<A_2,\ldots,A_k>$

بنابراین: $A_1\in E \leftarrow \{A_1,\ldots,A_k\}$وابسته خطی

میان ترم اول سال ۹۲: فرض کنید $A_1,\ldots,A_{K+1}$ نقاطی از R^n باشند که برای هر $i\neq j$ ، $A_i.A_j<0$ اگر $E=<A_1,\ldots,A_k>$. ثابت کنید $\dim E=k$

برهان:کافی است ثایت کنیم $\{A_1,\ldots,A_k\}$ مستقل خطی است.

فرض کنید $T_1A_1+\ldots+T_kA_K=0,\quad T_i\in R$

حکم : $T_i=0$

جملات با ضرایب منفی را به طرف راست تساوی منتقل می کنیم.

$$\sum_{i\in I}T_iA_i=\sum_{j\in J}S_jA_j:=B$$

توجه : $S_j,T_i>=0 \quad ,I\bigcup J=\{1,\ldots,k\},I\bigcap J=\varnothing$

$$0\le B.B=(\sum_{i\in I}T_iA_i).(\sum_{j\in J}S_jA_j)$$

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}T_iS_j\quad(A_i.A_j<0)$$

$$B=0 \qquad 0=B.A_{k+1}=(\sum_{i\in I}t_iA_i)A_{k+1}=\sum t_i(A_i.A_{k+1}<0)\to t_i=0$$

به همین ترتیب $S_j=0$ و $S_j=-t_j$ $I\bigcup J=\{1,\ldots,k\}$ $\leftarrow$ $t_1=\ldots=t_k=0$

....

ضرب خارجی در R^3 :

تعریف: فرض کنید $u=\{u_1,u_2,u_3\}$ و $v=\{v_1,v_2,v_3\}$ دو بردار در R^3 باشند،ضرب خارجی u در v را با $u\times v$ نمایش می دهیم.و به صورت مقابل محاسبه می شود: $u\times v=(u_2v_3-u_3v_2,u_3v_1-u_1v_3,u_1v_2-u_2v_1)$

تعریف:یک ماتریس $m\times n$ یک mn تایی مرتب است که مولفه های آن در m سطر و n ستون نوشته شده اند.

$$R^n \text{ اعضای}=\begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}=[x_1,\dots\dots,x_n],\ B_{p\times n}=[b_{ij}]\ ,\ A_{m\times p}=[a_{ij}]$$

$$AB=[c_{ij}] \qquad \text{و} \qquad c_{ij}=\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

فرض کنید A یک ماتریس $m*n$ باشد

$$A=\begin{bmatrix} a_{11}\dots\dots a_{1n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}\dots\dots a_{m\times n} \end{bmatrix}$$

برای $x\in R^n$،منظور از Ax یعنی این که x را به صورت $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$ در نظر بگیریم که در این صورت:

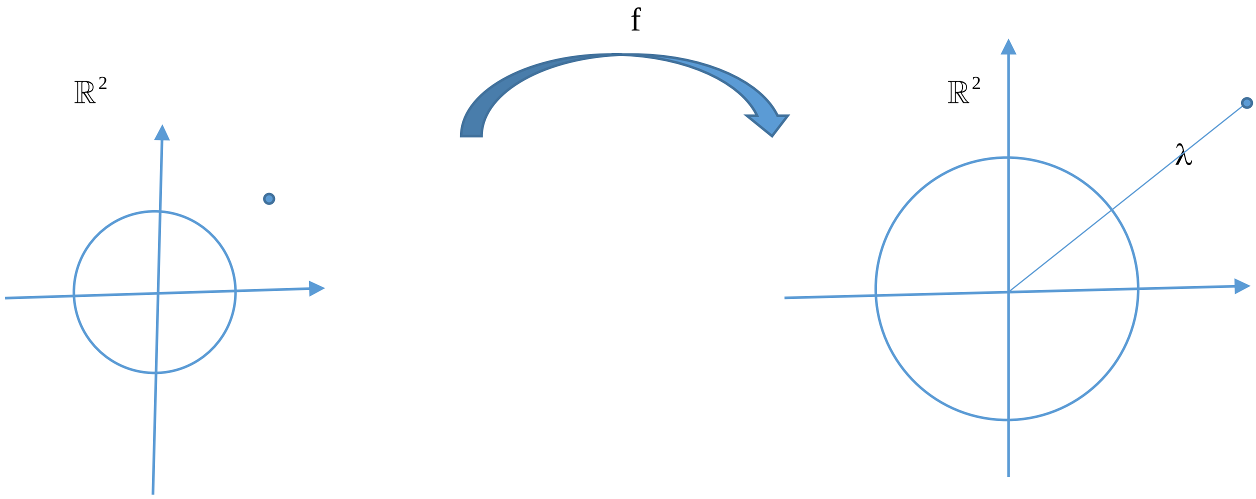
$$Ax=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}x_1+ & \cdots & +a_{1n}x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & \cdots & +a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

تابع $f:R^n$ را باضابطه زیر در نظر بگیرید: نگاشت خطی $f(x)=Ax$

که در آن A یک ماتریس $m*n$ است.(این توابع ساده ترین نوع توابع از $R^m \Rightarrow R^n$ هستند)

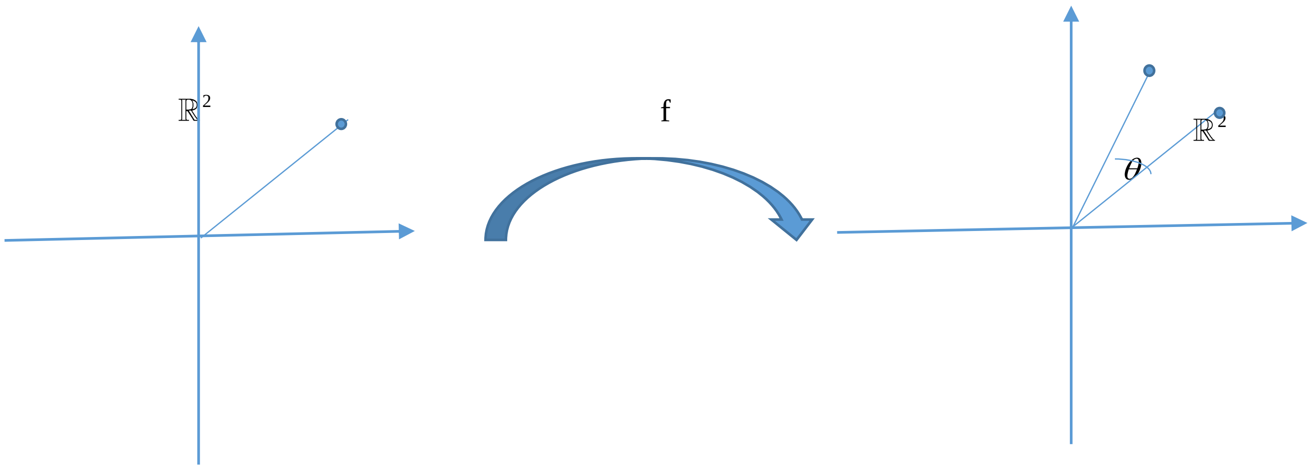
مثال۱:
$$f:R^2\to R^2$$
$$f(x)=Ax$$

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\to A=\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$



مثال ۲:

$$A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$



تعریف:تابع $f:R^n \to R^m$ تابعی خطی(نگاشت خطی) میگوییم هرگاه یک ماتریس $m*n$ مانند A موجود باشد طوری که برای هر. $f(x)=Ax, x\in R^n$

گزاره(یک ویژگی مهم توابع خطی):اگر $f:R^n \to R^m$ یک تابع خطی باشد ،آنگاه برای هر x,y عضو R^n و به ازای مقدار حقیقی c

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

$f(cx) = cf(x)$

نشان می دهیم که عکس گزاره بالا نیز درست است.

توجه : برای ماتریس A_{mxn} ، A_{ej} را حساب می کنیم :

$$A_{ej} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{ij} \\ . \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

ستون j ام $A_{ej} = A$

گزاره : فرض کنید $f : R^n \to R^m$ تابعی باشد که برای هر $x, y \in R^n$ و هر $c \in R$ ،

۱) $f(x + y) = f(x) + f(y)$

۲) $f(cx) = cf(x)$

آنگاه f خطی است.

برهان : قرار می دهیم: ماتریس نگاشت خطی $A = \begin{bmatrix} f(e_1) \,|\, & \cdots & |\, f(e_n) \end{bmatrix}$

ادعا : برای هر $x \in R^n$: $f(x) = Ax$

دلخواه $x \in R^n = (c_1, \ldots, c_n) = c_1 e_1 + \ldots + c_n e_n$

$$f(x) = f(c_1 e_1 + \ldots + c_n e_n) = c_1 f(e_1) + \ldots + c_n f(e_n) = c_1 A e_1 + \ldots + c_n A e_n = A(c_1 e_1 + \ldots + c_n e_n) = Ax$$

گزاره: فرض کنید $g : R^n \to R^p$ و $f : R^p \to R^m$ دو نگاشت خطی باشند دراین صورت fog خطی است.

1) $f(x) = Ax$ $\qquad g(x) = Bx$

$fog(x) = f(Bx) = A(Bx) = (AB)x$

2)$fog(x + y) = fg(x + y) = f(g(x) + g(y)) = f(g(x)) + f(g(y))$

گزاره:فرض کنید $f : R^n \to R^n$ یک به یک، پوشا وخطی باشد ، در این صورت $f^{-1} : R^n \to R^n$ خطی است وماتریس f^{-1} = وارون ماتریس f

برهان : نشان می دهیم برای هر $u, v \in R^n$ وهر $c \in R$

$$f^{-1}(u + v) = f^{-1}(u) + f^{-1}(v)$$
$$f^{-1}(cu) = cf^{-1}(u)$$

f خطی

$$\left.\begin{array}{l} f^{-1}(u) := x \to u = f(x) \\ f^{-1}(v) := y \to v = f(y) \end{array}\right\}$$

$$u + v = f(x) + f(y) \to f(x+y)$$
$$cu = cf(x) = f(cx)$$

$$\left.\begin{array}{l} f^{-1}(u+v) = x + y \to f^{-1}(u+v) = f^{-1}(u) + f^{-1}(v) \\ f^{-1}(cu) = cx \to f^{-1}(cu) = cf^{-1}(u) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{گزاره}} f^{-1} : R^n \to R^n \text{ خطی}$$

$$\forall x \in R^n \to f^{-1}(x) = Bx \to$$ B ماتریس $n*n$

$$\left.\begin{array}{l} fof^{-1} = id \to AB = I \\ f^{-1}of = id \to BA = I \end{array}\right\}$$ A وارون پذیر و $B = A^{-1}$ $$\left\{\begin{array}{l} id : R^n \to R^n \\ id(x) = x \end{array}\right.$$

ماتریس $id \leftarrow I_n$

فرض کنید A یک ماتریس $m*n$ باشد.قرار دهید:

$$E_0 = \left\{ x \in R^n \mid Ax = 0 \right\} \subseteq R^n$$
$$E_1 = \left\{ Ax \mid x \in R^n \right\} \subseteq R^m$$

ادعا: E_0 یک زیر فضای خطی R^n است. $E_0 \subseteq R^n$ و $E_0 \neq \varnothing$ به ازای هر $x, y \in E_0$ و $c \in R$:

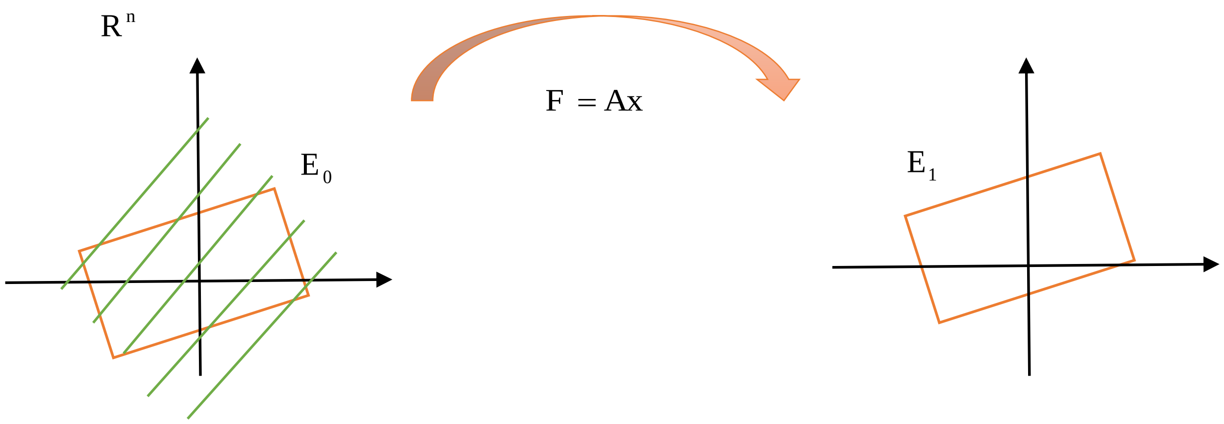
$x + y \in E_0$ $\qquad Ax = 0, Ay = 0 \to A(x+y) = 0 \to x + y \in E_0$

$cx \in E_0$ $\qquad cAx = 0 \to A(cx) = 0 \to cx \in E_0$

ادعا: E_1 یک زیر فضای خطی R^m است. $E_1 \subseteq R^m$ و $E_1 \neq 0$ به ازای $y_1, y_2 \in E_1$ و $c \in R$:

$y_1 + y_2 \in E_1$ $\qquad y_1 = Ax_1, y_2 = Ax_2 \to y_1 + y_2 = A(x_1 + x_2) \in E_1$

$cy_1 \in E_1$ $\qquad y_1 = Ax_1, cy_1 = c(Ax_1) = A(cx_1) \in E_1$



$E_0=\{x\in R^n \mid f(x)=0\}=\ker f$ هسته ی f پوچی $\dim E_0 := A$

$E_1=\{f(x) \mid x\in R^n\}=\operatorname{Im} f$ تصویر f رتبه $\dim E_1 := A$

قضیه ی رتبه وپوچی:برای هر ماتریس $m*n$ مثل A : $n=\dim E_0+\dim E_1$

آنگاه $\dim E_1=n-k$ نشان می دهیم اگر $\dim E_0=K$

(این برهان قضیه را کامل میکند)

چون $\dim E_0=k$ پس یک پایه ی k عضوی دارد $\{x_1,\dots,x_k\}$ یک پایه E_0 .این پایه را به یک پایه برای R^n گسترش می دهیم.

$\{x_1,\dots,x_k,x_{k+1},\dots,x_n\}$ (یک پایه R^n)

ادعا : $\{A x_{k+1},\dots,Ax_n\}$ یک پایه E_1 است .

توجه کنید که مجموعه ی داده شده زیر مجموعه ی E_1 است ،استقلال خطی :

$$C_{k+1}(Ax_{k+1})+\dots+c_n(Ax_n)=0$$

$$A(c_{k+1}x_{k+1}+\dots+c_nx_n)=0 \longrightarrow c_{k+1}x_{k+1}+\dots+c_nx_n\in E_0$$

$$c_{k+1}x_{k+1}+\dots+c_nx_n=c_1x_1+\dots+c_kx_k$$

$$-c_1x_1-\dots-c_kx_k+c_{k+1}x_{k+1}+\dots+c_nx_n=0 \longrightarrow c_1=\dots=c_n=0$$

R^n مستقل خطی

مولد بودن:

$$y\in E_1\to y=Ax, x\in R^n$$

$$x=c_1x_1+\dots+c_kx_k+c_{k+1}x_{k+1}+\dots+c_nx_n$$
$$\therefore\ y=Ax=A(c_1x_1+\dots+c_nx_n)=c_{k+1}x_{k+1}+\dots+c_nx_n$$

پس مجموعه داده شده،پایه ای برای E_1 است و $\dim E_1=n-k$.

❊**تذکر**:به

$$❊\ \left\{\begin{matrix} a_{11}x_1+\dots+a_{n1}x_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n=b_n \end{matrix}\right\}$$

یک دستگاه m معادله n مجهولی گویند.اگر $b_1=b_2=\ldots=b_n=0$ آنگاه دستگاه به دست آمده را دستگاه همگن وابسته به ⁕ گوییم.

اگر $A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ و $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ و $b=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ آنگاه ⁕را میتوان به شکل $Ax=b$ (شکل ماتریسی ⁕) نوشت.دستگاه همگن وابسته به صورت $Ax=0$ خواهد بود.

گزاره:اگر $\bar{x}$ یک جواب $Ax=b$ باشد ،آنگاه

$$Ax=b \text{ مجموعه تمام جواب های } = E_0+\bar{x}$$

برهان: $\longleftarrow$

$u+\bar{x}\in E_0+\bar{x}$ دلخواه

$$A(u+\bar{x})=Au+A\bar{x}=0+b=b$$

برهان: $\longrightarrow$

y جواب دلخواه $\quad \left.\begin{matrix} Ay=b \\ A\bar{x}=b \end{matrix}\right\} A(y-\bar{x})=o \to y-\bar{x}\in E_0 \to y\in E_0+\bar{x} \to$

⁕حالت $m=n$:

$\det A\neq 0 \to$ فقط دارای جواب بدیهی $Ax=0 \longrightarrow x=0$

$\det A=0 \to$ دارای نامتناهی جواب است $Ax=0$

I فرض کنید $Ax=0$ فقط دارای جواب $x=0$ است،تعریف کنید $\begin{cases} f:R^n\to R^n \\ f(x)=Ax \end{cases}$

$$f(x)=f(y)$$

$Ax=Ay \to A(x-y)=0 \xrightarrow{\text{فرض}} x-y=0 \to x=y$ یک به یک

پوشا $(f \to n=\dim E_0+\dim E_1 \xrightarrow{\dim E_0=0} \dim E_1=n \xrightarrow{I} E_1=R^n$ $\qquad \to \dim E_0=0\ E_0$ یک نقطه

$b\in R^n \to b\in E_1 \to b=Ax=f(x)$ دلخواه

طبق گزاره f^{-1} خطی است ، با ماتریس A^{-1}،پس $\det A\neq 0$ تناقض

پس $Ax=0$ دارای جواب دیگری به جز $x=0$ است. $\longleftarrow$ $Ax=0$ نامتناهی جواب دارد.

⁕حالت $n>m$:

قضیه:

$Ax=0$ نامتناهی جواب $\rightarrow$ لااقل خط

$n = \dim E_0 + \dim E_1 \xrightarrow{\dim E_1 \le m} \dim E_0 \ge n-m > 0 \rightarrow \dim E_0 \ge 1 \rightarrow E_0$

($\dim E_1$ حداکثر m)

❈حالت $n<m$:

$\exists b \in R^m : Ax=b$ جواب ندارد

فرض خلف: $Ax=b$ جواب دارد.

$n = \dim E_0 + \dim E_1 \xrightarrow{\dim E_1 = m} \dim E_0 = n-m < 0$

توجه:

$$\begin{cases} f: R^n \rightarrow R^m \\ f(x) = Ax \end{cases}$$

$n = \dim E_0 + \dim E_1$

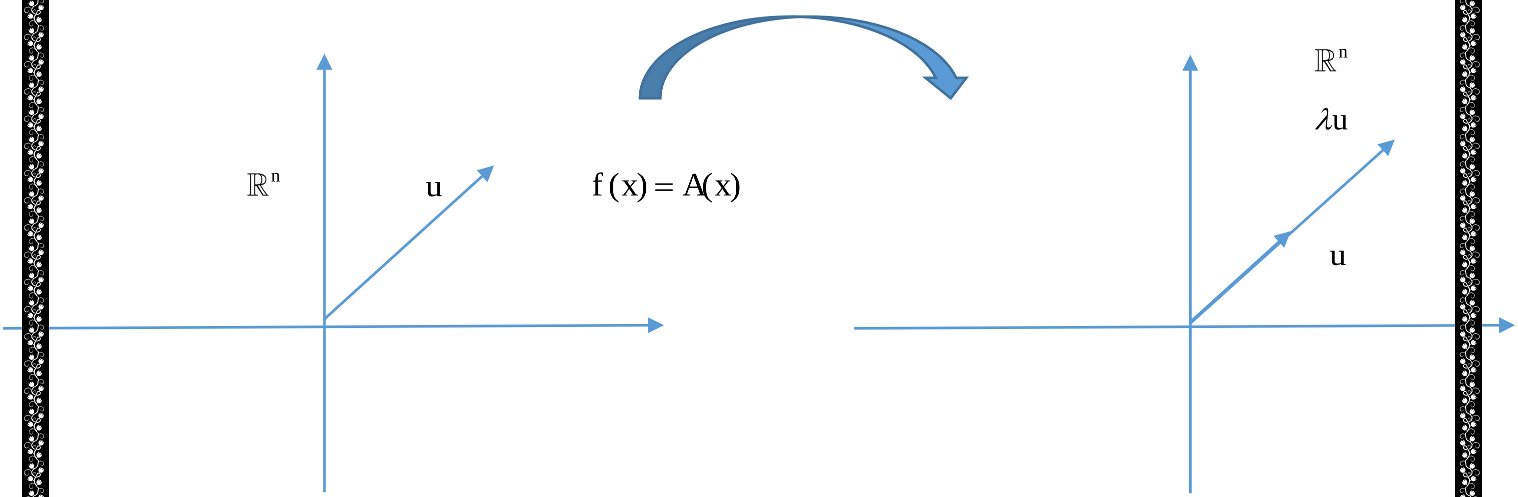
f پوشا $\rightarrow \dim E_0 = n-m \ge 0 \rightarrow n \ge m$

f یک به یک $\rightarrow n = \dim E_1 \le m \rightarrow n \le m$

$n>m \rightarrow$ f یک به یک نیست

$n=m \rightarrow$ یک به یک معادل پوشا

تعریف: فرض کنید A یک ماتریس $n\times n$ باشد ، عدد حقیقی λ را یک مقدار ویژه A می نامند هرگاه $0 \ne u \in R^n$ موجود باشد طوری که $Au=\lambda u$ ،دراین صورت u یک بردار ویژه وابسته به λ نامیده می شود.



سوال: چگونه میتوان مقادیر ویژه ماتریس A را محاسبه کرد؟

λ یک مقدار ویژه A است $\Leftrightarrow$ $\exists u \in,\ Au = \lambda u$

دستگاه همگن $(A-\lambda I)x=0$ جواب غیر صفر دارد $\Leftrightarrow (A-\lambda I)u=0 \Leftrightarrow \det(A-\lambda I)=0$

λ مقدار ویژه A است اگر و تنها اگر λ جواب $\det(A-\lambda I)=0$ باشد.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ . & & . \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ . & & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}=(-1)^n\lambda^n+c_{n-1}\lambda^{n-1}+\dots+c_1\lambda+c_0$$

که در آن $\begin{matrix} C_{n-1}=\operatorname{tr}(A) \\ C_0=\det(A) \end{matrix}$ می باشد و به عبارت اخیر، چند جمله ای مشخصه A می گویند.

توجه: حاصل ضرب مقادیر ویژه A برابر است با $\det(A)$ (با احتساب ریشه های مختلط)

توجه: حاصر جمع مقادیر ویژه A برابر است با $\operatorname{tr}(A)$ (حاصل جمع درایه های قطر اصلی)

قضیه کیلی هامیلتون: هر ماتریس $n\times n$ در چند جمله ای مشخصه خود صدق می کند:

$$(-1)^n A^n+c_{n-1}A^{n-1}+\dots+c_1A+c_0=0$$

تعریف: فرض کنید A یک ماتریس $n\times n$ با مقدار ویژه λ باشد. در این صورت:

$E_\lambda=\{$مجموعه بردارهای ویژه وابسته به $\lambda\}$

$\cup\{0\}=\{u\in R^n \mid Au=\lambda u\}=\{u\in R^n \mid (A-\lambda I)u=0\}=E_0((A-\lambda I)$ مربوط به $)$

E_λ را که زیرفضای خطی $\mathbb{R}^n$ است را فضای ویژه وابسته به λ گویند.

چند جمله ای مشخصه ماتریس های ۲×۲:

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix}=(a-\lambda)(d-\lambda)-bc=\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc=$$
$$\lambda^2-\operatorname{tr}(A)\lambda+\det(A).$$

$A^2-\operatorname{tr}(A)A+\det(A)I=0$ **(قضیه کیلی همیلتون)**

مثال:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I)=\lambda^2-\mathrm{tr}(A)\lambda+\det(A)=\lambda^2-4\lambda-5=0\rightarrow\begin{cases}\lambda=-1\\ \lambda=5\end{cases}$$

بردار و فضای ویژه مربوط به ۱-:

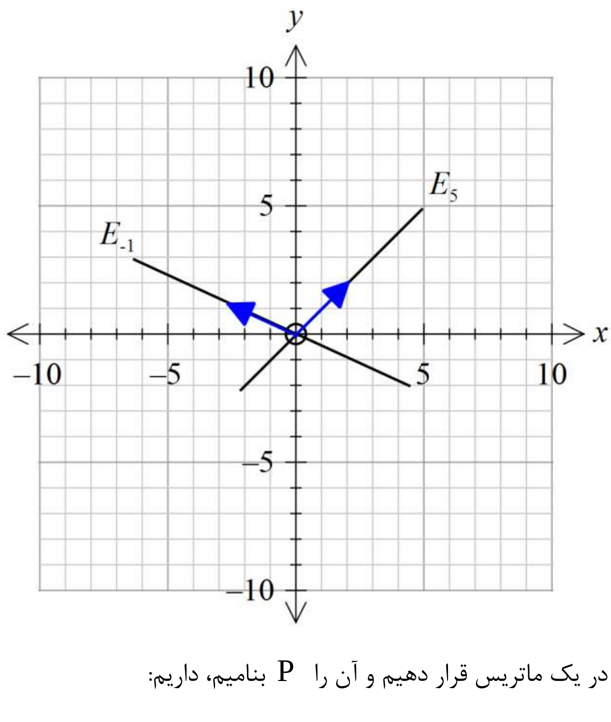
$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}x+2y=-x\\ 3x+4y=-y\end{cases}\rightarrow x+2y=0$$

مثلا $\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}$ در رابطه اخیر صدق می کند و یک بردار ویژه است. خط (فضای ویژه) مربوط به آن: $E_{-1}=<(-2,1)>$ است.

بردار و فضای ویژه مربوط به ۵:

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}x+2y=5x\\ 3x+4y=5y\end{cases}\rightarrow x=y$$

مثلا $\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$ در رابطه اخیر صدق می کند و یک بردار ویژه است. خط (فضای ویژه) مربوط به آن: $E_5=<(1,1)>$ است.



نکته جالب: اگر بردارهای ویژه را در یک ماتریس قرار دهیم و آن را P بنامیم، داریم:

$$P=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\to P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}\to (P^{-1}AP)^n=\begin{bmatrix}(-1)^n & 0\\ 0 & 5^n\end{bmatrix}\to P^{-1}AP\times P^{-1}AP\times\ldots\times P^{-1}AP\to$$

$$\to P^{-1}A^nP=\begin{bmatrix}(-1)^n & 0\\ 0 & 5^n\end{bmatrix}\to A^n=P\begin{bmatrix}(-1)^n & 0\\ 0 & 5^n\end{bmatrix}P^{-1}$$

ماتریس A قطری پذیر است در صورتی که $P^{-1}AP$ قطری باشد.

مثال:

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 3 & 0 & -3\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}-1-\lambda & 0 & 1\\ 3 & 0-\lambda & -3\\ 1 & 0 & -1-\lambda\end{bmatrix}=-\lambda((-1-\lambda)^2-1)=0\to\begin{cases}\lambda_1=\lambda_2=0\\ \lambda_3=-2\end{cases}$$

بردار و فضای ویژه مربوط به صفر:

$$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 3 & 0 & -3\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=0\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}\to\begin{cases}-x+z=0\\ 3x-3z=0\to x=z\\ x-z=0\end{cases}$$

فضای ویژه در اینجا یک صفحه است.

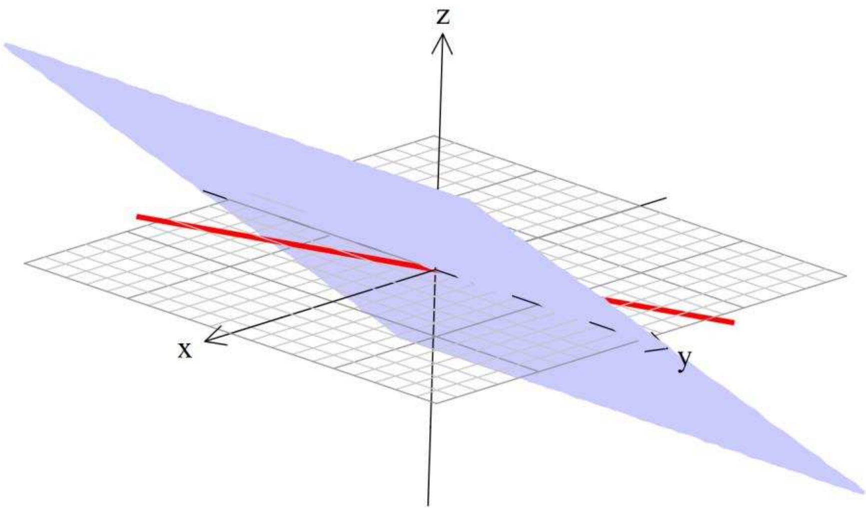
$$E_0=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,x=z\right\}=\left\{(t,s,t)\,\middle|\,t,s\in\mathbb{R}\right\}=\left\{t(\hat{i}+\hat{k})+s\hat{j}\,\middle|\,t,s\in\mathbb{R}\right\}$$

مثلا $<(1,0,1),(0,1,0)>=<\hat{i}+\hat{k},\ \hat{j}>$ با در نظر گرفتن $t=s=0$ حاصل می شود که دو بردار ویژه وابسته به صفر را می‌دهد.

بردار و فضای ویژه مربوط به ۲-:

$$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 3 & 0 & -3\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}\to\begin{cases}-x+z=-2x\\ 3x-3z=-2y\\ x-z=-2z\end{cases}\to\begin{cases}x+z=0\\ 3x-3z=-2y\end{cases}$$

مثلا $\begin{bmatrix}1\\ -3\\ -1\end{bmatrix}$ در دستگاه اخیر صدق می کند و یک بردار ویژه است. خط (فضای ویژه) مربوط به آن $E_{-2}=<(1,-3,-1)>$ است.



نکته جالب: اگر بردارهای ویژه را در یک ماتریس قرار دهیم و آن را P بنامیم، داریم:

$$P=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-3\\1&0&-1\end{bmatrix}\rightarrow P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$$

و همان نتایج نکته جالب قبل برقرار است.