اعداد مختلط

تعریف : $i = \sqrt{-1}$

هر عدد بصورت $a+bi$ که در آن a و b اعداد حقیقی اند یک عدد مختلط نامیده می‌شود، مجموعه‌ی اعداد مختلط را با نماد $\mathbb{C}$ نشان می‌دهیم.

در واقع $$\mathbb{C} = \{a+bi \mid a,b \in \mathbb{R}\}$$

جمع، تفریق و ضرب اعداد مختلط

فرض کنید $z=a+bi$ و $w=c+di$ دو عدد مختلط باشند. در این صورت تعریف می‌کنیم

$$z+w = (a+c)+(b+d)i$$

$$z-w = (a-c)+(b-d)i$$

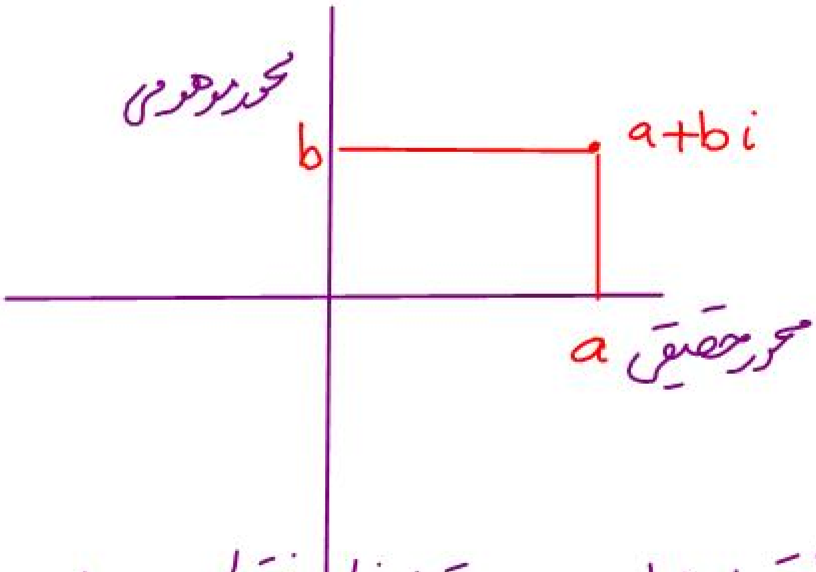
$$zw = (ac-bd)+(ad+bc)i$$

توجه کنید

$$\begin{aligned} zw &= (a+bi)(c+di) \\ &= ac + adi + bci + bd\underbrace{i^2}_{-1} \\ &= (ac-bd)+(ad+bc)i \end{aligned}$$

تعریف. اگر $z=a+bi$ آنگاه a را قسمت حقیقی z نامیده و می‌نویسیم $a = Re(z)$ و همچنین b را قسمت موهومی z نامیده و می‌نویسیم $b = Im(z)$.

نمودار اعداد مختلط



دو محور عمود بر هم در نظر بگیرید.
محور افقی را محور حقیقی و محور قائم را محور موهومی می‌نامیم.
این دستگاه همان دستگاه مختصات دو بعدی است. عدد مختلط $z=a+bi$ متناظر با نقطه‌ی (a,b) در صفحه‌ی مختصات دکارتی است.

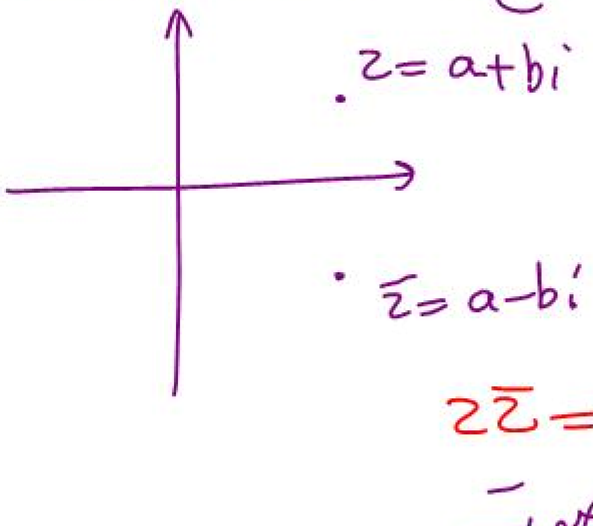
قدر مطلق

قدر مطلق هر عدد مختلط را فاصله‌ی آن تا مبدأ می‌گیریم. به عبارت دیگر اگر $z=a+bi$ آنگاه $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

مثال. $z=2+3i$ آنگاه $|z|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

مزدوج

فرض کنید $z=a+bi$. در این صورت مزدوج z عبارت است از $\bar{z}=a-bi$



قضیه. برای هر عدد مختلط z، $z\bar{z}=|z|^2$

اثبات. فرض کنید $z=a+bi$. در این صورت

$$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=|z|^2$$

با استفاده از قضیه ی بالا می توان تقسیم اعداد مختلط را نیز بیان کرد.

مثال.

$$\frac{3+2i}{1+i} = \frac{3+2i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{5-i}{1^2+1^2} = \frac{5-i}{2}$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{1}{2}i$$

خواص اعداد مختلط. فرض کنید $z, w \in \mathbb{C}$.

1) $|\bar{z}| = |z|$

2) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

3) $\overline{z-w} = \bar{z} - \bar{w}$

4) $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$

5) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

6) $Re(z) \leq |z|$

7) $z + \bar{z} = 2Re(z)$

8) $|zw| = |z||w|$

9) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$

10) $|z+w| \leq |z| + |w|$

11) $|z| - |w| \leq |z-w|$

اثبات. برخی روابط را اثبات می کنیم.

2) فرض کنید $z = a+bi$ و $w = c+di$. در این صورت

$$z+w = (a+c) + (b+d)i$$

$$\rightarrow \overline{z+w} = (a+c) - (b+d)i$$

$$= (a-bi) + (c-di)$$

$$= \bar{z} + \bar{w}$$

۵) به عنوان تمرینی ارائه:

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}\,\overline{w} = \overline{\frac{z}{w} \times w} = \overline{z} \longrightarrow \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$$

۶) اگر $z = a+bi$ آنگاه،

$$Re(z) = a \leq |a| \leq \sqrt{a^2+b^2} = |z|$$

$$z + \overline{z} = a+bi + a-bi = 2a = 2\,Re(z) \quad (۷)$$

$$|zw|^2 = (zw)(\overline{zw}) = zw\overline{z}\,\overline{w} \quad (۸)$$

$$= z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2 \longrightarrow |zw| = |z||w|$$

۹) مشابه ۸

$$|z+w|^2 = (z+w)(\overline{z+w}) = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) \quad (۱۰)$$

$$= z\overline{z} + w\overline{w} + z\overline{w} + \overline{z}w$$

$$= |z|^2 + |w|^2 + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}}$$

$$= |z|^2 + |w|^2 + 2Re(z\overline{w})$$

$$\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\overline{w}|$$

$$= |z|^2 + |w|^2 + 2|z||\overline{w}|$$

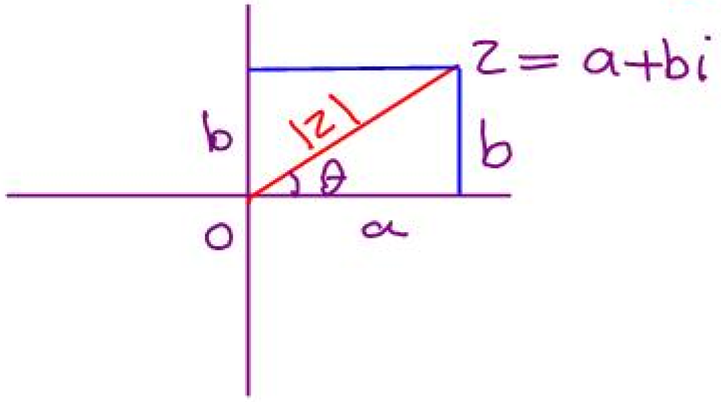
$$= |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z|+|w|)^2$$

بنابراین $|z+w| \leq |z| + |w|$

۱۱) بنا به خاصیت ۱۰، $|z| = |(z-w)+w| \leq |z-w| + |w|$

بنابراین $|z| - |w| \leq |z-w|$.

فرمول اویلر (نمایش قطبی اعداد مختلط)



$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} \longrightarrow a = |z|\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{b}{|z|} \longrightarrow b = |z|\sin\theta$$

$$z=a+bi = |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta$$

$$= |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

این نمایش را، نمایش قطبی اعداد مختلط می‌گوئیم.

مثال: نمایش قطبی $z = ۲+۲i$ را بدست آورید.

حل:

$$|z| = \sqrt{۲^۲+۲^۲} = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$$

$$z = ۲+۲i = ۲\sqrt{۲}\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}} + \frac{۱}{\sqrt{۲}}i\right) = ۲\sqrt{۲}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲}i\right)$$

$$= \sqrt{۸}\left(\cos\frac{\pi}{۴} + i\sin\frac{\pi}{۴}\right)$$

نمادگذاری. از این به بعد به جای $\cos\theta + i\sin\theta$ می‌نویسیم $e^{i\theta}$،

مثال.

$$z = ۲+۲i = \sqrt{۸}\left(\cos\frac{\pi}{۴} + i\sin\frac{\pi}{۴}\right) = \sqrt{۸}\,e^{i\frac{\pi}{۴}}$$

مسأله ۱: نشان دهید $e^{i\alpha}e^{i\beta}=e^{i(\alpha+\beta)}$.

حل. $e^{i\alpha}e^{i\beta}=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)$

$=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+(\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta)i$

$=\cos(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+\beta)\,i=e^{i(\alpha+\beta)}$

مسأله ۲. نشان دهید

الف، $e^{i0}=1$ ب، $e^{i(-\alpha)}=\frac{1}{e^{i\alpha}}$

حل، الف. $e^{i0}=\cos 0+i\sin 0=1$

ب، $e^{i\alpha}e^{i(-\alpha)}=e^{i(\alpha-\alpha)}=e^{i0}=1$

$\to e^{-i\alpha}=\frac{1}{i\alpha}$

توجه کنید چنانچه در مسأله‌ی ۱ قرار دهیم $\alpha=\beta$ آنگاه خواهیم داشت $e^{2i\alpha}=(e^{i\alpha})^2$. همچنین با استفاده از استقرا می‌توان دید برای هر n طبیعی $e^{in\alpha}=(e^{i\alpha})^n$.

تمرین. نشان دهید برای هر عدد صحیح n، $(e^{i\alpha})^n=e^{in\alpha}$.

مثال، مطلوبست محاسبه‌ی $(2+2i)^{37}$.

حل، در مثالی از قبل نشان دادیم $2+2i=\sqrt{8}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$. بنابراین

$(2+2i)^{37}=\sqrt{8}^{37}(e^{i\frac{\pi}{4}})^{37}=\sqrt{8}^{37}e^{i\frac{37\pi}{4}}$

$=\sqrt{8}^{37}\left(\cos\frac{37\pi}{4}+i\sin\frac{37\pi}{4}\right)$ ۳۷

$=\sqrt{8}^{37}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)=\sqrt{8}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

تمرین. مقادیر زیر را محاسبه کنید.

الف) $(4-4i)^{10}$ ب) $(1+\sqrt{3})^{20}$

ج) $(2+3i)^{40}$ د) $(3\sqrt{3}-3i)^{10}$

ریشه‌های اعداد مختلط

تعریف. w را ریشه‌ی nام z گوئیم هرگاه $w^n = z$.

مثال. $1^4 = (-1)^4 = i^4 = (-i)^4 = 1$

بنابراین ریشه‌های چهارم ۱ عبارتند از ۱، ۱-، i و $-i$.

هدف از این بخش محاسبه‌ی ریشه‌های nام یک عدد مختلط است.

برای این منظور فرض کنید z یک عدد مختلط و n عددی طبیعی باشد و می‌خواهیم ریشه‌های nام z را به دست آوریم.

قرار می‌دهیم $\begin{cases} z = re^{i\theta} \\ w = r'e^{i\theta'} \end{cases}$ و r' و θ' را به دست می‌آوریم

$$w^n = z \longrightarrow (r'e^{i\theta'})^n = re^{i\theta} \longrightarrow r'^n e^{in\theta'} = re^{i\theta}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} r'^n = r \longrightarrow r' = \sqrt[n]{r} \\ e^{in\theta'} = e^{i\theta} \longrightarrow n\theta' = 2k\pi + \theta \longrightarrow \theta' = \dfrac{2k\pi+\theta}{n} \end{cases}$$

که در آن $k = 0, \ldots, n-1$.

مثال. مطلوبست ریشه‌های پنجم عدد $z = \sqrt{3} + i$.

حل. $|z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$

$$z=\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$w=r'e^{i\theta'}$$

که در آن $\theta'=\dfrac{2k\pi+\frac{\pi}{6}}{5}$ و $r'=\sqrt[5]{2}$

که در آن $k=0,1,\dots,4$.

$$w_0=r'e^{i\frac{0+\frac{\pi}{6}}{5}}=\sqrt[5]{2}\,e^{i\frac{\pi}{30}}$$

$$w_1=r'e^{i\frac{2\pi+\frac{\pi}{6}}{5}}=\sqrt[5]{2}\,e^{i\frac{13\pi}{30}}$$

$$w_2=r'e^{i\frac{4\pi+\frac{\pi}{6}}{5}}=\sqrt[5]{2}\,e^{i\frac{25\pi}{30}}$$

$$w_3=r'e^{i\frac{6\pi+\frac{\pi}{6}}{5}}=\sqrt[5]{2}\,e^{i\frac{37\pi}{30}}$$

$$w_4=r'e^{i\frac{8\pi+\frac{\pi}{6}}{5}}=\sqrt[5]{2}\,e^{i\frac{49\pi}{30}}$$

مسأله. فرض کنید z و w دو عدد مختلط باشند و $w\neq 0$. اگر $|z+w|=|z-w|$

نشان دهید $\frac{z}{w}$ موهومی محض است. (یعنی $Re(\frac{z}{w})=0$)

اثبات. $|z+w|=|z-w| \longrightarrow |z+w|^2=|z-w|^2$

$$\longrightarrow (z+w)(\bar{z}+\bar{w})=(z-w)(\bar{z}-\bar{w})$$

$$\longrightarrow z\bar{z}+w\bar{w}+z\bar{w}+w\bar{z}=z\bar{z}+w\bar{w}-z\bar{w}-w\bar{z}$$

$$\longrightarrow 2(z\bar{w}+w\bar{z})=0 \longrightarrow z\bar{w}+w\bar{z}=0$$

اکنون با تقسیم طرفین رابطه‌ی اخیر بر $w\bar{w}$ خواهیم داشت:

$\frac{z}{w}+\frac{\bar{z}}{\bar{w}}=0$. یعنی $\frac{z}{w}+\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=0$. پس $2Re(\frac{z}{w})=0$ و در نتیجه

$Re(\frac{z}{w})=0$. یعنی $\frac{z}{w}$ موهومی محض است.

تمرین. فرض کنید z و w دو عدد مختلط باشند بطوری که $|z-w| = |1-\bar{z}w|$، نشان دهید $|z|=1$ یا $|w|=1$.

مسأله. معادلهٔ $(x+1)^3+(x-1)^3=0$ را حل کنید.

حل.

$$(x+1)^3+(x-1)^3=0$$

$$\rightarrow (x^3+3x^2+3x+1)+(x^3-3x^2+3x-1)=0$$

$$\rightarrow 2x^3+6x=0 \longrightarrow 2x(x^2+3)=0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2+3=0 \longrightarrow x^2=-3 \longrightarrow x=\pm\sqrt{-3}=\pm\sqrt{3}\,i \end{cases}$$

پس جواب‌های معادله عبارتند از 0 ، $\sqrt{3}\,i$ و $-\sqrt{3}\,i$.

مسأله. معادلهٔ $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ را حل کنید.

حل. طرفین معادله را در $x-1$ ضرب می‌کنیم. در این صورت:

$$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0 \longrightarrow x^5-1=0 \longrightarrow x^5=1$$

پس باید ریشه‌های پنجم 1 را بدست آوریم.

$$1=1+0i=\cos 0+i\sin 0=e^{i0}$$

$$x^5=e^{i0} \rightarrow x=e^{\frac{2k\pi+0}{5}i}$$

$$k=0 \longrightarrow x_0=e^{0}=1$$

$$k=1 \longrightarrow x_1=e^{\frac{2\pi}{5}}$$

$$k=2 \longrightarrow x_2=e^{\frac{4\pi}{5}}$$

$$k=3 \longrightarrow x_3=e^{\frac{6\pi}{5}}$$

$$k=4 \longrightarrow x_4=e^{\frac{8\pi}{5}}$$

ریشه‌های بدست آمده ریشه‌های $x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$ می‌باشند،
و از این که $x_0=1$ ریشه‌ی $x-1$ است بنابراین $x_1=e^{\frac{2\pi}{5}i}$ ، ... ، و
$x_4=e^{\frac{8\pi}{5}i}$ ریشه‌های معادله‌ی $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ می‌باشند.

تمرین. معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^4+x^2+1=0$ ب) $x^4+1=0$

تمرین. مقادیر z را چنان بیابید که $|z-i|=|z+1|$.

حد و پیوستگی

تعریف: فرض کنید $f(x)$ در یک همسایگی a تعریف شده باشد. گوئیم حد $f(x)$ وقتی x به a میل می‌کند برابر l است هرگاه

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad 0<|x-a|<\delta \longrightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$$

مثال. نشان دهید $\lim\limits_{x\to 2} 3x+1 = 7$.

حل. باید نشان دهیم

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad 0<|x-2|<\delta \longrightarrow |(3x+1)-7|<\varepsilon$$

$$|(3x+1)-7| = |3x-6| = 3|x-2|$$

حال چون بخواهیم $3|x-2|<\varepsilon$ لازم است $|x-2|<\frac{\varepsilon}{3}$. پس کافی است

$\delta=\varepsilon/3$ انتخاب شود.

چون اگر $\delta=\varepsilon/3$ آنگاه:

$$|x-2|<\delta \longrightarrow |x-2|<\varepsilon/3 \longrightarrow 3|x-2|<\varepsilon$$
$$\longrightarrow |3x-6|<\varepsilon \longrightarrow |(3x+1)-7|<\varepsilon$$

قضیه‌های حد

قضیه. فرض کنید $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l_1$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=l_2$. در این صورت:

$f(x)+g(x)$ ، $f(x)-g(x)$ ، $f(x)g(x)$ و $kf(x)$ (k ثابت) نیز در a دارای حد هستند و

الف) $\lim_{x\to a} f(x)+g(x) = l_1+l_2$

ب) $\lim_{x\to a} f(x)-g(x) = l_1-l_2$

ج) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = l_1 l_2$

د) $\lim_{x\to a} kf(x) = kl_1$

هم چنین اگر $l_2 \neq 0$ ، آنگاه $\frac{f(x)}{g(x)}$ نیز در a دارای حد است و

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{l_1}{l_2}$$

قضیه فشردگی. فرض کنید در یک همسایگی محذوف a ، $f(x)\le g(x)\le h(x)$

هم چنین فرض کنید $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} h(x)=l$ در این صورت $\lim_{x\to a} g(x)=l$

مثال. مطلوب است محاسبه‌ی $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$.

حل.

$$-1\le \sin\frac{1}{x}\le 1 \xrightarrow{x>0} -x\le x\sin\frac{1}{x}\le x$$

$$-1\le \sin\frac{1}{x}\le 1 \xrightarrow{x<0} -x\ge x\sin\frac{1}{x}\ge x$$

حال چون $\lim_{x\to 0} x=\lim_{x\to 0}(-x)=0$ ، بنا به قضیه‌ی فشردگی ، $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$

مثال. $\lim_{x\to 0} x[\frac{1}{x}] = ?$

حل. می‌دانیم همواره $a-1 < [a] \le a$. بنابراین

$$\frac{1}{x}-1 < [\frac{1}{x}] \le \frac{1}{x} \xrightarrow{x>0} 1-x < x[\frac{1}{x}] \le 1$$

حال چون $\lim_{x\to 0}(1-x) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$، لذا بنا به قضیه فشردگی $\lim_{x\to 0} x[\frac{1}{x}]=1$

(توجه: حالتی که $x<0$ نیز مشابه است)

قضیه. فرض کنید $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ و در یک همسایگی محذوف a، $g(x)$ کراندار باشد. در این صورت $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=0$.

اثبات. $M_1 \le g(x) \le M_2 \longrightarrow M_1 f(x) \le f(x)g(x) \le M_2 f(x)$

حال چون $\lim_{x\to a} M_1 f(x) = \lim_{x\to a} M_2 f(x) = 0$، لذا بنا به قضیه فشردگی

$$\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = 0$$

مثال. $\lim_{x\to 0} \sin x \sin\frac{1}{x} = 0$. چون $\sin\frac{1}{x}$ کراندار است و $\lim_{x\to 0}\sin x = 0$.

حال از قضیه بالا داریم: $\lim_{x\to 0} \sin x \sin\frac{1}{x} = 0$.

حدود یک طرفه. گوییم حد $\lim_{x\to a^+} f(x) = l$ هرگاه

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad a<x<a+\delta \to |f(x)-l|<\varepsilon$$

حد چپ تابع $f(x)$ در a نیز بصورت مشابه تعریف می‌شود.

قضیه. تابع $f(x)$ در نقطه‌ی a دارای حد است اگر و تنها اگر حدود چپ و راست تابع $f(x)$ در a موجود و این دو حد برابر باشند. در چنین حالتی

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

مثال. وجود حد تابع زیر در نقطه‌ی $x = 1$ را بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x > 1 \\ 5 & x = 1 \\ x-3 & x < 1 \end{cases}$$

حل.

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2x-1) = 1$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x-3) = -2$$

$1 \neq -2$. پس $\lim_{x \to 1} f(x)$ وجود ندارد.

مثال. $\lim_{x \to 0} \frac{[x]}{x} = ?$

حل. فرض کنید $x \to 0^+$. بنابراین $0 < x$. اما $x \to 0$، پس می‌توان فرض کرد $x < 1$. بنابراین $0 < x < 1$ و درنتیجه $[x] = 0$. اکنون

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{[x]}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{0}{x} = \lim_{x \to 0^+} 0 = 0$$

اینک فرض کنید $x \to 0^-$. در این صورت $x<0$. می‌توان فرض کرد $x>-1$

بنابراین $-1<x<0$ و لذا $[x]=-1$. اکنون

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{[x]}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-1}{x} = +\infty$$

حال چون حدود چپ و راست برابر نیستند، لذا $\lim_{x \to 0} \frac{[x]}{x}$ موجود نیست.

با استفاده از قضیه فشردگی می‌توان ثابت کرد:

قضیه. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

مثال.
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{2}{3} = 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

در حالت کلی $\lim_{x \to 0} \frac{\sin mx}{nx} = \frac{m}{n}$.

مثال.
$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 3x}{5x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{5x} \times \frac{1}{\cos 3x} = \frac{3}{5} \times 1 = \frac{3}{5}$$

مثال.
$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\arcsin x} = ?$$

حل. قرار می‌دهیم $u = \arcsin x$. در این صورت $\sin u = x$. اکنون

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\arcsin x} = \lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

مثال.
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=?$$

روش اول.
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\times\frac{x^2}{4}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{4}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\times 1^2=\frac{1}{2}$$

روش دوم.
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\times\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}$$

در حالت کلی
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x^2}=\frac{a^2}{2}$$

مثال.
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x}{x^2}=?$$

حل.
$$\frac{1-ab}{d}=\frac{1-a+a-ab}{d}=\frac{1-a}{d}+a\frac{1-b}{d}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\cos x\frac{1-\cos 2x}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}+1\times\frac{4}{2}=\frac{5}{2}$$

تمرین. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{x^2} = ?$

راهنمایی: $\left(\frac{1-abc}{d} = \frac{1-a+a-ab+ab-abc}{d} \right.$

$$= \frac{1-a}{d} + a\,\frac{1-b}{d} + ab\,\frac{1-c}{d}$$

حد در بی‌نهایت و حد بی‌نهایت

تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را در نظر بگیرید. می‌توان دید با زیاد کردن مقدار x، $f(x)=\frac{1}{x}$ کوچکتر می‌شود، در واقع می‌توان x را چنان بزرگ اختیار کرد که $\frac{1}{x}$ به اندازه‌ی کافی به صفر نزدیک شود. در چنین حالتی می‌گوییم $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.

تعریف. گوییم $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ هرگاه

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists M>0 \quad x>M \longrightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$$

مثال. $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x+1}=0$.

حل. باید نشان دهیم: $\forall\varepsilon>0 \quad \exists M>0 \quad x>M\longrightarrow \left|\frac{1}{2x+1}-0\right|<\varepsilon$

$$\left|\frac{1}{2x+1}-0\right| = \frac{1}{2x+1} \overset{?}{<} \varepsilon \longrightarrow 2x+1>\frac{1}{\varepsilon} \longrightarrow 2x>\frac{1}{\varepsilon}-1$$

$$\longrightarrow x>\underbrace{\frac{1}{2\varepsilon}-\frac{1}{2}}_{M}$$

پس کافی است $M=\frac{1}{2\varepsilon}-\frac{1}{2}$ انتخاب شود.

تعریف. گوییم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ هرگاه:

$$\forall M>0 \quad \exists \delta>0 \quad 0<|x-a|<\delta \longrightarrow f(x)>M$$

مثال. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^2}=+\infty$

حل. باید ثابت کنیم

$$\forall M>0 \quad \exists \delta>0 \quad 0<|x-2|<\delta \longrightarrow \frac{1}{(x-2)^2}>M$$

$$\frac{1}{(x-2)^2}>M \longrightarrow (x-2)^2<\frac{1}{M} \longrightarrow |x-2|<\sqrt{\frac{1}{M}}$$

پس کافی است $\delta=\sqrt{\frac{1}{M}}$ اختیار شود.

مثال. $$\lim_{x\to+\infty} x^3-2x=\lim_{x\to\infty} x(x^2-2)=(+\infty)(+\infty)=+\infty$$

مثال. $$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2}{\sqrt{x^2-2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(1+\frac{2}{x})}{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}(1+\frac{2}{x})}{-\cancel{x}\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}}=-1$$

مثال. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-1}{x^3-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})}{x^3(1-\frac{1}{x^2})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{x(1-\frac{1}{x^2})}$$

$$=0$$

مثال.

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{1} \times \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x} = \lim_{x\to+\infty} 2\sin\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)$$

حل اگر $x\to\infty$ ، بنا به مثال قبل $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\to 0$. بنابراین

$\lim_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right)=0$. از طرفی $\cos\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)$ کراندار است. بنابراین

$$\lim_{x\to+\infty} 2\sin\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)=0$$

مثال. $\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{\frac{x+2}{x-4}}-x=?$

حل. $$\infty-\infty=\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{\frac{x+2}{x-4}}-1\right)=\lim x\,\frac{\sqrt{\frac{x+2}{x-4}}-1}{1}\times\frac{\sqrt{\frac{x+2}{x-4}}+1}{\sqrt{\frac{x+2}{x-4}}+1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\,\frac{\frac{x+2}{x-4}-1}{\sqrt{\frac{x+2}{x-4}}+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{6x}{x-4}}{\sqrt{\frac{x+2}{x-4}}+1}=\frac{6}{2}=3$$

پیوستگی

تعریف. تابع $f(x)$ را در نقطه‌ی a پیوسته گوئیم هرگاه

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \qquad |x-a|<\delta \longrightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

قضیه. تابع $f(x)$ در نقطه a پیوسته است اگر و تنها اگر f در a تعریف شده باشد. بعلاوه حدود چپ و راست در a موجود باشند و $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.

مثال. تابع $f(x)=\sin x$ همواره در هر نقطه پیوسته است.

حل. قبلاً نشان داده‌ایم که $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$ و $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$. اکنون

$$\lim_{x\to a}\sin x \overset{x=a+t}{=\!=\!=} \lim_{t\to 0}\sin(a+t) = \lim_{t\to 0} \sin a\cos t + \cos a \sin t$$

$$= \sin a$$

پس تابع $\sin$ در هر نقطه a پیوسته است

مثال. تابع $\cos$ و تمام چندجمله‌ای‌ها نیز در هر نقطه‌ای پیوسته‌اند.

قضیه. فرض کنید f و g در a پیوسته باشند. در این صورت $f+g$ ، $f-g$ و fg نیز در a پیوسته اند. همچنین اگر $g(a)\neq 0$، آنگاه $\frac{f}{g}$ نیز در a پیوسته است.

پیوستگی چپ و راست

تعریف. تابع f را در نقطه‌ی a پیوسته‌ی راست گوئیم هرگاه $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

پیوستگی چپ نیز به طور مشابه تعریف می‌شود.

پیوستگی در بازه‌ی بسته

تابع f را در $[a,b]$ پیوسته گوییم هرگاه

الف) f در a از راست پیوسته باشد

ب) f در b از چپ پیوسته باشد

ج) در هر نقطه میانی $c\in(a,b)$، f دارای پیوستگی دوطرفه باشد.

پیوستگی تابع مرکب

قضیه. فرض کنید تابع g در a و f در $g(a)$ پیوسته باشد. در این صورت تابع $f\circ g$ در a پیوسته است.

قضیه (گذر حد) فرض کنید $\lim\limits_{x\to a} g(x)=l$. به علاوه فرض کنید تابع f در l پیوسته باشد. در این صورت $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))=f(l)$.

در واقع

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

مثال.

$$\lim_{x\to 0} \sin(\tan x)= \sin\left(\lim_{x\to 0}\tan x\right) = \sin 0 = 0$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \sin(\cos x) = \sin\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x\right)=\sin 0 = 0$$

توجه کنید تابع $\sin$ در $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x=0$ پیوسته است.

کاربردهای پیوستگی

۱) قضیه Max - Min . هر تابع پیوسته در بازه‌ی بسته کمترین و بیشترین مقدار خود را اختیار می‌کند.

به عبارت دیگر اگر تابع f در $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه $x_1, x_2 \in [a,b]$ چنان موجود اند که

$$\forall x \in [a,b] \qquad f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$$

۲) قضیه مقدار میانی فرض کنید تابع f در $[a,b]$ پیوسته باشد. به علاوه $f(a) < M < f(b)$. در این صورت $c \in (a,b)$ موجود است بطوری که $f(c) = M$.

مثال. ثابت کنید $c \in [0, \frac{\pi}{2}]$ موجود است که $\sin c = 0/6$

حل.

$$\left.\begin{array}{l}\sin 0 = 0 \\ \sin \frac{\pi}{2} = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \underset{\sin 0}{0} < 0/6 < \underset{\sin \frac{\pi}{2}}{1} \longrightarrow \exists c \quad \sin c = 0/6$$

یکی از کاربردهای مهم قضیه مقدار میانی در وجود ریشه است.

مثال. ثابت کنید تابع $f(x) = x^3 + x - 4$ حداقل یک ریشه دارد.

حل.

$$\left.\begin{array}{l}f(1) = -2 < 0 \\ f(2) = 6 > 0\end{array}\right\} \longrightarrow$$

بنابه قضیه‌ی مقدار میانی $c \in (1,2)$ موجود است که $f(c) = 0$.

مثال. نشان دهید $f(x) = x^2 - 2\sin x + 3\cos x - 7$ حداقل ۲ ریشه دارد.

حل.

$$f(-2\pi) = 4\pi^2 - 4 > 0$$

$$f(0) = -4 < 0$$

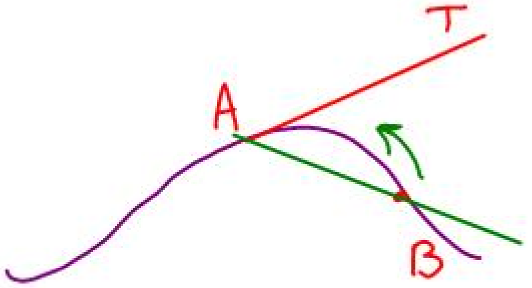
$$f(2\pi) = 4\pi^2 - 4 > 0$$

$$\exists\, c_1 \in (-2\pi, 0) \quad f(c_1) = 0$$

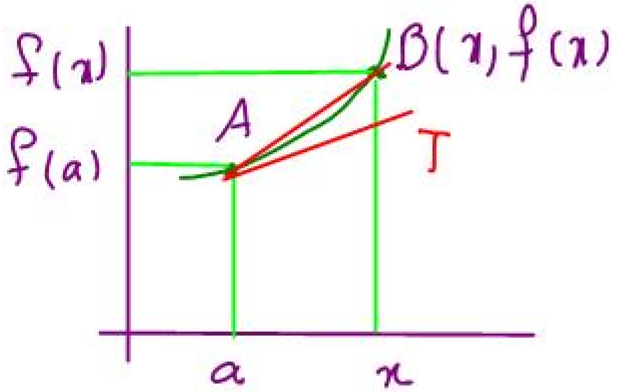
$$\exists\, c_2 \in (0, 2\pi) \quad f(c_2) = 0.$$

مشتق

تعریف (مماس) فرض کنید A نقطه‌ای روی منحنی C باشد و منحنی در همسایگی A پیوسته باشد. نقطه‌ی B را در همسایگی A روی منحنی C در نظر گرفته و قاطع AB را رسم می‌کنیم. با نزدیک شدن نقطه B به A (روی منحنی)، قاطع AB به خطی نزدیک می‌شود که آن را مماس بر منحنی در نقطه‌ی A می‌گوییم.



مماس بر منحنی شیب آن



$$\text{شیب } AB = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$\text{شیب } AT = \lim (\text{شیب } AB)$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

تعریف. فرض کنید تابع $f(x)$ در همسایگی a پیوسته باشد. در این صورت گوییم خط مماس بر منحنی در نقطه a موجود است هرگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ موجود یا $+\infty$ و یا $-\infty$ باشد. همچنین مقدار این حد شیب مماس را نشان می‌دهد.

تعریف (مشتق) گوییم تابع $f(x)$ در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر است هرگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ موجود و متناهی باشد. در چنین حالتی این حد را مشتق تابع f در نقطه‌ی a نامیده و آن را با نماد $f'(a)$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

مثال. مشتق‌پذیری تابع $f(x)=x^2$ در نقطه‌ی a را بررسی کنید.

حل. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}(x+a)=2a$

قضیه. اگر تابع f در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر باشد، در این نقطه پیوسته است.

اثبات.
$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)=f'(a)\times 0=0$$

$$\longrightarrow \lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

توجه. عکس این قضیه برقرار نیست. به عنوان مثال تابع $f(x)=|x|$ در $x=0$ پیوسته است ولی مشتق‌پذیر نیست. چون:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$ موجود نیست

توجه:

$$\begin{cases}\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=+1\\ \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=-1\end{cases}$$

تعریف معادل برای مشتق:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

قرار می‌دهیم $h=x-a$. در این صورت $x=h+a$. آنگاه

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

و در حالت کلی:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

مثال: مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\sin x$ در نقطه‌ی x را بررسی کنید.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\sin h\cos x-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h-1)}{h}+\frac{\sin h}{h}\cos x$$

$$=\sin x\times 0+1\cos x=\cos x$$

فرمول‌های مشتق‌پذیری

۱) $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$

۲) $(f(x)-g(x))' = f'(x)-g'(x)$

۳) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

۴) $(k f(x))' = k f'(x)$ (k ثابت)

۵) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g(x)^2}$

۶) $f(x)=x^n \longrightarrow f'(x)=nx^{n-1}$ $(n\in\mathbb{Z})$

۷) $f(x)=\sin x \longrightarrow f'(x)=\cos x$

۸) $f(x)=\cos x \longrightarrow f'(x)=-\sin x$

۹) $f(x)=\tan x \longrightarrow f'(x)=1+\tan^2 x=\sec^2 x$

۱۰) $f(x)=\sec x \longrightarrow f'(x)=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\sec x\tan x$

تعریف. مشتق چپ f در نقطه a: $f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

مشتق راست f در نقطه a: $f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

تعریف. مشتق پذیری f در $[a,b]$ یعنی مشتق پذیری چپ در b، مشتق پذیری راست در a و مشتق پذیری دوطرفه در نقاط میانی.

مشتق تابع مرکب (قاعده زنجیره‌ای)

فرض کنید g در a و f در $g(a)$ مشتق پذیر باشد. در این صورت fog در a مشتق پذیر است و

$$(fog)'(a) = g'(a)\, f'(g(a))$$

در حالت کلی‌تر $(f(u))' = u'\, f'(u)$ که در آن u تابعی از x است.

مثال. $f(x)=(x^2+3x)^5 \longrightarrow f'(x) = 5(x^2+3x)^4(2x+3)$

$f(x)=\sin(\tan x) \longrightarrow f'(x)=\cos(\tan x)\sec^2 x$

مشتق ضمنی

در روابطی که به صورت ضمنی بیان شده‌اند از مشتق ضمنی استفاده می‌شود. در این نوع مشتق با استفاده از فرمول‌های مشتق‌گیری از رابطه ضمنی مشتق‌گیری می‌شود.

مثال. y' را در رابطه $x^2+xy=-2y^2$ به دست آورید.

$$x^2+xy+2y^2=0 \longrightarrow 2x+(1y+xy')+4yy'=0$$

$$\longrightarrow 2x+y+y'(x+4y)=0 \longrightarrow y'=-\frac{2x+y}{x+4y}=\frac{-2x-y}{x+4y}$$

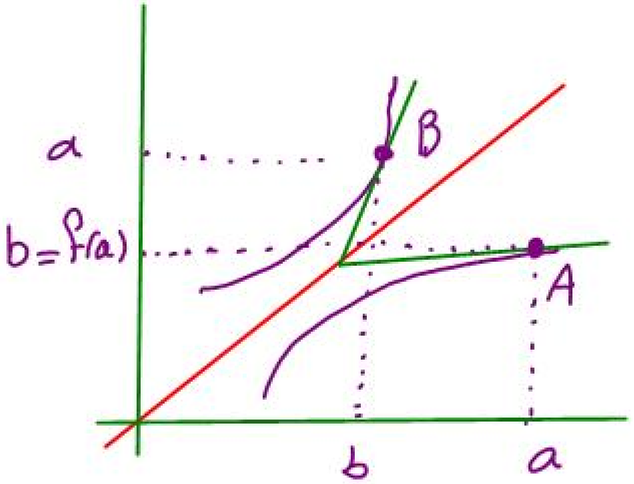
چنانچه بخواهیم y'' را به دست آوریم می‌توان به دو شکل زیر عمل کرد.

روش اول

$$2x+y+xy'+4yy'=0 \xrightarrow[\text{ضمنی}]{\text{مشتق}} 2+y'+(1y'+xy'')+4(y'y'+yy'')=0$$

با جایگذاری y' به دست آمده می‌توان y'' را به دست آورد.

روش دوم: $y' = \dfrac{-2x-y}{x+4y} \longrightarrow y'' = \dfrac{(-2-y')(x+4y)-(1+4y')(-2x-y)}{(x+4y)^2}$



مشتق تابع وارون:

اگر تابع f وارون پذیر باشد و در a مشتق پذیر باشد و همچنین $f'(a) \neq 0$، آنگاه تابع f^{-1} در نقطه‌ی $b=f(a)$ مشتق پذیر است و

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

روشی برای محاسبه‌ی مشتق توابع وارون با استفاده از مشتق ضمنی

مثال: $y = \sin^{-1}x \longrightarrow y' = ?$

$$y = \sin^{-1}x \longrightarrow x = \sin y \longrightarrow 1 = y'\cos y \longrightarrow y' = \frac{1}{\cos y}$$

$$\longrightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

توجه: $\underset{x}{\sin^{-1}: [-1,1]} \to \underset{y}{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$. چون $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ لذا $\cos y \geq 0$ و بنابراین:

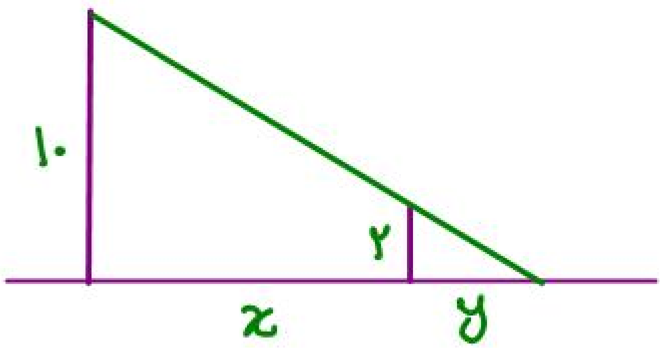
$$\sin^2 y + \cos^2 y = 1 \longrightarrow \cos^2 y = 1 - \sin^2 y$$

$$\longrightarrow \cos y = +\sqrt{1-\sin^2 y}$$

آهنگ تغییر

آهنگ = تغییر ... برحسب زمان

مثال. فرض کنید شخصی با قد ۲ متر به تیر چراغ برقی با ارتفاع ۱۰ متر در حال نزدیک شدن است. اگر سرعت این شخص ۴ متر بر ثانیه باشد، مطلوبست تغییرات سرعت سایه آن شخص.

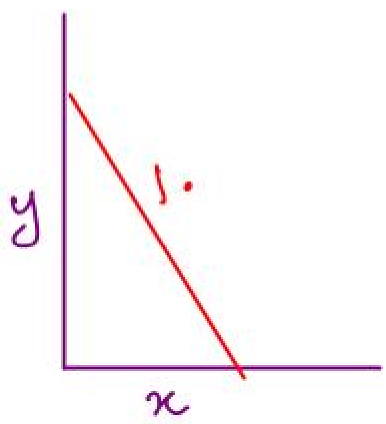


$$\frac{dx}{dt}=4 \quad , \quad \frac{dy}{dt}=?$$

بنا به قضیه تالس، $\frac{y}{2}=\frac{x+y}{10}$. بنابراین $10y=2x+2y$ یا $8y=2x$. پس $y=\frac{1}{4}x$.

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{4}\frac{dx}{dt}\xrightarrow{\frac{dx}{dt}=4}\frac{dy}{dt}=1\ m/s$$

مثال. نردبانی به طول $10\ m$ به دیواری تکیه داده شده است. پای نردبان می‌لغزد و با سرعت ثابت $1\ m/s$ از دیوار دور می‌شود. سرعت پایین آمدن سر نردبان را در لحظه‌ای که پای نردبان در فاصله‌ی ۶ متری دیوار قرار گرفته است، محاسبه کنید.

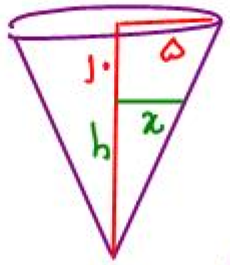


حل. $x^2+y^2=10^2 \longrightarrow 2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0$

$$\longrightarrow \frac{dy}{dt}=-\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}\Longrightarrow \frac{dy}{dt}=-\frac{6}{8}\times 1=-\frac{3}{4}$$

$$x=6\longrightarrow 6^2+y^2=10^2\longrightarrow y=8$$

مثال. درون ظرفی مخروطی شکل که بصورت وارونه (رأس آن در پایین) قرار گرفته است، آب با سرعت $3\ \frac{cm^3}{s}$ ریخته می‌شود. اگر ارتفاع مخروط 10^{cm} و شعاع قاعده‌ی آن 5^{cm} باشد، سرعت بالا آمدن ارتفاع سطح آب را در لحظه‌ای که آب در ارتفاع ۶ سانتی‌متری است محاسبه کنید.



$$\frac{dV}{dt} = 3$$

حل.

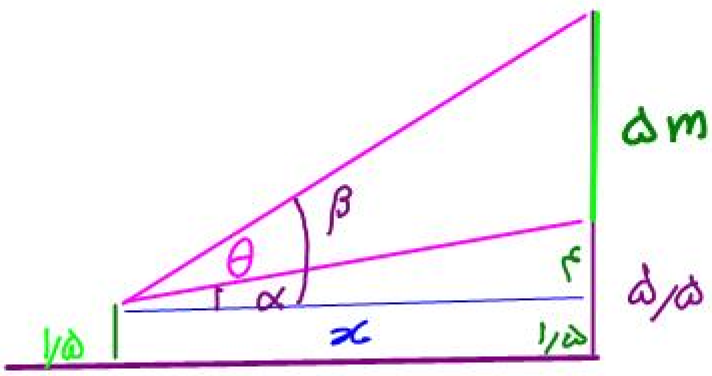
$$\frac{x}{5} = \frac{h}{10} \rightarrow x = \frac{1}{2}h$$

حجم آب درون ظرف $V = \frac{1}{3}\pi x^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{4}h^2\right)h = \frac{1}{12}\pi h^3$

$$\longrightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{1}{4}\pi h^2 \frac{dh}{dt} \xrightarrow{h=6} 3 = \frac{1}{4}\pi(36)\frac{dh}{dt}$$

$$\longrightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{3\pi}\ \frac{cm}{s}$$

مثال.



دوربینی با ارتفاع ۱/۵ متر از تابلوئی ۵ متری که در ۵/۵ متری سطح زمین قرار دارد فیلمبرداری می‌کند. اگر دوربین به تابلو نزدیک شود، سرعت تغییر زاویه‌ی دید دوربین را در لحظه‌ای که در فاصله‌ی ۱۰ متری از تابلو قرار دارد را به دست آورید. مساله را برای حالتهائی که فاصله دوربین از تابلو ۶ و ۴ متر است را نیز محاسبه کنید. (سرعت حرکت دوربین را $5\ \frac{m}{s}$ بگیرید)

$\tan\alpha = \frac{4}{x}$ $\qquad$ $\tan\beta = \frac{9}{x}$

$$\theta = \beta - \alpha = \tan^{-1}\frac{9}{x} - \tan^{-1}\frac{4}{x}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\frac{-9}{x^2}\,dx/dt}{1+\left(\frac{9}{x}\right)^2} - \frac{\frac{-4}{x^2}\,dx/dt}{1+\left(\frac{4}{x}\right)^2} = \left(\frac{-9}{x^2+81} + \frac{+4}{x^2+16}\right)\frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{-5x^2+180}{(x^2+81)(x^2+16)}\,\frac{dx}{dt}$$

الف) $\left.\begin{matrix} x = 10 \\ \frac{dx}{dt} = -5 \end{matrix}\right\} \rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{-320}{181 \times 116}(-5) > 0$

ب) $\left.\begin{matrix} x = 6 \\ \frac{dx}{dt} = -5 \end{matrix}\right\} \rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{0}{117 \times 52}(-5) = 0$

ج) $\left.\begin{matrix} x = 4 \\ \frac{dx}{dt} = -5 \end{matrix}\right\} \rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{100}{97 \times 32}(-5) < 0$

خطی سازی

می دانیم $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. بنابراین برای مقادیر نزدیک به a داریم

$$f'(a) \approx \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \longrightarrow f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

مثال. مقدار تقریبی $\sqrt{26}$ را محاسبه کنید.

$$f(x) = \sqrt{x} \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$x = 26$

$a = 25$

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

$$\sqrt{26} \approx \sqrt{25} + \frac{1}{2\sqrt{25}}(26 - 25) = 5.1$$

مثال. مقدار تقریبی $\sin 46^\circ$ را حساب کنید.

حل.

$$f(x) = \sin x \longrightarrow f'(x) = \cos x$$

$$x = 46 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

$$a = 45 = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$$

$$\sin 46 = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{180}\right) \approx \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{180}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{180}\right)$$

کاربرد مشتق،

اکسترمم مطلق و نسبی

تعریف. فرض کنید تابع f روی مجموعه A تعریف شده باشد. اگر $x_1, x_2 \in A$ چنان باشند که

$$\forall x \in A \qquad f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

آنگاه $f(x_1)$ و $f(x_2)$ را به ترتیب مینیمم و ماکزیمم تابع f در مجموعه A می‌نامیم.

مثال. تابع $f(x) = x^2$ را در نظر بگیرید.

در فاصله $[0,2]$، Max مطلق ۴ و Min مطلق ۰ است.

در فاصله $(0,2]$، Max مطلق ۴ و Min مطلق وجود ندارد.

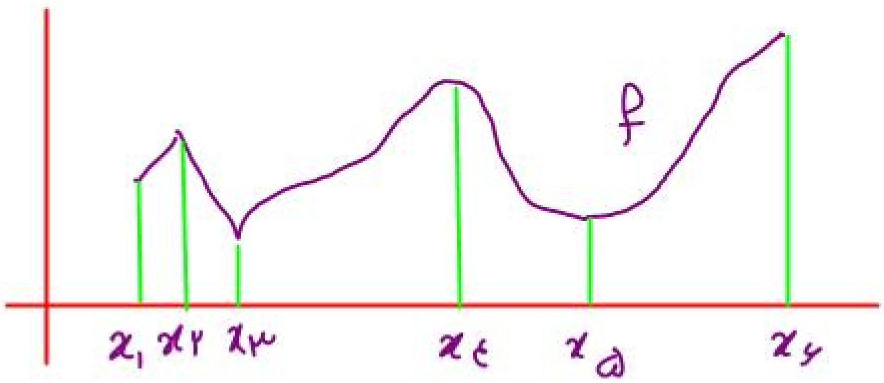
در فاصله‌ی $[-3,2]$ ، Max مطلق ۹ و Min مطلق ۰ است.

در فاصله‌ی $(-\infty,+\infty)$ ، Max مطلق موجود نیست و Min مطلق ۰ است.

تعریف. فرض کنید تابع f در نقطه‌ی a تعریف شده باشد. گوییم f در a دارای Min نسبی است هرگاه یک همسایگی از a موجود باشد به طوری که برای هر x از دامنه‌ی f که در این همسایگی قرار دارد، $f(a) \leq f(x)$.

Max نسبی به طور مشابه تعریف می‌شود.

توجه. نقاط اکسترمم (مطلق یا نسبی) می‌توانند در نقاط انتهایی اتفاق بیفتند



نقاط min نسبی $= \{x_1, x_3, x_5\}$ — Max مطلق $= f(x_6)$

نقاط Max نسبی $= \{x_2, x_4, x_6\}$ — Min مطلق $= f(x_3)$

قضیه. فرض کنید تابع f در همسایگی نقطه‌ی c تعریف شده باشد. اگر f در c دارای اکسترمم نسبی باشد آنگاه $f'(c)=0$ یا f' در c موجود نیست.

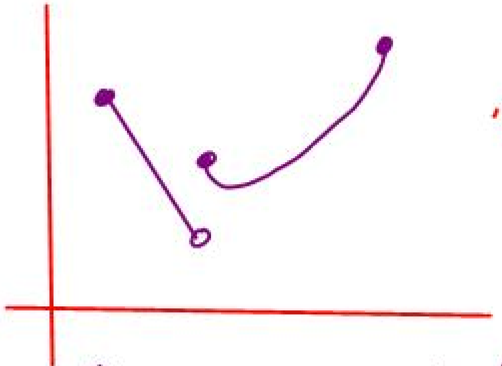
تعریف. نقطه‌ی c را نقطه‌ی بحرانی تابع f گوییم هرگاه f در همسایگی c تعریف شده باشد و $f'(c)=0$ یا f' در c موجود نباشد.

نتیجه. اگر f در c دارای اکسترمم باشد آنگاه c نقطه‌ای بحرانی یا انتهایی است. بنابراین نقطه‌های اکسترمم همواره در نقاط بحرانی یا انتهایی بازه‌ها اتفاق می‌افتد.

روش یافتن نقاط اکسترمم مطلق

فرض کنید تابع f در $[a,b]$ پیوسته باشد. (در این صورت Max و Min مطلق موجود است) برای محاسبه اکسترمم‌های مطلق تمام نقاط اکسترمم (شامل نقاط بحرانی و انتهایی) را یافته و مقادیر آنها را مقایسه می‌کنیم. بیشترین مقدار Max مطلق و کمترین مقدار Min مطلق است.

توجه. چنانچه شرط پیوستگی وجود نداشته باشد لزوماً اکسترمم مطلق وجود ندارد.



این تابع Min مطلق ندارد.

مثال. مطلوبست تعیین نقاط اکسترمم مطلق تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}(x-4)$ در بازه‌ی $[-1,3]$.

حل.

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x-4)+\sqrt[3]{x}=\frac{4(x-1)}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

بوضوح $f'(1)=0$ و $f'(0)$ موجود نیست. پس نقاط بحرانی عبارتند از ۰ و ۱.

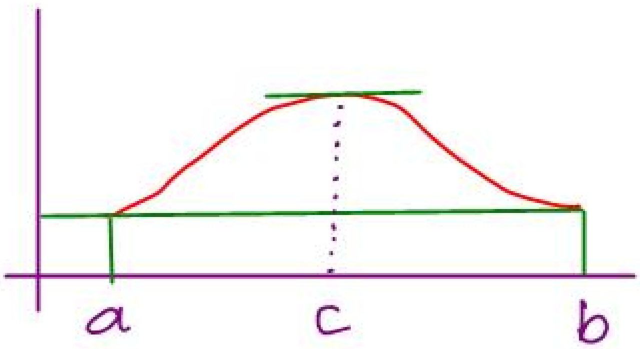
$f(-4)=5 \longrightarrow$ مطلق Max

$f(0)=0$

$f(1)=-3 \longrightarrow$ مطلق Min

$f(3)=-\sqrt[3]{3}$

قضیه‌ی رول و مقدار میانگین



اگر تابع f در $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) مشتق‌پذیر باشد و $f(a)=f(b)$ آنگاه $c\in(a,b)$ چنان موجود است که $f'(c)=0$.

مثال. با به کار بردن قضیه‌ی رول در بازه‌ی $[-3,1]$ برای تابع $f(x)=x^2+2x+3$ نشان دهید نقطه‌ای چون $c\in(-3,1)$ وجود دارد که $f'(c)=0$.

حل. به وضوح f در $[-3,1]$ پیوسته و در $(-3,1)$ مشتق‌پذیر است. به علاوه $f(-3)=6=f(1)$. پس بنا به قضیه‌ی رول $c\in(-3,1)$ موجود است که $f'(c)=0$.

کاربرد قضیه‌ی رول. فرض کنید تابع f دارای n ریشه‌ی a_1، ...، a_n باشد. (و البته f مشتق‌پذیر نیز باشد) در این صورت

$$f(a_1)=f(a_2)=f(a_3)=\cdots=f(a_{n-1})=f(a_n)=0$$

$$f'(b_1)=0 \quad f'(b_2)=0 \quad \cdots \quad f'(b_{n-1})=0$$

یعنی f' حداقل $n-1$ ریشه دارد. به همین صورت به شرط مشتق‌پذیری f'، تابع f'' حداقل $n-2$ ریشه دارد و ...

مسئله. نشان دهید تابع $f(x) = 2x^2 + x - 3\cos x + 1$ دقیقاً $\underline{2}$ ریشه دارد.

حل. f پیوسته است و

$$f(-2\pi) = 8\pi^2 - 2\pi - 2 > 0$$

$$f(0) = -2 < 0 \Longrightarrow \exists c_1 \in (-2\pi, 0) \quad f(c_1) = 0$$

$$f(2\pi) = 8\pi^2 + 2\pi - 2 > 0 \Longrightarrow \exists c_2 \in (0, 2\pi) \quad f(c_2) = 0$$

بنا به قضیه مقدار میانی تابع f حداقل دو ریشه دارد.

اینک می‌خواهیم نشان دهیم f بیش از ۲ ریشه ندارد.

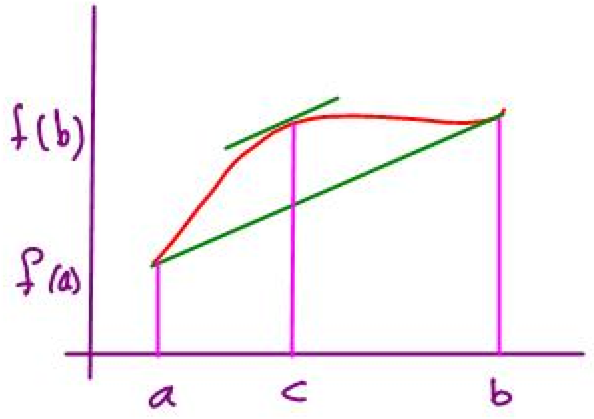
فرض کنید (فرض خلف) f بیش از ۲ ریشه داشته باشد. پس f حداقل ۳ ریشه دارد و لذا بنا به نتیجه‌ی قضیه‌ی رل f' حداقل ۲ ریشه و f'' حداقل $\underline{1}$ ریشه دارد که ممکن نیست. چون

$$f(x) = 2x^2 + x - 3\cos x + 1$$

$$f'(x) = 4x + 1 + 3\sin x$$

$$f''(x) = 4 + 3\cos x = 0 \longrightarrow \cos x = -\frac{4}{3} \; \times$$

پس f دقیقاً $\underline{2}$ ریشه دارد.



قضیه مقدار میانگین. فرض کنید تابع f در $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) مشتق‌پذیر باشد. در این صورت $c \in (a,b)$ موجود است که

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

تعریف. تابع f را صعودی گوییم هرگاه

$$a<b \longrightarrow f(a) \le f(b)$$

و آن را اکیداً صعودی گوییم هرگاه

$$a<b \longrightarrow f(a) < f(b).$$

تابع نزولی و اکیداً نزولی مشابهاً تعریف می‌شود.

قضیه (کاربردی از قضیه مقدار میانگین)

فرض کنید تابع f در بازه I مشتق‌پذیر باشد. در این صورت

۱) اگر در این بازه $f'=0$ آنگاه f ثابت است.

۲) " " $f' \geq 0$ " f صعودی است.

۳) " " $f' > 0$ " f اکیداً صعودی است.

۴) " " $f' \leq 0$ " f نزولی است.

۵) " " $f' < 0$ " f اکیداً نزولی است.

آزمون مشتق اول برای تعیین نقاط اکسترمم

قضیه. فرض کنید تابع f در یک همسایگی نقطه‌ی a تعریف شده باشد. اگر در همسایگی چپ a، $f'>0$ و در همسایگی راست a، $f'<0$ آنگاه تابع f در نقطه‌ی a دارای Max نسبی است. همچنین اگر در همسایگی چپ a، $f'<0$ و راست $f'>0$ آنگاه f در a دارای Min نسبی است.

مثال. نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}\,(x-4)$ را بدست آورید.

حل. باید در جدولی f' را تعیین علامت کنیم.

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x-4)+\sqrt[3]{x}=\frac{4(x-1)}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$4(x-1)$		$-$		$-$	0	$+$	
$3\sqrt[3]{x^2}$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$	

ت ن

همانگونه که ملاحظه می‌شود تابع در همسایگی چپ 1 نزولی و در همسایگی راست آن صعودی است. پس تابع f در نقطه‌ی 1 دارای Min نسبی است.

توجه کنید: تابع f در نقطه‌ی صفر تعریف شده است و صفر نقطه‌ی بحرانی است ولی نقطه‌ی اکسترمم نسبی نیست.

تقعر و نقطه‌ی عطف

تعریف. فرض کنید تابع f در یک بازه تعریف شده باشد و در این بازه تابع f' اکیداً صعودی باشد. در این صورت گوییم تقعر منحنی به سمت بالا است.

- چنانچه در این بازه f' اکیداً نزولی باشد، تقعر منحنی را به جهت پایین می‌گوییم.

توجه. فرض کنید تابع f در بازه‌ی I دوبار مشتق‌پذیر باشد. در این صورت:

الف. اگر در این بازه $f''>0$، آنگاه تقعر f به سمت بالا است.

ب. اگر در این بازه $f''<0$، آنگاه تقعر f به سمت پایین است.

تعریف. فرض کنید تابع f در یک همسایگی نقطه‌ی c تعریف شده باشد. نقطه‌ی c را نقطه‌ی عطف منحنی f گوییم هرگاه:

الف) مماس بر منحنی در نقطه‌ی c موجود باشد.

ب) قبل و بعد از c، تقعر منحنی متفاوت باشد.

مثال. نقطه‌ی صفر نقطه عطف منحنی تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ است. چون تابع f در یک همسایگی صفر تعریف شده است و به علاوه:

الف) مماس بر منحنی در نقطه‌ی صفر موجود است، چون

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=+\infty$$

ب) جهت تقعر منحنی در دو طرف صفر متفاوت است. چون:

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \longrightarrow f''(x) = \frac{-2}{9}x^{-\frac{5}{3}} = \frac{-2}{9\sqrt[3]{x^{5}}}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f''		$+$	ت ن	$-$	

توجه. اگر c نقطه‌ی عطف تابع f باشد لزومی ندارد که f'' در c تعریف شده باشد. مثال بالا مؤید این مطلب است. امّا

قضیه. اگر c نقطه‌ی عطف تابع f باشد و f'' در c تعریف شده باشد، آنگاه $f''(c)=0$.

توجه. عکس قضیه بالا لزوماً برقرار نیست. یعنی اگر $f''(c)=0$ لزومی ندارد f در c دارای نقطه‌ی عطف باشد. به عنوان مثال $f(x)=x^4$ را در نظر می‌گیریم. با این که $f''(0)=0$ امّا صفر نقطه عطف تابع $f(x)=x^4$ نیست.

آزمون مشتق دوم برای تعیین نقاط اکسترمم

قضیه. فرض کنید f در c مشتق‌پذیر بوده و $f'(c)=0$

الف) اگر f'' در c موجود باشد و $f''(c)>0$ آنگاه f در c دارای Min نسبی است.

ب) اگر f'' در c موجود باشد و $f''(c)<0$ آنگاه f در c دارای Max نسبی است.

ج) اگر f'' در c موجود باشد و $f''(c)=0$، این آزمون نتیجه‌ای نمی‌دهد.

مجانبهای یک منحنی

تعریف. ① خط $y=b$ را مجانب افقی نمودار منحنی تابع $y=f(x)$ گوییم

هرگاه $\lim_{x\to\infty} y = b$.

② خط $x=a$ را مجانب قائم تابع $y=f(x)$ گوییم هرگاه

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$$

مثال. فرض کنید $f(x)=\dfrac{x+1}{2x-3}$. به وضوح

$$\lim_{x\to \frac{3}{2}^+} y = \lim_{x\to \frac{3}{2}^+} \frac{x+1}{2x-3} = \lim \frac{\frac{5}{2}}{0^+} = +\infty$$

به همین صورت $\lim_{x\to \frac{3}{2}^-} y = -\infty$. پس $x=\frac{3}{2}$ مجانب قائم است.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x+1}{2x-3} = \frac{1}{2}$$

پس $y=\frac{1}{2}$ مجانب افقی است.

تعریف: خط $y=ax+b$ را مجانب مایل نمودار تابع $y=f(x)$ گوییم هرگاه $\lim_{x\to\infty} f(x)-(ax+b)=0$. (توجه: $a\neq 0$)

و از این که $\lim_{x\to\infty} ax+b=\infty$ لذا $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$. بنابراین

شرط لازم برای وجود مجانب مایل تابع $f(x)$ این است که $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

اما این شرط کافی نیست. یعنی اگر $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ لزوماً نمی‌توان گفت $f(x)$ دارای مجانب مایل است.

به عنوان مثال تابع $f(x)=x^2$ مجانب مایل ندارد در حالی که $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

روش محاسبه‌ی مجانب مایل:

① ابتدا $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ را محاسبه می‌کنیم. اگر $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}=a\neq 0$ به مرحله‌ی دوم می‌رویم. چنانچه این حد موجود نباشد مجانب مایل وجود ندارد.

② $\lim_{x\to\infty} f(x)-ax$ را محاسبه می‌کنیم. اگر مقدار این حد موجود

و برابر b باشد آنگاه $y=ax+b$ مجانب مایل $f(x)$ است.

مثال. مجانب مایل تابع $f(x)=\frac{2x^2-1}{x+3}$ را بدست آورید.

حل.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{x^2+3x}=2\ (=a)$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)-2x=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{x+3}-2x=\lim_{x\to\infty}\frac{-6x-1}{x+3}$$

$$=-6\ (=b)$$

بنابراین $y=2x-6$ مجانب مایل تابع $f(x)$ است.

مراحل محاسبه‌ی تمام مجانب‌های یک تابع

(1) محاسبه‌ی دامنه‌ی تابع و معرفی دامنه به صورت اجتماعی از بازه‌ها

(2) محاسبه‌ی حد تابع از نقاط باز

(3) استنتاج مجانب‌ها از حدود به دست آمده

مثال. تمام مجانب‌های نمودار تابع $f(x)=\frac{2x-3}{x+6}$ را بدست آورید.

$$D_f=\mathbb{R}-\{-6\}=(-\infty,-6)\cup(-6,+\infty)$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x-3}{x+6} = 2 \quad , \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{2x-3}{x+6} = 2$$

پس $y=2$ مجانب افقی تابع است.

$$\lim_{x\to -6^-} \frac{2x-3}{x+6} = \frac{-15}{0^-} = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to -6^+} \frac{2x-3}{x+6} = \frac{-15}{0^+} = -\infty$$

بنابراین $x=-6$ مجانب قائم تابع است.

مثال. کلیه‌ی مجانب‌های تابع $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x-2}}{2x+1}$ را محاسبه کنید.

حل.

$$x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$$

x		-2		1	
x^2+x-2	$+$	0	$-$	0	$+$

$$D_f = (-\infty, -2] \cup [1, +\infty) - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

$$= (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x-2}}{2x+1} = \lim_{x\to \infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to \infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}{x\left(2+\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+x-2}}{2x+1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to \infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}{x\left(2+\frac{1}{x}\right)} = \frac{-1}{2}$$

بنابراین $y=\frac{1}{2}$ و $y=-\frac{1}{2}$ مجانب های افقی هستند.

مثال. تمام مجانب های نمودار تابع $f(x) = \frac{x+\sqrt{x^2-x}}{x+3}$ را بدست آورید.

حل: ابتدا دامنه ی $f(x)$ را محاسبه می کنیم.

x		0		1	
x^2-x	$+$	0	$-$	0	$+$

$$D_f = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty) - \{-3\}$$
$$= (-\infty, -3) \cup (-3, 0] \cup [1, +\infty)$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x+\sqrt{x^2-x}}{x+3} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x+\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}}{x+3}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x+x\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{1+\frac{3}{x}} = 2$$

پس $y=2$ مجانب افقی تابع $f(x)$ است.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\sqrt{x^2-x}}{x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\sqrt{x^2-x}}{x+3}\times\frac{x-\sqrt{x^2-x}}{x-\sqrt{x^2-x}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{(x+3)(x-\sqrt{x^2-x})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x(1+\frac{3}{x})(x-\sqrt{x^2-x})}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{(1+\frac{3}{x})(x-\sqrt{x^2-x})}=0$$

بنابراین $y=0$ نزدیک مجانب افقی است ،

$$\lim_{x\to-3^-} f(x)=\lim_{x\to-3^-}\frac{x+\sqrt{x^2-x}}{x+3}=\frac{-3+\sqrt{12}}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-3^+} f(x)=\lim_{x\to-3^+}\frac{x+\sqrt{x^2-x}}{x+3}=\frac{-3+\sqrt{12}}{0^+}=+\infty$$

بنابراین $x=-3$ مجانب قائم منحنی تابع $f(x)$ است.

مثال: تمام مجانب های منحنی تابع $f(x)=(x+2)\sqrt{\frac{x}{x-2}}$ را محاسبه کنید.

حل:

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
x	$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{x}{x-2}$	$+$	0	$-$	ت ن	$+$

$$D_f=(-\infty,0]\cup(2,+\infty)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x+2)\sqrt{\frac{x}{x-2}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x+2)\sqrt{\frac{x}{x-2}} = +\infty$$

بنابراین ممکن است تابع $f(x)$ دارای مجانب مایل باشد.

برای به دست آوردن مجانب مایل (در صورت وجود) به طریق زیر عمل می‌کنیم،

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+2)\sqrt{\frac{x}{x-2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x}\times\sqrt{\frac{x}{x-2}} = \underbrace{1}_{a} \in R$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 1x = \lim_{x\to+\infty} (x+2)\sqrt{\frac{x}{x-2}} - x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[(x+2)\sqrt{\frac{x}{x-2}} - x\right]\left[(x+2)\sqrt{\frac{x}{x-2}} + x\right]}{(x+2)\sqrt{\frac{x}{x-2}} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+2)^2\frac{x}{x-2} - x^2}{(x+2)\sqrt{\frac{x}{x-2}} + x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2+4x+4)\frac{x}{x-2} - x^2}{(x+2)\sqrt{\frac{x}{x-2}} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3+4x^2+4x-x^3+2x^2}{x-2}}{(x+2)\sqrt{\frac{x}{x-2}} + x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{6x^2+4x}{(x^2-4)\sqrt{\frac{x}{x-2}} + (x^2-2x)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(6+\frac{4}{x}\right)}{x^2\left[\left(1-\frac{4}{x^2}\right)\sqrt{\frac{x}{x-2}}+\left(1-\frac{2}{x}\right)\right]}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{6+\frac{4}{x}}{\left(1-\frac{4}{x^2}\right)\sqrt{\frac{x}{x-2}}+\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \frac{6}{2} = 3 = b$$

پس $y = 1x + 3$ مجانب مایل منحنی تابع $f(x)$ است.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x+2)\sqrt{\frac{x}{x-2}} = +\infty$$

پس $x = 2$ مجانب قائم است.

مراحل رسم نمودار

۱- تعیین دامنه و معرفی آن به صورت اجتماعی از بازه‌ها

۲- تعیین حد تابع در نقاط باز و بدست آوردن مجانب‌ها

۳- محاسبه‌ی مشتق اول و دوم و تعیین علامت در جدول تغییرات

۴- رسم نمودار بر اساس جدول تغییرات

توجه: بر اساس جدول تغییرات می‌توان نقاط اکسترمم و عطف، رفتار تابع و جهت تقعر منحنی را بدست آورد.

مثال. مطلوبست رسم نمودار تابع $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$.

حل.

$$D_f=\mathbb{R}-\{3\}=(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x+1}{x-3}=2 \longrightarrow y=2$$ مجانب افقی

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}\frac{2x+1}{x-3}=\frac{+7}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{2x+1}{x-3}=\frac{+7}{0^+}=+\infty$$

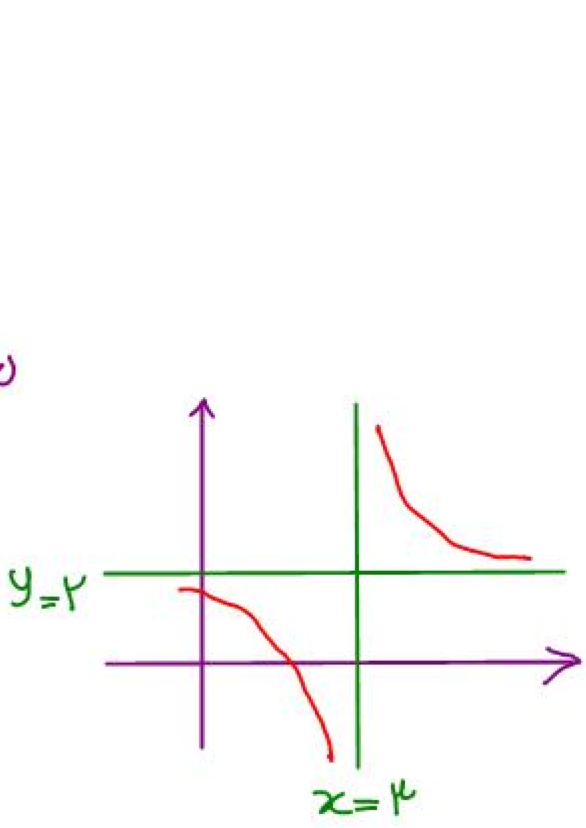
$\Longrightarrow x=3$ مجانب قائم

$$f'(x)=\frac{2(x-3)-1(2x+1)}{(x-3)^2}=\frac{-7}{(x-3)^2}<0$$

$$f''(x)=\frac{-2(x-3)(-7)}{(x-3)^4}=\frac{14(x-3)}{(x-3)^4}$$

$$14(x-3)=0 \longrightarrow x=3\notin D_f$$

	$-\infty$	3	$+\infty$
f'	$-$		$-$
f''	$-$		$+$
f	$\searrow$		$\searrow$



مثال. مطلوب است تعیین رفتار، تقعر، نقاط اکسترمم و عطف تابع $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ با رسم نمودار.

حل.

$$D_f = \mathbb{R}-\{1\} = (-\infty,1)\cup(1,+\infty)$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

پس $x=1$ مجانب قائم است.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x(1-\frac{1}{x})} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{1-\frac{1}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{1-\frac{1}{x}} = -\infty$$

پس تابع f ممکن است دارای مجانب مایل باشد. اما از این که درجه صورت دقیقاً یک واحد بیشتر از درجه مخرج است، تابع f دارای مجانب مایل است.

$$\begin{array}{l|l} x^2 & x-1 \\ \hline & x+1 \\ 1 & \end{array}$$

پس $y=x+1$ مجانب مایل منحنی تابع است.

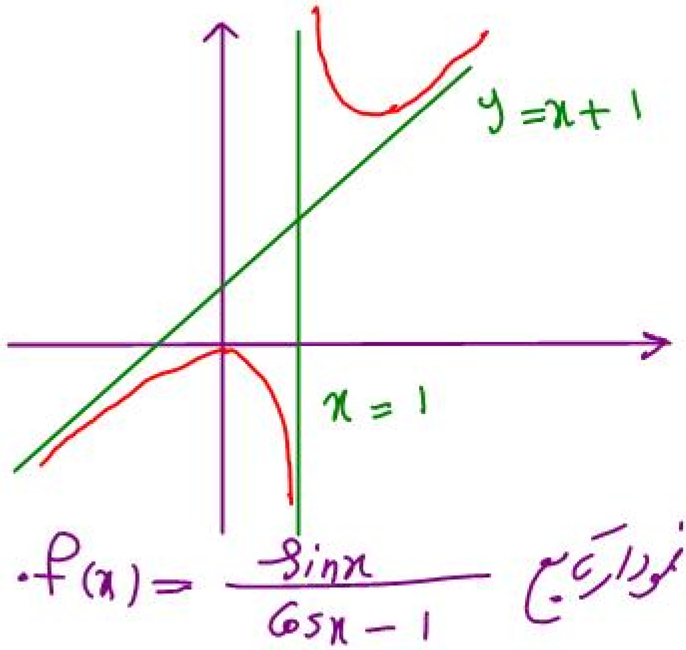
$$y=\frac{x^2}{x-1} \longrightarrow y' = \frac{2x(x-1)-1(x^2)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

$$y'=0 \longrightarrow x^2-2x=0 \longrightarrow x=0 \text{ یا } 2$$

$$y'' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x)}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1)\left(\overbrace{(x-1)^2-(x^2-2x)}^{1}\right)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{2(x-1)}{(x-1)^4}$$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f''		$-$		$-$	$\Vert$	$+$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	Max نسبی	$\searrow$ $-\infty$	$\Vert$	$+\infty$ $\searrow$	Min نسبی	$\nearrow$	$+\infty$



مثال. مطلوبست رسم نمودار تابع $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x - 1}$.

حل. تابع f تابعی است فرد و با دوره‌ی تناوب 2π است. پس تابع f را در $[0, 2\pi]$ رسم می‌کنیم.

$$D_f = [0, 2\pi] - \{0, 2\pi\} = (0, 2\pi)$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\cos x - 1} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{-\sin x} = \frac{+1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2\pi^-} f(x) = \lim_{x\to 2\pi^-} \frac{\sin x}{\cos x - 1} \overset{H}{=} \lim_{x\to 2\pi^-} \frac{\cos x}{-\sin x} = \frac{+1}{0^+} = +\infty$$

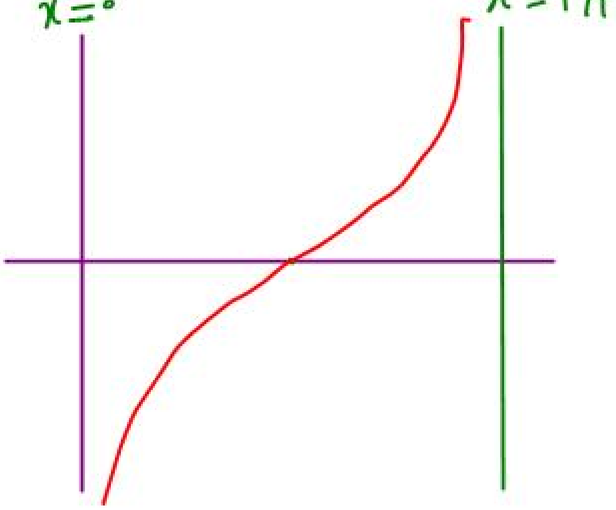
پس $x=0$ ، $x=2\pi$ مجانب‌های قائم منحنی می‌باشند.

$$y = \frac{\sin x}{\cos x - 1} \longrightarrow y' = \frac{\cos x(\cos x - 1) + \sin x \cdot \sin x}{(\cos x - 1)^2} = \frac{1-\cos x}{(\cos x - 1)^2}$$

$$y' = \frac{1}{1-\cos x} \longrightarrow y'' = \frac{-(\sin x)}{(1-\cos x)^2}$$

$$y'' = 0 \longrightarrow \sin x = 0 \longrightarrow x = \pi$$

x	0		π		2π
f'		$+$		$+$	
f''		$-$		$+$	
f		$\nearrow$	عطف	$\nearrow$	



تمرین. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-3}$

ب) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+2x} - x}{x+2}$

ج) $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x}{x-4}}$

د) $f(x) = \dfrac{x^2+2x+2}{x^2-2x-3}$

مثال. مطلوبست تعیین نقاط اکسترمم، عطف، رفتار و جهت تقعر منحنی $f(x)=\sqrt[3]{x}\,(x-4)$ بارسم شکل.

حل.

$$D_f=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty\\ &\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\end{aligned}\right\}\longrightarrow$$ احتمال وجود مجانب مایل

اما می‌توان دید منحنی تابع f دارای مجانب مایل نیست. چون

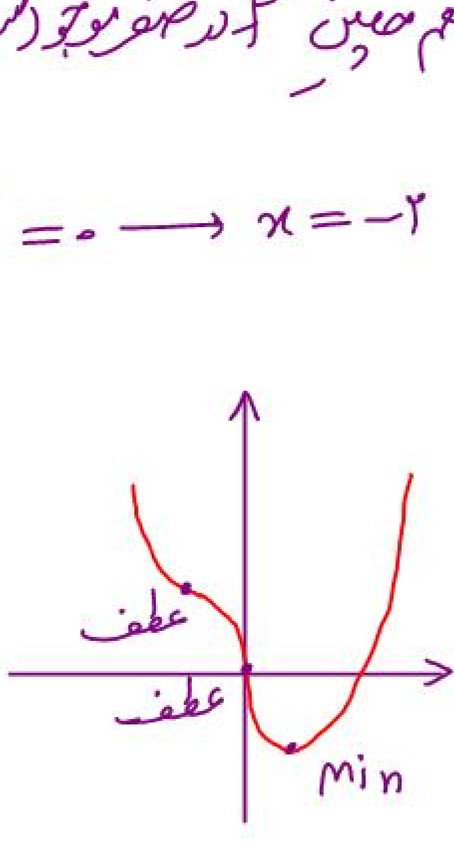
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{x}\,(x-4)}{x}=\pm\infty$$

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x-4)+\sqrt[3]{x}=\frac{4x-4}{3\sqrt[3]{x^2}}=0\longrightarrow x=1$$

هم چنین f' در صفر موجود نیست. پس $\{0,1\}$ مجموعه نقاط بحرانی تابع f است.

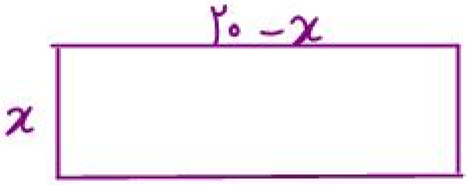
$$f''(x)=\frac{12\sqrt[3]{x^2}-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}(4x-4)}{9\sqrt[3]{x^4}}=\frac{4(x+2)}{9\sqrt[3]{x^5}}=0\longrightarrow x=-2$$

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
f'		$-$		$-$	∥	$-$	0	$+$	
f''		$+$	0	$-$	∥	$+$		$+$	
f		↘		↘		↘		↗	
			عطف		عطف		Min		



بهینه‌سازی. در این قسمت تابعی به نام تابع هدف موجود است که باید بهینه (ماکزیمم یا مینیمم) شود. ماکزیمم یا مینیمم تابع در یکی از نقاط بحرانی یا نقاط انتهائی اتفاق می‌افتد. در حل مسائل بهینه‌سازی ممکن است از روابط کمکی استفاده شود.

مثال. مستطیلی با محیط ۴۰ متر و با مساحت ماکزیمم بیابید.



$$S = x(20 - x) = 20x - x^2$$

$$x \in [0, 20]$$

$$S'(x) = 20 - 2x = 0 \longrightarrow x = 10$$

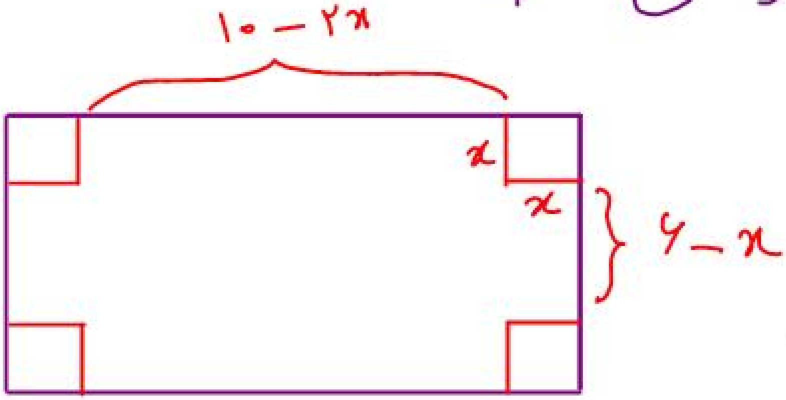
$$S(0) = 0$$

$$S(10) = 100 \longrightarrow \text{Max}$$

$$S(20) = 0$$

بنابراین مستطیل با مساحت ماکزیمم یک مربع خواهد بود.

مثال. مطابق شکل از ۴ گوشه‌ی یک مستطیل ۴ قطعه مربع می‌بریم و با تا زدن آن جعبه‌ای می‌سازیم. جعبه با بیشترین حجم را به دست آورید.



حل. $V(x) = x(10 - 2x)(6 - 2x) = 4(x^3 - 8x^2 + 15x)$ حجم جعبه

تغییرات x $\quad x \in [0, 3]$

$$V'(x) = 4(3x^2 - 16x + 15) = 0 \longrightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{19}}{3}$$

از این که $\frac{8 \pm \sqrt{19}}{3} > 3$ لذا تنها جواب قابل قبول $x = \frac{8-\sqrt{19}}{3}$ است و این نقطه تنها نقطه‌ی بحرانی است.

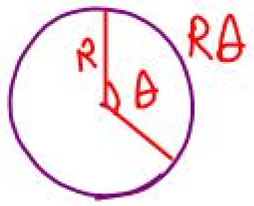
$f(0) = 0$

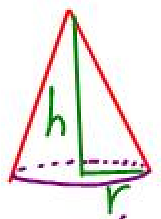
$f(3) = 0$

$f\left(\frac{8-\sqrt{19}}{3}\right) > 0 \longrightarrow$ مطلق Max

مثال. مطابق شکل قطاعی از دایره‌ای به شعاع R را بریده و با آن یک مخروط می‌سازیم. قطاع را با چه زاویه‌ای ببریم تا مخروط با بیشترین حجم حاصل شود.

حل.





توجه کنید اگر شعاع دایره R باشد، طول کمان روبرو به زاویه‌ی θ برابر است با $R\theta$.

هم‌چنین اگر شعاع قاعده‌ی مخروط r باشد آنگاه محیط قاعده‌ی آن $2\pi r = R\theta$ است. بنابراین $r = \frac{R\theta}{2\pi}$ و درنتیجه $h = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R\theta}{2\pi}\right)^2}$

$$\text{حجم مخروط } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{R\theta}{2\pi}\right)^2\sqrt{R^2\left(1-\frac{\theta^2}{4\pi^2}\right)}$$

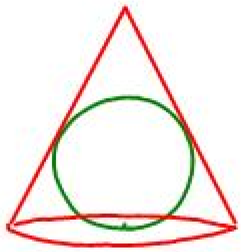
$$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{R\theta}{2\pi}\right)^2\sqrt{R^2\left(\frac{4\pi^2-\theta^2}{4\pi^2}\right)} = \frac{R^3\theta^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2-\theta^2}$$

برای این که V بیشترین مقدار خود را اختیار کند کافی است V^2 بیشترین مقدار خود را اختیار کند. اما

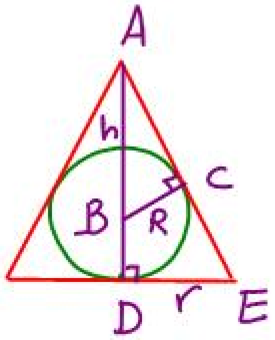
$$\underbrace{V^2(\theta)}_{f(\theta)} = \frac{R^6}{576\pi^4}\left(4\pi^2\theta^4 - \theta^6\right)$$

$$f'(\theta)=\frac{R^6}{576\pi^4}\left(16\pi^2\theta^3-6\theta^5\right)=0 \longrightarrow \begin{cases}\theta=0\\ \text{یا}\\ \theta=\sqrt{\frac{8}{3}}\,\pi\end{cases}$$

می‌توان دید بیشترین حجم در حالتی رخ می‌دهد که $\theta=\sqrt{\frac{8}{3}}\,\pi$.



مثال. کره‌ای به شعاع R در اختیار داریم. مخروطی محیط بر کره بدست آورید که کمترین حجم را داشته باشد.



حل.

$$AC=\sqrt{(h-R)^2-R^2}=\sqrt{h^2-2hR}$$

$$\frac{AC}{AD}=\frac{BC}{DE}\longrightarrow\frac{\sqrt{h^2-2hR}}{h}=\frac{R}{r}$$

$$\longrightarrow r=\frac{Rh}{\sqrt{h^2-2hR}}$$

حجم مخروط $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{R^2h^2}{h^2-2hR}\right)h$

$$\longrightarrow V(h)=\frac{1}{3}\pi\,\frac{R^2h^2}{h-2R}\longrightarrow V'=\frac{\pi R^2}{3}\,\frac{h^2-4Rh}{(h-2R)^2}$$

$$V'=0\longrightarrow\begin{cases}h=0 & \text{غ ق ق}\\ \text{یا}\\ h=4R & \text{ق ق}\end{cases}$$

بعلاوه V' در $2R$ موجود نیست. پس $2R$ نیز نقطه بحرانی است.

$$V(2R)=+\infty$$

$V(4R)=\frac{2\pi R^3}{3}\longrightarrow$ کمترین حجم مخروط

تمرین. ۱- یک لوزی با کمترین مساحت به دایره‌ای با شعاع R محیط کنید.

۲- درون دایره‌ای به شعاع R، مثلث متساوی الساقینی با بیشترین مساحت محاط کنید.

۳- مخروطی با بیشترین حجم در کره‌ای به شعاع R محاط کنید.

۴- مثلثی با قاعده‌ی a و ارتفاع b در اختیار داریم. درون مثلث مستطیلی چنان قرار می‌دهیم که یک ضلع آن روی قاعده‌ی مثلث و دو رأس دیگر آن روی دو ضلع دیگر مثلث قرار گیرد. در بین این مستطیل‌ها کدامیک دارای بیشترین مساحت است.

انتگرال

تعریف. فرض کنید تابع $F(x)$ در بازه I مشتق‌پذیر باشد و در این بازه $F'(x)=f(x)$. در این صورت $F(x)$ را تابع اولیه یا انتگرال نامعین تابع $f(x)$ نامیده و می‌نویسیم $F(x)=\int f(x)\,dx$.

مثال.

$$(x^2)'=2x \longrightarrow \int 2x\,dx = x^2$$

$$(\sin x)'=\cos x \longrightarrow \int \cos x\,dx = \sin x$$

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2} \longrightarrow \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x$$

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \longrightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$$

مسأله. نشان دهید اگر $y=\arctan x$ آنگاه $y'=\frac{1}{1+x^2}$.

حل

$$y=\arctan x \longrightarrow x=\tan y \xrightarrow[\text{ضمنی}]{\text{مشتق}} 1=y'(1+\tan^2 y)$$

$$\longrightarrow y'=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

تمرین. مشتق تابع $y=\arcsin x$ را محاسبه کنید.

خواص انتگرال و چند فرمول ساده انتگرال گیری

۱ $$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

۲ $$\int k f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$$ (k مقداری ثابت است)

۳ $$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (n \in Q \,,\, n \neq -1)$$

۴ $$\int \sin x\,dx = -\cos x$$

۵ $$\int \cos x\,dx = \sin x$$

۶ $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1} x$$

۷ $$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x$$

مثال.

$$\int (2\sin x - 3\cos x + x - 1)\,dx$$

$$= 2(-\cos x) - 3(\sin x) + \frac{x^2}{2} - x$$

مثال. $$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$$

مثال. $$\int \frac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} = \frac{x^{-2}}{-2} = \frac{1}{-2x^2}$$

مثال. $$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}} = \int \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}\,dx = \int x^{-\frac{4}{3}}\,dx = \frac{x^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}} = \frac{-3}{\sqrt[3]{x}}$$

مثال.

$$I = \int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^2+1}\,dx$$

$$\begin{array}{l|l}
x^3+x^2+x+2 & x^2+1 \\ \cline{2-2}
x^3 \qquad +x & x+1 \\ \cline{1-1}
\quad x^2 \qquad +2 & \\
\quad x^2 \qquad +1 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 1 &
\end{array}$$

$$\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^2+1}\,dx$$

$$= \int (x+1) + \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + \tan^{-1}x$$

مقدار ثابت c در انتگرال‌گیری

$y = x^2 \longrightarrow y' = 2x$

$y = x^2+1 \longrightarrow y' = 2x \qquad \Rightarrow \qquad \int 2x\,dx = x^2 + c$

$\vdots$

$y = x^2+c \longrightarrow y' = 2x$

در حالت کلی اگر $F'(x) = f(x)$ آنگاه $(F(x)+c)' = f(x)$

پس $\int f(x)\,dx = F(x) + c$.

تغییر متغیر در انتگرال‌گیری

تعریف. فرض کنید u تابعی از x باشد. در این صورت تعریف می‌کنیم

$$du = u'dx$$

و آن را دیفرانسیل u می‌نامیم

مثال:

$$\begin{cases} u = \sin(x+1) \\ du = \cos(x+1)\,dx \end{cases} \qquad \begin{cases} u = x^3 - 3x \\ du = (3x^2 - 3)\,dx \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + x = u^3 - 3u \\ (2x+1)\,dx = (3u^2 - 3)\,du \end{cases} \qquad \begin{cases} x = t + \frac{1}{t} \\ dx = (1 - \frac{1}{t^2})\,dt \end{cases}$$

دلیل. قرار می‌دهیم $x^2 + x = t = u^3 - 3u$. در این صورت

$$\left.\begin{aligned} t = x^2 + x &\longrightarrow dt = (2x+1)\,dx \\ t = u^3 - 3u &\longrightarrow dt = (3u^2 - 3)\,du \end{aligned}\right\} \Rightarrow (2x+1)\,dx = (3u^2 - 3)\,du$$

مثال.

$$I = \int \underbrace{(x+1)}_{u}{}^{100}\,dx \qquad \begin{cases} u = x+1 \\ du = dx \end{cases}$$

$$I = \int u^{100}\,du = \frac{u^{101}}{101} + c = \frac{(x+1)^{101}}{101} + c$$

مثال.

$$I = \int (2x-5)^{10}\,dx \qquad \begin{cases} u = 2x - 5 \\ du = 2\,dx \longrightarrow dx = \frac{1}{2}\,du \end{cases}$$

$$I = \int u^{10} \left(\frac{1}{2}\,du\right) = \frac{1}{2} \int u^{10}\,du = \frac{1}{2}\,\frac{u^{11}}{11} + c$$

$$= \frac{(2x-5)^{11}}{22} + c$$

مثال.

$$I = \int \underbrace{(x+1)\sqrt[5]{\underbrace{x^2+2x-3}_{u}}\,dx}_{\frac{1}{2}du} \qquad \begin{cases} u = x^2+2x-3 \\ du = (2x+2)\,dx \end{cases}$$

$$= 2(x+1)\,dx$$

$$I = \int \sqrt[5]{u}\,\left(\tfrac{1}{2}du\right) \qquad \rightarrow (x+1)\,dx = \frac{1}{2}du$$

$$= \frac{1}{2}\int \sqrt[5]{u}\,du = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{5}}\,du = \frac{1}{2} \times \frac{u^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}} + c$$

$$= \frac{5}{12}\left(x^2+2x-3\right)^{\frac{6}{5}} + c$$

مثال.

$$I = \int \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^3} \qquad \begin{cases} u = x^2+1 \\ du = 2x\,dx \end{cases}$$

$$I = \int \frac{du}{u^3} = \int u^{-3}\,du = \frac{u^{-2}}{-2} + c = \frac{-1}{2(x^2+1)^2} + c$$

مثال.

$$I = \int \frac{(2x+3)^4}{(x+2)^6}\,dx = \int \left(\frac{2x+3}{x+2}\right)^4 \frac{1}{(x+2)^2}\,dx$$

$$\begin{cases} u = \left(\dfrac{2x+3}{x+2}\right) \\ du = \dfrac{1}{(x+2)^2}\,dx \end{cases} \qquad I = \int u^4\,du = \frac{u^5}{5} + c$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{2x+3}{x+2}\right)^5 + c$$

مسأله. مشتق تابع $y=\tan x$ را محاسبه کنید.

$$y=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}\longrightarrow y'=\frac{\cos x.\cos x-(-\sin x)\sin x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x\ \left(=1+\tan^2 x\right)$$

مسأله. مشتق تابع $y=\sec x$ را محاسبه کنید.

$$y=\sec x=\frac{1}{\cos x}\longrightarrow y'=\frac{0\cos x-(-\sin x)1}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos x}\times\frac{\sin x}{\cos x}=\sec x.\tan x$$

مسأله. مطلوبست محاسبه‌ی $I=\int\frac{1}{1-\sin x}dx$،

$$I=\int\frac{1}{1-\sin x}dx=\int\frac{1}{1-\sin x}\times\frac{1+\sin x}{1+\sin x}dx$$

$$=\int\frac{1+\sin x}{\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx$$

$$=\int\left(\sec^2 x+\sec x\tan x\right)dx=\tan x+\sec x+c$$

مثال.

$$I=\int \tan^2 x\,dx$$

$$I=\int\left[(\tan^2 x+1)-1\right]dx=\tan x-x+c$$

مثال.

$$I=\int \tan^4 x\,dx$$

$$I=\int(\underbrace{\tan^4 x+\tan^2 x}\;\underbrace{-\tan^2 x-1}+1)\,dx$$

$$=\int \tan^2 x(\tan^2 x+1)-1(\tan^2 x+1)\;dx+\int 1\,dx$$

$$=\int(\tan^2 x+1)(\tan^2 x-1)\,dx+\int 1\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+x+c$$

چون اگر $J=\int \underbrace{(\tan^2 x+1)\,dx}_{du}\,(\underbrace{\tan x}_{u}{}^2-1)$ آنگاه:

$$\begin{cases} u=\tan x \\ du=(1+\tan^2 x)\,dx \end{cases}$$

$$J=\int(u^2-1)\,du=\frac{u^3}{3}-u=\frac{1}{3}\tan^3 x-\tan x$$

مثال. مطلوبست محاسبه‌ی انتگرال $I=\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x(x+4)}}$

حل. $x(x+4)=x^2+4x=x^2+4x+4-4=(x+2)^2-4$

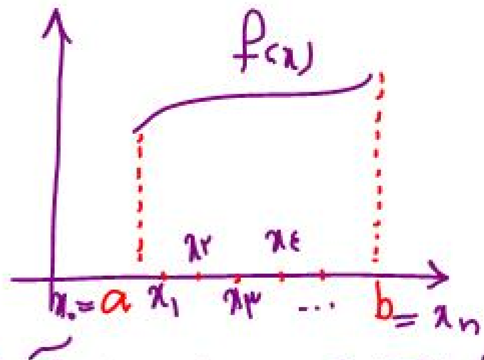
$$I=\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{(x+2)^2-4}} \qquad \begin{cases} x+2=2\sec\theta \\ dx=2\sec\theta\tan\theta\, d\theta \end{cases}$$

$$I=\int \frac{2\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{2\sec\theta\sqrt{4\sec^2\theta-4}}=\int \frac{2\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{2\sec\theta\; 2\tan\theta}$$

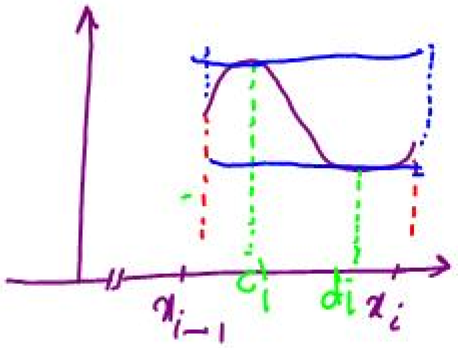
$$=\int \frac{1}{2}d\theta=\frac{1}{2}\theta+c=\frac{1}{2}\sec^{-1}\left(\frac{x+2}{2}\right)+c$$

انتگرال معین

فرض کنید تابع $f(x)$ در $[a,b]$ پیوسته باشد. همچنین فرض کنید $P=\{x_0=a, x_1, x_2, \dots, x_n=b\}$ افرازی از $[a,b]$ باشد.



از این که $f(x)$ در $[a,b]$ پیوسته است در هر زیر بازه‌ی آن یعنی $[x_{i-1}, x_i]$ نیز پیوسته خواهد بود. فرض کنید $f(c_i)$ و $f(d_i)$ به ترتیب Max و Min تابع $f(x)$ در این فاصله باشند. همچنین S_i را سطح زیر نمودار در این فاصله بگیرید.



واضح است که برای هر i ، $f(c_i)(x_i-x_{i-1}) \leqslant S_i \leqslant f(d_i)(x_i-x_{i-1})$.

چنانچه قرار دهیم $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ آنگاه $f(d_i)\Delta x_i \leqslant S_i \leqslant f(c_i)\Delta x_i$

و اگر S سطح زیر نمودار در $[a,b]$ باشد آنگاه $S=\sum_{i=1}^{n} S_i$ در خاصیت زیر صدق می‌کند.

$$f(d_i)\Delta x_i \leqslant S_i \leqslant f(c_i)\Delta x_i \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} f(d_i)\Delta x_i \leqslant S \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

چنانچه $x_i \to x_{i-1}$ آنگاه $\Delta x_i \to 0$ و $d_i \to c_i$ پس

$$S = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(d_i)\Delta x_i = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

تعریف. انتگرال معین تابع $f(x)$ در $[a,b]$ عبارت است از:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$
$$= \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(d_i)\Delta x_i$$

مثال. مطلوبست محاسبه‌ی $\int_a^b x\,dx$.

حل.

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$$

$$x_0 = a$$
$$x_1 = a + \frac{b-a}{n}$$
$$x_2 = a + 2\left(\frac{b-a}{n}\right)$$
$$\vdots$$
$$x_i = a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)$$
$$\vdots$$
$$x_n = a + n\left(\frac{b-a}{n}\right) = b$$

از اینکه $f(x)=x$ صعودی است لذا Max در انتها و Min در ابتدای بازه رخ می‌دهد.

$$\sum f(d_i)\Delta x_i = \sum f(x_i)\Delta x_i = \sum x_i \cdot \Delta x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[a+i\left(\frac{b-a}{n}\right)\right]\left[\frac{b-a}{n}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a\left(\frac{b-a}{n}\right) + \sum_{i=1}^{n} i\left(\frac{b-a}{n}\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a\left(\frac{b-a}{n}\right) + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} i$$

$$= na\left(\frac{b-a}{n}\right) + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$\int_a^b x\,dx = \lim_{n\to+\infty} a(b-a) + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

چند فرمول لازم

① $\sum_{i=1}^{n} k = nk$

② $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

③ $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

④ $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

مثال. مطلوبست محاسبه‌ی انتگرال $\int_1^5 x^2\,dx$.

حل. بازه‌ی $[1,5]$ را به n قسمت تقسیم می‌کنیم. در این صورت

$$\Delta x_i = \frac{5-1}{n} = \frac{4}{n}$$

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = 1 + \frac{4}{n}$$

$$x_2 = 1 + \frac{8}{n}$$

$$\vdots$$

$$x_i = 1 + \frac{4i}{n}$$

$$\vdots$$

$$x_n = 1 + \frac{4n}{n} = 5$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{4i}{n}\right)^2 \frac{4}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4}{n} + \frac{32i}{n^2} + \frac{64i^2}{n^3}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{4}{n} + \frac{32}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{64}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \frac{4}{n}\times n + \frac{32}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2} + \frac{64}{n^3}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\int_1^5 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = 4 + 16 + \frac{64}{3} = \frac{124}{3}$$

تعریف. گوئیم تابع f در بازه $[a,b]$ انتگرال پذیر است هرگاه $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ موجود باشد. در چنین حالتی مقدار این حد $\int_a^b f(x)\,dx$ خواهد بود.

توجه. اگر تابع f پیوسته باشد آنگاه مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ موجود است و در نتیجه f در $[a,b]$ انتگرال پذیر است.

قضیه. اگر f بر $[a,b]$ پیوسته یا حداکثر تعداد متناهی نقاط ناپیوستگی پرشی داشته باشد آنگاه f بر $[a,b]$ انتگرال پذیر است.

توابعی موجودند که انتگرال پذیر نیستند. به عنوان مثال تابع زیر به نام تابع دیریکله را در نظر بگیرید.

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in Q\\ 0 & x\notin Q\end{cases}$$

می توان دید با انتخاب های مناسبی از افراز $P=\{x_0,\dots,x_n\}$، مقدار حد $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ موجود نیست و لذا این تابع در $[0,1]$ انتگرال پذیر نیست.

خواص انتگرال معین

1) $\int_a^b (f(x)\pm g(x))\,dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx$

2) $\int_a^b k f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

3) $\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$

۴) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

۵) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

۶) اگر m و M به ترتیب کمترین و بیشترین مقدار تابع f در $[a,b]$ باشند آنگاه

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

۷) اگر در $[a,b]$ داشته باشیم $f(x) \leq g(x)$ آنگاه

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx \,.$$

توجه. از خاصیت (۶) می‌توان دید اگر m و M به ترتیب کمترین و بیشترین مقدار تابع f در $[a,b]$ باشند آنگاه

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leq M$$

تعریف. $\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$ مقدار میانگین تابع f در $[a,b]$ نامیده می‌شود.

مثال. مقدار میانگین تابع $f(x)=x^2$ در $[1,5]$ را بدست آورید.

حل. در مثال‌های قبل نشان دادیم $\int_1^5 x^2\,dx = \frac{124}{3}$. بنابراین مقدار متوسط تابع $f(x)=x^2$ در این بازه عبارت است از $\frac{\int_1^5 x^2\,dx}{5-1} = \frac{124}{12} = \frac{31}{3}$

قضیه) قضیه مقدار میانگین برای انتگرال) هر تابع پیوسته f در فاصله‌ی $[a,b]$ مقدار میانگین خود را اختیار می‌کند. به عبارت دیگر $c\in(a,b)$ موجود است که

$$f(c)=\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

قضایای اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

اولین قضیه اساسی حساب. فرض کنید تابع $y=f(t)$ در $[a,b]$ پیوسته باشد و $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$. در این صورت $F(x)$ بر (a,b) مشتق‌پذیر است و $F'(x)=f(x)$.

مثال.

$$F(x)=\int_0^x \sin^2 t\,dt \longrightarrow F'(x)=\sin^2 x$$

مثال.

$$F(x)=\int_x^4 \frac{1}{t}\,dt \longrightarrow F'(x)=?$$

$$F(x)=\int_x^4 \frac{dt}{t}=-\int_4^x \frac{1}{t}\,dt \longrightarrow F'(x)=-\frac{1}{x}$$

مثال.

$$F(x)=\int_1^x x\sin t\,dt \longrightarrow F'(x)=?$$

$$F(x)=\int_1^x x\sin t\,dt=x\int_1^x \sin t\,dt$$

$$\longrightarrow F'(x)=1\cdot\int_1^x \sin t\,dt+x\cdot\sin x$$

توجه. اگر $F(x)=\int_a^{g(x)} f(t)\,dt$ آنگاه $F'(x)=g'(x)f(g(x))$.

اثبات. قرار می‌دهیم $G(x)=\int_a^{x} f(t)\,dt$. در این صورت $G'(x)=f(x)$.

از طرفی $G(g(x))=\int_a^{g(x)} f(t)\,dt=F(x)$. پس

$$F'(x)=g'(x)\,G'(g(x))=g'(x)\,f(g(x))$$

مثال.

$$F(x)=\int_1^{x^2}\sqrt{1+t}\,dt \longrightarrow F'(x)=2x\sqrt{1+x^2}$$

مثال.

$$F(x)=\int_{x^2}^{x^3}\sin^2\sqrt{t}\,dt \longrightarrow F'(x)=?$$

$$F(x)=\int_{x^2}^{x^3}\sin^2\sqrt{t}\,dt=\int_{x^2}^{0}\sin^2\sqrt{t}\,dt+\int_0^{x^3}\sin^2\sqrt{t}\,dt$$

$$=\int_0^{x^3}\sin^2\sqrt{t}\,dt-\int_0^{x^2}\sin^2\sqrt{t}\,dt$$

$$\longrightarrow F'(x)=3x^2\sin^2\sqrt{x^3}-2x\sin^2\sqrt{x^2}$$

در حالت کلی:

$$F(x)=\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt \longrightarrow F'(x)=g'(x)f(g(x))-h'(x)f(h(x))$$

قاعده‌ی هوپیتال. فرض کنید $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$

در این صورت $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$.

توجه. قاعده‌ی هوپیتال در حالتی که $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ نیز برقرار است.

همچنین در حالتی که $x\to\infty$ این قاعده برقرار است.

مثال. مطلوبست محاسبه‌ی $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{0+\sin x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}$$

مثال. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$ را محاسبه کنید.

حل. فرض کنید برای حل این مسأله از هوپیتال استفاده کنیم. در این صورت:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}=\lim_{x\to\infty}1+\cos x$$ موجود نیست

بنابراین برای حل این مسأله نمی‌توان از هوپیتال استفاده کرد.

مثال.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin t^2\,dt}{x^6}\overset{\text{Hop}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x^4}{6x^5}=\frac{2}{6}$$

قضیه دوم اساسی حساب

نمادگذاری. اگر a و b دو عدد حقیقی باشند آنگاه $[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$

قضیه. اگر $\int f(x)\,dx=F(x)$ آنگاه $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$.

مثال.

$$\int_a^b x^k\,dx=\frac{1}{k+1}x^{k+1}\Big]_a^b=\frac{1}{k+1}b^{k+1}-\frac{1}{k+1}a^{k+1}$$

مثال. مطلوبست محاسبه‌ی $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

حل. ابتدا $I=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} x = a\sin\theta \\ dx = a\cos\theta\, d\theta \end{cases}$$

$$I=\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}\,(a\cos\theta\, d\theta) = \int a^2\cos^2\theta\, d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2\theta)\,d\theta = \frac{a^2}{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\sin^{-1}\frac{x}{a}+\frac{1}{2}\times 2\sin\theta\cos\theta\right)$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)$$

$$\longrightarrow \int_0^a \sqrt{a^2-x^2} = \frac{a^2}{2}\left(\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)\Bigg|_0^a$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}+0\right)-\frac{a^2}{2}(0+0)=\frac{\pi a^2}{4}$$

توجه کنید که در حل انتگرال معین بالا پس از تغییر متغیر می‌توانیم کران‌ها را نیز برحسب متغیر جدید بنویسیم. حسن این کار این است که پس از انتهای انتگرال‌گیری، جاگذاری برحسب متغیر اول لازم نیست. بدین شکل:

$$\begin{cases} x = a\sin\theta \\ dx = a\cos\theta\, d\theta \end{cases}$$

$$x=0 \longrightarrow a\sin\theta = 0 \longrightarrow \sin\theta = 0 \rightarrow \theta = 0$$

$$x=a \longrightarrow a\sin\theta = a \longrightarrow \sin\theta = 1 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

اکنون:

$$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}\,(a\cos\theta\, d\theta)$$

مثال. مطلوبست محاسبه ی $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \, d\theta$.

حل. قرار میدهیم $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \, d\theta$.

$$\begin{cases} u = \frac{\pi}{2} - \theta \\ du = -d\theta \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\theta = 0 \longrightarrow u = \frac{\pi}{2} \\ &\theta = \frac{\pi}{2} \longrightarrow u = 0 \end{aligned}$$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \, d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - u\right)(-du)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - u\right) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u \, du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \, d\theta$$

$$2A = A + A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \, d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1}) \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow A = \frac{\pi}{4}$$

تمرین. انتگرال معین زیر را حل کنید!

① $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} \, dx$

② $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} \, dx$

کاربردهای انتگرال معین.

مثال. مطلوبست محاسبه‌ی $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$.

حل.

$$\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}=\left[\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^2}\right]\frac{1}{n}=\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right]\frac{1}{n}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\frac{1}{n}\longrightarrow\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}x^3\Big]_0^1=\frac{1}{3}$$

تبدیلات: $\frac{i}{n}\to x$ ، $\frac{1}{n}\to dx$ ، $\sum\to\int$ ، کرانهای انتگرال $\leftarrow$ کرانهای $\sum$

مثال. مطلوب است محاسبه‌ی $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

$$\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}=\left[\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right]\frac{1}{n}=\left[\sqrt{\frac{1}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right]\frac{1}{n}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}\,\frac{1}{n}\longrightarrow\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1=\frac{2}{3}$$

مثال. مطلوبست محاسبه‌ی حد زیر:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right]$$

$$\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}=\left[\frac{n^2}{n^2+1}+\frac{n^2}{n^2+4}+\cdots+\frac{n^2}{n^2+n^2}\right]\frac{1}{n}$$

$$=\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{1+\frac{4}{n^2}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n^2}{n^2}}\right]\frac{1}{n}=\left[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right]\frac{1}{n}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\,\frac{1}{n}\longrightarrow\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx=\tan^{-1}x\Big]_0^1=\frac{\pi}{4}$$

مطلوب است محاسبه‌ی حد زیر:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right]$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right]$$

$$=\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{n^2}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(n-1)^2}{n^2}}}\right]\frac{1}{n}$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{i}{n})^2}}\,\frac{1}{n}\longrightarrow\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\sin^{-1}x\Big]_0^1=\frac{\pi}{2}$$

توابع لگاریتمی و نمایی

تعریف. فرض کنید $x>0$. در این صورت تعریف می‌کنیم $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$.

بنا به آنچه بیان شده است:

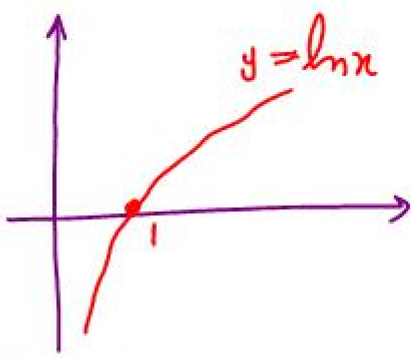
الف. $\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = 0$.

ب. اگر $x>1$ آنگاه $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt > 0$،

ج. اگر $0<x<1$ آنگاه $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt < 0$.

همچنین بنا به قضیه اساسی حساب $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$ و لذا $\ln x$ تابعی اکیداً صعودی است. همچنین $(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0$ و بنابراین جدول تغییرات تابع $y=\ln x$ به صورت زیر خواهد بود

x	0		1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y''		$-$		$-$	
y		$\nearrow$		$\nearrow$	



قضیه. برای هر $x, y > 0$ خواص زیر برقرارند.

1. $\ln ax = \ln a + \ln x$
2. $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$
3. $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$
4. $\ln x^r = r \ln x \quad (r \in \mathbb{Q})$

اثبات. ① قرار می‌دهیم $f(x) = \ln ax - \ln a - \ln x$. در این صورت $f'(x) = \frac{a}{ax} - 0 - \frac{1}{x} = 0$ پس f تابعی ثابت است و برای هر x،

$$f(x) = f(1) = \underbrace{\ln a.1 - \ln a}_{=0} - \underbrace{\ln 1}_{=0} = 0$$

یعنی برای هر x، $\ln ax = \ln a + \ln x$.

۲) بنا به قسمت ①،
$$\ln x + \ln \frac{1}{x} = \ln x \frac{1}{x} = \ln 1 = 0$$

و در نتیجه: $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$.

۳)
$$\ln \frac{x}{y} = \ln x \frac{1}{y} \overset{①}{=} \ln x + \ln \frac{1}{y} \overset{②}{=} \ln x - \ln y$$

۴) قرار میدهیم $g(x) = \ln x^2 - 2\ln x$. در این صورت:
$$g'(x) = \frac{2x^{2-1}}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{2}{x} - \frac{2}{x} = 0$$

پس $g(x)$ تابع ثابت است و برای هر x،
$$g(x) = g(1) = \ln 1^2 - 2\ln 1 = \ln 1 - 2\ln 1 = 0$$

پس برای هر x، $\ln x^2 = 2\ln x$.

مسأله. ثابت کنید:

الف. $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

ب. $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

حل: فرض کنید عدد طبیعی n_x را چنان اختیار کنید که $2^{n_x} \leq x < 2^{n_x+1}$، در این صورت $x \to \infty$ اگر و تنها اگر $n_x \to \infty$، حال از این که $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$ لذا $\ln$ تابعی اکیداً صعودی است و بنابراین از $2^{n_x} \leq x$ نتیجه می‌شود، $\ln 2^{n_x} \leq \ln x$

یعنی $n_x \ln 2 \leq \ln x$. حال
$$\lim_{x \to \infty} \ln 2^{n_x} = \lim_{x \to +\infty} n_x \ln 2 = \lim_{n_x \to +\infty} n_x \underbrace{\ln 2}_{>0} = +\infty$$

و چون $\ln x \geq \ln 2^{n_x}$ پس $\lim_{x \to \infty} \ln x = +\infty$.

ب) قرار می‌دهیم $y=\frac{1}{x}$. در این صورت $x\to 0^+$ اگر و تنها اگر $y\to+\infty$. حال

$$\lim_{x\to 0^+}\ln x=\lim_{y\to+\infty}\ln\frac{1}{y}=\lim_{y\to+\infty}(-\ln y)\overset{\text{الف}}{=}-\infty .$$

تاکنون توانسته‌ایم اطلاعات مفیدی درباره‌ی تابع $\ln x$ بدست آوریم. این تابع در $+\infty$ بیشینه‌ای ندارد و محور y ها مجانب قائم آن است. دامنه‌ی $\ln$، بازه‌ی $(0,+\infty)$ و برد آن $(-\infty,+\infty)$ است. در واقع $\ln:(0,+\infty)\to(-\infty,+\infty)$.

بعلاوه $\ln$ اکیداً صعودی و در نتیجه یک به یک است. پس $\ln$ وارون پذیر است.

اگر وارون تابع $\ln$ را با $\exp$ نشان دهیم در این صورت:

$\exp:(-\infty,+\infty)\to(0,+\infty)$ و بعلاوه برای هر $x\in\mathbb{R}^+$، $\exp(\ln x)=x$

و برای هر $x\in\mathbb{R}$، $\ln(\exp(x))=x$. همچنین $\exp(0)=1$.

قضیه. خواص زیر در مورد تابع $\exp$ برقرارند:

① $\exp(x+y)=\exp(x)\exp(y)$

② $\exp(-x)=1/\exp(x)$

③ $\exp(x-y)=\exp(x)/\exp(y)$

④ $\exp(rx)=\exp(x)^r \qquad (r\in\mathbb{Q})$

⑤ $\lim_{x\to+\infty}\exp(x)=+\infty$.

⑥ $\lim_{x\to-\infty}\exp(x)=0$

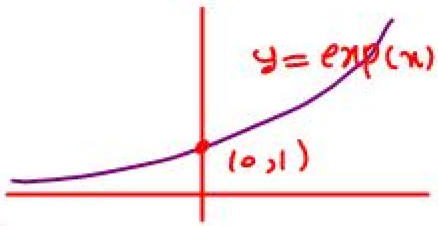
اثبات. الف) قرار می‌دهیم $X=\exp x$ و $Y=\exp y$. در این صورت

$x=\ln X$ و $y=\ln Y$. اکنون $x+y=\ln X+\ln Y=\ln XY$

ولذا $XY=\exp(x+y)$. یعنی $\exp(x)\exp(y)=\exp(x+y)$.

بقیه‌ی موارد مشابهاً و با استفاده از خواص متناظر برای تابع $\ln$ نتیجه می‌شوند.

نهایتاً نمودار تابع $y=\exp x$ بصورت زیر خواهد بود.



بدلیل تشابه خواص $\exp$ با خواص توان، از این پس بجای $\exp(x)$ می‌نویسیم e^x.

با نماد جدید خواهیم داشت:

① $e^{x+y}=e^xe^y$

② $e^{-x}=\frac{1}{e^x}$

③ $e^{x-y}=\frac{e^x}{e^y}$

④ $e^{rx}=(e^x)^r$

⑤ $\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$

⑥ $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$

تعریف. $e:=e^1=\exp(1)$

مثال. مشتق تابع $y=e^x$ را بدست آورید.

حل. $y=e^x \longrightarrow x=\ln y \xrightarrow{\text{مشتق}} 1=\frac{y'}{y} \longrightarrow y'=y=e^x$

در حالت کلی اگر $y=e^u$ آنگاه $y'=u'e^u$.

مثال. $y=e^{x^2+1} \longrightarrow y'=2xe^{x^2+1}$

$y=2e^x \longrightarrow y'=2e^x$

تابع نمایی،

فرض کنید $a>0$. در این صورت تعریف می‌کنیم $a^x = \exp(x\ln a)$ و با نمادگذاری جدید بر حسب e می‌توان گفت $a^x = e^{x\ln a}$.

با تعریفی که هم اکنون از توان بیان شد،

$$\underbrace{e^x}_{\text{توان}} = \exp(x\ln e) = \exp(x) = \underbrace{e^x}_{\text{نماد جدید } \exp}$$

مثال. مشتق تابع $y=a^x$ را محاسبه کنید.

$$y=a^x \longrightarrow \ln y = \ln a^x = x\ln a \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{y'}{y} = \ln a$$

بنابراین $y' = y\ln a = a^x.\ln a$.

مثال. مطلوبست تعیین نقاط بحرانی تابع $y=x^x$.

حل. با توجه به آنچه در تعریف توان بیان شد، $x>0$.

$$y=x^x \longrightarrow \ln y = x\ln x \longrightarrow \frac{y'}{y} = 1\ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1$$

بنابراین $y' = (1+\ln x)y$.

$$y'=0 \longrightarrow (1+\ln x)\underbrace{x^x}_{>0} \longrightarrow 1+\ln x = 0 \longrightarrow \ln x = -1$$

$$\longrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

سوال. چرا $x^x>0$؟ زیرا $\exp: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ و برای هر مقدار x، اگر $a>0$ آنگاه $a^x = \exp(*) > 0$. پس $x^x > 0$.

مساله. نمودار تابع $y=a^x$ را رسم کنید.

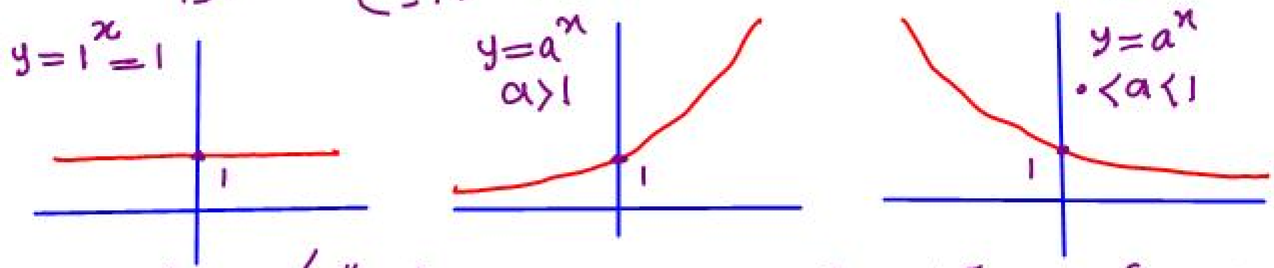
حل: می دانیم: $y'=(a^x)'=\underbrace{a^x}_{>0}\cdot\ln a$. بنابراین علامت y' به علامت $\ln a$ وابسته است.

الف. اگر $a=1$ آنگاه $\ln a=0$ و لذا $y'=0$. پس تابع $y=a^x$ ثابت است،

ب. اگر $0<a<1$ آنگاه $\ln a<0$ و لذا $y'<0$. پس تابع $y=a^x$ اکیداً نزولی است

ج. اگر $a>1$ آنگاه $\ln a>0$ و لذا $y'>0$. پس تابع $y=a^x$ اکیداً صعودی است.

همچنین با توجه به اینکه $a^x=\exp(x\ln a)$ لذا دامنه و برد تابع a^x همان دامنه و برد تابع exp است. یعنی $a^x:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^+$. با توجه به آنچه بیان شد داریم



با توجه به شکلهای بالا تابع $y=a^x$ در حالت $a\neq 1$ اکیداً یکنوا و در نتیجه یک به یک و بنابراین وارون پذیر است.

$$a^x:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^+$$

$$\text{وارون}\ a^x:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}$$

چون وارون تابع a^x به a وابسته است، آن را با نماد $\log_a$ نشان می دهیم.

بنابراین $\log_a:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}$ $(a\neq 1)$

و برای هر $x>0$، $a^{\log_a(x)}=x$ و برای هر $x\in\mathbb{R}$، $\log_a(a^x)=x$.

خواص a^x.

(1) $a^x a^y = a^{x+y}$ (2) $a^{-x}=\frac{1}{a^x}$

(3) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ (4) $(a^x)^y = a^{xy}$

اثبات. (1)

$$a^x a^y = e^{x\ln a} e^{y\ln a} = e^{x\ln a + y\ln a}$$

$$= e^{(x+y)\ln a} = a^{x+y}$$

بقیه خواص مشابها بدست می‌آیند.

خواص $\log_a$، ($x,y>0$)

(1) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ (2) $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$

(3) $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$ (4) $\log_a x^y = y\log_a x$

اثبات. به عنوان تمرین واگذار میشود.

مثال. مشتق تابع $y=\log_a x$ را بدست آورید.

حل. $y=\log_a x \longrightarrow x=a^y \xrightarrow{\text{مشتق}} 1 = y' a^y \ln a = y' x \ln a$.

پس $y' = \frac{1}{x\ln a}$.

مسأله. ثابت کنید برای هر $a,x>0$، $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.

حل. قرار می‌دهیم $f(x)=\log_a^x-\frac{\ln x}{\ln a}$. در این صورت

$f'(x)=\frac{1}{x\ln a}-\frac{1/x}{\ln a}=0$، پس $f(x)$ مقداری ثابت است و برای هر x

$$f(x)=f(1)=\log_a^1-\frac{\ln 1}{\ln a}=0-\frac{0}{\ln a}=0$$

بنابراین $\log_a^x=\frac{\ln x}{\ln a}$.

مسأله. مطلوبست محاسبه‌ی $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1}=0$$

مسأله. مطلوبست محاسبه‌ی $\lim_{x\to 0^+}x^x$.

$$A=x^x\longrightarrow \ln A=x\ln x=\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln A=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$$

بنابراین $\lim A=e^0=1$. توجه کنید: $A=e^{\ln A}$

مسأله. مطلوبست محاسبه‌ی $\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

$$A=(1+x)^{\frac{1}{x}}\longrightarrow \ln A=\frac{1}{x}\ln(1+x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln A=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=1$$

و بنابراین $e=e^1=\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

مسأله. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

$$A=(1+x)^{\frac{1}{x}} \longrightarrow \ln A=\frac{1}{x}\ln(1+x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\ln A=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=0$$

و بنابراین $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^0$.

مسأله. مطلوبست محاسبه‌ی $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$.

ابتدا قرار می‌دهیم $t=\frac{1}{x}$. در این صورت $x\to+\infty$ معادل است با این‌که $t\to0^+$.

$$A=\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x=(\sin t+\cos t)^{\frac{1}{t}}$$

$$\ln A=\frac{1}{t}\ln(\sin t+\cos t)=\frac{\ln(\sin t+\cos t)}{t}$$

$$\lim_{t\to0^+}\ln A=\lim_{t\to0^+}\frac{\ln(\sin t+\cos t)}{t}\overset{H}{=}\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}}{1}=1$$

پس $\lim\limits_{x\to+\infty}A=e^1=e$.

توابع هذلولوی (هیپربولیک)

تعریف. تعریف می‌کنیم

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{csch} x=\frac{1}{\sinh x}$$

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sech} x=\frac{1}{\cosh x}$$

$$\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x} \qquad \coth x=\frac{1}{\tanh x}$$

خواص.

$$\begin{aligned}\cosh x+\sinh x&=e^{x}\\ \cosh x-\sinh x&=e^{-x}\\ \hline \cosh^2 x-\sinh^2 x&=1\end{aligned}$$

مثال. $y=\sinh x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}\longrightarrow y'=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}=\cosh x$

$$y=\cosh x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\longrightarrow y'=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=\sinh x$$

$$y=\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}\longrightarrow y'=\frac{\cosh^2 x-\sinh^2 x}{\cosh^2 x}=\begin{cases}\dfrac{1}{\cosh^2 x}=\operatorname{sech}^2 x\\[2mm] 1-\tanh^2 x\end{cases}$$

نتیجه: $\operatorname{sech}^2 x=1-\tanh^2 x$.

$$y=\coth x=\frac{\cosh x}{\sinh x}\longrightarrow y'=\frac{\sinh^2 x-\cosh^2 x}{\sinh^2 x}=\begin{cases}\dfrac{-1}{\sinh^2 x}=-\operatorname{csch}^2 x\\[2mm] 1-\coth^2 x\end{cases}$$

نتیجه: $\operatorname{csch}^2 x=-1+\coth^2 x$

$$y=\operatorname{sech} x=\frac{1}{\cosh x}\longrightarrow y'=\frac{-\sinh x}{\cosh^2 x}=-\operatorname{sech} x\tanh x$$

مثال. نشان دهید $\sinh(x+y)=\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y$.

حل سمت راست $\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y=\dfrac{(e^{x}-e^{-x})(e^{y}+e^{-y})+(e^{x}+e^{-x})(e^{y}-e^{-y})}{4}$

$$=\frac{2e^{x}e^{y}-2e^{-x}e^{-y}}{4}=\frac{e^{x+y}-e^{-x-y}}{2}=\sinh(x+y)$$

تمرین. روابطی برای $\cosh(x+y)$، $\tanh(x+y)$ بدست آورید.

رسم توابع هذلولوی

① $y = \sinh x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

$D_y = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

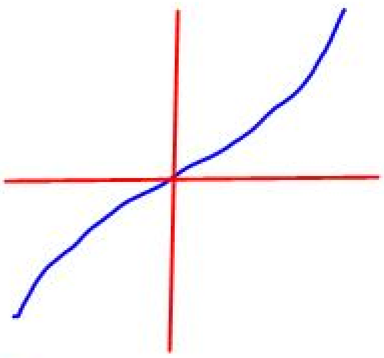
$\lim\limits_{x \to +\infty} \sinh x = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \sinh x = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -\infty$

بنابراین احتمال وجود مجانب مایل هست. با بررسی ساده می‌توان دید مجانب مایل موجود نیست.

$y' = \cosh x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2} > 0$

$y'' = \sinh x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} = 0 \longrightarrow e^{x} = e^{-x} \xrightarrow{\times e^{x}} e^{2x} = 1 \longrightarrow 2x = 0 \longrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$+$		$+$
y''	$-$	0	$+$
y		عطف	



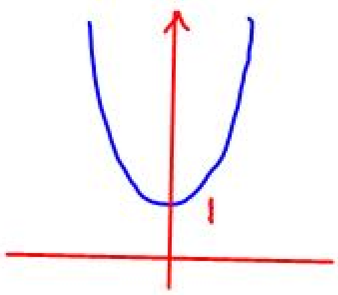
② $y = \cosh x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2} \qquad D_y = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \cosh x = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \cosh x = +\infty$

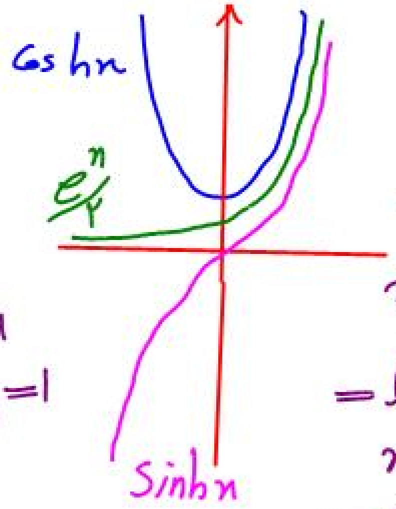
در مورد این تابع نیز می‌توان دید مجانب مایل وجود ندارد.

$y' = \sinh x = 0 \longrightarrow x = 0 \qquad y'' = \cosh x > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y''	$+$		$+$
y		Min نسبی	



$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cosh x}{\frac{1}{2}e^{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{2x}}{2e^{2x}} = 1$$



توجه کنید

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sinh x}{\frac{1}{2}e^{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}} \overset{H}{=} \lim \frac{2e^{2x}}{2e^{2x}} = 1$$

مثال. نمودار تابع $y = \tanh x$ را رسم کنید.

$$y = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \quad D_y = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

$$\lim_{x\to-\infty} \tanh x = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \tanh x = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{2x}}{2e^{2x}} = 1$$

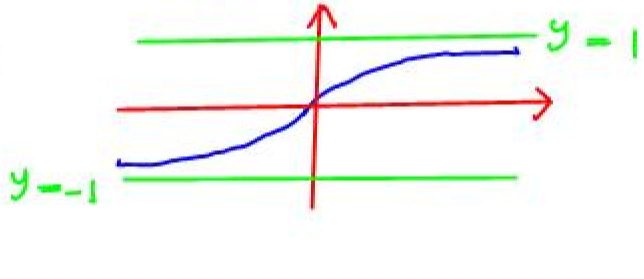
پس $y=-1$, $y=1$ مجانب‌های افقی تابع اند.

$$y' = \operatorname{sech}^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x} > 0$$

$$y'' = 2\operatorname{sech} x(-\operatorname{sech} x \tanh x) = -2\underbrace{\operatorname{sech}^2 x}_{>0} \tanh x = 0$$

$$\longrightarrow \tanh x = 0 \longrightarrow \sinh x = 0 \longrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$+$		$+$
y''	$+$	0	$-$
y	↗	عطف	↗



مثال: نمودار تابع $y = \coth x$ را رسم کنید.

$$y = \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$$

$$D_y = \mathbb{R} - \{x \mid \sinh x = 0\} = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$\lim_{x \to -\infty} \coth x = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} = \frac{0+1}{0-1} = -1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \coth x = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2e^{2x}}{2e^{2x}} = 1$$

$y = \pm 1$ مجانب‌های افقی

$$\lim_{x \to 0^-} \coth x = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} = \frac{+2}{0^-} = -\infty$$

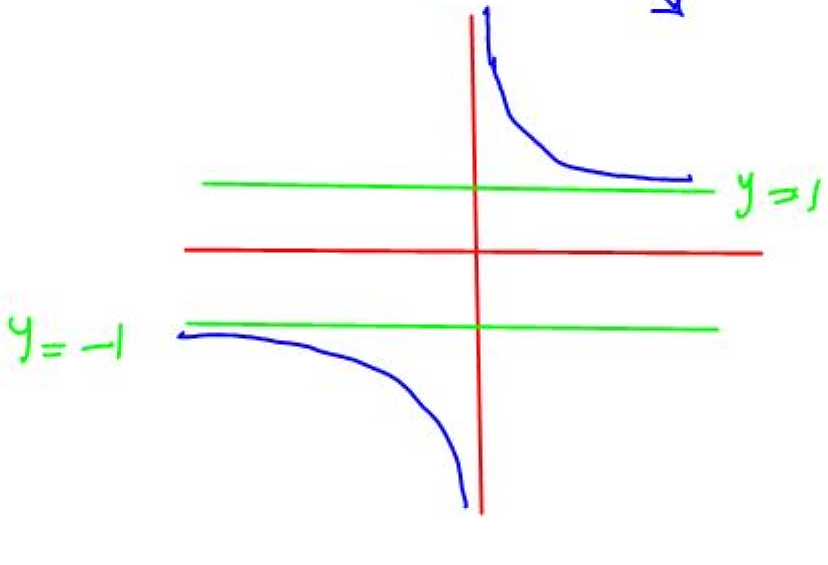
$x = 0$ مجانب قائم

$$\lim_{x \to 0^+} \coth x = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} = \frac{+2}{0^+} = +\infty$$

$$y' = \frac{-1}{\sinh^2 x} < 0$$

$$y'' = \frac{2\sinh x \cosh x}{\sinh^4 x}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$		$-$
y''	$-$		$+$
y	↘		↘



وارون توابع هذلولی

① $y=\sinh^{-1}x \longrightarrow x=\sinh y=\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}=\frac{e^{2y}-1}{2e^{y}}$

$\to e^{2y}-1=2xe^{y} \to e^{2y}-2xe^{y}-1=0 \xrightarrow{t=e^{y}} t^{2}-2xt-1=0$

$\to t=\frac{2x\pm\sqrt{4x^{2}+4}}{2}=x\pm\sqrt{x^{2}+1}\to e^{y}=x\pm\sqrt{x^{2}+1}$

از این که $x-\sqrt{x^{2}+1}<0$ و $e^{y}>0$ لذا $e^{y}=x+\sqrt{x^{2}+1}$ و در نتیجه $y=\ln(x+\sqrt{x^{2}+1})$

پس $\sinh^{-1}x=\ln(x+\sqrt{x^{2}+1})$.

② $y=\cosh^{-1}x \longrightarrow x=\cosh y=\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}=\frac{e^{2y}+1}{2e^{y}}$

$\to e^{2y}+1=2xe^{y} \to e^{2y}-2xe^{y}+1=0 \xrightarrow{t=e^{y}} t^{2}-2xt+1=0$

$\to t=\frac{2x\pm\sqrt{4x^{2}-4}}{2}=x\pm\sqrt{x^{2}-1}\to e^{y}=x\pm\sqrt{x^{2}-1}$

نشان می‌دهیم $e^{y}=x+\sqrt{x^{2}-1}$.

برای این منظور به این نکته توجه می‌کنیم که $\cosh:\mathbb{R}\to[1,+\infty)$ یک به یک نیست. برای این که بتوان از $\cosh^{-1}$ صحبت کرد، لازم است دامنه‌ی آن را محدود کرد. در واقع $\cosh:[0,+\infty)\to[1,+\infty)$ ۱-۱ و لذا وارون پذیر است. پس $\cosh^{-1}:[1,+\infty)\to[0,+\infty)$. از این که $y=\cosh^{-1}x$ یعنی $x\geq 1$ و $y\geq 0$. بنابراین $e^{y}\geq 1$ و همچنین

$$x-\sqrt{x^{2}-1}=\frac{x-\sqrt{x^{2}-1}}{1}\times\frac{x+\sqrt{x^{2}-1}}{x+\sqrt{x^{2}-1}}=\frac{1}{\underbrace{x}_{\geq 1}+\underbrace{\sqrt{x^{2}-1}}_{\geq 0}}\leq 1$$

پس در این حالت تساوی $e^{y}=x-\sqrt{x^{2}-1}$ اتفاق نمی‌افتد.

بنابراین $e^{y}=x+\sqrt{x^{2}-1}$ و لذا $y=\ln(x+\sqrt{x^{2}-1})$.

یعنی: $\cosh^{-1}x=\ln(x+\sqrt{x^{2}-1})$.

③ $y=\tanh^{-1}x \longrightarrow x=\tanh y=\dfrac{e^{y}-e^{-y}}{e^{y}+e^{-y}}=\dfrac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$

$\longrightarrow xe^{2y}+x=e^{2y}-1 \longrightarrow xe^{2y}-e^{2y}=-x-1 \longrightarrow e^{2y}(x-1)=-x-1$

$\longrightarrow e^{2y}=\dfrac{1+x}{1-x} \longrightarrow 2y=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) \longrightarrow y=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)=\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

④ $y=\coth^{-1}x \longrightarrow x=\coth y=\dfrac{e^{y}+e^{-y}}{e^{y}-e^{-y}}=\dfrac{e^{2y}+1}{e^{2y}-1}$

$\longrightarrow xe^{2y}-x=e^{2y}+1 \longrightarrow xe^{2y}-e^{2y}=x+1 \longrightarrow e^{2y}(x-1)=x+1$

$\longrightarrow e^{2y}=\dfrac{x+1}{x-1} \longrightarrow 2y=\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) \longrightarrow y=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=\ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

مسأله. مشتق $y=\sinh^{-1}x$ را بدست آورید.

روش اول.

$y=\sinh^{-1}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

$$\longrightarrow y'=\frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

روش دوم.

$y=\sinh^{-1}x \longrightarrow x=\sinh y \xrightarrow{\text{مشتق}} 1=y'\cosh y \longrightarrow y'=\dfrac{1}{\cosh y}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{\sinh^2 y+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

مسأله. مشتق $y=\cosh^{-1}x$ را محاسبه کنید.

$y=\cosh^{-1}x \longrightarrow x=\cosh y \longrightarrow 1=y'\sinh y \longrightarrow y'=\dfrac{1}{\sinh y}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{\cosh^2 y-1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

مسأله. مشتق $y=\tanh^{-1}x$ را محاسبه کنید.

$y=\tanh^{-1}x \longrightarrow x=\tanh y \longrightarrow 1=y'(1-\tanh^2 y) \longrightarrow y'=\dfrac{1}{1-\tanh^2 y}=\dfrac{1}{1-x^2}$

مسأله. مشتق $y=\coth^{-1}x$ را بدست آورید.

$y=\coth^{-1}x \longrightarrow x=\coth y \longrightarrow 1=y'(1-\coth^2 y) \longrightarrow y'=\dfrac{1}{1-\coth^2 y}=\dfrac{1}{1-x^2}$.

می‌دانیم $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ بنابراین $(\ln|x|)' = \frac{\frac{|x|}{x}}{|x|} = \frac{1}{x}$. بنابراین

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

چند مثال.

$$I = \int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x \, dx}{\cos x}$$

$$\begin{cases} u = \cos x \\ du = -\sin x \, dx \end{cases}$$

$$I = \int \frac{-du}{u} = -\ln|u| + c = -\ln|\cos x| + c = \ln|\sec x| + c$$

$$I = \int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x \, dx}{\sin x}$$

$$\begin{cases} u = \sin x \\ du = \cos x \, dx \end{cases}$$

$$I = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|\sin x| + c$$

$$I = \int \sec x \, dx = \int \frac{\sec x}{1} dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx$$

$$\begin{cases} u = \sec x + \tan x \\ du = (\sec x \tan x + \sec^2 x) \, dx \end{cases}$$

$$I = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|\sec x + \tan x| + c$$

$$I = \int \frac{dx}{1 - x^2}$$

$$\begin{cases} x = \tanh \theta \\ dx = (1 - \tanh^2 \theta) d\theta \end{cases}$$

$$I = \int \frac{(1 - \tanh^2 \theta) d\theta}{1 - \tanh^2 \theta} = \int d\theta = \theta + c$$

$$= \tanh^{-1} x + c = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + c$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$$

$$\begin{cases} e^x = u \\ e^x dx = du \longrightarrow dx = \dfrac{du}{u} \end{cases}$$

$$I = \int \frac{du/u}{\sqrt{u-1}} = \int \frac{du}{u\sqrt{u-1}}$$

$$\begin{cases} v^2 = u - 1 \\ 2v\,dv = du \end{cases}$$

$$I = \int \frac{2v\,dv}{(v^2+1)v} = 2\int \frac{dv}{v^2+1} = 2\tan^{-1} v + c$$

$$= 2\tan^{-1}(\sqrt{u-1}) + c = 2\tan^{-1}(\sqrt{e^x - 1}) + c$$

$$I = \int \frac{e^{2x}dx}{1+e^x} \qquad \begin{cases} e^x = u \\ e^x dx = du \longrightarrow dx = \dfrac{du}{u} \end{cases}$$

$$I = \int \frac{u^2\left(\frac{du}{u}\right)}{1+u} = \int \frac{u\,du}{1+u} = \int \frac{(1+u-1)du}{1+u}$$

$$= \int\left(1 - \frac{1}{1+u}\right)du = u - \ln|1+u| + c = e^x - \ln(1+e^x) + c$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \qquad \begin{cases} x = a\tanh\theta \\ dx = a\,\mathrm{sech}^2\theta\, d\theta \end{cases}$$

$$I = \int \frac{a\,\mathrm{sech}^2\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2 - a^2\tanh^2\theta}} = \int \frac{a\,\mathrm{sech}^2\theta\, d\theta}{a\,\mathrm{sech}\theta} = \int \mathrm{sech}\theta\, d\theta$$

$$= \int \frac{d\theta}{\cosh\theta} = \int \frac{\cosh\theta\, d\theta}{\cosh^2\theta} = \int \frac{\cosh\theta\, d\theta}{1+\sinh^2\theta}$$

$$\begin{cases} u = \sinh\theta \\ du = \cosh\theta\, d\theta \end{cases}$$

$$I = \int \frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1} u + c = \tan^{-1}(\sinh\theta) + c$$

حل.

$$I = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-1}} \qquad \begin{cases} x = \cosh\theta \\ dx = \sinh\theta\, d\theta \end{cases}$$

$$I = \int \frac{\sinh\theta\, d\theta}{\cosh\theta + \sqrt{\cosh^2\theta - 1}} = \int \frac{\sinh\theta\, d\theta}{\cosh\theta + \sinh\theta} = \int \frac{\frac{e^{2\theta}-1}{2e^{\theta}}}{\frac{e^{2\theta}+1}{2e^{\theta}} + \frac{e^{2\theta}-1}{2e^{\theta}}}\, d\theta$$

$$= \int \frac{(e^{2\theta}-1)\, d\theta}{2e^{2\theta}} \qquad \begin{cases} e^{\theta} = u \\ e^{\theta} d\theta = du \longrightarrow d\theta = \frac{du}{u} \end{cases}$$

$$I = \int \frac{(u^2-1)\, \frac{du}{u}}{2u^2} = \int \frac{(u^2-1)\, du}{2u^3} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{u} - u^{-3}\right) du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln|u| - \frac{u^{-2}}{-2}\right) + c = \frac{1}{2}\ln|e^{\theta}| + \frac{1}{4}e^{-2\theta} + c$$

$$= \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}e^{-2\theta} + c$$

روش‌های انتگرال‌گیری

انتگرال‌گیری به روش جزء به جزء

فرض کنید u و v توابعی بر حسب x باشند. در این صورت:

$$d(uv) = (uv)'dx = (uv' + u'v)dx$$

$$= u\underbrace{v'dx}_{dv} + v\underbrace{u'dx}_{du} = u\,dv + v\,du$$

$$\longrightarrow u\,dv = d(uv) - v\,du \longrightarrow \int u\,dv = \int d(uv) - \int v\,du$$

$$\longrightarrow \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

مثال. مطلوبست محاسبه انتگرال $I = \int x\sin x\,dx$.

$$I = \int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\sin x\,dx}_{dv}$$

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x\,dx \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$$

$$I = \int x\sin x\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$= -x\cos x - \int -\cos x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx$$

$$= -x\cos x + \sin x$$

مثال.

$$I=\int \underbrace{(x+1)}_{u}\,\underbrace{e^x dx}_{dv}=?$$

$$\begin{cases} u=x+1 \\ dv=e^x dx \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=e^x \end{cases}$$

$$I=\int (x+1)e^x dx=\int u\,dv=uv-\int v\,du$$

$$=(x+1)e^x-\int e^x dx=(x+1)e^x-e^x=xe^x$$

مثال.

$$I=\int \underbrace{x^2}_{u}\,\underbrace{\sin x\,dx}_{dv}$$

$$\begin{cases} u=x^2 \\ dv=\sin x\,dx \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} du=2x\,dx \\ v=-\cos x \end{cases}$$

$$I=\int x^2\sin x\,dx=\int u\,dv=uv-\int v\,du$$

$$=-x^2\cos x+\int \underbrace{2x}_{u}\,\underbrace{\cos x\,dx}_{dv}$$

$$\begin{cases} u=2x \\ dv=\cos x\,dx \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} du=2\,dx \\ v=\sin x \end{cases}$$

$$\rightarrow I=-x^2\cos x+\int u\,dv$$

$$=-x^2\cos x+uv-\int v\,du$$

$$= -x^2\cos x + 2x\sin x - \int 2\sin x\,dx$$

$$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c$$

مثال.

$$I = \int \underbrace{e^x}_{u}\,\underbrace{\sin x\,dx}_{dv}$$

$$\begin{cases} u = e^x \\ dv = \sin x\,dx \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} du = e^x\,dx \\ v = -\cos x \end{cases}$$

$$I = \int u\,dv = uv - \int v\,du = -e^x\cos x + \int \underbrace{\cos x}_{u}\,\underbrace{e^x\,dx}_{dv}$$

$$\begin{cases} u = \cos x \\ dv = e^x\,dx \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} du = -\sin x\,dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$I = -e^x\cos x + \int u\,dv = -e^x\cos x + uv - \int v\,du$$

$$I = \underbrace{-e^x\cos x + e^x\cos x} + \int e^x\sin x\,dx$$

این حل نادرست است. حل درست به شکل زیر است

$$I = -e^x\cos x + \int \underbrace{e^x}_{u}\,\underbrace{\cos x\,dx}_{dv}$$

$$\begin{cases} u = e^x \\ dv = \cos x\,dx \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} du = e^x\,dx \\ v = \sin x \end{cases}$$

$$\rightarrow I = -e^x\cos x + \int u\,dv$$

$$= -e^x\cos x + uv - \int v\,du$$

$$I = -e^x\cos x + e^x\sin x - \underbrace{\int e^x \sin x\,dx}_{I}$$

$$2I = -e^x\cos x + e^x\sin x$$

$$\rightarrow I = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$$

تمرین. انتگرال $I=\int x^4 e^x dx$ را حل کنید.

$'$	$\int$
x^4	e^x
$4x^3$	e^x
$12x^2$	e^x
$24x$	e^x
24	e^x
0	e^x

Signs: $+$, $-$, $+$, $-$, $+$

$$I = x^4e^x - 4x^3e^x + 12x^2e^x - 24x\,e^x + 24\,e^x$$

مثال. $I=\int e^x \sin x\,dx$

$'$	$\int$
e^x	$\sin x$
e^x	$-\cos x$
e^x	$-\sin x$
e^x	$\cos x$

Signs: $+$, $-$, $+$

$$I = -e^x\cos x + e^x\sin x - I$$

$$2I = -e^x\cos x + e^x\sin x$$

$$I = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$$

مثال.

$$I=\int \underbrace{\ln x}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv}$$

$$\begin{cases} u=\ln x \\ dv=dx \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} du=\frac{1}{x}dx \\ v=x \end{cases}$$

$$I=\int u\,dv=uv-\int v\,du = x\ln x-\int x\frac{1}{x}dx$$

$$=x\ln x-\int dx = x\ln x-x$$

مثال.

$$I=\int \underbrace{\ln(x^2+1)}_{u}\,\underbrace{x\,dx}_{dv}$$

$$\begin{cases} u=\ln(x^2+1) \\ dv=x\,dx \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} du=\frac{2x}{x^2+1}dx \\ v=\frac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

$$I=\int u\,dv=uv-\int v\,du=\frac{1}{2}x^2\ln(x^2+1)-\underbrace{\int\frac{x^3}{x^2+1}dx}_{J}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2+1 \\ \cline{2-2} x^3+x & x \\ \hline -x & \end{array} \qquad \frac{x^3}{x^2+1}=x-\frac{x}{x^2+1}$$

$$J=\int\frac{x^3}{x^2+1}dx=\int\left(x-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

چون:

$$\int\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

پس:

$$\int\ln(x^2+1)\,x\,dx=\frac{1}{2}x^2\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

مثال.

$$I = \int \underbrace{\tan^{-1}(x^2-3)}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv}$$

$$\begin{cases} u = \tan^{-1}(x^2-3) \\ dv = dx \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} du = \dfrac{2x}{1+(x^2-3)^2}\,dx = \dfrac{2x\,dx}{x^4-6x^2+10} \\ v = x \end{cases}$$

$$\rightarrow I = \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$= x\tan^{-1}x - \int \frac{2x^2\,dx}{x^4-6x^2+10}$$

و انتگرال بدست آمده در روش تجزیه به کسرهای جزئی حل می‌شود.

مثال. $\int \cos^n x\,dx$

$$I_n = \int \cos^n x\,dx = \int \underline{\cos^{n-1}x}_{\,u}\ \underline{\cos x\,dx}_{\,dv}$$

$$\begin{cases} u = \cos^{n-1}x \\ dv = \cos x\,dx \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} du = -(n-1)\cos^{n-2}x\,\sin x\,dx \\ v = \sin x \end{cases}$$

$$I_n = \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$= \sin x\cos^{n-1}x - \int -(n-1)\cos^{n-2}x\,\sin^2 x\,dx$$

$$= \sin x\cos^{n-1}x + (n-1)\int \cos^{n-2}x\,(1-\cos^2 x)\,dx$$

$$= \sin x\cos^{n-1}x + (n-1)\int (\cos^{n-2}x - \cos^n x)\,dx$$

$$= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \underbrace{\int \cos^{n-2} x \, dx}_{I_{n-2}} - (n-1) \underbrace{\int \cos^{n} x \, dx}_{I_n}$$

$$= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

$$\longrightarrow n I_n = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) I_{n-2}$$

$$\longrightarrow I_n = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

از رابطه‌ی بازگشتی بالا برای محاسبه‌ی $\int \cos^n x \, dx$ می‌توان استفاده کرد.

مثال. مطلوبست محاسبه‌ی $\int \cos^6 x \, dx$.

حل، در واقع هدف محاسبه‌ی I_6 است.

$$I_0 = \int \cos^0 x \, dx = \int dx = x$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \sin x \cos^1 x + \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} x$$

$$I_4 = \frac{1}{4} \sin x \cos^3 x + \frac{3}{4} I_2$$

$$= \frac{1}{4} \sin x \cos^3 x + \frac{3}{8} \sin x \cos x + \frac{3}{8} x$$

$$I_6 = \frac{1}{6} \sin x \cos^5 x + \frac{5}{6} I_4$$

$$= \frac{1}{6} \sin x \cos^5 x + \frac{5}{24} \sin x \cos^3 x + \frac{15}{48} \sin x \cos x + \frac{15}{48} x$$

به همین صورت می‌توان رابطه‌ی بازگشتی برای محاسبه‌ی $\int \sin^n x \, dx$ یافت.

تمرین. روابطی بازگشتی برای محاسبه‌ی انتگرال‌های $I_n=\int \sec^n x\,dx$ و $J_n=\int \csc^n x\,dx$ بدست آورید.

$$I_n=\int \sec^n x\,dx=\int \underbrace{\sec^{n-2}x}_{u}\,\underbrace{\sec^2 x\,dx}_{dv}$$

$$\begin{cases} u=\sec^{n-2}x \\ dv=\sec^2 x\,dx \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} du=(n-2)\sec^{n-2}x\tan x\,dx \\ v=\tan x \end{cases}$$

$$I_n=\int u\,dv=uv-\int v\,du=\tan x\sec^{n-2}x-(n-2)\int \sec^{n-2}x\,\underbrace{\tan^2 x}_{\sec^2 x-1}\,dx$$

$$=\tan x\sec^{n-2}x-(n-2)\int \sec^n x\,dx+(n-2)\int \sec^{n-2}x\,dx$$

$$\rightarrow I_n=\tan x\sec^{n-2}x-(n-2)I_n+(n-2)I_{n-2}$$

$$\rightarrow (n-1)I_n=\tan x\sec^{n-2}x+(n-2)I_{n-2}$$

$$\rightarrow I_n=\frac{1}{n-1}\tan x\sec^{n-2}x+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$$

تجزیه به کسرهای جزئی

$$I=\int \frac{dx}{ax+b} \qquad \begin{cases} u=ax+b \\ du=a\,dx \longrightarrow dx=\frac{1}{a}du \end{cases}$$

$$I=\int \frac{\frac{1}{a}du}{u}=\frac{1}{a}\int \frac{du}{u}=\frac{1}{a}\ln|u|+c$$

$$=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+c$$

مثال.

$$\int \frac{dx}{3x-5}=\frac{1}{3}\ln|3x-5|+c$$

$$\int \frac{2\,dx}{5x+1}=\frac{2}{5}\ln|5x+1|+c$$

مثال.

$$I=\int \frac{dx}{(ax+b)^n} \qquad (n\neq 1)$$

$$\begin{cases} u=ax+b \\ du=a\,dx \longrightarrow dx=\frac{1}{a}du \end{cases}$$

$$I=\int \frac{\frac{1}{a}du}{u^n}=\frac{1}{a}\int \frac{du}{u^n}=\frac{1}{a}\int u^{-n}du$$

$$=\frac{1}{a}\,\frac{u^{-n+1}}{-n+1}+c=\frac{1}{a}\,\frac{(ax+b)^{1-n}}{1-n}+c$$

مثال.

$$I=\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx \qquad (\Delta<0 \text{ مخرج})$$

برای فهم بهتر این انتگرال ها یک مثال عددی حل می کنیم

$$I=\int \frac{(4x+10)dx}{x^2+4x+13}$$

$$(x^2+4x+13)'=2x+4$$

صورت $4x+10=2(2x+4)+2$

$$I=\int \frac{2(2x+4)+2}{x^2+4x+13}dx=2\underbrace{\int \frac{(2x+4)dx}{x^2+4x+13}}_{I_1}+2\underbrace{\int \frac{dx}{x^2+4x+13}}_{I_2}$$

$$I_1=\int \frac{\overbrace{(2x+4)dx}^{du}}{\underbrace{x^2+4x+13}_{u}}=\int \frac{du}{u}=\ln u=\ln(x^2+4x+13)$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{x^2+6x+13}$$

$$x^2+6x+13 = \underbrace{x^2+6x+4}+9 = (x+2)^2+9$$

$$\begin{cases} x+2 = 3\tan\theta \longrightarrow \tan\theta = \dfrac{x+2}{3} \\ dx = 3\sec^2\theta\, d\theta \end{cases}$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x+2)^2+9} = \int \frac{3\sec^2\theta\, d\theta}{9\tan^2\theta+9} = \int \frac{3\cancel{\sec^2\theta}\, d\theta}{9(\cancel{1+\tan^2\theta})}$$

$$= \int \frac{1}{3}\, d\theta = \frac{1}{3}\theta = \frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x+2}{3}\right)$$

$$I = 2I_1 + 2I_2 = 2\ln(x^2+6x+13) + \frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x+2}{3}\right)$$

ش ل .

$$I = \int \frac{(mx+n)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n} \quad (n \neq 1)$$

این مسئله دقیقاً شبیه مسئله قبل حل می‌شود.

ش ل .

$$I = \int \frac{(6x+7)\,dx}{(x^2+2x+26)^3}$$

$$(x^2+2x+26)' = 2x+2$$

$$(6x+7) = 3(2x+2)+1$$

$$\int \frac{(4x+7)\,dx}{(x^2+2x+26)^3} = \int \frac{2(2x+2)+3}{(x^2+2x+26)^3}\,dx$$

$$= 2\underbrace{\int \frac{(2x+2)\,dx}{(x^2+2x+26)^3}}_{I_1} + 3\underbrace{\int \frac{dx}{(x^2+2x+26)^3}}_{I_2}$$

$$I_1 = \int \frac{(2x+2)\,dx}{(x^2+2x+26)^3} \qquad \begin{cases} u = x^2+2x+26 \\ du = (2x+2)\,dx \end{cases}$$

$$I_1 = \int \frac{du}{u^3} = \int u^{-3}\,du = \frac{u^{-2}}{-2} = \frac{1}{-2(x^2+2x+26)^2}$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+2x+26)^3}$$

$$x^2+2x+26 = x^2+2x+1+25 = (x+1)^2+25$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{[(x+1)^2+25]^3} \qquad \begin{cases} x+1 = 5\tan\theta \\ dx = 5\sec^2\theta\,d\theta \end{cases}$$

$$I_2 = \int \frac{5\sec^2\theta\,d\theta}{[\underbrace{25\tan^2\theta+25}_{25(\underbrace{\tan^2\theta+1}_{\sec^2\theta})}]^3} = \int \frac{5\sec^2\theta\,d\theta}{25^3\sec^6\theta} = \frac{1}{5^5}\int \cos^4\theta\,d\theta$$

بنابراین کافی است انتگرال آخر حل شود.

انتگرال‌گیری از توابع گویا

تعریف. هر تابع به صورت $\frac{p(x)}{q(x)}$ که در آن $p(x)$ و $q(x)$ چندجمله‌ای هستند، تابع گویا نامیده می‌شود.

محاسبه‌ی $\int \frac{r(x)}{q(x)}dx$ $\quad (\deg(r(x)) < \deg(q(x)))$.

مثال. مطلوبست محاسبه‌ی $I=\int \frac{(3x+5)\,dx}{(x+1)(x+2)}$

حل.

$$\frac{3x+5}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$

$$= \frac{(A+B)x+(2A+B)}{(x+1)(x+2)} \longrightarrow (A+B)x+(2A+B) = 3x+5$$

$$\longrightarrow \begin{cases} A+B=3 \\ 2A+B=5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=1 \end{cases}$$

پس. $\frac{3x+5}{(x+1)(x+2)} = \frac{2}{x+1}+\frac{1}{x+2}$ لذا.

$$\int \frac{(3x+5)\,dx}{(x+1)(x+2)} = \int \frac{2}{x+1}dx + \int \frac{1}{x+2}dx$$

$$= 2\ln|x+1| + \ln|x+2| + c$$

در مثال بعد روشی دیگر برای محاسبه‌ی A و B ارائه شده است.

حل.

$$I = \int \frac{(x^2 + 9x + 11)\,dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$\frac{x^2+9x+11}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

$$= \frac{A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$\longrightarrow A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2) = x^2+9x+11$$

$$x = -1 \longrightarrow 2A = 3 \longrightarrow A = \frac{3}{2}$$

$$x = -2 \longrightarrow -B = -3 \longrightarrow B = 3$$

$$x = -3 \longrightarrow 2C = -7 \longrightarrow C = \frac{-7}{2}$$

$$\longrightarrow \frac{x^2+9x+11}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{\frac{3}{2}}{x+1} + \frac{3}{x+2} + \frac{\frac{-7}{2}}{x+3}$$

$$\longrightarrow \int \frac{(x^2+9x+11)\,dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \int \frac{3/2}{x+1}\,dx + \int \frac{3\,dx}{x+2} + \int \frac{-7/2}{x+3}\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\ln|x+1| + 3\ln|x+2| - \frac{7}{2}\ln|x+3| + C$$

حل

$$I=\int\frac{(5x^2+3x+4)\,dx}{(x+1)(x^2+1)}$$

$$\frac{5x^2+3x+4}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$=\frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+1)}$$

$$\longrightarrow A(x^2+1)+(Bx+C)(x+1)=5x^2+3x+4$$

$$\longrightarrow (A+B)x^2+(B+C)x+(A+C)=5x^2+3x+4$$

$$\rightarrow\begin{cases}A+B=5 \longrightarrow B=5-A\\ B+C=3\\ A+C=4 \longrightarrow C=4-A\end{cases}$$

$$B+C=3\longrightarrow (5-A)+(4-A)=3$$

$$\longrightarrow 9-2A=3\longrightarrow A=3 \begin{cases}\rightarrow B=5-A=5-3=2\\ \rightarrow C=4-A=4-3=1\end{cases}$$

$$\longrightarrow \frac{5x^2+3x+4}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{3}{x+1}+\frac{2x+1}{x^2+1}$$

$$\rightarrow\int\frac{5x^2+3x+4}{(x+1)(x^2+1)}dx=\int\frac{3}{x+1}dx+\int\frac{(2x+1)\,dx}{x^2+1}$$

$$=3\ln|x+1|+\ln|x^2+1|+\tan^{-1}x+c$$

مثال:
$$\int \frac{(x^3-7x^2+5x+6)\,dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3(x^2+2x+2)(x^2+4x+8)^3}$$

حل: کسر بالا را بصورت مجموعی از کسرهای ساده می‌نویسیم

$$\text{کسر بالا} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$$

$$+ \frac{D}{x+3} + \frac{E}{(x+3)^2} + \frac{F}{(x+3)^3} + \frac{Gx+H}{x^2+2x+2}$$

$$+ \frac{Ix+J}{x^2+4x+8} + \frac{Kx+L}{(x^2+4x+8)^2} + \frac{Mx+N}{(x^2+4x+8)^3}$$

تمرین: مطلوبست محاسبه‌ی انتگرال
$$I = \int \frac{(6x^2+22x+38)\,dx}{(x+2)(x^2+4x+13)}$$

حل انتگرال $\int \frac{P(x)}{q(x)}\,dx$:

چنانچه $\deg P(x) \geq \deg q(x)$ ابتدا تقسیم کرده و سپس انتگرال‌گیری می‌کنیم

$$\begin{array}{l|l} P(x) & q(x) \\ \hline & h(x) \\ r(x) & \end{array} \longrightarrow P(x) = q(x)h(x) + r(x)$$

$$\longrightarrow \frac{P(x)}{q(x)} = h(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

$$\longrightarrow \int \frac{P(x)}{q(x)}\,dx = \int h(x)\,dx + \int \frac{r(x)}{q(x)}\,dx$$

توجه: $\deg r(x) < \deg q(x)$

تغییر متغیرهای مثلثاتی

می‌دانیم $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$. بنابراین $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$.

همچنین $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$ و درنتیجه $\tan^2\theta=\sec^2\theta-1$.

مسئله. انتگرال $\int \sec\theta\, d\theta$ را محاسبه کنید.

روش اول.

$$I=\int \sec\theta\, d\theta=\int \frac{1}{\cos\theta}d\theta=\int \frac{\cos\theta\, d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=\int \frac{\cos\theta\, d\theta}{1-\sin^2\theta} \qquad \begin{cases} u=\sin\theta \\ du=\cos\theta\, d\theta \end{cases}$$

$$\rightarrow I=\int \frac{du}{1-u^2}$$

$$\frac{1}{1-u^2}=\frac{1}{(1-u)(1+u)}=\frac{A}{1-u}+\frac{B}{1+u}=\frac{A(1+u)+B(1-u)}{(1-u)(1+u)}$$

$$\rightarrow A(1+u)+B(1-u)=1$$

$$\begin{cases} u=-1 \longrightarrow 2B=1 \longrightarrow B=\frac{1}{2} \\ u=1 \longrightarrow 2A=1 \longrightarrow A=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{1}{1-u^2}=\frac{\frac{1}{2}}{1-u}+\frac{\frac{1}{2}}{1+u}$$

$$\rightarrow \int \frac{du}{1-u^2}=\int \frac{\frac{1}{2}du}{1-u}+\int \frac{\frac{1}{2}du}{1+u}=-\frac{1}{2}\ln|1-u|+\frac{1}{2}\ln|1+u|$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\times\frac{1+\sin\theta}{1+\sin\theta}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}\right|$$

$$= \ln\left|\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right| = \ln|\sec\theta+\tan\theta|$$

(روش دوم)

$$I = \int \sec\theta\, d\theta = \int \frac{\sec\theta}{1}\,d\theta = \int \frac{\sec\theta(\sec\theta+\tan\theta)\,d\theta}{\sec\theta+\tan\theta}$$

$$\begin{cases} u = \sec\theta+\tan\theta \\ du = (\sec\theta\tan\theta+\sec^2\theta)\,d\theta \end{cases}$$

$$I = \int\frac{du}{u} = \ln|u| = \ln|\sec\theta+\tan\theta|$$

مثال. مطلوبست محاسبه $I = \int \csc\theta\, d\theta$.

$$I = \int \csc\theta\, d\theta = \int\frac{\csc\theta}{1}\,d\theta = \int\frac{\csc\theta(\csc\theta+\cot\theta)\,d\theta}{\csc\theta+\cot\theta}$$

$$\begin{cases} u = \csc\theta+\cot\theta \\ du = (-\csc\theta\cot\theta-\csc^2\theta)\,d\theta \end{cases}$$

$$I = \int\frac{-du}{u} = -\ln|u| = -\ln|\csc\theta+\cot\theta|$$

خلاصه

۱ $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$

۲ $\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta$

۳ $\tan^2\theta = \sec^2\theta-1$

۴ $(\tan\theta)' = \sec^2\theta$

۵ $(\sec\theta)' = \sec\theta\tan\theta$

۶ $\int\sec^2\theta\, d\theta = \tan\theta$

۷ $\int\sec\theta\tan\theta\, d\theta = \sec\theta$

۸ $\int\sec\theta\, d\theta = \ln|\sec\theta+\tan\theta|$

مثال:

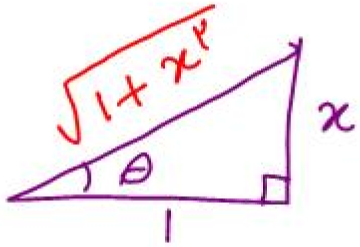
$$I=\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \begin{cases} x=\sin\theta \\ dx=\cos\theta\, d\theta \end{cases}$$

$$I=\int \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{\underbrace{1-\sin^2\theta}_{\cos^2\theta}}}=\int \frac{\cos\theta\, d\theta}{\cos\theta}=\int d\theta=\theta=\sin^{-1}x$$

$$I=\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \begin{cases} x=\tan\theta \\ dx=\sec^2\theta\, d\theta \end{cases}$$

$$I=\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{\sec^2\theta}}=\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sec\theta}=\int \sec\theta\, d\theta$$

$$=\ln|\sec\theta+\tan\theta|$$



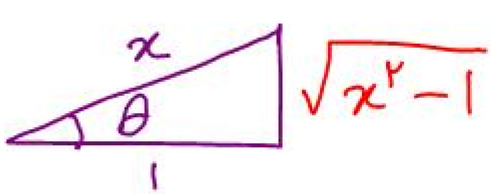
$$=\ln|\sqrt{1+x^2}+x|$$

مثال:

$$I=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \qquad \begin{cases} x=\sec\theta \\ dx=\sec\theta\tan\theta\, d\theta \end{cases}$$

$$I=\int \frac{\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{\sqrt{\underbrace{\sec^2\theta-1}_{\tan^2\theta}}}=\int \frac{\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{\tan\theta}=\int \sec\theta\, d\theta$$

$$=\ln|\sec\theta+\tan\theta|$$



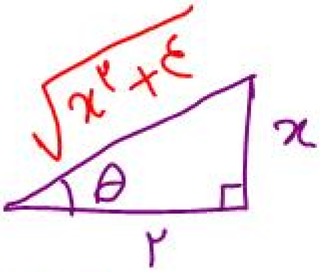
$$=\ln|x+\sqrt{x^2-1}|$$

$$I=\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4+x^2}} \qquad \begin{cases} x=2\tan\theta \\ dx=2\sec^2\theta\, d\theta \end{cases}$$ مثال.

$$I=\int \frac{2\tan\theta\, 2\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{4+4\tan^2\theta}}=\int \frac{2\tan\theta\, 2\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{4\underbrace{(1+\tan^2\theta)}_{\sec^2\theta}}}$$

$$=\int \frac{2\tan\theta\, 2\sec^2\theta\, d\theta}{2\sec\theta}=\int 2\sec\theta\tan\theta\, d\theta=2\sec\theta$$

$$=2\,\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}=\sqrt{x^2+4}$$



$$I=\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}} \qquad \begin{cases} x=3\sec\theta \\ dx=3\sec\theta\tan\theta\, d\theta \end{cases}$$ مثال.

$$I=\int \frac{3\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{3\sec\theta\sqrt{\underbrace{9\sec^2\theta-9}_{9(\sec^2\theta-1)}}}=\int \frac{3\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{3\sec\theta\; 3\tan\theta}$$

$$=\frac{1}{3}\int d\theta=\frac{1}{3}\theta=\frac{1}{3}\sec^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$$

تمرین انتگرال های زیر را حل کنید

① $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-9}}$ ② $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}}$ ③ $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+5}}$

④ $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ ⑤ $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$ ⑥ $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x(x-2)}}$

انتگرال گیری با تغییر متغیر تانژانت نصف قوس

می دانیم

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$\tan x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$$

بنابراین با تغییر متغیر $u=\tan\frac{x}{2}$ خواهیم داشت:

$$du = \frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{x}{2})\,dx \longrightarrow dx = \frac{2du}{1+u^2}$$

پس:

① $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$

② $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$

③ $\tan x = \frac{2u}{1-u^2}$

④ $dx = \frac{2du}{1+u^2}$

مثال

$$I = \int \frac{\sin x+\cos x}{2\sin x-\cos x}\,dx$$

$$\longrightarrow I = \int \frac{\frac{2u}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}}{2\frac{2u}{1+u^2}-\frac{1-u^2}{1+u^2}} \times \frac{2du}{1+u^2} = \int \frac{2u+1-u^2}{4u-1+u^2} \times \frac{2du}{1+u^2}$$

$$= \int \frac{(-2u^2+4u+2)\,du}{(u^2+4u-1)(u^2+1)}$$

و این انتگرال به روش کسرهای جزئی حل میشود.

حل چند تمرین.

① $I=\int \sinh^{-1}x\,dx$

$u=\sinh^{-1}x \longrightarrow x=\sinh u$

$dx=\cosh u\,du$

$I=\int \sinh^{-1}x\,dx=\int \underbrace{u}_{r}\,\underbrace{\cosh u\,du}_{ds}$

$\begin{cases} r=u \\ ds=\cosh u\,du \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} dr=du \\ s=\sinh u \end{cases}$

$I=\int r\,ds=rs-\int s\,dr=u\sinh u-\int \sinh u\,du$

$=u\sinh u-\cosh u+c$

$=(\sinh^{-1}x)\,x-\sqrt{1+x^2}+c$

② $I=\int \tanh^{-1}x\,dx$

$\begin{cases} u=\tanh^{-1}x \longrightarrow x=\tanh u \\ \qquad dx=(1-\tanh^2 u)\,du \end{cases}$

$I=\int \tanh^{-1}x\,dx=\int \underbrace{u}_{r}\,\underbrace{(1-\tanh^2 u)\,du}_{ds}$

③ $\int (1+\ln x)\, x^x\, dx$

$u = x^x \longrightarrow du = ?$

$u = x^x \longrightarrow \ln u = x \ln x \longrightarrow \frac{du}{u} = (\ln x + x\frac{1}{x})dx$

$\longrightarrow \frac{du}{u} = (1+\ln x)\,dx \longrightarrow du = (1+\ln x)\, x^x\, dx$

$I = \int du = u + c = x^x + c$

④ $\int \sqrt{2}^{\,x}\, dx$

قبل از حل این اشکال توجه کنید:

$y = a^x \longrightarrow y' = a^x \ln a \longrightarrow \int a^x (\ln a)\,dx = a^x$

$\longrightarrow \int a^x\, dx = \frac{1}{\ln a}\, a^x + c$

الف) $y = a^x \longrightarrow y' = a^x \ln a$

ب) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

$\int \sqrt{2}^{\,x} dx = \frac{\sqrt{2}^{\,x}}{\ln\sqrt{2}} + c$

(5) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$

$$\begin{cases} x = u^2 \\ dx = 2u\,du \end{cases}$$

$$I = \int e^{\sqrt{x}}\,dx = \int e^{u}(2u\,du) = 2\int u e^{u}\,du$$

$$= 2(ue^{u} - e^{u}) + c = 2(\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}) + c$$

(6) $I_n = \int \sec^n x\,dx$

$$I_n = \int \sec^n x\,dx = \int \underbrace{\sec^{n-2}x}_{u}\,\underbrace{\sec^2 x\,dx}_{dv}$$

$$\begin{cases} u = \sec^{n-2}x \\ dv = \sec^2 x\,dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = (n-2)\sec^{n-3}x \cdot \sec x \tan x\,dx \\ v = \tan x \end{cases}$$

$$I_n = \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$= \tan x \cdot \sec^{n-2}x - (n-2)\int \sec^{n-2}x \underbrace{\tan^2 x}_{\sec^2 x - 1}\,dx$$

$$= \tan x \sec^{n-2}x - (n-2)\int (\sec^n x - \sec^{n-2}x)\,dx$$

$$= \tan x \sec^{n-2}x - (n-2)I_n + (n-2)I_{n-2}$$

$$\rightarrow (n-1) I_n = \tan x \cdot \sec^{n-2} x + (n-2) I_{n-2}$$

$$\rightarrow I_n = \frac{1}{n-1} \tan x \sec^{n-2} x + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$$

مثال.

$$I_3 = \int \sec^3 x \, dx = ?$$

$$I_3 = \frac{1}{2} \tan x \cdot \sec^1 x + \frac{1}{2} I_1$$

$$= \frac{1}{2} \tan x \sec x + \frac{1}{2} \int \sec^1 x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \tan x \sec x + \frac{1}{2} \ln|\sec x + \tan x| + c$$

$$I_2 = \int \sec^2 x \, dx = \tan x$$

$$I_4 = \int \sec^4 x \, dx = ?$$

$$I_4 = \frac{1}{3} \tan x \cdot \sec^2 x + \frac{2}{3} I_2$$

$$= \frac{1}{3} \tan x \sec^2 x + \frac{2}{3} \tan x + c$$

$$I = \int (\sin^{-1} x)^2 \, dx$$

$$\begin{cases} u = \sin^{-1} x \longrightarrow x = \sin u \\ \qquad\qquad\qquad\quad dx = \cos u \, du \end{cases}$$

$$\rightarrow I=\int (\sin^{-1}x)^2\,dx=\int u^2\cos u\,du$$

$'$	$\int$
u^2	$\cos u$
$2u$	$\sin u$
2	$-\cos u$
0	$-\sin u$

$$I=u^2\sin u-2u(-\cos u)+2(-\sin u)+c$$

$$=u^2\sin u+2u\cos u-2\sin u+c$$

$$=(\sin^{-1}x)^2x+2(\sin^{-1}x)\sqrt{1-x^2}-2x+c$$

$$I=\int\frac{1}{\sqrt[4]{x}+1}\,dx$$

$$\begin{cases}x=u^4\\ dx=4u^3\,du\end{cases}$$

$$\begin{array}{r|l} 4u^3 & u+1 \\ \hline & 4u^2-4u+4 \\ -4 & \end{array}$$

$$I=\int\frac{4u^3\,du}{u+1}=\int\left(4u^2-4u+4-\frac{4}{u+1}\right)du$$

$$=\frac{4}{3}u^3-2u^2+4u-4\ln|u+1|+c$$

$$I = \int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}+1}\,dx$$

$$\begin{cases} x = u^{12} \\ dx = 12u^{11}\,du \end{cases}$$

$$I = \int \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{\sqrt[4]{x}+1} = \int \frac{u^4(12u^{11}du)}{u^3+1} = \int \frac{12u^{15}}{u^3+1}\,du$$

پس از تقسیم صورت بر مخرج باید u^3+1 را تجزیه کنیم.

$$\frac{?}{u^3+1} = \frac{?}{(u+1)(u^2-u+1)} = \frac{A}{u+1} + \frac{Bu+C}{u^2-u+1}$$

$$I = \int \sqrt{1-\sin x}\,dx = \int \sqrt{\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right) - \left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)}\,dx$$

$$= \int \sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2}\,dx = \int \left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)dx$$

$$= -2\cos\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2} + C$$

$$I = \int \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1+x}}\,dx$$

$$\begin{cases} u = \sin^{-1}x \\ dv = (1+x)^{-\frac{1}{2}}dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ v = 2\sqrt{1+x} \end{cases}$$

$$I=\int u\,dv = uv-\int v\,du$$

$$=2\sqrt{1+x}\,\sin^{-1}x-\int \frac{2\sqrt{1+x}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=2\sqrt{1+x}\,\sin^{-1}x-\boxed{\int \frac{2dx}{\sqrt{1-x}}}\ J$$

$$=2\sqrt{1+x}\,\sin^{-1}x-4\sqrt{1-x}+c$$

توجه کنید:

$$J=\int \frac{2dx}{\sqrt{1-x}}$$

$$\begin{cases} t=1-x \\ dt=-dx \end{cases}$$

$$J=\int \frac{2(-dt)}{\sqrt{t}}=\int -2t^{-\frac{1}{2}}dt=-4\sqrt{t}=-4\sqrt{1-x}$$

$$I=\int \frac{2\cos x-\sin x+1}{-\cos x+2\sin x}\,dx$$

با استفاده از تغییر متغیر تانژانت نصف کمان داریم:

$$I=\int \frac{2\frac{1-t^2}{1+t^2}-\frac{2t}{1+t^2}+1}{-\frac{1-t^2}{1+t^2}+2\frac{2t}{1+t^2}}\times\frac{2dt}{1+t^2}$$

$$=\int \frac{2(1-t^2)-2t+(1+t^2)}{-(1-t^2)+4t}\times\frac{2dt}{1+t^2}$$

$$= \int \frac{2(-t^2-2t+3)\,dt}{(t^2+4t-1)(t^2+1)}$$

برای ادامه‌ی حل ابتدا t^2+4t-1 را تجزیه می‌کنیم. می‌توان دید ریشه‌های t^2+4t-1 عبارتند از $-2\pm\sqrt{5}$. بنابراین:

$$t^2+4t-1 = (t+2+\sqrt{5})(t+2-\sqrt{5})$$

اکنون

$$\frac{2(-t^2-2t+3)}{(t^2+4t-1)(t^2+1)} = \frac{-2t^2-4t+6}{(t+2+\sqrt{5})(t+2-\sqrt{5})(t^2+1)}$$

$$= \frac{A}{t+2+\sqrt{5}} + \frac{B}{t+2-\sqrt{5}} + \frac{Ct+D}{t^2+1}$$

حال با یافتن مقادیر A، B، C و D می‌توان انتگرال را محاسبه کرد.

انتگرال ناسره

مقدار میانگین در انتگرال.

قضیه. فرض کنید تابع $f(x)$ در $[a,b]$ پیوسته باشد. در این صورت $c\in(a,b)$ موجود است که $\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = f(c)$.

اثبات. قرار می‌دهیم $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$. در این صورت بنابه قضیه‌ی اول اساسی حساب، $F'(x)=f(x)$.

حال قضیه‌ی مقدار میانگین را برای تابع $F(x)$ در $[a,b]$ به کار می‌گیریم.

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(c)\longrightarrow\frac{\int_a^b f(t)\,dt-\int_a^a f(t)\,dt}{b-a}=f(c)$$

$$\longrightarrow\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}=f(c)$$

تعریف. $\dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$ مقدار میانگین تابع $f(x)$ در $[a,b]$ نامیده می‌شود.

مثال: مقدار میانگین تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در $[1,4]$ به دست آورید.

حل: $\text{مقدار میانگین}=\dfrac{\int_1^4 \sqrt{x}\,dx}{4-1}=\dfrac{\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big]_1^4}{3}=\dfrac{\frac{16}{3}-\frac{2}{3}}{3}=\dfrac{14}{9}$

توجه کنید: اگر $f(x)$ در $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه بنا به قضیه مقدار میانگین برای انتگرال، $\int_a^b f(x)\,dx$ موجود و متناهی است.

انتگرال نا سره‌ی نوع اول:

فرض کنید $f(x)$ در $[a,\infty)$ تعریف شده باشد و برای هر $a\le b$، $\int_a^b f(x)\,dx$ موجود باشد. در این صورت تعریف می‌کنیم

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

به همین صورت $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ نیز تعریف می‌شود. همچنین تعریف می‌کنیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx+\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

تعریف: $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ را همگرا گوییم هرگاه $\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ موجود و متناهی باشد. در غیر اینصورت آن را واگرا می‌نامیم.

همگرایی $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ نیز به همین صورت تعریف می‌شود.

همچنین $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ همگراست هرگاه، به ازای یک a، $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ و $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ هر دو همگرا باشند.

مثال. همگرایی $\int_1^{\infty} \ln x\,dx$ را بررسی کنید.

$$\int_1^{\infty} \ln x\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \ln x\,dx$$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x \longrightarrow \int_1^b \ln x\,dx = \Big[x\ln x - x\Big]_1^b$$

$$= [b\ln b - b] - [1\ln 1 - 1] = b\ln b - b + 1$$

$$\lim_{b \to +\infty} b\ln b - b + 1 = \lim_{b \to \infty} b(\ln b - 1) + 1 = +\infty$$

پس $\int_1^{\infty} \ln x\,dx = \infty$ ولذا واگراست.

مثال. همگرایی $\int_1^{\infty} x e^{-x^2}\,dx$ را بررسی کنید.

حل: $\int_1^{\infty} x e^{-x^2}\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^b x e^{-x^2}\,dx$. پس $\int x e^{-x^2}\,dx$ را حل می‌کنیم.

$$I=\int xe^{-x^2}dx$$

$$\begin{cases} u=x^2 \\ du=2x\,dx \longrightarrow x\,dx=\frac{1}{2}du \end{cases}$$

$$I=\int e^{-u}\left(\tfrac{1}{2}du\right)=\frac{1}{2}\int e^{-u}du=\frac{1}{2}\left(-e^{-u}\right)=-\frac{1}{2}e^{-x^2}$$

$$\longrightarrow \int_1^b xe^{-x^2}dx=\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_1^b=\left(-\frac{1}{2}e^{-b^2}\right)-\left(-\frac{1}{2}e^{-1}\right)$$

$$=\frac{1}{2e}-\frac{1}{2}e^{-b^2}$$

$$\int_1^\infty xe^{-x^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{2e}-\frac{1}{2}e^{-b^2}\right]=\frac{1}{2e}$$

پس $\int_1^\infty xe^{-x^2}dx$ همگراست.

مثال. همگرایی $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ را بررسی کنید.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}dx=\lim_{b\to+\infty}\left[\ln x\right]_1^b=\lim_{b\to\infty}\ln b=+\infty$$

پس انتگرال واگراست.

مثال. همگرایی $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ را بررسی کنید.

$$\int_1^b \frac{1}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b=1-\frac{1}{b}$$

$$\longrightarrow \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}dx=\lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right)=1$$

پس انتگرال همگراست.

مثال. همگرایی $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$ را بررسی کنید.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to\infty}\left[2\sqrt{x}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} 2\sqrt{b}-2 = \infty$$

پس انتگرال واگرا است.

در حالت کلی:

قضیه. فرض کنید $p>0$ عددی ثابت باشد. در این صورت $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$،

الف. همگرا است هرگاه $p>1$.

ب. واگرا است هرگاه $p\le 1$.

انتگرال ناسره نوع دوم

فرض کنید تابع f در $(a,b]$ تعریف شده و $f(x)$ در همسایگی راست a، بی‌کران باشد. همچنین فرض کنید برای هر $a<c\le b$، $\int_c^b f(x)\,dx$ تعریف شده باشد. در این صورت تعریف می‌کنیم:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,dx$$

انتگرال $\int_a^b f(x)\,dx$ را همگرا می‌گوییم هرگاه $\lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,dx$ موجود و متناهی باشد. در غیر اینصورت آن را واگرا می‌نامیم.

مثال. همگرایی $\int_0^1 \ln x\,dx$ را بررسی کنید.

حل.

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{c\to 0^+}\int_c^1 \ln x\,dx = \lim_{c\to 0^+}\left[x\ln x - x\right]_c^1$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left[-1-\underbrace{c\ln c}_{\to 0}+\underbrace{c}_{\to 0}\right] = -1$$

توجه کنید:

$$\lim_{c\to 0^+} c\ln c = \lim_{c\to 0^+}\frac{\ln c}{\frac{1}{c}} \overset{H}{=} \lim_{c\to 0^+}\frac{1/c}{-1/c^2} = \lim_{c\to 0^+}(-c) = 0$$

مثال. همگرایی $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ را بررسی کنید.

حل

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{c\to 0^+}\int_c^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{c\to 0^+}\left[\ln x\right]_c^1 = \lim_{c\to 0^+}\left[-\ln c\right] = +\infty$$

پس انتگرال واگرا است.

در حالت کلی می‌توان دید:

قضیه. فرض کنید $p>0$ عددی ثابت باشد. در این صورت $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$:

الف. همگرا است هرگاه $p<1$.

ب. واگرا است هرگاه $p\geq 1$.

آزمون‌های همگرایی

۱- آزمون مقایسه

فرض کنید در $[a,+\infty)$، $0 \leq f(x) \leq g(x)$. در این صورت

الف. اگر $\int_a^\infty g(x)dx$ همگرا باشد آنگاه $\int_a^\infty f(x)dx$ نیز همگراست.

ب. اگر $\int_a^\infty f(x)dx$ واگرا باشد آنگاه $\int_a^\infty g(x)dx$ نیز واگراست.

در مورد انتگرال ناسره‌ی نوع دوم نیز قضیه برقرار است.

مثال. همگرایی انتگرال $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$ را بررسی کنید.

حل.

$$0 \leq \sin^2 x \leq 1 \longrightarrow 0 \leq \frac{\sin^2 x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

حال از این که $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ همگراست لذا بنا به آزمون مقایسه، $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$ نیز همگراست.

مثال. همگرایی $\int_0^1 \frac{e^x}{x^2}dx$ را بررسی کنید.

حل.

$$0 \leq x \longrightarrow 1 \leq e^x \longrightarrow 0 \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{e^x}{x^2}$$

حال از این که $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ واگراست، لذا بنا به آزمون مقایسه انتگرال ناسره‌ی $\int_0^1 \frac{e^x}{x^2}dx$ نیز واگراست.

مثال. همگرایی $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ را بررسی کنید.

حل. برای هر $x \geq 1$ داریم $0 \leq e^{-x^2} \leq xe^{-x^2}$ ★.

اما از قبل می‌دانیم $\int_1^\infty xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2e}$ ولذا $\int_1^\infty xe^{-x^2}dx$ همگراست.

پس با استفاده از آزمون مقایسه و با توجه به رابطه‌ی ★، $\int_1^\infty e^{-x^2}dx$ نیز همگراست. حال:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^\infty e^{-x^2}dx$$

و بنا به قضیه‌ی مقدار میانگین برای انتگرال $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ مقداری متناهی و ثابت است. پس $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^\infty e^{-x^2}dx$ همگراست.

مثال. همگرایی $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}dx$ را بررسی کنید.

حل. می‌دانیم $\ln x < \sqrt{x}$. در واقع $\ln x < x^c$.

$$\ln x < \sqrt{x} \longrightarrow \frac{\ln x}{x^2} < \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

و چون $\int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ همگراست، لذا $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}dx$ نیز همگراست.

سؤال. چرا برای هر مقدار مثبت c، (از جایی به بعد) $\ln x < x^c$؟

جواب.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^c} \overset{H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{cx^{c-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{cx^c} = 0$$

و این بدین معنی است که از جایی به بعد $\ln x \leq x^c$.

مثال: همگرایی $\int_1^\infty \frac{(\ln x)^{1000000}}{x^{1.1}}dx$ را بررسی کنید.

حل: $(\ln x)^{1000000} < x^{0.05} \longrightarrow \frac{(\ln x)^{1000000}}{x^{1.1}} < \frac{x^{0.05}}{x^{1.1}} = \frac{1}{x^{1.05}}$

این رابطه از جایی به بعد برقرار است. فرض کنید این رابطه در $[M, +\infty)$ برقرار است. حال چون $\int_M^\infty \frac{1}{x^{1.05}}dx$ همگراست، لذا $\int_M^\infty \frac{(\ln x)^{1000000}}{x^{1.1}}dx$ نیز همگراست. از طرفی $\int_1^M \frac{(\ln x)^{10^6}}{x^{1.1}}dx$ یک عدد است. بنابراین مجموع دو انتگرال یعنی $\int_1^\infty \frac{(\ln x)^{10^6}}{x^{1.1}}dx$ همگراست.

۲- آزمون مقایسه‌ی حدی

فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ در $[a,\infty)$ تعریف شده باشند و به علاوه $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l$ که در آن $0<l<\infty$. در این صورت همگرایی $\int_a^\infty f(x)dx$ شبیه همگرایی $\int_a^\infty g(x)dx$ است.

همچنین اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ در $(a,b]$ تعریف شده باشند و a یک نقطه‌ی ناسره‌ی $\int_a^b f(x)dx$ و $\int_a^b g(x)dx$ باشد و به علاوه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=l$ که در آن $0<l<\infty$، آنگاه همگرایی $\int_a^b f(x)dx$ شبیه همگرایی $\int_a^b g(x)dx$ است.

مثال: همگرایی $\int_1^\infty \frac{1}{x+3-\sin x}dx$ را بررسی کنید.

حل. قرار می‌دهیم $f(x)=\frac{1}{x+3-\sin x}$ و $g(x)=\frac{1}{x}$. در این صورت

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+3-\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\underbrace{\frac{3}{x}}_{0}-\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{0}}=1$$

حال بنا به آزمون مقایسه‌ی حدی همگرایی $\int_1^\infty \frac{dx}{x+3-\sin x}$ شبیه همگرایی $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ است. ولی $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ واگراست. پس $\int_1^\infty \frac{1}{x+3-\sin x}dx$ نیز واگراست.

مثال. همگرایی $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+e^x-1}dx$ را بررسی کنید.

حل. قرار می‌دهیم $f(x)=\frac{1}{x^2+e^x-1}$ و $g(x)=\frac{1}{e^x}$. در این صورت

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2+e^x-1}\overset{H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x+e^x}\overset{H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2+e^x}$$

$$\overset{H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$$

پس همگرایی $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+e^x-1}dx$ شبیه همگرایی $\int_1^\infty \frac{1}{e^x}dx$ است. اما $\int_1^\infty \frac{1}{e^x}dx$ همگرا است. لذا $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+e^x-1}dx$ نیز همگرا است. توجه کنید:

$$\int_1^\infty \frac{1}{e^x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x}dx=\lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_1^b=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{e}-e^{-b}\right]=\frac{1}{e}$$

مثال. همگرایی $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+x}}dx$ را بررسی کنید.

حل، قرار می‌دهیم $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^3+x}}$ و $g(x)=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$. در این صورت

$\int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ همگرا است لذا و چون $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3+x}}=1$

$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$ نیز همگرا است

مثال. همگرایی $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$ را بررسی کنید

حل، قرار می‌دهیم $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^3+x}}$ و $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ - در این صورت

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ همگرا است لذا و چون $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^3+x}}=1$

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$ نیز همگرا است.

مثال. همگرایی $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+x}}dx$ را بررسی کنید.

حل. بنابه دو مثال بالا انتگرال‌های $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$ و $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$ همگرا

می‌باشند. پس $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}+\int_1^\infty\frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$ نیز همگرا است.

مثال. همگرایی $\int_1^\infty \frac{dx}{1+\ln x}$ را بررسی کنید.

حل. $1+\ln x < x \longrightarrow \frac{1}{1+\ln x} > \frac{1}{x}$

و چون $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ واگراست، بنابراین $\int_1^\infty \frac{dx}{1+\ln x}$ نیز واگراست.

مثال. همگرایی $\int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{1+x^4}dx$ را بررسی کنید.

حل. قرار می‌دهیم $x=-t$. در این صورت:

$$\begin{cases} x=-t \\ dx=-dt \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0 \longrightarrow t=0 \\ x=-\infty \longrightarrow t=+\infty \end{cases}$$

بنابراین:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{1+x^4}dx = \int_{+\infty}^0 \frac{e^{-t}}{1+t^4}(-dt) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}dt}{1+t^4}$$

حال اگر $f(t)=\frac{e^{-t}}{1+t^4}$ و $g(t)=\frac{1}{t^4}$، آنگاه

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^4}{e^t(1+t^4)} = 0$$

و این بدین معنی است که (از جایی به بعد) $f(t)<g(t)$.

یعنی در $[M,+\infty)$، $f(t)<g(t)$. اکنون چون

$\int_M^\infty \frac{1}{t^4}\,dt = \int_M^\infty g(t)\,dt$ همگراست، لذا بنابه آزمون مقایسه $\int_M^\infty \frac{e^{-t}dt}{1+t^4}$

نیز همگراست. همچنین $\int_0^M \frac{e^{-t}dt}{1+t^4}$ یک عدد است. پس

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}dt}{1+t^4} = \int_0^M \frac{e^{-t}dt}{1+t^4} + \int_M^\infty \frac{e^{-t}dt}{1+t^4}$$ همگراست.

تمرین. همگرایی انتگرال‌های زیر را بررسی کنید.

۱) $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$

۲) $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+x^2}}$

۳) $\int_0^\infty \frac{x}{\cosh x}\,dx$

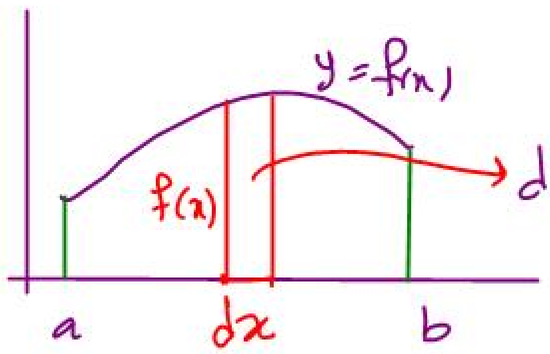
۴) $\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

۵) $\int_1^\infty \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{x^2+x}}$

۶) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{-x}}{x}\,dx$

کاربردهای انتگرال معین.

۱- محاسبه‌ی مساحت محصور به منحنی‌ها



$dS = f(x)\,dx$

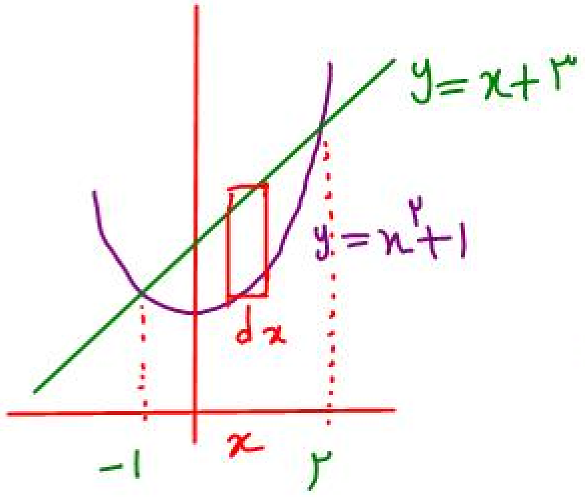
$$\text{مساحت } S = \int dS = \int_a^b f(x)\,dx$$

مثال. مطلوبست مساحت محصور به منحنی‌های $y = \sin x$ ، $y = 0$ ، $x = 0$ و $x = \pi$.

حل. $$S = \int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\Big]_0^\pi = (-\cos\pi) - (-\cos 0) = 2$$

مثال. مطلوبست مساحت محصور به منحنی های $y=x^2+1$ و $y=x+3$.

حل.



$$\begin{cases} y=x^2+1 \\ y=x+3 \end{cases} \Rightarrow x^2+1=x+3$$

$$\longrightarrow x^2-x-2=0 \longrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases}$$

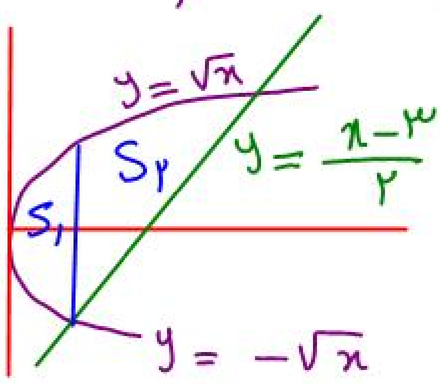
$$ds=\left[(x+3)-(x^2+1)\right]dx=(x+2-x^2)\,dx$$

$$S=\int ds=\int_{-1}^{2}(x+2-x^2)\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2}$$

$$=\left(2+4-\frac{8}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}-2+\frac{1}{3}\right)=\frac{9}{2}$$

مثال. مطلوبست مساحت محصور به دو منحنی $x=y^2$ و $y=\frac{x-3}{2}$

حل. روش اول :



$$\left.\begin{array}{l} x=y^2 \\ y=\frac{x-3}{2} \longrightarrow x=2y+3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\longrightarrow y^2=2y+3 \longrightarrow y^2-2y-3=0$$

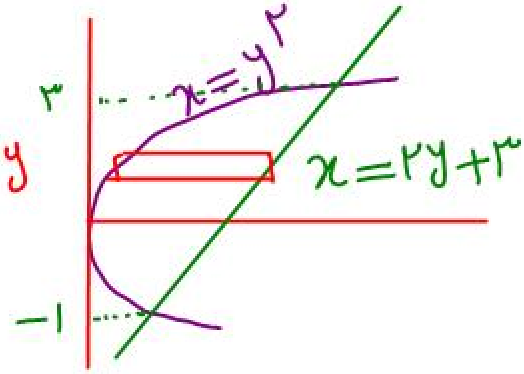
$$\longrightarrow \begin{cases} y=-1 \longrightarrow x=1 \\ y=3 \longrightarrow x=9 \end{cases}$$

$$S_1 = \int_0^1 [\sqrt{x} - (-\sqrt{x})]\,dx = \int_0^1 2\sqrt{x}\,dx = \frac{4}{3} x\sqrt{x}\Big]_0^1 = \frac{4}{3}$$

$$S_2 = \int_1^9 \left[\sqrt{x} - \left(\frac{x-3}{2}\right)\right] dx = \int_1^9 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right) dx$$

$$= \left[\frac{2}{3} x\sqrt{x} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x\right]_1^9 = ?$$

روش دوم.



$$ds = (2y + 3 - y^2)\,dy$$

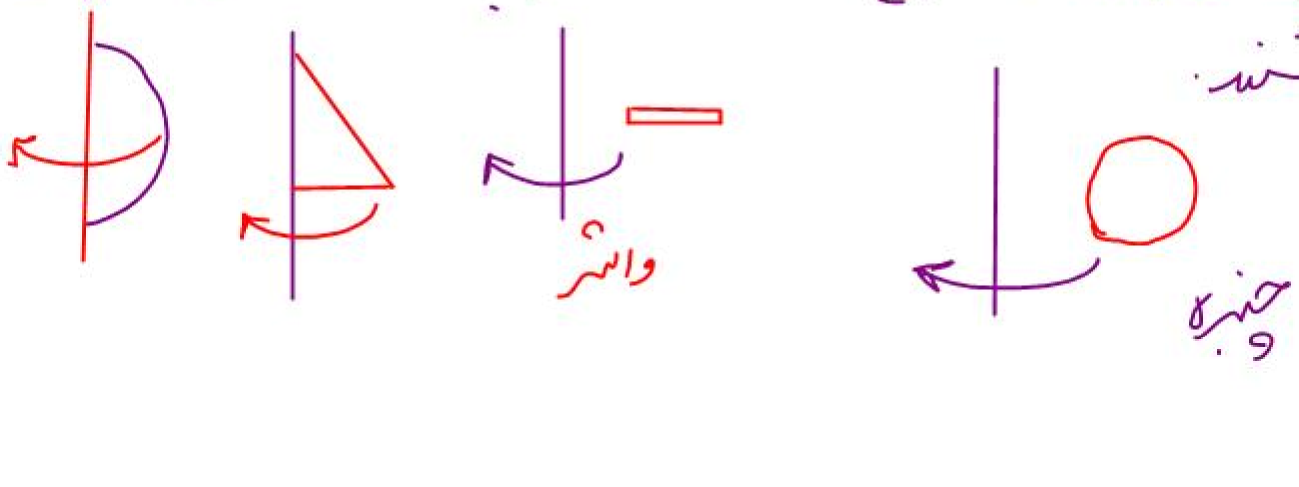
$$S = \int ds = \int_{-1}^{3} (2y + 3 - y^2)\,dy$$

$$= \left[y^2 + 3y - \frac{1}{3}y^3\right]_{-1}^{3} = ?$$

۲ـ محاسبه‌ی حجم‌های دوار

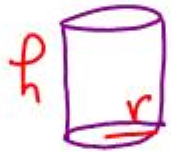
تعریف. حجم دوار حجمی است که از دوران سطحی (بنام سطح مولد) حول محوری (بنام محور دوران) ایجاد می‌شود.

کره، مخروط، استوانه، بیضی‌گون، واشر، چنبره و ... مثال‌هایی از حجم‌های دوار هستند.



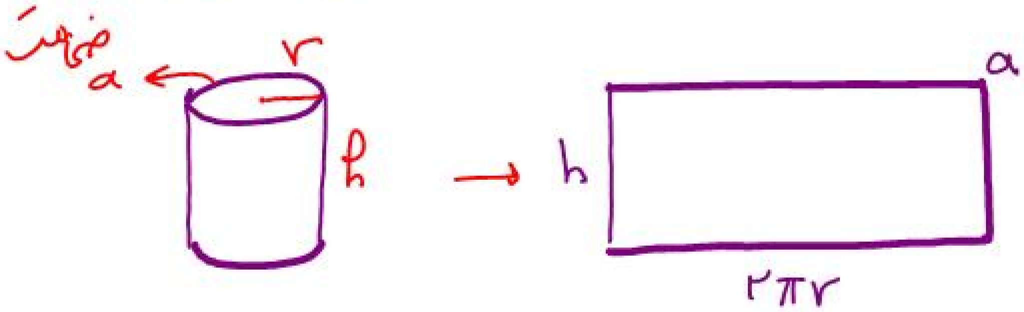
روش های محاسبه‌ی حجم های دوار

۱- استوانه ای   ۲- واشری   ۳- پوسته استوانه ای



حجم استوانه $= \pi r^2 h$

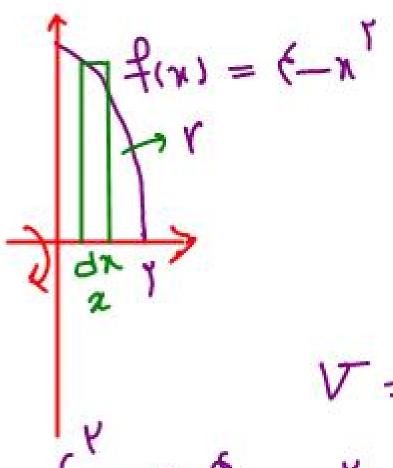
حجم واشر $= \pi (r_1^2 - r_2^2) h$



حجم پوسته $= 2\pi r h a$

برای محاسبه‌ی حجم های دوار، المان سطح را انتخاب می کنیم. در اثر دوران مولد حول محور دوران، المان سطح نیز دوران یافته و المان حجم را ایجاد می کند. المان حجم یکی از احجام استوانه، واشر یا پوسته‌ی استوانه خواهد بود.

مثال. سطح محصور به منحنی های $f(x) = 4 - x^2$ ، $x = 0$ و $y = 0$ را حول محور x دوران می دهیم. حجم حاصل را بدست آورید.



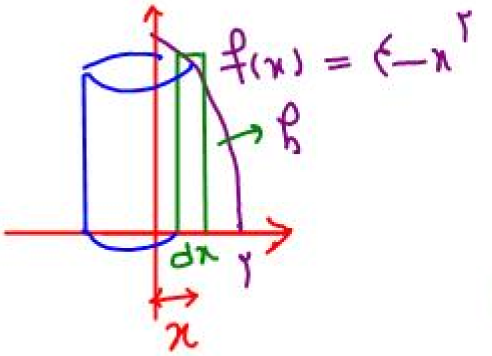
$$dV = \text{حجم استوانه} = \pi r^2 h$$

$$= \pi (f(x))^2 dx = \pi (4 - x^2)^2 dx$$

$$V = \int dV = \int_0^2 \pi (4 - x^2)^2 dx$$

$$= \int_0^2 \pi (x^4 - 8x^2 + 16) dx = \pi \left[\frac{1}{5} x^5 - \frac{8}{3} x^3 + 16x \right]_0^2$$

مثال: سطح محصور به منحنی های $f(x)=4-x^2$ ، $y=0$ و $x=0$ را حول محور y دوران می‌دهیم. حجم بدست آمده را محاسبه کنید.



$$dV = \text{حجم لوله} = 2\pi r h a$$

$$= 2\pi x\, f(x)\, dx$$

$$\longrightarrow V=\int dV = \int_0^2 2\pi x\,(4-x^2)\,dx = \int_0^2 2\pi x(4-x^2)dx$$

$$= 2\pi\left[2x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = 8\pi$$

تمرین:

① مطلوبست حجم حاصل از دوران سطح محصور به منحنی های $f(x)=\sin x$ ، $y=0$ و $x=0$ حول:

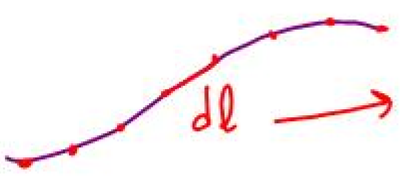
الف) محور x　　ب) محور y　　ج) خط $x=-2$

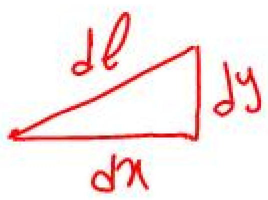
② مطلوبست حجم حاصل از دوران سطح محصور به منحنی های $x=y^2$ و $y=\frac{x-3}{2}$ حول:

الف) محور y　　ب) خط $y=-2$

۳- محاسبه‌ی طول خم

فرض کنید می‌خواهیم طول خمی را در فاصله‌ی دو نقطه‌ی A و B روی خم محاسبه کنیم.





$$dl=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$$

$$l=\int dl=\int\sqrt{dx^2+dy^2}$$

الف. $y=f(x)$. در این صورت

$$l=\int dl=\int \sqrt{dx^2+dy^2}=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

مثال. مطلوبست محاسبه‌ی طول خم $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ در فاصله‌ی $[0,1]$.

حل.

$$y=\sqrt{1-x^2}\longrightarrow y'=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$l=\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\,dx=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\sin^{-1}x\Big]_0^1$$

$$=\sin^{-1}1-\sin^{-1}0=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$$

ب. $x=g(y)$. در این صورت

$$l=\int dl=\int\sqrt{dx^2+dy^2}=\int_{y_1}^{y_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+1}\,dy$$

ج. $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ یعنی x و y برحسب یک پارامتر بیان شده‌اند. در این حالت

$$l=\int\sqrt{dx^2+dy^2}=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

مسئله. محیط دایره‌ی به شعاع R را محاسبه کنید.

حل. دایره‌ی به شعاع R دارای معادله‌ی به صورت زیر است.

$$x^2+y^2=R^2$$

روش حل اول این است که y را برحسب x بنویسیم.

$$x^2+y^2=R^2 \longrightarrow y^2=R^2-x^2 \longrightarrow y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$$

چنانچه تابع $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$ را در نظر بگیریم و نصف محیط را بدست آوریم؛ داریم

$$\text{نصف محیط}=\int_{-R}^{R}\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_{-R}^{R}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_{-R}^{R}\sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2}}\,dx=\int_{-R}^{R}\frac{R\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

$$\begin{cases} x=R\sin\theta \\ dx=R\cos\theta\,d\theta \end{cases}$$

$$x=-R \longrightarrow R\sin\theta=-R \longrightarrow \sin\theta=-1 \longrightarrow \theta=-\frac{\pi}{2}$$

$$x=R \longrightarrow R\sin\theta=R \longrightarrow \sin\theta=1 \longrightarrow \theta=\frac{\pi}{2}$$

$$\text{نصف محیط}=\int_{-R}^{R}\frac{R\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{R^2\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{\underbrace{R^2-R^2\sin^2\theta}_{R^2(1-\sin^2\theta)}}}$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{R^2\cos\theta\,d\theta}{R|\cos\theta|}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{R^2\cos\theta\,d\theta}{R\cos\theta}$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}R\,d\theta=R\theta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\pi R \longrightarrow \text{محیط}=2\pi R$$

روش دوم این است که معادله‌ی دایره‌ی $x^2+y^2=R^2$ را به صورت پارامتری بیان کنیم.

معادله‌ی پارامتری دایره
$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = -R\sin\theta \quad , \quad \frac{dy}{d\theta} = R\cos\theta$$

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{\underbrace{R^2\sin^2\theta + R^2\cos^2\theta}_{R^2}}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} R\, d\theta = R\theta \Big]_0^{2\pi} = 2\pi R$$

مثال. محیط بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ را در صورت توان محاسبه کنید.

حل.

معادله‌ی پارامتری بیضی
$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = -a\sin\theta \quad , \quad \frac{dy}{d\theta} = b\cos\theta$$

$$\text{محیط بیضی} = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}\, d\theta$$

و این انتگرال قابل حل نیست. (تقریبا از محیط این بیضی $\pi(a+b)$ است)

مثال. مطلوب است محاسبه‌ی طول خم $y=\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$ در $[0,2]$.

حل. روش اول محاسبه‌ی طول خم به صورت مستقیم است.

در روش دوم که ساده‌تر است، x را به عنوان تابعی از y به دست می‌آوریم.

$$y=\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \longrightarrow y^{\frac{2}{3}}=\frac{x}{2} \longrightarrow x=2y^{\frac{2}{3}}$$

هم‌چنین
$$\begin{cases} x=0 \longrightarrow y=0 \\ x=2 \longrightarrow y=1 \end{cases}$$
بنابراین طول خم $x=2y^{\frac{3}{2}}$ در $[0,1]$

$\frac{dx}{dy}$ را به دست می‌آوریم.

$$\frac{dx}{dy}=3y^{\frac{1}{2}}=3\sqrt{y}$$

$$l=\int_0^1\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+1}\,dy=\int_0^1\sqrt{9y+1}\,dy$$

$$\begin{cases} t=9y+1 & y=0 \longrightarrow t=1 \\ dt=9\,dy & y=1 \longrightarrow t=10 \end{cases}$$

$$l=\int_0^1\sqrt{9y+1}\,dy=\int_1^{10}\sqrt{t}\left(\frac{1}{9}dt\right)=\frac{1}{9}\times\frac{2}{3}t\sqrt{t}\Big]_1^{10}$$

$$=\frac{2}{27}10\sqrt{10}-\frac{2}{27}$$

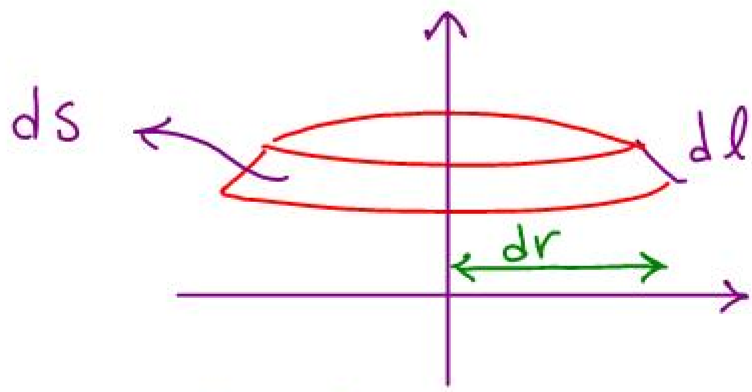
۴- مساحت جانبی سطح دوار

تعریف. سطح دوار، سطحی است که از دوران یک خم حول یک محور به وجود می‌آید.

محاسبه‌ی مساحت یک سطح دوار شبیه محاسبه‌ی طول خم است.

بدین صورت که اگر dl قسمتی از یک خم باشد، آنگاه $ds = 2\pi r\, dl$

که در آن r شعاع دوران است.



$$ds = 2\pi r\, dl$$

اکنون بسته به این که دوران حول چه محوری باشد، r مشخص می‌شود و با توجه به این که انتگرال نسبت به کدام متغیر محاسبه می‌شود، dl مشخص می‌شود. بدین صورت که:

الف. اگر دوران حول محور x باشد، $r = y$

ب. اگر دوران حول محور y باشد، $r = x$.

ج. اگر انتگرال برحسب x باشد، $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$

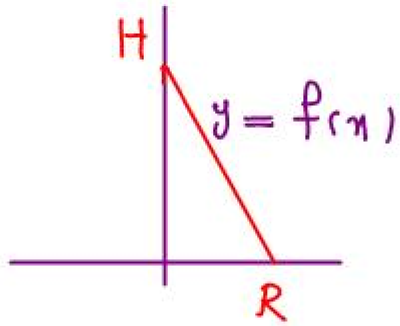
د. اگر انتگرال برحسب y باشد، $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\, dy$

هـ. اگر $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$، آنگاه $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$

مثال. مساحت جانبی مخروط به شعاع قاعده‌ی R و ارتفاع H را به دست آورید.

حل. یک مخروط با شعاع R و ارتفاع H از دوران خط گذرنده از دو نقطه‌ی $(R,0)$ و $(0,H)$ که در ناحیه اول قرار دارد، حول محور y به دست می‌آید.

معادله‌ی $f(x)$:



$$\frac{x}{R}+\frac{y}{H}=1 \longrightarrow y=H\left(1-\frac{x}{R}\right)$$

$$S=\int 2\pi r\, dl=\int_0^R 2\pi x\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

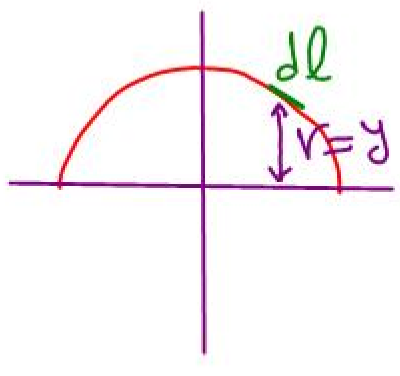
$$=\int_0^R 2\pi x\sqrt{1+\frac{H^2}{R^2}}\,dx=2\pi\sqrt{1+\frac{H^2}{R^2}}\int_0^R x\,dx$$

$$=2\pi\sqrt{1+\frac{H^2}{R^2}}\times\frac{R^2}{2}=\pi R\sqrt{R^2+H^2}$$

مثال. مساحت کره‌ی به شعاع R را به دست آورید.

حل. سطح یک کره از دوران نیم دایره به شعاع R حول قطرش به دست می‌آید.

$$x^2+y^2=R^2 \longrightarrow y=\sqrt{R^2-x^2}$$



$$y'=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

$$ds = \int 2\pi r\, dl = \int_{-R}^{R} 2\pi y\sqrt{1+y'^2}\, dx$$

$$= \int_{-R}^{R} 2\pi \sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\, dx = \int_{-R}^{R} 2\pi\sqrt{R^2-x^2}\, \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\, dx$$

$$= \int_{-R}^{R} 2\pi R\, dx = 2\pi R x\Big]_{-R}^{R} = 4\pi R^2$$

دنباله‌ها

تعریف. یک دنباله عبارت است از تابعی با دامنه‌ی $\mathbb{N}$ (اعداد طبیعی)

چنانچه $\begin{cases} f:\mathbb{N}\to\mathbb{R} \\ n\mapsto f(n) \end{cases}$ یک دنباله باشد، این دنباله را می‌توان با نوشتن جملاتش

بصورت یک رشته عددی نشان داد. به شکل زیر

$$\underbrace{f(1)}_{\text{جمله اول}},\ f(2),\ \dots,\ \underbrace{f(n)}_{\text{جمله عمومی}},\ \dots$$

از این پس به جای نماد $f(n)$ از f_n یا a_n استفاده می‌کنیم و این دنباله را به

صورت $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ یا $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ نشان می‌دهیم.

مثال.

$$a_n:\ 0,\ -\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ -\frac{3}{4},\ \dots,\ (-1)^{n-1}\frac{n-1}{n},\ \dots$$

همگرایی دنباله‌ها

تعریف. گوییم دنباله a_n به a همگراست و می‌نویسیم $\lim_{n\to\infty} a_n = a$، هرگاه

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N \qquad n>N \longrightarrow |a_n - a|<\varepsilon$$

درصورتی که a_n حد نداشته باشد، یا حد آن ∞ باشد، a_n را واگرا می‌نامیم

مثال. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ و $\lim_{n\to\infty} \frac{[\sqrt{2}n]}{n} = \sqrt{2}$, $\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e$

دنباله بازگشتی

تعریف. دنباله‌ی a_n را بازگشتی گوییم هرگاه هر جمله آن براساس جملات قبل بیان شده باشد.

مثال.
$$\begin{cases} a_1 = 1 , a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad n \geq 3 \end{cases}$$

تعریف. فرض کنید a_n یک دنباله باشد. دراین صورت یک زیردنباله از a_n به صورت a_{n_k} است که در آن $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$

مثال. زیردنباله‌ی جملات زوج a_n عبارت است از a_{2n} و زیر دنباله‌ی جملات فرد a_n عبارت است از a_{2n-1}،

قضیه. اگر a_n دنباله‌ای همگرا به a باشد، آنگاه هر زیردنباله آن نیز به a همگراست.

نتیجه ۱. اگر a_n زیردنباله‌ای واگرا داشته باشد آنگاه a_n واگراست.

نتیجه ۲. اگر دنباله‌ی a_n شامل دو زیردنباله‌ی a_{n_k} و $a_{n_{k'}}$ باشد بطوری که $a_{n_k} \to a$ و $a_{n_{k'}} \to b$ و $a \neq b$، آنگاه a_n واگراست.

مثال. همگرایی دنباله‌ی $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ را بررسی کنید.

حل. زیردنباله‌های با جملات زوج و فرد را در نظر می‌گیریم.

$$a_{2n} = (-1)^{2n} \frac{2n}{2n+1} \longrightarrow 1 \quad , \quad a_{2n-1} = (-1)^{2n-1} \frac{2n-1}{2n} \longrightarrow -1$$

و بنا به نتیجه ۲، دنباله‌ی a_n واگراست.

مثال. فرض کنید $a_n = \begin{cases} n & \text{فرد } n \\ \frac{1}{n} & \text{زوج } n \end{cases}$. دنباله‌ی a_n همگراست یا واگرا؟

حل. زیردنباله جملات فرد را در نظر می‌گیریم.

$$a_{2n-1} = 2n-1 : 1, 3, 5, 7, \dots \longrightarrow +\infty$$

این زیردنباله واگراست و در نتیجه دنباله‌ی a_n نیز واگراست.

توجه. ابزارهای متفاوتی برای اثبات همگرایی دنباله‌ها وجود دارد. یکی از این ابزارها تابع توسیع دنباله‌ها است که به تعریف آن در زیر می‌آید.

تعریف. تابع $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ را تابع توسیع a_n گوئیم هرگاه برای هر n، $f(n)=a_n$.

قضیه. اگر $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$ آنگاه دنباله‌ی a_n نیز به a همگراست.

مثال. همگرایی دنباله‌ی $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$ را بررسی کنید.

حل. قرار می‌دهیم $f(x)=(1+\frac{1}{x})^x$. به وضوح f تابع توسیع دنباله‌ی a_n است.

$$f(x)=(1+\frac{1}{x})^x \longrightarrow \ln f(x)=\frac{\ln(1+1/x)}{1/x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\ln f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+1/x)}{1/x}=1 \longrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x)=e^1=e$$

پس دنباله‌ی a_n به e همگراست.

مثال. همگرایی دنباله‌ی $a_n=\sqrt[n]{n}$ را بررسی کنید.

حل. قرار می‌دهیم $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$. در این صورت f تابع توسیع a_n است. بعلاوه

$$f(x)=x^{\frac{1}{x}} \longrightarrow \ln f(x)=\frac{\ln x}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\ln f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1}=0$$

بنابراین $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=e^0=1$ و لذا $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

تمرین. همگرایی $a_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ را بررسی کنید.

دنباله‌های یکنوا

تعریف. دنباله‌ی a_n را صعودی گوئیم هرگاه بجای هر n، $a_n \leqslant a_{n+1}$. یعنی

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \cdots$$

تعریف. دنباله‌ی a_n را نزولی گوئیم هرگاه برای هر n، $a_n \geqslant a_{n+1}$. یعنی

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \cdots$$

تعریف. دنباله a_n را یکنوا گوئیم هرگاه a_n صعودی یا نزولی باشد.

روشهای بررسی یکنوایی دنباله‌ها

۱- محاسبه‌ی $a_{n+1} - a_n$ و تعیین علامت آن.

اگر $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$ آنگاه a_n صعودی و اگر $a_{n+1} - a_n \leqslant 0$ آنگاه a_n نزولی است.

مثال. یکنوایی دنباله‌ی $a_n = 2n + \frac{(-1)^n}{n}$ را بررسی کنید.

حل.

$$a_{n+1} - a_n = (2n+2) + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - 2n - \frac{(-1)^n}{n}$$

$$= 2 + (-1)^n \left[\frac{-1}{n+1} + \frac{1}{n} \right] = 2 + \frac{(-1)^n}{n(n+1)} \geqslant 0$$

بنابراین a_n دنباله‌ای صعودی است.

یکنوائی دنباله‌ی $a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$ را بررسی کنید.

حل:
$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$$
$$-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\cdots-\frac{1}{2n}=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}$$
$$=\frac{(2n+2)+(2n+1)-(4n+2)}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}>0$$

بنابراین $a_{n+1}>a_n$ و لذا a_n اکیداً صعودی است.

۲ـ محاسبه‌ی $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ و مقایسه آن با ۱. (درحالتی که $a_n>0$)

چنانچه $\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1$ دنباله a_n صعودی و اگر $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq 1$ دنباله‌ی a_n نزولی خواهد بود.

مثال: یکنوایی دنباله‌ی $a_n=\frac{2^n}{(n+1)!}$ را بررسی کنید.

حل:
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+2)!}}{\frac{2^n}{(n+1)!}}=\frac{2}{n+2}<1\longrightarrow a_{n+1}<a_n$$

پس دنباله اکیداً نزولی است.

مسئله: یکنوائی دنباله‌ی $a_n=\frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}$ را بررسی کنید.

حل:
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2^{n+1}(n+1)!^2}{(2n+2)!}\times\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}=\frac{2(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{n+1}{2n+1}<1$$

پس a_n اکیداً نزولی است.

نکته: اگر $0<a<1$ آنگاه برای هر $n\in\mathbb{N}$، $(1-a)^n \geq 1-na$.

این حکم به روش استقرا به راحتی ثابت می‌شود.

مسئله. یکنوائی دنباله‌ی $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$ را بررسی کنید.

حل.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{(\frac{n+2}{n+1})^{n+1}}{(\frac{n+1}{n})^n}=\frac{(\frac{n+2}{n+1})^{n+1}}{(\frac{n+1}{n})^{n+1}}\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$=\left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)=\left(\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)\geq\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)=\left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)=1$$

پس $a_{n+1}\geq a_n$ ولذا a_n صعودی است. $\square$

۳ـ حدس یکنوایی و اثبات آن به روش استقرا

از این روش معمولاً در دنباله‌های بازگشتی استفاده می‌شود.

مثال. یکنوایی دنباله‌ی بازگشتی زیر را بررسی کنید.

$$a_n=\begin{cases}1 & n=1\\ \sqrt{a_{n-1}+1} & n\geq 2\end{cases}$$

حل، $a_1=1$ ، $a_2=\sqrt{2}$ ، $a_3=\sqrt{\sqrt{2}+1}$ ، ...

حدس می‌زنیم دنباله صعودی است و با استقرا نشان می‌دهیم برای هر n،

$$p(n): \quad a_n \leq a_{n+1}$$

$$P(1): \quad a_1 \leq a_2 \quad ✓$$

$$P(k): \quad a_k \leq a_{k+1} \longrightarrow a_k+1 \leq a_{k+1}+1$$

$$\longrightarrow \sqrt{a_k+1} \leq \sqrt{a_{k+1}+1} \longrightarrow a_{k+1} \leq a_{k+2} \quad : P(k+1)$$

پس بنا به استقرا برای هر n، $a_n \leq a_{n+1}$ و لذا a_n صعودی است.

مثال. یکنوایی دنباله زیر را بررسی کنید:

$$a_n = \underbrace{\sin(\sin(\cdots(\sin(1))\cdots))}_{n \text{ بار}}$$

حل. دنباله‌ی a_n را می‌توان به صورت زیر به شکل بازگشتی تعریف کرد.

$$a_1 = \sin(1) \,, \quad \forall n \geq 1 \quad a_{n+1} = \sin(a_n)$$

در این صورت بوضوح $0 \leq a_1 = \sin(1) \leq 1$. هم چنین برای هر n،

$$0 \leq a_{n+1} = \sin(a_n) \leq a_n$$

و لذا a_n نزولی است.

۴- استفاده از تابع توسیع دنباله‌ی a_n و استفاده از ابزاری چون مشتق توابع

تعریف. تابع $f:[0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ را تابع توسیع a_n گوئیم هرگاه برای هر $n\in\mathbb{N}$، $f(n)=a_n$.

مثال. $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ تابع توسیع $a_n=\frac{\ln n}{n}$ است.

قضیه. اگر تابع f در $[1,\infty)$ یکنوا باشد آنگاه دنباله‌ی a_n نیز چنین است.

مثال. یکنوایی دنباله‌ی $a_n=\tan^{-1}(\frac{1}{n})$ را بررسی کنید.

حل. قرار می‌دهیم $f(x)=\tan^{-1}(\frac{1}{x})$. بوضوح تابع f در $[1,\infty)$ مشتق پذیر بوده و در این بازه

$$f'(x)=\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+(\frac{1}{x})^2}=\frac{-1}{x^2+1}<0$$

بنابراین f اکیداً نزولی و لذا دنباله‌ی a_n نیز اکیداً نزولی است.

کرانداری

تعریف. فرض کنید a_n یک دنباله باشد. گوئیم M یک کران بالای a_n است هرگاه

$$\forall n \quad a_n \leq M$$

و m را کران پائین a_n گوئیم هرگاه

$$\forall n \quad m \leq a_n$$

تعریف. a_n را کراندار گوئیم هرگاه هم دارای کران بالا و هم دارای کران پایین باشد.

توجه. دنباله‌های صعودی همواره دارای کران پایین و دنباله‌های نزولی همواره دارای کران بالا می‌باشند. در واقع

الف. اگر a_n صعودی باشد، آنگاه a_1 یک کران پایین a_n است.

ب. اگر a_n نزولی باشد آنگاه a_1 یک کران بالای a_n است.

مثال. $a_n = \tan^{-1}\left(\frac{3n^2-1}{n+7}\right)$ کران دار است. چون

$$\forall n \quad -\frac{\pi}{2} \leq a_n \leq \frac{\pi}{2}$$

مثال. نشان دهید دنباله‌ی a_n که به صورت زیر تعریف می‌شود، کراندار است

$$a_1 = 1 \ , \ a_n = \sqrt{1+a_{n-1}} \quad (n \geq 2)$$

حل. ابتدا واضح است که جملات این دنباله همگی مثبت اند. پس دنباله a_n از پایین کراندار است. حال نشان می‌دهیم همواره $a_n \leq 2$.

قرار می‌دهیم $P(n) : a_n \leq 2$

$$P(1) : a_1 = 1 \leq 2 \ \checkmark$$

$$P(k) : a_k \leq 2 \longrightarrow 1 + a_k \leq 3 \longrightarrow \sqrt{1+a_k} \leq \sqrt{3} \leq 2$$

$$\longrightarrow a_{k+1} \leq 2 : P(k+1)$$

پس برای هر n، $0 \leq a_n \leq 2$ و لذا a_n کران دار است.

قضیه. فرض کنید a_n همگرا به a و b_n همگرا به b باشد. در این صورت $a_n + b_n$، $a_n - b_n$، $a_n b_n$ به ترتیب به $a+b$، $a-b$ و ab همگرا هستند. به علاوه اگر برای هر n، $b_n \neq 0$ و $b \neq 0$ آنگاه $\frac{a_n}{b_n}$ همگرا است به $\frac{a}{b}$.

قضیه (فشردگی) فرض کنید a_n، b_n و c_n دنباله‌هایی باشند که

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

هم چنین فرض کنید $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} c_n = l$. در این صورت $\lim_{n \to \infty} b_n = l$.

مثال. نشان دهید $\lim_{n \to \infty} \frac{n}{2^n} = 0$.

حل. روش اول. قرار می‌دهیم $f(x) = \frac{x}{2^x}$. در این صورت

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{2^x} \overset{H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2^x \ln 2} = 0$$

پس $\lim \frac{n}{2^n} = 0$

روش دوم. با استفاده از استقرا به راحتی می‌توان نشان داد

$$\forall n \geq 4 \qquad n^2 \leq 2^n$$

بنابراین $\frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}$. از طرفی $0 \leq \frac{n}{2^n}$. پس $0 \leq \frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}$

اکنون از این که $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ، لذا بنا به قضیه فشردگی $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$

مثال. ثابت کنید $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$.

حل. واضح است که $0 \leqslant \frac{2^n}{n!}$. ادعا می‌کنیم برای هر $n \geqslant 6$، $\frac{2^n}{n!} \leqslant \frac{1}{n}$

برای این منظور نشان می‌دهیم: $\underbrace{2^n \leqslant (n-1)!}_{P(n)}$ $\forall n \geqslant 6$

$P(6): \ 2^6 \leqslant 5!$ ✓

$P(k): \ 2^k \leqslant (k-1)! \longrightarrow 2^{k+1} \leqslant (k-1)! \times 2 \leqslant (k-1)! \times k$

$\longrightarrow 2^{k+1} \leqslant k! \quad : P(k+1)$

پس برای هر $n \geqslant 6$ ، $0 \leqslant \frac{2^n}{n!} \leqslant \frac{1}{n}$. حال بنا به قضیه فشردگی خواهیم داشت $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$.

تمرین. نشان دهید دنباله‌ی $a_n = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n}$ همگرا به صفر است.

قضیه. فرض کنید $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ و تابع $f(x)$ در a پیوسته باشد. در این صورت $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$.

مثال. همگرایی دنباله $b_n = \sqrt{\frac{n+1}{n}}$ را بررسی کنید.

حل. بوضوح $a_n = \frac{n+1}{n}$ همگرا به 1 است. هم‌چنین تابع $f(x) = \sqrt{x}$

در نقطه ۱ پیوسته است. بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \sqrt{1} = 1$$

قضیه. هر دنباله‌ی یکنوا و کراندار همگرا است.

مثال. نشان دهید دنباله‌ی زیر همگرا است. حد آن را بدست آورید:

$$a_n = \underbrace{\sin(\sin(\cdots(\sin}_{n\ \text{بار}}(1))\cdots))$$

حل. این دنباله به صورت بازگشتی قابل بیان است.

$$a_n = \sin(\sin(\cdots(\sin(1))\cdots))$$

$$= \sin(a_{n-1})$$

پس $a_1 = \sin(1)$ و برای هر $n \geq 2$، $a_n = \sin(a_{n-1})$.

الف. a_n کراندار است. چون

$$-1 \leq \sin(a_{n-1}) \leq 1 \longrightarrow -1 \leq a_n \leq 1$$

ب. a_n نزولی است. چون

$$a_n = \sin(a_{n-1}) \leq a_{n-1}$$

بنابراین دنباله‌ی a_n همگرا است. اکنون می‌خواهیم حد دنباله را بدست آوریم.

فرض کنید $\lim_{n\to\infty} a_n = x$. در این صورت:

$$a_n = \sin(a_{n-1}) \longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sin(a_{n-1})$$

$$\longrightarrow x = \sin x \longrightarrow x = 0$$

پس $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

مثال. ابتدا نشان دهید دنباله زیر همگراست و پس حدش را بدست آورید.

$$a_1 = 1 \ , \ a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}} \quad (n \geq 2)$$

حل. قبلاً ثابت کردیم این دنباله صعودی و کراندار است پس همگراست.

فرض کنید $\lim_{n\to\infty} a_n = x$. در این صورت:

$$a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}} \longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + a_{n-1}}$$

$$\longrightarrow x = \sqrt{1+x} \longrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \end{cases}$$

و لذا $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

مثال. نشان دهید دنباله ی زیر همگراست.

$$a_n = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{(2n-1)}{2n}$$

حل:

$$a_n = \underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{2n-3}{2n-2}}_{a_{n-1}}\times\underbrace{\frac{2n-1}{2n}}_{<1} < a_{n-1}$$

پس a_n نزولی است.

چون a_n نزولی است، لذا a_1 کران بالای آن است. از طرفی همواره $a_n>0$.

پس $0 < a_n < a_1 = \frac{1}{2}$. یعنی a_n کراندار است.

در نتیجه دنباله‌ی a_n همگرا است.

دنباله‌ی هندسی:

تعریف: هر دنباله به صورت $a_n = ar^n$ را یک دنباله‌ی هندسی می‌گوییم.

به راحتی می‌توان دید این دنباله همگرا است اگر و تنها اگر $-1 < r \leq 1$.

تمرین:

۱) ثابت کنید $a_n = ar^n$ همگرا است اگر و تنها اگر $-1 < r \leq 1$.

۲) حدود زیر را بدست آورید:

الف) $\lim \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$

ب) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n}{2^n}$

ج) $\lim \frac{(\sqrt{n}-\sqrt[3]{n})^4}{n^2+1}$

د) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n}$

ه) $\lim \dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^4+n}-n}$

و) $\lim \sqrt[3]{n^2-n^3}+n$

ز) $\lim \dfrac{\ln n}{\sqrt[n]{n}}$

ح) $\lim \sqrt[n]{n^2+n}$

ط) $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+\cdots+\sqrt{n^2+n}}$

ی) $\lim n\sqrt[3]{1-e^{-\frac{1}{n^3}}}$

۳) همگرایی دنباله‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $a_n=\dfrac{1\times 3\times \cdots \times (2n-1)}{(2n)^n}$

ب) $a_n=\dfrac{2}{5+1}+\dfrac{2^2}{5^2+2^2}+\cdots+\dfrac{2^n}{5^n+2^n}$

ج) $a_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}$

د) $\begin{cases} a_1=2 \\ a_{n+1}=\sqrt{4a_n+5} \end{cases}$

ز) $\begin{cases} a_1=\sqrt{5} \\ a_n=\sqrt{5+a_{n-1}} \end{cases}$

۴) فرض کنید $a_{n+1}=\dfrac{4a_n+2}{a_n+3}$ و $a_1=1$. ابتدا با استقرا نشان دهید همواره $a_n\leq 2$ ، همگرایی a_n را ثابت کنید.
حد a_n را نیز به دست آورید.

سری های نامتناهی

تعریف. فرض کنید a_n یک دنباله باشد. $a_1+a_2+\cdots+a_n$ مجموع n جمله اول یک مجموع نامتناهی است که آن را سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ می نامیم. در واقع $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تعمیم مجموع به حالت نامتناهی است.

در سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، a_n را جمله ی عمومی سری و $S_n=a_1+\cdots+a_n$ را مجموع جزئی سری می نامیم.

مثال. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ یک سری است که در آن $a_n=(-1)^n$ جمله ی عمومی سری است و مجموع جزئی سری از رابطه ی زیر بدست می آید.

$$S_n=\begin{cases} 0 & \text{زوج } n \\ -1 & \text{فرد } n \end{cases}$$

تعریف. فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری و S_n مجموع جزئی آن باشد. توجه کنید که $\{S_n\}$ یک دنباله است. اکنون سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را همگرا گوئیم هرگاه دنباله S_n همگرا باشد. در غیر این صورت سری را واگرا می نامیم.

چنانچه $\lim_{n\to\infty} S_n=S$ ، آنگاه می نویسیم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=S$.

مثال. همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ را بررسی کنید.

حل. برای این منظور کافی است همگرایی دنباله ی مجموع جزئی سری را بررسی کنیم.

اما $S_1=S_3=S_5=\cdots=-1$ و $S_2=S_4=S_6=\cdots=0$. یعنی

$$S_n: -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, \cdots$$

به راحتی می‌توان S_n شامل یک زیردنباله‌ی همگرا به -1 و یک زیردنباله‌ی همگرا به صفر بوده و لذا واگراست. پس سری $\sum (-1)^n$ نیز واگرا است.

مثال. همگرایی سری $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ را بررسی کنید.

حل.

$$S_n = \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\left(1-\cancel{\tfrac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\tfrac{1}{2}}-\cancel{\tfrac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\tfrac{1}{3}}-\cancel{\tfrac{1}{4}}\right)+\cancel{\cdots}+\left(\cancel{\tfrac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}$$

به راحتی می‌توان دید $\lim S_n = 1$. بنابراین سری همگرا به 1 است.

به چنین مجموعه‌هایی، مجموعه‌های تلسکوپی می‌گوییم.

مثال. همگرایی سری $\sum \log\frac{n}{n+1}$ را بررسی کنید.

حل.

$$S_n=\log\frac{1}{2}+\log\frac{2}{3}+\cdots+\log\frac{n}{n+1}$$

$$=(\log 1-\cancel{\log 2})+(\cancel{\log 2}-\cancel{\log 3})+\cancel{\cdots}+(\cancel{\log n}-\log(n+1))$$

$$=\log 1-\log(n+1)=-\log(n+1)\longrightarrow -\infty$$

پس سری واگرا است.

مثال. همگرایی سری $\sum \frac{n}{(n+1)!}$ را بررسی کنید.

حل. ابتدا توجه کنید که

$$a_n = \frac{n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)-1}{(n+1)!} = \frac{n+1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

بنابراین

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$= \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right)$$

$$= \frac{1}{1!} - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \longrightarrow 1$$

پس سری همگرا به ۱ است. می‌نویسیم $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1$.

مثال. همگرایی سری $\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ را بررسی کنید.

حل.

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\,\frac{2}{n(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(n+2)-n}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{n+2}{n(n+1)(n+2)} - \frac{n}{n(n+1)(n+2)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

بنابراین:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\times 2} - \frac{1}{2\times 3}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\times 3} - \frac{1}{3\times 4}\right] + \cdots + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \longrightarrow \frac{1}{4}$$

پس سری همگرا به $\frac{1}{4}$ است.

مثال. همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ را بررسی کنید.

حل.

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 2 - \frac{1}{2^n} \longrightarrow 2$$

پس سری فوق به ۲ همگرا است.

سری هندسی

تعریف. هر سری به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ یک سری هندسی نامیده می‌شود.

قضیه. سری هندسی $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ همگرا است اگر و تنها اگر $-1 < q < 1$. در چنین حالتی حد سری برابر است با $\frac{a}{1-q}$.

توجه کنید:

$$S_n = a + aq + \cdots + aq^n = a(1 + q + \cdots + q^n)$$

$$= a\,\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

قضیه (شرط لازم همگرایی) اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد آنگاه $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

اثبات. مجموع جزئی سری را S_n می‌گیریم. از این‌که سری همگراست لذا S_n همگرا به S است، در این صورت:

$$S_n = \underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}_{S_{n-1}} + a_n = S_{n-1} + a_n$$

$$\longrightarrow a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$\longrightarrow \lim a_n = \lim S_n - S_{n-1} = S - S = 0$$

نتیجه. اگر در سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$، $\lim a_n$ موجود نباشد یا موجود باشد ولی $\lim a_n \neq 0$ در این صورت سری واگرا است.

مثال. همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$ را بررسی کنید.

حل. قرار می‌دهیم $a_n = \frac{n}{2n-1}$. در این صورت $\lim a_n = \frac{1}{2} \neq 0$ بنابراین سری واگراست.

مثال. همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ را بررسی کنید.

حل. قرار می‌دهیم $a_n = (-1)^n$. در این صورت $\lim_{n\to\infty} a_n$ موجود نیست پس سری واگراست.

مثال. همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}$ را بررسی کنید.

حل. $a_n = \sqrt[n]{n} \longrightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = 1 \neq 0$

پس سری واگراست.

مثال. همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$ را بررسی کنید.

حل. $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \longrightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = +\infty \neq 0$

پس سری واگراست.

قضیه. فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا به a و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا به b باشد. در این صورت برای هر t و s حقیقی، سری $\sum_{n=1}^{\infty} ta_n + sb_n$ همگرا به $ta+sb$ است.

مثال. همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+2}+5^{n-1}}{4^{2n+3}}$ را بررسی کنید.

حل.

$$\sum \frac{3^{n+2}+5^{n-1}}{4^{2n+3}} = \sum \frac{9(3^n) + \frac{1}{5}(5^n)}{4^3(16^n)}$$

$$= \sum \frac{9}{64}\left(\frac{3}{16}\right)^n + \frac{1}{320}\left(\frac{5}{16}\right)^n$$

اکنون با درنظر گرفتن $a_n = \left(\frac{3}{16}\right)^n$ ، $b_n = \left(\frac{5}{16}\right)^n$ ، $t = \frac{9}{64}$ و $s = \frac{1}{320}$

سری‌های هندسی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ به ترتیب به $\frac{1}{1-\frac{3}{16}} = \frac{16}{13}$ و $\frac{1}{1-\frac{5}{16}} = \frac{16}{11}$ همگرا هستند. بنابراین سری $\sum \frac{3^{n+2}+5^{n-1}}{4^{2n+3}}$

به $\frac{9}{64}\left(\frac{16}{13}\right)+\frac{1}{320}\left(\frac{16}{11}\right)=\frac{9}{52}+\frac{1}{220}$ همگرا خواهد بود.

آزمون‌های همگرایی.

① **آزمون انتگرال.** فرض کنید a_n دنباله‌ای مثبت و نزولی بوده و $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ تابع توسیع a_n باشد (یعنی برای هر n، $f(n)=a_n$) در این صورت همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ شبیه همگرایی $\int_1^{\infty}f(x)\,dx$ است.

مثال. همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ را بررسی کنید.

حل. $a_n=\frac{1}{n}$ دنباله‌ای مثبت و نزولی است. بنابراین همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ شبیه همگرایی $\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\,dx$ است. اما این انتگرال واگرا است و لذا $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ نیز واگرا است.

قضیه. فرض کنید $p>0$. در این صورت سری $\sum\frac{1}{n^p}$

الف. همگراست هرگاه $p>1$.

ب. واگراست هرگاه $0<p\leq 1$.

اثبات. همگرایی سری $\sum\frac{1}{n^p}$ شبیه همگرایی $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}\,dx$ است. اما این انتگرال برای $p>1$ همگرا و به ازای $0<p\leq 1$، واگرا است. پس سری $\sum\frac{1}{n^p}$ نیز به ازای $p>1$ همگرا و به ازای $0<p\leq 1$ واگراست.

مثال. همگرایی سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ را بررسی کنید.

حل. $a_n=\frac{1}{n\ln n}$ مثبت و نزولی است (برای $n\geq 2$) بنابراین همگرایی

این سری شبیه همگرایی $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$ است. اکنون این انتگرال را محاسبه می‌کنیم.

$$I = \int \frac{dx}{x \ln x} \quad \begin{cases} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x} dx \end{cases} \rightarrow I = \int \frac{du}{u} = \ln u = \ln(\ln x)$$

$$\rightarrow \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \to \infty} \int_2^{b} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \to \infty} \left[\ln(\ln x)\right]_2^b$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left[\ln(\ln b) - \ln(\ln 2)\right] = +\infty$$

پس $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$ و لذا $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ نیز واگرا است.

با استفاده از آزمون انتگرال می‌توان ثابت کرد:

قضیه. فرض کنید $p > 0$. در این صورت سری $\frac{1}{n(\ln n)^p}$

الف. همگرا است، هرگاه $p > 1$

ب. واگرا است، هرگاه $0 < p \leq 1$

همچنین می‌توان ثابت کرد:

قضیه. فرض کنید $p > 0$. در این صورت سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln(\ln n))^p}$

الف. همگرا است، هرگاه $p > 1$

ب. واگرا است، هرگاه $0 < p \leq 1$

مثال. سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^3}$ همگرا و سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ واگراست.

مثال. سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)(\ln\ln n)^2}$ همگرا و سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)\sqrt[3]{\ln(\ln n)^2}}$ واگراست.

(۲) آزمون مقایسه. فرض کنید $0 \le a_n \le b_n$. در این صورت

الف) اگر $\sum b_n$ همگرا باشد آنگاه $\sum a_n$ نیز همگراست.

ب) اگر $\sum a_n$ واگرا باشد آنگاه $\sum b_n$ نیز واگراست.

مثال. همگرایی سری $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ را بررسی کنید.

حل. $\frac{1}{n(n+1)} \ge \frac{1}{(n+1)^2} \ge 0$. حال از این که سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ همگراست

لذا بنا به آزمون مقایسه، سری $\sum\frac{1}{(n+1)^2}$ نیز همگراست.

مثال. همگرایی سری $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$ را بررسی کنید.

حل: $\frac{1}{\sqrt{n}} \ge \frac{1}{n} \ge 0$. حال چون سری $\sum\frac{1}{n}$ واگراست، بنابراین سری $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$ نیز واگراست.

توجه. همگرایی دو مثال بالا با استفاده از آزمون انتگرال نیز قابل بررسی است.

مثال. همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$ را بررسی کنید.

حل. می‌دانیم (از جایی به بعد)

$$\ln n < n^{\frac{1}{4}} \longrightarrow \frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}} < \frac{n^{\frac{1}{4}}}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$$

و چون سری $\sum \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$ همگراست، لذا بنا به آزمون مقایسه سری $\sum \frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$ نیز همگراست.

مثال. همگرایی سری $\sum \frac{1}{n(\ln \ln n)^5}$ را بررسی کنید.

حل. می‌دانیم (از جایی به بعد)،

$$(\ln n)^{\frac{1}{2}} > (\ln \ln n)^5 \longrightarrow n(\ln n)^{\frac{1}{2}} > n(\ln \ln n)^5$$

$$\longrightarrow \frac{1}{n(\ln n)^{\frac{1}{2}}} < \frac{1}{n(\ln \ln n)^5}$$

اکنون چون سری $\sum \frac{1}{n(\ln n)^{\frac{1}{2}}}$ واگراست لذا سری $\sum \frac{1}{n(\ln \ln n)^5}$ نیز واگراست.

③ آزمون مقایسه‌ی حدی

قضیه. فرض کنید $a_n, b_n > 0$ دو دنباله باشند و $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$. در این صورت اگر $0 < l < \infty$ آنگاه همگرایی $\sum a_n$ شبیه همگرایی $\sum b_n$ است.

توجه:

۱) اگر $l = 0$ آنگاه از جایی به بعد $a_n < b_n$ و لذا همگرایی $\sum b_n$ همگرایی $\sum a_n$ را ایجاب می‌کند

۲) اگر $l = \infty$ آنگاه از جایی به بعد $b_n < a_n$ و لذا واگرایی $\sum b_n$، واگرایی $\sum a_n$ را ایجاب می‌کند

مثال. همگرایی سری $\sum \frac{1}{n^2-5n+7}$ را بررسی کنید.

حل. قرار می‌دهیم $a_n=\frac{1}{n^2-5n+7}$ و $b_n=\frac{1}{n^2}$. در این صورت $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$

و لذا بنا به آزمون مقایسه‌ی حدی همگرایی سری $\sum \frac{1}{n^2-5n+7}$ مشابه همگرایی سری $\sum \frac{1}{n^2}$ است. یعنی همگراست.

تمرین. همگرایی سری $\sum \frac{n\sqrt{n}-1}{n^2\sqrt[3]{n}+1}$ را بررسی کنید.

مثال. همگرایی سری $\sum \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ را بررسی کنید.

حل. قرار میدهیم $a_n=\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ و $b_n=\frac{1}{n}$. در اینصورت

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=\frac{1}{1}=1.$$

حال چون سری $\sum\frac{1}{n}$ واگراست لذا بنا به آزمون مقایسه‌حدی، سری $\sum\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ نیز واگراست.

تذکر: ممکن است برای حل مثال بالا بدین صورت عمل کنیم که:

$$\sum \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}=\sum\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$$

و قرار دهیم $p=1+\frac{1}{n}>1$. پس سری همگراست.

این حل نادرست است. زیرا در استفاده از p-سری‌ها p باید مقداری ثابت باشد

مثال. همگرایی سری $\sum \sin(\frac{1}{n})$ را بررسی کنید.

حل. قرار می‌دهیم $a_n=\sin\frac{1}{n}$ و $b_n=\frac{1}{n}$. در این صورت $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$

اکنون از این که $\sum\frac{1}{n}$ واگراست لذا $\sum\sin(\frac{1}{n})$ نیز چنین است.

مثال. $\sum\cos(\frac{1}{n})$ واگراست. چون دنباله‌ی $\cos\frac{1}{n}$ به صفر همگرا نیست، لذا این سری شرط لازم همگرائی را ندارد.

مثال. همگرایی سری $\sum(1-\cos\frac{1}{n})$ را بررسی کنید.

حل. قرار می‌دهیم $a_n=1-\cos\frac{1}{n}$ و $b_n=\frac{1}{n^2}$. اکنون

$$\lim\frac{a_n}{b_n}=\lim\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$$

و لذا بنا به آزمون مقایسه‌ی حدی، سری $\sum(1-\cos\frac{1}{n})$ نیز شبیه سری $\sum\frac{1}{n^2}$ همگراست.

مسأله. همگرایی سری $\sum(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n})$ را بررسی کنید.

حل. قرار می‌دهیم $a_n=\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}$ و $b_n=\frac{1}{n^3}$. در این صورت

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$$

حال از این که سری $\sum\frac{1}{n^3}$ همگراست لذا سری $\sum\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}$ نیز چنین است.

۴) آزمون نسبت:

فرض کنید $\sum a_n$ یک سری باشد بطوری که برای هر n، $a_n \neq 0$. همچنین فرض کنید

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. در این صورت:

الف. اگر $l<1$ سری همگراست.

ب. اگر $l>1$ سری واگراست.

ج. اگر $l=1$ آزمون بی نتیجه است.

مثال: فرض کنید $a>0$. در این صورت می‌خواهیم همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ را بررسی کنیم.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \frac{a}{n+1}$$

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{a}{n+1} = 0 < 1 \longrightarrow$$ سری همگراست

مثال. همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$ را بررسی کنید.

حل.
$$a_n = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1} ((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \times \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$$

$$= \frac{2(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{n+1}{2n+1} \qquad \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} < 1$$

پس سری همگراست.

توجه: در سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$، داریم $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}=1$. همچنین در سری $\sum \frac{1}{n^2}$ داریم $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}=1$. در حالی که سری اول واگرا و سری دوم همگرا است.

تمرین. همگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید،

الف. $\sum \frac{(2n)!}{(n!)^3}$ ب. $\sum \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}$

⑤ آزمون ریشه. فرض کنید $\sum a_n$ یک سری با جملات نامنفی باشد و $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$

در این صورت:

الف. اگر $l<1$ سری همگرا است.

ب. اگر $l>1$ سری واگرا است.

ج. اگر $l=1$ آزمون بی‌نتیجه است.

مثال. همگرایی سری $\sum \frac{5^n}{n^n}$ را بررسی کنید.

حل. قرار می‌دهیم $a_n=\frac{5^n}{n^n}$. در این صورت:

$$\lim \sqrt[n]{a_n}=\lim \sqrt[n]{\frac{5^n}{n^n}}=\lim \frac{5}{n}=0<1$$

پس بنا به آزمون ریشه، سری همگرا است.

مثال. همگرایی سری $\sum \left(\frac{2n}{n+4}\right)^{\frac{n}{2}}$ را بررسی کنید.

حل. قرار می‌دهیم $a_n=\left(\frac{2n}{n+4}\right)^{\frac{n}{2}}$. در اینصورت سری واگرا است. چون:

$$\lim \sqrt[n]{a_n}=\lim \sqrt[n]{\left(\frac{2n}{n+4}\right)^{\frac{n}{2}}}=\lim \left(\frac{2n}{n+4}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}>1$$

۶) آزمون لایب نیتز

تعریف. اگر $a_n > 0$ آنگاه سری $\sum (-1)^n a_n$ یک سری متناوب نامیده میشود.

مثال. سری‌های $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ ، $\sum (-1)^n$ ، $\sum (-1)^n |\sin n|$ سری‌های متناوب اند.

قضیه (آزمون لایب نیتز) اگر a_n دنباله‌ای نزولی و همگرا به صفر باشد، آنگاه سری $\sum (-1)^n a_n$ همگرا است.

مثال. همگرایی سری $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ را بررسی کنید.

حل. قرار میدهیم $a_n = \frac{1}{n}$. در این صورت a_n نزولی و همگرا به صفر است و لذا بنا به آزمون لایب نیتز، سری $\sum (-1)^n a_n = \sum \frac{(-1)^n}{n}$ همگرا است.

مثال. همگرایی سری $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ را بررسی کنید.

حل. قرار میدهیم $a_n = \frac{1}{n^2}$. در این صورت a_n نزولی و همگرا به صفر است، لذا بنا به آزمون لایب نیتز سری $\sum (-1)^n a_n = \sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ همگرا است.

مثال. همگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)(-3)\cdots(-2n+1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}$$

حل.

$$\frac{(-1)(-3)\cdots(-2n+1)}{(2)(4)\cdots(2n)} = \frac{(-1)^n[1\times 3\times\cdots\times(2n-1)]}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}$$

اکنون قرار میدهیم $a_n = \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}$.

نشان دهید a_n نزولی همگرا به صفر است. پس بنا به آزمون لایب نیتز سری

$\sum (-1)^n a_n = \sum \frac{(-1)(-3)\cdots(-2n+1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}$ همگرا است.

همگرایی مطلق و مشروط

تعریف. سری $\sum a_n$ را همگرای مطلق گوییم هرگاه سری $\sum |a_n|$ همگرا باشد.

مثال. $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ همگرای مطلق است چون $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \sum \frac{1}{n^2}$ همگرا است.

اما سری $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ همگرای مطلق نیست چون سری $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum \frac{1}{n}$ واگرا است.

قضیه. اگر سری $\sum a_n$ همگرای مطلق باشد، آنگاه همگرا است.

توجه. قضیه‌ی بالا بیان می‌کند که امکان ندارد سری $\sum a_n$ واگرا و $\sum |a_n|$ همگرا باشد.

مسأله. نشان دهید سری $\sum \frac{2\sin n - 3\cos n}{n^2-n}$ همگرای مطلق است.

حل.

$$\left|\frac{2\sin n - 3\cos n}{n^2-n}\right| = \frac{|2\sin n - 3\cos n|}{n^2-n} \le \frac{|2\sin n| + |3\cos n|}{n^2-n} \le \frac{5}{n^2-n}$$

حال از این که سری $\sum \frac{5}{n^2-n}$ همگرا است لذا بنا به آزمون مقایسه، سری

$\sum \frac{|2\sin n - 3\cos n|}{n^2-n}$ نیز همگرا است.

توجه. برای اثبات همگرایی $\sum \frac{5}{n^2-n}$ می‌توان از سری $\sum \frac{1}{n^2}$ و آزمون

مقایسه‌ی حدی استفاده کرد.

سری‌های توانی

تعریف. هر سری به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ یک سری توانی نامیده می‌شود.

سری‌های توانی تعمیمی از چندجمله‌ای‌ها هستند.

مثال. $\sum_{n=0}^{\infty} 2n x^n$ ، $\sum \frac{x^n}{n!}$ مثال‌هایی از سری توانی هستند.

تعریف. در سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ، مجموعه مقادیری که به ازای آن سری همگرا است بازه‌ی همگرایی نامیده می‌شود.

مثال. بازه‌ی همگرایی $\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$ را به دست آورید.

حل. قرار می‌دهیم $b_n = n x^n$ و آزمون نسبت را به کار می‌بریم.

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \left|\frac{(n+1)x^{n+1}}{n x^n}\right| = \frac{n+1}{n}|x| \rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = |x|$$

اکنون بنا به آزمون نسبت:

الف) اگر $|x|<1$ در این صورت سری همگرا است.

ب) اگر $|x|>1$ در این صورت سری واگرا است.

و در نقاط مرزی $x=1$ و $x=-1$ ، همگرایی جداگانه بررسی می‌شوند.

$x=1$. در این صورت $\sum n x^n = \sum n =$ واگرا

$x=-1$ ، در این صورت $\sum n x^n = \sum (-1)^n n$ واگرا

در واقع این دو سری شرط لازم همگرایی را ندارند. پس:

بازه‌ی هم‌گرایی عبارت است از $(-1,1)$.

توجه کنید این بازه، بازه‌ای است به مرکز صفر و شعاع $R=1$. این شعاع به شعاع همگرایی نامیده می‌شود.

روش به دست آوردن شعاع همگرایی

در سری $\sum a_n x^n$ قرار می‌دهیم $l=\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$. در این صورت $R=\frac{1}{l}$ شعاع همگرایی خواهد بود.

مثال. شعاع و بازه‌ی همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ را به دست آورید.

حل. قرار می‌دهیم $a_n=\frac{1}{n}$. در این صورت:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 = l$$

$\longrightarrow$ شعاع همگرایی $R=\frac{1}{l}=1$

تا اینجا به ازای $-1<x<1$، سری همگراست. اکنون می‌خواهیم نقاط مرزی را بررسی کنیم.

$x=1$. در این صورت $\sum \frac{x^n}{n} = \sum \frac{1}{n}$ که واگراست.

$x=-1$. در این صورت $\sum \frac{x^n}{n} = \sum \frac{(-1)^n}{n}$ که همگراست. (بنا به آزمون لایب‌نیتز) پس بازه‌ی همگرایی این سری توانی عبارت است از $[-1,1)$.

مثال. شعاع و بازه‌ی همگرایی $\sum \frac{x^n}{n!}$ را بدست آورید.

حل. $a_n = \frac{1}{n!} \longrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{1}{n+1} = 0 = l \longrightarrow R = \frac{1}{l} = +\infty$$

پس این سری برای هر مقدار x همگراست. بازه‌ی همگرایی $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ است.

مثال. شعاع و بازه‌ی همگرایی $\sum n^n x^n$ را بدست آورید.

حل. $a_n = n^n \longrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = (\frac{n+1}{n})^n \times (n+1)$

$$= (1+\frac{1}{n})^n (n+1)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n (n+1) = +\infty = l$$

$$R = \frac{1}{l} = \frac{1}{\infty} = 0$$

بنابراین این سری تنها در نقطه $x=0$ همگراست و به ازای بقیه مقادیر x واگراست.

مثال. شعاع و بازه‌ی همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} x^n$ را بدست آورید.

حل. قرار می‌دهیم $a_n = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$، دراین صورت

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1} ((n+1)!)^2 (2n)!}{2^n (n!)^2 (2n+2)!} = \frac{n+1}{2n+1}$$

$$l=\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} \longrightarrow R = \frac{1}{l} = 2$$

پس به ازای $-2<x<2$ ، سری همگرا است.

بررسی همگرایی در نقاط مرزی

$x=2$. در این صورت $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} x^n$.

قرار می‌دهیم $b_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}$. در این صورت

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{4^{n+1} (n+1)!^2 (2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+2)!} = \frac{2n+2}{2n+1} > 1$$

پس دنباله‌ی $b_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}$ صعودی است و لذا برای هر n ، $b_n \geq b_0 = 1$

پس $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$. یعنی سری شرط لازم همگرایی را ندارد و در نتیجه واگرا است.

$x=-2$. در این صورت $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n (n!)^2}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} x^n$.

در این سری ها بنا به آنچه در حالت قبل بیان شد ، همواره برای هر n ،

$b_n \geq +1$ یا $b_n \leq -1$. پس $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ و این سری

نیز شرط لازم همگرایی را ندارد و لذا واگرا است.

پس بازه‌ی همگرایی این سری عبارت است از $(-2,2)$.

حاصلضرب کوشی دو سری

به عنوان تعمیمی از ضرب چندجمله‌ای‌ها می‌خواهیم ضرب زیر را انجام دهیم.

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots)$$

$$=\underbrace{(a_0b_0)}_{c_0}+\underbrace{(a_0b_1+a_1b_0)}_{c_1}x+\underbrace{(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)}_{c_2}x^2+\cdots$$

در واقع
$$c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$$

تعریف. اگر $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ و $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ دو سری باشند آنگاه حاصلضرب کوشی دو سری به صورت $\sum_{n=0}^{\infty}c_n$ تعریف می‌شود که در آن برای هر n، $c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$.

قضیه. اگر $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ و $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ همگرای مطلق باشند آنگاه حاصلضرب کوشی آنها (یعنی $\sum_{n=0}^{\infty}c_n$) نیز همگراست. به علاوه اگر $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=a$ و $\sum_{n=0}^{\infty}b_n=b$، آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty}c_n=ab$.

قضیه. فرض کنید $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. در این صورت برای هر x در بازهٔ همگرایی

الف.
$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

$$f''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

ب. $\int f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + C$

مثال. می‌دانیم در بازه‌ی $(-1,1)$،

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

بنابراین:

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1}$$

همچنین:

$$\int \frac{1}{1-x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\longrightarrow -\ln|1-x| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

و با جایگذاری $x=0$ در دو طرف خواهیم داشت $C=0$. یعنی

$$-\ln|1-x| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

سری تیلر و مک‌لورن یک تابع

قضیه. فرض کنید تابع f در بازه‌ای شامل نقطه a، بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر

باشد. در این صورت

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

تعریف. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ سری تیلر تابع f حول نقطه‌ی a نامیده می‌شود.

هم‌چنین سری تیلر تابع $f(x)$ حول نقطه‌ی صفر، سری مک‌لورن $f(x)$ نامیده می‌شود.

مثال. سری مک‌لورن تابع $f(x)=e^x$ را به دست آورید.

$$f(x)=e^x \longrightarrow f(0)=1$$

$$f'(x)=e^x \longrightarrow f'(0)=1$$

$$f''(x)=e^x \longrightarrow f''(0)=1$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$\rightarrow e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

به عنوان مثال:

$$e^1=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\approx 2{,}71$$

$$\frac{1}{e}=e^{-1}=1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots$$

محاسبه‌ی سری مک‌لورن چند تابع (بصورت متوالی)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad (1)$$

$$\xrightarrow{x \to -x} \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{x \to x^2} \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \qquad (3)$$

$$\xrightarrow{\int} \tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + c = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + c$$

و با قرار دادن $x=0$ در رابطه $c=0$ بدست می‌آید. بنابراین

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \qquad (4)$$

$$(1) \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} \qquad (5)$$

$$\xrightarrow{\times x} \frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$$

مثال. بسط مک لورن $\cosh x$ را بدست آورید.

حل.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

$$e^x + e^{-x} = 2 + \frac{2x^2}{2!} + \frac{2x^4}{4!} + \cdots$$

$$\longrightarrow \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

به همین صورت می‌توان بسط مک لورن تابع $\sinh x$ را به دست آورد.

مثال. بسط تیلور تابع $f(x) = \ln x$ را حول نقطه ۱ بدست آورید.

حل.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \longrightarrow \frac{1}{1-(1-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n$$

$$\longrightarrow \frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$$

$$\xrightarrow{\int} \ln x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (x-1)^{n+1} + c$$

و با جایگذاری $x=1$ در طرفین ، $c=0$ به دست می‌آید. پس

$$\ln x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (x-1)^{n+1}$$