۸۰۰

راهنما و حل مسایل

روشهای ریاضی در فیزیک

(جورج آرفکن)

تألیف

شهریار رخزاد پور

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

رخزادپور، شهریار، ۱۳۵۵ -
راهنما و حل مسایل روشهای ریاضی در فیزیک (جورج آرفکن)/ تالیف شهریار رخزادپور.— همدان: دانشجو، ۱۳۷۹.
۲۳۶ ص.: نمودار.
ISBN 964-6502-98-9
فهرستنویسی براساس اطلاعات فیپا.
۱.ریاضیات. ۲.فیزیک ریاضی. ۳.ریاضیات -- مسائل، تمرینها و غیره. ٤.فیزیک ریاضی -- مسائل، تمرینها و غیره. الف.آرفکن، جورج براون، ۱۹۲۲ - . Arfken, George Brown . روشهای ریاضی در فیزیک. ب.عنوان. ج.عنوان: روشهای ریاضی در فیزیک.

QA۳۷/۲/ر۳۸ ۹۲٤ ۵۱۵/۱
۱۳۷۹

کتابخانه ملی ایران ۷۹-۹۸۷۶م

نام کتاب : راهنما و حل مسائل روشهای ریاضی در فیزیک
مؤلف : شهریار رخزاد پور
ناشر : انتشارات دانشجو
نوبت چاپ : سوم / زمستان ۱۳۸۰
تایپ و حروفچینی : واحد کامپیوتر انتشارات دانشجو
فیلم و زینگ : لیتوگرافی روشن
چاپ و صحافی : فردوسی
تیراژ : ۱۰۰۰۰ جلد
تعداد صفحه : ۲۳۶ صفحه / وزیری
شابک : ۹-۹۸-۶۵۰۲-۹۶۴

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

به نام خدا

مقدمه

کتاب حاضر حل مسائل جلد اول کتاب روشهای ریاضی در فیزیک تألیف جورج آرفکن می‌باشد. حل مسائل با توجه به ویرایش جدید (ویرایش سوم) این کتاب که مربوط به سال ۱۹۸۵ می‌باشد تنظیم گردیده است (ترجمه این ویرایش توسط نشر دانشگاهی به چاپ رسیده است). در حل مسائل از جزوات مربوط به کلاسهای حل تمرین بعضی از اساتید دانشگاه بوعلی‌سینا و البته دانشگاههای دیگر استفاده شده است.

طبق سرفصلهای وزارت علوم - تحقیقات و فناوری، ۴ فصل اول کتاب مربوط به درس ریاضی فیزیک ۱ و فصول ۶ و ۷ مربوط به درس ریاضی فیزیک ۲ و البته بخشی از درس ریاضیات مهندسی (از دروس رشته‌های فنی) می‌باشد معمولاً مطالب فصل ۵ بدلیل اینکه در درس ریاضی عمومی بدان اشاره می‌شود عنوان نمی‌گردد ولی با این حال به حل مسائلی از این فصل اقدام گردیده است.

در پایان از کلیه اساتید و دوستان بخصوص جناب آقای ملک محمدی مدیریت انتشارات دانشجو که در چاپ این کتاب تلاش نمودند تشکر می‌نمایم.

شهریار رخزادپور

فروردین ماه یکهزار و سیصد و هفتاد و نه شمسی

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

فهرست مطالب

عنوان | صفحه

فصل اول ـ تحلیل برداری

بخش ۱ـ۱ـ تعریفها ـ رهیافت بنیادی ۷
بخش ۱ـ۲ـ تعریفهای جامع ۱۱
بخش ۱ـ۳ـ ضرب اسکالر یا نقطه‌ای ۱۲
بخش ۱ـ۴ـ ضرب برداری ۱۴
بخش ۱ـ۵ـ ضرب سه گانه اسکالر ـ ضرب سه گانه برداری ۲۰
بخش ۱ـ۶ گرادیان ∇ ۲۸
بخش ۱ـ۷ـ دیورژانس $\vec{\nabla}\cdot$ ۳۱
بخش ۱ـ۸ تاو $\vec{\nabla}\times$ ۳۴
بخش ۱ـ۹ـ کاربردهای $\vec{\nabla}$ متوالی ۴۱
بخش ۱ـ۱۰ـ انتگرال‌گیری برداری ۴۵
بخش ۱ـ۱۱ـ قضیهٔ گاؤس ۴۹
بخش ۱ـ۱۲ـ قضیه استوکس ۵۳
بخش ۱ـ۱۳ـ نظریهٔ پتانسیل ۵۶
بخش ۱ـ۱۴ـ قانون گاؤس ـ معادلهٔ پواسون ۶۲
بخش ۱ـ۱۵ـ قضیه هلمهولتز ۶۴

فصل دوم ـ دستگاههای مختصات

بخش ۲ـ۱ـ مختصات خمیده خط ۶۷
بخش ۲ـ۲ـ عملگرهای برداری دیفرانسیلی ۶۹

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

عنوان | صفحه

بخش ۲-۴- مختصات استوانه‌ای دوار (ρ, ϕ, z) ۷۲

بخش ۲-۵- مختصات قطبی کروی (ρ, θ, ϕ) ۷۸

بخش ۲-۶- جداسازی متغیرها ۹۲

فصل سوم - تحلیل تانسوری

بخش ۳-۱- مقدمه - تعریفها ۹۷

بخش ۳-۲- ادغام - ضرب مستقیم ۱۰۰

بخش ۳-۳- قاعدهٔ خارج قسمت ۱۰۱

بخش ۳-۴- شبه تانسورها، تانسورهای دوگان ۱۰۳

بخش ۳-۵- دوتاییها ۱۰۷

فصل چهارم - دترمینانها، ماتریسها و نظریهٔ گروه

بخش ۴-۱- دترمینانها ۱۱۳

بخش ۴-۲- ماتریسها ۱۱۴

بخش ۴-۳- ماتریسهای متعامد ۱۳۰

بخش ۴-۴- مختصات مایل ۱۳۶

بخش ۴-۵- ماتریسهای هرمیتی - ماتریسهای یکانی ۱۳۹

بخش ۴-۶- قطری کردن ماتریسها ۱۴۷

بخش ۴-۷- ویژه بردارها - ویژه مقدارها ۱۵۹

فصل پنجم - سریهای نامتناهی

بخش ۵-۱- مفاهیم بنیادی ۱۶۳

بخش ۵-۲- آزمونهای همگرایی ۱۶۴

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

عنوان | صفحه

بخش ۵ـ۴ـ جبر سریها ۱۶۸
بخش ۵ـ۶ـ بسط تایلور ۱۶۹
بخش ۵ـ۷ـ سری توانی ۱۷۷

فصل ششم ـ تابعهای متغیر مختلط I

بخش ۶ـ۱ـ جبر مختلط ۱۸۵
بخش ۶ـ۲ـ شرایط کوشی ـ ریمان ۱۹۵
بخش ۶ـ۳ـ قضیه انتگرال کوشی ۲۰۱
بخش ۶ـ۴ـ فرمول انتگرال کوشی ۲۰۳
بخش ۶ـ۵ـ بسط لوران ۲۰۷
بخش ۶ـ۶ـ نگاشت ۲۱۲
بخش ۶ـ۷ـ نگاشت همدیس ۲۱۶

فصل هفتم ـ توابع متغیر مختلط II

بخش ۷ـ۱ـ تکینگیها ۲۱۹
بخش ۷ـ۲ـ حساب مانده‌ها ۲۲۲

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

بخش ۱ـ۱ـ تعریفها ـ رهیافت بنیادی — مسائل صفحه ۱۱

۱ـ۱ـ۱ـ چگونه می‌توان با داشتن $\vec{A}+\vec{B}$ و $\vec{A}-\vec{B}$ بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را یافت؟

حل هر دو بردار A+B و A-B را بصورت مؤلفه‌ای داریم.

$$\vec{A}+\vec{B}=(A_x+B_x)\hat{i}+(A_y+B_y)\hat{j}+(A_z+B_z)\hat{k}$$

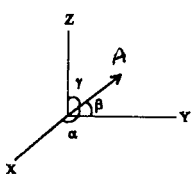
$$\vec{A}-\vec{B}=(A_x-B_x)\hat{i}+(A_y-B_y)\hat{j}-(A_z-B_z)\hat{k}$$

یکبار با هم جمع تا $\vec{A}$ حاصل شود و یکبار از هم کم می‌کنیم تا $\vec{B}$ بدست آید داریم.

$$\vec{A}=\frac{۱}{۲}[(\vec{A}+\vec{B})+(\vec{A}-\vec{B})]$$

$$\vec{B}=\frac{۱}{۲}[(\vec{A}+\vec{B})-(\vec{A}-\vec{B})]$$

۱ـ۱ـ۲ـ بردار A به بزرگی ۱۰ با محورهای مختصات زوایای مساوی می‌سازد A_x، A_y، A_z را بیابید.



حل می‌دانیم رابطه کسینوسها هادی بصورت زیر است.

$$\cos^۲\alpha+\cos^۲\beta+\cos^۲\gamma=۱$$

چون زوایا مساویند پس $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma$ و داریم

$$۳\cos^۲\alpha=۱ \Rightarrow \cos\alpha=\frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \alpha=\cos^{-۱}\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\beta=\gamma$$

$$A_x=A_y=A_z=A\cos\alpha$$

۱ـ۱ـ۳ـ مولفه‌های برداریکه‌ای واقع در صفحه xy را محاسبه کنید که با جهتهای مثبت محورهای x و y زاویه مساوی می‌سازد.

حل اگر $\hat{e}$ برداریکه در صفحه xy باشد پس دو مولفه e_x و e_y دارد.

$$|e|=۱ \ , \ e_y=e\cos\beta \ , \ e_x=e\cos\alpha$$

چون زاویه‌ها مساویند پس $\cos\alpha=\cos\beta$

$$\cos^۲\alpha+\cos^۲\beta=۱$$

$$\Rightarrow ۲\cos^۲\alpha=۱ \Rightarrow \cos\alpha=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$e_x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}=e_y$$

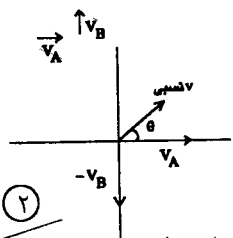
PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

۱ـ۱ـ۴ـ سرعت قایق بادبانی A نسبت به قایق بادبانی B ، $V_{نسبی}$ ، از معادلهٔ $V_{نسبی}=V_A-V_B$ بدست می‌آید که در آن V_A سرعت A و V_B سرعت B است اگر بطرف شرق $V_A=۳۰Km/hr$ و بطرف شمال $V_B=۴۰Km/hr$ سرعت A نسبت به B را تعیین کنید.

حل مسئله بدین نحو است که

$$V_{نسبی}=V_A+(-V_B)$$

از راه مولفه‌ای حل می‌کنیم. فرض شود که $V_{نسبی}$ در جهتی قرار دارد که با جهت مثبت محور xها (محور شرق - غرب) زاویه θ بسازد.



$$X:\ V_A+V\cos\theta=۰ \quad (۱)$$

$$Y:V\sin\theta-(-V_B)=۰ \quad (۲)$$

از $\frac{(۲)}{(۱)}$ $\Rightarrow \tan\theta=\frac{-V_B}{V_A} \Rightarrow \theta=-۵۳/۱۳$

یعنی $V_{نسبی}$ باید در جهت جنوب شرقی و با زاویه $۵۳/۱۳^\circ$ نسبت به محور xها قرار گیرد.

$$V_{نسبی}=\frac{V_A}{\cos\theta}=۵۰\ Km/hr$$

۱ـ۱ـ۵ـ یک قایق بادبانی به مدت یک ساعت با سرعت ۴ کیلومتر در ساعت (نسبت به آب) حرکت می‌کند به صورتی که عقربهٔ قطب نما تحت زاویهٔ ۴۰° نسبت به شمال شرقی ثابت می‌ماند جریان آب نیز این قایق را به جلو می‌راند. قایق پس از یک ساعت در فاصلهٔ ۶/۱۲ کیلومتری نقطه شروع حرکتش قرار می‌گیرد خطی که نقطه شروع را به مکان کنونی آن وصل می‌کند در راستای ۶۰° شمال شرقی قرار دارد. مولفه‌های x (شرقی) و y (شمالی) سرعت آب را بدست آورید.

حل به طور مشابه حل می‌گردد.

۱ـ۱ـ۶ـ هر معادله برداری را می‌توان به صورت $\vec{A}=\vec{B}$ خلاصه کرد به کمک این رابطه نشان دهید که یک معادلهٔ برداری هم ارز با سه معادلهٔ اسکالر است. اگر قانون دوم نیوتن به صورت یک معادلهٔ برداری صادق باشد نتیجه می‌گیریم که a_x فقط به F_x بستگی دارد و از F_y و F_z مستقل است.

حل اگر دو بردار با هم برابر باشند باید تک تک مولفه‌های متناظر آنها نیز با هم برابر باشند

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

یعنی اگر $\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$ و $\vec{B}=B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}$ و $\vec{A}=\vec{B}$ داریم.

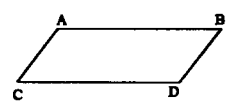
$A_x=B_x$ و $A_y=B_y$ و $A_z=B_z$

در مورد رابطه $\vec{F}=m\vec{a}$ که $\vec{F}$ و $\vec{a}$ بردارند و m یک اسکالر تک تک مولفه‌های برداری متناظر باهم برابرند و m نیز در همگی مشترک است.

$F_x=ma_x$ و $F_y=ma_y$ و $F_z=ma_z$

و البته a_x مستقل از F_y و F_z است و برای بقیه مولفه‌های a نیز به همین نحو.

۱ـ۱ـ۷ـ رئوس A، B و C یک مثلث به ترتیب با نقاط (۲،۰،۱ـ)، (۰،۱،۰) و (۰،ـ۱،۱) مشخص می‌شوند نقطه D را چنان بیابید که شکل ABDC یک متوازی‌الاضلاع مسطح باشد.



حل شرط در متوازی‌الاضلاع بصورت (۱) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ و نیز (۲) $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$

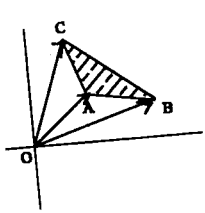
از (۱) $\Rightarrow (x_C-x_A\ ,\ y_C-y_A\ ,\ z_C-z_A)=(x_D-x_B\ ,\ y_D-y_B\ ,z_D-z_B)$

$\Rightarrow (۲,-۱,-۲) = (x_D-۰\ ,\ y_D-۱\ ,\ z_D-۰)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_D=۲ \\ y_D-۱=-۱ \\ z_D=-۲ \end{cases} \Rightarrow y_D=۰ \Rightarrow D(۲,۰,-۲)$$

۱ـ۱ـ۸ـ مثلثی به کمک رئوس سه بردار A، B و C که از مبدأ رسم شده‌اند توصیف می‌شود برحسب A، B و C نشان دهید که جمع برداری اضلاع مثلث (AB+BC+CD) صفر است.

حل اگر قاعده جمع مثلث را بکار ببریم



$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$$

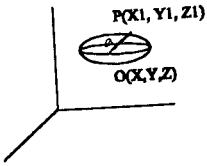
$$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}$$

۳ رابطه فوق را با هم جمع می‌کنیم داریم $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=۰$

۱ـ۱ـ۹ـ مرکز کره‌ای به شعاع r در نقطه r_0 واقع است. الف ـ معادله جبری این کره را بنویسید.

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

ب - معادله برداری این کره را بنویسید.



حل الف - $O(x,y,z)$ و $P(x_1,y_1,z_1)$

$$OP=a=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}$$

$$\Rightarrow \quad (x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=a^2$$

ب -

$$x^2+x_1^2-2xx_1+y^2+y_1^2-2yy_1+z_1^2+z^2-2zz_1=a^2$$

$$x^2+y^2+z^2+x_1^2+y_1^2+z_1^2-2xx_1-2yy_1-2zz_1=a^2$$

$$r^2 \quad + \quad r_1^2 \quad - \quad 2rr_1=a^2$$

$$(r-r_1)^2=a^2 \quad \Rightarrow \quad \vec{r}-\vec{r}_1=\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{r}=\vec{r}_1+\vec{a}}$$

۱-۱-۱۰- یک بازتابگر سه‌کنج از سه سطح بازتابگر عمود بر هم تشکیل شده است نشان دهید پرتو نوری که به این بازتابگر سه کنج فرود می‌آید (و به هر سه سطح بر می‌خورد) در راستای خطی موازی با خط فرود به عقب باز می‌تابد.

[راهنمایی: ابتدا اثر یک بازتابش را روی مولفه‌های برداری که جهت پرتو نور را توصیف می‌کند در نظر بگیرید.]

حل

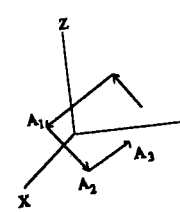
$$\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$$

برخورد بر روی صفحه yz: $\vec{A}_1=-A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$

برخورد بر روی صفحه xz: $\vec{A}_2=-A_x\hat{i}-A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$

برخورد بر روی صفحه xy: $\vec{A}_3=-A_x\hat{i}-A_y\hat{j}-A_z\hat{k}$

$$=-(A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k})=-\vec{A}$$



۱-۱-۱۱- قانون هابل. هابل پی برد که کهکشانی دور با سرعتی متناسب با فاصلهٔ آنها از مکان مادر زمین دور می‌شوند برای کهکشان iام داریم $V_i=H_\circ r_i$ که مکان خودمان را در زمین مبدأ مختصات گرفته‌ایم. نشان دهید [illegible] حکم این نیست که مادر مرکز

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

عالم هستیم. در حالت خاص، کهکشان واقع در r_1 را به عنوان مبدأ جدید در نظر بگیرید و نشان دهید که قانون هابل کماکان برقرار است.

حل $\vec{r}$: فاصله از ما و $\vec{V}$: سرعت دور شدن کهکشان $\vec{V}=H_0\vec{r}$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{V}_1=H_0.\vec{r}_1\\ \vec{V}_i=H_0.\vec{r}_i\end{array}\right\}\Rightarrow V_{i1}=V_i-V_1=H_0.r_i-H_0.r_1=H_0(r_i-r_1)$$

سرعت نسبی کهکشان i نسبت به (۱)

$$\boxed{\vec{V}_{i1}=H_0.\vec{r}_{i1}}$$

بخش ۱ـ۲ـ تعریفهای جامع

مسائل صفحه ۱۹

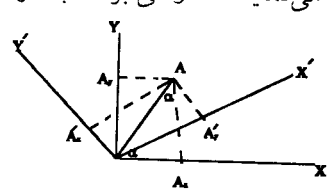
۱ـ۲ـ۱ـ الف - نشان دهید بزرگی یک بردار A، $A=(A_x^2+A_y^2)^{\frac{1}{2}}$ از سمتگیری دستگاه مختصات چرخیده مستقل است یعنی

$$(A_x^2+A_y^2)^{\frac{1}{2}}=(A_x'^2+A_y'^2)^{\frac{1}{2}}$$

از ϕ زاویه چرخش، مستقل است. این استقلال از زاویه با بیان اینکه A تحت چرخشها ناوردا است مشخص می‌شود.

ب - A در نقطه مفروض (x,y) با محور x مثبت زاویه α و با محور x' مثبت زاویه α' می‌سازد. زاویه بین x و x' برابر ϕ است نشان دهید $A=A'$ هرگاه برحسب مولفه‌های پریم‌دار مشخص شود همان جهتی در فضا می‌نمایاند که وقتی برحسب مولفه‌های بدون پریم مشخص می‌شود یعنی $\alpha'=\alpha-\phi$

حل



(الف)

$$A_x'^2+A_y'^2=(A_x\cos\phi+A_y\sin\phi)^2+(-A_x\sin\phi+A_y\cos\phi)^2$$

$$=A_x^2\cos^2\phi+A_y^2\sin^2\phi+2A_xA_y\sin\phi\cos\phi$$

$$+A_x^2\sin^2\phi+A_y^2\cos^2\phi-2A_xA_y\sin\phi\cos\phi=A_x^2+A_y^2$$

(ب)

در دستگاه xy : $\tan\alpha=\dfrac{Ay}{Ax}$ و در دستگاه $x'y'$: $\tan\alpha'=\dfrac{A'y}{A'x}$ (۱)

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$(۱)=\frac{-A_x \operatorname{Sin}\phi + A_y \operatorname{Cos}\phi}{A_x \operatorname{Cos}\phi + A_y \operatorname{Sin}\phi}=\frac{A_x\left(-\operatorname{Sin}\phi+\frac{A_y}{A_x}\operatorname{Cos}\phi\right)}{A_x\left(\operatorname{Cos}\phi+\frac{A_y}{A_x}\operatorname{Sin}\phi\right)}$$

صورت و مخرج را بر $\operatorname{Cos}\phi$ تقسیم می‌کنیم.

$$=\frac{-\operatorname{Sin}\phi+\tan\alpha\operatorname{Cos}\phi}{\operatorname{Cos}\phi+\tan\alpha\operatorname{Sin}\phi}$$

$$=\frac{-\tan\phi+\tan\alpha}{۱+\tan\alpha\tan\phi}=\tan(\alpha-\phi)\quad\Rightarrow$$

$$\tan\alpha'=\tan(\alpha-\phi)\quad\Rightarrow\quad\boxed{\alpha'=\alpha-\phi}$$

۱-۲-۲- شرط تعامه $\sum_i a_{ji}a_{ki}=\delta_{jk}$ را اثبات کنید بعنوان مثال خاصی از این رابطه کسینوسهای هادی بخش ۱-۱ در رابطه زیر صدق می‌کنند $\operatorname{Cos}^۲\alpha+\operatorname{Cos}^۲\beta+\operatorname{Cos}^۲\gamma=۱$ این همان نتیجه‌ای است که از معادله ۱-۷ الف نیز بدست می‌آید.

حل

$$\sum_i\frac{\partial x'_j}{\partial x_i}\frac{\partial x'_k}{\partial x_i}=\sum\frac{\partial x'_j}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial x'_k}=\delta_{jk}$$

بخش ۱-۳-ضرب اسکالر یا نقطه‌ای — مسائل صفحه ۲۵

۱-۳-۱- کسینوس زاویهٔ بین دو بردار $\vec{A}=۳i+۴j+k$ و $\vec{B}=i-j+k$ چقدر است؟

حل

$$\vec{A}.\vec{B}=|A|\,|B|\operatorname{Cos}\alpha\quad\Rightarrow\quad\operatorname{Cos}\alpha=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|A|\,|B|}\quad\Rightarrow$$

$$\operatorname{Cos}\alpha=\frac{A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z}{\sqrt{A_x^۲+A_y^۲+A_z^۲}\sqrt{B_x^۲+B_y^۲+B_z^۲}}=\frac{۳-۴+۱}{\sqrt{۲۶}\sqrt{۳}}=۰\quad\Rightarrow\quad\boxed{\alpha=\frac{\pi}{۲}}$$

۱-۳-۲- دو بردار e_i، e_j با بزرگی واحد یا بر هم عمود و یا با هم موازیند نشان دهید که $e_i.e_j$ معادلهٔ ۱-۱۸ یعنی رابطه تعامد برحسب کسینوسهای تعامد را تفسیر می‌کند.

حل معادله ۱-۱۸

$$\sum_i a_{ij}a_{jk}=\delta_{jk}$$

و

حالت موازی: $\vec{e}_i.\vec{e}_j=|e_i|\,|e_j|\operatorname{Cos}۰=۱\times۱\times۱=۱$

و

حالت عمود: $\vec{e}_i.\vec{e}_j=|e_i|\,|e_j|\operatorname{Cos}۹۰=۰$

$$\delta_{jk}=\begin{cases}۱ & j=k\\ ۰ & j\neq k\end{cases}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikClass

۱-۳-۳- با فرض اینکه (الف) حاصلضرب نقطه‌ای یک بردار در خودش واحد است و (ب)

رابطه در تمام دستگاههای مختصات (چرخیده) صادق است نشان دهید $i'.i'=1$ (که در آن دستگاه پریم‌دار، نسبت به دستگاه بدون پریم 45° حول محور Z چرخیده است) حاکی از آن است که $i.j=0$

حل

$$\begin{cases} x'=x\cos\phi+y\sin\phi \\ y'=-x\sin\phi+y\cos\phi \qquad \phi=45 \\ z'=z \end{cases}$$

$$i'.i'=1 \Rightarrow (i\cos 45+j\sin 45).(i\cos 45+j\sin 45)=\cos^2 45+\sin^2 45$$

$$\Rightarrow \cos^2 45+2i.j\cos 45\sin 45+\sin^2 45=\cos^2 45+\sin^2 45$$

$$\Rightarrow 2i.j\frac{1}{2}=0 \Rightarrow \boxed{i.j=0}$$

۱ـ۳ـ۲ـ بردار $\vec{r}$ که از مبدأ شروع می‌شود به نقطه (x,y,z) در فضا ختم می‌شود و آن نقطه را مشخص می‌کند سطحی را بیابید که انتهای r را جاروب می‌کند. اگر:

(الف) $(\vec{r}-\vec{a}).\vec{a}=0$ (ب) $(\vec{r}-\vec{a}).\vec{r}=0$

بزرگی و جهت بردار $\vec{a}$ ثابت است.

حل

$$\vec{r}=\hat{i}x+\hat{j}y+\hat{k}z \quad , \quad \vec{a}=\hat{i}a_x+\hat{j}a_y+\hat{k}a_z$$

(الف)

$$(\vec{r}-\vec{a}).\vec{a}=0 \Rightarrow \vec{r}.\vec{a}-\vec{a}.\vec{a}=0 \Rightarrow$$

$$(xa_x+ya_y+za_z)-(a_x^2+a_y^2+a_z^2)=0$$

$$\Rightarrow a_xx+a_yy+a_zZ=D$$ معادله یک صفحه بدست می‌آید.

(ب)

$$(\vec{r}-\vec{a}).\vec{r}=0 \Rightarrow \vec{r}.\vec{r}-\vec{a}.\vec{r}=0 \Rightarrow$$

$$x^2+y^2+Z^2-(a_xx+a_yy+a_zZ)=0 \Rightarrow$$

$$\left(x-\frac{a_x}{2}\right)^2-\frac{a_x^2}{4}+\left(y-\frac{a_y}{2}\right)^2-\frac{a_y^2}{4}+\left(Z-\frac{a_z}{2}\right)^2-\frac{a_z^2}{4}=0$$

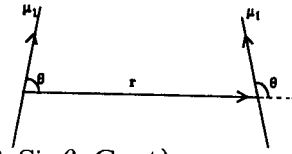
$$\left(x-\frac{a_x}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a_y}{2}\right)^2+\left(Z-\frac{a_z}{2}\right)^2=\frac{a_x^2+a_y^2+a_z^2}{4}=\frac{a^2}{4}$$

معادله یک کره به شعاع $\frac{a}{2}$ و به مرکز $\left(\frac{a_x}{2},\frac{a_y}{2},\frac{a_z}{2}\right)$

۱ـ۳ـ۵ـ انرژی بر هم کنش بین محور دو قطبی با گشتاورهای μ_1 و μ_2 را می‌توان بصورت

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$V=-\frac{\mu_1\mu_2}{r^3}+\frac{3(\mu_1.r)(\mu_2.r)}{r^5}$$



برداری

و بصورت اسکالری:

$$V=\frac{\mu_1\mu_2}{r^3}(2\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\phi)$$

نوشت در اینجا θ_1 و θ_2 زاویه‌هایی‌اند که μ_1 و μ_2 با r می‌سازند و ϕ زاویهٔ سمتی μ_2 نسبت به صفحه μ_1-r است نشان دهید که این دو صورت معادل‌اند.

[راهنمای: از معادلهٔ ۱۲-۱۹۸ (جلد دوم) بهره گیرید.]

حل رابطه ۱۲-۱۹۸ $\cos\gamma=\cos\theta_1\ \cos\theta_2+\sin\theta_1\ \sin\theta_2\ \cos(\phi_1-\phi_2)$

$$V=-\frac{\mu_1\mu_2}{r^3}+\frac{3(\mu_1.r)(\mu_2.r)}{r^5}=\frac{-\mu_1\mu_2\cos\gamma}{r^3}+\frac{3(\mu_1 r\cos\theta_1)(\mu_2 r\cos\theta_2)}{r^5}$$

$$V=\frac{\mu_1\mu_2}{r^3}(-\cos\gamma+3\cos\theta_1\cos\theta_2)$$

با استفاده از رابطه ۱۲-۱۹۸ و $\phi_1-\phi_2=\phi$

$$V=\frac{\mu_1\mu_2}{r^3}(-\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\phi+3\cos\theta_1\cos\theta_2)$$

$$V=\frac{\mu_1\mu_2}{r^3}(2\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\phi)$$

۱-۳-۶- لوله‌ای بصورت قطری از کنار دیوار جنوبی ساختمانی پائین می‌آید و با افق زاویهٔ 45° می‌سازد هنگامیکه به کنج دیوار می‌رسد خم می‌شود و باز بصورت قطری از کنار یک دیوار رو به غرب به پائین می‌آید کماکان زاویهٔ 45° با افق می‌سازد زاویه بین قسمتی از لوله که کنار دیوار جنوبی است با قسمتی از آنکه کنار دیوار غربی واقع شده چقدر است؟

حل

بخش ۱-۴-ضرب برداری — مسائل صفحه ۳۲

۱-۴-۱- دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بصورت زیر مفروضند.

$\vec{A}=2i+4j+6k$ و $\vec{B}=3i-3j-5k$ حاصلضربهای اسکالر و برداری $\vec{A}.\vec{B}$ و $\vec{A}\times\vec{B}$ را محاسبه کنید.

حل $\vec{A}.\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z=6-12-30=-36$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۲ & ۴ & ۶ \\ ۳ & -۳ & -۵ \end{vmatrix} \quad \hat{i}(-۲۰+۱۸)+\hat{j}(۱۸+۱۰)+\hat{k}(-۶-۱۲)$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=-۲\hat{i}+۲۸\hat{j}-۱۸\hat{k}$$

۱ـ۲ـ۲ـ با بسط دادن $\vec{A}$، $\vec{B}$ و $\vec{C}$ در $\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$ برحسب مولفه‌های دکارتی، هم ارزی معادلهٔ ۱-۳۲ و تعریف مولفه‌ای در معادلهٔ ۱-۳۳ را نشان دهید.

حل

$$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B} \Rightarrow \vec{C}.\vec{C}=(\vec{A}\times\vec{B}).(\vec{A}\times\vec{B}) \Rightarrow$$

$$C^۲=(A_yB_z-A_zB_y)^۲+(A_zB_x-A_xB_z)^۲+(A_xB_y-A_yB_x)^۲$$

$$C^۲=(A_x^۲+A_y^۲+A_z^۲)(B_x^۲+B_y^۲+B_z^۲)-(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z)^۲$$

$$C^۲=A^۲B^۲-(\vec{A}.\vec{B})^۲=A^۲B^۲-(A^۲B^۲\cos^۲\theta) \Rightarrow \boxed{C=|A|B|\sin\theta}$$

۱ـ۲ـ۳ـ با استفاده از بردار $\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$ نشان دهید که عبارت $\vec{C}\times\vec{C}$ به رابطه پاد تعویض پذیری زیر منجر می‌شود.

$$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$$

حل

$$\vec{C}=\vec{A}+\vec{B} \Rightarrow \vec{C}\times\vec{C}=(\vec{A}+\vec{B})\times(\vec{A}+\vec{B})$$

$$\Rightarrow |C|C|\sin ۰=(\vec{A}\times\vec{A}+\vec{A}\times\vec{B}+\vec{B}\times\vec{A}+\vec{B}\times\vec{B})$$

$$\Rightarrow ۰=(|A|A|)\sin ۰+\vec{A}\times\vec{B}+\vec{B}\times\vec{A}+|B|B|\sin ۰)$$

$$\Rightarrow \vec{A}\times\vec{B}+\vec{B}\times\vec{A}=۰ \Rightarrow \boxed{\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}}$$

۱ـ۲ـ۴ـ نشان دهید (الف) $(\vec{A}-\vec{B}).(\vec{A}+\vec{B})=A^۲-B^۲$

(ب) $(\vec{A}-\vec{B})\times(\vec{A}+\vec{B})=۲\vec{A}\times\vec{B}$

درستی قوانین توزیع پذیری مورد نیاز یعنی $\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}.\vec{B}+\vec{A}.\vec{C}$ و $\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$ را می‌توانید (اگر بخواهید) از طریق بسط دادن برحسب مولفه‌های دکارتی به آسانی تحقیق کنید.

حل الف

$$(\vec{A}-\vec{B}).(\vec{A}+\vec{B})=(\vec{A}-B).\vec{A}+(\vec{A}-\vec{B}).\vec{B}$$

$$=(\vec{A}.\vec{A}-\vec{B}.\vec{A})+(\vec{A}.\vec{B}-\vec{B}.\vec{B})=A^۲-\vec{A}.\vec{B}+\vec{A}.\vec{B}-B^۲=A^۲-B^۲$$

(ب)

$$(\vec{A}-\vec{B})\times(\vec{A}+\vec{B})=(\vec{A}-\vec{B})\times\vec{A}+(\vec{A}-\vec{B})\times\vec{B}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$=\vec{A}\times\vec{A}-\vec{B}\times\vec{A}+\vec{A}\times\vec{B}-\vec{B}\times\vec{B}$$
$$=0-\vec{B}\times\vec{A}+\vec{A}\times\vec{B}-0=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{B}=2\vec{A}\times\vec{B}$$

۱-۴-۵- سه بردار زیر مفروض است.

$$\vec{P}=3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k} \quad \text{و} \quad \vec{Q}=-6\hat{i}-4\hat{j}+2\hat{k} \quad \text{و} \quad \vec{R}=\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k}$$

از بین این سه بردار، دو بردار بر هم عمود و دو بردار موازی یا پاد موازی را بیابید.

حل

$$\left.\begin{array}{l}\vec{P}.\vec{R}=3-4+1=0 \Rightarrow \vec{P}\perp\vec{R}\\ \vec{Q}.\vec{R}=-6+8-2=0 \Rightarrow \vec{Q}\perp\vec{R}\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{P}\parallel\vec{Q}$$

۱-۴-۶- دو بردار $\vec{P}=\hat{i}P_x+\hat{j}P_y$ و $\vec{Q}=\hat{i}Q_x+\hat{j}Q_y$ دو بردار غیرموازی (و غیر پاد موازی) در صفحه xyاند نشان دهید $\vec{P}\times\vec{Q}$ در جهت z است.

حل

$$\vec{P}\times\vec{Q}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ P_x & P_y & 0\\ Q_x & Q_y & 0\end{vmatrix}=\hat{i}(0-0)+\hat{j}(0-0)+\hat{k}(P_xQ_y-P_yQ_x)$$

فقط در جهت z مولفه داریم

$$\vec{P}\times\vec{Q}=\hat{k}(P_xQ_y-P_yQ_x)$$

۱-۴-۷- ثابت کنید $(\vec{A}\times\vec{B}).(\vec{A}\times\vec{B})=(AB)^2-(\vec{A}.\vec{B})^2$

حل در حل مسئله ۱-۴-۲- اثبات شده است.

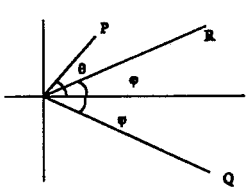
۱-۴-۸- با بهره‌گیری از بردارهای

$$\vec{P}=i\,\text{Cos}\theta+j\,\text{Sin}\theta \quad \text{و} \quad \vec{Q}=i\,\text{Cos}\phi-j\,\text{Sin}\phi \quad \text{و} \quad \vec{R}=i\,\text{Cos}\phi+j\,\text{Sin}\phi$$

اتحادهای مثلثاتی آشنای زیر را اثبات کنید.

$$\text{Sin}(\theta+\phi)=\text{Sin}\theta\,\text{Cos}\phi+\text{Cos}\theta\,\text{Sin}\phi\ ,\ \text{Cos}(\theta+\phi)=\text{Cos}\theta\,\text{Cos}\phi-\text{Sin}\theta\,\text{Sin}\phi$$

حل



$$|\vec{P}|=|\vec{Q}|=|\vec{R}|=1$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{P}.\vec{Q}=|P|\,|Q|\,\text{Cos}(\theta+\phi)=\text{Cos}(\theta+\phi)\\ \vec{P}.\vec{Q}=\text{Cos}\theta\,\text{Cos}\phi-\text{Sin}\theta\,\text{Sin}\phi\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\text{Cos}(\theta+\phi)=\text{Cos}\theta\,\text{Cos}\phi-\text{Sin}\theta\,\text{Sin}\phi$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\left.\begin{array}{l}\left|\vec{P}\times\vec{Q}\right| = |P|\ |Q|\ \mathrm{Sin}(\theta+\phi) = \mathrm{Sin}(\theta+\phi)\\ \left|\vec{P}\times\vec{Q}\right| = +\mathrm{Cos}\theta\,\mathrm{Sin}\phi + \mathrm{Sin}\theta\,\mathrm{Cos}\phi\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\mathrm{Sin}(\theta+\phi)=\mathrm{Sin}\theta\ \mathrm{Cos}\phi + \mathrm{Cos}\theta\ \mathrm{Sin}\phi$$

۱ـ۲ـ۹ـ (الف) بردار $\vec{A}$ را چنان بیابید که بر دو بردار زیر عمود باشند.

$$\vec{U}=۲i+j-k \qquad , \qquad \vec{V}=i-j+k$$

(ب) $\vec{A}$ چگونه برداری باشد تا افزون بر برخورداری از شرایط بالا، بزرگی واحد نیز داشته باشد.

حل اگر برداری بر دو بردار عمود باشد بصورت ضرب خارجی دو بردار بدست می‌آید. (الف)

$$\vec{A}=\vec{U}\times\vec{V}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ ۲ & ۱ & -۱\\ ۱ & -۱ & ۱\end{vmatrix} = -۳j-۳k$$

(ب)

$$\hat{A}=\frac{\vec{A}}{|A|}=-\frac{۱}{\sqrt{۲}}j-\frac{۱}{\sqrt{۲}}k$$

۱ـ۲ـ۱۰ـ اگر چار بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$ و $\vec{d}$ جملگی در یک صفحه واقع باشند نشان دهید.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=۰$$

[راهنمایی: جهت بردارهای حاصلضرب برداری را در نظر بگیرید.]

حل بردار R برداری عمود بر صفحه a و b است. $\vec{R}=\vec{a}\times\vec{b}$

بردار Q برداری عمود بر صفحه c و d است. $\vec{Q}=\vec{c}\times\vec{d}$

از طرفی چون چهار بردار فوق در یک صفحه‌اند دو بردار عمود بر یک صفحه یعنی $\vec{R}$ و $\vec{Q}$ موازیند و از طرفی ضرب خارجی دو بردار موازی صفراست یعنی

$$\vec{R}\times\vec{Q}=۰ \quad\Rightarrow\quad (\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=۰$$

۱ـ۲ـ۱۱ـ مختصات سه رأس یک مثلث عبارت‌اند از: (۲,۱,۵)، (۵,۲,۸) و (۴,۸,۲) مساحت این مثلث را با استفاده از روشهای برداری محاسبه کنید.

حل $A(۲,۱,۵)$ و $B(۵,۲,۸)$ و $C(۴,۸,۲)$

$$\overrightarrow{AB}=۳i+j+۳k \qquad , \qquad \overrightarrow{BC}=-i+۶j-۶k$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$S=\frac{۱}{۲}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}=\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۳ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۶ & -۶ \end{vmatrix}=\frac{۱}{۲}(-۲۴i+۱۵j+۱۹k)$$

$$|S|=\sqrt{\frac{۱}{۴}(۱۱۶۲)}\simeq ۱۷$$

۱ـ۴ـ۱۲ـ رأسهای متوازی الاضلاع ABCD به ترتیب عبارتند از (۱,۰,۰)، (۲,-۱,۰)، (۰,-۱,۱) و (-۱,۰,۱) بردار مساحت مثلث ABD و مثلث BCD را محاسبه کنید. آیا این دو بردار با هم برابرند.

حل

$\overrightarrow{AB}\ (۱,-۱,۰)$

$\overrightarrow{BC}\ (-۲,۰,۱)$

$\overrightarrow{CD}\ (-۱,۱,۰)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AD}\ (-۲,۰,+۱)$

$$\vec{S}_{ABD}=\frac{۱}{۲}(AB\times AD)=\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۰ & ۱ \end{vmatrix}=\frac{۱}{۲}(-i-j-۲k)$$

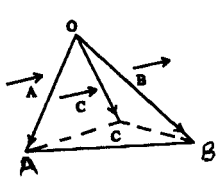
$$S_{BCD}=\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{CD})=\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} i & j & k \\ -۲ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۰ \end{vmatrix}=\frac{۱}{۲}(-i-j-۲k)$$

$$\vec{S}_{ABD}=\vec{S}_{BCD}$$

۱ـ۴ـ۱۳ـ مبدأ و سه بردار A، B و C (که نقطه آغاز جملگی آنها مبدأ مختصات است) یک چهار وجهی را تعریف می‌کنند با مثبت گرفتن جهت برونسو مساحت برداری کل چهار وجه این چهار وجهی را محاسبه کنید.

حل

$$S_{OAC}=\frac{۱}{۲}(OA\times OC)=\frac{۱}{۲}(\vec{A}\times\vec{C})$$



$$S_{OBC}=\frac{۱}{۲}(OC\times OB)=\frac{۱}{۲}(C\times B)$$

$$S_{OAB}=\frac{۱}{۲}(OB\times OA)=\frac{۱}{۲}(B\times A)$$

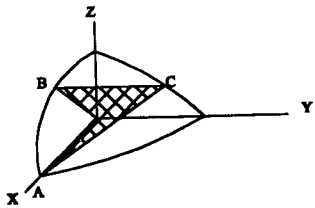
$$S_{BCA}=\frac{۱}{۲}\left[(B\times C)+(A\times B)+(C\times A)\right]$$

۱ـ۴ـ۱۴ـ اضلاع و زوایای مثلث کروی ABC را که به کمک ۳ بردار زیر تعریف می‌شود بیابید

$\vec{C}=(۰,\frac{۱}{\sqrt{۲}},\frac{۱}{\sqrt{۲}})$ و $\vec{B}=(\frac{۱}{\sqrt{۲}},۰,\frac{۱}{\sqrt{۲}})$ و $\vec{A}=(۱,۰,۰)$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikClass

هر یک از این بردارها از مبدأ شروع می‌شود.



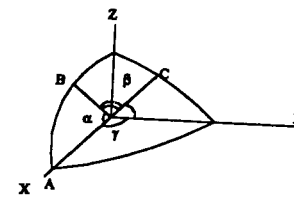
شکل ۱-۱۳ مثلث کروی

حل $|A| = ۱, |B| = ۱, |C| = ۱$

$$\vec{A}.\vec{B} = |A|\,|B|\,\cos\alpha \Rightarrow$$

$$\cos\alpha = \frac{\frac{۱}{\sqrt{۲}}}{۱} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \Rightarrow \alpha = ۴۵^\circ$$

$$\alpha = ۴۵^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = ۴۵^\circ$$



$$\vec{B}.\vec{C} = |B|\,|C|\,\cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{\frac{۱}{۲}}{۱} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \beta = ۶۰^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = ۶۰^\circ$$

$$\vec{A}.\vec{C} = |A|\,|C|\,\cos\gamma \Rightarrow \cos\gamma = \frac{۰}{۱} = ۰$$

$$\Rightarrow \gamma = ۹۰^\circ \Rightarrow \widehat{AC} = ۹۰^\circ$$

$$\vec{N}_۱ = \vec{A}\times\vec{B} \quad , \quad \vec{N}_۲ = \vec{A}\times\vec{C} \quad , \quad \vec{N}_۳ = \vec{B}\times\vec{C}$$

۱-۲-۱۵- قانون سینوسها را استخراج کنید.

$$\frac{\sin\alpha}{|A|} = \frac{\sin\beta}{|B|} = \frac{\sin\gamma}{|C|}$$

حل

راه اول

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}(\vec{A}\times\vec{B}) = \frac{۱}{۲}(\vec{B}\times\vec{C}) = \frac{۱}{۲}(\vec{C}\times\vec{A})$$

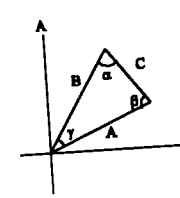
$$\Rightarrow \vec{A}\times\vec{B} = \vec{B}\times\vec{C} = \vec{C}\times\vec{A} \Rightarrow AB\sin\gamma = BC\sin\alpha = CA\sin\beta$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\alpha}{|A|} = \frac{\sin\beta}{|B|} = \frac{\sin\gamma}{|C|}$$

راه دوم

$$\vec{A} = \vec{B} + \vec{C} \qquad (۱)$$

رابطه (۱) را یکبار در $\vec{B}$ و یکبار در $\vec{C}$ از راست ضرب خارجی می‌کنیم.



$$\vec{A}\times\vec{B} = \vec{B}\times\vec{B} + \vec{C}\times\vec{B} \Rightarrow AB\sin\gamma = CB\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\alpha}{|A|} = \frac{\sin\gamma}{|C|} \qquad (۳)$$

$$\vec{A}\times\vec{C} = \vec{B}\times\vec{C} + \vec{C}\times\vec{C} \Rightarrow AC\sin\beta = BC\sin\alpha + ۰$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\beta}{|B|} = \frac{\sin\alpha}{|A|} \qquad (۲)$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$(۲)=(۳) \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{|A|}=\frac{\sin\beta}{|B|}=\frac{\sin\gamma}{|C|}$$

۱ـ۴ـ۱۶ـ القای مغناطیسی B به کمک معادله نیروی لورنتس تعریف می‌شود $\vec{F}=q(\vec{V}\times\vec{B})$ با انجام سه آزمایش پی می‌بریم که:

اگر $V=i$ آنگاه $\frac{F}{q}=۲k-۴j$

اگر $V=j$ آنگاه $\frac{F}{q}=۴i-k$

اگر $V=k$ آنگاه $\frac{F}{q}=j-۲i$

با استفاده از نتایج این سه آزمایش مجزا، القای مغناطیسی B را محاسبه کنید.

حل

$$۲k-۴j=i\times(iB_x+jB_y+kB_z)=\hat{k}B_y-\hat{j}B_z$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B_y=+۲ \\ B_z=+۴ \end{cases}$$

$$۴i-k=j\times(iB_x+jB_y+kB_z)=-kB_x+iB_z$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B_z=۴ \\ B_x=۱ \end{cases}$$

$$j-۲i=k\times(iB_x+jB_y+kB_z)=jB_x-iB_z$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B_z=۲ \\ B_x=۱ \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{B}=i+۲j+۴k}$$

بخش ۱ـ۵ـ ضرب سه‌گانه اسکالر ـ ضرب سه‌گانه برداری مسائل صفحه ۴۱

۱ـ۵ـ۱ـ یکی از راسهای یک متوازی السطوح شیشه‌ای در مبدأ واقع است سه رأس مجاور آن در $A(۳,۰,۰)$، $B(۰,۰,۲)$ و $C(۰,۳,۱)$ هستند. تمام طولها برحسب سانتی‌متر است با بکار بردن ضرب سه گانه اسکالر محاسبه کنید که چند سانتی متر مکعب شیشه در این متوازی‌السطوح بکار رفته است.

حل

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۳ & ۱ \end{vmatrix}=۳(-۶)=-۱۸$$

$V=۱۸Cm^۳$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

۱ـ۵ـ۲ـ با بسط مستقیم برحسب مؤلفه‌های دکارتی، درستی بسط زیر را برای ضرب سه گانه برداری تحقیق کنید.

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}.\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}.\vec{B})$$

حل

$$\vec{B}\times\vec{C}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}=i(B_yC_z-B_zC_y)+j(B_zC_x-B_xC_z)+k(B_xC_y-B_yC_x)$$

$$A\times(B\times C)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_yC_z-B_zC_y & B_zC_x-B_xC_z & B_xC_y-B_yC_x \end{vmatrix}$$

$$=i\left[A_y(B_xC_y-B_yC_x)-A_z(B_zC_x-B_xC_z)\right]+j\left[A_z(B_yC_z-B_zC_y)-A_x(B_xC_y-B_yC_x)\right]$$

$$+k\left[A_x(B_zC_x-B_xC_z)-A_y(B_yC_z-B_zC_y)\right]$$

در کروشه اول جمله $B_xA_xC_x$ را در کروشه دوم $B_yA_yC_y$ در کروشه سوم $B_zA_zC_z$ اضافه و کم می‌کنیم پس داریم

$$i\left[B_x(A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z)-C_x(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z\right]+$$

$$j\left[B_y(A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z)-C_y(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z)\right]+$$

$$k\left[B_z(A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z)-C_z(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z)\right]$$

در پرانتزهای داخل کروشه‌ها پرانتز اول و دوم به ترتیب تعریف $\vec{A}.\vec{C}$ و $\vec{A}.\vec{B}$ هستند. و بعد از جداسازی داریم:

$$=(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k})(\vec{A}.\vec{B})\qquad(C_x\hat{i}+C_y\hat{j}+C_z\hat{k})(\vec{A}.\vec{C})$$

$$=\vec{B}(\vec{A}.\vec{B})-\vec{C}(\vec{A}.\vec{B})$$

که این فرمول به دستور بک ـ کب معروف است.

۱ـ۵ـ۳ـ نشان دهید که گام نخست در معادل ۱ـ۳۸ یعنی

$(\vec{A}\times\vec{B}).(\vec{A}\times\vec{B})=A^2B^2-(\vec{A}.\vec{B})^2$ با قاعده بک ـ کب ضرب سه گانه برداری سازگار است.

حل

$$(\vec{A}\times\vec{B}).(\vec{A}\times\vec{B})=(\vec{A}\times\vec{B}).\vec{H}=\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{H})$$

Physicscalass@gmail.com
Telegram.me/FizikCalass

$$= \vec{A}.[\vec{B}\times(\vec{A}\times\vec{B})] = \vec{A}.[\vec{A}(B^2) - \vec{B}(\vec{A}.\vec{B})] = A^2B^2 - (\vec{A}.\vec{B})(\vec{A}.\vec{B})$$

$$= A^2B^2 - (\vec{A}.\vec{B})^2$$

۱-۵-۲- با سه بردار A، B و C به قرار زیر: $\vec{A}=i-j$ و $\vec{B}=j+k$ و $\vec{C}=i-k$ (الف) ضرب سه گانه اسکالر $\vec{A}.\vec{B}\times\vec{C}$ را محاسبه کنید با توجه به $\vec{A}=\vec{B}+\vec{C}$ نتیجه‌ای را برای ضرب سه گانه اسکالر بدست آورده‌اید از نظر هندسی تفسیر کنید. (ب) $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ را محاسبه کنید.

حل (الف)

$$\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1(-1)+1(1)+0 = 0$$

با توجه به $\vec{A}=\vec{B}+\vec{C}$ پس $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ در یک صفحه‌اند و نتیجه $\vec{A}.\vec{B}\times\vec{C}$ حجم متوازی‌السطوحی حاصل از این ۳ بردار است. (ب)

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}.\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}.\vec{B})$$

$$= (j+k)(1) - (i-k)(1) = j+k-i+k = -i+j+2k$$

۱-۵-۵- تکانهٔ زاویه‌ای L ذره با رابطه $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{P}=m\vec{r}\times\vec{V}$ بیان می‌شود که در آن $\vec{P}$ تکانه خطی است با در نظر گرفتن رابطهٔ بین سرعت خطی و سرعت زاویه‌ای $\vec{V}=\vec{\omega}\times\vec{r}$ نشان دهید که: $\vec{L} = mr^2[\omega - \vec{r}_0(\vec{r}_0.\vec{\omega})]$

در اینجا r_0 برداریکه در جهت r است این رابطه به ازای $\vec{r}.\vec{\omega}=0$ بصورت $L=I\omega$ ساده میشود که در آن I، گشتاور لختی با کمیت mr^2 بیان می‌شود این نتیجه در بخش ۴-۶ تعمیم داده می‌شود و بنابر تعریف عبارت است از تانسور لختی.

حل (ا)

$$\vec{L}=m\vec{r}\times\vec{V}=m\,\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})=m\left[\omega r^2-\vec{r}(\vec{r}.\vec{\omega})\right]$$

$$\vec{r}=|r|\,\hat{r}=|r|\,\vec{r}_0$$

$$L=m\left[\omega r^2-r^2\vec{r}_0(\vec{r}_0.\vec{\omega})\right]=mr^2\left[\omega-\vec{r}_0(\vec{r}_0.\vec{\omega})\right]$$

$$\text{IF}\quad \vec{r}.\vec{\omega}=0 \quad \text{THEN}\quad (1)\ \Rightarrow\ L=mr^2\omega=I\omega$$

۱-۵-۶- انرژی جنبشی هر تک ذره با رابطه $T=\frac{1}{2}mv^2$ بیان می‌شود این رابطه برای حرکت چرخشی به صورت $\frac{1}{2}m(\omega\times r)^2$ در می‌آید نشان دهید که

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/Fizik@class

$$T=\frac{1}{2}m[r^2\omega^2-(\vec{r}.\vec{\omega})^2]$$

این رابطه به ازای $\vec{r}.\vec{\omega}=0$ بصورت $T=\frac{1}{2}I\omega^2$ ساده می‌شود که در آن گشتاور لختی با کمیت mr^2 بیان می‌شود.

حل

$$T=\frac{1}{2}m(\vec{\omega}\times\vec{r})^2=\frac{1}{2}m(\vec{\omega}\times\vec{r}).(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

اگر از رابطه مسئله ۱-۵-۳ (معادلهٔ ۱-۳۸) استفاده شود داریم:

$$T=\frac{1}{2}m[\omega^2r^2-(\vec{\omega}.\vec{r})^2]=\frac{1}{2}m[r^2\omega^2-(r.\vec{\omega})^2]$$

$$\text{IF}\quad \vec{r}.\vec{\omega}=0\quad \text{THEN}\quad T=\frac{1}{2}mr^2\omega^2=\frac{1}{2}I\omega^2$$

۱-۵-۷- نشان دهید که $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=0$

حل هر یک از ۳ جمله را با توجه به قاعده بک-کب بسط می‌دهیم.

$$\left[\vec{b}(\vec{a}.\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}.\vec{b})\right]+\left[\vec{c}(\vec{b}.\vec{a})-\vec{a}(\vec{b}.\vec{c})\right]+\left[\vec{a}(\vec{c}.\vec{b})-\vec{b}(\vec{c}.\vec{a})\right]$$

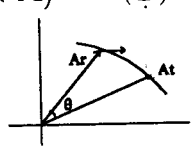
$$\vec{b}(\vec{a}.\vec{c})-\vec{b}(\vec{c}.\vec{a})+\vec{c}(\vec{b}.\vec{a})-\vec{c}(\vec{a}.\vec{b})+\vec{a}(\vec{c}.\vec{b})-\vec{a}(\vec{b}.\vec{c})=0$$

۱-۵-۸- بردار $\vec{A}$ به دو بردار، یکی شعاعی A_r و دیگری مماسی A_t تجزیه شده است اگر برداریکه در جهت شعاعی را با r_0 نمایش دهیم نشان دهید که

(الف) $A_r=\vec{r}_0(\vec{A}.\vec{r}_0)$ (ب) $A_t=-\vec{r}_0\times(\vec{r}_0\times\vec{A})$

حل

(الف)



$A_r=\vec{r}_0(\vec{A}.\vec{r}_0)$ (۱) $\sin\theta=\frac{|A_t|}{|A|}$

$A_r=r_0|A|\,r_0|\cos\theta,\ |r_0|=1$

$A_r=r_0|A|\cos\theta$, (۲) (۲) $\cos\theta=\frac{|A_r|}{|A|}$

$A_r=\hat{r}_0|A_r|$

(ب) $A_t=-\vec{r}_0\times(\vec{r}_0\times\vec{A})=-r_0\times(|A|\,r_0|\sin\theta)\Rightarrow$

$A_t=|r_0|A|r_0|\sin\theta=|A|\sin\theta$, (۱) $\Rightarrow$ $A_t=|A_t|$

۱-۵-۹- ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای آنکه سه بردار (غیرصفر) A، B و C هم صفحه باشند آن است که حاصلضرب سه گانهٔ اسکالر $\vec{A}.\vec{B}\times\vec{C}=0$

حل چون $\vec{A}.\vec{B}\times\vec{C}=0$ پس $\vec{A}$ بر $\vec{B}\times\vec{C}$ عمود است از طرفی $\vec{B}\times\vec{C}$ برداری است عمود بر صفحه B و C یعنی هم بر B و هم بر C عمود است با تکمیل این ۳ رابط داریم که A و B و C

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

در یک صفحه قرار دارند.

۱-۵-۱۰- سه بردار A، B و C بصورت زیر مفروض‌اند.

$$\vec{A}=3i-2j+2k \quad , \quad \vec{B}=6i+4j-2k \quad , \quad \vec{C}=-3i-2j-4k$$

کمیتهای $\vec{A}.\vec{B}\times\vec{C}$ و $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ ، $\vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B})$ و $\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A})$ را محاسبه کنید.

حل

$$\vec{A}.\vec{B}\times\vec{C}=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 6 & 4 & -2 \\ -3 & -2 & -4 \end{vmatrix}=3(-16-4)-2(6+24)+2(-18+12)$$

$$=-60-60-12=-132$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}.\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}.\vec{B})=(6i+4j-2k)(-9+4-8)-(-3i-2j-4k)(18-8-4)$$

$$=-78i-52j+26k+18i+12j+24k=-60i-40j+50k$$

$$\vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{A}(\vec{C}.\vec{B})-\vec{B}(\vec{C}.\vec{A})=(3i-2j+2k)(-18-8+8)-(6i+4j-2k)(-9+4-8)$$

$$=-54i+36j-36k+78i+52j-26k=24i+88j-62k$$

$$\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A})=\vec{C}(\vec{B}.\vec{A})-\vec{A}(\vec{B}.\vec{C})=(-3i-2j-4k)(18-8-4)-(3i-2j+2k)(-18-8+8)$$

$$=-18i-12j-24k+54i-36j+36k=36i-48j+12k$$

۱-۵-۱۱- بردار D ترکیب خطی سه بردار غیرصفر هم صفحه (و نامتعامد) است:

$$\vec{D}=a\vec{A}+b\vec{B}+c\vec{C}$$

نشان دهید که ضریبها برابر خارج قسمت ضربهای سه گانه اسکالر بصورت زیرند:

$$a=\frac{\vec{D}.\vec{B}\times\vec{C}}{\vec{A}.\vec{B}\times\vec{C}}$$

حل

$$\vec{D}.(\vec{B}\times\vec{C})=(a\vec{A}+b\vec{B}+c\vec{C}).(\vec{B}\times\vec{C})$$

$$\vec{D}.(\vec{B}\times\vec{C})=a\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})+b\vec{B}.(\vec{B}\times\vec{C})+c\vec{C}.(\vec{B}\times\vec{C})$$

$$\vec{D}.(\vec{B}\times\vec{C})=a\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C}) \Rightarrow a=\frac{\vec{D}.\vec{B}\times\vec{C}}{\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})}$$

و به همین نحو برای b و c داریم

$$b=\frac{\vec{D}.(\vec{A}\times\vec{C})}{\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$c=\frac{\vec{D}.(\vec{A}\times\vec{B})}{\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})}$$

۱ـ۵ـ۱۲ـ نشان دهید که: $(\vec{A}\times\vec{B}).(\vec{C}\times\vec{D})=(\vec{A}.\vec{C})(\vec{B}.\vec{D})-(\vec{A}.\vec{D})(\vec{B}.\vec{C})$

حل

$$(\vec{A}\times\vec{B}).(\vec{C}\times\vec{D})=(\vec{A}\times\vec{C}).\vec{H}=\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{H})=\vec{A}.\left[\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{D})\right]$$

$$=\vec{A}.\left[\vec{C}(\vec{B}.\vec{D})-\vec{D}(\vec{B}.\vec{C})\right]=(\vec{A}.\vec{C})(\vec{B}.\vec{D})-(\vec{A}.\vec{D})(\vec{B}.\vec{C})$$

۱ـ۵ـ۱۳ـ نشان دهید که: $(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D})=(\vec{A}.\vec{B}\times\vec{D})\vec{C}-(\vec{A}.\vec{B}\times\vec{C})\vec{D}$

حل

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D})=\vec{E}\times(\vec{C}\times\vec{D})=\vec{C}(\vec{E}.\vec{D})-\vec{D}(\vec{E}.\vec{C})$$

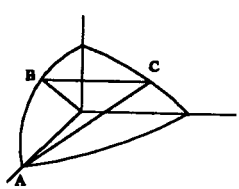
$$=\vec{C}[(\vec{A}\times\vec{B}).\vec{D}]-\vec{D}[(\vec{A}\times\vec{B}).\vec{C}]=\vec{C}[\vec{A}.\vec{B}\times\vec{D}]-\vec{D}[\vec{A}.\vec{B}\times\vec{C}]$$

۱ـ۵ـ۱۴ـ در مثلثی کروی مانند مثلث مسئله ۱-۴-۱۴ نشان دهید:

$$\frac{\sin A}{\sin\overline{BC}}=\frac{\sin B}{\sin\overline{CA}}=\frac{\sin C}{\sin\overline{AB}}$$

که در آن $\sin A$ سینوس زاویه رأس A و $\overline{BC}$ ضلع روبه‌رو به آن (برحسب رادیان) است.

[راهنمایی: از مسئله ۱-۵-۱۳ بهره گیرید.]



حل

$$A(1,0,0)\quad,\quad B\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\quad,\quad C\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=|A|\,|B|\,\sin\widehat{AB}=1\times1\sin\widehat{AB}=\sin\widehat{AB}\quad(6)$$

$$\left|\vec{B}\times\vec{C}\right|=\sin\widehat{BC}\quad(5)\quad,\quad\left|\vec{C}\times\vec{A}\right|=\sin\widehat{CA}\quad(4)$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{A}(\vec{B}\times\vec{C})\vec{B}-\vec{A}(\vec{B}\times\vec{B})\vec{C}=\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})\vec{B}=-\frac{1}{2}\vec{B}$$

$$\left|(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{B}\times\vec{C})\right|=-\frac{1}{2}\left|\vec{B}\right|\Rightarrow\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|\left|\vec{B}\times\vec{C}\right|\sin B=-\frac{1}{2}\quad(1)$$

$$\left|(\vec{B}\times\vec{C})\times(\vec{C}\times\vec{A})\right|=-\frac{1}{2}\left|\vec{C}\right|\Rightarrow\left|\vec{B}\times\vec{C}\right|\left|\vec{C}\times\vec{A}\right|\sin C=-\frac{1}{2}\quad(2)$$

$$\left|(\vec{C}\times\vec{A})\times(\vec{A}\times\vec{B})\right|=-\frac{1}{2}\left|\vec{A}\right|\Rightarrow\left|\vec{C}\times\vec{A}\right|\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|\sin A=-\frac{1}{2}\quad(3)$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\left.\begin{array}{l}(۱),(۲)\Rightarrow \dfrac{\sin C}{|A\times B|}=\dfrac{\sin B}{|C\times A|},\ (۶),(۴)\Rightarrow \dfrac{\sin C}{\sin\overline{AB}}=\dfrac{\sin B}{\sin\overline{CA}}\\ (۱),(۳)\Rightarrow \dfrac{\sin B}{|C\times A|}=\dfrac{\sin A}{|B\times C|},\ (۴),(۵)\Rightarrow \dfrac{\sin B}{\sin\overline{CA}}=\dfrac{\sin A}{\sin\overline{BC}}\end{array}\right\}$$

$$\frac{\sin A}{\sin\overline{BC}}=\frac{\sin B}{\sin\overline{CA}}=\frac{\sin C}{\sin\overline{AB}}$$

۱-۵-۱۵- با فرض اینکه

$$\vec{a}'=\frac{\vec{b}\times\vec{c}}{\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c}}\ ,\quad \vec{b}'=\frac{\vec{c}\times\vec{a}}{\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c}}\ ,\quad \vec{c}'=\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c}}\ ,\quad \vec{a}.\vec{b}\times\vec{c}\neq ۰$$

نشان دهید (الف) $x'.y=\delta_{xy}\ (x,y=a,b,c)$

(ب) $\vec{a}'.\vec{b}'\times\vec{c}'=(\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c})^{-۱}$

(ج) $\vec{a}=\dfrac{\vec{b}'\times\vec{c}'}{\vec{a}'.\vec{b}'\times\vec{c}'}$

حل

(الف)

$$x=a\ ,\ y=b\qquad x'.y=\vec{a}'.\vec{b}=\frac{\vec{b}\times\vec{c}}{\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c}}.\vec{b}=۰$$

$$x=a\ ,\ y=a\qquad x'.y=a'.a=۱$$

$$x'.y=\delta_{xy}=\begin{cases}۱ & x=y\\ ۰ & x\neq y\end{cases}$$

(ب)

$$\vec{a}'.\vec{b}'\times\vec{c}'=\frac{\vec{b}\times\vec{c}}{\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c}}.\frac{\vec{c}\times\vec{a}}{\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c}}\times\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c}}$$

$$=(\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c})^{-۳}[(\vec{b}\times\vec{c}).(\vec{c}\times\vec{a})\times(\vec{a}\times\vec{b})]$$

$$=(\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c})^{-۳}(\vec{b}\times\vec{c})[(\vec{c}.\vec{a}\times\vec{b})\vec{a}-(\vec{c}.\vec{a}\times\vec{a})\vec{b}]$$

$$=(\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c})^{-۲}[(\vec{b}\times\vec{c}).\vec{a}]=(\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c})^{-۱}[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]^{-۱}$$

(ج)

$$\vec{a}.\vec{a}'=\frac{\vec{b}'\times\vec{c}'.\vec{a}'}{\vec{a}'.\vec{b}'\times\vec{c}'}=۱$$

$$\vec{a}=\frac{\dfrac{\vec{c}\times\vec{a}}{\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c}}\times\dfrac{\vec{a}\times\vec{b}}{\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c}}}{(\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c})^{-۱}}=\frac{(\vec{c}\times\vec{a})(\vec{a}\times\vec{b})}{(\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c})}\frac{[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]\ \vec{a}}{[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]}=\vec{a}$$

Physicsclass.blogsky.com
Telegram.me/FizikClass

۱ـ۵ـ۱۶ـ اگر داشته باشیم: $x'y=\delta_{xy}$,$(x,y=a,b,c)$ ثابت کنید که

$$a'=\frac{b\times c}{a.b\times c}$$

(این مسئله عکس ۱-۵-۱۵ است)

حل

$$\left.\begin{array}{l} x=a\ ,\ y=b \Rightarrow x'.y=a'.b=0 \\ x=a\ ,\ y=c \Rightarrow x'.y=a'.c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

a' بر b و c عمود است پس با $b\times c$ نیز که بر b و c عمود است موازی می‌باشد.

$$\vec{a}'=\alpha\vec{b}\times\vec{c}$$

$$x=a\ ,\ y=a \Rightarrow x'.y=a'.a=1 \Rightarrow \alpha a.b\times c=1$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha=\frac{1}{\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c}}} \quad \text{و} \quad \boxed{\vec{a}'=\frac{\vec{b}\times\vec{c}}{\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c}}}$$

اگر برای b' و c' نیز عمل شود داریم:

$$\vec{b}'=\frac{\vec{c}\times\vec{a}}{\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c}}\ ,\ \vec{c}'=\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c}}$$

۱ـ۵ـ۱۷ـ نشان دهید که می‌توان هر بردار V را توسط رابطهٔ زیر برحسب بردارهای وارون a' و b' و c' نمایش داد.

$$\vec{V}=(\vec{V}.\vec{a})\vec{a}'+(\vec{V}.\vec{b})\vec{b}'+(\vec{V}.\vec{c})\vec{c}'$$

حل

$$V=n_a.\vec{a}+n_b.\vec{b}+n_c.\vec{c}$$

$$(V.a).a'=(n_a.a.a'+n_b.b.a'+n_c.c.a')=n_a.\vec{a}$$

$$(V.b).b'= \qquad =n_b.\vec{b}$$

$$(V.c).c'= \qquad =n_c.\vec{c}$$

پس $(V.a)a'+(V.b)b'+(V.c)c'=V \Rightarrow$

$$\vec{V}=n_a.\vec{a}+n_b.\vec{b}+n_c.\vec{c}$$

۱ـ۵ـ۱۸ـ بار الکتریکی q_1 که با سرعت V_1 حرکت می‌کند یک میدان مغناطیسی B ایجاد می‌کند که با رابطهٔ زیر بیان می‌شود (برحسب واحدهای mks)

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}q_1\frac{V\times r_0}{r^2}$$

که در آن r_0 از q_1 به سوی نقطه‌ای است که در آن B اندازه‌گیری می‌شود (قانون بیو - ساوار)

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikClass

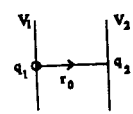
(الف) نشان دهید نیرویی مغناطیسی که بر بار دوم q_2 با سرعت V_2 وارد می‌آید از ضرب سه گانه اسکالر مقابل بدست می‌آید.

$$\vec{F}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{V}_2\times(\vec{V}_1\times r_0)$$

(ب) نیروی مغناطیسی متناظر F_1 را بنویسید که q_2 بر q_1 وارد می‌کند بردار یکهٔ شعاعی را که از آن بهره می‌گیرید تعریف کنید. F_1 و F_2 را با یکدیگر مقایسه کنید.

(ج) در حالتی که q_1 و q_2 روی مسیرهای موازی مجاور یکدیگر حرکت کنند F_1 و F_2 را محاسبه کنید.

حل (الف)



$$r'_0=-r_0$$

$$\vec{F}=q_2\vec{V}_2\times\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{V}_2\times(\vec{V}_1\times\vec{r}_0)$$

(ب) $$F_1=q_1V_1\times B=-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{V}_1\times(\vec{V}_2\times\vec{r}_0)$$

این دو مقدار بدست آمده برای F_1 و F_2 با هم رابطه‌ای ندارند به خصوص قانون سوم نیوتن $F_1=-F_2$ برقرار نیست.

(ج)

$$F_1=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{V}_2\times(\vec{V}_1\times\vec{r}_0)$$

$$\vec{V}_1=\vec{V}_2=\vec{V}$$

$$\vec{V}\times(\vec{V}\times\vec{r}_0)=-V^2\hat{r}_0$$

$$\vec{F}_1=-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1q_2}{r^2}V^2\hat{r}_0=-\vec{F}_2$$

بخش ۱ـ۶ گرادیان ∇ — مسائل صفحه ۵۱

۱ـ۶ـ۱ـ به ازای $S(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$ (الف) ∇S را در نقطه (۳ و ۲ و ۱) محاسبه کنید. (ب) بزرگی گرادیان S یعنی $|\nabla S|$ را در نقطهٔ (۳ و ۲ و ۱) محاسبه کنید. (ج) کسینوسهای هادی ∇S را در نقطهٔ (۳ و ۲ و ۱) بدست آورید.

حل (الف)

$$\vec{\nabla}S=\hat{i}\frac{\partial S}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial S}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial S}{\partial z}$$

$$=\hat{i}\left(-\frac{3}{2}\right)(2x)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}+\hat{j}\left(-\frac{3}{2}\right)(2y)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}+\hat{k}\left(-\frac{3}{2}\right)(2z)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\vec{\nabla}S=\frac{-3x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\hat{i}+\frac{-3y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\hat{j}+\frac{-3z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\hat{k}$$

$$\Rightarrow\quad \vec{\nabla}S\Big|_{1,2,3}=\frac{-3}{\sqrt{(14)^5}}\hat{i}+\frac{-6}{\sqrt{(14)^5}}\hat{j}+\frac{-9}{\sqrt{(14)^5}}\hat{k}$$

(ب)
$$\Big|\vec{\nabla}S\Big|_{1,2,3}=\sqrt{\frac{9}{(14)^5}+\frac{36}{(14)^5}+\frac{81}{(14)^5}}=\frac{3}{196}$$

(ج)
$$x=r\cos\alpha\quad\Rightarrow\quad \cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{\frac{\partial S}{\partial x}}{\left|\frac{\partial S}{\partial x}\right|}=\frac{\frac{-3}{\sqrt{(14)^5}}}{\frac{3}{196}}=-0/26$$

$$y=r\cos\beta\quad\Rightarrow\quad \cos\beta=\frac{\frac{-6}{\sqrt{(14)^5}}}{\frac{3}{196}}=-0/52$$

$$z=r\cos\gamma\quad\Rightarrow\quad \cos\gamma=\frac{\frac{-9}{\sqrt{(14)^5}}}{\frac{3}{196}}=-0/78$$

۱ـ۶ـ۲ـ (الف) برداریکه عمود بر سطح $x^2+y^2+z^2=3$ را در نقطهٔ (۱ و ۱ و ۱) بیابید.

(ب) معادله صفحه مماس بر این سطح در نقطهٔ (۱ و ۱ و ۱) را بنویسید.

حل (الف)
$$\nabla\phi\Big|_{1,1,1}=\hat{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}=\hat{i}(2x)+\hat{j}(2y)+\hat{k}(2z)$$

$$=\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\Big|_{1,1,1}=\frac{i+j+k}{\sqrt{3}}=$$ برداریکه عمود برسطح

(ب)
$$\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)+\frac{1}{\sqrt{3}}(y-1)+\frac{1}{\sqrt{3}}(z-1)=0\quad\Rightarrow$$

$$(x-1)+(y-1)+(z-1)=3$$

۱ـ۶ـ۳ـ بردار $\vec{r}_{12}=\hat{i}(x_1-x_2)+\hat{j}(y_1-y_2)+\hat{k}(z_1-z_2)$ مفروض است نشان دهید کمیت $\vec{\nabla}_1\vec{r}_{12}$ (گرادیان بزرگی r_{12} نسبت به x_1 و y_1 و z_1) برداریکه‌ای است در جهت r_{12}.

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

حل

$$\vec{\nabla}_1 \vec{r}_{12} = \frac{1}{2}\left[2i(x_1-x_2)+2j(y_1-y_2)+2k(z_1-z_2)\right](r_{12})^{\frac{-1}{2}}$$

$$= \frac{(x_1-x_2)\hat{i}+(y_1-y_2)\hat{j}+(z_1-z_2)\hat{k}}{|r_{12}|} = \frac{\vec{r}_{12}}{|r_{12}|} = \hat{r}_{12}$$

۱ـ۶ـ۲ـ تابع برداری F هم به مختصات فضایی (x,y,z) و هم به زمان t بستگی دارد نشان دهید:

$$d\vec{F} = (d\vec{r}.\vec{\nabla})\vec{F} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial t}dt$$

حل

$$d\vec{F} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial x}dx + \frac{\partial \vec{F}}{\partial y}dy + \frac{\partial \vec{F}}{\partial z}dz + \frac{\partial \vec{F}}{\partial t}dt$$

$$d\vec{F} = dx\frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + dy\frac{\partial \vec{F}}{\partial y} + dz\frac{\partial \vec{F}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial t}dt$$

$$d\vec{F} = d\vec{r}.\vec{\nabla}\vec{F} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial t}dt$$

۱ـ۶ـ۵ـ نشان دهید: $\vec{\nabla}(uv) = u\vec{\nabla}v + v\vec{\nabla}u$ که در آن u و v توابع اسکالر مشتق پذیری از x و y و z هستند.

حل

$$\vec{\nabla}(uv) = \hat{i}\frac{d}{dx}(uv) + \hat{j}\frac{d(uv)}{dy} + \hat{k}\frac{d}{dz}(uv)$$

$$= \hat{i}u\frac{dv}{dx} + \hat{i}\frac{du}{dx}v + \hat{j}u\frac{dv}{dy} + \hat{j}\frac{du}{dy}v + \hat{k}u\frac{dv}{dz} + \hat{k}\frac{du}{dz}v$$

$$= u(\hat{i}\frac{dv}{dx} + \hat{j}\frac{dv}{dy} + \hat{k}\frac{dv}{dz}) + v(\hat{i}\frac{du}{dx} + \hat{j}\frac{du}{dy} + \hat{k}\frac{du}{dz}) = u\vec{\nabla}v + v\vec{\nabla}u$$

۱ـ۶ـ۶ـ (الف) نشان دهید که شرط لازم و کافی برای آنکه مابین u(x,y,z) و v(x,y,z) از طریق عبارتی مانند f(u,v)=۰ رابطه برقرار شود آن است که $(\vec{\nabla}u)\times(\vec{\nabla}v)=0$ (ب) به ازای u=u(x,y) و v =v(x,y) نشان دهید که شرط $(\vec{\nabla}u\times\vec{\nabla}v)=0$ به ژاکوبی دو بعدی زیر منجر می‌شود:

$$J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

فرض کنید u و v مشتق پذیرند.

حل (الف)

$$df = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv =$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

از رابطه $\nabla\phi.dr=d\phi$ استفاده می‌شود.

$$df=\frac{\partial f}{\partial u}(\nabla u.dr)+\frac{\partial f}{\partial v}(\nabla v.dr)=0$$

$$(\frac{\partial f}{\partial u}\vec{\nabla}u+\frac{\partial f}{\partial v}\vec{\nabla}v).dr=0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u}\vec{\nabla}u+\frac{\partial f}{\partial v}\vec{\nabla}v=0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u}(\vec{\nabla}u\times\vec{\nabla}v)=0 \Rightarrow \vec{\nabla}u=k\vec{\nabla}v$$

(ب)

$$\vec{\nabla}u\times\vec{\nabla}v=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \end{vmatrix}=\hat{k}(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x})=0$$

$$=\hat{k}\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad J(\frac{u,v}{x,y})=0$$

بخش ۱ـ۷ـ دیورژانس $\vec{\nabla}.$ مسائل صفحه ۵۶

۱ـ۷ـ۱ـ معادلهٔ حرکت ذره‌ای در مدار دایره‌ای، عبارت است از:

$$\vec{r}=\hat{i}r\,Cos\,\omega t+\hat{j}r\,Sin\omega t$$

(الف) $\vec{r}\times\dot{\vec{r}}$ را محاسبه کنید. (ب) نشان دهید: $\ddot{\vec{r}}+\omega^2\vec{r}=0$. شعاع، r، و سرعت زاویه‌ای، ω ثابت‌اند. [یادآوری: $\dot{\vec{r}}=\frac{d\vec{r}}{dt}$ و $\ddot{\vec{r}}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$]

حل (الف)

$$\dot{\vec{r}}=\frac{d\vec{r}}{dt}=-\hat{i}\omega r\,Sin\omega t+\hat{j}\omega r\,Cos\omega t$$

$$\vec{r}\times\dot{\vec{r}}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ rCos\omega t & rSin\omega t & 0 \\ -r\omega Sin\omega t & r\omega Cos\omega t & 0 \end{vmatrix}=\hat{k}(r^2\omega\,Cos^2\omega t+r^2\omega Sin^2\omega t)$$

$$=\hat{k}r^2\omega$$

(ب)

$$\ddot{\vec{r}}=\frac{d\dot{\vec{r}}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=-\hat{i}\,r\omega^2\,Cos\omega t-\hat{j}\,r\omega^2\,Sin\,\omega t$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$= -\omega^{۲}(\hat{i}\, r\, \mathrm{Cos}\omega t + \hat{j}\, r\, \mathrm{Sin}\omega t) = -\omega^{۲} r \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\vec{r}} + \omega^{۲}\vec{r} = ۰}$$

۱-۷-۲- بردار $\vec{A}$ در قانون تبدیل برداری، معادله ۱-۱۵ صدق می‌کند با محاسبهٔ مستقیم نشان دهید که مشتق زمانی آن یعنی $\frac{d\vec{A}}{dt}$ نیز در معادله ۱-۱۵ صدق می‌کند و در نتیجه بردار است.

حل معادله ۱-۱۵

$$V'_i = \sum_{j=۱}^{N} a_{ij} V_j \qquad i = ۱, ۲, ..., N$$

$$\begin{cases} A'_x = a_{۱۱}A_x + a_{۱۲}A_y + a_{۱۳}A_z \\ A'_y = a_{۲۱}A_x + a_{۲۲}A_y + a_{۲۳}A_z \\ A'_z = a_{۳۱}A_x + a_{۳۲}A_y + a_{۳۳}A_z \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(A'_x) = a_{۱۱}\frac{\partial}{\partial t}A_x + a_{۱۲}\frac{\partial}{\partial t}A_y + a_{۱۳}\frac{\partial}{\partial t}A_z = \sum_j a_{ij}\frac{\partial A_j}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(A'_y) = a_{۲۱}\frac{\partial}{\partial t}A_x + a_{۲۲}\frac{\partial}{\partial t}A_y + a_{۲۳}\frac{\partial}{\partial t}A_z = \sum_j a_{ij}\frac{\partial A_j}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(A'_z) = a_{۳۱}\frac{\partial}{\partial t}A_x + a_{۳۲}\frac{\partial}{\partial t}A_y + a_{۳۳}\frac{\partial}{\partial t}A_z = \sum_j a_{ij}\frac{\partial A_j}{\partial t}$$

۱-۷-۳- با مشتق گرفتن از مولفه‌ها نشان دهید که درست مانند مشتق‌گیری از حاصلضرب دو تابع جبری داریم:

(الف)
$$\frac{d}{dt}(\vec{A}.\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt}.\vec{B} + \vec{A}.\frac{d\vec{B}}{dt}$$

(ب)
$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B} + \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}$$

حل (الف)

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}.\vec{B}) = \frac{d}{dt}(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)$$

$$= B_x\frac{dA_x}{dt} + A_x\frac{dB_x}{dt} + B_y\frac{dA_y}{dt} + A_y\frac{dB_y}{dt} + B_z\frac{dA_z}{dt} + A_z\frac{dB_z}{dt}$$

$$= (B_x\frac{dA_x}{dt} + B_y\frac{dA_y}{dt} + B_z\frac{dA_z}{dt}) + (A_x\frac{dB_x}{dt} + A_y\frac{dB_y}{dt} + A_z\frac{dB_z}{dt})$$

$$= \vec{B}.\frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{A}.\frac{d\vec{B}}{dt}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

(ب) $\vec{A}\times\vec{B}=(A_yB_z-A_zB_y)\hat{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\hat{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\hat{k}$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B})=\hat{i}\,[B_z\frac{dA_y}{dt}+A_y\frac{dB_z}{dt}-B_y\frac{dA_z}{dt}-A_z\frac{dB_y}{dt}]$$

$$+\hat{j}[A_z\frac{dB_x}{dt}+B_x\frac{dA_z}{dt}-B_z\frac{dA_x}{dt}-A_x\frac{dB_z}{dt}]+\hat{k}[A_x\frac{dB_y}{dt}+B_y\frac{dA_x}{dt}-A_y\frac{dB_x}{dt}-B_x\frac{dA_y}{dt}]$$

با مرتب کردن برحسب مولفه‌های ضرب خارجی داریم:

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B})=\frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B}+\vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}$$

۱ـ۷ـ۴ـ در فصل ۲ خواهیم دید که بردارهای یکه در دستگاههای مختصات غیردکارتی معمولاً توابعی از متغیرهای مختصاتی‌اند. $e_i=e_i(q_1,q_2,q_3)$ ولی $|e_i|=1$ نشان دهید که یا $\frac{\partial e_i}{\partial q_j}=0$ و یا $\frac{\partial e_i}{\partial q_j}$ بر e_i عمود است.

حل

$$\hat{e}_i\cdot\hat{e}_i=1 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial q_j}(\hat{e}_i\cdot\hat{e}_i)=0 \Rightarrow 2\frac{\partial\hat{e}_i}{\partial q_j}\cdot\hat{e}_i=0$$

از رابطه فوق نتیجه می‌گیریم که یا باید زاویه بین $\frac{\partial\hat{e}_i}{\partial q_j}$ و $\hat{e}_i$ ۹۰° باشد یا $\frac{\partial\hat{e}_i}{\partial q_j}=0$.

۱ـ۷ـ۵ـ ثابت کنید که

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{b}$$

[راهنمایی: این عبارت را به صورت یک ضرب سه گانه اسکالر بگیرید.]

حل

$$(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z})[(a_yb_z-a_zb_y)\hat{i}+(a_zb_x-b_za_x)\hat{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\hat{k}]$$

$$=\frac{\partial a_yb_z}{\partial x}-\frac{\partial a_zb_y}{\partial x}+\frac{\partial a_zb_x}{\partial y}-\frac{\partial b_za_x}{\partial y}+\frac{\partial a_xb_y}{\partial z}-\frac{\partial a_yb_x}{\partial z}$$

بعد از مشتق‌گیری ۱۲ جمله پیدا می‌شود که با مرتب کردن آنها داریم:

$$=b_x(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z})+b_y(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x})+b_z(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y})$$

$$-a_x(-\frac{\partial b_y}{\partial z}+\frac{\partial b_z}{\partial y})-a_y(-\frac{\partial b_z}{\partial x}+\frac{\partial b_x}{\partial z})-a_z(-\frac{\partial b_x}{\partial y}+\frac{\partial b_y}{\partial x})$$

$$=\vec{b}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{b}$$

۱ـ۷ـ۶ـ میدان الکترو[illegible]

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\hat{r}_0}{r^2}$$

دیورژانس E را محاسبه کنید. مقدار این دیورژانس در مبدأ چقدر است؟

حل

$$\hat{r}_0=\frac{\vec{r}}{|r|}\quad\Rightarrow\quad\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{\nabla}.(\vec{r}f(r))=3f(r)+r\frac{df}{dr}$$

$$\vec{\nabla}.(r^{-3}\vec{r})=3r^{-3}+(-3)r^{-4}=3r^{-3}-3r^{-3}=0$$

پس $\vec{\nabla}.\vec{E}=0$

بخش ۱ـ۸ تاو $\vec{\nabla}\times$ مسائل صفحه ۶۲

۱ـ۸ـ۱ با دوران مختصات نشان دهید که تاو یک بردار، مانند یک بردار تبدیل می‌شود. [راهنمایی: هر وقت لازم باشد می‌توانید از اتحادهای معادله ۱-۴۱ برای کسینوسهای هادی استفاده کنید.]

حل

$$\nabla'\times V'\Big|_{x'}=\frac{\partial V'_z}{\partial y'}-\frac{\partial V'_y}{\partial z'}$$

$$\begin{cases}V'_x=V_x\cos\theta+V_y\sin\theta\\V'_y=-V_x\sin\theta+V_y\cos\theta\end{cases}\qquad\begin{cases}x'=x\cos\theta+y\sin\theta\\y'=-x\sin\theta+y\cos\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=x'\cos\theta-y'\sin\theta\\y=x'\sin\theta+y'\cos\theta\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial x}{\partial y'}=(-\sin\theta)\\[2mm]\dfrac{\partial y}{\partial y'}=\cos\theta\end{cases}\qquad\text{قاعده زنجیری}\quad\frac{\partial V'_z}{\partial y'}=\frac{\partial V'_z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial y'}\right)+\frac{\partial V'_z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial y'}\right)$$

$$\frac{\partial V'_z}{\partial y'}=\frac{\partial V'_z}{\partial x}(-\sin\theta)+\frac{\partial V'_z}{\partial y}(\cos\theta)=-\frac{\partial V_z}{\partial x}\sin\theta+\frac{\partial V_z}{\partial y}\cos\theta\qquad(1)$$

$$\partial V'_y=\partial(-V_x\sin\theta+V_y\cos\theta)\qquad\partial V_z=\partial V'_z\quad,\quad\partial z=\partial z'$$

$$\frac{\partial V'_z}{\partial z'}=\frac{\partial(-V_x\sin\theta+V_y\cos\theta)}{\partial z}\qquad(2)$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\nabla' \times V' \Big|_x = (۱) - (۲) = -\frac{\partial V_z}{\partial x}\mathrm{Sin}\theta + \frac{\partial V_z}{\partial y}\mathrm{Cos}\theta - \frac{\partial}{\partial z}(-V_x\,\mathrm{Sin}\theta + V_y\,\mathrm{Cos}\theta)$$

$$\nabla' \times V' \Big|_x = -\frac{\partial V_z}{\partial x}\mathrm{Sin}\theta + \frac{\partial V_z}{\partial y}\mathrm{Cos}\theta - (-\frac{\partial V_x}{\partial z}\mathrm{Sin}\theta) - \frac{\partial V_y}{\partial z}\mathrm{Cos}\theta$$

$$= (\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x})\mathrm{Sin}\theta + \mathrm{Cos}\theta(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}) = (\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z})\mathrm{Cos}\theta$$

$$+ (\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x})\mathrm{Sin}\theta \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{V}' \Big|_x = (\vec{\nabla} \times \vec{V})_x\,\mathrm{Cos}\theta + (\vec{\nabla} \times \vec{V})_y\,\mathrm{Sin}\theta$$

۱ـ۸ـ۲ـ نشان دهید که اگر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غیر چرخشی باشند $\vec{u} \times \vec{v}$ سیملوله‌ای است.

حل چون غیرچرخشی‌اند. $\vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = ۰$

$$\vec{\nabla}.(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v}.(\vec{\nabla} \times \vec{u}) - \vec{u}(\vec{\nabla} \times \vec{v}) = ۰$$

پس $\vec{u} \times \vec{v}$ سیملوله‌ای است.

۱ـ۸ـ۳ـ نشان دهید که اگر $\vec{A}$ غیرچرخشی باشد $\vec{A} \times \vec{r}$ سیملوله‌ای است.

حل چون $\vec{A}$ غیرچرخشی است. $\vec{\nabla} \times \vec{A} = ۰$

$$\vec{\nabla}.(\vec{A} \times \vec{r}) = \vec{r}(\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A}(\vec{\nabla} \times \vec{r}) = ۰ - ۰ = ۰$$

۱ـ۸ـ۴ـ جسم صلبی با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخد. نشان دهید که سرعت خطی V سیملوله‌ای است.

حل ثابت = ω و $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = ۰$$

پس $\vec{V}$ سیملوله‌ای است.

۱ـ۸ـ۵ـ تابع برداری $\vec{f}(x,y,z)$ غیرچرخشی نیست ولی حاصلضرب f در تابع اسکالر $g(x,y,z)$ غیرچرخشی است نشان دهید: $\vec{f}.\vec{\nabla} \times \vec{f} = ۰$

حل $\vec{\nabla} \times (\vec{f}.g) = g\vec{\nabla} \times \vec{f} - \vec{\nabla}g \times \vec{f} = ۰$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\vec{\nabla}\times\vec{f}=\frac{\vec{\nabla}g\times\vec{f}}{g}\quad\Rightarrow\quad\vec{f}.\nabla\times\vec{f}=\vec{f}.\frac{f.\vec{\nabla}g\times\vec{f}}{g}=0$$

۱ـ۸ـ۶ـ اگر (الف) $\vec{V}=iV_x(x,y)+jV_y(x,y)$ و (ب) $\vec{\nabla}\times\vec{V}\neq 0$ ثابت کنید که $\vec{\nabla}\times\vec{V}$ بر $\vec{V}$ عمود است.

حل

$$\vec{\nabla}\times\vec{V}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & 0 \end{vmatrix}=\hat{k}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)$$

$$\vec{V}.(\vec{\nabla}\times\vec{V})=0\quad\Rightarrow\quad\vec{V}\perp\vec{\nabla}\times\vec{V}$$

۱ـ۸ـ۷ـ تکانهٔ زاویه‌ای در مکانیک کلاسیک از رابطهٔ $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{P}$ به دست می‌آید که در آن $\vec{P}$ تکانهٔ خطی است. در مکانیک کوانتومی به جای P عملگر $-i\vec{\nabla}$ را قرار می‌دهیم (بخش ۱۵-۶) نشان دهید که مولفه‌های دکارتی عملگر تکانهٔ زاویه‌ای در مکانیک کوانتومی (برحسب واحد $\hbar$) عبارت‌اند از:

$$L_x=-i\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right)\quad,\quad L_y=-i\left(z\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial z}\right)\quad,\quad L_z=-i\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

حل

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{P}=\vec{r}\times(-i\vec{\nabla})=i(\vec{r}\times\vec{\nabla})=i\begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad L=i\left[\hat{i}\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right)+\hat{j}\left(z\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial z}\right)+\hat{k}\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]$$

$$\Rightarrow\quad L_x=i\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right)\quad,\quad L_y=i\left(z\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial z}\right)\quad,\quad L_z=i\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

۱ـ۸ـ۸ـ با بهره‌گیری از عملگرهای تکانهٔ زاویه‌ای که قبلاً داده شدند. نشان دهید که این عملگرها در رابطه‌های جابجایی بصورت زیر صادقند.

$$[L_x,L_y]\equiv L_xL_y-L_yL_x=iL_x$$

و در نتیجه داریم $\vec{L}\times\vec{L}=i\vec{L}$

بعداً در مسئله ۴-۲-۱۵ و مسئله ۱۵-۲-۱۰ روابط جابجایی را بعنوان

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

روابط معرف عملگرها تکانهٔ زاویه‌ای بکار خواهیم برد.

حل

$$L_xL_y-L_yL_x=-(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y})(z\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial z})+(z\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial z})(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y})$$

$$=-[y\frac{\partial}{\partial x}+yz\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}-xy\frac{\partial^2}{\partial z\partial z}-z^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+xz\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}-yz\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}+z^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+xy\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$-x\frac{\partial}{\partial y}-xz\frac{\partial^2}{\partial z\partial y}]=-(y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y})=-i^2(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x})=+iL_z$$

$$\vec{L}\times\vec{L}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ L_x & L_y & L_z \\ L_x & L_y & L_z \end{vmatrix}=\hat{i}(L_yL_z-L_zL_y)+\hat{j}(L_zL_x-L_xL_z)+\hat{k}(L_xL_y-L_yL_z)=i\vec{L}$$

۱ـ۸ـ۹ـ با بهره‌گیری از نماد کروشهٔ جابجایی $[L_x,L_y]=L_xL_y-L_yL_x$ بردار تکانهٔ زاویه‌ای $\vec{L}$ در رابطهٔ $[L_x,L_y]=iL_z$ و غیره یا $\vec{L}\times\vec{L}=i\vec{L}$ صدق می‌کند و بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با یکدیگر و با $\vec{L}$ جابجا می‌شوند یعنی $[a,b]=[a,L]=[b,L]=0$ نشان دهید:

$$[\vec{a}.\vec{L},\vec{b}.\vec{L}]=i(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{L}$$

حل

$$[\vec{a}.\vec{L},\vec{b}.\vec{L}]=(\vec{a}.\vec{L})(\vec{b}.\vec{L})-(\vec{b}.\vec{L})(\vec{a}.\vec{L}) \qquad (۱)$$

$$(\vec{A}\times\vec{B}).(\vec{C}\times\vec{D})=(\vec{A}.\vec{C})(\vec{B}.\vec{D})-(\vec{A}.\vec{D})(\vec{B}.\vec{C}) \qquad (۲)$$

طرف راست روابط (۱) و (۲) یکی هستند (مشابه) بطور یکسان می‌توان طرف دیگر رابطه (۱) را مانند طرف چپ رابطه (۲) درست کرد.

$$(\vec{a}.\vec{L})(\vec{b}.\vec{L})-(\vec{b}.\vec{L})(\vec{a}.\vec{L})=(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{L}\times\vec{L})=(\vec{a}\times\vec{b})i\vec{L}=i(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{L}$$

۱ـ۸ـ۱۰ـ با محاسبه تک تک جمله‌های اتحاد برداری زیر برای بردارهای $\vec{A}=iA_x(x,y,z)$ و $\vec{B}=iB_x(x,y,z)$ درستی این اتحاد را تحقیق کنید:

$$\vec{\nabla}(\vec{A}.\vec{B})=(\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{A}+(\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{B}+\vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})+\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})$$

حل

∇_B : فقط از B مشتق می‌گیرد

$$\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})=\vec{\nabla}_B(\vec{A}.\vec{B})-\vec{B}(\vec{A}.\vec{\nabla}) \qquad (۱)$$

∇_A : فقط از A مشتق می‌گیرد

$$\vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\vec{\nabla}_A(\vec{B}.\vec{A})-\vec{A}(\vec{B}.\vec{\nabla}) \qquad (۲)$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$(۱)+(۲) \Rightarrow \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})+\vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\vec{\nabla}_B(\vec{A}.\vec{B})+\vec{\nabla}_A(\vec{A}.\vec{B})-(\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{B}-(\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{A}$$

$$\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})+\vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\vec{\nabla}(\vec{A}.\vec{B})-(\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{B}-(\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{A}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}(\vec{A}.\vec{B})=(\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{A}+(\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{B}+\vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})+\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})$$

۱ـ۸ـ۱۱ـ اتحاد برداری زیر را ثابت کنید.

$$\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B})=(\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{A}-(\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{B}-\vec{B}(\vec{\nabla}.\vec{A})+\vec{A}(\vec{\nabla}.\vec{B})$$

حل

$$\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B})=(\vec{\nabla}.\vec{B})\vec{A}-(\vec{\nabla}.\vec{A})\vec{B} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{A}(\vec{\nabla}.\vec{B})+(\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{A}-\vec{B}(\vec{\nabla}.\vec{A})-(\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{B}$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B})=(\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{A}-(\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{B}-\vec{B}(\vec{\nabla}.\vec{A})+\vec{A}(\vec{\nabla}.\vec{B})$$

۱ـ۸ـ۱۲ـ اتحاد برداری مربوط به مثال ۱-۸-۲ را بصورت زیر نیز می‌توان نوشت

$$\vec{\nabla}(\vec{A}.\vec{B})=(\vec{A}\times\vec{\nabla})\times\vec{B}+(\vec{B}\times\vec{\nabla})\times\vec{A}+\vec{A}(\vec{\nabla}.\vec{B})+\vec{B}(\vec{\nabla}.\vec{A})$$

این اتحاد را ثابت کنید.

حل

$$\left.\begin{array}{l}(\vec{A}\times\vec{\nabla})\times\vec{B}=\vec{\nabla}_B(\vec{B}.\vec{A})-\vec{A}(\vec{\nabla}.\vec{B}) \Rightarrow \vec{\nabla}_B(\vec{B}.\vec{A})=(\vec{A}\times\vec{\nabla})\times\vec{B}+\vec{A}(\vec{\nabla}.\vec{B})\\(\vec{B}\times\vec{\nabla})\times\vec{A}=\vec{\nabla}_A(\vec{B}.\vec{A})-\vec{B}(\vec{\nabla}.\vec{A}) \Rightarrow \vec{\nabla}_A(\vec{B}.\vec{A})=(\vec{B}\times\vec{\nabla})\times\vec{A}+\vec{B}(\vec{\nabla}.\vec{A})\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla}(\vec{B}.\vec{A})=(\vec{A}\times\vec{\nabla})\times\vec{B}+(\vec{B}\times\vec{\nabla})\times\vec{A}+\vec{A}(\vec{\nabla}.\vec{B})+\vec{B}(\vec{\nabla}.\vec{A})$$

$$\vec{\nabla}(\vec{B}.\vec{A})=\vec{\nabla}(\vec{A}.\vec{B})=(\vec{A}\times\vec{\nabla})\times\vec{B}+(\vec{B}\times\vec{\nabla})\times\vec{A}+\vec{A}(\vec{\nabla}.\vec{B})+\vec{B}(\vec{\nabla}.\vec{A})$$

۱ـ۸ـ۱۳ـ اتحاد زیر را ثابت کنید

$$\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\frac{۱}{۲}\vec{\nabla}(A^۲)-(\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{A}$$

حل در مسئله قبل اگر $\vec{B}=\vec{A}$ را جایگزین کنیم داریم:

$$\vec{\nabla}(\vec{A}.\vec{A})=(\vec{A}\times\vec{\nabla})\times\vec{A}+(\vec{A}\times\vec{\nabla})\times\vec{A}+\vec{A}(\vec{\nabla}.\vec{A})+\vec{A}(\vec{\nabla}.\vec{A})$$

$$\vec{\nabla}A^۲=۲(\vec{A}\times\vec{\nabla})\times\vec{A}+۲\vec{A}(\vec{\nabla}.\vec{A}) \quad \Rightarrow$$

$$\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\frac{۱}{۲}\vec{\nabla}(A^۲)-(\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{A}$$

۱ـ۸ـ۱۴ـ اگر A و B بردار

$$\vec{\nabla}(\vec{A}.\vec{B}\times\vec{r})=\vec{A}\times\vec{B}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

حل

$$\vec{\nabla}(\vec{A}.\vec{B}\times\vec{r})=\nabla(\underbrace{\vec{A}\times\vec{B}}_{E}.\vec{r})=\nabla(E_x x+E_y y+E_z z)$$

$$=(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k})(E_x x+E_y y+E_z z)$$

E_x و E_y و E_z ثابت‌اند.

$$=E_x\frac{\partial x}{\partial x}\hat{i}+E_y\frac{\partial y}{\partial y}\hat{j}+E_z\frac{\partial z}{\partial z}\hat{k}=E_x\hat{i}+E_y\hat{j}+E_z\hat{k}=\vec{E}=\vec{A}\times\vec{B}$$

۱ـ۸ـ۱۵ـ گشتاور مغناطیسی حاصل از نوعی توزیع جریانهای الکتریکی، ثابت و برابر m است نیرویی که در القای مغناطیسی خارجی B بر m وارد می‌آید عبارت از:

$$\vec{F}=\vec{\nabla}\times(\vec{B}\times\vec{m})$$

نشان دهید:

$$\vec{F}=\vec{\nabla}(\vec{m}.\vec{B})$$

[یادآوری: اگر میدانها را مستقل از زمان بگیریم از معادله ماکسول نتیجه می‌گیریم که $\vec{\nabla}\times\vec{B}=0$ و نیز $\vec{\nabla}.\vec{B}=0$]

حل از اتحاد مسئله ۱-۸-۱۱ استفاده می‌کنیم:

$$F=\vec{\nabla}\times(\vec{B}\times\vec{m})=(\vec{m}.\vec{\nabla})\vec{B}-(\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{m}-\vec{m}(\vec{\nabla}.\vec{B})+\vec{B}(\vec{\nabla}.\vec{m})$$

جمله سوم بنابه فرض و جمله چهارم چون m ثابت است صفر می‌شوند.

$$\vec{F}=(\vec{m}.\vec{\nabla})\vec{B}-(\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{m}$$

جمله دوم هم به دلیل مشابه فوق صفر است.

پس داریم:

$$\vec{F}=(\vec{m}.\vec{\nabla})\vec{B}$$

چون m ثابت است می‌تواند وارد ∇ شود.

$$\vec{F}=\nabla(\vec{m}.\vec{B})$$

۱ـ۸ـ۱۶ـ یک دو قطبی الکتریکی با گشتاور $\vec{P}$ در مبدأ واقع است این دو قطبی در $\vec{r}$ یک پتانسیل الکتریکی به قرار $\psi(\vec{r})=\frac{\vec{P}.r}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ ایجاد می‌کند. میدان الکتریکی $\vec{E}=-\vec{\nabla}\psi$ را در r محاسبه کنید.

حل

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\psi=-\vec{\nabla}\left[\frac{\vec{P}.\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right]=\frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\left[\vec{P}.\vec{r}\,r^{-3}\right]\Rightarrow$$

$$\vec{E}=\frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\vec{\nabla}r^{-3}(\vec{P}.\vec{r})+r^{-3}\vec{\nabla}(\vec{P}.\vec{r})\right]$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\vec{E}=\frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\hat{r}_0\frac{-3}{r^4}(\vec{P}.\vec{r})+r^{-3}((r.\nabla)P+(P.\nabla)r+P\times(\nabla\times r)+r\times(\nabla\times P)\right]$$

$$\vec{E}=\frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\hat{r}_0\left(\frac{-3}{r^4}\right)(P.r)+r^{-3}P\right]=\frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-3r.(P.r)}{r^5}+\frac{P}{r^3}\right]$$

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3\vec{r}(\vec{P}.\vec{r})}{r^5}-\frac{\vec{P}}{r^3}\right]$$

۱-۸-۱۷- پتانسیل برداری $\vec{A}$ یک دو قطبی مغناطیسی با گشتاور دو قطبی m، از رابطهٔ $\vec{A}(r)=\frac{\mu_0}{4\pi}(\vec{m}\times\frac{\vec{r}}{r^3})$ به دست می‌آید. نشان دهید که القای مغناطیسی $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ عبارت است از:

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\vec{r}_0(\vec{r}_0.\vec{m})-\vec{m}}{r^3}$$

[یادآوری: فرآیند حدی که دو قطبیهای نقطه‌ای را می‌دهد برای دو قطبی الکتریکی در بخش ۱۲-۱ و برای دو قطبی مغناطیسی در بخش ۱۲-۵ مورد بحث قرار می‌گیرد]

حل

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{1}{r^3}\vec{\nabla}\times(\vec{m}\times\vec{r})+\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^3}\right)\times(\vec{m}\times\vec{r})\right]$$

از اتحاد مسئله ۱-۸-۱۱ استفاده می‌شود.

$$\vec{\nabla}\times(\vec{m}\times\vec{r})=(\vec{r}.\vec{\nabla})\vec{m}-(\vec{m}.\vec{\nabla})\vec{r}+\vec{m}(\vec{\nabla}.\vec{r})-\vec{r}(\vec{\nabla}.\vec{m})$$

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{-3}{r^5}[\vec{m}(\vec{r}.\vec{r})-\vec{r}(\vec{m}.\vec{r})]+\frac{2\vec{m}}{r^3}\right]\quad\Rightarrow$$

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{-m}{r^3}+\frac{3(\vec{m}.\vec{r})\vec{r}}{r^5}\right]$$

۱-۸-۱۸- سرعت شارش دو بعدی یک مایع از رابطهٔ زیر بدست می‌آید.

$$\vec{V}=\hat{i}\,u(x,y)-\hat{j}\,v(x,y)$$

اگر این مایع تراکم‌ناپذیر و شارش غیرچرخشی داشته باشد نشان دهید.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\quad,\quad\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

این رابطه‌ها عبارت‌اند از شرایط کوشی - ریمان در بخش ۶-۲

حل چون غیر چرخشی است

$$\vec{\nabla}\times\vec{V}=0$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\vec{\nabla}\times\vec{V}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & -v & 0 \end{vmatrix}=\hat{k}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}}$$

$\vec{\nabla}.\vec{V}=0$ چون تراکم‌ناپذیر است $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=0 \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}}$$

بخش ۱ـ۹ـ کاربردهای $\vec{\nabla}$ متوالی مسائل صفحه ۶۸

۱ـ۹ـ۱ـ درستی معادلهٔ ۱-۸۰ را از طریق بسط مستقیم در مختصات دکارتی اثبات کنید.

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V})=\vec{\nabla}\vec{\nabla}.\vec{V}-\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\vec{V}$$

حل

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{V}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (\nabla\times V)_x & (\nabla\times V)_y & (\nabla\times V)_z \end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}\left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 V_y}{\partial x\partial y}\right)+\hat{j}\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 V_z}{\partial y\partial x}\right)+\hat{k}\left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 V_x}{\partial z\partial y}\right)$$

$$\vec{\nabla}\vec{\nabla}.\vec{V}=\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)$$

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\vec{V}=\nabla^2 V=\hat{i}\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right)$$

$$+\hat{j}\left(\frac{\partial^2 Vy}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 Vy}{\partial z^2}\right)+\hat{k}\left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right)$$

$$\vec{\nabla}\vec{\nabla}.\vec{V}-\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\vec{V}=\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V})$$

۱ـ۹ـ۲ـ نشان دهید که اتحاد $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V})=\vec{\nabla}\vec{\nabla}.\vec{V}-\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\vec{V}$ را می‌توان بکمک قاعده یک [illegible] اثبات کرد. هر تغییری که در

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

ترتیب عوامل در جمله‌های بک و کب انجام داده‌اید توجیه کنید.

حل

$$\overset{a}{\vec{\nabla}}\times(\overset{b}{\vec{\nabla}}\times\overset{c}{\vec{V}})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{V})-\vec{V}(\vec{\nabla}.\vec{\nabla})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{V})-(\vec{\nabla}.\vec{\nabla})\vec{V}$$

۱-۹-۳- ثابت کنید:

$$\vec{\nabla}\times(\phi\vec{\nabla}\phi)=0$$

حل

$$\vec{\nabla}\times(\phi\vec{\nabla}\phi)=\nabla\phi\times\nabla\phi+\phi\nabla\times\nabla\phi=0$$

۱-۹-۴- می‌دانیم که تاو $\vec{F}$ با تاو $\vec{G}$ برابر است. نشان دهید که اختلاف بین $\vec{F}$ و $\vec{G}$ یا یک مقدار ثابت و یا گرادیان یک تابع اسکالر است.

حل

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{G}$$

$\vec{F}-\vec{G}\ \Rightarrow$ کرل می‌گیریم $\vec{\nabla}\times(\vec{F}-\vec{G})=\vec{\nabla}\times\vec{F}-\vec{\nabla}\times\vec{G}$

۱-۹-۵- معادلهٔ ناویه استوکس در دینامیک شاره‌ها حاوی جملهٔ غیرخطی $(\vec{V}.\vec{\nabla})\vec{V}$ است نشان دهید که تاو این جمله را می‌توان بصورت $-\vec{\nabla}\times\left[\vec{V}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V})\right]$ نوشت.

حل

$$\vec{\nabla}\times\left[(\vec{V}.\vec{\nabla})\vec{V}\right]=\vec{\nabla}\times\left[\vec{\nabla}V^2-\vec{V}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V})\right]$$

$$=\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}V^2-\vec{\nabla}\times\left[\vec{V}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V})\right]=-\vec{\nabla}\times\left[\vec{V}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V})\right]$$

۱-۹-۶- در معادلهٔ ناویه - استوکس در دینامیک شاره‌ها، برای شارش پایای یک شارهٔ چسبنده تراکم‌ناپذیر به جمله‌ای بصورت

$$\vec{\nabla}\times\left[\vec{V}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V})\right]$$

می‌رسیم که در آن $\vec{V}$ چسبندگی شاره است، نشان دهید که این جمله در حالت خاص: $\vec{V}=\hat{i}\,V(y,z)$ صفر می‌شود.

حل

$$\vec{\nabla}\times\vec{V}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V(y,z) & 0 & 0 \end{vmatrix}=\hat{j}\left(\frac{\partial}{\partial z}V(y,z)\right)-\hat{k}\left(\frac{\partial}{\partial y}V(y,z)\right)$$

$$\vec{V}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V})=\hat{k}\,V(y,z)\frac{\partial}{\partial z}V(y,z)+\hat{j}\,V(y,z)\frac{\partial}{\partial y}V(y,z)$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\vec{\nabla}\times\left[\vec{V}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V})\right]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & V(y,z)\frac{\partial}{\partial y}V(y,z) & V(y,z)\frac{\partial}{\partial z}V(y,z)\end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}V(y,z)\frac{\partial}{\partial z}V(y,z)-\frac{\partial}{\partial z}V(y,z)\frac{\partial}{\partial y}V(y,z)\right]=0$$

۱ـ۹ـ۷ـ ثابت کنید که اگر u و v توابع اسکالر مشتق‌پذیر باشند. $(\vec{\nabla}u)\times(\vec{\nabla}v)$ سیملوله است.

حل

راه اول

$$\vec{\nabla}.\left[(\vec{\nabla}u)\times(\vec{\nabla}v)\right]=\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z}\end{vmatrix}=0$$

راه دوم

از اتحاد $\vec{\nabla}.(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}.\vec{\nabla}\times\vec{a}-\vec{a}.\vec{\nabla}\times\vec{b}$ استفاده می‌کنیم.

$$\vec{\nabla}.\left[(\vec{\nabla}u)\times(\vec{\nabla}v)\right]=\vec{\nabla}v.(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}u)-\vec{\nabla}u.(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}v)=0$$

۱ـ۹ـ۸ـ ϕ یک تابع اسکالر است که در معادلهٔ لاپلاس $\nabla^2\phi=0$ صدق می‌کند. نشان دهید که $\nabla\phi$ هم سیملوله‌ای و هم غیرچرخشی است.

حل $\nabla^2\phi=0 \Rightarrow \vec{\nabla}.\vec{\nabla}\phi=0 \Rightarrow$ $\nabla\phi$ سیملوله است.

$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\phi=0 \Rightarrow$ همواره برقرار است. $\nabla\phi$ غیرچرخشی است.

۱ـ۹ـ۹ـ برای تابع اسکالر ψ، نشان دهید که

$$(\vec{r}\times\vec{\nabla}).(\vec{r}\times\vec{\nabla})\psi=r^2\nabla^2\psi-r^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-2r\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

(این اتحاد را در مختصات قطبی کروی، بخش ۲ـ۵ راحت‌تر می‌توان اثبات کرد)

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

حل

$$(\vec{r}\times\vec{\nabla}).(\vec{r}\times\vec{\nabla})\psi = r^2\nabla^2\psi - r^2\left[\frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\right]$$

$$= r^2\nabla^2\psi - 2r\frac{\partial\psi}{\partial r} - r^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}$$

$$\frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} = \nabla^2\psi$$

$$(r\times\nabla).(r\times\nabla)\psi = r^2\nabla^2\psi - r^2\nabla^2\psi = 0$$

۱ـ۹ـ۱۰ـ شرط تعادل برای یک جرم منزوی (غیر چرخان) نظیر یک ستاره عبارت است از

$$\vec{\nabla}P + \rho\vec{\nabla}\phi = 0$$

که در آن P فشار کل، ρ چگالی ϕ پتانسیل گرانشی است. نشان دهید که در هر نقطه بردار عمود بر سطح با فشار ثابت، با بردار عمود بر سطح پتانسیل گرانشی ثابت موازی است.

حل

$$\vec{\nabla}P = -\rho\vec{\nabla}\phi \quad , \quad \vec{f} = -\vec{\nabla}\phi \quad \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla}P = P\vec{f} \quad , \quad f = -\frac{GmM}{r^2}\hat{r}$$

گرادیان، بردار عمود بر سطح و به طرف خارج است اما نیرو عمود به طرف داخل است درنتیجه این بردارها با هم هم راستا (موازی) اما در خلاف جهت یکدیگرند.

۱ـ۹ـ۱۱ـ در نظریهٔ پاؤلی دربارهٔ الکترون، به عبارت زیر بر می‌خوریم

$$(\vec{P}-e\vec{A})\times(\vec{P}-e\vec{A})\psi$$

که در آن ψ یک تابع اسکالر است. $\vec{A}$ پتانسیل برداری مغناطیسی است که مابین آن و القای مغناطیسی رابطهٔ $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ برقرار است. با این فرض که $\vec{P} = -i\vec{\nabla}$ نشان دهید که این رابطه به صورت $ie\vec{B}\psi$ ساده می‌شود.

حل

$$(\vec{P}-e\vec{A})\times(\vec{P}-e\vec{A})\psi = (-i\vec{\nabla}-e\vec{A})\times(-i\vec{\nabla}\psi - e\vec{A}\psi)$$

$$= -\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\psi + ie\vec{\nabla}\times(\vec{A}\psi) + ie\vec{A}\times(\vec{\nabla}\psi) + e^2\vec{A}\times\vec{A}\psi$$

جملات اول و چهارم صفر می‌شوند.

$$= ie\left[(\vec{\nabla}\psi)\times\vec{A} + \psi(\vec{\nabla}\times\vec{A})\right] + ie\vec{A}\times\vec{\nabla}\psi$$

$$= -ie\vec{A}\times\vec{\nabla}\psi + ie\psi\vec{B} + ie\vec{A}\times\vec{\nabla}\psi = ie\psi\vec{B}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/PhysicsClass

۱ـ۹ـ۱۲ـ نشان دهید که هر کدام از جملات معادلهٔ $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} - k^2\vec{A} = 0$ خودبه‌خود در

معادلهٔ برداری هلمهولتز $\nabla^2\vec{A}+k^2A=0$ و شرط سیملوله‌ای زیر صدق می‌کند. $\vec{\nabla}.\vec{A}=0$

[راهنمایی: ∇ را روی معادله اول اعمال کنید.]

حل

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A}-k^2\vec{\nabla}.\vec{A}=0\\ \\ \vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{C}\quad,\quad\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\times\vec{C}=0\end{array}\right\}\Rightarrow\quad\vec{\nabla}.\vec{A}=0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A}-k^2\vec{A}=0\xrightarrow{\text{بک کب}}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A})-\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\vec{A}-k^2\vec{A}=0$$

$$\Rightarrow\quad\nabla^2\vec{A}+k^2\vec{A}=0$$

۱ـ۹ـ۱۳ـ نظریهٔ رسانش گرمایی به معادلهٔ زیر منجر می‌شود.

$$\nabla^2\psi=K\,|\,\nabla\phi\,|^2$$

که در آن ϕ پتانسیلی است که در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند: $\nabla^2\phi=0$ نشان دهید که $\psi=\frac{1}{2}K\phi^2$ یکی از جوابهای این معادله است.

حل

$$\nabla\psi=\nabla(\frac{1}{2}K\phi^2)=\frac{1}{2}K(\nabla\phi^2)=K\nabla\phi$$

$$\nabla.\nabla\psi=\nabla^2\psi=\nabla.(K\nabla\phi)=K\nabla.\nabla\phi=K\nabla^2\phi$$

$$\Rightarrow\quad\nabla^2\psi=0$$

پس ψ یکی از جوابها است.

بخش ۱ـ۱۰ـ انتگرال‌گیری برداری — مسائل صفحه ۷۷

۱ـ۱۰ـ۱ـ میدان نیرویی را که بر یک نوسانگر خطی دو بعدی وارد می‌شود می‌توان بصورت زیر توصیف کرد.

$$\vec{F}=-\hat{i}\,kx-\hat{j}\,ky$$

کاری را که در رفتن از نقطه (۱,۱) به نقطه (۴,۴) در مقابل این نیرو در هر یک از مسیرهای خط راست زیر انجام می‌شود محاسبه کنید. (الف) (۱,۱) → (۴,۱) → (۴,۴)

(ب) (۱,۱) → (۱,۴) → (۴,۴) (ج) (۱,۱) در امتداد خط $x=y$ → (۴,۴)

برای این کار باید انتگرال $-\int_{(1,1)}^{(4,4)}\vec{F}.\vec{dr}$ را در طول هر مسیر محاسبه کنید.

حل

$$W=-\int F.dr=-\int F_x\,dy-\int F_y\,dy$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

(الف) $W=-\int_{(1,1)}^{(4,1)} F_x\,dx-\int_{(1,1)}^{(4,1)} F_y\,dy-\int_{(4,1)}^{(4,4)} F_x\,dx-\int_{(4,1)}^{(4,4)} F_y\,dy$

$$W=-\int_{(1,1)}^{(4,1)} -kx\,dx-\int_{(4,1)}^{(4,4)} -ky\,dy=\frac{kx^2}{2}\Big|_1^4+\frac{ky^2}{2}\Big|_1^4 \Rightarrow$$

$$W=\cancel{18}K-\frac{K}{2}+8K-\frac{K}{2}=15K$$

(ب) $W=-\int_{(1,1)}^{(1,4)} F_y\,dy-\int_{(1,4)}^{(1,4)} F_x\,dx=\frac{ky^2}{2}\Big|_1^4+\frac{kx^2}{2}\Big|_1^4=15k$

(ج) $W=-\int_{(1,1)}^{(4,4)} F_x\,dx-\int_{(1,1)}^{(4,4)} F_y\,dy=\frac{kx^2}{2}\Big|_1^4+\frac{ky^2}{2}\Big|_1^4=15k$

۱ـ۱۰ـ۲ـ کاری را که در مقابل میدان نیروی $F=\frac{-iy}{x^2+y^2}+\frac{jx}{x^2+y^2}$ روی دایرهٔ واحد در صفحه xy (الف) در جهت پاد ساعتگرد از ۰ تا π (ب) در جهت ساعتگرد از ۰ تا $-\pi$ انجام می‌شود محاسبه کنید توجه کنید که کار انجام شده به مسیر بستگی دارد.

حل

$x^2+y^2=R^2=1$

$$W=-\int \vec{F}.d\vec{r}=-\int F_x\,dx-\int F_y\,dy=-\int\frac{-y}{x^2+y^2}dx-\int\frac{+x}{x^2+y^2}dy$$

$$=\int y\,dx-\int x\,dy$$

$$\begin{cases} x=R\cos\theta \Rightarrow dx=-\sin\theta\,d\theta \\ y=R\sin\theta \Rightarrow dy=\cos\theta\,d\theta \end{cases}$$

$$W=\int \sin\theta(-\sin\theta\,d\theta)-\int\cos\theta\,(\cos\theta d\theta)$$

$$=-\int\sin^2\theta\,d\theta-\int\cos^2\theta\,d\theta=-\int(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$0\to\pi:\ W=-\int_0^{\pi}d\theta=-\theta\Big|_0^{\pi}=-\pi$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$0 \to -\pi : W = -\int_{0}^{-\pi} d\theta = -\theta \Big|_{0}^{-\pi} = \pi$$

۱ـ۱۰ـ۳ـ کاری را که در رفتن از نقطه (۱,۱) به نقطه (۳,۳) انجام می‌دهید محاسبه کنید. نیرویی را که اعمال می‌کنید به قرار $\vec{F} = \hat{i}(x-y) + \hat{j}(x+y)$ بگیرید. مسیری را که اختیار می‌کنید به وضوح مشخص کنید توجه کنید که این میدان نیرو ناپایستار است.

حل دو مسیر انتخاب می‌کنیم.

(الف) $(1,1) \to (1,3) \to (3,3)$

$$W = -\int F_x\,dx - \int F_y\,dy = -\int_{(1,1)}^{(1,3)} (x+y)dy - \int_{(1,3)}^{(3,3)} (x-y)dx$$

$$W = -\int_{(1,1)}^{(1,3)} (1+y)dy - \int_{(1,3)}^{(3,3)} (x-3)dx = -(y+\frac{y^2}{2})\Big|_1^3 - (\frac{x^2}{2}-3x)\Big|_1^3 \Rightarrow$$

$$W = (1+\frac{1}{2}) - (3+\frac{9}{2}) + (\frac{1}{2}-3) - (\frac{9}{2}-9) = 4$$

(ب) $(1,1) \to (3,1) \to (3,3)$

$$W = -\int F_x\,dx - \int F_y\,dy = -\int_{(1,1)}^{(3,1)} (x-y)dx - \int_{(3,1)}^{(3,3)} (x+y)dy$$

$$= -\int_{(1,1)}^{(3,1)} (x-1)dx - \int_{(3,1)}^{(3,3)} (3+y)dy = (-\frac{x^2}{2}+x)\Big|_1^3 - (3y+\frac{y^2}{2})\Big|_1^3$$

$$= (-\frac{9}{2}+3) - (-\frac{1}{2}+1) + (3+\frac{1}{2}) - (9+\frac{9}{2}) = 12$$

۱ـ۱۰ـ۴ـ $\oint \vec{r}\cdot d\vec{r}$ را محاسبه کنید.

[یادآوری: نماد $\oint$ به معنای بسته بودن حلقهٔ مسیر انتگرال‌گیری است].

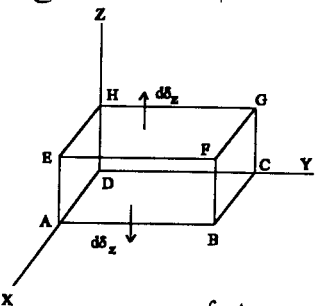
حل

$$\oint \vec{r}\cdot d\vec{r} = \oint (x\,dx + y\,dy + z\,dz) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z^2 \Big|_A^A = 0$$

۱ـ۱۰ـ۵ـ عبارت: $\frac{1}{3}\int_S \vec{r}\cdot d\vec{\sigma}$ را روی مکعب واحد که با نقطهٔ (۰,۰,۰) و نقطه‌های به فاصلهٔ

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

واحد از این نقطه روی هر یک از محورهای x، y و z تعریف می‌شود محاسبه کنید. توجه کنید که: (الف) $\vec{r}.d\vec{\sigma}$ برای سه تا از سطوح برابر صفر است و (ب) سهم هر یک از سه سطح دیگر در انتگرال برابر است.



حل

$$\frac{1}{3}\int_S \vec{r}.d\vec{\sigma}=\frac{1}{3}\int(\hat{i}x+\hat{j}y+\hat{k}z).d\vec{\sigma}$$

$$=\frac{1}{3}\int_{ABCD}(\hat{i}x+\hat{j}y+\hat{k}z)(-kd\sigma_z)=0 \qquad (I)$$

$$\frac{1}{3}\int_{EFGH}\vec{r}.d\vec{\sigma}=\frac{1}{3}\int(\hat{i}x+\hat{j}y+\hat{k}z)(kdxdy)=\int_{Z=1}zdxdy=1 \qquad (II)$$

برای سطوح ADEH و CDGH رابطه (I) و برای سطوح ABFE و BCGF رابطه (II) برقرار است.

$$\frac{1}{3}\int_S \vec{r}.d\vec{\sigma}=\frac{1}{3}\left[\int_{EFGH}\vec{r}.d\vec{\sigma}+\int_{BCGF}\vec{r}.d\vec{\sigma}+\int_{ABFE}\vec{r}.d\vec{\sigma}\right]=\frac{1}{3}\times 3=1$$

۱ـ۱۰ـ۶ـ از طریق بسط انتگرال سطحی نشان دهید که

$$\lim_{\int d\tau\to 0}\frac{\int_S d\vec{\sigma}\times\vec{V}}{\int d\tau}=\vec{\nabla}\times\vec{V}$$

[راهنمایی: حجم دیفرانسیلی dxdydz را اختیار کنید.]

حل

$$\int d\vec{\sigma}\times\vec{V}=\hat{i}\int(d\sigma_y V_z-d\sigma_z V_y)+\hat{j}\int(d\sigma_z V_x-d\sigma_x V_z)+\hat{k}\int(d\sigma_x V_y-d\sigma_y V_x)$$

$$=\hat{i}\int\Big[dxdz(V_z+\frac{\partial V_z}{\partial z}\frac{dz}{2})-dxdz(V_z-\frac{\partial V_z}{\partial z}\frac{dz}{2})-dxdy(V_y+\frac{\partial V_y}{\partial y}\frac{dy}{2})$$

$$+dxdy(V_y-\frac{\partial V_y}{\partial y}\frac{dy}{2})\Big]+j\int\Big[dxdy(V_x+\frac{\partial V_x}{\partial x}\frac{dx}{2})-dxdy(V_x-\frac{\partial V_x}{\partial x}\frac{dx}{2})$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$-dy\,dz(V_z+\frac{\partial V_z}{\partial z}\frac{dz}{۲})+dy\,dz(V_z-\frac{\partial V_z}{\partial z}\frac{dz}{۲})\Big]+\hat{k}\int\Big[dx\,dz(V_y+\frac{\partial V_y}{\partial y}\frac{dy}{۲})$$

$$-dy\,dz(V_y-\frac{\partial V_y}{\partial y}\frac{dy}{۲})-dx\,dz(V_x+\frac{\partial V_x}{\partial x}\frac{dx}{۲})\Big]+dx\,dz(V_x-\frac{\partial V_x}{\partial x}\frac{dx}{۲})\Big]$$

$$=\hat{i}\int(\frac{\partial V_z}{\partial y}-\frac{\partial V_y}{\partial z})dx\,dy\,dz+\hat{j}\int(\frac{\partial V_x}{\partial z}-\frac{\partial V_z}{\partial x})dx\,dy\,dz+\hat{k}\int(\frac{\partial V_y}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial y})dx\,dy\,dz$$

$$=\hat{i}(\frac{\partial V_z}{\partial y}-\frac{\partial V_y}{\partial z})\int d\tau+\hat{j}(\frac{\partial V_x}{\partial z}-\frac{\partial V_z}{\partial x})\int d\tau+\hat{k}(\frac{\partial V_y}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial y})\int d\tau$$

$$=(\vec{\nabla}\times\vec{V})\int d\tau \quad\Rightarrow\quad \vec{\nabla}\times\vec{V}=\frac{\int d\vec{\sigma}\times\vec{V}}{\int d\tau}$$

بخش ۱ـ۱۱ـ قضیهٔ گاؤس — مسائل صفحه ۸۱

۱ـ۱۱ـ۱ـ با استفاده از قضیهٔ گاوس ثابت کنید که برای سطح بستهٔ S داریم $\int_S d\vec{\sigma}=۰$

حل $\vec{V}$: بردار ثابت غیر صفر

$$\int_S \vec{V}.d\vec{\sigma}=\int_V \vec{\nabla}.\vec{V}\,d\tau=۰ \quad\Rightarrow$$

$$\vec{V}\int_S d\vec{\sigma}=۰ \quad\Rightarrow\quad |\vec{V}|\neq ۰ \quad\Rightarrow\quad \boxed{\int_S d\sigma=۰}$$

۱ـ۱۱ـ۲ـ نشان دهید که $\frac{۱}{۳}\int_S \vec{r}\,.\,d\vec{\sigma}=V$ که در آن V حجمی است که توسط سطح بستهٔ S محاط شده است. [یادآوری: این تعمیم مسئله ۱-۱۰-۵ است].

حل

$$\frac{۱}{۳}\int_S \vec{r}\,.\,d\vec{\sigma}=\frac{۱}{۳}\int_V \underbrace{\vec{\nabla}.\vec{r}}_{۳}\,d\tau=\frac{۱}{۳}\int_V ۳d\tau=\int d\tau=V$$

۱ـ۱۱ـ۳ـ اگر $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ نشان دهید که برای هر سطح بستهٔ S داریم: $\int_S \vec{B}.d\vec{\sigma}=۰$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

حل

$$\int_S \vec{B}.d\vec{\sigma} = \int_V \vec{\nabla}.\vec{B}\,d\tau = \int_V \vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\times\vec{A})\,d\tau = 0$$

۱-۱۱-۲- فرض کنید که ψ یکی از جوابهای معادلهٔ لاپلاس در داخل حجم V باشد (و مشتقهایی از آن که در لاپلاسی ظاهر می‌شوند پیوسته باشند). ثابت کنید که انتگرال مشتق قائم ψ ($\vec{\nabla}\psi.\vec{n}$ یا $\frac{\partial\psi}{\partial n}$) روی هر سطح بسته در داخل V، صفر است.

حل

$$\int \vec{\nabla}\phi.\vec{n}\,d\vec{\sigma} = \oint_S \vec{\nabla}\phi\,d\vec{\sigma} = \int_V \vec{\nabla}.\vec{\nabla}\phi\,d\tau = \int \underbrace{\nabla^2\phi}_{\text{معادله لاپلاس}}\,d\tau = 0$$

۱-۱۱-۵- در تشابه با تعریفهای انتگرالی گرادیان، دیورژانس و تاو در بخش ۱-۱۰ نشان دهید

$$\nabla^2\phi = \lim_{\int d\tau \to 0} \frac{\int \vec{\nabla}\phi.d\vec{\sigma}}{\int d\tau}$$

حل

$$\oint_S \vec{\nabla}\phi.d\vec{\sigma} = \int_V \vec{\nabla}.\vec{\nabla}\phi\,d\tau = \int_V \nabla^2\phi\,d\tau = \nabla^2\phi\int_V d\tau$$

$$\Rightarrow \quad \nabla^2\phi = \frac{\int \vec{\nabla}\phi.d\vec{\sigma}}{\int d\tau}$$

۱-۱۱-۶- بردار جابجایی الکتریکی، $\vec{D}$، در معادله ماکسول $\vec{\nabla}.\vec{D}=\rho$ صدق می‌کند که در آن ρ چگالی بار (به ازای یکای حجم) است در مرز بین دو محیط چگالی بار سطحی σ (به ازای واحد مساحت) وجود دارد. نشان دهید که یک شرط مرزی برای $\vec{D}$ به قرار زیر وجود دارد:

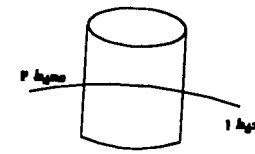
$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1).\vec{n} = \sigma$$

که در آن n برداریکهٔ عمود بر سطح و به سوی بیرون از محیط اول است. [راهنمایی: قرص بسیار کوچکی مانند شکل زیر در نظر بگیرید.]

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

حل

$$\vec{\nabla}.\vec{D}=\rho \Rightarrow \int_V \vec{\nabla}.\vec{D}d\tau=\int \rho d\tau=q \Rightarrow$$



$$\int_V \vec{\nabla}.\vec{D}d\tau=\int_S \vec{D}.d\vec{\sigma}=q=\sigma.\Delta S \Rightarrow$$

$$\underbrace{\int \vec{D}_2.d\vec{\sigma}}_{\text{ناحیه دوم}}+\underbrace{\int \vec{D}_1.d\vec{\sigma}}_{\text{ناحیه اول}}=\int \vec{D}_2.\hat{n}_2 d\vec{\sigma}+\int \vec{D}_1.\hat{n}_1 d\vec{\sigma}=\sigma\Delta S$$

$$\Rightarrow \vec{D}_2\hat{n}_2\Delta S+\vec{D}_1.\hat{n}_1\Delta S=\sigma\Delta S \Rightarrow \vec{D}_2.\hat{n}_2+\vec{D}_1.\hat{n}_1=\sigma \quad (2)$$

$$n_2=-n_1=n \quad (1)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \vec{D}_2.\hat{n}-\vec{D}_1.\hat{n}=\sigma \Rightarrow (\vec{D}_2-\vec{D}_1).\hat{n}=\sigma$$

۱ـ۱۱ـ۷ـ در معادلهٔ ۱-۶۲ الف به جای V میدان الکتریکی E و به جای f پتانسیل الکترومغناطیسی ϕ را بنشانید و نشان دهید: $\int \rho\phi d\tau=\varepsilon_0\int E^2 d\tau$

این اتحاد متناظر با یک انتگرال‌گیری جزء به جزء سه بعدی است.

[راهنمایی: $\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi$ و $\vec{\nabla}.\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ می‌توانید فرض کنید که ϕ به ازای مقادیر بزرگ r دست کم مانند r^{-1} صفر می‌شود.]

حل معادله ۱-۶۲ الف

$$\vec{\nabla}.(f\vec{V})=(\vec{\nabla}f).\vec{V}+f\vec{\nabla}.\vec{V}$$

$$\vec{\nabla}.(\phi\vec{E})=(\vec{\nabla}\phi).\vec{E}+\phi\vec{\nabla}.\vec{E}$$

از رابطه فوق روی حجم انتگرال می‌گیریم:

$$\int \vec{\nabla}.(\phi\vec{E})d\tau=\int(\vec{\nabla}\phi).\vec{E}d\tau+\int \phi\vec{\nabla}.\vec{E}d\tau$$

$$\oint \phi\vec{E}d\sigma=\int -\vec{E}.\vec{E}d\tau+\int \phi\frac{\rho}{\varepsilon_0}d\tau=0$$

$$-\int E^2 d\tau+\frac{1}{\varepsilon_0}\int \phi\rho d\tau=0 \Rightarrow \int \rho\phi d\tau=\varepsilon_0\int E^2 d\tau$$

۱ـ۱۱ـ۸ـ توزیع خاصی از جریانهای الکتریکی حالت پایا در فضا جایگزیده است. سطح مرزی را آنقدر دور اختیار می‌کنیم که چگالی جریان $\vec{J}$ در همه جای سطح برابر صفر باشد. نشان دهید که $\int \vec{J}d\tau=0$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

[راهنمایی: هر بار یکی از مولفه‌های $\vec{J}$ را در نظر بگیرید. با داشتن $\vec{\nabla}.\vec{J}=0$ نشان دهید: $\vec{J}_i=\nabla.x_i\vec{J}$ و قانون گاؤس را بکار ببرید.]

حل

$$\vec{\nabla}.\vec{J}=0 \quad \Rightarrow \quad J_i=\nabla.x_i\vec{J}$$

$$i=1\ ,\ 2$$

$$i=1 \quad \Rightarrow \quad J_x=\vec{\nabla}.x\vec{J} \quad , \quad i=2 \quad \Rightarrow \quad J_y=\vec{\nabla}.y\vec{J}$$

$$\vec{\nabla}.x\vec{J}=\frac{\partial}{\partial x}(xJ_x)+\frac{\partial}{\partial y}(xJ_y)+\frac{\partial}{\partial z}(xJ_z)=J_x+x\frac{\partial J_x}{\partial x}+x\frac{\partial J_y}{\partial y}+x\frac{\partial J_z}{\partial z}$$

$$=J_x+x\left(\frac{\partial J_x}{\partial x}+\frac{\partial J_y}{\partial y}+\frac{\partial J_z}{\partial z}\right)=J_x+x\,\nabla.J=J_x$$

$$\left.\begin{aligned}\int J_x d\tau=\int_V \nabla.(x\vec{J})d\tau=\int_S x\vec{J}d\vec{\sigma}\rightarrow \int J_x d\tau=0\\ \int J_y d\tau=0\\ \int J_z d\tau=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \int J d\tau=0$$

۱-۱۱-۹- می‌توان نشان داد که برای ایجاد دستگاه جایگزیده‌ای از جریانهای الکتریکی پایا (با چگالی جریان $\vec{J}$) و میدانهای مغناطیسی باید کاری انجام داد که عبارت است از:

$$W=\frac{1}{2}\int \vec{H}.\vec{B}d\tau$$

این رابطه را به رابطه مقابل تبدیل کنید. $W=\frac{1}{2}\int \vec{J}.\vec{A}d\tau$

که در آن $\vec{A}$ پتانسیل برداری مغناطیسی است: $\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{B}$

[راهنمایی: در معادلهٔ ماکسول جمله مربوط به جریان جابجایی را صفر بگیرید: $\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=0$ اگر میدانها و جریانها جایگزیده باشند می‌توانیم سطح مرزی را چنان دور بگیریم که انتگرال میدانها و جریانها روی آن صفر شود.]

حل یکی از معادلات ماکسول $\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

$$W=\frac{1}{2}\int \vec{H}.\vec{B}\,d\tau=\frac{1}{2}\int \vec{H}(\vec{\nabla}\times\vec{A})d\tau=\frac{1}{2}\int(\vec{\nabla}\times\vec{H}).\vec{A}d\tau=\frac{1}{2}\int \vec{J}.\vec{A}d\tau$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram: t.me/FizikClass

بخش ۱ـ۱۲ـ قضیه استوکس — مسائل صفحه ۸۵

۱ـ۱۲ـ۱ـ داریم $t=-\hat{i}y+\hat{j}x$ به کمک قضیهٔ استوکس نشان دهید که انتگرال روی یک منحنی بستهٔ پیوسته در صفحه xy عبارت است از مساحت محاط شده درون آن منحنی.

$$\frac{1}{2}\oint t.d\lambda=\frac{1}{2}\oint(xdy-ydx)=A$$

حل

$$\frac{1}{2}\oint \vec{t}.d\vec{\lambda}=\frac{1}{2}\int_s(\vec{\nabla}\times\vec{t}).d\vec{\sigma}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{t}.d\vec{\sigma}=d\vec{\sigma}.\vec{\nabla}\times\vec{t}=\begin{vmatrix}0 & 0 & d\sigma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ -y & x & 0\end{vmatrix}$$

$$=d\sigma(1+1)=2\sigma=2dxdy \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}\oint\vec{t}.d\vec{\lambda}=\frac{1}{2}\int_s 2dxdy=A$$

۱ـ۱۲ـ۲ـ در محاسبهٔ گشتاور مغناطیسی یک حلقهٔ جریان به انتگرال خطی زیر برمی‌خوریم.

$$\oint\vec{r}\times d\vec{r}$$

(الف) این انتگرال را روی محیط یک حلقه جریان (در صفحه xy) محاسبه کنید و نشان دهید که بزرگی عددی یا اسکالر این انتگرال خطی دو برابر مساحت احاطه شده است.

(ب) محیط یک بیضی بنابر تعریف، عبارت است از $\vec{r}=\hat{i}a\cos\theta+\hat{j}b\sin\theta$ با استفاده از بند (الف) نشان دهید که مساحت بیضی برابر πab است.

حل (الف) $\oint\vec{r}\times d\vec{r}=\oint rdr\sin\frac{\pi}{2}\hat{k}\quad,\quad r=cte\quad\Rightarrow\quad r(2\pi r)\hat{k}=2A\hat{k}$

(ب) معادله بیضی : $\vec{r}=\hat{i}a\cos\theta+\hat{j}b\sin\theta$

$$\vec{r}\times d\vec{r}=\hat{k}abd\theta,\ d\vec{r}=-\hat{i}a\sin\theta+\hat{j}b\cos\theta$$

$$\oint\vec{r}\times d\vec{r}=\int\vec{k}\,abd\theta=\hat{k}ab\int d\theta=2\pi ab\hat{k}$$

با مقایسه با بند (الف) نتیجه اینکه $2\pi ab=2A$ پس $\pi ab=A$

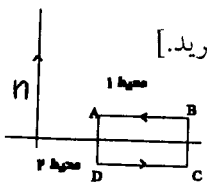
PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

۱-۱۲-۴- میدان مغناطیسی $\vec{H}$ در حالت پایا در معادلهٔ ماکسول $\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}$ صدق می‌کند که در آن $\vec{J}$ چگالی جریان (به ازای یک متر مربع) است. در مرز بین دو محیط، یک چگالی جریان سطحی $\vec{k}$ (به ازای یک متر) وجود دارد. نشان دهید شرط مرزی روی $\vec{H}$ بصورت زیر است.

$$\hat{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{k}$$

که در آن n برداریکهٔ عمود بر سطح و به سوی بیرون محیط است.

[راهنمایی: حلقهٔ باریکی عمود بر مرز مشترک، مانند شکل در نظر بگیرید.]



حل

$$\oint\vec{H}.d\vec{\lambda}=\int\vec{\nabla}\times\vec{H}.d\vec{\sigma}$$

$$\oint H.d\lambda=\int_{AB}\vec{H}.d\vec{\lambda}+\int_{CD}\vec{H}.d\vec{\lambda}=\int(\hat{n}\times\vec{H}_2).d\vec{\lambda}-\int(\hat{n}\times\vec{H}_1).d\vec{\lambda}$$

$$=\int\hat{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1).d\vec{\lambda}=\int\vec{\nabla}\times\vec{H}.d\vec{\sigma}=\int\vec{J}.d\vec{\sigma}=\int\vec{k}.d\vec{\lambda}$$

$$\Rightarrow\quad\hat{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{K}$$

۱-۱۲-۵- با استفاده از معادله ماکسول، $\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}$ که در آن $\vec{J}$ چگالی جریان است و $\vec{E}=0$ نشان دهید:

$$\oint\vec{H}.d\vec{r}=I$$

که در آن I جریان الکتریکی خالص محصور در انتگرال خطی است. این دو معادله صورتهای دیفرانسیلی و انتگرالی قانونی آمپر در مبحث مغناطیس‌اند.

حل

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}$$

$$\oint_C\vec{H}.d\vec{r}=\int_S(\vec{\nabla}\times\vec{H})d\vec{\sigma}=\int_S\vec{J}\,d\vec{\sigma}=I$$

۱-۱۲-۶- جریان الکتریکی در حلقهٔ به شعاع R، القای مغناطیسی B را تولید می‌کند نشان دهید که بزرگی پتانسیل برداری $\vec{A}$ $(\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A})$ در حلقه عبارت است از $|A|=\frac{\phi}{2\pi R}$ که در آن ϕ کل شار مغناطیسی است که از حلقه می‌گذرد.

[یادآوری: A بر حلقه مماس است.]

حل

$$\phi=\int_S\vec{B}.d\vec{S}=\int_S(\vec{\nabla}\times\vec{A}).d\vec{S}=\oint_C\vec{A}.d\vec{\ell}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\phi=\oint_C |A|\,|d\ell|\,\cos\theta\,,\ \theta=0 \Rightarrow \phi=|A|\oint_C d\ell$$

$$\Rightarrow \phi=|A|\,2\pi R \Rightarrow |A|=\frac{\phi}{2\pi R}$$

۱ـ۱۲ـ۷ـ هرگاه S سطح بسته‌ای باشد ثابت کنید: $\int_S \vec{\nabla}\times\vec{V}.d\vec{\sigma}=0$

حل

راه اول

$$\int_S \vec{\nabla}\times\vec{V}.d\vec{\sigma}=\int_V \vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\times\vec{V})d\vec{\tau}=0$$

راه دوم

$$\oint_{\text{کل}} \vec{V}.d\vec{\lambda}=\int_S \vec{\nabla}\times\vec{V}d\vec{\sigma}$$

$$\int_S \vec{\nabla}\times\vec{V}.d\vec{\sigma}=\int_{S_1} \vec{\nabla}\times\vec{V}.d\vec{\sigma}+\int_{S_2} \vec{\nabla}\times\vec{V}.d\vec{\sigma}$$

$$=\oint \vec{V}.d\vec{\lambda}+\int \vec{V}.(-d\vec{\lambda})=0$$

۱ـ۱۲ـ۸ـ $\oint \vec{r}.d\vec{r}$ (در مسئله ۱-۱۰-۴) را توسط قضیه استوکس محاسبه کنید.

حل

$$\oint_C \vec{r}.d\vec{r}=\int(\vec{\nabla}\times\vec{r}).d\vec{\sigma}=0$$

۱ـ۱۲ـ۹ـ ثابت کنید: $\oint u\vec{\nabla}v.d\vec{\lambda}=-\oint v\vec{\nabla}u\,d\vec{\lambda}$

حل

$$\int \vec{\nabla}(uv).d\vec{\lambda}=\oint v,\vec{\nabla}u\,d\vec{\lambda}+\oint u\vec{\nabla}v\,d\vec{\lambda} \qquad (1)$$

$$\int_S \vec{\nabla}(uv).d\vec{\lambda}=\int_S \vec{\nabla}\times\left[\vec{\nabla}(uv)\right]d\vec{\sigma}=0 \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \oint v.\vec{\nabla}u\,d\vec{\lambda}=-\int u\vec{\nabla}v\,d\vec{\lambda}$$

۱ـ۱۲ـ۱۰ـ ثابت کنید: $\oint u\vec{\nabla}v.d\vec{\lambda}=\int_S(\vec{\nabla}u)\times(\vec{\nabla}v).d\vec{\sigma}$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

حل

$$\oint_C u\vec{\nabla}v.d\vec{\lambda} = \oint_S \vec{\nabla}\times(u\vec{\nabla}v)d\vec{\sigma}$$

$$= \oint_S \vec{\nabla}u\times\vec{\nabla}v\,d\vec{\sigma} + \oint_S \underbrace{u\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}.v)}_{\text{صفر}}d\vec{\sigma}$$

$$= \oint_S (\vec{\nabla}u)\times(\vec{\nabla}v)d\vec{\sigma}$$

بخش ۱ـ۱۳ـ نظریهٔ پتانسیل — مسائل صفحه ۹۸

۱ـ۱۳ـ۱ـ اگر نیروی $\vec{F}$ بصورت زیر معلوم باشد.

$$\vec{F} = (x^2+y^2+z^2)^n(\hat{i}x+\hat{j}y+\hat{k}z)$$

عبارات زیر را بیابید.

(الف) $\vec{\nabla}.\vec{F}$ (ب) $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ (ج) پتانسیل اسکالر $\phi(x,y,z)$ به گونه‌ای که $\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$

(د) پتانسیل اسکالر به ازای چه مقداری برای نمای n هم در مبدأ و هم در بی‌نهایت واگرا می‌شود؟

حل

(الف) $\vec{\nabla}.\vec{F} = \vec{\nabla}F(r) + r\dfrac{dF}{dr} = (3+2n)r^{2n}$

(ب) $\vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{\nabla}\times F(r)r = 0$

(ج) $\phi = -\int_0^r F.dr = -\int_0^r r^{2n-1}dr \Rightarrow \phi = -\dfrac{1}{2n+2}r^{2n+2}$

(د) $n=-1 \Rightarrow \phi = -\text{Ln } r$

۱ـ۱۳ـ۲ـ کره‌ای به شعاع a بطور یکنواخت (در سرتاسر حجم خود) باردار شده است. پتانسیل الکتروستاتیکی $\phi(r)$ را به ازای $0 \le r \le \infty$ به دست آورید.

[راهنمایی: در بخش ۱-۱۴ نشان داده می‌شود که نیروی کولونی وارد بر بار آزمون در $r=r_0$ فقط به بار در فواصل کمتر از r_0 بستگی دارد و از بار واقع در فواصل بزرگتر از r_0 مستقل است. توجه کنید که این مطلب فقط برای توزیع بار با تقارن کروی صادق است.]

حل

خارج کره $r>a \Rightarrow V = -\int \vec{E}.d\vec{r}$

Physicsclass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$V(r) - V_{(\text{مبدأ})} = -\int_{\text{مبدأ}}^{r} \vec{E}.d\vec{r} = -\int_{\text{مبدأ}}^{r} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}.d\vec{r}$$

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{r} -\frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\oint \vec{E}.d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\,4\pi r^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow$$

$$E\,4\pi r^2 = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi a^3\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow E_{in} = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$$

۱ـ۱۳ـ۳ـ محاسبهٔ حرکت یک ذره در یک پتانسیل معلوم مسئله‌ای معمولی در مکانیک کلاسیک است بنابر قانون گاؤس، در بخش ۱-۱۴ نیروی گرانشی وارد بریکای جرم m_0 به فاصلهٔ r_0 از مرکز کرهٔ جرم‌دار غیر چرخان با چگالی یکنواخت (ρ_0) از بایش جرم واقع در $r \le r_0$ حاصل می‌شود. جرم واقع در $r > r_0$ نقشی در این نیرو ندارد.

(الف) نشان دهید که $\frac{\vec{F}}{m_0} = -(\frac{4\pi G\rho_0}{3})r$ ، $0 \le r \le a$ که در آن a شعاع کره است.

(ب) پتانسیل گرانشی متناظر را در $0 \le r \le a$ بیابید.

(ج) تصور کنید که یک سوراخ قائم در زمین حفر شده باشد بطوریکه سوراخ از مرکز کره زمین بگذرد و تا طرف مقابل روی کرهٔ زمین ادامه داشته باشد. با چشمپوشی از چرخش زمین و با فرض اینکه چگالی ثابت و برابر $\rho_0 = 5/5 g/Cm^3$ باشد. ماهیت حرکت ذره‌ای را که در این سوراخ رها شده باشد، تعیین کنید دورهٔ حرکت این ذره چقدر است؟

[یادآوری: $\vec{F} \propto \vec{r}$ عملاً تقریب ضعیفی است. با توجه به متغیر بودن چگالی تقریب $\vec{F} = Cte$ در نیمهٔ خارجی خط شعاعی و $\vec{F} \propto \vec{r}$ در نیمه درونی آن، تقریب به مراتب بهتری است.]

حل (الف)

$$F_e = K\frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \Rightarrow G \text{ مشابه } K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$\varepsilon_0 \oint E.dS = q \xrightarrow[\text{گرانش}]{\text{مشابه‌آن‌برای}} G\oint E_g.dS = m \Rightarrow \oint E_g.dS = \frac{m}{G} \Rightarrow$$

$$\oint E_g.dS = \frac{m}{K} \Rightarrow \oint E_g(dS)\cos 0 = \frac{m}{K} \Rightarrow E = \frac{m}{4\pi r^2 K} = \frac{\rho v}{4\pi r^2 K}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$F=Em_\circ \Rightarrow \frac{F}{m_\circ}=E \quad , \quad \frac{F}{m_\circ}=\frac{\rho v}{4\pi r^2 K}=\frac{(\frac{4}{3}\pi r^3)\rho}{4\pi r^2 K}=\frac{\rho r}{3K} \qquad (1)$$

$$K_E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ} \xrightarrow{\text{مشابه}} K_g=\frac{1}{4\pi G}, \frac{F}{m_\circ}=\frac{4\rho\pi G}{3}r \Rightarrow$$

$$F=\frac{4\pi G m_\circ \rho}{3}r \Rightarrow \phi=-\int F dr=-\frac{4\pi G\rho m_\circ r^2}{6} \qquad (ب)$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m_\circ}{K}} \quad , \quad (1) \Rightarrow F=k'r \qquad (ج)$$

$$T=\sqrt{\frac{3}{4\pi G\rho r}}$$

۱-۱۳-۴- مبدأ مختصات دکارتی را در مرکز زمین بگیرید. ماه را روی محور Z به فاصله ثابت R (فاصله مرکز تا مرکز) از مبدأ بگیرید. نیرویی کشندی که ماه بر ذرات واقع بر سطح زمین (در نقطه x، y و z) وارد می‌آورد عبارت است از:

$$F_x=-GMm\frac{x}{R^3} \quad , \quad F_y=-GMm\frac{y}{R^3} \quad , \quad F_z=+GMm\frac{2z}{R^3}$$

پتانسیلی را محاسبه کنید که این نیروی کشندی را می‌دهد.

حل

$$\vec{F}=-\vec{\nabla}V \Rightarrow V=-\int F.dr=-\int F_x dx-\int F_y dy-\int F_z dz$$

$$V=\frac{GMm}{R^3}\left[\int x dx+\int y dy-\int 2z dz\right]$$

$$V=\frac{GMm}{R^3}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}-z^2\right)=\frac{GMm}{2R^3}(x^2+y^2-2z^2)$$

۱-۱۳-۵- مولفه‌های القای مغناطیسی B حاصل از سیم مستقیم و دراز حاصل جریان I عبارت‌اند از:

$$\vec{B}=\frac{\mu_\circ I}{2\pi}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, \circ\right)$$

پتانسیل برداری مغناطیسی

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

حل

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a_3}{\partial y}-\dfrac{\partial a_2}{\partial z}=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}\right) & (1) \\ \dfrac{\partial a_1}{\partial z}-\dfrac{\partial a_3}{\partial x}=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right) & (2) \\ \dfrac{\partial a_2}{\partial x}-\dfrac{\partial a_1}{\partial y}=0 & (3) \end{cases}$$

$$a_2=0 \Rightarrow \frac{\partial a_1}{\partial y}=0 \Rightarrow a_1=0 \Rightarrow \frac{\partial a_3}{\partial y}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) \Rightarrow$$

$$a_3=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int\frac{-y\,dy}{x^2+y^2}+f_3(x,y)=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Ln}(x^2+y^2)+f_3$$

از (۲) , $a_1=0 \Rightarrow 0+\dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\dfrac{2x}{x^2+y^2}\right)-\dfrac{\partial f_3}{\partial x}=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right) \Rightarrow$

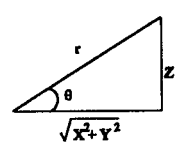
$$f_3=0 \Rightarrow a_3=-\frac{\mu_0 I}{4\pi}(\mathrm{Ln}(x^2+y^2)) \Rightarrow A=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[-K\mathrm{Ln}(x^2+y^2)\right]$$

۱ـ۱۳ـ۶ـ اگر داشته باشیم $\vec{B}=\dfrac{\vec{r}_0}{r^2}=\left(\dfrac{x}{r^3},\dfrac{y}{r^3},\dfrac{z}{r^3}\right)$ بردار $\vec{A}$ را چنان بیابید که $\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{B}$. یکی از جوابهای ممکن به صورت زیر است.

$$\vec{A}=\frac{iyz}{r(x^2+y^2)}-\frac{jxz}{r(x^2+y^2)}$$

حل

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A_z}{\partial y}-\dfrac{\partial A_y}{\partial z}=\dfrac{x}{r^3} \\ \dfrac{\partial A_x}{\partial z}-\dfrac{\partial A_z}{\partial x}=\dfrac{y}{r^3} \\ \dfrac{\partial A_y}{\partial x}-\dfrac{\partial A_x}{\partial y}=\dfrac{z}{r^3} \end{cases}$$



$$A_z=0 \Rightarrow -\frac{\partial A_y}{\partial z}=\frac{x}{r^3} \Rightarrow A_y=-x\int\frac{dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow$$

$$A_y=-x\int\frac{dz}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{z^2}{x^2+y^2}\right)^{\frac{3}{2}}},\ z=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\tan\theta \Rightarrow dz=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{Sec}^2\theta\, d\theta$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\Rightarrow \quad A_y = -x\int \frac{\mathrm{Sec}^2\theta d\theta}{(x^2+y^2)(\mathrm{Sec}^2\theta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-x}{(x^2+y^2)}\int \frac{d\theta}{\mathrm{Sec}\theta} = \frac{-xz}{(x^2+y^2)r}$$

بهمین نحو داریم $A_x = \dfrac{yz}{r(x^2+y^2)}$

۱ـ۱۳ـ۷ـ نشان دهید هر بردار ثابت $\vec{B}$ (در هر جهتی) در دو معادله زیر صدق می‌کند.

$$\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{B}\times\vec{r}) \quad , \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

حل

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{\nabla}\times\left(\frac{1}{2}(\vec{B}\times\vec{r}\right) = \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\times(\vec{B}\times\vec{r})$$

$$= \frac{1}{2}\left[\vec{B}(\vec{\nabla}.\vec{r}) + (\vec{r}.\vec{\nabla})\vec{B} - \vec{r}(\vec{\nabla}.\vec{B}) - (\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{r}\right] = \vec{B}$$

۱ـ۱۳ـ۸ـ بردار $\vec{B}$ بصورت حاصلضرب دو گرادیان تعریف می‌شود.

$\vec{B} = (\vec{\nabla}u)\times(\vec{\nabla}v)$ که در آن u و v توابعی اسکالرند.

(الف) نشان دهید $\vec{B}$ سیملوله‌ای است.

(ب) نشان دهید: $\vec{A} = \frac{1}{2}(u\vec{\nabla}v - v\vec{\nabla}u)$

پتانسیل برداری مربوط به $\vec{B}$ است به گونه‌ای که $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$

حل

(الف)

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = \nabla.\left[(\vec{\nabla}u)\times(\vec{\nabla}v)\right] = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

(ب)

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \hat{i}\left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y}\right)$$

$$\vec{B} = (\vec{\nabla}u)\times(\vec{\nabla}v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} = \hat{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y}\right) +$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\hat{j}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\hat{k}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

با مقایسه مولفه به مولفه به رابطه زیر می‌رسیم.

$$\vec{A}=\frac{1}{2}(u\vec{\nabla}v-v\vec{\nabla}u)$$

۱ـ۱۳ـ۹ـ مابین القای مغناطیسی $\vec{B}$ و پتانسیل برداری مغناطیسی رابطهٔ $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ برقرار است از قضیه استوکس داریم:

$$\int\vec{B}.d\vec{\sigma}=\oint\vec{A}.d\vec{r}$$

نشان دهید که دو طرف این معادله تحت تبدیل پیمانه‌ای $\vec{A}\rightarrow\vec{A}+\nabla\phi$ ناورد است.

[یادآوری: تابع ψ را تک مقدار بگیرید. تبدیل پیمانه‌ای تام در مسئله ۳-۷-۴ بررسی می‌شود.]

حل

$$\int\vec{B}.d\vec{\sigma}=\int(\vec{\nabla}\times\vec{A}).d\vec{\sigma}=\oint\vec{A}.d\vec{r}\quad\Rightarrow$$

$$\int\vec{\nabla}\times(\vec{A}+\vec{\nabla}\phi).d\vec{\sigma}=\oint(\vec{A}+\vec{\nabla}\phi).d\vec{r}\quad\Rightarrow$$

$$\int(\vec{\nabla}\times\vec{A}+\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\phi).d\vec{\sigma}=\oint\vec{A}.d\vec{r}+\oint\vec{\nabla}\phi d\vec{r}\quad\Rightarrow$$

$$\int(\vec{\nabla}\times\vec{A}).d\vec{\sigma}=\oint\vec{A}.d\vec{r}+\oint\vec{\nabla}\phi.d\vec{r}\quad\Rightarrow$$

$$\int(\vec{\nabla}\times\vec{A}).d\vec{\sigma}=\oint\vec{A}.d\vec{r}+\phi\Big|_{C}^{C}\quad\Rightarrow\quad\int\vec{B}.d\vec{\sigma}=\oint\vec{A}.d\vec{r}$$

۱ـ۱۳ـ۱۰ـ برای میدان الکتریکی $\vec{E}$ و پتانسیل برداری مغناطیسی A، نشان دهید $\left[\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right]$ غیرچرخشی است و بنابراین می‌توانیم بنویسیم.

$$\vec{E}=-\nabla\vec{\phi}-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

حل

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0\quad\Rightarrow\quad\vec{\nabla}\times\vec{E}+\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=0\quad\Rightarrow$$

$$-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\frac{\partial(\vec{\nabla}\times\vec{A})}{\partial t}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

چون $\vec{E}+\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ غیرچرخشی است می‌توان نوشت $\vec{E}+\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}=-\vec{\nabla}\phi$

و در نتیجه داریم:

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

۱ـ۱۳ـ۱۱ـ نیروی کل وارد بر بار q که با سرعت V حرکت می‌کند به قرار زیر است.

$$\vec{F}=q(\vec{E}+\vec{V}\times\vec{B})$$

با استفاده از پتانسیلهای اسکالر و برداری نشان دهید:

$$\vec{F}=q\left[-\vec{\nabla}\phi-\frac{d\vec{A}}{dt}+\vec{\nabla}(\vec{A}.\vec{V})\right]$$

توجه داشته باشید که در اینجا به جای مشتق زمانی پاره‌ای $\vec{A}$ در مسئله ۱-۱۳-۱۰ مشتق زمانی کامل داریم.

حل ⇒

$$\vec{F}=q\left[\vec{E}+\vec{V}\times\vec{B}\right]=\vec{F}=q\left[-\vec{\nabla}\phi-\frac{d\vec{A}}{dt}+\vec{V}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})\right]$$

$$\vec{F}=q\left(-\vec{\nabla}\phi-\frac{d\vec{A}}{dt}+\vec{\nabla}(\vec{A}.\vec{V})-\vec{A}(\vec{\nabla}.\vec{V})\right]$$

چون V ثابت است پس $\vec{\nabla}.\vec{V}=0$ و داریم:

$$\vec{F}=q\left(-\vec{\nabla}\phi-\frac{d\vec{A}}{dt}+\vec{\nabla}(\vec{A}.\vec{V})\right]$$

بخش ۱ـ۱۴ـ قانون گاؤس ـ معادلهٔ پواسون — مسائل صفحه ۱۰۵

۱ـ۱۴ـ۱ـ قانون گاوس را برای حالتی دو بعدی بدست آورید که در آن:

$$\phi=-q\frac{\mathrm{Ln}\rho}{2\pi\varepsilon_0}\quad,\quad \vec{E}=-\vec{\nabla}\phi=q\frac{\rho_0}{2\pi\varepsilon_0\rho}$$

در اینجا q بار واقع در مبدأ است و یا اگر دستگاه دو بعدی برشی با ضخامت واحد از یک دستگاه (استوانه دوار) سه بعدی باشد q بار خطی با ازای یکای طول است. متغیر ρ بصورت شعاعی و برونسو از خط بار اندازه‌گیری می‌شود. ρ_0 بردار یکهٔ متناظر است (بخش ۲-۴).

حل

$$\frac{q}{\varepsilon_0}=\oint E.dS=\int\frac{q}{2\pi\varepsilon_0\rho}\hat{\rho}_0.(\rho d\phi dz)\hat{\rho}_0$$

$$\oint E.dS=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}(2\pi)=\frac{q}{\varepsilon_0}\Rightarrow\frac{q}{\varepsilon_0}=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

۱ـ۱۲ـ۲ـ (الف) نشان دهید که قانون گاؤس را می‌توان از معادلهٔ ماکسول به قرار زیر بدست آورد. $\vec{\nabla}.\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_\circ}$ که در آن ρ همان چگالی بار متداول است.

(ب) با فرض اینکه میدان الکتریکی بار نقطه‌ای q تقارن کروی دارد نشان دهید که از قانون گاؤس می‌توان عبارت عکس مجذوی کولن را به قرار زیر بدست آورد.

$$\vec{E}=\frac{q\hat{r}_\circ}{4\pi\varepsilon_\circ r^2}$$

حل (الف)

$$\vec{\nabla}.\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_\circ}\xrightarrow[\int_V d\tau]{\text{انتگرال روی حجم}}\int_V\vec{\nabla}.\vec{E}d\tau=\int_V\frac{\rho}{\varepsilon_\circ}d\tau$$

$$\int_V\vec{\nabla}.\vec{E}d\tau=\frac{1}{\varepsilon_\circ}\int_V\rho d\tau\xrightarrow[\int_V\vec{\nabla}.\vec{E}d\tau=\oint_S\vec{E}.d\vec{S}]{\text{با استفاده از قضیه گاوس}}\oint E.dS=\frac{q}{\varepsilon_\circ}$$

(ب)

$$\oint\vec{E}.d\vec{S}=\frac{q}{\varepsilon_\circ}\Rightarrow\vec{E}\oint d\vec{S}=\frac{q}{\varepsilon_\circ}\Rightarrow ES=\frac{q}{\varepsilon_\circ}\Rightarrow$$

$$E(4\pi r^2)=\frac{q}{\varepsilon_\circ}\Rightarrow\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ r^2}\hat{r}_\circ$$

۱ـ۱۲ـ۳ـ نشان دهید که مقدار پتانسیل الکترومغناطیسی ϕ در هر نقطه P برابر است با میانگین پتانسیل روی سطح کروی به مرکز P. هیچ بار الکتریکی روی کره یا درون آن موجود نیست.

[راهنمایی: از قضیه گرین معادله ۱-۹۷ بهره گیرید و در آن قرار دهید $v=\phi$ و همچنین به معادلهٔ ۱-۱۷۳ در بخش ۱-۱۵ توجه کنید.]

حل (معادله ۱-۹۷)

$$\int_V(u\vec{\nabla}.\vec{\nabla}v-v\vec{\nabla}.\vec{\nabla}u)d\tau=\int_S(u\vec{\nabla}v-v\vec{\nabla}u).d\vec{\sigma}$$

(معادله ۱-۱۷۳)

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)=-4\pi\delta(r)$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\left.\begin{array}{l}\int (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)\,d\tau = \int (u\vec{\nabla}v - v\vec{\nabla}u).\,d\vec{\sigma} \\ v=\phi \quad , \quad u=\frac{1}{r}=r^{-1} \quad , \quad \nabla(r^{-1})=\hat{r}_\circ\left(\frac{-1}{r^2}\right)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\int \left[\frac{1}{r}\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)\right] d\tau = \int \left(\frac{1}{r}\nabla\phi - \phi\nabla\frac{1}{r}\right).d\vec{\sigma} \Rightarrow$$

$$\int -\phi\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)d\tau = \int \left[\frac{1}{r}(-\vec{E}) - \phi\left(\frac{-1}{r^2}\right)\hat{r}_\circ\right].d\vec{\sigma} \Rightarrow$$

$$-\int \phi\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)d\tau = \int -\frac{1}{r}\vec{E}.d\vec{\sigma} - \int \phi\left(-\frac{1}{r^2}\right)\hat{r}_\circ.d\vec{\sigma} \Rightarrow$$

$$4\pi\phi = 0 + \int \frac{\phi}{r^2}\hat{r}_\circ.d\vec{\sigma} \Rightarrow$$

$$4\pi\phi = \frac{1}{r^2}\int \phi\, d\sigma \Rightarrow \phi = \frac{1}{4\pi r^2}\int \phi.d\vec{\sigma}$$

۱ـ۱۲ـ۲ـ با استفاده از معادلات ماکسول نشان دهید که پتانسیل برداری مغناطیسی $\vec{A}$ دستگاهی از جریانهای پایا در معادلهٔ برداری پواسون صدق می‌کند $\nabla^2\vec{A} = -\mu\vec{J}$ مشروط بر آنکه قرارداد کنیم $\vec{\nabla}.\vec{A} = 0$

حل

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \quad , \quad \vec{B} = \mu\vec{H}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} \Rightarrow \vec{\nabla}\times\left(\frac{\vec{B}}{\mu}\right) = \vec{J} \Rightarrow \frac{1}{\mu}\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{J}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \mu\vec{J} \Rightarrow \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A}) - \vec{\nabla}.\vec{\nabla}\vec{A} = \mu J \Rightarrow$$

$$\nabla^2\vec{A} = -\mu\vec{J}$$

بخش ۱ـ۱۵ـ قضیه هلمهولتز — مسائل صفحه ۱۱۳

۱ـ۱۵ـ۱ـ در این بخش بطور ضمنی اثبات شده است که یک تابع بصورت یکتا تعیین می‌شود. اگر بدانیم که (الف) [illegible] (ب) مجموعهٔ کاملی از شرایط

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

مرزی در آن صدق می‌کنند. این اثبات را بطور صریح بنویسید.

حل یکتا $\vec{V}$

$$\begin{cases} \vec{\nabla}.\vec{V}=S \\ \vec{\nabla}\times\vec{V}=C \\ V_n: \quad \text{مشخص} \end{cases}$$

$V_2 \rightarrow W=V_1-V_2$

$\phi(r)$ یکتا

$\nabla.\nabla\phi=0$

مجموعه کاملی از شرایط مرزی برقرار است

شرط اول را داد.

شرط دوم $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\phi=0$ است. شرط سوم: یکتاست $\Rightarrow$ $\begin{matrix}\nabla.\nabla\phi=0 \\ \nabla\times\nabla\phi=0\end{matrix}$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$(ب)\ dS_i = h_i dq_i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} dS_1 = h_1 dq_1 = dr \\ dS_2 = h_2 dq_2 = r d\theta \\ dS_3 = h_3 dq_3 = r \sin\theta d\phi \end{cases}$$

۲-۱-۳- دستگاه مختصات u، V و Z که به دفعات در الکتروستاتیک و در دینامیک شاره‌ها به کار می‌رود به قرار زیر تعریف می‌شود

$$xy = u$$

$$x^2 - y^2 = v$$

$$z = z$$

این دستگاه u، v متعامد است. (الف) ماهیت هر یک از سه خانواده از سطوح مختصاتی را به اختصار توصیف کنید. (ب) با ترسیم فصل مشترک سطوح u ثابت و سطوح v ثابت با صفحهٔ xy این دستگاه را در صفحهٔ xy ترسیم کنید. (ج) جهت بردارهای یکهٔ u_0 و v_0 را در هر چهار ربع مشخص کنید. (د) سرانجام آیا این دستگاه u، v و z راستگرد $(\hat{u}_0 \times \hat{v}_0 = +\hat{k})$ است یا چپگرد $(\hat{u}_0 \times \hat{v}_0 = -\hat{k})$؟

حل

$xy = u$	$x^2 - y^2 = v$	$z = z$
$y = \frac{u}{x}$	$\frac{x^2}{v} - \frac{y^2}{v} = 1$	صفحه
سهمی	هذلولی	

$$\hat{u}_0 \times \hat{v}_0 = -\hat{k}$$

دستگاه چپگرد است.

۲-۱-۴- یک دستگاه متعامد دو بعدی به کمک مختصات q_1 و q_2 توصیف می‌شود نشان دهید که ژاکوبی عبارت است از:

$$J\left(\frac{x,y}{q_1,q_2}\right) = h_1 h_2$$

که با معادلهٔ ۲-۱۰ سازگار است.

[راهنمایی: بهتر است که از مجذور دو طرف این معادله بهره گیریم.]

حل چون متعامد است.

$$h^2_{i=j} = \frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\frac{\partial y}{\partial q_j} = 0$$

$$h^2_{12} = \frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_2} = 0$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

بخش ۲ـ۱ـ مختصات خمیده خط — مسائل صفحه ۱۲۰

۲ـ۱ـ۱ـ نشان دهید که اگر فقط دستگاههای مختصات متعامد را در نظر بگیریم به ازای $i \neq j$ خواهیم داشت: $g_{ij}=0$ (معادله ۲-۷)

[راهنمایی: مثلثی به اضلاع dS_1، dS_2 و dS_3 ترسیم کنید. چه رابطهٔ $g_{ij}=0$ برقرار باشد یا نباشد باید معادلهٔ ۲-۹ برقرار باشد سپس ds^2 حاصل از معادلهٔ ۲-۵ را با محاسبه‌ای که با استفاده از قانون کسینوسها انجام می‌دهید مقایسه کنید. نشان دهید:

$$\left[\cos\theta_{12}=\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{12}g_{22}}}\right.$$

حل

$$g_{ij}=\frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{\partial x}{\partial q_j}+\frac{\partial y}{\partial q_i}\frac{\partial y}{\partial q_j}+\frac{\partial z}{\partial q_i}\frac{\partial z}{\partial q_j}$$

مثال $\begin{cases} i=1 \\ j=2 \end{cases} \Rightarrow \quad g_{12}=\frac{\partial x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=0$

$$\text{IF: } i=j \quad \text{THEN} \quad g_i^2=\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2$$

۲ـ۲ـ۲ـ در دستگاه مختصات قطبی کروی داریم: $q_1=r$ و $q_2=\theta$ و $q_3=\phi$ معادلات تبدیل متناظر با معادلهٔ ۲-۲ عبارتند از $z=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta\sin\phi$ و $x=r\sin\theta\cos\phi$

(الف) عاملهای مقیاس h_r و h_θ و h_ϕ مختصات قطبی کروی را محاسبه کنید. (ب) عاملهای مقیاسی را که در بند الف محاسبه کرده‌اید با رابطهٔ $dS_i=h_i dq_i$ مقایسه کنید.

حل (الف) $h_r^2=\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2=\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2$

$$=\sin^2\theta\cos^2\phi+\sin^2\theta\sin^2\phi+\cos^2\theta$$

$$\Rightarrow \quad h_r^2=\sin^2\theta(\cos^2\phi+\sin^2\phi)+\cos^2\theta=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \quad \Rightarrow \boxed{h_r=1}$$

$$h_\theta^2=\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2=r^2\cos^2\theta\cos^2\phi+r^2\cos^2\theta\sin^2\phi+r^2\sin^2\theta \quad \Rightarrow$$

$$h_\theta^2=r^2\cos^2\theta(\cos^2\phi+\sin^2\phi)+r^2\sin^2\theta=r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta) \Rightarrow \boxed{h_\theta=r}$$

$$h_\phi^2=\left(\frac{\partial x}{\partial\phi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\phi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\phi}\right)^2=r^2\sin^2\theta\sin^2\phi+r^2\sin^2\theta\cos^2\phi \quad \Rightarrow$$

$$h_\phi=r^2\sin^2\theta(\sin^2\phi+\cos^2\phi)=r^2\sin^2\theta \quad \Rightarrow \boxed{h_\phi=r\sin\theta}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

(ب) $dS_i = h_i dq_i \Rightarrow \begin{cases} dS_1 = h_1 dq_1 = dr \\ dS_2 = h_2 dq_2 = r d\theta \\ dS_3 = h_3 dq_3 = r \sin\theta d\phi \end{cases}$

۲-۱-۳- دستگاه مختصات u، V و Z که به دفعات در الکتروستاتیک و در دینامیک شاره‌ها به کار می‌رود به قرار زیر تعریف می‌شود

$xy = u$

$x^2 - y^2 = v$

$z = z$

این دستگاه u، v متعامد است. (الف) ماهیت هر یک از سه خانواده از سطوح مختصاتی را به اختصار توصیف کنید. (ب) با ترسیم فصل مشترک سطوح u ثابت و سطوح v ثابت با صفحهٔ xy این دستگاه را در صفحهٔ xy ترسیم کنید. (ج) جهت بردارهای یکهٔ $u_\circ$ و $v_\circ$ را در هر چهار ربع مشخص کنید. (د) سرانجام آیا این دستگاه u، v و z راستگرد $(\hat{u}_\circ \times \hat{v}_\circ = +\hat{k})$ است یا چپگرد $(\hat{u}_\circ \times \hat{v}_\circ = -\hat{k})$؟

حل

$xy = u$	$x^2 - y^2 = v$	$z = z$
$y = \frac{u}{x}$	$\frac{x^2}{v} - \frac{y^2}{v} = 1$	صفحه
سهمی	هذلولی	

$\hat{u}_\circ \times \hat{v}_\circ = -\hat{k}$

دستگاه چپگرد است.

۲-۱-۴- یک دستگاه متعامد دو بعدی به کمک مختصات q_1 و q_2 توصیف می‌شود نشان دهید که ژاکوبی عبارت است از: $J\left(\frac{x,y}{q_1,q_2}\right) = h_1 h_2$

که با معادلهٔ ۲-۱۰ سازگار است.

[راهنمایی: بهتر است که از مجذور دو طرف این معادله بهره گیریم.]

حل چون متعامد است.

$$h_{i=j}^2 = \frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\frac{\partial y}{\partial q_j} = 0$$

$$h_{12}^2 = \frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_2} = 0$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_2}=-\frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_2} \quad , \quad \begin{cases} h_1^2=(\frac{\partial x}{\partial q_1})^2+(\frac{\partial y}{\partial q_1})^2 \\ h_2^2=(\frac{\partial x}{\partial q_2})^2+(\frac{\partial y}{\partial q_2})^2 \end{cases}$$

$$h_1^2h_2^2=(\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_2})^2+(\frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_2})^2+(\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_2})^2+(\frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_2})^2=$$

$$(\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_2})^2+(\frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_2})^2+(\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_2})(-\frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_2})+(-\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_2})(\frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_2})$$

$$=(\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_2})^2+(\frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_2})^2=2(\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_2}\frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_2})=J^2 \quad \Rightarrow$$

$$h_1^2h_2^2=J^2 \quad \Rightarrow \quad h_1h_2=J$$

بخش ۲ـ۲ـ عملگرهای برداری دیفرانسیلی — مسائل صفحه ۱۲۷

۲ـ۲ـ۱ـ استدلالی ارائه کنید که نشان دهد حاصلضربهای اسکالر و برداری (که شامل ∇ نیستند) در مختصات خمیده خط متعامد نیز درست مانند مختصات دکارتی انجام می‌شود و عاملهای مقیاس در آنها ظاهر نمی‌شوند.

حل

$$\vec{A}.\vec{B}=(A_iB_i\sum a_ia_j)=A_iB_j\,\delta_{ij}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ A_iB_j & i=j\end{cases}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=(\sum A_ia_i\times\sum B_ja_j)=\sum A_iB_j\,(a_i\times a_j)$$

۲ـ۲ـ۲ـ برداریکهٔ $\hat{e}_1$ را در جهت افزایش q_1 بگیرید و نشان دهید که

(الف)
$$\vec{\nabla}.\hat{e}_1=\frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial(h_2h_3)}{\partial q_1}$$

(ب)
$$\vec{\nabla}\times\hat{e}_1=\frac{1}{h_1}\left[\hat{e}_1\frac{\partial h_1}{h_3\partial q_3}-\hat{e}_3\frac{\partial h_1}{h_2\,\partial q_2}\right]$$

توجه کنید که هر چند $\hat{e}_1$ برداریکه است، دیورژانس و تاو آن الزاماً صفر نیست.

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

حل

(الف) $$\vec{\nabla}\cdot\hat{e}_1=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial(e_1h_2h_3)}{\partial q_1}+\frac{\partial(e_2h_2h_3)}{\partial q_2}+\frac{\partial(e_3h_1h_2)}{\partial q_3}\right]_{e_1=1}\Rightarrow$$

$$\vec{\nabla}\cdot\hat{e}_1=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial(h_2h_3)}{\partial q_1}\right]$$

(ب) $$\vec{\nabla}\times\hat{e}_1=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} e_1h_1 & e_2h_2 & e_3h_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1e_1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[e_2h_2\left(\frac{\partial(h_1e_1)}{\partial q_3}\right)+e_3h_3\left(\frac{-\partial(h_1e_1)}{\partial q_2}\right)\right]_{e_1=1}$$

$$\vec{\nabla}\times\hat{e}_1=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[e_2h_2\frac{\partial h_1}{\partial q_3}-e_3h_3\frac{\partial h_1}{\partial q_2}\right]=\frac{1}{h_1}\left[e_2\frac{\partial h_1}{h_3\partial q_3}-e_2\frac{\partial h_1}{h_2\partial q_2}\right]$$

۲-۲-۳- نشان دهید که بردارهای یکهٔ متعامد را می‌توان به کمک رابطهٔ زیر تعریف کرد.

(الف) $$\hat{e}_i=\frac{1}{h_i}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}$$

به خصوص نشان دهید که $\hat{e}_i\cdot\hat{e}_i=1$ به عبارتی برای h_i می‌انجامد که با معادلهٔ ۲-۶ سازگار است. معادلهٔ (الف) را می‌توان نقطه شروع استخراج رابطه زیر گرفت.

$$\frac{\partial\hat{e}_i}{\partial q_j}=\hat{e}_j\frac{\partial h_j}{h_i\,\partial q_i}\quad,\quad i\neq j$$

و $$\frac{\partial\hat{e}_i}{\partial q_i}=-\sum_{j\neq i}\hat{e}_j\frac{\partial h_i}{h_j\,\partial q_j}$$

حل

$$\hat{e}_i\cdot\nabla\vec{r}=\hat{e}_i$$

$$\hat{e}_i\cdot\nabla\vec{r}=\hat{e}_i\cdot\left[\hat{e}_1\frac{\partial r}{h_1\partial q_1}+\hat{e}_2\frac{\partial r}{h_2\partial q_2}+\hat{e}_3\frac{\partial r}{h_3\partial q_3}\right]$$

$$=\hat{e}_1\cdot\hat{e}_1\frac{\partial r}{h_1\partial q_1}+\hat{e}_1\cdot\hat{e}_2\frac{\partial r}{h_2\partial q_2}+\hat{e}_1\cdot\hat{e}_3\frac{\partial r}{h_3\partial q_3}$$

$$\Rightarrow\quad\hat{e}_1\cdot\nabla\vec{r}=\frac{\partial r}{h_1\partial q_1}\quad\text{و}\quad\hat{e}_i\cdot\nabla\vec{r}=\frac{\partial r}{h_i\partial q_i}\quad\text{و}\quad\hat{e}_i\cdot\hat{e}_i=1$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial r}{h_i \partial q_i}\cdot\frac{\partial r}{h_i \partial q_i} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{h_i^2}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right) = 1 \quad \Rightarrow$$

$$h_i = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$$

$$h_i^2 = \frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\frac{\partial z}{\partial q_i}$$

۳ـ۲ـ۴ـ با استفادهٔ مستقیم از معادلهٔ ۱-۹۰

$$\vec{\nabla}\psi = \lim_{\int d\tau \to 0} \frac{\int \psi d\vec{\sigma}}{\int d\tau}$$

رابطه زیر را استخراج کنید.

$$\vec{\nabla}\psi = e_1\frac{\partial\psi}{h_1\partial q_1} + e_2\frac{\partial\psi}{h_2\partial q_2} + e_3\frac{\partial\psi}{h_3\partial q_3}$$

[راهنمایی: در محاسبهٔ انتگرال سطحی به جمله‌هایی شبیه به $(h_1h_2h_3)^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\right)(e_1h_2h_3)$ برمی‌خوریم. استفاده از نتایجی که در مسئله ۲-۲-۳ برشمرده شده‌اند، مفید خواهد بود. وقتی که سهم هر سه زوج از صفحات را به هم اضافه کنیم. جمله‌های زاید حذف می‌شوند.]

حل

$$\vec{\nabla}\psi = \hat{e}_1\frac{\partial\psi}{h_1\partial q_1} + \hat{e}_2\frac{\partial\psi}{h_2\partial q_2} + \hat{e}_3\frac{\partial\psi}{h_3\partial q_3}$$

$$\int \psi d\sigma \simeq \left[\hat{e}_1\left(\psi + \frac{\partial\psi}{\partial q_1}\frac{dq_1}{2}\right)h_2h_3dq_2dq_3 - \hat{e}_1\left(\psi - \frac{\partial\psi}{\partial q_1}\frac{dq_1}{2}\right)h_2h_3dq_2dq_3\right]$$

$$+ \left[\hat{e}_2\left(\psi + \frac{\partial\psi}{\partial q_2}\frac{dq_2}{2}\right)h_1h_3dq_1dq_3 - \hat{e}_2\left(\psi - \frac{\partial\psi}{\partial q_2}\frac{dq_2}{2}\right)h_1h_3dq_1dq_3\right]$$

$$+ \left[\hat{e}_3\left(\psi + \frac{\partial\psi}{\partial q_3}\frac{dq_3}{2}\right)h_1h_2dq_1dq_2 - \hat{e}_3\left(\psi - \frac{\partial\psi}{\partial q_3}\frac{dq_3}{2}\right)h_1h_2dq_1dq_2\right]$$

$$= \left[\hat{e}_1\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_1}dq_1\right)h_2h_3dq_2dq_3 + \hat{e}_2\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_2}dq_2\right)h_1h_3dq_1dq_3 + \hat{e}_3\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_3}dq_3\right)h_1h_2dq_1dq_2\right]$$

$$\cong \hat{e}_1\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\right)h_2h_3dq_1dq_2dq_3 + \hat{e}_2\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\right)h_1h_3dq_1dq_2dq_3 + \hat{e}_3\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_3}\right)h_1h_2dq_1dq_2dq_3$$

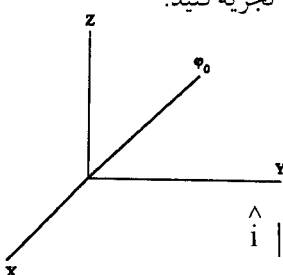
PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

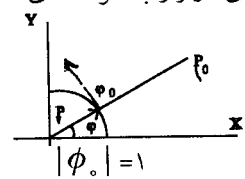
$$\frac{\int \psi d\vec{\sigma}}{h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3} \simeq \hat{e}_1 \frac{1}{h_1}\frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \hat{e}_2 \frac{1}{h_2}\frac{\partial \psi}{\partial q_2} + \hat{e}_3 \frac{1}{h_3}\frac{\partial \psi}{\partial q_3}$$

$$\Rightarrow \lim_{\int d\tau \to 0} \frac{\int \psi d\vec{\sigma}}{\int d\tau} = \vec{\nabla}\phi$$

بخش ۲ـ۴ـ مختصات استوانه‌ای دوار (ρ, ϕ, z) مسائل صفحه ۱۳۴

۲ـ۴ـ۱ـ بردارهای یکهٔ استوانه‌ای دوار را به مؤلفه‌های دکارتی تجزیه کنید.





حل $|\rho_0| = 1$

$$\rho = \hat{i}\,\mathrm{Cos}\,\phi + \hat{j}\,\mathrm{Sin}\,\phi$$

$$\phi_0 = -\hat{i}\,\mathrm{Sin}\phi + \hat{j}\,\mathrm{Cos}\,\phi$$

$$\hat{i}\,|\phi_0|\,\mathrm{Cos}\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right)$$

$$\hat{j}\,|\phi_0|\,\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right)$$

$$\hat{K}_0 = \hat{K}$$

۲ـ۴ـ۲ـ بردارهای یکهٔ دکارتی را برحسب مؤلفه‌های استوانه‌ای دوار تجزیه کنید.

حل

$$\begin{matrix}\mathrm{Cos}\phi \\ -\mathrm{Sin}\phi\end{matrix}\begin{cases}\rho_0 = \hat{i}\,\mathrm{Cos}\phi + \hat{j}\,\mathrm{Sin}\phi \\ \phi_0 = -\hat{i}\,\mathrm{Sin}\phi + \hat{j}\,\mathrm{Cos}\phi\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\rho_0\mathrm{Cos}\phi = \hat{i}\,\mathrm{Cos}^2\phi + \hat{j}\,\mathrm{Sin}\phi\,\mathrm{Cos}\phi \\ -\phi_0\mathrm{Sin}\phi = \hat{i}\,\mathrm{Sin}^2\phi - \hat{j}\,\mathrm{Sin}\phi\,\mathrm{Cos}\phi\end{cases}$$

جمع می‌کنیم

$$\rho_0\,\mathrm{Cos}\phi - \phi_0\,\mathrm{Sin}\phi = \hat{i}\,(\mathrm{Cos}^2\phi + \mathrm{Sin}^2\phi)$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho_0\,\mathrm{Cos}\phi - \phi_0\,\mathrm{Sin}\phi = \hat{i}}$$

$$\begin{matrix}\mathrm{Sin}\phi \\ \mathrm{Cos}\phi\end{matrix}\begin{cases}\rho_0 = \hat{i}\,\mathrm{Cos}\phi + \hat{j}\,\mathrm{Sin}\phi \\ \phi_0 = -\hat{i}\,\mathrm{Sin}\phi + \hat{j}\,\mathrm{Cos}\phi\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\rho_0\mathrm{Sin}\phi = \hat{i}\,\mathrm{Sin}\phi\,\mathrm{Cos}\,\phi + \hat{j}\,\mathrm{Sin}^2\phi \\ \phi_0\mathrm{Cos}\phi = -\hat{i}\,\mathrm{Sin}\phi\,\mathrm{Cos}\,\phi + \hat{j}\mathrm{Cos}^2\phi\end{cases}$$

$$\rho_0\mathrm{Sin}\phi + \phi_0\mathrm{Cos}\phi = \hat{j}\,(\mathrm{Sin}^2\phi + \mathrm{Cos}^2\phi)$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{j} = \rho_0\,\mathrm{Sin}\phi + \phi_0\,\mathrm{Cos}\phi} \quad \text{و} \quad \boxed{\hat{k} = k}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

۲ـ۴ـ۳ـ با استفاده از نتایج مسئله ۲ـ۴ـ۱ نشان دهید که:

$$\frac{\partial \rho_\circ}{\partial \phi} = \phi_\circ \quad , \quad \frac{\partial \phi_\circ}{\partial \phi} = -\rho_\circ$$

همچنین نشان دهید که بقیهٔ مشتقهای اول بردارهای یکهٔ استوانه‌ای دوار نسبت به مختصات استوانه‌ای دوار، جملگی صفر می‌شوند.

حل

$$\rho_\circ = \hat{i}\,\mathrm{Cos}\phi + \hat{j}\,\mathrm{Sin}\phi \quad , \quad \phi_\circ = -\hat{i}\,\mathrm{Sin}\phi + \hat{j}\,\mathrm{Cos}\phi$$

$$\frac{\partial \rho_\circ}{\partial \phi} = -\hat{i}\,\mathrm{Sin}\phi + \hat{j}\,\mathrm{Cos}\phi = \phi_\circ$$

$$\frac{\partial \phi_\circ}{\partial \phi} = -\hat{i}\,\mathrm{Cos}\phi - \hat{j}\,\mathrm{Sin}\phi = -\rho_\circ$$

۲ـ۲ـ۷ـ جسم صلبی با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول یک محور ثابت می‌چرخد. ω را در امتداد محور Z بگیرید r را برحسب مختصات استوانه‌ای دوار مشخص کنید و مختصات استوانه‌ای دوار را بکار برید. (الف) $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ را محاسبه کنید. (ب) $\vec{\nabla} \times \vec{v}$ را محاسبه کنید.

حل

(الف) $\vec{\omega} = \omega \hat{k} \quad , \quad \vec{r} = \hat{\rho}_\circ \rho + \hat{k}z$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \rho_\circ & \rho\phi_\circ & k \\ \circ & \circ & \omega \\ \rho & \circ & z \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho}\left[\rho\phi_\circ \omega\rho\right] = \rho\omega\phi_\circ$$

(ب) $$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \rho_\circ & \rho\phi_\circ & k \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \circ & \rho^2\omega & \circ \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho}\left[\hat{k}\frac{\partial}{\partial \rho}\rho^2\omega\right] = \frac{2\rho\omega}{\rho} = 2\omega$$

۲ـ۲ـ۸ـ ذره متحرکی را در فضا در نظر بگیرید. مؤلفه‌های استوانه‌ای دوار سرعت و شتاب این ذره را محاسبه کنید.

[راهنمایی: $\vec{r}(t) = \hat{\rho}_\circ(t)\rho(t) + \hat{k}z(t) = \left[\hat{i}\,\mathrm{Cos}\phi(t) + \hat{j}\,\mathrm{Sin}\phi(t)\right]\rho(t) + \hat{k}z(t)$

یادآوری: $\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt}$ و $\ddot{\rho} = \frac{d^2\rho}{dt^2}$ و مانند آنها.

حل

$$\left.\begin{aligned} & r(t) = \rho\hat{\rho}_\circ + \hat{k}z \Rightarrow v = \frac{dr}{dt} = \dot{\rho}\hat{\rho}_\circ + \rho\dot{\hat{\rho}}_\circ + \hat{k}\dot{z} \\ & \rho_\circ = \hat{i}\,\mathrm{Cos}\phi + \hat{j}\,\mathrm{Sin}\phi \Rightarrow \dot{\rho}_\circ = -\hat{i}\dot{\phi}\,\mathrm{Sin}\phi + \hat{j}\dot{\phi}\,\mathrm{Cos}\phi = \dot{\phi}\phi_\circ \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$v = \dot{\rho}\rho_\circ + \rho\dot{\phi}\phi_\circ + \hat{k}\dot{z}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\left.\begin{array}{l} a=\frac{dv}{dt}=\ddot{\rho}\rho_{\circ}+\dot{\rho}\dot{\rho}_{\circ}+\dot{\rho}\dot{\phi}\phi_{\circ}+\rho\ddot{\phi}\phi_{\circ}+\rho\dot{\phi}\dot{\phi}_{\circ}+k\ddot{z} \\ \phi_{\circ}=-\hat{i}\,\mathrm{Sin}\phi+\hat{j}\,\mathrm{Cos}\phi \quad\Rightarrow\quad \dot{\phi}_{\circ}=-\hat{i}\dot{\phi}\,\mathrm{Cos}\phi-\hat{j}\dot{\phi}\mathrm{Sin}\phi=-\dot{\phi}\rho \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$a=\ddot{\rho}\rho_{\circ}+\dot{\rho}\dot{\phi}\phi_{\circ}+\dot{\rho}\dot{\phi}\phi_{\circ}+\rho\ddot{\phi}\phi_{\circ}-\rho\dot{\phi}^{۲}\rho_{\circ}+k\ddot{z}\quad\Rightarrow$$

$$\vec{a}=(\ddot{\rho}-\rho\dot{\phi}^{۲})\hat{\rho}_{\circ}+(\rho\ddot{\phi}+۲\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{\phi}_{\circ}+\ddot{z}\hat{k}$$

۲-۲-۹- در مختصات استوانه‌ای، معادلهٔ لاپلاس را به ازای $\psi=\psi(\rho)$ حل کنید.

حل

$$\nabla^{۲}\psi=\circ\quad\Rightarrow\quad\nabla^{۲}\psi=\frac{۱}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho})+\frac{۱}{\rho^{۲}}\frac{\partial^{۲}\psi}{\partial\phi^{۲}}+\frac{\partial^{۲}\psi}{\partial z^{۲}}=\circ$$

چون $\psi=\psi(\rho)$ است جملات دوم و سوم صفرند.

$$\nabla^{۲}\psi=\frac{۱}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho})=\circ\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho})=\circ\quad\Rightarrow$$

$$\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}=k\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial\psi}{\partial\rho}=\frac{k}{\rho}\quad\Rightarrow\quad\frac{d\psi}{d\rho}=\frac{k}{\rho}\quad\Rightarrow$$

$$\int d\psi=k\int_{\rho_{\circ}}^{\rho}\frac{d\rho}{\rho}\quad\Rightarrow\quad\psi=k\mathrm{Ln}\rho\Big|_{\rho_{\circ}}^{\rho}\quad\Rightarrow\quad\psi=k\,\mathrm{Ln}\frac{\rho}{\rho_{\circ}}$$

۲-۲-۱۰- تابع برداری به خصوصی در مختصات استوانه‌ای دوار قائم به قرار زیر تعریف می‌شود.

$$V(\rho,\phi)=\rho_{\circ}V_{\rho}(\rho,\phi)+\phi_{\circ}V_{\phi}(\rho,\phi)$$

نشان دهید $\vec{\nabla}\times\vec{V}$ فقط مولفه Z دارد. توجه کنید که این نتیجه برای هر برداری که مقید به سطح $q_{۳}=\mathrm{const}$ باشد در صورت استقلال حاصلضربهای $h_{۱}V_{۱}$ و $h_{۲}V_{۲}$ از $q_{۳}$، برقرار است.

حل

$$\vec{\nabla}\times\vec{V}=\frac{۱}{\rho}\begin{vmatrix}\hat{\rho}_{\circ} & \rho\hat{\phi}_{\circ} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ V_{\rho} & \rho V_{\phi} & \circ\end{vmatrix}=\hat{k}(\frac{\partial V\phi}{\partial\phi}-\frac{۱}{\rho}\frac{\partial V\rho}{\partial\phi}+\frac{V\phi}{\rho})$$

۲-۲-۱۱- معادلهٔ ناویه - استوکس برای جریان یک شارهٔ چسبنده تراکم‌ناپذیر به رابطه زیر می‌انجامد.

$$-\vec{\nabla}\times(\vec{V}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V}))=\frac{\eta}{\rho_{\circ}}\nabla^{۲}(\vec{\nabla}\times\vec{V})$$

که در آن η چسبندگی (ویسکوزیته) و $\rho_{\circ}$ چگالی شاره است سرعت V را برای شار محوری در یک لولهٔ استوانه‌ای به صورت زیر می‌نویسیم.

$$\vec{V}=kv(\rho)$$

از مثال ۲-۴-۱ برای این شرط داریم

$$\vec{\nabla}\times(\vec{V}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V}))=\circ$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

نشان دهید که معادلهٔ $\nabla^2(\vec{\nabla}\times\vec{V})=0$ به معادلهٔ دیفرانسیل زیر می‌انجامد.

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d^2V}{d\rho^2}\right)-\frac{1}{\rho^2}\frac{dV}{d\rho}=0$$

ونیز نشان دهید که $V=V_0+a_2\rho^2$ در این معادله دیفرانسیل صدق می‌کند.

حل

$$\vec{\nabla}\times\vec{V}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\hat{\rho}_0 & \rho\hat{\phi}_0 & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & V(\rho)\end{vmatrix}=\frac{1}{\rho}\left[\hat{\rho}_0\frac{\partial}{\partial\phi}V(\rho)-\rho\phi_0\frac{\partial}{\partial\rho}V(\rho)\right]$$

جملهٔ اول بدلیل استقلال V از ϕ صفر است و داریم

$$\vec{\nabla}\times\vec{V}=-\hat{\phi}_0\frac{\partial V(\rho)}{\partial\rho}$$

$$\nabla^2(\vec{\nabla}\times\vec{V})=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial(\vec{\nabla}\times\vec{V})}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2(\vec{\nabla}\times\vec{V})}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2(\vec{\nabla}\times\vec{V})}{\partial z^2}$$

جملات دوم و سوم بدلیل استقلال V از ϕ و z صفرند.

$$\nabla^2(\vec{\nabla}\times\vec{V})=\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d^2V}{d\rho^2}\right)-\frac{1}{\rho^2}\frac{dV}{d\rho}=0$$

مقدار $V=V_0+a_2\rho^2$ را در معادله قرار می‌دهیم داریم

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d^2(V_0+a_2\rho^2)}{d\rho^2}\right)-\frac{1}{\rho^2}\frac{d(V_0+a_2\rho^2)}{d\rho}=0$$

۲-۲-۱۲- سیم رسانایی در راستای محور Z حاوی جریان I است پتانسیل برداری مغناطیسی حاصل از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\vec{A}=\hat{k}\frac{\mu I}{2\pi}\mathrm{Ln}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

نشان دهید که القای مغناطیسی $\vec{B}$ عبارت است از

$$\vec{B}=\hat{\phi}_0\frac{\mu I}{2\pi\rho}$$

حل

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\hat{\rho}_0 & \rho\hat{\phi}_0 & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & \frac{\mu I}{2\pi}\mathrm{Ln}\left(\frac{1}{\rho}\right)\end{vmatrix}\Rightarrow$$

$$\vec{B}=-\frac{1}{\rho}(\rho\hat{\phi}_0)\frac{\mu I}{2\pi}\frac{-\frac{1}{\rho^2}}{\frac{1}{\rho}}=\hat{\phi}_0\frac{\mu I}{2\pi\rho}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

۲ـ۲ـ۱۲ـ نیرویی با رابطهٔ زیر توصیف می‌شود.

$$\vec{F} = -\hat{i}\frac{y}{x^2+y^2} + \hat{j}\frac{x}{x^2+y^2}$$

(الف) $\vec{F}$ را در مختصات استوانه‌ای دوار مشخص کنید بندهای (ب) و (ج) را بطور کامل در مختصات استوانه‌ای دوار حل کنید. (ب) تاو $\vec{F}$ را محاسبه کنید. (ج) کاری راکه نیروی $\vec{F}$ در یک بار دور زدن دایرهٔ واحد بطور چپگرد انجام می‌دهد محاسبه کنید. (د) تفاوت بین نتایج بندهای (ب) و (ج) را چگونه توجیه می‌کنید.

حل

$$F = -(\rho_\circ \mathrm{Cos}\phi - \phi_\circ \mathrm{Sin}\phi)\frac{\rho \mathrm{Sin}\phi}{\rho^2} + (\rho_\circ \mathrm{Sin}\phi + \phi_\circ \mathrm{Cos}\phi)\frac{\rho \mathrm{Cos}\phi}{\rho^2}$$

$$F = -(\rho_\circ \mathrm{Cos}\phi\, \mathrm{Sin}\phi - \phi_\circ \mathrm{Sin}^2\phi)\frac{1}{\rho} + (\rho_\circ \mathrm{Sin}\phi\, \mathrm{Cos}\phi + \phi_\circ \mathrm{Cos}^2\phi)\frac{1}{\rho} \Rightarrow$$

$$F = \frac{1}{\rho}\left[-\rho_\circ \mathrm{Cos}\phi\, \mathrm{Sin}\phi + \rho_\circ \mathrm{Sin}\phi\, \mathrm{Cos}\phi\right] + \frac{1}{\rho}\left[\phi_\circ \mathrm{Sin}^2\phi + \phi_\circ \mathrm{Cos}^2\phi\right] = \frac{\phi_\circ}{\rho}$$

(ب)
$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho}_\circ & \rho\hat{\phi}_\circ & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \circ & \rho(\frac{1}{\rho}) & \circ \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho}\left[\hat{\rho}_\circ(-\frac{\partial 1}{\partial z}) - \rho\hat{\phi}_\circ(\circ) + \hat{k}(\frac{\partial 1}{\partial\rho})\right] = \circ$$

(ج)
$$W = \int \vec{F}.d\vec{r} = \int \frac{\phi_\circ}{\rho}(\rho_\circ d\rho + \rho\phi_\circ d\phi + kdz) \Rightarrow$$

$$W = \int \phi_\circ\rho_\circ(\frac{d\rho}{\rho}) + \int \frac{\rho}{\rho}(\phi_\circ.\phi_\circ)\,d\phi + \int \phi_\circ k(\frac{dz}{\rho}) \Rightarrow$$

$$W = \int_\circ^{2\pi} d\phi = \phi\Big|_\circ^{2\pi} \Rightarrow W = 2\pi$$

۲ـ۲ـ۱۴ـ برای یک موج عرضی الکترومغناطیسی (TEM) در یک موجبر هم محور میدان الکتریکی بصورت $\vec{E} = E(\rho,\phi)\,e^{i(kz-\omega t)}$ و میدان القای مغناطیسی به صورت $\vec{B} = B(\rho,\phi)\,e^{i(kz-\omega t)}$ بیان می‌شود. موج عرضی است از این رو $\vec{E}$ و $\vec{B}$ هیچیک مؤلفهٔ Z ندارند این دو میدان در معادلهٔ برداری لاپلاسی صدق می‌کنند.

$$\nabla^2 E(\rho,\phi) = \circ$$

$$\nabla^2 B(\rho,\phi) = \circ$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

(الف) نشان دهید که جوابهای این دو معادله عبارتند از $\vec{E}=\rho_{\circ}E_{\circ}(\frac{a}{\rho})e^{i(kz-\omega t)}$ و $\vec{B}=\phi_{\circ}B_{\circ}(\frac{a}{\rho})e^{i(kz-\omega t)}$ که در آن a شعاع رسانای داخلی و $E_{\circ}$ و $B_{\circ}$ دامنه‌اند

(ب) با فرض اینکه داخل موجبر خلاء است تحقیق کنید که رابطهٔ زیر در معادلهٔ ماکسول صدق می‌کنند:

$$\frac{B_{\circ}}{E_{\circ}}=\frac{k}{\omega}=\mu_{\circ}\varepsilon_{\circ}(\frac{\omega}{k})=\frac{1}{C}$$

حل

$$\nabla^{2}E\Big|_{\rho}=\nabla^{2}E_{\rho}-\frac{1}{\rho^{2}}E_{\rho}-\frac{2}{\rho^{2}}\frac{\partial E\phi}{\partial\phi}\quad,\quad \vec{E}=\rho_{\circ}E_{\circ}(\frac{a}{\rho})e^{i(kz-\omega t)}$$

$$\nabla^{2}E_{\rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial E}{\partial\rho})+\frac{1}{\rho^{2}}\frac{\partial^{2}E}{\partial\phi^{2}}+\frac{\partial^{2}E}{\partial z^{2}}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{-\rho_{\circ}E_{\circ}ae^{i(kz-\omega t)}}{\rho^{2}})$$

$$=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\rho_{\circ}E_{\circ}ae^{i(kz-\omega t)}}{\rho^{2}}\right]=\frac{\rho_{\circ}E_{\circ}ae^{i(kz-\omega t)}}{\rho^{3}}\quad\Rightarrow$$

$$\nabla^{2}E\Big|_{\rho}=\frac{\rho_{\circ}E_{\circ}ae^{i(kz-\omega t)}}{\rho^{3}}-\frac{\rho_{\circ}E_{\circ}ae^{i(kz-\omega t)}}{\rho^{2}\rho}=\circ$$

$$\nabla^{2}B(\rho,\phi)=\circ\quad,\quad \nabla^{2}B\Big|_{\phi}=\nabla^{2}B_{\phi}-\frac{1}{\rho^{2}}B_{\phi}+\frac{2}{\rho^{2}}\frac{\partial B_{\rho}}{\partial\phi}$$

$$B=\phi_{\circ}B_{\circ}(\frac{a}{\rho})e^{i(kz-\omega t)}$$

مانند قسمت E عمل می‌شود.

۲ـ۲ـ۱۵ـ در محاسبهٔ اثر تنگش در دینامیک شاره‌های مغناطیسی محاسبهٔ $(\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{B}$ لازم می‌شود نشان دهید که اگر القای مغناطیسی $\vec{B}$ به صورت $\vec{B}=\phi_{\circ}B_{\phi}(\rho)$ باشد داریم:

$$(\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{B}=-\frac{\rho_{\circ}B_{\phi}^{2}}{\rho}$$

حل

$$(\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{B}=(\hat{\phi}_{\circ}B_{\phi}(\rho)).(\hat{\rho}_{\circ}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\hat{\phi}_{\circ}}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z})(\hat{\phi}_{\circ}B_{\phi}(\rho))$$

$$=\frac{B_{\phi}(\rho)}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}(\hat{\phi}_{\circ}B_{\phi}(\rho))=\frac{B_{\phi}^{2}(\rho)}{\rho}\frac{\partial\hat{\phi}_{\circ}}{\partial\phi},\frac{\partial\hat{\phi}_{\circ}}{\partial\phi}=-\hat{\rho}_{\circ}$$

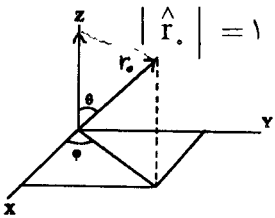
$$\Rightarrow\quad(\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{B}=-\frac{\rho_{\circ}B_{\phi}^{2}(\rho)}{\rho}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

بخش ۲ـ۵ـ مختصات قطبی کروی (r, θ, ϕ) مسائل صفحه ۱۴۵

۲ـ۵ـ۱ـ بردارهای یکهٔ قطبی کروی را به مؤلفه‌های دکارتی تجزیه کنید.

حل



$$\left|\hat{r}_\circ\right| = 1 \quad , \quad \hat{r}_\circ = \hat{i}\,\mathrm{Sin}\theta\,\mathrm{Cos}\phi + \hat{j}\,\mathrm{Sin}\theta\,\mathrm{Sin}\phi + \hat{k}\,\mathrm{Cos}\theta$$

$$\hat{\theta}_\circ = \hat{i}\,\mathrm{Cos}\theta\,\mathrm{Cos}\phi + \hat{j}\,\mathrm{Cos}\theta\,\mathrm{Sin}\phi - \hat{k}\,\mathrm{Sin}\theta$$

$$\hat{\phi}_\circ = -\hat{i}\,\mathrm{Sin}\phi + \hat{j}\,\mathrm{Cos}\phi$$

در صفحه xy قرار دارد.

۲ـ۵ـ۲ـ (الف) با استفاده از نتایج مسئله ۲-۵-۱ مشتقهای جزئی $r_\circ$ و $\theta_\circ$ و $\phi_\circ$ را نسبت به r، θ و ϕ محاسبه کنید. (ب) با استفاده از نتایج بند (الف) و بردار $\vec{\nabla}$ (بالاترین آهنگ تغییر فضایی) به صورت زیر

$$\hat{r}_\circ \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}_\circ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi}_\circ \frac{1}{r\mathrm{Sin}\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\psi$ را محاسبه کنید این روش دیگری است برای استخراج لاپلاسی

[یادآوری: مشتق گیریهای $\vec{\nabla}$ سمت چپ. قبل از آنکه بردارهای یکه در هم ضرب نقطه‌ای شوند روی بردارهای یکهٔ $\vec{\nabla}$ سمت راست عمل می‌کنند.].

حل با توجه به $r_\circ$ و $\theta_\circ$ و $\phi_\circ$ که از حل مسئله ۲-۵-۱ بدست آمده داریم.

$$\frac{\partial \hat{r}_\circ}{\partial r} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \hat{r}_\circ}{\partial \theta} = \hat{i}\,\mathrm{Cos}\theta\,\mathrm{Cos}\phi + \hat{j}\,\mathrm{Cos}\theta\,\mathrm{Sin}\phi - \hat{k}\,\mathrm{Sin}\theta = \hat{\theta}_\circ$$

$$\frac{\partial \hat{r}_\circ}{\partial \phi} = -\hat{i}\,\mathrm{Sin}\theta\,\mathrm{Sin}\phi + \hat{j}\,\mathrm{Sin}\theta\,\mathrm{Cos}\phi = \mathrm{Sin}\theta(-\hat{i}\,\mathrm{Sin}\phi + \hat{j}\,\mathrm{Cos}\phi) = \hat{\phi}_\circ \mathrm{Sin}\theta$$

$$\frac{\partial \hat{\theta}_\circ}{\partial r} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \hat{\theta}_\circ}{\partial \theta} = -\hat{i}\,\mathrm{Sin}\theta\,\mathrm{Cos}\phi - \hat{j}\,\mathrm{Sin}\theta\,\mathrm{Sin}\phi - \hat{k}\,\mathrm{Cos}\theta = -\hat{r}_\circ$$

$$\frac{\partial \hat{\theta}_\circ}{\partial \phi} = -\hat{i}\,\mathrm{Cos}\theta\,\mathrm{Sin}\phi + \hat{j}\,\mathrm{Cos}\theta\,\mathrm{Cos}\phi = \mathrm{Cos}\theta(-\hat{i}\,\mathrm{Sin}\phi + \hat{j}\,\mathrm{Cos}\phi) = \hat{\phi}_\circ \mathrm{Cos}\theta$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}_\circ}{\partial r} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \hat{\phi}_\circ}{\partial \theta} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \hat{\phi}_\circ}{\partial \phi} = -\hat{i}\,\mathrm{Cos}\phi - \hat{j}\,\mathrm{Sin}\phi$$

$$\vec{\nabla}\psi = \hat{r}_\circ \frac{\partial \psi}{\partial r} + \hat{\theta}_\circ \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \hat{\phi}_\circ \frac{1}{r\mathrm{Sin}\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \phi} \qquad \text{(ب)}$$

PhysicsClass.blogsky.com
TeleGrame/FizikCalass

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\psi = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\right)$$

$$= \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$$

۲ـ۵ـ۵ـ بردارهای یکهٔ دکارتی زیر را به مؤلفه‌های قطبی کروی تجزیه کنید.

$$\hat{i} = \hat{r}_\circ \sin\theta\cos\phi + \hat{\theta}_\circ \cos\theta\cos\phi - \hat{\phi}_\circ \sin\phi$$

$$\hat{j} = \hat{r}_\circ \sin\theta\sin\phi + \hat{\theta}_\circ \cos\theta\sin\phi + \hat{\phi}_\circ \cos\phi$$

$$\hat{k} = \hat{r}_\circ \cos\theta - \hat{\theta}_\circ \sin\theta$$

حل

$$\begin{matrix}\sin\theta \\ \cos\theta\end{matrix}\begin{cases}\hat{r}_\circ = \hat{i}\sin\theta\cos\phi + \hat{j}\sin\theta\sin\phi + \hat{k}\cos\theta \\ \hat{\theta}_\circ = \hat{i}\cos\theta\cos\phi + \hat{j}\cos\theta\sin\phi - \hat{k}\sin\theta\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\hat{r}_\circ \sin\theta = \hat{i}\sin^2\theta\cos\phi + \hat{j}\sin^2\theta\sin\phi + \hat{k}\sin\theta\cos\theta \\ \hat{\theta}_\circ \cos\theta = \hat{i}\cos^2\theta\cos\phi + \hat{j}\cos^2\theta\sin\phi - \hat{k}\sin\theta\cos\theta\end{cases} +$$

$$\begin{matrix}\cos\phi \\ -\sin\phi\end{matrix}\begin{cases}\hat{r}_\circ \sin\theta + \hat{\theta}_\circ \cos\theta = \hat{i}\cos\phi + \hat{j}\sin\phi \\ \hat{\phi}_\circ = -\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\hat{r}_\circ \cos\phi\sin\theta + \hat{\theta}_\circ \cos\phi\cos\theta = \hat{i}\cos^2\phi + \hat{j}\sin\phi\cos\phi \\ -\hat{\phi}_\circ \sin\theta = \hat{i}\sin^2\phi - \hat{j}\sin\phi\cos\phi\end{cases} +$$

$$\boxed{\hat{r}_\circ \cos\phi\sin\theta + \hat{\theta}_\circ \cos\phi\cos\theta - \hat{\phi}_\circ \sin\phi = \hat{i}}$$

برای بدست آوردن $\hat{j}$ به روش مشابه فوق $\hat{r}_\circ$ را در $\sin\theta\sin\phi$ و $\hat{\theta}_\circ$ را در $\cos\theta\sin\phi$ و $\phi_\circ$ را در $\cos\phi$ ضرب با هم جمع می‌کنیم بدست می‌آید.

$$\boxed{\hat{j} = \hat{r}_\circ \sin\theta\sin\phi + \hat{\theta}_\circ \cos\theta\sin\phi + \hat{\phi}_\circ \cos\phi}$$

و برای $\hat{k}$ رابطه $\hat{r}_\circ$ را در $\cos\theta$ و $\hat{\theta}_\circ$ را در $-\sin\theta$ ضرب با هم جمع می‌کنیم. بدست می‌آوریم:

$$\boxed{\hat{k} = \hat{r}_\circ \cos\theta - \hat{\theta}_\circ \sin\theta}$$

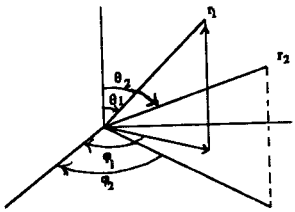
۲ـ۵ـ۶ـ جهت برداری با زاویه‌های θ_1 و ϕ_1 مشخص شده است زاویه‌های متناظر برای یک

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

بردار دیگر عبارت‌اند از θ_2 و ϕ_2 نشان دهید که کسینوس زاویهٔ بین دو بردار γ با رابطهٔ زیر داده می‌شود:

$$\cos\gamma=\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\phi_1-\phi_2)$$

شکل ۱۲-۱۶ را ببینید.



حل

u_1: برداریکه در راستای r_1

u_2: برداریکه در راستای r_2

$$\begin{cases}\hat{u}_1=\hat{i}\sin\theta_1\cos\phi_1+\hat{j}_1\sin\theta_1\sin\phi_1+\hat{k}\cos\theta_1\\ \hat{u}_2=\hat{i}\sin\theta_2\cos\phi_2+\hat{j}\sin\theta_2\sin\phi_2+\hat{k}\cos\theta_2\end{cases}$$

$$\hat{u}_1.\hat{u}_2=\sin\theta_1\cos\phi_1\sin\theta_2\cos\phi_2+\sin\theta_1\sin\phi_1\sin\theta_2\sin\phi_2+\cos\theta_1\cos\theta_2$$

$$=\sin\theta_1\sin\theta_2\left[\cos\phi_1\cos\phi_2+\sin\phi_1\sin\phi_2\right]+\cos\theta_1\cos\theta_2$$

$$=\sin\theta_1\sin\theta_2\left[\cos(\phi_1-\phi_2)\right]+\cos\theta_1\cos\theta_2 \qquad (1)$$

از طرفی $\hat{u}_1.\hat{u}_2=|u_1|\,|u_2|\cos\gamma=\cos\gamma \qquad (2)$ γ زاویه بین u_1 و u_2

$$\boxed{(1)=(2)\ \Rightarrow\ \cos\gamma=\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\phi_1-\phi_2)}$$

۲-۵-۷- بردار $\vec{V}$ مؤلفه شعاعی ندارد اگر مولفه مماسی تاو آن صفر باشد وابستگی شعاعی مؤلفهٔ مماسی V به چه صورتی در می‌آید.

حل

$$\vec{V}=\hat{r}_\circ V_r+\hat{\theta}_\circ rV_\theta+\hat{\phi}_\circ r\sin\theta V_\phi$$

چون مولفه شعاعی ندارد پس

$$\vec{V}=\hat{\theta}_\circ rV_\theta+r\sin\theta V_\phi$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{V}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} r_\circ & r\theta_\circ & r\sin\theta\phi_\circ\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi}\\ \circ & rV_\theta & r\sin\theta V_\phi\end{vmatrix}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{V}\Big|_{\text{مماسی}}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[-r\frac{\partial}{\partial r}r\sin\theta V_\phi\right]=\circ$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{V}=\hat{r}_\circ\left[\frac{\tan\theta V_\phi}{r}\right]+\hat{\phi}_\circ\left[\frac{V\theta}{r}\right]$$

۲-۵-۸- در فیزیک جدید [illegible] کمیتی تحت وارونی دستگاه

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

مختصات ناوردا بماند یا تغییر علامت دهد - تأکید زیادی می‌شود وارونی در مختصات دکارتی عبارت است از: $x \to -x$ و $z \to -z$ و $y \to -y$

(الف) نشان دهید که وارونی (یعنی انعکاس از طریق مبدأ) نقطهٔ (r, θ, ϕ) نسبت به محورهای z,y,x ثابت شامل تبدیلهای زیر است:

$$r \to r \quad \text{و} \quad \theta \to \pi - \theta \quad \text{و} \quad \phi \to \phi \pm \pi$$

(ب) نشان دهید که از $r_\circ$ و $\theta_\circ$ پاریتهٔ فرد دارند (تغییر جهت می‌دهند) و $\theta_\circ$ پاریته زوج دارد.

حل

(الف) بر روی مولفه‌های x و y و z تبدیلات مربوط به r و θ و ϕ را می‌دهیم باید به ترتیب به -x و y- و z- برسیم.

$$x = r\cos\phi\,\sin\theta \quad \text{و} \quad y = r\sin\phi\,\sin\theta \quad \text{و} \quad z = r\cos\theta$$

$$x = r\cos\phi\sin\theta \Rightarrow x' = r\cos(\phi-\pi)\sin(\pi-\theta) = r\,[-\cos\phi]\,[\sin\theta] = -r\cos\phi\sin\theta = -x$$

$$y = r\sin\phi\sin\theta \Rightarrow y' = r\sin(\phi-\pi)\sin(\pi-\theta) = r\,[-\sin\phi]\,[\sin\theta] = -r\sin\phi\sin\theta = -y$$

$$z = r\cos\theta \quad \Rightarrow \quad z' = r\cos(\pi-\theta) = -r\cos\theta = -z$$

(ب) باید نشان دهیم که $r'_\circ = -r_\circ$ و $\phi'_\circ = -\phi_\circ$ و $\theta'_\circ = +\theta_\circ$ است.

$$\hat{r}_\circ = \hat{i}\sin\theta\cos\phi + \hat{j}\sin\theta\sin\phi + \hat{k}\cos\theta \quad \Rightarrow$$

$$\hat{r}'_\circ = \hat{i}\sin(\pi-\theta)\cos(\phi-\pi) + \hat{j}\sin(\pi-\theta)\cos(\phi-\pi) + \hat{k}\cos(\pi-\theta)$$

$$= -\hat{i}\sin\theta\cos\phi - \hat{j}\sin\theta\cos\phi - \hat{k}\cos\theta = -\hat{r}_\circ$$

$$\hat{\theta}_\circ = \hat{i}\cos\theta\cos\phi + \hat{j}\cos\theta\sin\phi - \hat{k}\sin\theta \quad \Rightarrow$$

$$\hat{\theta}'_\circ = \hat{i}\cos(\pi-\theta)\cos(\phi-\pi) + \hat{j}\cos(\pi-\theta)\sin(\phi-\pi) - \hat{k}\sin(\pi-\theta)$$

$$= \hat{i}\cos\theta\cos\phi + \hat{j}\cos\theta\sin\phi - \hat{k}\sin\theta = \hat{\theta}_\circ$$

$$\hat{\phi}_\circ = -\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi \quad \Rightarrow \quad \hat{\phi}'_\circ = -\hat{i}\sin(\phi-\pi) + \hat{j}\cos(\phi-\pi)$$

$$= \hat{i}\sin\phi - \hat{j}\cos\phi = -\hat{\phi}_\circ$$

۲ـ۵ـ۹ـ برای هر بردار $\vec{A}$ داریم:

$$\vec{A}.\vec{\nabla}r = \vec{A}$$

(الف) این اتحاد را در مختصات دکارتی اثبات کنید. (ب) این اتحاد را در مختصات قطبی کروی اثبات کنید ($\vec{\nabla}$ در معادلهٔ ۲ـ۵ـ۹ـ۱ تعریف شده است) ییها یا دو برداریها (بخش

PhysicsGlass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

۳-۵) یک عامل خنثی یا دوتایی یکه است.

حل ابتدا در حالت کلی رابطه فوق را در هر مختصات می‌نویسیم.

$$\vec{A}.\vec{\nabla}r=(\hat{e}_1A_1+\hat{e}_2A_2+\hat{e}_3A_3).\left(\frac{\hat{e}_1\partial r}{h_1\partial q_1}+\frac{\hat{e}_2\partial r}{h_2\partial q_2}+\frac{\hat{e}_3\partial r}{h_3\partial q_3}\right)$$

(الف) در مختصات دکارتی داریم: $\hat{e}_1=i\ ,\ \hat{e}_2=\hat{j}\ ,\ \hat{e}_3=\hat{k}\quad ,\quad h_1=h_2=h_3=1$

$A_1=A_x\ ,\ A_2=A_y\ ,\ A_3=A_z$ و $q_1=x\ ,\ q_2=y\ ,\ q_3=z$

$$\vec{A}.\vec{\nabla}r=A_x\frac{\partial(\hat{i}x+\hat{j}y+\hat{z}k)}{\partial x}+A_y\frac{\partial(\hat{i}x+\hat{j}y+\hat{z}k)}{\partial y}+A_z\frac{\partial(\hat{i}x+\hat{j}y+\hat{z}k)}{\partial z}$$

$$=\hat{i}A_x\frac{\partial x}{\partial x}+\hat{j}A_y\frac{\partial y}{\partial y}+\hat{k}A_z\frac{\partial z}{\partial z}=\hat{i}A_x+\hat{j}A_y+\hat{k}A_z=\vec{A}$$

(ب) در مختصات قطبی کروی داریم:

$\hat{e}_1=\hat{r}_\circ\quad ,\quad \hat{e}_2=\hat{\theta}_\circ\quad ,\quad \hat{e}_3=\hat{\phi}_\circ\quad ,\quad h_1=1, h_2=r,\ h_3=r\mathrm{Sin}\theta$

$A_1=A_r\quad ,\quad A_2=A_\theta\quad ,\quad A_3=A_\phi\qquad q_1=r,\ q_2=\theta, q_3=\phi$

$$\vec{A}.\vec{\nabla}r=A_r\frac{\partial}{\partial r}\left[\hat{i}(r\mathrm{Cos}\phi\,\mathrm{Sin}\theta)+\hat{j}(r\mathrm{Sin}\theta\,\mathrm{Sin}\phi)+\hat{k}(r\mathrm{Cos}\theta)\right]$$

$$+A_\theta\frac{\partial}{r\partial\theta}\left[\hat{i}(r\mathrm{Sin}\theta\,\mathrm{Cos}\phi)+\hat{j}(r\mathrm{Sin}\theta\,\mathrm{Sin}\phi)+\hat{k}(r\,\mathrm{Cos}\theta)\right]$$

$$+A_\phi\frac{\partial}{r\mathrm{Sin}\theta\partial\phi}\left[\hat{i}(r\mathrm{Sin}\theta\,\mathrm{Cos}\phi)+\hat{j}(r\mathrm{Sin}\theta\,\mathrm{Sin}\phi)+\hat{k}(r\,\mathrm{Cos}\theta)\right]$$

$$=A_r\hat{r}_\circ+\frac{1}{r}A_\theta(r\hat{\theta}_\circ)+\frac{1}{r\mathrm{Sin}\theta}A_\phi(r\mathrm{Sin}\theta\hat{\phi}_\circ)=A_r\hat{r}_\circ+A_\theta\hat{\theta}_\circ+A_\phi\hat{\phi}_\circ=\vec{A}$$

۲-۵-۱۰- ذره‌ای در فضا حرکت می‌کند مولفه‌های مختصات کروی سرعت و شتاب آن را بدست آورید.

[راهنمایی: $r(t)$ $\left[\vec{r}(t)=r_\circ(t)r(t)=\left[\hat{i}\mathrm{Sin}\theta(t)\,\mathrm{Cos}\phi(t)+\hat{j}\mathrm{Sin}\theta(t)\mathrm{Sin}\phi(t)+\hat{k}\mathrm{Cos}\theta(t)\right]\right.$

[یادآوری: با استفاده از تکنیکهای لاگرانژی بخش ۱۷-۳ می‌توانیم بصورت دقیقتری به این نتایج دست یابیم نقطهٔ بالای $\dot{r}$ به معنای مشتق زمانی است: $\dot{r}=\frac{dr}{dt}$ این نمادگذاری را نیوتون ابداع کرده است].

حل بردار مکان $\vec{r}=r\hat{r}_\circ\quad\Rightarrow\quad\vec{V}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\dot{r}\hat{r}_\circ+r\hat{r}_\circ$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\hat{r}_\circ = \hat{i}\,\mathrm{Cos}\phi\,\mathrm{Sin}\theta + \hat{j}\,\mathrm{Sin}\phi\,\mathrm{Sin}\theta + \hat{k}\,\mathrm{Cos}\theta \quad \Rightarrow$$

$$\dot{\hat{r}}_\circ = \dot{\phi}\,\mathrm{Sin}\theta\left[-\hat{i}\,\mathrm{Sin}\phi + \hat{j}\,\mathrm{Cos}\phi\right] + \dot{\theta}\left[\hat{i}\,\mathrm{Cos}\phi\,\mathrm{Cos}\theta + \hat{j}\,\mathrm{Sin}\phi\,\mathrm{Cos}\theta - \hat{k}\,\mathrm{Sin}\theta\right]$$

$$= \dot{\phi}\,\mathrm{Sin}\theta(\hat{\phi}_\circ) + \dot{\theta}\,\hat{\theta}_\circ$$

$$\vec{V} = \dot{r}\,\hat{r}_\circ + r\dot{\theta}\,\hat{\theta}_\circ + r\dot{\phi}\,\mathrm{Sin}\theta\,\hat{\phi}_\circ = V_r\,\hat{r}_\circ + V_\theta\,\hat{\theta}_\circ + V_\phi\,\hat{\phi}_\circ \quad \Rightarrow$$

$$V_r = \dot{r} \quad , \quad V_\theta = r\dot{\theta} \quad , \quad V_\phi = r\,\mathrm{Sin}\theta\,\dot{\phi}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \ddot{r}\,\hat{r}_\circ + \dot{r}\,\dot{\hat{r}}_\circ + \dot{r}\,\mathrm{Sin}\theta\,\dot{\phi}\,\hat{\phi}_\circ + r\dot{\theta}\,\mathrm{Cos}\theta\,\dot{\phi}\,\hat{\phi}_\circ + r\,\mathrm{Sin}\theta\,\ddot{\phi}\,\hat{\phi}_\circ$$

$$+ r\,\mathrm{Sin}\theta\,\dot{\phi}\,\dot{\hat{\phi}}_\circ + \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{\theta}_\circ + r\ddot{\theta}\,\hat{\theta}_\circ + r\dot{\theta}\,\dot{\hat{\theta}}_\circ$$

داریم:

$$\hat{\theta}_\circ = \left[\hat{i}\,\mathrm{Cos}\phi\,\mathrm{Cos}\theta + \hat{j}\,\mathrm{Sin}\phi\,\mathrm{Cos}\theta - \hat{k}\,\mathrm{Sin}\theta\right] \quad \Rightarrow$$

$$\dot{\hat{\theta}}_\circ = \dot{\hat{\phi}}_\circ\,\dot{\phi}\,\mathrm{Cos}\theta - \dot{\theta}\,\hat{r}_\circ$$

$$\hat{\phi}_\circ = -\hat{i}\,\mathrm{Sin}\phi + \hat{j}\,\mathrm{Cos}\phi \quad \Rightarrow \quad \dot{\hat{\phi}}_\circ = -\hat{i}\,\dot{\phi}\,\mathrm{Cos}\phi - \hat{j}\,\dot{\phi}\,\mathrm{Sin}\phi$$

پس بدست می‌آوریم:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\,\mathrm{Sin}^2\theta)\hat{r}_\circ + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\,\mathrm{Sin}\theta)\hat{\theta}_\circ +$$

$$(r\ddot{\phi}\,\mathrm{Sin}\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\,\mathrm{Sin}\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\,\mathrm{Cos}\theta)\hat{\phi}_\circ \quad \Rightarrow$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\,\mathrm{Sin}^2\theta \quad , \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\,\mathrm{Sin}\theta,$$

$$a_\phi = r\ddot{\phi}\,\mathrm{Sin}\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\,\mathrm{Sin}\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\,\mathrm{Cos}\theta$$

۲ـ۵ـ۱۱ـ ذرهٔ m تحت تأثیر یک نیروی مرکزی مطابق قانون دوم نیوتن حرکت می‌کند.

$$m\ddot{\vec{r}} = \hat{r}_\circ f(\vec{r})$$

نشان دهید که $\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = C$ بردار ثابتی است و تفسیر این نتیجه قانون دوم کپلر را می‌دهد.

حل

$$\vec{r} = r\hat{r}_\circ = r\left[\hat{i}\,\mathrm{Sin}\theta\,\mathrm{Cos}\phi + \hat{j}\,\mathrm{Sin}\theta\,\mathrm{Sin}\phi + \hat{k}\,\mathrm{Cos}\theta\right]$$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{V} = \dot{r}\,\hat{r}_\circ + r\dot{\theta}\,\hat{\theta}_\circ + r\dot{\phi}\,\mathrm{Sin}\theta\,\hat{\phi}_\circ$$

$$r \times \dot{r} = \frac{1}{r^2\,\mathrm{Sin}\theta}\begin{vmatrix} r_\circ & r\theta_\circ & r\mathrm{Sin}\theta\phi_\circ \\ r & & \\ \dot{r} & r\dot{\theta} & r\dot{\phi}\mathrm{Sin}\theta \end{vmatrix}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\frac{r\hat{\theta}_{\circ}}{r^{2}\sin\theta}\left[-r^{2}\dot{\phi}\sin\theta\right]+\frac{r\sin\theta\hat{\phi}_{\circ}}{r^{2}\sin\theta}\left[r^{2}\dot{\theta}\right]=$$

$$-r\dot{\phi}\hat{\theta}_{\circ}+r\dot{\theta}\hat{\phi}_{\circ}=r\left[\dot{\theta}\hat{\phi}_{\circ}-\dot{\phi}\hat{\theta}_{\circ}\right]=C=\text{ثابت}$$

۲-۵-۱۲- $\frac{\partial}{\partial x}$، $\frac{\partial}{\partial y}$ و $\frac{\partial}{\partial z}$ را برحسب مختصات قطبی کروی بنویسید.

حل

$$\nabla_{r,\theta,\phi}=\hat{r}_{\circ}\frac{\partial}{\partial r}+\hat{\theta}_{\circ}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\hat{\phi}_{\circ}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi},\quad\begin{cases}\hat{r}_{\circ}=\hat{i}\cos\phi\sin\theta+\hat{j}\sin\phi\sin\theta+\hat{k}\cos\theta\\ \hat{\theta}_{\circ}=\hat{i}\cos\phi\cos\theta+\hat{j}\cos\theta\sin\phi-\hat{k}\sin\theta\\ \hat{\phi}_{\circ}=-\hat{i}\sin\phi+\hat{j}\cos\phi\end{cases}$$

$$\nabla_{r,\theta,\phi}=\hat{i}\left(\cos\phi\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\cos\phi\cos\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)+$$

$$\hat{j}\left(\sin\phi\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\sin\phi\cos\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)+$$

$$\hat{k}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\sin\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

$$\nabla_{x,y,z}=\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\quad\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial x}=\sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r}+\cos\theta\cos\phi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\\ \frac{\partial}{\partial y}=\sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial r}+\cos\theta\sin\phi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\\ \frac{\partial}{\partial z}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\sin\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\end{cases}$$

۲-۵-۱۳- با استفاده از مسئله ۲-۵-۱۲ نشان دهید:

$$-\hat{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)=-i\frac{\partial}{\partial\phi}$$

این عملگر کوانتومی با مؤلفهٔ z تکانهٔ زاویه‌ای متناظر است.

حل

$$-i\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)=-i\left[r\cos\phi\sin\theta(\sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial r}+\sin\phi\cos\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$-r\sin\phi\sin\theta\left(\sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r}+\cos\phi\cos\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right]=$$

$$-i\left[\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}-\left(-\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right]=-i\left[\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}+\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right]=-i\frac{\partial}{\partial\phi}$$

۲ـ۵ـ۱۲ـ عملگر تکانهٔ زاویه‌ای در مکانیک کوانتومی، بنابر تعریف عبارت است از: $\vec{L}=-i(\vec{r}\times\vec{\nabla})$ نشان دهید:

(الف) $$L_x+iL_y=e^{i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+i\,\mathrm{Cotg}\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

(ب) $$L_x-iL_y=-e^{-i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-i\,\mathrm{Cotg}\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

این عبارتها عملگرهای افزاینده و کاهنده بخشهای ۱۲-۶ و ۷ هستند.

حل

$$L_x=-i\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right)=-i\left[(r\sin\theta\sin\phi)\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\sin\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right.$$

$$\left.-(r\cos\theta)\left(\sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial r}+\sin\phi\cos\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right]=$$

$$-i\left[-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta}-\mathrm{Cotg}\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right]=+i\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta}+i\,\mathrm{Cotg}\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$L_y=-i\left[z\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial z}\right]=-i\left[(r\cos\theta)\times\left(\sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r}+\cos\theta\cos\phi\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right.$$

$$\left.-(r\cos\phi\sin\theta)\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\sin\theta\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]=-i\left[\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta}-\sin\phi\,\mathrm{Cotg}\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right]$$

(الف) $$L_+=L_x+iL_y=i\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta}+i\,\mathrm{Cotg}\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}+i(-i)\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta}-\sin\phi\,\mathrm{Cotg}\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial\theta}(i\sin\phi+\cos\phi)+i\,\mathrm{Cotg}\theta(\cos\phi+i\sin\phi)\frac{\partial}{\partial\phi}=\frac{\partial}{\partial\theta}(e^{i\phi})+i\,\mathrm{Cotg}\theta(e^{i\phi})\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$=e^{i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+i\,\mathrm{Cotg}\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

(ب) $$L_-=L_x-iL_y=i\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta}+i\,\mathrm{Cotg}\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}-i(-i)\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta}-\sin\phi\,\mathrm{Cotg}\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial\theta}(i\sin\phi+\cos\phi)-i\,\mathrm{Cotg}\theta(i\sin\phi+\cos\phi)\frac{\partial}{\partial\phi}$$

PhysicsClass.blogskyo.com
Telegram.me/FizikCalass

$$= e^{i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - i\,\mathrm{Cotg}\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

۲ـ۵ـ۱۵ـ برای عملگر تکانهٔ زاویه‌ای در مکانیک کوانتومی: $\vec{L} = -i(\vec{r}\times\vec{\nabla})$ در مختصات قطبی کروی نشان دهید: $\vec{L}\times\vec{L} = i\vec{L}$

[راهنمایی: $\vec{L}$ را برحسب مختصات قطبی کروی بنویسید ولی ضرب برداری را برحسب مولفه‌های دکارتی محاسبه کنید.]

حل

$$\vec{L}\times\vec{L} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ L_x & L_y & L_z \\ L_x & L_y & L_z \end{vmatrix} = \hat{i}(L_yL_z - L_zL_y) + \hat{j}(L_zL_x - L_xL_z) + \hat{k}(L_xL_y - L_yL_x)$$

$$= \hat{i}\,[L_y, L_z] + \hat{j}\,[L_z, L_x] + \hat{k}\,[L_x, L_y] = iL_x\hat{i} + iL_y\hat{j} + iL_z\hat{k} = i\vec{L}$$

۲ـ۵ـ۱۷ـ با بهره‌گیری از $\vec{L} = -i\vec{r}\times\vec{\nabla}$ اتحادهای عملگری زیر را اثبات کنید.

(الف) $\vec{\nabla} = \hat{r}_\circ\frac{\partial}{\partial r} - i\frac{\vec{r}\times\vec{L}}{r^۲}$ (ب) $r\nabla^۲ - \vec{\nabla}\left(۱ + r\frac{\partial}{\partial r}\right) = -i\vec{\nabla}\times\vec{L}$

حل

طرف راست رابطه (الف) $= \hat{r}_\circ\frac{\partial}{\partial r} - i\frac{\vec{r}\times(-i\vec{r}\times\vec{\nabla})}{r^۲} = \hat{r}_\circ\frac{\partial}{\partial r} - i(-i)\frac{\vec{r}\times(\vec{r}\times\nabla)}{r^۲}$

$$= \hat{r}_\circ\frac{\partial}{\partial r} - ۱\left[\frac{\vec{r}(\vec{r}.\vec{\nabla}) - (\vec{r}.\vec{r})\vec{\nabla}}{r^۲}\right] = \hat{r}_\circ\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\vec{r}(\vec{r}.\vec{\nabla})}{r^۲} - \frac{r^۲\vec{\nabla}}{r^۲}$$

$$= \hat{r}_\circ\frac{\partial}{\partial r} - \frac{r^۲(\hat{r}_\circ^{۲}.\nabla)}{r^۲} + \vec{\nabla} = \hat{r}_\circ\frac{\partial}{\partial r} - \hat{r}_\circ^{۲}.\left(r_\circ\frac{\partial}{\partial r}\right) + \vec{\nabla}$$

$$= \hat{r}_\circ\frac{\partial}{\partial r} - \hat{r}_\circ\left(\hat{r}_\circ.\hat{r}_\circ\frac{\partial}{\partial r}\right) + \vec{\nabla} = \hat{r}_\circ\frac{\partial}{\partial r} - \hat{r}_\circ\frac{\partial}{\partial r} + \vec{\nabla} = \vec{\nabla}$$

طرف راست رابطه (ب) $= i\vec{\nabla}\times(-i\vec{r}\times\vec{\nabla}) = i(-i)(\vec{\nabla}\times(\vec{r}\times\vec{\nabla}))$

$$= (\vec{\nabla}\times(\vec{r}\times\vec{\nabla})) = \vec{r}(\vec{\nabla}.\vec{\nabla}) - \vec{\nabla}(\vec{r}.\vec{\nabla}) = \vec{r}\nabla^۲ - \nabla\left(r\hat{r}_\circ.\hat{r}_\circ\frac{\partial}{\partial r}\right)$$

$$= \vec{r}\nabla^۲ - \nabla\left(r\frac{\partial}{\partial r} + ۱\right)$$

۲ـ۵ـ۱۸ـ نشان دهید که سه عبارت زیر برای کمیت $\nabla^۲\psi(r)$ (در مختصات کروی) هم ارزند.

(الف) $\frac{1}{r^۲}\frac{d}{dr}\left[r^۲\frac{d\psi(r)}{dr}\right]$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikClass

(ب) $\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\left[r\psi(r)\right]$ (ج) $\frac{d^2\psi}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d\psi(r)}{dr}$

به خصوص که عبارت دوم برای اثبات تناظر بین توصیف دکارتی یک مسئله با توصیف قطبی کروی آن سودمند است این تناظر در مسئله ۸-۶-۱۱ تعمیم داده می‌شود.

حل (الف)

$$\vec{\nabla}=\hat{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}+\hat{\theta}\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\hat{\phi}\cdot\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$\vec{\nabla}\psi=\hat{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\hat{\theta}\cdot}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\frac{\hat{\phi}\cdot}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\Rightarrow$$

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\psi=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right]$$

$$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{d\psi}{dr}\right)=\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{d\psi(r)}{dr}\right]$$

(ب)

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\psi=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\right)=\frac{1}{r^2}\left(\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\psi}{dr}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{r^2}\left[2r\frac{\partial\psi}{\partial r}+r^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\right]=\frac{2}{r}\frac{d\psi}{dr}+\frac{d^2\psi}{dr^2}\Rightarrow$$

$$\nabla^2\psi(r)=\frac{1}{r}\left[2\frac{d\psi}{dr}+r\frac{d^2\psi}{dr^2}\right]=\frac{1}{r}\left[\frac{d\psi}{dr}+\frac{d\psi}{dr}+r\frac{d^2\psi}{dr^2}\right]$$

$$=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[\psi+r\frac{d\psi}{dr}\right]=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[\frac{d(r\psi)}{dr}\right]=\frac{1}{r}\frac{d^2(r\psi)}{dr^2}=\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\left[r\psi(r)\right]$$

(ج) در حل قسمت (ب) اثبات شد.

۲-۵-۱۹- در یکی از مدلهای هالهٔ خورشیدی فرض می‌شود که معادلهٔ حالت مانای شارش گرما، یعنی عبارت زیر در آن صدق می‌کند:

$$\vec{\nabla}.(K\vec{\nabla}T)=0$$

که در آن K، یعنی رسانندگی گرمایی با $T^{\frac{5}{2}}$ متناسب است با فرض اینکه دمای T با r^n متناسب باشد نشان دهید $T=T_0\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{2}{7}}$ در معادلهٔ شارش گرما صدق می‌کند.

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

حل

$$\vec{\nabla}.(K\vec{\nabla}T)=\vec{\nabla}K.\vec{\nabla}T+K\nabla^{۲}T=۰$$

با توجه به اینکه $K\propto T^{\frac{۵}{۲}}$ و $T\propto r^{n}$ اگر در رابطه قرار دهیم داریم $K\propto r^{\frac{۵n}{۲}}$

$$\vec{\nabla}.(K\vec{\nabla}T)=\vec{\nabla}r^{\frac{۵n}{۲}}.\nabla r^{n}+r^{\frac{۵n}{۲}}\nabla^{۲}[r^{n}]=۰$$

$$\Rightarrow\ \frac{۵n}{۲}r^{(\frac{۵n}{۲}-۱)}(nr^{n-۱})+r^{\frac{۵n}{۲}}\left[n(n-۱)r^{n-۲}+\frac{۲n}{r}r^{n-۱}\right]=۰$$

$$\Rightarrow\ n^{۲}+n+\frac{۵}{۲}n^{۲}=۰\ \Rightarrow\ n=-\frac{۲}{۷}\ \Rightarrow$$

$$T\propto r^{\frac{-۲}{۷}}\ \Rightarrow\ \boxed{T=T_{۰}\left(\frac{r_{۰}}{r}\right)^{\frac{۲}{۷}}}$$

۲ـ۵ـ۲۰ـ میدان نیرویی (در مختصات قطبی کروی) به قرار زیر است:

$$\vec{F}=\hat{r}_{۰}\frac{۲P\cos\theta}{r^{۳}}+\hat{\theta}_{۰}\frac{P}{r^{۳}}\sin\theta\quad\text{و}\quad r\geq\frac{P}{۲}$$

(الف) با محاسبهٔ $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ امکان وجود یک پتانسیل را بررسی کنید. (ب) $\oint\vec{F}.d\vec{\lambda}$ را روی دایرهٔ واحد در صفحه $\theta=\frac{\pi}{۲}$ محاسبه کنید این محاسبه درباره پایستار یا ناپایستار بودن نیرو چه اطلاعی به ما می‌دهد؟ (ج) اگر باور می‌کنید که F را می‌شود به صورت $\vec{F}=-\vec{\nabla}\psi$ توصیف کرد ψ را بیابید در غیر اینصورت فقط بگوئید که هیچ پتانسیل قابل قبولی وجود ندارد.

حل (الف)

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\frac{۱}{r^{۲}\sin\theta}\begin{vmatrix}\hat{r}_{۰} & r\hat{\theta}_{۰} & r\sin\theta\hat{\phi}_{۰}\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi}\\ \frac{۲P\cos\theta}{r^{۳}} & \frac{rP\sin\theta}{r^{۳}} & ۰\end{vmatrix}\ \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\frac{۱}{r^{۲}\sin\theta}\left[۰-۰+r\sin\theta\phi_{۰}\left[-\frac{۲P\sin\theta}{r^{۳}}-\frac{۲P(-\sin\theta)}{r^{۳}}\right)\right]=۰$$

$\Rightarrow$ پتانسیل وجود دارد $\Rightarrow$ نیرو پایستار است

(ب)

$$\oint F.d\lambda=\oint\left(\hat{r}_{۰}\frac{۲P\cos\theta}{r^{۳}}+\hat{\theta}_{۰}\frac{P\sin\theta}{r^{۳}}\right).(r_{۰}dr+r\theta_{۰}d\theta+r\sin\theta\phi d\phi)$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$= \oint_{0}^{1} \frac{2P\cos\theta}{r^3} dr = 2P\cos\theta \oint_{0}^{1} \frac{dr}{r^3} = \frac{-P\cos\theta}{r^2} \Big|_{0}^{1} = -P\cos\theta$$

(ج)
$$F = -\nabla\psi \quad \Rightarrow \quad \psi = -\int F.d\lambda = -(-P\cos\theta) = P\cos\theta$$

۲ـ۵ـ۲۱ـ (الف) نشان دهید که $\vec{A} = -\phi_{0}\, \mathrm{Cotg}\frac{\theta}{r}$ یکی از جوابهای معادلهٔ $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\hat{r}_{0}}{r^2}$ است. (ب) نشان دهید این جواب که برحسب مختصات قطبی کروی است با جوابی که در مسئله ۱-۱۳-۵ بدست آمد یعنی $\vec{A} = \hat{i}\frac{yz}{r(x^2+y^2)} - \hat{j}\frac{xz}{r(x^2+y^2)}$ سازگار است توجه کنید که این جواب به ازای $\theta=0$ و $\theta=\pi$ (متناظر با $y=0$ و x) و اگرا می‌شود. (ج) سرانجام نشان دهید که $\vec{A} = -\hat{\theta}_{0}\phi\frac{\mathrm{Sin}\theta}{r}$ نیز یکی از جوابهاست. توجه داشته باشید که این جواب (به ازای $r\neq 0$) واگرا نیست ولی به ازای هیچیک از زاویه‌های سمتی ممکن تک مقدار نیست.

حل (الف)

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r^2\mathrm{Sin}\theta} \begin{vmatrix} \hat{r}_{0} & r\hat{\theta}_{0} & r\mathrm{Sin}\theta\hat{\phi}_{0} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ 0 & 0 & -r\mathrm{Sin}\theta\frac{\mathrm{Cotg}\theta}{r} \end{vmatrix} = \frac{\hat{r}_{0}}{r^2}$$

(ب)
$$\vec{A} = \hat{i}\frac{xz}{r(x^2+y^2)} - \hat{j}\frac{xz}{r(x^2+y^2)} = \hat{i}\frac{r^2\mathrm{Sin}\theta\,\mathrm{Cos}\theta\,\mathrm{Sin}\phi}{r^3\mathrm{Sin}^2\theta} - \hat{j}\frac{r^2\mathrm{Sin}\theta\,\mathrm{Cos}\theta\,\mathrm{Cos}\phi}{r^3\mathrm{Sin}^2\theta}$$

$$= \frac{1}{r}\mathrm{Cotg}\theta\left[\hat{i}\,\mathrm{Sin}\phi - \hat{j}\,\mathrm{Cos}\phi\right]$$

(ج)
$$\hat{\phi}_{0} = -\hat{i}\,\mathrm{Sin}\phi + \hat{j}\,\mathrm{Cos}\phi \quad , \quad A = -\hat{\theta}_{0}\frac{\phi\mathrm{Sin}\theta}{r}$$

$$\vec{\nabla} \times \hat{A} = \frac{1}{r^2\mathrm{Sin}\theta} \begin{vmatrix} r_{0} & r\theta_{0} & r\mathrm{Sin}\theta\phi_{0} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ 0 & -\frac{\phi\mathrm{Sin}\theta}{r} & 0 \end{vmatrix} = \frac{\vec{r}_{0}}{r^2}$$

پس $\vec{A}$ قسمت (ج) نیز جواب است.

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

۲-۵-۲۲- پتانسیل برداری مغناطیسی $\vec{A}$ به قرار زیر داده شده است.

$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}$ نشان دهید که این پتانسیل برداری به القای مغناطیسی $\vec{B}$ ناشی از یک دو قطبی مغناطیسی نقطه‌ای با گشتاور دوقطبی $\vec{m}$ منجر می‌شود.

حل

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\hat{r}_0 & r\hat{\theta}_0 & r\sin\theta\hat{\phi}_0\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi}\\ 0 & 0 & r\sin\theta\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m\times r}{r^3}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\left[\hat{r}_0\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}\right]-\left[r\hat{\theta}_0\frac{\partial}{\partial r}r\sin\theta(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m\times r}{r^3})\right]\right]$$

$$=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\left[\hat{r}_0\frac{\partial}{\partial\theta}(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{mr^2\sin^2\theta}{r^3}\right]-\left[r\hat{\theta}_0\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{mr^2\sin^2\theta}{r^3})\right]\right]$$

$$=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\left[\hat{r}_0\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2m\sin\theta\cos\theta}{r}\right]+\left[\hat{\theta}_0\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m\sin^2\theta}{r}\right]\right]$$

$$=\hat{r}_0\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2m\cos\theta}{r^3}+\hat{\theta}_0\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m\sin\theta}{r^3}$$

۲-۵-۲۳- تابش دو قطبی الکتریکی در فاصلهٔ زیادی از منبع آن دارای میدانهایی به قرار زیر است:

$$\vec{E}=a_E\sin\theta\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\hat{\theta}_0\quad,\quad\vec{B}=a_B\sin\theta\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\hat{\phi}_0$$

نشان دهید که معادلات ماکسول $\vec{\nabla}\times\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ و $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ به شرطی صادق‌اند که بگیریم.

$$\frac{a_E}{a_B}=\frac{\omega}{k}=C=(\varepsilon_0\mu_0)^{-\frac{1}{2}}$$

[راهنمایی: چون r بزرگ است می‌توانیم از جمله‌هایی از مرتبهٔ r^{-2} صرفنظر کنیم.]

حل

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\hat{r}_0 & r\hat{\theta}_0 & r\sin\theta\hat{\phi}_0\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi}\\ 0 & ra_E\sin\theta\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} & 0\end{vmatrix}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\left.\begin{aligned} &= \hat{\phi}_{\circ}\, a_E\, k i \,\mathrm{Sin}\theta \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \\ &-\frac{\partial B}{\partial t} = \left(a_B \omega i \,\mathrm{Sin}\theta \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\right) \\ &a_B\omega = a_E k \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{r^2 \mathrm{Sin}\theta}\begin{vmatrix} \hat{r}_{\circ} & r\hat{\theta}_{\circ} & r\mathrm{Sin}\theta\hat{\phi}_{\circ} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \circ & \circ & r\mathrm{Sin}\theta\left(a_B \mathrm{Sin}\theta \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\right) \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{B} = \underbrace{\frac{r_{\circ}}{r^2} 2a_B \,\mathrm{Cos}\theta e^{i(kr-\omega t)}}_{\text{صرفنظر می‌شود}} - \frac{\theta_{\circ}}{r\mathrm{Sin}\theta}\left[a_B \,\mathrm{Sin}^2\theta (ik)\, e^{i(kr-\omega t)}\right]$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = a_B \mathrm{Sin}\theta \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}(-ik)\hat{\theta}_{\circ}$$

$$= a_E \,\mathrm{Sin}\theta(-i\omega)\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\hat{\theta}_{\circ}\left(\frac{a_B k}{a_E \omega}\right) = \frac{\partial E}{\partial t}\left(\frac{a_B}{a_E}\right)\left(\frac{k}{\omega}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(\mu_{\circ}\varepsilon_{\circ})$$

۲ـ۵ـ۲۲ـ (الف) توضیح دهید که به چه دلیل ∇^2 در مختصات قطبی تخت از ∇^2 در مختصات استوانه‌ای دوار با $z=\mathrm{Cost}$ بدست می‌آید. (ب) توضیح دهید که چرا ∇^2 در مختصات قطبی کروی با محدودکردن θ به $\frac{\pi}{2}$ به صورت ∇^2 در مختصات قطبی تخت منجر نمی‌شود.

[یادآوری: $[\nabla^2(\rho,\phi) = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$

حل (الف) چون دستگاه مختصات تخت همان دستگاه استوانه‌ای است که ارتفاع آن صفر باشد پس نه تنها در مورد ∇^2 بلکه در سایر موارد جمله مربوط به ارتفاع حذف می‌گردد.

(ب) $\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2\mathrm{Sin}\theta}\left[\mathrm{Sin}\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{Sin}\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\mathrm{Sin}\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right]$ در مختصات کروی

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$$

$$=\frac{2r}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\frac{\sin\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2},\theta=\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow\quad \underbrace{\nabla^2\psi=\frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}}_{\text{کروی}}\neq\underbrace{\nabla^2\psi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}}_{\text{تخت}}$$

بخش ۲ـ۶ـ جداسازی متغیرها — مسائل صفحه ۱۵۹

۲ـ۶ـ۱ـ با اعمال عملگر ∇^2+k^2 روی تابع کلی $a_1\psi_1(x,y,z)+a_2\psi_2(x,y,z)$ نشان دهید که این عملگر خطی است یعنی

$$(\nabla^2+k^2)(a_1\psi_1+a_2\psi_2)=a_1(\nabla^2+k^2)\psi_1+a_2(\nabla^2+k^2)\psi_2$$

حل

$$(\nabla^2+k^2)(a_1\psi_1+a_2\psi_2)=(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2)(a_1\psi_1+a_2\psi_2)$$

$$=a_1(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi_1}{\partial z^2}+k^2\psi_1)+a_2(\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi_2}{\partial z^2}+k^2\psi_2)$$

$$=a_1(\nabla^2+k^2)\psi_1+a_2(\nabla^2+k^2)\psi_2$$

۲ـ۶ـ۲ـ نشان دهید که اگر k^2 در معادله هلمهولتز $\nabla^2\psi+k^2\psi=0$ به $k^2+f(\rho)+(\frac{1}{\rho^2})g(\phi)+h(z)$ تعمیم یابد باز هم این معادله در مختصات استوانه‌ای دوار تفکیک پذیر است.

حل

$$\nabla^2\psi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho})+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\left[k^2+f(\rho)+\frac{1}{\rho^2}g(\phi)+h(z)\right]\psi=0$$

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho})+f(\rho)\psi\right]+\frac{1}{\rho^2}(\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}+g(\phi)\psi)+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+h(z)\psi+k^2\psi=0$$

$$\psi(\rho,\phi,z)=R(\rho)\Phi(\phi)Z(z)$$

$$\Phi Z\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{dR}{d\rho})+f(\rho)R\right]+\frac{1}{\rho^2}RZ\left[\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+g(\phi)\Phi\right]+R\Phi\frac{d^2Z}{dz^2}+h(z)R\Phi Z+k^2R\Phi Z=0$$

با تقسیم طرفین بر $R\Phi Z$ داریم

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\frac{1}{R}\left[\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho\frac{dR}{d\rho})+f(\rho)R\right]+\frac{1}{\rho^2}\frac{1}{\Phi}\left[\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+g(\phi)\Phi\right]+\frac{1}{Z}\left[\frac{d^2Z}{dz^2}\right]+h(z)+k^2=0$$

سه معادلهٔ دیفرانسیلی پیدا می‌شود که هر کدام را مساوی یک ثابت قرار می‌دهیم و ضرایب را بدست می‌آوریم:

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}+h(z)=-b^2$$

$$\left[\frac{1}{R\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho\frac{dR}{d\rho}+f(\rho)+\frac{1}{\Phi\rho^2}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+\frac{1}{\rho^2}g(\phi)+k^2=b^2\right. \Rightarrow$$

$$\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}(\rho\frac{dR}{d\rho})+\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+\rho^2f(\rho)+g(\phi)+k^2\rho^2=b^2\rho^2 \qquad (1)$$

$$b^2\rho^2-k^2\rho^2-g(\phi)+\rho^2f(\rho)=-m^2 \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}(\rho\frac{dR}{d\rho})+\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+m^2=0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=-m^2-\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}(\rho\frac{dR}{d\rho}) \Rightarrow \frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=-L^2$$

$$\Rightarrow -L^2=-m^2-\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}(\rho\frac{dR}{d\rho})$$

۲ـ۶ـ۳ـ در معادلهٔ هلمهولتز در مختصات قطبی کروی متغیرها را چنان تفکیک کنید که وابستگی شعاعی اول جدا شود نشان دهید که معادله‌های تفکیک شده‌ای که بدست آورده‌اید به همان صورت معادله ۲-۸۷، ۲-۹۰ و ۲-۹۱ هستند.

حل حل همانند مسئله قبل می‌باشد و در بعضی موارد در حل مسئله قبل به حل این مسئله نیز اشاره شده است.

۲ـ۶ـ۴ـ ثابت کنید که معادلهٔ

$$\nabla^2\psi(r,\theta,\phi)+\left[k^2+f(r)+\frac{1}{r^2}g(\theta)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}h(\phi)\right]\psi(r,\theta,\phi)=0$$

(در مختصات قطبی کروی) تفکیک‌پذیر است. توابع f و g و h هر یک تابعی از تنها متغیری‌اند که در رابطهٔ مشخص شده است؛ K^2 ثابت است.

حل

$$\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r})+\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta})+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\right]+$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\left[k^2+f(r)+\frac{1}{r^2}g(\theta)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}h(\phi)\right]\psi(r,\theta,\phi)=0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\Bigg]+$$

$$\left[k^2+f(r)+\frac{1}{r^2}g(\theta)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}h(\phi)\right]\psi(r,\theta,\phi)$$

$$\psi(r,\theta,\phi)=R(r)\ \Theta(\theta)\ \Phi(\phi)$$

$$\left[\frac{1}{Rr^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{\Theta r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\frac{1}{\Phi r^2\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}\right]$$

$$+\left[k^2+f(r)+\frac{1}{r^2}g(\theta)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}h(\phi)\right]=0 \quad \Rightarrow$$

$$r^2\sin^2\theta\left[\frac{1}{Rr^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{\Theta r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\right.$$

$$\left.\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}\right]+r^2\sin^2\theta\left[k^2+f(r)+\frac{1}{r^2}g(\theta)\right] \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+h(\phi)\right)=-m^2$$

$$\frac{m^2}{\sin^2\theta}=\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+$$

$$k^2r^2+r^2f(r)+g(\theta)=\frac{m^2}{\sin^2\theta}-\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)-g(\theta)$$

$$=\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+k^2r^2+r^2$$

۲ـ۶ـ۵ـ یک ذره اتمی در جعبهٔ مکعب مستطیلی به یالهای a، b و c محبوس است این ذره در مکانیک کوانتومی توسط تابع موج ψ توصیف می‌شود که در معادلهٔ شرودینگر $\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi=E\psi$ صدق می‌کند. تابع موج باید روی هر یک از رخهای جعبه صفر باشد (ولی نباید متحد با صفر شود) این شرط محدودیتهایی روی ثابتهایی جداسازی و در نتیجه روی انرژی E اعمال می‌کند. کمترین مقداری که E می‌تواند داشته باشد تا چنین جوابی وجود داشته باشد، چقدر است؟

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

حل

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = E\psi \quad , \quad \psi = X(x)\,Y(y)\,Z(z) \quad (1)$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\left[\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{d^2\psi}{dy^2}+\frac{d^2\psi}{dz^2}\right] = E\psi \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{d^2\psi}{dy^2}+\frac{d^2\psi}{dz^2} = \frac{-2mE}{\hbar^2}\psi$$

با اعمال ψ به صورت (۱) و جداسازی داریم:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\ell^2 \quad , \quad X = \sin\ell x \quad , \quad \ell a = P_1\pi$$

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -m^2 \quad , \quad Y = \sin my \quad , \quad mb = P_2\pi$$

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -n^2 \quad , \quad Z = \sin nz \quad , \quad nc = P_3\pi$$

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = \pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{E = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

حل رابطه (۳-۶) و $A'_i = \sum_{j=1}^{4} a_{ij} A_j$

چون طبق فرض مسئله سه مولفه اول صفرند پس فقط داریم $A'_4 = a_{i4} A_4$

A'_4 در دستگاه پریم‌دار و بطبع A_4 در دستگاه بدون پریم است از طرفی طبق فرض که دست کم یکی از ضرایب $a_{i4}(i=1,2,3)$ مخالف صفر است داریم:

$$\text{IF} \quad a_{i4}(i=1,2,3) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad A_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad A'_4 = 0$$

و این در حالتی است که چرخش حول محور A_4 انجام شده است و نتیجه می‌گیریم که مولفهٔ چهارم یعنی $A'_4 = a_{44} A_4$ در تمام چارچوبهای مرجع صفر است.

۳-۱-۴- با بررسی رفتار یک تانسور مرتبهٔ دوم کلی تحت چرخشهای 90° و 180° حول محورهای مختصات، نشان دهید که یک تانسور مرتبهٔ دوم همسانگرد در فضای سه بعدی باید مضربی از δ_{ij} باشد.

حل مسئله را برای چرخش 90° حل می‌کنیم حالت 180° بطور مشابه حل می‌گردد.

$$A = \begin{bmatrix} \cos 90 & \sin 90 & 0 \\ -\sin 90 & \cos 90 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A'_{ij} = \sum_{k\ell} \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} \frac{\partial x_\ell}{\partial x'_j} A_{k\ell} = \sum_{k\ell} a_{ik}\, a_{j\ell} A_{k\ell}$$

$$A'_{11} = A_{22} \quad , \quad A'_{12} = -A_{21} \quad , \quad A'_{13} = A_{23}$$

$$A'_{21} = -A_{12} \quad , \quad A'_{22} = A_{11} \quad , \quad A'_{23} = A_{13}$$

$$A'_{31} = A_{13} \quad , \quad A'_{32} = A_{23} \quad , \quad A'_{33} = A_{33}$$

چون تانسور همسانگرد است دیده می‌شود که مولفه‌های پریم‌دار آن با بدون پریم یکی است و از طرفی می‌دانیم که خاصیت دلتای کرونکر δ_{ij} این است که در جملهٔ دستگاههای چرخیده مختصاتی مولفه‌های یکسانی دارد و به همین دلیل همسانگرد است پس A مضربی از δ_{ij} می‌باشد.

۳-۱-۵- تانسور خمش مرتبهٔ چهارم چهار بعدی ریمان ـ کریستوفل در نسبیت عامل $R_{ik\ell m}$ در رابطه‌های تقارن

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

بخش ۳ـ۱ـ مقدمه ـ تعریفها مسائل صفحه ۱۶۸

۳ـ۱ـ۱ـ نشان دهید که اگر مؤلفه‌های تانسوری از هر مرتبه در یک دستگاه مختصات خاص صفر باشند این مولفه‌ها در هر دستگاه مختصات دیگری صفر خواهند بود.

[یادآوری: این نکته در فضای خمیدهٔ چهار بعدی نسبیت عام اهمیت ویژه‌ای پیدا می‌کند اگر کمیتی که به شکل یک تانسور توصیف شده است در یک دستگاه مختصات وجود داشته باشد. در تمام دستگاههای مختصات وجود خواهد داشت و نمی‌تواند (مانند نیروهای مرکز گریز و کور یولیس در مکانیک نیوتونی) پیامد یک انتخاب خاص دستگاه مختصات باشد.]

حل

$$T^{in}_{jkm} = 0 \quad \Rightarrow \quad T'^{in}_{jkm} = 0$$

$$T'^{in}_{jkm} = \frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{\ell}} \frac{\partial x'^{n}}{\partial x^{m}} \frac{\partial x^{s}}{\partial x'^{j}} \frac{\partial x^{o}}{\partial x'^{k}} \frac{\partial x^{p}}{\partial x'^{m}} T^{\ell m}_{sop}$$

$$T^{\ell m}_{sop} = aaaa\ldots = 0 \qquad T'^{in}_{jkm} = 0$$

۳ـ۱ـ۲ـ در یک دستگاه مختصات خاص مؤلفه‌های تانسور A با مؤلفه‌های متناظر تانسور B برابرند یعنی $A^{o}_{ij} = B^{o}_{ij}$

نشان دهید که تانسورهای A و B در جملهٔ دستگاههای مختصات با هم برابرند یعنی در تمام دستگاههای مختصات داریم: $A_{ij}=B_{ij}$

حل

$$A_{ij} = B_{ij} \quad \Rightarrow \quad A'_{ij} = B'_{ij}$$

$$A'_{ij} = \frac{\partial x^{\ell}}{\partial x'^{i}} \frac{\partial x^{m}}{\partial x'^{j}} A_{\ell m} \quad , \quad B'_{ij} = \frac{\partial x^{\ell}}{\partial x'^{i}} \frac{\partial x^{m}}{\partial x'^{j}} B_{\ell m}$$

$$\Rightarrow \quad B'_{ij} = \frac{\partial x^{\ell}}{\partial x'^{i}} \cdot \frac{\partial x^{m}}{\partial x'^{j}} A_{\ell m} = A'_{ij} \quad \Rightarrow$$

$$B'_{ij} = A'_{ij}$$

۳ـ۱ـ۳ـ سه مولفهٔ اول یک بردار چهار بعدی در دو چارچوب مرجع صفرند. اگر چارچوب مرجع دوم صرفاً یک چرخش چارچوب مرجع اول حول محور x نباشد، یعنی دست کم یکی از ضرایب $a_{i۴}$ $(i=۱,۲,۳)$ غیرصفر باشد. نشان دهید که مولفهٔ چهارم در تمام چارچوبهای مرجع صفر است. این نکته به زبان مکانیک نسبیتی به معنای آن است که اگر تکانه در دو چارچوب لورنتسی پایسته باشد. انرژی [illegible] خواهد بود.

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

حل رابطه (۳-۶) و $A'_i = \sum_{j=1}^{4} a_{ij} A_j$

چون طبق فرض مسئله سه مولفه اول صفرند پس فقط داریم $A'_4 = a_{i4} A_4$

A'_4 در دستگاه پریم‌دار و بطبع A_4 در دستگاه بدون پریم است از طرفی طبق فرض که دست کم یکی از ضرایب $a_{i4}(i=1,2,3)$ مخالف صفر است داریم:

$$\text{IF} \quad a_{i4}(i=1,2,3) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad A_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad A'_4 = 0$$

و این در حالتی است که چرخش حول محور A_4 انجام شده است و نتیجه می‌گیریم که مولفهٔ چهارم یعنی $A'_4 = a_{44} A_4$ در تمام چارچوبهای مرجع صفر است.

۳-۱-۴- با بررسی رفتار یک تانسور مرتبهٔ دوم کلی تحت چرخشهای 90° و 180° حول محورهای مختصات، نشان دهید که یک تانسور مرتبهٔ دوم همسانگرد در فضای سه بعدی باید مضربی از δ_{ij} باشد.

حل مسئله را برای چرخش 90° حل می‌کنیم حالت 180° بطور مشابه حل می‌گردد.

$$A = \begin{bmatrix} \cos 90 & \sin 90 & 0 \\ -\sin 90 & \cos 90 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A'_{ij} = \sum_{k\ell} \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} \frac{\partial x_\ell}{\partial x'_j} A_{k\ell} = \sum_{k\ell} a_{ik} a_{j\ell} A_{k\ell}$$

$$A'_{11} = A_{22} \quad , \quad A'_{12} = -A_{21} \quad , \quad A'_{13} = A_{23}$$

$$A'_{21} = -A_{12} \quad , \quad A'_{22} = A_{11} \quad , \quad A'_{23} = A_{13}$$

$$A'_{31} = A_{13} \quad , \quad A'_{32} = A_{23} \quad , \quad A'_{33} = A_{33}$$

چون تانسور همسانگرد است دیده می‌شود که مولفه‌های پریم‌دار آن با بدون پریم یکی است و از طرفی می‌دانیم که خاصیت دلتای کرونکر δ_{ij} این است که در جملهٔ دستگاههای چرخیده مختصاتی مولفه‌های یکسانی دارد و به همین دلیل همسانگرد است پس A مضربی از δ_{ij} می‌باشد.

۳-۱-۵- تانسور خمش مرتبهٔ چهارم چهار بعدی ریمان ـ کریستوفل در نسبیت عام $R_{ik\ell m}$ در رابطه‌های تقارنی زیر صدق می‌کند.

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$R_{ik\ell m} = -R_{ikm\ell} = -R_{ki\ell m}$$

که در آن شاخصها اعداد از یک تا چهار را به خود می‌گیرند. نشان دهید که تعداد مؤلفه‌های مستقل از ۲۵۶ به ۳۶ کاهش می‌یابد و شرط

$$R_{ik\ell m} = R_{\ell mik}$$

تعداد مولفه‌های مستقل را به ۲۱ کاهش می‌دهد. سرانجام نشان دهید که اگر مؤلفه‌ها در اتحاد $R_{ik\ell m} + R_{i\ell mk} + R_{imk\ell} = 0$ صدق کنند. تعداد مولفه‌ها مستقل به ۲۰ می‌رسد.

[یادآوری: اتحاد سه جمله‌ای آخر فقط اگر همه چهار شاخص با هم متفاوت باشند حاوی اطلاعات جدیدی است. این اتحاد یک سوم از تعداد مؤلفه‌های مستقلی را که دارای این شرط هستند کم می‌کند.]

حل با توجه به تعداد شاخصها که ۴ تا هستند پس $۴^۴$ حالت یعنی ۲۵۶ حالت وجود دارد.

با توجه به شرط $R_{ik\ell m} = -R_{ikm\ell} = -R_{ki\ell m}$ و اینکه تانسور به صورت ۱۶ مربع است نتیجتاً دو اندیس اول در هر ربع ثابت می‌باشد و نیز از هر ۶ متغیر یک مربع ۳ تا مستقل وجود دارد پس از شرط اول ۹۶ متغیر داریم و با اعمال شرط دو ۴۸ متغیر خواهیم داشت اما با توجه به $R_{ik\ell m} = R_{ki\ell m}$ ، ۱۲ متغیر دیگر کاسته شود و ۳۶ متغیر مستقل داریم با اعمال شرط $R_{ik\ell m} = R_{\ell mik}$ داریم

۱۶-۴=۱۲ و ۱۲÷۲=۶

۳۶-۶=۳۰÷۲=۱۵+۶=۲۱

۲۱ متغیر مستقل بدست می‌آید.

و بالاخره شرط آخر یعنی $R_{ik\ell m} + R_{i\ell mk} + R_{imk\ell} = 0$ یک متغیر دیگر می‌کاهد و در کل با اعمال شروط ذکر شده ۲۰ متغیر مستقل بدست خواهد آمد.

۶ـ۱ـ۳ $T_{ik\ell m}$ نسبت به هر زوج شاخص از چهار شاخص خود پاد متقارن است این تانسور (در فضای سه بعدی) چند مولفهٔ مستقل دارد؟

حل

$T_{ki\ell m} = -T_{ik\ell m}$ پاد متقارن

$T_{ik\ell m} = -T_{i\ell km}$

ماتریس یک تانسور مرتبه ۲ است.

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

ولی فضایش هر چه می‌تواند باشد مثلاً ۳×۳ یا n×n و ...

$i=۱,۲,۳$

$k=۱,۲,۳$ اگر فضا سه بعدی باشد

$\ell=۱,۲,۳$

$m=۱,۲,۳$

$T_{۱۲۳۱}=-T_{۱۲۳۱}=۰$

$T_{۱۲۳۳}=-T_{۱۲۳۳}$ $T_{۱۲۳۳}=-T_{۱۲۳۳}=۰$

عنصر مستقل ندارد.

بخش ۳-۲-ادغام-ضرب مستقیم مسائل صفحه ۱۷۱

۳-۲-۱- اگر $T_{...i}$ تانسوری از مرتبهٔ n باشد نشان دهید که $\partial T_{...i/\partial x_j}$ (در مختصات دکارتی) تانسوری از مرتبهٔ n+۱ خواهد بود.

[یادآوری: ضرایب a_{ij} در دستگاه مختصات غیردکارتی بطور کلی توابعی از مختصات‌اند و مشتق ساده یک تانسور مرتبه n تانسور نیست مگر در حالت خاص n=۰ و فقط در این حالت است که مشتق بنابر معادلهٔ ۳-۱۱ یک بردار (تانسور مرتبه ۱) همورد است].

حل

$$\frac{\partial T'_{...i}}{\partial x'_j}=\frac{\partial}{\partial x'_j}\left(\frac{\partial x'_۱}{\partial x_m}\frac{\partial x'_۲}{\partial x_n}\cdots\frac{\partial x'_i}{\partial x_z}\right)T_{...z} \overset{\text{از قاعده زنجیری}}{=\!=\!=}$$

$$\frac{\partial x_p}{\partial x'_j}\frac{\partial}{\partial x_p}\left[\left(\frac{\partial x'_۱}{\partial x_m}\frac{\partial x'_۲}{\partial x_n}\cdots\right)T_{...z}\right]$$

$$=\frac{\partial x_p}{\partial x'_j}\left[\left(\frac{\partial x'_۱}{\partial x_m}\frac{\partial x'_۲}{\partial x_n}\cdots\right)\frac{\partial T_{...z}}{\partial x_p}\right.$$

$\frac{\partial T_{...z}}{\partial x_j}$ تانسور مرتبه n+۱ است.

۳-۲-۲- اگر $T_{ijk...}$ تانسوری از مرتبهٔ n باشد نشان دهید که:

$\sum\frac{\partial T_{ijk...}}{\partial x_j}$ (در مختصات دکارتی) تانسوری از مرتبه n-۱ است.

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

حل

$$T_{ijk\ldots} \xrightarrow{\text{مشتق‌گیری}} \frac{\partial T_{ijk\ldots}}{\partial x_j} \xrightarrow{\text{ادغام}} \sum \frac{\partial T_{ijk\ldots}}{\partial x_j}$$

مرتبه n — مرتبه n+۱ — مرتبه n-۱

۳ـ۲ـ۳ـ عملگر $\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$

را می‌توان با استفاده از $x_4 = ict$ به صورت زیر نوشت

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

این عملگر لاپلاسی چهار بعدی است که معمولاً دالامبری نامیده می‌شود و با $\Box^2$ نمایش داده می‌شود. نشان دهید که این عملگر اسکالر است.

حل

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = \Box^2$$

$$\Box'^2 = \Box^2$$

$$z_i \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i'} = \frac{\partial x_k}{\partial x_i'} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i'} = \frac{\partial x_\ell}{\partial x_i'} \cdot \frac{\partial}{\partial x_\ell}$$

$$\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i'^2} = \sum_i \sum_{k\ell} \frac{\partial x_k}{\partial x_i'} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial x_\ell}{\partial x_i'} \frac{\partial}{\partial x_\ell}$$

$$\sum \frac{\partial^2}{\partial x_i'^2} = \sum_{k,\ell} \left(\sum_\ell a_{ik}\, a_{i\ell} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_\ell}$$

$$= \sum_{\ell,k} \delta_{k,\ell} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_\ell} = \sum_k \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} = \sum_\ell \frac{\partial^2}{\partial x_\ell^2}$$

$$\Rightarrow \quad \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i'^2} = \sum_k \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} = \sum_\ell \frac{\partial^2}{\partial x_\ell^2}$$

بخش ۳ـ۳ـ قاعدهٔ خارج قسمت — مسائل صفحه ۱۷۴

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikKajabs
By: Arash K.A.B

۳ـ۳ـ۱ـ جمع زنی دوگانهٔ K_{ij} تاورد است. ثابت کنید

تانسوری مرتبهٔ دوم است.

[یادآوری: این نتیجه در رابطهٔ $dS^2(\text{ناوردا})=g_{ij}dx_idx_j$ نشان می‌دهد که «متریک» g_{ij} یک تانسور است].

حل اگر رابطه $K_{ij}A_iB_j$ را در دستگاه مختصات پریم‌دار در نظر بگیریم داریم:

$$K'_{k\ell}A'_kB'_\ell \quad (۱) \qquad A'_k=a_{ki}A_i \quad (۲) \quad , \quad B'_\ell=a_{\ell j}B_j \quad (۳)$$

راوبط (۲) و (۳) را در رابطه (۱) قرار می‌دهیم:

$$(۲),(۳)\,\text{in}\,(۱) \quad \Rightarrow \quad K'_{k\ell}a_{ki}A_ia_{\ell j}B_j \quad (۳)$$

اما در دستگاه بدون پریم $K_{ij}A_iB_j$ را داریم

$$K_{ij}A_iB_j=K'_{k\ell}A'_kB'_\ell \quad \Rightarrow$$

طرف راست را از رابطه (۴) جایگزین می‌کنیم:

$$K_{ij}A_iB_j=K'_{k\ell}a_{ki}A_ia_{\ell j}B_j$$

$$K_{ij}=K'_{k\ell}a_{ki}a_{\ell j} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{K'_{k\ell}=K_{ij}a_{ki}a_{\ell j}}$$

۳ـ۳ـ۲ـ معادلهٔ $K_{ij}A_{jk}=B_{ik}$ برای تمام سمتگیریهای دستگاه مختصات برقرار است. اگر A و B تانسورهایی از مرتبهٔ دوم باشند. نشان دهید که K نیز یک تانسور مرتبهٔ دوم است.

حل

$$K_{ij}A_{jk}=B_{ik} \quad \Rightarrow \quad K'_{im}A'_{ms}=B'_{ik} \quad (۳)$$

$$B'_{ik}=a_{ij}a_{kp}B_{jp} \quad , \quad B_{jp}=K_{j\ell}A_{\ell p}$$ (از رابطه ۳ـ۲۹ ج)

از رابطه ۳ـ۳۴

$$B'_{ik}=a_{ij}a_{kp}K_{j\ell}A_{\ell p} \quad (۲) \quad , \quad A_{\ell p}=a_{\ell m}a_{ps}A'_{ms} \quad (۱)$$

رابطه (۱) را در طرف راست رابطه (۲) قرار می‌دهیم از طرفی طرف چپ را از رابطه (۳) قرار می‌دهیم.

$$K'_{im}A'_{ms}=a_{ij}a_{kp}K_{j\ell}a_{\ell m}a_{ps}A'_{ms}$$

$$K'_{im}=a_{ij}a_{\ell m}\delta_{kS}K_{j\ell} \quad , \quad \delta_{kS}=۱$$

$$\boxed{K'_{im}=a_{ij}a_{\ell m}K_{j\ell}}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

بخش ۳ـ۴ـ شبه تانسورها، تانسورهای دوگان مسائل صفحه ۱۸۳

۳ـ۴ـ۱ـ آرایهٔ مربعی پاد متقارن زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{bmatrix} 0 & C_3 & -C_2 \\ -C_3 & 0 & C_1 \\ C_2 & -C_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C_{12} & C_{13} \\ -C_{12} & 0 & C_{23} \\ -C_{13} & -C_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

که در آن (C_1, C_2, C_3) یک شبه بردار است با فرض اینکه رابطهٔ

$$C_i = \frac{1}{2!}\varepsilon_{ijk} C_{jk}$$

در تمام دستگاههای مختصات برقرار باشد ثابت کنید که C_{jk} تانسور است. (این عبارت صورت دیگری از قضیه خارج قسمت است.)

حل از قسمت دوم رابطه ۳ـ۳۷ داریم. (برای شبه‌بردار)

$$C'_i = |a|\, a_{ij} C_j$$

$$C_j = |a|\, a_{ij} C'_i \xrightarrow[\text{مسئله جایگزین می‌شود}]{\text{از رابطه صورت}} |a|\, a_{ij}\left(\frac{1}{2!}\varepsilon'_{imn} C'_{mn}\right)$$

از رابطه صورت مسئله

$$\frac{1}{2!}\varepsilon_{jki} C_{ki} = |a|\, a_{ij}\left(\frac{1}{2!}\varepsilon'_{imn} C'_{mn}\right) \quad (1)$$

از طرفی طبق روابط (۳-۴۱) و (۳-۴۳) داریم

$$\varepsilon_{ijk} = \delta'_{ijk} = |a|\, a_{ip} a_{jq} a_{kr} \varepsilon_{pqr}$$

پس برای ε_{jki} و ε'_{imn} می‌توان نوشت

$$\varepsilon_{jki} = |a|\, a_{jm} a_{kn} a_{ir} \varepsilon_{mnr}$$

$$\varepsilon'_{imn} = |a|\, a_{ij} a_{mk} a_{ni} \varepsilon_{jki}$$

اگر در رابطه (۱) جایگزین کنیم و بعد از ساده کردن داریم

$$C'_{mn} = a_{mk}\, a_{ni} C_{ki}$$

۳ـ۴ـ۲ـ نشان دهید که (الف) $\delta_{ii} = 3$ (ب) $\delta_{ij}\varepsilon_{ijk} = 0$

(ج) $\varepsilon_{ipq}\varepsilon_{jpq} = 2\delta_{ij}$ (د) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$

حل از مشابه سازی با رابطه ۳-۱۹ داریم: (الف)

$$\delta'_{ii} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_\ell}{\partial x'_i}\delta_{k\ell} = \frac{\partial x_\ell}{\partial x_k}\delta_{k\ell} = \delta_{kk}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

(ب) $\delta_{ij}\varepsilon_{ijk}$

دو حالت در نظر می‌گیریم (۱) $i=j$ در این حالت می‌دانیم $\delta_{ii}=1$ ولی $\varepsilon_{iik}=0$ (طبق رابطه ۳-۴۰) (۲) $i\neq j$ در این حالت $\delta_{ij}=0$ و با وجود مخالف صفر بودن ε_{ijk} باز هم نتیجه صفر است پس نمی‌توان حالتی بدست آورد که $\delta_{ij}\varepsilon_{ijk}\neq 0$ باشد پس رابطه (ب) برقرار است.

(ج) $\varepsilon_{ipq}\,\varepsilon_{jpq} = 2\delta_{ij}$

(د) $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijk} = 2\delta_{ii}$

با کمک گرفتن از قسمت (ج)

و استفاده از قسمت (الف) که $\delta_{ii}=3$ داریم

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijk} = 2\times 3 = 6$$

۳-۲-۳- نشان دهید که

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{pqk} = \delta_{ip}\,\delta_{jq} - \delta_{iq}\,\delta_{jp}$$

حل

$$\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{pqk} = \varepsilon_{ij1}\varepsilon_{pq1} + \varepsilon_{ij2}\varepsilon_{pq2} + \varepsilon_{ij3}\varepsilon_{pq3}$$

$$i(\text{OR})j=k \quad\Rightarrow\quad \varepsilon_{ij1}=0$$

$$\left.\begin{array}{l} i,j\neq k \quad\Rightarrow\quad \varepsilon_{ij1}\neq 0 \\ p,q\neq k \quad\Rightarrow\quad \varepsilon_{pq1}\neq 0 \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \varepsilon_{ij1}\,\varepsilon_{pq1} \;\rightarrow\; \delta_{ip}\,\delta_{jq}\ (i=p, j=q)$$

$$p,q=k \quad\Rightarrow\quad \varepsilon_{pq1}=0$$

برای حالت دیگر که $j=p$ و $i=q$ داریم:

$$\varepsilon_{ij1}\,\varepsilon_{qp1} \;\rightarrow\; -\delta_{iq}\,\delta_{jp}$$

در کل نتیجه می‌گیریم

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{pqk} = \delta_{ip}\,\delta_{jq} - \delta_{iq}\,\delta_{jp}$$

۳-۲-۵- (الف) مؤلفه‌های بردار ضرب برداری $\vec{C}$، $\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$ را برحسب ε_{ijk} و مؤلفه‌های A و B بیان کنید. (ب) با استفاده از پاد تقارن ε_{ijk} نشان دهید که $\vec{A}.\vec{A}\times\vec{B}=0$

حل

(الف)

$$\vec{A}.\vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_i & A_j & A_k \\ B_i & B_j & B_k \end{vmatrix} = i(A_jB_k - A_kB_j) + j\underbrace{(A_kB_i - A_iB_k)}_{C_j}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\underbrace{+\hat{K}(A_iB_j-A_jB_i)}_{C_k} \Rightarrow C_i=\varepsilon_{ijk}A_jB_k \quad , \quad C_k=\varepsilon_{kij}A_iB_j$$
$$C_j=\varepsilon_{jki}A_kB_i$$

(ب) $\vec{A}.\vec{A}\times\vec{B}=A_i.(\vec{A}\times\vec{B})_i=A_i\varepsilon_{ijk}A_jB_k=0$

۳-۴-۶- (الف) نشان دهید که تانسور (ماتریس) لختی بخش ۴-۶ را برای ذره‌ای به جرم m در (x_1,x_2,x_3) می‌توان بصورت زیر نوشت.

$$I_{ij}=m(x_nx_n\delta_{ij}-x_ix_j)$$

(ب) نشان دهید :

$$I_{ij}=-M_{i\ell}M_{\ell j}=-m\varepsilon_{i\ell k}x_k\varepsilon_{\ell jm}x_m$$

که در آن $M_{i\ell}=m^{\frac{1}{2}}\varepsilon_{i\ell k}x_k$. این ادغام دو بردار مرتبه دو و شبیه به ضرب ماتریسی بخش ۴-۲ است.

حل حاصلضرب لختی xy (رابطه ۴-۱۴۰)

(الف) $I_{xy}=I_{yx}=-\sum_i m_ix_iy_i$

$$I_{xx}=\sum_i m_i(r_i^2-x_i^2) \qquad \text{رابطه ۴-۱۳۹}$$

$$r_i^2=\sum_n x_n^2=\sum x_nx_n$$

$$I_{12}=m(x_nx_n\delta_{x_1x_2}-x_1x_2)$$

(ب) $I_{ij}=-M_{i\ell}M_{\ell j}\begin{cases}M_{i\ell}=m^{\frac{1}{2}}\varepsilon_{i\ell k}x_k\\ M_{\ell j}=m^{\frac{1}{2}}\varepsilon_{\ell jm}x_m\end{cases}$

$$I_{ij}=-m^{\frac{1}{2}}\varepsilon_{i\ell k}x_km^{\frac{1}{2}}\varepsilon_{\ell jm}x_m$$
$$=-m\varepsilon_{i\ell k}x_k\varepsilon_{\ell jm}x_m$$

۳-۴-۷- $\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\times\vec{A}$ و $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\phi$ را برحسب نماد ε_{ijk} چنان بنویسید که مشخص شود هر یک از این عبارتها صفر است.

حل

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}A_z-\frac{\partial}{\partial z}A_y\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial z}A_x-\frac{\partial}{\partial x}A_z\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial x}A_y-\frac{\partial}{\partial y}A_x\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left[\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial y}A_z\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\varepsilon_{jki}\frac{\partial}{\partial z}A_x\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\varepsilon_{kij}\frac{\partial}{\partial x}A_y\right]$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(\nabla.\nabla\times A)_i=\varepsilon_{ijk}\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial y}A_z\\[2mm](\nabla.\nabla\times A)_j=\varepsilon_{jki}\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial z}A_x\\[2mm](\nabla.\nabla\times A)=\varepsilon_{kij}\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial}{\partial x}A_y\end{cases}$$

$$\nabla\times\nabla\phi=\begin{vmatrix}i & j & k\\[2mm]\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\[2mm]\dfrac{\partial\phi}{\partial x} & \dfrac{\partial\phi}{\partial y} & \dfrac{\partial\phi}{\partial z}\end{vmatrix}$$

$$=i\left[\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right]+j\left[\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right]+k\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial x}\right]$$

$$=i\left[\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right]+j\left[\varepsilon_{jki}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial x}\right]+k\left[\varepsilon_{kij}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right]$$

$$\begin{cases}(\nabla\times\nabla\phi)_i=\varepsilon_{ijk}\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial\phi}{\partial z}\\[2mm](\nabla\times\nabla\phi)_j=\varepsilon_{jki}\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\end{cases}\qquad(\nabla\times\nabla\phi)_k=\varepsilon_{kij}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y}\Rightarrow\begin{cases}(\nabla\times\nabla\phi)_i=\varepsilon_{ijk}\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial\phi}{\partial z}\\[2mm](\nabla\times\nabla\phi)_j=\varepsilon_{jki}\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\\[2mm](\nabla\times\nabla\phi)_k=\varepsilon_{kij}\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial\phi}{\partial y}\end{cases}$$

۳-۴-۸- ضرب برداری را برحسب نماد لوی - چی ویتا (ε_{ijk}) بیان و قاعدهٔ بک کب معادله ۱-۵۰ را استخراج کنید.

[راهنمایی: از رابطهٔ مسئله ۳-۴-۴ بهره گیرید.]

حل

$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$, $\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{D})$

PhysicsClass.blogsky.com
TeleDam.me/FizikCalass

با کمک از مسئله ۳-۴-۵ می‌نویسیم.

$$\vec{A}\times\vec{D}=\hat{i}\left[\varepsilon_{ijk}A_jD_k\right]+\hat{k}\left[\varepsilon_{jki}A_kD_i\right]+\hat{k}\left[\varepsilon_{kij}A_iD_j\right]$$

از طرفی خود D یک حاصلضرب برداری بین B و C است می‌توان نوشت

$$D_i=\varepsilon_{ijk}B_jC_k\quad,\quad D_j=\varepsilon_{jki}B_kC_i\quad,\quad D_k=\varepsilon_{kij}B_iC_j$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=i\left[\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kij}A_jB_iC_j\right]+\hat{j}\left[\varepsilon_{jki}\varepsilon_{ijk}A_kB_jC_k\right]+\hat{k}\left[\varepsilon_{kij}\varepsilon_{jki}A_iB_kC_i\right]$$

با ادامه دادن به رابطه بک کب می‌رسیم

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}.\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}.\vec{B})$$

۳-۴-۹- تحقیق کنید که هر یک از تانسورهای مرتبهٔ چهار زیر همسانگرد است یعنی مؤلفه‌های آن مستقل از هر چرخش دستگاه مختصات ثابت می‌ماند

(الف) $A_{ijk\ell}=\delta_{ij}\,\delta_{k\ell}$ (ب) $B_{ijk\ell}=\delta_{ik}\,\delta_{j\ell}+\delta_{i\ell}\delta_{jk}$

(ج) $C_{ijk\ell}=\delta_{ik}\,\delta_{j\ell}-\delta_{i\ell}\delta_{jk}$

حل

(الف)
$$\left.\begin{aligned}A'_{ijk\ell}&=a_{im}a_{jn}a_{kp}a_{\ell q}A_{mnpq}\\ A_{mnpq}&=\delta_{mn}\,\delta_{pq}\end{aligned}\right\}=a_{im}a_{jn}a_{kp}a_{\ell q}\delta_{mn}\delta_{pq}$$

$$A'_{ijk\ell}=a_{im}\delta_{mn}a_{jn}\,a_{kp}\,\delta_{pq}\,a_{\ell q}=a_{in}\,a_{jn}\,a_{kq}\,a_{\ell q}$$

$$A'_{ijk\ell}=\delta_{ij}\,\delta_{k\ell}$$

(ب)
$$\left.\begin{aligned}B'_{ijk\ell}&=a_{im}\,a_{jn}\,a_{kp}\,a_{\ell q}\,B_{mnpq}\\ B_{mnpq}&=\delta_{mp}\,\delta_{nq}+\delta_{mq}\,\delta_{np}\end{aligned}\right\}=a_{im}\,a_{jn}\,a_{kp}\,a_{\ell q}\,(\delta_{mp}\,\delta_{nq}+\delta_{mq}\delta_{np})$$

$$B'_{ijk\ell}=a_{im}\,\delta_{mp}\,a_{jn}\,\delta_{nq}\,a_{kp}a_{\ell q}+a_{im}$$

بخش ۳-۵-دوتاییها — مسائل صفحه ۱۸۸

۳-۵-۱- اگر A و B مطابق معادله‌های ۳-۶ و ۳-۸ مانند بردار تبدیل شوند نشان دهید که دوتایی AB در قانون تبدیل تانسوری، معادلهٔ ۳-۱۳ صدق می‌کند.

حل (معادله ۳-۶) و (معادله ۳-۸)

$$\left.\begin{aligned}A'_i&=\sum_j a_{ij}A_j\\ B'_k&=\sum_\ell a_{k\ell}B_\ell\end{aligned}\right\}\qquad a_{ij}=\frac{\partial x'_i}{\partial x_j}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikClass

$$a_{k\ell} = \frac{\partial x'_k}{\partial x_\ell}$$

$$(AB)'_{ik} = A'_i B'_k = \sum_j a_{ij} A_j \sum_\ell a_{k\ell} B_\ell = \sum_j \sum_\ell a_{ij} a_{k\ell} A_j B_\ell$$

$$= \sum_j \sum_\ell a_{ij}\, a_{k\ell} (AB)_{j\ell}$$

از روابط ۳-۸ به جای a_{ij} و $a_{k\ell}$ قرار می‌دهیم و داریم

$$(AB)'_{ik} = \sum_j \sum_\ell \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \frac{\partial x'_k}{\partial x_\ell} (AB)_{j\ell} = \sum_{j\ell} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \frac{\partial x_\ell}{\partial x'_k} (AB)_{j\ell}$$

که رابطه اخیر یکی از ۳ رابطه ۳-۱۳ یعنی تعریف تانسور مرتبه دوم است.

۳-۵-۲- نشان دهید که $\mathbb{I} = ii + jj + kk$ یک دوتایی یکه است. به این معنا که برای هر بردار V داریم: $\mathbb{I}.V = V$

هر یک از دوتاییهای ii و غیره مثالهای خاصی از عملگر تصویری در مکانیک کوانتومی‌اند.

حل

$$\mathbb{I}.\vec{V} = (\hat{i}\hat{i} + \hat{j}\hat{j} + \hat{k}\hat{k}).(V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k})$$

$$= \hat{i}\hat{i}.V_x\hat{i} + \hat{j}\hat{j}.V_y\hat{j} + \hat{k}\hat{k}.V_z\hat{k}$$

$$= \hat{i}\,V_x(\hat{i}.\hat{i}) + \hat{j}\,V_y(\hat{j}.\hat{j}) + \hat{k}\,V_z(\hat{k}.\hat{k})$$

$$= \hat{i}\,V_x + \hat{j}\,V_y + \hat{k}\,V_z = \vec{V}$$

۳-۵-۳- نشان دهید که $\nabla\vec{r}$ برابر است با دوتایی یکهٔ $\mathbb{I}$.

حل

$$\nabla = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} \quad , \quad \vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$$

$$\nabla\vec{r} = (\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z})(\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z)$$

$$= \hat{i}\hat{i}\frac{\partial x}{\partial x} + \hat{i}\hat{j}\frac{\partial y}{\partial x} + \hat{i}\hat{k}\frac{\partial z}{\partial x} + \hat{j}\hat{i}\frac{\partial x}{\partial y} + \hat{j}\hat{j}\frac{\partial y}{\partial y} + \hat{j}\hat{k}\frac{\partial z}{\partial y} + \hat{k}\hat{i}\frac{\partial x}{\partial z} + \hat{k}\hat{j}\frac{\partial y}{\partial z} + \hat{k}\hat{k}\frac{\partial z}{\partial z}$$

$$= \hat{i}\hat{i} + \hat{j}\hat{j} + \hat{k}\hat{k} = \mathbb{I}$$

۳-۵-۴- اگر U یک دوتایی V یکه باشد نشان دهید.

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikClass

(الف) $V.U = -U.V$ (ب) $V.U.V = 0$

حل چون U یک دوتایی پاد متقارن است پس $U_{xx}=0$ و $U_{xy}=-U_{yx}$ و بقیه موارد

(الف) $V.U=(V_x\hat{i}+V_y\hat{j}+V_z\hat{k}).(U_{xy}\hat{i}\hat{j}-U_{xy}\hat{j}\hat{i}+U_{xz}\hat{i}\hat{k}-U_{zx}\hat{k}\hat{i}+U_{yz}\hat{j}\hat{k}-U_{zy}\hat{k}\hat{j})$

$=V_xU_{xy}\hat{i}.\hat{i}\hat{j}-V_xU_{xy}\hat{i}.\hat{j}\hat{i}+V_xU_{xz}\hat{i}.\hat{i}\hat{k}-V_xU_{xz}\hat{i}.\hat{k}\hat{i}+\ldots=-\vec{U}.\vec{V}$

(ب) $\vec{V}.\vec{U}.\vec{V}=-\vec{U}.\vec{V}.\vec{V}=0$

۳ـ۵ـ۵ـ مابین بردارهای دو بعدی $\vec{r}=\hat{i}x+\hat{j}y$ و $\vec{t}=-y\hat{i}+\hat{j}x$ می‌توان توسط معادلهٔ تانسوری $\vec{r}.\vec{U}=\vec{t}$ رابطه برقرار کرد. (الف) با استفاده از توصیف مؤلفه‌ای که قبلاً برای تانسور ارائه کردیم تانسور U را بدست آورید. (ب) U را بعنوان یک دوتایی بدست آورید.

حل

$$\vec{r}.\vec{U}=\vec{t}\Rightarrow\begin{cases}r_xU_{xx}+r_yU_{yx}=t_x\\r_xU_{xy}+r_yU_{yy}=t_y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}xU_{xx}+yU_{yx}=-y\\xU_{xy}+yU_{yy}=x\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x\times0+y(-1)=-y\\x\times1+y\times0=x\end{cases}\Rightarrow U=\begin{bmatrix}0&+1\\-1&0\end{bmatrix}$$

(ب) مشابه رابطه (۳-۶۸) در کتاب می‌توان نوشت.

$$\vec{r}.\vec{U}=\vec{t}\Rightarrow(\hat{i}x+\hat{j}y).(\hat{i}\hat{i}U_{xx}+\hat{i}\hat{j}U_{xy}+\hat{j}\hat{i}U_{yx}+\hat{j}\hat{j}U_{yy})=-y\hat{i}+\hat{j}x\Rightarrow$$

$$\hat{i}xU_{xx}+\hat{j}xU_{xy}+\hat{i}yU_{yx}+\hat{j}yU_{yy}=-y\hat{i}+\hat{j}x$$

$$\hat{i}[xU_{xx}+yU_{yx}]+\hat{j}[xU_{xy}+yU_{yy}]=-y\hat{i}+\hat{j}x$$

$$\Rightarrow\begin{cases}xU_{xx}+yU_{yx}=-y\\xU_{xy}+yU_{yy}=x\end{cases}\Rightarrow U=\begin{bmatrix}0&+1\\-1&0\end{bmatrix}$$

۳ـ۵ـ۶ـ در بررسی بر هم کنش بین مولکولها، یک دوتایی از بردارهای یکهٔ فاصلهٔ نسبی e_{12} بدست می‌آید.

$$e_{12}=\frac{r_2-r_1}{|r_2-r_1|}$$

این دوتایی بصورت زیر است:

$$U=\mathbb{I}-3e_{12}e_{12}$$

$$\mathrm{Tr}\ U.U=6$$

نشان دهید که

$\mathbb{I}$ دوتایی یکه است، یعنی $\mathbb{I}=\hat{i}\hat{i}+\hat{j}\hat{j}+\hat{k}\hat{k}$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

حل

$$U=\mathbb{I}-3e_{12}e_{12}=\hat{i}\hat{i}+\hat{j}\hat{j}+\hat{k}\hat{k}-3\frac{(r_2-r_1)(r_2-r_1)}{|r_2-r_1|^2}$$

$$=\hat{i}\hat{i}+\hat{j}\hat{j}+\hat{k}\hat{k}-\frac{3\left[r_2^2-r_1r_2-r_2r_1+r_1^2\right]}{|r_2-r_1|^2}$$

$$=\hat{i}\hat{i}+\hat{j}\hat{j}+\hat{k}\hat{k}-\frac{3\left[r_2^2-2r_1r_2+r_1^2\right]}{|r_2-r_1|^2}$$

$$=\hat{i}\hat{i}+\hat{j}\hat{j}+\hat{k}\hat{k}-\frac{3\left[x_2^2+y_2^2+z_2^2-2x_1x_2-2y_1y_2-2z_1z_2+x_1^2+y_1^2+z_1^2\right]}{|r_2-r_1|^2}$$

با محاسبه می‌توان نشان داد که

$$U.U=\mathbb{I}+3\hat{e}_{12}\quad\hat{e}_{12}$$

$$Tr(U.U)=Tr(\mathbb{I}+3\hat{e}_{12}\hat{e}_{12})=$$

$$Tr\mathbb{I}+3Tr\,\hat{e}_{12}\hat{e}_{12}\ \text{و}\ Tr\mathbb{I}=3,\ Tr\hat{e}_{12}\hat{e}_{12}=1$$

$$=3+3\times1=3+3=6\ \Rightarrow$$

$$Tr(U.U)=6$$

۳-۵-۷- نشان دهید که قضیه گاؤس برای دوتاییها صادق است یعنی

$$\int_s d\vec{\sigma}.\vec{D}=\int_v \vec{\nabla}.\vec{D}d\tau$$

حل D یک دوتایی است که آنرا مطابق رابطه ۳-۶۲ بصورت زیر معرفی می‌کنیم.

$$D=\vec{A}\vec{B}=(\hat{i}A_x+\hat{j}A_y+\hat{k}A_z)(\hat{i}B_x+\hat{j}B_y+\hat{k}B_z)$$

$$=\hat{i}\hat{i}A_xB_x+\hat{i}\hat{j}A_xB_y+\hat{i}\hat{k}A_xB_z$$

$$+\hat{j}\hat{i}A_yB_x+\hat{j}\hat{j}A_yB_y+\hat{j}\hat{k}A_yB_z$$

$$+\hat{k}\hat{i}A_zB_x+\hat{k}\hat{j}A_zB_y+\hat{k}\hat{k}A_zB_z$$

$$\vec{\nabla}.\vec{D}=(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}).\vec{D}\ \Rightarrow$$

$$=\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}A_xB_x+\hat{j}\frac{\partial}{\partial x}A_xB_y+\hat{k}\frac{\partial}{\partial x}A_xB_z$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$+\hat{i}\frac{\partial}{\partial y}A_yB_x+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}A_yB_y+\hat{k}\frac{\partial}{\partial y}A_yB_z$$

$$+\hat{i}\frac{\partial}{\partial z}A_zB_x+\hat{j}\frac{\partial}{\partial z}A_zB_y+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}A_zB_z$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(\vec{\nabla}.\vec{D})_x=\frac{\partial}{\partial x}A_xB_x+\frac{\partial}{\partial y}A_yB_x+\frac{\partial}{\partial z}A_zB_x=\vec{\nabla}.(AB_x) & (۱)\\ (\vec{\nabla}.\vec{D})_y=\frac{\partial}{\partial x}A_xB_y+\frac{\partial}{\partial y}A_yB_y+\frac{\partial}{\partial z}A_zB_y=\vec{\nabla}.(AB_y) & (۲)\\ (\vec{\nabla}.\vec{D})_z=\frac{\partial}{\partial x}A_xB_z+\frac{\partial}{\partial y}A_yB_z+\frac{\partial}{\partial z}A_zB_z=\vec{\nabla}.(AB_z) & (۳)\end{cases}$$

از طرفین روابط (۱) و (۲) و (۳) روی حجم انتگرال می‌گیریم و با هم جمع می‌کنیم

$$\int_V(\nabla.D)_x\,d\tau+\int_V(\nabla.D)_y\,d\tau+\int_V(\nabla.D)_z\,d\tau$$

$$=\int\nabla.(AB_x)\,d\tau+\int\nabla.(AB_y)\,d\tau+\int\nabla.(AB_z)\,d\tau$$

با استفاده از قضیه گوس برای هر یک از سه رابطه طرف چپ می‌توان نوشت

$$\int_V\nabla.(AB_x)\,d\tau=\int_S B_xA.d\sigma$$

$$\int_V\nabla.(AB_y)\,d\tau=\int_S B_yA.d\sigma$$

$$\int_V\nabla.(AB_z)\,d\tau=\int_S B_zA.d\sigma$$

و در جمع کردن بطور کل داریم

$$\int_V(\vec{\nabla}.\vec{D})\,d\tau=\int_S\vec{A}\vec{B}.d\sigma=\int_S\vec{D}.d\sigma$$

۳ـ۵ـ۸ـ نشان دهید که

$$\int_S d\vec{\sigma}.\vec{\nabla}\vec{E}+\int_S d\vec{\sigma}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})-\int_S d\vec{\sigma}\,\vec{\nabla}.\vec{E}=0$$

تابع $\vec{E}$ یک تابع برداری از مکان است. انتگرال‌گیری روی یک سطح بستهٔ ساده صورت می‌گیرد.

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

این ترکیب نسبتاً بعید از انتگرالهای سطحی در واقع در نظریهٔ برداری پراش کیرشهف ظاهر می‌شود.

حل

$$\int_S d\vec{\sigma}.\vec{\nabla}\vec{E} + \int_S d\vec{\sigma}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) - \int_S d\vec{\sigma}\vec{\nabla}.\vec{E} =$$

$$\downarrow \text{قضیه گاوس} \qquad \downarrow \text{قضیه گاوس} \qquad \downarrow \text{قضیه گاوس}$$

$$\int_V \vec{\nabla}.\vec{\nabla}\vec{E}d\tau + \int_V \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})d\tau - \int \nabla(\nabla.E)d\tau = 0$$

انتگرال دوم بصورت دو انتگرال $\int_V \vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\vec{E})d\tau - \int \nabla^2 E d\tau$ در می‌آید

توضیح پایانی: برای اطلاعات بیشتر در رابطه با تانسورها و کاربرد آنها در فیزیک به دوکتاب زیر مراجعه گردد.

1. TENSORS, DIFFERENTIAL FORMS, AND VARIATIONAL PRINCIPLES

by: David Lovelock and Honno Rund

2. TENSOR ANALYSIS FOR PHYSICISTS

by: J.A. Schouten

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

بخش ۴ـ۱ـ دترمینانها — مسائل صفحه ۲۳۷

۴ـ۱ـ۱ـ دترمینانهای زیر را محاسبه کنید.

(الف)
$$\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{vmatrix} = ۱(۰-۰)+۰(۰-۰)+۱(۰-۱)=-۱$$

(ب)
$$\frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{vmatrix} ۰ & \sqrt{۳} & ۰ & ۰ \\ \sqrt{۳} & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ & \sqrt{۳} \\ ۰ & ۰ & \sqrt{۳} & ۰ \end{vmatrix} = \frac{-\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}\begin{vmatrix} \sqrt{۳} & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \sqrt{۳} \\ ۰ & \sqrt{۳} & ۰ \end{vmatrix} = \frac{۹}{\sqrt{۲}}$$

(ج)
$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۳ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ & ۱ \end{vmatrix} = ۱(۱-۶)+۲(-۳)+۰(۹-۰)=-۱۱$$

۴ـ۱ـ۲ـ مجموعهٔ معادله‌های خطی زیر را بررسی کنید و ببینید که آیا جواب ناصفر دارد یا خیر؟

حل

$$\begin{aligned} x+۳y+۳z&=۰ \\ x-y+z&=۰ \\ ۲x+y+۳z&=۰ \end{aligned} \Rightarrow \begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۳ \\ ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۳ \end{vmatrix} = -۲ \neq ۰$$

جواب غیر بدیهی ندارد.

۴ـ۱ـ۳ـ دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} x+۲y&=۳ \\ ۲x+۴y&=۶ \end{aligned}$$

(الف) نشان دهید که دترمینان ضرایب آن صفر است. (ب) نشان دهید که دترمینانهای صورت (معادلهٔ ۴-۱۴) نیز صفرند (ج) دست کم دو جواب برای این دو معادله بدست آورید.

حل

(الف) $\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{vmatrix} = ۴-۴=۰$

(ب) $\begin{vmatrix} ۳ & ۲ \\ ۶ & ۴ \end{vmatrix} = ۱۲-۱۲=۰$

۴ـ۱ـ۴ـ مولفه‌های $\vec{A}\times\vec{B}$ را به صورت دترمینانهای ۲×۲ بنویسید سپس نشان دهید که از حاصلضرب اسکالر $\vec{A}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$ بسط لاپلاس یک دترمینان ۳×۳ بدست می‌آید. سرانجام با

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

توجه به اینکه دو سطر این دترمینان ۳×۳ مساوی است نتیجه بگیرید که:

$$\vec{A}.(\vec{A}\times\vec{B})=0$$

حل

$$\vec{A}\times\vec{B}=\hat{i}\begin{vmatrix}A_y & A_z\\ B_y & B_z\end{vmatrix}+\hat{j}\begin{vmatrix}A_z & A_x\\ B_z & B_x\end{vmatrix}+\hat{k}\begin{vmatrix}A_x & A_y\\ B_x & B_y\end{vmatrix}\Rightarrow$$

$$\vec{A}.(\vec{A}\times\vec{B})=A_x\begin{vmatrix}A_y & A_z\\ B_y & B_z\end{vmatrix}+A_y\begin{vmatrix}A_z & A_x\\ B_z & B_x\end{vmatrix}+A_z\begin{vmatrix}A_x & A_y\\ B_x & B_y\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=0$$

۴-۱-۵- اگر عامل هم عنصر a_{ij} را (که از خط زدن سطر i ام و ستون j ام و گنجاندن یک علامت $(-1)^{i+j}$ بدست می‌آید) با C_{ij} نمایش دهیم نشان دهید:

(الف) $$\sum_i a_{ij}c_{ij}=\sum_i a_{ji}c_{ji}=|A|$$

که در آن $|A|$ دترمینانی است با عناصر a_{ij}

(ب) $$\sum_i a_{ij}c_{ik}=\sum_i a_{ji}c_{ki}=0 \quad j\neq k$$

حل (الف) یکی از روشها برای محاسبهٔ دترمینان با استفاده از بسط لاپلاس (برحسب کهادها) می‌باشد. این عمل را می‌توان برای یک سطر یا یک ستون انجام داد.

$$|A|=\sum_i a_{ij}c_{ij}=\sum_i a_{ji}c_{ji}$$

(ب) عبارت $\sum_i a_{ij}c_{ik}$ (که در آن $j\neq k$ است) یعنی مجموع ضرب عناصر هر ستون در همسازهٔ مربوط به ستون دیگر یعنی دترمینانی داریم که دو ستون آن مساوی است که چنین دترمینانی صفر است.

بخش ۴-۲-ماتریسها — مسائل صفحه ۲۴۹

۴-۲-۱- نشان دهید که ضرب ماتریسی شرکت‌پذیر است:

$$(AB)C=A(BC)$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

حل

$$BC=D \Rightarrow D_{kj}=\sum_{\ell} b_{k\ell}c_{\ell j}$$

$$A(BC)=AD=E \Rightarrow E_{ij}=\sum_{k} a_{ik}D_{kj}=\sum_{k} a_{ik}\sum_{\ell} b_{k\ell}c_{\ell j}$$

$$=\sum_{k,\ell} a_{ik}b_{k\ell}c_{\ell j} \quad (۱)$$

$$AB=F \Rightarrow F_{i\ell}=\sum_{k} a_{ik}b_{k\ell}$$

$$(AB)C=FC=\sum_{\ell} F_{i\ell}C_{\ell j}=\sum_{\ell}\sum_{k} a_{ik}b_{k\ell}c_{\ell j} \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow (AB)C=A(BC)$$

۴ـ۲ـ۲ـ۲ـ نشان دهید که اگر و فقط اگر A و B تعویض‌پذیر باشند یعنی $[A,B]=۰$ خواهیم داشت $(A+B)(A-B)=A^۲-B^۲$

حل شرط لازم

$$[A,B]=(AB-BA)=۰$$

$$(A+B)(A-B)=A^۲-AB+BA-B^۲=A^۲-B^۲$$

شرط کافی

$$(A+B)(A-B)=A^۲-AB+BA-B^۲=A^۲-B^۲ \Rightarrow$$

$$AB=BA \Rightarrow AB-BA=۰ \Rightarrow [A,B]=۰$$

۴ـ۲ـ۲ـ۳ـ نشان دهید که ماتریس A عملگری خطی است. برای این کار نشان دهید که $A(c_۱r_۱+c_۲r_۲)=c_۱Ar_۱+c_۲Ar_۲$ می‌توان نشان داد که یک ماتریس $n\times n$ کلی‌ترین عملگر خطی در فضای برداری n بعدی است یعنی هر عملگر خطی در این فضای برداری n بعدی با یک ماتریس هم ارز است.

حل

$$A(c_۱r_۱+c_۲r_۲)=Ac_۱r_۱+Ac_۲r_۲=c_۱Ar_۱+c_۲Ar_۲ \Rightarrow$$

$$c_۱A=Ac_۱ \ , \ c_۲A=Ac_۲$$

در نتیجه هر ماتریس با یک عملگر خطی هم ارز است.

۴ـ۲ـ۲ـ۴ـ (الف) اعداد مختلط $a+ib$ با a و b حقیقی را می‌توان توسط ماتریسهای ۲×۲ نمایش داد (به عبارت دیگر، این اعداد با ماتریسها یکریخت‌اند).

$$a+ib \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

نشان دهید که این نمایش ماتریسی (۱) برای جمع (۲) برای ضرب صادق است

(ب) ماتریس متناظر با $(a+ib)^{-1}$ را بیابید.

حل

(الف) $(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)=\left[(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)\right]=\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ -(b_1+b_2) & a_1+a_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ -(b_1+b_2) & a_1+a_2 \end{bmatrix}$$

برای جمع معتبر است.

$$(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)=a_1a_2+ib_1a_2+ia_1b_2-b_1b_2=$$

$$(a_1a_2-b_1b_2)+i(b_1a_2+a_1b_2)=\begin{pmatrix} a_1a_2-b_1b_2 & b_1a_2+a_1b_2 \\ -(b_1a_2+a_1b_2) & a_1a_2-b_1b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} a_1a_2-b_1b_2 & b_1a_2+a_1b_2 \\ -(b_1a_2+a_1b_2) & a_1a_2-b_1b_2 \end{pmatrix}$$

(ب) $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} ax+bz & ay+bk \\ -bx+az & -by+ak \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{cases} ax+bz=1 & (1) \\ ay+bk=0 & (2) \\ -bx+az=0 & (3) \\ -by+ak=1 & (4) \end{cases}$$

$$(1),(3)\Rightarrow \frac{a^2z}{b}+bz=1\Rightarrow z=\left(\frac{a^2+b^2}{b}\right)=1\Rightarrow \left.\begin{matrix} z=\dfrac{b}{a^2+b^2} \\ x=\dfrac{az}{b} \end{matrix}\right\}\Rightarrow x=\frac{a}{a^2+b^2}$$

از $(2)\Rightarrow y=-\dfrac{bk}{a}$, $(4)\Rightarrow \dfrac{b^2k}{a}+ak=1\Rightarrow k\left(\dfrac{a^2+b^2}{a}\right)=1\Rightarrow$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\left.\begin{array}{l} k=\dfrac{a}{b^{۲}+a^{۲}} \\ y=\dfrac{-bk}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y=\dfrac{-b}{b^{۲}+a^{۲}}$$

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{a}{a^{۲}+b^{۲}} & \dfrac{-b}{a^{۲}+b^{۲}} \\ \dfrac{b}{a^{۲}+b^{۲}} & \dfrac{a}{a^{۲}+b^{۲}} \end{bmatrix} = (a+ib)^{-۱}$$

۲ـ۲ـ۵ـ اگر A یک ماتریس n×n باشد نشان دهید که:

$$\det(-A)=(-۱)^{n}\det A$$

حل

در هر مرحله یک (۱-) از هر سطر یا هر ستون فاکتور می‌گیریم پس n تعداد سطرها یا تعداد ستونهای ماتریس است. $[A]_{n\times n}$

$$\begin{bmatrix} -a_{۱۱} & -a_{۱۲} & -a_{۱۳} \\ -a_{۲۱} & -a_{۲۲} & -a_{۲۳} \\ -a_{۳۱} & -a_{۳۲} & -a_{۳۳} \end{bmatrix} = (-۱)\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ -a_{۲۱} & -a_{۲۲} & -a_{۲۳} \\ -a_{۳۱} & -a_{۳۲} & -a_{۳۳} \end{bmatrix}$$

$$=(-۱)(-۱)\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ -a_{۳۱} & -a_{۳۲} & -a_{۳۳} \end{bmatrix} = (-۱)(-۱)(-۱)\begin{bmatrix} A \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(-A) = (-۱)^{n}\det A$$

۲ـ۲ـ۶ـ (الف) ماتریس C حاصلضرب A در B است نشان دهید که دترمینان C برابر است با حاصلضرب دترمینانهای A و B:

$$\det C=\det A\times\det B$$

[راهنمایی: دترمینان را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\varepsilon_{ijk}\, a_{i\alpha}\, a_{j\beta}\, a_{k\gamma} = |A|\ \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$$

$$[\varepsilon_{ijk}\, a_{i۱}\, a_{i۲}\, a_{i۳} = |A|$$

(ب) اگر C=A+B در حالت کلی داریم:

$$\det C \neq \det A + \det B$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

با یک مثال عددی خاص این نامساوی را تحقیق کنید.

حل (الف) ضرب دترمینانها مثل ضرب ماتریسها است پس دترمینان ماتریسها برابر حاصلضرب دترمینانها است.

$$C=AB \Rightarrow \det C = \det A \det B$$

(ب) اما در مورد جمع

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$

$$\det C=c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21}=(a_{11}+b_{11})(a_{22}+b_{22})-(a_{12}+b_{12})(a_{21}+b_{21}) \qquad (1)$$

$$\det A+\det B=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}+b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21} \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \det C \neq \det A+\det B$$

۴-۲-۷- سه ماتریس زیر را در نظر بگیرید.

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad B\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad C=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

همهٔ حاصلضربهای ممکن دو عضوی از جمله مربعهای ماتریسهای A، B، C و ۱ ماتریس یکه را بیابید. این سه ماتریس همراه با ماتریس یکه نمایشی از یک گروه ریاضی را به نام گروه چارتایی تشکیل می‌دهند. در بخشهای ۴-۸ و ۴-۹ (نظریه گروهها) بارها به این گروه رجوع خواهیم کرد.

حل

$$A^2=AA=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}$$

$$B^2=BB=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^2=CC=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}$$

$$AB=BA=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AC=CA=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & +1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BC=CB=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

x	1	A	B	C
1	1	A	B	C
A	A	1	C	B
B	B	C	1	A
C	C	B	A	1

۴ـ۲ـ۸ـ برای ماتریس $K=\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

نشان دهید که (با انتخاب مناسبی برای n، $n\neq 0$)

$K^n = KKK \ldots (n \text{ بار}) = 1$

حل

$$K^2 = KK = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow K^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K^3 = (-1)1 \Rightarrow K^n = 1$$

۴ـ۲ـ۹ـ درستی اتحاد ژاکوبی زیر را تحقیق کنید.

$$[A,[B,C]] = [B,[A,C]] - [C,[A,B]]$$

این اتحاد برای توصیف ماتریسی ذرات بنیادی بکار می‌آید با توجه به اینکه اتحاد ژاکوبی به شکل قاعدهٔ BAC-CAB است که در بخش ۱-۵ آمد. بهتر می‌توان آنرا به خاطر سپرد.

حل

$$\left[B,[A,C]\right] - \left[C,[A,B]\right] =$$

$$\left(B(AC-CA) - (AC-CA)B\right) - \left(C(AB-BA) - (AB-BA)C\right) =$$

$$BAC-BCA-ACB+CAB-CAB+CBA-ABC+BAC=$$

$$ABC-ACB-BCA+CBA \qquad (1)$$

$$\left[A,[B,C]\right] = \left(A(BC-CB)-(BC-CB)A\right) = ABC-ACB-BCA+CBA \qquad (2)$$

$$(1) = (2)$$

۴ـ۲ـ۱۰ـ نشان دهید که ماتریسهای

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

در رابطه‌های تعویض پذیری زیر صدق می‌کنند.

$$[A,B]=C \quad , \quad [A,C]=0 \quad , \quad [B,C]=0$$

حل

$$[A,B]=AB-BA=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=C$$

$$[A,C]=AC-CA=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=0$$

$$[B,C]=BC-CB=0$$

۴-۲-۱۱- برای ماتریسهای

$$i=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix} \quad , \quad j=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix} \quad , \quad k=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}$$

نشان دهید که (الف) $i^2=j^2=k^2=-1$

(ب) $ij=-ji=k$ و $jk=-kj=i$ و $ki=-ik=j$

این ۳ ماتریس (i، j و k) همراه با ماتریس یکهٔ ۱، پایه‌ای برای کواترنیونها تشکیل می‌دهند چهار ماتریس ۲×۲، $i\sigma_1$، $i\sigma_2$ و $-i\sigma_3$ و ۱ پایهٔ دیگری را تشکیل می‌دهند؛ σها ماتریسهای اسپینی پاؤلی‌اند (مسئله ۴-۲-۱۳)

حل (الف)

$$i^2=ii=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}=-1$$

به همین نحو برای j^2 و k^2 نیز عمل می‌شود.

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

(ب) $$ij=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=k$$

و بهمین نحو برای بقیه موارد عمل می‌شود.

۴ـ۲ـ۱۲ـ ماتریسی را که عناصر آن به ازای $j<i$ صفرند $(a_{ij}=0)$ می‌توانیم ماتریس مثلثی راست بالا بنامیم. در این ماتریس عناصر چپ پائینی (آنها که در طرف چپ و زیر قطر اصلی قرار دارند) صفرند. در فصلهای ۱۲ و ۱۳ دربارهٔ ارتباط بین سری توانی و بسطهای ویژه تابعی با نمونه‌هایی از این ماتریسها برخواهیم خورد. نشان دهید که حاصلضرب دو ماتریس مثلثی راست بالا نیز یک ماتریس مثلثی راست بالا خواهد برد.

حل A یک ماتریس مثلثی راست

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix} \quad AB=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ 0 & a_{22}b_{22} & a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ 0 & 0 & a_{33}b_{33} \end{bmatrix}$$

۴ـ۲ـ۱۳ـ ماتریسهای اسپینی پاؤلی عبارت‌اند از:

$$\sigma_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_2=\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

نشان دهید که (الف) $\sigma_i^2=1$

(ب) (جایگشتهای دوری) $\sigma_i\sigma_j=i\sigma_k(i,j,k)=(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)$

(ج) $\sigma_i\,\sigma_j+\sigma_j\,\sigma_i=2\delta_{ij}1$

پاؤلی این ماتریسها را در نظریهٔ نانسبیتی اسپین الکترون بکار برد.

حل (الف) $$\sigma_i^2=\sigma_1\sigma_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=1$$

به همین نحو برای σ_2 و σ_3

(ب) $$\sigma_1\sigma_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=i\sigma_3$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

(ج)
$$\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix}=0$$

اگر $i\neq j$ و اگر $i=j$ باشد بصورت 21 در می‌آید.

۴-۲-۱۴- با استفاده از مقادیر σ پاولی در مسئله ۴-۲-۱۳ نشان دهید که

$$(\sigma.a)(\sigma.b)=a.b1+i\sigma.(a\times b)$$

در اینجا $\sigma\equiv i\sigma_x+j\sigma_y+k\sigma_z$ و a و b بردارهایی معمولی‌اند.

حل

$$\left[\sigma_x a_x+\sigma_y a_y+\sigma_z a_z\right]\left[\sigma_x b_x+\sigma_y b_y+\sigma_z b_z\right]=$$
$$\left[\sigma_x^2 a_x b_x+\sigma_x\sigma_y a_x b_y+\sigma_x\sigma_z a_x b_z\right]+\left[\sigma_y\sigma_x a_y b_x+\sigma_y^2 a_y b_y+\sigma_y\sigma_z a_y b_z\right]$$
$$+\left[\sigma_z\sigma_x a_z b_x+\sigma_z\sigma_y a_z b_y+\sigma_z^2 a_z b_z\right]$$

از $\sigma_i\sigma_j=i\sigma_k$ و $\sigma_x^2=\sigma_y^2=\sigma_z^2=1$ استفاده می‌شود.

$$1(a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z)+i(\sigma_z a_x b_y-\sigma_y a_x b_z-\sigma_z a_y b_x+\sigma_x a_y b_z+\sigma_y a_z b_x-\sigma_x a_z b_y)$$
$$=a.b+i\left(\sigma_x(a_y b_z-a_z b_y)+\sigma_y(a_z b_x-a_x b_z)+\sigma_z(a_x b_y-a_y b_x)\right)$$
$$=a.b+i\left[\sigma.(a\times b)\right]$$

۴-۲-۱۵- در یک توصیف خاص بر ای‌ذرات با اسپین ۱، از ماتریسهای زیر استفاده می‌شود.

حل

$$M_x=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\ M_y=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\ M_z=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

نشان دهید (الف) $[M_x, M_y]=iM_z$ و غیره (با جایگشت دوری شاخصها) این رابطه را با استفاده از نماد لوی - چی ویتا در بخش ۳-۴ می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم.

$$[M_i\ ,\ M_j]=i\varepsilon_{ijk}\ M_k$$

(ب) $M^2\equiv M_x^2+M_y^2+M_z^2=21$ که در آن 1 ماتریس یکه است.

(ج) $\left[M^2,M_i\right]=0\quad,\quad\left[M_z,L^+\right]=L^+\quad,\quad\left[L^+,L^-\right]=2M_z$

که در آن $L^+\equiv M_x+iM_y$ و $L^-\equiv M_x-iM_y$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

حل

(الف)

$$[M_x, M_y] = M_x M_y - M_y M_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & -i \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} = iM_k$$

(ب)

$$M^2 \equiv M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I$$

(ج)

$$L^+ \equiv M_x + iM_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L^- \equiv M_x - iM_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[L^+, L^-] = L^+L^- - L^-L^+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 2M_z$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\left[M_Z,L^+\right]=M_zL^+-L^+M_z=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-2\\0&0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}=L^+$$

$$\left[M^2,M_z\right]=M^2M_z-M_zM^2=$$

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}=0$$

مسائل ۴-۲-۱۶ و ۴-۲-۱۷ و ۴-۲-۱۸ مشابه مسئله ۴-۲-۱۵ حل می‌شوند. و از حل آنها صرفنظر می‌شود.

۴-۲-۱۹- عملگر P با j_x و j_y مولفه‌های x و y عملگر تکانهٔ زاویه‌ای تعویض‌پذیر است نشان دهید که P با سومین مولفه تکانهٔ زاویه‌ای نیز تعویض‌پذیر است.

$$[P,J_Z]=0$$

[راهنمایی: مؤلفه‌های تکانهٔ زاویه‌ای باید در رابطهٔ تعویض پذیری مسئله ۴-۲-۱۵ الف صدق کنند].

حل

$$[P,J_x]=0 \Rightarrow PJ_x-J_xP=0 \Rightarrow PJ_x=J_xP \qquad (1)$$

$$[P,J_y]=0 \Rightarrow PJ_y-J_yP=0 \Rightarrow PJ_y=J_yP \qquad (2)$$

$$[J_x,J_y]=iJ_z \Rightarrow J_xJ_y-J_yJ_x=iJ_z \qquad (3)$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

P را یکبار از سمت راست و بار دیگر از سمت چپ در عبارت (۳) ضرب می‌کنیم داریم:

$$PJ_xJ_y-PJ_yJ_x=iPJ_z \qquad (۵)$$

$$J_xJ_yP-J_yJ_xP=iJ_zP \ , \ (۱) \ , \ (۲) \Rightarrow PJ_xJ_y-PJ_yJ_x=iJ_zP \qquad (۴)$$

$$(۵)-(۴) \Rightarrow ۰=iPJ_z-iJ_zP \Rightarrow i(PJ_z-J_zP)=۰$$

$$\Rightarrow PJ_z-J_zP=۰ \Rightarrow [P,J_z]=۰$$

۴ـ۲ـ۲۰ـ ماتریسهای L^+ و L^- در مسئله ۴-۲-۱۵ عملگرهای نردبانی‌اند اگر L^+ روی دستگاهی با تصویر اسپینی m عمل کند در صورتیکه m از مقدار بیشینه‌اش کمتر باشد تصویر اسپینی به m+۱ افزایش خواهد یافت. اگر L^+ روی بیشینهٔ m عمل کند حاصل برابر صفر خواهد بود. L^- تصویر اسپینی را به روشی مشابه یکی کم خواهد کردبا تقسیم بر $\sqrt{۲}$ داریم

$$L^+=\begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} \quad , \quad L^-=\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

نشان دهید که:

$L^+|-۱>=|۰>$ $\qquad$ $L^-|-۱>=$ بردار ستونی پوچ

$L^+|۰>=|۱>$ $\qquad$ $L^-|۰>=|-۱>$

$L^+|۱>=$ بردار ستونی پوچ $\qquad$ $L^-|۱>=|۰>$

که در آن $|۱>=\begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix}$ و $|۰>=\begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}$ و $|-۱>=\begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{pmatrix}$

به این ترتیب حالتهای با تصویر اسپینی ۱، ۰ و ۱- را نمایش می‌دهند.

[یادآوری: مشابه عملگر دیفرانسیلی این عملگرهای نردبانی در مسئله ۱۲-۶-۷ ظاهر خواهد شد.]

حل

$$L^+|-۱>=\begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}=|۰>$$

$$L^+|۰>=\begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix}=|۱>$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

پوچ $L^{+}\,|\,1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

برای L^{-} نیز به همین نحو عمل می‌شود.

۴ـ۲ـ۲۱ـ بردارهای A و B به کمک تانسور T به یکدیگر مربوط می‌شوند. $B=TA$

نشان دهید که اگر A و B معلوم باشند جواب یکتایی برای مؤلفه‌های T وجود ندارد. به همین دلیل تقسیم برداری B/A (جز در حالت خاص بردارهای موازی که در آن صورت T اسکالر است) تعریف نشده است.

حل

$$B=TA \Rightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} T_{11}a_1+T_{12}a_2+T_{12}a_3=b_1 \\ T_{21}a_1+T_{22}a_2+T_{23}a_3=b_2 \\ T_{31}a_1+T_{32}a_2+T_{33}a_3=b_3 \end{cases}$$

مشاهده می‌شود جواب یکتایی برای مولفه‌های T وجود ندارد.

۴ـ۲ـ۲۲ـ می‌توانیم برای بردار معلوم A به جستجوی یک وارون به صورت بردار A^{-1} بپردازیم. یعنی $A.A^{-1}=A^{-1}.\ A=1$

نشان دهید که این رابطه به تنهایی برای تعریف A^{-1} کافی نیست. به عبارت دیگر A بی‌نهایت وارون دارد.

حل چون زاویهٔ بین دو بردار تعریف نشده است و برای هر زاویه یک بردار داریم پس به تعداد هر زاویه یک دوران داریم و تعداد دورانها بی‌نهایت است.

۴ـ۲ـ۲۳ـ اگر A قطری باشد و عناصر آن همه با هم متفاوت و A و B تعویض‌پذیر باشند نشان دهید که B قطری است.

حل

$$\left.\begin{array}{l} \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

PhysicsClassblogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

حل

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}b_{12}=a_{22}b_{12} \xrightarrow{a_{11}\neq a_{22}} b_{12}=0 \\ a_{22}b_{21}=a_{11}b_{21} \xrightarrow{a_{22}\neq a_{11}} b_{21}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow B=\begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}$$

B قطری است.

۴ـ۲ـ۲۴ـ نشان دهید که اگر A و B قطری باشند تعویض پذیرند.

حل

$$AB=C \Rightarrow C_{ij}=\sum_{\ell} a_{i\ell}b_{\ell j}=$$

چون A و B قطری‌اند $\begin{cases} C_{ij}=a_{ii}\,b_{ii} \\ C_{ij}=b_{ii}\,a_{ii} \end{cases} \rightarrow C_{ij}=BA$

$$C_{ij}=a_{ii}\,b_{ii} \Rightarrow C_{ij}=BA$$

۴ـ۲ـ۲۵ـ نشان دهید که اگر هر دو ماتریسی از سه ماتریس A، B و C با هم تعویض‌پذیر باشند. آنگاه $Tr(ABC)=Tr(CBA)$

حل

$$Tr(ABC)=Tr\,(ACB)=Tr\,(CAB)=Tr\,(CBA)$$

۴ـ۲ـ۲۶ـ ماتریسهای تکانه زاویه‌ای در رابطهٔ تعویض پذیری زیر صدق می‌کنند.

$[M_i\,,\,M_j]=iM_k$ (i و j و k چرخه‌ای)

نشان دهید که رد هر یک از ماتریسهای تکانهٔ زاویه‌ای صفر است.

حل همانطور که می‌دانیم رد مجموع عناصر روی قطر یک ماتریس مربعی است. در مسائل ۴-۲-۱۵ و ۴-۲-۱۶ اگر این مجموع را برای تک تک M_x و M_y و M_z بدست آوریم صفر خواهد شد.

۴ـ۲ـ۲۹ـ برای بردار ستونی N بعدی $|x>$ و بردار سطری N بعدی $<y|$ نشان دهید.

$$Tr(|x><y|=<y|x>$$

[یادآوری: $|x><y|$ یعنی بردار ستونی $|x>$ ضربدر بردار سطری $<y|$ نتیجه یک ماتریس مربعی $N\times N$ است.]

حل

$$Tr(\,|x><y|\,)=tr\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 y_2 y_3 \ldots y_n \end{bmatrix}=Tr\begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \ldots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \ldots & x_2y_n \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \ldots & x_ny_n \end{bmatrix}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+\ldots+x_ny_n \qquad (1)$$

$$\langle y \mid x\rangle = \begin{bmatrix} y_1 y_2 y_3 \ldots y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+\ldots+x_ny_n \qquad (2)$$

$(1)=(2)$

۴ـ۲ـ۳۰ـ (الف) اگر دو ماتریس ناتکین تعویض‌پذیر باشند نشان دهید که رد هر یک صفر است (ناتکین یعنی اینکه دترمینان عناصر ماتریس مخالف صفر است) (ب) برای آنکه شرایط بند (الف) برقرار باشد A و B باید ماتریسهای $n\times n$ با n زوج باشند نشان دهید که اگر n فرد باشد تناقضی بروز خواهد کرد.

حل

$$[A,B]=0 \Rightarrow AB-BA=0 \Rightarrow AB=BA \Rightarrow$$

اگر رابطه یکبار از چپ در A^{-1} و یکبار در B^{-1} ضرب کنیم.

$$A^{-1}AB=A^{-1}BA \Rightarrow B=A^{-1}BA \Rightarrow$$

$$trB=tr(A^{-1}BA) \Rightarrow trB=0$$

و اگر در B^{-1} ضرب شود داریم. $trA=0$

۴ـ۲ـ۳۱ـ اگر ماتریس A وراونی داشته باشد نشان دهید که این وارون یکتاست.

حل فرض می‌کنیم B و C هر دو وارون A باشند یعنی

$$AB=BA=1 \quad , \quad AC=CA=1$$

بنابراین

$$B=1B=(CA)B=C(AB)=C1=C$$

یعنی B و C در اصل یکی هستند و وارون A منحصر به فرد است.

۴ـ۲ـ۳۲ـ اگر A^{-1} دارای عناصر زیر باشد

$$a_{ij}^{-1}=\frac{C_{ji}}{|A|}$$

که در آن C_{ji} هم عامل (ji)ام $|A|$ است نشان دهید $A^{-1}A=1$ بنابراین (اگر $|A|\neq 0$) A^{-1} وارون A است.

[یادآوری: در محاسبات عددی گاهی پیش می‌آید که $|A|$ خیلی به صفر نزدیک می‌شود در این صورت دچار مشکل خواهیم شد.]

حل

$$a_{ij}^{-1}=\frac{C_{ji}}{|A|} \Rightarrow a_{ij}^{-1}a_{ij}=(A^{-1}A)_{ij}=\sum_k a_{ik}a_{kj}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

به جای a_{ik}^{-1} از تعریف A^{-1} قرار می‌دهیم.

$$a_{ij}^{-1}a_{ij}=\sum\frac{C_{ki}}{|A|}a_{kj}=\frac{1}{|A|}\sum C_{ki}a_{kj}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$$

۴ـ۲ـ۳۳ـ نشان دهید که $\det A^{-1}=(\det A)^{-1}$

[راهنمایی: از مسئله ۴-۲-۱۶ استفاده کنید.]

[یادآوری: اگر $\det A$ صفر باشد A وارونی ندارد و تکین است]

حل

$$AA^{-1}=1 \Rightarrow \det(AA^{-1})=\det(1) \Rightarrow \det A\,\det A^{-1}=1$$

$$\Rightarrow \det A^{-1}=\frac{1}{\det A} \Rightarrow \det A^{-1}=(\det A)^{-1}$$

۴ـ۲ـ۳۴ـ ماتریسهای M_L را چنان پیدا کنید که حاصلضرب M_LA برابر A باشد با این تفاوت که: (الف) سطر i ام آن در ثابت k ضرب شده باشد $(j=1,2,3,\ldots,\ a_{ij}\to ka_{ij})$ (ب) به جای سطر i ام، سطر i ام اصلی منهای مضربی از سطر m ام قرار گرفته باشد

$(j=1,2,3,\ldots,\ a_{ij}\to a_{ij}-ka_{mj})$

(ج) سطرهای i ام و m ام با یکدیگر تعویض شده باشند.

$(j=1,2,3,\ldots,\ a_{mj}\to a_{ij},\ a_{ij}\to a_{mj})$

حل یک ماتریس ۳×۳ یکه در نظر می‌گیریم.

$$\begin{array}{c}i\\ j\\ m\end{array}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{(الف)}}\begin{bmatrix}k&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

فرض کردیم p برابر از سطر m ام باشد.

$$\text{(ب)}\quad\begin{bmatrix}1&0&0-p\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\text{(ج)}\quad\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

۴ـ۲ـ۳۵ـ نیز همانند ۴-۲-۳۴ حل می‌شود.

۴ـ۲ـ۳۶ـ وارون ماتریس زیر را بیابید.

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$A=\begin{pmatrix} ۳ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۴ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

حل

(۱) سطرهای ماتریس A را بر اولین عدد هر سطر تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{pmatrix} ۰/۳۳۳۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰/۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} ۱ & ۰/۶۶۶۶ & ۰/۳۳۳۳ \\ ۱ & ۱ & ۰/۵ \\ ۱ & ۱ & ۴ \end{pmatrix}$$

(۲) سطر اول را از سطرهای دوم و سوم کم می‌کنیم

$$\begin{pmatrix} ۰/۳۳۳۳ & ۰ & ۰ \\ -۰/۳۳۳۳ & ۰/۵ & ۰ \\ -۰/۳۳۳۳ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} ۱ & ۰/۶۶۶۶ & ۰/۳۳۳۳ \\ ۰ & ۰/۳۳۳۴ & ۰/۱۶۶۷ \\ ۰ & ۰/۳۳۳۴ & ۳/۶۶۶۷ \end{pmatrix}$$

(۳) سطر دوم را بر ۰/۳۳۳۴ تقسیم و سپس ۰/۶۶۶۶ برابر آن را از سطر اول و ۰/۳۳۳۴ برابر آن را از سطر سوم کم می‌کنیم.

$$\begin{pmatrix} -۰/۳۳۳۳ & -۱ & ۰ \\ -۱ & ۱/۵ & ۰ \\ ۰ & -۰/۵ & ۱ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰/۵ \\ ۰ & ۰ & ۳/۵ \end{pmatrix}$$

(۴) سطر سوم را بر ۳/۵ تقسیم و سپس ۰/۵ برابر آن را از سطر دوم کم می‌کنیم.

$$\begin{pmatrix} -۰/۳۳۳۳ & -۱ & ۰ \\ -۱ & +۱/۴۲ & -۰/۱۴ \\ ۰ & -۰/۱۴ & ۰/۲۸ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

بخش ۴-۳-ماتریسهای متعامد — مسائل صفحه ۲۷۸

گوشزد: همهٔ عناصر ماتریسی را حقیقی بگیرید.

۴-۳-۱- نشان دهید که حاصلضرب دو ماتریس متعامد، متعامد است.

[یادآوری: این خاصیت برای نشان دادن این حکم که همهٔ ماتریسهای متعامد n×n یک گروه را تشکیل می‌دهند (بخش ۴-۱۰) بسیار اهمیت دارد.]

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram:me/FizikCalass

حل

$$\tilde{A}=A^{-1}\quad \widetilde{AB}=\tilde{B}\tilde{A}=B^{-1}A^{-1}=(AB)^{-1}$$

$$\tilde{B}=B^{-1}$$

۴ـ۳ـ۲ـ اگر A متعامد باشد نشان دهید که بزرگی دترمینان آن یک است.

حل

$$\tilde{A}=A^{-1} \quad \text{و} \quad AA^{-1}=1 \quad \text{و} \quad A\tilde{A}=1$$

$$\left.\begin{array}{l}\det(A\tilde{A})=\det(1)\Rightarrow \det(A)\det(\tilde{A})=1\\ \det(\tilde{A})=\det(A)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\det(A^{2})=1 \;\Rightarrow\; \det(A)=1$$

۴ـ۳ـ۳ـ اگر A متعامد باشد و $\det A=+1$ نشان دهید که $a_{ij}=c_{ij}$ که در آن c_{ij} هم عامل a_{ij} است از این خاصیت اتحادهای معادلهٔ ۱-۴۱ بدست می‌آیند که در بخش ۱-۴ برای نشان دادن این حکم بکار رفت که حاصلضرب برداری بردارها (در فضای سه بعدی) خود یک بردار است.

[راهنمایی: به مسئله ۴-۲-۳۲ توجه کنید.]

حل

A متعامد است: $A^{-1}=\tilde{A}$

$$AA^{-1}=1 \;\Rightarrow\; \sum a^{-1}_{ji}a_{ik}=\sum\frac{c_{ij}}{\det(A)}a_{ik}=1,\ \det A=1$$

$$\Rightarrow \sum_i c_{ij}a_{ik}=1 \qquad (1)$$

$$\text{A متعامد} \;\Rightarrow\; \sum_i a_{ij}a_{ik}=\delta_{j,k}=1 \qquad (2)$$

$$(1)\ ,\ (2) \;\Rightarrow\; a_{ij}a_{ik}=c_{ij}a_{ik}\Rightarrow a_{ij}=c_{ij}$$

۴ـ۳ـ۴ـ مجموعهٔ دیگری از زاویه‌های اویلر که معمولاً به کار می‌آیند عبارت از:

۱- چرخش پاد ساعتگرد به اندازهٔ زاویه ϕ حول محور x_3؛

۲- چرخش پاد ساعتگرد به اندازهٔ زاویه θ حول محور x'_1؛

۳- چرخش پاد ساعتگرد به اندازهٔ زاویه ψ حول محور x''_3؛

اگر

$$\alpha=\phi-\frac{\pi}{2} \qquad \phi=\alpha+\frac{\pi}{2}$$

$$\beta=\theta \qquad \theta=\beta$$

$$\gamma=\psi+\frac{\pi}{2} \qquad \psi=\gamma-\frac{\pi}{2}$$

نشان دهید که دستگاههای نهایی یکسانند.

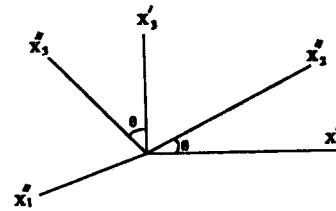
PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

حل

$x_1=x$ و $x_2=y$

$x_3=z$

$$R_z(\phi)=\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$R_x(\theta)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_z(\psi)=\begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R=R_z(\psi)R_x(\theta)R_z(\phi)=\begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi\cos\theta & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi & \cos\psi\cos\theta & \cos\psi\sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R=\begin{bmatrix} \cos\psi\cos\phi-\sin\psi\cos\theta\sin\phi & \cos\psi\sin\phi+\sin\psi\cos\theta\cos\phi & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\phi-\cos\psi\cos\theta\sin\phi & -\sin\psi\sin\phi+\cos\psi\cos\theta\cos\phi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R=\begin{bmatrix} \cos\gamma\cos\beta\cos\alpha-\sin\gamma\sin\alpha & \cos\gamma\cos\beta\sin\alpha+\sin\gamma\cos\alpha & -\cos\gamma\sin\beta \\ -\sin\gamma\cos\beta\cos\alpha-\cos\gamma\sin\alpha & -\sin\gamma\cos\beta\sin\alpha+\cos\gamma\cos\alpha & \sin\gamma\sin\beta \\ \sin\beta\cos\alpha & +\sin\beta\sin\alpha & \cos\beta \end{bmatrix}$$

۵-۳-۴ فرض کنید زمین بطوری حرکت کرده (چرخیده) است که قطب شمال به وضعیت 30° شمالی و 20° غربی (در دستگاه طول و عرض جغرافیایی اولیه) انتقال یافته و مدار 10° غربی در امتداد جنوب قرار گرفته است. (الف) چه زاویه‌های اویلری این چرخش را تعریف می‌کنند. (ب) کسینوسهای هادی متناظر را بیابید.

حل محور شمال - جنوب را روی محور zها و غرب - شرق را روی محور xها در نظر می‌گیریم.

$$R_z(30)=\begin{bmatrix} \cos 30^\circ & \sin 30 & 0 \\ -\sin 30^\circ & \cos 30 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{bmatrix}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$R_x(۲۰)=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \cos ۲۰ & \sin ۲۰ \\ ۰ & -\sin ۲۰ & \cos ۲۰ \end{bmatrix}$$

$$R_z(۱۰)=\begin{bmatrix} \cos ۱۰^\circ & \sin ۱۰ & ۰ \\ -\sin ۱۰ & \cos ۱۰ & ۰ \\ & & +۱ \end{bmatrix}$$

(ب) با قرار دادن $\alpha=۷۰$ و $\beta=۶۰$ و $\gamma=-۸۰$ در رابطه آخری مسئله ۵-۳-۴ بدست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} ۰/۹۵۵۱ & -۰/۲۵۵۲ & -۰/۱۵۰۳ \\ ۰/۰۰۵۲ & ۰/۵۲۲۰ & -۰/۸۵۲۸ \\ ۰/۲۹۶۱ & ۰/۸۱۳۷ & ۰/۵ \end{bmatrix}$$

۶-۳-۴ تحقیق کنید که ماتریس چرخش زاویهٔ اویلر معادله ۴-۸۷ تحت تبدیل زیر ناورد است.

$$\alpha \to \alpha+\pi \quad , \quad \beta \to -\beta \quad , \quad \gamma=\gamma-\pi$$

حل معادله ۴-۸۷

$$A(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{bmatrix} \cos\gamma\cos\beta\cos\alpha-\sin\gamma\sin\alpha & \cos\gamma\cos\beta\sin\alpha+\sin\gamma\cos\alpha & -\cos\gamma\sin\beta \\ -\sin\gamma\cos\beta\cos\alpha-\cos\gamma\sin\alpha & -\sin\gamma\cos\beta\sin\alpha+\cos\gamma\cos\alpha & \sin\gamma\sin\beta \\ \sin\beta\cos\alpha & \sin\beta\sin\alpha & \cos\beta \end{bmatrix}$$

$$A(\alpha+\pi,-\beta,\gamma-\pi)=\begin{bmatrix} \cos(\gamma-\pi)\cos(-\beta)\cos(\alpha+\pi)-\sin(\gamma-\pi)\sin(\alpha+\pi) & \cos(\gamma-\pi)\cos(-\beta)\sin(\alpha+\pi)+\sin(\gamma-\pi)\cos(\alpha+\pi) & -\cos(\gamma-\pi)\sin(-\beta) \\ -\sin(\gamma-\pi)\cos(-\beta)\cos(\alpha+\pi)-\cos(\gamma-\pi)\sin(\alpha+\pi) & -\sin(\gamma-\pi)\cos(-\beta)\sin(\alpha+\pi)+\cos(\gamma-\pi)\cos(\alpha+\pi) & \sin(\gamma-\pi)\sin(-\beta) \\ \sin(-\beta)\sin(\alpha+\pi) & \sin(-\beta)\sin(\alpha+\pi) & \cos(-\beta) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A(\alpha+\pi,-\beta,\gamma-\pi)=A(\alpha,\beta,\gamma)$$

۷-۳-۴ نشان دهید که ماتریس چرخش زاویه اویلر، $A(\alpha,\beta,\gamma)$ در روابط زیر صدق می‌کند:

(الف) $A^{-1}(\alpha,\beta,\gamma)=\tilde{A}(\alpha,\beta,\gamma)$

(ب) $A^{-1}(\alpha,\beta,\gamma)=A(-\gamma,-\beta,-\gamma)$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikClass

حل با محاسبهٔ A^{-1} با توجه A (رابطه ۴-۸۷) می‌توان دید که A^{-1} می‌تواند با $\tilde{A}$ (ترانسپوز) و $A(-\gamma,-\beta,-\gamma)$ برابر باشد.

۴-۳-۸- نشان دهید که رد حاصلضرب یک ماتریس متقارن در یک ماتریس پاد متقارن صفر است.

حل

$A=\tilde{A} \rightarrow$ ماتریس متقارن

$(A+\tilde{A}) \rightarrow$ متقارن و $(A-\tilde{A}) \rightarrow$ پاد متقارن

$$(A+\tilde{A})(A-\tilde{A})=A^2-A\tilde{A}+\tilde{A}A-\tilde{A}^2 \quad , \quad A=\tilde{A} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A^2-A(A)+A(A)-(A)^2=A^2-A^2+A^2-A^2=0 \\ (\tilde{A})^2-\tilde{A}(\tilde{A})+\tilde{A}(\tilde{A})-(\tilde{A})^2=\tilde{A}^2-\tilde{A}^2+\tilde{A}^2-\tilde{A}^2=0 \end{cases}$$

۴-۳-۹- نشان دهید که رد ماتریس تحت تبدیلهای تشابهی ناوردا می‌ماند.

حل

$$A'=BAB^{-1}$$

$$trA'=tr\left[B(AB^{-1})\right]=tr\left[(AB^{-1})B\right]=tr\left[AB^{-1}B\right]$$
$$=tr[A1]=tr[A]$$

۴-۳-۱۰- نشان دهید که دترمینان یک ماتریس تحت تبدیلهای تشابهی ناوردا می‌ماند.

[یادآوری: دو مسئله اخیر (۴-۳-۹ و ۴-۳-۱۰) نشان می‌دهند که رد و دترمینان مستقل از پایه‌اند. این دو ماهیت، مشخصهٔ خود ماتریس (یا عملگر) به شمار می‌آیند.]

حل

$$\det A'=\det(BAB^{-1})=\det B\det A\det B^{-1}=\det A\det B\det B^{-1}$$
$$=\det A\det(BB^{-1})=\det A\det(1)=\det A$$

۴-۳-۱۱- نشان دهید خاصیت پاد تقارن تحت تبدیل تشابهی متعامد، ناورد است.

حل

$A=-\tilde{A}$ (۱) $\qquad A'=BAB^{-1}$ (۲)

$$A'=BAB^{-1} \rightarrow -A'=-BAB^{-1} \rightarrow -\tilde{A}'=-\widetilde{BAB^{-1}} \rightarrow$$

$$-A'=-(\widetilde{BAB^{-1}}) \rightarrow -A'=-(\tilde{B}^{-1}\tilde{A}\tilde{B}) \xrightarrow[\text{تبدیل تشابه متعامد}]{\tilde{A}=-A,\ B^{-1}=\tilde{B}}$$

$$-\tilde{A}'=-(\tilde{\tilde{B}}(-A)B^{-1}) \rightarrow -\tilde{A}'=+BAB^{-1} \qquad (۳)$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

خاصیت پاد تقارن تحت تبدیل تشابه متعامد ناورداست. ⇐ (۳) و (۲) و (۱)

۴ـ۳ـ۱۴ـ نشان دهید که مجموع مربعهای عناصر یک ماتریس تحت تبدیلهای تشابهی متعامد ناوردا می‌ماند.

[یادآوری: $C^2B^2-E^2$ در مسئله ۳-۷-۱۱ را می‌توان بصورت مجموع مربعهای مولفه‌های ماتریس (تانسور) $f_{\mu\nu}$ بدست آورد.]

حل

$$A'=BAB^{-1} \quad , \quad \tilde{B}=B^{-1} \quad a'_{ij}=\sum_{\ell,k} b_{i\ell}\, a_{\ell k}\, b^{-1}_{kj} \quad , \quad b^{-1}_{kj}=\tilde{b}_{kj}=b_{jk}$$

$$a'_{ij}=\sum_{\ell,k} b_{i\ell}\, b_{jk}\, a_{\ell k} \quad \rightarrow \quad a'^2_{ij}=\sum_{\ell,k}(b_{i\ell}\, b_{jk}\, a_{\ell k})(b_{i\ell}\, b_{jk}\, a_{\ell k})$$

$$\sum_{i,j} a'^2_{ij}=\sum_{i,j}\sum_{\ell,k}(b_{i\ell}b_{jk}a_{\ell k})(b_{i\ell}b_{jk}a_{\ell k})=\sum_{\ell,k}\Big(\sum_i b_{i\ell}b_{i\ell}\Big)\Big(\sum_j b_{jk}\, b_{jk}\Big)\, a^2_{\ell k} \qquad (1)$$

شرط تعامد: $\sum_i b_{ij}\, b_{ik}=\delta_{j,k}=\begin{cases}1 & j=k\\ 0 & j\neq k\end{cases} \qquad (2)$

$$(1) \quad , \quad (2) \quad \Rightarrow \quad \sum_{\ell,k} a^2_{\ell k}=\sum_{i,j} a'^2_{ij}$$

۴ـ۳ـ۱۵ـ بعنوان تعمیم مسئله ۴-۳-۱۴ نشان دهید که

$$\sum_{jk} S_{jk}\, T_{jk}=\sum_{\ell,m} S'_{\ell m}\, T'_{\ell m}$$

که در آن مولفه‌های پریم‌دار و غیر پریم‌دار به واسطهٔ تبدیل تشابهی متعامد به یکدیگر مربوط می‌شوند این نتیجه در استخراج ناورداها در نظریهٔ الکترومغناطیس بکار می‌آید (با بخش ۳-۷ مقایسه کنید)

[یادآوری: حاصلضرب $M_{jk}=\sum S_{jk}\, T_{jk}$ راگاهی حاصلضرب هادامارد می‌نامند این مسئله در چارچوب بررسیهای تانسوری فصل ۳ به صورت ادغام دوگانه دو تانسور مرتبه دو در می‌آید و در نتیجه اسکالر بودن (یعنی ناوردایی) آن بدیهی است]

حل

$$a'_{ij}=\sum_{\ell,k} b_{i\ell}\, a_{\ell k}\, b^{-1}_{kj} \quad \Rightarrow \quad S'_{ij}=\sum_{\ell,k} b_{i\ell} S_{\ell k}\, b^{-1}_{kj} \xrightarrow{\quad b^{-1}_{kj}=\tilde{b}_{kj}=b_{jk} \quad}$$

$$S'_{ij}=\sum_{\ell,k} b_{i\ell}\, b_{jk}\, S_{\ell k} \qquad (1)$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$a'_{ij} = \sum_{\ell,k} b_{i\ell}\, b_{jk}\, a_{\ell k} \xrightarrow{T' = BTB^{-1}} T'_{ij} = \sum_{\ell,k} b_{i\ell}\, b_{jk}\, T_{\ell k} \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \sum_{i,j} S'_{ij}\, T'_{ij} = \sum_{i,j}\sum_{\ell,k} (b_{i\ell} b_{jk} S_{\ell k})(b_{i\ell} b_{jk} T_{\ell k}) \Rightarrow$$

$$\sum_{i,j} S'_{ij}\, T'_{ij} = \sum_{\ell,k} \Big(\sum_{i} b_{i\ell}\, b_{i\ell}\Big)\Big(\sum_{j} b_{jk}\, b_{ik}\Big) S_{\ell k}\, T_{\ell k}$$

چون b متعامد است.

$$\sum_{i,j} S'_{ij}\, T'_{ij} = \sum_{\ell,k} S_{\ell k}\, T_{\ell k}$$

۴-۳-۱۶- چرخش $\phi_۱+\phi_۲$ حول محور Z بصورت دو چرخش متوالی $\phi_۱$ و $\phi_۲$ حول محور Z بصورت گرفته است. با استفاده از نمایش ماتریسی این چرخش، اتحادهای مثلثاتی زیر را استخراج کنید:

$$\mathrm{Cos}(\phi_۱+\phi_۲) = \mathrm{Cos}\phi_۱\ \mathrm{Cos}\phi_۲ - \mathrm{Sin}\phi_۱\ \mathrm{Sin}\phi_۲$$

$$\mathrm{Sin}(\phi_۱+\phi_۲) = \mathrm{Sin}\phi_۱\ \mathrm{Cos}\phi_۲ + \mathrm{Cos}\phi_۱\ \mathrm{Sin}\phi_۲$$

حل

$$\begin{bmatrix} \mathrm{Cos}(\phi_۱+\phi_۲) & \mathrm{Sin}(\phi_۱+\phi_۲) \\ -\mathrm{Sin}(\phi_۱+\phi_۲) & \mathrm{Cos}(\phi_۱+\phi_۲) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Cos}\phi_۱ & \mathrm{Sin}\phi_۱ \\ -\mathrm{Sin}\phi_۱ & \mathrm{Cos}\phi_۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{Cos}\phi_۲ & \mathrm{Sin}\phi_۲ \\ -\mathrm{Sin}\phi_۲ & \mathrm{Cos}\phi_۲ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathrm{Cos}\phi_۱\mathrm{Cos}\phi_۲ - \mathrm{Sin}\phi_۱\mathrm{Sin}\phi_۲ & \mathrm{Cos}\phi_۱\mathrm{Sin}\phi_۲ + \mathrm{Sin}\phi_۱\mathrm{Cos}\phi_۲ \\ -\mathrm{Sin}\phi_۱\mathrm{Cos}\phi_۲ - \mathrm{Cos}\phi_۱\mathrm{Sin}\phi_۲ & -\mathrm{Sin}\phi_۱\mathrm{Sin}\phi_۲ + \mathrm{Cos}\phi_۱\mathrm{Cos}\phi_۲ \end{bmatrix}$$

بخش ۴-۴- مختصات مایل — مسائل صفحه ۲۸۵

۴-۴-۱- با استفاده از نتیجه مسئله ۴-۲-۳۲ $q_{ij} = \dfrac{P_{ji}}{|P|}$ رابطهٔ زیر را بدست آورید.

$$a' = \frac{b\times c}{a\times b.c}$$

حل

$$\det P = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} \quad , \quad Q = \begin{vmatrix} a'_x & a'_y & a'_z \\ b'_x & b'_y & b'_z \\ c'_x & c'_y & c'_z \end{vmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{\text{ماتریس همسازه } P}{\det P} = \begin{vmatrix} \dfrac{(b\times c)x}{a.b\times c} & \dfrac{(c\times a)x}{a.b\times c} & \dfrac{(a\times b)x}{a.b\times c} \\ \dfrac{(b\times c)y}{a.b\times c} & \dfrac{(c\times a)y}{a.b\times c} & \dfrac{(a\times b)y}{a.b\times c} \\ \dfrac{(b\times c)z}{a.b\times c} & \dfrac{(c\times a)z}{a.b\times c} & \dfrac{(a\times b)z}{a.b\times c} \end{vmatrix}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/Fizikclass

از Q و P^{-1} می‌توان نتیجه گرفت که $a' = \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{\vec{a}.\vec{b} \times \vec{c}}$ و به همین نحو برای b' و c' نیز بدست خواهد آمد.

۲ـ۲ـ۲ـ بردارهایی که دستگاه مختصات مایل به خصوصی را تعریف می‌کنند به قرار زیرند.

$$a=i \quad , \quad b=j \quad , \quad c=\frac{(j+k)}{\sqrt{۲}}$$

(الف) P، Q و سنجهٔ $\tilde{P}P$ را بیابید.

(ب) اگر $V=i+۳j+۲k$، آنگاه V و V' را بیابید. درستی اتحاد زیر را تحقیق کنید.

$$V^{۲}=\langle V' | | V\rangle$$

حل (الف) در حالت کلی P و $\tilde{P}$ را می‌نویسیم و با توجه به a و b و c داده شده جایگزین می‌کنیم.

$$P=\begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ ۰ & ۰ & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{P}=\begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix}$$

$$a'_x=\frac{(b\times c)x}{a.b\times c}=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=۱ \quad , \quad a'_y=\frac{(b\times c)}{a.b\times c}=۰, a'_z=۰$$

$$b'_x=\frac{(c\times a)x}{a.b\times c}=۰ \quad , \quad b'_y=\frac{(c\times a)y}{a.b\times c}=\frac{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=-۱ \quad , \quad b'_z=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=۱$$

$$c'_x=\frac{(a\times b)x}{a.b\times c}=۰ \quad , \quad c'_y=۰ \quad , \quad c'_z=\frac{(a\times b)z}{a.b\times c}=\frac{۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\sqrt{۲}$$

$$Q=\begin{bmatrix} a'_x & a'_y & a'_z \\ b'_x & b'_y & b'_z \\ c'_x & c'_y & c'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \sqrt{۲} \end{bmatrix}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\tilde{P}P=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ ۰ & ۰ & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ ۰ & \frac{\sqrt{۲}}{۲} & ۱ \end{bmatrix}$$

(ب)

$$V=Q\vec{V}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ ۰ & \frac{\sqrt{۲}}{۲} & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۳+\sqrt{۲} \\ \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}+۲ \end{bmatrix}$$

$$V'=\tilde{P}\vec{V}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \\ \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}+\sqrt{۲} \end{bmatrix}$$

$$<V'\,|\,|\,V>=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}+\sqrt{۲} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۳+\sqrt{۲} \\ \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}+۲ \end{bmatrix}$$

۴ـ۴ـ۳ـ نشان دهید (الف) $V'_a = a'.\vec{V}$ (ب) $V_a = a'.\vec{V}$ توجه کنید که در اینجا نیازی نیست بزرگی بردارهای معرف شبکه a و a' وغیره واحد باشد.

حل (الف)

$$\vec{V}=V'_a\,\vec{a'}+V'_b\,\vec{b'}+V'_c\,\vec{c'}$$

$$\vec{V}.\vec{a}=V'_a\,(a.a') \quad\Rightarrow\quad \vec{V}.\vec{a}=V'_a$$

(ب)

$$\vec{V}=V_a\,\vec{a}+V_b\,\vec{b}+V_c\,\vec{c}$$

$$\vec{V}.\vec{a'}=V_a(a'.a) \quad\Rightarrow\quad \vec{V}.\vec{a'}=V_a$$

۴ـ۴ـ۵ـ نشان دهید که سنجهٔ بردارهای پاد وردا یعنی $(g_{ij})=\tilde{P}P$ به قرار زیر است.

$$\begin{pmatrix} \vec{a}.\vec{a} & \vec{a}.\vec{b} & \vec{a}.\vec{c} \\ \vec{b}.\vec{a} & \vec{b}.\vec{b} & \vec{b}.\vec{c} \\ \vec{c}.\vec{a} & \vec{c}.\vec{b} & \vec{c}.\vec{c} \end{pmatrix}$$

PhysicsClass.blogsky.com
telegram.me/FizikCalass

برای مختصات مایل همهٔ این ضربهای نقطه‌ای ۰ و در نتیجه همهٔ g_{ij}ها ثابت‌اند.

حل

$$P=\begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{P}=\begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{bmatrix}$$

$$\tilde{P}P=\begin{bmatrix} a_x^2+a_y^2+a_z^2 & a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z & a_x c_x+a_y c_y+a_z c_z \\ b_x a_x+b_y a_y+b_z a_z & b_x^2+b_y^2+b_z^2 & b_x c_x+b_y c_y+b_z c_z \\ c_x a_x+c_y a_y+c_z a_z & c_x b_x+c_y b_y+c_z b_z & c_x^2+c_y^2+c_z^2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \vec{a}.\vec{a} & \vec{a}.\vec{b} & \vec{a}.\vec{c} \\ \vec{b}.\vec{a} & \vec{b}.\vec{b} & \vec{b}.\vec{c} \\ \vec{c}.\vec{a} & \vec{c}.\vec{b} & \vec{c}.\vec{c} \end{bmatrix}$$

بخش ۴ـ۵ـ ماتریسهای هرمیتی ـ ماتریسهای یکانی مسائل صفحه ۲۹۱

۴ـ۵ـ۱ـ نشان دهید: $\det(A^*)=(\det A)^*=\det(A^+)$

حل

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow A^*=\begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* \end{bmatrix} \Rightarrow A^+=\begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* \end{bmatrix}$$

$$(\det A)^*=(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})^*=a_{11}^*a_{22}^*-a_{12}^*a_{21}^* \quad (3)$$

$$\det A^*=a_{11}^*a_{22}^*-a_{12}^*a_{21}^* \quad (2)$$

$$\det A^+=a_{11}^*a_{22}^*-a_{12}^*a_{21}^* \quad (1)$$

$$(1),(2),(3) \Rightarrow (\det A)^*=\det(A^*)=\det(A^+)$$

۴ـ۵ـ۲ـ سه ماتریس تکانهٔ زاویه‌ای در رابطهٔ جابجایی اساسی زیر صدق می‌کنند.

$$[J_x, J_y] = iJ_z$$

(با جایگشت چرخه‌ای شاخصها). اگر عناصر دو تا از این ماتریسها حقیقی باشند نشان دهید که عناصر ماتریس سوم باید موهومی محض باشند.

حل

$$[J_x, J_y]=J_xJ_y-J_yJ_x=iJ_z$$

J_x, J_y حقیقی $\rightarrow J_z$ موهومی

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikClass

۴ـ۵ـ۳ـ نشان دهید $(AB)^+=B^+A^+$

حل

$$(AB)^+=(\widetilde{AB})^*=(\widetilde{A^*B^*})=\widetilde{B}^*\widetilde{A}^*=B^+A^+$$

۴-۵-۴- برای ماتریس c داریم: $C=S^+S$. نشان دهید که رد C قطعاً مثبت است مگر آنکه S ماتریس صفری باشد که در آن صورت $Tr(c)=0$.

حل

$$C=S^+S \Rightarrow C_{ij}=\sum_x S^+_{ix}S_{xj} \quad , \quad S^+=\widetilde{S}^*$$

$$tr(C)=\sum_i c_{ii}=\sum_i\sum_x S^+_{ix}S_{xi} \quad , \quad S_{xi}=a+ib$$

$$S^+_{ix}=a-ib$$

$$S^+_{ix}S_{xi}=(a+ib)(a-ib)=a^2-iab+iab+b^2=a^2+b^2\Rightarrow TR(C)>0$$

۴-۵-۵- اگر A و B ماتریسهایی هرمیتی باشند. نشان دهید $(AB+BA)$ و $i(AB-BA)$ نیز هرمیتی‌اند.

حل

$$A=A^+ \quad , \quad B=B^+$$

(الف)

$$\left[i(AB-BA)\right]^+=\left[-i(AB-BA)^+\right]=\left[-i(B^+A^+-A^+B^+)\right]$$

$$=-i(BA-AB)=i(AB-BA)$$

(ب)

$$(AB+BA)^+=(\widetilde{AB+BA})^*=(\widetilde{A^*B^*+B^*A^*})=\widetilde{A^*B^*}+(\widetilde{B^*A^*})$$

$$=\widetilde{B}^*\widetilde{A}^*+(\widetilde{A}^*\widetilde{B}^*)=(B^+A^++A^+B^+)=(BA+AB)=(AB+BA)$$

۴-۵-۶- ماتریس c هرمیتی نیست. نشان دهید که $C+C^+$ و $i(C-C^+)$ هرمیتی‌اند. یعنی یک ماتریس غیرهرمیتی را می‌توان به دو جزء هرمیتی تجزیه کرد:

$$C=\frac{1}{2}(C+C^+)+\frac{1}{2i}i(C-C^+)$$

حل

$$\left[C+C^+\right]^+=C^++(C^+)^+=C^++C=C+C^+$$

$$\left(i\left[C-C^+\right]\right)^+=\left(\widetilde{i\left[C-C^+\right]}\right)^*=-i(C^+-C)=i(C-C^+)$$

پس می‌توان داشت:

$$C=\frac{1}{2}(C+C^+)+\frac{i}{2i}(C-C^+)$$

۴-۵-۷- A و B دو ماتریس هرمیتی تعویض ناپذیراند.

$$AB-BA=iC$$

ثابت کنید C هرمیتی است.

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

حل

$A=A^+ \ , \ B=B^+$

$$\left[\frac{(AB-BA)}{i}\right]=C \Rightarrow \left[\frac{AB-BA}{i}\right]^+=\frac{(AB)^+-(BA)^+}{-i}=$$

$$\frac{B^+A^+-A^+B^+}{-i}=\frac{BA-AB}{-i}=\frac{AB-BA}{i}=C$$

نتیجه گرفتیم که $C=C^+$ پس C هرمیتی است.

۴ـ۵ـ۸ـ نشان دهید یک ماتریس هرمیتی تحت تبدیل تشابهی یکانی کماکان هرمیتی می‌ماند.

حل

$A'=BAB^{-1} \ , \ A'=BAB^+ \Rightarrow$

$$A'^+=(BAB^+)^+=(B^+)^+A^+B^+=BA^+B^+=BAB^+$$

$\Rightarrow (BAB^+)^+=BAB^+ \rightarrow$ هرمیتی است.

۴ـ۵ـ۹ـ هر یک از دو ماتریس A و B هرمیتی‌اند. شرط لازم و کافی برای آنکه حاصلضرب AB هرمیتی باشد چیست؟

حل

$A=A^+ \quad , \quad B=B^+$

$(AB)=(AB)^+=B^+A^+=BA \Rightarrow AB=BA \Rightarrow AB-BA=0 \Rightarrow [A,B]=0$

۴ـ۵ـ۱۰ـ نشان دهید که وارون هر ماتریس یکانی، یکانی است.

حل

$u^{-1}=u^+ \equiv$ ماتریس یکانی است

$(u^{-1})^{-1}=(u^+)^+=u$

۴ـ۵ـ۱۱ـ از یک تبدیل تشابهی به خصوصی داریم

$$A'=UAU^{-1} \qquad , \qquad A^{+'}=UA^+U^{-1}$$

اگر رابطهٔ الحاقی پایسته باشد $(A^{+'}=A'^+)$ و $\det U=1$ نشان دهید U باید یکانی باشد.

حل

$$A'^+=(UAU^{-1})^+=U^{-1+}A^+U^+=UA^+U^+$$

$$UA^+U^+=(U^{-1})^+A^+U^+ \Rightarrow U^+=U^{-1}$$

۴ـ۵ـ۱۲ـ رابطهٔ زیر بین دو ماتریس U و H برقرار می‌شود.

$$U=e^{iaH}$$

که در آن a حقیقی است. (تابع نمایی با بسط ملکورن تعریف می‌شود. این کار در بخش ۴-۱۱ انجام خواهد شد.) (الف) نشان دهید که اگر H خواهد بود. (ب) نشان

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

دهید که اگر U یکانی باشد H هرمیتی خواهد بود (H از a مستقل است).

[یادآوری: اگر Hها میلتونی باشد آنگاه

$$\psi(x,t)=U(x,t)\psi(x,0)=\exp(-it\frac{H}{\hbar})\psi(x,0)$$

یکی از جوابهای معادلهٔ شر و دینگر وابسته به زمان است. $U(x,t)=\exp(-it\frac{H}{\hbar})$

یک "عملگر تحول" است.]

حل

$$e^A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}\quad,\quad U=e^{iaH}\Rightarrow U^{-1}=e^{-iaH}$$

$$1-iaH+\frac{(-iaH)^2}{2!}+\frac{(-aiH)^3}{3!}+\dots=\left[1+(iaH)^{+}+\frac{(iaH)^2}{2!}+\dots\right]$$

$$=\left[i+(iaH)+\frac{(iaH)^2}{2!}+\dots\right]^{+}=(e^{iaH})^{+}$$

۴-۵-۱۳- عملگر $T(t+\varepsilon,t)$ تغییرات تابع موج از t تا $t+\varepsilon$ را توصیف می‌کند. به ازای ε حقیقی و آنقدر کوچک که بشود از ε^2 صرفنظر کرد. داریم

$$T(t+\varepsilon,t)=1-\frac{i}{\hbar}\varepsilon H(t)$$

(الف) اگر T یکانی باشد نشان دهید که H هرمیتی است (ب) اگر H هرمیتی باشد نشان دهید T یکانی است.

[یادآوری: هرگاه $H(t)$ مستقل از زمان باشد می‌توان این رابطه را بصورت نمایی درآورد (مسئله ۴-۵-۱۲)]

حل

$$T^{-1}=T^{+}\quad,\quad T=1-\frac{i}{\hbar}\varepsilon H(t)=e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H(t)}$$

$$\left.\begin{aligned}T^{-1}&=e^{i\frac{\varepsilon}{\hbar}H(t)}=1+\frac{i}{\hbar}\varepsilon H(t)\\ T^{+}&=1-(\frac{-i}{\hbar}\varepsilon H^{+}(t))=1+\frac{i}{\hbar}\varepsilon H^{+}(t)\end{aligned}\right\}\Rightarrow H=H^{+}$$

قسمت (ب) نیز روشی مشابه خواهد داشت.

مسئله **۴-۵-۱۴** روشی مشابه دو مسئله قبل دارد.

۴-۵-۱۵- ثابت کنید که [illegible]، خودش یکانی است.

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

حل

$$\left.\begin{aligned}(U_1U_2)^{-1}&=U_2^{-1}U_1^{-1}\\ U_2^{-1}&=U_2^{+}\\ U_1^{-1}&=U_1^{+}\end{aligned}\right\}=U_2^{+}U_1^{+}=(U_1U_2)^{+}$$

پس حاصلضرب نیز یکانی است.

۴ـ۵ـ۱۶ـ ۱۶ ماتریس دیراک را به کمک تساوی $E_{ij}=\rho_i\sigma_j$ $(\sigma_0=\rho_0=1)$ نمایش دهید نشان دهید که (الف) به ازای همهٔ iها و همهٔ jها $E_{ij}^2=1$

(ب) (هرمیتی) $E_{ij}=E_{ij}^{+}$

[راهنمایی: از خواص ρ_i ها و σ_jها استفاده کنید.]

حل

(الف) $E_{ij}^2=E_{ij}E_{ij}=(\rho_i\sigma_j)(\rho_i\sigma_j)=\rho_i\sigma_j\sigma_j\rho_i=1$

(ب) $(E_{ij})^{+}=(\rho_i\sigma_j)^{+}=\sigma_j^{+}\rho_i^{+}=\sigma_j\rho_i=E_{ij}$

پس E_{ij} هرمیتی است.

۴ـ۵ـ۱۷ـ درستی معادله‌های ۴-۱۳۴ تا ۴-۱۳۶ را برای ماتریسهای σ و ρ چهار در چهار تحقیق کنید.

حل

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\quad,\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&-i\\0&0&i&0\end{pmatrix}$$

$$\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&-i\\0&0&i&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-i&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&-i\\0&0&i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}i&0&0&0\\0&-i&0&0\\0&0&i&0\\0&0&0&-i\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-i&0&0&0\\0&i&0&0\\0&0&-i&0\\0&0&0&i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=0$$

$$\sigma_1\sigma_1+\sigma_1\sigma_1=2\sigma_1\sigma_1=2\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$= ۲\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} = ۲\,1$$

پس می‌توان داشت: $\sigma_i\sigma_j+\sigma_j\sigma_i=۲\delta_{ij}1$

به همین نحو برای سایر موارد و معادلات عمل می‌شود.

مسئله **۴ـ۵ـ۱۸** نیز روشی مشابه مسئله قبل دارد.

۴ـ۵ـ۱۹ـ با استفاده از معادلات ۴-۱۳۵ و ۴-۱۳۶ نشان دهید که

(الف) $a_۱a_۲a_۳a_۴a_۵=+۱$ (ب) $Y_۱Y_۲Y_۳Y_۴Y_۵=+۱$

حل داریم: $a_i=\rho_i\sigma_i$ و $\sigma_i\sigma_j=i\sigma_k$ و $\rho_i\rho_j=i\rho_k$ و $[\sigma_i,\rho_j]=۰$

$$a_۴=\rho_۳$$

$$a_۱a_۲a_۳a_۴a_۵=\rho_۱\sigma_۲\rho_۱\sigma_۳\rho_۱\sigma_۳\rho_۳\rho_۲=\sigma_۱\rho_۱^۲\sigma_۳\rho_۱\sigma_۳\rho_۳\rho_۲=$$

$$\sigma_۱\sigma_۲(\sigma_۳\rho_۱)(-i\rho_۱)=(i\sigma_۳)(\sigma_۳\rho_۱)(-i\rho_۱)=-i^۲\sigma_۳^۲\rho_۱^۲=-i^۲=+۱$$

قسمت (ب) نیز همانند (الف) بدست می‌آید.

۴ـ۵ـ۲۰ـ اگر $M=(\frac{۱}{۲})(۱+Y_۵)$ نشان دهید که $M^۲=M$ توجه کنید که به جای $Y_۵$ می‌شود هر یک از ماتریسهای دیگر دیراک (هر یک از E_{ij} ها در جدول ۴-۱) را قرار داد. اگر M هرمیتی باشد این نتیجه یعنی $M^۲=M$ معادلهٔ معرف یک عملگر تصویر در مکانیک کوانتومی است.

حل از جدول ۴-۱ صفحهٔ ۲۶۰ داریم:

$$\rho_۱,-Y_۵=\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} \Rightarrow Y_۵=\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

$$M=\frac{۱}{۲}(۱+Y_۵)=\frac{۱}{۲}\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

$$M^۲=MM=\frac{۱}{۴}\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}=\frac{۱}{۴}\begin{pmatrix} ۲ & ۰ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ & -۲ \\ -۲ & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۰ & ۲ \end{pmatrix}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=M$$

۴ـ۵ـ۲۱ـ نشان دهید $\alpha\times\alpha=2i\sigma$

که در آن α برداری است که ماتریسهای a مولفه‌های آن را تشکیل می‌دهند

$$\alpha=(a_1, a_2, a_3)$$

دقت کنید که اگر α یک بردار قطبی باشد (بخش ۳-۴) آنگاه σ برداری محوری است.

حل

$$\alpha\times\alpha=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}=\hat{i}(a_2a_3-a_3a_2)+\hat{j}(a_3a_1-a_1a_3)+\hat{k}(a_1a_2-a_2a_1)$$

از رابطه $a_i=\rho_1\sigma_i$ استفاده می‌شود

$$=\hat{i}(\rho_1\sigma_2\rho_1\sigma_3-\rho_1\sigma_3\rho_1\sigma_2)+\hat{j}(\rho_1\sigma_3\rho_1\sigma_1-\rho_1\sigma_1\rho_1\sigma_3)+\hat{k}(\rho_1\sigma_1\rho_1\sigma_2-\rho_1\sigma_2\rho_1\sigma_1)$$

$$=\hat{i}(2i\sigma_1)+\hat{j}(2i\sigma_2)+\hat{k}(2i\sigma_3)=2i\sigma$$

البته می‌توان از جدول ۴-۱ مستقیماً به جای a_1، a_2 و a_3 ماتریس‌های مربوطه را قرار داد.

۴ـ۵ـ۲۲ـ ثابت کنید که ۱۶ ماتریس دیراک یک مجموعهٔ مستقل خطی می‌سازند.

[راهنمایی: عکس این حکم را فرض کنید E_{mn} را ترکیب خطی دیگر E_{ij}ها بگیرید در E_{mn} ضرب کنید رد بگیرید و نشان دهید که به تناقض می‌رسید.]

حل

$$E_{mn}=\sum_{i,j}a_{ij}E_{ij}\quad\Rightarrow\quad E_{mn}E_{mn}=E_{mn}^2=\sum_{i,j}a_{ij}E_{mn}E_{ij}=1$$

$$\Rightarrow\quad \mathrm{Tr}\sum_{i,j}a_{ij}E_{mn}E_{ij}=\sum_{ij}a_{ij}\,\mathrm{Tr}(E_{mn}E_{ij})=0=\mathrm{Tr}(1)$$

و حال آنکه می‌دانیم $\mathrm{Tr}(1)=4$ است پس به تناقض می‌رسیم و نتیجتاً داریم

$$E_{mn}=\sum_{i,j}a_{ij}E_{ij}$$

رابطه مقابل برقرار نیست.

۴ـ۵ـ۲۳ـ (الف) اگر فرض کنیم که ماتریس ۴×۴ معلوم A (با عناصر ثابت) را بتوان بصورت ترکیب خطی ۱۶ ماتریس دیراک نوشت:

$$A=\sum_{i,j=0}^{3}C_{ij}E_{ij}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

نشان دهید: $C_{mn}=\frac{1}{4}\,Tr(AE_{mn})$

(ب) اگر A فقط و فقط یک عنصر ناصفر داشته باشد نشان دهید که در این بسط دقیقاً چهار ضریب ناصفر وجود خواهد داشت.

(ج) ماتریس A را برحسب E_{ij}ها بسط دهید.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

حل

(الف) $A=\sum_{i,j=0}^{3} C_{ij}\,E_{ij} \quad\Rightarrow\quad AE_{mn}=\sum_{i,j=0}^{3} C_{ij}\,E_{ij}\,E_{mn}$

$$Tr(AE_{mn})=Tr\sum_{i,j=0}^{3} C_{ij}\,E_{ij}\,E_{mn}=4C_{mn} \quad\Rightarrow\quad C_{mn}=\frac{1}{4}Tr(AE_{mn})$$

(ب) $C_{mn}=\frac{1}{4}Tr(AE_{mn})$ از (الف) داریم:

$$C_{mn}=\frac{1}{4}\sum_{k}\sum_{\ell} a_{k\ell}(E_{mn})_{\ell k}=\frac{1}{4}a_{ij}\,(E_{mn})_{ji}$$

(ج) $A=\frac{1}{4}(E_{00}+E_{03}+E_{30}+E_{33})$

$$C_{00}=\frac{1}{4}\times 1\times(1)=\frac{1}{4} \quad , \quad C_{03}=\frac{1}{4}\times 1\times 1=\frac{1}{4}$$

$$C_{30}=\frac{1}{4} \quad , \quad C_{33}=\frac{1}{4} \quad A=\frac{1}{4}(1+\sigma_3+\rho_3+\delta_3)$$

۴-۵-۲۴- اگر A یکی از ماتریسهای دیراک (جز ماتریس یکه) باشد. با هشت تا از ماتریسهای دیراک تعویض‌پذیر و با هشت تای دیگر پاد تعویض‌پذیر است هشت ماتریس را بیابید که با Y_1 پاد تعویض‌پذیر باشند.

حل شرط $[A,Y_1]=0$ باید برقرار باشد تا بتوان ماتریس‌های تعویض‌پذیر و از مخالف صفر بودن عبارت فوق ماتریس‌های پاد تعویض‌پذیر را پیدا کنیم. که در کل بعد از بررسی از جدول صفحه ۲۶۰ بدست می‌آید.

$$\sigma_2,\sigma_3,\rho_1,a_1,Y_2,Y_3,\rho_3,\delta_1$$

۴-۵-۲۶- (الف) داریم، $\vec{r}=Ur$ که در آن U یک ماتریس یکانی و r برداری (ستونی) با عناصر

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

مختلط است. نشان دهید که نرم (بزرگی) r تحت این عمل ناورد است (ب) ماتریس، U، هر بردار ستونی r با عناصر مختلط را به r' تبدیل می‌کند و بزرگی آن همچنان ناوردا می‌ماند: $r^+r=r'^+r'$.

نشان دهید که U یکانی است.

حل (الف) $r'^+r'=(Ur)^+Ur=r^+U^+Ur=r^+1r=r^+r$

قسمت (ب) نیز به راحتی قابل دستیابی است.

بخش ۴ـ۶ـ قطری کردن ماتریسها — مسائل صفحه ۳۰۶

۴ـ۶ـ۳ بعنوان عکس این قضیه که ماتریسهای هرمیتی ویژه مقدارهای حقیقی دارند و ویژه بردارهای متناظر به ویژه مقدارهای متمایز آنها متعامدند. نشان دهید که هرگاه (الف) ویژه مقدارهای یک ماتریس حقیقی باشند و (ب) ویژه بردارهای آن در معادلهٔ ۴-۱۸۰، $r_i^+r_j=\delta_{ij}$ یا $(<r_i \mid r_j>=\delta_{ij})$ صدق کنند آنگاه آن ماتریس هرمیتی است.

حل

$\lambda_i=\lambda_i^*$ ویژه مقادیر حقیقی

$\vec{r}_i^*\,\vec{r}_j=\delta_{ij}$ ویژه بردارها

$$\begin{aligned} Ar_i&=\lambda_i r_i \\ Ar_j&=\lambda_j r_j \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} r_j^+Ar_i&=\lambda_i r_j^+r_i \\ r_i^+Ar_j&=\lambda_j r_i^+r_j \end{aligned} \qquad (۱)$$

از طرفی $\lambda_j r_j^+r_i \underset{\lambda_j^*=\lambda_j}{=} \lambda_j^* r_j^+r_i = r_j^+A^+r_i$ (۲)

$$(۱)\ ,\ (۲) \Rightarrow r_i^+Ar_i=r_i^+A^+r_i \Rightarrow A=A^+$$

A هرمیتی است.

۴ـ۶ـ۴ نشان دهید که ماتریس حقیقی نامتقارن را نمی‌توان به کمک یک تبدیل تشابهی متعامد قطری کرد.

[راهنمایی: فرض کنید که ماتریس حقیقی نامتقارن را بتوان قطری کرد و برای این فرض یک تناقض پیدا کنید.]

حل

$$A\neq\tilde{A}\ ,\quad C=BA\tilde{B} \Rightarrow \tilde{C}=B\tilde{A}\tilde{B}$$

اگر $C=\tilde{C} \Rightarrow BA\tilde{B}=B\tilde{A}\tilde{B} \Rightarrow A=\tilde{A}$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

که این خلاف فرض است و نمی‌تواند چنین باشد.

۴ـ۶ـ۵ـ ماتریسهایی که مؤلفه‌های تکانهٔ زاویه‌ای J_x، J_y و J_z را نمایش می‌دهند. جملگی هرمیتی‌اند. نشان دهید که ویژه مقدارهای $J^2=J_x^2+J_y^2+J_z^2$ حقیقی و نامنفی‌اند.

حل

$$J^2r=J_x^2r+J_y^2r+J_z^2r=(\lambda_x^2r+\lambda_y^2r+\lambda_z^2r)$$

پس چون J_x، J_y و J_z هرمیتی است ویژه مقادیر نیز حقیقی‌اند و درنتیجه ویژه مقدارهای $J^2=J_x^2+J_y^2+J_z^2$ حقیقی است و البته غیرمنفی.

۴ـ۶ـ۷ـ ماتریسهای مربعی با دترمینان صفر را تکین می‌نامند (الف) اگر A تکین باشد نشان دهید که دست کم یک بردار ستونی غیرصفر V چنان وجود دارد که

$$A\,|\,V>=0$$

(ب) اگر یک بردار غیرصفر $|V>$ چنان وجود داشته باشد که $A|V>=0$ نشان دهید که A یک ماتریس تکین است. یعنی اگر یکی از ویژه مقدارهای یک ماتریس (یا یک عملگر) صفر باشد آن ماتریس (یا عملگر) وارونی ندارد.

حل (الف) A یک ماتریس تکین است. $\Rightarrow \quad \det A=0 \quad , \quad [A]_{m\times m}$

اگر A را قطری کنیم بصورت زیر آنرا داریم

$$A' = (\text{قطری } A) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow \det A'=\lambda_1\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_n$$

اگر نتیجه دترمینان A' برابر صفر شود دست کم یکی از ویژه مقادیر صفر است و به طبع برای ویژه بردار مربوطه داریم $Ar_k=0 \Rightarrow Ar_k=\lambda_k r_k=0$

(ب) اگر بطور عکس عمل شود به یک ویژه مقدار صفر خواهیم رسید.

۴ـ۶ـ۸ـ تبدیل تشابهی یکسانی هر یک از دو ماتریس را قطری می‌کند. نشان دهید که دو ماتریس اولیه باید با یکدیگر تعویض‌پذیر باشند [این خاصیت مخصوص در فرمولبندی ماتریسی (هایز نبرگ) در مکانیک کوانتومی حائز اهمیت است.]

حل

$$C_1=BAB^{-1} \quad , \quad C_2=BDB^{-1}$$

$$C_1C_2-C_2C_1=0 \Rightarrow BAB^{-1}BDB^{-1}-BDB^{-1}BAB^{-1}=0$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\Rightarrow \quad BADB^{-1} - BDAB^{-1} = \quad \Rightarrow \quad AD-DA= \quad \Rightarrow \quad AD=DA$$

۴-۶-۹- ویژه مقدارهای دو ماتریس هرمیتی A و B با هم برابرند. نشان دهید که A و B را می‌توان توسط یک تبدیل تشابهی به هم مربوط کرد.

حل r_i و r_j ویژه بردار و λ ویژه مقدار است.

$$\left.\begin{array}{l} Ar_i=\lambda r_i \quad \rightarrow \quad r_i^+ Ar_i=\lambda r_i^+ r_i=\lambda \\ Br_j=\lambda r_j \quad \rightarrow \quad r_j^+ Br_j=\lambda r_j^+ r_j=\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$r_i^+ Ar_i = r_j^+ Br_j$$

دیده می‌شود A و B به هم مربوط شده‌اند.

۴-۶-۱۰- ویژه مقدارها و مجموعهٔ ویژه بردارهای متعامد یکه (متعامد بهنجار) ماتریسهای مسئله ۴-۲-۱۵ را بیابید.

حل از مسئله ۴-۲-۱۵ داریم:

$$M_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad M_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det|M_x-\lambda 1| = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\lambda & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad -\lambda\left[\lambda^2-\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\lambda}{\sqrt{2}}=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda\left[-\lambda^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right]=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}\lambda=0 \\ \lambda=\pm\end{cases}$$

$$\lambda_1=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\begin{cases} \dfrac{x_2}{\sqrt{2}} = 0 \\ \dfrac{x_1}{\sqrt{2}} + \dfrac{x_3}{\sqrt{2}} = 0 \\ \dfrac{x_2}{\sqrt{2}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x_1 = -x_3 = 1 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

بعد از بهنجار کردن (نرمالیزه کردن)

$$r_{1x} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda_1 = 0$$

$$\lambda_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -x'_1 + \dfrac{x'_2}{\sqrt{2}} = 0 \\ \dfrac{x'_1}{\sqrt{2}} - x'_2 + \dfrac{x'}{\sqrt{3}} = 0 \\ \dfrac{x'_2}{\sqrt{2}} - x'_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x'_1 = x'_3 = 1 \quad , \quad x'_2 = \sqrt{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{بعد از نرمالیزه کردن}} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad r_{2x} \, , \lambda_2 = 1$$

$$\lambda_3 = -1 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{pmatrix} = 0$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\left\{\begin{array}{l} x''_1+\dfrac{x''_2}{\sqrt{2}}=0 \\ \dfrac{x''_1}{\sqrt{2}}+x''_2+\dfrac{x''_2}{\sqrt{2}}=0 \\ \dfrac{x''_3}{\sqrt{2}}+x''_3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x''_1=x''_3=1 \quad , \quad x''_2=-\sqrt{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow r_{3x} \quad , \quad \lambda_3=1$$

برای M_y و M_z نیز به همین نحو عمل می‌شود.

نکته (۱): برای بدست آوردن ضریب نرمالیزه از رابطهٔ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}}$ عمل می‌شود.

نکته (۲): اگر ماتریس قطری باشد عناصر روی قطر اصلی ویژه مقادیرند بعنوان نمونه در مورد M_z که قطری است ۱ و ۰ و ۱- ویژه مقادیرند.

۴ـ۶ـ۱۱ـ نشان دهید که دترمینان ماتریس لختی تک ذره‌ای به جرم m در (x,y,z) صفراست. این نتیجه را از دیدگاه ناوردایی دترمینان یک ماتریس تحت تبدیل تشابهی (مسئله ۴-۳-۱۰) و یک چرخش ممکن دستگاه مختصات توجیه کنید.

حل اگر فرض شود که در دستگاه مختصات جدید (چرخش یافته) m در مبدأ قرار گیرد لختی دورانی صفر می‌شود و از طرفی دترمینان یک کمیت ناورد است پس در دستگاه مختصات دیگر نیز صفر است.

۴ـ۶ـ۱۲ـ جسم صُلبی را می‌توان با سه جرم نقطه‌ای زیر نمایش داد.

$m_1=1$ در $(1,1,-2)$

$m_2=2$ در $(-1,-1,0)$

$m_3=1$ در $(1,1,2)$

(الف) ماتریس لختی را بیابید. (ب) ماتریس لختی را با بدست آوردن ویژه مقدارها و محورهای اصلی (بعنوان ویژه بردارهای متعامد یکه) قطری کنید.

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

حل (الف)

لنگر لختی حول محور x $I_{xx} = \sum_i m_i (y_i^۲ + z_i^۲)$

لنگر لختی حول محور y $I_{yy} = \sum_i m_i (z_i^۲ + x_i^۲)$

لنگر لختی حول محور z $I_{zz} = \sum_i m_i (x_i^۲ + y_i^۲)$

حاصلضرب لختی xy $I_{xy} = I_{yx} = -\sum_i m_i x_i y_i$

حاصلضرب لختی yz $I_{yz} = I_{zy} = -\sum_i m_i y_i z_i$

حاصلضرب لختی zx $I_{zx} = I_{xz} = -\sum_i m_i z_i x_i$

$$I_{xx} = ۱(۱^۲+(-۲)^۲)+۲((-۱)^۲+۰^۲)+۱(۱^۲+۲^۲)=۱۲$$

$$I_{yy} = ۱((-۲)^۲+۱^۲)+۲(۰^۲+(-۱)^۲)+۱(۲^۲+۱^۲)=۱۲$$

$$I_{zz} = ۱(۱^۲+۱^۲)+۲((-۱)^۲+(-۱)^۲)+۱(۱^۲+۱^۲)=۸$$

$$I_{xy} = -\left[۱\times۱\times۱+۲\times(-۱)\times(-۱)+۱\times۱\times۱\right] = -۴ = I_{yx}$$

$$I_{yz} = -\left[۱\times۱\times(-۲)+۲\times(-۱)\times۰+۱\times۱\times۲\right] = ۰ = I_{zy}$$

$$I_{zx} = -\left[۱\times(-۲)\times۱+۲\times۰\times(-۱)+۱\times۲\times۱\right] = ۰ = I_{xz}$$

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۲ & -۴ & ۰ \\ -۴ & ۱۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۸ \end{bmatrix}$$

(ب) $$|I-\lambda 1| = ۰ \Rightarrow \begin{vmatrix} ۱۲-\lambda & -۴ & ۰ \\ -۴ & ۱۲-\lambda & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۸-\lambda \end{vmatrix} = ۰$$

$$(۱۲-\lambda)\left[(۱۲-\lambda)(۸-\lambda)\right] - ۴\left[۴(۸-\lambda)\right] = (۸-\lambda)\left[(۱۲-\lambda)^۲ - ۱۶\right] = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_۱ = ۸ \\ \lambda_۲ = ۱۶ \\ \lambda_۳ = ۸ \end{cases}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\lambda_1=8 \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 4x_1-4y_1=0 \\ -4x_1+4y_1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1=y_1=1 \\ z_1=0 \end{matrix} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2=16 \rightarrow \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -4x_2-4y_2=0 \\ -4x_2-4y_2=0 \\ -8z_2=0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x=-y=1 \\ z=1 \end{matrix} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

مسائل ۴-۶-۱۳، ۴-۶-۱۴ و ۴-۶-۱۵ همانند مسئله ۴-۶-۱۲ حل می‌شوند و از حل آنها صرفنظر می‌شود.

۴-۶-۱۶ـ ویژه مقدارها و ویژه بردارهای متعامدیکه متناظر با ماتریسهای زیر را بیابید. (توجه کنید که برای امتحان کردن جواب خود از طریق عددی، مجموع ویژه مقدارها باید با مجموع عناصر قطری ماتریس اصلی برابر باشد (مسئله ۴-۳-۹)). همچنین به تناظر بین $\det A=0$ و وجود $\lambda=0$ که در مسئله‌های ۴-۶-۲ و ۴-۶-۷ نمایش داده شده توجه کنید.

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

حل

$$|A-\lambda 1|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)\left[(1-\lambda)(1-\lambda)\right]-1(1-\lambda)=(1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2-1\right]=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=1 \\ \lambda_2=0 \\ \lambda_3=2 \end{cases}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\lambda_1=1 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} z_1=0 \\ y_1=1 \\ x_1=0 \end{cases} \rightarrow r_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2=0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} x_2+z_2=0 \\ y_2=0 \\ x_2+z_2=0 \end{cases} \rightarrow x_2=-z_2=1 \qquad r_2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

و $r_3 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

بدلیل مشابه بودن مسائل ۴-۶-۱۷ تا ۴-۶-۲۹ بعنوان نمونه چند مسئله از این دسته مسائل حل می‌کنیم.

۴-۶-۱۹-

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{8} & 0 \\ \sqrt{8} & 1 & \sqrt{8} \\ 0 & \sqrt{8} & 1 \end{pmatrix}$$

حل

$$|A-\lambda 1|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & \sqrt{8} & 0 \\ \sqrt{8} & 1-\lambda & \sqrt{8} \\ 0 & \sqrt{8} & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2-8\right]-\sqrt{8}\left[\sqrt{8}(1-\lambda)\right]=0 \Rightarrow$$

$$(1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2-16\right]=0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=1 \\ \lambda_2=5 \\ \lambda_3=-3 \end{cases}$$

$$\lambda_1=1 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{8} & 0 \\ \sqrt{8} & 0 & \sqrt{8} \\ 0 & \sqrt{8} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = 0$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\begin{cases}\sqrt{8}\,y_1=0\\ \sqrt{8}\,x_1+\sqrt{8}\,z_1=0\\ \sqrt{8}\,y_1=0\end{cases}\Rightarrow\quad x_1=-z_1=1$$

$$r_1\rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\lambda_2=5\rightarrow\begin{pmatrix}-4&\sqrt{8}&0\\ \sqrt{8}&-4&\sqrt{8}\\ 0&\sqrt{8}&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}=0$$

$$\left\{\begin{array}{l}-4x_2+\sqrt{8}\,y_2=0\\ \sqrt{8}\,x_2-4y_2+\sqrt{8}\,z_2=0\\ \sqrt{8}\,y_2-4z_2=0\end{array}\right\}\Rightarrow\quad x_2=z_2=1$$

$$y_2=\frac{\sqrt{8}}{2}$$

$$r_2\rightarrow\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ \frac{\sqrt{8}}{2}\\1\end{pmatrix}$$

$$\lambda_3=-3\rightarrow\begin{pmatrix}4&\sqrt{8}&0\\ \sqrt{8}&4&\sqrt{8}\\ 0&\sqrt{8}&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_3\\y_3\\z_3\end{pmatrix}=0$$

$$\left\{\begin{array}{l}4x_3+\sqrt{8}\,y_3=0\\ \sqrt{8}\,x_3+4y_3+\sqrt{8}\,z_3=0\\ \sqrt{8}\,y_3+4z_3=0\end{array}\right\}\Rightarrow\quad x_3=z_3=1$$

$$y_3=-\frac{\sqrt{8}}{2}$$

$$r_3\rightarrow\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ -\frac{\sqrt{8}}{2}\\1\end{pmatrix}$$

۴ـ۶ـ۲۲ـ

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

حل

$$\det(A-\lambda 1)=0\Rightarrow\begin{vmatrix}-\lambda&1&0\\1&-\lambda&1\\0&1&-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$-\lambda(\lambda^{۲}-۱)+\lambda=۰ \Rightarrow \lambda\left[۱-\lambda^{۲}+۱\right]=۰ \Rightarrow \begin{cases}\lambda=۰\\ \lambda=\pm\sqrt{۲}\end{cases}$$

$$\lambda_{۱}=۰ \Rightarrow \begin{bmatrix}۰ & ۱ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{۱}\\ y_{۱}\\ z_{۱}\end{bmatrix}=۰$$

$$\begin{cases}y_{۱}=۰\\ x_{۱}+z_{۱}=۰\\ y_{۱}=۰\end{cases} \Rightarrow x_{۱}=-z_{۱}=۱ \rightarrow r_{۱}\rightarrow\frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{bmatrix}۱\\ ۰\\ -۱\end{bmatrix}$$

$$\lambda_{۲}=\sqrt{۲} \rightarrow \begin{bmatrix}-\sqrt{۲} & ۱ & ۰\\ ۱ & -\sqrt{۲} & ۱\\ ۰ & ۱ & -\sqrt{۲}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{۲}\\ y_{۲}\\ z_{۲}\end{bmatrix}=۰$$

$$\left.\begin{cases}-\sqrt{۲}x_{۲}+y_{۲}=۰\\ x_{۲}-\sqrt{۲}y_{۲}+z_{۲}=۰\\ y_{۲}-\sqrt{۲}z_{۲}\end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{matrix}x_{۲}=z_{۲}=۱\\ y_{۲}=\sqrt{۲}\end{matrix} \qquad r_{۲}\rightarrow\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۱\\ \sqrt{۲}\\ ۱\end{bmatrix}$$

$$\lambda_{۳}=-\sqrt{۲} \rightarrow \begin{bmatrix}\sqrt{۲} & ۱ & ۰\\ ۱ & \sqrt{۲} & ۱\\ ۰ & ۱ & \sqrt{۲}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{۳}\\ y_{۳}\\ z_{۳}\end{bmatrix}=۰$$

$$\left.\begin{cases}\sqrt{۲}x_{۳}+y_{۳}=۰\\ x_{۳}+\sqrt{۲}y_{۳}+z_{۳}=۰\\ y_{۳}+\sqrt{۲}z_{۳}=۰\end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{matrix}x_{۳}=z_{۳}=۱\\ y_{۳}=-\sqrt{۲}\end{matrix} \qquad r_{۳}\rightarrow\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۱\\ -\sqrt{۲}\\ ۱\end{bmatrix}$$

۲-۶-۲۷-

$$A=\begin{bmatrix}۵ & ۰ & ۲\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۲ & ۰ & ۲\end{bmatrix}$$

حل

$$\det(A-\lambda 1)=۰ \Rightarrow \begin{vmatrix}۵-\lambda & ۰ & ۲\\ ۰ & ۱-\lambda & ۰\\ ۲ & ۰ & ۲-\lambda\end{vmatrix}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$(5-\lambda)\left[(1-\lambda)(2-\lambda)\right]-2\left[2(1-\lambda)\right]=0 \Rightarrow$$

$$(1-\lambda)\left[(5-\lambda)(2-\lambda)-4\right]=0 \Rightarrow (1-\lambda)\left[10-7\lambda+\lambda^2-4\right]=0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(\lambda^2-7\lambda+6)=0 \Rightarrow \begin{cases}\lambda=1\\ \lambda=6\\ \lambda=1\end{cases}$$

$$\lambda_1=1 \rightarrow \begin{pmatrix}4 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{cases}4x_1+2z_1=0\\ 2x_1+z_1=0\end{cases} \rightarrow \begin{matrix}2x_1=-z_1=2\\ y_1=1\end{matrix} \qquad r_1 \rightarrow \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$$

$$\lambda_2=6 \rightarrow \begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & -5 & 0\\ 2 & 0 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\\ z_2\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{cases}-x_2+2z_2=0 \Rightarrow x_2=2z_2=2\\ -5y_2=0 \qquad y_2=0\\ 2x_2-4z_2=0\end{cases} \qquad r_2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

۴ـ۶ـ۳۰ (الف) ویژه مقدارها و ویژه بردارهای ماتریس زیر را تعیین کنید.

$$\begin{pmatrix}1 & \varepsilon\\ \varepsilon & 1\end{pmatrix}$$

توجه کنید که ویژه مقدارها به ازای $\varepsilon=0$ واگن اندولی ویژه بردارها به ازای همهٔ $\varepsilon\neq 0$ و $\varepsilon\to 0$ متعامدند. (ب) ویژه مقدارها و ویژه بردارهای ماتریس زیر را تعیین کنید.

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ \varepsilon^2 & 1\end{pmatrix}$$

توجه کنید که ویژه مقدارها به ازای $\varepsilon=0$ واگن‌اند و ویژه بردارهای این ماتریس (نامتقارن) (به ازای $\varepsilon=0$) فضا را نمی‌تنند.

حل

(الف) $A=\begin{pmatrix}1 & \varepsilon\\ \varepsilon & 1\end{pmatrix}$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikClass

$$\det(A-\lambda 1)=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}1-\lambda & \varepsilon\\ \varepsilon & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(1-\lambda)^2-\varepsilon^2=0 \Rightarrow 1-\lambda=\pm\varepsilon \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1=1-\varepsilon\\ \lambda_2=1+\varepsilon\end{cases}$$

مشاهده می‌شود اگر $\varepsilon=0$ باشد داریم $\lambda_1=\lambda_2$ پس واگنی (تبهگنی) داریم

(الف) $\lambda_1=1-\varepsilon \rightarrow \begin{pmatrix}\varepsilon & \varepsilon\\ \varepsilon & \varepsilon\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\end{pmatrix}=0$

$$\varepsilon a_1+\varepsilon b_1=0 \Rightarrow a_1=-b_1=1$$

$$r_1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

$$\lambda_2=1+\varepsilon \Rightarrow \begin{pmatrix}-\varepsilon & \varepsilon\\ \varepsilon & -\varepsilon\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_2\\ b_2\end{pmatrix}=0$$

$$-\varepsilon a_2+\varepsilon b_2=0 \Rightarrow a_2=b_2=1$$

$$r_2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

(ب) $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \varepsilon^2 & 1\end{pmatrix}$

$$\det(B-\lambda 1)=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ \varepsilon^2 & -\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2-\varepsilon^2=0 \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1=\varepsilon\\ \lambda_2=-\varepsilon\end{cases}$$

به ازای $\varepsilon=0$ واگنی داریم $\lambda_1=\lambda_2=0$.

$$\lambda_1=\varepsilon \rightarrow \begin{pmatrix}-\varepsilon & 1\\ \varepsilon^2 & -\varepsilon\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{cases}-a_1\varepsilon+b_1=0 \rightarrow \varepsilon a_1=b_1=\varepsilon\\ a\varepsilon^2-\varepsilon b_1=0\end{cases} \qquad r_1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2+1}}\begin{pmatrix}1\\ \varepsilon\end{pmatrix}$$

$$\lambda_2=-\varepsilon \rightarrow \begin{pmatrix}\varepsilon & 1\\ \varepsilon^2 & \varepsilon\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_2\\ b_2\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{cases}a_2\varepsilon+b_2=0 \rightarrow \varepsilon a_2=-b_2=\varepsilon\\ a_2\varepsilon^2+b_2\varepsilon=0\end{cases} \qquad r_2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2+1}}\begin{pmatrix}1\\ -\varepsilon\end{pmatrix}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

بخش ۴ـ۷ـ ویژه بردارها ـ ویژه مقدارها مسائل صفحه ۳۲۰

۴ـ۷ـ۱ـ نشان دهید که هر ماتریس ۲×۲ دو ویژه بردار و دو ویژه مقدار متناظر دارد. ویژه بردارها لزوماً متعامد نیستند. ویژه مقدارها نیز لزوماً حقیقی نیستند.

حل

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \det=(A-\lambda 1)=0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow$$

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)-a_{12}a_{21}=0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$$

$$\lambda=\frac{(a_{11}+a_{22})\pm\sqrt{(a_{11}+a_{22})^2-4(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})}}{2}$$

که λ_1 و λ_2 دو ویژه مقدار حاصل خواهد شد و متناظر آن دو ویژه بردار داریم و لزوماً نه ویژه بردارها متعامدند و نه ویژه مقادیر حقیقی‌اند.

۴ـ۷ـ۲ـ برای تجسم مسئله ۴-۷-۱ ویژه مقدارها و ویژه بردارهای متناظر را برای ماتریس زیر بدست آورید.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

توجه کنید که ویژه بردارها متعامد نیستند.

حل

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ,\det:(A-\lambda 1)=0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad (2-\lambda)^2-4=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1=0 \\ \lambda_2=4 \end{cases}$$

$$\lambda_1=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}=0$$

$$\begin{cases} 2a_1+4b_1=0 \\ a_1+2b_1=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a_1=-2b_1=2 \qquad r_1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2=4 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}=0$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\begin{cases} -2a_2+4b_2=0 \\ a_2-2b_2=0 \end{cases} \Rightarrow a_2=2b_2=2 \qquad r_2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

۴ـ۷ـ۳ـ نشان دهید که در ماتریس دو دردوی A ویژه مقدارهای λ در معادلهٔ زیر صدق می‌کنند.

$$\lambda^2-\lambda Tr(A)+det(A)=0$$

حل

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad , \quad Tr(A)=a_{11}+a_{22} \quad (3)$$

$$det(A)=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \quad (2)$$

$$|A-\lambda 1|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)-a_{12}a_{21}=0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0 \quad (1)$$

$$(1),(2),(3) \Rightarrow \lambda^2-Tr(A)\lambda+detA=0$$

۴ـ۷ـ۴ـ فرض کنید ماتریس یکانی U در معادلهٔ ویژه مقداری $Ur=\lambda r$ صدق کند نشان دهید که بزرگی ویژه مقدارهای این ماتریس یکانی برابر یک است. همین قضیه دربارهٔ ماتریسهای متعامد حقیقی صادق است.

حل

$$Ur_i=\lambda_i r_i \Rightarrow r_i^+U^+=\lambda_i^* r_i^+$$

$$r_i^+U^+Ur_i=\lambda_i\lambda_i^* r_i^+r_i \Rightarrow \lambda_i\lambda_i^*=1 \Rightarrow |\lambda_i|=1$$

۴ـ۷ـ۷ـ ماتریس خاصی را در نظر بگیرید که هم یکانی و هم هرمیتی باشد نشان دهید که ویژه مقدارهای آن جملگی ± 1 هستند.

[یادآوری: ماتریسهای پاؤلی و دیراک انواع خاصی از این ماتریسها هستند.]

حل

$$A^2=1 \quad , \quad Ar=\lambda r \Rightarrow A^2r=\lambda Ar$$

$$1r=\lambda(\lambda r)=\lambda^2 r \Rightarrow \lambda^2=1 \Rightarrow \lambda=\pm 1$$

۴ـ۷ـ۱۱ـ ویژه مقدارهای ماتریس غیر هرمیتی A عبارت‌اند از λ_i و ویژه بردارهای متناظر آنها عبارت‌اند از: $|u_i>$. ماتریس الحاقی A^+ نیز دارای همین مجموعه از ویژه مقدارهاست ولی ویژه بردارهای متناظر $|v_i>$ آن متفاوت است. نشان دهید این ویژه بردارها یک مجموعه متعامد دوگانه می‌سازند به این معنا که

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

به ازای $\lambda_i^* \neq \lambda_j$ $\quad <v_i \mid u_j> = 0$

حل

$$v_i^+ (Au_j = \lambda_j u_j) \quad , \quad u_j (A^+ v_i = \lambda_i v_i) \quad \Rightarrow$$

$$v_i^+ A u_j = \lambda_i^* u_i^+ u_j = \lambda_j v_i^+ u_j$$

$$(\lambda_i^* - \lambda_j) v_i^+ u_j = 0 \quad \Rightarrow \quad v_i^+ u_j = 0$$

به ازای $\lambda_i^* \neq \lambda_j$

۴ـ۷ـ۱۶ـ در ادامهٔ مسئله ۴-۵-۱۲ که در آن ماتریس یکانی U و ماتریس هرمیتی H به کمک رابطهٔ زیر به هم مربوط شدند.

$$U = e^{iaH}$$

(الف) اگر $TrH = 0$ نشان دهید که $detU = +1$ (ب) اگر $detU = +1$ نشان دهید که $TrH = 0$.

[راهنمایی: H را می‌توان به کمک یک تبدیل تشابهی قطری کرد در نتیجه با بسط تابع نمایی بصورت سری مکلورن، دیده می‌شود که U نیز قطری می‌شود. ویژه مقدارهای متناظر توسط $u_j = \exp(iah_j)$ داده می‌شوند.]

[یادآوری: این خواص و خواصی در مسئله ۴-۵-۱۲ بدست آمدند در ارائه مفهوم مولدها در نظریهٔ گروهها، بخش ۴-۱۱ اهمیت به سزایی دارند.]

حل

(الف) $$u = e^{iaH} = \sum \frac{(iaH)^n}{n!} = 1 + iaH - \frac{a^2}{2!} H^2 + \ldots$$

$$Ur = r + a\lambda r - \frac{a^2}{2!}\lambda^2 r + \ldots = \left(1 + ia\lambda - \frac{a^2}{2!}\lambda^2 + \ldots\right) r = (e^{ia\lambda}) r$$

$$det(U) = e^{ia\lambda_1} e^{ia\lambda_2} e^{ia\lambda_3} = e^{ia\sum_{k=1} \lambda_k} = e^{iaTrH}$$

$$= e^0 = 1 \quad \Rightarrow \boxed{det(U) = 1}$$

۴ـ۷ـ۱۸ـ ماتریس P عملگر تصویر است که در رابطهٔ زیر صدق می‌کند.

$$P^2 = P$$

نشان دهید که ویژه مقدارهای متناظر $(\rho^2)_\lambda$ و ρ_λ در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند.

$$(\rho^2)_\lambda = (\rho_\lambda)^2 = \rho_\lambda$$

این تساوی به آن معناست که ویژه مقدارهای P عبارتند از صفر و یک.

حل

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$P^{۲}=P \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P^{۲}(\rho^{۲})_{\lambda}=\lambda(\rho^{۲})_{\lambda} \Rightarrow P(\rho^{۲})_{\lambda}=\lambda(\rho^{۲})_{\lambda} & (۱) \\ P(\rho)_{\lambda}=\lambda(\rho)_{\lambda} & (۲) \end{cases}$$

$$(۱),(۲) \quad \Rightarrow \quad (\rho^{۲})_{\lambda}=(\rho)_{\lambda}$$

$$P\rho_{\lambda}=\lambda\rho_{\lambda} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} P^{۲}(\rho_{\lambda})^{۲}=\lambda^{۲}(\rho_{\lambda})^{۲}=\lambda P\rho_{\lambda}$$

$$P(\rho_{\lambda})^{۲}=\lambda\rho_{\lambda} \quad \Rightarrow \quad (\rho_{\lambda})^{۲}=\rho_{\lambda}$$

$$(\lambda^{۲}-\lambda)\rho_{\lambda}=۰ \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda=۰ \\ \lambda=۱ \end{cases}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

بخش ۵ـ۱ـ مفاهیم بنیادی — مسائل صفحه ۳۸۲

۵ـ۱ـ۱ـ نشان دهید

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}$$

[راهنمایی: به کمک استقرای ریاضی نشان دهید: $S_m=\frac{m}{(2m+1)}$]

حل

$$n=1 \Rightarrow S_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2\times1-1)(2\times1+1)}=\frac{1}{3}$$

فرض: $n=m \Rightarrow S_m=\frac{m}{2m+1}$

حکم: $n=m+1 \Rightarrow S_{m+1}=\frac{m+1}{2(m+1)+1}$

$$S_{m+1}=S_m+a_{m+1}=\frac{m}{2m+1}+\frac{1}{\left[2(m+1)-1\right]\left[2(m+1)+1\right]}$$

$$=\frac{m}{2m+1}+\frac{1}{(2m+1)(2m+3)}=\frac{m+1}{2(m+1)+1}$$

۵ـ۱ـ۲ـ نشان دهید

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$$

مجموعه‌های جزئی S_m را بیابید و درستی آن را به کمک استقرای ریاضی تحقیق کنید.

[یادآوری: روش بسط برحسب کسرهای جزئی، بخش ۱۵-۸ راه دیگری برای حل مسئله‌های ۵-۱-۱ و ۵-۱-۲ است.]

راه اول

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

راه دوم

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1} \quad (1)$$

$$n+1=n' \rightarrow n=n'-1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\sum_{n'-1=1}^{\infty}\frac{1}{n'}=\sum_{n'=2}^{\infty}\frac{1}{n'}=\sum_{n'=1}^{\infty}\frac{1}{n'}-1\Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-1 \quad (2)$$

مقدار بدست آمده را در رابطه (۱) قرار می‌دهیم

$$(2)\text{in}(1) \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-1\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\frac{1}{n}+1=1$$

بخش ۵ـ۲ـ آزمونهای همگرایی — مسائل صفحه ۳۹۴

۵ـ۲ـ۱ـ (الف) ثابت کنید که هرگاه

$$\lim_{n\to\infty} n^p u_n \rightarrow A<\infty \qquad P>1$$

آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ همگراست. (ب) ثابت کنید که اگر

$$\lim_{n\to\infty} nu_n = A>0$$

آنگاه سری واگراست (این آزمون به ازای $A=0$ جواب نمی‌دهد). این دو آزمون که به آزمونهای حدی معروف‌اند. اغلب برای اثبات همگرایی یا واگرایی سریها بکار می‌آیند. این آزمونها را می‌توان مانند آزمونهای مقایسه‌ای دانست که آنها را با سری $1\le q<p$ و $\sum n^{-q}$ مقایسه می‌کند.

حل

$$\lim_{n\to\infty} n^p u_n \rightarrow A \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n \rightarrow \frac{A}{n^p}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{n} u_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A}{n^p}=A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

این سری برای $P>1$ همگراست پس هر مضرب A از آن (یعنی $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$) نیز یک سری همگراست (A یک عدد حقیقی محدود)

(ب) $\lim_{n\to\infty} nu_n = A \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n=\frac{A}{n}$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{n} u_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{n}\frac{A}{n} = \frac{A}{n} = A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

این سری یک سری واگراست پس هر مضربی از آن نیز یک سری واگراست یعنی $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ واگراست.

۵ـ۲ـ۲ـ اگر $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = K$

حل مقداری ثابت باشد و $0<K<\infty$ نشان دهید که همگرایی و واگرایی Σb_n با Σa_n شبیه است.

از آزمون همگرایی آزمون مقایسهٔ حد اگر به ازای $n>n_0$ $b_n>0$ یک سری همگرا مانند Σa_n موجود باشد بطوریکه $a_n>0$ و $\lim\frac{b_n}{a_n}<\infty$ آنگاه Σb_n همگرا می‌شود این نتیجه از این امر ناشی می‌گردد اگر اندیسی مانند $N\geq n_0$ و ثابتی چون M موجوداند بطوریکه وقتی $n>N$ و $b_n<Ma_n$ و ΣMa_n همگراست.

در مورد واگرایی هرگاه به ازای $n>n_0$ و $b_n>0$ و یک سری واگرا مانند Σa_n موجود باشد بطوریکه $a_n>0$ و $\lim\frac{b_n}{a_n}>0$ آنگاه Σb_n واگرا می‌باشد و این نتیجه بصورتی است که اگر اندیسی چون $N'\geq n_0$ و ثابتی مثل $P>0$ موجوداند بطوریکه به ازای $n\geq N'$، $b_n>Pa_n$ و ΣPa_n واگراست.

۵ـ۲ـ۳ـ با نشان دادن این نکته که برای هر دو سری زیر $P=1$، ابهام موجود در آزمون را به ازای $P=1$ را نشان دهید.

(الف) $u_n = \frac{1}{n\mathrm{Ln}n}$ و این سری واگراست.

(ب) $u_n = \frac{1}{n(\mathrm{Ln}n)^2}$ و این سری همگراست.

[یادآوری: با جمع زدن مستقیم می‌رسیم به: $\sum_{2}^{100000}\left[n(\mathrm{Ln}n)^2\right]^{-1} = 2/022888$ با استفاده از آزمون مقایسهٔ انتگرال پی می‌بریم که باقیماندهٔ سری به ازای $n>10^5$ برابر است با ۰/۰۸۶۸۶ یعنی مجموع از ۲ تا 10^5 برابر است با

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikClass

حل

(الف) $u_n=\frac{1}{nLnn} \Rightarrow \int_2^{\infty}\frac{dx}{xLnx}=\int_2^{\infty}\frac{\frac{dx}{x}}{Lnx}=\int_2^{\infty}\frac{du}{u}=Lnu\Big|_{u=Lnx}$

$$=Ln(Lnx)\Big|_2^{\infty}=Ln(Ln\infty-Ln2)=Ln(Ln\infty)=Ln(\infty)=\infty$$

اگر حد پائین انتگرال را از یک شروع کنیم داریم $Ln1=0$ که باز هم به جواب واگرا بودن می‌رسیم.

(ب) $u_n=\frac{1}{n(Lnn)^2} \Rightarrow \int_2^{\infty}\frac{dx}{x(Lnx)^2}=\int_2^{\infty}\frac{\frac{dx}{x}}{(Lnx)^2}=\int_2^{\infty}\frac{du}{u^2}$

$$=\frac{-1}{u}\Big|_{u=Lnx}=\frac{-1}{Lnx}\Big|_2^{\infty}=\frac{-1}{\infty}+\frac{1}{Ln2}=\frac{1}{Ln2}$$

سری همگراست.

۵-۲-۵ آزمون گاوس اغلب به صورت آزمون نسبت به زیر است:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{n^2+a_1n+a_0}{n^2+b_1n+b_0}$$

به ازای چه مقادیری از پارامترهای a_1 و b_1 همگرایی و به ازای چه مقادیری واگرایی داریم؟

حل

$$\begin{array}{l|l} n^2+a_1n+a_0 & n^2+b_1n+b_0 \\ \hline \mp n^2 \mp b_1n \mp b_0 & 1+\frac{(a_1-b_1)}{n}+\frac{(a_0-b_0)}{n^2} \\ \hline (a_1-b_1)n+a_0-b_0 & \end{array}$$

$$\mp(a_1-b_1)n \mp (a_1-b_1)b_1 \mp (a_1-b_1)\frac{b_0}{n}$$

$$(a_0-b_0)-(a_1-b_1)b_1-(a_1-b_1)\frac{b_0}{n}$$

$$\mp(a_0-b_0) \mp \frac{(a_0-b_0)b_1}{n} \mp \frac{(a_0-b_0)}{n^2}b_0$$

$$-(a_1-b_1)(b_1+\frac{b_0}{n})-\frac{(a_0-b_0)}{n}(b_1+\frac{b_0}{n})=(b_1+\frac{b_0}{n})(\frac{b_0-a_0}{n}+b_1-a_1)$$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=1+(\frac{a_1-b_1}{n})+(\frac{a_0-b_0}{n^2})\equiv 1+\frac{h}{n}+\frac{B(n)}{n^2}$$

IF $h>1$ همگرایی $a_1-b_1>0$ و $a_0-b_0>0$

PhysicsGlass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

IF $h \le 1$ واگرایی $a_1 - b_1 \le 1 \rightarrow a_1 \le 1 + b_1$

۵ـ۲ـ۶ همگرایی سریهای زیر را بیازمایید.

(الف) $\sum_{n=2}^{\infty} (\mathrm{Ln}n)^{-1}$ (د) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[n(n+1)\right]^{-\frac{1}{2}}$

(ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$ (ه) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$

(ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n-1)}$

حل (ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$ آزمون نسبت $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}}{\frac{n!}{10^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{10} \rightarrow \infty$ همگرا نیست

(ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n-1)}$ آزمون جمله nام $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n^2-2n} \rightarrow 0$ همگراست

(یا) $\sum \frac{1}{4n^2}$ همگراست $\Rightarrow$ $\frac{1}{4n^2-2n}$ همگراست

(ه) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \int_0^{\infty} \frac{dx}{2x+1} = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}(2x+1)\Big|_0^{\infty} = \infty$

واگراست.

۵ـ۲ـ۷ همگرایی سریهای زیر را بیازمایید.

(الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (د) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Ln}(1+\frac{1}{n})$

(ب) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\mathrm{Ln}n}$ (ه) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.n^{\frac{1}{n}}}$

(ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$

حل (الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ آزمون جمله nام $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+n} = 0$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

همگراست

در مسئله ۵-۲-۴- بطور کامل حل شد ← (ب)

(ج) $\frac{1}{n.2^n}$ آزمون نسبت: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{1}{n2^n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)}=\frac{1}{2}$$

همگراست.

بخش ۵-۴-جبر سریها — مسائل صفحه ۴۰۷

۵-۴-۱- سری زیر را در نظر بگیرید (این سری در بخش ۵-۶ مطرح می‌شود)

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ \ldots\ -1<x\le 1$$

نشان دهید

(الف) $\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots\ -1\le x<1$

(ب) $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right)\ -1<x<1$

در بررسی انرژی بستگی در بلورها به سری اصلی $\ln(1+x)$ بر می‌خوریم. این سری $\frac{1}{2}$ ثابت مادلونگ، $(2\ln 2)$، برای زنجیری از اتمهاست. سری دوم (ب) در بهنجارش چند جمله‌ایهای لژاندر (بخش ۱۲-۳) و در روند استخراج جواب دوم معادلهٔ دیفرانسیل لژاندر (بخش ۱۲-۱۰) مفید واقع می‌شود.

حل

(الف) $\ln(1-x)=\ln(1+(-x))$

$$(-x)-\frac{(-x)^2}{2}+\frac{(-x)^3}{3}-\frac{(-x)^4}{4}+\ldots=$$

$$-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots\quad\Rightarrow$$

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots\ -1\le x<1$$

(ب) $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\ln(1+x)-\ln(1-x)\quad\Rightarrow$

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\ldots-\left[-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots\right]$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikClass

$$\mathrm{Ln}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2x+\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}+\dots$$

$$\mathrm{Ln}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots\right)\qquad -1<x<1$$

بخش ۵ـ۶ـ بسط تایلور — مسائل صفحه ۴۲۲

۵ـ۶ـ۱ـ نشان دهید

(الف)
$$\mathrm{Sin}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(ب)
$$\mathrm{Cos}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

e^{ix} در بخش ۶-۱ به کمک یک بسط سری تعریف می‌شود به گونه‌ای که

$$e^{ix}=\mathrm{Cos}x+i\mathrm{Sin}x$$

این اتحاد اساس نمایش قطبی کمیتهای مختلط است. به عنوان یک مثال خاص، به ازای $x=\pi$ پیدا می‌کنیم. $e^{i\pi}=-1$

حل

(الف) $f(x)=\mathrm{Sin}x \Rightarrow f'(x)=\mathrm{Cos}x \Rightarrow f''(x)=-\mathrm{Sin}x \Rightarrow f'''(x)=-\mathrm{Cos}x$

$f(0)=0\ ,\ f'(0)=1\ ,\ f''(0)=0\ ,\ f'''(0)=-1$

$$\mathrm{Sin}x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\Rightarrow$$

$$\mathrm{Sin}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(ب) $f(x)=\mathrm{Cos}x \Rightarrow f'(x)=-\mathrm{Sin}x \Rightarrow f''(x)=-\mathrm{Cos}x \Rightarrow f'''(x)=\mathrm{Sin}x$

$f(0)=1\ ,\ f'(0)=0\ ,\ f''(0)=-1\ ,\ f'''(0)=0$

$$\mathrm{Cos}x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\Rightarrow$$

$$\mathrm{Cos}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

۵-۶-۲- بسط Cotx را با تقسیم Cosx بر Sinx به صورت یک سری از توانهای صعودی x بسط دهید:

[یادآوری: سری حاصل که از $\frac{1}{x}$ شروع می‌شود درواقع یک سری لوران است (بخش ۶-۵) با آنکه دو سری مربوط به Sinx و Cosx به ازای همهٔ xها برقرارند ولی همگرایی سری مربوط به Cotx را صفرهای Sinx در مخرج محدود می‌کنند.]

حل

$$\mathrm{Cotx}=\frac{1}{x}-\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}-\frac{2x^5}{945}-\dots-2^{2n}$$

۵-۶-۳- (الف) $(1+x)\mathrm{Ln}(1+x)$ را به صورت یک سری مکلورن بسط دهید با بررسی همگرایی، حدود x را بیابید.

(ب) با استفاده از نتایج (الف) نشان دهید

$$\mathrm{Ln}2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$$

حل

(الف)

$$f(x)=(1+x)\mathrm{Ln}(1+x)\Rightarrow f'(x)=(1+x)\frac{1}{(1+x)}+\mathrm{Ln}(1+x)=1+\mathrm{Ln}(1+x)$$

$$f''(x)=\frac{1}{1+x}\Rightarrow f'''(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}$$

$$f(0)=0\quad,\quad f'(0)=1\quad,\quad f''(0)=1\quad,\quad f'''(0)=-1$$

$$(1+x)\mathrm{Ln}(1+x)=x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\dots\frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)}\Rightarrow$$

$$(1+x)\mathrm{Ln}(1+x)=x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n(n-1)}$$

(ب) $\mathrm{Ln}2\Rightarrow 1+x=2\Rightarrow x=1$

$$2\mathrm{Ln}2=1+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1^n}{n(n-1)}=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}$$

$$\mathrm{Ln}2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}$$

۵-۶-۵- نشان دهید که $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ (الف) بسط مکلورن ندارد ولی (ب) حول هر نقطهٔ $x_0\neq 0$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

یک بسط تایلور دارد.

حل (الف) $f(x)=x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$

$$\Rightarrow \quad f'''(x)=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$$

$$f(0)=0 \quad , \quad f'(0)=\infty \quad , \quad f''(0)=\infty$$

پس دیده می‌شود بسط مکلورن نداریم.

(ب) $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$

$$f(x)=x_0^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x_0^{-\frac{1}{2}}(x-x_0)-\frac{\frac{1}{4}x_0^{-\frac{3}{2}}}{2!}(x-x_0)^2+\dots$$

۵ـ۶ـ۹ـ نسبت دو تابع مشتق‌پذیر $f(x)$ و $g(x)$ در $x=x_0$ به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ در می‌آید با استفاده از بسط تایلور، قاعدهٔ هوپیتال را به صورت زیر اثبات کنید.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

حل فرض می‌کنیم توابع f و g هر دو بسطهایی بصورت سری توانی از $(x-x_0)$ داشته باشند.

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots$$

$$g(x)=g(x_0)+g'(x_0)(x-x_0)+\frac{g''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots$$

که در بازه‌ای چون $|x-x_0|<\delta$ همگرا باشند.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)}{g(x_0)+g'(x_0)(x-x_0)}$$

$$=\frac{f'(x_0)(x-x_0)}{g'(x_0)(x-x_0)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

۵ـ۶ـ۱۱ـ عبارت $(1-2tz+t^2)^{-\frac{1}{2}}$ را برحسب توانهای t بسط دهید. t را کوچک بگیرید ضرایب t^0 و t^1 و t^2 را جمع بزنید.

حل $(1-2tz+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\left[1-t(2z-t)\right]^{-\frac{1}{2}}$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikClass

$$k=(2tz-t^2)$$

$$=1+\frac{1}{2}k+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}k^2+\dots$$

$$=1+\frac{1}{2}k+\frac{3}{8}k^2=1+\frac{1}{2}(2tz-t^2)+\frac{3}{8}(2tz-t^2)^2+\dots$$

$$=1+tz-\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{8}(4t^2z^2-4t^3z+t^4)+\dots$$

$$=1+tz-\frac{1}{2}t^2(1-3z^2)-\frac{3}{2}t^3z+\frac{3}{8}t^4+\dots$$

ضریب t^0 = ۱

ضریب t^1 = z

ضریب t^2 = $-\frac{1}{2}(1-3z^2)=\frac{1}{2}(3z^2-1)$

۵-۶-۱۲- با استفاده از نماد فاکتوریل دوگانه در بخش ۱۰-۱ نشان دهید که به ازای $m=1,2,3,\dots$ داریم

$$(1+x)^{-\frac{m}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^m\frac{(m+2n-2)!!}{2^n n!(m-2)!!}x^n$$

حل از بخش ۱۰-۱ داریم

$$\left.\begin{aligned}&1\times3\times5\times\dots\times(2n+1)=(2n+1)!!=\frac{(2n+1)!}{2^n n!}\\&2\times4\times6\times\dots\times(2n)=(2n)!!=2^n n!\end{aligned}\right\}$$

$$(1+x)^{-\frac{m}{2}}=1-\frac{m}{2}x+\frac{-\frac{m}{2}(-\frac{m}{2}-1)}{2!}x^2+\frac{-\frac{m}{2}(-\frac{m}{2}-1)(-\frac{m}{2}-2)}{3!}x^2+\dots$$

$$=1-\frac{m}{2}x+\frac{\frac{m}{2}(\frac{m}{2}+1)}{2!}x^2-\frac{\frac{m}{2}(\frac{m}{2}+1)(\frac{m}{2}+2)}{3!}x^3+\dots$$

$$=1-\frac{m}{2}x+\frac{m(m+2)}{2\times4}x^2-\frac{m(m+2)(m+4)}{2\times4\times6}x^3+\dots$$

اگر به صورت کسر دقت شود برای جمله مثلاً چهارم داریم $m(m+2)(m+4)$ یعنی می‌توان در حالت کلی بصورت $m(m+2)(m+4)(m+2n-2)$ نوشت چرا که تعداد پرانتزها یکی از تعداد جملات کمتر است و چون فاصله دو تا دو تا است پس بصورت $2n-2$ ظاهر می‌گردد و در کل طبق تعریف فاکتوریل دوگانه بصورت $(m+2n-2)!!$ ظاهر می‌گردد در مخرج نیز

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCafass

حاصلضرب اعداد زوج است. که بصورت $(2n)!!$ یا $2^n n!$ ظاهر می‌شود در کل داریم:

$$(1+x)^{-\frac{m}{2}} = 1 - \frac{m}{2}x + \frac{m(m+2)}{2\times 4}x^2 + \frac{m(m+2)(m+4)}{2\times 4\times 6}x^3 + \dots +$$

$$(-1)^n \frac{m(m+2)(m+4)\dots(m+2n-2)}{2\times 4\times 6\times\dots\times 2n}x^n \quad \Rightarrow$$

$$(1+x)^{-\frac{m}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(m+2n-2)!!}{2^n n!(m-2)!!}x^n$$

جمله $(m-2)!!$ که اضافه می‌شود برای از بین بردن فاکتوریلهای اضافی است ضمناً ظاهراً $(-1)^n$ باید صحیح باشد نه $(-1)^m$ چراکه علامت منفی با توجه به مرتبه جمله که چندم است با n مشخص می‌گردد که متغیر است نه m که ثابت می‌باشد.

ف ـ ۶ ـ ۱۳ ـ سه فرمول انتقال دوپلر به صورت زیر را با استفاده از بسط دو جمله‌ای، با یکدیگر مقایسه کنید.

(الف) چشمه متحرک $\nu' = \nu\left(1 \mp \frac{V}{C}\right)^{-1}$

(ب) ناظر متحرک $\nu' = \nu\left(1 \pm \frac{V}{C}\right)$

(ج) نسبیتی $\nu' = \nu\left(1 \pm \frac{V}{C}\right)\left(1 - \frac{V^2}{C^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

[یادآوری: اگر بتوان از جمله‌های از مرتبهٔ $\frac{V^2}{C^2}$ چشم پوشید فرمول نسبیتی با فرمولهای کلاسیکی سازگار می‌شود.]

حل

(الف) $\nu' = \nu\left(1 \mp \frac{V}{C}\right)^{-1} = \nu\left(1 \pm \frac{V}{C} + \frac{1\times 2}{2!}\frac{V^2}{C^2} + \dots\right)$

(ب) $\nu' = \nu\left(1 \pm \frac{V}{C}\right) = \nu\left(1 \pm \frac{V}{C}\right)$

(ج) $\nu' = \nu\left(1 \pm \frac{V}{C}\right)\left(1 - \frac{V^2}{C^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \nu\left(1 \pm \frac{V}{C}\right)\left[1 + \frac{V^2}{2C^2} + \frac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2!}\frac{V^2}{C^4} + \dots\right]$

اگر حالت کلاسیکی در نظر بگیریم از جملات $\frac{V^2}{C^2}$ به بعد صرفنظر شود پس داریم

(الف) $\nu' = \nu\left(1 \pm \frac{V}{C}\right)$

(ب) $\nu' = \nu\left(1 \pm \frac{V}{C}\right)$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

(ج) $\nu' = \nu(1 \pm \frac{V}{C})$

۵ـ۶ـ۱۲ـ در نظریهٔ نسبیت عام، روشهای متفاوتی را برای برقراری ارتباط (یا توصیف) سرعت پس‌روی یک کهکشان به انتقال سرخ آن، δ، بکار می‌گیرند. بنابر مدل میلنه (در نسبیت سینماتیکی).

(الف) $V_1 = C\delta\left(1 + \frac{1}{2}\delta\right)$

(ب) $V_2 = C\delta\left(1 + \frac{1}{2}\delta\right)(1+\delta)^{-2}$

(ج) $1+\delta = \left[\dfrac{1+\frac{V_3}{C}}{1-\frac{V_3}{C}}\right]^{\frac{1}{2}}$

۱ـ نشان دهید که به ازای $\delta << 1$ (, $\frac{V_3}{C} << 1$) این هر سه فرمول به $V = C\delta$ ساده می‌شوند.

۲ـ این سه سرعت را تا جمله هایی از مرتبهٔ δ^2 با هم مقایسه کنید.

[یادآوری: نسبت طول موج مشاهده شدهٔ λ به طول موج گسیل شده λ_0 در نظریهٔ نسبیت خاص (با نشاندن Z به جای δ) به قرار زیر است:

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = 1 + Z = \left(\frac{C+V}{C-V}\right)^{\frac{1}{2}}$$

حل ①

(الف) $V_1 = C\delta\left(1 + \frac{1}{2}\delta\right) = C\delta + \frac{C\delta^2}{2} = C\delta$

می‌توان از $C\frac{\delta^2}{2}$ بدلیل $\delta << 1$ صرفنظر کرد.

(ب) $V_2 = C\delta\left(1 + \frac{1}{2}\delta\right)(1+\delta)^{-2} = C\delta\left(1 + \frac{1}{2}\delta\right)(1 - 2\delta)$

$= C\delta - 2C\delta^2 + \frac{C\delta^2}{2} - C\delta^3$

از جملات δ^2 و مرتبه بالای آن می‌توان صرفنظر کرد و داریم.

$V_2 = C\delta$

(ج) $1+\delta = \left[\dfrac{1+\frac{V_3}{C}}{1-\frac{V_3}{C}}\right]^{\frac{1}{2}} = \dfrac{\left(1+\frac{V_3}{C}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1-\frac{V_3}{C}\right)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

از جملات مرتبهٔ $\frac{V_3^2}{C^2}$ بدلیل $\frac{V_3}{C} << 1$ صفرفنظر شده است.

$$1+\delta = \frac{1+\frac{V_3}{2C}}{1-\frac{V_3}{2C}}$$

$$\Rightarrow \quad \delta = \frac{\frac{V_3}{C}}{1-\frac{V_3}{2C}} \quad \Rightarrow \quad \delta\left(1-\frac{V_3}{2C}\right) = \frac{V_3}{C}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{V_3}{C}\left(1+\frac{\delta}{2}\right) = \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{V_3}{C} = \frac{\delta}{1+\frac{\delta}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad V_3 = C\delta\left(1+\frac{\delta}{2}\right)^{-1} = C\delta\left(1-\frac{\delta}{2}\right) = C\delta - \frac{C\delta^2}{2}$$

از جملات δ^2 به بالا صرفنظر می‌شود بدلیل $\delta << 1$.

(۲)

$$V_3 = C\delta$$

(الف) $V_1 = C\delta + \frac{C\delta^2}{2}$

(ب) $V_2 = C\delta\left(1+\frac{1}{2}\delta\right)\left(1-2\delta+\frac{6}{2!}\delta^2\right) \quad \Rightarrow$

$$V_2 = \left(C\delta + \frac{C\delta^2}{2}\right)\left(1-2\delta+3\delta^2\right) \quad \Rightarrow$$

$$V_2 = C\delta - 2C\delta^2 + 3C\delta^3 + \frac{C\delta^2}{2} - C\delta^3 + \frac{3}{2}C\delta^4$$

$$V_2 = C\delta - \frac{3}{2}C\delta^2 + 2C\delta^3 + \ldots$$

(ج) $(1+\delta)^2 = \left(\frac{1+\frac{V_3}{C}}{1-\frac{V_3}{C}}\right) \quad \Rightarrow$

$$(1+\delta)^2\left(1-\frac{V_3}{C}\right) = 1+\frac{V_3}{C} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{V_3}{C}\left[2+\delta^2+2\delta\right] = \delta(\delta+2) \quad \Rightarrow$$

$$V_3 = \frac{C\delta(\delta+2)}{\delta^2+2\delta+2}$$

۵ـ۶ـ۱۵ـ مجموع نسبیتی دو سرعت v_1 و v_2 از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\frac{W}{c}=\frac{\frac{u}{c}+\frac{v}{c}}{1+\frac{uv}{c^2}}$$

اگر

$$\frac{v}{c}=\frac{u}{c}=1-\alpha$$

که در آن $0\le\alpha\le1$؛ $\frac{W}{c}$ را برحسب توانهای α تا جمله‌هایی از مرتبهٔ α^3 بدست آورید.

حل

$$\frac{W}{c}=\frac{\frac{u}{c}+\frac{v}{c}}{1+\frac{uv}{c^2}}=\frac{1-\alpha+1-\alpha}{1+(1-\alpha)^2}=\frac{2-2\alpha}{1+\alpha^2-2\alpha+1}$$

$$\frac{W}{c}=\frac{2(1-\alpha)}{\alpha^2-2\alpha+2}=2(1-\alpha)(\alpha^2-2\alpha+2)^{-1}\Rightarrow$$

$$\frac{W}{c}=2(1-\alpha)\left[\alpha^2-(2\alpha-2)+\frac{1\times2}{2!}(2\alpha-2)^2-\frac{6}{3!}(2\alpha-2)^3+\dots\right]$$

$$\frac{W}{c}=2(1-\alpha)\left[\alpha^2-(2\alpha-2)+(2\alpha-2)^2-(2\alpha-2)^3\right]$$

$$\frac{W}{c}=2(1-\alpha)\left[-8\alpha^3+17\alpha^2-18\alpha+14\right]$$

$$\frac{W}{c}=28-64\alpha+70\alpha^2-50\alpha^3+16\alpha^4+\dots$$

۵ـ۶ـ۱۶ـ x جابه‌جایی ذره‌ای با جرم سکون m_0 در اثر نیروی ثابت m_0g در امتداد محور x با در نظر گرفتن آثار نسبیتی، عبارت است از:

$$x=\frac{c^2}{g}\left\{\left[1+\left(g\frac{t}{c}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}-1\right\}$$

جابه‌جایی x را به صورت یک سری توانی برحسب زمان t به دست آورید. نتیجه‌ای را که به دست می‌آورید، با نتیجهٔ کلاسیکی زیر مقایسه کنید.

$$x=\frac{1}{2}gt^2$$

حل

$$x=\frac{c^2}{g}\left\{\left[1+\left(g\frac{t}{c}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}-1\right\}$$

$$=\frac{c^2}{g}\left\{\left[1+\frac{1}{2}\left(g\frac{t}{c}\right)^2+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}g^4\left(\frac{t}{c}\right)^4+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}\left(g\frac{t}{c}\right)^6+\dots\right]-1\right\}$$

$$x=\frac{c^2}{g}\left[\frac{1}{2}\left(g\frac{t}{c}\right)^2-\frac{1}{8}\left(g\frac{t}{c}\right)^4+\frac{1}{16}\left(g\frac{t}{c}\right)^6-\dots\right]$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$x = \frac{gt^{۲}}{۲} - \frac{g^{۳}t^{۴}}{۸c^{۲}} + \frac{g^{۵}t^{۶}}{۱۶c^{۴}} - \dots$$

دیده می‌شود نتیجه فوق در صورتیکه از جملات $t^{۴}$ به بالا صرفنظر شود به حالت کلاسیکی می‌انجامد.

$$\boxed{x = \frac{۱}{۲} gt^{۲}}$$

بخش ۵ـ۷ـسری توانی — مسائل صفحه ۴۳۳

۵ـ۷ـ۲ـ ضریب و اقطبیدگی L برای یک بیضیوار پخت در میدان الکتریکی یکنواخت موازی با محور چرخش، عبارت است از:

$$L = \frac{۱}{\varepsilon_{\circ}}(۱+\xi_{\circ}^{۲})(۱-\xi_{\circ}\,\mathrm{Cot}^{-۱}\xi_{\circ})$$

که $\xi_{\circ}$ در مختصات کره‌وار پخت (ξ, ζ, ϕ) معرف یک بیضیوار پخت است.

$$\lim_{\xi_{\circ}\to\infty} L = \frac{۱}{۳\varepsilon_{\circ}} \qquad \text{(کره)}$$

$$\lim_{\zeta\to\circ} L = \frac{۱}{\varepsilon_{\circ}} \qquad \text{(ورقه نازک)}$$

حل

$$L = \frac{۱}{\varepsilon_{\circ}}(۱+\xi_{\circ}^{۲})(۱-\xi_{\circ}\,\mathrm{Cotg}^{-۱}\xi_{\circ})$$

$$\mathrm{Cot}^{-۱}x = \frac{۱}{x} - \frac{۱}{۳x^{۳}} + \frac{۱}{۵x^{۵}} - \dots \qquad x > ۱$$

$$L = \frac{۱}{\varepsilon_{\circ}}(۱+\xi_{\circ}^{۲})\left[۱-\xi_{\circ}\left(\frac{۱}{\xi_{\circ}} - \frac{۱}{۳\xi_{\circ}^{۳}} + \frac{۱}{۵\xi_{\circ}^{۵}} - \dots\right)\right]$$

$$L = \frac{۱}{\varepsilon_{\circ}}(۱+\xi_{\circ}^{۲})\left(\frac{۱}{۳\xi_{\circ}^{۲}} - \frac{۱}{۵\xi_{\circ}^{۴}} + \dots\right)$$

$$L = \frac{۱}{\varepsilon_{\circ}}\left[\frac{۱}{۳\xi_{\circ}^{۲}} - \frac{۱}{۵\xi_{\circ}^{۴}} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۵\xi_{\circ}^{۲}} + \dots\right)$$

$$\lim_{\xi_{\circ}\to\infty} L = \frac{۱}{۳\varepsilon_{\circ}}$$

برای حالت $\xi_{\circ}\to\circ$ باید $\mathrm{Cot}^{-۱}$ را مجدداً بنویسیم.

$$\mathrm{Cot}^{-۱}x = \frac{\pi}{۲} - \left(x - \frac{x^{۳}}{۳} + \frac{x^{۵}}{۵} - \dots\right) \qquad |x| < ۱$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$L=\frac{1}{\varepsilon_0}(1+\xi_0^2)\left[1-\xi_0\left(\frac{\pi}{2}-\xi_0+\frac{\xi_0^3}{3}-\dots\right)\right]$$

$$L=\frac{1}{\varepsilon_0}(1+\xi_0^2)\left(1-\xi_0\frac{\pi}{2}+\xi_0^2-\frac{\xi_0^4}{3}+\dots\right)$$

$$\lim_{\xi_0\to 0} L=\frac{1}{\varepsilon_0}$$

۵-۷-۳- ضریب و اقطبیدگی متناظر (مسئله ۵-۷-۲) برای بیضیوار کشیده به قرار زیر است:

$$L=\frac{1}{\varepsilon_0}(\eta_0^2-1)\left(\frac{1}{2}\eta_0 \operatorname{Ln}\frac{\eta_0+1}{\eta_0-1}-1\right)$$

نشان دهید که

$$\lim_{\eta_0\to\infty} L=\frac{1}{3\varepsilon_0} \qquad \text{(کره)}$$

$$\lim_{\eta_0\to 1} L=0 \qquad \text{(سوزن دراز)}$$

حل از نتیجه مسئله ۵-۶-۵ داریم: $\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{\eta_0+1}{\eta_0-1}=\operatorname{Coth}^{-1}\eta_0\ ;\ |\eta_0|>1$

$$L=\frac{1}{\varepsilon_0}(\eta_0^2-1)(\eta_0\operatorname{Coth}^{-1}\eta_0-1)$$

$$\operatorname{Coth}^{-1}\eta_0=\frac{1}{\eta_0}+\frac{1}{3\eta_0^3}+\frac{1}{5\eta_0^5}+\dots$$

$$L=\frac{1}{\varepsilon_0}(\eta_0^2-1)\left[\eta_0\left(\frac{1}{\eta_0}+\frac{1}{3\eta_0^3}+\frac{1}{5\eta_0^5}+\dots\right)-1\right]$$

$$L=\frac{1}{\varepsilon_0}(\eta_0^2-1)\left(\frac{1}{3\eta_0^2}+\frac{1}{5\eta_0^4}+\dots\right)$$

$$L=\frac{1}{\varepsilon_0}\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{5\eta_0^2}-\frac{1}{3\eta_0^2}-\frac{1}{5\eta_0^4}+\dots\right]$$

$$\lim_{\eta_0\to\infty} L=\frac{1}{3\varepsilon_0}$$

و برای حالت $\eta_0\to 1$ چون $\operatorname{Coth}^{-1}\eta_0=0$ پس داریم

$$\lim_{\eta_0\to 1} L=0$$

۵-۷-۴- در بررسی نقشه پراش حاصل از یک گشودگی دایره‌ای به انتگرال زیر بر می‌خوریم.

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\int_{0}^{2\pi} \mathrm{Cos}(c\,\mathrm{Cos}\phi)\,d\phi$$

انتگرالده را به صورت یک سری بسط دهید و با استفاده از انتگرالهای زیر انتگرال بگیرید.

$$\int_{0}^{2\pi} \mathrm{Cos}^{2n}\phi\,d\phi = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times 2\pi$$

$$\int_{0}^{2\pi} \mathrm{Cos}^{2n+1}\phi\,d\phi = 0$$

حاصل برابر است با 2π ضربدر تابع بسل $J_0(c)$.

حل

$$\mathrm{Cos}x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\int_{0}^{2\pi} \mathrm{Cos}(c\,\mathrm{Cos}\phi)d\phi = \int_{0}^{2\pi} \left[1 - \frac{(c\,\mathrm{Cos}\phi)^2}{2!} + \frac{(c\,\mathrm{Cos}\phi)^4}{4!} - \frac{(c\,\mathrm{Cos}\phi)^6}{6!} + \dots\right] d\phi$$

$$= \int_{0}^{2\pi} d\phi - \int_{0}^{2\pi} \frac{c^2\mathrm{Cos}^2\phi}{2!}d\phi + \int_{0}^{2\pi} \frac{c^4\mathrm{Cos}^4\phi}{4!}d\phi - \dots$$

با استفاده از انتگرال اول هر کدام را بسط می‌دهیم.

$$= 2\pi - \left(\frac{c^2}{2!}\frac{2!}{2^2(1!)^2} \times 2\pi\right) + \left(\frac{c^4}{4!}\frac{4!}{2^4(2!)^2} \times 2\pi\right) - \dots$$

$$= 2\pi\left[1 - \frac{c^2}{2^2} + \frac{c^4}{2^4(2!)^2} - \frac{c^6}{2^6(3!)^2} + \dots\right]$$

$$= 2\pi\left[1 - \frac{c^2}{2^2} + \frac{c^4}{2^2.4^2} - \frac{c^6}{2^2.4^2.6^2} + \dots\right]$$

که داخل کروشه تعریف $J_0(c)$ می‌باشد پس داریم

$$\int_{0}^{2\pi} \mathrm{Cos}(c\,\mathrm{Cos}\phi)\,d\phi = 2\pi J_0(c)$$

۵ـ۷ـ۶ـ می‌دانیم که

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}x \Big|_{0}^{1} = \frac{\pi}{4}$$

انتگرالده را به صورت یک سری بسط دهید و از جمله به جملهٔ آن انتگرال بگیرید تا برسید به

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \dots$$

این فرمول لایب نیتس برای π است. همگرا بودن (پایانی بودن) آن از طریق سری انتگرالده و سری

Physicsclass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

انتگرالگیری شده در $x=1$ مقایسه کنید.

آهنگ همگرایی فرمول لایب نیتس چندان کند است که برای محاسبات عددی عملاً بی‌فایده است؛ π را با استفاده از عباراتی نظیر

$$\pi = 24\tan^{-1}\frac{1}{8} + 8\tan^{-1}\frac{1}{57} + 4\tan^{-1}\frac{1}{239}$$

$$\pi = 48\tan^{-1}\frac{1}{18} + 32\tan^{-1}\frac{1}{57} - 20\tan^{-1}\frac{1}{239}$$

تا ۱۰۰۰۰۰ رقم اعشار محاسبه کرده‌اند درستی عبارتهای بالا را می‌توان با استفاده از مسئله ۵-۶-۲ تحقیق کرد.

حل در حالت کلی داریم:

$$\tan^{-1}x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

از سری

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots$$

انتگرال می‌گیریم داریم:

$$(1) \quad \tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \qquad |x| \le 1$$

اگر در رابطه بالا قرار دهیم $\tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4}$ و $x=1$ فرمول لایب نیتس بدست می‌آید.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \dots$$

چون این سری خیلی کند همگراست. در تقریب π با ارقام اعشاری زیاد به کار نمی‌رود. سری $\tan^{-1}x$ به ازای xهای نزدیک صفر سریعتر همگراست. به این دلیل، افرادی که در محاسبهٔ π از سری $\tan^{-1}x$ استفاده می‌کنند اتحادهای مثلثاتی مختلف را بکار می‌گیرند.

مثلاً هرگاه

$$\beta = \tan^{-1}\frac{1}{3} \quad , \quad \alpha = \tan^{-1}\frac{1}{2}$$

آنگاه

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}} = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$$

و

$$\frac{\pi}{4} = \alpha + \beta = \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3}$$

حال از معادلهٔ (۱) به ازای $x=\frac{1}{2}$ می‌توان در محاسبهٔ $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ و به ازای $x=\frac{1}{3}$ در محاسبهٔ $\tan^{-1}\frac{1}{3}$ استفاده کرد. مجموع این دو مقدار π را به ما خواهد داد.

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

۵ـ۷ـ۷ـ تابع فاکتوریل ناکامل

$$\int_{0}^{x} e^{-t} t^{n} dt$$

را به ازای مقادیر کوچک x به صورت یک سری از توانهای x بسط دهید.

حل

$$e^{-t} = 1 - t + \frac{t^{2}}{2!} - \frac{t^{3}}{3!} + \dots$$

$$\int_{0}^{x} e^{-t} t^{n} dt = \int_{0}^{x} \left[1 - t + \frac{t^{2}}{2!} - \frac{t^{3}}{3!} + \dots \right] t^{n} dt$$

$$= \int_{0}^{x} t^{n} dt - \int_{0}^{x} t^{n+1} dt + \frac{1}{2!} \int_{0}^{x} t^{n+2} dt - \frac{1}{3!} \int_{0}^{x} t^{n+3} dt + \dots$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2} + \frac{x^{n+3}}{2!(n+3)} - \frac{x^{n+4}}{3!(n+4)} + \dots + \frac{(-1)^{m} x^{n+1+m}}{m!(n+1+m)} + \dots$$

$$= x^{n+1} \left[\frac{1}{(n+1)} - \frac{x}{(n+2)} + \frac{x^{2}}{2!(n+3)} - \frac{x^{3}}{3!(n+4)} + \dots + \frac{(-1)^{m} x^{m}}{m!(n+1+m)} + \dots \right]$$

۵ـ۷ـ۱۲ـ تابع $f(z)$ به صورت یک سری از توانهای نزولی نمایش داده شده است.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} \qquad R \le z < \infty$$

نشان دهید که این بسط سری یکتاست؛ یعنی اگر در $R \le z < \infty$، $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}$ آنگاه به ازای همهٔ n ها، $a_n = b_n$

حل چون این دو بسط تابع $f(z)$ را نمایش می‌دهند پس باید فاصله‌ای در اطراف نقطه مثلاً $z=a$ وجود داشته باشد که این دو بسط حول آن نقطه صدق کنند پس در این فاصله

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^{-n}$$

یا

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n)(z-a)^{-n} = 0$$

می‌دانیم اگر سری توان‌دار $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ برای جمیع مقادیر z در ناحیه‌ای در اطراف $z=0$ مساوی

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

صفر گردد در این صورت ضرایب هر یک از توانهای z نیز صفر می‌گردند .

یعنی $a_0=a_1=a_2= \dots =a_n=0$

و در مورد این مسئله $(n=0,1,2,\dots)$ $(a_n-b_n)=0$

یا $a_n=b_n$

۵-۷-۱۳- سری توانی زیر

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

به ازای همهٔ مقادیر $-R<x<R$ همگراست نشان دهید که سریهای حاصل از مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری دارای همین بازه همگرایی‌اند. (زحمت بررسی نقاط انتهایی $x=\pm R$ را به خود ندهید.)

حل (الف) مشتق‌گیری

چون f' همان شعاع همگرایی f را دارد قضیه در مورد f' نیز به کار رفته می‌گوید که دارای مشتق f'' بر $(-R,R)$ است این به نوبهٔ خود ایجاب می‌کند که f'' بر $(-R,R)$ مشتق‌پذیر باشد و همین طور تا آخر. لذا اگر $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ بر $-R<x<R$ همگرا باشد در هر نقطه $(-R,R)$ از هر مرتبه مشتق خواهد داشت.

همگرایی یک سری توانی ممکن است ضمن مشتق‌گیری در یکی یا هر دو نقطه انتهایی بازهٔ همگرایی از دست برود به این دلیل قضیه در رابطه با بازه باز $(-R,R)$ ذکر می‌شود.

(ب) انتگرال‌گیری

همانند مشتق‌گیری بدین نحو که وقتی از جملات یک سری انتگرال می‌گیریم در هر نقطه $(-R,R)$ مراتب انتگرال همگراست و البته مجدداً در نقاط ابتدا و انتها مورد بررسی قرار نمی‌گیرند.

۵-۷-۱۴- فرض کنید $f(x)$ را بشود به صورت یک سری توانی حول مبدأ بسط داد $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$، و گسترهٔ همگرایی غیرصفر باشد. با استفاده از روشهایی که در اثبات یکتایی سریها بکار بردیم، نشان دهید که سری مفروض یک سری مکلورن است با ضرایب

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{n}(0)$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

حل در ابتدا این موضوع را بیان می‌کنیم که هر تابع تعریف شده با یک سری توانی به

شعاع همگرایی $R>0$ سری مکلورنی دارد که در هر نقطه $(-R,R)$ به تابع همگرا می‌باشد زیرا سری مکلورن تابع $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ خود سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ می‌باشد برای مشاهده این امر از

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n+\dots$$

جمله به جمله مشتق گرفته و در هر مشتق $f^n(x)$ قرار می‌دهیم $x=0$

از این کار به ازای هر n داریم

$$a_n=\frac{f^n(0)}{n!} \quad \text{یا} \quad f^n(0)=n!a_n$$

لذا

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(0)}{n!}x^n \qquad -R<x<R$$

۵ـ۷ـ۱۸ـ π را (با دقت مضاعف) توسط هر یک از عبارتهای arctan زیر محاسبه کنید.

(الف) $\pi=16\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)-4\tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right)$

(ب) $\pi=24\tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)+8\tan^{-1}\left(\frac{1}{57}\right)+4\tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right)$

(ج) $\pi=48\tan^{-1}\left(\frac{1}{18}\right)+32\tan^{-1}\left(\frac{1}{57}\right)-20\tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right)$

باید ۱۶ رقم با معنا به دست آورید.

[یادآوری: از این فرمولها در برخی محاسبه‌ها دقیقتر π استفاده شده است.]

حل از نتیجه مسئله ۵-۷-۶ استفاده می‌شود.

$$\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots$$

(الف) $$\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{5}-\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^3}{3}+\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^5}{5}-\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^7}{7}+\dots$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)=0/197395559$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right)=\frac{1}{239}-\frac{\left(\frac{1}{239}\right)^3}{3}+\frac{\left(\frac{1}{239}\right)^5}{5}-\frac{\left(\frac{1}{239}\right)^7}{7}+\dots$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right)=0/004184076$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\pi = ۱۶\tan^{-۱}(\frac{۱}{۵}) - ۴\tan^{-۱}(\frac{۱}{۲۳۹}) = ۳/۱۴۱۵۹۲۶۴$$

(ب) $\tan^{-۱}(\frac{۱}{۸}) = ۰/۱۲۴۳۵۴۹۹۴$

$$\tan^{-۱}(\frac{۱}{۵۷}) = ۰/۰۱۷۵۴۲۰۶$$

$$\tan^{-۱}(\frac{۱}{۲۳۹}) = ۰/۰۰۴۱۸۴۰۷۶$$

$$\pi = ۲۴\tan^{-۱}(\frac{۱}{۸}) + ۸\tan^{-۱}(\frac{۱}{۵۷}) + ۴\tan^{-۱}(\frac{۱}{۲۳۹})$$

$$\pi = ۳/۱۴۱۵۹۲۶۴$$

(ج) $\tan^{-۱}\frac{۱}{۱۸} = ۰/۰۵۵۴۹۸۵۰۵$

$$\tan^{-۱}\frac{۱}{۵۷} = ۰/۰۱۷۵۴۲۰۶$$

$$\tan^{-۱}(\frac{۱}{۲۳۹}) = ۰/۰۰۴۱۸۴۰۷۶$$

$$\pi = ۲۴\tan^{-۱}(\frac{۱}{۱۸}) + ۳۲\tan^{-۱}(\frac{۱}{۵۷}) - ۲۰\tan^{-۱}(\frac{۱}{۲۳۹})$$

$$\pi = ۳/۱۴۱۵۹۲۶۴$$

۵-۷-۱۹- بررسی پدیدهٔ گیبس در بخش ۱۴-۵ به عبارت زیر می‌انجامد.

$$\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi}\frac{\sin\xi}{\xi}\,d\xi$$

انتگرالده را به صورت یک سری بسط دهید و از جمله به جملهٔ آن انتگرال بگیرید. مقدار عددی این عبارت را تا چهار رقم با معنا حساب کنید.

حل

$$\sin\xi = \xi - \frac{\xi^{۳}}{۳!} + \frac{\xi^{۵}}{۵!} - \frac{\xi^{۷}}{۷!} + \dots$$

$$\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi}\frac{\sin\xi}{\xi}\,d\xi = \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi}\frac{\xi - \frac{\xi^{۳}}{۳!} + \frac{\xi^{۵}}{۵!} - \dots}{\xi}\,d\xi$$

$$= \frac{۲}{\pi}\left[\int_{۰}^{\pi}d\xi - \frac{۱}{۳!}\int_{۰}^{\pi}\xi^{۲}d\xi + \frac{۱}{۵!}\int_{۰}^{\pi}\xi^{۴}d\xi - \frac{۱}{۷!}\int_{۰}^{\pi}\xi^{۶}d\xi + \dots\right]$$

$$= \frac{۲}{\pi}\left[\pi - \frac{\pi^{۳}}{۳\times۳!} + \frac{\pi^{۵}}{۵\times۵!} - \frac{\pi^{۷}}{۷\times۷!} + \dots\right]$$

$$= \frac{۲}{\pi}[\ ۱/۸۵۱۹۰\ ] = ۱/۱۷۸۹۵۷۸۱$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

بخش ٦ـ۱ـ جبر مختلط　　مسائل صفحه ۴۸۸

۶ـ۱ـ۲ـ کمیتهای مختلط $a=u+iv$ و $b=x+iy$ را می‌توان به صورت بردارهای دو بعدی $a=\hat{i}u+\hat{j}v$ و $b=\hat{i}x+\hat{j}y$ نوشت. نشان دهید

$$a^*b=\vec{a}.\vec{b}+i\hat{k}.\vec{a}\times\vec{b}$$

حل

$$a^*b=(u-iv)(x+iy)=ux+vy-ivx+iuy=(ux+vy)+i(uy-vx)$$

$$\vec{a}.\vec{b}=ux+vy \quad , \quad i\hat{k}.\vec{a}\times\vec{b}=i(uy-vx)$$

$$(ux+vy)+i(uy-vx)=\vec{a}.\vec{b}+i\hat{k}.\vec{a}\times\vec{b}$$

۶ـ۱ـ۳ـ به روش جبری ثابت کنید که

$$|z_1|-|z_2|\le|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$$

این نتیجه را به کمک بردارها تفسیر کنید که به ازای $R(z)>0$.

$$|z-1|<\sqrt{z^2-1}<|z+1|$$

حل

$$z_1=x_1+iy_1 \quad , \quad z_2=x_2+iy_2$$

$$\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}\le\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}$$

$$(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2\le x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2+2\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}$$

$$x_1^2+x_2^2+2x_1x_2+y_1^2+y_2^2+2y_1y_2\le x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2+2\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}$$

$$x_1x_2+y_1y_2\le\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}$$

طرفین را در صورتی بتوان ۲ می‌رسانیم که از مثبت بودن دو طرف مطمئن باشیم.

$$x_1x_2+y_1y_2\le\sqrt{(x_1x_2)^2+(x_1y_2)^2+(y_1x_2)^2+(y_1y_2)^2}$$

$$x_1x_2+y_1y_2\le\sqrt{(x_1x_2+y_1y_2)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2}$$

$$|z_1|=|z_1+z_2+(-z_2)|\le|z_1+z_2|+|-z_2|$$

$$|z_1|-|z_2|\le|z_1+z_2|$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

۶-۱-۵- نشان دهید اعداد مختلط ریشه‌های دوم دارند و این ریشه‌های دوم در صفحهٔ مختلط واقع‌اند. ریشه‌های دوم i را بیابید.

حل $e^{\frac{1}{2}}=(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2})$ مختصات قطبی $z=re^{-i\theta}$

ریشه دوم عدد مختلط نیز دارای مدول $\sqrt{r}$ و آرگومان $\frac{\theta}{2}$ است.

$$\sqrt{re^{-i\theta}}=\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \quad , \quad \theta=\frac{\pi}{2} \Rightarrow e^{i\frac{\pi}{2}}=i$$

$$\sqrt{i}=\pm e^{i\frac{\pi}{4}}=\pm(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$$

$$\sqrt{i}=\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{i}\times\sqrt{i}=(\frac{\sqrt{2}}{2})^2(1+i)^2=i$$

۶-۱-۶- نشان دهید که

(الف) $\cos n\theta=\cos^n\theta-\binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta\binom{n}{4}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-\dots$

(ب) $\sin n\theta=\binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta\sin\theta-\binom{n}{3}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta+\binom{n}{5}\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta-\dots$

[یادآوری: کمیتهای $\binom{n}{m}$ ضرایب بسط دو جمله‌ای‌اند. $\binom{n}{m}=\frac{n!}{(n-m)!m!}$

حل $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}a^{n-3}b^3+\dots$$

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos^n\theta+n\cos^{n-1}\theta(i\sin\theta)+\frac{n(n-1)}{2}\cos^{n-2}\theta(i\sin\theta)^2+\dots$$

$$=\cos^n\theta+n\cos^{n-1}\theta i\sin\theta-\frac{n(n-1)}{2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta-\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\cos^{n-3}\theta(i\sin\theta)^3$$

$$=(\cos^n\theta-\frac{n(n-1)}{2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta+\dots)+i(n\cos^{n-1}\sin\theta-\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta)$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\cos n\theta=\cos^n\theta-\frac{n(n-1)}{2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta+\dots\\ \sin n\theta=n\cos^{n-1}\theta\sin\theta-\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta+\dots\end{cases}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

۶ـ۱ـ۷ـ ثابت کنید که

(الف)
$$\sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{Cos}\,nx = \frac{\mathrm{Sin}\,N(\frac{x}{2})}{\mathrm{Sin}\frac{x}{2}}\mathrm{Cos}(N-1)\frac{x}{2}$$

(ب)
$$\sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{Sin}\,nx = \frac{\mathrm{Sin}\,N(\frac{x}{2})}{\mathrm{Sin}\frac{x}{2}}\mathrm{Sin}(N-1)\frac{x}{2}$$

به این سریها در بررسی نقش پراش چند شکافی بر می‌خوریم. کاربرد دیگر آن عبارت است از بررسی پدیدهٔ گیبس (بخش ۱۴-۵)

[راهنمایی: بندهای (الف) و (ب) را می‌توان در هم ادغام کرد و یک سری هندسی تشکیل داد (با بخش ۵-۱ مقایسه کنید)].

حل
$$\sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{Sin}\,nx + \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{Cos}\,nx = \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{Cos}\,nx + i\mathrm{Sin}\,nx = \sum_{n=0}^{N-1} (\mathrm{Cos}\,x + i\mathrm{Sin}\,x)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1} e^{inx}$$

$$\begin{cases} e^{ix} = y \\ e^{inx} = y^n \end{cases} \qquad \sum_{n=0}^{N-1} y^n = y^0 + y^1 + y^2 + \ldots + y^{N-1} + (y^N - y^N)$$

$$S = 1 + y^1 + y^2 + \ldots + y^{N-1}$$

$$S = 1 + y\underbrace{(1 + y^1 + y^2 + \ldots + y^{N-1})}_{S} - y^N \quad \Rightarrow$$

$$S = \frac{1-y^N}{1-y} = \frac{y^N - 1}{y-1} = \frac{y^{\frac{N}{2}}(y^{\frac{N}{2}} - y^{-\frac{N}{2}})}{y^{\frac{1}{2}}(y^{\frac{1}{2}} - y^{-\frac{1}{2}})} \quad \Rightarrow$$

$$S = \frac{e^{i\frac{N}{2}x}}{e^{\frac{i}{2}x}} \left(\frac{\dfrac{e^{i\frac{N}{2}x} - e^{-i\frac{N}{2}x}}{2i}}{\dfrac{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}}{2i}} \right)$$

$$(\mathrm{Cos}\frac{N-1}{2}x + i\mathrm{Sin}\frac{N-1}{2}x)\frac{\mathrm{Sin}\,N\frac{x}{2}}{\mathrm{Sin}\frac{x}{2}} = i\sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{Sin}\,x + \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{Cos}\,nx$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} \sin nx = \dfrac{\sin N(\frac{x}{2})}{\sin\frac{x}{2}} \sin(N-1)\dfrac{x}{2} \\ \sum_{n=0}^{N-1} \cos nx = \dfrac{\sin N(\frac{x}{2})}{\sin\frac{x}{2}} \cos(N-1)\dfrac{x}{2} \end{cases}$$

مسئله ۸-۱ ثابت کنید که به ازای $-1<P<1$

(الف)
$$\sum_{n=0}^{\infty} P^n \cos nx = \frac{1-P\cos x}{1-2P\cos x+P^2}$$

(ب)
$$\sum_{n=0}^{\infty} P^n \sin nx = \frac{P\sin x}{1-2P\cos x+P^2}$$

به این سریها در نظریهٔ تداخل سنج فابری - پرو برمی‌خوریم.

حل

$$S_n = 1+Z+Z^2+\ldots+Z^{n-1}$$

$$ZS_n = Z+Z^2+\ldots+S_n(1-Z) = 1-Z^n$$

$$S_n = \frac{1-Z^n}{1-Z}$$

اگر $|Z|<1$ باشد و $n\to\infty$ خواهیم داشت:

$$S_n = \frac{1}{1-Z} \quad ; \quad 1+Pe^{i\theta}+P^2e^{2i\theta}+P^3e^{3i\theta}+\ldots = \frac{1}{1-Pe^{i\theta}}$$

$$1+P\cos\theta+iP\sin\theta+P^2\cos^2\theta+i^2P^2\sin^2\theta+\ldots = \frac{1}{1-Pe^{i\theta}}$$

$$(1+P\cos\theta+P^2\cos^2\theta+P^3\cos^3\theta)+i(P\sin\theta+P^2\sin^2\theta+P^3\sin^3\theta) = \frac{1}{1-Pe^{i\theta}}$$

$$= \frac{1}{1-Pe^{i\theta}} \times \frac{1-Pe^{-i\theta}}{1-Pe^{-i\theta}} = \frac{1-Pe^{-i\theta}}{1-Pe^{-i\theta}-Pe^{i\theta}+P^2}$$

$$= \frac{1-P\cos\theta+iP\sin\theta}{1-P(\cos\theta-iP\sin\theta)-P(\cos\theta+i\sin\theta)+P^2}$$

$$= \frac{1-P\cos\theta+iP\sin\theta}{1-2P\cos\theta+P^2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 1+P\cos\theta+P^2\cos^2\theta+\ldots = \dfrac{1-P\cos\theta}{1-2P\cos\theta+P^2} \\ \sin\theta+P^2\sin^2\theta+P^3\sin^3\theta+\ldots = \dfrac{P\sin\theta}{1-2P\cos\theta+P^2} \end{cases} \Rightarrow$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} P^n \cos n\theta = \dfrac{1-P\cos\theta}{1-2P\cos\theta+P^2} \\ \sum_{n=0}^{\infty} P^n \sin n\theta = \dfrac{P\sin\theta}{1-2P\cos\theta+P^2} \end{cases}$$

۶ـ۱ـ۹ـ فرض کنید توابع مثلثاتی و توابع هذلولی به ازای شناسه‌های مختلط به کمک سریهای توانی مربوط به صورت زیر تعریف شده باشند.

$$\sin z = \sum_{\substack{n=1 \\ \text{فرد}}}^{\infty} (-1)^{\frac{(n-1)}{2}} \frac{z^n}{n!} = \sum_{S=0}^{\infty} (-1)^S \frac{z^{2S+1}}{(2S+1)!}$$

$$\cos z = \sum_{\substack{n=0 \\ \text{زوج}}}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{z^n}{n!} = \sum_{S=0}^{\infty} (-1)^S \frac{z^{2S}}{(2S)!}$$

$$\sinh z = \sum_{\substack{n=1 \\ \text{فرد}}}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{S=0}^{\infty} \frac{z^{2S+1}}{(2S+1)!}$$

$$\cosh z = \sum_{\substack{n=0 \\ \text{زوج}}}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{S=0}^{\infty} \frac{z^{2S}}{(2S)!}$$

(الف) نشان دهید که

$$i\sin z = \sinh iz \ , \ \sin iz = i\sinh z \ , \ \cos z = \cosh iz \ , \ \cos iz = \cosh z$$

(ب) تحقیق کنید که روابط آشنای بین توابعی مانند $\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$

یا $\sin(z_1+z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1$ در صفحه مختلط نیز برقرارند.

حل (الف)

$$i\sin iz = i\sum_{\substack{n=1 \\ \text{فرد}}}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{z^n}{n!} = i\sum (-1)^S \frac{z^{2S+1}}{(2S+1)!}$$

$$\sinh iz = \sum_{S=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2S+1}}{(2S+1)!} = \sum_{S=0}^{\infty} i^{2S+1} \frac{z^{2S+1}}{(2S+1)!} = i\sum (-1)^S \frac{z^{2S+1}}{(2S+1)!}$$

بقیه موارد نیز بطور مشابه عمل می‌شود.

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

(ب)

$$\operatorname{Cos} hz = \sum_{\substack{S=0 \\ \text{زوج}}}^{\infty} \frac{z^{2S}}{(2S)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$e^{-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n + (-z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n + (-z)^n}{2n}$$

به ازای فرد $n=$ صفر است پس به ازای زوج $= n$ وجود دارد.

$$\sum_{\substack{n=0 \\ \text{زوج}}}^{\infty} \frac{z^n + (-z)^n}{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z^n}{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad (OR) \quad \sum_{S=0}^{\infty} \frac{z^{2S}}{2S}$$

در اینجا $2S$ نشانگر یک عدد زوج است که به جای nهای زوج نوشته شده است.

$$\operatorname{Sin}(z_1+z_2) = \operatorname{Sin}z_1 \operatorname{Cos}z_2 + \operatorname{Sin}z_2 \operatorname{Cos}z_1$$

$$\operatorname{Sin}(z_1+z_2) = \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i}$$

$$\operatorname{Sin}z_1 \operatorname{Cos}z_2 + \operatorname{Sin}z_2 \operatorname{Cos}z_1 = \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \times \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} + \frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i} \times \frac{e^{iz_1} + e^{-iz}}{2}$$

$$= \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)} + e^{i(z_2+z_1)} + e^{i(z_2-z_1)} - e^{-i(z_2-z_1)} - e^{-i(z_1+z}}{4i}$$

$$= \frac{2e^{i(z_1+z_2)} - 2e^{-i(z_1+z_2)}}{4i} = \operatorname{Sin}(z_1+z_2)$$

۶ـ۱ـ۱۰ـ با استفاده از اتحادهای $\operatorname{Cos} z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ و $\operatorname{Sin} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ که از مقایسهٔ سُریهای توانی تحقق پیدا می‌کنند نشان دهید.

(الف)

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Sin}(x+iy) &= \operatorname{Sin}x \operatorname{Cosh}y + i\operatorname{Cos}x \operatorname{Sinh}y \\ \operatorname{Cos}(x+iy) &= \operatorname{Cos}x \operatorname{Cosh}y - i\operatorname{Sin}x \operatorname{Sinh}y \end{aligned}\right\}$$

(ب)

$$\left.\begin{aligned} |\operatorname{Sin} z|^2 &= \operatorname{Sin}^2 x + \operatorname{Sinh}^2 y \\ |\operatorname{Cos} z|^2 &= \operatorname{Cos}^2 x + \operatorname{Sinh}^2 y \end{aligned}\right\}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

از این عبارتها پیداست که در صفحهٔ مختلط، Sinz و Cosz می‌توانند از یک بزرگتر باشند.

حل (الف)

$$\mathrm{Sin}(x+iy)=\frac{e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}}{2i} \qquad (2)$$

$$\mathrm{Sin}x\,\mathrm{Cosh}y+i\mathrm{Cos}x\,\mathrm{Sinh}y=\frac{e^{ix+y}+e^{ix-y}-e^{y-ix}-e^{-(ix+y)}-e^{ix+y}+e^{ix-y}-e^{-ix+y}+e^{-(ix-y)}}{4i}$$

$$=\frac{2\left[e^{ix-y}-e^{y-ix}\right]}{4i}=\frac{e^{ix-y}-e^{y-ix}}{2i}=\frac{e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}}{2i} \qquad (1)$$

$$(1)\ ,\ (2) \Rightarrow \mathrm{Sin}(x+iy)=\mathrm{Sin}x\,\mathrm{Cosh}y+i\mathrm{Cos}x\,\mathrm{Sinh}y$$

رابطه دوم قسمت (الف) نیز به همین نحو بدست می‌آید.

(ب)

$$|\,\mathrm{Sin}z\,|^2=\mathrm{Sin}^2x\,\mathrm{Cosh}^2y+\mathrm{Cos}^2x\,\mathrm{Sinh}^2y$$

$$=\mathrm{Sin}^2x\,\mathrm{Cosh}^2y+(1-\mathrm{Sin}^2x)\mathrm{Sinh}^2y=\mathrm{Sin}^2x\,\mathrm{Cosh}^2y+\mathrm{Sinh}^2y-\mathrm{Sin}^2x\,\mathrm{Sinh}^2y$$

$$=\mathrm{Sin}^2x\,(\mathrm{Cosh}^2y-\mathrm{Sinh}^2y)+\mathrm{Sinh}^2y=\mathrm{Sin}^2x+\mathrm{Sinh}^2y$$

قسمت دوم نیز بطور مشابه حل می‌شود.

از حل مسئله ۶-۱-۱۱ بدلیل مشابه بودن با ۶-۱-۱۰ صرفنظر می‌گردد.

۶-۱-۱۲ نشان دهید :

(الف)

$$\tanh\left(\frac{z}{2}\right)=\frac{\mathrm{Sinh}x+i\mathrm{Sin}y}{\mathrm{Cosh}x+\mathrm{Cos}y}$$

(ب)

$$\mathrm{Coth}\left(\frac{z}{2}\right)=\frac{\mathrm{Sinh}x-i\mathrm{Sin}y}{\mathrm{Cosh}x-\mathrm{Cos}y}$$

حل (الف)

$$\tanh\left(\frac{z}{2}\right)=\frac{\mathrm{Sinh}\frac{z}{2}}{\mathrm{Cosh}\frac{z}{2}}=\frac{2\mathrm{Sinh}\left(\frac{x+iy}{2}\right)\mathrm{Cosh}\left(\frac{x-iy}{2}\right)}{2\mathrm{Cosh}\left(\frac{x+iy}{2}\right)\mathrm{Cosh}\left(\frac{x-iy}{2}\right)}$$

$$=\frac{\mathrm{Sinh}x+\mathrm{Sinh}iy}{\mathrm{Cosh}x+\mathrm{Cosh}iy} \qquad \text{و} \qquad \text{داریم} \quad \begin{cases}\mathrm{Sinh}iy=i\mathrm{Sin}y\\ \mathrm{Cosh}iy=\mathrm{Cos}y\end{cases}$$

$$\tanh\frac{z}{2}=\frac{\mathrm{Sinh}x+i\mathrm{Sin}y}{\mathrm{Cosh}x+\mathrm{Cos}y}$$

(ب)

$$\mathrm{Coth}\frac{z}{2}=\frac{\mathrm{Cosh}\left(\frac{x-iy}{2}\right)}{\mathrm{Sinh}\left(\frac{x-iy}{2}\right)}=\frac{2\mathrm{Cosh}\left(\frac{x+iy}{2}\right)\mathrm{Sinh}\left(\frac{x-iy}{2}\right)}{2\mathrm{Sinh}\left(\frac{x+iy}{2}\right)\mathrm{Sinh}\left(\frac{x-iy}{2}\right)}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/PhysicsClass$

$$=\frac{\text{Sinh}x-\text{Sinh}iy}{\text{Cosh}x-\text{Cosh}iy}\xrightarrow[\text{مانند (الف)}]{\text{بطور مشابه}}\text{Coth}\frac{z}{۲}=\frac{\text{Sinh}x-i\text{Sin}y}{\text{Cosh}x-\text{Cos}y}$$

۶ـ۱ـ۱۵ـ تمامی صفرهای توابع زیر را بیابید.

(الف) Sinz (ب) Cosz (ج) Sinhz (د) Coshz

حل

(الف) $\text{Sin}z=۰ \Rightarrow \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{۲}=۰ \Rightarrow e^{iz}-e^{-iz}=۰$

$e^{iz}(e^{iz}-e^{-iz})=۰ \Rightarrow e^{۲iz}-۱=۰ \Rightarrow e^{۲iz}=۱=e^{i۲n\pi}$

$۲iz=i۲n\pi \Rightarrow z=n\pi$

(ب) $\text{Cos}z=۰ \Rightarrow \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{۲}=۰ \Rightarrow e^{۲iz}+۱=۰ \Rightarrow$

$e^{۲iz}=-۱=e^{i(\pi+۲n\pi)} \Rightarrow ۲iz=i(\pi+۲n\pi) \Rightarrow z=n\pi+\frac{\pi}{۲}$

(ج) $\text{Sinh}z=۰ \Rightarrow \frac{e^{z}-e^{-z}}{۲}=۰ \Rightarrow e^{۲z}=۱=e^{i۲n\pi} \Rightarrow z=in\pi$

(د) $\text{Cosh}z=۰ \Rightarrow \frac{e^{z}+e^{-z}}{۲}=۰ \Rightarrow e^{۲z}=-۱=e^{i(\pi+۲n\pi)} \Rightarrow$

$z=i(\frac{\pi}{۲}+n\pi)$

۶ـ۱ـ۱۶ـ نشان دهید

(الف) $\text{Sin}^{-۱}z=-i\text{Ln}(iz\pm\sqrt{۱-z^{۲}})$ (د) $\text{Sinh}^{-۱}z=\text{Ln}(z+\sqrt{z^{۲}+۱})$

(ب) $\text{Cos}^{-۱}z=-i\text{Ln}(z\pm\sqrt{z^{۲}-۱})$ (ه) $\text{Cosh}^{-۱}z=\text{Ln}(z+\sqrt{z^{۲}-۱})$

(ج) $\tan^{-۱}z=\frac{i}{۲}\text{Ln}(\frac{i+z}{i-z})$ (و) $\tanh^{-۱}z=\frac{۱}{۲}\text{Ln}(\frac{۱+z}{۱-z})$

حل به عنوان نمونه (الف) و (ج) را حل می‌کنیم.

(الف) $A=\text{Sin}^{-۱}z \Rightarrow z=\text{Sin}A=\frac{e^{iA}-e^{-iA}}{۲i}$

$۲iz=e^{iA}-e^{-iA}=e^{-iA}(e^{۲iA}-۱)=\frac{e^{۲iA}-۱}{e^{iA}}$

$e^{۲iA}-۲ize^{-iA}-۱=۰ \Rightarrow e^{iA}=\frac{iz\pm\sqrt{-z^{۲}+۱}}{۱}$

$\Rightarrow iA=\text{Ln}(iz\pm\sqrt{-z^{۲}+۱}) \Rightarrow$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\boxed{A=\sin^{-1}z=-i\,\mathrm{Ln}(iz\pm\sqrt{-z^2+1})}$$

(ج) $W=\tan^{-1}z \Rightarrow z=\tan W$

$$\tan W=\frac{\frac{e^{iW}-e^{-iW}}{2i}}{\frac{e^{iW}+e^{-iW}}{2}}=\frac{e^{iW}-e^{-iW}}{i(e^{iW}+e^{-iW})}=z \Rightarrow$$

$$iz+ize^{-2iW}=1-e^{-2iW} \Rightarrow (iz+1)e^{-2iW}=1-iz$$

$$\Rightarrow e^{-2iW}=\frac{1-iz}{iz+1} \Rightarrow -2iW=\mathrm{Ln}\frac{1-iz}{1+iz}$$

$$\Rightarrow \boxed{W=\frac{-i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1-iz}{1+iz}=\tan^{-1}z}$$

۶ـ۱ـ۱۷ـ در نظریهٔ کوانتومی فوتویونش به اتحاد زیر بر می‌خوریم

$$\left(\frac{ia-1}{ia+1}\right)^{ib}=\exp(-2b\,\mathrm{Cot}^{-1}a)$$

که در آن a و b حقیقی‌اند. درستی این اتحاد را تحقیق کنید.

حل

$$\mathrm{Cotg}z=a \Rightarrow z=\mathrm{Cotg}^{-1}a \quad , \quad \mathrm{Cotg}z=i\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}\right)$$

$$-ia=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}=\frac{1+e^{-2iz}}{1-e^{-2iz}} \Rightarrow -ia+iae^{-2iz}-1-e^{-2iz}=0$$

$$e^{-2iz}(ia-1)=ia+1 \Rightarrow -2iz=\mathrm{Ln}\left(\frac{ia+1}{ia-1}\right)$$

$$\Rightarrow -2iz=-\mathrm{Ln}\left(\frac{ia-1}{ia+1}\right) \Rightarrow (-2iz)(ib)=-ib\,\mathrm{Ln}\left(\frac{ia-1}{ia+1}\right) \Rightarrow$$

$$-2zb=ib\,\mathrm{Ln}\left(\frac{ia-1}{ia+1}\right) \Rightarrow -2b\,\mathrm{Cotg}^{-1}a=\mathrm{Ln}\left(\frac{ia-1}{ia+1}\right)^{ib}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{ia-1}{ia+1}\right)^{ib}=e^{-2b\,\mathrm{Cotg}^{-1}a}$$

۶ـ۱ـ۱۸ـ موج نوری تخت با بسامد ω را با کمیت $e^{i\omega(t-\frac{nx}{c})}$ نشان می‌دهند. در برخی مواد، به جای ضریب شکست حقیقی سادهٔ n، کمیت مختلط $n-ik$ را می‌نشانند اثر k بر این موج چیست؟ از لحاظ فیزیکی k به چه چیزی وابسته است؟ تعمیم یک کمیت از حقیقی به مختلط در فیزیک زیاد پیش می‌آید. مثلاً می‌توان از مدول یانگ مختلط در مواد چسبندهٔ کشسان تا پتانسیل مختلط مربوط به مدل‌سازی برای برهم‌کنش‌های هسته‌ای نام برد.

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

حل

$$y = e^{i\omega(t-\frac{nx}{c})} = e^{i\omega(t-\frac{(n-ik)}{c}x)}$$

$$= e^{i\omega(t-\frac{nx}{c})}\, e^{-\frac{\omega x k}{c}}$$

تأثیر k بروی موج آن است که $e^{-\frac{\omega x k}{c}}$ یک عدد است و بر روی دامنهٔ آن تأثیر می‌گذارد و دامنه را کاهش می‌دهد. k از نظر فیزیکی دارای دیمانسیون عکس $\frac{\omega x}{c}$ است چون تابع نمایی بدون دیمانسیون است و دیمانسیون توان عدد نمایی صفر است.

$$\mathrm{Dim}\, k = [\,k\,] = \left[\frac{c}{\omega x}\right]$$

۱۹-۱-غ در مورد مؤلفه‌های تکانهٔ زاویه‌ای که در مسئلهٔ ۲-۵-۱۴ تعریف آنها آمد می‌بینیم که $(L_x - iL_y) \neq (L_x + iL_y)^*$ توضیح دهید که چرا چنین است؟

حل از مسئله ۲-۵-۱۴:

$$\vec{L} = -i(\vec{r} \times \vec{\nabla})$$

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\vec{L} = \frac{-i}{r^2 \mathrm{Sin}\theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\mathrm{Sin}\theta\hat{\phi} \\ r & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \end{vmatrix}$$

$$\hat{\theta} = \hat{i}\,\mathrm{Cos}\theta\,\mathrm{Cos}\phi - \hat{j}\,\mathrm{Cos}\theta\,\mathrm{Sin}\phi - \hat{k}\,\mathrm{Sin}\theta$$

$$\hat{\phi} = -\hat{i}\,\mathrm{Sin}\phi + \hat{j}\,\mathrm{Cos}\phi$$

پس از بسط استفاده از دو برداریکه فوق می‌نویسیم.

$$\vec{L} = L_x\hat{i} + L_y\hat{j} + L_z\hat{k} \Rightarrow \begin{cases} L_x = i(\mathrm{Cotg}\theta\,\mathrm{Cos}\phi\frac{\partial}{\partial\phi} + \mathrm{Sin}\phi\frac{\partial}{\partial\theta}) \\ L_y = i(\mathrm{Cotg}\theta\,\mathrm{Sin}\phi\frac{\partial}{\partial\phi} - \mathrm{Cos}\phi\frac{\partial}{\partial\theta}) \\ L_z = -i\frac{\partial}{\partial\phi} \end{cases}$$

$$L_x^* = -i(\mathrm{Cotg}\theta\,\mathrm{Cos}\phi\frac{\partial}{\partial\phi} + \mathrm{Sin}\phi\frac{\partial}{\partial\theta})$$

$$L_y^* = -i(\mathrm{Cotg}\theta\,\mathrm{Sin}\phi\frac{\partial}{\partial\phi} - \mathrm{Cos}\phi\frac{\partial}{\partial\theta})$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$(L_x + iL_y)^* = L_x^* - iL_y^* \neq L_x - iL_y$$

۶ـ۱ـ۲۰ـ نشان دهید که فاز $f(z)=u+iv$ برابر است با جزء موهومی لگاریتم $f(z)$. چه بسا این نتیجه برای حل مسئلهٔ ۱۰-۲-۱۳ مفید باشد.

حل

$$f(z)=u+iv=\rho e^{i\phi}$$

$$Lnf(z)=Ln\rho+Lne^{i\phi}$$

$$Lnf(z)=Ln\rho+i\phi$$

فاز $f(z)$ قسمت انگاری (موهومی) $Lnf(z)$ است.

بخش ٦ـ۲ـ شرایط کوشی ـ ریمان — مسائل صفحه ۴۹۸

۶ـ۲ـ۱ـ توابع $u(x,y)$ و $v(x,y)$ به ترتیب اجزای حقیقی و موهومی تابع تحلیلی $W(z)$اند.

(الف) با فرض وجود مشتقهای لازم، نشان دهید.

$$\nabla^2 u = \nabla^2 v = 0$$

جوابهای معادلهٔ لاپلاس نظیر $u(x,y)$ و $v(x,y)$ را تابعهای همساز می‌نامند. (ب) نشان دهید $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}=0$ تعبیری هندسی از این عبارت بدست دهید.

[راهنمایی: با استفاده از تکنیک بخش ۱-۶ می‌توانید بردارهای عمود بر منحنیهای $u(x,y)=c_i$ و $v(x,y)=c_j$ را تشکیل دهید.]

حل

(الف) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$$ شرایط کوشی ـ ریمان $$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

$$\nabla^2 v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0$$

(ب) $$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}=0$$ شرایط کوشی ـ ریمان

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0$$

$$h_{ij}^{2}=\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial q_j}\right)+\left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial q_j}\right)$$

محورهای مختصات برهم عمودند. چون وقتی $i\neq j$ صفر می‌شود.

در اینجا u و v با x و y سنجیده می‌شوند و u و v برهم عمودند.

۶ـ۲ـ۲ـ نشان دهید که آیا تابع $f(z)=R(z)=x$ تحلیلی است یا خیر؟

حل

$$f(z)=x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u=x \\ v=0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1\neq\frac{\partial v}{\partial y}$$

شرایط کوشی ـ ریمان برقرار نیست پس تحلیلی نیست.

۶ـ۲ـ۳ـ با در نظر گرفتن اینکه $u(x,y)$ جزء حقیقی و $v(x,y)$ جزء موهومی تابع تحلیلی $w(z)$ هر یک در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کنند. نشان دهید که $u(x,y)$ و $v(x,y)$ نمی‌توانند در هر ناحیه‌ای که در آنجا $w(z)$ تحلیلی است بیشینه یا کمینه داشته باشند (این توابع می‌توانند نقطه‌ای زینی داشته باشند.)

حل

$$w(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$$

$$\Delta w=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\delta x+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\delta y \quad \Rightarrow$$

$$\Delta w=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\delta x+\left(-\frac{\partial v}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial x}\right)\delta y \quad \Rightarrow$$

$$\Delta w=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\delta x+i\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\delta y \quad \Rightarrow$$

$$\Delta w=\frac{\partial u}{\partial x}(i\delta y+\delta x)+i\frac{\partial v}{\partial x}(\delta x+i\delta y) \quad \Rightarrow$$

$$\Delta w=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\delta x+i\delta y)\neq 0$$

چون u و v مشتق پذیرند هیچکدام از پرانتزها صفر نمی‌شود بنابراین w مشتق‌پذیر است با مشتق غیرصفر ولی در یک محدوده خاص می‌توانیم شرایط را طوری تنظیم کنیم که ماکزیمم داشته باشیم پس می‌توانیم نقاط زینی داشته باشیم.

۶ـ۲ـ۴ـ فرض کنید $A=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ و $B=\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}$ و $C=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$. از محاسبات مربوط به توابع دو متغیره $w(x,y)$ می‌دانیم که شرط لازم و کافی برای یک نقطهٔ زینی آن است که $B^2-AC>0$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikClass

با استفاده از شرایط کوشی ـ ریمان دربارهٔ $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$، نشان دهید که هیچیک از توابع $u(x,y)$ و $v(x,y)$ در یک ناحیهٔ متناهی از صفحهٔ مختلط بیشینه یا کمینه ندارند.

حل

$$A=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=-\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}$$

این مسئله را یا برای u باید بنویسیم یا برای v

$$B=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$$

$$C=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}$$

$$B=-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

این نامساوی همواره برقرار است

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right)^2>0$$

یعنی آن شرط برای نقاط زینی برقرار است.

$$A=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\quad,\quad B=\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$C=\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2>0$$

۶ـ۲ـ۵ـ تابع تحلیلی $w(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ را چنان بیابید که :

(الف) $u(x,y)=x^3-3xy^2$ (ب) $v(x,y)=e^{-y}\,\mathrm{Sin}x$

حل چون تابع تحلیلی است شرایط کوشی ـ ریمان برقرار است.

(الف) (۱) $\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2=\frac{\partial v}{\partial y}\Rightarrow v=3x^2y-y^3+g(x)$ (۳)

(۲) $\frac{\partial u}{\partial y}=-6xy=\frac{-\partial v}{\partial x}\Rightarrow\frac{\partial v}{\partial x}=6xy$

(۴) $v=3x^2y+f(y)$

$$(1),(3)\Rightarrow\begin{cases}g(x)=0\\ f(y)=-y^3\end{cases}\Rightarrow v=3x^2y-y^3$$

$$\boxed{f(z)=-(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

(ب) (۱) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=-e^{y}\,\mathrm{Sin}x \Rightarrow u=-e^{-y}\,\mathrm{Cos}x+g(y) \quad (۳)$

(۲) $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-\partial v}{\partial x}=-e^{-y}\mathrm{Cos}x \Rightarrow u=e^{-y}\,\mathrm{Cos}x+h(x) \quad (۴)$

(۲) , (۴) $\Rightarrow \quad u=e^{-y}\,\mathrm{Cos}x+c$

$f(z)=e^{-y}\,\mathrm{Cos}x+ie^{-y}\,\mathrm{Sin}x+c=e^{-y}\,(\mathrm{Cos}x+i\mathrm{Sin}x)+c$

$=e^{-y}\,e^{ix}+c=e^{i(x+iy)}+c \quad \Rightarrow$

$$\boxed{f(z)=e^{iZ}+c}$$

۶ـ۲ـ۶ـ اگر ناحیهٔ مشترکی وجود داشته باشد که در آن $w_1=u(x,y)+iv(x,y)$ و $w_2=w_1^*=u(x,y)-iv(x,y)$ هر دو تحلیلی باشند ثابت کنید که $u(x,y)$ و $v(x,y)$ ثابت‌اند.

حل

$w_1=u+iv \qquad (۱) \quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

$w_1^*=u-iv \qquad (۲) \quad \frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}$

(۱) , (۲) $\Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial y} \quad (۳) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial y} \quad (۴)$

u و v باید ثابت باشند تا (۳) و (۴) برقرار باشد.

$\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad v=\mathrm{Const}$

$\frac{\partial u}{\partial y}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad u=\mathrm{Const}$

از هر دو نتیجه گرفته می‌شود که u و v ثابت‌اند.

۶ـ۲ـ۸ـ با استفاده از $f(re^{i\theta})=R(r,\theta)\,e^{i\Theta(r,\theta)}$ که در آن $R(r,\theta)$ و $\Theta(r,\theta)$ توابع حقیقی مشتق‌پذیر از r و θ اند. نشان دهید که شرایط کوشی ـ ریمان در مختصات قطبی عبارت‌اند از

(الف) $\frac{\partial R}{\partial r}=\frac{R}{r}\frac{\partial \Theta}{\partial \theta}$ (ب) $\frac{\partial R}{r\partial \theta}=-R\frac{\partial \Theta}{\partial r}$

[راهنمایی: مشتق را ابتدا نسبت به δZ شعاعی و سپس نسبت به δZ مماسی بدست آورید.]

حل

$f(re^{i\theta})=R(r,\theta)\,e^{i\Theta(r,\theta)}$

$$z=re^{i\theta} \quad \rightarrow \quad \begin{cases}\delta z=e^{i\theta}\delta r+ire^{i\theta}\delta\theta \\ \delta f=e^{i\Theta}\delta R+iRe^{i\Theta}\delta\Theta\end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{\delta f}{\delta z}=\frac{e^{i\Theta}\delta R+iRe^{i\Theta}\delta\Theta}{e^{i\theta}\delta r+ire^{i\theta}\delta\theta}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\lim_{\delta z\to 0}\frac{\delta f}{\delta z}=\frac{df}{dz}=\lim_{\substack{\delta r\to 0\\ \delta\theta\to 0}}\frac{e^{i\Theta}\delta R+iRe^{i\Theta}\delta\Theta}{e^{i\theta}\delta r}$$

$\delta r=0$ یعنی از مسیر $r=cte$ عبور کرده و $\delta\theta=0$ یعنی از مسیر $\theta=cte$ عبور کرده

$$\lim_{\delta z\to 0}\frac{\delta f}{\delta z}=\frac{e^{i\Theta}\,\partial R}{e^{i\theta}\,\partial r}+\frac{iRe^{i\Theta}\,\partial^{\theta}}{e^{i\theta}\,\partial r}\qquad(1)$$

$$\frac{df}{dz}=\lim_{\substack{\delta r\to 0\\ \delta\theta\to 0}}\frac{e^{i\Theta}\delta R+iRe^{i\Theta}\delta\Theta}{ire^{i\theta}\delta\theta}-=\frac{e^{i\Theta}\,\partial R}{ire^{i\theta}\,\partial\theta}+\frac{Re^{i\Theta}\,\partial\Theta}{re^{i\theta}\,\partial\theta}$$

$$=\frac{-ie^{i\Theta}\,\partial R}{re^{i\theta}\,\partial\theta}+\frac{Re^{i\Theta}\,\partial\Theta}{re^{i\theta}\,\partial\theta}\qquad(2)$$

$$(1),(2)\quad\Rightarrow\quad\frac{Re^{i\Theta}}{e^{i\theta}}\frac{\partial\Theta}{\partial r}=\frac{-ie^{i\Theta}\,\partial R}{re^{i\theta}\,\partial\theta}$$

$$\Rightarrow\quad\boxed{R\frac{\partial\Theta}{\partial r}=\frac{-1}{r}\frac{\partial R}{\partial\theta}}\qquad(\text{ب})$$

$$\Rightarrow\quad\frac{Re^{i\Theta}}{re^{i\theta}}\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}=\frac{e^{i\Theta}\,\partial R}{e^{i\theta}\,\partial r}\quad\Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial R}{\partial r}=\frac{R}{r}\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}}\qquad(\text{الف})$$

۶-۲-۹- بعنوان تعمیم مسئله ۶-۲-۸ نشان دهید که $\Theta(r,\theta)$ در معادلهٔ لاپلاس در مختصات قطبی معادله ۲-۳۳ (بدون جملهٔ آخر) صدق می‌کند.

حل

$$\begin{cases}\dfrac{\partial R}{\partial r}=\dfrac{R}{r}\dfrac{\partial\Theta}{\partial\theta}\qquad(1)\\[2ex]\dfrac{\partial R}{r\partial\theta}=-R\dfrac{\partial\Theta}{\partial r}\qquad(2)\end{cases}$$

$\frac{\partial}{\partial r}$ را در طرفین (۲) اثر می‌دهیم:

$$(2)\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial\Theta}{\partial r}=\frac{-1}{Rr}\frac{\partial R}{\partial\theta}\Rightarrow\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial\theta}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{-1}{Rr}\frac{\partial R}{\partial\theta}\right)$$

$$\frac{\partial^{2}\Theta}{\partial r^{2}}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial R}{Rr\partial\theta}\right)=\left[\frac{\partial}{r\partial r}\left(\frac{1}{R}\right)\frac{\partial R}{\partial\theta}-\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial R}{\partial\theta}+\frac{1}{Rr}\frac{\partial^{2}R}{\partial r\,\partial\theta}\right]$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial r^2}=\frac{1}{rR^2}\frac{\partial R}{\partial r}\frac{\partial R}{\partial\theta}+\frac{1}{Rr^2}\frac{\partial R}{\partial\theta}-\frac{1}{Rr}\frac{\partial^2 R}{\partial\theta\partial r}$$

$$=\frac{1}{rR^2}\frac{\partial R}{\partial\theta}\left(\frac{R}{r}\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{Rr^2}\left(-rR\frac{\partial\Theta}{\partial r}\right)+\frac{1}{Rr}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{R}{r}\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)\right)$$

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial r^2}=\frac{1}{rR^2}\times\frac{R}{r}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2}+\frac{1}{rR^2}\frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial\theta}+\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial\Theta}{\partial r}-\frac{1}{Rr^2}\frac{\partial R}{\partial\theta}\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}-\frac{R}{r^2R}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2}\Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2}$$

۶ـ۲ـ۱۰ـ جریان سیال ناچرخشی دوبعدی را به کمک پتانسیل مختلط $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ به راحتی توصیف می‌کنند. جزء حقیقی، $u(x,y)$ را پتانسیل سرعت و جزء موهومی $v(x,y)$ را تابع جریان می‌نامیم و سرعت سیال، V، از رابطهٔ $V=\nabla u$ بدست می‌آید. اگر $f(z)$ تحلیلی باشد (الف) نشان دهید $\frac{df}{dz}=V_x-iV_y$. (ب) نشان دهید $\vec{\nabla}.\vec{V}=0$ (چشمه یا چاهکی وجود ندارد). (ج) نشان دهید $\vec{\nabla}\times\vec{V}=0$ (جریان ناچرخشی، نامتلاطم)

حل

(الف) $\vec{V}=\nabla u=\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}\right)u=\hat{i}\frac{\partial u}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial u}{\partial y}$

چون f تحلیلی است.

$$\frac{df}{dz}=\frac{df}{dz}\Big|_{y=cte}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

شرایط کوشی ـ ریمان: $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\Rightarrow\frac{df}{dz}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$

در مقایسه با $\vec{V}=V_x\hat{i}+V_y\hat{j}$

$$V_x=\frac{\partial u}{\partial x},\ V_y=\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\boxed{\frac{df}{dz}=V_x-iV_y}$$

(ب) $\vec{\nabla}.\vec{V}=\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\nabla^2U=0$$

اما چون f تحلیلی است u و v [illegible] سرعت واگرا یا همگرا

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

نیست. یعنی $\vec{\nabla}.\vec{V}=0$ (چشمه یا چاهکی وجود ندارد).

(ج) $$\vec{\nabla}\times\vec{V}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\hat{k}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)=0$$

جریان یکنواخت است.

بخش ٦ـ۳ـقضیه انتگرال کوشی — مسائل صفحه ۵۰۷

۶ـ۳ـ۳ـ ثابت کنید:

$$\left|\int_C f(Z)\,dZ\right| \le |f|_{Max}.L$$

که در آن $|f|_{Max}$ مقدار بیشینهٔ $|f(z)|$ در طول پربند C و L طول پربند است.

حل

$$\left|\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(L_i-L_j-1)\right| \le \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left|f(\xi_i)(L_i-L_i-1)\right|$$

طبق فرمول $|z_1|+|z_2|\ge|z_1+z_2|$

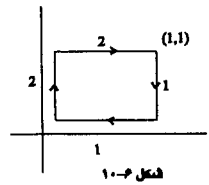
$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \int_C \left|f(z)\,dz\right|$$

$$\le \int_C \left|f(z)\right|\,dz\,| = |f|_{Max}\int_C dz = |f|_{Max}.L$$

۶ـ۳ـ۴ـ تحقیق کنید که انتگرال $\int_{0,0}^{1,1} z^* dz$ به مسیر بستگی دارد برای انجام این کار انتگرال را روی دو مسیری محاسبه کنید که در شکل ۶-۱۰ نشان داده شده است.

[یادآوری: یادآوری می‌کنیم که $f(z)=z^*$ تابعی تحلیلی از z نیست و در نتیجه قضیه انتگرال کوشی هم به کار نمی‌آید].

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass



شکل ۶-۱۰

حل

مسیر ۱ ⇒ $$\int_{0,0}^{1,1} z^* dz = \int_{0,0}^{1,0} (x-iy)(dx+idy) + \int_{1,0}^{1,1} (x-iy)(dx+idy)$$

برای انتگرال اولی $dy=0$ است و $y=0$ و برای انتگرال دوم $dx=0$ و $x=1$ است.

$$\Rightarrow \int_{0,0}^{1,1} z^* dz = \int_0^1 x\,dx + \int_0^1 (1-iy)(dx+idy) = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + iy\Big|_0^1 + \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = i+1$$

مسیر ۲ ⇒ $$\int_{0,0}^{1,1} z^* dz = \int_{0,0}^{0,1} (x-iy)(dx+idy) + \int_{0,1}^{1,1} (x-iy)(dx+idy)$$

در اینجا برای انتگرال اول $dx=0$ و $x=0$ است و انتگرال دوم $dy=0$ و $y=1$ می‌باشد.

$$\Rightarrow \int_{0,0}^{1,1} z^* dz = \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - i = 1-i$$

انتگرال به مسیر بستگی دارد.

۶-۳-۵- نشان دهید:

$$\oint \frac{dz}{z^2+z} = 0$$

که در آن پربند C دایره‌ای است که با $|z| = R > 1$ تعریف می‌شود.

[راهنمایی: استفاده مستقیم از قضیه انتگرال کوشی غیرمجاز است چرا؟ انتگرال را می‌توان با تبدیل به مختصات قطبی و استفاده از جدولها محاسبه کرد. روش بهتر استفاده از حساب مانده‌ها بخش ۷-۲ است با این روش به ازای $R>1$ صفر و به ازای $R<1$ کمیت $2\pi i$ بدست می‌آید.]

حل

$$|z| = R > 1 \quad z = re^{i\theta} \quad \Rightarrow \quad dz = ire^{i\theta} d\theta$$

$$\oint \frac{dz}{z^2+z} = \oint \frac{dz}{z} - \oint \frac{dz}{z+1} = \oint \frac{ire^{i\theta}d\theta}{re^{i\theta}} - \oint \frac{ire^{i\theta}d\theta}{re^{i\theta}} = 2\pi i - 2\pi i = 0$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

بخش ٦ـ۴ـ فرمول انتگرال کوشی — مسائل صفحه ۵۱۲

۶ـ۴ـ۱ـ نشان دهید :

$$\oint_C (z-z_\circ)^n dz = \begin{cases} ۲\pi i & n=-۱ \\ \circ & n\neq -۱ \end{cases}$$

که پربند C نقطهٔ $z=z_\circ$ را در سوی مثبت (پاد ساعتگرد) دور می‌زند. توان n یک عدد صحیح است. این نتیجه، شالودهٔ حساب مانده‌ها در فصل ۷ را تشکیل می‌دهد.

حل

$$n=-۱ \Rightarrow \oint_C (z-z_\circ)^{-۱} dz = \int_C \frac{dz}{z-z_\circ} \qquad \begin{matrix} f(z)=۱ \\ f(z_\circ)=۱ \end{matrix}$$

$$=۲\pi i\, f(z_\circ)$$

$$\begin{cases} n\neq -۱ \\ n>\circ \end{cases} \qquad f(z)=(z-z_\circ)^n$$

یعنی $f(z)$ در پربند c تحلیلی است و در هیچ نقطه‌ای معین نیست طبق قضیه انتگرال کوشی داریم:

$$\oint_C f(z)dz = \circ$$

$$\begin{cases} n\neq -۱ \\ n<\circ \end{cases} \qquad f^n(z) = \frac{n!}{۲\pi i}\oint \frac{dz}{(z-z_\circ)^{n+۱}}$$

چون $f(z)=۱$ است غیر از مشتق صفرم که حالت اول بود بقیه مشتقات صفرند.

$$\Rightarrow \oint \frac{dz}{(z-z_\circ)^n} = \circ$$

۶ـ۴ـ۲ـ نشان دهید که به ازای اعداد صحیح m و n

$$\frac{۱}{۲\pi i}\oint z^{m-n-۱}\, dz$$

(با پربندی که مبدأ را یکبار در سوی پاد ساعتگرد دور بزند) نمایشی است برای دلتای کرونکر $\delta_{m,n}$.

حل

$$\text{IF} \quad m=n \Rightarrow I=\frac{۱}{۲\pi i}\oint z^{-۱}dz = \frac{۱}{۲\pi i}\oint \frac{dz}{z} = \frac{۱}{۲\pi i}\, ۲\pi i = ۱$$

چون z^{m-n} تحلیلی است پس $z_\circ=\circ$ یک نقطه تکین است.

$$\text{IF} \quad m\neq n \Rightarrow I=\frac{۱}{۲\pi i}\oint \frac{z^{m-n}}{z}dz = \frac{۱}{۲\pi i}\left(۲\pi i\, f(z_\circ)\right) = \circ^{m-n} = \circ$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\delta_{m,n}\begin{cases} m\neq n & \Rightarrow \quad \delta_{m,n}=0 \\ m=n & \Rightarrow \quad \delta_{m,n}=1 \end{cases}$$

۶-۲-۳- در مسئله ۶-۳-۵ انتگرال- را به کسرهای جزئی تجزیه کنید. آنگاه با استفاده از قضیهٔ انتگرال کوشی برای نواحی همبند چندگانه آن را حل کنید.

حل

$$\oint \frac{dz}{z^2+z}=? \qquad \frac{1}{z^2+z}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z+1} \qquad \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

$$\oint \frac{dz}{z^2+z}=\oint \frac{dz}{z}-\oint \frac{dz}{z+1}$$

در اینجا $f(z)=1$ است و مستقل از z است یعنی $f(z_0)=1$ است.

$$\oint \frac{f(z)\,dz}{z-z_0}=2\pi i\, f(z_0)$$

$$\oint \frac{dz}{z^2+z}=2\pi i\, f(z_0)-2\pi i\, f(z_0)=0$$

۶-۲-۵- با فرض آنکه $f(z)$ در داخل پربند بستهٔ c و روی آن تحلیلی و z_0 نقطه‌ای در داخل c باشد نشان دهید

$$\oint_C \frac{f'(z)}{(z-z_0)}dz=\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$$

حل با فرض $u=f$ از فرمول انتگرال جزء به جزء داریم:

$$\oint \frac{\frac{df}{dz}}{z-z_0}dz=\oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz \;;\; \int v\,du=vu-\int u\,dv$$

$$v=\frac{1}{z-z_0} \quad \Rightarrow \quad dv=\frac{-dz}{(z-z_0)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \oint \frac{df}{z-z_0}=\frac{f(z)}{(z-z_0)}\Bigg|_{z_1}^{z}-\oint \frac{f(z)(-dz)}{(z-z_0)^2} \quad \Rightarrow$$

$$\oint \frac{df}{z-z_0}=\oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz \quad , \quad df=f'(z)\,dz$$

$$\oint \frac{dz\,f'(z)}{z-z_0}=\oint \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^2}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

۶ـ۲ـ۶ـ می‌دانیم که تابع $f(z)$ در داخل پربند بسته c و روی آن تحلیلی است. حدس می‌زنیم که مشتق مرتبهٔ n ام، $f^{n}(z)$ از رابطهٔ زیر بدست می‌آید.

$$f^{n}(z_{\circ})=\frac{n!}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{(z-z_{\circ})^{n+1}}dz$$

با استفاده از روش استقرای ریاضی، ثابت کنید که این عبارت صحیح است.

حل

$$n=1 \quad\Rightarrow\quad f'(z_{\circ})=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{(z-z_{\circ})^{2}}dz \quad (1)$$

فرض:

$$n=k \quad\Rightarrow\quad f^{k}(z_{\circ})=\frac{k!}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{(z-z_{\circ})^{k+1}}dz$$

حکم

$$n=k+1 \quad\Rightarrow\quad f^{k+1}(z_{\circ})=\frac{(k+1)!}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{(z-z_{\circ})^{k+2}}dz$$

رابطه (۱) را در فرض ضرب می‌کنیم.

$$f^{k}(z_{\circ})f'(z_{\circ})=\frac{k!}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{(z-z_{\circ})^{k+1}}dz\,\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{(z-z_{\circ})^{2}}dz$$

$$\Rightarrow\quad f^{k+1}(z_{\circ})=\frac{(k+1)!}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{(z-z_{\circ})^{k+2}}dz$$

۶ـ۲ـ۷ـ نشان دهید

$$\left|f^{n}(z_{\circ})\right|\le\frac{Mn!}{R^{n}}$$

که R شعاع دایره‌ای است به مرکز $z=z_{\circ}$ و M مقدار بیشینه $|f(z)|$ روی دایره است. فرض کنید که $f(z)$ در داخل و روی دایره تحلیلی باشد.

حل

$$f^{n}(z_{\circ})=\frac{n!}{2\pi i}\oint\frac{f(z)\,dz}{(z-z_{\circ})^{n+1}}=\frac{n!}{2\pi i}\oint\frac{f(z)\,dz}{(z-z_{\circ})^{n+1}}$$

$$\left|f^{n}(z)\right|=\frac{n!}{|2\pi i|}\left|\oint\frac{f(z)\,dz}{(z-z_{\circ})^{n+1}}\right|=\frac{n!}{2\pi}\left|\oint\frac{f(z)\,dz}{(z-z_{\circ})^{n+1}}\right|\le$$

$$\frac{n!}{2\pi}\oint\frac{|f(z)|\,|dz|}{|(z-z_{\circ})^{n+1}|}\le\frac{n!}{2\pi}\times\frac{M}{R^{n+1}}\times 2\pi R=\frac{Mn!}{R^{n}}$$

PhysicsClassroom.com
Telegram.me/FizikCalass

۶-۴-۸- اگر $f(z)$ به ازای همهٔ مقادیر z تحلیلی و کراندار باشد [ثابت و $|f(z)| \leq M$] نشان دهید که $f(z)$ باید ثابت باشد این گزاره قضیه لیوویل است.

حل a و b هر دو مختلط هستند.

$$f(b)-f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-b}dz-\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz\left[\frac{1}{z-b}-\frac{1}{z-a}\right]=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{(b-a)f(z)\,dz}{(z-b)(z-a)}$$

$$|z-a|=r \quad , \quad |z-b|=|z-a+a-b|\geq|z-a|-|a-b|=r-|a-b|$$

r را آنقدر بزرگ انتخاب می‌کنیم که $|a-b|<\frac{r}{2}$ باشد می‌خواهیم تکلیف $|a-b|$ را مشخص کنیم اگر بجای $|a-b|$ یک مقدار بزرگترش را قرار دهیم نتیجه می‌شود:

$$|z-b|\geq r-\frac{r}{2}=\frac{r}{2}$$

طبق مسئله ۶-۳-۳ داریم $\left|\oint f(z)\,dz\right|\leq f_{Max}\,.\,L=LM$

$$\left|f(b)-f(a)\right|=\frac{|b-a|}{2\pi}\left|\oint\frac{f(z)\,dz}{(z-b)(z-a)}\right|\leq\frac{|b-a|\,M2\pi r}{2\pi(\frac{r}{2})r}=\frac{2(b-a)}{r}$$

دو مقدار از تابع را در صفحه مختلط حساب کرده‌ایم $f(Z)$ قرار شد تحلیلی باشد برای همین شعاع را می‌توانیم انتخاب کنیم برای اینکه حاصل بالا صفر شود و این یعنی $f(b)=f(a)$ چون a و b هر دو می‌توانند باشند پس مقدار تابع در هر دو نقطه از این صفحه مقداری است ثابت و این چیزی است که مسئله تحت عنوان قضیه خواسته است.

۶-۴-۹- قضیه اصلی جبر بعنوان نتیجه‌ای از قضیه لیوویل مسئله ۶-۴-۸ نشان دهید که هر معادله چند جمله‌ای بصورت زیر

$$P(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n=0$$

دست کم یک ریشه دارد. در اینجا $n>0$ و $a_n\neq 0$

[راهنمایی: فرض کنید $f(z)=\frac{1}{P(z)}$.]

[یادآوری: همین که نتیجه بالا محقق شد می‌توانیم بر ریشه تقسیم کنیم و همین فرآیند را برای چند جمله‌ای درجه (n-۱) ام حاصل تکرار کنیم با این کار سرانجام به این نتیجه خواهیم رسید که

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$P(z)$ دقیقاً n ریشه دارد.]

حل اگر $P(z)=0$ نباشد (ریشه نداشته باشد) می‌توانیم $f(z)$ را بصورت $\frac{1}{P(z)}$ تعریف کنیم. هنگامیکه $z\to\infty$، $f(z)\to 0$ میل می‌کند در نتیجه $f(z)$ کراندار است و طبق قضیه لیوویل باید ثابت باشد چون $P(z)$ ثابت نیست با هم متناقض‌اند و باید $P(z)=0$ باشد یعنی دست کم یک ریشه داشته باشد.

$$P(z)=a_1(z-\alpha)+a_2(z^2-\alpha^2)+\dots+a_n(z^n-\alpha^n)=(z-\alpha)Q(z)$$

توان $Q(z)$ از درجه $n-1$ است.

۶ـ۲ـ۱۰ـ (الف) تابع $f(z)$ در داخل پربند بستهٔ c و روی آن تحلیلی (و روی c پیوسته) است اگر در داخل c، $f(z)\neq 0$ و روی c، $|f(z)|\geq M$ باشد نشان دهید که به ازای همهٔ نقاط داخل c: $|f(z)|\geq M$

[راهنمایی: فرض کنید $w(z)=\frac{1}{f(z)}$]

(ب) اگر در داخل پربند c، $f(z)=0$ نشان دهید که نتیجهٔ بند قبل برقرار نیست و می‌شود که در یک یا چند نقطه در داخل $|f(z)|=0$ و روی تمامی پربند مرزی $|f(z)|>0$. یک تابع تحلیلی برای نمونه ذکر کنید که چنین رفتاری داشته باشد.

حل $|w(z)|=\left|\frac{1}{f(z)}\right|$ $\quad f(z)\neq 0 \Rightarrow |z|\to\infty \Rightarrow |f(z)|\to\infty$

$w(z)=0 \Rightarrow w(z)=$ کراندار است

طبق مسئله ۶-۴-۸ $w(z)$ ثابت است و بنابراین $|f(z)|$ ثابت است بنابراین در داخل و روی منحنی c دارای یک مقدار باشد.

نمی‌توان از قضیه لیوویل استفاده کرد. $f(z)=$ $\to$ کراندار $w(z)$ $\to$

بخش ۶ـ۵ـ بسط لوران — مسائل صفحه ۵۲۳

۶ـ۵ـ۱ـ بسط تایلور $Ln(1+z)$ را بدست آورید:

حل

$$f(z)=f(z_0)+\frac{f'(z_0)}{1!}z+\frac{f''(z_0)}{2!}z^2+\frac{f'''(z_0)}{3!}z^3+\dots$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\mathrm{Ln}(1+0)=0$$

جمله دوم

$$f'(z)\Big|_{z_0}=\frac{1}{1+z}\Big|_{z_0}=\frac{1}{1}=1$$

جمله سوم

$$f''(z)\Big|_{z_0}=\frac{1}{(1+z)^2}=\frac{-1}{(1+0)^2}=-1$$

$$\mathrm{Ln}(1+z)=z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$$

مسئله ۶ـ۵ـ۲ بطور مشابه

۶ـ۵ـ۳ـ تابع $f(z)$ روی دایرهٔ به شعاع واحد و داخل آن تحلیلی است. همچنین به ازای $|z|\le 1$ داریم $|f(z)|\le 1$ و $f(0)=0$. نشان دهید که به ازای $|Z|\le 1$ و $|f(z)|\le|z|$.

[راهنمایی: یکی از رهیافتها می‌تواند این باشد که نشان دهیم $\frac{f(z)}{z}$ تحلیلی است. آنگاه $\left[\frac{f(z_0)}{z_0}\right]^n$ را به کمک فرمول انتگرال کوشی تعریف کنیم. سرانجام با در نظر گرفتن قدرمطلقها ریشهٔ n ام بگیریم. این مسئله را قضیه شوارتز نیز می‌نامند.]

حل

$$z-z_0=re^{i\theta}\ \Rightarrow\ z_0=a\ \Rightarrow\ z=a+re^{i\theta}$$

$$dz=ire^{i\theta}d\theta\ \Rightarrow\ f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z)\,dz}{z-a}$$

$$\Rightarrow\ f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(a+re^{i\theta})\,ire^{i\theta}}{re^{i\theta}}d\theta=\frac{1}{2\pi}\oint f(a+re^{i\theta})d\theta$$

$$\Rightarrow\ |f(a)|\le\left|\frac{1}{2\pi}\oint f(a+re^{i\theta})\,d\theta\right|\qquad(1)$$

حال فرض کنیم که $f(a)$ یک ماکزیمم است بنابراین $|f(a)|\ge|f(a+re^{i\theta})|$ که اگر $|f(a)|<|f(a+re^{i\theta})|$ باشد پس بوسیله پیوستگی f یک کمان محدود خواهیم داشت که می‌گوید $\theta_1<\theta<\theta_2$

اما در چنین مواردی مقدار $|f(a+re^{i\theta})|$ کمتر است به ازای همه

Physics Classroom Telegram.me/FizikCalass

مقادیر متناقض با چیزی است که در (۱) بدست آوردیم بنابراین آن نشان می‌دهد که برای هر محدوده‌هایی از اطراف a برای $|z-a| < \delta$، $f(z)$ باید ثابت باشد اگر $f(z)$ ثابت نباشد در آنصورت ماکزیمم مقدار $|f(z)|$ باید روی محدوده c باشند.

$$f(z) \text{ تحلیلی} \rightarrow |z| \le R \rightarrow f(0)=0 \quad , \quad |f(z)| \le M \Rightarrow \left|\frac{f(z)}{z}\right| \le \frac{M}{R}$$

تابع $\frac{f(z)}{z}$ در $|z| \le R$ تحلیلی است چراکه $f(z)$ تحلیلی است و ما دایره واحد را طوری در نظر گرفتیم که z صفر نشود.

از اینرو روی $|z| = R$ ما طبق قضیه ماکزیمم مرول خواهیم داشت

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| \le \frac{M}{R} \quad , \quad M=1, R=1 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{f(z)}{z}\right| \le 1 \quad \Rightarrow \quad |f(z)| \le |z|$$

۶ـ۵ـ۲ـ اگر $f(z)$ تابعی حقیقی از تغییر مختلط z باشد و بسط لوران حول مبدأ. $f(z)=\sum a_n z^n$ به ازای $n<-N$ داشته باشد $a_n=0$ نشان دهید که تمام ضرایب a_n حقیقی‌اند.

حل

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z')\,dz'}{(z'-z_0)^{n+1}}$$

$$f^n(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint \frac{f'(z')\,dz'}{(z'-z_0)^{n+1}} \Rightarrow 2\pi i a_n = \frac{2\pi i}{n!} f^n(z_0)$$

$$\Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{n!} f^n(z_0)$$

چون $f(z)$ یک تابع حقیقی است.

بنابراین مشتقات آن نیز حقیقی خواهد بود و در نتیجه a_n نیز حقیقی خواهد بود.

۶ـ۵ـ۵ـ تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در شرایط مربوط به اصل انعکاس شوارتز صدق می‌کند نشان دهید (الف) u تابع زوجی است از y

(ب) v تابع فردی است از y.

حل

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

شرایط مربوط به اصل انعکاس شوارتز را برآورده می‌کند.

$$\Rightarrow \quad f(z^*)=f^*(z)$$

$$f^*(z)=u(x,y)-iv(x,y)$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$z=x+iy \Rightarrow z^*=x-iy=x+i(-y) \Rightarrow$

$f(z^*)=f(x,-y)=u(x,-y)+iv(x,-y)$

$f(z^*)=f^*(z)=u(x,y)-iv(x,y)=u(x,-y)+iv(x,-y)$

$\begin{cases} u(x,y)=u(x,-y) & \text{u تابعی زوج از y است.} \\ -v(x,y)-v(x,-y) & \text{v تابعی فرد از y است.} \end{cases}$

۶ـ۵ـ۶ تابع $f(z)$ را می‌توان در یک سری لوران حول مبدأ با ضریب a_n حقیقی بسط داد. نشان دهید که همیوغ مختلط این تابع z، عبارت است از همین تابع از همیوغ مختلط z، یعنی $f^*(z)=f(z^*)$

درستی این نتیجه را به صراحت به ازای: (الف) $f(z)=z^n$، n عدد درست و (ب) $f(z)=\text{Sin}z$ (ج) تحقیق کنید اگر $f(z)=e^{iz}$، $(a_1=i)$ نشان دهید که رابطهٔ بالا برقرار نیست.

حل

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \quad \text{حول مبدأ}$$

$$f^*(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^* (z^n)^*$$

داریم:

$$(z^n)^* = (z^*)^n$$

$$\Rightarrow \quad f^*(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z^*)^n = f(z^*) \Rightarrow f^*(z)=f(z^*)$$

چون $(z^n)^*=(z^*)^n$ با معکوس کردن داریم:

$$\frac{1}{(z^*)^n}=\frac{1}{(z^n)^*}$$

برای تابع (الف) یعنی $f(z)=z^n$

$$f^*(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z^*)^n = f(z^*) \Rightarrow f^*(z)=f(z^*)$$

در صفحه ۵۱۷ فرمول ۶-۵۷ را داریم:

$$g^*(z)=(z-x_0)^{n*}=(z^*-x_0)^n=g(z^*)$$

پس $(z^n)^*=(z^*)^n$

(ب) $u+iv=g(z)=\text{Sin}z$

$g(z)=\text{Sin}(x+iy)=\text{Sin}x\text{Cosh}y+\text{Cos}x\text{Sinh}y$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$\text{Sin}z=\text{Sin}x\ \text{Cosh}y + i\text{Sinh}y\ \text{Cos}x$

$(\text{Sin}z)^*=\text{Sin}x\ \text{Cosh}y-i\text{Sinh}y\ \text{Cos}x \qquad (۱)$

$\text{Sin}z^*=\text{Sin}x\ \text{Cosh}y-i\text{Sinh}y\ \text{Cos}x \qquad (۲)$

$(۱)\ ,\ (۲) \Rightarrow (\text{Sin}z)^*=\text{Sin}z^*$

Sinz روی محور حقیقی $\text{Sin}x(y=۰)$ است که حقیقی است و مشتق آن هم Cosz روی محور حقیقی Cosx است که حقیقی است یعنی شرایط انعکاس شوارتز را دارد.

(ج) $f(z)=iz$ موهومی است و مشتق آن یعنی $f'(z)=i$ روی محور حقیقی است یعنی شرایط انعکاس شوارتز را ندارد پس باید $f^*(z)\neq f(z^*)$

$f^*(z)=(i)^*z^*=-i(x-iy) \Rightarrow f^*(z)=-ix-y$

$f(z^*)=iz^*=i(x-iy)=ix+y \neq f^*(z)$

۶ـ۵ـ۷ـ راه حلی مشابه مسئله قبل دارد.

۶ـ۵ـ۹ـ ثابت کنید که بسط لوران یک تابع معلوم حول یک نقطه معین یکتاست. یعنی اگر

$$f(z)=\sum_{n=-N}^{\infty} a_n(z-z_۰)^n=\sum_{n=-N}^{\infty} b_n(z-z_۰)^n$$

نشان دهید که برای همهٔ مقادیر n داریم: $a_n=b_n$

[راهنمایی: از فرمول انتگرال کوشی استفاده کنید.]

حل

$$f^n(z)=\frac{n!}{۲\pi i}\oint\frac{f(z)dz}{(z-z_۰)^{n+۱}} \quad , \quad a_n=\frac{۱}{۲\pi i}\oint\frac{f(z)\,dz}{(z-z_۰)^{n+۱}}$$

$$\Rightarrow \oint\frac{f(z)\,dz}{z-z_۰}=\frac{۲\pi i\, f^n(z)}{n!}$$

چون $f^n(z)$ یا مشتقهای $a_n=\frac{۱}{۲\pi i}\times\frac{۲\pi i}{n!}f^n(z)=\frac{۱}{n!}f^n(z)$

متوالی یک تابع منحصر به فردند پس a_n نیز منحصر به فرد است. $a_n=b_n$

۶ـ۵ـ۱۰ـ (الف) بسط لوران تابع $f(z)=\left[z(z-۱)\right]^{-۱}$ را حول نقطهٔ $z=۱$ چنان انجام دهید که به ازای مقادیر کوچک $|z-۱|$ برقرار باشد. گسترهٔ دقیقی را مشخص کنید که در بسط حاصل صدق می‌کند این یک ادامهٔ تحلیلی معادلهٔ ۶-۷۵ است. (ب) بسط لوران $f(z)$ حول $z=۱$ را به ازای مقادیر بزرگ

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

حل

$$f(z)=\frac{1}{z(z-1)}=\frac{1}{(z-1)}\frac{1}{z}=\frac{1}{z-1}\times\frac{1}{1-(1-z)}=\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(1-z)^n$$

$$=-\sum_{n=-1}^{\infty}(1-z)^n=\frac{-1}{1-z}=1-(1-z)-(1-z)^2+\dots$$

$|1-z|<1$ همگراست (مخصوص zهای کوچک)

و برای zهای بزرگ حول $z_0=0$

$$f(z)=\frac{1}{z(z-1)}=\frac{1}{z}\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\frac{1}{z(1-\frac{1}{z})}=\frac{1}{z^2}\times\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

$$=\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^n \Rightarrow \boxed{f(z)=\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{z})^n}$$

بخش ٦ـ٦ـ نگاشت — مسائل صفحه ۵۳۴

۶ـ۶ـ۲ـ ناحیهٔ داخل دایرهٔ واحد در صفحه w نظیر چه بخشی از صفحه z است هرگاه داشته باشیم (الف) $w=\frac{z-1}{z+1}$ (ب) $w=\frac{z-i}{z+i}$

حل برای w مختصات قطبی انتخاب شود بهتر است چون گفته چه قسمت از دایره در درون صفحه w باشد.

(الف)

$$\rho e^{i\phi}=\frac{x+iy-1}{x+iy+1}=\frac{x+iy-1}{x+iy+1}\times\frac{x-iy+1}{x-iy+1}=\frac{x^2+y^2-1+2iy}{(x+1)^2+y^2}$$

$$\rho e^{i\phi}=\frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2}+i\frac{2y}{(x+1)^2+y^2}$$

$$\rho=\frac{\sqrt{(x^2+y^2-1)^2+(2y)^2}}{(x+1)^2+y^2}\quad,\quad \tan\phi=\frac{2y}{x^2+y^2-1}\Rightarrow$$

$$\phi=\tan^{-1}\frac{2y}{x^2+y^2-1}$$

منظور این مسئله این است که

$\rho<1$ و $0\le\phi\le 2\pi$ باید در صفحه w باشد

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\rho < 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(x^2+y^2-1)^2+(2y)^2} < (x+1)^2+y^2$$

$$(x^2+y^2-1)^2+4y^2 < (x^2+1)^2+y^4+2y^2(x^2+2x+1)$$

بعد از ساده کردن داریم:

$$4x(x^2+2x+1+y^2) > 0$$

به ازای مقادیر غیرصفر y، $-y^2$ همواره منفی است.

چون مجموعهٔ داخل پرانتز همواره مثبت است و علامت 4x می‌ماند که باید مثبت باشد یعنی x باید مثبت باشد یعنی نیمه راست صفحه z که x مثبت است حال برای ϕ اگر $x^2+y^2=1$ باشد یعنی شعاع واحد باشد $\phi=\frac{\pi}{4}$ می‌شود و اگر $y=0$ شود. $\phi=0$ یعنی برای ϕ هیچ قیدی نداریم پس تمام نقاط راست محور yها روی دایره‌ای به شعاع واحد جواب است.

۶ـ۶ـ۳ـ در مورد تبدیلهای زیر بحث کنید.

(الف) $w(z)=\text{Sin}z$ (ب) $w(z)=\text{Sinh}z$

(ب) $w(z)=\text{Cos}z$ (د) $w(z)=\text{Cosh}z$

نگاشت خطهای $x=c_1$ و $y=c_2$ در صفحهٔ w را بیابید دقت کنید که سه تبدیل آخری را می‌توان به کمک انتقال یا چرخشهای مناسب، از تبدیل اول به دست آورد.

حل

$$w(z)=\text{Sin}z$$

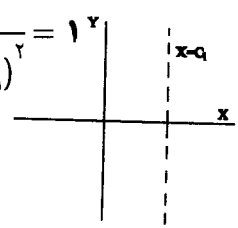
$$u+iv=\text{Sin}(x+iy)=\text{Sin}x\ \text{Cosh}y+i\text{Cos}x\ \text{Sinh}y \quad \Rightarrow$$

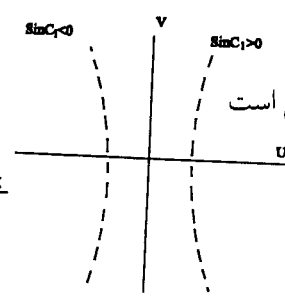
$$\begin{cases} u=\text{Sin}x\ \text{Cosh}y \\ v=\text{Cos}x\ \text{Sinh}y \end{cases} \quad x=c_1 \text{ یک خط راست} \quad \Rightarrow \begin{cases} u=\text{Sin}c_1\ \text{Cosh}y \\ v=\text{Cos}c_1\ \text{Sinh}y \end{cases}$$

$$\text{Cosh}^2y - \text{Sinh}^2y=1$$

$$\frac{u^2}{(\text{Sin}c_1)^2}-\frac{v^2}{(\text{Cos}c_1)^2}=1$$

معادله یک هذلولی است



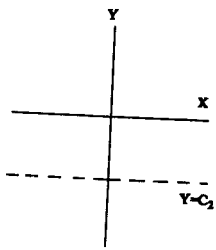


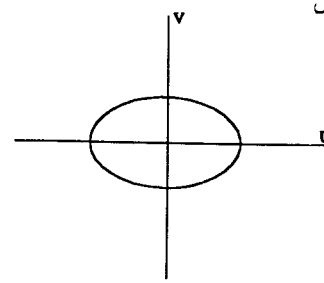
PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

برای خط $y=c_2$ داریم $\quad \sin^2 x+\cos^2 x=1$

$$\Rightarrow \begin{cases} u=\sin x\cosh c_2 \\ v=\cos x\sinh c_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{u^2}{\cosh^2 c_2}+\frac{v^2}{\sinh^2 c_2}=1$$

معادله یک بیضی





(ب) $w(z)=\cos z=\cos(x+iy)=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y$

$$\begin{cases} u=\cos x\cosh y \\ v=-\sin x\sinh y \end{cases} \Rightarrow \frac{u^2}{\cos^2 c_1}-\frac{v^2}{\sin^2 c_1}=1$$

برای $x=c_1$ معادله یک هذلولی است.

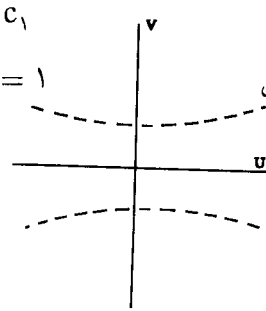
(ج) $w(z)=\cosh z=\cos iz$

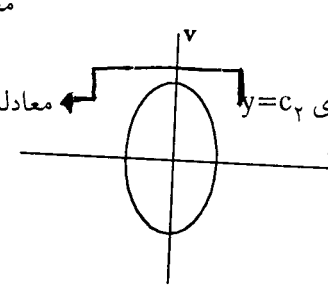
$u+iv=\cos(ix-y)=\cos ix\cos y+\sin ix\sin y \Rightarrow$

$$\begin{cases} u=\cosh x\cos y \\ v=\sinh x\sin y \end{cases}, \quad x=-c_2 \Rightarrow \begin{cases} u=\cosh c_1\cos y \\ v=\sinh c_1\sin y \end{cases}$$

$$\frac{u^2}{\cosh^2 c_1}+\frac{v^2}{\sinh^2 c_1}=1$$ معادله بیضی

$$\frac{u^2}{\cos^2 c_2}-\frac{v^2}{\sin^2 c_2}=1$$ معادله هذلولی





برای $y=c_2$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

۶ـ۶ـ۴ـ نشان دهید که اگر خط برشی را به صورت زیر در نظر بگیریم.

$-1 \le x \le 1 \qquad y=0$

تابع $w(z)=(z^2-1)^{\frac{1}{2}}$ تک مقدار خواهد بود.

حل

$$w(z)=(z^2-1)^{\frac{1}{2}}=\left[(x+iy)^2-1\right]^{\frac{1}{2}}=\left[(x^2-y^2-1)+2ixy\right]^{\frac{1}{2}}=u+iv$$

یک دستگاه بوجود می‌آید از این دستگاه u و v را پیدا می‌کنیم سپس شرایط کوشی را بکار می‌بریم.

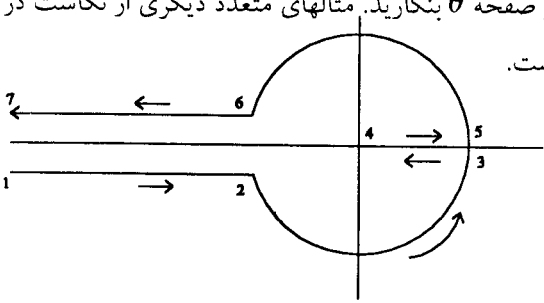
$$\begin{cases} u^2-v^2=x^2-y^2-1 \\ 2uv=2xy \end{cases} \qquad \text{شرایط} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

۶ـ۶ـ۵ـ نشان دهید که اعداد منفی در صفحه مختلط لگاریتم دارند بعنوان مثال، حالت خاص $Ln(-1)$ را محاسبه کنید.

حل

$$Ln(-\alpha)=Ln(-1)(\alpha)=Ln\,[\,\alpha e^{\pi}\,]=Ln\,\alpha+i\pi$$

۶ـ۶ـ۶ـ نمایش انتگرالی تابع بسل روی پربندی در صفحهٔ t، مطابق شکل ۶-۲۳ گرفته می‌شود با تابع $t=e^{i\theta}$ این پربند را در صفحه θ بنگارید. مثالهای متعدد دیگری از نگاشت در فصلهای ۱۱ و ۱۲ و ۱۳ مطرح شده است.



شکل ۶-۲۳- پربند انتگرال‌گیری تابع بسل

حل

$$u+iv=Lnre^{i\phi} \qquad u+iv=Lnr+i\phi \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u=Lnr \\ v=\phi \end{cases} \qquad w=Lnz \Rightarrow z=e^{w}$$

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
ϕ	π	π	2π	0	0	π	π
w	$\infty+i\pi$	$LnR+i\pi$	$LnR+i2\pi$	∞	$Lnr+0$	$Lnr+i\pi$	$\infty+i\pi$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

نقطه (۱) $\begin{cases} u=\infty \\ v=\pi \end{cases}$ نقطه(۲) $\begin{cases} u=\mathrm{Ln}r \\ v=\pi \end{cases}$ نقطه (۳) $\begin{cases} u=\mathrm{Ln}r \\ v=۲\pi \end{cases}$ نقطه (۴) $\begin{cases} u=۰ \\ v=۲\pi \end{cases}$

چون از ۳ به ۴ می‌رویم و زیر محور x هاست و فاز آن ۲π است نقطه ۱ و ۷ مرول بی‌نهایت است.

۲، ۶ و ۳ و ۵ مرول آنها R است و نقطه ۴ صفر است.

بخش ٦ـ٧ـ نگاشت همدیس — مسائل صفحه ۵۳۷

۶ـ۷ـ۱ـ $w(z)$ را حول نقطهٔ $z=z_۰$ که در آن $f'(z)=۰$ به طریق تایلور بسط دهید (زاویه‌ها در این نقطه تغییر می‌کنند) نشان دهید که اگر $n-۱$ مشتق اول صفر شوند ولی $f^n(z_۰)\neq ۰$ آنگاه زاویه‌های در صفحه z به رأس $z=z_۰$ در صفحه w و n برابر می‌شوند.

حل

$$w=f(z)=\sum_{n=۰}^{\infty}(z-z_۰)^n\frac{f^n(z_۰)}{n!}=f(\rho e^{i\theta})$$

$$f(z)=f(z_۰)+(z-z_۰)\frac{f^{(۱)}(z-z_۰)}{۱!}+(z-z_۰)^۲\frac{f^{(۲)}(z-z_۰)}{۲!}+\ldots+(z-z_۰)^n\frac{f^{(n)}(z-z_۰)}{n!}$$

$$w=f(z)=\rho e^{i\phi}$$

$$z=z_۰+re^{i\theta}\ \rightarrow\ z-z_۰=re^{i\theta}$$

$$(z-z_۰)^n=r^n\ e^{in\theta}$$

$$w=f(z_۰)+r^n\ e^{in\theta}\frac{f^n(z_۰)}{n!}$$

$$\rho e^{i\phi}=r^n\ e^{in\theta}\frac{f^n(z_۰)}{n!}\Rightarrow\rho=\frac{r^n f^n(z_۰)}{n!}\Rightarrow\phi=n\theta$$

۶ـ۷ـ۲ـ تبدیلهایی را که هر یک از چهار دستگاه مختصات استوانه‌ای زیر ایجاد می‌کنند به دست آورید:

(الف) استوانه‌ای دوار
$$\left.\begin{aligned} x&=\rho\ \mathrm{Cos}\phi \\ y&=\rho\ \mathrm{Sin}\phi \end{aligned}\right\}$$

(ب) استوانه‌ای بیضوی
$$\left.\begin{aligned} x&=a\ \mathrm{Cosh}u\ \mathrm{Cos}v \\ y&=a\ \mathrm{Sinh}u\ \mathrm{Sin}v \end{aligned}\right\}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

(ج) استوانه‌ای سهموی

$$\left.\begin{aligned} x&=\xi\eta \\ y&=\frac{1}{2}(\eta^2-\xi^2) \end{aligned}\right\}$$

(د) دو قطبی

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{a\,\mathrm{Sinh}\eta}{\mathrm{Cosh}\eta-\mathrm{Cos}\xi} \\ y&=\frac{a\,\mathrm{Sin}\xi}{\mathrm{Cosh}\eta-\mathrm{Cos}\xi} \end{aligned}\right\}$$

[یادآوری: این تبدیلها لزوماً تحلیلی نیستند.]

حل

$$\begin{cases} x=\rho\ \mathrm{Cos}\phi \\ y=\rho\ \mathrm{Sin}\phi \end{cases} \qquad w=z \qquad \rho e^{i\phi}=x+iy$$

$$\rho(\mathrm{Cos}\phi+i\mathrm{Sin}\phi)=x+iy \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x=\rho\mathrm{Cos}\phi \\ y=\rho\mathrm{Sin}\phi \end{cases}$$

$$x+iy=\rho(\mathrm{Cos}\phi+i\mathrm{Sin}\phi)=z=\rho e^{i\phi}$$

$$\rho\mathrm{Cos}\phi+i\rho\mathrm{Sin}\phi=\rho(\mathrm{Cos}\phi+i\mathrm{Sin}\phi)=\rho e^{i\phi}=w$$

بقیه موارد نیز بطور مشابه حل می‌گردند.

۶ـ۷ـ۳ـ محورهای مختصات در صفحهٔ z برای تبدیل

$$e^z=\frac{a-w}{a+w}$$

چگونه تبدیل می‌شوند؟ چه دستگاه مختصاتی بدست آورده‌اید.

حل

$$e^z=\frac{a-w}{a+w} \quad\Rightarrow\quad (a+w)e^z=a-w \quad\Rightarrow$$

$$ae^z+we^z=a-w \quad\Rightarrow\quad w(e^z+1)=a(1-e^z)$$

$$\Rightarrow\quad w=\frac{a(1-e^z)}{1+e^z}=a\frac{e^{-\frac{z}{2}}-e^{\frac{z}{2}}}{e^{-\frac{z}{2}}+e^{\frac{z}{2}}}=-a\frac{\mathrm{Sinh}\frac{z}{2}}{\mathrm{Cosh}\frac{z}{2}}$$

$$=a\frac{i\mathrm{Sin}i\frac{z}{2}}{\mathrm{Cos}i\frac{z}{2}} \quad\Rightarrow\quad w=\frac{ai\,\mathrm{Sin}i\left(\frac{x+iy}{2}\right)}{\mathrm{Cos}\left(\frac{i(x+iy)}{2}\right)}$$

$$=ia\frac{\mathrm{Sin}\left(\frac{ix-y}{2}\right)}{\mathrm{Cos}\left(\frac{ix-y}{2}\right)}\times\frac{\mathrm{Cos}\left(\frac{ix+y}{2}\right)}{\mathrm{Cos}\left(\frac{ix+y}{2}\right)}=ai\frac{\mathrm{Sin}ix+\mathrm{Sin}y}{\mathrm{Cos}ix+\mathrm{Cos}(-y)}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikClass

$$= a\frac{+\mathrm{Sinh}x - i\mathrm{Sin}y}{\mathrm{Cosh}x + \mathrm{Cos}y} \Rightarrow \begin{cases} u = \dfrac{a\mathrm{Sinh}x}{\mathrm{Cosh}x + \mathrm{Cos}y} \\ v = \dfrac{-a\mathrm{Sin}y}{\mathrm{Cosh}x + \mathrm{Cos}y} \end{cases}$$

این روابط شبیه روابط دستگاه دو قطبی است.

$x = ۰$ خط $\longrightarrow$ $u = ۰$

$y = ۰$ خط $\longrightarrow$ $v = ۰$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

بخش ۷ـ۱ـ تکینگیها — مسائل صفحه ۵۴۴

۷ـ۱ـ۱ـ بسط سری لوران تابع $f(z)$ نشان می‌دهد که این تابع یک قطب مرتبهٔ mام در $Z=Z_0$ دارد نشان دهید که a_{-1} ضریب $(z-z_0)^{-1}$ از رابطهٔ زیر بدست می‌آید.

$$a_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]_{z=z_0}$$

که اگر این قطب یک قطب ساده $(m=1)$ باشد خواهیم داشت

$$a_{-1}=\left[(z-z_0)f(z)\right]_{z=z_0}$$

این معادله برای a_{-1} در تعیین مانده‌ای که در بخش بعد در قضیه مانده‌ها بکار می‌رود بسیار سودمند است.

حل

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \qquad f(z)=\frac{a_m}{(z-z_0)^m}+\frac{a_{m-1}}{(z-z_0)^{m-1}}+\ldots+\frac{a_{-1}}{(z-z_0)^1}$$

طرفین را در $(z-z_0)^m$ ضرب می‌کنیم.

$$(z-z_0)^m f(z)=a_m+a_{m-1}(z-z_0)+\ldots+a_{-1}(z-z_0)^{m-1}+\ldots$$

حال مشتق‌گیری می‌کنیم

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]=(m-1)!a_{-1} \Rightarrow$$

$$a_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]$$

۷ـ۱ـ۲ـ تابع $f(z)$ را می‌توان به کمک رابطهٔ زیر نشان داد.

$$f(z)=\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$$

که در آن $f_1(z)$ و $f_2(z)$ تحلیلی‌اند. $f_2(z)$ در مخرج در $z=z_0$ صفر می‌شود از اینجا پی می‌بریم که $f(z)$ در $z=z_0$ یک قطب دارد. ولی $f_1(z)\neq 0$ و $f_2'(z_0)\neq 0$. نشان دهید که a_{-1} ضریب $(z-z_0)^{-1}$ در بسط لوران تابع $f(z)$ به ازای $z=z_0$ از رابطهٔ زیر بدست می‌آید.

$$a_{-1}=\frac{f_1(z_0)}{f_2'(z_0)}$$

این نتیجه به قضیه بسط هویسایدی معروف است.

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

حل

$$g(z) = (z-z_0)\,f(z)\ ,\ f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$$

$$\Rightarrow \quad g(Z) = (Z-Z_0)\,\frac{f_1(Z)}{f_2(Z)}$$

$$a_{-1}\Big|_{Z_0} = \lim_{Z\to Z_0} \frac{Z-Z_0}{f_2(Z)} f_1(Z) = f_1(Z_0) \lim_{Z\to Z_0} \left(\frac{Z-Z_0}{f_2(Z)}\right) \quad \Rightarrow$$

$$a_{-1}\Big|_{Z_0} = \frac{f_1(Z_0)}{f_2'(Z_0)}$$

۷-۱-۴- تابع نوع دوم لژاندر $Q_V(z)$ در $Z=\pm 1$ نقطه‌های شاخه دارد این نقطه‌های شاخه از طریق خط برشی در راستای محور حقیقی x به یکدیگر متصل می‌شوند (الف) نشان دهید که $Q_0(Z) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\left(\frac{(Z+1)}{(Z-1)}\right)$ تک مقدار است (با در نظر گرفتن محور حقیقی به ازای $-1 \le x \le +1$ به عنوان خط برش) (ب) بهتر است به ازای شناسه‌های حقیقی x و $|x| < 1$ تابع را بصورت زیر بنویسیم.

$$Q_0(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\left[\frac{(1+x)}{(1-x)}\right]$$

نشان دهید که

$$Q_0(x) = \frac{1}{2}\left[Q_0(x+i\sigma) + Q_0(x-i\sigma)\right]$$

که در آن $x+i\sigma$ نشان می‌دهد که Z از بالا به محور حقیقی نزدیک می‌شود و $x-i\sigma$ نشانگر نزدیک شدن از پائین است.

حل

$$Q_0(Z) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\frac{Z+1}{Z-1} \qquad \begin{array}{l} Z+1=0 \Rightarrow Z=-1 \\ Z-1=0 \Rightarrow Z=1 \end{array}$$

$$\arg Q_0 = \arg\left[\frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\frac{Z+1}{Z-1}\right]$$

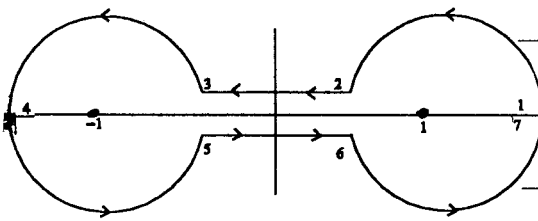
$$\arg Q_0 = \tan^{-1}\frac{\frac{Q}{2}}{\frac{1}{2}\mathrm{Ln}R} = \tan^{-1}\frac{Q}{\mathrm{Ln}R}$$

$$\arg Q_0 = \arg\left[\frac{1}{2}\mathrm{Ln}R + i\phi\right]$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

وقتی از صفر شروع و یکدور می‌زنیم به مضرب $2k\pi$ می‌رسیم.

$$\arg Q_0 = \arg\left[\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\rho + \frac{1}{2}\mathrm{Ln}e^{i\phi}\right] = \arg\left[\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\rho + i\frac{\phi}{2}\right]$$



نقطه	$(z-1)^{\frac{1}{2}}$	$(z+1)^{\frac{1}{2}}$	$(\text{کل})^{\frac{1}{2}}$
۱	۰	۰	۰
۲	$\frac{\pi}{2}$	۰	$-\frac{\pi}{2}$
۳	$\frac{\pi}{2}$	۰	$-\frac{\pi}{2}$
۴	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	۰
۵	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$
۶	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$
۷	π	π	۰

$$Q(x) = \mathrm{Ln}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$Q_0(x) = \frac{1}{2}\left[Q_0(x+i0) + Q_0(x-i0)\right]$$

می‌خواهد نشان دهد که $Q_0(x)$ میانگین حد بالا و پائین $Q_0(x)$ است.

۷ـ۱ـ۵ـ بعنوان نمونه‌ای از یک تکینگی اساسی، رفتار $e^{\frac{1}{z}}$ را با نزدیک شدن z به صفر در نظر بگیرید. به ازای هر عدد مختلط z_0، $z_0 \neq 0$ نشان دهید.

$$e^{\frac{1}{z}} = z_0$$

بی نهایت جواب دارد.

حل

$$z_0 = r_0 e^{i\theta_0} = r_0 e^{i(\theta + 2\pi N)}\ ,\ N = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$z_0 = r_0 e^{i(\theta_0 + 2\pi N)} = e^{\frac{1}{z}}$$

از طرفین Ln می‌گیریم:

$$\frac{1}{z} = \mathrm{Ln}r_0 + i(\theta_0 + 2\pi N) \Rightarrow$$

$$z = \frac{1}{\mathrm{Ln}r_0 + i(\theta_0 + 2\pi N)} = \frac{\mathrm{Ln}r_0 - i(\theta_0 + 2\pi N)}{(\mathrm{Ln}r_0)^2 + (\theta_0 + 2\pi N)^2}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikClass

که تعداد بی نهایت جواب دارد.

بخش ۷ـ۲ـ حساب مانده‌ها — مسائل صفحه ۵۶۴

۷ـ۲ـ۱ـ ماهیت تکینگی هر یک از تابعهای زیر را تعیین و مانده‌ها را حساب کنید. $(a>0)$

(الف) $\frac{1}{z^2+a^2}$ (ب) $\frac{1}{(z^2+a^2)^2}$ (ج) $\frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$ (د) $\frac{\sin\frac{1}{z}}{z^2+a^2}$

(ه) $\frac{ze^{+iz}}{z^2+a^2}$ (و) $\frac{ze^{+iz}}{z^2-a^2}$ (ز) $\frac{e^{+iz}}{z^2-a^2}$ (ح) $\frac{z^{-k}}{z+1}$, $0<k<1$

حل

(الف) $\frac{1}{z^2+a^2}$ $\quad z^2+a^2=0 \Rightarrow z_1=ia\ ,\ z_2=-ia$

$$a_{-1}\Big|_{ia}=\lim_{z\to ia}\frac{z-ia}{z^2+a^2}=\frac{1}{z+ia}=\frac{1}{2ia}$$

$$a_{-1}\Big|_{-ia}=\lim_{z\to -ia}\frac{z+ia}{z^2+a^2}=\frac{-1}{2ia}$$

(ب) $\frac{1}{(z^2+a^2)^2}$ $\quad z^2+a^2=0 \Rightarrow \begin{cases} z_1=-ia \\ z_2=ia \end{cases}$

$$a_{-1}\Big|_{-ia}=\lim_{z\to -ia}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-ia)^2}{(z+ia)^2(z-ia)^2}\right]=\lim_{z\to -ia}\frac{1}{2(z-ia)}=\frac{-1}{4ia}$$

$$a_{-1}\Big|_{ia}=\lim_{z\to ia}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-ia)^2}{(z+ia)^2(z-ia)^2}\right]=\lim_{z\to ia}\frac{1}{2(z+ia)}=\frac{1}{4ia}$$

(ج) $\frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$ $\quad z^2+a^2=0 \Rightarrow \begin{cases} z_1=-ia \\ z_2=ia \end{cases}$

$$a_{-1}\Big|_{z_1=-ia}=\lim_{z\to -ia}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z+ia)^2z^2}{(z+ia)^2(z-ia)^2}\right]=-\frac{1}{4ia}$$

$$a_{-1}\Big|_{z_2=ia}=\lim_{z\to ia}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-ia)^2z^2}{(z+ia)^2(z-ia)^2}\right]=\frac{1}{4ia}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikClass

(د) $\dfrac{\sin\frac{1}{z}}{z^2+a^2}$ $\qquad z^2+a^2=0 \Rightarrow \begin{cases} z_1=+ia \\ z_2=-ia \end{cases}$

$$a_{-1}\Big|_{z_1=ia}=\frac{\sin\frac{1}{z}(z-ia)}{(z-ia)(z+ia)}=\frac{\sin\frac{1}{z}}{2ia}=\frac{-i(\sin(-i\frac{1}{a})}{2a}=\frac{-\sinh\frac{1}{a}}{2a}$$

$$a_{-1}\Big|_{z_2=-ia}=\frac{\sin\frac{-1}{ia}}{-2ia}=\frac{i\sin\frac{i}{a}}{2a}=\frac{-\sinh\frac{1}{a}}{2a}$$

(ه) $\dfrac{ze^{+iz}}{z^2+a^2}$, $z^2+a^2=0 \Rightarrow \begin{cases} z_1=+ia \\ z_2=-ia \end{cases}$

$$a_{-1}\Big|_{ia=z_1}=\frac{ze^{iz}}{z+ia}=\frac{e^{+a}}{ia}$$

$$a_{-1}\Big|_{z_2=-ia}=\frac{-iae^{-i(ia)}}{z-ia}=\frac{-e^{a}}{ia}$$

(و) $\dfrac{ze^{+iz}}{z^2-a^2}$, $z^2-a^2=0 \Rightarrow \begin{cases} z_1=+a \\ z_2=-a \end{cases}$

$$a_{-1}\Big|_{z_1=a}=\frac{ae^{ia}}{a+a}=\frac{e^{ia}}{2}$$

$$a_{-1}\Big|_{z_2=a}=\frac{-1}{2e^{ia}}$$

(ز) $\dfrac{e^{+iz}}{z^2-a^2}$, $z^2-a^2=0 \Rightarrow \begin{cases} z_1=+a \\ z_2=-a \end{cases}$

$$a_{-1}\Big|_{z_1=a}=\frac{e^{ia}}{2a} \quad , \quad a_{-1}\Big|_{z_2=-a}=\frac{-1}{2ae^{ia}}$$

(ح) $\dfrac{z^{-k}}{z+1}=\dfrac{1}{(z+1)z^k}$, $z_1=0$, $z_2=1$

$$a_{-1}\Big|_{z_2=-1}=\frac{1}{-1^k}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

۷-۲-۲- محل تکینگیهای هر یک از توابع زیر را مشخص و مانده‌ها را حساب کنید.

(الف) $z^{-n}(e^{z}-1)^{-1}$, $z\neq 0$ (ب) $\dfrac{z^{2}e^{z}}{1+e^{2z}}$

حل

(الف) $z^{-n}(e^{z}-1)=\dfrac{z^{-n}}{(e^{z}-1)}$

$$e^{z}-1=0 \Rightarrow e^{z}=1=e^{i(0+2k\pi)} \Rightarrow z=i(0+2n\pi)$$

$$a_{-1}\Big|_{z=i2\pi}=\lim\frac{z^{-n}}{e^{z}}=\frac{i(2\pi)^{n}}{e^{i2\pi}}=(i2\pi)^{n}$$

(ب) $\dfrac{z^{2}e^{z}}{1+e^{2z}}$ $\quad 1+e^{2z}=0 \Rightarrow e^{2z}=-1=e^{i(\pi+2n\pi)}$ بی نهایت قطب

$$2z=i(2n\pi+\pi) \overset{n=0}{\Rightarrow} z=i\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{z\to i\frac{\pi}{2}}\frac{z^{2}e^{z}}{2e^{2z}}=\frac{\pi^{2}i}{8}$$

۷-۲-۳- این گزاره که انتگرال روی نیمی از پربند حول یک نقطهٔ تکین برابر است با نصف انتگرال روی همهٔ پربند به قطبهای ساده اختصاص دارد. با ذکر یک مثال خاص نشان دهید که اگر پربند انتگرال‌گیری یک قطب از مرتبهٔ بالاتر را دور بزند رابطهٔ

$$\int_{\text{نیم دایره}} f(z)\,dz=\frac{1}{2}\oint_{\text{دایره}} f(z)\,dz$$

لزوماً برقرار نیست.

[راهنمایی: تابع $f(z)=z^{-2}$ را در نظر بگیرید.]

حل

$$f(z)=z^{-2} \Rightarrow g(z)=z^{2} \Rightarrow g'(z)=2z \Rightarrow g''(z)=2=\text{ثابت}$$

$$z=0 \Rightarrow g'(z)=0$$

۷-۲-۷- برای تعمیم مثال ۷-۲-۱- نشان دهید

به ازای $a>|b|$

$$\int_{0}^{2\pi}\frac{d\theta}{a\pm b\cos\theta}=\int_{0}^{2\pi}\frac{d\theta}{a\pm b\sin\theta}=\frac{2\pi}{(a^{2}-b^{2})^{\frac{1}{2}}}$$

در حالت $|b|>|a|$ چه می‌شود؟

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

حل

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a-b\sin\theta}=\oint\frac{i\frac{dz}{z}}{a-b\frac{(z-z^{-1})}{2i}}=\oint\frac{2dz}{2zai-bz(z+\frac{1}{z})}=\oint\frac{2dz}{2zai-bz^2+b}$$

$$=2\oint\frac{dz}{bz^2-2zai+b}\qquad bz^2-2zai+b=0\ \Rightarrow$$

$$z=\frac{ai\pm\sqrt{-a^2+b^2}}{b}\ \Rightarrow$$

$$z_1=i\left(\frac{-a}{b}+\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)\qquad |z_1|<1$$ درون دایره

$$z_2=i\left(\frac{+a}{b}+\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)\qquad |z_2|>1$$ بیرون دایره

$$a_{-1}=\frac{\text{صورت}}{\text{مشتق مخرج}}=\frac{1}{2ia+2bz}\Bigg|_{z_1}=\frac{1}{2bi\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a-b\sin\theta}=2\pi i\times a_{-1}=2\pi i\frac{1}{2bi\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

بقیه حالات نیز بطور مشابه بدست می‌آیند.

۷ـ۲ـ۹ـ نشان دهید.

به ازای

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2t\cos\theta+t^2}=\frac{2\pi}{1-t^2}\qquad |t|<1$$

اگر $|t|<1$ چه پیش می‌آید؟ به ازای $|t|<1$ چه خواهد شد؟

حل

$$\int_0^{\infty}\frac{dz}{z^2}=\oint\frac{-i\frac{dz}{z}}{1-2t(\frac{z+z^{-1}}{2})+t^2z}=-i\oint\frac{dz}{z-z^2t-t+t^2z}+i\oint\frac{dz}{z+z^2t+t-t^2z}$$

$$=i\oint\frac{dz}{z^2t-(t^2+1)z+t}\quad,\quad z=\frac{t^2+1\pm\sqrt{(t^2+1)^2-4t^2}}{2t}$$

$$\Rightarrow\quad z=\frac{(t^2+1)\pm\sqrt{t^4+2t^2+1-4t^2}}{2t}\ \Rightarrow\ \begin{cases}z_1=t\\ z_2=\frac{1}{t}\end{cases}$$

$$a_{-1}\Big|_{z_1}=\left[2Z_1t-(t^2+1)\right]=\left[2t^2-t^2-1\right]^{-1}=(t^2-1)^{-1}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$I = i \times 2\pi i \times (t^2+1)^{-1} = \frac{2\pi}{1-t^2}$$

۷-۲-۱۰- به کمک حساب مانده‌ها نشان دهید:

$$\int_0^{\pi} \cos^{2n}\theta d\theta = \pi \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \pi \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \qquad n = 0, 1, 2$$

(تعریف نماد فاکتوریل دوگانه در بخش ۱۰-۱ آمده است.)

[راهنمایی: $|z| = 1$ $\quad \cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}(z+z^{-1})$]

حل

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)^{2n} \frac{dz}{iz} = \oint \left\{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right\}^{2n} \frac{dz}{iz}$$

$$= \frac{1}{2^{2n} i} \oint \frac{1}{z} \left\{ z^{2n} + \begin{pmatrix} 2n \\ 1 \end{pmatrix} z^{2n-1}\left(\frac{1}{z}\right) + \begin{pmatrix} 2n \\ 2 \end{pmatrix} z^{2n-2}\left(\frac{1}{z}\right)^2 + \dots + \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 2n \\ k \end{pmatrix} z^{2n-k}\left(\frac{1}{z}\right)^k + \dots + \left(\frac{1}{z}\right)^{2n} \right\} dz$$

$$\frac{1}{2^{2n} i} \oint \left[(z^{2n-1}) + \begin{pmatrix} 2n \\ 1 \end{pmatrix} z^{2n-2} + \dots + \begin{pmatrix} 2n \\ k \end{pmatrix} z^{2n-k-1} \right] dz =$$

$$\frac{1}{2^{2n} i} \left[\oint z^{2n-1} dz + \dots + \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} \oint \frac{dz}{z} + \begin{pmatrix} 2n \\ n+1 \end{pmatrix} \oint \frac{dz}{z} + \oint \frac{dz}{z^{2n+1}} \right]$$

$$f^n(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(z)\,dz}{z^n}$$

$$\oint \frac{dz}{z^n} = \frac{f^n(z)\, 2\pi i}{n!} = 0$$

$f(z)$ متناوب است.

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta d\theta = \frac{1}{2^{2n} i} \left[\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} \oint \frac{dz}{z} \right] = \frac{1}{2^{2n} i} \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} 2\pi i f(z_0)$$

$$= \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(2n-n)! \times n!} \times 2\pi = \frac{\pi}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

۷-۲-۱۲- ثابت کنید.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

[راهنمایی: $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$]

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

حل

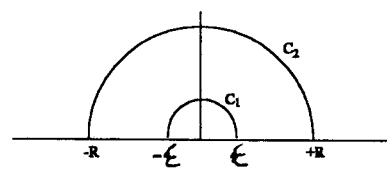
$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin^{2}x}{x^{2}}dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\frac{1-\cos 2x}{2x^{2}}=\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}-\frac{e^{2xi}}{2}+\frac{1}{2}-\frac{e^{-2xi}}{2}}{x^{2}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_{0}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}-\frac{e^{2xi}}{2}}{x^{2}}dx+\int_{0}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}-\frac{e^{-2xi}}{2}}{x^{2}}dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_{0}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}-\frac{e^{2xi}}{2}}{x^{2}}dx+\int_{-\infty}^{0}\frac{\frac{1}{2}-\frac{e^{2xi}}{2}}{x^{2}}dx\right]=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}-\frac{e^{2xi}}{2}}{x^{2}}dx$$

$$=\frac{1}{4}\oint\frac{1-e^{2iz}}{z^{2}}dz\quad,\quad z=0$$

$$a_{-1}\Big|_{z=0}=\frac{-2ie^{2iz}}{1}=-2i$$



$$\int_{-R}^{R}\frac{1-e^{2\pi i}}{x^{2}}dx=\pi i\times -2i=2\pi$$

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin^{2}x}{x^{2}}dx=\frac{1}{4}\times 2\pi=\frac{\pi}{2}$$

۷ـ۲ـ۱۳ـ در محاسبهٔ احتمال گذار در مکانیک کوانتومی به تابع $f(t,\omega)=2(1-\cos\omega t)/\omega^{2}$ برمی‌خوریم. نشان دهید:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t,\omega)\,d\omega=2\pi t$$

حل

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2(1-\cos\omega t)}{\omega^{2}}d\omega=2\oint\frac{1-\cos\omega t}{\omega^{2}}d\omega=\int\frac{2-(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t})d\omega}{\omega^{2}}$$

$$=\oint\frac{2-(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t})}{\omega^{2}}d\omega$$

$$I_{1}=\oint\frac{1-e^{i\omega t}}{\omega^{2}}d\omega\quad,\quad I_{2}=\oint\frac{1-e^{-i\omega t}}{\omega^{2}}d\omega$$

$$I_{1}\quad,\quad\omega=0\quad a_{-1}\Big|_{\omega=0}=\lim_{\omega\to 0}\frac{1-e^{i\omega t}}{\omega}=0$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$a_{-1}\Big|_{z=0}=\frac{-ite^{i\omega t}}{1}=-it$$

$$\oint\frac{1-e^{+i\omega t}}{\omega^2}d\omega=\pi i\times(-it)=\pi t$$

$$I_2\quad,\quad\omega=0\qquad a_{-1}\Big|_{\omega=0}=it$$

$$I_2=\oint\frac{1-e^{-i\omega t}}{\omega^2}d\omega=-2\pi i(it)=\pi t$$

کل $I=I_1+I_2=\pi t+\pi t=2\pi t$

۷-۲-۱۲- نشان دهید $(a>0)$

(الف)
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+a^2}dx=\frac{\pi}{a}e^{-a}$$

اگر به جای $\cos x$ کمیت $\cos kx$ قرار داده شود در جواب چه تغییری پیش خواهد آمد؟

(ب)
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx=\pi e^{-a}$$

اگر به جای $\sin x$ کمیت $\sin kx$ نشانده شود. جواب چه تغییری خواهد کرد؟ این انتگرالها را می‌توان به صورت تبدیلهای کسینوس و سینوس فوریه نیز تعبیر کرد (فصل ۱۵).

حل
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin kx}{x^2+a^2}+i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos kx}{x^2+a^2}$$

$$I''=I+iI'=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{x^2+a^2}dx\quad,\quad k>0$$

$$z_1=ia\quad,\quad z_2=-ia$$

$$a_{-1}\Big|_{z_1=ia}=\frac{e^{ik(ia)}}{2ia}=\frac{-i}{2a}e^{-ka}$$

$$\oint\frac{e^{ikz}}{z^2+a^2}dz=2\pi i(a_{-1})=\frac{\pi}{a}e^{-ka}$$

$$\int_{-a}^{+a}\frac{e^{ikx}}{x^2+a^2}dx+\lim_{z\to\infty}\int\frac{e^{ikz}}{z^2+a^2}dz=\frac{\pi}{a}e^{-ka}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kx}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{a} e^{-ka}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin kx}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{a}(-a)\,e^{-ka} \quad \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin kx}{x^2+a^2}\,dx = \pi e^{-ka}$$

و اگر $k=1$ شود فرمولهای (الف) و (ب) بدست خواهد آمد فرمولهای اخیر حالت کلی‌اند.

۷ـ۲ـ۱۵ـ با استفاده از پربند نموده شده (شکل ۷-۱۲ ثابت کنید با $R\to\infty$ داریم

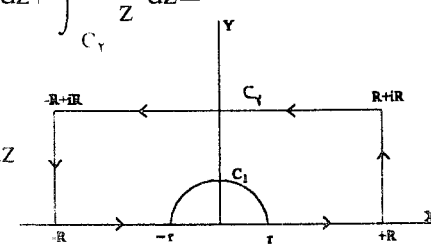
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z}\,dz =$$

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{r}^{R} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z}\,dz$$

$$\xrightarrow{\text{تغییر حدود}} \int \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}\,dx + \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0$$

$$a_{-1} = \frac{\sin x}{1} = 0$$



$$2i\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin x}{x}\,dx = -\int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z}\,dz - \int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z}\,dz$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\pi}^{0} \frac{e^{i\varepsilon e^{i\theta}}}{\varepsilon e^{i\theta}} = -\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\pi}^{0} i e^{i\varepsilon e^{i\theta}}\,d\theta = \pi i$$

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} 2i\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi i \qquad \text{یا} \qquad \int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

۷ـ۲ـ۱۶ـ در نظریه کوانتومی برخوردهای اتمی به انتگرال زیر برمی‌خوریم.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} e^{iPt}\, dt$$

که در آن P حقیقی است نشان دهید

$$I = 0 \qquad |P| > 1$$

$$I = \pi \qquad |P| < 1$$

اگر $P = \pm 1$ چه پیش می‌آید؟

حل

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos t}{t} e^{iPt}\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\sin t}{t} e^{iPt}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2t} + \frac{e^{it}-e^{-it}}{it}\right) e^{iPt}\, dt = \oint \frac{e^{iz(P+1)}}{z} dz$$

$$z = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{-1} = 1$$

$$= \oint \frac{e^{iz(P+1)}}{z} dz = 0$$

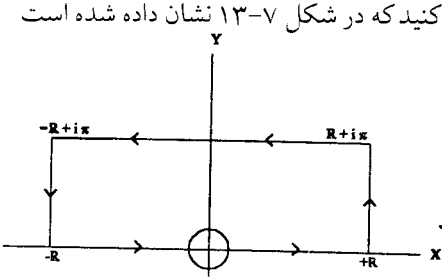
$$= \pi i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} e^{iPt}\, dt = \pi$$

۷ـ۲ـ۱۷ـ (الف) با بسط مناسب انتگرالده نشان دهید.

$$\int_{0}^{\infty} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx = 4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^{-3}$$

(ب) انتگرال بند (الف) را با روش انتگرال پربندی محاسبه کنید و نشان دهید مقدارش عبارت است از $\frac{\pi^3}{8}$

[راهنمایی: قرار دهید $x \to z = e^t$: پربندی را اختیار کنید که در شکل ۷-۱۳ نشان داده شده است و قرار دهید $R \to \infty$.]



حل

$$\int_{0}^{\infty} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx \quad \Rightarrow \quad \int_{0}^{\infty} \frac{(\ln z)^2}{1+z^2} dz$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$1+z^2=0 \quad \Rightarrow \quad z^2=-1 \quad \Rightarrow \quad z=\pm i$$

$$a_{-1}=-\frac{\pi^2}{8i}\ , \quad \oint \frac{(\mathrm{Ln}z)^2}{z^2+1}dz = 2\pi i\, a_{-1} = -\frac{\pi^3}{4}$$

$$\oint \frac{(\mathrm{Ln}z)^2}{z^2+1}dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{(\mathrm{Ln}z)^2}{1+z^2}dz + \int_{C_1} \frac{(\mathrm{Ln}z)^2}{z^2+1}dz + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{(\mathrm{Ln}z)^2}{z^2+1}dz + \int_{C_2} \frac{(\mathrm{Ln}z)^2}{z^2+1}dz$$

در انتگرال اول

$$z=-u \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Ln}(-u)=\mathrm{Ln}u+\mathrm{Ln}(-1)=\mathrm{Ln}u+\pi i$$

$$dz=-du$$

در انتگرال سوم

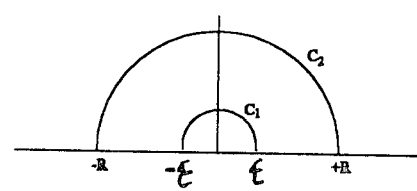
$$z=u \quad \Rightarrow \quad dz=du$$

$$\int_{\varepsilon}^{R} \frac{(\mathrm{Ln}u+\pi i)^2}{u^2+1}du + \int_{C_1} \frac{(\mathrm{Ln}z)^2}{z^2+1}dz + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{(\mathrm{Ln}u)^2}{u^2+1}du + \int_{C_2} \frac{(\mathrm{Ln}z)^2}{z^2+1}dz = -\frac{\pi^3}{4}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{(\mathrm{Ln}u+\pi i)^2}{u^2+1}du + \int_0^{\infty} \frac{(\mathrm{Ln}u)^2}{u^2+1}du = -\frac{\pi^3}{4}$$

$$2\int_0^{\infty} \frac{(\mathrm{Ln}u)^2}{u^2+1}du + 2\pi i\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{Ln}u}{u^2+1}du - \pi^2\int_0^{\infty} \frac{du}{u^2+1} = -\frac{\pi^3}{4}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{du}{u^2+1} = \tan^{-1}u \Big|_0^{\infty}$$



$$2\int_0^{\infty} \frac{(\mathrm{Ln}u)^2}{u^2+1}du + 2\pi i\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{Ln}u}{u^2+1}du = \frac{\pi^3}{4}$$

$$2\int_0^{\infty} \frac{(\mathrm{Ln}u)^2}{u^2+1} = \frac{\pi^3}{4} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\infty} \frac{(\mathrm{Ln}u)^2}{u^2+1} = \frac{\pi^3}{8}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{Ln}u}{1+u^2}du = 0$$

۷ـ۲ـ۱۸ـ نشان دهید

$$\int_0^{\infty} \frac{x^a}{(x+1)^2}dx = \frac{\pi a}{\mathrm{Sin}\pi a}$$

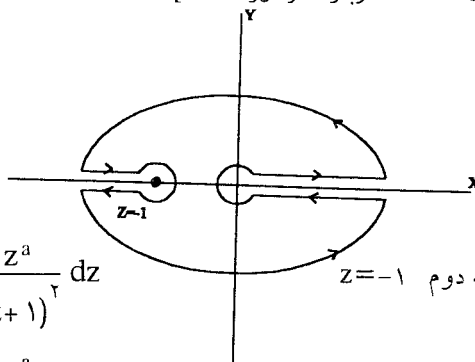
PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/Fizikclass

که $-1<a<1$. این هم راه دیگر است.

[راهنمایی: از پربندی که در شکل ۷-۱۴ نشان داده شده است بهره گیرید توجه کنید که نقطهٔ $z=0$ یک نقطه شاخه و محور حقیقی مثبت یک خط برش است.

همچنین به نکاتی توجه کنید که در مثال ۷-۱-۱ درباره فاز آورده شد.]

حل



$\oint \frac{z^a}{(z+1)^2}dz$ شاخه‌ای $z=0$ و قطب مرتبه دوم $z=-1$

$$\oint \frac{z^a}{(z+1)^2}dz =$$

$$\int_{FA} \frac{z^a}{(z+1)^2}dz + \int_{ABC} \frac{z^a}{(z+1)^2}dz + \int_{CD} \frac{z^a}{(z+1)^2}dz + \int_{DEF} \frac{z^a}{(z+1)^2}dz = 2\pi i a$$

$$a_{-1} = \frac{1}{1!}\lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\left[(z+1)^2\frac{z^a}{(z+1)^2}\right] = \lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^a}{1}\right)$$

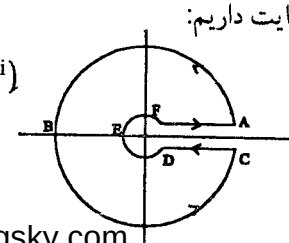
$$= \lim_{z\to -1} az^{a-1} = a(-1)^{a-1} = a(e^{i\pi})^{a-1} = -ae^{i\pi a}$$

$$\lim \int_{ABC}\frac{z^a}{(z+1)^2}dz = \lim_{z\to\infty}\left|z\frac{z^a}{(z+1)^2}\right| = \lim_{z\to\infty}\left|\frac{z^{a+1}}{(z+1)^2}\right| = 0$$

$$\lim_{z\to 0}\int_{DEF}\frac{z^a}{(z+1)^2}dz = \lim_{z\to 0}\left|z\frac{z^a}{(z+1)^2}\right| = \lim_{z\to 0}\left|\frac{z^{a+1}}{z+1}\right| = 0$$

پس در نهایت داریم:

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{(x+1)^2}dx + \int_\infty^0 \frac{(xe^{2\pi i})^a}{[xe^{2\pi i}+1]^2}d(xe^{2\pi i})$$



$$= \int_0^\infty \frac{x^a}{(x+1)^2}dx - e^{2\pi i a}\int_0^\infty \frac{x^a}{(x+1)^2}dx$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$= \int_{0}^{\infty} \frac{x^{a}}{(x+1)^{2}} dx = \frac{-2\pi i a e^{i\pi a}}{(1-e^{2\pi i a})} = \frac{\pi a}{\sin \pi a}$$

۷ـ۲ـ۱۹ـ نشان دهید

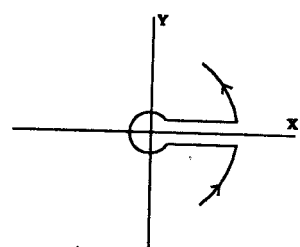
$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{-a}}{x+1} dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

که در آن $0<a<1$ این مسئله راه دیگری برای استخراج رابطهٔ تابع فاکتوریل در معادل ۷-۵۹ ارائه می‌کند.

[راهنمایی: یک نقطه شاخه دارید و باید یک خط برش داشته باشید. به یاد بیاورید که صورت قطبی $z^{-a}=w$ عبارت است از

$$\left[re^{i(\theta+2\pi n)}\right]^{-a} = \rho e^{i\phi}$$

که به رابطهٔ $-a\theta-2an\pi=\phi$ می‌انجامد باید n را به صفر (یا یک عدد صحیح دیگر) محدود کنید تا ϕ بطور یکتا مشخص شود. از پربند بهره گیرید که در شکل ۷-۱۵ نشان داده شده است.]



شکل ۷-۱۵

حل قطب ساده $z+1=0 \Rightarrow z=-1$ ، $z=0$ نقطه شاخه‌ای

$$\oint \frac{z^{-a}}{z+1}$$

$$\oint \frac{z^{-a}}{z+1} dz =$$

$$\int_{FA} \frac{z^{-a}}{z+1} dz + \int_{AC} \frac{z^{-a}}{z+1} dz + \int_{CD} \frac{z^{-a}}{z+1} dz + \int_{DF} \frac{z^{-a}}{z+1} dz = 2\pi i a_{-1}$$

$$a_{-1} = \lim_{z\to -1} \frac{z^{-a}}{1} = (-1)^{-a} = (e^{i\pi})^{-a} = e^{-i\pi a}$$

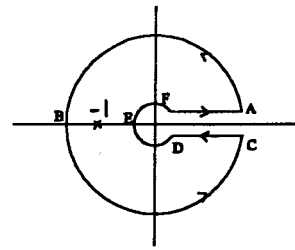
انتگرالهای دوم و چهارم بنا به لِم جردن در حد مربوطه صفر می‌شوند پس باقی می‌ماند:

$$-\int_{0}^{\infty} \frac{x^{-a}}{x+1} dx + \int_{\infty}^{0} \frac{(xe^{2\pi i})^{-a}}{(xe^{2\pi i})+1} d(xe^{2\pi i})$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass

$$\int_{۰}^{\infty} \frac{x^{-a}}{(x+۱)} dx - \int_{۰}^{\infty} \frac{x^{-a} e^{-۲\pi a i}}{x+۱} dx$$

$$= (۱ - e^{-۲\pi i a}) \int_{۰}^{\infty} \frac{x^{-a}}{x+۱} dx = e^{-i\pi a} \times ۲\pi i$$



$$\int_{۰}^{\infty} \frac{x^{-a}}{x+۱} dx = \frac{e^{i\pi a}}{(۱ - e^{-۲\pi i a})} \times ۲\pi i = \frac{۲\pi i}{e^{+ia\pi} - e^{-i\pi a}}$$

$$= \frac{\pi}{\frac{e^{ia\pi} - e^{-ia\pi}}{۲i}} = \frac{\pi}{\text{Sin}a\pi}$$

PhysicsClass.blogsky.com
Telegram.me/FizikCalass