۸۶/۷/۸

جلسهٔ اول

سرفصل های آموزشی :

۱- تجزیه و تحلیل بردار

۲- شدت میدان الکتریکی
- قانون کولن
  - بار نقطه ای
  - بار خطی
  - بار سطحی
- قانون گوس
  - شار الکتریکی
  - نتیجه گیری قانون کولن
  - دیورژانس (واگرایی)

۳- انرژی در میدان الکتریکی - اختلاف پتانسیل الکتریکی

رابطهٔ میدان با پتانسیل $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ (گرادیان)

۴- رسانا
- جریان الکتریکی
- شرایط مرزی
- مقاومت
  - طولی
  - عرضی

عایق
- ظرفیت
- شرایط مرزی

تئوری تصویر

۵- معادلات لاپلاس و پواسون.

$\nabla^2 V = 0$ لاپلاس

$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$ پواسون

$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \nabla^2$ (دل ; لاپلاسین)

۶- شدت میدان مغناطیسی
- قانون بیوساوار
- قانون آمپر
  - کرل (همگرایی)
  - دستور استوکس
- پتانسیل های مغناطیسی اسکالر و برداری

۷-
- نیرو و گشتاور در میدان مغناطیسی
- مدار مغناطیسی
- القا مغناطیسی
- انرژی در میدان مغناطیسی

۸ - معادلات ماکسول ← حالت استاتیک
← حالت دینامیک

نکات اولیه :

- انرژی در داخل میدان ذخیره می‌شود. بنابراین ابتدا باید میدان ایجاد شود تا سپس انرژی به وجود آید.

همگرایی : خطوطی که به مرور به یکدیگر نزدیک می‌شوند.

واگرایی : خطوطی که به مرور از یکدیگر فاصله می‌گیرند.

گرادیان مفهوم بردار عمود را دارد (توسط آن می‌توان بردار عمود را به دست آورد).

منابع و مآخذ :

- الکترومغناطیس دانشگاهی (مهندسی) - مترجم دیانی - Hayt
- الکترومغناطیس، میدان و موج - مترجم : دکتر جبه‌دار و دکتر قوامی - cheng
- الکترومغناطیس - مسائل حل شده همراه با خلاصه درس - Edminister
← دکتر ابریشمیان و دکتر کرانپایه

انتگرال های کاربردی :

* ۱) $$\int \frac{dx}{x^2+y^2} = \frac{1}{y} \operatorname{Arc\,tan} \frac{x}{y} \quad \leftarrow \quad x = y\tan\theta$$

۲) $$\int \frac{x\,dx}{x^2+y^2} = \ln\sqrt{x^2+y^2} \quad \leftarrow \quad x^2+y^2 = u^2$$

۳) $$\int \frac{x^2\,dx}{x^2+y^2} = x - y \operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{x}{y}\right) \quad \leftarrow \quad x = y\tan\theta$$

* ۴) $$\int \frac{dx}{(x^2+y^2)^{1/2}} = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}\right| = \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

۵) $$\int \frac{x\,dx}{(x^2+y^2)^{1/2}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

۶) بی کاربرد

* ۷) $$\int \frac{dx}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{x}{y^2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\sec t = \frac{1}{\cos} \qquad \operatorname{cosec} = \frac{1}{\sin}$$

۸) $$\int \frac{x\,dx}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

۹) $$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

* تغییر متغیرهای به کار رفته در بقیه حالات نیز همانند ۱، ۲ و ۳ است.

اثبات برای نمونه :

$$\begin{cases} x = y\tan\theta \\ x = y\sec^2\theta\, d\theta \\ \tan\theta = \frac{x}{y} \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \int \frac{y\sec^2\theta\, d\theta}{(y^2\tan^2\theta + y^2)^{3/2}}$$

$$y^2(\tan^2\theta + 1)$$

$$y^2\sec^2\theta$$

ادامه

$$= \int \frac{y\sec^2\theta\, d\theta}{y^3\sec^3\theta} = \frac{1}{y^2}\int \frac{d\theta}{\sec\theta} = \frac{1}{y^2}\int \cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{y^2}\left(\sin\theta\right) = \frac{1}{y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$\boxed{\sin^2\theta = \frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{x^2/y^2}{1+\frac{x^2}{y^2}} = \frac{x^2}{x^2+y^2}}$$

* تجزیه و تحلیل بردارها:

$$A(x_1, y_1, z_1) \longrightarrow B(x_2, y_2, z_2)$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

هر بردار = اندازه‌ی بردار × جهت بردار

$$\overrightarrow{AB} = \underbrace{\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}}_{\text{اندازه‌ی بردار}} \times \underbrace{\left\{\frac{(x_2-x_1)\vec{i} + (y_2-y_1)\vec{j} + (z_2-z_1)\vec{k}}{\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}}\right\}}_{\text{جهت}}$$

تغییر نام برای بردارهای یکه

$$\vec{i} = \vec{a}_x$$

$$\vec{j} = \vec{a}_y \quad \Rightarrow \quad \vec{A} = \underbrace{A}_{\text{اندازه}}\ \underbrace{\vec{a}_A}_{\text{جهت}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_A = \frac{\vec{A}}{A}}$$

$$\vec{k} = \vec{a}_z$$

شرط $\rightarrow \left|\vec{a}_A\right| = 1$ ← اندازه‌ی بردار یکه همواره ۱ است

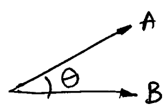
۵

روش نمایش بردار $\Rightarrow \vec{A} = A_x \vec{a}_x + A_y \vec{a}_y + A_z \vec{a}_z$

$$\vec{B} = B_x \vec{a}_x + B_y \vec{a}_y + \underbrace{B_z \vec{a}_z}_{\text{sub Vector}}$$

بردار $\rightarrow$ Vector

ضرب داخلی (نقطه ای یا اسکالر):
dot Product



$$\vec{A} \cdot \vec{B} \triangleq AB\cos\theta$$

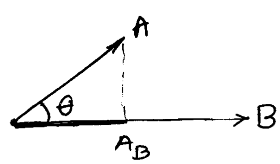
* در ضرب داخلی ترتیب مهم نیست.

* نتیجه:

$$\begin{cases} \vec{a}_x \cdot \vec{a}_x = 1 \\ \vec{a}_y \cdot \vec{a}_y = 1 \\ \vec{a}_z \cdot \vec{a}_z = 1 \end{cases} , \quad \begin{cases} \vec{a}_x \cdot \vec{a}_y = 0 \\ \vec{a}_y \cdot \vec{a}_z = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

* توسط ضرب داخلی می‌توان سایه یک بردار را بر روی بردار دیگر به دست آورد (پیدا کردن نقاط مشترک دو بردار).



$$\cos\theta = \frac{\overset{\text{مجاور}}{A_B}}{\underset{\text{وتر}}{A}} \Rightarrow A_B = A\cos\theta$$

$$\vec{A} \cdot \vec{a}_B = A\cos\theta$$

$$* \boxed{A_B = \vec{A} \cdot \vec{a}_B}$$

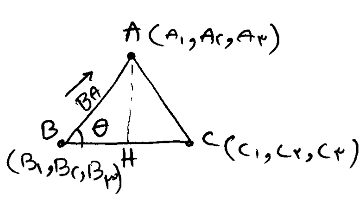
A_B ← تصویر عددی A روی B

$\vec{a}_B$ ← جهت بردار B

$$\Rightarrow \vec{A}_B = (\vec{A} \cdot \vec{a}_B)\, \vec{a}_B$$

← تصویر برداری A روی B

مثال: محاسبه مساحت مثلث به روش ضرب داخلی



$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(AH)(BC)$$

$$BC = \sqrt{(C_1 - B_1)^2 + (C_2 - B_2)^2 + (C_3 - B_3)^2}$$

۲

ادامه

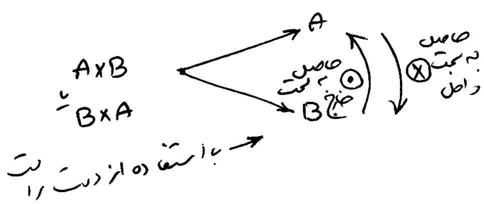
$$\vec{BH} = \left(\vec{BA}\cdot\vec{a}_{BC}\right)\vec{a}_{BC}$$

$$\vec{HA} = \vec{BA} - \vec{BH}$$

ضرب خارجی (برداری) :

$$\vec{A}\times\vec{B} \triangleq \underbrace{AB\sin\theta}_{\text{اندازه}}\ \underbrace{\vec{a}_n}_{\text{جهت}}$$

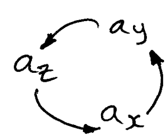
$A\times B \neq B\times A$



نتیجه :

$$\begin{cases} a_x \times a_x = 0 \\ a_y \times a_y = 0 \\ a_z \times a_z = 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} a_x \times a_y = a_z \\ \vdots \end{cases}$$

- روش محاسبه جهت :



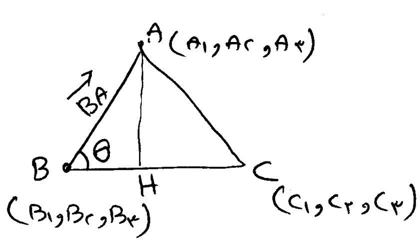
در جهت موافق ← +

در جهت مخالف ← -

$$A\times B = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \vec{a}_x\left(A_yB_z - A_zB_y\right) - \vec{a}_y\left(A_xB_z - A_zB_x\right) + \vec{a}_z\left(A_xB_y - A_yB_x\right)$$

* حاصل در ضرب خارجی بر هر دو بردار A و B عمود است . (normal = عمود)

مثال :



$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\,\vec{BA}\times\vec{BC}$$

⑦

$$\vec{A} = A_x \vec{a}_x + A_y \vec{a}_y + A_z \vec{a}_z$$

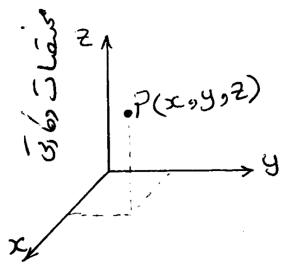
$$\vec{B} = B_x \vec{a}_x + \cancel{B_y \vec{a}_y + B_z \vec{a}_z} \Longrightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x$$

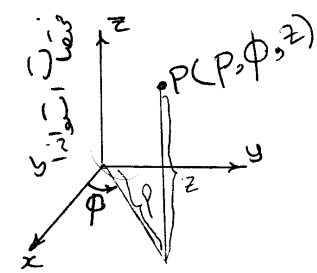
صفر = فرض

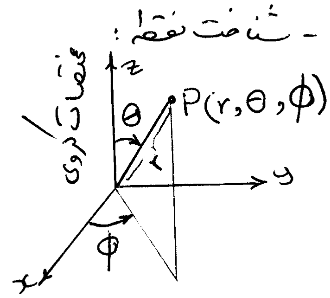
* در ضرب داخلی دو بردار، ابتدا بردار کوچکتر را پیدا کرده (تعداد جملات کمتر) و سپس با توجه به آن می‌توان جملات اضافی بردار بزرگتر را حذف کرد.

سیستم‌های مختصات (متداول):
- دکارتی
- استوانه‌ای
- کروی

- شناخت نقطه:







$-\infty < x, y, z < \infty$

$0 \leq \rho < \infty$

$0 \leq \phi \leq 2\pi$

$-\infty < z < +\infty$

ρ : فاصله از مبدا (بر محور z عمود است)

ϕ : زاویه با محور xها

$0 \leq r < \infty$

$0 \leq \theta \leq \pi$

$0 \leq \phi \leq 2\pi$

r : فاصله مبدا تا نقطه (مبدا را به نقطه وصل می‌کند)

θ : زاویه با محور zها

ϕ : زاویه با محور xها

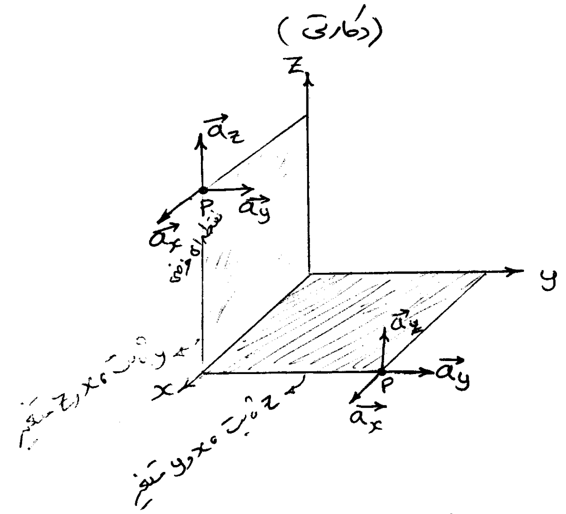
توجه:

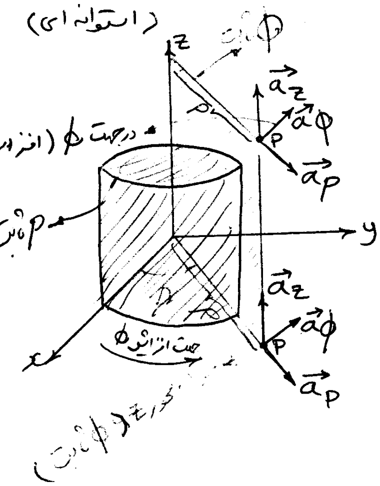
در حالت دکارتی سه سطح x و y و z، دو به دو برهم عمودند.

در حالت استوانه‌ای سه سطح ρ، ϕ و z برهم دو به دو عمودند.

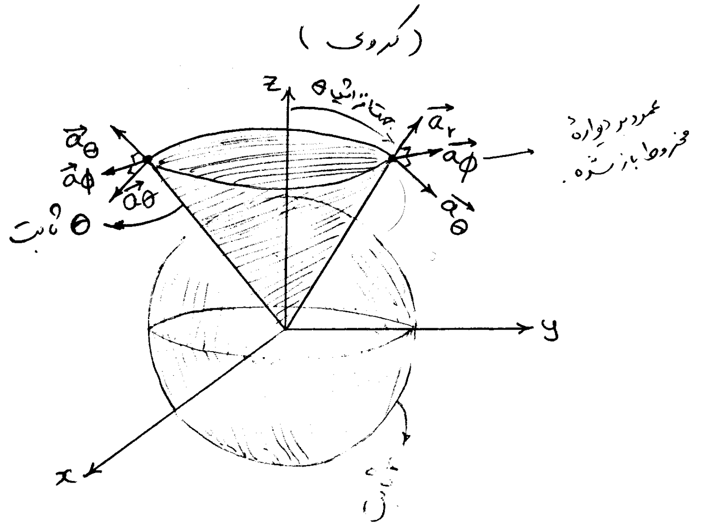
در حالت کروی نیز سه سطح ϕ، θ، r دو به دو برهم عمودند.

پارامترهای ثابت :





* در شکل‌های بالا بردارهای واحد (یکه) نیز بررسی شده اند



* بردارهای یکه :

در شکل‌ها بردارهای یکه مربوط به هر نقطه نشان داده شده است. بردارهای یکه مستقل از موقعیت نقطه هستند. جهت این بردارها همواره در جهت افزایش کمیت مورد نظر است. به طور مثال $\vec{a}_z$ ، همواره در جهت افزایش محور z است (مثبت محور z).

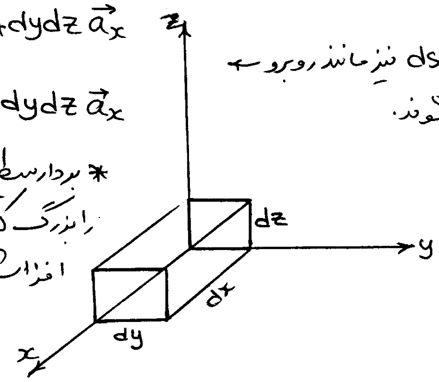
- شناخت دیفرانسیل های حجم، سطح و طول :

الف) دکارتی

$$dv = dx\,dy\,dz$$

$$ds_x = dy\,dx \Rightarrow \begin{cases} \vec{ds}_x^{+} = +dy\,dz\,\vec{a}_x \\ \vec{ds}_x^{-} = -dy\,dz\,\vec{a}_x \end{cases}$$

ds_y و ds_z نیز مانند روبرو ← محاسبه می شوند.



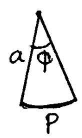
* بردار سطح همیشه به جهتی اشاره می کند که حجم را بزرگ کند. بنابراین نشانه بردار سطح، افزایش سطح است.

$$\vec{dl} = dx\,\vec{a}_x + dy\,\vec{a}_y + dz\,\vec{a}_z$$

* $\vec{dl}$ همواره به صورت ۳ جمله ای است.

dl (بدون علامت بردار) همواره تک جمله ای است
$$\left.\begin{matrix} dx \\ \text{یا} \\ dy \\ \text{یا} \\ dz \end{matrix}\right\}$$

یادآوری :

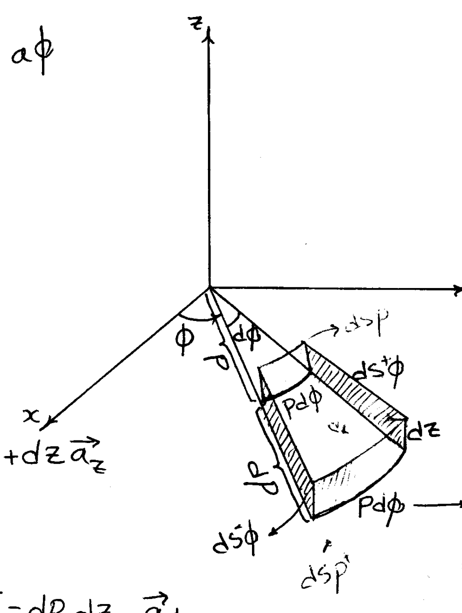


$$\underset{P}{\text{طول هر کمان}} = \text{شعاع} \times \text{زاویه} = a\phi$$

ب) استوانه ای

$$dr = \underbrace{\rho d\phi}\, d\rho\, dz$$

دیفرانسیل مربوط به ϕ همواره $\rho d\phi$ است (البته تقریباً)



$$\rho d\phi \longrightarrow (\rho + d\rho)d\phi = \rho d\phi + \underbrace{\cancel{d\rho\, d\phi}}_{\simeq 0}$$

همواره ۳ جمله ای

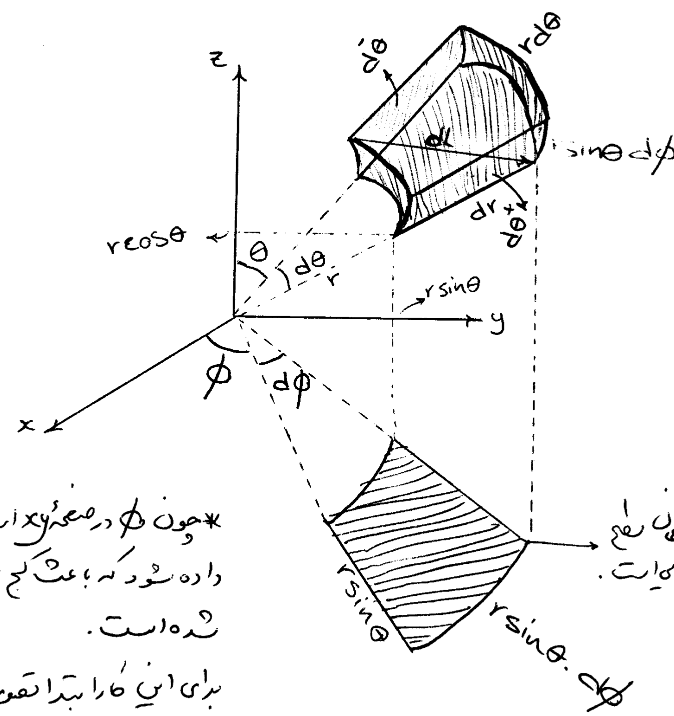
$$\vec{dl} = d\rho\,\vec{a}_\rho + \rho\, d\phi\,\vec{a}_\phi + dz\,\vec{a}_z$$

$$dl = \begin{cases} d\rho \\ \text{یا} \\ \rho d\phi \\ \text{یا} \\ dz \end{cases}$$

$$ds\phi = d\rho . dz \qquad \begin{cases} \vec{ds}\phi^{+} = d\rho . dz . \vec{a}_\phi \\ \vec{ds}\phi^{-} = -\,d\rho dz . \vec{a}_\phi \end{cases}$$

$ds\rho$, dsz نیز همین ترتیب هستند. ←

ج) کروی



این سطح همان سطح قرمز بالایی است.

* چون ϕ در صفحه xy است، باید ابتدا به بالا انتقال داده شود که باعث کج شدن و تا حدی دوران شکل شده است.

برای این کار ابتدا تصویر در صفحه xy به دست آورده شده و سپس به بالا انتقال داده شده.

$$dv = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi \longrightarrow (r\,d\theta \cdot r \cdot \sin\theta \cdot d\phi \cdot dr)$$

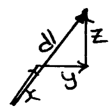
$$ds_\theta = r\sin\theta\, dr\, d\phi \rightarrow \begin{cases} \vec{ds}_{\theta^-} = -r\sin\theta\, dr\, d\phi\, \vec{a}_\theta \\ \vec{ds}_{\theta^+} = +r\sin\theta\, dr\, d\phi\, \vec{a}_\theta \end{cases}$$

$$ds_r = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi \rightarrow \begin{cases} \vec{ds}_{r^+} = +r^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi\, \vec{a}_r \\ \vec{ds}_{r^-} = -r^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi\, \vec{a}_r \end{cases}$$

$$\vec{dl} = dr\,\vec{a}_r + \underbrace{r\,d\theta}_{d\theta}\,\vec{a}_\theta + \underbrace{r\sin\theta\, d\phi}_{d\phi}\,\vec{a}_\phi$$

$$dl = \begin{cases} dr \\ r\,d\theta \\ r\sin\theta\, d\phi \end{cases}$$

نکته ای در مورد dL :



در شکل مقابل برای رسیدن از نقطه‌ی اول به نقطه‌ی دوم، به ترتیب ۳ بردار در جهت های x، y و z عمل شده است. اما نتیجه یک بردار مستقیم است که از ابتدا به انتها می‌رسد و dL نامیده شده است. به عبارت دیگر، بردار dL که دو نقطه را به هم وصل کرده است از ۳ بردار در جهت های x، y و z تشکیل شده است. پس:

$$\vec{dL} = dx\,\vec{a}_x + dy\,\vec{a}_y + dz\,\vec{a}_z$$

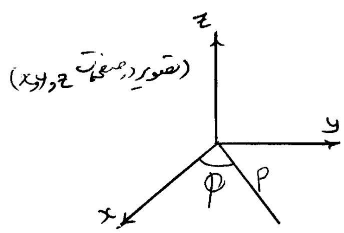
---

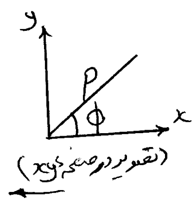
* تبدیل سیستم‌های مختصات:

کروی ⇄ دکارتی ⇄ استوانه ای

تبدیل:
- تبدیل نقاط
- تبدیل بردارها

الف) استوانه ای به دکارتی و برعکس:





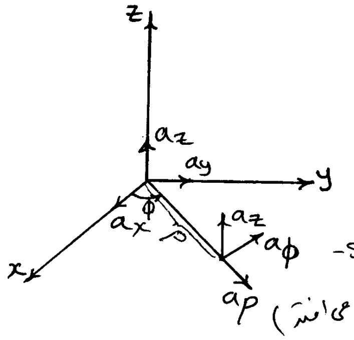
تبدیل نقطه استوانه ای به دکارتی:
$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi \\ z = z \end{cases}$$

تبدیل نقاط دکارتی به استوانه ای:
$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi = \tan^{-1}\dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

$$\left(1, \frac{\pi}{4}, 2\right) \longrightarrow \left(\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}, 2\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right)$$

تبدیل بردارها:

$$\vec{A} = A_\rho\,\vec{a}_\rho + A_\phi\,\vec{a}_\phi + A_z\,\vec{a}_z$$
$$\vec{A} = A_x\,\vec{a}_x + A_y\,\vec{a}_y + A_z\,\vec{a}_z$$



$$A_x = \vec{A}\cdot\vec{a}_x = \left(A_\rho \vec{a}_\rho + A_\phi \vec{a}_\phi + A_z \vec{a}_z\right)\cdot\vec{a}_x$$

$$= A_\rho \underbrace{\vec{a}_\rho\cdot\vec{a}_x}_{\cos\phi} + A_\phi \underbrace{\vec{a}_\phi\cdot\vec{a}_x}_{\cos(90+\phi)} + A_z \underbrace{\vec{a}_z\cdot\vec{a}_x}_{0=\cos 90^\circ}$$

زاویهٔ بین x و z

$-\sin\phi = \cos(90+\phi) =$ زاویهٔ بین ϕ و x (۹۰ درجه بچرخد روی x می‌افتد)

$$A_y = A_\rho \underbrace{\vec{a}_\rho\cdot\vec{a}_y}_{\sin\phi} + A_\phi \underbrace{\vec{a}_\phi\cdot\vec{a}_y}_{\sin(90+\phi) = \cos\phi} + A_z \underbrace{\vec{a}_z\cdot\vec{a}_y}_{0}$$

مشابه A_x اما با این تفاوت که در محور yها $\sin$ است.

$A_z = A_z$ ← A_z در دکارتی و استوانه‌ای برابر است

تبدیل برداری استوانه‌ای به دکارتی

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}$$

(دوران به اندازهٔ $-\phi$)

بردار دکارتی ← بردار استوانه‌ای

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

(دوران به اندازهٔ ϕ)

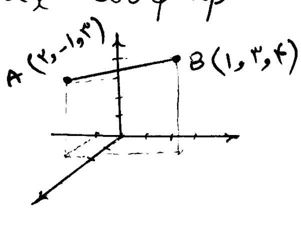
بردار استوانه‌ای ← بردار دکارتی

* روابط بالا برای بردارهای یکه نیز برقرار است.

$$\vec{a}_\rho = \cos\phi\,\vec{a}_x + \sin\phi\,\vec{a}_y$$

$$\vec{a}_x = \cos\phi\,\vec{a}_\rho - \sin\phi\,\vec{a}_\phi$$

مثال:



$$\vec{AB} = \underset{AB_x}{(-1)}\,\vec{a}_x + \underset{AB_y}{(4)}\,\vec{a}_y + \underset{AB_z}{(1)}\,\vec{a}_z$$

$$\begin{bmatrix} AB\rho \\ AB\phi \\ ABz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & ۰ \\ -\sin\phi & \cos\phi & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ \\ ۴ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

* در پیدا کردن ϕ تنها نقطهٔ ابتدای بردار (A) کافی است.

$$AB\rho = -\cos\phi + ۴\sin\phi$$

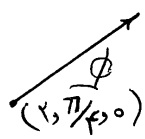
$$AB\phi = \sin\phi + ۴\cos\phi$$

$$ABz = ۱$$

$$\phi = \mathrm{Arc}\tan\left(\frac{-۱}{۲}\right)$$

$$\overrightarrow{AB} = AB\rho\,\vec{a}_\rho + AB\phi\,\vec{a}_\phi + ABz\,\vec{a}_z$$

مثال مهم: بردار زیر داده شده است. تبدیل زیر را انجام دهید:

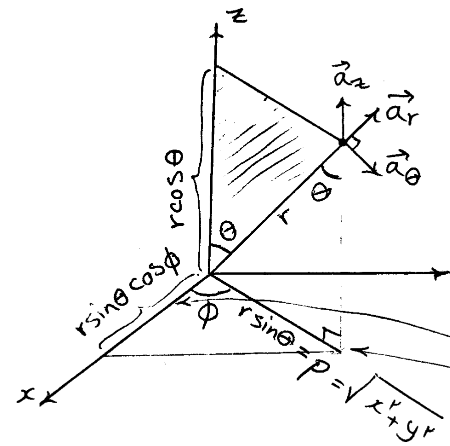


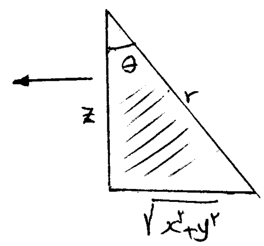
$$\overset{\text{استوانه‌ای}}{\vec{A}} = ۲\vec{a}_\rho + ۳\vec{a}_\phi + \vec{a}_z \longrightarrow \overset{\text{دکارتی}}{\vec{A}} = ?$$

نکته: در تبدیل بردارها به یکدیگر، ϕ نقطهٔ ابتدایی باشد (مختص دوم)، یعنی حتماً باید نقطهٔ ابتدای بردار داده شده باشد.

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۲}}{۲} & -\frac{\sqrt{۲}}{۲} & ۰ \\ \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \frac{۵\sqrt{۲}}{۲} \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underset{\text{دکارتی}}{\vec{A}} = \overset{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۰٫۷}\,\vec{a}_x + ۳٫۵\,\vec{a}_y + \vec{a}_z$$





تبدیل نقطه از دکارتی به کروی

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \cos^{-1}\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \phi = \tan^{-1}\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

تبدیل نقطه از کروی به دکارتی

$$\begin{cases} x = r\overbrace{\sin\theta}\,\overbrace{\cos\phi} \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

ابتدا بر روی صفحه xy تصویر می شود (به صفحه افق می آید) وسپس بر روی محورها

* تبدیل بردارها:

$$\vec{A}_{\text{کروی}} = A_r\vec{a}_r + A_\theta\vec{a}_\theta + A_\phi\vec{a}_\phi$$

$$\vec{A}_{\text{دکارتی}} = A_x\vec{a}_x + A_y\vec{a}_y + A_z\vec{a}_z$$

تصویر A بر روی x ها

$$A_x = \vec{A}_{\text{کروی}}\cdot\vec{a}_x = A_r\underbrace{\vec{a}_r\cdot\vec{a}_x}_{\sin\theta\cos\phi} + A_\theta\underbrace{\vec{a}_\theta\cdot\vec{a}_x}_{\sin(90+\theta)\cos\phi} + A_\phi\underbrace{\vec{a}_\phi\cdot\vec{a}_x}_{\cos(90+\phi)}$$

a_θ ابتدا باید ۹۰ درجه بچرخد تا منطبق با θ شود وسپس در افق تصویر شود.

تصویر A بر روی محور y ها

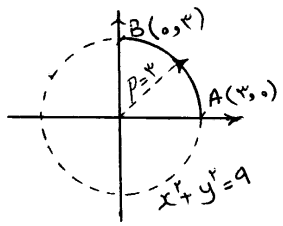
$$A_y = \vec{A}\cdot\vec{a}_y = A_r\underbrace{\vec{a}_r\cdot\vec{a}_y}_{\sin\theta\sin\phi} + A_\theta\underbrace{\vec{a}_\theta\cdot\vec{a}_y}_{\sin(90+\theta)\sin\phi} + A_\phi\underbrace{\vec{a}_\phi\cdot\vec{a}_y}_{\sin(90+\phi)}$$

$$A_z = \vec{A}\cdot\vec{a}_z = A_r\underbrace{\vec{a}_r\cdot\vec{a}_z}_{\cos\theta} + A_\theta\underbrace{\vec{a}_\theta\cdot\vec{a}_z}_{\cos(90+\theta)} + A_\phi\underbrace{\vec{a}_\phi\cdot\vec{a}_z}_{0}$$

ماتریس تبدیل کروی به دکارتی

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix}$$

* اگر در این سطر با ستون عوض شود و $\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix}$ با $\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$ عوض شود، آنگاه تبدیل دکارتی به کروی است (ترانهاده شود).



مثال: $\vec{F} = xy\,\vec{a}_x - ۲x\,\vec{a}_y$

مطلوبست: $\int_A^B \vec{F}\cdot\vec{dl}$ در امتداد ربع دایره نشان داده شده.

نکته: F در دکارتی داده شده است، اما مسیر در شکل (الف) استوانه‌ای است.

روش حل ①: حل دکارتی

$$\vec{dl} = dx\,\vec{a}_x + dy\,\vec{a}_y + \cancel{dz\,\vec{a}_z}$$

چون در ضرب نقطه‌ای بردار واحد مدنظر است و چون F مولفه z ندارد، پس $dz\,\vec{a}_z$ حذف می‌شود.

$$\vec{F}\cdot\vec{dl} = xy\,dx - ۲x\,dy$$

$$W_{AB} = \int_{x_A=۳}^{x_B=۰} x\underbrace{y}_{\sqrt{۹-x^۲}}\,dx - ۲\int_{y_A=۰}^{y_B=۳} \underbrace{x}_{\sqrt{۹-y^۲}}\,dy$$

حل ②: حل استوانه‌ای

$$\begin{bmatrix} F_\rho \\ F_\phi \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho^۲\sin\phi\cos\phi \\ -۲\rho\cos\phi \\ 0 \end{bmatrix}$$

تنها F_ϕ محاسبه می‌شود چون تنها ϕ وجود دارد (خاصیت ضرب داخلی)

چون در صفحه z نیست، پس $dz=0$
شعاع ثابت است، پس تغییرات ρ ($d\rho$) هم صفر است.
$\Rightarrow dl = \rho\, d\phi\, \vec{a}_\phi$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot\vec{dl} = \int_0^{\frac{\pi}{۲}} \left(-\rho^۲\sin^۲\phi\cos\phi - ۲\rho\cos^۲\phi\right)\underbrace{\rho}_{۳}\, d\phi =$$

* در بحث زاویه:

$\vec{a}_r \cdot \vec{a}_x$: a_r اول باید $\sin\theta$ شود تا به افق (y) برسد و بعد $\cos\phi$ تا به x برسد.

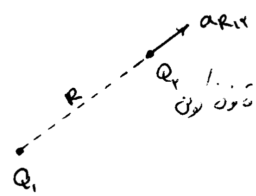
$\vec{a}_\theta \cdot \vec{a}_x$: θ باید ۹۰ درجه بچرخد تا به r برسد (r در واقع خط افق است) وبعد $\cos\phi$ تا به x برسد.

$a_\phi \cdot \vec{a}_x$: فقط کافی است θ $(\phi+90)$ بچرخد یعنی $(\phi+90)$ $\cos(90+\phi)$

که در محور x و y سنجیده می‌شود.

- فصل دوم:

شدت میدان الکتریکی در اطراف بارهای نقطه‌ای، خطی، سطحی و حجمی:



قانون کولن $F_{12} = \dfrac{K Q_1 Q_2}{R^2}$

$\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi} \times 10^{-9}$

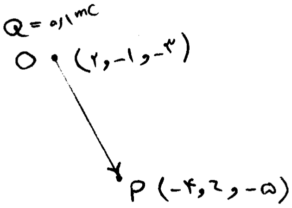
$\vec{F}_{12} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{Q_1 Q_2}{R^2} \vec{a}_{12}$

$\Rightarrow K = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9$

$\vec{E}_{12} = \dfrac{\vec{F}_{12}}{Q_2} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{Q_1}{R^2} \vec{a}_{R_{12}} \Rightarrow E_i = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{Q_i}{R^2} \vec{a}_R$

E_i نسبت به Q_i رابطهٔ خطی دارد.

مثال: مطلوب است محاسبهٔ شدت میدان الکتریکی در نقطهٔ $P(-4,6,-5)$ در فضای آزاد که به وسیلهٔ بار $0{,}1^{mC}$ که در نقطهٔ $(2,-1,-3)$ O واقع شده است.



$\vec{R} = -6\vec{a}_x + 7\vec{a}_y - 2\vec{a}_z$

$\vec{E}_{op} = 9\times10^9 \dfrac{0{,}1\times10^{-3}}{89} \times \dfrac{-6\vec{a}_x + 7\vec{a}_y - 2\vec{a}_z}{\sqrt{89}} \Rightarrow$

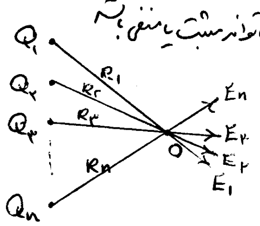
$\begin{cases} \vec{a}_R = -6\vec{a}_x + 7\vec{a}_y - 2\vec{a}_z \\ R^2 = 89 \end{cases}$

$= m_1 \vec{a}_x + m_2 \vec{a}_y + m_3 \vec{a}_z$

$$\underset{\text{جهت}}{\vec{a}_E} = \boxed{\dfrac{m_1 \vec{a}_x + m_2 \vec{a}_y + m_3 \vec{a}_z}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}}}$$

- شدت میدان حاصل از چند بار نقطه‌ای:

* Q می‌تواند مثبت یا منفی باشد



اگر بخواهیم شدت میدان حاصل از چند بار نقطه‌ای را به دست آوریم:

$\vec{E}_t = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \cdots + \vec{E}_n \rightarrow E_t = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{Q_i}{R_i^2} \vec{a}_{R_i}$

فرمول شدت میدان برای n بار نقطه‌ای

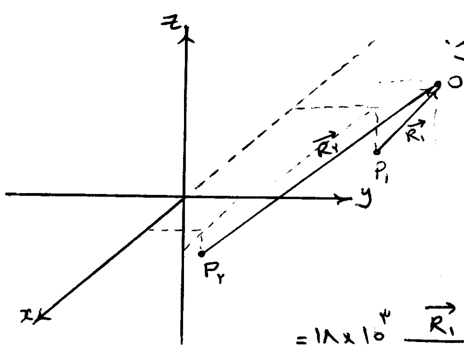
دوری از منبع به توان ۲ آورده شده است $\longrightarrow \vec{a}_R = \dfrac{\vec{R}}{R} \Rightarrow \dfrac{\vec{a}_R}{R^2} = \dfrac{\vec{R}}{R^3} = \dfrac{\vec{R}}{(R^2)^{3/2}}$

اگر $n \to \infty$ ، Q ها به هم چسبیده شده و توده‌ای از بارهای پیوسته شکل می‌گیرد.

مثال: بار نقطه‌ای $Q_1 = 2\mu C$ در موقعیت $P_1(-3,7,-4)$ و بار $Q_2 = 5\mu C$ در نقطهٔ $P_2(2,4,-1)$ قرار دارد. با در نظر گرفتن $O(12,15,18)$ مطلوبست محاسبه:

الف) $\vec{E}_O$

ب) E_O را به مختصات کروی و استوانه‌ای تبدیل کنید.



$$\vec{R}_1 = 15\vec{a}_x + 8\vec{a}_y + 22\vec{a}_z$$

$$\vec{R}_2 = 10\vec{a}_x + 11\vec{a}_y + 19\vec{a}_z$$

$$\vec{E}_1 = 9\times10^9 \frac{2\times10^{-6}}{R_1^2}\vec{a}_{R_1}$$

$$= 18\times10^3 \frac{\vec{R}_1}{(R_1^2)^{3/2}} = 18\times10^3 \frac{15\vec{a}_x + 8\vec{a}_y + 22\vec{a}_z}{(15^2+8^2+22^2)^{3/2}} = \dots$$

$$E_2 = 9\times10^9 \times (-5\times10^{-6}) \frac{10\vec{a}_x + 11\vec{a}_y + 19\vec{a}_z}{(10^2+11^2+19^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E}_O = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \dots\vec{a}_x + \dots\vec{a}_y + \dots\vec{a}_z$$

ب) برای بردن E_O به استوانه‌ای ابتدا باید E_1 و E_2 را به صورت جداگانه به استوانه‌ای برده و سپس در استوانه‌ای باهم جمع شوند. برای بردن E_O به کروی نیز به همین ترتیب.

$$\vec{E}_t = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{R}}{(R^2)^{3/2}}$$

$$n \longrightarrow \infty \Rightarrow \underset{\text{بار گسسته}}{\sum} \longrightarrow \underset{\text{بار پیوسته}}{\int} \Rightarrow d\vec{E}_1 = \frac{dQ_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{R}}{(R^2)^{3/2}}$$

$dQ = \rho_v\, dv$ حجمی

$dQ = \rho_s\, ds$ سطحی

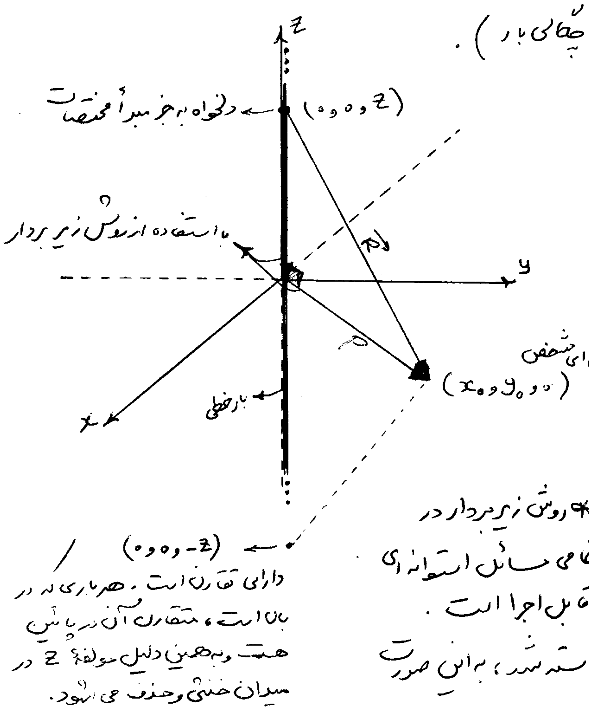
$dQ = \rho_L\, dl$ خطی

$$\Longrightarrow \vec{E}_t = \begin{cases} \iiint \dfrac{\rho_v\, dv}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{\vec{R}}{(R^2)^{3/2}} & \text{بارهای حجمی (۳ بعدی)} \\ \iint \dfrac{\rho_s\, ds}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{\vec{R}}{(R^2)^{3/2}} & \text{بارهای سطحی (۲ بعدی)} \\ \int \dfrac{\rho_L\, dl}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{\vec{R}}{(R^2)^{3/2}} & \text{بارهای خطی} \end{cases}$$

چگالی ← یکنواخت ← طول محدود / طول نامحدود
چگالی ← غیر یکنواخت ← طول محدود / طول نامحدود

* تنها در دکارتی است که یک بردار را با کم کردن ابتدا از انتها به دست می آوریم.

مثال: بار خطی با چگالی ρ_L یکنواخت و با طول نامحدود روی محور z قرار گرفته است. مطلوبست شدت میدان الکتریکی در نقطه $O(x_0, y_0, 0)$ (ρ_L ← چگالی بار).



$$\frac{\vec{R}}{(R^2)^{\frac{3}{2}}} = ?$$

چون بار خطی یک نوع بار استوانه ای می باشد، پس بهتر است مسئله را در سیستم استوانه ای بررسی کنیم.

$$\vec{R} = \overset{(0,-z)}{-z}\vec{a}_z + \rho \vec{a}_\rho =$$

$$= -z\,\vec{a}_z + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}\,\vec{a}_\rho$$

* روش زیر بردار در تمامی مسائل استوانه ای قابل اجرا است.

هر مسئله ای داده شده و شدت میدان الکتریکی خواسته شد، به این صورت عمل می شود:

- قدم اول ← نقطه مبدا و مقصد مشخص شود (نقطه انتها داده می شود، نقطه مبدأ به جز مبدأ مختصات هر نقطه ای می تواند داده شود).

- قدم دوم ← کسر $\frac{R}{(R^2)^{\frac{3}{2}}}$ تشکیل داده می شود:

$$\sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \rho_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\vec{R}}{(R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-z\,\vec{a}_z + \rho_0\,\vec{a}_\rho}{(z^2 + \rho_0^2)^{\frac{3}{2}}}$$

- قدم سوم ← dE تشکیل داده شود:

$$\vec{dE} = \frac{\overbrace{\rho_L dl}^{dQ}}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{R}}{(R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\rho_L dz}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\cancel{-z\vec{a}_z} + \rho_0\,\vec{a}_\rho}{(z^2 + \rho_0^2)^{\frac{3}{2}}}$$

صفر به دلیل تقارن بارها

* چون خط روی محور z قرار دارد ← $dl = dz$

$0 = dy, dx$

قدم ۴ ← در صورت وجود تقارن آنرا بررسی خواهیم کرد. که معمولاً باعث حذف یکی از قسمتهای برداری خواهد شد.

قدم ۵ ← عمل انتگرال گیری انجام می‌شود. همهٔ مقادیر ثابت (در صورتی که ρ_L یکنواخت نباشد؛ یعنی به z وابسته باشد، از انتگرال بیرون نخواهد رفت) از انتگرال بیرون خواهد رفت.

$$\vec{E} = \int \frac{\rho_L \, dl}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{R}}{(R^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_L \, dz}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overset{\text{بعلت تقارن}}{\cancel{-z\,\vec{a}_z}} + \rho_0 \vec{a}_\rho}{(z^2+\rho_0^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\rho_L(\rho_0 \vec{a}_\rho)}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2+\rho_0^2)^{\frac{3}{2}}} \longrightarrow \text{همواره در این نوع انتگرال} = \frac{2}{\rho_0^2}$$

← طول خط

مقدار ثابت

عنصری در راستای ... است

$$\left. \frac{z}{\rho_0^2\sqrt{z^2+\rho_0^2}} \right|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\rho_0^2} - \left(\frac{-1}{\rho_0^2}\right) = \frac{2}{\rho_0^2}$$

$$z \to \infty \Rightarrow \sqrt{z^2+\rho_0^2} \simeq \sqrt{z^2} = |z| = \begin{cases} z & z>0 \\ -z & <0 \end{cases}$$

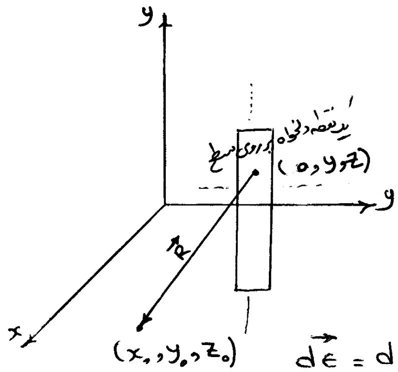
$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 \rho_0} \vec{a}_\rho}$$

نتیجه ⇐ میدان الکتریکی بر خط عمود خواهد بود (a_ρ) به فاصله نسبت عکس دارد.

← در اینگونه خطوط بلند (نسبت طول به سطح مقطع خیلی زیاد)

میدان الکتریکی ناشی از بار سطحی :

(فرض : ρ_s یکنواخت و ابعاد نامحدود)



$$\vec{R} = x_0\vec{a}_x + (y_0-y)\vec{a}_y + (z_0-z)\vec{a}_z$$

$$\frac{\vec{R}}{(R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x_0\vec{a}_x + (y_0-y)\vec{a}_y + (z_0-z)\vec{a}_z}{\left\{x_0^2 + (y_0-y)^2 + (z_0-z^2)\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$d\vec{E} = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{R}}{(R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\rho_s\,ds}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{R}}{(R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\rho_s\,dy\,dz}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{R}}{(R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

به دلیل تقارن

$$= \frac{\rho_s\,dy\,dz}{4\pi\varepsilon_0}\;\frac{x_0\vec{a}_x + \cancel{(y_0-y)\vec{a}_y} + \cancel{(z_0-z)\vec{a}_z}}{\left\{x_0^2 + (y_0-y)^2 + (z_0-z)\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

و $dS = dy\,dz$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho_s\,(x_0\vec{a}_x)}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy\,dz}{\left\{x_0^2 + (y_0-y)^2 + (z_0-z)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\rho_s\,(x_0\vec{a}_x)}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\Bigg[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{\left\{x_0^2 + (y_0-y)^2 + (z_0-z)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}}_{\frac{2}{x_0^2 + (z_0-z)^2}}\Bigg]dz$$

$$= \frac{\rho_s\,(x_0\vec{a}_x)}{2\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{x_0^2 + (z_0-z)^2} \qquad \begin{array}{l} z_0 - z = u \\ dz = -du \end{array}$$

این منفی برای تغییر جهت انتگرال‌گیری و منفی du- از بین می‌رود.

$$= \frac{\rho_s\,(x_0\vec{a}_x)}{2\pi\varepsilon_0}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{x_0^2 + u^2}}_{\frac{\pi}{\sqrt{x_0^2}}} = \frac{\rho_s\,(x_0\vec{a}_x)}{2\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{x_0}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{u}{x_0}\right\}_{-\infty}^{\infty}$$

$$= \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\vec{a}_x$$

تمرین : چگالی بار سطحی روی مربع با ابعاد $-1 \leq x \leq 1$ ، $-1 \leq y \leq 1$ و $z = 0$ عبارت است از $\rho_s = |x| \ \frac{nC}{m^2}$. مطلوبست محاسبه $\vec{E}$ در $P(0,0,1)$.

تمرین ۲: اگر در مسئله قبل، $\rho_s = e^{-|x|} \ \frac{nC}{m^2}$ باشد، مطلوبست محاسبه میدان در
$P(۰/۵ \,,\, ۰/۵ \,,\, ۱)$

* بررسی قانون گوس:

شار الکتریکی: مجموعه خطوط میدان الکتریکی که از یک سطح عبور می‌کند.

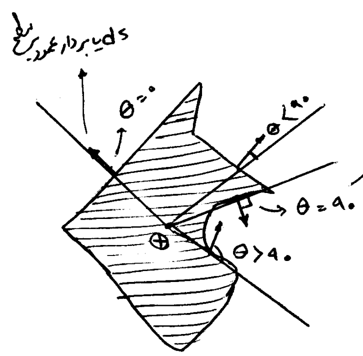
چگالی شار الکتریکی: $\underbrace{D}_{\text{چگالی شار الکتریکی}} = \frac{\overbrace{\Psi_E}^{\text{شار الکتریکی کل}}}{\underbrace{S}_{\text{مساحت سطح}}}$

سطح بسته: سطحی که یک حجم را در خود احاطه کرده باشد.

قانون گوس.

قضیه دیورژانس

هدف بررسی این ارتباط است → $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v$



زاویه بین میدان و خط عمود بر سطح = θ

$\Delta\Psi_E$ = شاری که از سطح ΔS می‌گذرد $= D_s \Delta S \cos\theta = \vec{D_s} \cdot \vec{\Delta S}$

شاری که از n تا ΔS عبور می‌کند $= \sum_{i=1}^{n} \vec{D_{s_i}} \cdot \vec{\Delta S_i}$

$n \to \infty \Rightarrow \Psi_E = \iint \vec{D} \cdot \vec{ds}$

← با توجه به قانون گوس که در مورد بارهای ساکن است

شاری که از یک سطح بسته خارج می‌شود $= \Psi = \oiint \vec{D} \cdot \vec{ds} = Q_{enc}$

← بار محصور شده در سطح بسته.

$\Rightarrow \Psi_E = Q_{enc}$ ← خروجی سطح بسته

← بارهای ساکن تنها میدان الکتریکی دارند (نه مغناطیسی).

$\oiint \vec{D} \cdot \vec{ds} = \iiint_{\text{محیطی که سطح بسته احاطه شده}} \underbrace{\rho_v}_{\text{بار حجمی}} \, dv = Q_{enc}$

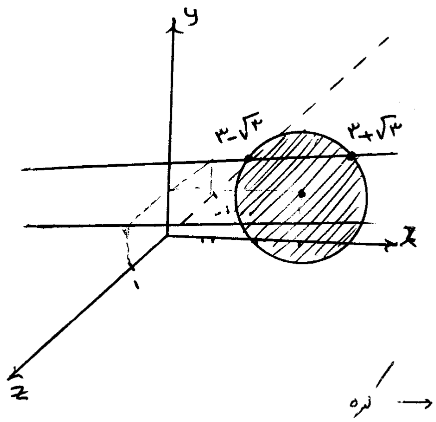
مسئله ۶ - فصل ۳ : دو بار یکنواخت در $y=1$ ، $z=\pm 1m$ قرار دارند.

شار خروجی از کره به شعاع $R = 2^m$ و مرکز

$\rho_L = 20 \frac{nC}{m}$

الف) $A(3,1,0)$

ب) $B(3,2,0)$



$Q = \int \rho_L \, dl$

ابتدا باید طول خطوط به دست آید

برای این کار باید معادله کره با خط قطع داده شود.

کره $\rightarrow \quad (x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$

خط ۱ $\begin{cases} y=1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \quad (x-3)^2 + 1 = 4$

$x - 3 = \pm\sqrt{3}$

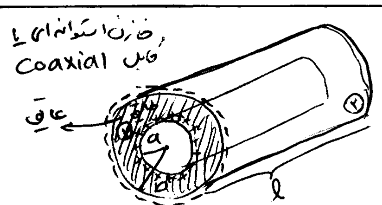
$x = 3 \pm \sqrt{3}$

خط ۲ $\begin{cases} y=1 \\ z=-1 \end{cases}$

$$Q_1 = \int_{3-\sqrt{3}}^{3+\sqrt{3}} 20\times10^{-9}\, dx \longrightarrow Q_2 = Q_1 \longrightarrow$$

چون $z^2 = 1$ و چه $z=1$ و چه $z=-1$ یکی است.

$Q = 2Q_1 =$ شار خروجی



- توضیحات تکمیلی برای مثال کتاب ←

طبق قانون گوس ← در داخل اجسام رسانا و تقریبا میدان صفر است.

فرض ← بارهای + و - برابرند.

- چون بارهای + به خاطر جذب بارهای - ، بر روی استوانه داخلی جمع می‌شوند، پس $Q_{enc}=0$

و در نتیجه $E = 0$

← در خارج از استوانه‌ها (در ناحیه ③)

تنها در حالت ② وجود دارد $\Rightarrow \quad \oiint \vec{D}\cdot\vec{ds} = Q_{enc}\,L$

- برای حالتی که هم جهت هستند: $\vec{D}\cdot\vec{ds} = D.ds$

$$\underset{\text{سطح جلو}}{\iint} 0 + \underset{\text{سطح جانبی استوانه}}{\iint} + \underset{\text{سطح پشت}}{\iint} 0 = \rho_L 2\pi a l$$

$$D 2\pi \rho L = \rho_s 2\pi a l \Rightarrow D = \rho_s \frac{a}{\rho}$$

معادلات ماکسول:

دیورژانس به معنای واگرایی

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \longrightarrow \text{میدان مغناطیسی واگرایی ندارد}$$

میدان الکتریکی همگرایی ندارد

کرل به معنای همگرایی

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

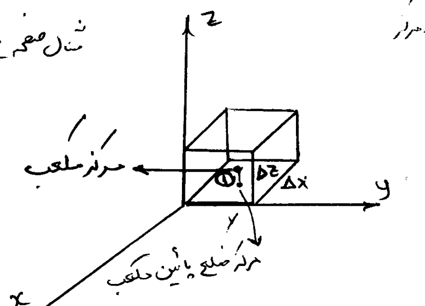
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

برای حالت استاتیک — برای حالت دینامیک

- کاربرد قانون گوس: مسئله‌ای که تقارن ندارد.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v \quad , \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$

مثال صفحه ۳۴



چگالی شار مرکز

$$\vec{D}_0 = D_{x_0} \vec{a}_x + D_{y_0} \vec{a}_y + D_{z_0} \vec{a}_z$$

$$\oiint \vec{D} \cdot \vec{ds} = Q_{enc} \qquad \text{قانون گوس}$$

$$\Rightarrow \underset{\text{جلو}}{\iint} + \underset{\text{پشت}}{\iint} + \underset{\text{راست}}{\iint} + \underset{\text{چپ}}{\iint} + \underset{\text{بالا}}{\iint} + \underset{\text{پائین}}{\iint} = Q_{enc}$$

سری ① جمله‌ای

$$\underset{\text{جلو}}{\iint} \vec{D} \cdot \vec{ds} = \lim_{\Delta S \to 0} D \cdot \vec{\Delta S}_{\text{جلو}} = \lim_{\Delta y, \Delta z \to 0} \left(\left(D_{x_0} + \frac{\frac{\Delta x}{2}}{1!} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \vec{a}_x \right) \cdot \underbrace{\Delta y \, \Delta z \, \vec{a}_x}_{\vec{\Delta S}}$$

با توجه به بسط تیلور

$$= \lim_{\Delta x, \Delta z \to 0} \left(D_{x_0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z$$

چون از x بیشتر به سمت x کمتر رفتیم (ضلع جلو و پشت مکعب) و $\varepsilon = x - x_0$

$$\iint_{\text{پشت}} \vec{D} \cdot \vec{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \vec{D} \cdot \vec{\Delta s}_{\text{پشت}} = \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0} \left(\left(D_{x_0} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \vec{a}_x \right) \cdot \left(- \Delta y \Delta z \, \vec{a}_x \right)$$

$$= \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0} \left(- D_{x_0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z$$

$$\iint_{\text{جلو}} + \iint_{\text{پشت}} = \lim \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} \Delta y \Delta z \Delta x \right)$$

که می‌تواند حذف شود

$$\iint_{\text{راست}} + \iint_{\text{چپ}} = \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0} \frac{\partial D_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

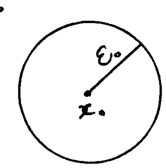
$$\iint_{\text{بالا}} + \iint_{\text{پایین}} = \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0} \frac{\partial D_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\Rightarrow \oiint \vec{D} \cdot \vec{ds} = \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0} \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \underbrace{\Delta x \Delta y \Delta z}_{\Delta V} = Q_{enc}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{Q_{enc}}{\Delta V} = \rho_v \longrightarrow \text{چگالی بار حجمی}$$

بسط تیلور حول x_0: $f(x) = f(x_0) + \frac{\varepsilon}{1!} \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x_0} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \right|_{x_0} + \cdots$

اگر ε بسیار کوچک باشد $\Rightarrow f(x) \simeq f(x_0) + \frac{\varepsilon}{1!} \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x_0}$



رسیدن به قانون گوس توسط دیورژانس:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{a}_z$$

$$\vec{D} = D_x\vec{a}_x + D_y\vec{a}_y + D_z\vec{a}_z$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_v}$$ قانون گوس

منبع = محصول در قوانین ماکسول

قضیهٔ دیورژانس:

$$\oiint \vec{D}\cdot\vec{ds} = \iiint \rho_v \, dv = \iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{D}\, dv$$

ρ_v → $\vec{\nabla}\cdot\vec{D}$

$$\Rightarrow \boxed{\oiint \vec{D}\cdot\vec{ds} = \iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{D}\, dv} = Q_{enc} = \varphi_E$$

مثال: فرض کنید در میان یک مخروط ناقص که به وسیلهٔ

کره های ۲ و ۵ شعاع — $2 \leqslant r \leqslant 5$ (زاویهٔ مخروط با محور z)

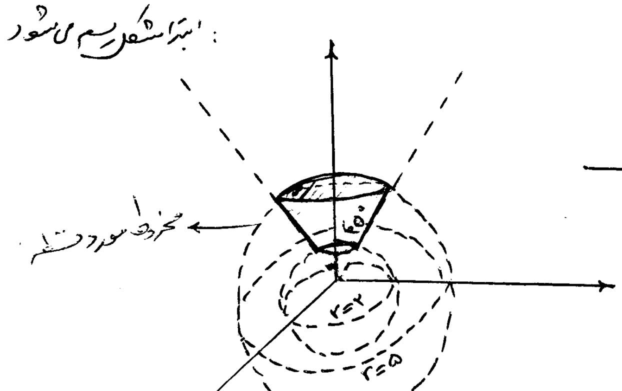
$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$ مشخص شده داشته باشیم

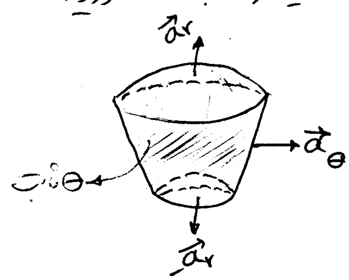
دایره مقطع ۰ تا 2π — $0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$

$\vec{D} = \frac{0.1}{r}\cos\theta\,\vec{a}_\theta$ ، از طریق محاسبهٔ هر دو طرف قضیهٔ دیورژانس، کل بار واقع در میان

ناحیهٔ مخروط را به دست آورید:

ابتدا شکل رسم می شود:





چون D نسبت به θ تغییر دارد،

پس ds_θ می گیریم. (در سطح مورد نظر θ تغییر ندارد).

به علت اینکه D مولفه ای در جهت $\vec{a}_r$ ندارد.

$$\text{سمت چپ} = \cancel{\iint_{\text{بالا}}}^{\,0} + \cancel{\iint_{\text{پایین}}}^{\,0} + \iint_{\text{جانب}} = \iint \frac{0.1}{r}\cos\theta\,\vec{a}_\theta \cdot r\sin\theta\, dr\, d\phi\, \vec{a}_\theta$$

چون در جهت جانبی θ ثابت است، از انتگرال بیرون می‌آید.

$$=0/1\ \underbrace{\sin\theta\cos\theta}_{\theta\to\frac{\pi}{4}}\int_{2}^{5}dr\int_{0}^{2\pi}d\phi=0/1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(5-2)2\pi$$

$$=\frac{0/1}{2}\times 6\pi=\boxed{0/3\pi}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2D_r\right)}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(D_\theta\sin\theta\right)+\cancel{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial\phi}}$$

چون $\rightarrow\ \vec{D}=\underbrace{\frac{0/1}{r}\cos\theta}_{D_\theta}\ \vec{a}_\theta$

$$\Rightarrow\ \vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{0/1}{r}\cos\theta\sin\theta\right)\ \leftarrow\ (uv)'=u'v+v'u$$

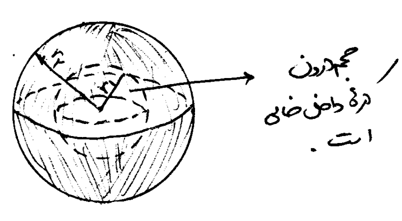
$$=\frac{0/1}{r^2\sin\theta}\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)$$

سمت راست $=\iiint\frac{0/1}{r^2\cancel{\sin\theta}}\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)r^2\cancel{\sin\theta}\,dr\,d\theta\,d\phi$

$$=0/1\underbrace{\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)d\theta}_{\frac{1}{2}}\underbrace{\int_{0}^{2\pi}d\phi}_{2\pi}\underbrace{\int_{2}^{5}dr}_{3}=\boxed{0/3\pi}$$

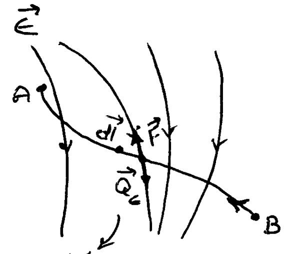
تمرین از جنب:

فرض کنید میدان برداری $\vec{D}=Kr\vec{a}_r$ داده شده است. مطلوبست بررسی درستی قضیه دیورژانس در محدوده ناحیه محصور به سطوح کروی بین $R_1\leqslant r\leqslant R_2$ و مبدأ مختصات.



- کار و انرژی پتانسیل الکتریکی:
- کار و پتانسیل
- انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی

Q بار + فرض شود



قصد حرکت بار Q از نقطه B به A را داریم.

بردار نیروی وارده توسط $\vec{E}$ به بار صرف می‌شود. برای جلوگیری از آن باید نیروی $\vec{F}$ را وارد کنیم تا Q را جابجا کند.

$$F = -Q\vec{E}$$

$$dw = \vec{F}\cdot\vec{dl} = -Q\vec{E}\cdot\vec{dl}$$

$$W_{AB} = \int_B^A dw \Rightarrow \underbrace{W_{AB} = -Q\int_B^A \vec{E}\cdot\vec{dl}}_{\text{کار لازم برای حرکت مخالف بار Q در میدان } \vec{E}} = E_P$$

انرژی پتانسیل (کار انجام شده می‌تواند به صورت انرژی پتانسیل در سیستم ذخیره شود)

مثال: فرض کنید یک میدان الکتریکی داریم:

$$\vec{E} = y\vec{a_x} + x\vec{a_y} + 2\vec{a_z}$$

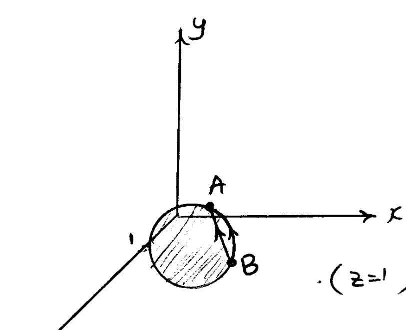
می‌خواهیم از نقطه $B(1,0,1)$ به نقطه $A(0.8, 0.6, 1)$ برویم.

کار لازم برای انتقال $Q = 2C$ در امتداد

الف) قوس کوچکتر دایره $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=1 \end{cases}$

ب) خط مستقیم بین A و B

ابتدا شکل رسم می‌شود.



$$\vec{dl} = dx\,\vec{a_x} + dy\,\vec{a_y}$$

dz برابر ۰ است. زیرا روی دایره z همواره ثابت است $(z=1)$.

$$w_{AB} = -2\int y\,dx + x\,dy = -2\int_{x_B}^{x_A} y\,dx - \int_{y_B}^{y_A} x\,dy =$$

$$= -2\int_{1}^{0.8}\sqrt{1-x^2}\,dx - 2\int_{0}^{0.6}\sqrt{1-y^2}\,dy = -0.96\ \text{ژ}$$

یعنی انرژی آزاد شده است.

که منفی بیانگر این است که B دارای پتانسیل بیشتری نسبت به A بوده است.

ب)

$$\begin{cases} y - y_B = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}(x - x_B) \rightarrow y = -3(x-1) \rightarrow x = 1 - \dfrac{y}{3} \\ z - z_B = \dfrac{z_A - z_B}{y_A - y_B}(y - y_B) \rightarrow z = 1 \\ x - x_B = \dfrac{x_A - x_B}{z_A - z_B}(z - z_B) \end{cases}$$

برای حل باید مقادیر را برحسب x و y بسنجیم و در انتگرال‌های قبلی جایگذاری کنیم (همان مقدار قبل به دست خواهد آمد).

ج) به دلیل اینکه کار به مسیر وابسته نیست، پس نیرو کنسرواتیو است.

میدان یک بار خطی در جهت a_ρ است

میدان یک بار دایره‌ای در جهت a_ϕ خواهد بود

$\rightarrow$ اگر یک بار خطی باشد و در دایره‌های اطراف آن حرکت کنیم، کار انجام شده صفر خواهد بود. به عبارت دیگر در دوایر اطراف بار الکتریکی، پتانسیل برابر و در نتیجه کار صفر است.

اختلاف پتانسیل:

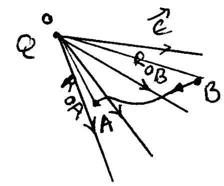
$$V_{AB} \triangleq \frac{W_{AB}}{Q}$$

$$\boxed{V_{AB} = V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E}\cdot\vec{dl}}$$

مثال: مطلوبست محاسبهٔ اختلاف پتانسیل در اطراف بار نقطه‌ای Q

حل:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{a}_r}{R^2}$$



یک روش برای حل:

یک بار آزمون را از A به B حرکت می‌دهیم و سپس مقدار کار را بر بار Q آزمون تقسیم می‌کنیم.

$$\vec{E}\cdot\vec{dl} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{a}_r}{r^2}\cdot\left(dr\,\vec{a}_r + \cdots\right)$$

$$\vec{dl} = dr\,\vec{a}_r + \cdots$$

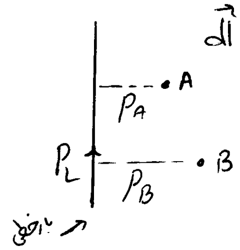
$$\vec{E}\cdot\vec{dl} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} \Rightarrow V_A - V_B = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_{OB}}^{R_{OA}}\frac{dr}{r^2}$$

$$\boxed{V_A - V_B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_{OA}} - \frac{1}{R_{OB}}\right)}$$

در بار خطی:

$$\vec{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\rho}\vec{a}_\rho \Rightarrow \vec{E}\cdot\vec{dl} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\rho}d\rho$$

$$\vec{dl} = d\rho\,\vec{a}_\rho + \cdots$$



$$V_B - V_A = -\int_{\rho_B}^{\rho_A}\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\rho}d\rho = \frac{-\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\ln\rho\Big|_{\rho_B}^{\rho_A}$$

$$\Rightarrow V_{AB} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_{OB}}{\rho_{OA}}$$

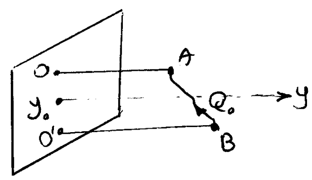
اگر خط بار روی محور z باشد، $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ یا در حالت کلی تر

$$\rho_{OB} = \sqrt{(x_B - x_o)^2 + (y_B - y_o)^2}$$

$$\rho_{OA} = \sqrt{(x_A - x_o)^2 + (y_A - y_o)^2}$$

* بار سطحی:

$$E = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_o}\vec{a_r}$$



مثلاً اگر در صفحهٔ $y = y_o$ باشیم، $\vec{E} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_o}\vec{a_y}$

O و O' از نظر z متفاوتند، و چون در فرمول x و y ظاهر نمی‌شود؛ پس می‌توان آنها را با یک نام مشابه (O) نام‌گذاری کرد.

$$\vec{E}\cdot\vec{dl} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_o}dy$$

$$V_A - V_B = -\int_{y_{oB}}^{y_{oA}} \frac{\rho_s}{2\varepsilon_o}dy$$

$$V_A - V_B = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_o}(y_{oB} - y_{oA})$$

* محاسبهٔ V زمانی که به میدان E دسترسی نداریم:
(برای بار نقطه‌گون)

هر بار کروی و ... را طبق قانون گوس می‌توان نقطه‌ای در نظر گرفت (دور آن یک سطح کروی کشیده و به صورت نقطه‌ای می‌گیریم).

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{R_{OA}} - \frac{1}{R_{OB}}\right)$$

اگر B نقطه‌ای در بی‌نهایت باشد، $(V_B = 0)$

در آنصورت $\frac{1}{R_{OB}} \to \infty$ و $V_B \to \infty$

$$\Rightarrow V_A - V_B = V_A = \boxed{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R_{OA}}}$$

پتانسیل مطلق نقطهٔ A اطراف بار نقطه‌ای

$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow dV=\frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

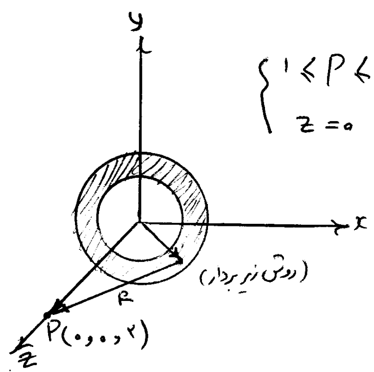
$$dQ=\rho_L\,dl \Rightarrow dV=\frac{\rho_L\,dl}{4\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow V=\int\frac{\rho_L\,dl}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$dQ=\rho_s\,ds \Rightarrow dV=\frac{\rho_s\,ds}{4\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow V=\iint\frac{\rho_s\,ds}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$dQ=\rho_v\,dv \Rightarrow dV=\frac{\rho_v\,dv}{4\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow V=\iiint\frac{\rho_v\,dv}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

* اگر ∈ معلوم نباشد، باید از این فرمولها استفاده شود، اما اگر معلوم بود از فرمولهای قبل.

* بررسی مسئله ۱۹ - از فصل ۴:



$V_P=?$

$$\begin{cases}1\le\rho\le 3\\ z=0\end{cases}$$

$$\rho_s=5\rho\ \frac{nC}{m^2}$$

حل: $V_P=\iint\frac{\rho_s\,ds}{4\pi\varepsilon_0 R}$

$$\vec{R}=-\rho\vec{a}_\rho+2\vec{a}_z$$

$$ds=\rho\,d\rho\,d\phi$$

$$V_P=\iint\frac{(5\times10^{-9}\rho)\,\rho\,d\rho\,d\phi}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{\rho^2+4}}=5\times10^{-9}\times9\times10^{9}\int_0^{2\pi}d\phi\int_1^3\frac{\rho^2\,d\rho}{\sqrt{\rho^2+4}}$$

بررسی یک تست ارشد

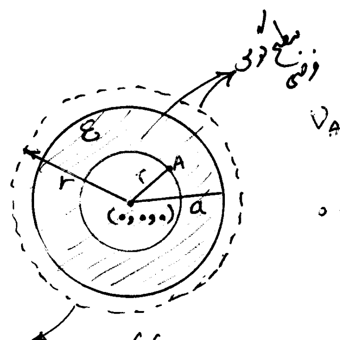
- چگالی بار الکتریکی یکنواخت $\rho_0 \frac{C}{m^3}$ در حجم کره‌ای از عایق کامل به شعاع a و ضریب دی‌الکتریک ε حضور دارد. مطلوب است پتانسیل الکتریکی نقطه‌ای در داخل عایق.

۱) $\frac{\rho_0}{6\varepsilon}a^2 - \frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}r^2$

۲) $\frac{\rho_0}{6(\varepsilon-\varepsilon_0)}(a^2-r^2)$

۳) $\frac{\rho_0}{6}\left[\frac{a^2}{\varepsilon-\varepsilon_0}+\frac{r^2}{\varepsilon_0}\right]$

۴) $\frac{\rho_0}{6\varepsilon}(a^2-r^2)+\frac{\rho_0 a^2}{3\varepsilon_0}$



چون کره عایق است، درون آن هم میدان دارد.

$V_A = ?$

$$0<r<a \Rightarrow \oint \varepsilon \vec{E}\cdot d\vec{s} = \underbrace{Q_{enc}}_{\text{حجم اشغال شده}}$$

$$\varepsilon E(4\pi r^2) = \rho_0\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon}\vec{a}_r}$$

$$r > a : \quad \oint \varepsilon_0 \vec{E}\cdot d\vec{s} = Q_{enc}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_0 E(4\pi r^2) = \rho_0\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) =$$

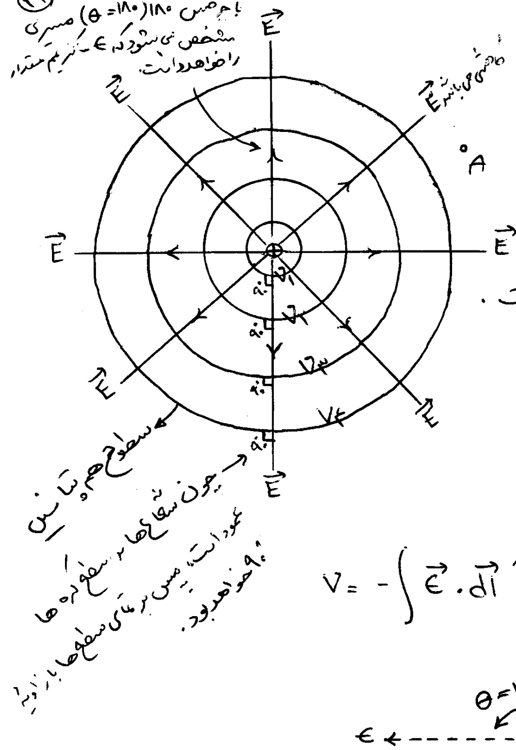
$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{a}_r$$

$$V_A = V_A - V_\infty = (\underbrace{V_A - V_a}_{\text{داخل کره}}) + (\underbrace{V_a - V_\infty}_{\text{خارج کره}})$$

$$-\int_a^r \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon}dr - \int_\infty^a \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r^2}dr = -\frac{\rho_0}{3\varepsilon}\left(\frac{r^2}{2}\right)\Big|_a^r - \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{r}\right)\Big|_\infty^a$$

$$= \frac{-\rho_0}{6\varepsilon}(r^2 - a^2) + \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}\right)$$

گزینه ۴ ✓



شیب یا گرادیان پتانسیل:

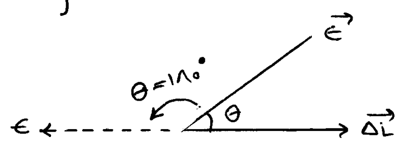
$$V_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_{OA}}$$

یک مقدار ثابت $= R_{OA}$ ← نشان دهنده یک پوسته کروی است.

$$V_1 > V_2 > V_3 > V_4$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{a}_R \longrightarrow$$ هرچه از مرکز دور شویم، ϵ کم می‌شود ← ϵ ماهیتی است.

$$V = -\int \vec{\epsilon}\cdot\vec{dl} \xrightarrow{\text{اگر مسیر کوتاه باشد}} \Delta V = -\vec{\epsilon}\cdot\vec{\Delta L} = -\epsilon\,\Delta L\cos\theta$$



$$\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta V}{\Delta L} = -E\cos\theta} \qquad \Rightarrow \left.\frac{\Delta V}{\Delta L}\right|_{max} = E \quad \rightarrow \theta = 180^\circ$$

* یعنی بیشترین افزایش پتانسیل را داریم و به منبع تولیدکننده پتانسیل نزدیک خواهیم شد.

$$\left|\frac{\Delta V}{\Delta x}\right| = \epsilon_x \longrightarrow \frac{\Delta V}{\Delta x}\vec{a}_x = -\epsilon_x\vec{a}_x$$

$$\left|\frac{\Delta V}{\Delta y}\right| = \epsilon_y \longrightarrow \frac{\Delta V}{\Delta y}\vec{a}_y = -\epsilon_y\vec{a}_y$$

$$\left|\frac{\Delta V}{\Delta z}\right| = \epsilon_z \longrightarrow \frac{\Delta V}{\Delta z}\vec{a}_z = -\epsilon_z\vec{a}_z$$

* اضافه پتانسیل تولیدکننده میدان است.

حال اگر Δx و Δy و Δz به سمت صفر میل کنند تغییرات ΔV نیز به صورت ∂V خواهد بود. پس با لحاظ کردن این موضوع و جمع کردن روابط بالا داریم:

$$\frac{\partial V}{\partial x}\vec{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{a}_z = -\left(\epsilon_x\vec{a}_x + \epsilon_y\vec{a}_y + \epsilon_z\vec{a}_z\right) = \boxed{-\vec{E}}$$

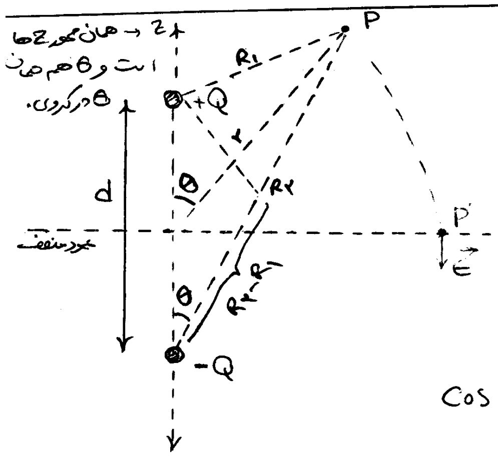
$$f(x,y,z) = \underset{\text{یک عدد}}{C}$$

گرادیان $\vec{\nabla} f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{a_x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{a_y} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{a_z}$ اپراتور دل

که برداری عمود بر رویه در نقطه (x,y,z) می‌باشد. $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla} V}$

چون گرادیان کمیت از سطح یک بردار عمود در جهت افزایش می‌دهد، به همین دلیل منفی است.

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{a_x} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{a_y} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{a_z}$$



دو قطبی: دو بار + و - که با یک عایق به هم وصل شده‌اند.

$$V_P = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

$$\cos\theta = \frac{R_2 - R_1}{d}$$

به خصوص برای نقاط دور دست: $r \gg d$

$$R_2 - R_1 = d\cos\theta \quad , \quad R_1 R_2 \simeq r^2$$

$$\Rightarrow V_P = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{d\cos\theta}{r^2} = \frac{Qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 \underbrace{r^2}_{\text{در دستگاه کروی}}} = \overset{\text{گشتاور دو قطبی}}{\vec{P}} \cdot \vec{a_r}$$

$$\vec{P} = Q\vec{d}$$

روی محور منصف $\underbrace{R_2 - R_1 = 0}_{\theta = 90}$ یعنی $R_2 = R_1$ پس: $V_P = 0$ یعنی سطح شامل محور منصف سطحی هم پتانسیل یا $V = 0$ می‌باشد.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\vec{a_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{a_\theta} + \cancel{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\vec{a_\phi}}\right)$$

چون در شکل بالا به ϕ وابستگی ندارد.

$$= -\left(\frac{-Qd\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{a_r} - \frac{Qd\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{a_\theta}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\vec{a_r} + \sin\theta\,\vec{a_\theta}\right)$$

$$\theta = 90^\circ \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q\,d}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,\vec{a}_\theta$$

دلیل اینکه مشتق ۰ نیست درحالیکه مولفه صفر است ← مشتق پتانسیل میدان را کم ندارد.

- انرژی پتانسیل در میدان الکترواستاتیک :

هدف :

$$E_p = \frac{1}{2}\iiint_{\text{محیط}} \varepsilon_0 E^2\, dv$$

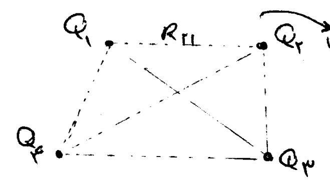
حجم ← شدت میدان

که نشان دهنده این است که :
انرژی در میدان ذخیره می شود.

$$\boxed{V_{12} \triangleq \frac{W_{12}}{Q_0}}$$

W_{12} : کار لازم برای آوردن بار ۲ به نزدیکی بار ۱

* در محیط خالی از بار، برای آوردن یک بار به داخل آن کاری انجام نمی شود.



$$W_{21} = V_{21} Q_2 \quad \text{و} \quad V_{21} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_{21}} \quad \text{که}$$

پتانسیلی که بار ۱ در محل بار ۲ ایجاد کرده است.

کار لازم برای آوردن Q_3 به نزدیکی Q_1 و Q_2 → $W_{31} + W_{32} = V_{31} Q_3 + V_{32} Q_3$

کار لازم برای آوردن n تا بار Q_1 ، Q_2 ، ..... و Q_n :

$$W_E = V_{21} Q_2 + V_{31} Q_3 + V_{32} Q_3 + V_{41} Q_4 + V_{42} Q_4 + V_{43} Q_4 + \cdots$$

← به جای اینکه اول بار ۱ را آورده و سپس بار دیگری را به آن نزدیک کنیم، می توانستیم ابتدا آن یکی بار را بیاوریم و سپس بار ۱ و ... را به آن نزدیک کنیم. پس:

$$V_{12} Q_2 = V_{21} Q_1$$

نتیجه می شود :

$$W_E = V_{12} Q_1 + V_{13} Q_1 + V_{23} Q_2 + V_{14} Q_1 + V_{24} Q_2 + V_{34} Q_3 + \cdots$$

← حال دو طرف را به هم جمع می کنیم (Wهای به دست آمده) V_1 : پتانسیل بقیه بارها در محل Q_1

$$2W_E = Q_1 \big(\underbrace{V_{12} + V_{13} + V_{14} + \cdots}_{V_1}\big) + Q_2 \big(\underbrace{V_{21} + V_{23} + V_{24} + \cdots}_{V_2}\big) + Q_3 \big(\underbrace{V_{31} + V_{32} + V_{34} + \cdots}_{V_3}\big) + \cdots$$

$$W_E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i \overset{\text{پتانسیل}}{V_i} = E_p$$

← فرم گسسته

انرژی پتانسیلی که در n بار Q ذخیره خواهد شد.

فرم ماکروسکوپی

if $n \to \infty$ $\begin{cases} Q_i \to dQ = \rho_v \, dv \\ \sum \to \iiint \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\boxed{w_E = \frac{1}{2} \iiint \rho_v V \, dv} = E_p$

پتانسیل

اگر $n \to \infty$ آنگاه R، شعاع کره هم به سمت ∞ میل می‌کند.

$$w_E = \frac{1}{2} \iiint (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) V \, dv$$

$$\underbrace{\vec{\nabla} \cdot (V \vec{D})}_{\text{دیورژانس یک گرادیان}} \equiv V (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) + \vec{D} \cdot (\vec{\nabla} V)$$

$$\Rightarrow w_E = \frac{1}{2} \iiint \left\{ \vec{\nabla} \cdot (V \vec{D}) - \vec{D} \cdot \vec{\nabla} V \right\} dv$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \iiint \vec{\nabla} \cdot (V \vec{D}) \, dv}_{\text{براساس قضیهٔ دیورژانس :}} - \frac{1}{2} \iiint \vec{D} \cdot \underbrace{\vec{\nabla} V}_{-\vec{E}} \, dv$$

$$\cancel{\frac{1}{2} \oiint V \vec{D} \cdot d\vec{s}} \to 0 \quad \to \quad R \to \infty \text{ چون}$$

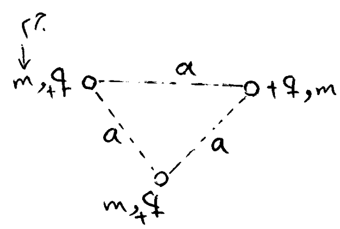
$V = \frac{1}{R}$ ، $\alpha \frac{1}{R^2}$ ، αR^2

متناسب — این دو همدیگر را خنثی می‌کنند

$$\Rightarrow \boxed{w_E = \frac{1}{2} \iiint \underbrace{\vec{D}}_{\varepsilon_0 \vec{E}} \cdot \vec{E} \, dv = \frac{1}{2} \iiint \varepsilon_0 E^2 \, dv = E_p}$$

بررسی یک تست :

اگر یکی از بارهای q مجاز به حرکت باشد و فقط نیروهای کولنی حضور داشته باشند (اصطکاک و ... $= 0$)، سرعت ذرهٔ q در نقاط بی‌نهایت دور کدام گزینه است.



۱) $\dfrac{\sqrt{4}\, q}{\sqrt{m a \pi \varepsilon_0}}$

۲) $\dfrac{q}{\sqrt{m a \pi \varepsilon_0}}$

۳) $\dfrac{q}{\sqrt{2 m a \pi \varepsilon_0}}$

۴) $\dfrac{q}{\sqrt{3 m a \pi \varepsilon_0}}$

۳۷

* چون برای قراردادن بارها کنار هم باید کار انجام شود، پس دارای انرژی پتانسیل ذخیره شده هستند.

انرژی پتانسیل اول = انرژی جنبشی بار آزاد شده + انرژی پتانسیل باقیمانده

حالت اول ① ← هر ۳ بار حضور دارند. جنبشی

$$E_{C_①} = 0$$

$$E_{P_①} = ۳\left(\frac{1}{۲} Q V_1\right)$$

$$= \frac{۳}{۲} q \underbrace{\left(V_{1۲} + V_{1۳}\right)}_{۲V_{1۲}}$$

$$= ۳q\left(\frac{q}{۴\pi\varepsilon_0 a}\right) = \frac{۳q^۲}{۴\pi\varepsilon_0 a}$$

حالت دوم ② ← یکی از بارها آزاد شده (دور شده) و ۲ بار دیگر حضور دارند.

$$E_{P_②} = qV = \frac{q^۲}{۴\pi\varepsilon_0 a}$$

$$E_{C_②} = \frac{1}{۲} m v^۲$$

با مقایسه ① و ② $\Rightarrow \quad E_{P_①} + E_{C_①} = E_{P_②} + E_{C_②}$

$$\Rightarrow \frac{1}{۲} m v^۲ = \frac{۲q^۲}{۴\pi\varepsilon_0 a}$$

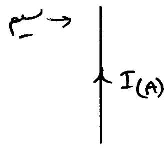
$$\Rightarrow v^۲ = \frac{q^۲/\pi\varepsilon_0 a}{m}$$

$$V = \frac{q}{\sqrt{m\pi\varepsilon_0 a}}$$

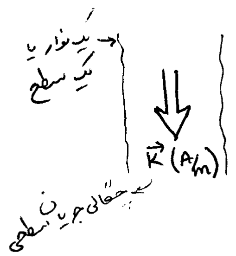
$\boxed{\text{گزینه } ۲ \checkmark}$

فصل ۵

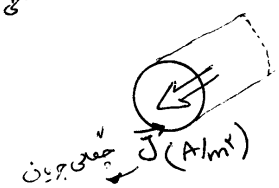
شدت جریان، هادی ها، مقاومت الکتریکی:



$$I \triangleq \frac{dQ}{dt}$$

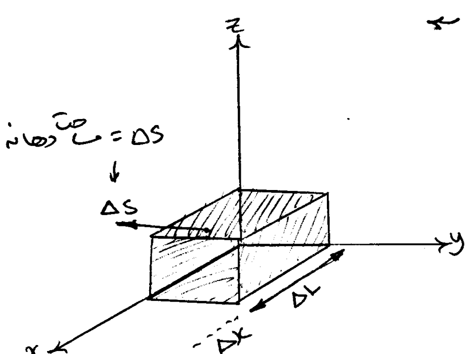


$$\rightarrow \quad I = \int K\,dy$$



$$\rightarrow \quad I = \iint \vec{J}\cdot\vec{ds}$$

فقط حرکت حجم به اندازهٔ Δx را داریم →



$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\rho_v\, \Delta s\, \Delta x}{\Delta t}$$

سرعت متوسط روی محورها

$$\Delta I = \rho_v\, \Delta s\, v_x$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\Delta I}{\Delta s}}_{J_x} = \rho_v\, v_x$$

$$\rightarrow J_y = \rho_v\, v_y$$

$$J_z = \rho_v\, v_z$$

اگر یک بردار ۳ بعدی باشد → $\vec{J} = J_x \vec{a}_x + J_y \vec{a}_y + J_z \vec{a}_z$

$$V = V_x \vec{a}_x + V_y \vec{a}_y + V_z \vec{a}_z$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{J} = \rho_v \vec{V}}$$

سرعت

پیوستگی شدت جریان: طبق اصل بقای بارهای الکتریکی می توان گفت بار الکتریکی نه به وجود می آید و نه از بین می رود، و اینکه اگر زمانی تعداد مساوی بار منفی و مثبت به وجود بیایند، از طریق جدا شدن از یکدیگر به دست آمده اند و با ملحق شدن به یکدیگر از بین می روند. معادله پیوستگی نتیجه این اصل است و می تواند به صورت زیر بیان شود:

$$I = \oiint \vec{J} \cdot \vec{ds} = -\frac{dQ_i}{dt}$$

موجودی بار اولیه

علامت منفی به این معنا: جریان وارد می شود و از همه سطوح می گذرد و سپس خارج می شود (نه اینکه فقط خارج شود)

$$\oiint \vec{J} \cdot \vec{ds} = \frac{-d}{dt} \iiint \rho_v \, dv$$

با استفاده از قضیه دیورژانس

که جای انتگرال و مشتق عوض شود

$$\iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \, dv = \iiint -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} dv$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

اگر جریان از نوع dc باشد، پس $\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0$ یعنی ρ_v ثابت (ct) است.

و $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ یعنی $\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = 0$

اگر جریان از نوع Ac باشد، پس $\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \neq 0$ و $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} \neq 0$

توضیح بیشتر:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

رابطه $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ را نیز داریم و نیز $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon}$

هدایت ویژه (الکتریکی)

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \left(\sigma \frac{\vec{D}}{\varepsilon} \right) = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

با فرض اینکه $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ = ثابت ، پس :

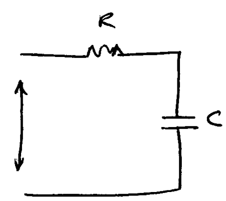
$$\underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{D})}_{\rho_v}\frac{\sigma}{\varepsilon} = -\frac{\partial \rho_v}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon}\rho_v = 0$$

با فرض اینکه $\rho_v\big|_{t=0} = \rho_0$

$$\Rightarrow \boxed{\rho_v = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}}$$

که $\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}$ ثابت زمانی مدار :



$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{1}{RC}$$

$$\Rightarrow \boxed{RC = \frac{\varepsilon}{\sigma}}$$

عمق نفوذ :

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu_0 \sigma}}$$

از جنس مسافت است .

فرکانس موج

$$J_x = \sigma E_x e^{-z\sqrt{\pi f \mu_0 \sigma}} \cos\left(\omega t - z\sqrt{\pi f \mu_0 \sigma}\right)$$

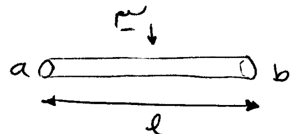
مس : $\sigma = 5.8 \times 10^7 \ \frac{\mho}{m}$

(۴۱)

$$\Rightarrow \delta_{cm} = \frac{\text{۰/۰۶۶}}{\sqrt{f}}$$

$$f = \text{۶۰}\ \text{Hz} \longrightarrow \delta_{cm} = \text{۸/۵۳}\ \text{mm}$$

$$f = \text{۱۰}\ \text{GHz} \longrightarrow \delta_{cm} = \text{۶/۶۱} \times \text{۱۰}^{-\text{۴}}\ \text{mm}$$



$$R = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{-\int_b^a \vec{E}\cdot\vec{dl}}{\iint \sigma \vec{E}\cdot\vec{ds}}$$

طول سیم

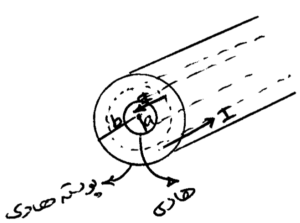
دهانه سیم

شکل از چنگ
۵-۵ ص ۲۵۹
۵-۶ ص ۲۶۱

مقاومت طولی سیم :

$$R = \frac{L}{\sigma S}$$

مقاومت عرضی کابل کواکسیال (coaxial) :



$$R^* = \frac{V_{ab}}{I^*} =$$

$$\oiint \vec{D}\cdot\vec{ds} = Q_{enc}$$

$$\Rightarrow \varepsilon E (\text{۲}\pi \rho L) Q$$

$$V_{ab} = -\int_b^a \frac{\rho_L}{\text{۲}\pi\varepsilon_0}\vec{a_\rho}\cdot \underbrace{d\rho\vec{a_\rho}}_{dl} \qquad \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{\text{۲}\pi\rho l \varepsilon} = \frac{\rho_L L}{\text{۲}\pi\rho L\varepsilon} = \frac{\rho_L}{\text{۲}\pi\varepsilon\rho}\vec{a_\rho}$$

$$= \frac{\rho_L}{\text{۲}\pi\varepsilon_0} \ln\frac{b}{a}$$

۴۲

$$I^{*} = \iint \sigma^{*} \frac{\rho_L}{2\pi \varepsilon \rho} \vec{a_\rho} \cdot \rho\, d\phi\, dz\, \vec{a_\rho}$$

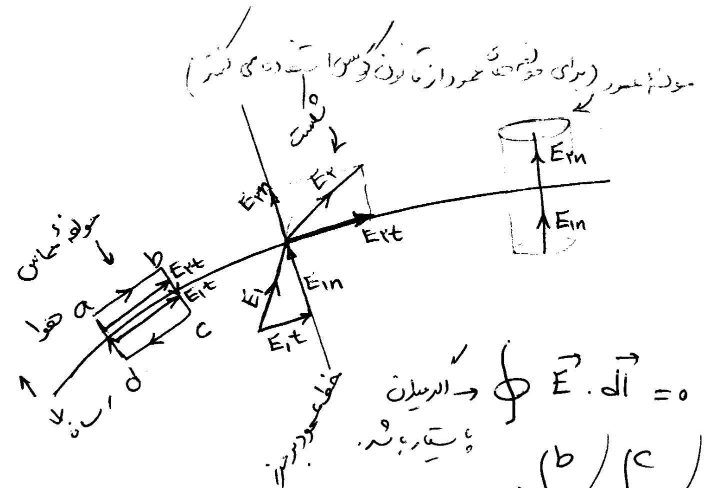
$$= \sigma^{*} \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon} \times 2\pi l = \frac{\sigma \rho_L l}{\varepsilon} \qquad \Rightarrow R^{*} = \frac{\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{b}{a}}{\frac{\sigma^{*} \rho_L L}{\varepsilon}}$$

برای عایق ها با * و برای هادی ها بدون * است.

$$\Rightarrow R^{*} = \frac{\ln \frac{b}{a}}{2\pi \sigma^{*} L}$$

$$\boxed{RC^{*} = \frac{\varepsilon}{\sigma^{*}}}$$

رسانا و شرایط مرزی:



الزاماً پایستار باشد. $\rightarrow \oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0$

$$\Rightarrow \int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^a = 0$$

چون مرز مشترک دیگری است، پس این هم باید صفر باشد.

عمودند

۰ چون داخل رسانا هستیم

۰ چون عمود است

$$\Rightarrow E_{2t} = 0$$

برای مولفه عمودی $\rightarrow \oiint \vec{D} \cdot \vec{ds} = Q_{enc} \Rightarrow \iint_{\text{هوا}} + \iint_{\text{هادی}} + \iint_{\text{جانبی}} = Q_{enc}$

(هادی: ۰، جانبی: ۰)

$$\Rightarrow D_{2n} \Delta s = \rho_s \Delta s$$

$$\Rightarrow D_{2n} = \rho_s \quad \text{یا} \quad \boxed{E_{2n} = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0}}$$

← بر طبق این مطالب، میدان‌های بازتاب شده از سطوح یک رسانا، بر سطح آن عمود خواهد بود. (همانند آینه‌ها (تخت، محدب و ...) می‌توانند خطوط بازتاب شده را به همان صورت، به طور محدب و یا ... منعکس کنند. به عبارت دیگر سطوح یک رسانا در برابر خطوط میدان همانند آینه‌ها عمل می‌کند).

* روش تصویر:

$$D_n = \rho_s \quad \Rightarrow \quad \rho_s = \varepsilon_0 E_n$$

ـ اگر E_n متغیر با زمان باشد، ρ_s هم متغیر با زمان خواهد بود که در این حالت جریانی در هادی القا خواهد شد.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

هدف پیدا کردن پتانسیل است ←

توسط معادله لاپلاس

$$\nabla^2 V = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

$$V = V(x, y, z)$$

چون حل معادله لاپلاس منتهی به معادلات دیفرانسیل پیچیده می‌شود، از روش جایگزین (روش تصویر) استفاده می‌شود.

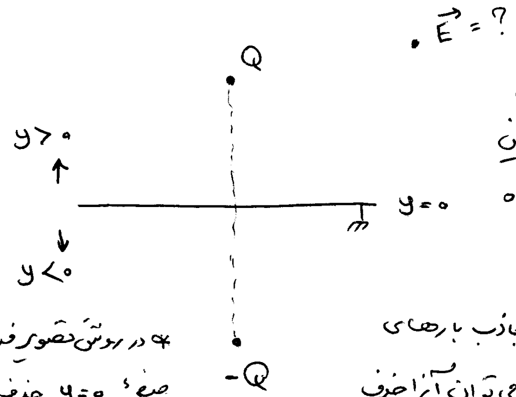
روش تصویر: این روش جایگزین برای پیدا کردن پتانسیل مثلاً در تمام نقاط بالای صفحه رسانای $y > 0$ می‌باشد. همان طور که گفته شد، روش رسمی برای انجام این کار حل معادله لاپلاس است. ولی روش تصویر برای $y > 0$، به جز در محل بار نقطه‌ای تحت شرایط زیر قابل استفاده است.

۱ـ در تمام نقاط روی صفحه رسانا، پتانسیل صفر باشد (صفحه به زمین وصل شود)

۲ـ در نقاط بسیار نزدیک به Q، پتانسیل به سمت پتانسیل یک بار نقطه‌ای تنها میل می‌کند.

۳ـ در نقاط بسیار دور از Q پتانسیل صفر باشد.

۴ـ تابع پتانسیل نسبت به x و z تابعی زوج باشد.



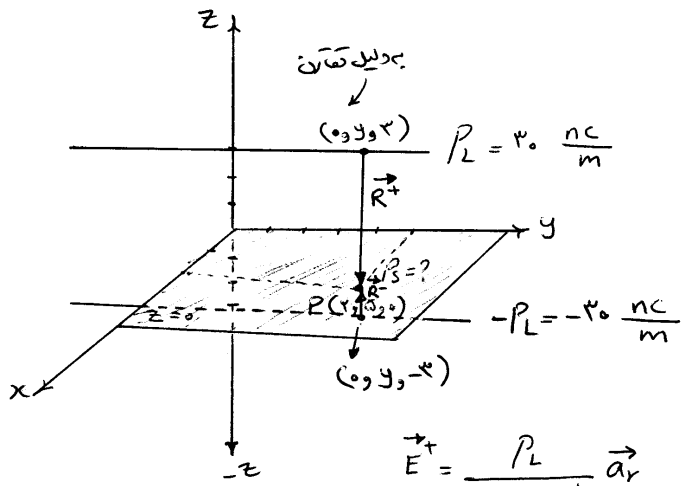
* Q علاوه بر ایجاد میدان E ، یک ρ_s القایی نیز بر روی ورق y=0 ایجاد می‌کند. در این حالت دیگر نمی‌توان گفت میدان ایجاد شده تنها ناشی از بار Q است.

* چون صفحهٔ y=0 جاذب بارهای منفی خواهد بود، پس می‌توان آن را حذف و جای آن Q - را جایگزین نمود.

* در روش تصویر فرض می‌شود صفحهٔ y=0 حذف شده و به جای آن بار قرینهٔ Q - قرار گرفته است. حال با این فرض میدان را محاسبه می‌کنیم.

* مثال از هیت :

(در رساناها میدان لزوم عمودی داشت)



$$\vec{E}^+ = \frac{\rho_L}{2\pi \varepsilon_0 R^+}\vec{a}_r$$

$$\vec{R}^+ = (2-0)\vec{a}_x + (0-3)\vec{a}_z$$

$$\vec{E}^+ = \frac{30\times10^{-9}\times18\times10^{9}(2\vec{a}_x - 3\vec{a}_z)}{(2^2+3^2)}$$

$$\vec{E}^- = \frac{-30\times10^{-9}\times18\times10^{9}(2\vec{a}_x + 3\vec{a}_z)}{(2^2+3^2)}$$

$$\vec{E}_n = \vec{E}^+ + \vec{E}^- = -249\,\vec{a}_z$$

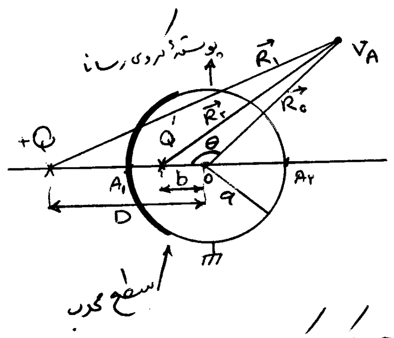
چون بر صفحه عمود است، پس همان نرمال می‌گیریم.

$$\rho_s = \varepsilon_0 \vec{E}_n = -249\,(\varepsilon_0) \qquad \frac{C}{m^2}$$

- مثال از چنگ

الف) تصویر بار $+Q$ که به فاصلهٔ D از مرکز کره قرار دارد؟

ب) پتانسیل یک نقطه در خارج از کره به چه صورت خواهد بود؟



$b = ?$

$Q' = ?$

* فرض می‌کنیم قسمتی از کره که روبروی بار Q است ،
همانند آینهٔ محدب عمل می‌کند، پس تصویر Q در فاصلهٔ
کانونی آینه تشکیل می‌شود. در این حالت Q با قرینه‌اش
یعنی Q' برابر نخواهد بود و چون سطح محدب است پس: $Q' < Q$

$$V_{A_1} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (D-a)} + \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0 (a-b)} = 0$$

$$V_{A_2} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (D+a)} + \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0 (a+b)} = 0$$

$\Rightarrow$ b و Q' مجهول است.

$\times 4\pi\varepsilon_0 \longrightarrow$ مخرج مشترک $\rightarrow$
$$\begin{cases} Q(a-b) + Q'(D-a) = 0 \\ Q(a+b) + Q'(D+a) = 0 \end{cases}$$
بعد از حل $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q' = -Q\,\dfrac{a}{D} \\ b = \dfrac{a^2}{D} \end{cases}$$
$\leftarrow$ مشاهده می‌شود که Q' منفی است و اندازهٔ آن از Q کوچکتر است.

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} - \frac{Q\frac{a}{D}}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

$$R_1 = \left(D^2 + R_0^2 - 2R_0 D\cos\theta\right)^{1/2}$$

$$R_2 = \left(b^2 + R_0^2 - 2bR_0\cos\theta\right)^{1/2}$$

فرض می کنیم $R_0 \to 0$

این قضیه را بررسی می کنیم که $\lim_{R \to a} V_A = 0$ صحیح است یا خیر؟

$$\Rightarrow \lim_{R_0 \to a} \frac{a}{4\pi\varepsilon_0 (D^2+a^2-2aD\cos\theta)^{1/2}} - \frac{Q\frac{a}{D}}{4\pi\varepsilon_0 (b^2+a^2-2ab\cos\theta)^{1/2}}$$

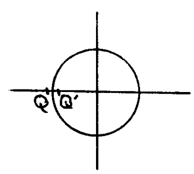
$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (D^2+a^2-2aD\cos\theta)^{1/2}} - \frac{Q\frac{a}{D}}{4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{a^4}{D^2}+a^2-2a\frac{a^2}{D}\cos\theta\right)^{1/2}}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (D^2+a^2-2aD\cos\theta)^{1/2}} - \frac{Q\alpha}{\frac{\cancel{D}4\pi\varepsilon_0 \alpha}{\cancel{D}} (a^2+D^2-2aD\cos\theta)^{1/2}}$$

$$= 0$$

اثبات شد ✓

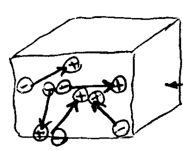
- اگر D به سمت بی نهایت میل کند، Q' به سمت مرکز کره میل خواهد کرد که در این حالت Q' به سمت صفر میل می کند و اگر D به سمت نقطه A_1 میل کند، Q' در آن سوی کره و در بیشترین مقدار خود یعنی میل به سمت مساوی شدن با Q خواهد بود.



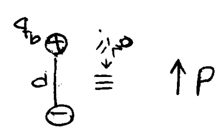
* بررسی عایق ها:

یک جسم دی الکتریک در میدان الکتریکی می تواند به صورت آرایشی از Dipole های الکتریکی (دوقطبی های الکتریکی) در فضای آزاد و متشکل از بارهای الکتریکی + و - که مراکزشان کامل برهم منطبق نیستند، باشد. ضمناً این بارها به صورت آزاد نبوده و نمی توانند نقشی در هدایت الکتریکی داشته باشند.

یک قطعه عایق



دارای آرایش های متفاوت هستند و به همین دلیل، همدیگر را خنثی می کنند.



$$\vec{P_i} = Q\,\vec{d_i}$$

پلاریزاسیون $\rightarrow \vec{P} \triangleq \lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^{n\Delta v} \vec{P_i}$ برآیند

$n \rightarrow$ تعداد P_i ها در واحد حجم

$\Delta v \rightarrow$ حجم مورد نظر

$n\Delta v \rightarrow$ تعداد P_i ها در حجم مورد نظر

* چون در حالت عادی برآیند P_i ها صفر خواهد بود، پس پلاریزاسیون صفر خواهد شد. مگر در حالت های خاص مانند قرار گرفتن در بین صفحات خازن، تأثیر میدان حاصله از آن که پلاریزاسیون را صفر نخواهد کرد.

کل بارهای داخل حجم

$$Q_T = Q_b + Q_{\text{بار آزاد}}$$

بار مقید (جمع بارهای مثبت)

قانون گوس برای بار آزاد $\rightarrow \oiint \vec{D} \cdot \vec{ds} = Q_{enc\ \text{آزاد}}$ ①

پس $\Rightarrow \oiint \vec{P} \cdot \vec{ds} = -Q_b$ ②

$\oiint \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{ds} = Q_T$ ③

$$Q_T = Q_b + Q_{\text{بار آزاد}} \xRightarrow{①②③} \boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v \Rightarrow \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\rho_b \\ \nabla \cdot \varepsilon_0 \vec{E} = \rho_T \end{cases}$$

وقتی بارهای مثبت به صورت واگرا به بیرون رانده می‌شوند، بار درون به صورت قوی منفی خواهد بود.

معادله واگرایی طبق قانون گوس

گذردهی عایق $\leftarrow \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$

$\vec{P}$ دیورژانس

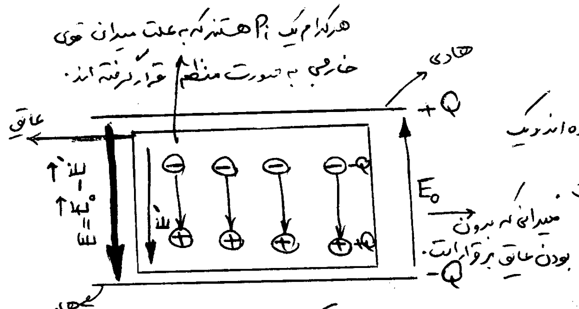
بار مقید دو نوع است
- بار مقید با چگالی ρ_b
- بار سطحی مقید با چگالی ρ_{sb}

بردار سطح

$$\boxed{\rho_{sb} = \vec{P} \cdot \vec{a}_n} \Leftarrow \rho_{sb}$$

* اگر جمع P_i ها را در بردار سطح ضرب کنیم، ρ_{sb} بدست می‌آید

توضیحات بیشتر :



(یک خازن)

Q = بارهایی است که روی سطح عایق آمده‌اند و یک بار سطحی با چگالی ρ_{sb} تشخیص شده است.

$\Leftarrow$ هرچه E قوی‌تر باشد، $\vec{P}$ هم قوی‌تر خواهد بود.

$$\vec{P} \triangleq \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} \quad , \quad \chi_e = \varepsilon_r - 1$$

$$\boxed{\vec{P} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \vec{E}}$$

* $\vec{P}$ برای هوا، صفر است و هوا تنها عایقی است که پلاریزاسیون آن صفر است.

* بررسی یک تست ارشد:

$$\vec{P} = P_0 \vec{a_r}$$

$$V_0 = ?$$

۱) $V_0 = \dfrac{P_0 a}{2\varepsilon}$

۲) $V_0 = \dfrac{-P_0 a}{2\varepsilon}$

۳) $V_0 = \dfrac{P_0 a}{\varepsilon}$

۴) $V_0 = \dfrac{-P_0 a}{\varepsilon}$

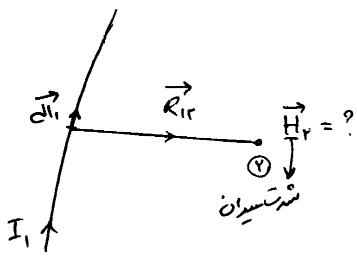
$$\rho_b = \nabla \cdot \vec{P} = -\frac{2P_0}{r} \longleftarrow$$ فقط برای r را در نظر می‌گیریم.

$$\rho_{sb} = \vec{P} \cdot \vec{a_r} = P_0$$

$$V_0 = \iint \frac{\rho_{sb}\, ds}{4\pi\varepsilon_0 R} + \iiint \frac{\rho_b\, dv}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

ρ_{sb} و ρ_b جایگذاری و انتگرال گیری $\longrightarrow = -\dfrac{P_0 a}{2\varepsilon}$

* فصل ۸ - میدان مغناطیسی ناشی از جریان یکنواخت :



طبق قانون بیوساوار :

$$d\vec{H}_2 = \frac{I_1 d\vec{l}_1}{4\pi R_{12}^2} \times \vec{a}_{12}$$

$$\Rightarrow \vec{H}_2 = \int dH_2$$

چون $\quad I d\vec{l} = \vec{K} ds = \vec{J} dv$

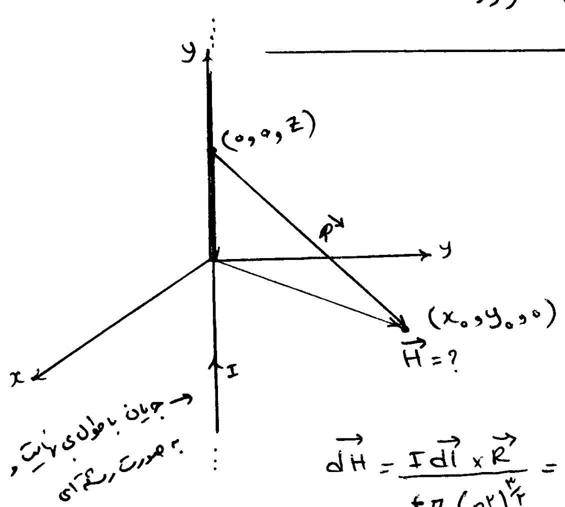
$$\Rightarrow d\vec{H} = \frac{\vec{K} \times \vec{a}_R}{4\pi R^2} ds$$
$\vec{K}$ بردار جریان

$$\Rightarrow d\vec{H} = \frac{\vec{J} \times \vec{a}_R}{4\pi R^2} dv$$
$\vec{J}$ بردار جریان

$$\vec{H} = \iint \frac{\vec{K} \times \vec{a}_R}{4\pi R^2} ds$$

$$\vec{H} = \iiint \frac{\vec{J} \times \vec{a}_R}{4\pi R^2} dv$$

مثال :



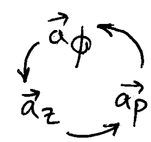
$$\vec{R} = -z\vec{a}_z + \rho \vec{a}_\rho$$

$$\rho = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

$$d\vec{l} = dz\, \vec{a}_z$$

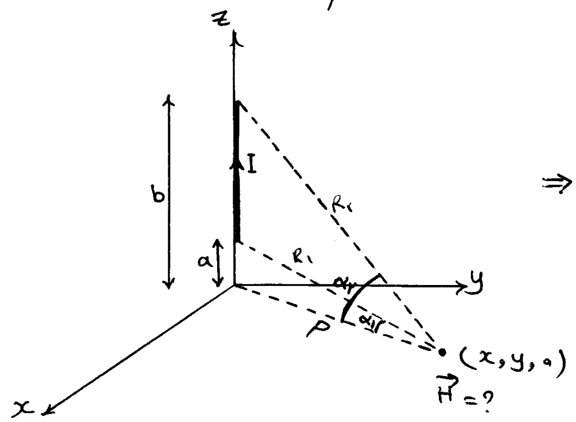
$$d\vec{H} = \frac{I d\vec{l} \times \vec{R}}{4\pi (R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{I dz\, \vec{a}_z \times (-z\vec{a}_z + \rho \vec{a}_\rho)}{4\pi (z^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{I dz\, (\rho\, \vec{a}_\phi)}{4\pi (z^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}$$



$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{I(\rho \vec{a}_\phi)}{4\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(z^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}}_{\frac{2}{\rho^2}} \Rightarrow \vec{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\vec{a}_\phi$$

* بررسی مثال قبل برای طول محدود :



$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{I}{4\pi\rho}(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)\vec{a}_\phi$$

$$\frac{b}{R_2} - \frac{a}{R_1} \rightarrow R_1R_2 \approx R^2$$

$$\vec{R} = \rho\vec{a}_\rho - z\vec{a}_z$$

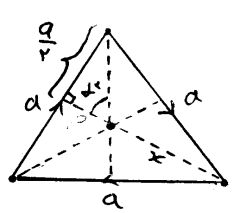
$$\vec{dl} = dz\,\vec{a}_z$$

اثبات : $\vec{H} = \frac{I(\rho\vec{a}_\phi)}{4\pi}\int_a^b \frac{dz}{(z^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{I(\rho\vec{a}_\phi)}{4\pi}\left\{\frac{z}{\rho^2\sqrt{z^2+\rho^2}}\right\}_a^b$

$$= \frac{I(\vec{a}_\phi)}{\rho 4\pi}\left\{\underbrace{\frac{b}{\sqrt{b^2+\rho^2}}}_{\sin\alpha_2} - \underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+\rho^2}}}_{\sin\alpha_1}\right\}$$

* بررسی یک تست ارشد :

هادی فیلامانی به صورت یک مثلث متساوی الاضلاع داده شده است . طول هر ضلع این مثلث برابر با یک متر $(a=1^m)$ و جریان $I=1^A$ در این فیلامان روان است. مطلوبست محاسبهٔ $|\vec{H}|$ در مرکز مثلث .

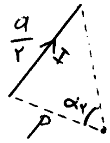


۱) $0/72\ \frac{A}{m}$ ۲) $1/18\ \frac{A}{m}$

۳) $1/43\ \frac{A}{m}$ ۴) $2/36\ \frac{A}{m}$

$a = 1^m$

$I = 1^A$



$\alpha_1 = 0$

$\alpha_2 = 60$

$\rho = \frac{\sqrt{3}}{6} a$

* ابتدا میدان مغناطیسی را برای نیمی از یک ازضلع می‌یابیم می‌کنیم وسپس در ۶ ضرب می‌کنیم.

$$\vec{H}_1 = \frac{1}{4\pi \frac{\sqrt{3}}{6} \times 1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right) = \frac{3}{4\pi}$$

$$\Rightarrow \vec{H} = 6\vec{H}_1 = \frac{6\times 3}{4\pi} \times \frac{18}{4\pi}$$

* راه ساده‌تر این بود که مثلث را به ۳ قسمت تبدیل کنیم ودر آخر در ۳ ضرب می‌کردیم.

طبق قانون دست راست، در مرکز تمامی میدان‌ها با هم جمع می‌شوند.

* قانون مداری آمپر:

محدودیت‌های قانون آمپر: { - مسیر همواره باید به صورت مستقیم باشد (اگر نبود باید به تکه‌های مستقیم و چندتکه تقسیم کنیم).
- طول سیم نسبت به فاصله باید زیاد باشد.

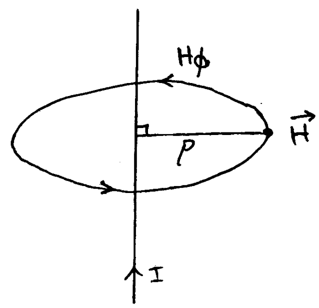
$$\oint \vec{H}\cdot\vec{dl} = I_{enc}$$

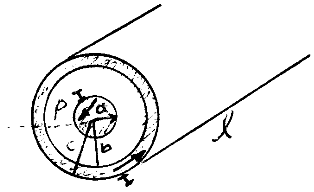
$$\Rightarrow \oint H_\phi \cancel{\vec{a}_\phi} \cdot \rho d\phi \cancel{\vec{a}_\phi} = I$$

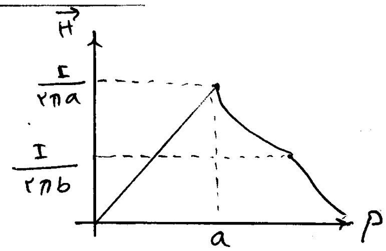
$$\Rightarrow H_\phi(\rho) \oint d\phi = I_{enc}$$

$$H_\phi = \frac{I_{enc}}{2\pi\rho}$$

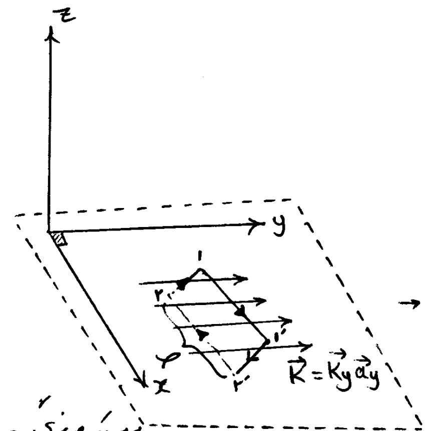
$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{I_{enc}}{2\pi\rho}\vec{a}_\phi$$







صفحه ۱۱۳
(در کتاب خوانده شود)



یک صفحه گسترده در افق xy

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{enc}$$

$$\rightarrow \int_{1}^{1'} + \underbrace{\int_{1'}^{2'}}_{H_z=0} + \int_{2'}^{2} + \underbrace{\int_{2}^{1}}_{H_z=0} = I_{enc}$$

$$\Rightarrow H_{x_1}\, l + H_{x_2}(-l) = K_y\, l$$

$$H_{x_2} \equiv H_{x_1}$$

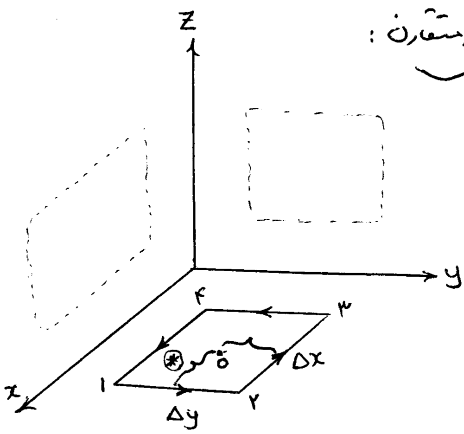
$$\Rightarrow 2H_{x_1}\, l = K_y\, l$$

$$H_{x_1} = \frac{1}{2} K_y$$

$$\boxed{\vec{H} = \frac{1}{2}\vec{K}\times\vec{a}_n}$$

بردار عمود بر سطح

* کرل (curl) : کاربرد آمپر برای مسیرهای غیرمتقارن :



$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{enc}$$

$$\vec{H}_0 = H_{x_0}\vec{a}_x + H_{y_0}\vec{a}_y + H_{z_0}\vec{a}_z$$

$$\int_{1}^{2} + \int_{2}^{3} + \int_{3}^{4} + \int_{4}^{1} = I_{enc}$$

$$\int_{1}^{2}\vec{H}\cdot d\vec{l} = \vec{H}\cdot\vec{\Delta L}_{1-2} = \lim_{\Delta x,\Delta y\to 0}\left(\left(H_{y_0} + \frac{\frac{\Delta x}{2}}{1!}\frac{\partial H_y}{\partial x} + \cdots\right)\cancel{\vec{a}_y}\right)\cdot \Delta y\, \cancel{\vec{a}_y}$$

زمانی می توان این کار را کرد که مسیرها کوتاه باشند.

نسبت به x تغییر دارد ⊛

$$= \lim_{\Delta x,\Delta y\to 0}\left(H_{y_0} + \frac{\Delta x}{2}\;\frac{\partial H_y}{2}\;\frac{\partial H_y}{\partial x} + (\cdots)\right)\Delta y$$

برای حذف این قسمت ها از سنلا استفاده شده است.

(۵۳)

$$\int_{۲}^{۳} \vec{H}\cdot\vec{dl} = \vec{H}\cdot\Delta L_{۲-۳} = \lim_{\Delta x,\Delta y \to ۰} \left(\left(H_{x_۰} + \frac{\frac{\Delta y}{۲}}{۱!}\frac{\partial H_x}{\partial y} + \cdots\right)\vec{a_x}\right)\cdot\left(-\Delta x\,\vec{a_x}\right)$$

$$= \lim_{\Delta x,\Delta y \to ۰} \left(-H_{x_۰} - \frac{\Delta y}{۲}\frac{\partial H_y}{\partial y} + \cdots\right)\Delta x$$

$$\int_{۳}^{۴} \vec{H}\cdot\vec{dl} = \vec{H}\cdot\vec{\Delta L}_{۳-۴} = \lim_{\Delta x,\Delta y \to ۰} \left(\left(H_{y_۰} + \frac{\left(-\frac{\Delta x}{۲}\right)}{۱!}\frac{\partial H_y}{\partial x} + \cdots\right)\vec{a_y}\right)\cdot\left(-\Delta y\,\vec{a_y}\right)$$

$$= \lim_{\Delta x,\Delta y \to ۰} \left(-H_{y_۰} + \frac{\Delta x}{۲}\frac{\partial H_y}{\partial x} + \cdots\right)\Delta y$$

$$\int_{۴}^{۱} \cdots \xrightarrow{\text{ادامه}}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x,\Delta y \to ۰} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} + \cancel{\cdots}\right)\Delta x\,\Delta y = I_{enc}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \lim_{\Delta x,\Delta y \to ۰} \frac{I_{enc}}{\Delta x\,\Delta y} = J_z$$

تعمیم مسئله:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y$$

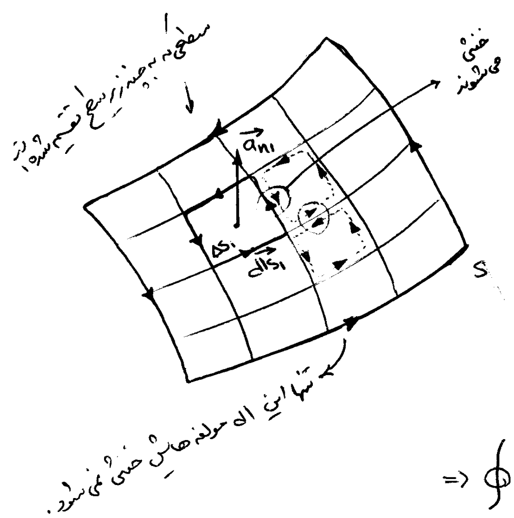
$$\vec{J} = J_x\vec{a_x} + J_y\vec{a_y} + J_z\vec{a_z} \quad \leftarrow \text{در حالت کلی}$$

$$\vec{H} = H_x \vec{a}_x + H_y \vec{a}_y + H_z \vec{a}_z$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

$$= \vec{a}_x \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) + \cdots \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}}$$

قانون آمپر یا قانون سوم ماکسول



* قضیهٔ استوکس : $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$

$\vec{dl}_{\Delta s}$: مسیری که Δs را احاطه کند.

$$\frac{\oint \vec{H} \cdot \vec{dl}_{\Delta s_1}}{\Delta s_1} = \left(\vec{\nabla} \times \vec{H} \right)_{n_1} = \left(\vec{\nabla} \times \vec{H} \right) \cdot \vec{a}_{n_1}$$

($\oint \vec{H} \cdot \vec{dl}_{\Delta s_1}$ ← I)

$$\Rightarrow \oint \vec{H} \cdot \vec{dl}_{\Delta s_1} = \left(\vec{\nabla} \times \vec{H} \right) \cdot \underbrace{\Delta s_1 a_{n_1}}_{\vec{\Delta s}_1}$$

- از جمع کردن dl ها، برخی از جملات با معادلهای خود حذف می شوند. در نتیجه :

$$\vec{I} = \oint \vec{H} \cdot \vec{dl} = \iint \big(\underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{H}}_{\vec{J}} \big) \cdot \vec{ds}$$

$$I = \iint \vec{J} \cdot \vec{ds}$$

$$I_{enc} = \oint \vec{H} \cdot \vec{dl}$$ آمپر

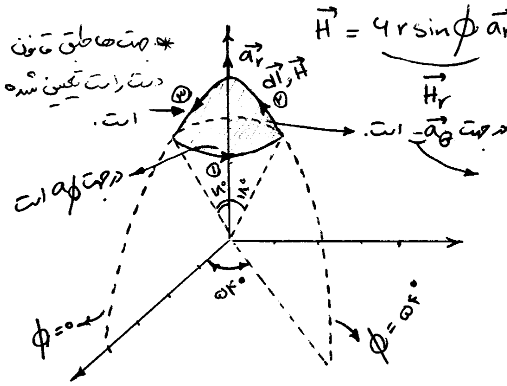
* در مورد توابع sin و cos اگر بخواهیم dl بگیریم، باید دورهٔ تناوب 2π باشد. (اگر 4π بود، ۲ بار می گیریم...)

** تمرین :

مطلوبست بررسی دو طرف قضیهٔ استوکس برای

$$\vec{H} = \underbrace{6 r \sin\phi \, \vec{a}_r}_{\vec{H}_r} + \underbrace{18 r \sin\theta \cos\phi \, \vec{a}_\phi}_{\vec{H}_\phi}$$

$$\begin{cases} r = 4 \\ 0 \leq \theta \leq 0.1\pi \;\; (18^\circ) \\ 0 \leq \phi \leq 0.3\pi \;\; (54^\circ) \end{cases}$$



این منفی در حدود انتگرال اثر می‌کند که به جای اینکه از بالا به پائین حرکت کنیم، از پائین به بالا حرکت می‌کنیم تا $-a_\theta$، $-(-a_\theta)$ شود و ــ ضرب شود.

طرف اول :

چون مولفهٔ $\vec{H}_\theta$ نداریم.

$$\oint \vec{H}\cdot\vec{dl} = \int_{①} \vec{H}\cdot\vec{dl} + \cancel{\int_{②} \vec{H}\cdot\vec{dl} + \int_{③} \vec{H}\cdot\vec{dl}} = 0$$

$$① \rightarrow r\sin\theta \, d\phi \, \vec{a}_\phi \qquad ② \rightarrow r\,d\theta \, \vec{a}_\theta \qquad ③ \rightarrow r\,d\theta \, \vec{a}_\theta$$

$$= \int H_\phi \, r\sin\theta \, d\phi = \int (18 r \sin\theta \cos\phi) \, r \sin\theta \, d\phi$$

$$= 18 \underset{4}{r}^2 \sin^2 \underset{0.1\pi}{\theta} \int_0^{0.3\pi} \cos\phi \, d\phi = 22.2^{A}$$

طرف دوم : $\iint (\vec{\nabla}\times\vec{H})\cdot\vec{ds}$ ، $\vec{ds} \rightarrow r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, \vec{a}_r$

پس تنها مولفهٔ a_r کرل را محاسبه می‌کنیم.

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(H_\phi \sin\theta) - \cancel{\frac{\partial H_\theta}{\partial\phi}}^{\,0}\right]\vec{a}_r + \cdots$$

$$= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(18 r \sin^2\theta \cos\phi\right)\vec{a}_r$$

$$= \frac{1}{r\sin\theta}\left(36 \, r \sin\theta\cos\theta\cos\phi\right)\vec{a}_r = 36 \cos\theta\cos\phi \, \vec{a}_r$$

$$\Rightarrow \iint 36\cos\theta\cos\phi\, \cancel{\vec{a_r}} \cdot r^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi\, \cancel{\vec{a_r}}$$

$$= 36 r^2 \int_0^{0.1\pi} \sin\theta\cos\theta\, d\theta \int_0^{0.3\pi} \cos\phi\, d\phi = 22.2\,A$$

* مسئله‌های ۲۶ تا ۲۸ از هیت حل شود (۲۸ و ۲۷، ۲۵ مهم).

* پتانسیل مغناطیسی اسکالر :

یادآوری :

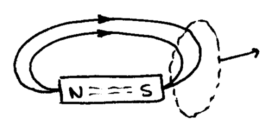
$$\vec\nabla \times (\vec\nabla V_m) = 0$$

مغناطیس

$$\vec\nabla\cdot(\vec\nabla\times\vec A) = 0$$

$$\vec B \triangleq \mu_0 \vec H \rightarrow \varphi_B = \iint \vec B\cdot d\vec s$$

چگالی شار مغناطیسی



سطح گوسی فرضی

$$\Rightarrow \oiint \vec B\cdot d\vec s = 0 = \iiint \vec\nabla\cdot\vec B\, dv = 0 \rightarrow \boxed{\vec\nabla\cdot\vec B = 0}$$

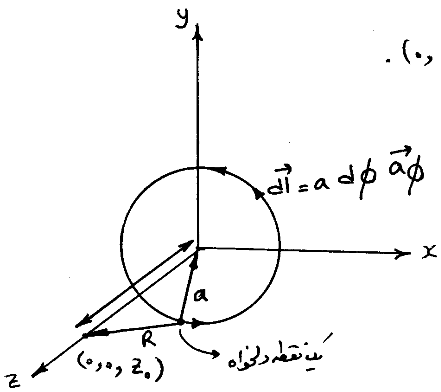
طبق قانون گوس

طبق قضیه دیورژانس

قانون گوس در مغناطیس

مثال از جنگ :

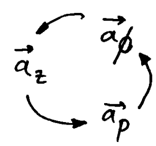
مطلوبست جهت شار مغناطیسی و میدان مغناطیسی در نقطهٔ $(0,0,z_0)$.



- از قانون بیوساوار استفاده می‌کنیم:

$$\vec{dB} = \mu_0 \left(\frac{I\,\vec{dl} \times \vec{R}}{4\pi (R^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$$\vec{R} = -a\,\vec{a}_\rho + z_0\,\vec{a}_z$$



$$\rightarrow \vec{dB} = \frac{\mu_0 I a\,d\phi\,a_\phi \times (-a\,\vec{a}_\rho + z_0\,\vec{a}_z)}{4\pi (a^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\mu_0 I a\,d\phi\,(+a\,\vec{a}_z + \cancel{z_0\,\vec{a}_\rho})}{4\pi (a^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \xrightarrow{} 0 \text{ به علت تقارن}$$

تقارن را بررسی می‌کنیم.

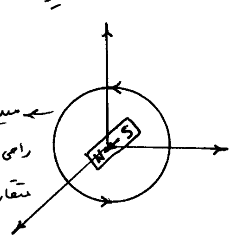
میدان های نیم دایرهٔ سمت راست، میدان‌های نیم دایرهٔ چپ را خنثی می‌کنند و فقط میدان‌های ناشی از جمع میدان ها در مرکز که به سمت a_z اشاره دارد، باقی می‌مانند و با هم جمع می‌شوند.

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I a (a\,\vec{a}_z)}{4\pi (a^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\mu_0 I a^2\,\vec{a}_z}{2 (a^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{if } z = 0 \rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I\,\vec{a}_z}{\underbrace{2a}_{\text{قطر دایره}}} = \mu_0 \underbrace{\frac{I}{D}\,\vec{a}_z}_{\vec{H}}$$

← نتیجه: میدان مغناطیسی در مرکز دایرهٔ یک میدان یکنواخت است و جهت آن به سمت بیرون است.

میدان معادل یک حلقه سیم را می‌توان با یک آهن ربای متقارن معادل گزاری کنیم.



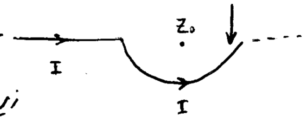
← نتیجه: هر حلقهٔ جریان مانند یک آهن ربا عمل می‌کند و برعکس.

* نکته :

سیم‌های مستقیم در راستای خودشان میدانی تولید نمی‌کنند.

میدان حاصل از این نصف میدان دایره کامل است یعنی:

$$\vec{H} = \left(\frac{I}{D}\vec{a}_z\right)\frac{1}{2}$$



زیرا $\frac{1}{2}$ محیط کل را در بر گرفته است.

مطابق بیوساوار

$$d\vec{H} = \frac{I\, d\vec{l} \times \vec{a}_R}{4\pi R^2}$$

چون هم‌راستا هستند و دو بردار هم‌جهت تولید می‌شود، در ضرب خارجی صفر خواهد شد.

---

* در یک ناحیهٔ بدون جریان الکتریکی (مثلاً در داخل یک آهن‌ربا)، $\vec{J}=0$ بوده پس:

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J} \rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}$$

← چگالی B بدون کرل بوده یعنی قابل بیان به صورت گرادیان یک میدان عددی است:

$$\vec{B} \triangleq -\mu_0\vec{\nabla}V_m \quad \text{یا} \quad \vec{H}=-\vec{\nabla}V_m$$

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}V$$
$$\vec{D}=-\varepsilon_0\vec{\nabla}V$$

* گرچه بارهای مغناطیسی مجزا وجود ندارند، ولی مثلاً با مشاهدهٔ مسیر براده‌های آهن در اطراف یک آهن‌ربا می‌توان چنان تصور کرد که:

قطب‌های شمال و جنوب (N و S) به ترتیب محل استقرار بارهای مغناطیسی + و − هستند.

← میدان داخل آهن‌ربا ناشی از یک پتانسیل اسکالر است و به همین دلیل بدون جریان، میدان وجود دارد.

* اما نکته‌ای که می‌توان به آن اشاره کرد آن است که گرچه پتانسیل مغناطیسی اسکالر بسیار شبیه به پتانسیل الکتریکی اسکالر می‌باشد، اما با آن تفاوت‌های مهم دارد. مهم‌ترین تفاوت آن است که تابع اسکالر V_m تابعی تک مقداری نیست، درحالی که پتانسیل الکتریکی تابعی تک مقدار است.

برای مطالعهٔ بیشتر به صفحهٔ ۱۳۲ کتاب مراجعه شود.

* پتانسیل مغناطیسی برداری:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \longrightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \underbrace{\vec{A}}_{\text{پتانسیل مغناطیسی برداری}}$$

$$\Rightarrow d\vec{B} = \vec{\nabla} \times d\vec{A}$$

طبق بیوساوار

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \vec{a}_R}{4\pi R^2} \qquad d\vec{A} = \frac{\mu_0 I d\vec{l}}{4\pi R}$$

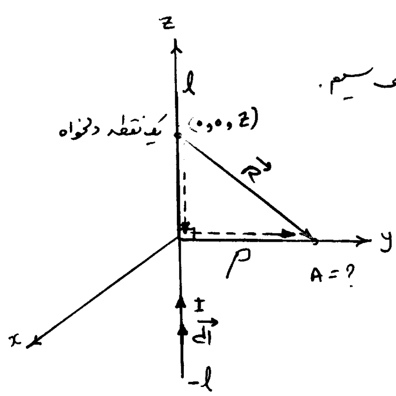
$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 I d\vec{l}}{4\pi R} \rightarrow \vec{A} = \int \frac{\mu_0 I d\vec{l}}{4\pi R}$$

A برداری است که در جهت جریان تولید می‌شود، اما مقدار آن ضعیف‌تر است. یعنی A نسخهٔ ضعیف‌شده‌ای از I خواهد بود. همین طور می‌توان گفت:

$$\vec{A} = \iint \frac{\mu_0 \vec{K} ds}{4\pi R}$$

$$\vec{A} = \iiint \frac{\mu_0 \vec{J} dv}{4\pi R}$$

*** مثال از جنگ



مطلوبست چگالی مغناطیسی B در نقطه‌ای به فاصلهٔ ρ روی عمود منصف سیم.

الف) با استفاده از محاسبهٔ بردار A و سپس تعیین B

ب) با کاربرد مستقیم بیوساوار در مورد B

$$\vec{R} = -z\vec{a}_z + \rho\vec{a}_\rho$$

$$\vec{A} = \int \frac{\mu_0 I\, d\vec{l}}{4\pi R_{d\vec{l}}}$$

$$= \int \frac{\mu_0 I \overbrace{dz\,\vec{a}_z}^{d\vec{l}}}{4\pi\sqrt{z^2+\rho^2}} = \frac{\mu_0 I\vec{a}_z}{4\pi}\int_{-l}^{l}\frac{dz}{\sqrt{z^2+\rho^2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I\vec{a}_z}{4\pi}\,\mathrm{Ln}\left\{\frac{z+\sqrt{\rho^2+z^2}}{\rho}\right\}_{-l}^{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\mathrm{Ln}\,\frac{\sqrt{\rho^2+L^2}+L}{\sqrt{\rho^2+L^2}-L}\,\vec{a}_z$$

برای محاسبهٔ B مشتق از کرل را به کار می بریم که در جهت z باشد.

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \;\underset{\text{در استوانه ای}}{=\!=\!=}\; \vec{\nabla}\times(A_z\vec{a}_z) = \frac{1}{\rho}\cancel{\frac{\partial A_z}{\partial\phi}}\vec{a}_\rho - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\vec{a}_\phi$$

چون A تابعی از ρ است و مشتق نسبت به ϕ صفر می شود.

$$= \frac{\mu_0 I l}{2\pi\rho\sqrt{l^2+\rho^2}}\,\vec{a}_\phi$$

$$\text{if} \quad L\to\infty \;\Rightarrow\; \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\,\vec{a}_\phi}$$

همانند قانون بیوساوار برای سیم با طول بی نهایت.

$$d\vec{l} = dz\,\vec{a}_z \;,\; \vec{R} = \rho\vec{a}_\rho - z\vec{a}_z$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I\, d\vec{l}\times\vec{R}}{4\pi(R^2)^{3/2}} \;\rightarrow\; \vec{B} = \int_{-l}^{l}\frac{\mu_0 I\, dz\,\vec{a}_z\times(\rho\vec{a}_\rho - z\vec{a}_z)}{4\pi(\rho^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I\rho\vec{a}_\phi}{4\pi}\int_{-l}^{l}\frac{dz}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I\rho\vec{a}_\phi}{4\pi}\left(\frac{z}{\rho^2\sqrt{\rho^2+z^2}}\right)_{-l}^{l} = \frac{\mu_0 I\rho}{2\pi}\left(\frac{l}{\rho^2\sqrt{\rho^2+l^2}}\right)\vec{a}_\phi$$

* فصل نهم : نیرو و گشتاور در میدان مغناطیسی :

معادله نیروی لورنتس $\rightarrow$ $\vec{F} = Q\,(\vec{E} + \vec{V}\times\vec{B})$ $\leftarrow$ بیانگر این است که به یک ذرهٔ Q هم نیروی مغناطیسی وارد می شود و هم الکتریکی. نیروی مغناطیسی هم با این شرط وارد می شود که ذره دارای سرعت باشد.

$$\vec{F} = Q\vec{V}\times\vec{B}$$

$$d\vec{F} = dQ\,\vec{V}\times\vec{B} = \rho_v\vec{V}\times\vec{B}\,dv = \vec{J}\times\vec{B}\,dv$$

$$dQ = \rho_v\,dv$$

$$\vec{J} = \rho_v\vec{V}$$

چون $\vec{J}dv = \vec{K}ds \equiv I\,d\vec{l}$

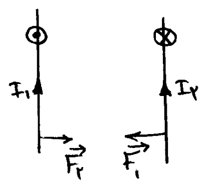
پس:

$$d\vec{F} = \vec{J}\times\underbrace{\vec{B}}_{\text{میدان خارجی}}\,dv$$

$$d\vec{F} = \vec{K}\times\vec{B}\,ds$$

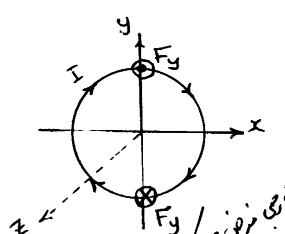
$$d\vec{F} = I\,d\vec{l}\times\vec{B}$$

مثال:



انگشتان دست راست در جهت جریان، کف دست میدان، شست جهت نیرو را نشان می دهد.

- نیرو و گشتاور در میدان مغناطیسی وارد بر حلقهٔ جریان :



یک میدان خارجی فرض می‌کنیم.

$$\vec{B} = \underbrace{B_x\vec{a_x} + B_y\vec{a_y}}_{B_{\parallel}\ \text{موازی}} + \underbrace{B_z\vec{a_z}}_{B_{\perp}\ \text{عمود}}$$

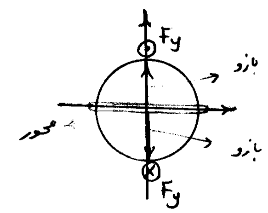
$B_{\parallel}$ موازی (چون حلقه موازی محور xy است).

$B_{\perp}$ عمود (چون حلقه عمود بر محور z است).

در این شکل، این قسمت نیرویی به حلقه در سمت فشرده شدن وارد می کند، که اگر جهت جریان برعکس بود، نیرو در جهت گشاد شدن حلقه ایجاد می شود.

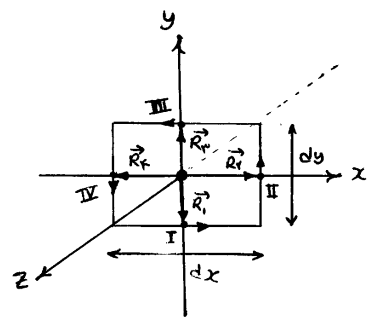
F_y برای نیمه بالایی به سمت بیرون است و برای نیمهٔ پایینی به سمت داخل است. بنابراین برآیند F_y ها خنثی و صفر می شود (x ها هم به همین ترتیب).

$\Leftarrow$ برآیند نیروهای وارد بر یک حلقه برابر صفر است.



- در حالت گشتاور، چون قسمت بالا به سمت بیرون و قسمت پائین به سمت درون است، پس همدیگر را تقویت کنند و حلقه به تمایل حول محور دارد.

⇐ گشتاورها همدیگر را تقویت می کنند.



- نیرو و گشتاور در میدان مغناطیسی وارد بر حلقهٔ مستطیلی جریان:

$$\vec{B} = B_x \vec{a}_x + B_y \vec{a}_y + B_z \vec{a}_z$$

چون عنصر دیفرانسیلی است، می توان وسط های اضلاع را به عنوان شاخص در نظر گرفت و محور حلقه یک نقطه خواهد بود، محور در نظر گرفته و فاصلهٔ وسط هر ضلع تا محور را بازو فرض می کنیم.

$$d\vec{F} = I\,d\vec{l} \times \vec{B}$$

نیروی وارد بر ضلع I

$$d\vec{F}_1 = I\,d\vec{l}_I \times \vec{B} = I\,dx\,\vec{a}_x \times (B_x \vec{a}_x + B_y \vec{a}_y + B_z \vec{a}_z)$$

$$d\vec{\tau} = \underbrace{\vec{R}}_{\text{بازوی گشتاور}} \times d\vec{F} \qquad \rightarrow \qquad d\vec{F}_I = I\,dx\,(B_y \vec{a}_z - B_z \vec{a}_y)$$

$$d\vec{\tau}_1 = -\frac{1}{2}\,dy\,\vec{a}_y \times \left(I\,dx\,(B_y \vec{a}_z - B_z \vec{a}_y)\right) = -\frac{1}{2} I B_y\,dx\,dy\,\vec{a}_x$$

* نیروهایی که مستقیماً وارد محور می شوند، اثری در گشتاور نخواهند داشت.
* اگر انگشتان دست راست در جهت گشتاور باشد، کف دست در جهت نیرو، شست شاخص گشتاور را نشان می دهد.

(محوری که نسبت به آن دوران می کند).

$$d\vec{F}_{II} = I\,d\vec{l}_{II} \times \vec{B} = I\,dy\,\vec{a}_y \times (B_x \vec{a}_x + B_y \vec{a}_y + B_z \vec{a}_z)$$

$$= I\,dy\,(-B_x \vec{a}_z + B_z \vec{a}_x)$$

$$d\vec{\tau}_{II} = \frac{1}{2}\,dx\,\vec{a}_x \times I\,dy\,(-B_x \vec{a}_z + B_z \vec{a}_x)$$

$$= \frac{1}{2} I\,dx\,dy\,B_x \vec{a}_y$$

شست را در جهت a_y می گذاریم، پس دوران به سمت داخل است. درست

$$d\vec{\tau}_{III} = d\vec{\tau}_{I}$$

$$d\vec{\tau}_{IV} = d\vec{\tau}_{II} \quad \Rightarrow \quad d\vec{\tau} = I\,\underbrace{dx\,dy}_{dS_z}\,\big(\underbrace{B_x\,\vec{a}_y - B_y\,\vec{a}_x}_{\vec{a}_z \times \vec{B}}\big)$$

$$\Rightarrow d\vec{\tau} = \underbrace{I\,d\vec{s}}_{d\vec{m}} \times \vec{B} \quad \rightarrow \quad \vec{\tau} = I\,\vec{S} \times \vec{B}$$

گشتاور دوقطبی مغناطیسی $d\vec{m}$

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}}$$

قرارداد: تولیدکننده‌ی گشتاور با ① شماره‌گذاری می‌شود. تولیدکننده‌ی دوران با ② شماره‌گذاری می‌شود.

* گشتاور نیرو یا عاملی است که باعث دوران نیرو حول یک محور می‌شود.

برای محاسبه گشتاور نیروی وارد بر عنصر جریان شماره‌ی ۲ در اثر میدان ناشی از جریان شماره‌ی ۱ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱- به کمک قانون بیوساوار (یا آمپر)، $d\vec{w}_1$ ($d\vec{B}_1$) را و نهایتاً $\vec{B}_1$ را که توسط جریان شماره‌ی ۱ در نقطه‌ی دلخواهی از عنصر شماره‌ی ۲ ایجاد می‌شود را محاسبه می‌کنیم.

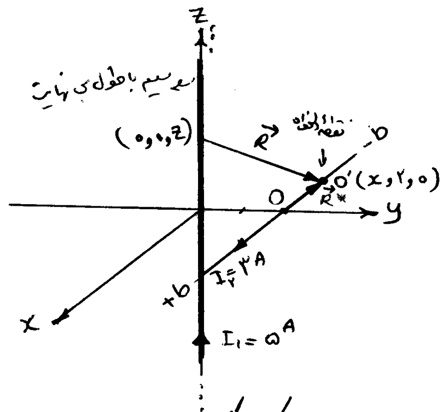
۲- توسط فرمول $d\vec{F} = \begin{cases} I_2\,d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1 \\ \vec{K}_2 \times \vec{B}_1\,dS_2 \\ \vec{J}_2 \times \vec{B}_1\,dv_2 \end{cases}$ را تشکیل می‌دهیم.

۳- $\cancel{F = \int d\vec{F}}$ ← راه اشتباه و مردود است.

۳- با استفاده از فرمول $d\vec{\tau} = \vec{R} \times d\vec{F}$ ، $d\tau$ را تشکیل می‌دهیم.

۴- با فرمول $\vec{\tau} = \int_{\text{حدود ابعاد عنصر شماره‌ی ②}} d\vec{\tau}$ یعنی $\vec{\tau} = \int \vec{R} \times d\vec{F}$ نهایتاً $\vec{\tau}$ محاسبه می‌شود.

مثال $\frac{۱۵-۹}{\text{صفحه ۱۵۰}}$



$$O(0,2,0) \Rightarrow \vec{T} = ?$$

مرحله ①:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\vec{a}_R = \frac{\mu_0 I_1 \vec{R}}{2\pi R^2}$$

تولید کننده‌ی گشتاور (شماره ۱) موازی هر محوری باشد آن را در نظر نمی‌گیریم که در اینجا z است. $\longrightarrow \vec{R} = +x\vec{a}_x + 2\vec{a}_y$

$$\Rightarrow \vec{B}_1 = \frac{\mu_0(5)(x\vec{a}_x + 2\vec{a}_y)}{2\pi(4+x^2)}$$

مرحله ②:

(L) تولید کننده‌ی دوران از نوع سیم است $\xrightarrow{\text{پس}}$

$$d\vec{F} = I_2\, d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1 = 3dx\vec{a}_x \times \frac{5\mu_0(x\vec{a}_x + 2\vec{a}_y)}{2\pi(4+x^2)} = \frac{15\mu_0 dx\vec{a}_z}{\pi(4+x^2)}$$

مرحله ③:

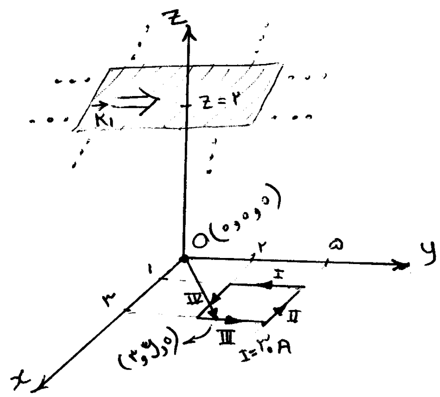
$$d\vec{T} = \vec{R}^* \times d\vec{F} = x\vec{a}_x \times \frac{15\mu_0\, dx\vec{a}_z}{\pi(4+x^2)}$$

$$4\pi\times10^{-7}$$

$$= \frac{-15x\cancel{\mu_0}dx\vec{a}_y}{\pi(4+x^2)}$$

$$= \frac{-6\times10^{-6}x\,dx\,\vec{a}_y}{4+x^2} \xRightarrow{\text{مرحله ④}} \vec{T} = -6\times10^{-6}\vec{a}_y\int_{-b}^{b}\frac{x\,dx}{4+x^2}$$

* در این مثال اگر یک حلقه‌ی مستطیلی بود، باید برای هر ضلع تک تک محاسبه می‌کردیم.



مثال $\frac{۱۴-۹}{\text{صفحهٔ ۱۵۰}}$

صفحهٔ $z=2$ ، $\vec{K}_1 = 400\,\vec{a}_y$

صفحهٔ $y=0$ ، $\vec{K}_2 = 300\,\vec{a}_z$

گشتاور حاصل از $z=2$ محاسبه شده است :
(در مبدأ)

$$\vec{B} = \frac{1}{2}\mu_0 \vec{K} \times \vec{a}_r$$

$$\vec{B}_1 = \mu_0 \frac{1}{2}\left(400\,\vec{a}_y\right) \times \left(-\vec{a}_z\right) = -200\,\mu_0 \vec{a}_x$$

$$d\vec{F}_x = 30\,dy\,\vec{a}_y \times \left(-200\,\mu_0\,\vec{a}_x\right) = \mu_0\, 600\ dy\,\vec{a}_z$$

$$d\vec{\tau}_I = \left(3\vec{a}_x + y\vec{a}_y\right) \times \mu_0 6000\,dy\,\vec{a}_z = \mu_0\left(-18000\,\vec{a}_y + 60\,y\,\vec{a}_x\right)dy$$

$$\vec{\tau}_I = -18000\,\vec{a}_y \int_1^3 dy + 6000\,\vec{a}_x \int_2^5 y\,dy = -54000\,\mu_0\vec{a}_y + 6300\,\mu_0\vec{a}_x$$

* مدارهای مغناطیسی :

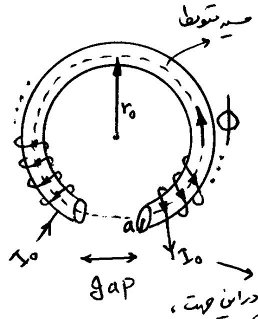
$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{enc} = \underbrace{N}_{\text{تعداد دور}}\overset{\text{در مدار مغناطیسی}}{I} = \overset{\text{نیروی محرکهٔ مغناطیسی (mmf)}}{V_m} \qquad (KVL)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{B}\,dv = 0 \quad \Rightarrow \underbrace{\oint\!\!\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0}_{\text{شار مغناطیسی خروجی از هر سطح بستهٔ (کره) ، صفر است .}} \qquad (KCL)$$

$$V_m = \underbrace{R}_{\text{رلوکتانس (مقاومت مغناطیسی)}}\ \underbrace{\phi}_{\text{شار}}$$

- مثال از جیک:



شصت در این جهت، با رانگشت دست راست جهت میدان مغناطیسی یا ϕ را نشان می دهد.

فرض کنید N دور سیم به دور یک هستهٔ چنبره ای از مادهٔ فرومغناطیس با نفوذپذیری μ پیچیده شده است. هسته دارای شعاع متوسط r_0، سطح مقطع دایره ای به شعاع a ($a \ll r_0$) و یک شکاف هوای باریک با ضخامت g است. جریان I_0 از سیم می گذرد.

الف) چگالی شار مغناطیسی B_f در هستهٔ فرومغناطیس چقدر است؟

ب) H_f چقدر است؟ ج) H_g در شکاف هوا را تعیین کنید.

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot \vec{ds} \triangleq B \cdot S$$

$$\underbrace{\phi_f}_{\text{شار عبوری از هسته}} \simeq \overbrace{\phi_g}^{\text{شار عبوری از فاصله هوایی}} \Rightarrow B_f S_f = B_g S_g$$

$$\boxed{B_g = \frac{S_f}{S_g} B_f} \leftarrow S_g \neq S_f \text{ اگر}$$

$$B_g = \mu_0 H_g$$

$$B_f = \mu_0 \mu_r H_f$$

$$\Rightarrow \mu_0 H_g = \frac{S_f}{S_g} \mu_0 \mu_r H_f \Rightarrow \boxed{H_g = \frac{S_f}{S_g} \mu_r H_f}$$

$$\begin{cases} B_g = B_f \\ H_g = \mu_r H_f \end{cases} \leftarrow S_g \simeq S_f \text{ اگر}$$

KVL مغناطیسی $\rightarrow$ $\oint \vec{H} \cdot \vec{dl} = N I_0 \Rightarrow \int_f \vec{H} \cdot \vec{dl} + \int_g \vec{H} \cdot \vec{dl} = N I_0$

$$\rightarrow H_f L_f + H_g L_g = N I_0$$

$$H_f (2\pi r_0 - L_g) + H_g L_g = N I_0$$

$$H_f (2\pi r_0 - L_g) + \mu_r L_g H_f = N I_0 \qquad \text{با فرض } S_g \simeq S_f$$

$$H_f = \frac{N I_0}{(2\pi r_0 - L_g) + \mu_r L_g} \Rightarrow B_f = \frac{\mu_0 \mu_r N I_0}{(2\pi r_0 - L_g) + \mu_r L_g}$$

$$\phi = \phi_f = \phi_g = B.S = \frac{\mu_0 \mu_r N I_0 S}{(2\pi r_0 - L_g) + \mu_r L_g}$$

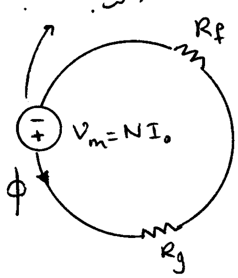
$\xrightarrow{\text{تقسیم بر}}$ $\mu_0 \mu_r S$

$$\phi = \frac{N I_0}{\dfrac{\overbrace{2\pi r_0 - L_g}^{L_f}}{\underbrace{\mu_0 \mu_r}_{\mu} S_f} + \dfrac{\mu_r L_g}{\mu_0 \mu_r S_g}}$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{N I_0}{\underbrace{\dfrac{L_f}{\mu S_f}}_{R_f} + \underbrace{\dfrac{L_g}{\mu_0 S_g}}_{R_g}}$$

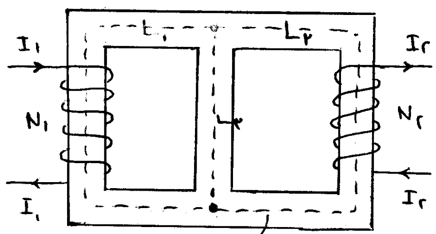
$$\Rightarrow \boxed{N I_0 = \phi (R_f + R_g)}$$

علامت + همیشه در جهت خروج شار است.

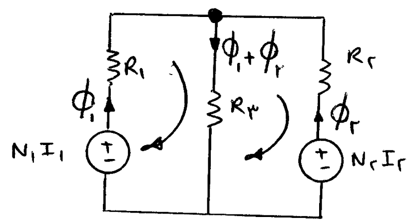


$$\sum_{i=1}^{n} R_i \phi = \sum_{j=1}^{m} N_j I_j \longrightarrow \text{KVL}$$

- مثال از چنگ :



یک مسیر بسته در نظر می‌گیریم.



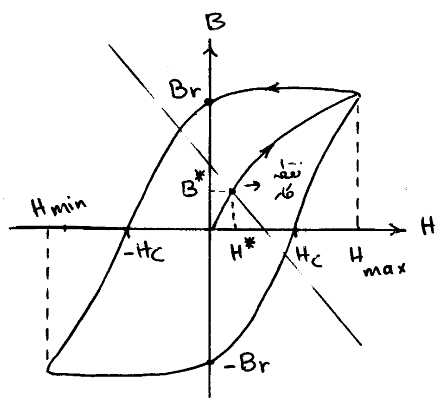
$KCL : \sum \phi_k = 0$ روی گره K ام

$$-N_1I_1 + \phi_1 R_1 + R_3(\phi_1+\phi_2) = 0$$

$$-N_2I_2 + R_2\phi_2 + R_3(\phi_1+\phi_2) = 0 \Rightarrow \phi_1 = \cdots \quad , \quad \phi_2 = \cdots$$

---

* هیسترزیس یا پس ماند :



خط $y = -ax + b$

$$H_fL_f + H_gL_g = NI_0$$

$$H_fL_f + \frac{B_g}{\mu_0}L_g = NI_0 \Rightarrow B_f = -\mu_0\frac{L_f}{L_g}H_f + \frac{\mu_0}{L_g}NI_0$$

$$\Rightarrow H_fL_f + \frac{B_f}{\mu_0}L_g = NI_0 \Rightarrow B_f + \mu_0\frac{L_f}{L_g}H_f = \frac{\mu_0}{L_g}NI_0$$

$$\boxed{\frac{B^*}{H^*} = \mu}$$

پایان

* خلاصه مطالب و فرمول های مهم :

همگرایی = کرل

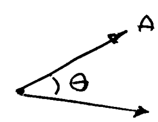
واگرایی = دیورژانس

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1)\,\vec a_x + (y_2 - y_1)\,\vec a_y + (z_2 - z_1)\,\vec a_z$$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

جهت بردار A: $\vec a_{AB} = \dfrac{\vec{AB}}{|AB|}$

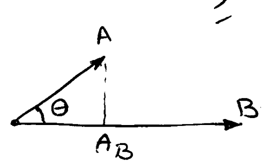
$$\vec A \cdot \vec B = |A||B| \cos\theta$$



$$\vec A \cdot \vec B = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$\begin{cases} \vec a_x \cdot \vec a_x = 1 \\ \vec a_y \cdot \vec a_y = 1 \\ \vec a_z \cdot \vec a_z = 1 \end{cases} \quad , \quad \begin{matrix} a_x \cdot a_y = 0 \\ a_y \cdot a_z = 0 \\ a_x \cdot a_z = 0 \end{matrix}$$

* کاربرد ضرب داخلی ، پیدا کردن سایه یک بردار بر روی بردار دیگر است.

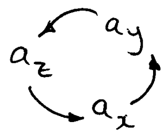


$$\cos\theta = \frac{\vec A_B}{\vec A} \Rightarrow A_B = A\cos\theta = A \cdot a_B$$

جهت * اندازه = بردار $\Rightarrow \vec A_B = (\vec A \cdot \vec a_B)\,\vec a_B$

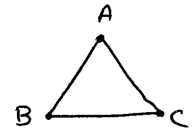
تصویر برداری A روی B

$$\vec{A} \times \vec{B} = \underbrace{|A||B| \sin\theta}_{\text{اندازه}} \; \underbrace{\vec{a_n}}_{\text{جهت}}$$



موافق = +

مخالف = −

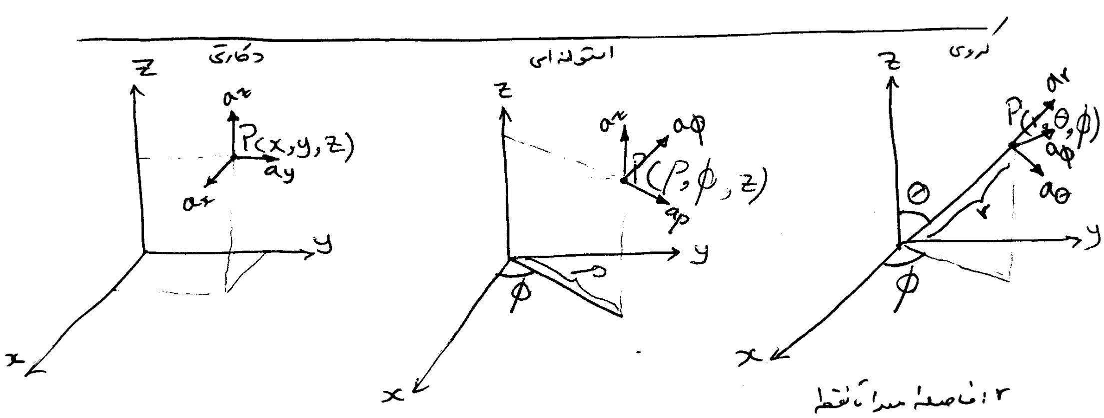


$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \vec{BA} \times \vec{BC}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

* حاصلضرب خارجی دو بردار بر هر دو عمود است.

* در ضرب داخلی دو بردار، ابتدا بردار واحد را تعیین می‌کنیم و سپس با توجه به آن می‌توان جهات اضافی بردار برگشته را حذف نمود.



r : فاصله مبدا تا نقطه

θ : زاویه r با محور z

ϕ : زاویه در افق با محور x

* بردارهای یکه همواره در جهت افزایش اشاره می‌کنند.

دیفرانسیل های طول:

دیفرانسیل طول

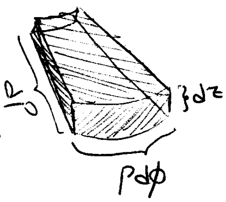
دکارتی → $\vec{dl} = dx\,\vec{a_x} + dy\,\vec{a_y} + dz\,\vec{a_z}$ و دیفرانسیل حجم $dv = dx\,dy\,dz$

$$ds_x = dy\,dx \begin{cases} \nearrow ds_{x^+} = +dy\,dz\ \vec{a_x} \\ \searrow ds_{x^-} = -dy\,dz\ \vec{a_x} \end{cases}$$

$d\phi = \rho\,d\phi$

استوانه ای ↗ $\vec{dl} = d\rho\,\vec{a_\rho} + \rho\,d\phi\,\vec{a_\phi} + dz\,\vec{a_z}$

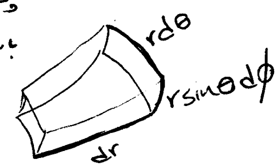
$$ds_\phi = d\rho . dz \begin{cases} \vec{ds_{\phi^+}} = +d\rho\,dz . \vec{a_\phi} \\ \vec{ds_{\phi^-}} = -d\rho\,dz . \vec{a_\phi} \end{cases}$$



$dv = d\rho\ \rho\,d\phi\,dz$

$d\phi \rightarrow = r\sin\theta\ d\phi$ → چون φ در صفحهٔ x و y است و باید به بالا منتقل شود.

$d\theta \rightarrow = r\,d\theta$



کروی → $\vec{dl} = dr\,\vec{a_r} + r\,d\theta\,\vec{a_\theta} + r\sin\theta\,d\phi\,\vec{a_\phi}$

بردار سطح

$$ds_r = r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi \begin{cases} \nearrow ds_{r^+} = +r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi\ \vec{a_r} \\ \searrow ds_{r^-} = -r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi\ \vec{a_r} \end{cases}$$

برای به دست آوردن هر کدام کافی است دو تای دیگر را در سمت ds مورد نظر ضرب کنیم

$dv = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$

$\cos = \dfrac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$

$\sin = \dfrac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$

$\sec = \dfrac{1}{\cos}$

$\operatorname{cosec} = \dfrac{1}{\sin}$

تبدیل‌ها:

استوانه‌ای به دکارتی
$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi \\ z = z \end{cases}$$

$\Rightarrow$ دکارتی به استوانه‌ای
$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi = \tan^{-1}\dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

* مقدار صحیح زاویه ϕ با توجه به x و y تعیین می‌شود که در کدام ناحیه باشد.

$$A_x = A\cdot a_x = (A_\rho \vec{a_\rho} + A_\phi \vec{a_\phi} + A_z \vec{a_z})$$
$$= A_\rho \underbrace{\vec{a_\rho}\cdot\vec{a_x}}_{\cos\phi} + A_\phi \underbrace{\vec{a_\phi}\cdot\vec{a_x}}_{\cos(90+\phi)} + A_z \underbrace{\vec{a_z}\cdot\vec{a_x}}_{0}$$

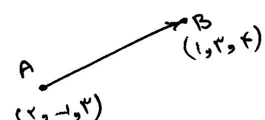
$$\cos(90+\phi) = -\sin\phi$$
$$\sin(90+\phi) = \cos\phi$$

$$A_y = A\cdot a_y = (A_\rho \vec{a_\rho} + A_\phi \vec{a_\phi} + A_z \vec{a_z})$$
$$= A_\rho \underbrace{\vec{a_\rho}\cdot\vec{a_y}}_{\sin\phi} + A_\phi \underbrace{\vec{a_\phi}\cdot\vec{a_y}}_{\sin(90+\phi)} + A_z \underbrace{\vec{a_z}\cdot\vec{a_y}}_{0}$$

$$A_z = A\cdot a_z = (A_\rho \vec{a_\rho} + A_\phi \vec{a_\phi} + A_z \vec{a_z})$$
$$= A_\rho \underbrace{\vec{a_\rho}\cdot\vec{a_z}}_{0} + A_\phi \underbrace{\vec{a_\phi}\cdot\vec{a_z}}_{0} + A_z \underbrace{\vec{a_z}\cdot\vec{a_z}}_{1} \Rightarrow A_z = A_z$$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$



* برای به دست آوردن تنها نقطه ابتدای بردار مهم است:

$$\phi = \tan\left(\frac{-1}{2}\right)$$

③

کروی به دکارتی

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

دکارتی به کروی

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \cos^{-1}\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \phi = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases}$$

$$A_x = \vec{A}\cdot\vec{a}_x = A_r\underbrace{\vec{a}_r\cdot\vec{a}_x}_{\sin\theta\cos\phi} + A_\theta\underbrace{\vec{a}_\theta\cdot\vec{a}_x}_{\sin(90+\theta)\cos\phi} + A_\phi\underbrace{\vec{a}_\phi\cdot\vec{a}_x}_{\cos(90+\phi)}$$

$$A_y = \vec{A}\cdot\vec{a}_y = A_r\underbrace{\vec{a}_r\cdot\vec{a}_y}_{\sin\theta\sin\phi} + A_\theta\underbrace{\vec{a}_\theta\cdot\vec{a}_y}_{\sin(90+\theta)\sin\phi} + A_\phi\underbrace{\vec{a}_\phi\cdot\vec{a}_y}_{\sin(90+\phi)}$$

$$A_z = \vec{A}\cdot\vec{a}_z = A_r\underbrace{\vec{a}_r\cdot\vec{a}_z}_{\cos\theta} + A_\theta\underbrace{\vec{a}_\theta\cdot\vec{a}_z}_{\cos(90+\theta)} + A_\phi\underbrace{\vec{a}_\phi\cdot\vec{a}_z}_{0}$$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}$$

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^{9}$$

* برای بدست آوردن E_t در استوانه‌ای، ابتدا باید E_1 ، E_2 و ... به طور جداگانه به استوانه‌ای برده شود. سپس در استوانه‌ای باهم جمع شوند.

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{R^2} \vec{a}_{12}$$

$$E_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_i}{R_2} \vec{a}_R$$

شدت بار حاصل از چند بار نقطه‌ای $\longrightarrow \vec{E}_t = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_i}{R_i^2} \vec{a}_{Ri}$

اگر تعداد بارها به بی‌نهایت میل کند، یک بار پیوسته توده‌ای تشکیل می‌شود. در این حالت ناچار به استفاده از انتگرال هستیم.

$$\vec{a}_R = \frac{\vec{R}}{|R|} \Longrightarrow \frac{\vec{a}_R}{R^2} = \frac{\vec{R}}{(R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$|R| = (R^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$$

منعکس در فرمول F

$$\Rightarrow \vec{F}_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{R}_{12}}{(R_{12}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad , \quad \vec{E}_i = \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{R}_i}{|R_i^2|^{\frac{3}{2}}}$$

$\vec{E}_t$ در بار پیوسته $\longrightarrow \int \underbrace{\frac{dQ_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{R}}{(R^2)^{\frac{3}{2}}}}_{d\vec{E}}$

بار خطی $dQ = \rho_L \, dl$

بار سطحی $dQ = \rho_s \, ds$

بار حجمی $dr = \rho_r \, dr$

$$\Rightarrow E_t = \begin{cases} \iiint \frac{\rho_r \, dr}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{R}}{(R^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \iint \frac{\rho_s \, ds}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{R}}{(R^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \int \frac{\rho_L \, dl}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{R}}{(R^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

مراحل کار در مسائل شدت میدان الکتریکی :

۱ - تعیین نقطهٔ شروع و انتها (انتها داده می‌شود و نقطهٔ ابتدا نیز هر نقطه‌ای جز مبدأ می‌تواند باشد).

۲ - تشکیل کسر $\dfrac{\vec{R}}{|R^2|^{\frac{3}{2}}}$

۳ - تشکیل dE $\qquad$ $\vec{dE} = \dfrac{dQ}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{R}}{|R^2|^{\frac{3}{2}}}$

۴ - بررسی وجود تقارن که معمولاً باعث حذف یکی از قسمت‌های برداری می‌شود.

۵ - انجام عمل انتگرال‌گیری (مقادیر ثابت و یکنواخت از انتگرال بیرون می‌آیند)

* بار خطی نیز یک نوع بار استوانه‌ای است. $\qquad$ * میدان الکتریکی بر سطح عمود است.

* در تعیین dQ (دیفرانسیل‌های dl، ds و یا dv) دقت شود که این دیفرانسیل‌ها مربوط به بار هستند نه بردار فاصله تا بار. به عنوان مثال یک بار خطی که روی محور z ها است، دارای $dl = dz$ می‌باشد. به عبارت دیگر dQ بیانگر تغییرات بار خطی یا سطحی و ... در جهت‌های مختلف است.

* تقارنی که گفته شد، در قسمت $\dfrac{\vec{R}}{(R^2)^{\frac{3}{2}}}$ وجود خواهد داشت که مربوط به نوع بار است. مثلاً در یک بار خطی که روی محور z ها است، چون در یک فاصلهٔ متقارن و مساوی، بارهایی که در سمت + و بارهایی که در سمت - محور z ها قرار دارند، با هم برابرند. پس در $\dfrac{\vec{R}}{(R^2)^{\frac{3}{2}}}$ اگر قسمت z وجود داشته باشد حذف می‌شود، چون مولفهٔ z میدان خنثی و صفر خواهد شد. $\quad$ تکراری

↑ این مسئله خود به خود با به دست آوردن R معلوم می‌شود.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{(z^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{x^2}$$

یک مقدار ثابت

* اگر صفحه‌ای باردار (بار سطحی) در صفحهٔ yz قرار داشته باشد، $(z, y, 0)$، مولفه‌های dz, dy باقی می‌مانند یعنی

$$dQ = \rho_s\, ds = \rho_s\, dy\, dz$$

بیانگر این است که بار در کدام جهت‌ها قرار دارد.

حال اگر بخواهیم میدان را در نقطه‌ای دلخواه (x_0, y_0, z_0) اندازه بگیریم، مولفه‌های y و z میدان به دلیل تقارن صفحه در صفحهٔ yz، از فرمول $\dfrac{\vec{R}}{(R^2)^{\frac{3}{2}}}$ حذف خواهند شد.

قضیهٔ دیورژانس $\Rightarrow$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_v$ چگالی حجمی بار ، $D = \frac{\varphi_E}{S}$

شار الکتریکی عبوری از سطح

مساحت سطح

$\vec{D}$: چگالی شار الکتریکی

$$\operatorname{div} F = \nabla\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

دیورژانس هر بردار عددی ثابت است.

$$\vec{F} = F_1(x,y,z)\vec{a}_x + F_2(x,y,z)\vec{a}_y + F_3(x,y,z)\vec{a}_z$$

$$\Delta\varphi_E = D_S\,\Delta S\cos\theta = \vec{D}_S\cdot\vec{\Delta S}$$

شار عبوری از سطح ΔS

θ: زاویهٔ بین میدان و خط عمود بر سطح ،

شار که از n تا ΔS می‌گذرد $= \sum_{i=1}^{n} \vec{D}_{S_i}\cdot\vec{\Delta S}_i$

$$n\to\infty \Rightarrow \varphi_E = \iint \vec{D}\cdot\vec{ds}$$

بردار عمود بر سطح

قانون گوس $\Rightarrow$ $\psi = Q_{enc}$

شار عبوری از یک سطح بسته

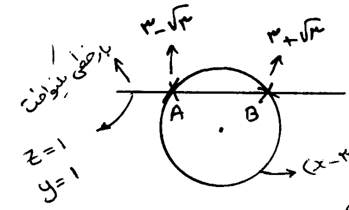
$$\Rightarrow \psi = \oiint \vec{D}\cdot\vec{ds} = Q_{enc}$$

$$\oiint \vec{D}\cdot\vec{ds} = \iiint \rho_v\,dv = Q_{enc}$$

حجمی که در سطح بسته احاطه شده است.

دیفرانسیل سطح کروی $= r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi\;\vec{a}_r$

(5)



$(x-۳)^۲+(y-1)^۲+z^۲=۴$ کره‌ای به مرکز (۳و۱و۰) است.

* برای به دست آوردن طول AB، باید معادله‌ی خط را با معادله‌ی دایره صدق دهیم (تقاطع دهیم).

$$\Rightarrow (x-۳)^۲+1=۴$$
$$x-۳=\pm\sqrt{۳}$$
$$x=۳\pm\sqrt{۳}$$

* در این شکل اگر بخواهیم بار درون کره و در نتیجه شار خروجی از آن را اندازه بگیریم، $Q=\int \rho_L dl$ می‌شود که $dl=dx$ است چون در سمت y و z ثابت است.

---

* طبق قانون گوس در داخل اجسام رسانا و توپر میدان صفر است.

- معادلات ماکسول:
در حالت استاتیک

دیورژانس به معنای واگرایی
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho_v$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$ ← میدان مغناطیسی واگرایی ندارد

کرل به معنای همگرایی
$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$$ ← میدان الکتریکی همگرایی ندارد
$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}$$

$$\vec{D} = \underbrace{\frac{Q}{4\pi r^2}}\vec{a}_r$$

زیرا Q خط شار به طور متقارن به سمت بیرون نقطه امتداد دارند و از یک سطح کروی فرضی $4\pi r^2$ عبور می کنند

پس در فضای آزاد $\rightarrow$ $D = \varepsilon_0 E$

$$D = \int_{\text{حجم}} \frac{\rho_v \, dv}{4\pi R^2} a_R$$

کاربرد قانون گوس در عنصر دیفرانسیلی حجم :

$$\iint_{\text{جلو}} \vec{D}\cdot\vec{ds} = \vec{D}\cdot\vec{\Delta s}_{\text{جلو}} = \left(\left(D_{x_0} + \frac{\frac{\Delta x}{2}}{1!}\frac{\partial D_x}{\partial t}\right)\vec{a}_x\right)\cdot\underbrace{D_y D_z \vec{a}_x}_{\Delta s}$$

$$= \left(D_{x_0} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}\right)\Delta y \Delta z$$

$$\iint_{\text{پشت}} \vec{D}\cdot\vec{ds} = \vec{D}\cdot\vec{\Delta s}_{\text{پشت}} = \left(\left(D_{x_0} - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}\right)\vec{a}_x\right)\cdot\left(-\Delta y \Delta z \vec{a}_z\right)$$

البته در حالتی است که سطح بسیار کوچک باشد و شار به صورت عمود بر آن خارج شود.

$$= \left(-D_{x_0} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}\right)\Delta y \Delta z$$

$$\rightarrow \iint_{\text{جلو}} + \iint_{\text{پشت}} = \frac{\partial \Delta x}{\partial x}\Delta y \Delta z \Delta x$$

به همین ترتیب $\rightarrow$

$$\iint_{\text{راست}} + \iint_{\text{چپ}} = \frac{\partial \Delta y}{\partial y}\underbrace{\Delta x \Delta y \Delta z}_{\Delta v}$$

6

$$\iiint_{\text{بالا}} + \iiint_{\text{پایین}} = \frac{\partial \Delta z}{\partial z}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

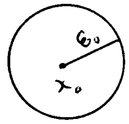
$$\Rightarrow \oiint \vec{D}\cdot\vec{ds} = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\Delta x\,\Delta y\,\Delta z = Q_{enc}$$

به دلیل اینکه D_x و ... به طور خطی با x و y و z تغییر می‌کنند، از مشتق جزئی استفاده شده است.

چگالی بار حجمی

$$\Rightarrow \frac{\partial \Delta x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{Q_{enc}}{\Delta v} = \rho_v$$

بسط تیلور $\rightarrow$ $$f(x) = f(x_0) + \frac{\varepsilon}{1!}\left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x_0} + \underbrace{\frac{\varepsilon^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\right|_{x_0} + \cdots}_{\text{اگر } \varepsilon \text{ به حد کافی کوچک باشد این قسمت‌ها حذف می‌شوند.}}$$



$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{a_x} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{a_y} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{a_z}$$

$$\vec{D} = D_x\vec{a_x} + D_y\vec{a_y} + D_z\vec{a_z}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_v} \quad **$$

قضیه دیورژانس $\Rightarrow$ $$\oiint \vec{D}\cdot\vec{ds} = \iiint \rho_v\,dv = \iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{D}\,dv = Q_{enc} = \psi_e$$

در مسائل قانون گوس بررسی شود:
- میدان با چه مختصاتی تغییر می‌کند (یا D تابع چه متغیری است)
- D چه مولفه‌هایی دارد

$$F = -Q\vec{E}$$

$$dw = \vec{F}\cdot\vec{dl} = -Q\vec{E}\cdot\vec{dl}$$

نیرو   جابجایی

$$w_{AB} = \int_B^A dw \longrightarrow w_{AB} = -Q\int_B^A \vec{E}\cdot\vec{dl} = E_p$$

کار لازم برای حرکت دادن Q در میدان $\vec{E}$

انرژی پتانسیل

$$V_{AB} \triangleq \frac{w_{AB}}{Q}$$

$$V_{AB} = V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E}\cdot\vec{dl}$$

سطحی : $\vec{E} = \dfrac{\rho_s}{2\varepsilon_0}$ $\quad \rightarrow V_A - V_B = \dfrac{\rho_s}{2\varepsilon_0}(y_B - y_A)$

بار خطی : $\vec{E} = \dfrac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\rho}$ $\quad \rightarrow V_A - V_B = \dfrac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{\rho_B}{\rho_A}$

در بار نقطه‌ای :

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B}\right)$$

محاسبه V وقتی به E دسترسی نداریم.

$$(V_B = 0) \rightarrow V_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_A}$$

در حالتی که E معلوم نباشد از اینها استفاده می‌شود

در حالت کلی‌تر $\rightarrow$ $V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow dV = \dfrac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 R}$

خطی $dQ = \rho_L dl$

سطحی $dQ = \rho_s ds$

حجمی $dQ = \rho_v dv \longrightarrow V = \int dV$

قضیه‌ها:
و قوانین

قضیهٔ دیورژانس → $\iint \vec{J}\cdot d\vec{s} = \iiint \nabla\cdot\vec{J}\,dv = I_{enc}$

قانون گوس → $\underset{\text{شار}}{\Psi} = \oint \vec{D}_s\cdot d\vec{s} = Q_{enc} = \iiint \rho_v\,dv$

انرژی یا پتانسیل الکتریکی $W_E = \mathcal{E}_P = \frac{1}{2}\iiint \varepsilon_0 |E|^2\,dv$

($\frac{dW_E}{dv}$ = چگالی انرژی الکتریکی)

$$V_{AB} = V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

قانون مداری امپر → $\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{enc}$

قانون امپر → $\vec{J} = \vec{\nabla}\times\vec{H}$

$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$

گرادیان گرفتن از یک تابع، بردار عمود در جهت افزایش بر سطح را خواهد داد.

$\vec{J} = \sigma\vec{E}$

σ هدایت ویژه

$$I = \frac{dQ}{dt} = \int K\,dy = \iint \vec{J}\cdot d\vec{s}$$

پلاریزاسیون $P = (\varepsilon_R - 1)\varepsilon_0\vec{E}$

قضیهٔ استوکس → $\oint H\cdot d\vec{l} = \int (\overbrace{\vec{\nabla}\times\vec{H}}^{\vec{J}})\cdot d\vec{s} = I_{enc}$

قانون بیوساوار → $d\vec{H} = \frac{I\,d\vec{l}}{4\pi R^2}\vec{a}_R = \frac{I\,dl \times \vec{R}}{4\pi (R^2)^{\frac{3}{2}}}$

چگالی شار مغناطیسی $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$$\varphi_B = \iint \vec{B} \cdot \vec{ds}$$

$$\Rightarrow \oiint \vec{B} \cdot \vec{ds} = \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \, dv = 0 \rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$$

طبق گوس

طبق دیورژانس

$$\vec{J} = \rho_v \vec{v}$$

سرعت

$$\vec{D} = \rho_s \quad , \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$

جهت D در هر نقطه همان جهت خطوط شار در آن نقطه است.

$$Q = \sum Q_n$$ نقطه‌ای

$$Q = \int \rho_L \, dL$$ خطی

$$Q = \int \rho_s \, ds$$ سطحی

$$Q = \iiint \rho_v \, dv$$ حجمی

انواع بارها

عمق نفوذ $\Rightarrow \delta = \dfrac{1}{\sqrt{\pi f \mu_0 \sigma}}$

$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$

8

حجم کره $\frac{4}{3}\pi r^3$

$$R = \frac{L}{\sigma S}$$ ← مقاومت طولی سیم

$$R^* = \frac{\ln \frac{b}{a}}{2\pi \sigma^* L}$$ ← مقاومت عرضی سیم

ثابت زمانی $\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}$

گشتاور دوقطبی ← $\vec{P} = Q\vec{d}$

$$\vec{F} = -Q\vec{E}$$

$$dw = \vec{F} \cdot dl = -Q\vec{E} \cdot \vec{dl}$$

$$\rightarrow W_{AB} = \int_B^A dw = -Q\int_B^A \vec{E} \cdot \vec{dl} = E_p$$

$$V_{AB} = \frac{W_{AB}}{Q}$$

$$V_A = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 R} \Longrightarrow V = \int \frac{dQ}{4\pi \varepsilon_0 R}$$

$$2W_E = Q_1\underbrace{(V_{12} + V_{13} + V_{14} + \cdots)}_{V_1} + Q_2\underbrace{(V_{21} + V_{23} + V_{24} + \cdots)}_{V_2} + \cdots$$

$$\rightarrow W_E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i V_i = E_p$$

$$n \rightarrow \infty \qquad W_E = \frac{1}{2}\iiint \rho_v V\,dv = \frac{1}{2}\iiint \varepsilon_0 |E|^2\,dv$$

طبق بیوساوار $\rightarrow$ $\vec{H} = \int \frac{I\, d\vec{l} \times \vec{R}}{4\pi (R)^{3/2}}$

$$\vec{H} = \iint \frac{\vec{K} \times \vec{a}_R}{4\pi R^2}\, ds = \iint \frac{\vec{K} \times \vec{R}}{4\pi (R)^{3/2}}$$

$$\vec{H} = \iiint \frac{\vec{J} \times \vec{a}_R}{4\pi R^2}\, dv = \iiint \frac{\vec{J} \times \vec{R}}{4\pi (R)^{3/2}}\, dv$$

در نام‌گذاری:
۱ ← تولیدکنندهٔ گشتاور
۲ ← تولیدکنندهٔ دوران

روش محاسبهٔ گشتاور:

- تعیین $\vec{B}_1$ که توسط جریان شمارهٔ ۱ در نقطه‌ای دلخواه از عنصر ۲ ایجاد می‌شود.
- تشکیل $d\vec{F}$

$$d\vec{F} = \begin{cases} I_2\, d\vec{l}_2 \times \vec{B} \\ \vec{K}_2 \times \vec{B}_1\, ds_1 \\ \vec{J}_2 \times \vec{B}_1\, dV_1 \end{cases}$$

$\rightarrow$ اگر فقط نیرو خواسته شده بود، از dF انتگرال می‌گیریم. در غیر این صورت مرحلهٔ بعد.

- تشکیل $d\tau$ $\leftarrow$ $d\tau = \vec{R} \times dF$

بازوی گشتاور

- انتگرال‌گیری از $d\tau$

$$\vec{J}\, dv = K\, d\vec{s} = I\, d\vec{l} \quad , \quad \vec{J} = \rho_v \vec{V}$$

سرعت

⑨

معادله نیروی لورنس $\rightarrow \vec{F} = Q(\vec{E} + \underbrace{\vec{V}}_{\text{سرعت}} \times \vec{B})$

$$\oint \vec{H}\cdot\vec{dl} = I_{enc} = NI = \underbrace{V_m}_{mmf} \qquad (KVL)$$

$$\iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{B}\, dv = 0 \Rightarrow \oiint \vec{B}\cdot ds = 0 \qquad (KCL)$$

$$\underbrace{V_m = R}_{\text{رلوکتانس}}\phi \quad , \quad \phi = BS$$

قانون گوس
توسط دیورژانس

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_v$$

$$V_m = H.L = NI$$

$$Q_T = Q_b + Q_{\text{آزاد}}$$

$$\oiint \vec{D}\cdot\vec{ds} = Q_{enc\,\text{آزاد}}$$

$$\oiint \vec{P}\cdot\vec{ds} = -Q_b$$

$$\oiint \varepsilon_0\vec{E}\cdot\vec{ds} = Q_T \quad \Rightarrow \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$

$$\underbrace{\rho_{sb}}_{\text{مقید سطحی}} = \vec{P}\times\vec{a_n}$$

کروی $C = \dfrac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$

استوانه‌ای $C = \dfrac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_R}{\ln\frac{b}{a}}$

a ← شعاع درونی ، b ← شعاع بیرونی

ص۳ مقادیر

$$I = \oiint \vec{J} \cdot \vec{ds} = -\frac{dQ_i}{dt}$$

$$\oiint \vec{J} \cdot \vec{ds} = -\frac{d}{dt} \iiint \rho_v \, dv$$

$$\iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \, dv = \iiint -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \, dv$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \vec{\nabla} \cdot \vec{J}} \qquad \nabla \cdot \vec{J} = \frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

$$R = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{-\int_b^a \vec{E} \cdot \vec{dl}}{\iint \sigma \cdot \vec{E} \cdot \vec{ds}}$$

دهانه سیم

$$\vec{H} = -\vec{\nabla} V_m \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

$$\vec{B} = -\mu_0 \vec{\nabla} V_m \longrightarrow \vec{D} = -\varepsilon_0 \vec{\nabla} V$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \rightarrow d\vec{B} = \vec{\nabla} \times d\vec{A}$$

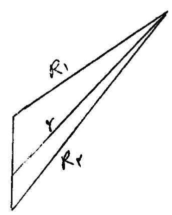
$$\frac{\mu_0 I \vec{dl} \times \vec{a}_R}{4\pi R^2}$$

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 I \vec{dl}}{4\pi R} \quad , \quad \vec{A} = \int \frac{\mu_0 I \vec{dl}}{4\pi R}$$

A بردار ضعیف تر نسبت به I است که در جهت جریان تولید می شود

$$\vec{A} = \iint \frac{\mu_0 \vec{K}\, ds}{4\pi R}$$

$$\vec{A} = \iiint \frac{\mu_0 \vec{J}\, dv}{4\pi R}$$



$\rightarrow \quad r^2 \cong R_1 R_2$

MIDTERM FORMULA SHEET

$\sin^{۲} x = \frac{1-\cos ۲x}{۲}$

$\cos^{۲} x = \frac{1+\cos ۲x}{۲}$

VECTOR IDENTITIES

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})$$
$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

$$\nabla(\Phi+\Psi) = \nabla\Phi + \nabla\Psi$$
$$\nabla\cdot(\vec{A}+\vec{B}) = \nabla\cdot\vec{A} + \nabla\cdot\vec{B}$$
$$\nabla\times(\vec{A}+\vec{B}) = \nabla\times\vec{A} + \nabla\times\vec{B}$$
$$\nabla(\Phi\Psi) = \Phi\nabla\Psi + \Psi\nabla\Phi$$
$$\nabla\left(\frac{\Phi}{\Psi}\right) = \frac{\Psi\nabla\Phi - \Phi\nabla\Psi}{\Psi^2}$$
$$\nabla\Phi^n = n\Phi^{n-1}\nabla\Phi$$
$$\nabla\cdot(\Phi\vec{A}) = \vec{A}\cdot\nabla\Phi + \Phi\nabla\cdot\vec{A}$$
$$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot\nabla\times\vec{A} - \vec{A}\cdot\nabla\times\vec{B}$$
$$\nabla\times(\Phi\vec{A}) = \nabla\Phi\times\vec{A} + \Phi\nabla\times\vec{A}$$
$$\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\nabla\cdot\vec{B} - \vec{B}\nabla\cdot\vec{A} + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} - (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$$
$$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\times(\nabla\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\nabla\times\vec{A}) + (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}$$

$$\nabla\cdot\nabla\Phi = \nabla^2\Phi$$
$$\nabla\cdot\nabla\times\vec{A} = 0$$
$$\nabla\times\nabla\Phi = 0$$
$$\nabla\times\nabla\times\vec{A} = \nabla\nabla\cdot\vec{A} - \nabla^2\vec{A}$$

VECTOR INTEGRAL THEOREMS

$\iiint_v (\nabla\cdot\vec{A})dv = \oiint_{S_{[v]}} \vec{A}\cdot d\vec{s}$ (Divergence theorem, Gauss identity)

$\iint_S (\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{s} = \oint_{C_{[s]}} \vec{A}\cdot d\vec{l}$ (Curl theorem 1, Stokes' theorem)

$\iiint_v (\nabla\times\vec{A})dv = \oiint_{S_{[v]}} d\vec{s}\times\vec{A} \equiv \oiint_{S_{[v]}} (\hat{n}\times\vec{A})ds$ (Curl theorem 2)

$\int \sin^{۲}\theta \, d\theta = \frac{\theta}{۲} - \frac{\sin ۲\theta}{۴} =$

SOME INTEGRALS OFTEN MET IN EM PROBLEMS

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$
$$\int \frac{1}{(a^2\pm x^2)^{3/2}}dx = \pm\frac{x}{a^2\sqrt{a^2\pm x^2}} + C$$
$$\int \frac{x}{(a^2+x^2)^{3/2}}dx = -\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} + C$$
$$\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^{3/2}}dx = -\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} + \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + C$$
$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$
$$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \begin{cases} \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a-x}{a+x}\right) = -\frac{1}{a}\operatorname{arctanh}\left(\frac{x}{a}\right), & |x|<a \\ -\frac{1}{a}\operatorname{arccoth}\left(\frac{x}{a}\right), & |x|>a \end{cases}$$
$$\int \frac{x}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln\left(a^2+x^2\right) + C$$
$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \sqrt{a^2+x^2} + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{a^{۲}+x^{۲}}}dx = ۲\ln\sqrt{a^{۲}}$$
$$\int \frac{1}{x\sqrt{a^2+x^2}}dx = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right) + C$$
$$\int x\sin(ax)dx = \frac{1}{a^2}[\sin(ax) - ax\cos(ax)]$$
$$\int x\cos(ax)dx = \frac{1}{a^2}[\cos(ax) + ax\sin(ax)]$$

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{a^{۲}+x^{۲}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^{۲}}}$, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^{۲}+a^{۲})^{۳/۲}} = \frac{۲}{a^{۲}}$

MIDTERM FORMULA SHEET

Cylindrical Components↔ Spherical Components

$a_r = a_R \sin\theta + a_\theta \cos\theta$	$a_R = a_r \sin\theta + a_z \cos\theta$
$a_\phi = a_\phi$	$a_\theta = a_r \cos\theta - a_z \sin\theta$
$a_z = a_R \cos\theta - a_\theta \sin\theta$	$a_\phi = a_\phi$

Note: $\boldsymbol{\theta}$ is the position angle of the point at which the vector exists.

DERIVATIVES OF ELEMENTARY FUNCTIONS

$(const.)' = 0$

$(x)' = 1$

$(x^k)' = kx^{k-1}$

$(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, a \neq 1, x > 0$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, x \neq (2k+1)\pi$

$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, x \neq k\pi$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x|<1$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x|<1$

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{arc}\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

$(\sinh x)' = \cosh x$

$(\cosh x)' = \sinh x$

$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$

$(\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x$

$(\operatorname{arcsinh}\ x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$(\operatorname{arccosh}\ x)' = \pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, x > 1$

$(\operatorname{arctanh}\ x)' = \frac{1}{1-x^2}, |x|<1$

$(\operatorname{arccoth}\ x)' = \frac{1}{1-x^2}, |x|>1$

DIFFERENTIAL OPERATORS

Rectangular Coordinates

$$\nabla\Phi = \hat{x}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

$$\nabla\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\vec{F} = \hat{x}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

$$\nabla\cdot(\nabla\Phi) \equiv \nabla^2\Phi \equiv \Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2\vec{F} = \hat{x}\nabla^2 F_x + \hat{y}\nabla^2 F_y + \hat{z}\nabla^2 F_z$$

Cylindrical Coordinates

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\hat{\varphi} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{z}$$

$$\nabla\cdot\vec{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\vec{F} = \hat{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial\phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z}\right) + \hat{\phi}\left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}\right) + \hat{z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rF_\phi)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial F_r}{\partial\phi}\right)$$

$$\nabla\cdot(\nabla\Phi) \equiv \nabla^2\Phi \equiv \Delta\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2\vec{A} = \hat{r}\left(\frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial r} - \frac{A_r}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_r}{\partial\phi^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial^2 A_r}{\partial z^2}\right) +$$

$$\hat{\phi}\left(\frac{\partial^2 A_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial r} - \frac{A_\phi}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_\phi}{\partial\phi^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} + \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial z^2}\right) +$$

$$\hat{z}\left(\frac{\partial^2 A_z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_z}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)$$

Spherical Coordinates

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial R}\hat{R} + \frac{1}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\hat{\varphi}$$

$$\nabla\cdot\vec{F} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2 F_R) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(F_\theta\sin\theta) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}$$

MIDTERM FORMULA SHEET

$$\nabla\times\vec{A}=\hat{R}\frac{1}{R\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\varphi\sin\theta)-\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]+$$
$$\hat{\theta}\frac{1}{R}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_R}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial R}(RA_\varphi)\right]+$$
$$\hat{\varphi}\frac{1}{R}\left[\frac{\partial}{\partial R}(RA_\theta)-\frac{\partial A_R}{\partial\theta}\right]$$

$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\Phi}{\partial R}\right)+\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$$

$$\nabla^2\vec{A}=\hat{R}\left(\frac{\partial^2A_R}{\partial R^2}+\frac{2}{R}\frac{\partial A_R}{\partial R}-\frac{2}{R^2}A_R+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2A_R}{\partial\theta^2}+\frac{\cot\theta}{R^2}\frac{\partial A_R}{\partial\theta}+\right.$$
$$\left.\frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2A_R}{\partial\varphi^2}-\frac{2}{R^2}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}-\frac{2\cot\theta}{R^2}A_\theta-\frac{2}{R^2\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right)+$$
$$\hat{\theta}\left(\frac{\partial^2A_\theta}{\partial R^2}+\frac{2}{R}\frac{\partial A_\theta}{\partial R}-\frac{A_\theta}{R^2\sin^2\theta}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2A_\theta}{\partial\theta^2}+\frac{\cot\theta}{R^2}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}+\right.$$
$$\left.\frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2A_\theta}{\partial\varphi^2}+\frac{2}{R^2}\frac{\partial A_R}{\partial\theta}-\frac{2\cot\theta}{R^2\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right)+$$
$$\hat{\varphi}\left(\frac{\partial^2A_\varphi}{\partial R^2}+\frac{2}{R}\frac{\partial A_\varphi}{\partial R}-\frac{A_\varphi}{R^2\sin^2\theta}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2A_\varphi}{\partial\theta^2}+\frac{\cot\theta}{R^2}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\theta}+\right.$$
$$\left.\frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2A_\varphi}{\partial\varphi^2}+\frac{2}{R^2\sin\theta}\frac{\partial A_R}{\partial\varphi}+\frac{2\cot\theta}{R^2\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)$$

DIFFERENTIAL ELEMENTS

Cartesian coordinates

$d\vec{l}=\hat{x}dx+\hat{y}dy+\hat{z}dz$; $d\vec{s}=\hat{x}dydz+\hat{y}dxdz+\hat{z}dxdy$; $dv=dxdydz$

Cylindrical coordinates

$d\vec{l}=\hat{r}dr+\hat{\varphi}rd\varphi+\hat{z}dz$; $d\vec{s}=\hat{r}rd\varphi dz+\hat{\varphi}drdz+\hat{z}rdrd\varphi$; $dv=rdrd\varphi dz$

Spherical coordinates

$d\vec{l}=\hat{R}dR+\hat{\theta}Rd\theta+\hat{\varphi}R\sin\theta d\varphi$;

$d\vec{s}=\hat{R}R^2\sin\theta d\theta d\varphi+\hat{\theta}R\sin\theta dRd\varphi+\hat{\varphi}RdRd\theta$;

$dv=R^2\sin\theta dRd\theta d\varphi$

ELECTROMAGNETIC EQUATIONS

Coaxial line

$C_1=\frac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)}$, F/m; $L_1=\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)+\frac{\mu_0}{8\pi}$, H/m

Twin-lead line

$C_1=\frac{\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{h}{r}+\sqrt{\left(\frac{h}{r}\right)^2-1}\right)}$ F/m; $L_1=\frac{\mu}{\pi}\ln\left(\frac{h}{r}+\sqrt{\left(\frac{h}{r}\right)^2-1}\right)$ H/m

MIDTERM FORMULA SHEET

$$\int \frac{dx}{(ax^2+b)\sqrt{fx^2+g}} = \frac{1}{\sqrt{b}\sqrt{ag-bf}}\arctan\left(\frac{x\sqrt{ag-bf}}{\sqrt{b}\sqrt{fx^2+g}}\right), (ag > bf)$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C, x \neq 2k\pi$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

SOME USEFUL DEFINITE INTGERALS

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cdot \sin nx \; dx = \begin{cases} 0 \quad , & m \neq n \\ \pi, & m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cdot \cos nx \; dx = \begin{cases} 0 \quad , & m \neq n \\ \pi, & m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cdot \cos nx \; dx = 0$$

$$\int_0^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx \; dx = \begin{cases} 0 \quad , & m \neq n \\ \pi/2, & m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \; dx = \begin{cases} 0 \quad , & m \neq n \\ \pi/2, & m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx \; dx = \begin{cases} 0 \quad , & m+n = \text{even number} \\ \dfrac{2m}{m^2-n^2}, & m+n = \text{odd number} \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{(a-b\cos x)}{(a^2+b^2-2ab\cos x)} dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{a}, & a > b > 0 \\ 0, & b > a > 0 \end{cases}$$

COORDINATE TRANSFORMATIONS

Rectangular ↔ Cylindrical

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi \\ y &= r\sin\phi \\ z &= z \end{aligned} \qquad \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ z &= z \end{aligned}$$

Rectangular ↔ Spherical

$$\begin{aligned} x &= R\sin\theta\cos\phi \\ y &= R\sin\theta\sin\phi \\ z &= R\cos\theta \end{aligned} \qquad \begin{aligned} R &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta &= \arccos\left(z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) \\ \phi &= \arctan(y/x) \end{aligned}$$

Cylindrical ↔ Spherical

$$\begin{aligned} r &= R\sin\theta \\ \phi &= \phi \\ z &= R\cos\theta \end{aligned} \qquad \begin{aligned} R &= \sqrt{r^2+z^2} \\ \phi &= \phi \\ \theta &= \arccos\left(z/\sqrt{r^2+z^2}\right) \end{aligned}$$

VECTOR TRANSFORMATIONS

Rectangular Components ↔ Cylindrical Components

$$\begin{aligned} a_x &= a_r\cos\phi - a_\phi\sin\phi \\ a_y &= a_r\sin\phi + a_\phi\cos\phi \\ a_z &= a_z \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a_r &= a_x\cos\phi + a_y\sin\phi \\ a_\phi &= -a_x\sin\phi + a_y\cos\phi \\ a_z &= a_z \end{aligned}$$

Note: ϕ is the position angle of the point at which the vector exists.

Rectangular Components ↔ Spherical Components

$$\begin{aligned} a_x &= a_R\sin\theta\cos\phi + a_\theta\cos\theta\cos\phi - a_\phi\sin\phi \\ a_y &= a_R\sin\theta\sin\phi + a_\theta\cos\theta\sin\phi + a_\phi\cos\phi \\ a_z &= a_R\cos\theta - a_\theta\sin\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_R &= a_x\sin\theta\cos\phi + a_y\sin\theta\sin\phi + a_z\cos\theta \\ a_\theta &= a_x\cos\theta\cos\phi + a_y\cos\theta\sin\phi - a_z\cos\theta \\ a_\phi &= -a_x\sin\phi + a_y\cos\phi \end{aligned}$$

Note: ϕ and θ are the position angles of the point at which the vector exists.

GRADIENT

CARTESIAN $\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z$

CYLINDRICAL $\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z$

SPHERICAL $\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi$

DIVERGENCE

CARTESIAN $\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$

CYLINDRICAL $\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$

SPHERICAL $\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(D_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi}$

CURL

CARTESIAN $\nabla \times \mathbf{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\mathbf{a}_z$

CYLINDRICAL $\nabla \times \mathbf{H} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z}\right)\mathbf{a}_\rho + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho}\right)\mathbf{a}_\phi + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\right]\mathbf{a}_z$

SPHERICAL $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(H_\phi \sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial \phi}\right]\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rH_\phi)}{\partial r}\right]\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rH_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta}\right]\mathbf{a}_\phi$

LAPLACIAN

CARTESIAN $\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

CYLINDRICAL $\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

SPHERICAL $\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$