بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضی

کارشناسی ارشد

مجموعه مدیریت ـ اقتصاد ـ حسابداری

شامل: شرح – نکته – تست

گردآورندگان: عماد شیخان ـ مهدی قلی‌زاده

ویراستار علمی: فاطمه زارعی

مقدمه ناشر

آیا آنانکه می‌دانند با آنانکه نمی‌دانند برابرند. (قرآن کریم)

پس از حمد و سپاس و ستایش به درگاه بی‌همتای احدیت و درود بر محمد مصطفی عالی نمونه اعلی بشریت که در تارک دور تاریخ، بنا به فرمان نافذ صمدیت از میان مردمی برخاست که خود بودند در پست‌ترین حد توحش و ضلال و بربریت و آنگاه با قوانین شامل خویش هم ایشان را رهبری نمود و رهانید از بدویت و طلب یاری و استعانت از قرآن کریم کتابی که جاودانه است تا ابدیت.

کتابی که پیش روی شماست، ویرایش جدید از مجموعه کتب خودآموز موسسه آموزش عالی آزاد ماهان است که بر مبنای خلاصه درس ـ نکات مهم و کلیدی و پرسش‌های متنوع چهارگزینه‌ای جمع‌آوری شده است، در ویرایش جدید ضمن توجه کامل به آخرین تغییرات در سرفصل‌های تعیین شده جهت آزمون‌های ارشد خلاصه مطالب هر فصل از منابع مختلف به تفکیک با ذکر مثال‌های متعدد بصورت تستی و در صورت نیاز تشریحی به همراه مجموعه سئوالات آزمون‌های تحصیلات تکمیلی سال‌های گذشته که با حل تشریحی ارائه شده است، مجموعه‌ای را ساخته است که می‌توان ادعا کرد مطالعه مطالب این کتاب دانشجویان ارجمند را تا حد زیادی از مطالعه سایر منابع مشابه بی‌نیاز خواهد کرد ضمن اینکه بدیهی است شرکت در آزمون‌های آزمایشی ماهان که در جامعه آماری گسترده و در سطح کشور برگزار می‌شود می‌تواند محک جدّی برای عزیزان دانشجو باشد تا نقاط ضعف احتمالی خود را بیابند و با مرور مجدد مطالب این کتاب آنها را برطرف سازند. در اینجا بر خود واجب می‌دانیم که از همه اساتید بزرگوار و دانشجویان ارجمند از سراسر کشور که با ارائه نقطه نظرات سازنده خود ما را در پربارتر کردن ویرایش جدید این کتاب یاری نمودند سپاسگذاری نمائیم و به پاس تلاش‌هایشان این کتاب را به همه این عزیزان تقدیم می‌داریم.

موسسه آموزش عالی آزاد ماهان

معاونت آموزش ـ بهار ۸۸

مقدمه مولف :

کتاب حاضر در جهت کمک به داوطلبان کنکور کارشناسی ارشد در رشته های اقتصاد، مدیریت و حسابداری تهیه و تدوین شده است. در این کتاب تمامی سر فصل های مورد نظر طراحان سوالات کنکور کارشناسی ارشد مدنظر قرار گرفته و تمامی سوالات کنکورهای سراسری بر اساس اهمیت و تعداد سوالات موجود از سال های ۷۵ تا ۸۶ بصورت طبقه بندی شده، و بر حسب موضوع هر بخش، در بخش مربوطه گنجانده شده است.

توصیه می شود خوانندگان این کتاب به دلیل شباهت فصول هر سه رشته ی اقتصاد، مدیریت و حسابداری بعد از مطالعه متن هر فصل تمامی تست های کنکور در هر سه رشته را مطالعه کنند. چراکه برخی از نکات تستی با مطالعه و حل کردن تست ها بدست می آید که در متن درس به آن اشاره ای نشده است.

لازم به ذکر است از تشریح برخی سر فصل ها، که در سال های اخیر در کنکور کارشناسی ارشد مورد سوال قرار نگرفته اند به دلیل جلوگیری از ایجاد حجم بالا و گمراهی داوطلبان در تمرکز بروی فصول با اهمیت خودداری شده و توصیه می شود تا داوطلبان کنکور با تمرکز بر روی همین فصول ارایه شده بتوانند از حداکثر آمادگی برخوردار شده و شانس قبولی خود را در کنکور افزایش دهند.

عماد شیخان

شیخان، عماد
ریاضی رشته مدیریت، اقتصاد و حسابداری /عماد شیخان ـ مهدی قلی زاده
مهر سبحان، ۱۳۸۸
۳٤۰ص: جدول، نمودار (آمادگی آزمون کارشناسی ارشد مدیریت، اقتصاد، حسابداری)
ISBN: 978-964-2831-00-5
فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
فارسی ـ چاپ اول
۱-ریاضی ۲- آزمونها و تمرینها (عالی)
۳- آزمون دورههای تحصیلات تکمیلی ٤- دانشگاهها و مدارس عالی ـ ایران ـ آزمونها
الف) عماد شیخان ب)مهدی قلی زاده
ج ـ عنوان
۹ر۹۷۷٤ش/ LB۲۳۵۳ ۳۷۸/۱٦٦٤
کتابخانه ملی ایران ۸۵/۳٦۷۲۳م

انتشارات مهر سبحان

- نام کتاب: ریاضی رشته مدیریت، اقتصاد، حسابداری
- مولفان: عماد شیخان، مهدی قلی زاده
- ناشر: مهر سبحان
- مدیر پروژه: محمد ابوئی
- نوبت و تاریخ چاپ: اول / ۱۳۸۸
- حروف نگاری و صفحهآرایی: انتشارات ماهان
- طراح جلد: سمیرا خانزاد
- تیراژ: ۳۰۰۰ نسخه
- قیمت: ۱۸۰/۰۰۰ ریال
- شابک: ISBN: ۹۷۸-۹۶۴-۲۸۳۱-۰۰-۵

انتشارات مهر سبحان: خیابان ولیعصر، بالاتر از تقاطع مطهری، روبروی قنادی هتل بزرگ تهران، جنب بانک ملی، پلاک ۸۶۴
تلفن: ۴-۸۸۱۰۰۱۱۳

فهرست مطالب

عنوان | صفحه

	جدول تعداد سوالات آزمون سراسری رشته مدیریت به تفکیک هر فصل										
	۷۸	۷۹	۸۰	۸۱	۸۲	۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸
۱- مجموعه‌ها	۱	۱	۱	۱	۱	۱	-	۱	۱	۱	
۲- توابع	۶	۸	۴	۵	۳	۳	۴	۳	۲	۳	
۳- حد و پیوستگی	۲	۳	۱	۳	۲	-	۳	۲	۲	۳	
۴- مشتق و دیفرانسیل (کاربرد مشتق)	۶	۵	۵	۴	۷	۳	۵	۴	۴	۸	
۵- توابع چند متغیر	-	۱	۱	-	-	۸	۴	۴	۴	۳	
۶- انتگرال	۴	۴	۶	۵	۳	۳	۴	۴	۴	۲	
۷- معادلات دیفرانسیل	+	۱	-	-	-	۴	۲	-	+		
۸- ماتریس و دترمینان	۱	۱	-	-	۱	۴	۲	۱	۳	۲	
۹- بسط دو جمله ای	۴	۱	۳	-	۲	۲	-	-	-	۲	

فصل اول

مجموعه‌ها

(۱-۱) تعریف مجموعه : دسته ای از اشیای مشخص و دو به دو متمایز است که معمولاً در خاصیتی مشترک هستند.

مثال: مجموعه اعداد اول یک رقمی

$A = \{۲,۳,۵,۷\}$

۱-۱) تعریف: مجموعه عبارتند از گروهی از اشیاء یا عناصر و اعداد که حداقل دارای یک ویژگی مشترک باشند. مانند مجموعه کارکنان یک موسسه ، مجموعه اعداد اول ، مجموعه مقسوم علیه‌های یک عدد. برای نمایش اعضا یک نمایش مجموعه از علامت { } استفاده می‌شود.

(۱-۲) نمایش مجموعه ها: مجموعه ها را به روشهایی زیر نمایش می دهند:

۱- نمایش مجموعه ها با عضوهای آن $H= \{۱,۲,۳,۴\}$

۲- نمایش مجموعه با نماد ریاضی : برای این منظور یکی از عضوهای مجموعه را x می نامیم و خاصیت مشترک را برای آن می نویسیم. در واقع موقعی از این روش استفاده می شود که تعداد عضوهای مجموعه زیاد باشد و یا نخواهیم عضو را ذکر نماییم. شکل کلی آن بدین صورت است.

$$A = \{x | P(x)\}$$

مثال:

$$G = \{x | x \in R ,\ \ x = ۲k - ۱ ,\ \ x > ۵\}$$

۳- نمایش مجموعه ها با نمودار ون – اولر یا روش هندسی

برای این منظور عضوهای مجموعه را داخل یک چندضلعی و یا درون یک دایره به نمایش می گذاریم:

که نمایش هندسی مجموعه $\{۹,۱۰,۱۱\}$ یا $\{۱۱,۱۷,۴,۵,۸,۱۰\}$ می باشند.

نمودار ون: ون شامل اشکالی مانند مستطیل و دایره می‌باشد و از آن برای نمایش مجموعه و مناطق شامل یک مجموعه استفاده می‌شود که معمولاً از مستطیل به عنوان مجموعه مرجع و دایره برای سایر مجموعه‌ها استفاده می‌کنیم.

عضویت در یک مجموعه: برای نمایش عضویت عنصر یا یک عدد در یک مجموعه از علامت $\in$ استفاده می‌شود مثلاً:

A = مجموعه اعداد اول $۲۳ \in A$

$۳۶ \notin A$

(۱-۳) مجموعه تهی: مجموعه‌ای است که دارای هیچ عضوی نباشد برای نمایش این مجموعه از علامت ϕ یا { } استفاده می‌شود.

مثال: مجموعه اعداد طبیعی بین ۳،۲ $= \phi$

تذکر: لازم به ذکر است که هیچکدام از مجموعه های زیر تهی نیستند. $\{0\}$, $\{\{\}\}$, $\{\phi\}$

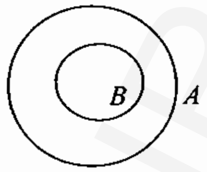
سایر تعاریف :

(۱-۴) زیر مجموعه: مجموعه B را زیر مجموعه مجموعه A می‌نامیم هر گاه به ازای هر عدد یا شی عضو B آن عدد یا شی عضو A نیز باشد. به عبارت دیگر :

$$\forall X_i : X_i \in B \Rightarrow X_i \in A \Leftrightarrow B \subset A$$

علامت $\subset$ برای نمایش زیر مجموعه استفاده می‌شود و تعریف ریاضی آن به صورت زیر است:

$$(B \subset A) \Leftrightarrow (Ax \in B \Rightarrow x \in A)$$



مثال: اگر $A = \{1,2,7\}$ و $B = \{1,2\}$ باشد آنگاه داریم؛ $B \subset A$

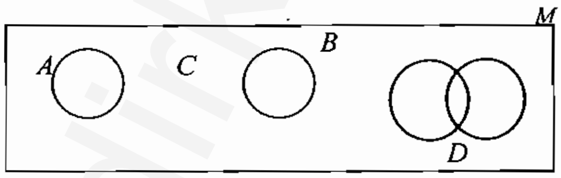
خواص زیرمجموعه ها:

۱) $\phi \subset A$ ۲) $A \subset A$ ۳) $(A \subset B) \wedge (B \subset A) \Rightarrow (A \subset C)$

(۱-۵) مجموعه مرجع (جهانی): مجموعه‌ای است که شامل تمام عناصر باشد مانند مجموعه کلیه اعداد حقیقی و غیر حقیقی برای نمایش مجموعه مرجع از M یا U استفاده می‌کنند و برای نمایش نمودار ون آن از مستطیل استفاده می‌شود.

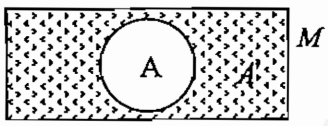
تعریف دیگر: وقتی زیر مجموعه های یک مجموعه را مورد مطالعه قرار می دهیم، به آن مجموعه، مرجع می گوییم و آن را با M یا U نشان داده و به شکل مستطیل نمایش می دهیم.

مثال: $A \subset M,\ B \subset M,\ C \in M,\ D \subset M$



نکته: مجموعه تهی زیر مجموعه تمام مجموعه‌ها و تمامی مجموعه‌ها زیر مجموعه مجموعه مرجع می‌باشد.

(۱ - ۶) مجموعه مکمل (متمم): مکمل مجموعه A شامل کلیه اعضای مجموعه مرجع U به شرطی که عضو A نباشند می‌باشد مکمل مجموعه A را با A' نمایش می‌دهند.



$$A' = \{x | x \in M\ ,\ \ x \notin A\}$$

خواص مجموعه های متمم:

۱) $A = B \Leftrightarrow A' = B'$

۲) $(A')' = A$

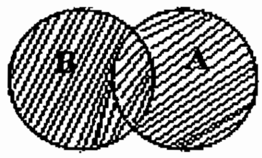
۳) $\phi' = M$

۴) $M' = \phi$

(۱-۷) عملیات روی مجموعه

الف) اجتماع دو مجموعه : اجتماع دو مجموعه A, B شامل کلیه اعضا مجموعه B یا A می‌باشد. یعنی: $A \cup B = \{x | x \in A$ یا $x \in B\}$ و نمایش ون آن نیز بصورت روبرو می‌باشد. (۷ = یا)

$$A \cup B = \{x | x \in A \cup x \in B\}$$

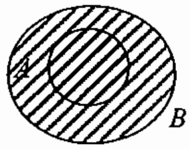


مثال: اگر $A=\{1,2,3,5\}$ و $B=\{1,4,5,7\}$ آنگاه: $A\cup B=\{1,2,3,4,5,7\}$

نکته: علامت $\cup$ برای نمایش اجتماع دو مجموعه استفاده می‌شود.

خواص اجتماع مجموعه ها: در اجتماع همواره جواب، مجموعه بزرگتر خواهد شد.

۱) اگر $A\subset B \Leftrightarrow A\cup B=B$



۲) (A' متمم A می باشد.) $A\cup A'=M$, $A\cup A=A$

۳) اجتماع هر مجموعه ای با مجموعه تهی، خود آن مجموعه خواهد شد. $A\cup\phi=A$

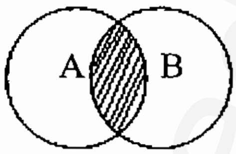
۴) اجتماع هر مجموعه ای با مجموعه مرجع، مجموع مرجع خواهد شد. $A\cup M=M$

ب) اشتراک دو مجموعه : اشتراک دو مجموعه B,A شامل کلیه اعضایی است که هم عضو A و هم عضو B می‌باشد یعنی:

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\wedge x\in B\}$$

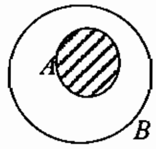
$$A\cap B=\{x\mid x\in A, x\in B\}$$

علامت $\cap$ نشانگر اشتراک دو مجموعه می‌باشد. . نمایش ون آن به صورت زیر می‌باشد.



خواص اشتراک مجموعه ها: در اشتراک مجموعه ها، ج نواهد بود.

۱) اگر $A\subset B \Leftrightarrow A\cap B=A$



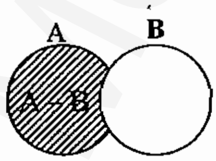
۲) $A\cap A=A$, $A\cap A'=\phi$

۳) $A\cap\phi=\phi$

۴) $A\cap M=A$.

(۱-۸) تفاضل دو مجموعه: تفاضل دو مجموعه A و B شامل عناصری از مجموعه A می‌باشد که عضو B نباشد. تفاضل دو مجموعه را به صورت A-B نمایش می‌دهند.

$$A-B=\{x\mid x\in A \wedge x\notin B\}$$

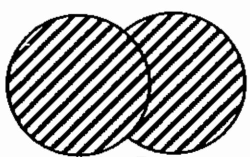


تذکر (نکته)۱: تفاضل دو مجموعه را همواره می توان طبق فرمول زیر تبدیل به اشتراک نمود.

$$A-B=A\cap B'$$

تذکر ۲: تفاضل متقارن مجموعه A و B را به صورت $A\Delta B$ نشان می دهند و به شرح زیر تعریف می شود:

$$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$$



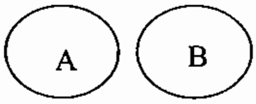
$A\Delta B$

تذکر ۳: روابط زیر در تفاضل مجموعه ها برقرار است.

$$\text{I)}\ A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$$

$$\text{II)}\ (A-B)\cap(B-A)=\phi$$

(۱-۹) مجموعه‌های ناسازگار یا مجموعه های جدا از هم: دو مجموعه B,A را ناسازگار گوییم هرگاه اشتراک آنها تهی باشد.



$A\cap B=\phi$

$A\left(\not\exists x\in A|x\in B\right)\wedge\left(\not\exists x\in B|x\in A\right)\Leftrightarrow A$ و B جدا از هم می باشند و ناسازگارند.

(۱-۱۰) قواعد کلی مجموعه‌ها:

۱- اگر $B\subset A, A\subset B$ آنگاه $A=B$

۲- اگر $B\subset D, A\subset B$ آنگاه $A\subset D$ (در قسمت زیر مجموعه ها گفته شده است)

۳- $A\subset B$ باشد آنگاه $A\cup B=B, B\cap A=A, A-B=\phi$

۴- قوانین رابطه مورگان: $(A\cap B)'=A'\cup B', (A\cup B)'=A'\cap B'$

۵- $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C), A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ (خاصیت توزیع پذیری یا توزیع بخشی)

۶- قوانین قانون جذب: $A\cup(B\cap A)=A, A\cap(B\cup A)=A$ و $(A\cap B)\subset A$, $(A\cap B)\subset B$

$B\subset(A\cup B)$, $A\subset(A\cup B)$

۷- $A\cup\phi=A, A\cap\phi=\phi$, $A\cup U=U, A\cap U=A$ (در قسمت اجتماع و اشتراک گفته شده است).

۸- خاصیت جابجایی: $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$

۹- خاصیت شرکت پذیری: $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$, $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

نکات:

۱- تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه n عضوی 2^n می‌باشد.

۲- تعداد اعضای مجموعه اجتماع دو مجموعه A , B برابر است با:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

۳- تعداد اعضای مجموعه مکمل A : $n(A')=n(U)-n(A)$

۴- تعداد اعضای مجموعه اجتماع ۳ مجموعه A و B و C برابر است با:

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

۵- تعداد عضوهای مجموعهٔ $A\times B$ برابر خواهد بود با: $n(A\times B)=n(A)\times n(B)$

(۱-۱۱) افراز مجموعه ها:

مجموعهٔ A به مجموعه های A_1 یعنی ($A_1, A_2, \dots, A_n$) افراز شده است که شرایط زیر برقرار باشد:

۱) $A_i\neq\phi$

۲) $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A$

۳) $i\neq j$ $\quad A_i\cap A_j=\phi$

مثال: مجموعه $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ را می توان به مجموعه های زیر افراز نمود:

$A_1=\{a\}$ $\quad A_2=\{b,c,d,e\}$ $\quad A_3=\{f\}$

(۱-۱۲) بازه‌ها: برای نمایش اعضای یک مجموعه راههای مختلفی وجود دارد که شامل:

الف) نوشتن اعداد که معمولاً برای اعضا و مجموعه های قابل شمارش استفاده می‌شود مثل مجموعه اعداد زوج: { ... و ۸و ۶و ۴و ۲}.

ب) نمایش بر روی نمودار

ج) استفاده از بازه ها: که روشهای ب و ج در مورد مجموع هایی که اعضای آن قابل شمارش نباشد نیز بکار می‌رود مانند مجموعه اعداد حقیقی .

حالات مختلف نمایش بازه‌ها:

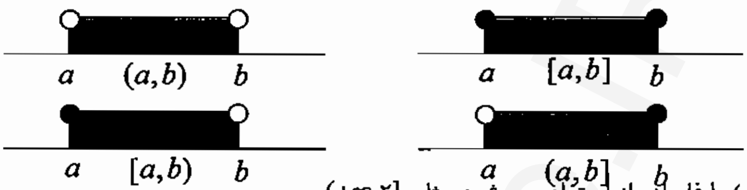
۱- (a , b) : نشان دهنده آن است که کلیه اعداد بین b, a عضو مجموعه می‌باشد و خود b, a عضو مجموعه نمی‌باشد.

۲- $[a , b]$: نشان دهنده آن است که کلیه اعداد بین b, a همچنین خود b, a عضو مجموعه می‌باشد.

۳- $[a , b)$: نشان دهنده آن است که کلیه اعداد بین b, a و همچنین a عضو مجموعه هستند ولی b نیست.

۴- $(a , b]$: نشان دهنده آن است که کلیه اعداد بین b, a و همچنین b عضو مجموعه هستند ولی a نیست.

در زیر نمایش نموداری هر یک از بازه ها را می‌بینید.



برای نمایش $\pm\infty$ (از علامت) یا فاصله باز استفاده می‌شود مثل $[2,+\infty)$

تستهای طبقه‌بندی شده فصل اول

رشته اقتصاد

۱-اگر $A=\{x:|x-1|\ge 2\}, B=\{x:x^2-3x\ge -2\}$ آنگاه $(A\cup B)-(A\cap B)$ کدام است؟ (سراسری ۷۵)

۱) $R-(-1,2)$ ۲) $(-1,1]\cup[2,3)$ ۳) $(-1,3)$ ۴) $[-1,1)\cup[2,3)$

۲-اگر تعداد عناصر مجموعه‌های $(A\cup B),(A\cap B),A$ به ترتیب برابر ۱۰، ۴، ۱۸ باشد تعداد عناصر **B** کدام است؟ (سراسری ۷۵)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۳-حاصل عبارت $(A\cup B)\cap(A'\cup B)$ کدام است؟ (سراسری ۷۶)

۱) A ۲) B ۳) $A\cup B$ ۴) $A'\cup B$

۴- اگر **B,A** دو مجموعه غیر تهی و **A-B=A** باشد، آنگاه $B\cap A'$ کدام مجموعه است؟ (سراسری ۷۷)

۱) A ۲) B ۳) B-A ۴) A-B

۵-اگر $A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$ باشد می‌توان نوشت: (سراسری ۷۹)

۱) $A\Delta B=(A\cap B')-(A\cup B)$ ۲) $A\Delta B=(A'\cup B')-(A\cup B)$
۳) $A\Delta B=(A\cap B')\cup(B\cup A')$ ۴) $A\Delta B=(A'\cap B)\cup(B'\cup A)$

۶- اگر **B,A** دو مجموعه باشند، حاصل عبارت $(A-B)\cap(A\cap B)$ کدام است؟ (سراسری ۸۰)

۱) A ۲) B ۳) $A\cap B$ ۴) ϕ

۷- مجموعه‌ای **n** عضو دارد و به آن سه عنصر دیگر اضافه شد، در این صورت تعداد زیر مجموعه‌های آن چند برابر زیر مجموعه‌های مجموعه اولیه است؟ (سراسری ۸۱)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۸- حاصل $(A\cup B'\cup C')\cap[A\cup(B\cap C)]$ در مجموعه‌ها برابر است با: (سراسری ۸۲)

۱) $A\cup B$ ۲) ϕ ۳) A' ۴) A

رشته مدیریت

۱- مکمل مجموعه $A\cap B(A-B)$ کدام مجموعه زیر است ؟ (سراسری ۷۳)

۱) A' ۲) B' ۳) ϕ ۴) U

۲- اگر $A=\{X|1\le X<3\}, B=\{X|2\le X<5\}$ باشد و $A,B\subset N$ باشد **B-A** چند عضو دارد؟ (**N** مجموعه اعداد طبیعی) (سراسری ۷۴).

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۲

۳- اگر $A_i=\{X|-i<X<i, i\in N\}$ باشد $A_1\cap A_2\cap...\cap A_n$ کدام است؟ (سراسری ۷۵)

۱) A_1 ۲) A_n ۳) A_n-A_1 ۴) A_1-A_n

۴- مجموعه $(A\cap B)\cap(A-B)'$ کدام است ؟ (سراسری ۷۶)

۱) A ۲) B ۳) $A\cap B$ ۴) $A\cup B$

۵- اگر به مجموعه **A** دو عضو اضافه شود تعداد زیر مجموعه آن چند برابر می‌شود؟ (سراسری ۷۶)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۸

۶- اگر **B, A** دو مجموعه دلخواه باشند حاصل $(A'-B)'$ کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) A ۲) B ۳) $A\cup B$ ۴) $A\cap B$

۷- اگر A , B دو مجموعه نا تهی باشند مجموعه $A-(A\cap B)$ کدام است ؟ (سراسری ۷۸)

۱) $A\cap B$ ۲) $A\cap B'$ ۳) $B\cap A'$ ۴) $(A\cup B)'$

۸- اگر A , B , C سه مجموعه باشند که $A\subset B\subset C$ آنگاه $[(A\cap B)\cup C]\cap(A\cup B)$ کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) $A\cap B$ ۲) $A\cup B$ ۳) B ۴) C

۹- اگر A , B دو مجموعه باشند حاصل عبارت $A-[(A\cap B)\cup A]$ کدام است (سراسری ۸۰)

۱) A ۲) B ۳) A-B ۴) ϕ

۱۰- مجموعه $[(A\cap B)\cup(A-B)]\cap A'$ برابر با کدام است؟ (سراسری ۸۱)

۱) A ۲) B ۳) ϕ ۴) $A\cup B$

۱۱- یک مجموعه n عضو مجزا دارد به این مجموعه ۳ عضو متمایز از عناصر مجموعه اضافه می‌کنیم تعداد زیر مجموعه های مجموعه جدید چند برابر زیر مجموعه‌های مجموعه اولیه است ؟ (سراسری ۸۲)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۱۲- از بین دانشجویان فارغ التحصیل رشته مدیریت یک دانشگاه ۳۰ نفر آزمون رشته مدیریت و ۲۰ نفر در آزمون حسابداری و ۱۰ نفر هر در هر دو شرکت کرده اند. چند نفر از این دانشجویان لااقل در یکی از دو رشته شرکت کرده اند؟ (سراسری ۸۳)

۱) ۴۰ ۲) ۵۰ ۳) ۵۵ ۴) ۶۰

رشته حسابداری

۱-اگر B,A دو مجموعه غیر تهی باشند $(A-B)'$ با کدام مجموعه برابر است؟ (سراسری ۷۷)

۱) $A\cup B'$ ۲) $A'\cup B$ ۳) $A'\cup B'$ ۴) $A'\cap B'$

۲-اجتماع دو مجموعه B,A ۲۰ عضو دارد، به مجموعه A، ۸ عنصر جدید اضافه کردیم به اشتراک آنها ۶ عنصر اضافه شود. اجتماع مجموعه B و مجموعه جدید A چند عضو دارد؟ (سراسری ۷۷)

۱) ۲۲ ۲) ۲۵ ۳) ۲۶ ۴) ۲۸

۳- اگر داشته باشیم، $n(A)=۱۰$ (تعداد اعضای A)، $n(B)=۱۵$، $n(A\cup B)=۱۹$، $n(A\cap B)$ کدام است؟ (سراسری ۷۸)

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۲۵ ۴) ۲۹

۴- اگر B,A دو مجموعه باشند، $A'\cap[A\cup(B\cap A)]$ برابر با کدام است؟ (سراسری ۷۸)

۱) A ۲) B ۳) A' ۴) ϕ

۵-اگر C,B,A سه مجموعه، $A\subset B$ باشد، حاصل $[(B'\cap A)\cap C]\cup C'$ کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) B' ۲) A ۳) C' ۴) B

۶-مجموعه‌های C,B,A مفروضند، بطوریکه $A\subset B\subset C$ است، حاصل مجموعه $C'\cap(A'\cap B')$ کدام است؟ (سراسری ۸۰)

۱) A' ۲) B' ۳) C' ۴) ϕ

۷- در مجموعه جهانی $U=\{x\mid x\in N, x\le ۱۵\}$ اگر A مجموعه اعداد فرد و B مجموعه اعداد بخش‌پذیر بر ۳ باشد، مجموعه $(A\cap B)$ چند زیر مجموعه دارد؟ (سراسری ۸۱)

۱) ۱۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۸

۸- کدامیک از روابط زیر، نادرست است؟ (سراسری ۸۲)

۱) $A \bigcup (A - B) = A$
۲) $(A - B) = A \bigcap B'$
۳) $(A \bigcup B)' \bigcup A = A \bigcup B'$
۴) $B \bigcap (B - A) = A \bigcup B$

۹- اگر داشته باشیم $A \subset B \subset C$ آنگاه $(A \bigcup B) \bigcap C - A \bigcap B$ کدام است؟ (سراسری ۸۳)

۱) B
۲) C
۳) ϕ
۴) $B \bigcap A'$

"مدیریت" "حسابداری" "اقتصاد"

۱۰- مجموعه $(A \cap B \cap C) \cup (A - B) \cup (A - C)$ برابر کدام است؟ (مدیریت و حسابداری ۸۵)

۱) A
۲) ϕ
۳) $B \cup C$
۴) $B \cap C$

۱۱- اگر A و B و C سه مجموعه باشند، مجموعه $(A \cap B \cap C) \cup (A \cup C')' \cup (B \cup C')'$ برابر کدام است؟ (اقتصاد ۸۵)

۱) A
۲) C
۳) $A \cap C$
۴) $B \cap C$

۱۲- اگر A و B و C سه مجموعه غیر تهی و M مجموعه جهانی باشد، آنگاه $\left[A \cap (A' \cup B) \cup (B \cap (A \cap B)'\right]$ کدام است؟ (مدیریت و حسابداری ۸۶)

۱) A
۲) B
۳) M
۴) ϕ

۱۳- اگر $A \subset B$ باشد کدام رابطه نادرست است؟ (اقتصاد ۸۶)

۱) $A' \cap B' = B'$
۲) $A' \cup B' = A'$
۳) $(A \cup B) \cup (A \cap B) = A$
۴) $(A \cup B) \cap (A \cap B) = A$

پاسخ تشریحی تستهای طبقه‌بندی شده فصل اول

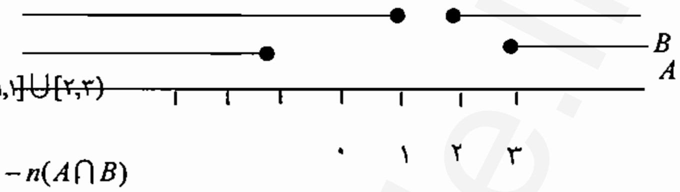
رشته اقتصاد

۱-گزینه ۲ صحیح است.

$$A:|X-1|\geq 2 \Rightarrow \begin{cases} x-1\geq 2 \Rightarrow x\geq 3 \\ x-1\leq -2 \Rightarrow x\leq -1 \end{cases}$$

$$B: x^2-2x\geq -2 \Rightarrow x^2-3x+2\geq 0 \Rightarrow (x-1)(x-2)\geq 0$$

x		۱		۲	
x^2-3x+2	+		-		+



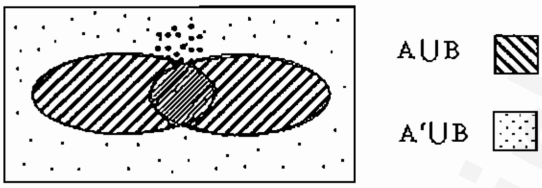
$$(A\cup B)-(A\cap B)=(-1,1]\cup[2,3)$$

۲- گزینه ۳ صحیح است.

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$18=10+n(B)-4 \Rightarrow n(B)=12$$

۳- گزینه ۲ صحیح است.

راه حل اول:



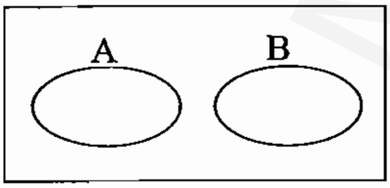
پس می‌توان نتیجه گرفت: $\cap(A'\cup B)=B$

راه حل دوم:

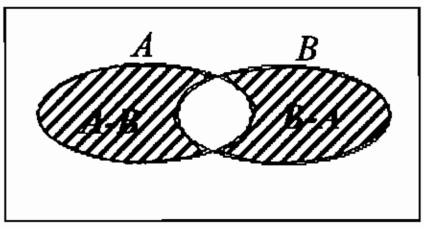
$$(A\cup B)\cap(A'\cup B)=B\cup(A\cap A')=B\cup\phi=B$$

۴-گزینه ۲ صحیح است.

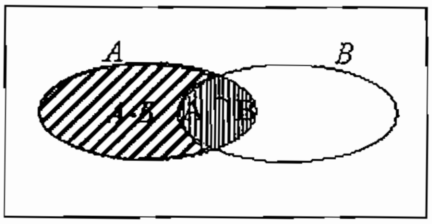
چنانچه A-B=A باشد پس می‌توان نتیجه گرفت که $A\cap B=\phi$ زیرا اگر اشتراکی داشتند تفاضل B از A مجموعه‌ای کوچکتر از A می‌شد. پس می‌توان دو مجموعه‌ی فوق را بدین شکل نمایش داد. در نتیجه می‌توان گفت: $B\cap A'$ برابر با B می‌شود زیرا $B\subset A'$ می‌شود.



۵- گزینه ۳ صحیح است. با توجه به نمودار ون می‌توان گفت که $A\Delta B$ برابر است با:
که تنها گزینه ۳ این حالت را نمایش می‌دهد.



۶- گزینه ۴ صحیح است. از طریق نمودار ون خواهیم داشت.



راه‌حل دوم:

$$(A-B)\cap(A\cap B)=(A\cap$$
$$A\cap(B'\cap B)=A\cap\phi=\phi$$

۷- گزینه ۴ صحیح است. همانطورکه می‌دانید چنانچه مجموعه‌ای n عضو داشته باشد تعداد زیر مجموعه‌های آن ۲^n است.

اولیه: $\frac{۲^{n+۳}}{۲^n}=\frac{۲^n\times ۲^۳}{۲^n}=۸$

۸-گزینه ۴ صحیح است.

$$[A\cup B'\cup C']\cap[A\cup(B\cap C)]=[A\cup(B\cap C)']\cap[A\cup(B\cap C)]=A\cup[(B\cap C)'\cap(B\cap C)]=A\cup\phi=A$$

رشته مدیریت

۱ـ گزینه ۴ صحیح است.

داریم: $A-B=A\cap B'$

با توجه به این که مکمل مجموعه را از ما خواسته است، و از طرفی می دانیم مکمل مجموعه تهی، مجموعه مرجع است.
$(\phi=U=M)$

$$A\cap B(A-B)=A\cap B(A\cap B')=A\cap(B\cap B')=A\cap\phi=\phi$$
$$A\cap B\cap(A-B)=A\cap B\cap(A\cap B')\Rightarrow A\cap(B\cap B')=A\cap\phi=\phi\Rightarrow(\phi)'=M=U$$
داریم: $A-B=A\cap B'$

۲ـ گزینه ۴ صحیح است.

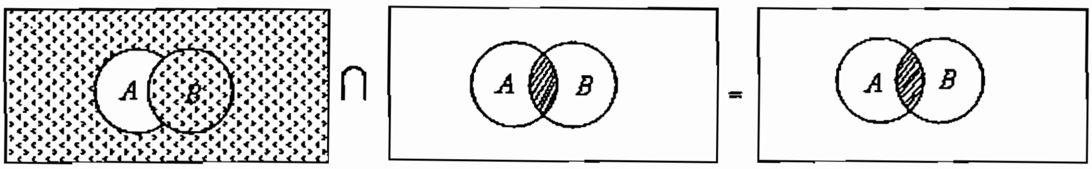
$$A=\{۱,۲\},B=\{۲,۳,۴\}\Rightarrow B-A=\{۳,۴\}\Rightarrow n(B-A)=۲$$

۳ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$A_۱=\{X|-۱<X<۱\}$$
$$A_۲=\{X|-۲<X<۲\}\Rightarrow A_۱\subset A_۲\subset A_۳\subset\ldots\subset A_n\Rightarrow\bigcap_{i=۱}^{n}A_i=A_۱\cap A_۲\ldots\cap A_n=A_۱$$
$$A_n=\{X|-n<X<n\}$$

۴ـ گزینه ۳ صحیح است.

روش اول با توجه نمودار ون خواهیم داشت.



(A−B)'   A∩B   A∩B

روش دوم:

$$(A\cap B)\cap(A-B)'=(A\cap B)\cap(A\cap B')'=(A\cap B)\cap(A'\cup B)=\underbrace{[(A\cap B)\cap A']}_{\phi}\cup[(A\cap B)\cap B]=A\cap B$$

۵- گزینه ۳ صحیح است.

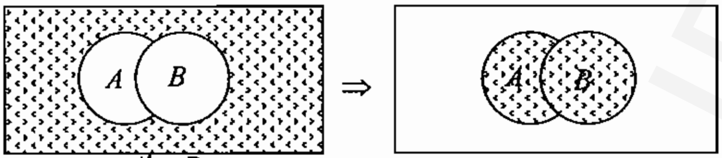
بطور کلی برای هر مجموعه n عضوی تعداد زیر مجموعه های آن برابر ۲^{n} خواهد بود بنابراین:

$$\frac{۲^{K+۲}}{۲^{K}}=\frac{۲^{K}\times ۲^{۲}}{۲^{K}}=۴$$

۶ـ گزینه ۳ صحیح است.

روش اول: $(A'-B)'=(A'\cap B')'=A\cup B$

روش دوم:



$A'-B$ $\Rightarrow$ $(A'-B)'$

۷ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$A-(A\cap B)=A\cap(A\cap B)'=A\cap(A'\cup B')$$
$$=(A\cap A')\cup(A\cap B')=\phi\cup(A\cap B')=A\cap B'$$

۸ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$A\subset B\subset C\begin{cases}A\cap B=A\\ A\cup B=B\Rightarrow(A\cup C)\cap B=C\cap B=B\\ A\cup C=C\end{cases}$$

۹ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$A-[(A\cap B)\cup A]=A-A=\phi$$

یادآوری: $A\cap(B\cup A)=A$, $A\cup(A\cap B)=A$: قانون جذب

۱۰ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$(A\cap B)\cup(A-B)=(A\cap B)\cup(A\cap B')=A\cap(B\cup B')=A\cap M=A$$
$$[(A\cap B)\cup(A-B)]\cap A'=A\cap A'=\phi$$

۱۱ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$\frac{۲^{K+۳}}{۲^{K}}=\frac{۲^{K}\times ۲^{۳}}{۲^{K}}=۲^{۳}=۸$$

۱۲ـ گزینه ۱ صحیح است.

A= مجموعه مدیریت   مجموعه حسابداری = B

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۳۰+۲۰-۱۰=۴۰$$

رشته حسابداری

۱ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$(A-B)'=(A\cap B')'=A'\cup B$$

۲ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۲۰$$
$$n(A_1\cup B)=(n(A)+۸)+n(B)-[n(A\cap B)+۶]$$
$$n(A_1\cup B)=۲۰+۸-۶=۲۲$$

۳- گزینه ۱ صحیح است.

$$۱۹ = ۱۰ + ۱۵ - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = ۶$$

۴- گزینه ۴ صحیح است.

$$A' \cap [A \cup (B \cap A)] = A' \cap A = \phi$$

۵-گزینه ۳ صحیح است.

$$[(B' \cap A) \cap C] \cup C' \xrightarrow{A \subset B \Rightarrow A \cap B' = \phi} (\phi \cap C) \cup C' = \phi \cup C' = C'$$

۶- گزینه ۳ صحیح است.

$$C' \cap (A' \cap B') = C' \cap (A \cup B)' \xrightarrow{A \subset B} C' \cap B' = (C \cup B)' \xrightarrow{B \subset C} C'$$

۷- گزینه ۴ صحیح است.

$$A = \{۱,۳,۵,۷,۹,۱۱,۱۳,۱۵\} \qquad A \cap B = \{۳,۹,۱۵\}$$
$$B = \{۳,۶,۹,۱۲,۱۵\} \qquad n(A \cap B) = ۳$$

تعداد زیر مجموعه‌ها $= ۲^۳ = ۸$

۸- گزینه ۴ صحیح است.

$$B \cap (B - A) = B \cap (B \cap A') = B \cap A' = B - A$$

۹- گزینه ۴ صحیح است.

$$(A \cup B) \cap C - A \cap B \xrightarrow{A \subset B} B \cap C - A$$
$$\xrightarrow{B \subset C} B - A = B \cap A'$$

۱۰- گزینه ۱ صحیح است.

$$(A \cap B \cap C) \cup (A - B) \cup (A - C) = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B') \cup (A \cap C')$$
$$= [A \cap B \cap C] \cup [A \cap (B' \cup C')] = [A \cap \alpha] \cup (A \cap \alpha') = A \cap (\alpha \cup \alpha') = A \cap M = A$$

در این سوال فرض کردیم که: $B \cap C = \alpha$

۱۱- گزینه ۲ صحیح است.

$$(A \cap B \cap C) \cup (A \cup C')' \cup (B \cup C')' = (A \cap B \cap C) \cup (A' \cap C) \cup (B' \cap C)$$
$$= (A \cap B \cap C) \cup (C \cap (A' \cup B')] = (C \cap \alpha) \cup (C \cap \alpha') = C \cap \left(\underbrace{\alpha \cup \alpha'}_{M}\right) = C$$

در این سوال فرض می کنیم که : $A \cap B = \alpha$

۱۲- گزینه ۲ صحیح است.

$$[A \cap (A' \cup B)] \cup \left[B \cap (A \cap B)'\right] = \left[\left(\underbrace{A \cap A'}_{\phi}\right) \cup (A \cap B)\right] \cup [B \cap (A' \cup B')] =$$
$$\left[(A \cap B) \cup (B \cap A') \cup \left(\underbrace{B \cap B'}_{\phi}\right)\right] = (A \cap B) \cup (B - A) = B$$

۱۳- گزینه ۳ صحیح است.

با توجه به رابطه $\Leftarrow$ اگر $A \subset C \Rightarrow B' \subset A'$

خواهیم داشت: $A' \cap B' = B' \quad , \quad A' \cup B' = A'$

بنابراین گزینه ها یک و دو صحیح هستند، در مورد گزینه چهارم خواهیم داشت:

اگر $A \subset B \Rightarrow (A \cup B) \cap (A \cap B) = B \cap A = A$

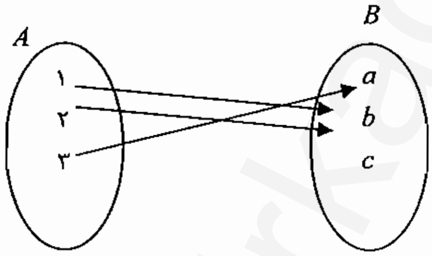
فصل دوم

توابع

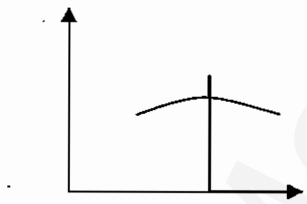
(۲-۱) تعریف رابطه: مجموعه‌ای از زوج مرتب های (X, Y) که میـان X, Y آنهـا رابطـه خاصـی وجـود داشـته باشـد را رابطـه می‌گوییم ، مـثلا: $A=\{\ (x,y)|x,y\in R, x\le y\ \}$, $B=\{\ (x,y)|x,y\in R, x=y\ \}$ کـه در ایـن حالـت x را متغیـر مستقل و y را وابسته گویند.

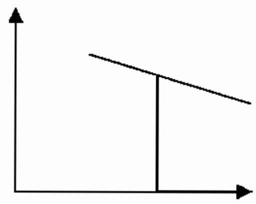
(۲-۲) تعریف تابع: هر رابطه ای را تابع گویند اگر هر متغیر مستقل تنها و تنها یـک متغیـر وابـسته متنـاظر داشـته باشـد مـثلاً $A=\{(1\ ,\ 2)\ ,\ (3\ ,6)\ ,\ (-1\ ,\ 2)\}$ یک تابع می‌باشد.

یک رابطه که در آن هیچ دو زوج مرتب متفاوتی دارای مؤلفه های اول مساوی نباشند یک تابع نامیده می شود. به عبارت دیگر یک رابطه که در آن به هر عضو دامنه عضو منحصر به فردی از برد نسبت داده می شود یک تابع است.



از نظر نمودار مختصاتی: تابع رابطه ای است که هیچ دو نقطه ای از نمودار آن روی یک خط موازی محور Y قرار نگرفته باشد.





رابطه بین x , y در توابع را معمولاً با علامتهای مانند $f(x)=y$, $g(x)=y$ نشان می‌دهند.

دامنه و برد تابع: مجموعه مقادیری که x می‌تواند بگیرد دامنه تابع می‌گویند که با D نمایش می‌دهند کـه ایـن مقـادیر اعـدادی هستند که به ازای آنها مقدار بدست آمده برای y جزء اعداد حقیقی بوده باشد.

$D=R$ دامنه $=\{x|x\in A,(x,y)\in R\}$

مجموعه مقادیری را نیز که y (متغیر وابسته) می‌تواند بگیرد را برد تابع گویند که با R نمایش می‌دهند.

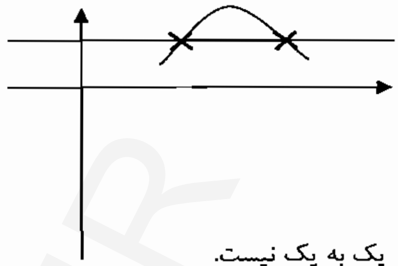
⇐ در مورد برد و دامنه توابع در آینده با تفصیل بیشتری بحث می‌کنیم.

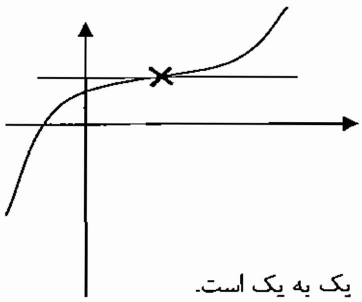
تابع یک به یک: هر تابعی که به ازای هر y تنها یک x متناظر داشته باشیم تابع یک به یک می‌باشد که بـرای تـشخیص آن را از روی شکل می‌توان خطوط افقی (موازی محورx ها) رسم کرد که در یک تابع یک به یک حداکثر یکبار آن قطع خواهد کرد.

$\forall x_1,x_2\in D_f$ اگر $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$

و یا اگر $\forall x_1,x_2 \Rightarrow D_f$ اگر $x_1\ne x_2\Rightarrow f(x_1)\ne f(x_2)$

در نمودار دکارتی خطی موازی محور x ها رسم کرده و آن را به موازات خود تغییر می دهیم. اگر خط مزبور نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند آن نمودار نمایش تابع یک به یک است و اگر خط نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند آن نمودار نمایش تابع یک به یک نیست.


یک به یک نیست.


یک به یک است.

نکته:

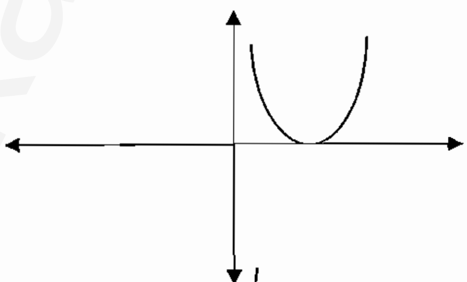
اگر توان Y زوج باشد اصلاً تابع نیست و اگر توان x زوج باشد یک تابع است ولی یک به یک نیست.

تابع پوشا: تابع f(x) تابعی پوشا است اگر در بازه مخصوص از y ها خطوطی موازی رسم شود حداقل یکبار منحنی را قطع کند.

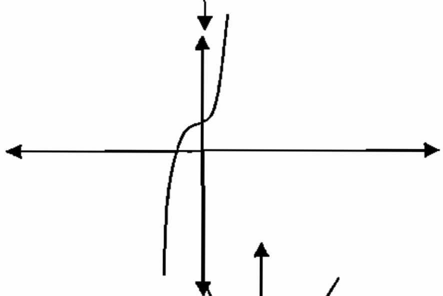
هرگاه در تابعی برای هر عضوی از مجموعه دوم (B) یک عضو از مجموعه اول (A) وجود داشته باشد به متممی که آن دو تشکیل یک زوج مرتب تابع را بدهند به آن تابع پوششی می گویند.

مثالهایی از تابع یک به یک و پوشا:

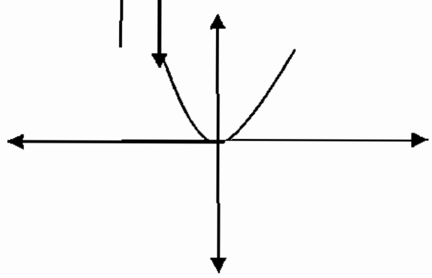
$\begin{cases} R \to R^{\geq 0} \\ X \to (X-1)^2 \end{cases}$ پوشا است و غیر یک به یک



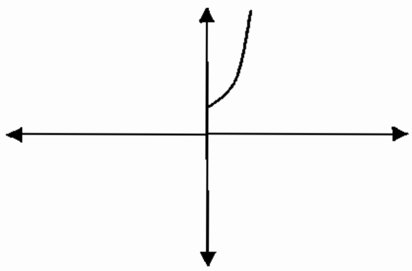
$\begin{cases} R \to R \\ X \to X^3+1 \end{cases}$ هم یک به یک و هم پوشا



$\begin{cases} R \to R \\ X \to X^2 \end{cases}$ نه یک به یک و نه پوشا



$\begin{cases} R^{\geq 0} \to R \\ X \to 2X^3+1 \end{cases}$ یک به یک و غیر پوشا



معکوس تابع (وارون): برای بدست آوردن دستور f^{-1} (معکوس تابع) از دستور $y = f(x)$ مقدار x را بر حسب y تعیین می‌کنیم تا $x = f^{-1}(y)$ بدست آید در تابع اخیر y متغیر مستقل و x متغیر وابسته است و چون معمولاً x را متغیر مستقل و y را متغیر وابسته می گیرند جای y و x را عوض می کنیم تا $y = f^{-1}(x)$ بدست آید. و در حالتی که منحنی تابع وجود داشته باشد برای معکوس کردن قرینه منحنی را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم (x= y) رسم کنید . معکوس تابع f را به صورت f^{1} نمایش می‌دهیم.

$$R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$$

دامنه R^{-1} = برد R برد R^{-1} = دامنه R

روش تستی یا دوم به دست آوردن تابع معکوس:

الف) ابتدا جای x و y را در ضابطه تابع عوض می کنیم و سپس y را برحسب x به دست می آوریم تا فاصله ضابطه معکوس به دست آید.

ب) جای دامنه و برد تابع را عوض می کنیم تا دامنه و برد تابع معکوس به دست آید.

$$f: \begin{matrix} y = f(x) \\ x = f(y) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} D_F & & R_F \\ & \times & \\ D_F^{-1} & & R_F^{-1} \end{matrix}$$

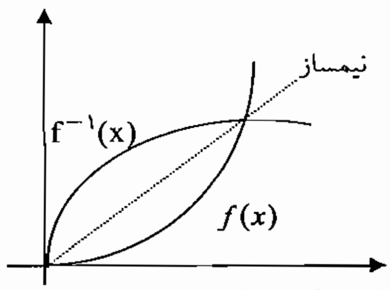
قضیه اساسی:

هرگاه f در فاصلهٔ بسته $[a,b]$ اکیداً صعودی و پیوسته باشد، f^{-1} در $[f(a),f(b)]$ اکیداً صعودی و پیوسته است. چنانچه f در $[a,b]$ اکیداً نزولی و پیوسته باشد و f^{-1} در $[F(b), F(a)]$ اکیداً نزولی و پیوسته است.

نکته مهم: معکوس تابعی که یک به یک نباشد تعریف نشده است.

مثال:

$$f(x) = x^3 - 1 \Rightarrow y = x^3 - 1 \Rightarrow x = y^3 - 1 \Rightarrow$$
$$y^3 = x + 1 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x+1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$$



نکته: شرط لازم و کافی برای اینکه معکوس یک تابع خود نیز تابع باشد یک به یک بودن تابع اصلی است مثلاً:

$y = x^2 \Rightarrow x = y^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x}$ این رابطه تابع نیست

تابع زوج و فرد: شرط اولیه برای زوج و فرد بودن تابع قرینه بودن دامنه تابع می‌باشد به طور کلی می‌توان گفت:

الف) تابع f(x) یک تابع زوج است اگر به ازای هر x عضو دامنه f , x− نیز عضو دامنه f بوده و f(-x) = f(x) باشد به عبارت دیگر: $\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f, f(-x) = f(x)$

نکته: نمودار هندسی تابع زوج نسبت به محور y ها تقارن دارد.

مثال:

مثال: $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$ $D_f : R - \{\pm 1\} \leftarrow$ دامنه قرینه است $\quad f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{(-x)^2 - 1} = \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = f(x)$

$f(x) = x^2 + COSx \quad , D_f = R$ دامنه قرینه است $\quad f(-x) = (-x)^2 + COS(-x) = x^2 + COSx = f(x)$

ب) تابع f(x) یک تابع فرد است اگر به ازای هر x عضو دامنه f(x) , x− نیز عضو دامنه باشد و $f(-x) = -f(x)$ به عبارت دیگر:

$\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f, f(-x) = -f(x)$

نکته: نمودار هندسی تابع فرد نسبت به مبدا مختصات تقارن دارد.

مثال:

$f(x) = x^۳ - Sinx \qquad D_f : R$ دامنه قرینه است

دامنه $f(-x) = (-x)^۳ - Sin(-x) = -x^۳ + Sinx = -f(x)$

به یاد داشته باشیم که:

$\sin(-x) = -\sin x \qquad \cos(-x) = \cos x$

$\tan(-x) = -\tan x \qquad \cot(-x) = -\cot x \qquad |-x| = |x|$

بدیهی است که در صورتی که f(x) هر یک از ویژگیهای بالا را دارا نباشد تابع نه زوج و نه فرد می‌باشد، مثلاً:

$f(x) = x^۲ - ۱ \qquad D_f : R$ است دامنه قرینه $f(-x) = (-x)^۳ - ۱ = -x^۳ - ۱ \neq -f(x)$

چون دامنه نامتقارن است پس تابع نه زوج و نه فرد است $D_f : R - \{۳,-۲\}$ $\qquad f(x) = \dfrac{x+۲}{x^۲ - x - ۶} \Rightarrow$

(۲-۳) توابع صعودی و نزولی

الف) تابع f(x) تابعی صعودی خواهد بود اگر به ازای هر $x_۱ < x_۲$ داشته باشیم $f(x_۱) < f(x_۲)$.

اگر $f(x_۱) \le f(x_۲), x_۱ \le x_۲$ اکیداً صعودی

ب) تابع f(x) تابعی نزول خواهد بود اگر به ازای هر $x_۱ < x_۲$ داشته باشیم $f(x_۱) \ge f(x_۲)$.

اگر $f(x_۱) \ge f(x_۲), x_۱ \ge x_۲$ اکیداً نزولی

در مورد صعودی یا نزولی بودن توابع در قسمت مشتقات توضیح بیشتری داده خواهد شد.

نکته مهم: اگر تابع f اکیدا صعودی (یا اکیداً نزولی) باشد آنگاه f، (۱-۱) یک به یک است.

(۲-۴) ترکیب تابع

برای ترکیب دو تابع g(x),f(x) که آن را با fog (x) یا f(g(x)) نمایش می‌دهند جواب بدست آمده از تابع g(x) را به عنوان متغیر اولیه ورودی یا مستقل (x) تابع f(x) در نظر می‌گیریم.

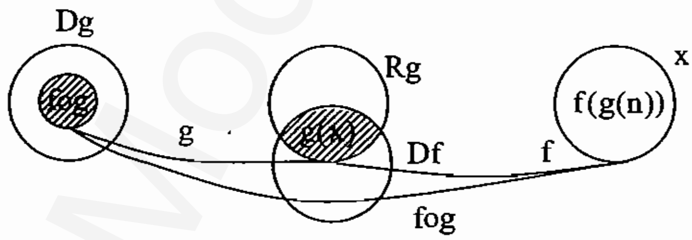
روش حل مسائلی که (عبارت جبری) f را داریم، می خواهیم f(x) را حساب کنیم.

۱)عبارت جبری =t

۲)x را برحسب t به دست می آوریم.

۳)جایگذاری می کنیم.

۴)در آخرین مرحله جای t پاک می کنیم، x می گذاریم.



تذکر: ترکیب دو تابع خاصیت جابجایی ندارد.

ترکیب توابع خاصیت شرکت پذیری دارد. $\qquad fog\,oh = (fog)\,oh = fo(goh)$

ترکیب هر تابع با معکوس آن یک تابع نمایی است. $\qquad (f^{-۱}of)(x) = x \quad (f\,of^{-۱})(y) = y$

مثال: اگر $f(x) = \dfrac{x^۲ - ۱}{x - ۲}$ و یا g(x) = log x باشد fog (10) , gof (3) را بدست آورید.

$fog(۱۰): \quad g(۱۰) = \log ۱۰ = ۱ \Rightarrow f(۱) = \dfrac{۱^۲ - ۱}{۱ - ۲} = ۰$

$gof(۳): \quad f(۳) = \dfrac{۳^۲ - ۱}{۳ - ۲} = ۸ \Rightarrow g(۸) = \log ۸$

در حالت کلی:

$$fog(x)=f(g(x))=f(\log x)=\frac{(\log x)^{۲}-۱}{\log x-۱}$$

$$gof(x)=g(f(n))=g(\frac{x^{۲}-۱}{x-۲})=\log(\frac{x^{۲}-۱}{x-۲})$$

(۲-۵) دامنه توابع مرکب:

دامنه تابع fog (x) عبارتند از مجموعه اعدادی که در ابتدا جزء دامنه g(x) بوده و مقدار متناظر آن یعنی y آن عضو دامنـه f(x) باشد به عبارت دیگر:

$$D_{fog}=\{x\in D_g | g(x)\in D_f\}$$

مثال اگر $g(x)=\sqrt{x}, f(x)=\frac{x-۱}{x-۲}$ باشد دامنه fog (x) را بدست آورید.

$$g(x)=\sqrt{x}\Rightarrow D_g : x\geq ۰$$

$$f(x)=\frac{x-۱}{x-۲}\Rightarrow x-۲\neq ۰\Rightarrow D_f : x\neq +۲$$

$$D_{fog}=\{x\in R^{\geq ۰} | g(x)\neq +۲\} : \sqrt{x}\neq ۲\Rightarrow x\neq ۴$$

$$\Rightarrow D_{fog}=R^{\geq ۰}-\{۴\}, \text{یا}\ D_{fog} : [۰,۴)\cup(۴,+\infty)$$

چهار عمل اصلی بر روی توابع:

$$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)$$

$$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$$

$$(f/g)(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \qquad g(x)\neq 0$$

دامنه توابع حاصل از این چهار حالت برابر با اشتراک دامنه‌های g , f می‌باشد و فقط در مورد تقسیم مقادیری از x کـه بـه ازای آن g(x)=0 می‌باشد نیز از دامنه حذف می‌شود.

(۲-۶) یادآوری: تعیین علامت عبارتها و حل نامعادلات

برای تعیین علامت عبارتها ابتدا کل عبارت را به یک طرف تساوی منتقل کرده و مساوی صفر قرار می‌دهیم و مقادیر x که تابع بـه ازای آن صفر می‌شود را بدست می‌آوریم سپس به روش زیر عمل می‌کنیم.

الف) عبارت درجه اول (ax+b) مقدار x متناظر با صفر برابر $\frac{-b}{a}$ می‌باشد.

		$\frac{-b}{a}$	
$ax+b$	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

ب) عبارت درجه دوم (ax^2+bx+c): برای بدست آوردن مقدار x متناظر با صفر ابتدا Δ را تشکیل می‌دهند.

$$ax^{۲}+bx+c=۰ \qquad \Delta=b^{۲}-۴ac \qquad , \quad x_i=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

نکته: شرط لازم و کافی برای اینکه معادله $ax^2+bx+c=0$ دارای جواب حقیقی باشد این است که $\Delta\geq 0$ باشد.

۱) معادله دارای دو ریشه می‌باشد $x_۲, x_۱$ $(\Delta>۰)$.

		x_1		x_2	
ax^2+bx+c	موافق علامت a		مخالف علامت a		موافق علامت a

۲) معادله دارای ریشه مضاعف می‌باشد $\Delta = 0$.

		x_1	
ax^2+bx+c	موافق علامت a		موافق علامت a

۳) معادله دارای جواب حقیقی نیست $\Delta < 0$.

ax^2+bx+c	موافق علامت a

مثال ۱: عبارتهای زیر را تعیین علامت کنید:

$A = -2x+8 \Rightarrow -2x+8=0 \Rightarrow x=4$

X		4	
A	+		−

$B = x^2-3x-4 \Rightarrow x^2-3x-4=0 \quad \Delta=(-3)^2-4(1)(-4)=25 \begin{cases} x_1=\dfrac{3+\sqrt{25}}{2}=4 \\ x_2=\dfrac{3-\sqrt{25}}{2}-1 \end{cases}$

x		1		4	
B	+		−		+

مثال ۲: مقدار a چه مقدار باشد تا عبارت ax^2+5x+3 همواره مثبت باشد.

شرط لازم و کافی برای اینکه عبارتی همواره مثبت باشد $\begin{cases} \Delta<0 \Rightarrow 25-12a<0 \Rightarrow -12<-25 \Rightarrow a>\dfrac{25}{12} \\ a>0 \Rightarrow a>0 \end{cases}$

نکته: در هر معادله ای به صورت $ax^2+bx+c=0$ اگر دو ریشه x_1 و x_2 داشته باشیم خواهیم داشت:

$x_1+x_2=\dfrac{-b}{a} \quad , \quad x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

برای حل نامعادلات به روش زیر عمل می‌کنیم:

الف) نامعادله درجه یک باشد: همانند حل معادلات درجه یک معمولی می‌باشد فقط باید دقت کرد که در صورتی کـه نامعادلـه در یک عدد منفی ضرب یا تقسیم شود جهت نامعادله عوض می‌شود مثال:

$5x+2 \le 6x+-4 \Rightarrow 5x-6x \le -2-4 \Rightarrow -x \le -6 \Rightarrow x \ge 6$

ب) نامعادله درجه دو باشد: در این حالت کلیه جملات و اعداد به یک طرف نامعادله برده آن را مـساوی صـفر قـرار داده و تعیـین علامت می‌کنیم سپس با توجه به نوع نامعادله مقدار جواب را تعیین می‌کنیم.

مثال:

$4x^2-5 \ge 3x-4 \Rightarrow 4x^2-3x-1 \ge 0 \qquad 4x^2-3x-1=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=\dfrac{-1}{4} \end{cases}$

مجموعه جواب: $(-\infty,\frac{-1}{4}]\cup[1,+\infty)$

		$-1/4$		1	
$4x^2-3x-1$	+		−		+
$4x^2-3x-1 \ge 0$	ج				ج

ج) نامعادله به صورت گویا باشد (کسری باشد): در این حالت نیز ابتدا کلیه عبارتها را به یک طرف نامعادلـه منتقـل کـرد و مخـرج مشترک می‌گیریم سپس هم صورت و هم مخرج را بطور مجزا مساوی صفر قرار داده و تعیین علامت می‌کنیم و در انتها علامت کل عبارت را تعیین و جواب را مشخص می‌کنیم.

مثال:

$$\frac{x}{x+1} \ge \frac{1}{x-1} \Rightarrow \frac{x}{x+1} - \frac{1}{x-1} \ge 0 \Rightarrow \frac{x^2-2x-1}{x^2-1} \ge 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2-2x-1=0 & x=1\pm\sqrt{2} \\ x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1 \end{cases}$$

		-1	$1+\sqrt{2}$	1	$1-\sqrt{2}$
X^2-2x-1	+	+	−	−	+
X^2-1	+	−	−	+	+
کل عبارت	+	−	+	−	+
کل عبارت ≥ 0	ج		ج		ج

مجموعه جواب:

$(-\infty,-1)\cup[1-\sqrt{2},1)\cup[1+\sqrt{2},+\infty)$

(۲-۷) نکاتی در مورد انواع توابع

۱) تابع درجه یک (y=ax+b)

الف) شیب این تابع برابر a می‌باشد. (m= a) البته می‌بایست توجه کرد که در مواردی تابع به شکل ax+by+c=0 می‌باشد. شیب تابع $(m=\frac{-a}{b})\frac{-a}{b}$ می‌باشد و اگر دو نقطه از تابع را داشته باشیم شیب تابع با رابطه روبرو بدست می‌آید: $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

نکته مهم: اگر تابع موازی محور y باشد شیب تابع تعریف نشده $(m=\infty)$ و اگر موازی محور x ها باشد شیب تابع صفر است (m=0).

ب) برای بدست آوردن معادله یک نمودار خطی سه راه وجود دارد.

۱) اگر از دو نقطه $B(x_2,y_2), A(x_1,y_1)$ بگذرد.

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

۲) اگر از نقطه $A(x_1,y_1)$ بگذرد و شیب آن m باشد. $y-y_1=m(x-x_1)$

۳) اگر عرض از مبدأ آن b و طول از مبدا آن a باشد یعنی از دو نقطه (a, 0) , (0 , b) بگذرد $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

ج) دو تابع با هم موازی هستند اگر شیب آنها مساوی باشد $(m=m')$ و عمودند اگر حاصلضرب شیب آنها ۱- شود $(mm'=-1)$ در حالت کلی در مورد دو خط با ضابطه ای $a'x+b'y+c', ax+by+c=0$ خواهیم داشت.

دو خط موازیند اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$

دو خط منطبقند اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

دو خط متقاطعند $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$

مثال: معادله خطی را بدست آورید که بر خط $2y-x=3$ عمود بوده و از نقطه (1, -1) بگذرد.

$$2y-x=3 \Rightarrow m=\frac{-a}{b}=\frac{1}{2} \qquad mm'=-1 \Rightarrow m'=-2$$

$$y-y_1=m(x-x_1) \Rightarrow y+1=-2(x-1) \Rightarrow y=-2x+2-1 \Rightarrow y=-2x+1$$

۲) توابع درجه $n(x\in n, y=ax^n+bx^{n-1}\ldots+d)$

از صورتهای خاص این توابع را می‌توان به تابع درجه دو f(x)=ax²+bx+c یا درجه سه $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ و... اشاره کرد دامنه این توابع مجموعه اعداد حقیقی (R) می‌باشد.

۳) توابع رادیکالی $y = \sqrt[m]{f(x)}$

دامنه تابع: در این توابع چنانچه m عدد زوج باشد دامنه تابع مقادیری از x است که به ازای آن عبارت زیر رادیکال مثبت شود یعنی $f(x) \geq 0$ و اگر m فرد باشد دامنه تابع R خواهد بود.

۴) توابع کسری گویا $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

دامنه این توابع مقادیری از x است که به ازای آن $g(x) \neq 0$ باشد به عبارت دیگر این توابع در x هایی که مخرج آن صفر شود تعریف شده نیستند.

۵) توابع قدر مطلقی $y = |f(x)|$

دامنه توابع قدر مطلق در واقع همان دامنه f(x) می‌باشد.

ساده ترین نوع تابع قدر مطلق $f(x) = |x|$ می‌باشد که به صورت روبرو تعریف می‌شود.

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq ۰ \\ -x & x < ۰ \end{cases}$$

بعضی از قواعد مربوط به قدر مطلق عبارتند از:

۱) $|xy| = |x||y|$　　۲) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$　　۳) $|x|^۲ = x^۲$

۴) $|x| \geq x$　　۵) $|x+y| \leq |x| + |y|$　　۶) $|x-y| \geq |x| - |y|$

۷) $x = |k| \Leftrightarrow x = \pm k$　　۸) $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a, x \leq -a$

۹) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$　　۱۰) $\sqrt{x^۲} = |x|$

۶) تابع نمایی $y=a^{f(x)}$

تابع نمایی به خودی خود دارای دامنه R است به عبارت دیگر دامنه تابع نمایی $y=a^{f(x)}$ همان دامنه تابع f(x) است.

ساده ترین نوع تابع نمایی به صورت $f(x)=a^x$ می‌باشد، که در مورد آن خواهیم داشت:

۱) $D_{f(x)} = R \quad , \quad R_{f(x)} = R^+$ یا $(0,+\infty)$

۲) f(x) همواره صعودی است اگر $a>1$ و f(x) همواره نزولی است اگر $a<1$ باشد و اگر $a=1$ باشدتابع ثابت خواهد بود.

بعضی از روابط مربوط به عبارتهای نمایی عبارتند از:

۱) $a^۰ = ۱$　　۲) $a^m . a^n = a^{m+n}$　　۳) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$　　۴) $a^m.b^m = (ab)^m$

۵) $\dfrac{a^n}{b^n} = (\dfrac{a}{b})^n$　　۶) $(a^n)^m = a^{nm}$　　۷) $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$

۷) توابع لگاریتمی $y = \log_a f(x)$

توابع لگاریتمی‌در واقع معکوس تابع نمایی می‌باشد به عبارت دیگر همواره خواهیم داشت:

$$a^y = f(x) \Leftrightarrow y = \log_a f(x) \qquad f(x) > ۰, a > ۰, a \neq ۱$$

دامنه توابع لگاریتمی‌مقادیری از x است که به ازای آن f(x) مثبت باشد در واقع برای تعیین دامنه نامعادله $f(x)>0$ را حل می‌کنیم.

مهمترین روابط توابع لگاریتمی‌عبارتند از:

۱) $\begin{matrix} x>0 \\ a>0, a\neq 1 \end{matrix} \quad a^y = x \Leftrightarrow \log_a^x = y$

۲) $\log_a^1 = 0$

۳) $\log_a^{xy} = \log_a x + \log_a^y$

۴) $\log_a^{\frac{x}{y}} = \log_a^x - \log_a^y$

۵) $\log_a^{x^{\frac{m}{n}}} = \frac{m}{n}\log_a^x$

۶) $\log_{a^{\frac{m}{n}}}^x = \frac{n}{m}\log_a^x$

۷) در لگاریتمی‌که پایه آنها ۱۰ است معمولاً از نوشتن پایه صرف نظر می‌شود. $\log_{10}^x = \log^x$

۸) به ازای c, b, a مثبت : $\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b} \qquad \log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$

لگاریتم نپرینی: حالت خاصی از لگاریتم است که پایه log عدد e (نپرین) است که در این حالت لگاریتم را به صورت Ln می‌نویسند.

$$y = \log_e^x \cong \ln x \Leftrightarrow e^y = x$$

مثال: دامنه توابع زیر را بدست آورید:

الف) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x < -1, x > +1 \Rightarrow D_f : (-\infty,-1) \cup (+1,+\infty)$

ب) $g(x) = 3^{\frac{1}{x}} \Rightarrow D_g = D_{\frac{1}{x}} \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow D_g = R - \{0\}$

ج) $h(x) = \log_{|x|}^{-x^2+1} \quad \left.\begin{matrix} -x^2+1>0 & x^2<1 \Rightarrow -1<x<1 \\ |x| \neq 0,1 & x \neq 0,+1,-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (-1,0) \cup (0,1)$

۸) مثلثات و توابع مثلثاتی

(۲-۸) درجه و رادیان

یک زاویه را می‌توان بر حسب درجه یا رادیان اندازه گیری کرد که معمولاً در بیان فرمولهای ریاضی و نیز دیفرانسیلها و انتگرالها از مقیاس رادیان استفاده می‌کنند.

- مقیاس درجه بر این فرض قرار دارد که یک دایره شامل ۳۶۰° درجه بوده و در نتیجه خط مستقیم ۱۸۰ درجه(۱۸۰°) می‌باشد.
- یک رادیان زاویه ای است که رأس آن در مرکز دایره و طول کمان روبری آن برابر شعاع دایره می‌شود و از آنجائیکه محیط دایره $2\pi r$ است بنابراین یک دایره 2π رادیان و خط مستقیم π رادیان می‌باشد.

برای تبدیل مقیاس درجه به رادیان و بالعکس از روابط روبرو استفاده می‌شود:

$$Sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

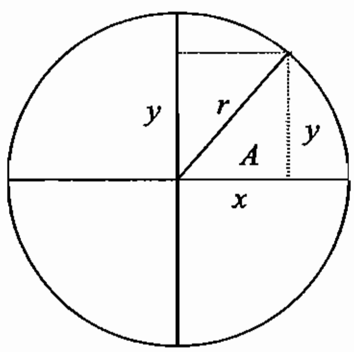
$$Cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$Tan\theta = Tg\theta = \frac{y}{x}$$

$$Cot\theta = Ctg\theta = \frac{x}{y}$$

$$Sec\theta = \frac{r}{x}$$

$$CSC\theta = \frac{r}{y}$$



$r = \sqrt{x^2+y^2}$

زاویه / تابع	صفر	$۳۰(\frac{\pi}{۶})$	$۴۵(\frac{\pi}{۴})$	$۶۰(\frac{\pi}{۳})$	$۹۰(\frac{\pi}{۲})$	$۱۸۰(\pi)$	$۲۷۰(\frac{۳\pi}{۲})$	$۳۶۰(۲\pi)$
Sin	0	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	1	0	-1	0
Cos	1	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	0	-1	0	1
Tan(tg)	0	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$	1	$\sqrt{۳}$	∞	0	∞	0
Cot(tg)	∞	$\sqrt{۳}$	1	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$	0	∞	0	∞

نکته مهم: مقادیر مثلثاتی در ربع های مختلف را می‌توان با کمک جدول زیر ساده کرد:

X	$-\theta$	$\pi-\theta$	$\pi+\theta$	$۲\pi-\theta$	$۲\pi+\theta$	$\frac{\pi}{۲}-\theta$	$\frac{\pi}{۲}+\theta$	$\frac{۳\pi}{۲}-\theta$	$۳\frac{\pi}{۲}+\theta$
sin	$-\sin\theta$	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$-\sin\theta$	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\cos\theta$	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$
cos	$\cos\theta$	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$	$\cos\theta$	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$-\sin\theta$	$\sin\theta$
tan	$-\tan\theta$	$-\tan\theta$	$\tan\theta$	$-\tan\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$-\cot\theta$	$\cot\theta$	$-\cot\theta$
cot	$-\cot\theta$	$-\cot\theta$	$\cot\theta$	$-\cot\theta$	$\cot\theta$	$\tan\theta$	$-\tan\theta$	$\tan\theta$	$-\tan\theta$

اتحادهای مهم مثلثاتی عبارتند از:

۱) $\sin^۲ x+\cos^۲ x=۱$

۲) $\tan x.\cot x=۱ \Leftrightarrow \tan x=\frac{۱}{\cot x}$

۳) $۱+\tan^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x}$

۴) $۱+\cot^۲ x=\frac{۱}{\sin^۲ x}$

۵) $CSCx=\frac{۱}{\sin x}$

۶) $Secx=\frac{۱}{\cos x}$

۷) $\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y \Rightarrow \sin ۲x=۲\sin x\cos x$

۸) $\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y \Rightarrow \cos ۲x=\cos^۲ x-\sin^۲ x=۲\cos^۲ x-۱=۱-۲\sin^۲ x$

۹) $\tan(x\pm y)=\frac{\tan\pm\tan y}{۱\mp\tan x\tan y} \Rightarrow \tan ۲x=\frac{۲\tan x}{۱-\tan^۲ x}$

مثال: مقادیر خواسته شده زیر را محاسبه کنید:

$$\sin x=\frac{۴}{۵} \Rightarrow \cos x=? \Rightarrow \cos x=\sqrt{۱-\sin^۲ x}=\sqrt{۱-\frac{۱۶}{۲۵}}=\sqrt{\frac{۹}{۲۵}}=\pm\frac{۳}{۵}$$

$$\tan(۲۱۰) \Rightarrow \tan(۲۱۰)=\tan(\pi+۳۰)=\tan(۳۰)=\tan(\frac{\pi}{۶})=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\sin(۷۵) \Rightarrow \sin(۴۵+۳۰)=\sin ۴۵\times\cos ۳۰+\cos ۴۵\times\sin ۳۰=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}(\sqrt{۳}+۱)$$

دامنه و برد توابع مثلثاتی

در توابع$y=\sin(f(x))$ و $y=\cos(f(x))$ دامنه تابع در واقع همان دامنه f(x) می‌باشد.

در توابع $y=\tan(x)$ دامنه تابع مقادیری از x است $x\neq ka+\frac{\pi}{۲}$

در تابع $y=\cot x$ دامنه تابع مقادیری از x است که $x \neq k\pi$

نکته مهم: توابع $\text{acos}\ (f(x))$, $\text{asin}\ (f(x))$ اصطلاحاً جزء توابع کراندارمیباشد زیرا حداکثر برد آنها در بین $-a \leq R \leq +a$ می‌باشد در واقع با توجه به نوع $f(x)$ برد تابع می‌تواند متفاوت باشد اما هرگز از این فاصله خارج نمی‌شود.

برد تابع $a \sin x, a \cos (x)$ برابر است با $[-a,a]$.

۹- تابع جز صحیح $y=[f(x)]$

ساده ترین شکل این نوع تابع به صورت $y=[x]$ می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$n \leq x < n+1 \Rightarrow [x]=n (n \in z)$$

و در حالت کلی $y=[f(x)]$ خواهیم داشت:

$$n \leq f(x) < n+1 \Rightarrow [f(x)]=n (n \in z)$$

به بیان ساده می‌توان گفت هر گاه $f(x)$ بین دو عدد صحیح متوالی باشد $[f(x)]$ برابر عدد صحیح کوچکتر می‌باشد.

نکته: در هر عبارت جز صحیح خواهیم داشت:

$$[x+k]=[x]+k \qquad k \in z$$

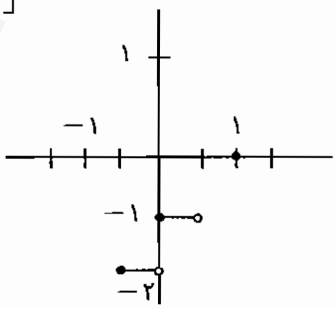
مثال: تابع $f(x)=[2x-1]$ را در فاصله $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ رسم کنید.

$$f(x)=[2x-1]=[2x]-1$$

$$-\frac{1}{2} \leq x < 0 \Rightarrow -1 \leq 2x < 0 \Rightarrow [2x]=-1 \Rightarrow f(x)=-2$$

$$0 \leq x < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq 2x < 1 \Rightarrow [2x]=0 \Rightarrow 2(x)=-1$$

$$x=\frac{1}{2} \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow [2x]=1 \Rightarrow f(x)=0$$



۱۰) توابع ARC

توابع ARC در واقع معکوس توابع مثلثاتی است مثلاً Arc sinx معکوس sinx است و همانطور که پیش از این گفتیم دامنه و برد تابع معکوس همان برد و دامنه تابع اولیه است یعنی:

$$D_f \Rightarrow R_{f^{-1}} \quad , \quad R_f \Rightarrow D_{f^{-1}}$$

الف) $F(x)=\sin x \Rightarrow f^{-1}(x)=ARC\sin x \Rightarrow D_{f^{-1}}=[-1,1], R_{f^{-1}}=R$

ب) $F(x)=\cos x \Rightarrow f^{-1}(x)=ARC\cos x \Rightarrow D_{f^{-1}}=[-1,1], R_{f^{-1}}=R$

ج) $F(x)=\tan x \Rightarrow f^{-1}(x)=ARC\tan x \Rightarrow D_{f^{-1}}=R \qquad R_{f^{-1}}, R-k\pi (k \in z)$

مثال: دامنه تابع $f(x)=ARC\sin(\frac{x}{x+1})$ را بدست آورید.

$$D_f: -1 \leq \frac{x}{x+1} \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq \frac{x}{x+1} \Rightarrow \frac{x}{x+1}+1 \geq 0 \Rightarrow \frac{2x+1}{x+1} \geq 0 \Rightarrow \\ \frac{x}{x+1} \leq 1 \Rightarrow \frac{x}{x+1}-1 \leq 0 \Rightarrow \frac{x-x-1}{x+1} \leq 0 \Rightarrow \frac{-1}{x+1} \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases} \\ \\ \Rightarrow \{x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

		-1	$-\frac{1}{2}$
$2x+1$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
عبارت	$+$	$-$	$+$

$(-\infty,-1)\cup[\frac{-1}{2},\infty)$

		-1
$x+1$	$-$	$+$
عبارت	$+$	$-$

$(-1,+\infty)$

$$\Rightarrow D_f=[-\frac{1}{2},\infty)$$

(۲-۹) تعیین برد توابع

مهمترین روش تعیین برد توابع مرتب کردن تابع بر حسب x است. این روش تا حدی شبیه به تعیین معکوس تابع می‌باشد. به صورتی که تابع را بر حسب x مرتب کرده و سپس می‌توان برد تابع را به ازای مقادیری‌که y در دامنه اعداد حقیقی تعریف شده است محاسبه کرد.

بررسی انواع تابع جبری و برد آنها:

حالت اول: برد توابع جبری درجه ۱ : برد توابع جبری درجه یک R است.

حالت دوم: محاسبه برد توابع درجه ۲:

$$y=ax^2+bx+c$$

$$R_f=\begin{cases} 1)\, a>0 \Rightarrow \left[\frac{4ac-b^2}{4a},+\infty\right) \\ 2)\, a<0 \Rightarrow \left(-\infty,\frac{4ac-b^2}{4a}\right] \\ 3)\, a=0 \Rightarrow R \end{cases}$$

حالت سوم: محاسبهٔ برد توابع تک رادیکال:

چون هر رادیکال در دامنه اش همواره مثبت و به ازای ریشه های زیر رادیکال صفر است. توابع تک رادیکال آغاز بردشان از صفر به بعد است. روش محاسبه:

$0 \le y$ ۸ { x را برحسب y بدست می آوریم. سپس به محاسبهٔ دامنه عبارتی که y دارد می پردازیم. }

حالت چهارم: برد توابع هموگرافیک:

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}$$
$$R_f=R-\left\{\frac{a}{c}\right\}$$

حالت پنجم: برد صورتهای دیگر توابع کسری: (معمولاً در محاسبهٔ برد هر تابعی از این موضوع استفاده می کنیم.)
اگر x را برحسب y بدست آوریم، سپس به محاسبه دامنه عبارتی می پردازیم که برحسب y است.

تذکر مهم: در مواردی می توان برد تابع را با استفاده از تعریف برد پیدا نمود یعنی تحقیق می کنید که با تغییر x مقدار y چه اعدادی را می پذیرد و به عبارت دیگر حداقل و حداکثر y را پیدا می کنند تا برد تابع پیدا شود.

مثال: $D_f=R$ $\quad x^2+1>0$ $\quad y=2+\sqrt{x^2+1}$

x^2 حداقل $=0 \Rightarrow y=4$ y حداقل $\Rightarrow 4\le y<+\infty R_f=[4,+\infty)$

x^2 حداکثر $=+\infty \Rightarrow y=+\infty$ y حداکثر

مثال: برد تابع $f(x)=\frac{x-2}{x+1}$ را تعیین کنید.

$$y=\frac{x-2}{x+1}\Rightarrow xy+y=x-2\Rightarrow xy-x=-y-2\Rightarrow x(y-1)=-y-2\Rightarrow x=\frac{-y-2}{y-1}$$

نقاطی که y در دامنه اعداد حقیقی تعریف شده است:

$$y-1\ne\Rightarrow y\ne1\Rightarrow R_f=R-\{1\}$$

روش دوم: روش دیگری که برای تعیین برد تابع وجود دارد به این صورت است که با توجه به نوع تابع و نحوه رفتار آن بدون تعیین معکوس برد تابع را بدست می‌آوریم.

مثال: برد تابع $f(x)=2\sin^2 2x-1$ را بدست آورید.

$$-1\le\sin2x\le1\Rightarrow 0\le\sin^2 2x\le1\Rightarrow 0\le2\sin^2 2x\le2\Rightarrow -1\le2\sin^2 2x-1\le1$$
$$\Rightarrow R_f:[-1,1]$$

تذکر: در استفاده از این روش می‌بایست احتیاط کرد.

روش سوم: با استفاده از اتحادها می‌توان برد بعضی از توابع را بدست آورد.

مثال۱:

$$y=x^4-2x^2+3$$
$$y=(x^2-1)^2+2$$

کمترین مقدار $(x^2-1)^2$ برابر صفر است پس کمترین مقدار y برابر ۲ می‌باشد از طرفی y تا ∞ می‌تواند افزایش یابد.

مثال۲:

$$y=1+\sqrt{-x^2+2x}$$
$$y=1+\sqrt{-(x^2-2x)}\Rightarrow y=1+\sqrt{-(x^2-2x+1)+1}\Rightarrow y=1+\sqrt{-(x^2-1)^2+1}$$

چون کمترین مقدار زیر رادیکال برابر صفر و بیشترین مقدار آن برابر یک است پس برد تابع در بازه $[1,2]$ قرار می‌گیرد.

مثال ۳:

$$y=Sin^2x-Sinx$$
$$y=(Sinx-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}\Rightarrow -\frac{1}{4}\le y\le2$$

چرا که بیشترین مقدار داخل پرانتز $(\sin x-\frac{1}{2})$ زمانی است که $\sin x=-1$ پس y از عدد $(\frac{9}{4}-\frac{1}{4})$ بالاترنمی‌رود و از طرفی

کمترین مقدارش نیز $-\frac{۱}{۴}$ خواهد بود.

روش چهارم: در صورتی که تابع با ضابطه $y=f(x)$ در دامنه خود پیوسته باشد برد تابع را با استفاده از مشتق تابع تعیین کرد.
اگر $f'(x)>۰$ $f'(x)<۰$ باشد بدیهی است که تابع یکنواست با فرض اینکه تابع پیوسته و دامنه آن $D_f=(x_۱,x_۲)$ باشد در این صورت

$\Rightarrow R_f=[f_{(x_۱)},f_{(x_۲)}]$ تابع صعودی باشد

$\Rightarrow R_f=\left[f_{(x_۲)},f_{(x_۱)}\right]$ تابع نزولی باشد

مثال:

$f_{(x)}=x^۴-۲x^۲+۴$

$y'=۴x^۳-۴x\ ,\ y'=۰\Rightarrow x=۰,-۱,۱$

$f(۰)=۴, f(۱)=f(-۱)=۳$

$f(x)=+\infty$

$x\to\pm\infty$

چون تابع در نقاط ۱- و ۱ می‌نیمم مطلق می‌باشد پس می‌توان گفت برد تابع برابر است با:

$y:[۳,+\infty]$

(۲-۱۰) کاربردهای تابع:

۱- تعادل بازار:

در اقتصاد معمولاً تابع عرضه و تقاضای کالا به صورت خطی نمایش داده شد و شیب تابع عرضه مثبت و شیب تابع تقاضا منفی می‌باشد. برای بدست آوردن نقطه تعادل معادله عرضه و تقاضا را بر حسب مقدار مرتب کرده و برابر هم قرار می‌دهیم.

مثال: اگر منحنی عرضه و تقاضا به ترتیب برابر با $y=۵-۳x, y=۴x+۱۲$ باشد در نقطه تعادل مقدار عرضه چه مقدار خواهد بود اگر x قیمت و y مقدار کالا باشد.

$۵-۳x=۴x+۱۲\Rightarrow ۷x=-۷\Rightarrow x=-۱\Rightarrow y=۵-۳(-۱)۴(-۱)+۱۲=۸$

از آنجائیکه در اقتصاد قیمت منفی وجود ندارد به عبارت دیگر در اقتصاد با ربع اول کار داریم این تعادل که در مثال به بدست آمده است یک تعادل بی معنی به لحاظ اقتصادی می‌باشد. در واقع تعادل به لحاظ اقتصادی زمانی معنا دار است که نقطه تعادل در ربع اول قرار می‌گیرد.

۲- نقطه سر به سر:

در اقتصاد و حسابداری نقطه سر به سر، نقطه ای است که درآمد و هزینه کل با هم برابر باشند در نتیجه برای بدست آوردن نقطه سر به سر معادله در آمد کل و هزینه کل (که شامل هزینه متغیر و هزینه ثابت می‌شود) را با هم برابر قرار داده وجواب را بدست می‌آوریم.

مثال۱: اگر شرکتی هر واحد کالای خود را که با هزینه ۵ تومان تولید می‌کند با قیمت ۸ تومان بفروشد نقطه سر به سر تولید این شرکت چند واحد خواهد بود. (هزینه ثابت ۳۰۰۰۰ تومان است)

درآمد کل: y=8x

هزینه کل: y=5x+30000

8x=5x+30000→S=10000

مثال ۲: فرض می‌کنیم که هزینه ثابت برای تولید یک کالا ۴۵۰۰۰ تومان و هزینه متغیر ۴۰٪ قیمت فروش و قیمت هر واحد ۱۵ تومان باشد به ازای چه مقدار فروش سودخالص صفر می‌شود.

$۱۵-(\%۴۰\times۱۵)=۹\Rightarrow$ سود هر واحد = مقدار نقطه سر به سر $=\frac{۴۵۰۰۰}{۹}=۵۰۰۰$

نکته مهم: در مورد بالا حتی اگر توابع خطی نباشد روش تعیین نقاط تعادلی تفاوتی ندارد.

مثال:اگر تابع هزینه ودر آمد کل به ترتیب برابر با $TR=100X, TC=X^2+10x$ باشد (Xتعداد محصول باشد) نقطه سر به سر به ازای چه مقدارXخواهد بود.

$TC=TR \quad 100X=10X+x^2$

$-X^2+90X=0 \quad X(90-x^2)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=+3\sqrt{10} \\ x=-3\sqrt{10} \end{cases}$ ق ق

۳- بهره مرکب:

ارزش x_0 واحد پولی پس از n سال در صورتی که نرخ بهره سالانه برابر با i درصد باشد برابر است با $x_n=x_0(1+i)^n$ و اگر این مبلغ بهره k بار در سال قابل پرداخت شود ارزش x برابر خواهد بود با $x_n=x_0(1+\frac{i}{k})^{nk}$.

نکته مهم: اگر بهره به صورت پیوسته محاسبه شود ارزش x ریال با بهره i درصد پس از n سال برابر استبا $x_n=x_0 e^{in}$.

تستهای طبقه‌بندی شده فصل دوم

رشته اقتصاد

۱ـ اگر x متغیر مستقل باشد، کدامیک از روابط زیر تابع است؟ (سراسری ۷۵)

۱) $y^۲ = x+۱$ ۲) $y+x^۲-۱=۰$ ۳) $x^۲+y^۲-۱=۰$ ۴) $\text{Sin}y = x$

۲ـ دامنه تابع $y=\dfrac{|x|}{[x]}$ عبارتست از: (سراسری ۷۵)

۱) $R-[۰,۱)$ ۲) $R-(۰,۱]$ ۳) $R-(۰,۱)$ ۴) $R-\{۰\}$

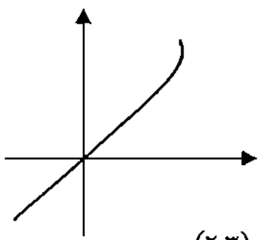
۳ـ هر گاه $f(Arc\sin(x-۱))=\dfrac{x-۱}{x}$ باشد، $f(x)$ کدام است؟ (سراسری ۷۵)

۱) $\text{Sin}\,x-۲$ ۲) $\dfrac{۱+\text{Sin}\,x}{\text{Sin}\,x}$ ۳) $\dfrac{۱-\sin x}{\text{Sin}\,x}$ ۴) $\dfrac{\text{Sin}\,x}{۱+\text{Sin}\,x}$

۴ـ مقدار تابع معکوس $y=Ln(x+\sqrt{x^۲+۱})$ به ازای $x=\text{Ln}(۱+\sqrt{۲})$ کدام است: (سراسری ۷۵)

۱) $\dfrac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۲

۵ـ در مورد رابطه f با شکل مقابل، کدام مورد صحیح نیست؟ (سراسری ۷۶)



۱) تابع ۲) فرد

۳) معکوس پذیر ۴) یک به یک

۶ـ دامنه تابع با ضابطه $y=\text{Ln}(-x^۲+۲x+۳)$ کدام است؟ (سراسری ۷۶)

۱) $(-۱,۲)$ ۲) $[-۱,۳]$ ۳) $(-۱,۳)$ ۴) $(۲,۳)$

۷ـ برد تابع f به ضابطه $f(x)=\dfrac{e^x-۱}{e^x+۱}$ کدام است؟ (سراسری ۷۶)

۱) $(-۱,۱)$ ۲) R ۳) $[-۱,۱]$ ۴) $R-\{۰\}$

۸ـ اگر $g(x)=Lnx, f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{۲}$ باشد، مقدار $fog(۱)$ کدام است؟ (سراسری ۷۶)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\dfrac{۱}{۲}$ ۴) ۲

۹ـ دامنه تابع $f(x)=\sqrt{|x|-x^۲}$ کدام فاصله است؟ (سراسری ۷۷)

۱) $R-(-۱,۱)$ ۲) $(۰,۱)$ ۳) $(-۱,۱)$ ۴) $[-۱,۱]$

۱۰ـ اگر $f(x)=\dfrac{۱}{x+۱}$ باشد، $fofof(۱)$ کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) $\dfrac{۳}{۵}$ ۲) $\dfrac{۱}{۸}$ ۳) $\dfrac{۱}{۴}$ ۴) $\dfrac{۱}{۲}$

۱۱ـ برد یا حوزه مقادیر تابع حقیقی با ضابطه $f(x)=\text{Ln}\sqrt{\dfrac{x^۲}{x+۱}}$ کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) $(-\infty,۰)$ ۲) $(-\infty,۱)$ ۳) R^t ۴) $[۱,\infty]$

۱۲ـ برد تابع حقیقی f، به معادله $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{۴}$ کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) R ۲) $\left[\dfrac{۱}{۲},\infty\right)$ ۳) R^+ ۴) $[۱,\infty]$

۱۳ـ دامنه تعریف تابع حقیقی f، به معادله $f(x)=Ln(Sinx)$ به کدام صورت است؟ (سراسری ۷۸)

۱) R ۲) R^+

۳) $۲k\pi<x<۲k\pi+\pi \ln(\sin x)$ ۴) $۲k\pi-\dfrac{\pi}{۲}<x<۲k\pi+\dfrac{\pi}{۲}$

۱۴ـ اگر $f(x)=Ln\dfrac{x+۱}{x}$ باشد، مقدار $f^{-۱}_{(+۲)}$ کدام است؟ (سراسری ۷۸)

۱) $\dfrac{۱}{e^۲-۱}$ ۲) $e^۲+۱$ ۳) $Ln\dfrac{۳}{۲}$ ۴) $Ln\dfrac{۲}{۳}$

۱۵ـ کدامیک از توابع زیر نه زوج و نه فرد است؟ (سراسری ۷۸)

۱) $y=e^{x^۲}$ ۲) $y=xe^{x^۲}$ ۳) $y=Sinx+x$ ۴) $y=\cos x+x$

۱۶ـ دامنه تابع $y=\dfrac{۱}{\sqrt{[x]-۱}}$ کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) $[۲,+\infty)$ ۲) $(۲,+\infty)$ ۳) $[-۱,۱]$ ۴) $R-[-۱,۱]$

۱۷ـ در تابع با ضابطه $f(x)=\dfrac{e^x+۲e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$، مقدار $f^{-۱}(\dfrac{۳}{۲})$ کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) ۱ ۲) $\dfrac{۲}{۳}$ ۳) $\dfrac{۱}{۲}$ ۴) ۰

۱۸ـ اگر h,g,f توابع حقیقی به معادلات $h(x)=\sqrt{x},g(x)=x^۲,f(x)=\dfrac{۱}{x}$ در این صورت $(hogoe)(x)$ برابر است با: (سراسری ۸۰)

۱) $\dfrac{۱}{|x|}$ ۲) $|x|$ ۳) $\dfrac{۱}{x}$ ۴) x

۱۹ـ اگر f تابعی حقیقی به معادله $y=۴+e^{x-۲}$ باشد، برد این تابع برابر است با: (سراسری ۸۰)

۱) R ۲) $R^۴$ ۳) $(-۴,۴)$ ۴) $(۴,+\infty)$

۲۰ـ اگر $f(x)=Ln(۲x+۱)$ و $g(x)=\dfrac{۱}{e^x-۱}$ آنگاه D_{gof} کدام است؟ (سراسری ۸۲)

۱) R ۲) $R-\{۰\}$ ۳) $(-\dfrac{۱}{۲},+\infty)-\{۰\}$ ۴) $(-\dfrac{۱}{۲},+\infty)$

۲۱ـ دامنه تابع F با ضابطه $f(x)-\dfrac{۲}{۱-Ln(x+۲)}$ کدام مجموعه است؟ (سراسری ۸۲)

۱) $\{x\in R,x\neq -۲\}$ ۲) $\{x\mid x>-۲,x\neq e-۲\}$

۳) $\{x\in R,x\neq e-۲\}$ ۴) $\{x\mid x>-۱\}$

۲۲ـ برد تابع حقیقی f به معادله $y=Ln\left(\dfrac{e^x-۱}{e^x+۱}\right)$ کدام است؟ (سراسری ۸۳)

۱) $R-[۰,\infty)$ ۲) R^+ ۳) R ۴) $[۰,۱]$

۲۳ـ هزینه پاکت های پستی به مقصد معمولی براساس جدول زیر است؟ (سراسری ۸۳)

وزن پاکت به گرم	[۰−۵)	[۵−۱۰)	[۱۰−۱۵)	[۱۵−۲۰]	.....
C هزینه پست	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	.....

تابع هزینه پاکتی به وزن $x > 0$ گرم کدام است؟

۱) $200\left[\frac{x}{5}\right]+100$ ۲) $100\left(\frac{x}{5}\right)+100$ ۳) $100\left(\left[\frac{x}{5}+1\right]+1\right)$ ۴) $300\left[\frac{x}{5}\right]-100$

رشته مدیریت

۱- برد تابع $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ کدام است (سراسری ۷۳)

۱) $[0,1)$ ۲) $[-1,0)$ ۳) R^+ ۴) $(-1,1)$

۲- اگر $g(x)=x^2, f(x)=\sqrt{x+1}$ باشد $fog(7)$ کدام است؟ (سراسری ۷۳)

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $5\sqrt{2}$ ۳) $6\sqrt{2}$ ۴) $8\sqrt{2}$

۳- کدام یک از توابع زیر زوج است (سراسری ۷۳)

۱) $y=\sin x$ ۲) $y=\sin x+\cos x$ ۳) $y=|x|(x^2+1)$ ۴) $y=x^3+x$

۴- دامنه تابع $y=\ln(x^2-4)$ کدام است (سراسری ۷۴)

۱) $|x|>2$ ۲) $|x|\geq 2$ ۳) $-2<x<2$ ۴) $|x|>0$

۵- اگر دو تابع $g(x)=\frac{x-1}{x+1}, f(x)=\frac{x}{x+1}$ باشد مقدار $fog(x)$ به ازای $x=2$ کدام است؟(سراسری ۷۴)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{2}{9}$

۶- اگر تابع $f(x)=\frac{2x}{x-2}$ مفروض باشد، مقدار $f^{-1}(-2)$ کدام است؟ (سراسری ۷۴)

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) 1 ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) صفر

۷ـ از توابع زیر کدام یک فرد است؟ (سراسری ۷۴)

۱) $f(x)=x^3-x$ ۲) $f(x)=x^2+x$ ۳) $f(x)=\sin x+\cos x$ ۴) $f(x)=\cos x$

۸- دامنه (Domain) تابع $y=\frac{x}{\ln x-1}$ کدام است (سراسری ۷۵)

۱) R ۲) R^+ ۳) $R^+-\{1\}$ ۴) $R^+-\{e\}$

۹ـ اگر $f(x)=2\sin x+1, g(x)=\frac{\pi x}{5x+1}$ ، $fog(1)$ کدام است؟ (سراسری ۷۵)

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) $\frac{20}{5}$ ۴) $\frac{3}{5}$

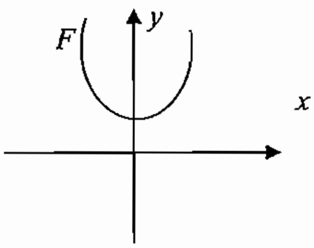
۱۰- معکوس تابع $y=\frac{x}{x+1}$ در کدام نقطه با نیمساز ربع اول نقطه مشترک دارد (سراسری ۷۵)

۱) $x=0$ ۲) $x=1$ ۳) $x=2$ ۴) $x=3$

۱۱- تابع $f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$ چگونه است(سراسری ۷۵)

۱) همگن و فرد ۲) نه زوج نه فرد ۳) زوج ۴) فرد

۱۲- در مورد تابع f با شکل مقابل کدام مورد صحیح است ؟ (سراسری ۷۶)



۱) زوج ۲) فرد
۳) نه زوج نه فرد ۴) یک به یک

۱۳-دامنه تابع با ضابطه $f(x)=\frac{2x+1}{|x|-1}$ کدام است؟ (سراسری ۷۶)

۱) R^+ ۲) $R-\{-1\}$ ۳) $R-\{1\}$ ۴) $R-\{-1,1\}$

۱۴- برد تابع با ضابطه $y=\frac{e^x+1}{e^x-1}$ کدام است(سراسری ۷۶)

۱) R ۲) $R-[-1,+1]$ ۳) $R-\{0\}$ ۴) $R-(-1,+1)$

۱۵- اگر $f(x)=\frac{2e^x-e^{-x}}{2}$, $g(x)=\ln x$ باشد مقدار $fog(1)$ کدام است؟ (سراسری ۷۶)

۱) 0 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) 2

۱۶- اگر $f(2x-1)=x^2-1$ باشد $f(3)$ کدام است. (سراسری ۷۷)

۱) 3 ۲) 4 ۳) 5 ۴) 8

۱۷- برد یا حوزه مقادیر تابع f به معادله $z=e^{-\frac{x^2}{2}}$ کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) R ۲) R^+ ۳) $(0,1)$ ۴) $(0,1]$

۱۸- اگر $f(x)=\frac{x}{x-1}$, $g(x)=\frac{x+2}{x}$ باشد دامنه تعریف $fog\ (x)$ کدام است ؟ (سراسری ۷۷)

۱) R ۲) R^+ ۳) $R-\{0\}$ ۴) $R-\{1,0\}$

۱۹- اگر $f(x)=\frac{x}{x+1}$, $g(x)=\sqrt{x+1}$ باشد مقدار $fog(3)$ کدام است؟ (سراسری ۷۸)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) 3

۲۰- برد (Range) تابع حقیقی f به معادله $f(x)=\frac{x^2}{x^2+4}$ کدام است؟ (سراسری ۷۸)

۱) $[0,1]$ ۲) R ۳) R^+ ۴) $[0,1)$

۲۱- دامنه تعریف (Domain) تابع حقیقی f به معادله $f(x)=\frac{ln(x+1)}{x}$ کدام است؟ (سراسری ۷۸)

۱) $x\neq 0, R$ ۲) $x\neq 0, (-1,\infty)$ ۳) $R-\{0,1\}$ ۴) R^+

۲۲- اگر $f(x)=\ln\frac{x+1}{x}$ باشد مقدار $f^{-1}(1)$ کدام است؟ (سراسری ۷۸)

۱) $\frac{1}{e-1}$ ۲) $\ln\frac{1}{2}$ ۳) $e-1$ ۴) $\ln 2$

۲۳- کدامین تابع زوج نیست؟ (سراسری ۷۸)

۱) $y=e^{x^2}+1$ ۲) $y=e^{2x}-x$ ۳) $y=x^4$ ۴) $y=Cosx$

۲۴- اگر $f(x)=e^x+4$, $g(x)=\ln(x+1)$ آنگاه $fog\ (2)$ کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) $e^{\ln 3}$ ۲) $\ln 2+4$ ۳) e^2+4 ۴) 7

۲۵- دامنه تابع $f(x)=\frac{۲}{\sqrt{x-|x|}}$ کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) ϕ ۲) R^+ ۳) R ۴) $\bar{R}$

۲۶- دامنه تابع $y=\frac{\ln(x+۱)}{۵^x-۱}$ کدام است ؟ (سراسری ۷۹)

۱) $(-۱,+\infty)$ ۲) $R-\{-۱,۰\}$ ۳) R^+ ۴) $(-۱,+\infty)-\{۰\}$

۲۷- اگر $f(x)=\frac{e^x}{e^x+۱}$ مقدار معکوس تابع $f^{-۱}(\frac{۱}{۲})$ کدام است؟(سراسری ۷۹)

۱) 0 ۲) 1 ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{e}+۱}{۲}$

۲۸- در فاصله [-1,3] کدامیک از توابع زیر زوج اند؟ (سراسری ۷۹)

۱) $y=\cos x$ ۲) $y=x^۳-۱$ ۳) $y=x^۲+۱$ ۴) هیچکدام

۲۹- برد تابع $y=\frac{e^x-۱}{e^x+۱}$ کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) (۱و۱-) ۲) [۱و۱-] ۳) R ۴) R^+

۳۰- اگر f تابعی حقیقی به معادله $y=۲-e^{-x+۱}$ باشد آنگاه برد (Range) این تابع برابر است با (سراسری ۸۰)

۱) R ۲) R^- ۳) $(-\infty,۱]$ ۴) $(-\infty,۲)$

۳۱- اگر $f(x)=e^{x-۱}$ و g(x)= ln(x+1) باشد آنگاه ضابطه fog (x) برابر است با (سراسری ۸۰)

۱) $\frac{۱}{e}x$ ۲) $Ln(e^{x-۱}+۱)$ ۳) $\frac{۱}{e}(x+۱)$ ۴) $Ln(e^x+۱)$

۳۲- اگر $f(x)=x^۲-۲x+۴ : x>۱$ آنگاه معادله f^{-1} کدام است؟ (سراسری ۸۱)

۱) $y=۱+\sqrt{x-۳}$ ۲) $y=۱+\sqrt{x+۳}$
۳) $y=۱\pm\sqrt{x-۳}$ ۴) $y=-۱+\sqrt{x-۳}$

۳۳- دامنه تابع $f(x)=\frac{\sqrt{۴-x^۲}}{\ln(x-۱)}$ کدام است؟ (سراسری ۸۱)

۱) [1,2) ۲) [1,2] ۳) (1,2] ۴) (1,2)

۳۴- برد تابع حقیقی f به معادله $y=\ln(۲x^۲+۱)$ کدام است؟ (سراسری ۸۱)

۱) R ۲) (0,1) ۳) $(\frac{۱}{۲},\infty)$ ۴) $[۰,\infty)$

۳۵- دامنه تابع حقیقی f با ضابطه $f(x)=\frac{\ln(۲x+۱)}{\sqrt{x(x+۱)}}$ کدام است؟ (سراسری ۸۲)

۱) $(-\infty,۰)$ ۲) $(۰,+\infty)$ ۳) $(-۱,+\infty)$ ۴) $(-\frac{۱}{۲},۰)$

۳۶- برد تابع حقیقی f با ضابطه $y=\frac{e^{۲x}-e^x}{۲}$ کدام است ؟ (سراسری ۸۲)

۱) [0,e] ۲) $[\frac{-۱}{۸},+\infty)$ ۳) $R^+\cup\{۰\}$ ۴) $[-\frac{۱}{۲},+\infty)$

۳۷- برد تابع حقیقی $y=\ln\left[\frac{۱-e^x}{۱+e^x}\right]$ برابر است با(سراسری ۸۳)

۱) R ۲) R^+ ۳) $(-\infty,۰)$ ۴) (-1,1)

۳۸- اگر $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ معادله تابع $R \to R$ باشد مقدار $f^{-1}(2)$ کدام است؟ (سراسری ۸۳)

۱) $\ln 2$ ۲) $\ln\frac{1}{2}$ ۳) $\ln(2-\sqrt{5})$ ۴) $\ln(2+\sqrt{5})$

۳۹- اگر $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$ و $g(x)=\ln x$ آنگاه $fog(3)$ کدام است؟ (سراسری ۸۳)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۴۰- اگر داشته باشیم $y_1=e^x$ ، $y_2=x+1$ ، $X\in R$ کدام رابطه صحیح است؟ (سراسری ۸۳)

۱) $y_1>y_2$ ۲) $y_1\geq y_2$ ۳) $y_1<y_2$ ۴) $y_1\leq y_2$

رشته حسابداری

۱- برد یا حوزه مقادیر تابع $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ کدام است: (سراسری ۷۵)

۱) R ۲) R^+ ۳) $[-1,1)$ ۴) $R-\{0\}$

۲- دامنه یا حوزه تعریف تابع $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ کدام است: (سراسری ۷۵)

۱) R^+ ۲) $R^+ U\{0\}$ ۳) $R-[-1,1]$ ۴) $R-\{-1,1\}$

۳- تابع $y=\frac{e^x}{e^x+1}$ مفروض است، اگر معکوس تابع $y=f^{-1}(x)$ باشد، $f^{-1}(\frac{1}{2})$ کدام است؟ (سراسری ۷۵)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) R ۴) Ln^2

۴- نمودار یک تابع فرد، دارای کدام خاصیت است؟ (سراسری ۷۶)

۱) محور y ها تقارن آن است. ۲) محور x ها محور تقارن آن است.
۳) مبدا مرکز تقارن آن است. ۴) فاقد مرکز تقارن است.

۵- در مورد رابطه f، با شکل مقابل کدام مورد صحیح است؟ (سراسری ۷۶)

۱) نه زوج نه فرد ۲) فرد ۳) زوج ۴) تابع نیست.

۶- اگر $f(x)=\frac{3e^x-e^{-x}}{2}, g(x)=Lnx$ باشد، مقدار $fog(1)$ کدام است؟ (سراسری ۷۶)

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{3}{2}$

۷- اگر $f(x)=3x+1$ و $gof(x)=7x+2$ باشد، $g(x)$ کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) $10x+3$ ۲) $3x-4$ ۳) $\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{7}{3}x-\frac{1}{3}$

۸- اگر $f(x)=\frac{1}{x+1}$ باشد، مقدار $fof^{-1}(4)$ کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) ۴ ۴) ۵

۹- برد یا حوزه مقادیر تابع حقیقی با ضابطه $f(x)=Ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)$ کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) R ۲) R^+ ۳) $(-\infty,0]$ ۴) $(-\infty,0)$

۱۰- ضابطه معکوس تابع با ضابطه $f(x)=Ln\dfrac{x^{۲}}{x^{۲}+۱},\ x>۰$ برابر کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) $\sqrt{\dfrac{e^x}{۱-e^x}}$ ۲) $\sqrt{\dfrac{۱-e^x}{e^x}}$ ۳) $\sqrt{\dfrac{e^x}{۱+e^x}}$ ۴) $\sqrt{\dfrac{۱+e^x}{e^x}}$

۱۱- دامنه تعریف تابع حقیقی f با ضابطه $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{۳x}$ کدام است؟ (سراسری ۷۸)

۱) $(e^{-۱},e)$ ۲) $[e^{-۱},e]$ ۳) R^+ ۴) $R-\{۰\}$

۱۲- برد تابع حقیقی f با ضابطه $f(x)=\ln(x+۱)$، کدام است؟ (سراسری ۷۸)

۱) R ۲) R^+ ۳) $R-\{۱\}$ ۴) $R-\{۰\}$

۱۳- دامنه تابع $y=\dfrac{x+Lnx}{[x]-x}$ کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) R^+ ۲) $R-\{۰\}$ ۳) $R-z$ ۴) R^+-N

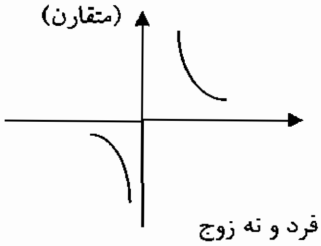
۱۴- اگر $f(x)=\dfrac{۵^x-۱}{۵^x+۱}$ آنگاه $f^{-۱}\left(\dfrac{۲}{۳}\right)$ کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) ۰ ۲) $\dfrac{۲}{۳}$ ۳) $\dfrac{۳}{۲}$ ۴) ۱

۱۵- برد تابع حقیقی f به معادله $y=۲+e^{-x+۱}$ برابر است با: (سراسری ۸۰)

۱) R ۲) $(-\infty,۲)$

۳) $R^+U\{۰\}$ ۴) $(۲,+\infty)$



۱۶- تابع با ضابطه $f(x)=|x-۱|-|x+۱|$ چگونه است؟ (سراسری ۸۱)

۱) فرد ۲) زوج ۳) هم فرد و هم زوج ۴)نه فرد و نه زوج

۱۷- دامنه تعریف تابع حقیقی f به معادله $y=\sqrt{\log\dfrac{۵x-x^{۲}}{۴}}$ کدام فاصله است؟ (سراسری ۸۱)

۱) R^+ ۲) $[۰,۵]$ ۳) $[۱,۴]$ ۴) $[-\infty,۰]u[۵,+\infty]$

۱۸- برد تابع $y=\sqrt{۱-x^{۲}}$ کدام است؟ (سراسری ۸۱)

۱) $R-(-۱,۱)$ ۲) R^+ ۳) $[۰,۱]$ ۴) $[-۱,۱]$

۱۹- دامنه تابع $y=\sqrt{x-|x|}+\sqrt{x-\sin x}$ کدام است؟ (سراسری ۸۲)

۱) $x\geq ۰$ ۲) $۰\leq x\leq\dfrac{\pi}{۲}$ ۳) $-\dfrac{\pi}{۲}\leq x\leq ۰$ ۴) R

۲۰- اگر $f(x)=\dfrac{x+۱}{۲x+۱},\ g(x+۱)=\dfrac{x}{x+۱}$ باشد. ضابطه $f(g(x)$ برابر است با: (سراسری ۸۲)

۱) $\dfrac{x-۱}{۲x-۱}$ ۲) $\dfrac{۲x-۱}{۳x-۲}$ ۳) $\dfrac{۲x+۱}{۳x+۲}$ ۴) $\dfrac{x+۱}{۲x+۱}$

۲۱- اگر $f(ArcSin\dfrac{x-۱}{x+۱})=x+۲$ باشد آنگاه $f(x)$ برابر است با:

۱) $f(x)=\dfrac{Sinx-۱}{۱+\sin x}$ ۲) $F(x)=\dfrac{۱+\sin x}{۱-\sin x}$ ۳) $f(x)=\dfrac{۲+\sin x}{۱-Sin x}$ ۴) $f(x)=\dfrac{۳-Sin x}{Sin x}$

۲۲- دامنه تابع $y = Ln\left(\frac{1-2e^x}{1+e^x}\right)$ کدام است؟ (سراسری ۸۳)

۱) R ۲) R^+ ۳) $(-\infty,1)$ ۴) $(-\infty,-Ln2)$

۲۳- اگر $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ معادله تابع حقیقی $R \to R$ باشد، $f^{-1}(2)$ کدام است؟ (سراسری ۸۳)

۱) $\frac{1}{2}Ln3$ ۲) $2Ln3$ ۳) $\frac{e^2+1}{e^2-1}$ ۴) $\frac{e^2-e^{-2}}{e^2+e^{-2}}$

۲۴- اگر داشته باشیم $g(x)=Lnx, f(x)=\frac{2e^x-1}{e^x+1}$ در این صورت $fog(2)$ کدام است؟ (سراسری ۸۳)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۲۵- اگر $f(x)=e^{-x^2}$, $g(x)=\sqrt{\frac{1-x}{x}}$ باشد دامنه تابع gof کدام است؟ (مدیریت ۸۴)

۱) $(-\infty,+\infty)$ ۲) $(0,+\infty)$ ۳) $(0,1]$ ۴) $[-1,1]$

۲۶- برد تابع با ضابطه $y=Ln\frac{x^2}{x^2+4}$ در کدام بازه است؟ (مدیریت ۸۴)

۱) $(0,+\infty)$ ۲) $(-\infty,0)$ ۳) $(-1,0)$ ۴) $(0,1)$

۲۷- معکوس تابع $y=e^x-e^{-x}$ از کدام نقطه می گذرد؟ (مدیریت ۸۴)

۱) $(Ln2\,,\,1)$ ۲) $\left(\frac{1}{2}\,,\,Ln2\right)$ ۳) $\left(\frac{3}{2}\,,\,Ln2\right)$ ۴) $\left(\frac{2}{3}\,,\,Ln3\right)$

۲۸- کدام تابع بر روی دامنه خودش نه زوج و نه فرد است؟ (مدیریت ۸۴)

۱) $y=x[x]$ ۲) $y=|x|\cos x$ ۳) $y=x-\frac{1}{x}$ ۴) $y=Lny\frac{1+x}{1-x}$

۲۹- اگر $f(x)=\sqrt{\frac{1-x}{x}}, g(x)=e^x$ باشد دامنه تابع fog کدام است؟ (حسابداری ۸۴)

۱) $(-\infty,0]$ ۲) $(-1,1]$ ۳) $(0\,,\,1]$ ۴) $[0\,,\,+\infty)$

۳۰- برد تابع با ضابطه $f(x)=2^{[x]-x}$ در کدام بازه است؟ (حسابداری ۸۴)

۱) $\left[\frac{1}{2},1\right]$ ۲) $\left(\frac{1}{2},1\right]$ ۳) $[1,2]$ ۴) $[1,2)$

۳۱- ضابطه معکوس تابع $y=x+\sqrt{x}$ کدام است؟ (حسابداری ۸۴)

۱) $x+1-\sqrt{2x+1}, x\geq\frac{-1}{2}$ ۲) $x+1+\sqrt{2x+1}, x\geq-\frac{1}{2}$

۳) $x+1+\sqrt{2x+1}, x>0$ ۴) $x+1-\sqrt{2x+1}, x>0$

۳۲- کدام تابع بر روی دامنه خود، یک به یک است؟ (حسابداری ۸۴)

۱) $f(x)=x+\frac{1}{x}$ ۲) $f(x)=x+\sqrt{x}$ ۳) $f(x)=\sqrt{x+|x|}$ ۴) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

۳۳- اگر gof توابعی حقیقی در R باشند، داشته باشیم $f(x)=\frac{4+x}{1-x}, f(g(x))=\frac{x}{2+x}$ باشد، $g(x)$ کدام است؟ (اقتصاد ۸۴)

۱) $\frac{3-2x}{x-4}$ ۲) $\frac{2+x}{x}$ ۳) $\frac{4+2x}{2+x}$ ۴) $\frac{-3x-8}{2+2x}$

۳۴- اگر $f(x)$ تابع حقیقی در R باشد، کدام مورد صحیح نیست؟ (اقتصاد ۸۴)

۱) $y=x^۲+۱$ تابعی فرد و غیر یک به یک
۲) $y=x^۲+۱$ تابعی زوج و همواره پیوسته
۳) $y=x\,.\sin x$ تابعی زوج و همواره پیوسته
۴) $y=\cos x$ تابعی زوج و غیر یک به یک

۳۵- اگر f ، g توابعی حقیقی در R باشند و داشته باشیم $f(x)=\frac{۳-x}{۲+x}$, $fog(x)=\frac{۴+x}{۲x}$، مقدار $g(x)$ کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ۸۵)

۱) $\frac{۴x-۸}{۳x+۴}$
۲) $\frac{۳x+۴}{۲x+۱}$
۳) $\frac{۳x-۴}{۲x+۵}$
۴) $\frac{۲x+۲}{۲x-۱}$

۳۶- اگر $f(x)$ تابعی حقیقی در R باشد، کدام مورد صحیح نیست؟ (حسابداری و مدیریت ۸۵)

۱) تابع $y=x^۲+۱$ و $x\in[-۱\,,\,۲]$ تابعی زوج است.
۲) تابع $y=\sin x$ فرد و غیر یک به یک است.
۳) تابع $y=\cos x$ زوج و غیر یک به یک است.
۴) تابع $y=Lnx$ نه فرد و نه زوج است.

۳۷- اگر $f(x)=\sqrt{\frac{۱+x}{۱-x}}, g(x)=Lnx$، دامنه تابع fog کدام است؟ (اقتصاد ۸۵)

۱) $\left(۰\,,\,\frac{۱}{e}\right)$
۲) $(۱\,,\,e)$
۳) $[۱\,,\,e)$
۴) $\left[\frac{۱}{e}\,,\,e\right)$

۳۸- برد تابع حقیقی f در R با ضابطه $f(x)=Ln\frac{x^۲+۱}{x^۲}$ کدام است؟ (اقتصاد ۸۵)

۱) $(۰\,,\,+\infty)$
۲) $[۰\,,\,+\infty)$
۳) $R-\{۰\}$
۴) R

۳۹- اگر f تابع حقیقی باشد، کدام تابع بر روی دامنه تعریف، نه زوج است و نه فرد؟ (اقتصاد ۸۵)

۱) $D_f=(-۱,۱), f(x)=Ln\frac{۱-x}{۱+x}$
۲) $D_f=R^+, f(x)=x^۲$
۳) $D_f=R, f(x)=x\cos x$
۴) $x\in R, f(x)=x\sin x$

۴۰- اگر داشته باشیم $Sh\,x=۲$ در این صورت مقدار x کدام است؟ (اقتصاد ۸۵)

۱) $Ln(۲+\sqrt{۳})$
۲) $Ln(۱+\sqrt{۳})$
۳) $Ln(۲+\sqrt{۵})$
۴) $Ln(۱+\sqrt{۵})$

۴۱- معکوس تابع $y=e^x+e^{-x}$ از نقطه ای با کدام مختصات می گذرد؟ (اقتصاد ۸۵)

۱) $\left(۲, Ln\frac{۱}{۲}\right)$
۲) $\left(\frac{۳}{۱۰}, Ln\frac{۱}{۳}\right)$
۳) $\left(\frac{۱۰}{۳}, Ln۳\right)$
۴) $\left(\frac{۱}{۲}, Ln۲\right)$

۴۲- اگر تابع حقیقی با ضابطه $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{۲}$ باشد، $f^{-۱}(۱)$ کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ۸۵)

۱) $Ln(۱+\sqrt{۲})$
۲) $Ln(۱+\sqrt{۵})$
۳) $Ln(۲+\sqrt{۵})$
۴) $Ln(۲+\sqrt{۲})$

۴۳- اگر $f(x)=x-[x]$, $g(x)=\sin\ \pi x$ باشد، برد تابع gof کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ۸۶)

۱) $[-۱,۱]$
۲) $[-۱,۰]$
۳) $[۰,۱]$
۴) $\left[۰,\frac{۱}{۲}\right]$

۴۴- دامنه تابع $f(x)=\sqrt{Lny\frac{x+۲}{x^۲}}$ کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ۸۶)

۱) $(۰,۲]$
۲) $(-۲,۰)$
۳) $(-۲,۰)\cup(۰,۱)$
۴) $[-۱,۰)\cup(۰,۲]$

۴۵- اگر $f(x)=x-\frac{1}{x}, x>0$ باشد مقدار $f\left(\frac{3}{2}\right)$ کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ۸۶)

۱) $\sqrt{2}$　　۲) $\frac{1}{2}$　　۳) $\frac{2}{3}$　　۴) ۲

۴۶- برد تابع $f(x)=4\text{Lny}(\cos x)$ کدام است؟ (اقتصاد ۸۶)

۱) $(-\infty,0]$　　۲) $(0,+\infty)$　　۳) $[0,+\infty)$　　۴) $(-\infty,0)$

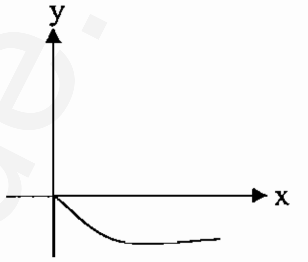
۴۷- دامنه تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{\frac{x}{x+1}}$ کدام است؟ (اقتصاد ۸۶)

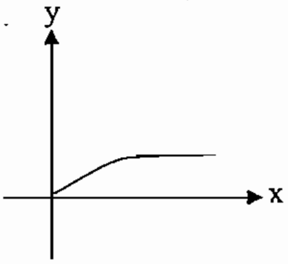
۱) $-1\le x\le 0$　　۲) $-1\le x\le 0$　　۳) $x\le -1$ یا $x\ge 0$　　۴) $x<-1$ یا $x\ge 0$

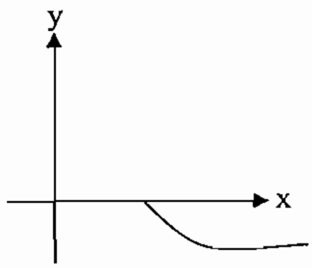
۴۸- برای تابع $f:R\to R$ با ضابطه $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ کدام مورد نادرست است؟ (اقتصاد ۸۶)

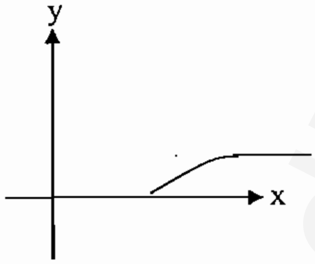
۱) پوشا　　۲) زوج　　۳) فرد　　۴) یک به یک

۴۹- اگر $x\ge 0$ ، $f(x)=\cosh(x)$، آنگاه نمودار تابع $f^{-1}(x)$ کدام است؟ (اقتصاد ۸۶)

۱)


۲)


۳)


۴)


پاسخ تشریحی تستهای طبقه‌بندی شده فصل دوم

رشته اقتصاد

۱ـ گزینه ۲ صحیح است. رابطه ای تابع به حساب می آید که به ازای هر عضو از دامنه، حداکثر یک عضو از برد را در اختیار داشته باشد.

$$y^2 = x+1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x+1}$$
$$y + x^2 - 1 = 0 \Rightarrow = -x^2 + 1$$
$$x^2 - y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y = \pm\sqrt{1-x^2}$$
$$\sin y = x \Rightarrow y = Arc\,Sin\,x$$

با توجه به روابط بدست آمده تنها گزینه ۲ به ازای هر مقدار x یک و تنها یک مقدار y نسبت می دهد.

۲ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$[x] \neq 0 \Rightarrow 0 \le x < 1 \Rightarrow D_y = R - [0,1)$$

۳ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$Arc\,Sin(x-1) = t \Rightarrow Sint = x - 1 \Rightarrow x = S\text{int} + 1$$
$$f(t) = \frac{Sint + 1 - 1}{Sint + 1} = \frac{Sint}{Sint + 1}$$

۴ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \Rightarrow e^y = x + \sqrt{x^2+1} \Rightarrow e^y - x = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow (e^y - x)^2 = x^2 + 1 \Rightarrow$$
$$e^{2y} + x^2 - 2e^y x = x^2 + 1 \Rightarrow e^{2y} - 2exy^e = 1 \Rightarrow X = \frac{e^{2y}-1}{2e^y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{e^{2x}-1}{2e^x}$$
$$f^{-1}(Ln(1+\sqrt{2})) = \frac{e^{2Ln(1+\sqrt{2})}-1}{2e^{Ln(1-\sqrt{2})}} = \frac{1+2+2\sqrt{2}-1}{2(1+\sqrt{2})} = \frac{2(1+\sqrt{2})}{2(1+\sqrt{2})} = 1$$

۵ـ گزینه ۲ صحیح است. نمودار تابع فرد نسبت به مرکز مختصات متقارن است.

۶ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$-x^2 + 2x + 3 > 0 \rightarrow$$

x		-1		3	
$-x^2+2x+3$	$-$	ϕ	$+$	ϕ	$-$

$$D_y = (-1,3)$$

۷ـ گزینه ۱ صحیح است. چون برد تابع f همان دامنه f^{-1} است. پس بعد از محاسبه f^{-1}، دامنه آن را بدست می‌آوریم.

$$y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \rightarrow ye^x + y = e^x - 1 \rightarrow ye^x - e^x = -1 - y$$
$$e^x(y-1) = -1 - y \rightarrow e^x = \frac{1+y}{1-y} \rightarrow x = Ln\frac{y+1}{1-y}$$
$$\xrightarrow{\text{جای x و y را عوض می‌کنیم}} y = f^{-1}(x) = Ln\frac{x+1}{1-x}$$
$$\frac{x+1}{1-x} > 0$$

$D_{f^{-1}} = R_f = (-1,1)$

		-1		1	
$x+1$	$-$		$+$		$+$
$1-x$	$+$		$+$		$-$
$\frac{x+1}{1-x}$	$-$	0	$+$	∞	$-$

۸ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$\text{fog}(1) = f\left(g(1)\right)$$

$$g(1) = \text{Ln}1 \qquad \Rightarrow f(\text{Ln}1)\frac{e^{\text{Ln}1}+e^{\text{Ln}1}}{2} \xrightarrow{\text{Ln}1=0} \text{fog}(1) = \frac{e^0+e^0}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

۹ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$|x| - x^2 \geq 0 \Rightarrow |x| \geq x^2 \Rightarrow D_f = [-1,1]$$

۱۰ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$f \circ f \circ f(1) = f\left(f\left(\left(f(1)\right)\right)\right)$$

$$f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \quad ,$$

$$f(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}$$

$$f(\tfrac{2}{3}) = \frac{1}{\frac{2}{3}+1} = \frac{3}{5}$$

۱۱ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$0 \leq \frac{x^2}{x^2+1} < 1 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} < 1 \Rightarrow Ln0 \leq Ln\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} < Ln1$$

$$-\infty \leq f(x) < 0 \Rightarrow R_f = (-\infty, 0)$$

۱۲ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{4} \Rightarrow y = \frac{e^x + e^{-x}}{4} \Rightarrow 4y = e^x + e^{-x} \Rightarrow e^x + e^{-x} - 4y = 0$$

طرفین را در e^x ضرب می کنیم.

$$e^{2x} - 4ye^x + 1 = 0$$

$$e^x = \frac{4y \pm \sqrt{16y^2 - 4\times1\times1}}{2} = \frac{4y \pm \sqrt{16y^2-4}}{2}$$

$$16y^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow y^2 \geq \frac{1}{4} \Rightarrow y \geq \frac{1}{2} \Rightarrow R_{f(x)} = (\tfrac{1}{2}, +\infty)$$

۱۳ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$f(x) = \text{Ln}(\text{Sin}x) \Rightarrow \text{Sin}x > 0$$

$$\text{Sin}x = 0 \Rightarrow \text{Sin}\,x = \text{Sin}\,it$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \pi \\ x = 2k\pi \end{cases} \qquad \Rightarrow 2k\pi < x < 2k\pi + \pi$$

۱۴ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$f^{-1}(2) \Rightarrow f(x)=2 \qquad : \qquad f(x)=2=\mathrm{Ln}\frac{x+1}{x}$$

$$e^2=\frac{x+1}{x} \Rightarrow e^2x=x+1 \Rightarrow e^2x-x=1 \Rightarrow x(e^2-1)=1$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{e^2-1}$$

۱۵ـ گزینه ۴ صحیح است.

$1)\ f(-x)=e^{(-x)^2}=e^{x^2}=y$ زوج

$2)\ f(-x)=(-x)e^{(-x)^2}=-xe^{x^2}=-y$ فرد

$3)\ f(-x)=\mathrm{Sin}(-x)-x=-\mathrm{Sin}-x=-(\mathrm{Sin}x+x)=-y$ فرد

$4)\ f(x)=\mathrm{Cos}(-x)-x=\mathrm{Cos}x-x$ نه زوج و نه فرد

۱۶ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$[x]-1>0 \Rightarrow [x]>1 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow D_f=[2,\infty)$$

۱۷ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$f^{-1}(\frac{3}{2})=f(x)=\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{2}=\frac{e^x+2e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=3e^x+3e^{-x}=2e^x+4e^{-x}$$

$$e^x=e^{-x} \xrightarrow{\text{از دو طرف Ln می گیریم}} x=-x \Rightarrow x+x=0 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0$$

۱۸ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$hogof(x)=h\big(g(f(x))\big)$$

$$g\big(f(x)\big)=\left(\frac{1}{x}\right)^2=\frac{1}{x^2}$$

$$h\big(g(f(x))\big)=\sqrt{\frac{1}{x^2}}=\left|\frac{1}{x}\right|=\frac{1}{|x|}$$

۱۹ـ گزینه ۴ صحیح است ابتدا تابع معکوس را محاسبه می کنیم.

$$y=4+e^{x-2} \Rightarrow y-4=e^{x-2}$$

از دو طرف ln می‌گیریم $\ln(y-4)=\ln e^{x-2} \Rightarrow \ln(y-4)=x-2$

$$\Rightarrow x=\mathrm{Ln}(y-4)+2 \Rightarrow f^{-1}(x)=y=\mathrm{Ln}(x-4)+2$$

$$D_f-1=R_f \Rightarrow R_f=x-4>0 \Rightarrow R_f=(4,+\infty)$$

۲۰ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$f(x)=\mathrm{Ln}(2x+1) \Rightarrow Df=2x+1>0 \Rightarrow D_f=(-\frac{1}{2},+\infty)$$

$$g(x)=\frac{1}{e^x-1} \Rightarrow D_g=R-\left\{e^x-1=0\right\} \Rightarrow D_g=R-\{0\}$$

$$e^x-1=0 \Rightarrow e^x=1 \Rightarrow x=0$$

$$D_{gof}=\left\{x\in(-\frac{1}{2},+\infty)\middle|\mathrm{Ln}(2x+1)\in R-\{0\}\right\} \Rightarrow D_{gof}=\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)-\{0\}$$

۲۱ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$1-\mathrm{Ln}(x+2)=0 \Rightarrow \mathrm{Ln}(x+2)=1 \Rightarrow x+2=e$$
$$\Rightarrow x=e-2$$
$$x+2>0 \Rightarrow x>-2$$
$$D_f=(-2,+\infty)-\{e-2\}$$

۲۲ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$y=\mathrm{Ln}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right) \rightarrow e^y=\frac{e^x-1}{e^x+1} \rightarrow e^y e^x+e^y=e^x-1$$

$$e^y e^x-e^x=-e^y-1$$ از دو طرف ln می‌گیریم

$$e^x(e^y-1)=-e^y-1 \rightarrow e^x=\frac{e^y+1}{1-e^y} \xrightarrow{\hspace{3em}} x=\mathrm{Ln}\left(\frac{e^y+1}{1-e^y}\right)$$

همواره

$$f^{-1}(x)=\mathrm{Ln}\frac{e^x+1}{1-e^x} \qquad \frac{1+e^x}{1-e^x}>0 \Rightarrow 1-e^x>0$$

$$1-e^x>0 \rightarrow e^x<1 \xrightarrow{\mathrm{Ln}} x<\mathrm{Ln}1 \rightarrow x<0$$

$$D_{f^{-1}}=R_f=(-\infty,0)=R-[0,+\infty)$$

۲۳ـ گزینه ۳ صحیح است. تابع هزینه پاکتی به وزن $x>0$ گرم بصورت:

X وزن پاکت به گرم	$[0-5]$	$[5,10]$	$[10,15]$	$[15,20]$	...
	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	
C هزینه پست	۲×۱۰۰	۳×۱۰۰	۴×۱۰۰	۵×۱۰۰	

بنابراین هزینه پاکتی به وزن x برابر است با $\left(1+\left[\frac{X}{5}+1\right]\right)100$ که در آن [ ] علامت جز صحیح است. برای اینگونه مسائل بهترین روش امتحان گزینه ها است.

رشته مدیریت

۱ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow y^2=\frac{x^2}{x^2+1} \Rightarrow y^2x^2+y^2=x^2 \Rightarrow x^2(y^2-1)=-y^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{-y^2}{y^2-1}}$$

$$\Rightarrow \frac{-y^2}{y^2-1}\geq 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y^2=0 \\ y^2-1=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y=0 \\ y=\pm 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow R_f=(-1,1)$$

عبارت		۱-	۰	۱	
$-y^2$	$-$		$-$	$-$	$-$
y^2-1	$+$		$-$	$-$	$+$
	$-$		$+$	$+$	$-$

۲ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$fog(7)=f(g(7))=f(49)=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$
$$g(7)=49$$

۳ـ گزینه ۳ صحیح است.

دامنه تمام توابع R و در نتیجه قرینه است.

گزینه ۱: $f(-x)=\sin(-x)=-\sin x=f(x)$ تابع فرد

گزینه ۲: $f(-x)=\sin(-x)+\cos(-x)=-\sin x+\cos x$ نه فرد نه فرد

گزینه ۳: $f(-x)=|-x|((-x)^2+1)=|x|(x^2+1)=f(x)$ تابع زوج

گزینه ۴: $f(-x)=(-x)^3+(-x)=-x^3-x=-(x^3+x)=-f(x)$ تابع فرد

۴ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$f(x)=\ln(x^2-4)\Rightarrow x^2-4>0\Rightarrow x^2>4\Rightarrow x>2, x<-2\Rightarrow |x|>2$$

۵ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$fog(x)=f(g(x))=f(g(2))=f(\frac{1}{3})$$

$$g(2)=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3}\Rightarrow f(\frac{1}{3})=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1}=\frac{1}{4}$$

۶ـ گزینه ۲ صحیح است.

راه حل اول: همانطور که قبلاً گفتیم برای تعیین تابع معکوس جای y,x عوض می‌شود. بنابراین خواهیم داشت.

$$f^{-1}(-2)=?\qquad f(x)=-2\Rightarrow -2=\frac{2x}{x-2}\Rightarrow -2x+4=2x\Rightarrow 4x=4\Rightarrow x=1$$

راه حل دوم: معکوس $f(x)$ را بدست آورده و مقدار $f^{-1}(-2)$ را بدست می‌آوریم:

$$y=\frac{2x}{x-2}\Rightarrow x=\frac{2y}{y-2}\Rightarrow xy-2x=2y\Rightarrow y(x-2)=2x\Rightarrow y=\frac{2x}{x-2}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{2x}{x-2}\Rightarrow f^{-1}(-2)=\frac{2(-2)}{(-2)-2}\Rightarrow f^{-1}(-2)=1$$

۷ـ گزینه ۱ صحیح است.

۱) $f(-x)=(-x)^3-(-x)=-x^3+x=-(x^3-x)=-f(x)$ فرد

۲) $f(-x)=(-x)^2+(-x)=x^2-x$ نه فرد و نه زوج

۳) $f(-x)=\sin(-x)+\cos(-x)=-\sin x+\cos x$ نه زوج نه فرد

۴) $f(-x)=\cos(-x)=\cos x=f(x)$ زوج

۸ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l}\ln x-1\neq 0\Rightarrow \ln x=1\Rightarrow x=e\\ D_f\ \ln x: x>0\end{array}\right\}\Rightarrow D_f: R^+-\{e\}$$

۹ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$fog(1)=f\big(g(1)\big)$$

$$f(1)=\frac{\pi\times 1}{5\times 1+1}=\frac{\pi}{6}$$

$$f\big(g(1)\big)=f(\frac{\pi}{6})=2\sin\frac{\pi}{6}+1=2\times\frac{1}{2}+1=2$$

۱۰ـ گزینه۱ صحیح است.

$$y=\frac{x}{x+1}\Rightarrow x=\frac{y}{y+1}\Rightarrow xy+x=y\Rightarrow y(x-1)=-x\Rightarrow y=\frac{-x}{x-1}$$

نیمساز ربع اول وسوم $\left.\begin{array}{l}f^{-1}(x)=\frac{-x}{x-1}\\ y=x\end{array}\right\}\Rightarrow x=\frac{-x}{x-1}\Rightarrow x^2-x=-x\Rightarrow x^2=0\Rightarrow x=0$

۱۱ـ گزینه ۳ صحیح است.

دامنه تابع $f(x)$ تمام اعداد حقیقی (R) است و بنابراین قرینه است.

$$f(-x)=\sqrt[3]{(-x+1)^2}+\sqrt[3]{(-x-1)^2}=\sqrt[3]{[-(x-1)]^2}+\sqrt[3]{[-(x+1)]^2}=\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)^2}=f(x)$$

تابع زوج است:

۱۲ـ گزینه ۱ صحیح است.

چون دامنه تابع f قرینه است و خود تابع نسبت به محور y ها قرینه می‌باشد بنابراین زوج است.

۱۳ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$D_f \Rightarrow |x|-1\neq 0 \Rightarrow \quad |x|-1=0 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow D_f=R-\{\pm 1\}$$

۱۴ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$y=\frac{e^x+1}{e^x-1}\Rightarrow ye^x-y=e^x+1\Rightarrow e^x(y-1)=y+1$$

$$\Rightarrow e^x=\frac{y+1}{y-1}\Rightarrow x=\ln(\frac{y+1}{y-1})$$

$$x=\ln(\frac{y+1}{y-1})\Rightarrow \frac{y+1}{y-1}>0\Rightarrow \begin{matrix} y+1=0 & y=-1 \\ y-1=0 & y=1\end{matrix}$$

$$\Rightarrow R_f : R-[-1,1]$$

		-1		$+1$	
$\frac{y+1}{y-1}$	$+$	0	$-$	∞	$+$
برد	ج				ج

۱۵ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$fog(1)=f(g(1))=f(0)=\frac{2e^0-e^0}{2}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$g(1)=\ln 1=0$$

۱۶ـ گزینه ۱ صحیح است.

راه حل اول:

$$2x-1=h\Rightarrow x=\frac{h+1}{2}\Rightarrow f(2x-1)=f(h)=(\frac{h+1}{2})^2-1=\frac{h^2}{4}+\frac{h}{2}-\frac{3}{4}$$

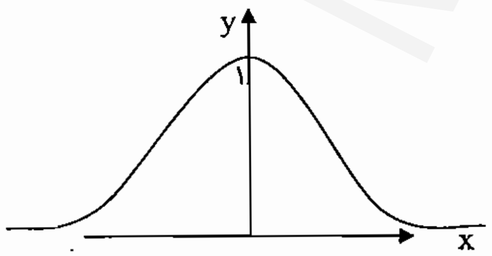
$$f(3)=\frac{9}{4}+\frac{3}{2}-\frac{3}{4}=3$$

راه حل دوم:

$$2x-1=3\Rightarrow 2x=4\Rightarrow x=2\Rightarrow f(3)=(2)^2-1=3$$

۱۷ـ گزینه ۴ صحیح است.

این تابع همواره مثبت است، همچنین چون توان عبارت همواره منفی است و پایه تابع بزرگتر از یک بنابراین همواره کوچکتر از یک است. از طرفی در $x=0$ مقدار تابع 1 خواهد شد بنابراین تاب همواره مقدار بین $(0,1]$ را خواهد گرفت بنابراین $R_Z=(0,1]$ (شکل تابع نیز این موضوع را نشان می‌دهد).



۱۸ـ گزینه ۳ صحیح است.

مطابق تعریف دامنه توابع مرکب برابر است با $D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$ بنابراین:

$$D_g = R-\{0\}, D_f = R-\{1\} \Rightarrow D_{fog} \Rightarrow x \neq 0, \frac{x+2}{x} \neq 1$$
$$\frac{x+2}{x} = 1 \Rightarrow x+2 = x \Rightarrow 2 \neq 0$$
$$\Rightarrow D_{fog} = R-\{0\}$$

۱۹ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$fog(3) = f(g(3)) = f(2) = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$$
$$g(3) = \sqrt{3+1} = 2$$

۲۰ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$y = \frac{x^2}{x^2+4} \Rightarrow y = \frac{x^2}{x^2+4} \Rightarrow yx^2 + 4y = x^2 \Rightarrow x^2(y-1) = 4y$$
$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-4y}{y-1}} \Rightarrow \frac{-4y}{y-1} \geq 0 \Rightarrow \begin{matrix} -4y = 0 & y = 0 \\ y-1 = 0 & y = 1 \end{matrix}$$

		۰		۱	
$-4Y$	+		−		−
$y-1$	−		−		+
عبارت	−	۰	ج	∞	−

$$\Rightarrow R = [0,1)$$

روش دوم: تابع یک تابع همواره مثبت بوده و به ازای x=0 مقدار آن صفر می‌باشد. همچنین صورت آن همواره کوچکتر از مخرج آن می‌باشد بنابراین بیش از یک نمی‌گیرد در نتیجه برد تابع برابر است با $R_f:[0,1)$.

۲۱ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$y = \frac{\ln(x+1)}{x} \Rightarrow \begin{matrix} x+1 > 0 \\ x \neq 0 \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow \begin{matrix} x > -1 \\ x \neq 0 \end{matrix} \Rightarrow D_f = (-1,\infty), x \neq 0$$

۲۲ـ گزینه ۱ صحیح است.

روش اول: معکوس تابع را محاسبه کرده و مقدار $f^{-1}(1)$ را بدست می‌آوریم.

$$y = \ln\frac{x+1}{x} \Rightarrow x = \ln\frac{y+1}{y} \Rightarrow \frac{y+1}{y} = e^x \Rightarrow e^x y = y+1 \Rightarrow y(e^x-1) = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{e^x-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{e^x-1} \Rightarrow f^{-1}(1) = \frac{1}{e-1}$$

روش دوم: همانطور که گفتیم در تابع معکوس جای y, x عوض می‌شود بنابراین:

$$f^{-1}(1) = ? \Rightarrow f(x) = 1 \Rightarrow 1 = \ln(\frac{x+1}{x}) \Rightarrow \frac{x+1}{x} = e \Rightarrow x+1 = ex \Rightarrow 1 = x(e-1) \Rightarrow x = \frac{1}{e-1}$$

۲۳ـ گزینه ۲ صحیح است.

دامنه توابع R و در نتیجه قرینه است در نتیجه به بررسی شرط دوم می‌پردازیم:

زوج است $f(x) = e^{x^2}+1 \Rightarrow f(-x) = e^{(-x)^2} = e^{x^2}+1 = f(x)$: گزینه اول

نه زوج نه فرد $f(x) = e^{2x}-x \Rightarrow f(-x) = e^{2(-x)}-(-x) = e^{-2x}+x$: گزینه دوم

زوج است $f(x) = x^4 \Rightarrow f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$: گزینه سوم

زوج است $f(x) = Cosx \Rightarrow f(-x) = Cos(-x) = Cosx = f(x)$: گزینه چهارم

۲۴ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$fog(2) = f(g(x)) = f(g(2)) = f(\ln 3) = e^{\ln 3}+4 = 3+4 = 7$$
$$g(2) = \ln(2+1) = \ln 3$$

یادآوری: $a^{\log_a^b} = b$

۲۵ـ گزینه ۱ صحیح است.

$D_f : x-|x|>۰ \Rightarrow x>|x|$

عبارت بدست آمده در بالا غیر ممکن است زیرا همواره عبارت $|x| \geq x$ درست می‌باشد و در نتیجه به ازای هیچ x حقیقی عبارت جواب ندارد بنابراین دامنه تابع برابر است با: $D_f = \phi$

۲۶ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$y=\frac{\ln(x+۱)}{۵^x-۱} \Rightarrow \begin{matrix} x+۱>۰ & \Rightarrow x>-۱ \\ ۵^x-۱\neq ۰ & \Rightarrow ۵^x-۱=۰ \Rightarrow ۵^x=۱ \Rightarrow x=۰ \end{matrix} \qquad D_y=(-۱,+\infty)-\{۰\}$$

۲۷ـ گزینه ۱ صحیح است.

روش اول:

$$y=\frac{e^x}{e^x+۱} \Rightarrow x=\frac{e^y}{e^y+۱} \Rightarrow xy^e+x=e^y$$

$$\Rightarrow e^y(x-۱)=-x$$

$$\Rightarrow e^y=\frac{-x}{x-۱} \Rightarrow y=\ln(\frac{-x}{x-۱}) \Rightarrow f^{-۱}(\frac{۱}{۲})=\ln(\frac{-\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۲}-۱})=\ln ۱=۰$$

روش دوم:

$$f^{-۱}(\frac{۱}{۲})=? \Rightarrow f(x)=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{e^x}{e^x+۱} \Rightarrow \frac{۱}{۲}e^x+\frac{۱}{۲}=e^x \Rightarrow \frac{۱}{۲}e^x=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow e^x=۱ \Rightarrow x=۰$$

۲۸ـ گزینه ۴ صحیح است.

چون دامنه داده شده قرینه نیست هیچکدام از توابع نمی‌تواند زوج باشند.

یادآوری: شرط اول بررسی زوج یا فرد بودن توابع عبارت است از $\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$ یعنی دامنه می‌بایست قرینه باشد.

۲۹ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$y=\frac{e^x-۱}{e^x+۱} \Rightarrow ye^x+y=e^x-۱ \Rightarrow e^x(y-۱)=-y-۱ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^x=\frac{-y-۱}{y-۱} \Rightarrow x=\ln(\frac{-y-۱}{y-۱}) \Rightarrow \frac{-y-۱}{y-۱}>۰ \left.\begin{matrix} -y-۱=۰ \\ y-۱=۰ \end{matrix}\right] \Rightarrow \begin{matrix} y=-۱ \\ y=۱ \end{matrix}$$

	-۱	۱	
$+$	$-$	$-$	
$-$	$-$	$+$	
$-$	$+$	$-$	

$\Rightarrow R_y:(-۱,۱)$

۳۰ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$y=۲-e^{-x+۱} \Rightarrow e^{-x+۱}=۲-y \Rightarrow -x+۱=\ln(۲-y)$$
$$\Rightarrow x=۱-\ln(۲-y) \Rightarrow$$
$$۲-y>۰ \Rightarrow y<۲ \Rightarrow R_f:(-\infty,۲)$$

۳۱ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$fog(x)=f(g(x))=f(\ln(x+۱))=e^{\ln(x+۱)-۱} \Rightarrow fog(x)=\frac{e^{\ln(x+۱)}}{e}=\frac{۱}{e}(x+۱)$$

یادآوری: $a^{\log_a^b}=b$

۳۲ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$y=x^{2}-2x+4\Rightarrow x=y^{2}-2y+4\Rightarrow x=y^{2}-2y+1+3$$
$$\Rightarrow x=(y-1)^{2}+3\Rightarrow x-3=(y-1)^{2}\Rightarrow y-1=\sqrt{x-3}\Rightarrow y=1+\sqrt{x-3}$$

۳۳ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$D_f:\begin{cases}4-x^{2}\geq 0\Rightarrow 4\geq x^{2}\Rightarrow -2\leq x\leq 2\\ x-1>0\Rightarrow x>1\\ \ln(x-1)\neq 0\Rightarrow x-1\neq 1\Rightarrow x\neq 2\end{cases}\Rightarrow 1<x<2\Rightarrow (1,2)$$

۳۴ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$y=\ln(2x^{2}+1)\Rightarrow e^{y}=2x^{2}+1\Rightarrow 2x^{2}=e^{y}-1\Rightarrow x^{2}=\frac{1}{2}(e^{y}-1)$$
$$x^{2}\geq 0\Rightarrow \frac{1}{2}(e^{y}-1)\geq 0\Rightarrow e^{y}-1\geq 0\Rightarrow \quad e^{y}\geq 1\Rightarrow y\geq 0\Rightarrow [0,+\infty)$$

۳۵ـ گزینه ۲ صحیح است.

۳۶ـ $D_f:\begin{cases}2x+1>0\Rightarrow x>-\frac{1}{2}\\ x(x+1)>0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ x+1=0\Rightarrow x=-1\end{cases}\end{cases}$

	-1		0	
عبارت	$+$	$-$		$+$

$x>0$ و $x>\frac{-1}{2}\Rightarrow x>0\Rightarrow (0,+\infty)$

گزینه ۲ صحیح است.

$$y=\frac{e^{2x}-e^{x}}{2}\Rightarrow 2y=e^{2x}-e^{x}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\Rightarrow 2y=(e^{x}-\frac{1}{2})^{2}-\frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow 2y+\frac{1}{4}=(e^{x}-\frac{1}{2})^{2}\Rightarrow e^{x}-\frac{1}{2}=\sqrt{2y-\frac{1}{4}}\Rightarrow e^{x}=\sqrt{2y+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\Rightarrow x=\ln(\sqrt{2y+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2})$$

$R_f:\begin{cases}2y+\frac{1}{4}\geq 0\Rightarrow y\geq -\frac{1}{8}\Rightarrow [-\frac{1}{8},\infty)\\ \sqrt{2y+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}>0\end{cases}$ همواره برقرار است.

۳۷ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$y=\ln\left|\frac{1-e^{x}}{1+e^{x}}\right|\Rightarrow e^{y}=\frac{1-e^{x}}{1+e^{x}}\Rightarrow e^{y}+e^{x}e^{y}=1-e^{x}\Rightarrow e^{x}(1+e^{y})=1-e^{y}$$
$$\Rightarrow e^{x}=\frac{1-e^{y}}{1+e^{y}}\Rightarrow x=\ln\left|\frac{1-e^{y}}{1+e^{y}}\right|\Rightarrow \frac{1-e^{y}}{1+e^{y}}>0\Rightarrow 1-e^{y}>0\Rightarrow e^{y}<1\Rightarrow y<0=(-\infty,0)$$

۳۸ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$f^{-1}(2)\Rightarrow f(x)=2\Rightarrow 2=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\Rightarrow e^{x}-e^{-x}=4\Rightarrow e^{2x}-1=4e^{x},e^{x}=z$$
$$\Rightarrow z^{2}-4z-1=0\qquad \Delta=b^{2}-4ac=16+4=20\Rightarrow z=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4\pm\sqrt{20}}{2}=2\pm\sqrt{5}$$

$\Rightarrow$ چون همواره مثبت است $z=2+\sqrt{5}\Rightarrow e^{x}=2+\sqrt{5}\Rightarrow x=\ln(2+\sqrt{5})$

۳۹ـ گزینه ۲ صحیح است.

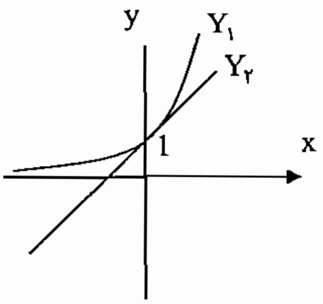
$$fog(3) = f(g(3)) = \frac{e^{\ln 3} - 1}{e^{\ln 3} + 1} = \frac{3-1}{3+1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$g(3) = \ln 3$$

یادآوری: $a^{\log_a^b} = b$

۴۰ـ گزینه ۲ صحیح است.

با توجه به شکل y_1 همواره بالاتر از y_2 قرار دارد و فقط در $x=0$ با هم تقاطع دارند.



رشته حسابداری

۱ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$Y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \rightarrow yx^2 + y = x^2 - 1 \rightarrow yx^2 - x^2 = -1 - y$$

$$x^2(y-1) = -1 - y \rightarrow x^2 = \frac{+1+y}{1-y} \rightarrow x = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}$$

$$f^{-1}_{(x)} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \Rightarrow D_f = \frac{1+X}{1-X} \geq 0$$

		-1		1	
$1+x$	$-$		$+$		$+$
$1-x$	$+$		$+$		$-$
$\frac{1+x}{1-x}$	$-$		$+$		$-$

$$D_{f^{-1}} = R_f = (-1, 1)$$

۲ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$x^2 - 1 \neq 0 \rightarrow x^2 \neq 1 \rightarrow x \neq \pm 1$$

$$D_f = R - \{1, -1\}$$

۳ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$y = \frac{e^x}{e^x + 1} \qquad f^{-1}(\frac{1}{2}) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{e^x}{e^x + 1} \Rightarrow 2e^x = e^x + 1 \Rightarrow e^x = 1 \xrightarrow{Ln} Lne^x = Ln1$$

$$x = 0$$

۴ـ گزینه ۳ صحیح است.

۵ـ گزینه ۲ صحیح است. نسبت به مبدا متقارن است.

۶ـ گزینه ۳ صحیح است.

$fog(۱) = f\left(g(۱)\right)$

$g(۱) = Ln = ۰ \quad fog(۱) = f(۰) = \frac{۳e^۰ - e^۰}{۲} = \frac{۳ \times ۱ - ۱}{۲} = \frac{۲}{۲} = ۱$

۷ـ گزینه ۴ صحیح است.

$gof(x) = g\left(f(x)\right)$

$۷x + ۲ = g\left(۳x + ۱\right) \qquad ۳x + ۱ = t \Rightarrow x = \frac{t - ۱}{۳}$

$g(t) = ۷\left(\frac{t - ۱}{۳}\right) + ۲$

$g(t) = \frac{۷}{۳}t - \frac{۷}{۳} + ۲ = \frac{۷}{۳}t - \frac{۱}{۳} \Rightarrow g(x) = \frac{۷}{۳}x - \frac{۱}{۳}$

۸ـ گزینه ۳ صحیح است.

$f(x) = \frac{۱}{x + ۱} \rightarrow y = \frac{۱}{x + ۱} \rightarrow yx + y = ۱$

$yx = ۱ - y$

$x = \frac{۱ - y}{y} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۱ - x}{x}$

$fof^{-۱}(۴) = f\left(f^{-۱}(۴)\right)$

$f^{-۱}(۴) = \frac{۱ - ۴}{۴} = -\frac{۳}{۴} \quad f(-\frac{۳}{۴}) = \frac{۱}{-\frac{۳}{۴} + ۱} = \frac{۱}{\frac{۱}{۴}} = ۴$

۹ـ گزینه ۴ صحیح است. همانطوریکه می دانیمد کسر زیر همواره در فاصله صفر در یک قرار دارد.

$۰ \leq \frac{x^۲}{x^۲ + ۱} < ۱$

$\Rightarrow ۰ \leq \frac{x^۲}{x^۲ + ۱} < ۱ \Rightarrow Ln۰ \leq Ln\left(\frac{x^۲}{x^۲ + ۱}\right) < Ln۱$

$-\infty < f(x) < ۰ \Rightarrow R_f = (-\infty, ۰)$

۱۰ـ گزینه ۱ صحیح است.

$y = Ln\frac{x^۲}{x^۲ + ۱} \rightarrow e^y = \frac{x^۲}{x^۲ + ۱} \Rightarrow e^y x^۲ + e^y = x^۲$

$e^y x^۲ = -e^y + x^۲ \rightarrow x^۲(e^y - ۱) = -e^y \rightarrow x^۲ = \frac{e^y}{۱ - e^y}$

$x = \pm\sqrt{\frac{e^y}{۱ - e^y}} \xrightarrow{x>۰} x = \sqrt{\frac{e^y}{۱ - e^y}} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \sqrt{\frac{e^x}{۱ - e^x}}$

۱۱ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{3x}\Rightarrow D_f=R-\{3x=0\}$$
$$\Rightarrow D_f=R-\{0\}$$

۱۲ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$f(x)=y=Ln(x+1)\to e^y=x+1\Rightarrow -x=1-e^y$$
$$\Rightarrow f^{-1}_{(x)}=e^x-1 \qquad D_{f^{-1}}=R\Rightarrow R_f=R$$

۱۳ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$Lnx\to x>0$$
$$[x]-x\neq 0\to [x]\neq x\Rightarrow D_f=R^+-N$$

۱۴ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$f(x)=\frac{5^x-1}{5^x+1}\Rightarrow y=\frac{5^x-1}{5^x+1}\to y5^x+y=5^x-1$$
$$y5^x-5^x=-1-y\to 5^x(y-1)=-1-y\to 5^x=\frac{1+y}{1-y}$$

$$x=\log_5^{\frac{1+y}{1-y}}\Rightarrow f^{-1}_{(x)}=\log_5^{\frac{1+y}{1-y}}\to f^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)=\log_5\frac{1+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=\log_5^{\frac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{3}}}=\log_5^5=1$$

۱۵- گزینه ۴ صحیح است.

$$y=2+e^{-x+1}\to y-2=e^{-x+1}\to Ln(y-2)=-x+1$$
$$x=1-Ln(y-2)\Rightarrow f^{-1}_{(x)}=1-Ln(x-2)$$
$$D_{f^{-1}}=x-2>0\Rightarrow x>2\Rightarrow D_{f^{-1}}=R_f=(2,+\infty)$$

۱۶ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$f(x)=|x-1|-|x+1|\xrightarrow{x\to -x}|-x-1|-|-x+1|$$
$$=|x+1|-|x-1|=-(|x-1|+|x+1|)=-f(x)$$
$\Rightarrow f(-x)=-f(x)\Rightarrow$ تابع فرد است.

۱۷ـ گزینه ۳ صحیح است

$$y=\sqrt{\log\frac{5x-x^2}{4}}\quad,\quad \frac{5x-x^2}{4}>0\Rightarrow 5x-x^2>0$$

		0		5	
$5x-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$\Rightarrow \quad 0<x<5 \qquad (1)$$

$$Log\frac{5x-x^2}{4}\geq 0\Rightarrow\frac{5x-x^2}{4}\geq 10^0\Rightarrow\frac{5x-x^2}{4}\geq 1\Rightarrow$$
$$5x-x^2\geq 4\Rightarrow x^2-5x+4\leq 0$$

$(x-1)(x-4)\leq 0$

		1		4	
x^2-5x+4	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\Rightarrow 1\leq x\leq 4 \qquad (2)$$

$$(2),(1)\quad\Rightarrow D_f=[1,4]$$

۱۸ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$y=\sqrt{1-x^2}\xrightarrow{\text{تابع فرد است.}}y^2=1-x^2\Rightarrow x^2=1-y^2\Rightarrow x=\pm\sqrt{1-y^2}$$

$$1-y^2\ge 0\Rightarrow y^2\le 1\Rightarrow -1\le y\le 1$$

از طرف دیگر y برابر با یک عبارت رادیکالی است پس باید بزرگتر از صفر باشد. در نتیجه خواهیم داشت.

$$0\le y\le 1\Rightarrow R_f=[0,1]$$

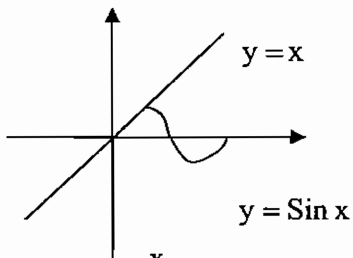
۱۹ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$y=\sqrt{x-|x|}+\sqrt{x-\sin x}\qquad,\qquad x-|x|\ge 0\Rightarrow x\ge |x|$$

$$D_{f_1}=[0,+\infty]$$

با توجه به رسم نمودار $y=\operatorname{Sin}x, y=x$ متوجه می شویم $x-\operatorname{Sin}x\ge 0\Rightarrow x\ge \operatorname{Sin}x$ که همیشه $x\ge \operatorname{Sin}x$ است.

در نتیجه $D_f=[0,+\infty]$



۲۰ ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$g(x+1)=\frac{x}{x+1}$$

$$x+1=t\Rightarrow x=t-1$$

$$g(t)=\frac{t-1}{t-1+1}=\frac{t-1}{t}\Rightarrow g(x)=\frac{x-1}{x}$$

$$f<g(x)=\frac{\frac{x-1}{x}+1}{2(\frac{x-1}{x})+1}=\frac{\frac{x-1+x}{x}}{\frac{2x-2+x}{x}}=\frac{2x-1}{3x-2}$$

۲۱ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$f\left(\operatorname{ArcSin}\frac{x-1}{x+1}\right)=x+2$$

$$\operatorname{ArSin}\frac{x-1}{x+1}=t\Rightarrow \sin t=\frac{x-1}{x+1}\Rightarrow x\operatorname{Sin}t+\operatorname{Sin}t=x-1$$

$$x\operatorname{Sin}t-x=-1-\sin t\Rightarrow x(\operatorname{Sin}t-1)=-1-\operatorname{Sin}t$$

$$x=\frac{1+\operatorname{Sin}t}{1-\operatorname{Sin}t}$$

$$f(t)=\frac{1+\operatorname{Sin}t}{1-\operatorname{Sin}t}+2\Rightarrow f(x)=\frac{1+\operatorname{Sin}x}{1-\operatorname{Sin}x}+2=\frac{1+\operatorname{Sin}+2-2\sin x}{1-\operatorname{Sin}x}=\frac{3-\operatorname{Sin}x}{1-\operatorname{Sin}x}$$

۲۲ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$y=\mathrm{Ln}\left(\frac{1-2e^{x}}{1+e^{x}}\right)\Rightarrow \frac{1-2e^{x}}{1+e^{x}}>0$$

$$\underset{\text{همواره}}{1+e^{x}>0}\Rightarrow 1-2e^{x}>0\Rightarrow 2e^{x}<1\Rightarrow e^{x}<\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$x<\mathrm{Ln}\frac{1}{2}\Rightarrow x<\mathrm{Ln}2^{-1}\Rightarrow x<-\mathrm{Ln}2$$

$$D_f=(-\infty,-\mathrm{Ln}2)$$

۲۳ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$y=\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}\Rightarrow ye^{x}-ye^{-x}=e^{x}+e^{-x}$$

$$ye^{x}-e^{x}=e^{-x}+ye^{-x}\Rightarrow e^{x}(y-1)=e^{-x}(1+y)\quad\Rightarrow$$ طرفین را در e^{x} ضرب می‌کنیم.

$$e^{2x}(y-1)=(1+y)\Rightarrow e^{2x}=\frac{1+y}{y-1}\Rightarrow 2x=\mathrm{Ln}\left(\frac{1+y}{y-1}\right)$$

$$\Rightarrow x=\frac{\mathrm{Ln}\frac{1\cdot y}{y-1}}{2}\Rightarrow f^{-1}_{(x)}=\frac{\mathrm{Ln}\frac{1+x}{x-1}}{2}\Rightarrow f^{-1}_{(2)}=\frac{\mathrm{Ln}\frac{1+2}{2-1}}{2}=\frac{\mathrm{Ln}3}{2}$$

۲۴ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$f(x)=\frac{2e^{x}-1}{e^{x}+1}$$

$$g(x)=\mathrm{Ln}x$$

$$g(2)=\ln 2\Rightarrow f(\ln 2)=\frac{2e^{\ln 2}-1}{e^{\ln 2}+1}=\frac{2\times 2-1}{2+1}=\frac{3}{3}=1$$

۲۵- گزینه ۱ صحیح است.

$$gof(x)=g(f(x))=g\left(e^{-x^2}\right)=\sqrt{\frac{1-e^{-x^2}}{e^{-x^2}}}$$

$$\Rightarrow\frac{1-e^{-x^2}}{e^{-x^2}}\ge 0\quad e^{-x^2}>0\overset{\text{چون}}{\Rightarrow}1-e^{-x^2}\ge 0\Rightarrow e^{-x^2}\le 1\quad e^{-x^2}\le 0\Rightarrow -x^2\le 0$$

$$\Rightarrow x\in(-\infty,+\infty)$$

۲۶- گزینه ۲ صحیح است.

$$0\le\frac{x^2}{x^2+4}<1\Rightarrow \mathrm{Ln}0<\mathrm{Ln}\frac{x^2}{x^2+4}<\mathrm{Ln}1\Rightarrow -\infty<f(x)<0$$

$$\Rightarrow R_f=(-\infty,0)$$

۲۷- گزینه ۳ صحیح است.

می دانیم که اگر $A\left|\begin{matrix}x_0\\y_0\end{matrix}\right.$ روی نمودار تابع $f(x)$ باشد آنگاه نقطه $A'\left|\begin{matrix}y_0\\x_0\end{matrix}\right.$ نیز روی تابع $f^{-1}(x)$ قرار دارد. در نتیجه خواهیم داشت.

$$f(\mathrm{Ln}2)=e^{\mathrm{Ln}2}-e^{-\mathrm{Ln}2}=2-\frac{1}{e^{\mathrm{Ln}2}}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

۲۸- گزینه ۱ صحیح است.

$$۲)f(x)=|x|\cos x \Rightarrow f(x)= \text{زوج} \times \text{زوج} = \text{زوج}$$

$$۳)f(x)=x-\frac{۱}{x} \Rightarrow f(-x)=-x+\frac{۱}{x}=-\left(x-\frac{۱}{x}\right) \text{ فرد}$$

$$۴)f(x)=\log\frac{۱+x}{۱-x} \Rightarrow f(-x)=\log\frac{۱-x}{۱+x}=\log\left(\frac{۱+x}{۱-x}\right)^{-۱}=-\log\frac{۱+x}{۱-x} \text{ فرد}$$

در مورد گزینه اول باید بگوییم که تابع $[x]$ اگر $x \in z$ باشد تابعی فرد خواهد بود در نتیجه حاصل $x[x]$ تـابعی زوج خواهـد بـود ولی اگر $x \notin z$، آنگاه تابع $x[x]$ نه زوج و نه فرد خواهد بود.

۲۹- گزینه ۱ صحیح است.

$$fog(x)=f\left(g(x)=f\left(e^{x}\right)=\sqrt{\frac{۱-e^{x}}{e^{x}}} \Rightarrow \frac{۱-e^{x}}{e^{x}} \geq ۰\right.$$

چون e^x همواره بزرگتر از صفر است بنابراین خواهیم داشت:

$$۱-e^{x} \geq ۰ \Rightarrow e^{x} \leq ۱ \Rightarrow e^{x} \leq e^{۰} \Rightarrow x \leq ۰ \Rightarrow x \in (-\infty,۰]$$

۳۰- گزینه ۲ صحیح است.

می دانیم که $[x] \leq x < [x]+۱$ بنابراین بر طبق این رابطه خواهیم داشت:

$۰ \leq x-[x] < ۱$ طرفین را از $[x]$ کم می کنیم $-۱ < [x]-x \leq ۰$ نامساوی را در مشتقی ضرب می کنیم

بنابراین برد تابع عبارت است از

$$\begin{cases} [x]-x=-۱ \Rightarrow f(x)=۲^{-۱}=\frac{۱}{۲} & \text{اگر} \\ [x]-x=۰ \Rightarrow f(x)=۱ & \text{اگر} \end{cases} \Rightarrow R_f=\left(\frac{۱}{۲},۱\right]$$

۳۱- گزینه ۴ صحیح است.

می دانیم هرگاه نقطه $A(a,b)$ روی نمودار تابع f باشد آنگاه نقطه $A'(b,a)$ روی نمودار $f^{-۱}$ است در نتیجه خواهیم داشـت:

$f(۲)=۴ \rightarrow f^{-۱}(۴)=۲$ که رابطه فوق در گزینه های اول و چهارم صادق است.

از طرفی دیگر طبق رابطه $D_{f^{-۱}}=R_f$ پیداست که گزینه چهارم جواب صحیح است چون که:

$$D_f=[۰,+\infty), R_f=[۰,+\infty)$$

$$\Rightarrow D_{f^{-۱}}=R_f=[۰,+\infty) \underset{\text{یا}}{} x \geq ۰$$

۳۲- گزینه ۲ صحیح است.

$$۱)f(x)=x+\frac{۱}{x} \rightarrow D_f=R-\{۰\} \rightarrow f(۲)=f\left(\frac{۱}{۲}\right)=۵$$ تابع یک به یک نیست.

$$۲)f(x)=x+\sqrt{x} \rightarrow D_f=[۰,+\infty) \rightarrow$$ تابع یک به یک

$$۳)f(x)=\sqrt{x+|x|} \rightarrow D_f=R \Rightarrow f(-۳)=f(-۵)=۰$$ تابع یک به یک نیست.

$$۴)f(x)=\frac{x}{x^{۲}+۱} \rightarrow D_f=R \rightarrow f(۲)=f\left(\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۲}{۵}$$ تابع یک به یک نیست.

۳۳- گزینه ۴ صحیح است.

$$fog(x)=f(g(x))\Rightarrow \frac{x}{2+x}=f(g(x))$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2+x}=\frac{4+g(x)}{1-g(x)}\Rightarrow g(x)=\frac{-3x-8}{2x+2}$$

۳۴- گزینه ۱ صحیح است.

تابع $f(x)=x^3+1$ تابعی است نه زوج و نه فرد و تابعی یک به یک

۳۵- گزینه ۱ صحیح است.

$$fog(x)=f\left(g(x)\Rightarrow \frac{4+x}{2x}=\frac{3-g(x)}{2+g(x)}\Rightarrow g(x)=\frac{4x-8}{3x+4}\right.$$

۳۶- گزینه ۱ صحیح است.

در تابع $f(x)=x^2+1$ چون دامنه داده شده نامتقارن می باشد : $x\in[-1,2]$ بنابراین تابع فوق شرط لازم برای بررسی زوج یا فرد بودن را ندارد.

۳۷- گزینه ۴ صحیح است.

$$D_{fog}(x)=\left\{x\middle|x\in D_g,g(x)\in D_f\right\}$$

$$D_{fog}(x)=\left\{x\middle|x\in(0,+\infty),Lnx\in[-1,1)\right\}=\left\{x\middle|x\in(0,+\infty),x\in\left[e^{-1},e\right)\right\}$$

$$\Rightarrow D_{fog}(x)=\left[e^{-1},e\right)=\left[\frac{1}{e},e\right)$$

در این سوال $D_f=[-1,1)$ و $D_g=R^+$ می باشد.

۳۸ - گزینه ۱ صحیح است.

چون در تابع $f(x)$ همواره رابطه $\frac{x^2+1}{x^2}$ برقرار است بنابراین $R_f=(0,\infty)$

یادآوری : در تابع $f(x)=\text{Log}_{10}^{A}$ اگر $A>1$ باشد، آنگاه $f(x)>0$ و اگر $0<A<1$ باشد آنگاه $f(x)<0$

۳۹- گزینه ۲ صحیح است.

چون دامنه ارائه شده برای تابع $f(x)=x^2$ نامتقارن است بنابراین شرط لازم برای بررسی زوج و فرد بودن برقرار نیست.

$1)f(x)=Ln\frac{1-x}{1+x}$ فرد

$2)f(x)=x\cos x$ فرد

$3)f(x)=x\sin x$ زوج

۴۰- گزینه ۳ صحیح است.

دو تابع نمایی $x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ و $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ که در معادله هذلولی متساوی الساقین $x^2-y^2=1$ صدق می کنند را توابع هذلولی یا هیپربولیک می نامیم. این دو تابع را با نامهای سینوس و کسینوس هیپربولیک نامگذاری کرده و خواهیم داشت:

$$Chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2},Shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

بنابراین در این سوال خواهیم داشت:

$$2=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\rightarrow e^{x}-\frac{1}{e}=4\Rightarrow$$

$$e^{2x}-4e^{x}-1=0\Rightarrow A^{2}-4A-1=0\Rightarrow A=\frac{4\pm\sqrt{20}}{2}\rightarrow A=2\pm\sqrt{5}$$

۴۱- گزینه ۲ صحیح است.

با توجه به رابطه $D_f = R_{f^{-1}}$ خواهیم داشت:

$$1)f\left(\mathrm{Ln}\frac{1}{2}\right)=2\Rightarrow f\left(\mathrm{Ln}\frac{1}{2}\right)=e^{\mathrm{Ln}\frac{1}{2}}+e^{-\mathrm{Ln}\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}\neq 2$$

$$2)f\left(\mathrm{Ln}\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{10}\Rightarrow f\left(\mathrm{Ln}\frac{1}{3}\right)=e^{\mathrm{Ln}\frac{1}{3}}+e^{-\mathrm{Ln}\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}+3=\frac{10}{3}$$

$$3)f\left(\mathrm{Ln}3\right)=\frac{10}{3}\Rightarrow f\left(\mathrm{Ln}3\right)=e^{\mathrm{Ln}3}+e^{-\mathrm{Ln}3}=3-\frac{1}{3}=\frac{8}{3}\neq\frac{10}{3}$$

$$4)f\left(\mathrm{Ln}2\right)=\frac{1}{2}\Rightarrow f\left(\mathrm{Ln}2\right)=e^{\mathrm{Ln}2}+e^{-\mathrm{Ln}2}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

۴۲- گزینه ۱ صحیح است.

$$f(x)=\mathrm{Sh}x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\rightarrow f^{-1}(x)=\mathrm{Ln}(x+\sqrt{x^{2}+1})$$

$$\Rightarrow f^{-1}(1)=\mathrm{Ln}\left(1+\sqrt{2}\right)$$

۴۳- گزینه ۳ صحیح است.

$$gof(x)=g\left(f(x)\right)\rightarrow gof(x)=\sin\pi\left(x-[x]\right)$$

فرض می کنیم که $t=x-[x]$ باشد در نتیجه خواهیم داشت: $0\le t<1$

مشخص است که در فاصله فوق $\sin x$ همواره مثبت می باشد. (پس گزینه های ۱ و ۲ رد می شوند) و حداکثر مقدار $\sin x$ برابر ۱ می باشد. $\xrightarrow{\text{طرفین را در } \pi \text{ ضرب می کنیم}} 0\le \pi t<\pi$

۴۴- گزینه ۴ صحیح است.

می دانیم دامنه تابع به مجموعه هایی گفته می شود که به ازای آنها y یک عدد حقیقی می شود.

اگر $x=2\in D_f\Rightarrow f(2)$ یک عدد حقیقی است.

$f(2)=\sqrt{\log_{10}^{1}}=0\Rightarrow 2\in D_f$ یک عدد حقیقی است.

اگر $x=-1\in D_f\Rightarrow f(-1)$

$f(-1)=\sqrt{\log_{10}^{1}}\Rightarrow -1\in D_f$

۴۵- گزینه ۴ صحیح است.

با توجه به این که $D_{f^{-1}}=R_f$ خواهیم داشت:

$$\frac{3}{2}=x-\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{3}{2}=\frac{x^{2}-1}{x}\Rightarrow 2x^{2}-3x-2=0$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{4}\Rightarrow x=2,x=-\frac{1}{2}$$

۴۶- گزینه ۱ صحیح است.

بایستی $\cos x > 0$ از طرفی $-1 \le \cos x \le 1$ لذا $\to \text{Log}0 < \text{Log}(\cos x) \le \text{Log}1$ از طرفین Log می گیریم

$0 < \cos x \le 1$

طرفین نامساوی را در ۴ ضرب می کنیم $\Rightarrow 4\text{Log}0 < 4\text{Log}(\cos x) \le 4\text{Log}1 \Rightarrow -\infty < f(x) \le 0 \Rightarrow R_f = (-\infty, 0]$

۴۷- گزینه ۴ صحیح است.

اگر $x = -1 \in D_f \Rightarrow f(-1)$ یک عدد حقیقی است.

$f(-1) = \sqrt[2]{-\infty} \Rightarrow -1 \notin D_f$ رد گزینه های ۱ و ۳

اگر $x = 2 \in D_f \Rightarrow f(2)$ یک عدد حقیقی است.

$f(2) = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow 2 \in D_f$ رد گزینه دوم

۴۸- گزینه ۲ صحیح است.

$D_f = R = (-\infty, +\infty)$ دامنه تابع متقارن

چون $f(-x) = -f(x)$ بنابراین تابع مورد نظر یک تابع فرد می باشد.

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -f(x)$$

۴۹- گزینه ۴ صحیح است.

$$f(x) = \cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \to \begin{vmatrix} x = 0 \\ y = 1 \end{vmatrix}$$

با توجه به رابطه $D_{f^{-1}} = R_f$ مشخص است که باید رابطه $f^{-1}(1) = 0$ برقرار باشد در نتیجه گزینه های اول و دوم حذف می شوند و از طرفی دیگر چون در تابع $f(x)$ دامنه تابع برابر است با:

$D_f = [0, +\infty)$

بنابراین باید رابطه $R_{f^{-1}} = [0, \infty)$ برقرار باشد که تنها گزینه ۴ صحیح است.

فصل سوم

حد و پیوستگی

مثال: در تابع $f(x)=۳x+۱$ مقادیر زیر را بدست آورید.

X	-0/1	-0/01	-0/001	-/0001	0	0/0001	0/001	0/01	0/1
F(x)	0/7	0/97	0/997	0/997	1	1/0003	1/003	1/003	1/3

همانطور که در مثال می‌بینیم هر چه عدد x به سمت صفر حرکت کند و به صفر نزدیک شود مقدار f(x) نیز به یک نزدیک می‌شود.

(۳-۱) مفهوم حد تابع: بطور کلی در تابعی مانند f(x) در صورتی که x از نزدیکیهای a به a نزدیک شود اگر مقدار f(x) نیز به عدد خاصی نزدیک شود آن عدد را حد تابع f(x) در نزدیکی a می‌گویند به عبارت دیگر می‌توان گفت:

تعریف حد: هنگامی‌که x به سمت a میل نماید، یک تابع مانند f(x) به سمت حد A میل می‌کند اگر و فقط اگر برای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند δ وجود داشته باشد به طوری که داشته باشیم:

$$0<|x-a|<\delta, 0<|f(x)-A|<\varepsilon$$

(اعداد δ, ε اعداد بسیار کوچک و غیر صفر می‌باشند)

(۳-۲) حد چپ و حد راست:

حد چپ: هنگامی‌که مقدار x با مقادیر ($x<a$) کمتر از $a(-\varepsilon<x-a<0)$ به آن نزدیک شود f(x) نیز به سمت عدد خاصی مانند A نزدیک شود در این صورت مقدار A را حد چپ تابع می‌گوییم یعنی: $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = A$

مثال: برای تابع f(x)=[x]+x حد چپ را تابع در x=1 را بدست آورید:

x	+۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹۹	۱
$f(x)$	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹۹	

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to ۱^-} f(x) = ۱$

حد راست : هنگامی‌که مقدار x با مقادیری بیشتر ($x>a$) از $a(۰<x-a<\varepsilon)$ به آن نزدیک می‌شود f(x) نیز به سمت عدد خاصی مانند A نزدیک شود در این صورت مقدار A را حد راست تابع می‌گوییم یعنی: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = A$

مثال: برای تابع f(x)= |x-1| در نقطه x=a حد راست تابع را در x=0 بدست آورید:

x	۰	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
$f(x)$		۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹	۰/۹۹	۰/۹

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to ۰^+} f(x) = ۱$

نکته مهم: تابع f(x) در نقطه x=0 دارای حد می‌باشد

$$\lim_{x \to a^-}(x) = \lim_{x \to a^+}(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to a}(x) = A$$

(۳-۳) حد راست و حد چپ:

اگر تابع $y=f(x)$ در فاصله $[a,x]$ تعریف شده باشد، حد $f(x)$ وقتی x از سمت راست به طرف a میل کند برابر $L_۱$ بوده و می نویسیم: $\underset{x \to a^+}{Lim} f(x) = L_۱$

- و اگر این تابع در فاصله $[d,a]$ تعریف شده باشد، حد $f(x)$ وقتی x از سمت چپ به طرف a میل کند برابر L_2 بوده و می نویسیم: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L_2$

مثال: بررسی کنید تابع f(x)=[x] در نقطه صفر حد دارد:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}[x] = -1 \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}[x] = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}(x) \neq \lim_{x\to 0^-}(x)$$

$$-1 \le x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \qquad 0 \le x < 1 \Rightarrow [x] = 0$$

تابع f(x) در نقطه صفر حد ندارد.

(۳-۴) قضایای خواص حد:

۱) $\lim\limits_{x\to a} k = k$ ۲) $\lim\limits_{x\to a} x = a$

۳) اگر دو تابع f(x) , g(x) در نقطه a حد داشته باشند داریم:

الف) $\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to a} f(x)\times g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \times \lim\limits_{x\to a} g(x)$

ج) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ (به شرطی که $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$)

د) $\lim\limits_{x\to a} (f(x))^b = (\lim\limits_{x\to a} f(x))^b$

هـ) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ (در صورتی که n زوج باشد می‌بایست $\lim f(x) \ge 0$ باشد)

و) $\lim\limits_{x\to a} Log\, f(x) = Log(\lim\limits_{x\to a} f(x))$ (به شرطی که $Log(\lim\limits_{x\to a} f(x))$)

ز) $\lim\limits_{x\to a} b^{f(x)} = b^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} h(x) = k$ خواهیم داشت.

الف) $\lim\limits_{x\to a} \frac{h(x)}{g(x)} = 0$ ب) $\lim\limits_{x\to a} \frac{g(x)}{h(x)} = \infty$

ج) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{h(x)} = 0$ د) $\lim\limits_{x\to a} \frac{h(x)}{f(x)} = \infty$

نکته: بطور کلی برای محاسبه $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ابتدا مقدار f(x) را بدست می‌آوریم در صورتی که تابع در آن نقطه یا در نزدیکیهای آن تعریف شده باشد و یا جزء حالتها ابهام که در ادامه به آن اشاره می‌کنیم نباشد مقدار f(a) همان $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ می‌باشد. این موضوع در مورد توابع مثلثاتی نیز صدق می‌کند.

مثال: حد تابع $f(x) = \frac{x^2 - x}{\sqrt{x^2 - 8}}$ را در $x=3$ بدست آورید.

$$\lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = \frac{(3)^2-(3)}{\sqrt{(3)^2-8}} = 6$$

مقدار حدهای زیر را بدست آورید:

الف) $\lim\limits_{x\to 0^-} = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{0^-}}} = \dfrac{1}{1+e^{-\infty}} = \dfrac{1}{1+0} = 1$

ب) $\lim\limits_{x\to 4} \log(x^2-6) = \log^{(16-6)} = \log^{10} = 1$

ج) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x}{x^2-4} = \dfrac{2(2)}{(2)^2-4} = \dfrac{4}{0} = \infty$

د) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\infty} = 0$

و) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{Sin^2 x}{2Tanx + Cos^2 x} = \dfrac{(Sin\frac{\pi}{4})^2}{2Tan\frac{\pi}{4} + (Cos\frac{\pi}{4})^2} = \dfrac{\frac{2}{4}}{2+\frac{2}{4}} = \dfrac{1}{5}$

(۳-۵) حدهای بی نهایت:

تابع $y = f(x)$ را در نظر بگیرید، اگر x به سمت a میل کند و $f(x)$ بطور بیکران افزایش یابد می نویسیم:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$

و اگر x به سمت a میل کند و $f(x)$ بطور بیکران کاهش یابد می نویسیم: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$

تذکر: قضیه اگر r یک عدد صحیح مثبت باشد، آنگاه:

الف) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^r} = +\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x^r} = \begin{cases} -\infty & \text{اگر r فرد باشد} \\ +\infty & \text{اگر r زوج باشد} \end{cases}$

ج) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{1}{x^r} = 0$

مثال: حاصل $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2}{(x-3)^2}$ **را بدست آورید.**

حد راست $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{2}{(x-3)^2} = \dfrac{2}{(3^+-3)^2} = \dfrac{2}{(0^+)^2} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$

حد چپ $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{2}{(x-3)^2} = \dfrac{2}{(3^--3)^2} = \dfrac{2}{(0^-)^2} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2}{(x-3)^2} = +\infty$

نکته مهم: حدهای جزء صحیح: برای محاسبه حد عبارتهایی که شامل جزء صحیح می‌باشد بهتر است که در ابتدا جزء صحیح را از عبارت حذف کنیم.

مثال:

$\lim\limits_{x\to 3} x[\frac{1}{2}x] = \lim\limits_{x\to 3} x = 3$

روش اول $\Rightarrow 2 \le x \le 4 \Rightarrow 1 \le \frac{1}{2}x < 2 \Rightarrow [\frac{1}{2}x] = 1$

روش دوم $x=3 \Rightarrow \frac{1}{2}x=\frac{3}{2} \to 1<\frac{3}{2}<2 \Rightarrow \left[\frac{1}{2}x\right]=1$

به طور کلی توابع جزء صحیح به ازای مقادیری از x که عبارت داخل جزء صحیح یک عدد صحیح می‌شود دارای حد نیست.

مثال:

(۳-۶) صورتهای مختلف ابهام در حد گیری:

۱)ابهام $\frac{0}{0}$: در این حالت عامل ابهام (علت صفر شدن صورت ومخرج) را حذف کرده و سپس مانند حد گیری‌های عادی عمل می‌کنیم.

مثال:

$$1)\lim_{x\to 3 \Rightarrow x-3=0}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}=\frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-2)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x-2}=6$$

$$2)\lim_{x\to 2 \Rightarrow x-2=0}\frac{x^2-4x+4}{x^3-8}=\frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^3-8}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2+2x+4}=0$$

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x\cos x}{\sin x}=\frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{5x\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin x}.\cos x=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin x}\lim_{x\to 0}\cos x=5\times 1=5$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\sin x}=\frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan x}{x}}{\frac{\sin x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}.\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1\times 1=1$$

نکته:

$$1)\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{\sin bx}=\frac{a}{b} \qquad 2)\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{1-\cos x}=1$$

ابهام $\frac{\infty}{\infty}$: در این حالت معمولاًبالاترین درجه صورت و بالاترین درجه مخرج را از عبارت فاکتورگیری کرده و از همان مقادیر حد می‌گیریم:

مثال:

$$1)\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-3x^2+1}{2x^5-3x^3+x}=\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{x^3(5-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3})}{x^5(2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4})}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3}{2x^5}=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{2x^2}=\frac{5}{\infty}=0$$

ابهام $\infty-\infty$: در این ابهامات می‌بایست عبارت را به یکی از صورتهای ابهام $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل کرده و سپس ابهام آنها را بر طرف کرد

مثال:

$$1)\lim \sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x-1}=\infty-\infty\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x-1}\left(\frac{\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{x-1}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2-4x)-(x-1)}{\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{x-1}}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{|x|}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$$

$$2)\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}-\cot x=\infty-\infty\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{0}{0}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}}{\frac{\sin x}{\frac{x^2}{2}}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{\sin x}=1\times\lim_{x\to 0}\frac{x}{2}\times\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1\times 0\times 1=0$$

ابهام $\infty\times 0$: در این حالت با معکوس کردن یکی از عبارتها نوع ابهام از نوع $\frac{\infty}{\infty}$ یا $\frac{0}{0}$ خواهد شد.

مثال:

$$1)\lim_{x\to 0}\sin x\cot x=0\times\infty\Rightarrow\lim_{x\to 0}\sin x\times\frac{1}{\frac{1}{\cot x}}=\lim_{x\to 0}\sin x\times\frac{1}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\tan x}=\frac{0}{0}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\tan x}=1$$

$$2)\lim_{x\to -2}\cot(x+2)\times\sqrt{x^2+4x+4}=\infty\times 0$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{\tan(x+2)}=\frac{0}{0}\Rightarrow\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{(x+2)^2}}{\tan(x+2)}=\lim_{x\to -2}\frac{|x+2|}{\tan(x+2)}$$ (ب

$$\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to -2^-}\frac{-(x+2)}{\tan(x+2)}=-1\\ \lim\limits_{x\to -2^+}\frac{x+2}{\tan(x+2)}=1\end{cases}\Rightarrow$$ حدتابع در $x\to -2$ وجود ندارد

نکته مهم: برای حد گیری توابع قدر مطلق در نقاط مرزی آن حتماً می‌بایست حد چپ و راست گرفته شود.

تذکر: حالت ابهام دیگری (1^∞ و ∞^0 و 0^0) نیز وجود دارد که بعد از بحث مشتقات به آنها می‌پردازیم.

نکته:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\Rightarrow\lim_{f(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e$$

$$\lim_{t\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{2}{3}t}=e^{\frac{2}{3}}$$

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{6t+3}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{6t}=\lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{6}=e^{6}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+2x}{2x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2x}+\frac{2x}{2x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2x}+1\right)^{2x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2x}+1\right)^{2x}\right]^{\frac{2}{2}}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2x}+1\right)^{2x}\right]^{\frac{2}{2}}=e^{\frac{2}{2}}$$

نکته:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\Rightarrow\lim_{f(x)\to 0}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}=e$$

مثال:

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\cot x}=\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{\cos x}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}\left[(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\cos x}$$

$$=\left[\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\cos x}=\lim_{x\to 0}e^{\cos x}=e$$

نکته مهم: اگر $\lim g(x)>0,\lim f(x)>0$ خواهیم داشت.

$$\lim_{x\to a}g(x)^{f(x)}=\lim_{x\to a}g(x)^{\lim\limits_{x\to a}f(x)}$$

(۳-۷) دو قاعده مهم:

۱) قاعده ساندویچ: اگر تابع $f(x)$ در همسایگی a در بین دو تابع $h(x),g(x)$ قرار بگیرد یعنی: $g(x)\le f(x)\le h(x)$، اگر $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\lim\limits_{x\to a}h(x)=k$ باشد خواهیم داشت: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=k$

۲) توابع کراندار: اگر $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$، $g(x)$ در همسایگی a کراندار باشد در این صورت:

$\lim\limits_{x\to a}f(x)\times g(x)=0$.

در این حالت نیازی نیست که $g(x)$ در خود a تعریف شده باشد و شرط لازم کراندار بودن $g(x)$ در نزدیکی a می‌باشد.

مثال:

$$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}\Rightarrow\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

تابع $\sin\frac{1}{x}$ تابعی کراندار است زیرا همواره $-1\le\sin\frac{1}{x}\le 1$ برقرار است.

(۳-۸) هم ارزیها

همانطور که در مرحله رفع ابهام در حد گیری دیدید، رفع ابهام در بعضی مواقع بسیار وقتگیر و بعضاً گیج کننده می‌شود به همین دلیل در این مواقع می‌توان از هم ارزهای توابع استفاده کرد وآنها را ساده‌تر کرد (این همارزیها فقط در مواقعی که یکی از انواع ابهامات رخ دهد قابل استفاده می‌باشند نه در شرایط عادی) بعضی از هم ارزیها ی مهم عبارتند از:

1) $\sin x\sim x$ ۲) $\tan x\sim x$ ۳) $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$

این هم ارزی زیر نیز در حالت حد گیری در بینهایت قابل استفاده می‌باشد: ۴) $\sqrt{ax^2\pm bx+c}\sim\sqrt{a}\left|x\pm\frac{b}{2a}\right|$

نکته مهم:

$$1)\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\frac{a}{b}\Rightarrow\lim_{f(x)\to 0}\frac{\sin(f(x))}{f(x)}=1$$

$$2)\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{bx}=\frac{a}{b}\Rightarrow \lim_{f(x)\to 0}\frac{\tan(f(x))}{f(x)}=1$$

مثال :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\times\cos x}{\tan x}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2-3x}\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left|x+\frac{5}{2}\right|-\left|x-\frac{3}{2}\right|=\lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{5}{2}\right)-\left(x-\frac{3}{2}\right)=4$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2}{\sqrt{4x^2-8x}}\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{x+2}{\sqrt{4}\left|x-\frac{8}{8}\right|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2}{-2(x-1)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-2x}=-\frac{1}{2}$$

اگر n زوج و $a_n>0$ باشد:

$$\sqrt[n]{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0}\sim\sqrt[n]{a_n}\left(X+\frac{a_{n-1}}{na_n}\right)$$

$x\to+\infty$

$$\sqrt[n]{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0}\sim-\sqrt[n]{a_n}\left(X+\frac{a_{n-1}}{na_n}\right)$$

$x\to-\infty$

اگر n فرد باشد:

$$\sqrt[n]{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0}\sim\sqrt[n]{a_n}\left(X+\frac{a_{n-1}}{na_n}\right)$$

$x\to\pm\infty$

قضیه ۱:

اگر X به سمت صفر میل کند، هرچند جمله ای از X هم ارز جمله ای از آن چند جمله ای خواهد بود که دارای کوچکترین توان است.

$$\text{حد}\ P(x)=\text{حد}\ \left(a_nx^n+a_{n+1}x^{n+1}+\dots+a_mx^m\right)\sim \text{حد}_{x\to 0}\ a_mx^m$$

مثال:

$$\text{حد}_{x\to 0}\left(5x^4-x^3-x\right)=\text{حد}_{x\to 0}(-x)=0$$

قضیه ۲:

اگر X به سمت $+\infty$ و یا $-\infty$ میل کند هر چند جمله ای از X هم ارز آن جمله ای از چند جمله ای خواهد بود که دارای بزرگترین توان است.

$$\text{حد}_{x\to\pm\infty} P(x)=\text{حد}\ \left(a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\dots+a_0\right)=a_mx^m$$

نکته مهم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^m+bx^{m-1}+cx^{m-2}\dots}{dx^n+hx^{n-1}+kx^{n-2}\dots}\simeq\lim_{x\to\infty}\frac{ax^m}{dx^n}=\begin{cases}\frac{a}{d} & m=n\\ \infty & m>n\\ 0 & n>m\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}\right)}{x^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-3x^2}{1-x}=\frac{0}{1}=0$$

قضیه ۳:

حد کسرهای گویا وقتی که متغیر به سمت ∞ میل کند:

حد تابع $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{a_m x^m + a_m x^{m-1}+....+a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1}+....+b_0}$ وقتی که x میل می کند به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ برابر است با حد نسبت جملهٔ بزرگترین درجه صورت به جملهٔ بزرگترین درجه مخرج وقتی که $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$ یعنی:

$$\operatorname{Lim} f(x) = \operatorname{Lim}\frac{a_m x^m}{b_n x^n} = \operatorname{Lim}\frac{a_m}{b_n}x^{m-n}$$

تذکر: با توجه به درجه صورت و مخرج سه حالت پیش می آید:

۱) $m>n$، درجه صورت بیشتر از مخرج است. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$

۲) $m=n$ درجه صورت و مخرج برابر است. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\dfrac{a_n}{b_n}$

۳) $m<n$ درجه صورت از درجه مخرج کمتر است. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$

(۳-۹) حد چپ و راست در تابع هموگرافیک:

تابع $f(x)=\dfrac{a_n+b}{c_x+d}$ به نام تابع هموگرافیک معروف است و دامنه تعریف آن $D_f=R-\dfrac{-d}{c}$ است. حد چپ و راست تابع در موقعی که x به سمت $-\dfrac{d}{c}$ میل می‌کند با یکدیگر مساوی نیستند اگر تابع صعودی باشد حد چپ $+\infty$ و حد راست $-\infty$ است و اگر تابع نزولی باشد حد چپ $-\infty$ و حد راست $+\infty$ خواهد بود.

مثال: حد تابع $y=\dfrac{2x-6}{x-1}$ را وقتی که $x\to 1$ میل می کند (ریشه مخرج) معین کنید:

چون مشتق تابع $y'=\dfrac{4}{(x-1)^2}>0$ است، داریم:

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$

یعنی تابع به ازای $x\to 1$ حد ندارد و به علاوه در این مثال $f(1)$ بی معنی است.

(۳-۱۰) حد چپ و راست در تابع پله ای یا براکت:

طبق تعریف تابع پله ای داریم: $\forall x\in R\ ,\ \exists n\in z\ ,\ n\le x<n+1 \Rightarrow [x]=n$

در نتیجه:

$\forall n\in z\ ,\ x\to n^-$ یعنی $n-1\le x<n \Rightarrow [x]=n-1$

پس در نقاط به طول عدد صحیح n خواهیم داشت:

حد چپ: $\lim\limits_{x\to n^-}[x]=n-1$

$\forall n\in z\ ,\ x\to n^+$ یعنی $n\le x<n+1\Rightarrow [x]=n$

حد راست: $\lim\limits_{x\to n^+}[x]=n$

$f(n)=n$

چون در نقاط به طول عدد صحیح حد چپ و راست تابع با یکدیگر مساوی نیستند پس این تابع در آن نقطه حد ندارد.

تذکر مهم: تابع $f(x)=[x]$ در نقاط درست حد ندارد ولی در نقاط غیرصحیح حد دارد.

مثال: حد چپ و راست تابع $y=x[x]$ را وقتی که $x\to ۲$ حساب کنید.

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=۲[\underbrace{۲+۴}_{۲\to ۰^+}]=۲\times ۲=۴$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=۲[\underbrace{۲-۴}_{۲\to ۰^-}]=۲\times ۱=۲$$

(۳-۱۱) مجانبها:

مجانب عمودی (قائم) : خط x=a را مجانب عمودی تابع f(x) گویند هر گاه

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$$

مجانب افقی :خط y=b را مجانب افقی تابع f(x) گویند هر گاه $\lim_{x\to\infty} f(x)=b$

مثال:مجانبهای افقی و عمودی تابع $f(x)=\frac{x^۲-۲۷}{x^۲-۹}$ در صورت وجود بدست آورید

$$x^۲-۹=۰\Rightarrow x=\pm ۳\begin{cases}\lim_{x\to +۳} f(x)=\lim_{x\to +۳}\frac{x^۲-۲۷}{x^۲-۹}=\lim_{x\to ۳}\frac{(x-۳)(x^۲+۳x+۹)}{(x-۳)(x+۳)}=\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲+۳x+۹}{x+۳}=\frac{۲۷}{۶}\\ \lim_{x\to -۳} f(x)=\lim_{x\to -۳}\frac{x^۲-۲۷}{x^۲-۹}=\frac{-۵۴}{۰}=\infty\Rightarrow x=-۳\end{cases}$$ مجانب عمودی

مجانب افقی ندارد: $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^۳-۲۷}{x^۲-۹}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^۳}{x^۲}=\infty$

نکته: برای پیدا کردن مجانب افقی می‌بایست حد تابع را در بی نهایت محاسبه کرده و در صورتی که برابر عددی مانند b باشد مجانب افقی تابع y=b می‌باشد.

نکته: برای پیدا کردن مجانبهای عمودی در توابع کسری، مخرج را مساوی صفر قرار داده و ریشه های آن را یافته و از آن حد می‌گیریم در صورتی که حد تابع بی نهایت شد تابع مجانب عمودی دارد.

در سایر توابع برای تعیین مجانبهای عمودی نقاط تعریف نشده و نقطه های مرزی می‌بایست بررسی شود.

مثال:

$$۱) f(x)=\frac{x-۲}{x^۲-x-۲}\qquad D_f: R-\{۲,-۱\}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x-۲}{x^۲-x-۲}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^۲}=۰\Rightarrow\quad y=۰$$ مجانب افقی

$$x^۲-x-۲=۰\qquad (x-۲)(x+۱)=۰\Rightarrow \begin{matrix}x=۲\\ x=-۱\end{matrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\lim_{x\to -۱} f(x)=\lim_{x\to -۱}\frac{x-۲}{x^۲-x-۲}=\frac{-۳}{۰}=\infty\Rightarrow x=-۱\\ \lim_{x\to +۲} f(x)=\lim_{x\to ۲}\frac{x-۲}{x^۲-x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{x-۲}{(x+۱)(x-۲)}=\lim_{x\to ۲}\frac{۱}{x+۱}=\frac{۱}{۳}\end{cases}$$ مجانب عمودی

۲) مجانب افقی تابع روبرو رابه دست آورید.

$$f(x)=\frac{۱+e^{\frac{۱}{h}}}{e^h}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim \dfrac{1+e^{\frac{1}{h}}}{e^h} = \dfrac{2}{\infty} = 0 & y=0 \quad \text{مجانب افقی تابع} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim \dfrac{1+e^{\frac{1}{h}}}{e^h} = \dfrac{2}{0} = \infty \end{cases}$$

مجانب مایل: شرط لازم برای آنکه تابع $y=f(x)$ دارای مجانب مایل باشد آن است که حد تابع وقتی $x\to+\infty$ $x\to-\infty$ $\infty\leftarrow$ باشد. در زیر بصورت یک قضیه، شرط کافی را نیز بررسی می‌کنیم.

قضیه: شرط: لازم و کافی برای اینکه خط $a=ax+b$ مجانب مایل منحنی تابع $y=f(x)$ باشد. این است که:

$$\lim_{x\to\pm\infty} |y-d|=0 \qquad \lim_{x\to\pm\infty} |y-ax-b|=0$$

یا

که براحتی می‌توان از آن b,a را بدست آورد.
$$\underset{x\to\pm\infty}{a} = \lim \frac{f(x)}{x} \quad , \quad \underset{x\to\pm\infty}{b} \ \lim(f(x)-ax)$$

$$f(x)=\frac{x^2-4x+7}{x-2}$$

شرط لازم : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$

$$\underset{x\to\infty}{a} = \lim\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+7}{x(x-2)}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+7}{x-2}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+7-x^2+2x}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x+7}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{x}=-2$$

مجانب مایل: $y=x-2$

نکته: بطور کلی در توابعی که به شکل $y=ax+b+\dfrac{g(x)}{h(x)}$ هستند. اگر $\lim\limits_{x\leftarrow\infty}\dfrac{g(x)}{h(x)}=0$ باشد. $y=ax+b$ مجانب مایل است.

$$f(x)=\frac{x^3-3a+7}{x^2+1}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3-3x+7 & x^2+1 \\ \cline{2-2} x^3+x & x \\ \hline -4x+x & \end{array}$$

نکته: در این روش درجه صورت تنها باید یک واحد از مخرج بیشتر باشد و تابع $y=x$ مجانب مایل صورت مقسوم علیه تابع مخرج نباشد.

نکته: در توابع به شکل $y=\alpha x+\beta\pm\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}+\dots}$ خط $y=\alpha x+\beta\pm\sqrt[n]{a}(a+\dfrac{b}{an})$ مجانب مایل است. اگر n زوج باشد تابع دارای دو مجانب و اگر n فرد باشد تابع فقط یک مجانب دارد.

(۱۲-۳) پیوستگی:

تعریف: تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ پیوسته می‌باشد اگر:

۱)حد $f(x)$ در $x\to a$ موجود باشد

۲) $f(a)$ موجود باشد، f در a تعریف شده باشد یا به عبارت دیگر $a\in f$

۳) $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

مثال: پیوستگی تابع در $x=2$ را بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1x-6}{x-2} & x\neq 2\\ 5 & x=2\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}1)\ \lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}=\lim_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+3)}{x-2}=5\\ 2)\ x=2\Rightarrow f(2)=5\end{array}\right\}\Rightarrow 3)\ \lim_{x\to 2} f(x)=f(2)=5\Rightarrow$$

تابع در $x=2$ پیوسته می‌باشد

(۳-۱۳) پیوستگی چپ:

تعریف تابع f که روی $x_0>a$ و $]a,x_0]$ معین است. در نقطه x_0 پیوستگی چپ دارد، هرگاه وقتی که x از سمت چپ به سمت x_0 میل می کند، حد تابع برابر $f(x_0)$ باشد یعنی $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$ حد.

پیوستگی راست: تعریف تابع f که روی $x_0<b$ و $[x,b[$ معین است، در نقطهٔ x_0 پیوستگی راست دارد، هرگاه، وقتی کـه x از سمت راست به سمت x_0 میل می کند، حد تابع برابر $f(x_0)$ باشد یعنی : $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$ حد

تذکر: اگر تابعی در یک نقطه پیوستگی نداشته باشد آن را گسسته یا منفصل گویند.

(۳-۱۴) انواع گسستگی (حالتهای انفصال یا (ناپیوستگی))

بدیهی است که اگر هر یک از شروط پیوستگی محقق نشود تابع در x=a گسسته می‌باشد. بطور کلی سه نوع گسستگی وجـود دارد:

۱)تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ دارای گسستگی بی پایان (بینهایـت) میباشـد اگـر $\lim_{x\to a} f(x)$ وجـود نداشـته و $f(a)$ نیـز تعریف نشده باشد.

۲)تابع $f(x)$ در $x=a$ دارای گسستگی با پایان (محدود) می‌باشد اگر $\lim_{x\to a} f(x)$ وجود نداشـته باشـد ولـی مقـدار $f(a)$ وجود داشته و معین باشد.

۳) تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ دارای گسستگی حذف شدنی (رفع شدنی) می‌باشد اگر $\lim_{x\to a} f(x)$ وجـود داشـته باشـد ولـی $f(a)$ وجود نداشته باشد.

$$1)\ f(x)=\frac{\cos x}{\sin x},\quad x=0\quad D_{(f)}:R-\{K\Pi\}$$

❶ $\lim_{x\to 0} f(a)=\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{\sin x}=\dfrac{1}{0}=\infty$ ❷ $f(x)\Rightarrow f(0)$ تعریف نشده $\Leftarrow$ در نقطه $x=0$ گسستگی بی‌پایان است

$$2)\ f(x)=\frac{(5x-1)\tan x}{\sin x},\quad x=0\quad D_{(f)}=R-\{k\Pi\}$$

❶ $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\dfrac{(5x-1)\tan x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{\sin x}(5x-1)=-$ ❷ در نقطه $x=0$ گسستگی رفع شدنی است: $f(x)$ $f(0)\Rightarrow$ تعریف نشده است

$$3)\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-2} & x\neq 2\\ 3 & x=2\end{cases}$$

درنقطه x=2

❶ $\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-9}{x-2}=\dfrac{-5}{0}=\infty$ ❷, $f(2)=3\Rightarrow$ در نقطه $x=2$، گسستگی با پایان(محدود) است.

نکته: در مورد توابعی که در x=a دارای گسستگی رفع شدنی باشد می‌توان با تعیین مقدار خاصی به ازای محل تعریف نشده تابع را در x=a پیوسته کرد.

مثال:

$$f(x):\begin{cases}\dfrac{(5x-1)\tan x}{\sin x} & x \neq k\Pi \\ 5\Pi x - 1 & x = 0\end{cases} \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = -1 \Rightarrow f(x) = -1$$

تابع در x=0 پیوسته می‌باشد

مثال مقدار a و b را چنان تعیین کنید که تابع $f(x)$ در x=0 پیوسته باشد

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+bx-a} & x<0\\ 2 & x=0\\ [x]-b & x>0\end{cases}$$

$$❶\ \lim f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{x^2+bx-a}=\sqrt{-a}\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}[x]-b=-b \qquad 0<x<1\Rightarrow [x]=0\end{cases}$$

$$❸\ \Rightarrow \sqrt{-a}=-b=2\Rightarrow\begin{cases}b=-2\\ a=-4\end{cases}$$

$$❷\ f(x)=2$$

(۱۵-۳) قضایای پیوستگی

۱) اگر f و g در x_0 پیوسته باشند، $f \pm g$ نیز در x_0 پیوسته است.

۲) اگر f در x_0 پیوسته باشد، λf نیز در x_0 پیوسته است. $(\forall \lambda \in R)$

۳) اگر f و g در x_0 پیوسته باشند، تابع fog نیز در x_0 پیوسته است و اگر $g(x) \neq 0$ باشد، $\dfrac{f}{g}$ نیز در x_0 پیوسته است.

مثال: هر تابع کسری گویای $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ روی دامنه تعریف یعنی برابر $Q(x) \neq 0$ پیوسته است. توابع قدر مطلق و $f(x)=\sin x$ و $f(x)=\cos x$ در تمام نقاط دامنه تعریف شان پیوسته اند.

۴) اگر f در نقطه x_0 پیوسته و در همسایگی آن مثبت باشد. $\sqrt{f}$ نیز در x_0 پیوسته است.

۵) اگر f نقطه x_0 و g در نقطه $y_0=f(x_0)$ پیوسته باشند، تابع مرکب $h=gof$ در x_0 پیوسته است.

نکته: اگر دو تابع $f(x)$, $g(x)$ دو تابع پیوسته باشد در این صورت تابع $f(x).g(x), g(x) \pm f(x)$ همواره پیوسته هستند و تابع $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ در نقاطی که $g(x) \neq 0$ است پیوسته است.

نکته مهم: اگر $f(x)$ در بازه $[a\ ,\ b]$ پیوسته باشد در این صورت:

۱- $f(x)$ قطعاً دارای ماکزیمم و مینیمم مطلق می‌باشد.(در مبحث کاربرد مشتق بحث می‌شود)

۲- اگر k عددی بین $f(a)$, $f(b)$ باشد در این صورت حداقل یک نقطه c بین b, a $(a \leq c \leq b)$ وجود دارد که f(c)=k.

۳- اگر $f(a)$, $f(b)$ مختلف العلامت باشند در این صورت حداقل یک نقطه مانند d بین b, a وجود دارد که f(d)=0 باشد.

(۱۶-۳) تعریف پیوستگی در یک بازه:

الف) تابع $f(x)$ در بازه (a,b) پیوسته است اگر در تمامی نقاط بین a تا b پیوسته باشد.

ب) تابع $f(x)$ در بازه $[a,b)$ پیوسته است اگر در تمامی نقاط بین a تا b پیوسته باشد و در a پیوستگی راست داشته باشد

ج) تابع $f(x)$ در بازه $(a,b]$ پیوسته است اگر در تمامی نقاط بین a تا b پیوسته باشد و در b پیوستگی چپ داشته باشد

د) تابع $f(x)$ در بازه $[a,b]$ پیوسته است اگر در تمامی نقاط بین a تا b پیوسته باشد و در a پیوستگی راست و در b پیوستگی چپ داشته باشد

نکته مهم: تابع $f(x)$ در x=a پیوستگی چپ دارد اگر $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$

تابع $f(x)$ در x=a پیوستگی راست دارد اگر $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$

مثال : آیا تابع $f(x)=\sqrt{-x^2+1}$ در $[-1,+1]$ پیوستگی چپ و راست دارد یا خیر؟

$$D_f=-x^۲+۱\ge ۰ \Rightarrow -۱\le x\le ۱$$

$$\lim_{x\to -۱^+} f(x)=\lim_{x\to -۱^+}\sqrt{-x^۲+۱}=۰=f(-۱)\Rightarrow$$ در $x=-1$ پیوستگی راست دارد

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}\sqrt{-x^۲+۱}=۰=f(۱)\Rightarrow$$ در $x=1$ پیوستگی چپ دارد

نکته مهم: بیشتر توابع در دامنه خود پیوسته می‌باشند ولی تابع جزء صحیح در نقاطی که عبارت داخل جزء صحیح یک عدد صحیح باشد ناپیوسته است بنابراین در بیشتر توابع می‌بایست برای تعیین پیوستگی در یک بازه نقاط مرزی دامنه آن را مورد بررسی قرار دهیم.

در توابع چند ضابطه ای نیز می‌بایست در اطراف نقاط مرزی پیوستگی تابع را بررسی کنیم.

مثال: آیا تابع روبرو در R پیوسته است.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-۱}{x+۱} & x\neq -۱\\ -۲ & x=-۱\end{cases}$$

تابع $\frac{x^۲-۱}{x+۱}$ در دامنه خود پیوسته است و همین طور تابع $f(-۱)=-۲$ و فقط کافی است که در $x=-۱$ تابع $f(x)$ پیوسته باشد.

$$\lim_{x\to -۱} f(x)=\lim_{x\to -۱}\frac{x^۲-۱}{x+۱}=\lim_{x\to -۱}\frac{(x+۱)(x-۱)}{x+۱}=-۲=f(-۱)\Rightarrow$$ تابع در R پیوسته است

تستهای طبقه‌بندی شده فصل سوم

رشته اقتصاد

۱- حد عبارت $\frac{[x]^2-[x^2]}{x^2-1}$ هنگامیکه x به سمت عدد یک میل کند، کدام است؟ (سراسری ۷۳)

۱) (۰،۱)　　۲) 1　　۳) 0　　۴) 2

۲- تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ مفروض است. کدام یک از عبارات زیر صحیح است؟ (سراسری ۷۳)

۱) f در x=0 ناپیوسته است
۲) f در x=0 پیوسته است.
۳) نقطه از سمت چپ پیوسته است.
۴) فقط از سمت راست پیوسته است.

۳- حد تابع $y=\frac{\sqrt{x+5}-3}{\sqrt{x}-2}$ هنگامیکه x به سمت عدد ۴ میل کند مساوی خواهد بود با : (سراسری ۷۴)

۱) $\frac{1}{3}$　　۲) 3　　۳) $\frac{2}{3}$　　۴) $\frac{4}{3}$

۴- به ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases}xe^x & x\leq 1\\ e^{2ax} & x>1\end{cases}$ در نقطه $x=1$ پیوسته است؟ (سراسری ۷۴)

۱) $\frac{1}{2}$　　۲) 3　　۳) 2　　۴) $\frac{1}{3}$

۵- به ازای چه مقادیری از a، b تابع $f(x)$ در $x=4$ پیوسته است؟ (سراسری ۷۵)

$$f(x)=\begin{cases}a[x-2]+b & x<4\\ [\frac{x}{3}]+b & x=4\\ \frac{x^2-16}{x-4} & x>4\end{cases}$$

۱) $a=-1$ و $b=6$
۲) $a=\frac{1}{2}$ و $b=7$
۳) $a=1$ و $b=7$
۴) $a=2$ و $b=6$

۶- طول نقطه گسستگی تابع f به ضابطه $y=\frac{x}{e^x-2}$ کدام است؟ (سراسری ۷۶)

۱) $\frac{1}{2}$　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) $\ln 2$

۷- حد راست تابع f با ضابطه $f(x)=\frac{x-[x]}{x-1}$ در $x=1$ کدام است؟ (سراسری ۷۶)

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۰　　۴) $+\infty$

۸- حد عبارت $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt[3]{x}}{Ln(2-x)}$ چقدر است؟ (سراسری ۷۶)

۱) $-\frac{5}{3}$　　۲) $-\frac{4}{3}$　　۳) $\frac{3}{4}$　　۴) $\frac{5}{3}$

۹- تابع حقیقی به معادله $f(x)=[\frac{1}{2}x]+[2x]$ در فاصله $1 \le x \le 3$ چند نقطه گسستگی دارد؟ (سراسری ۷۷)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۱ ۴) ۷

۱۰- حد راست $y=\dfrac{1-x}{1+4^{\frac{1}{x}}}$ در نقطه $x=0$ کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) ۱- ۲) 0 ۳) ۱ ۴) ۲

۱۱- حد عبارت $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}$ برابر است با : (سراسری ۷۷)

۱) 0 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

۱۲- اگر $f(x)=[\frac{1}{2}x]+x$ در فاصله $x\in R, 0\le x\le 3$ باشد، تعداد نقاط گسستگی آن برابر کدام است؟ (سراسری ۷۸)

۱) 0 ۲) 1 ۳) 2 ۴) 3

۱۳- در فاصله $[0,2]$ تابع $f(x)=[x](x-1)+1$ چند نقطه گسستگی دارد؟ (سراسری ۷۹)

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) 3

۱۴- $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^{x^2})$ کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) e^{-1} ۲) 0 ۳) 1 ۴) 3

۱۵- حاصل $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{2x+1}{2x+3})^{2x+1}$ برابر است با : (سراسری ۷۹)

۱) e^{-2} ۲) 0 ۳) e^{2} ۴) بی نهایت

۱۶- مقدار $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{5e^{\frac{1}{x}}-3e^{-\frac{1}{x}}}{2e^{\frac{1}{x}}+5e^{-\frac{1}{x}}}$ برابر است با : (سراسری ۸۰)

۱) $-\frac{3}{5}$ ۲) 0 ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $+\infty$

۱۷- حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{x+1}{x-1})^{x}$ کدام است؟ (سراسری ۸۱)

۱) ۱ ۲) e ۳) e^{-1} ۴) e^{2}

۱۸- مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{x-3}{x+1})^{x+2}$ کدام است؟ (سراسری ۸۲)

۱) $1-e^{2}$ ۲) $1-e$ ۳) e^{-4} ۴) e^{-2}

۱۹- مجموعه نقاط پیوستگی تابع $f:R\to R$ با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ کدام است؟ (سراسری ۸۲)

۱) $R-\{0\}$ ۲) R ۳) $R-\{1\}$ ۴) $R-\{-1\}$

۲۰- حد عبارت $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+1}{x-2})^{2x+1}$ برابر است با : (سراسری ۸۳)

۱) ۱ ۲) e ۳) e^{3} ۴) e^{6}

رشته مدیریت

۱- طول نقطه گسستگی تابع به معادله $y=\dfrac{x}{\sin x+\frac{۳}{۲}}$ کدام است؟ (سراسری ۷۳)

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) 0 ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) فاقد گسستگی

۲- حد عبارت $\dfrac{(x^{۲}-۱)\sin x}{۲x(x+۲)}$ هنگامی‌که x به سمت صفر میل می‌کند عبارت است از: (سراسری ۷۳)

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۳- حد راست تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+x & x\le ۱ \\ ۳x+۱ & x>۱ \end{cases}$ در نقطه x=1 کدام است ؟ (سراسری ۷۳)

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) فاقد حد است

۴-حد عبارت $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۱۰^{x}-e^{۲x}}{x}$ کدام است؟(سراسری ۷۳)

۱) $۱۰-۲e$ ۲) $۱۰-۲e^{۲}$ ۳) $\operatorname{Ln}۱۰-۲$ ۴) 0

۵- حد راست تابع $f(x)=\dfrac{۲x-۱}{۴^{\frac{۱}{x}}+۲}$ در نقطه $x=۰$ را بدست آورید. (سراسری ۷۴)

۱) ۲ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۶- حد عبارت $\lim\limits_{x\to ۰}(۱+x)^{\frac{۱}{۲x}}$ کدام است؟ (سراسری ۷۵)

۱) 1 ۲) $\sqrt{e}$ ۳) $e^{۲}$ ۴) ∞

۷- با فرض $x>0$ طول نقطه گسستگی تابع با ضابطه $y=\dfrac{x}{\ln|x|-۱}$ کدام است؟ (سراسری ۷۶)

۱) -1 ۲) 1 ۳) 2 ۴) e

۸- حد چپ تابع به ضابطه $f(x)=\dfrac{x-[x]}{x+۱}$ در x=1 کدام است؟ (سراسری ۷۶)

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) 0 ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) 1

۹- حد چپ تابعی به معادله $y=\dfrac{۲-x}{۱+۴^{\frac{۱}{x}}}$ در x=0 کدام است ؟ (سراسری ۷۷)

۱) -1 ۲) 0 ۳) 1 ۴) 2

۱۰- نقطه گسستگی تابع حقیقی به معادله $y=\dfrac{2+2x}{x-4^{\frac{1}{x}}}$ با کدام طول است؟ (سراسری ۷۷)

۱) $0\,,2$ ۲) $0,1$ ۳) $-1\,,1$ ۴) $-1\,,$

۱۱- مقدار $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!(2n)^2}{(n+1)!(n+2)}$ کدام است؟ (سراسری ۷۸)

۱) 0 ۲) 1 ۳) 4 ۴) ∞

۱۲- تعداد نقاط گسستگی تابع f با ضابطه $f(x)=[x]+x^2$ در فاصله $0 \le x < 5$ ، $x \in R$ کدام است؟ (سراسری ۷۸)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۳- حد چپ تابع به ضابطه $f(x)=\dfrac{x-[x]}{x+1}$ در x=1 کدام است ؟ (سراسری ۷۹)

۱) $-\dfrac{۱}{۲}$ ۲) 0 ۳) $\dfrac{۱}{۲}$ ۴) 1

۱۴- طول نقطه گسستگی تابع $y=\dfrac{x^2}{e^{x^2}-e^{2x}}$ کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) $1,2$ ۲) $0,2$ ۳) $0,-2$ ۴) $-1,-2$

۱۵- حد عبارت $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{۲^x - x^۲}{x-۲}$ کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) 0 ۲) 1 ۳) $۴Ln۲$ ۴) $۴(Ln۲-۱)$

۱۶- کدام مورد برای تابع حقیقی f به معادله $f(x)=2|x|+1$ نادرست است. (سراسری ۸۰)

۱) یک به یک ۲) همواره پیوسته ۳) زوج ۴) دارای حد صفر

۱۷- مقدار حد $\lim\limits_{x\to\infty} (۱+\dfrac{۱}{x^۲})^x$ کدام است؟ (سراسری ۸۱)

۱) e ۲) ∞ ۳) 1 ۴) $e^۲$

۱۸- اگر $f_n(x)=\dfrac{\sin(nx)}{n}$ برای هر x حقیقی و n=1,2,3,... باشد آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} f(x)$ کدام است(سراسری ۸۲)

۱) 0 ۲) 1 ۳) ∞ ۴) موجود نیست

۱۹- حاصل عبارت $\lim\limits_{x\to\infty} (\dfrac{x}{1+x})^{x^2}$ برابر است با: (سراسری ۸۲)

۱) 0 ۲) 1 ۳) e ۴) $\dfrac{۱}{e}$

رشته حسابداری

۱- مجموعه نقاط گسستگی تابع $y=\dfrac{x}{e^x+۲}$ کدام است؟ (سراسری ۷۳)

۱) $\{-۱\}$ ۲) $\{۰\}$ ۳) $\{۱\}$ ۴) ϕ

۲- به ازای کدام نقطه a تابع $f(x)=\begin{cases} ۲x+۱ & x<۱ \\ ax^۲+a & x\ge ۱ \end{cases}$ در $x=۱$ دارای حد است؟ (سراسری ۷۳)

۱) $\dfrac{۲}{۳}$ ۲) ۱ ۳) $\dfrac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۳- حد عبارت $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\sqrt{۱+x}-\sqrt{۱-x}}{۲x}$ کدام است؟ (سراسری ۷۳)

۱) $-\dfrac{۱}{۲}$ ۲) $\dfrac{۱}{۴}$ ۳) $\dfrac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۴) حد عبارت $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{3}{2x})^{x}$ کدام است؟ (سراسری ۷۳)

۱) $e^{-\frac{3}{2}}$ ۲) $e^{-\frac{2}{3}}$ ۳) $e^{\frac{2}{3}}$ ۴) 1

۵- حد چپ تابع $f(x)=\dfrac{x+2}{3^{-\frac{1}{x}}+1}$ در نقطه $x=0$ کدام است؟ (سراسری ۷۴)

۱) 2 ۲) 1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 0

۶- حد $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-4}{\sqrt{x^2+12}-4}$ کدام است؟ (سراسری ۷۴)

۱) 2 ۲) 1 ۳) صفر ۴) 4

۷- به ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases}ax^2+1 & x\le 1\\ 2ax+4 & x>1\end{cases}$ در $x=1$ پیوسته است؟ (سراسری ۷۴)

۱) -2 ۲) -3 ۳) 2 ۴) 1

۸- نقطه گسستگی تابع $y=\dfrac{x-1}{Lnx-2}$ کدام است؟ (سراسری ۷۵)

۱) e^{x} ۲) 2 ۳) e ۴) e^{2}

۹- حد عبارت $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^{2x}$ کدام است؟ (سراسری ۷۵)

۱) 1 ۲) e ۳) e^{-2} ۴) e^{-4}

۱۰- طول نقطه گسستگی تابع f به ضابطه $y=\dfrac{x^2}{e^x-3}$ کدام است؟ (سراسری ۷۶)

۱) 0 ۲) 1 ۳) 3 ۴) $Ln3$

۱۱- حد راست تابع f به ضابطه $f(x)=\dfrac{x-[x]}{x-3}$ در نقطه $x=3$ کدام است؟ (سراسری ۷۶)

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) $+\infty$

۱۲- حد عبارت $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{Ln(x+2)}{x+\sqrt[3]{x}}$ کدام است؟ (سراسری ۷۶)

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) 2

۱۳- تعداد نقاط گسستگی تابعی با ضابطه $y=\dfrac{x}{5-[x]}$ که در آن $0\le x\le 4$ کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) 2 ۲) 3 ۳) 4 ۴) 5

۱۴- مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x}{1+x})^{x^2}$ کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) 1 ۲) 0 ۳) $\frac{1}{e}$ ۴) e

۱۵- طول نقطه گسستگی تابع f به ضابطه $f(x)=[3x]+x^2$ با شرط $0\le x\le 1$ کدام است؟ (سراسری ۷۸)

۱) 1 ۲) $\frac{1}{3},\frac{2}{3}$ ۳) $1,0$ ۴) 0

۱۶- نقطه گسستگی تابع $y=\frac{۳^x-۱}{۴^x-۸}$ کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $Ln۲$ ۳) $۲Ln۲$ ۴) 0

۱۷- حد عبارت $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-۲x}$ برابر است با : (سراسری ۸۰)

۱) ∞ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) -۲

۱۸- حد تابع $y=(۱-\frac{۲}{x^۲})^x$ هنگامی که x به سمت بی‌نهایت میل کند برابر است با: (سراسری ۸۱)

۱) e ۲) ۱ ۳) $e^۲$ ۴) $۲e$

۱۹- مقدار حد عبارت $\lim\limits_{x\to ۶^+}\frac{[x]-۶}{x^۲-۳۶}$ برابر است با : (سراسری ۸۲)

۱) ۰ ۲) ∞ ۳) $-\infty$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

۲۰- حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}(e^x+۳x)^{\frac{۱}{x}}$ کدام است؟ (سراسری ۸۲)

۱) e ۲) $e^۲$ ۳) $e^۳$ ۴) $e^۴$

۲۱- حاصل $\lim\limits_{x\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{x^۲}\right)^x$ کدام است؟ (مدیریت ۸۴)

۱) ۱ ۲) e ۳) $\frac{۱}{e}$ ۴) $\frac{۱}{۲e}$

۲۲- حاصل $\lim\frac{۱+۲+۳+...+n}{C_n^۲}$ وقتی که $n\to\infty$ کدام است؟ (مدیریت ۸۴)

۱) ۰ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۲۳- طول نقطه انفصال نمودار تابع $f(x)=\frac{x-۲}{Ln(n+۲\sqrt{x})}$ کدام است؟ (مدیریت ۸۴)

۱) $+۲$ ۲) $-۱+\sqrt{۲}$ ۳) $۳+۲\sqrt{۲}$ ۴) $۳-۲\sqrt{۲}$

۲۴- حاصل $\lim\limits_{x\to -۲}\frac{x+\sqrt{۲-x}}{x^۲+۲x}$ کدام است؟ (حسابداری ۸۴)

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

۲۵- حد عبارت $\lim\frac{\sin^{-۱}۲x}{\tan^{-۱}x}$ وقتی که $x\to ۰$ کدام است؟ (اقتصاد ۸۴)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۶- به ازای کدام مقدار a حد تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} ax^۲+bx-۱ & x\geq ۲ \\ \frac{ax+۵}{bx-۱} & x<۲ \end{cases}$ در نقطه $x=۲$ برابر ۹ است؟

(حسابداری و مدیریت ۸۵)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۷- حاصل $\underset{x\to 0}{Lim}\left(1+\frac{3}{4}x\right)^{\frac{1}{2x}}$ کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ۸۵)

۱) $e^{\frac{3}{4}}$ ۲) $e^{\frac{4}{3}}$ ۳) $\sqrt[3]{e}$ ۴) $\sqrt[4]{e}$

۲۸- اگر $a-b=1$ و $b>0$ باشد حد تابع $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx-1 & x\geq 2 \\ \dfrac{ax+5}{bx-1} & x<2 \end{cases}$ در نقطه $x=2$ در صورت وجـود کدام است؟ (اقتصاد ۸۵)

۱) ۴ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۹

۲۹- حد عبارت $\underset{x\to\infty}{Lim}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{\frac{1}{2}x}$ کدام است؟ (اقتصاد ۸۵)

۱) $\sqrt[3]{e}$ ۲) $e^{\frac{3}{2}}$ ۳) $e^{\frac{2}{3}}$ ۴) $\sqrt{e}$

۳۰- حد عبارت $Ln\left(\frac{2-h}{2}\right)^{\frac{1}{h}}$ وقتی $h\to 0$ کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ۸۶)

۱) -1 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۳۱- حاصل $\lim(\frac{1+2+3...n}{n}-\frac{n}{2})$ کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ۸۶)

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

۳۲- حاصل $\lim(1+\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x}}$ کدام است؟ (اقتصاد ۸۶)

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) e ۴) $\frac{1}{e}$

پاسخ تشریحی تستهای طبقه‌بندی شده فصل سوم

رشته اقتصاد

۱- گزینه ۳ صحیح است.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{[x]^2-[x^2]}{x^2-1}=\frac{[1^+]^2-[1^{+2}]}{(1^+)^2-1}=\frac{1-1}{1^{+2}-1}=\frac{\text{مطلق } 0}{a}=0 \qquad \to 0<a<1$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{[x]^2-[x^2]}{x^2-1}=\frac{[1^-]^2-[1^{-2}]}{1^{-2}-1}=\frac{0-0}{1^{-2}-1}=\frac{\text{مطلق } 0}{a}=0 \qquad \to -1<a<0$$

چون عددی که از براکت خارج می‌شود بطور دقیق صفر و یا یک می‌شود. پس همیشه صورت کسر صفر دقیق یا صفر مطلق است ولی عدد مخرج در هر صورت عددی، نامشخص می‌باشد هر چند که نزدیک به صفر است اما صفر به حساب نمی‌آید و چون صفر تقسیم بر هر عدد برابر صفر می‌شود. حاصل حد صفر است.

۲- گزینه ۲ صحیح است.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1 \qquad f(0)=1$$

پس تابع همواره پیوسته است.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x}=1$$

۳- گزینه ۳ صحیح است.

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{\sqrt{x}-2}=$$ صورت و مخرج را در مزدوج خودشان ضرب می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}-2}{\sqrt{x}-2}\times\frac{\sqrt{x+5}+3}{\sqrt{x+5}+3}\times\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=\lim_{x\to 4}\frac{(x+5-9)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)\sqrt{x}+2}{(x-4)\sqrt{x+5}+3}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x+5}+3}=\frac{2+2}{3+3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

۴- گزینه ۱ صحیح است.

$$\lim_{x\to 1^+} e^{2ax}=e^{2a}$$

$$\lim_{x\to 1^-} xe^{x}=e \qquad \Rightarrow e^{2a}=e\Rightarrow 2a=1 \qquad a=\frac{1}{2}$$

$$f(1)=e$$

۵- گزینه ۳ صحیح است.

$$f(4)=[\frac{4}{3}]+b=1+b$$

$$\lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4^+}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim_{x\to 4^+}\frac{(x-4)(x+4)}{x-4}=\lim_{x\to 4^+} x+4=8$$

$$\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^-} a[x-2]+b=a[4-2]+b=a+b$$

$$1+b=8\Rightarrow b=7 \qquad \left.\begin{array}{l}a+b=8\\ b=7\end{array}\right\} a=1$$

۶- گزینه ۴ صحیح است.

ریشه مخرج می تواند نقطه گسستگی تابع باشد پس مقدار x را با مساوی قراردادن عبارت مخرج با صفر به دست می‌آوریم.

$e^x - ۲ = ۰ \Rightarrow e^x = ۲ \Rightarrow x = \ln ۲$

۷- گزینه ۱ صحیح است.

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim \frac{x-[x]}{x-۱} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{x-[۱^+]}{x-۱} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{x-۱}{x-۱} = ۱$$

۸- گزینه ۱ صحیح است.

$$\lim_{x\to ۱} \frac{x^۲ - \sqrt[۳]{x}}{\ln(۲-x)} = \frac{۰}{۰} \rightarrow$$ از قانون هوپیتال استفاده می کنیم.

$$\lim_{x\to ۱} \frac{۲x - \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}}{\frac{-۱}{۲-x}} = \frac{۲ - \frac{۱}{۳\sqrt{۱}}}{\frac{-۱}{۲-۱}} = \frac{\frac{۵}{۳}}{-۱} = -\frac{۵}{۳}$$

۹- گزینه ۱ صحیح است.

در حد فاصله $[۱,۳]$ تمام نقاطی که در عبارتهای $(\frac{۱}{۲}x)$ و یا $(۲x)$ یک عدد صحیح شوند به عنوان مجموعه نقاط ناپیوستگی به حساب می‌آیند به جز حد پایین بازه که در اینجا یک است.

$$\{\frac{۳}{۲}, ۲, \frac{۵}{۲}, ۳\}$$

۱۰- گزینه ۲ صحیح است.

$$\lim_{x\to ۰} \frac{۱-x}{۱+۴^{\frac{۱}{x}}} = \frac{۱-۰^+}{۱+۴^{\frac{۱}{۰^+}}} = \frac{۱}{۱+۴^{\infty}} = \frac{۱}{\infty} = ۰$$

۱۱- گزینه ۳ صحیح است.

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\sqrt{۲+x}-\sqrt{۲-x}}{x} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow[\text{ضرب می کنیم}]{\text{در مزدوج صورت}} \lim_{x\to ۰} \frac{\sqrt{۲+x}-\sqrt{۲-x}}{x} \times \frac{\sqrt{۲+x}+\sqrt{۲-x}}{\sqrt{۲+x}+\sqrt{۲-x}}$$

$$= \lim_{x\to ۰} \frac{۲+x-(۲-x)}{x(\sqrt{۲+x}+\sqrt{۲-x})} = \lim_{x\to ۰} \frac{۲x}{x(\sqrt{۲+x}+\sqrt{۲-x})} = \frac{۲}{\sqrt{۲}+\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۲- گزینه ۲ صحیح است.

در توابعی که براکتی هستند تنها در زمانی تابع گسسته است که داخل براکت یک عدد صحیح شود که البته نباید حد پایین بازه در نظر گرفته شده را محاسبه کرد که در اینجا عدد صفر است. ($[۰,۲]$). در عبارت $[\frac{۱}{۲}x]$ تنها عدد ۲ در بازه $[۰,۲]$ وجود دارد که داخل براکت را عدد صحیح کند.

۱۳- گزینه ۲ صحیح است.

با توجه به توضیح جواب سوال قبل اعداد ۱ و ۲ می توانند جوابگوی سوال باشند اما به دلیل آنکه عدد یک حاصل ضریب براکت را صفر می کند $(x-1)$ پس از این مجموعه خط می خورد و تنها عدد ۲ جواب سوال ما می باشد.

۱۴- گزینه ۳ صحیح است.

$$\underset{x\to ۰^+}{Lim}\, x^{x^۲} = \underset{x\to ۰^+}{Lim}\, x^{۰^{+۲}} = \underset{x\to ۰^+}{Lim}\, x^۰ = ۱$$

همانطور که می‌دانید هر عدد به توان صفر برابر یک است.

۱۵- گزینه ۱صحیح است.

$$\underset{x\to\infty}{Lim}\left(\frac{۲x+۱}{۲x+۳}\right)^{۲x+۱} = \underset{x\to\infty}{Lim}\left(\frac{۲x+۳-۲}{۲x+۳}\right)^{۲x+۱} = \underset{x\to\infty}{Lim}\left(\frac{۲x+۳}{۲x+۳}-\frac{۲}{۲x+۳}\right)^{۲x+۱}$$

$$\underset{x\to\infty}{Lim}\left(۱-\frac{۲}{۲x+۳}\right)^{۲x+۱} = \underset{x\to\infty}{Lim}\left(۱-\frac{۲}{۲x+۳}\right)^{۲x} \times \underset{x\to\infty}{Lim}\left(۱-\frac{۲}{۲x+۳}\right) = e^{-۲}\times ۱ = e^{-۲}$$

۱۶- گزینه ۳ صحیح است.

$$\underset{x\to ۰^+}{Lim}\frac{۵e^{\frac{۱}{x}}-۳e^{-\frac{۱}{x}}}{۲e^{\frac{۱}{x}}+۵e^{-\frac{۱}{x}}} \xrightarrow[x\to ۰^+ \Rightarrow t\to\infty]{\frac{۱}{x}=t} \underset{t\to\infty}{Lim}\frac{۵e^{t}-۳e^{-t}}{۲e^{t}+۵e^{-t}}$$

$$\underset{\substack{t\to\infty\\ M\to\infty}}{e^{t}} = M \Rightarrow \qquad \underset{M\to\infty}{Lim}\frac{۵M-\frac{۳}{M}}{۲M+\frac{۵}{M}} = \frac{۵}{۲}$$

۱۷- گزینه ۴ صحیح است.

$$\underset{x\to\infty}{Lim}\left(\frac{x+۱}{x-۱}\right)^{x} = \underset{x\to\infty}{Lim}\left(\frac{x-۱+۲}{x-۱}\right)^{x} = \underset{x\to\infty}{Lim}\left(۱+\frac{۲}{x-۱}\right)^{x-۱+۱}$$

$$\underset{x\to\infty}{Lim}\left(۱+\frac{۲}{x-۱}\right)^{x-۱}\times \underset{x\to\infty}{Lim}\left(۱+\frac{۲}{x-۱}\right) = e^{۲}\times ۱ = e^{۲}$$

۱۸- گزینه ۳ صحیح است.

$$\underset{x\to\infty}{Lim}\left(\frac{x-۳}{x+۱}\right)^{x+۲} = \underset{x\to\infty}{Lim}\left(\frac{x+۱-۴}{x+۱}\right)^{x+۲} = \underset{x\to\infty}{Lim}\left(۱-\frac{۴}{x+۱}\right)^{x+۲}$$

$$\underset{x\to\infty}{Lim}\left(۱-\frac{۴}{x+۱}\right)^{x+۱}\times \underset{x\to\infty}{Lim}\left(۱-\frac{۴}{x+۱}\right) = e^{-۴}\times ۱ = e^{-۴}$$

۱۹- گزینه ۱ صحیح است.

پیوستگی این تابع تنها در نقطه صفر بررسی می‌شود.

$$\underset{x\to ۰^+}{Lim} f(x) = \underset{x\to ۰^+}{Lim}\frac{|x|}{x} = \underset{x\to ۰^+}{Lim}\frac{x}{x} = ۱$$

$$\underset{x\to ۰^-}{Lim} f(x) = \underset{x\to ۰^-}{Lim}\frac{|x|}{x} = \underset{x\to ۰^-}{Lim}\frac{-x}{x} = -۱ \qquad f(۰) \neq \underset{x\to ۰^-}{Lim} f(x) \neq \underset{x\to ۰^+}{Lim} f(x)$$

$$F(۰) = ۰$$

نتیجه می گیریم این تابع در نقطه 0 پیوسته نیست.

۲۰- گزینه ۴ صحیح است.

$$\underset{x\to\infty}{Lim}\left(\frac{x+۱}{x-۲}\right)^{۲x+۱} = \underset{x\to\infty}{Lim}\left(\frac{x-۲+۳}{x-۲}\right)^{۲x+۱} =$$

$$\underset{x\to\infty}{Lim}\left(\left(۱+\frac{۳}{x-۲}\right)^{x-۲}\right)^{۲} \times \underset{x\to\infty}{Lim}\left(۱+\frac{۳}{x-۲}\right)^{۵} = (e^{۳})^{۲}\times ۱ = e^{۶}$$

رشته مدیریت

۱ـ گزینه ۴ صحیح است.

از جائیکه که sinx همواره بین [-1,1] می‌باشد رابطه $\sin x \neq -\frac{۳}{۲}$ به ازای کلیه اعداد حقیقی صحیح می‌باشد و بنابراین تابع

فاقد نقطه گسستگی است.

۲ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{(x^{۲}-۱)\sin x}{۲x(x+۲)}=\frac{۰}{۰}\Rightarrow \lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x^{۲}-۱}{۲(x+۲)}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to ۰}\frac{x^{۲}-۱}{۲(x+۲)}=۱\times\frac{-۱}{۲\times ۲}=-\frac{۱}{۴}$$

۳ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$\lim_{x\to ۱^{+}} f(x)=\lim_{x\to ۱^{+}} ۳x+۱=۳\times ۱+۱=۴$$

۴ـ گزینه ۳ صحیح است.

با استفاده از قانون هوپیتال : $Lim_{x\to ۰}\dfrac{۱۰^{x}Ln۱۰-۲e^{۲x}}{۱}=\dfrac{۱\cdot Ln۱۰-۲e^{۰}}{۱}=Ln۱۰-۲$

۵ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$\lim_{x\to ۰^{+}} f(x)=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{۲x-۱}{۴^{\frac{۱}{x}}+۲}=\frac{\lim_{x\to ۰^{+}} ۲x-۱}{\lim_{x\to ۰^{+}} ۴^{\frac{۱}{x}}+۲}=\frac{-۱}{۴^{+\infty}+۲}=۰$$

۶ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$\lim(۱+x)^{\frac{۱}{۲x}}=\lim[(۱+x)^{\frac{۱}{x}}]^{\frac{۱}{۲}}=[\lim(۱+x)^{\frac{۱}{x}}]^{\frac{۱}{۲}}=e^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{e}$$

یادآوری: $\lim_{f(x)\to ۰}[۱+f(x)]^{\frac{۱}{f(x)}}=e$

۷ـ گزینه ۴ صحیح است.

نقطه گسستگی: $\ln|x|-۱=۰\Rightarrow \ln|x|=۱\Rightarrow |x|=e\Rightarrow \begin{cases}x=e\\x=-e\end{cases}\Rightarrow x=e$ با فرض $x>0$

یادآوری: برای بررسی نقاط گسستگی توابع کسری نقاطی را که مخرج تابع صفر می‌شود را بررسی می‌کنیم.

۸ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$\lim_{x\to +۱^{-}}\frac{x-[x]}{x+۱}=\lim_{x\to +۱^{-}}\frac{x}{x+۱}=\frac{۱}{۱+۱}=\frac{۱}{۲}$$

$$x\to ۱^{-}: x<۱\Rightarrow ۰\le x<۱\Rightarrow [x]=۰$$

۹ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{۲-۲x}{۱+۴^{\frac{۱}{x}}}=\frac{۲-۰}{۱+۴^{-\infty}}=۲$$

۱۰ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$x-۴^{\frac{۱}{x}}=۰\Rightarrow x=۴^{\frac{۱}{x}}\Rightarrow x=۲$$

همچنین چون توان عدد ۴ عبارت $\frac{۱}{x}$ است و $\frac{۱}{x}$ به ازای x=0 تعریف نشده است بنابراین نقاط گسستگی عبارتند از 0,2.

۱۱ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!(۲n)^{۲}}{(n+۱)!(n+۲)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!(۴n^{۲})}{(n+۱)n!(n+۲)}=\lim_{n\to\infty}\frac{۴n^{۲}}{n^{۲}+۳n+۲}=\lim_{n\to\infty}\frac{۴n^{۲}}{n^{۲}}=۴$$

۱۲ـ گزینه ۴ صحیح است.

یادآوری: توابع جزء صحیح به ازای مقادیری از x که عبارت داخل جزء صحیح، یک عدد صحیح شود دارای گسستگی می‌باشند بنابراین در این باره ۴ نقطه دارای گسستگی می‌باشد و در مورد نقطه x=0 خواهیم داشت.

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=[x]+x^۲=\lim_{x\to} x^۲=۰=f(۰)$$

$$x>۰\Rightarrow \le x<۱\Rightarrow [x]=۰$$

۱۳ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$\lim_{x\to ۱^-}\frac{x-[x]}{x+۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{x}{x+۱}=\frac{۱}{۱+۱}=\frac{۱}{۲}$$

$$x<۱\Rightarrow ۰<x<۱\Rightarrow [x]=۰$$

۱۴ـ گزینه۲ صحیح است.

$$y=\frac{x^۲}{e^{x^۲}-e^{۲x}}\Rightarrow e^{x^۲}-e^{۲x}=۰\Rightarrow e^{x^۲}=e^{۲x}\Rightarrow x^۲=۲x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^۲-۲x=۰ \qquad x(x-۲)=۰\Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=۲ \end{cases}$$

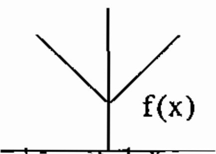
۱۵ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$\underset{x\to ۲}{Lim}\frac{۲^x-x^۲}{x-۲}=\frac{۲^۲-۲^۲}{۲-۲}=\frac{۰}{۰}$$

با استفاده از قانون هوپیتال: $\underset{x\to ۲}{Lim}\frac{۲xLn۲-۲x}{۱}=۴Ln۲-۴=۴(Ln۲-۱)$

۱۶ـ گزینه ۱ صحیح است.

قدر مطلق x(|x|) تابعی همواره پیوسته می‌باشد بنابراین f(x)=2|x|+1 نیز همواره پیوسته است. بنابراین در تمام نقاط (اعداد حقیقی) دارای حد می‌باشد (شکل تابع) همچنین در مورد آن داریم.



تابع زوج است $f(-x)=۲|-x|+۱=۲|x|+۱=f(x)$ و دامنه قرینه است $D_f:R$.

در مورد یک به یک بودن نیز با توجه به شکل می‌بینیم که تابع یک به یک نیست زیرا اگر خطی موازی محور x را بکشیم تابع را در دو نقطه قطع می‌کند.

۱۷ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$Lim(۱+\frac{۱}{x^۲})^x=\underset{x\to\infty}{Lim}\left[(۱+\frac{۱}{x^۲})^{x^۲}\right]^{\frac{۱}{x}}=\underset{x\to\infty}{Lim}(e)^{\frac{۱}{x}}=e^{\frac{۱}{\infty}}=e^۰=۱$$

۱۸ـ گزینه ۱ صحیح است.

تابع sin (nx) یک تابع کراندار است یعنی $|\sin(nx)|\le 1$ پس:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(nx)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}.\lim_{n\to\infty}\sin(nx)=۰\times\lim_{n\to\infty}\sin(nx)=۰$$

۱۹ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$\underset{x\to\infty}{Lim}(\frac{x}{۱+x})^{x^۲}-\underset{x\to\infty}{Lim}(\frac{۱+x}{x})^{-x^۲}=\underset{x\to\infty}{Lim}\left((۱+\frac{۱}{x})^x\right)^{-x}$$

$$\underset{x\to\infty}{Lim}\, e^{-x}=\underset{x\to\infty}{Lim}\frac{۱}{e^x}=\frac{۱}{e^\infty}=\frac{۱}{\infty}=۰$$

رشته حسابداری

۱- گزینه ۴ صحیح است.

مخرج کسر هیچگاه صفر نمی‌شود پس همیشه پیوسته است. $e^x+۲>۰\Rightarrow$

۲- گزینه ۳ صحیح است.

$$f(۱)=a+a=۲a \qquad \underset{x\to ۱^-}{Lim}f(x)=\underset{x\to ۱}{Lim}\,۲x+۱=۲+۱=۳ \quad \lim_{x\to ۱^+}f(x)=a(۱)^۲+a=۲a$$

$$۲a=۳\Rightarrow a=\frac{۳}{۲}$$

۳- گزینه ۳ صحیح است.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2x}\times\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1+x}{2x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{2x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\frac{1}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

۴- گزینه ۱ صحیح است.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{2x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-\frac{3}{2}}{x}\right)^x=e^{-\frac{3}{2}}$$

۵- گزینه ۴ صحیح است.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x+2}{3^{-\frac{1}{x}}+1}=\frac{0+2}{3^{-\frac{1}{0^-}}+1}=\frac{0+2}{3^{\infty}+1}=\frac{2}{\infty}=0$$

۶- گزینه ۴ صحیح است.

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{\sqrt{x^2+12}-4}\times\frac{\sqrt{x^2+12}+4}{\sqrt{x^2+12}+4}=\lim_{x\to 2}\frac{(2x-4)(\sqrt{x^2+12}+4)}{x^2+12-16}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)(\sqrt{x^2+12}+4)}{(x-2)(x+2)}=\frac{2(\sqrt{4+12}+4)}{4}=4$$

۷- گزینه ۲ صحیح است.

$$f_{(x=1)}=a\times 1^2+1=a+1$$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}2ax+4=2a+4\quad,\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}a(1)^2+1=a+1$$

$$a+1=2a+4\Rightarrow a=-3$$

۸- گزینه ۴ صحیح است.

برای بدست آوردن نقطه گسستگی باید ریشه مخرج کسر را بدست آورد.

$$\ln x-2=0\Rightarrow \ln x=2\Rightarrow x=e^2$$

۹- گزینه ۴ صحیح است.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x}\right)^{2x}=e^{-2\times 2}=e^{-4}$$

۱۰- گزینه ۴ صحیح است.

برای بدست آوردن نقطه گسستگی باید ریشه مخرج کسر را بدست آورد.

$$e^x-3=0\Rightarrow e^x=3\Rightarrow x=\ln 3$$

۱۱- گزینه ۱ صحیح است.

$$\lim_{x\to 3^+}f(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{x-[3^+]}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{x-3}{x-3}=1$$

۱۲- هیچ کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$\lim_{x\to -1}\frac{\ln(x+2)}{x+\sqrt[3]{x}}=\frac{\ln 1}{-1-1}=\frac{0}{-2}=0$$

۱۳- گزینه ۳ صحیح است.

$$5-[x]=0\Rightarrow 5=[x]\Rightarrow 5\le x<6$$

پس مخرج کسر هیچگاه با توجه به بازه‌ای که عنوان شده صفر نمی‌شود و تنها نقاط گسستگی این تابع اعداد صحیح در بازه

[۰,۴] است یعنی ۴,۳,۲,۱ (عدد اول از بازه به حساب نمی‌آید)

۱۴- گزینه ۲ صحیح است.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{۱+x}\right)^{x^{۲}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{۱+x}{x}\right)^{x^{-۲}}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(۱+\frac{۱}{x}\right)^{x}\right)^{-x}$$

$$\lim_{x\to\infty}e^{-x}=e^{-\infty}=\frac{۱}{e^{\infty}}=\frac{۱}{\infty}=۰$$

۱۵- گزینه ۲ صحیح است.

به تعداد اعدادی که در عبارت $۳x$ به اعداد صحیح تبدیل می‌شوند، نقطه گسسته در تابع خواهیم داشت.

۱۶- گزینه ۱صحیح است.

به ازای ریشه مخرج ما نقطه گسسته خواهیم داشت.

$$۴^{x}-۸=۰\Rightarrow ۴^{x}=۸$$

$$(۲^{۲})^{x}=۲^{۳}\Rightarrow ۲^{۲x}=۲^{۳}\Rightarrow ۲x=۳\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}$$

۱۷- گزینه ۳ صحیح است.

$$\lim_{x\to\infty}x.e^{-۲x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{۲x}}=\frac{\infty}{\infty}$$

با قانون هوپیتال خواهیم داشت: $\lim_{x\to\infty}\frac{۱}{۲e^{۲x}}=\frac{۱}{\infty}=۰$

۱۸- گزینه ۲ صحیح است.

$$\lim_{x\to\infty}\left(۱-\frac{۲}{x^{۲}}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(۱-\frac{۲}{x^{۲}}\right)^{x^{۲}}\right)^{\frac{۱}{x}}=\lim_{x\to\infty}(e^{۲})^{\frac{۱}{x}}=(e^{۲})^{\frac{۱}{\infty}}=e^{۰}=۱$$

۱۹- گزینه ۱ صحیح است.

$$\lim_{x\to ۶^{+}}\frac{[x]-۶}{x^{۲}-۳۶}=\frac{[۶^{+}]-۶}{(۶^{+})^{۲}-۳۶}=\frac{۶-۶}{۳۶^{+}-۳۶}=\frac{۰_{\text{مطلق}}}{۰_{\text{نسبی}}}=۰$$

۲۰- گزینه ۴ صحیح است.

$$\lim_{x\to ۰}(e^{x}+۳x)^{\frac{۱}{x}}=(۱+۰)^{\frac{۱}{۰}}=۱^{\infty}$$

$$y=(e^{x}+۳x)^{\frac{۱}{x}}\xrightarrow[\text{می گیریم}]{\text{از طرفین } Ln}Lny=Ln(e^{x}+۳x)^{\frac{۱}{x}}=\frac{۱}{x}Ln(e^{x}+۳x)$$

$$\lim_{x\to ۰}Lny=\lim_{x\to ۰}\frac{Ln(e^{x}+۳x)}{x}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow[\text{با استفاده از قانون.}]{\text{هوپیتال}}\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{e^{x}+۳}{e^{x}+۳x}}{۱}=\frac{۱+۳}{۱}=۴$$

$$\lim_{x\to ۰}Lny=۴\Rightarrow\lim_{x\to ۰}y=e^{۴}$$

۲۱- گزینه ۱ صحیح است.

$$\lim_{x\to\infty}\left[۱+\frac{۱}{x^{۲}}\right]^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(۱+\frac{۱}{x^{۲}}\right)^{x^{۲}}\right]^{\frac{۱}{x}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{۱}{x}}=e^{\frac{۱}{\infty}}=۱$$

۲۲- گزینه ۳ صحیح است.

$$\lim_{n\to x}\frac{۱+۲+۳...n}{Cn^{۲}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+۱)}{۲}}{\frac{n!}{۲!(n-۲)!}}=\lim_{n\to\infty}=\frac{n(n+۱)}{n(n-۱)}=۱$$

۲۳- گزینه ۴ صحیح است.

برای تعیین دامنه تابع $f(x)=\dfrac{x-۲}{\lim(n+۲\sqrt{x})}$ باید به موارد زیر توجه کنیم:

۱) در تابع رادیکالی $\sqrt{x} \Rightarrow x>۰$

۲) در تابع لگاریتمی $x+۲\sqrt{x}>۰ \Rightarrow x^۲-۴x<۰ \Rightarrow x\in(۰,۴)$

۳) در تابع کسری $\lim(x+۲\sqrt{x})\neq ۰ \Rightarrow \lim(x+۲\sqrt{x})\neq \lim ۱ \Rightarrow x+۲\sqrt{x}\neq ۱ \Rightarrow x\neq ۳\pm ۲\sqrt{۲}$

با توجه به سه مورد فوق مشخص است که نقطه گسستگی تابع فوق برابر است با $x=۳-۲\sqrt{۲}$ چون نقطه $x=۳+۲\sqrt{۲}$ در فاصله $(۰,۴)$ وجود ندارد.

۲۴- گزینه ۲ صحیح است.

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x+\sqrt{۲-x}}{x^۲+۲x}=\div \xrightarrow[\text{قاعده هوپیتال}]{\text{رفع ابهام}} \lim_{x\to -۲}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f'(x)}{g'(n)}=\lim\frac{۱+\dfrac{-۱}{۲\sqrt{۲-x}}}{۲x+۲}=\frac{-۳}{۸}$$

۲۵- گزینه ۳ صحیح است.

می دانیم که

۱) اگر $x\to ۰ \Rightarrow mx\to ۰ \Rightarrow \text{Arc}\sin(m(x))\simeq mx$

۲) اگر $x\to ۰ \Rightarrow mx\to ۰ \Rightarrow \text{Arc}\tan(m(x))\simeq mx$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۰}\frac{\text{Arc}\sin ۲x}{\text{Arc}\tan x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲x}{x}=۲$$

۲۶- گزینه ۲ صحیح است.

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^-} f(x)=۹$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۲^+}=\lim\limits_{x\to ۲^+}(ax^۲+bx-۱)=۹\Rightarrow ۴a+۲b-۱=۹\Rightarrow ۴a+۲b=۱۰\\ \lim\limits_{x\to ۲^-}f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-}(\dfrac{ax+۵}{bx-۱})=۹\Rightarrow \dfrac{۲a+۵}{۲b-۱}=۹\Rightarrow ۲a-۱۸b=-۱۴\end{array}\right| \begin{cases}۲a-b=۵\\ a-۹=-۱۴\end{cases}\Rightarrow a=۲$$

۲۷- گزینه ۴ صحیح است.

$$\lim_{x\to ۰}(۱+ax)^{\frac{b}{x}}=e^{ab}\Rightarrow \lim_{x\to ۰}(۱+\frac{۳}{۴}x)^{\frac{۱}{۳x}}=e^{\frac{۱}{۴}}=\sqrt[۴]{e}$$

۲۸- گزینه ۴ صحیح است.

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^-} f(x)\Rightarrow ۴a+۲b-۱=\frac{۴a+۵}{۲b-۱}$$

چون مساله ذکر کرده است $a-b=۱$ بنابراین $a=b+۱$ در نتیجه خواهیم داشت:

$$۴b+b+۲b-۱=\frac{۲+۲b+۵}{۲b-۱}\Rightarrow ۱۲b^۲-۲b-۱۰=۰ \xrightarrow{\text{چون مجموعه ضرایب صفر است}} b=۱, b=-\frac{۱۰}{۱۲}$$

به مراجعه به فرض مساله مبنی بر $b>۰$ روشن است که $a=۲, b=۱ \Leftarrow \lim\limits_{x\to ۲}(ax^۲+bx-۱)=۹$

۲۹- گزینه ۱ صحیح است.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{cx+a}\right)^{bx+f}=e^{\frac{ab}{c}}\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{\frac{1}{2x}}=e^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{e}$$

۳۰- گزینه ۲ صحیح است.

$$\lim_{h\to 0}\ln\left(\frac{2-h}{2}\right)^{\frac{1}{h}}=\lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{h}{2}\right)^{\frac{1}{h}}=\ln e^{\frac{-1}{2}}=-\frac{1}{2}$$

۳۱- گزینه ۱ صحیح است.

$$\lim\left[\frac{1+2+3+\ldots+n}{2n+4}-\frac{n}{2}\right]=\lim_{h\to\infty}\left[\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n+4}-\frac{n}{2}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n(n+1)-n(n+4)}{2(n+4)}\right]=\lim_{n\to\infty}=\frac{3n}{2n+8}=\frac{-3}{2}$$

۳۲- فاقد گزینه صحیح است.

می دانیم $\lim\frac{\sin x}{x}=1\Rightarrow\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=2^{+\infty}=+\infty$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=2^{-\infty}=0$$

چون به چپ و راست تابع در نقطه $x=0$ با هم برابر نیستند بنابراین حد وجود ندارد.

فصل چهارم

مشتق و دیفرانسیل

(۴ - ۱) مشتق:

تعریف مشتق: میزان تغییرات متغیر وابسته (معمولاً y) به ازای تغییرات جزئی متغیر مستقل معمولاً x را مشتق تابع $f(x)$ گویند به عبارت دیگر:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)}{\Delta x}=f'(x)=\frac{dy}{dx}$$

تعریف مشتق در یک نقطه:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{x_2\to x_1}\frac{f(x_2-x_1)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

نکته مهم: تابع $f(x)$ درنقطه x_0 مشتق پذیر است هر گاه تابع $f(x)$ پیوسته باشد این قاعده در مورد مشتقات مراتب بالاتر نیز صادق است یعنی‌تابع $f^n(x)$ درنقطه x_0 وجود دارد هرگاه‌تابع $f^{n-1}(x)$ و $f^n(x)$ در x_0 پیوسته باشند به عبارت دیگر پیوستگی در یک نقطه شرط لازم برای مشتق پذیری است و نه شرط کافی بنابراین اگر تابعی در $x=a$ مشتق پذیر باشد در $x=a$ پیوسته است و بر عکس آن الزاماً صادق نیست..

تذکر مهم: برای محاسبه مشتق توابع دو روش وجود دارد:

۱) محاسبه مشتق با استفاده از فرمول تعریف مشتق که عملی طولانی و در مواردی بسیار مشکل است. معمولاً محاسبه مشتق توابع براکتی (جزء صحیح) و قدرمطلق از راه تعریف مشتق راحت تر است.

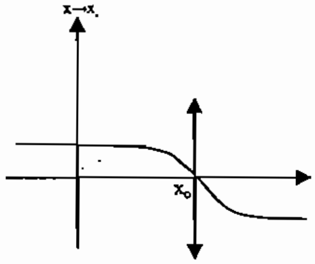
۲) روش دیگر آن است که از طریق فرمولهای مشتق گیری که دیگران از روش اول به دست آورده اند آنها فرمولها را حفظ و در موارد لزوم از آنها استفاده می کنیم.

(۴-۲) نقاطی که مشتق در آنها وجود ندارد:

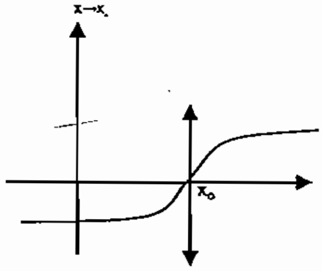
چندین حالت است که تابع f در x_0 مشتق پذیر نیست.

I) وقتی که عدد مشتق در x_0 بی نهایت است یعنی $-\infty$ یا $+\infty$ = $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ حد، در این صورت تابع f در x_0 مشتق ندارد و مماس بر منحنی در این نقطه موازی محور y هاست.

حد $f(x)=-\infty$ $_{x\to x_0}$



حد $f(x)=+\infty$ $_{x\to x_0}$

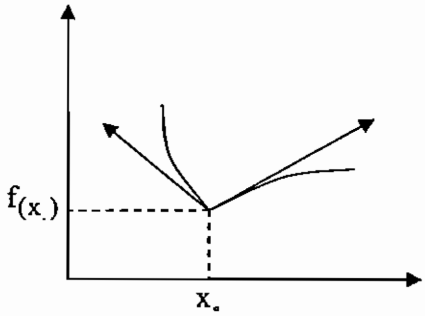


مثال: تابع $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ در نقطه $x_\circ=1$ مشتق پذیر نیست، زیرا:

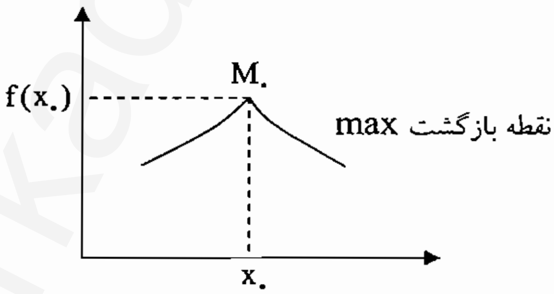
$$\lim_{x\to x_\circ}\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-1}-0}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=+\infty$$

II) وقتی که عدد مشتق راست در نقطه $x_\circ$ (ℓ) با عدد مشتق چپ در این نقطه $(\ell)'$ نامساوی نیستند.

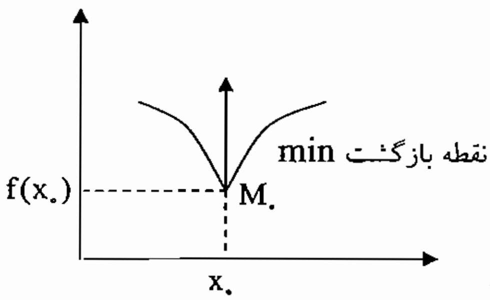
الف) اگر ℓ و ℓ' بی نهایت نباشند منحنی (C) نمایش تابع f در نقطه $x_\circ$ دارای دو نیم مماس است. نیم مماس راست و نیم مماس چپ در این جا نقطه $x_\circ$ را نقطه زاویه دار می نامند.



ب) اگر ℓ و ℓ' بی نهایت باشند منحنی (C) نمایش تابع f در نقطه $x_\circ$ دارای مماس موازی محور y هاست مانند شکلهای زیر، نقطه $M_\circ$ را نقطه بازگشت منحنی می نامند.



(مشتق راست $\ell'=-\infty$ و مشتق چپ $\ell'=+\infty$)



(مشتق چپ $\ell'=-\infty$ و مشتق راست $\ell=+\infty$)

III) وقتی که نسبت $\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}$ حد ندارد (حد آن نه یک عدد محدود است و نه بی نهایت و حد چپ و راست هم ندارد)

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ **، در نقطه $x_\circ=0$ مشتق پذیر نیست، زیرا:**

$$\lim_{x\to x_\circ}\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim \sin\frac{1}{x}$$ وجود ندارد $\Leftarrow$ مشتق پذیر نیست

قضیه: اگر f در $x_\circ$ مشتق پذیر باشد، f در نقطه $x_\circ$ پیوسته است.

(عکس این قضیه درست نیست یعنی ممکن است که تابع در یک نقطه پیوسته باشد ولی در آن نقطه مشتق پذیر نباشد.)

(۴-۳) قواعد مشتق گیری:

۱) $f(x)=k\Rightarrow f'(x)=0$ ۲) $f(x)=ax^n\Rightarrow f'(x)=nax^{n-1}$

اگر $g(x)=u$, $h(x)=v$ باشد و u,v مشتق پذیر باشند خواهیم داشت:

۳) $f(x)=u\pm v\Rightarrow f'(x)=u'\pm v'$ ۴) $f(x)=u.v\Rightarrow f'(x)=u'v+v'u$ (مشتق حاصلضرب دو تابع)

۵) $f(x)=\frac{u}{v}\Rightarrow f(x)=\frac{u'v-v'u}{v^2}$ (مشتق خارج قسمت دو تابع)

۶) مشتق تابع مرکب: اگر $g(x), f(x)$ هر دو مشتق پذیر باشند در این صورت:

$$(fog)'(x) = f'(g(x)).g'(x)$$

$$\text{I)}\ (gof)'(x) = g'(y)\times f'(x)\ ,\quad y = f(x)$$

$$\text{II)}\ (fog)'(x) = f'(y)\times g'(x)\ ,\quad y = f(x) \Rightarrow$$

۷) $f(x) = au^n \Rightarrow f'(x) = na.u'.u^{n-1}$

مثال:

$$۱)\ f(x) = \frac{۲x^۲ + x}{x+۱} \Rightarrow f'(x) = \frac{(۴x+۱)(x+۱) - (۲x^۲ + x)}{(x+۱)^۲} = \frac{۲x^۲ + ۴x + ۱}{(x+۱)^۲}$$

$$۲)\ f(x) = \sqrt[۳]{x^۲ + ۲x} \Rightarrow f(x) = (x^۲ + ۲x)^{\frac{۱}{۳}} \Rightarrow f'(x) = \frac{۱}{۳}(۲x+۲)(x^۲+۲x)^{\frac{۱}{۳}-۱} = \frac{۲}{۳}(x+۱)(x^۲+۲x)^{-\frac{۲}{۳}}$$

$$۳)\ f(x) = \frac{۱}{\sqrt{(x-۱)^۳}} \Rightarrow f(x) = (x-۱)^{-\frac{۳}{۲}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{۳}{۲}(x-۱)^{-\frac{۵}{۲}}$$

مثال: مقدار b,a را بدست آورید به شرط آنکه $f'(x)$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} bx^۲ + ۲x + a & x \geq ۱ \\ x^۲ - ۱ & x < ۱ \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} ۲bx + ۲ & x \geq ۱ \\ ۲x & x < ۱ \end{cases}$$

شرط مشتق پذیری

پیوستگی $f(x)$ است

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} bx^۲ + ۲x + a = b + a + ۲ \\ \lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} x^۲ - ۱ = ۰ \end{cases}$$

پیوستگی $f'(x)$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} \lim_{n\to ۱^+} f(x) = \lim_{n\to ۱^+} ۲bx + ۲ = ۲b + ۲ \\ \lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} ۲x = ۲ \end{cases}\right\} \Rightarrow ۲b + ۲ = ۲ \Rightarrow b = ۰$$

$$\Rightarrow a = -۲$$

۸)

$$f(x) = \sqrt[m]{u^n} \Rightarrow f'(x) = \frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$$

۹) مشتق توابع لگاریتمی

$a > ۰, a \neq ۱$

$$f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \frac{۱}{x}\log_a^e \text{ ، } f(x) = \log_a^u \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{u}\log_a^e = \frac{u'}{u}\times\frac{۱}{\ln a}$$

حالت خاص: $f(x) = \ln x (\ln x = \log_e^x) \Rightarrow f'(x) = \frac{۱}{x}$ ، $f(x) = \ln^u \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{u}$

۱۰) مشتق توابع نمایی

$$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x Lna, f(x) = a^u \Rightarrow f'(x) = u'a^u \ln a$$

حالت خاص: $f(x) = e^x \Rightarrow f(x) = e^x$ و $f(x) = e^u \Rightarrow f'(x) = u'e^u$

۱۱) مشتق تابع $f(x) = u^v$: در این نوع توابع یکبار پایه و یک بار توان (نما) را به عنوان عبارت ثابت در نظر گرفته و از قسمت دیگر آن مانند توابع نمایی و جبری مشتق گرفته و با هم جمع می‌کنیم. بطور کلی $f'(x)$ برابر خواهد بود با:

$$f(x) = u^v \Rightarrow f'(x) = v.u'.u^{V-۱} + v'u^v \ln^u = u^v\left[v'\ln^u + \frac{vu'}{u}\right]$$

مثال: مشتق عبارت زیر را بدست آورید.

۱) $f(x)=x\log(x^{۲}-۱)\Rightarrow f'(x)=\log(x^{۲}-۱)+\frac{۲x}{x^{۲}-۱}\log(x^{۲}-۱)$

۲) $f(x)=e^{\sqrt{۲x}}\Rightarrow f'(x)=\frac{۲}{۲\sqrt{۲x}}e^{\sqrt{۲x}}=\frac{e^{\sqrt{۲x}}}{\sqrt{۲x}}$

۳) $f(x)=x^{x^{۲}}\Rightarrow f'(x)=x^{۲}.x^{x^{۲}-۱}+۲x.x^{x^{۲}}\ln x=x^{x^{۲}+۱}+۲x^{x^{۲}+۱}\ln x=x^{x^{۲}+۱}(۱+۲\ln x)$

نکته: اگر بخواهیم از تابعی که شامل قدر مطلق و یا جزء صحیح باشد مشتق بگیریم بهتر است ابتدا آن را بصورت چند ضابطه تبدیل کرده و سپس از آن مشتق بگیریم زیرا این گونه توابع در تمام دامنه خود مشتق پذیر نیستند.

مشتق توابع مثلثاتی

$f(x)=\sin x\Rightarrow f'(x)=\cos x, f(x)=\sin u\Rightarrow f'(x)=u'\cos u$

$f(x)=\cos x\Rightarrow f'(x)=-\sin x, f(x)=\cos u\Rightarrow f'(x)=-u'\sin u$

$f(x)=\tan x\Rightarrow f'(x)=۱+\tan^{۲}x=\frac{۱}{\cos^{۲}x}=\sec^{۲}x$

$f(x)=\tan u\Rightarrow f'(x)=u'(۱+\tan^{۲}u)=\frac{u'}{\cos^{۲}u}=u'\sec^{۲}u$

$f(x)=\cot x\Rightarrow f'(x)=-(۱+\cot^{۲}x)=\frac{-۱}{\sin^{۲}x}=-\csc^{۲}x$

$f(x)=\cot u\Rightarrow f'(x)=-u'(۱+\cot^{۲}u)=\frac{-u'}{\sin^{۲}u}=-u'\csc^{۲}u$

$f(x)=\sec x\Rightarrow f'(x)=\tan x\sec x\Rightarrow f(x)=\sec u\Rightarrow f'(x)=u'\tan u\sec u$

$f(x)=\csc x\Rightarrow f'(x)=-\cot x\csc x, f(x)=\csc u\Rightarrow f'(x)=-u'\cot u\csc u$

(۴-۴) مشتق روی یک فاصله – تابع مشتق:

تعریف: می گوییم تابع f روی فاصله $[x,b]$ مشتق پذیر است. هرگاه

اولاً: $f'(x_{\circ})$ برای هر $x_{\circ}\in]a,b[$ وجود داشته باشد.

ثانیاً: f در a از طرف راست و در b از طرف چپ مشتق پذیر باشد.

در این صورت می توان تابع مشتق را به صورت زیر تعریف کرد:

$$f':[a,b]\to R$$
$$x\xrightarrow{f'}f'(x)$$

مثال: تابع $f(x)=\sin x$ روی $[\circ,۲\pi]$ مشتق پذیر است و تابع مشتق آن عبارت است از:

$$f'(x)=\cos x$$

زیرا:

$$=\frac{f(x)-f(x_{\circ})}{x-x_{\circ}}=\frac{\sin x-\sin x_{\circ}}{x-x_{\circ}}=\frac{۲\sin\frac{x-x_{\circ}}{۲}\cos\left(\frac{x+x_{\circ}}{۲}\right)}{x-x_{\circ}}$$

$$=\sin\frac{\frac{x-x_{\circ}}{۲}}{\frac{x-x_{\circ}}{۲}}\times\cos\frac{x+x_{\circ}}{۲}$$

در حد، جمله اول حاصلضرب به سمت یک میل می کند. بنابراین داریم:

$$\forall x_{\circ}\in[\circ,۲\pi] \quad \text{و} \quad \underset{x\to x_{\circ}}{\text{حد}}\ \frac{f(x)-f(x_{\circ})}{x-x_{\circ}}=\cos x_{\circ}$$

نکته مربوط به مشتق توابع مثلثاتی:

$$* \quad y = Arc\ \sin\ u \to y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$y = Arc\ \cos\ u \to y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$y = Arc\ \tan u \to y' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$y = Arc\ \cot\ u \to y' = \frac{-u'}{1+u^2}$$

مثال:

$$1)\ f(x) = \frac{\tan x}{\cos x} \Rightarrow f(x) = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} \times \cos x - (-\sin x)\tan x}{\cos^2 x} = \frac{\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin^2 x}{\cos x}}{\cos^2 x} = \frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$2)\ f(x) = \sin^2(x^2+1) \Rightarrow f'(x) = 2\cos(x^2+1)(\sin(x^2+1))2x = 2x\sin[2(x^2+1)]$$

مشتق توابع معکوس:

در صورتی که مشتق تابع f(x) موجود باشد. مشتق تابع معکوس f(x) یعنی $(f^{-1})'(x)$ برابر خواهد بود با عکس مشتق f(x) یعنی $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(x)}$.

$$y'_x = \frac{dy}{dx} \quad , \quad x'y = \frac{dx}{dy} \Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'y} \quad , \quad x'y = \frac{1}{y'x}$$

مثال: اگر $f(y) = y + 2y^3 - \frac{1}{3}y^6$ باشد f(x) معکوس f(y) باشد. $f'(x)$ چه مقدار خواهد شد.

$$f'(x) = \frac{1}{f'(y)} \Rightarrow f'(y) = 1 + 6y^2 - 2y^5 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+6y^3-2y^5}$$

مشتق توابع ضمنی:

توابع ضمنی توابع هستند که در آن نتوان تابع را بر حسب یکی از متغیرها (معمولاً y) مرتب کرد برای مشتق گیری از این توابع به روش زیر استفاده می‌کنیم.

ابتدا کل عبارت را به یک طرف تساوی برده و سپس از فرمول روبرو استفاده می‌شود.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}} \qquad \to y' = -\frac{f'x}{f'y}$$

یادآوری: $\frac{dy}{dx}$ مشتق y نسبت به x می‌باشد.

$\Leftarrow \frac{df}{dx}$ به معنی این است که تابع را نسبت به x مشتق می‌گیریم و با سایر عبارتها مانند مقادیر ثابت عمل میکنیم.

مثال:

$$y^5x-4x^2-5y=3xy-y^2x^2$$

$$y^5x-4x^2-5y-3xy+y^2x^2=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{-(y^5-8x-3y+2y^2x)}{5xy^4-5-3x+2x^2y}$$

نکته: در صورتی که $f(x,y)=0$ مشتق تابع ضمنی برابر است با: $\frac{\delta y}{\delta x}=-\frac{f'(x)}{f'(y)}$

در صورتیکه $f(x,y,z)=0$ مشتق تابع ضمنی برابر است با: $\frac{\delta z}{\delta x}=-\frac{f'(x)}{f'(z)}$

مشتق مراتب بالاتر:

در بعضی مواقع می‌بایست از یک تابع چندین بار مشتق گرفته شود که این مشتق گیری متوالی را به وسیله $f^n(x)$ یا $\frac{d^ny}{dx^n}$ نمایش می‌دهند.

☆ قواعد مشتق گیری مراتب بالاتر از یک همانند مشتق گیری مرتبه اول است.

نکته مربوط به مشتق مراتب بالاتر:

$$y=\sin x\Rightarrow y^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$y=e^u\Rightarrow y^{(n)}=(u')^n e^u$$

$$y=\frac{1}{1-x}\Rightarrow y^{(n)}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

مشتقات نسبی یا جزئی تابع دو متغیره:

تابع دو متغیره به صورت کلی $z=f(x,y)$ می باشد که دارای دو متغیر مستقل x و y و یک تابع z می باشد.

مشتقات نسبی یا جزئی مرتبه اول تابع دو متغیره به شرح زیر است:

۱- مشتق نسبی نسبت x

برای این منظور y را ثابت فرض می کنیم و مشتق را نسبت به x حساب می کنیم.

$$z'_x=f'_x=\frac{\delta z}{\delta x}=\frac{\delta f}{\delta x}$$

۲- مشتق نسبی نسبت به y

برای این منظور x را ثابت فرض می کنیم و مشتق را نسبت به y حساب می کنیم.

$$z'_y=f'_y=\frac{\delta z}{\delta y}=\frac{\delta f}{\delta y}$$

مثال: مشتقات نسبی تابع دو متغیره زیر را حساب کنید:

$$z=f(x,y)=5x^2y^2-3x\cos y+3y-4$$

$$\left[f'_x=z'_x=10xy^2-3\cos y\,,\quad f'_y=z'_y=10x^2y^2-3x\sin y+3\right.$$

مشتق تابع قدرمطلق:

تابع قدرمطلق $y=|u|$ را در نظر می گیریم مشتق این تابع از فرمول زیر به دست می آید:

$$y=|U| \qquad y'=\frac{U}{|U|}U'$$

مثال:

$$y=\left|x^{3}-4x\right| \rightarrow y'=\frac{x^{3}-4x}{\left|x^{3}-4x\right|}\times\left(3x^{2}-4\right)$$

در نقاط $x=\pm 2$ و $x=0$ و مشتق ندارد، چون مخرج کسر صفر می شود.

مثال:

$$f(x)=\sin x \Rightarrow f'(x)=\cos x \Rightarrow f''(x)=-\sin x \Rightarrow f'''(x)=-\cos x \Rightarrow f^{(4)}(x)=\sin x$$

$$f(x)=x^{5}+2x^{3}+1 \Rightarrow f'(x)=5x^{4}+6x^{2} \Rightarrow f''(x)=20x^{3}+12x \Rightarrow f'''(x)=60x^{2}+12 \Rightarrow f^{(4)}(x)=120x$$

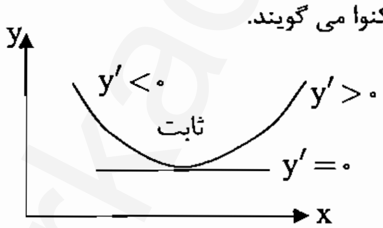
کاربردهای مشتق

نکته مربوط به کاربرد مشتق در تعیین تابع صعودی و تابع نزولی و تابع یکنوا:

تابع $y=f(x)$ را در نظر می گیریم. اگر در شاخه ای از نمودار این تابع با عبور از هر نقطه به نقطه دیگر x و y نقاط با هم زیاد و یا با هم کم می شوند به آن شاخه صعودی می گویند. در شاخه صعودی مشتق تابع مثبت است.

اگر در شاخه ای از نمودار تابع با عبور از هر نقطه به نقطهٔ دیگر x و y نقاط در خلاف جهت هم تغییر کنند به آن شاخه نزولی می گویند. در شاخه نزولی مشتق منفی است.

در نقطه ای که مشتق برابر صفر است نقطهٔ ثابت نام دارد. مماس بر منحنی تابع در این نقطه افقی است. اگر تابعی همواره صعودی و یا نزولی و یا ثابت باشد به آن تابع یکنوا می گویند.



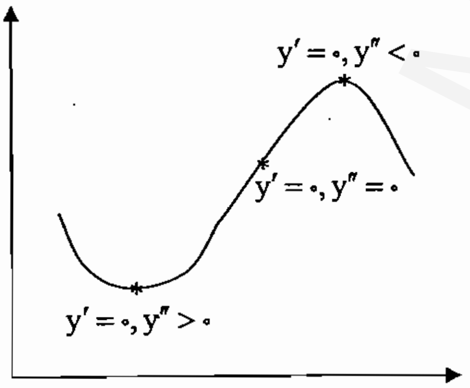
$$y'=\begin{cases} >0 & \text{صعودی} \\ <0 & \text{نزولی} \\ =0 & \text{ثابت} \end{cases}$$

شاخه صعودی : $y'=Lim\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{+}{+}$ یا $\dfrac{-}{-}=+>0$

شاخه نزولی : $y'=Lim\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{-}{+}$ یا $\dfrac{+}{-}=-<0$

نقاط بحرانی و نقاط اکسترمم و نقاط ماکزیمم و مینیمم در توابع یک متغیره:

تابع $y=f(x)$ را در نظر می گیریم و فرض می کنیم نمودار به شرح زیر می باشد:



نقاط بحرانی

$y'=0$
- $y''>0$ min
- $y''<0$ max

اکسترمم

- $y''=0$ نیاز به بررسی بیشتری دارد و از این طریق معلوم نیست.

نکته ۱: نقطهٔ بحرانی به نقطه ای می گویند که مشتق تابع در آن نقطه یا صفر باشد و یا وجود نداشته باشد.

نکته ۲: نقطهٔ بحرانی که در آن $y'=0$, $y''>0$ باشد نقطهٔ مینیمم است.

مثال: نقاط بحرانی را پیدا کنید و ثانیاً نوع نقاط بحرانی را هم مشخص کنید.

$$y=x^2-4x+2 \quad \to y'=2x-4=0 \to x=2 \quad , \quad y=-2 \quad A\left|\begin{matrix}2\\-1\end{matrix}\right. \qquad y''=2>0$$

min

نکته ۳: نقطهٔ بحرانی که در آن $y'=0$, $y''<0$ باشد نقطه ماکزیمم است.

نکته ۴: نقطهٔ بحرانی که در آن $y'=0$, $y''=0$ باشد می تواند مینیمم یا ماکزیمم و یا هیچکدام باشد.

برای تشخیص آن باید بررسی بیشتری به شرح زیر نمود:

اگر در نقطه ای به طول x_0 مشتقات مرتبه اول و دوم صفر شوند در ضابطه تابع به x مقادیر کمی کمتر و یا کمی بیشتر از x_0 می دهیم و مقادیر تابع به دست آمده را با $f(x_0)$ مقایسه می کنیم اگر هر دو مقدار از $f(x_0)$ کمتر شوند نقطه بحرانی ماکزیمم و اگر هر دو مقدار از $f(x_0)$ بیشتر شوند نقطه بحرانی مینیمم و اگر مقادیر به دست آمده یکی کمتر و دیگر بیشتر از $f(x_0)$ شود نقطـهٔ بحرانی نه ماکزیمم و نه مینیمم می باشد.

نکته ۵: نقاط ماکزیمم و مینیمم فوق نسبی می باشد. یعنی در مجاورت خود به طور نسبی ماکزیمم و یـا مینـیمم مـی باشـند. برای به دست آوردن نقاط ماکزیمم و یا مینیمم مطلق باید مقادیر تابع را در نقاطی که مشتق اول صفر اسـت یـا مـشتق اول وجـود ندارد. (از جمله در نقاط انتهای دامنه) حساب کرد و آنها را با هم مقایسه نمود تا ماکزیمم و مینیمم مطلق به دست آیند.

مثال:

$$1)\ f(x)=x^4-x^3+2 \Rightarrow f'(x)=4x^3-3x^2 \qquad f'(x)=0 \Rightarrow 4x^3-3x^2=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2=0 & x=0 \\ 4x-3=0 & x=\frac{3}{4} \end{cases}$$

		0		$3/4$	
x^2	$+$		$+$		$+$
$4x-3$	$-$		$-$		$+$
$f'(x)$	$-$		$-$		$+$
	$\searrow$		$\searrow$	*Min*	$\nearrow$

$x=0$ میزان $f'(x)$ تغییر علامت نداده نه Max ونه Min است.

$x=\frac{3}{4}$ علامت $f'(x)$ از منفی به مثبت تغییر کرده بنابراین Min است.

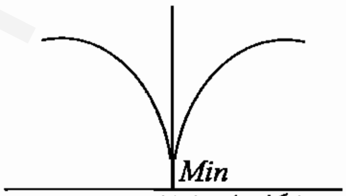
$$2)\ f(x)=x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\neq 0 \qquad D_{f'}=R-\{0\}$$

در این حالت با اینکه مشتق تابع همواره برخلاف صفر است چون در نقطهٔ $x=0$ ، $f'(x)$ تعریف نشده است.

بنابراین در اطراف $x=0$ صفر $f'(x)$ را بررسی می‌کنیم.

و شکل تابع به صورت زیر خواهد بود.

x		0	
f'	$-$	∞	$+$
	$\searrow$	*Min*	$\nearrow$



شکل تابع $f(x)$

مشتق مرتبه دوم:

تقعر تابع و نقطه عطف (تحدب و تقعر و نقاط عطف منحنی یک تابع):

$$y''\begin{cases} >0 & \text{مقعر} \\ <0 & \text{محدب} \\ =0 & \text{شرط لازم برای نقطه عطف} \end{cases}$$

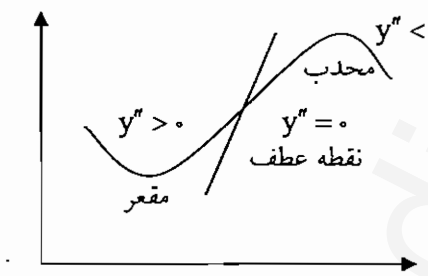
در نقطه x=0 در صورتی که مشتق دوم f(x) مثبت باشد تقعر رو به بالا خواهد بود (تابع محدب) اگر مشتق دوم f(x) منفی باشد تقعر رو به پایین خواهد بود (تابع مقعر).

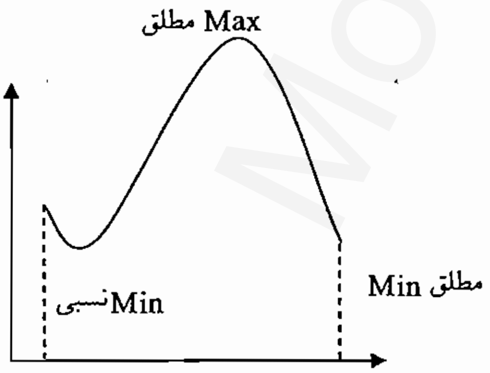
نقطه عطف: نقطه x=0 نقطه عطف تابع f(x) هرگاه $f''(a)=0$ و تقعر تابع f(x) در عبور از نقطه a تغییر کند.

شرط $f''(a)=0$ در زمانی است که $f^2(x), f(x)$ در a پیوسته باشد. در صورتی که f(x) در a پیوسته $f^{2}(a)$ نیز در a گسسته باشد باز هم می‌بایست در نقطه a تغییر جهت تقعر را نیز بررسی کرد.

تذکر مهم: شرط لازم برای نقطه عطف این است که مشتق دوم در آن نقطه صفر شود، به عبارت دیگر اگر مشتق دوم در نقطه صفر شود آن نقطه حتماً نقطه عطف نیست ولی اگر صفر شود ممکن است نقطه عطف باشد یا نباشد. (شرط کافی این است که مشتق دوم در نقطهٔ عطف تغییر علامت دهد) ضمناً مماس بر منحنی در نقطه عطف از داخل منحنی عبور می کند.

برای پیدا کردن ماکزیمم و مینیمم یک تابع در یک فاصله بسته، ابتدا مقدار تابع یعنی y را برای نقطه اول و همچنین مقدار تابع را برای نقطه آخر پیدا می کنیم و از راه مشتق هم y نقاط ماکزیمم و مینیمم را پیدا می کنیم و آنها را با هم مقایسه می کنیم تا ماکزیمم و مینیمم تابع در این فاصله به دست آید.





مثال:

$$۱)\ y=\sqrt[۳]{x} \Rightarrow D_f = R$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}} \Rightarrow f''(x)=\frac{-۲}{۹}x^{-\frac{۵}{۳}} \neq D_f = R-\{۰\}$$

	0
$f''(x)$	+ ⋮ −
	نقطه عطف

$$2)\ f(x)=-x^4+2x^2+x-5 \Rightarrow f'(x)=-4x^3+4x+1 \Rightarrow f''(x)=-12x^2+4 \qquad f''(x)=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

		$-\sqrt{\frac{1}{3}}$		$+\sqrt{\frac{1}{3}}$	
$f''(x)$	$-$		$+$		$-$
		نقطه عطف		نقطه عطف	

نکته: استفاده از مشتق دوم برای Min , Max :

اگر $f'(x), f(x)$ در $x=0$ پیوسته باشند و $f'(a)=0$ خواهیم داشت.

الف) اگر $f''(x)<0$ باشد $x=a$, Max نسبی خواهد بود.

ب) اگر $f''(x)>0$ باشد $x=a$, Min نسبی خواهد بود.

اگر $f''(x)=0$ باشد این روش برای تعیین Max یا Min قابل استفاده نیست.

نکته مهم: اگر $f''(x), f(x)$ در $x=a$ پیوسته باشد و $f''(a)=0$ باشد در صورتی که $f^{3}(a)\neq 0$ باشد می‌توان نتیجه گرفت که $x=0$ نقطه عطف است.

استفاده از مشتق در حد گیری (قاعده هوپیتال):

نکته مهم: هر زمان در حدگیری با ابهام های $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ مواجه شدیم می‌توان از این قاعده استفاده کرد سایر صورتهای ابهام پس از تبدیل به صورت $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ برای قاعده هوپیتال قابل استفاده می‌شود.

قاعده هوپیتال: اگر دو تابع $g(x), f(x)$ مشتق پذیر باشند و $f(a)=g(a)=0$ یا $f(a)=g(a)=\infty$ در این صورت:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

* اگر پس از یک بار مشتق گرفتن حالت ابهام رفع نشود مشتق گیری را ادامه می‌دهیم تا ابهام از بین برود:

مثال:

$$1)\ \lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 3}\frac{2x-5}{2x}=\frac{1}{6}$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^3-2x^2}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{2\cos x\sin x}{3x^2-4x}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 x+2\cos^2 x}{6x-4}=\frac{2}{-4}=\frac{-1}{2}$$

$$3)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=\infty$$

$$4)\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\tan x-\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}=\infty-\infty\Rightarrow \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{(x-\frac{\pi}{2})\sin x-\cos x}{(x-\frac{\pi}{2})\cos x}=\frac{0}{0}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+(x-\frac{\pi}{2})\cos x+\sin x}{\cos x-(x-\frac{\pi}{2})\sin x}=\frac{2}{0}=\infty$$

$$5)\ \lim_{x\to 0} x\cot x=0\times\infty\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\tan^2 x}=1$$

حالتهای ابهام $۱^{\infty}, ۰^{۰}, \infty^{۰}$:

اگر در حدگیری $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ به یکی از حالتهای ابهام $۱^{\infty}, ۰^{۰}, \infty^{۰}$ برخورد کردیم به روش زیر عمل می‌کنیم.

$$y = \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} \Rightarrow \ln y = \lim_{x\to a}[g(x)\ln f(x)]$$

در این صورت نوع ابهام به صورت $0\times\infty$ در می‌آید که با معکوس کردن $g(x)$ و استفاده از قاعده هوپیتال مقدار جدید را بدست آوردیم. در پایان حد y را به روش زیر بدست می‌آوریم.

$$\ln y = \lim_{x\to a}[g(x)\ln f(x)] = A \Rightarrow y = e^{A}$$

مثال:

$$۱)\lim_{x\to ۰}(۱-۲x)^{\frac{۲}{x}} = ۱^{\infty} \Rightarrow \ln y = \lim_{x\to ۰}\frac{۳}{x}\ln(۱-۲x) = \lim_{x\to ۰}\frac{۳\ln(۱-۲x)}{x} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{-۶}{۱-۲x}}{۱} = -۶ \Rightarrow y = \lim_{x\to ۰}(۱-۲x)^{\frac{۲}{x}} = e^{-۶}$$

$$۲)\lim_{x\to ۱}(۱-x)^{\tan \pi x} = ۰^{۰} \Rightarrow \ln y = \lim_{x\to ۱}\tan \pi x \ln(۱-x) = \lim_{x\to ۱}\frac{\ln(۱-x)}{\cot \pi x} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\frac{-۱}{۱-x}}{-\pi(۱+\cot^{۲}\pi x)} = \lim_{x\to ۱}\frac{\sin^{۲}\pi x}{\pi(۱-x)} = \lim_{x\to ۱}\frac{۲Cos\pi x Sin\pi x}{-\pi} = \frac{۰}{-\pi} = ۰ \Rightarrow y = \lim_{x\to ۱}(۱-x) = tab\pi x e^{۰} = ۱$$

$$۳)\lim_{x\to\infty}(x+e^{x})^{\frac{۲}{x}} = \infty^{۰} \Rightarrow \ln y = \lim_{x\to\infty}\frac{۲}{x}\ln(x+e^{x}) = \lim_{x\to\infty}\frac{۲\ln(x+e^{x})}{x} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{۲(۱+e^{x})}{x+e^{x}}}{۱} = \lim_{x\to\infty}\frac{۲+۲e^{x}}{x+e^{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{۲e^{x}}{e^{x}} = ۲$$

$$= ۲ \Rightarrow y = \lim(x+e^{x\frac{۲}{x}}) = e^{۲}$$

دیفرانسیل:

نمو تابع : نمو تابع را معمولاً به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \quad \text{یا} \quad \Delta y = y_{x+\Delta y} - y$$

همانطور که گفتیم مهمترین کاربرد مشتق تعیین تغییرات متغیر وابسته y نسبت به تغییر جزئی متغیر مستقل x می‌باشد که این تغییرات جزئی را دیفرانسیل $x(dx)$ و دیفرانسیل $y(dy)$ می‌گوییم و مطابق تعریف داریم:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \Rightarrow dy = f'(x)dx \quad (dx = \Delta x, dy \cong \Delta y)$$

دیفرانسیلهای مرتبه دوم و بالاتر:

$y = f(x) \to dy = f'(x)dx$ دیفرانسیل مرتبه اول

$d^{۲}y = d(dy) = f''(x)d_x^{۲}$ دیفرانسیل مرتبه دوم

$d^{n}y = f^{(n)}(x)d_x^{n}$ دیفرانسیل مرتبه n ام

مثال: دیفرانسیل مرتبه دوم تابع با ضابطه $y = xe^{x}$ در نقطهٔ $x = ۱$ و $\Delta x = ۰/۱$ کدام است.

$$y = xe^{x} \to dy = (e^{x} + xe^{x})dx \Rightarrow d^{۲}y = (e^{x} + e^{x} + xe^{x})dx^{۲} \Rightarrow$$

$$d^{۲}y = (۲e^{x} + xe^{x})dx^{۲} \to d^{۲}y = (۲xe^{۱} - e^{۱})(۰/۱)^{۲} = \%۳e$$

خطای مطلق و خطای نسبی توابع:

| مقدار اندازه‌گیری شده − مقدار واقعی | = خطای مطلق

$$\text{خطای نسبی} = \frac{\text{خطای مطلق}}{\text{مقدار واقعی}}$$

با توجه به تعریف دیفرانسیل داریم:

$$\frac{dy}{dx} = y' \Rightarrow dy = y'dx \Rightarrow \Delta y = y'\Delta x$$

که در آن Δx (یا dx) خطای مطلق متغیر و Δy یا (dy) خطای مطلق تابع و y' مشتق تابع به ازای مقدار متغیر اندازه گیری شده می باشد.

بنابراین خطای مطلق تابع برابر است با حاصلضرب خطای مطلق متغیر در مشتق تابع به ازای مقدار اندازه گیری شده متغیر.

برای محاسبهٔ خطای نسبی، تابع خطای مطلق را بر مقدار تابع یعنی y تقسیم می کنیم.

$$\frac{dy}{y} = \frac{y'}{y}dx \Rightarrow \frac{dy}{y} = (Lny)'\,dx$$

مثال: بادکنک کروی شکل مملو از هوا که شعاع آن ۲۰ سانتی متر است مفروض است اگر بدانیم خطای اندازه گیری شعاع برابر ۰/۲ باشد، مقدار خطای حجم آن را حساب کنید.

$$V = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳} \to dV = ۴\pi r^{۲} dy \xrightarrow[r=۲۰,\ dr=۰/۲]{} \quad dV = ۱۰۰۵/۳$$

مثال: اضلاع یک مستطیل را اندازه گرفته ایم برابر ۲۰ و ۳۰ متر شده است. خطای اندازه گیری آنها به ترتیب ۰/۱ و ۰/۲ متر می باشد. مساحت مستطیل را حساب کنید و خطای آن را هم محاسبه کنید.

$$x = ۲۰ \ , \quad dx = ۰/۱ \ , \quad y = ۳۰ \ , \quad dy = ۰/۲$$

$$S = xy = ۲۰ \times ۳۰ = ۶۰۰ m^{۲}$$

$$ds = S'_x dx + S'_y dy = ydx + xdy = ۲۰ \times ۰/۱ + ۳۰ \times ۰/۲ = ۸ m^{۲}$$

فرمولهای یافتن دیفرانسیل:

۱) $d(x) = ۰$

۲) $d(x) = dx$

۳) $d(u + V - w) = du + dv - dw$

۴) $d(cv = cdv$ (cمقداری است ثابت)

۵) $d(u.v) = udv + vdu$

۶) $d\left((u)^n\right) = nu^{n-1}du$

۷) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{udu - udv}{v^{۲}}$

۸) $d\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{۱}{c}du$ cمقداری است ثابت

۹) $d(\sqrt{u}) = \frac{du}{۲\sqrt{u}}$

۱۰) $d(\sqrt[n]{u}) = \frac{du}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$

۱۱) $d(\sin u) = \cos u\,du$

۱۲) $d(\cos u) = -\sin u\,du$

۱۳) $d(\tan u) = \sec^{۲} u\,du$ $\quad \left(\sec u = \frac{۱}{\cos u}\right)$

۱۴) $d(\cot u) = -\operatorname{cosec}^2 u\, du \qquad \left(\operatorname{cosec} u = \dfrac{1}{\sin u}\right)$

مثال: دیفرانسیل $(dy)y$ تابع $f(x) = 5x^2 - 2x$ را بدست آوریم:

$$dy = f'(x)dx = (10x - 2)dx$$

برای بدست آوردن مقدار ترتیبی $f(x+\Delta x)$ مقدار dy را در نقطه x_0 بدست آورده و با مقدار $f(x_0)$ جمع می‌کنیم به عبارت دیگر:

$$f(x_0 + \Delta x) = dy + f(x_0)$$

محاسبه تقریبی توابع:

منظور از محاسبهٔ تقریبی توابع محاسبهٔ مقدار تقریبی عددی یک تابع با استفاده از مشتق و دیفرانسیل می باشد.

$$y' = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \Rightarrow y'\Delta x = f(x+\Delta x) - f(x) \Rightarrow f(x+\Delta x) \cong f(x) + f'(x)\Delta x$$

مثال: مقدار تقریبی $\sin 46^\circ$ را حساب کنید.

$$\sin(x+\Delta x) \simeq \sin x + \cos x \times \Delta x$$

$$\Delta x = 1^\circ = \frac{\pi}{180}, x = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$46^\circ = 45^\circ = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}$$

$$\sin 46^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) = \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} \times \frac{\pi}{180}$$

$$\sin 46^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\pi}{180} = 0/7071 + 0/7071 \times 0/77 = 0/7194$$

مثال: مقدار $f(37)$ را در صورتی که $f(x) = \sqrt{x}$ باشد بدست آورید:

$$f(37) = f(36+1) \Rightarrow \Delta x = dx = 1, dy = f'(x)dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Rightarrow dy = f'(36)\frac{1}{2\sqrt{36}}(1) = \frac{1}{12} \Rightarrow$$

$$f(37) = f(36) + dy = 6 + \frac{1}{12} = \frac{73}{12}$$

مثال: مقدار $\sin 59$ را بدست آورید.

$$f(x) = \sin x \qquad \Delta x = 59 - 60 = -1 = \frac{-\pi}{180}$$

$$dy = f'(x)dx = \cos x dx = \cos 60 \cdot \left(\frac{-\pi}{180}\right) = \frac{-\pi}{360}$$

$$f(59) = \sin x + dy = \sin 60 - \frac{\pi}{360} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{360} = \frac{180\sqrt{3} - \pi}{360}$$

مثال: در صورتی $f(x) = x^2 + 1$ باشد در $x = 1/01$ تفاوت دیفرانسیل y ,(dy) و نمو $(\Delta y)y$ را بدست آورید.
$(\Delta y - dy = ?)$

$$\left.\begin{array}{l} dy : dy = f(x)dx = 2xdx = 2(1)(0/01) = 0/02 \\ \Delta y : \Delta y = f(1/01) - f(1) = 2/0201 - 2 = 0/0201 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta y - dy = 0/0201 - 0/02 = 0/0001$$

کاربرد مشتقات در اقتصاد و بازرگانی

۱- هزینه متوسط و هزینه نهایی

اگر $TC=f(x)$ تابع هزینه کل x واحد از محصول باشد هزینه متوسط و هزینه نهایی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

هزینه متوسط: $\overline{TC}=\frac{f(x)}{x}$ هزینه نهایی: $TC'=f'(x)$

در واقع با استفاده از این روابط می‌توان میزان تولیدی را که در آن هزینه متوسط کل و نیز هزینه کل حداقل می‌شود را بدست آورد.

۲- درآمد متوسط و درآمد نهایی

همانند تابع هزینه در مورد تابع درآمد کل $TR=g(x)$ که در آن TR درآمد ناشی از فروش x واحد از محصول است خواهیم داشت.

درآمد متوسط: $\overline{TR}=\frac{TR}{x}=\frac{g(x)}{x}$ درآمد نهایی: $TR'_x=g'(x)$

با استفاده از این روابط حداکثر درآمد شرکت از فروش محصول محاسبه می‌شود، (نقطه بهینه فروش).

۳- تعیین حداکثر سود

با توجه به توابع هزینه (TR), (TC) برای حداکثر کردن میزان سود می‌توان به صورت زیر عمل کرد:

ابتدا تابع سود را با رابطه $\pi=TR-TC$ محاسبه کرده و سپس با استفاده از مشتق آن (π') حداکثر میزان سود و میزان فروش در آن محدوده تعیین می‌کنیم.

* روش سریعتر برای تعیین حداکثر سود: حداکثر سود زمانی رخ می‌دهد که خطوط مماس بر توابع TC, TR با هم موازی باشد بنابراین برای حداکثر سود رابطه $TR'=TC'$ را محاسبه کرده و نتایج آن را در تابع سود آزمایش می‌کنیم.

مثال: اگر $TR=\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+2, TC=x+1$ توابع درآمد و هزینه کل به ازای x واحد فروش باشد حداکثر سود به ازای چه مقدار فروش بدست می‌آید:

$$\left.\begin{array}{l}TR'=4x^2+3x\\ TC'=1\end{array}\right\}\Rightarrow 4x^2+3x=1\Rightarrow 4x^2+3x-1=0$$

$$\Rightarrow \Delta=b^2-4ac=9+16=25$$

$$\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\Rightarrow x=\frac{-3\pm5}{8}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\ x=\frac{1}{8}\end{cases}$$

ق ق

خط مماس قائم:

فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر باشد خط مماس بر نمودار f نقطه $A(x_0,f(x_0))$ خطی است که از نقطه A می‌گذرد وشیب آن برابر $f(x)$ می‌باشد پس معادله خط مماس بصورت:

$$y-f_{(x_0)}=f'_{(x_0)}(x-x_0)$$

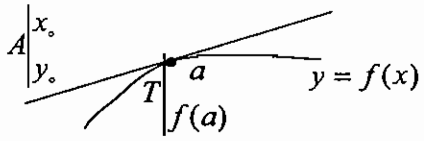
قائم بر نمودار تابع f در نقطه‌ای مفرض عبارتست از خط عمود بر خط مماس در آن نقطه، پس در حالت کلی نیز معادله خط قائم بر نمودار تابع f در نقطه $A(x_0,f(x_0))$ بصورت:

$$y-f(x_0)=\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

نکته: گاهی در محاسبه شیب خط مماس با $\pm\infty$ برخورد می‌کنیم، در این صورت $x=x_0$ معادله خط مماس می‌باشد و هر گاه این شیب برابر صفر گردد خط $y=f(x_0)$ معادله مماس افقی تابع است.

معادله خط مماس بر منحنی از منطقه‌ای خارج از منحنی:

فرض می‌کنیم نقطه $T\Big|_{f(a)}^{a}$، نقطه تماس باشد. معادله خط مماس را شبیه به حالت قبل بدست می‌آوریم و با اعمال شرط اینکه نقطه A در معادله خط صدق می‌کند پارامتر a را بدست می‌آوریم.



مثال: از مبدا مختصات خطی مماس بر منحنی $y=(x-1)^2+1$ رسم می‌کنیم. معادله خط مماس را بدست آورید.

حل: نقطه تماس را $T(a,(a-1)^2+1)$ فرض می‌کنیم حال معادله خط مماس در نقطه T واقع بر منحنی را می‌نویسیم:

$$y'=2(x-1)=y'(a)=2a-2$$

$$y-\left[(a-1)^2-1\right]=(2a-2)(x-a)$$

این خط باید از مبدا مختصات یعنی (۰، ۰) بگذرد پس:

$$0-\left[(a-1)^2+1\right]=(2a-2)(0-a)\Rightarrow a=\pm\sqrt{2}$$

پس دو مماس می‌توان رسم کرد:

$$T_1=(\sqrt{2},3-2\sqrt{2})\ ,T_2(-\sqrt{2},3+2\sqrt{2})$$

معادله خط مماس بر منحنی در نقطه T_1

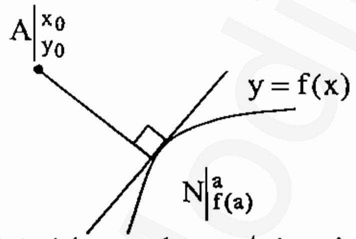
$$y-(3-2\sqrt{2})=(2\sqrt{2}-2)(x-\sqrt{2})\Rightarrow y=(2\sqrt{2}-2)(x-1)$$

معادله خط مماس بر منحنی در نقطه T_2

$$y-(3+2\sqrt{2})=(-2\sqrt{2}-2)\Rightarrow y=(-2\sqrt{2}-2)(x-1)T_2$$

معادله خط قائم بر منحنی از نقطه‌ای خارج از آن:

برای بدست آوردن معادله خط قائم بر منحنی از نقطه‌ای خارج از آن نیز می‌توان پای عمود واقع بر منحنی را بصورت $N(\alpha,f(\alpha))$ در نظر گرفت و معادله خط قائم را نوشت، پس شرط اینکه نقطه A در معادله خط قائم صدق کند اعمال شده و پارامتر a بدست می‌آید.



مثال: از نقطه $M(3,0)$ قائمی بر منحنی $y=2\sqrt{2}$ با شیب غیرصفر رسم می‌کنیم، معادله خط قائم را پیدا کنید.

حل: فرض می‌کنیم $N(0.f(a))$ پای عمود باشد.

$$y'=\frac{1}{\sqrt{x}}\Rightarrow y'(a)=\frac{1}{\sqrt{a}}\Rightarrow -\sqrt{a}=\text{شیب خط قائم}$$

$$y-2\sqrt{a}=-\sqrt{a}(x-a)\ \underset{y=0}{\overset{x=3}{\Rightarrow}}\ 0-2\sqrt{a}=-\sqrt{a}(3-a)\Rightarrow a=0,1$$

شیب غیرصفر قابل قبول بوده پس $N(1,2),a=1$ می‌باشد.

معادله خط قائم: $y-2=-(x-1)\Rightarrow y=-x+3$

نکته: زاویه بین خط و منحنی و یا بین دو منحنی $\tan\theta=\left|\dfrac{M-M'}{1+MM'}\right|$

باید توجه داشت شیب خط مماس از طریق مشتق بدست می‌آید.

تستهای طبقه‌بندی شده فصل چهارم

رشته اقتصاد

۱- اگر $y=\frac{۲x^۲-۱}{x^۲+۱}$ باشد مقدار $\frac{dx}{dy}=x'_y$ در نقطه $x=1$ کدام است؟ (سراسری ۷۵)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) 1 ۴) $\frac{3}{2}$

۲- مقدار مشتق مرتبه پانزدهم تابع $y=\frac{x+۲}{x+۳}$ در نقطه $x=-2$ کدام است؟ (سراسری ۷۵)

۱) $-۱۶!$ ۲) $-۱۵!$ ۳) $۱۴!$ ۴) $15!$

۳- اگر $\mathrm{tg}^{-1}(\frac{y}{x})=\mathrm{Ln}\sqrt{x^2+y^2}$ باشد، dy در نقطه $x=1$ کدام است؟ (سراسری ۷۵)

۱) $\frac{۱+y}{۱-y}dx$ ۲) $\frac{1-y}{1+y}dx$ ۳) $\frac{1}{y}dx$ ۴) ydx

۴- برای نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x)=x^{\frac{۱}{۳}}(x+۴)^{-\frac{۲}{۳}}$ در دو نقطه $x=۱$, $x=۴$ به ترتیب کدام گزاره درست است؟ (سراسری ۷۵)

۱) مینیمم – فاقد اکسترم ۲) ماکسیمم – مینیمم

۳) مینیمم – ماکسیمم ۴) فاقد اکسترم – ماکسیمم

۵- اگر نمودار تابع $y=x^۳+۲kx^۲+k$ در نقطه $x=۱$ از تقعر به تحدب تغییر یابد، آنگاه مقدار k کدام است؟ (سراسری ۷۵)

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) -1 ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) 2

۶- حد عبارت $\lim_{h\to ۰}\frac{\sin(\frac{\pi}{۶}+h)-\sin\frac{\pi}{۶}}{h}$ کدام است؟ (سراسری ۷۵)

۱) 0 ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) 1

۷- در تابع f به ضابطه $y=\frac{x}{۱-x}$ مشتق مرتبه نهم به ازای $x=2$ برابر است با: (سراسری ۷۶)

۱) $9!$ ۲) $۱۰!$ ۳) $-(۹!)$ ۴) $-(۱۰!)$

۸- در تابع پارامتری به ضابطه $\begin{cases}x=\frac{۱}{t}\\ y=t\end{cases}$، y''_x کدام است؟ (سراسری ۷۶)

۱) $۲t^۳$ ۲) $-\frac{۱}{t^۲}$ ۳) $\frac{1}{t^۳}$ ۴) $-۲t^۳$

۹- اگر $y=\frac{x}{۱+x}$ باشد حاصل $(\Delta y-dy)$ در نقطه $x=۱$ به ازای $\Delta x=۰/۴$ کدام است؟ (سراسری ۷۶)

۱) $-\frac{1}{60}$ ۲) $-\frac{1}{30}$ ۳) $\frac{1}{30}$ ۴) $\frac{1}{60}$

۱۰- کدامیک از توابع زیر بر روی اعداد حقیقی صعودی است؟ (سراسری ۷۶)

۱) $f(x)=-x+\sin x$ ۲) $f(x)=x+2\lim x$

۳) $f(x)=x+2\sin x$ ۴) $f(x)=x-\sin x$

۱۱- به ازای کدام مقدار a تابع $y=xLnax$ در نقطه $x=1$ مینیمم است؟ (سراسری ۷۶)

۱) 1 ۲) 2 ۳) e ۴) $\frac{1}{e}$

۱۲- اگر $\begin{cases}x=t^2\\y=Lnt\end{cases}$ باشد، y''_t کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) $-\frac{1}{t^3}$ ۲) $-\frac{1}{2t^3}$ ۳) $-\frac{1}{2t^4}$ ۴) $\frac{1}{4^2}$

۱۳- به ازای $x=1$ و $\Delta x=0.1$، در تابعی به معادله $y=\frac{x}{x+1}$، مقدار dy کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) 0.04 ۲) 0.02 ۳) 0.025 ۴) 0.25

۱۴- تابع با ضابطه $y=Ln\frac{x}{x+1}$ در فاصله $(0,1]$ از نظر تحدب و تقعر چگونه است؟ (سراسری ۷۷)

۱) ابتدا محدب سپس مقعر ۲) ابتدا مقعر سپس محدب

۳) مقعر موکد ۴) محدب موکد

۱۵- از رابطه $xLny+yLnx+2xy-x-y=0$ مقدار y'_x در نقطه $(1,1)$ کدام است؟ (سراسری ۷۸)

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

۱۶- طول نقطه عطف تابع $y=Arctgx$ کدام است؟ (سراسری ۷۸)

۱) 0 ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) 1 ۴) فاقد نقطه عطف

۱۷- مشتق مرتبه nام تابع $y=-e^{2x}$ در $x=0$ کدام است؟ (سراسری ۷۸)

۱) 1 ۲) 2^n ۳) e ۴) $\frac{1}{e}$

۱۸- با محاسبه مشتق مرتبه n ام تابع $f(x)=\frac{x}{x-1}$، مقدار $f^{(n)}_{(-1)}$ کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) $\frac{n!}{2^{n+1}}$ ۲) $\frac{(n-1)!}{2^n}$ ۳) $-\frac{n!}{2^{n+1}}$ ۴) $-\frac{(n-1)!}{2^n}$

۱۹- در تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}2-x^2 & 0\le x<1\\ \frac{3}{2} & x=1\\ 1+x & 1<x<2\end{cases}$ روی بازه $[0,2]$ مقادیر ماکسیمم و مینیمم کدام‌اند؟ (سراسری ۷۹)

۱) 1,2 ۲) $\frac{3}{2}$,3

۳) 1,3 ۴) ماکسیمم ۳ و مینیمم ندارد

۲۰- اگر f روی R دوبار مشتق پذیر باشد و x_2,x_1 هر دو نقاط مینیمم نسبی f باشند، کدام گزاره درست است؟ (سراسری ۷۹)

۱) $f'(x_1)f(x_2)=0$ ۲) $f''(x_1)f''(x_2)<0$

۳) $f(x_1)f(x_2)=0$ ۴) $f''(x_2)f(x_1)>0$

۲۱- اگر $Ln\frac{x-y}{x+y}=6$ باشد حاصل $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}$ کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) $-\frac{x}{y}$ ۲) $-\frac{y}{x}$ ۳) $\frac{y}{x}$ ۴) $\frac{x}{y}$

۲۲- معادله خط مماس بر منحنی $y=e^{x-1}$ در نقطه $x=2$ کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) $y=e(x-1)$ ۲) $y=-e^{-1}(x-1)$ ۳) $y=e(x+1)$ ۴) $y=e^{-1}(x+1)$

۲۳- اگر $y=Ln(1+x^2)+\int_0^1 \sin(e^x)^{dx}$ باشد، آنگاه $y'(1)$ برابر کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) 0 ۲) 1 ۳) Ln2 ۴) $1+\sin e$

۲۴- از رابطه $(x+1)^y-y^{x+1}=0$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ در نقطه $(0,1)$ برابر است با: (سراسری ۸۰)

۱) -2 ۲) 0 ۳) 1 ۴) 2

۲۵- اگر **f** تابعی حقیقی و مشتق پذیر باشد و داشته باشیم $g(x)=f(xf(x))$ آنگاه $g'(0)$ برابر است با: (سراسری ۸۰)

۱) $f'(0)=f(0)$ ۲) $f''(0)f(0)$ ۳) $f'(0)$ ۴) 0

۲۶- مشتق مرتبه **n** ام تابع حقیقی به معادله $y=\frac{x}{x+1}$ در نقطه $x=0$ برابر است با:

۱) $(-1)^n n$ ۲) $(-1)^{n-1}n$ ۳) $(-1)^n n!$ ۴) $(-1)^{n-1}.n!$

۲۷- اگر سوی تقعر منحنی نمایش تابع حقیقی به معادله $y=x^3+2ax^2+a$ در نقطه $x=1$ عوض شود، مقدار **a** کدام است؟ (سراسری ۸۰)

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) -1 ۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۲۸- در تابع به معادله $y=(x^2+1)^x$ مقدار **dy** در نقطه $x=1$ با شرط $dx=\frac{1}{2}$ برابر است با: (سراسری ۸۰)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) Ln2 ۴) $1+Ln2$

۲۹- اگر $y=e^{Lnx}$ باشد، **y** برابر است با: (سراسری ۸۱)

۱) 0 ۲) 1 ۳) x ۴) $\frac{1}{x}$

۳۰- مشتق مرتبه **n**ام تابع $f(x)=Ln(x+1)$ دو نقطه $x=0$ برابر است با: (سراسری ۸۱)

۱) $-(n-1)!$ ۲) $(-1)^{n-1}(n-1)!$ ۳) $(-1)^n(n+1)!$ ۴) $(-1)^n(n-1)!$

۳۱- در تابع $y=x^2-4x+2$ به ازای $x=1$ و $\Delta x=0.1$ مقدار $\Delta y-dy$ کدام است؟ (سراسری ۸۱)

۱) 0.01 ۲) 0.02 ۳) -0.3 ۴) -0.4

۳۲- در تابع حقیقی **f** به معادله $y=\sqrt{x}Lnx$ طول نقطه بحرانی و نوع آن کدام است؟ (سراسری ۸۱)

۱) e^{-1}، مینیمم ۲) e^{-2}، مینیمم ۳) e^{-1}، ماکزیمم ۴) e^{-2}، ماکزیمم

۳۳- نقطه بحرانی تابع $y=(x-2)^4+3$ کدام است؟ (سراسری ۸۱)

۱) Min, (2,3) ۲) Max, (3,2) ۳) (2,3) و عطف ۴) (3,2) و عطف

۳۴- مشتق nام تابع $f(x)=\frac{1}{x(1-x)}$ در نقطه $x=\frac{1}{2}$ کدام است؟ (سراسری ۸۲)

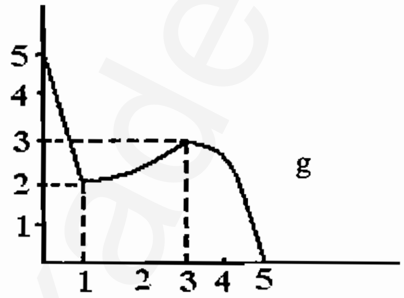
۱) $2^n n![1+(-1)^n]$
۲) $2^{n+1} n![1+(-1)^n]$
۳) $2^n (n+1)![1+(-1)^n]$
۴) $2^{n+1} (n+1)![1+(-1)^n]$

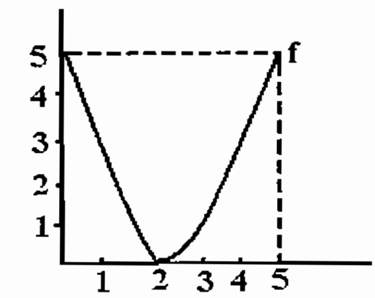
۳۵- داده های زیر را در مورد مشتق دوم تابع حقیقی f داریم. f کدامیک از توابع زیر می تواند باشد؟ (فرض کنید $b>0$ و بقیه ثابت ها می توانند مثبت یا منفی باشند.) (سراسری ۸۲)

X	0	1	2	3
$f''(x)$	1	-1	-3	-5

۱) ax^2+bx+c
۲) ae^{bx}
۳) ax^3+bx^2+cx+d
۴) $e^{-\frac{x^2}{b}}$

۳۶- نمودارهای دو تابع g,f در زیر داده شده‌اند. کدام یک از گزاره‌های زیر در مورد تابع $h(x)=f(g(x))$ درست است؟ (سراسری ۸۲)





۱) $x=4, x=1$ نقاط مینیمم و $x=3$ یک نقطه ماکسیمم h است.
۲) $x=2, x=1$ نقاط مینیمم و $x=3$ یک نقطه ماکسیمم h است.
۳) $x=4, x=1$ نقاط ماکسیمم و $x=3$ یک نقطه مینیمم h است.
۴) $x=2, x=4$, نقاط ماکسیمم و $x=1$ یک نقطه مینیمم h است.

۳۷- اگر تابع حقیقی f دارای ضابطه $f(x)=x^2e^x$ باشد، طول نقطه عطف این تابع کدام است؟ (سراسری ۸۲)

۱) $-2,-1$
۲) $-2\pm\sqrt{2}$
۳) $1,2$
۴) $1\pm\sqrt{3}$

۳۸- وضعیت تابع با ضابطه $y=x\text{Ln}(x+1)$ از نظر تحدب و تقعر در دامنه خود چگونه است؟ (سراسری ۸۲)

۱) ابتدا محدب سپس مقعر
۲) ابتدا مقعر سپس محدب
۳) همواره محدب
۴) همواره مقعر

۳۹- مشتق مرتبه دهم از تابع $y=x\text{Ln}x$ برابر است با: (سراسری ۸۳)

۱) $-10x^{-11}$
۲) $9!x^{-10}$
۳) $8!x^{-9}$
۴) $10x^{-11}$

۴۰- نرخ تغییر $\sqrt{x^2+8}$ نسبت به $\frac{x}{x+1}$ در نقطه $x=1$ برابر است با (سراسری ۸۳)

۱) $\frac{1}{6}$
۲) $\frac{3}{4}$
۳) $\frac{4}{3}$
۴) 6

۴۱- کمترین و بیشترین مقدار تابع $f(x)=4x-x^4$ در فاصله $[-2,2]$ کدام است؟ (سراسری ۸۳)

۱) $3,-2$
۲) $3,0$
۳) $-24,4$
۴) $3,-24$

۴۲- در کدام فاصله تابع $y=x^2e^x+3e^x$ محدب و خارج آن مقعر است؟ (سراسری ۸۳)

۱) R
۲) R^+
۳) $[0,\infty)$
۴) $(-\infty,0)$

رشته مدیریت

۱- اگر $y=\sqrt{u^2+2}$ ، $u=(x^2-1)^3$ باشد، y''_{x^2} در $x=1$ چقدر است؟ (سراسری ۷۳)

۱) 0 ۲) 1 ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{3}$

۲- اگر $y=2x^3-2x^2+1$ باشد مشتق x'_y در نقطه **x=1** کدام است؟ (سراسری ۷۳)

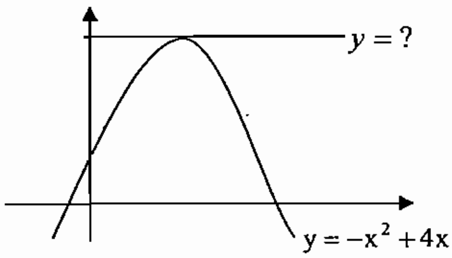
۱) -1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) 2

۳- مشتق مرتبه **n** ام تابع $y=e^{2x}$ در نقطه **x=0** کدام است؟ (سراسری ۷۳)

۱) 0 ۲) 1 ۳) 2 ۴) 2^n

۴- با توجه به شکل معادله خط مماس بر منحنی کدام است ؟ (سراسری ۷۳)

۱) y=4 ۲) y=3 ۳) y=2 ۴) y=1



۵- اگر $y=-x^2+4x$ باشد در **x=1** مقدار دیفرانسیل **y** کدام است(در صورتی که **dx=0/1** باشد) (سراسری ۷۳)

۱) 0/1 ۲) 0/2 ۳) 0/3 ۴) 0/4

۶- تابع $y=\frac{x+1}{x-1}$ را در نظر می‌گیریم این تابع در فاصله **[2,3]** چگونه است؟ (سراسری ۷۳)

۱) مقعر، صعودی ۲) مقعر، نزولی ۳) محدب، نزولی ۴) محدب، صعودی

۷- حد عبارت $\lim\limits_{x\to 0}\frac{10^x-e^{2x}}{x}$ کدام است؟ (سراسری ۷۳)

۱) 10-2e ۲) $10-2e^2$ ۳) ln10-2 ۴) 0

۸- طول نقطه عطف تابع $y=x\ln x-\frac{2}{x}$ کدام است؟ (سراسری ۷۳)

۱) 0 ۲) $\pm\frac{1}{2}$ ۳) ±1 ۴) ±2

۹- در رابطه $x^2+y^2-2xy+x-y=0$ مقدار y'_x در نقطه **x=y=1** کدام است ؟ (سراسری ۷۴)

۱) -1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) -2 ۴) 1

۱۰- طول نقطه مینیمم تابع $y=xe^{2x}$ کدام است ؟ (سراسری ۷۴)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) 0 ۳) 1 ۴) $\frac{1}{2}$

۱۱-تابع $y=xe^x$ در کدام فاصله صعودی است؟ (سراسری ۷۴)

۱) R^+ ۲) R ۳) $(-1,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-1)$

۱۲- طول نقطه ماکزیمم تابع $y=x^3-9x$ کدام است؟ (سراسری ۷۴)

۱) -3 ۲) 3 ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $-\sqrt{3}$

۱۳- در تابع $y=\ln(x+1)$ مقدار y'' به ازای $x=0$ کدام است؟ (سراسری ۷۴)

۱) -1 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 1

۱۴- حد عبارت $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^4-x^4}{h}$ کدام است؟ (سراسری ۷۵)

۱) 0 ۲) 4 ۳) $4x^3$ ۴) $4x$

۱۵- مشتق تابع $y=x^{x+2}$ در نقطه $x=1$ کدام است؟ (سراسری ۷۵)

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۱۱

۱۶- تابع $y=e^x-2x$ در فاصله بسته $[0,1]$ محدب است یا مقعر؟ (سراسری ۷۵)

۱) مقعر ۲) محدب

۳) ابتدا محدب سپس مقعر است ۴) ابتدا مقعر سپس محدب است

۱۷- در باره تابع $y=x\ln x$ کدام گزینه صحیح است؟ (سراسری۷۵)

۱) $(e,-e)$ مینیمم ۲) $(e^{-1},-e^{-1})$ مینیمم

۳) $(e,-e)$ ماکزیمم ۳) $(e^{-1},-e^{-1})$ ماکزیمم

۱۸- مشتق مرتبه پنجم $y=e^{2x}$ در $x=0$ برابر است با(سراسری ۷۶)

۱) 1 ۲) 8 ۳) 10 ۴) 32

۱۹- اگر $y=\frac{x}{1+x}$ باشد مقدار dy به ازای $\Delta x=0/4$ در $x=1$ کدام است؟ (سراسری ۷۶)

۱) $0/1$ ۲) $0/2$ ۳) $0/3$ ۴) $0/4$

۲۰- تابع f به معادله $y=x^3+1$ از نظر محدب و تقعر چگونه است؟ (سراسری ۷۶)

۱) ابتدا محدب، سپس مقعر ۲) ابتدا مقعر، سپس محدب

۳) همواره مقعر ۴) همواره محدب

۲۱- کدامیک از توابع زیر بر روی اعداد حقیقی نزولی است؟ (سراسری ۷۶)

۱) $f(x)=x.\sin x$ ۲) $f(x)=x-\sin x$

۳) $f(x)=-x+\sin x$ ۴) $f(x)=-x+2\sin x$

۲۲- اگر تابع f به معادله $y+x^2+xy^2+y^2-4x=0$ باشد y'_x در (۱ و ۱) کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) $-\frac{1}{5}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۲۳- مشتق مرتبه هشتم $y=\frac{x+1}{x}$ در $x=1$ کدام است ؟ (سراسری ۷۷)

۱) صفر ۲) $8!$ ۳) $(-1)8!$ ۴) 4096

۲۴- در تابعی به معادله $y=x^2+x$ به ازای $\Delta x=0/1, x=1$ مقدار dy کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) $0/1$ ۲) $0/2$ ۳) $0/3$ ۴) $0/4$

۲۵- تابعی به معادله $y=\ln(x^2+1)$ در فاصله $[0,1]$ چه وضعیتی دارد؟ (سراسری ۷۷)

۱) ابتدا صعودی، سپس نزولی ۲) ابتدا نزولی، سپس صعودی

۳) همواره صعودی ۴) همواره نزولی

۲۶- در تابعی به معادله $f(x)=2x+5e^{2x}$ در صورتی که x یک واحد تغییر کند مقدار f در نقطه $x=0$ چه مقدار تغییر می‌کند؟ (سراسری ۷۸)

۱) 0 ۲) 2 ۳) 10 ۴) 12

۲۷- در رابطه $-3+x^2+xy+y^2-2x\ln y-2y\ln x=0$ مقدار y'_x به ازای **x=y=1** کدام است ؟ (سراسری ۷۸)

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

۲۸- اگر **f** به معادله $y=\dfrac{\ln x-x}{e^{2x}}$ باشد مقدار $\dfrac{dx}{dy}$ در **x=1** کدام است؟ (سراسری ۷۸)

۱) $\frac{1}{2}e^{-2}$ ۲) $2e^{-2}$ ۳) $2e^2$ ۴) $\frac{1}{2}e^2$

۲۹- بیشترین مقدار تابع $y=e^x+2x$ در فاصله **[-1,1]** کدام است؟ (سراسری ۷۸)

۱) 0 ۲) 1 ۳) $-\ln 2$ ۴) $e+2$

۳۰- کدام مورد برای تقعر منحنی به معادله $y=x^3+x$ در فاصله **[-2,2]** صحیح است؟ (سراسری ۷۸)

۱) ابتدا مقعر سپس محدب ۲) ابتدا محدب و سپس مقعر

۳) همواره محدب ۴) همواره مقعر

۳۱- اگر $y=xe^{2x}$ باشد مشتق مرتبه **n** ام این تابع به ازای **x=0** کدام است ؟ (سراسری ۷۹)

۱) 2^n ۲) $n2^{n-1}$ ۳) $n2^n$ ۳)صفر

۳۲- طول نقطه ماکزیمم یا مینیمم تابع $y=\dfrac{e^{2x}}{x}$ کدام است ؟ (سراسری ۷۹)

۱) $x=3$ ۲) $x=2$ ۳) $x=\frac{1}{2}$ ۴) $x=\frac{1}{3}$

۳۳- مشتق تابع $y=x^{-x^2}$ عبارت است از: (سراسری ۷۹)

۱) $y'=-x^{-x^2+1}(1+\ln x^2)$ ۲) $y'=x^{-x^2-1}$

۳) $y'=x^{-x^2-1}(-2x)$ ۴) $y'_x=-x(x\ln x+1)$

۳۴- مشتق مرتبه دهم تابع **f(x)=ln(1+x)** در **x=0** کدام است؟ (سراسری ۸۰)

۱) $-10!$ ۲) $-9!$ ۳) $9!$ ۴) $10!$

۳۵- مشتق تابع **f(x)=|x|+5** در **x=0** کدام است؟ (سراسری ۸۰)

۱) -1 ۲)صفر ۳) 1 ۴) فاقد مشتق است

۳۶- دیفرانسیل مرتبه دوم تابع با ضابطه $y=xe^x$ در نقطه **x=1** در صورتی $\Delta x=0/1$ باشد برابر است با (سراسری ۸۰)

۱) 0/02e ۲) 0/01e ۳) 0/03e ۴) 0/1e

۳۷- تابع با ضابطه $y=xe^x$ در فاصله $[-3,3]$ چگونه است ؟ (سراسری ۸۰)

۱) اکیداً محدب ۲) اکیداً مقعر

۳) ابتدا محدب سپس مقعر ۴) ابتدا مقعر سپس محدب

۳۸- طول نقطه عطف تابع $y=xe^x$ کدام است ؟(سراسری ۸۰)

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

۳۹- شیب خط مماس بر منحنی $x^5+y^5=2xy$ در نقطه $(x,y)=(1,1)$ برابر است با (سراسری۸۱)

۱) 1 ۲) -1 ۳) 2 ۴) -2

۴۰- طول نقطه عطف تابع $y=\ln(x^2+1)$ برابر است با (سراسری۸۱)

۱) $x=1\quad ,x=-1$ ۲) $x=2\quad ,x=-2$

۳) $x=3\quad x=-3$ ۴) $x=4\quad x=-4$

۴۱- اگر داشته باشیم $y=(x+1)^{2x}$ مقدار dy در x=1 برابر است با (سراسری۸۱)

۱) e^2dx ۲) $(2\ln 2+1)dx$ ۳) $4dx$ ۴) $4(2\ln2+1)dx$

۴۲- حاصل عبارت $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x^2}$ برابر است با (سراسری ۸۲)

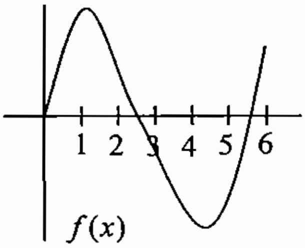
۱) 0 ۲) 1 ۳) e ۴) $\frac{1}{e}$

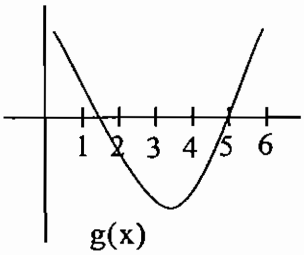
۴۳-تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}3-x & x\le 2\\ \frac{1}{2}x^2-1 & x>2\end{cases}$ در نقطه $x=2$ چگونه است ؟(سراسری۸۲)

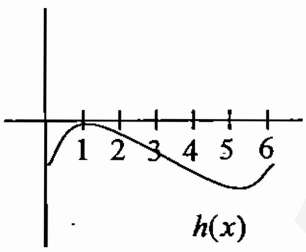
۱) نا پیوسته ۲) فاقد حد ۳) مشتق پذیر ۴) مشتق نا پذیر

۴۴- با توجه به نمودارهای زیر کدام عبارت درست است؟(سراسری۸۲)

۱) h مشتق f است
۲) h مشتق g است
۳) f مشتق g است
۴) g مشتق f است



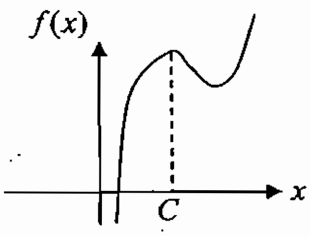




۴۵ـ اگر داشته باشیم $y=\mathrm{Ln}(x+1)$ مشتق n ام این تابع در x=0 کدام است (سراسری۸۲)

۱) صفر ۲) 1 ۳) $(-1)^n n!$ ۴) $(-1)^{n-1}(n-1)!$

۴۶-شکل مقابل نمودار $f(x)$ است در همسایگی x=c کدام بیان برای مشتق های مرتبه اول و دوم تابع صحیح است (سراسری ۸۲)



۱) برای $x<c$ داریم $f'(c), f''<0, f'>0$ موجود نیست.
۲) برای $x<c$ داریم $f'(c), f''<0, f'<0$ موجود است.
۳) برای $x>c$ داریم $f'(c), f''>0, f'>0$ موجود نیست.
۴) برای $x>c$ داریم $f'(c), f''<0, f'<0$ موجود است .

۴۷- باز پرداخت وام مسکن، p تابعی از سه متغیر است $p = f(A, r, N)$ که در آن A مقدار وام دریافتی به ریـال و r نرخ بهره، N شماره سالهای بازپرداخت وام است کدامیک از گزینه‌های زیر درست است؟ (سراسری ۸۲)

۱) $\frac{\partial p}{\partial A} > 0, \frac{\partial p}{\partial r} > 0, \frac{\partial p}{\partial N} < 0$ ۲) $\frac{\partial p}{\partial A} > 0, \frac{\partial p}{\partial r} < 0, \frac{\partial p}{\partial N} > 0$

۳) $\frac{\partial p}{\partial A} < 0, \frac{\partial p}{\partial r} > 0, \frac{\partial p}{\partial N} < 0$ ۴) $\frac{\partial p}{\partial A} < 0, \frac{\partial p}{\partial r} < 0, \frac{\partial p}{\partial N} > 0$

۴۸- اگر داشته باشیم $y_1 = e^x$, $y_2 = x + 1$ و $x \in R$ کدام رابطه صحیح است؟ (سراسری ۸۳)

۱) $y_1 > y_2$ ۲) $y_1 \ge y_2$

۳) $y_1 < y_2$ ۴) $y_1 \le y_2$

۴۹- طول نقطه عطف $y = x^2 e^x$ کدام است ؟ (سراسری ۸۳)

۱) $-4 \pm \sqrt{2}$ ۲) $-2 \pm \sqrt{2}$ ۳) $-1 \pm \sqrt{2}$ ۴) $2 \pm \sqrt{2}$

۵۰- تابع ضمنی حقیقی به معادله $e^x + e^y - xe^{2x} - e^{2y} - 1 = 0$ مفروض است y'_x در نقطه (0و0)برابر است با: (سراسری ۸۲)

۱)صفر ۲)-2 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

۵۱- اگر داشته باشیم $x = \frac{1}{t} - t + 3, u = \frac{x+3}{x}, y = u^2 + 4$ در این صورت y'_t در t=1 برابر است با (سراسری ۸۳)

۱) $\frac{14}{9}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) $\frac{7}{3}$

رشته حسابداری

۱- حد عبارت $\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^5 - x^5}{h}$ کدام است؟ (سراسری ۷۵)

۱) $5x^4$ ۲) 5 ۳) 1 ۴) 0

۲- در تابع $y = \sin x$ مقدار $y'_x \times x'_y$ در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟ (سراسری ۷۵)

۱) 0 ۲) 1 ۳) $\frac{\sqrt{2}}{0}$ ۴) $\sqrt{2}$

۳- مشتق مرتبه nام تابع $y = \frac{1}{1-x}$ در نقطه $x = 0$ کدام است؟ (سراسری ۷۵)

۱) -1 ۲) 1 ۳) $n!$ ۴) $(n-1)!$

۴- مشتق تابع $y = (x^2 + 1)^x$ در نقطه $x = 1$ کدام است؟ (سراسری ۷۵)

۱) 1 ۲) 2 ۳) $\text{Ln}2 + 1$ ۴) $2 + 2\text{Ln}2$

۵- دیفرانسیل تابع $y = xe^x + \frac{1}{x+1}$ در نقطه $x = 0$ کدام است؟ (سراسری ۷۵)

۱) 0 ۲) dx ۳) 2dx ۴) 2edx

۶- در فاصله $1 \le x \le 2$ تابع $y = x^2 + 1$، مقدار مینیمم کدام است؟ (سراسری ۷۵)

۱) 0 ۲) 1 ۳) 2 ۴) 5

۷- مشتق $y'(x)$ برای f به ضابطه $xy+y^2-2=0$ در نقطه $(1,1)$ است؟ (سراسری ۷۶)

۱) -1 ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) 1

۸- مشتق مرتبه دهم $y=\frac{1}{(1-x)}$ به ازای $x=2$ کدام است؟ (سراسری ۷۶)

۱) $-11!$ ۲) $-10!$ ۳) $10!$ ۴) $11!$

۹- اگر $y=\frac{x}{1+x}$ باشد. حاصل $\Delta y-dy$ در نقطه $x=0$ به ازای $\Delta x=0.2$ کدام است؟ (سراسری ۷۶)

۱) $-\frac{1}{15}$ ۲) $-\frac{1}{30}$ ۳) $\frac{1}{30}$ ۴) $\frac{1}{15}$

۱۰- تابع f به ضابطه $y=x^4+1$ از نظر تحدب و تعقر چگونه است؟ (سراسری ۷۶)

۱) ابتدا محدب سپس مقعر ۲) ابتدا مقعر و سپس محدب

۳) همواره محدب ۴) همواره مقعر

۱۱- کدامیک از توابع زیر بر روی اعداد حقیقی اکیداً نزولی است؟ (سراسری ۷۶)

۱) $f(x)=x+\sin x$ ۲) $f(x)=-2x+\sin x$

۳) $f(x)=x-\sin x$ ۴) $f(x)=-x+2\text{Cos}x$

۱۲- به ازای کدام مقدار a نقطه عطف تابع $y=xe^{ax}$ در $x=1$ است؟ (سراسری ۷۶)

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

۱۳- مشتق مرتبه دهم $y=e^{2x}$ در $x=0$ کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) 0 ۲) 1 ۳) 2 ۴) 2^{10}

۱۴- در تابعی با ضابطه $y=\frac{x}{x-1}$ به ازای $\Delta x=0.1, x=2$ مقدار dy کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) ۰/۱- ۲) ۰/۲- ۳) ۰/۱ ۴) ۰/۲

۱۵- در فاصله $[-1,1]$ تابع $y=xe^x$ به چه صورتی است؟ (سراسری ۷۷)

۱) محدب موکد ۲) مقعر موکد

۳) ابتدا مقعر و سپس محدب ۴) ابتدا محدب سپس مقعر

۱۶- طول نقطه عطف تابعی به معادله $y=xe^{\frac{x}{2}}$ کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) $x=-4$ ۲) $x=-2$ ۳) $x=0$ ۴) $x=1$

۱۷- در تابعی به معادله $y=xe^{2x}+5x+1$ با افزایش یک واحد برای x، در نقطه $x=0$ تقریباً چه مقدار بر y اضافه می‌شود؟ (سراسری ۷۸)

۱) 1 ۲) 3 ۳) 5 ۴) 6

۱۸- اگر داشته باشیم $y=\frac{e^{-2x}-2x}{x+2}$، مقدار $\frac{dx}{dy}$ در نقطه $x=0$ کدام است؟ (سراسری ۷۸)

۱) -4 ۲) -2 ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) 4

۱۹- کدام تابع همواره محدب است؟ (سراسری ۷۸)

۱) $y=\text{Cos}x$ ۲) $y=\sin x$ ۳) $y=e^{2x}+x$ ۴) $y=\text{Ln}x$

۲۰- مقدار ماکزیمم تابع $y = \text{Ln}x + x$ در فاصله $[1,2]$ کدام است؟ (سراسری ۷۸)

۱) -1 ۲) 1 ۳) 2 ۴) $\text{Ln}2+2$

۲۱- از رابطه $x^2 + xy + 5y^2 - 4x - 3y = 0$، مقدار X'_y در نقطه $(1,1)$ کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) $dy = -\frac{1}{2}dx$ ۲) $dy = -5dx$ ۳) $dy = -\frac{1}{5}dx$ ۴) $dy = -2dx$

۲۲- اگر داشته باشیم $x^2 - 5xy + y^2 - 7x + y = -9$، مقدار دیفرانسیل y در نقطه $(1,1)$ به کدام صورت است؟

۱) $dy = -\frac{1}{2}dx$ ۲) $dy = -5dx$ ۳) $dy = -\frac{1}{5}dx$ ۴) $dy = -2dx$

۲۳- طول نقطه ماکزیمم تابع با ضابطه $f(x) = x^3 - 3x$ کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

۲۴- عرض نقطه عطف تابع با ضابطه $f(x) = xe^{-x}$ کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) $-2e^2$ ۲) $-e^1$ ۳) e^{-1} ۴) $2e^{-2}$

۲۵- کدام مورد برای تابع با ضابطه $f(x) = x^3 - 9x$، در فاصله $[0,2]$ درست است؟ (سراسری ۷۹)

۱) صعودی ۲) مقعر ۳) محدب ۴) نزولی

۲۶- اگر داشته باشیم $x^2 + y^2 - 5xy + 4x - 1 = 0$ مقدار y'_x در نقطه (۱و۱) کدام است؟ (سراسری ۸۰)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) 1 ۴) 2

۲۷- اگر تابع f به معادلهٔ $y = x^2 + x$ باشد، حاصل $(dy - \Delta y)$ در نقطه $x = 1$ و $\Delta x = 0.1$ برابر است با: (سراسری ۸۰)

۱) -0.02 ۲) -0.01 ۳) 0.02 ۴) 0.03

۲۸- تابع f به معادله $y = xe^x$ مفروض است. این تابع درجه فاصله‌ای اکیداً صعودی است؟ (سراسری ۸۰)

۱) R ۲) $(1,+\infty)$ ۳) $(-1,+\infty)$ ۴) $R^+ \cup \{0\}$

۲۹- در تابع سوال قبل، تابع در چه فاصله‌ای اکیداً مقعر است؟ (سراسری ۸۰)

۱) $(-\infty,-2)$ ۲) $(-2,+\infty)$ ۳) $R^+ \cup \{0\}$ ۴) R

۳۰- طول مثبت نقطه عطف تابع $y = \text{Ln}(1 + x^2)$ کدام است؟ (سراسری ۸۰)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 2 ۳) 1

۳۱- در معادله $x^3 + y^3 = xy + 1$ مقدار $\frac{dx}{dy}$ در نقطه $x = 1$ واقع در ناحیه اول، کدام است؟ (سراسری ۸۱)

۱) 1 ۲) -1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

۳۲- اگر داشته باشیم $y = x^x$ مقدار مشتق این تابع در $x = e$ برابر است با: (سراسری ۸۱)

۱) e ۲) e^{e-1} ۳) $2e^e$ ۴) ee^{e-1}

۳۳- تابع $y = xe^x$ در چه فاصله‌ای محدب است؟ (سراسری ۸۱)

۱) $(-\infty,-1)$ ۲) $(2,+\infty)$ ۳) $(1,+\infty)$ ۴) $(-2,+\infty)$

۳۴- اگر داشته باشیم $x^2 + y^2 - 2xy + 5x - 5y = 0$ مقدار **dy** در $(1,1)$ برابر است با: (سراسری ۸۱)

۱) $-dx$ ۲) dx ۳) $-2dx$ ۴) $2dx$

۳۵- شیب خط مماس بر منحنی $y=(2x-1)^{\frac{x}{2}}$ در نقطه x=2 کدام است؟ (سراسری ۸۲)

۱) $\frac{1}{2}Ln3-3$ ۲) $\frac{1}{2}Ln2=3$ ۳) $\frac{3}{2}Ln3+2$ ۴) $\frac{3}{2}Ln2+3$

۳۶- در تابع حقیقی f به معادله $y=(Lnx)^2+1$ نقطه بحرانی و نوع آن کدام است؟ (سراسری ۸۲)

۱) $(1,1)$ - ماکزیمم   ۲) $(1,1)$ - می نیمم   ۳) $(e,2)$ - می نیمم   ۴) $(e,2)$ - ماکزیمم

۳۷- اگر تابع $y=x^3+ax^2+bx+c$ در نقطه $(0,1)$ عبور کرده و در $x=1$ ماکزیمم و در $x=2$ نقطه عطف داشته باشد آنگاه b کدام است؟ (سراسری ۸۲)

۱) 6   ۲) -6   ۳) 9   ۴) -9

۳۸- اگر داشته باشیم $x^2-3xy+2y^2=0$، در نقطه $x=y=1$ مقدار dy برابر کدام است؟ (سراسری ۸۳)

۱) dx   ۲) $-dx$ ۳) 2dx   ۴) -2dx

۳۹- اگر داشته باشیم $x=\sqrt[3]{t},\ u=\sqrt{x+3},\ y=\sqrt{u+2}$ مقدار y'_t به ازای $t=1$ برابر است با : (سراسری ۸۳)

۱) $\frac{1}{48}$ ۲) $\frac{1}{24}$ ۳) $\frac{1}{16}$ ۴) 1

۴۰- تابع با ضابطه $y=Ln\frac{x}{x+1}$ در فاصله $[1,2]$ چگونه است؟ (سراسری ۸۳)

۱) محدب   ۲) مقعر   ۳) نزولی اکید   ۴) شامل نقطه عطف

۴۱- نقطه بحرانی تابع $y=xLnx$ به کدام صورت است؟ (سراسری ۸۳)

۱) $x=e$، ماکزیمم   ۲) $x=-e$ مینیمم

۳) $=e^{-1}$ مینیمم   ۴) $x=-e^{-1}$ ماکزیمم

۴۲- مشتق عبارت $\sqrt[3]{x^2}(x-2)$ به ازای $x=-1$ کدام است؟ (مدیریت ۸۴)

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۳

۴۳- از رابطه $x^2+2y^2-3xy+4x=8$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ در نقطه (۲,۱) کدام است؟ (مدیریت ۸۴)

۱) ۱-   ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) ۳

۴۴- اگر $f(x)=\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}$ باشد حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}$ برابر کدام است؟ (حسابداری ۸۴)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۲

۴۵- از رابطه $y^2=f(y-2x)$ با شرط $f'(1)=-2$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ در نقطه $x=1$ و $y=3$ کدام است؟ (حسابداری ۸۴)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۴۶- نرخ تغییر تابع $\sqrt{x^2-2x}$ نسبت به $\frac{x}{x-1}$ در نقطه $x=-1$ کدام است؟ (اقتصاد ۸۴)

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۵

۴۷- مشتق مرتبه دهم تابع $y=xe^{x}$ در $x=1$ برابر است با : (اقتصاد ۸۴)

۱) $10e$ ۲) $11e$ ۳) $e+10$ ۴) $e+11$

۴۸- نرخ تغییر تابع $\sqrt{x^2+3x}$ نسبت به $\frac{x}{x+1}$ در نقطه $x=1$ کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ۸۵)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۴۹- مشتق مرتبه دهم $f(x)=x-\sin x$ کدام است؟ (اقتصاد ۸۵)

۱) $-x\sin x+10\cos x$ ۲) $1-x\cos x-\sin x$

۳) $-x\sin x-\cos x$ ۴) $-10x\cos x+\sin x$

۵۰- نرخ تغییر تابع $f(x)=Ln(1+x^2)$، نسبت به تابع $g(x)=Ln(x+2)$ در نقطه $x=3$ برابر است با: (اقتصاد ۸۵)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) $\frac{5}{6}$

۵۱- اگر $y=t^3-3t$ و $x=t^2+t$ باشد، مقدار $\frac{d^2y}{dx^2}$ به ازای $t=1$ کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ۸۶)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۲

۵۲- در تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} ae^{-x} & x\geq 0 \\ x+\frac{b}{1-x} & x<0 \end{cases}$، مقدار $f'(0)$ موجود است حاصل $a\,.\,b$ کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ۸۶)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۲

۵۳- مقدار مشتق مرتبه دهم تابع $y=xe^{2x}$ در $x=1$ کدام است؟ (اقتصاد ۸۶)

۱) $9(2)^{10}e^2$ ۲) $5\times 10^4e^2$ ۳) $6(2)^{10}e^2$ ۴) $5\times 2^9e^2$

کاربرد مشتق

۱- معادله خط مماس بر منحنی $y=e^{-2x}$ در نقطه ای به طول صفر واقع بر آن کدام است؟ (مدیریت ۸۴)

۱) $y+2x=1$ ۲) $y-2x=1$ ۳) $2y+x=2$ ۴) $2y-x=2$

۲- تابع با ضابطه $y=\frac{x^2}{2}-Lnx$ در کدام بازه نزولی است؟ (مدیریت ۸۴)

۱) $(-1,1)$ ۲) $(0,1)$ ۳) $(0,e)$ ۴) $(1,e)$

۳- طول نقطه عطف نمودار تابع $y=Ln(x^2+4)$ با علامت مثبت کدام است؟ (مدیریت ۸۴)

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۴- خط مماس بر منحنی تابع $y=Ln(x^3-3)$ در نقطه ای به طول ۲ واقع بر آن نیمساز ناحیه اول را با کدام طول قطع می کند؟ (حسابداری ۸۴)

۱) $\frac{8}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) ۲

۵- تابع $y=(x^2+1)e^{-x}$ در کدام بازه صعودی است؟ (حسابداری ۸۴)

۱) $(-\infty,-1)$ ۲) $(-1,+\infty)$ ۳) R ۴) ϕ

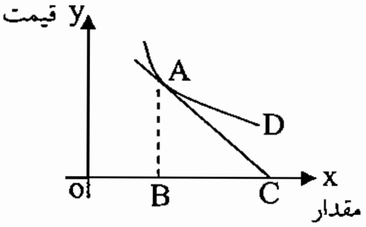
۶- مجموعه طول نقاط عطف نمودار تابع $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ کدام است؟ (حسابداری ۸۴)

۱) $\{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\}$ ۲) $\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$ ۳) $\{-\sqrt{6}, 0, \sqrt{6}\}$ ۴) $-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$

۷- تابع تقاضا به صورت $q = 10 - Ln(p+1)$ که در آن p قیمت و q مقدار تقاضاست مفروض می باشد. کشش تقاضا در قیمت $p = 2$ کدام است؟ (اقتصاد ۸۴)

۱) $\frac{-1}{10 - Ln3}$ ۲) $\frac{-2}{3(10 - Ln3)}$ ۳) $-10 + Ln3$ ۴) $\frac{-10 + Ln3}{2}$

۸- اگر در شکل مقابل D تابع تقاضا باشد که در آن x مقدار و y قیمت می باشد، مقدار کشش در روی شکل کدام است؟ (اقتصاد ۸۴)



۱) $-\frac{oB}{cB}$ ۲) $-\frac{oC}{Ac}$ ۳) $-\frac{Bc}{oB}$ ۴) $-\frac{Ac}{oC}$

۹- اگر تابع تقاضا $y = f(x)$ فرض شود، بین درآمد نهایی و کشش تقاضا کدام رابطه برقرار است. (y قیمت، x مقدار تقاضا و E کشش تقاضا نسبت به قیمت است). (اقتصاد ۸۴)

۱) $MR = y\left(1 + \frac{1}{E}\right)$ ۲) $MR > y\left(1 + \frac{1}{E}\right)$ ۳) $y = MR\left(1 + \frac{1}{E}\right)$ ۴) $y > MR\left(1 + \frac{1}{E}\right)$

۱۰- اگر تابع تقاضا $y = 18 - 2x$ و تابع هزینه $Tc = 10x - x^2$ باشد، x مقدار تقاضا و y قیمت است، به ازای چه مقدار سود بنگاه ماکزیمم است؟ (اقتصاد ۸۴)

۱) $x = \frac{5}{2}$ ۲) $x = 4$ ۳) $x = 5$ ۴) $x = \frac{13}{2}$

۱۱- اگر تابع هزینه کل $Tc = x^2 + 12x + 54$ باشد و x مقدار تولید است. حمل تلاقی تابع هزینه نهایی و هزینه متوسط کدام است؟ (اقتصاد ۸۴)

۱) $(6,24)$ ۲) $(2,16)$ ۳) $(3,36)$ ۴) $(3,39)$

۱۲- میزان قیمت یک کالا با نرخ ۶ درصد و میزان تولید ۴ درصد در سال افزایش یافته است. میزان فروش بنگاه چند درصد افزایش می یابد؟ (حسابداری و مدیریت ۸۵)

۱) ۲۴ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۹

۱۳- تابع $y = xe^{-x}$ در چه فاصله ای مقعر است؟ (حسابداری و مدیریت ۸۵)

۱) $(-\infty,4)$ ۲) $(-\infty,3)$ ۳) $(-\infty,2)$ ۴) R

۱۴- اگر هزینه کل تولید $Tc = x^2 + 4$ باشد، مینیمم هزینه متوسط کدام است و بر روی کدام تابع قرار دارد؟ (حسابداری و مدیریت ۸۵)

۱) $(1,2)$، هزینه نهایی ۲) $(2,4)$، هزینه کل
۳) $(2,4)$، هزینه نهایی ۴) $(1,5)$، هزینه کل

۱۵- برای بنگاهی نرخ افزایش قیمت سالانه ۸ درصد و نرخ تولید سالیانه ۶ درصد کاهش پیدا می کند، نرخ درآمد سالانه این بنگاه چند درصد رشد می کند؟ (اقتصاد ۸۵)

۱) ۲ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) ۴۸

۱۶- ماکزیمم مطلق تابع با ضابطه $y = |4 - x^2|$ در فاصله $x \in [-2,4]$ کدام است؟ (اقتصاد ۸۵)

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۱۷- اگر x مقدار کالا و y قیمت هر واحد کالا باشد، تابع تقاضا $y=-x^{۲}+۸x+۱۶$ و تابع هزینه $y=۲x^{۲}+x$ است، ماکزیمم سود کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ۸۶)

۱) ۱۲۵ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۷۵

۱۸- عرض نقطه بحرانی تابع $y=\frac{۱}{x}+Lnx$ و نوع آن کدام است؟ (اقتصاد ۸۶)

۱) $y=۲$، ماکزیمم ۲) $y=۱$، مینیمم ۳) $y=۱$، ماکزیمم ۴) $y=۲$، مینیمم

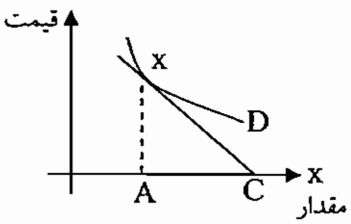
۱۹- تابع هزینه کل به صورت $Tc=x^{۲}+۶x+۴$ است. محل تلاقی AC و MC کدام است؟ (اقتصاد ۸۶)

۱) $(۱,۷)$ ۲) $(۲,۸)$ ۳) $(۲,۱۰)$ ۴) $(۱,۱۱)$

۲۰- اگر تابع هزینه کل یک انحصارگر $Tc=x^{۲}+۴x$ و تابع تقاضا $P=۲۰-x$ باشد، به ازای چه مقدار تولید سود بنگاه ماکزیمم است؟ و سود ماکزیمم کدام است؟ (اقتصاد ۸۶)

۱) $x=۳$، سود ۳۶
۲) $x=۵$، سود ۴۰
۳) $x=۲$، سود ۲۴
۴) $x=۴$، سود ۳۲

۲۱- تابع تقاضا در شکل روبرو رسم شده است، مقدار کشش تقاضا نسبت به قیمت در روی شکل کدام است؟ (اقتصاد ۸۶)



۱) $-\frac{oB}{Ac}$ ۲) $-\frac{AC}{oA}$ ۳) $-\frac{MA}{CA}$ ۴) $-\frac{CA}{MA}$

۲۲- خط مماس بر منحنی تابع $y=x^{۲}Ln(x-۲)$ در نقطه ای به طول ۳ واقع بر آن محور yها را با کدام عرض قطع می کند؟ (حسابداری و مدیریت ۸۶)

۱) -۲۷ ۲) -۲۴ ۳) -۱۸ ۴) -۱۵

پاسخ تشریحی تستهای طبقه‌بندی شده فصل چهارم

رشته اقتصاد

۱- گزینه ۲ صحیح است.

$$y=\frac{۲x^{۲}-۱}{x^{۲}+۱},\ y'_x=\frac{۱}{x'_y}$$

$$x'_y=\frac{۱}{y_x}=\frac{۱}{\frac{۴x(x^{۲}+۱)-۲x(۲x^{۲}-۱)}{(x^{۲}+۱)^{۲}}}=\frac{۱}{\frac{۴x^{۳}+۴x-۴x^{۳}+۲x}{(x^{۲}+۱)^{۲}}}=\left.\frac{(x^{۲}+۱)^{۲}}{۶x}\right|_{x=۱}=\frac{(۱^{۲}+۱)^{۲}}{۶\times۱}=\frac{۲}{۳}$$

۲-گزینه ۴ صحیح است.

$$y=\frac{x+۲}{x+۳}\to y^{(۱)}=\frac{x+۳-x-۲}{(x+۳)^{۲}}=\frac{۱}{(x+۳)^{۲}}$$

$$y^{(۲)}=\frac{-۲(x+۳)}{(x+۳)^{۴}}=\frac{-۲}{(x+۳)^{۳}}$$

$$y^{(۳)}=\frac{+۳\times۲(x+۳)^{۲}}{(x+۳)^{۶}}=\frac{۳\times۲\times۱}{(x+۳)^{۴}}$$

$$\vdots$$

$$y^{(۱۵)}=\frac{۱\times۲\times....\times۱۵}{(x+۳)^{۱۶}}=\frac{۱۵!}{(x+۳)^{۱۶}}$$

$$\left.y^{(۱۵)}\right|_{x=-۲}=\frac{۱۵!}{(-۲+۳)^{۱۶}}=۱۵!$$

۳- گزینه ۱ صحیح است.

$$tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)=\mathrm{Ln}\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow \mathrm{Arctg}\frac{y}{x}=\mathrm{Ln}\sqrt{x^2+y^2}$$

از طرفین دیفرانسیل می گیریم:

$$\frac{\frac{۱}{x}}{۱+\frac{y^{۲}}{x^{۲}}}dy+\frac{\frac{-y}{x^{۲}}}{۱+\frac{y^{۲}}{x^{۲}}}dx=\frac{\frac{۲x}{۲\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}dx+\frac{\frac{۲y}{۲\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}dy$$

$$\Rightarrow\left(\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}\right)dy=\left(\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{y}{x^2+y^2}\right)dx$$

$$(x-y)dy=(x+y)dx\Rightarrow dy=\frac{x+y}{x-y}dx$$

$$\left.dy\right|_{x=1}=\frac{1+y}{1-y}dx$$

۴-گزینه ۴ صحیح است.

$$f(x)=x^{\frac{1}{3}}(x+4)^{-\frac{2}{3}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x+4)^{-\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}(x+4)^{-\frac{5}{3}}x^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x)=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{[x(x+۴)]^۲}}-\frac{۲\sqrt[۳]{x}}{۳\sqrt[۳]{(x+۴)^۵}}\Rightarrow f'(x)=\frac{\sqrt[۳]{(x+۴)^۳}-۲\sqrt[۳]{x^۳}}{۳\sqrt[۳]{x^۲(x+۴)^۵}}=۰$$

$$\sqrt[3]{(x+4)^3}-2\sqrt[3]{x^3}=0\Rightarrow x+4-2x=0\Rightarrow x=4$$

همانطور که ملاحظه شد تابع تنها در $x=4$ دارای اکسترمم است از نوع Max

x		۴	
$f'_{(x)}$	+	۰	−
		max	

۵- گزینه ۱ صحیح است.

$$y=x^3+2kx^2+k$$

$$y'=3x^2+4kx\Rightarrow y''=6x+4k$$

$$y''\Big|_{x=1}=6+4k=0\Rightarrow k=-\frac{3}{2}$$

۶- گزینه ۳ صحیح است.

$$\lim_{h\to0}\frac{\mathrm{Sin}(\frac{\pi}{6}+h)-\mathrm{Sin}\frac{\pi}{6}}{h}=(\mathrm{Sin}x)'=\mathrm{Cos}x\Big|_{x=\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۷- گزینه ۱ صحیح است.

$$y=\frac{x}{1-x}\rightarrow y^{(1)}=\frac{1-x+x}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$y^{(2)}=\frac{2(1-x)}{(1-x)^4}=\frac{2\times1}{(1-x)^3}$$

$$y^{(3)}=\frac{2\times3(1-x)^3}{(1-x)^6}=\frac{3\times2\times1}{(1-x)^4}$$

$$\vdots$$

$$y^{(9)}=\frac{9!}{(1-x)^{10}}\Rightarrow y^{(9)}\Big|_{x=2}=\frac{9!}{(1-2)^{10}}=9!$$

۸- گزینه ۱ صحیح است.

$$\begin{cases}x=\frac{1}{t}\\y=t\end{cases}\Rightarrow y=\frac{1}{x}\Rightarrow y'_x=\frac{-1}{x^2}\Rightarrow y''_x=\frac{2}{x^3}=2t^3$$

۹-گزینه ۱ صحیح است.

$$y=\frac{x}{۱+x}$$

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-fx\Rightarrow\Delta y=\frac{x+\Delta x}{۱+x+\Delta x}-\frac{x}{۱+x}\Rightarrow$$

$$\Delta y\Big|_{\substack{x=۱\\ \Delta x=۰/۴}}=\frac{۱/۴}{۲/۴}-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۱۲}$$

$$dy = f'(x)dx \Rightarrow dy = \frac{۱+x-x}{(۱+x)^۲}dx = \frac{۱}{(۱+x)^۲}\times dx \Rightarrow dy|_{\substack{x=۱\\ dx=۰/۴}} = \frac{۰/۴}{۴} = ۰/۱$$

$$\Delta y - dy = \frac{۱}{۱۲} - \frac{۱}{۱۰} = -\frac{۱}{۶۰}$$

۱۰- گزینه ۴ صحیح است.

تابعی صعودی است که مشتق آن همواره مثبت باشد. همانطور که دیده می‌شود فقط در گزینه ۴ مشتق همواره مثبت است.

$$1)f'(X) = -1+\cos x \Rightarrow -2 \le f'(x) \le 0$$

$$2)f'(x) = 1-2\sin x \Rightarrow -1 \le f'(x) \le 3$$

$$3)f'(x) = 1+2\cos x \Rightarrow -1 \le f'(x) \le 3$$

$$4)f'(x) = 1-\cos x \Rightarrow 0 \le f'(x) \le 2$$

۱۱- گزینه ۴ صحیح است.

$$y = x\ln ax$$

$$y' = \ln ax + \frac{a}{ax}.x \Rightarrow y' = \text{Ln}ax + 1 \Rightarrow y'|_{x=1} = \text{Ln}a + 1 = 0$$

$$\text{Ln}a = -1 \Rightarrow a = e^{-1} \Rightarrow a = \frac{1}{e}$$

۱۲- گزینه ۳ صحیح است.

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = \text{Ln}t \end{cases} \Rightarrow y = \text{Ln}\sqrt{x}$$

$$y'_x = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2x} \Rightarrow y''_x = \frac{-2}{4x^2} = \frac{-1}{2x^2} = \frac{-1}{2t^4}$$

۱۳- گزینه ۳ صحیح است.

$$y = \frac{x}{x+1}$$

$$dy = f'(x)dx \Rightarrow dy = \frac{x+1-x}{(x+1)^2}dx \Rightarrow dy = \frac{dx}{(x+1)^2}$$

$$dy|_{\substack{x=1\\ dx=0/1}} = \frac{0/1}{(1+1)^2} = 0/025$$

۱۴-گزینه ۳ صحیح است.

$$y = \text{Ln}\frac{x}{x+1} \Rightarrow y = \text{Ln}x - \text{Ln}(x+1)$$

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \Rightarrow y'' = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow y'' = 0 \Rightarrow \frac{-2x-1}{x^2(x+1)^2} = 0$$

$$-2x-1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

ضابطه تابع در فاصله $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$ مقعر می‌باشد و طبق تست در فاصله $[0و1]$ مقعر موکد است.

x	$-\frac{1}{2}$	
y''	+	-

۱۵-گزینه ۲ صحیح است.

$$xLny + yLnx + 2xy - x - y = 0$$

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{Lny + \frac{1}{x}(y) + 2y - 1}{\frac{1}{y}(x) + Lnx + 2x - 1}$$

$$y'_x \big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = -\frac{Ln1 + \frac{1}{1}(1) + 2(1) - 1}{\frac{1}{1}(1) + Ln1 + 2(1) - 1} = -1$$

۱۶- گزینه ۱ صحیح است.

$$y = Arctgx$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow y'' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow y'' = 0 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

به دلیل تغییر علامت تابع در نقطه $x = 0$ پس این نقطه، نقطه‌ی عطف است.

x	0	
y''	+	-

۱۷- گزینه ۲ صحیح است.

$$y = e^{2x}$$

$$y^{(1)} = 2e^{2x}$$

$$y^{(2)} = 2^2 e^{2x}$$

.

.

.

$$y^{(n)} = 2^n e^{2x} \rightarrow y^{(n)} = \big|_{x=0} = 2^n e^{2(0)} = 2^n$$

۱۸- گزینه ۳ صحیح است.

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \qquad f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$f^{(2)}_{(x)} = \frac{2\times 1}{(x-1)^3} \qquad f^{(n)}_{(-1)} = \frac{(-1)^n \times n!}{(-1-1)^{n+1}} = \frac{(-1)^n n!}{(-1)^{n+1} 2^{n+1}} = -\frac{n!}{2^{n+1}}$$

.

$$f^{(n)}_{(x)} = \frac{n!(-1)^n}{(x-1)^{n+1}}$$

۱۹- گزینه ۴ صحیح است.

$f(x)=2-x^2 \Rightarrow f'(x)=-2x=0 \Rightarrow x=0$

$f(0)=2, f(1)=\frac{3}{2}, f(2)=3$

$\lim_{x\to 1^-} 2-x^2=2-1=1$

تابع با ضابطه $f(x)$ دارای $Max=3$ و فاقد Min می باشد.

۲۰- گزینه ۱ صحیح است.

$f'(x_1)=0 \to f'(x_1)f(x_2)=0$

۲۱- گزینه ۴ صحیح است.

$$\lim_{\Delta Y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{y'_x}=-\frac{f'y}{f'x}=x'_y$$

$$Ln\frac{x-y}{x+y}=6 \Rightarrow Ln(x-y)-Ln(x+y)=6$$

$$x'_y=-\frac{\frac{-1}{x-y}-\frac{1}{x+y}}{\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}}=-\frac{\frac{-x-y-x+y}{(x+y)(x-y)}}{\frac{x+y-x+y}{(x-y)(x+y)}}=-\frac{-2x}{2y}=\frac{x}{y}$$

۲۲- گزینه ۱ صحیح است.

$y=e^{x-1}$

$x=2 \Rightarrow y=e^{2-1}=e \Rightarrow A(2,e)$

$y'=e^{x-1}\Big|_{x=2}\ \ y'=e$ شیب خط مماس

$y-y_1=m(x-x_1)$

$y-e=e(x-2) \Rightarrow y=xe-2e+e \Rightarrow y=xe-e=e(x-1)$

۲۳- گزینه ۲ صحیح است.

$y=Ln(1+x^2)+\int_0^1 Sin(e^x)dx$

$y=Ln(1+x^2)+$(حاصل انتگرال معین (یک عدد ثابت

$$y'=\frac{2x}{1+x^2}+0 \Rightarrow y'_{(1)}=\frac{2(1)}{1+1^2}=\frac{2}{2}=1$$

۲۴- گزینه ۳ صحیح است.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f'x}{f'y}$$ با استفاده از مشتق ضمنی

$(x+1)^y-y^{x+1}=0$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y(x+1)^{y-1}-y^{x+1}Lny}{(x+1)^y Ln(x+1)-(x+1)y^x}$$

$$\frac{dy}{dx}\Bigg|_{\substack{x=0\\y=1}} z-\frac{(1)(0+1)^{1-1}-(1)^{0+1}Ln1}{(0+1)^1 Ln(0+1)-(0+1)(1)^0}=-\frac{1-0}{0-1}=1$$

۲۵- گزینه ۲ صحیح است.

$$y=f(u)\Rightarrow y'=u'f'_{(u)}$$

$$g(x)=f(x.f(x))\Rightarrow g'(x)=\left(x.f(x)\right)'f'(x.f(x))$$
$$=(1.f(x)+xf'(x))f'(x.f(x))$$
$$\Rightarrow g'(0)=((1).f(0)+0.f'(0))f'(0.f(0))$$
$$=f(0)f'(0)$$

۲۶- گزینه ۴ صحیح است.

$$y=\frac{x}{x+1}$$
$$y^{(1)}=\frac{1\times(x+1)-x}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$$
$$y^{(2)}=\frac{-2\times1}{(x+1)^3}$$
$$y^{(3)}=\frac{3\times2\times1}{(x+1)^4}$$
.
.
$$y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}n!}{(x+1)^{n+1}}\Rightarrow y^{(n)}|_{x=0}=\frac{(-1)^{n-1}n!}{(0+1)^{n+1}}=(-1)^{n-1}n!$$

۲۷- گزینه ۱ صحیح است.

$$y=x^3+2ax^2+a$$
$$y'=3x^2+4ax\Rightarrow y''=6x+4a$$
$$y''|_{x=1}=6+4a=0\ \Rightarrow a=-\frac{3}{2}$$

۲۸- گزینه ۴ صحیح است.

با توجه به دیفرانسیل تابع $dy=f'(x)dx$ داریم:

$$y=(x^2+1)^x\ \rightarrow\ \ Lny=Ln(x^2+1)^x$$
$$Lny=xLn(x^2+1)\Rightarrow\frac{y'}{y}=1\times Ln(x^2+1)+\frac{2x}{x^2+1}\times x$$
$$y'=y[Ln(x^2+1)+\frac{2x^2}{x^2+1}]\Rightarrow y'=(x^2+1)^x[Ln(x^2+1)+\frac{2x^2}{x^2+1}]$$
$$dy=(x^2+1)^x[Ln(x^2+1)+\frac{2x^2}{x^2+1}]dx$$
$$dy|_{\substack{x=1\\ dx=\frac{1}{2}}}=(1+1)^1[Ln(1^2+1)+\frac{2\times1^2}{1+1}]\times\frac{1}{2}=2(Ln2+1)\frac{1}{2}=Ln2+1$$

۲۹- گزینه ۲ صحیح است.

$$y=e^{Lnx}\Rightarrow y=x\Rightarrow y'=1$$
$$e^{Lnx}=x$$

۳۰- گزینه ۲ صحیح است.

$$y = Ln(x+1) \Rightarrow y^{(1)} = \frac{1}{x+1} \Rightarrow y^{(2)} = \frac{-1}{(x+1)^2} \Rightarrow$$

$$y^{(3)} = \frac{2}{(x+1)^3} \Rightarrow y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}\Big|_{x=0} = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

۳۱- گزینه ۱ صحیح است.

با توجه به دیفرانسیل تابع $dy = f'_{(x)}dx$ داریم:

$$y = x^2 - 4x + 2$$

$$dy = (2x-4)dx \xrightarrow[\Delta x = 0/1 \ x=1]{dx = \Delta x} dy = (2-4)0/1 = -0/2$$

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

$$\Delta y = (x+\Delta x)^2 - 4(x+\Delta x) + 2 - x^2 + 4x - 2$$

$$= x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - 4x - 4\Delta x + 2 - x^2 + 4x - 2$$

$$= 2x\Delta x + \Delta x^2 - 4\Delta x$$

$$\xrightarrow[\Delta x = 0/1]{x=1} = 2\times 1\times 0/1 + 0/1\times 0/1 - 4\times 0/1 = -0/19$$

$$\Delta y - dy = -0/19 - (-0/2) = 0/01$$

۳۲- گزینه ۲ صحیح است.

$$y = \sqrt{x}Lnx$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}Lnx + \frac{1}{x}\sqrt{x} = \frac{xLnx + 2\sqrt{x}\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}} = \frac{xLnx + 2x}{2x\sqrt{x}} = \frac{x(Lnx+2)}{2x\sqrt{x}} = 0$$

$Lnx + 2 = 0 \Rightarrow Lnx = -2 \Rightarrow x = e^{-2}$ طول نقطه بحرانی

	e^{-2}	
y'	$-$ ↘	$+$ ↗

۳۳- گزینه ۱ صحیح است.

در توابعی که به صورت $(n \in N), f(x) = (x-a)^{2n} + b$ تعریف می‌شود. نقطه $M = \left| \begin{smallmatrix} x_0 = a \\ y_0 = b \end{smallmatrix} \right.$ نقطه Min نسبی است. پس نقطه $x = 2$ طول نقطه Min نسبی و $y = 3$ عرضه نقطه Min نسبی می‌باشد. پس نقطه بحرانی $(2,3)$ مینیمم نسبی تابع می‌باشد.

۳۴-گزینه ۲ صحیح است.

برای سادگی کار، تابع را تجزیه می‌کنیم: $f(x) = \dfrac{1}{x(1-x)} = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{x}$ حال مشتق nام هر یک از توابع بالا را بدست می‌آوریم.

$$f_1(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$f_1^{(1)}x = \frac{1}{(1-x)^2} \rightarrow f_1^{(2)}x = \frac{2\times 1}{(1-x)^2} \rightarrow f_{(1)}^{(3)}x = \frac{3\times 2\times 1}{(1-x)^4} \Rightarrow$$

$$f_1^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\Big|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{n!}{(1-\frac{1}{2})^{n+1}} = \frac{n!}{(\frac{1}{2})^{n+1}} = 2^{n+1} \times n!$$

$$f_2(x) = \frac{1}{x}$$

$$f_2^{(1)}(x) = -\frac{1}{x^2} \rightarrow f_2^{(2)}(x) = \frac{2\times 1}{x^3} \rightarrow f_2^{(3)}(x) = -\frac{3\times 2\times 1}{x^4} \rightarrow$$

$$f_2^{(n)}(x) = \frac{n!(-1)^n}{x^{n+1}}\Big|_{x=\frac{1}{2}} \quad \frac{n!(-1)^n}{(\frac{1}{2})^{n+1}} = 2^{n+1} \times n! \times (-1)^n$$

$$f_{(x)}^{(n)} = 2^{n+1} \times n! + 2^{n+1} \times n! \times (-1)^{n+1} = 2^{n+1} n![1 + (-1)^n]$$

۳۵-گزینه ۳ صحیح است.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'_{(x)} = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''_{(x)} = 6ax + 2b\,|_{x=0} = 1 = 2b \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$f''_{(1)} = -1 \Rightarrow 6a \times (-1) + 1 = -1 = a = -\frac{1}{3}$$

$$f''_{(2)} = -3,\; f''_{(3)} = -5$$

۳۶- گزینه ۱ صحیح است.

براحتی می‌توان مقادیر h را در نقاط x=1,2,3,4 بدست آورد.

$h(1)=f(g(1))=f(2)=0$

$h(2)=f(g(2)), f(g(1))<f(g(2))<f(g(3)) \Rightarrow 0<h(2)<h(3)$

$h(3)=f(g(3))=f(3)$

$h(4)=f(g(4))=f(2)=0$

نتیجه می‌گیریم که $x=4, x=1$ نقاط مینیمم و $x=3$ یک نقطه ماکزیمم h است.

۳۷- گزینه ۲ صحیح است.

$f(x)=x^2e^x$

$f'(x)=2xe^x+x^2e^x \Rightarrow f''(x)=2e^x+2xe^x+2xe^x+x^2e^x=0$

$\Rightarrow 2e^x+4xe^x+x^2e^x=0 \Rightarrow e^x(2+4x+x^2)=0$

$$\begin{cases} e^x>0 \\ x^2+4x+2=0 \Rightarrow x=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-8}}{2}=\dfrac{-4\pm 2\sqrt{2}}{2}=-2\pm\sqrt{2} \end{cases}$$

چون مشتق دوم در این نقاط تغییر علامت می‌دهد پس طول نقاط عطف می‌باشند.

۳۸- گزینه ۳ صحیح است.

ابتدا دامنه تابع را محاسبه می‌کنیم. $D_f(-1,+\infty)$

$y=x\mathrm{Ln}(x+1)$

$$y'=\mathrm{Ln}(x+1)+\frac{x}{x+1} \Rightarrow y'=\frac{1}{x+1}+\frac{x+1-x}{(x+1)^2}=\frac{x+1+1}{(x+1)^2}=\frac{x+2}{(x+1)^2}=0$$

با توجه به دامنه تابع در فاصله $(-1,+\infty)$ تابع تقعر رو به بالا (اکیداً محدب) می‌باشد.

$x=-2$

x		۲-	
y''	-	0	+
	تقعر رو به پایین		تقعر رو به بالا

۳۹- گزینه ۳ صحیح است.

$y=x\mathrm{Ln}x$

$$y^{(1)}=\mathrm{Ln}x+1 \Rightarrow y^{(2)}=\frac{1}{x} \Rightarrow y^{(3)}=\frac{-1}{x^2} \Rightarrow y^{(4)}=\frac{+2}{x^3}$$

$$\Rightarrow y^{n}=\frac{(-1)^n(n-2)!}{x^{n-1}}\Big|_{n=10}=\frac{(-1)^{10}(10-2)!}{x^{10-1}}=8!x^{-9}$$

۴۰- گزینه ۳ صحیح است.

فرض کنید $v=\sqrt{x^2+8}$ ، $u=\dfrac{x}{x+1}$ بنابراین داریم:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dv}{du}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{du}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{1}{\frac{du}{dx}} \\ &\frac{dv}{dx}=\frac{x}{\sqrt{x^2+8}}, \frac{du}{dx}=\frac{1}{(x+1)^2} \end{aligned}\right\} \frac{dv}{du}=\frac{x(x+1)^2}{\sqrt{x^2+8}}\Big|_{x=1}=\frac{1(1+1)^2}{\sqrt{1^2+8}}=\frac{4}{3}$$

۴۱- گزینه ۴ صحیح است.

$$f(x)=4x-x^4 \quad ,x\in[-2,2]$$
$$f'(x)=0\Rightarrow 4-4x^3=0\Rightarrow 4(1-x)^3=0\Rightarrow x^3-1=0\Rightarrow x=1$$
$$f(1)=4(1)-1^4=3$$
$$f(-2)=4(-2)-(-2)^4=-24$$
$$f(2)=4(2)-2^4=8-16=-8$$

پس کمترین و بیشترین مقدار تابع به ترتیب ۲۴- و ۳ می‌باشد.

۴۲- گزینه ۱ صحیح است.

$$y=x^2e^x+3e^x$$
$$y'=2xe^x+x^2e^x+3e^x=e^x(2x+x^2+3)$$
$$y''=2e^x+2xe^x+x^2e^x+2xe^x+3e^x=e^x(5+4x+x^2)=0$$
$$x^2+4x+5=0$$
$$\Delta=16-4\times5\times1<0$$

چون $e^x>0$ و x^2+4x+5 نیز همیشه مثبت است.

پس $y''>0$ می‌باشد یعنی تابع فوق در R محدب است.

رشته مدیریت

۱- گزینه ۱ صحیح است.

$$x^2=S\Rightarrow u=(S-1)^3$$
$$y'_{x^2}=y'_s=y'_u.u'_s=\frac{2u}{2\sqrt{u^2+2}}\times3(s-1)^2=\frac{6(s-1)^5}{2\sqrt{(s-1)^6+2}}$$
$$y''_{x^2}=y''_s=\left.\frac{30(s-1)^4[2\sqrt{(s-1)^6+2}]-6(s-1)^5[\frac{6(s-1)^5}{4\sqrt{(s-1)^6+2}}]}{2[(s-1)^6+2]}\right|_{x=1}=\frac{0}{4}=0$$

۲ـ گزینهٔ ۲ صحیح است.

$$x'_y=\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{f'(x)}\Rightarrow x'_y=\frac{1}{2}$$
$$f'(x)=6x^2-4x\Rightarrow f'(1)=6(1)^2-4(1)=2$$

نکته: عبارت x'_y در واقع همان مشتق معکوس تابع f(x) یعنی $f^{-1}(x)$ است.

۳ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$f(x)=e^{2x}\Rightarrow f'(x)=2e^{2x}=2^1e^{2x}$$
$$f''(x)=4e^{2x}=2^2e^{2x}$$
$$f^n(x)=2^ne^{2x}\Rightarrow f^n(0)=2^ne^{2\times0}=2^n$$

۴ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$\left.\begin{matrix}m=0\\ f'(x)=-2x+4\end{matrix}\right\}\Rightarrow -2x+4=0\Rightarrow x=2\Rightarrow y=4$$

با توجه به شکل شیب مماس صفراست

Y=4 خط مماس

۵ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l} dy = y'_x dx \\ y'_x = f'(x) = -2x+4 \end{array}\right\} \Rightarrow dy = (-2x+4)dx \Rightarrow dy = (-2+4)(0/1) = 0/2$$

۶ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$y = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow y'_x = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0 \Rightarrow \text{تابع همواره نزولی}$$

$$y''_x = \frac{+2\times 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{4}{(x-1)^3} \qquad x-1=0 \Rightarrow x=1$$

		1	
$f''(x)$	$-$	¦	$+$
$f''(x)$	مقعر		محدب

(تقعر رو به بالا) (تقعر رو به پایین)

۷ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$\lim_{x\to 0} \frac{10^x - e^{2x}}{x} = \div \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{10^x \ln 10 - 2e^{2x}}{1} = \ln 10 - 2$$

۸ـ گزینه های این مسئله اشتباه باشد و جواب مسئله x=2 است.

$$y'_x = \ln x + \frac{x}{x} + \frac{2}{x^2} = \ln x + 1 + \frac{2}{x^2}$$

$$y''_x = \frac{۱}{x} - \frac{۴x}{x^۴} = \frac{۱}{x} - \frac{۴}{x^۳} \Rightarrow y''_x = ۰ \Rightarrow \frac{۱}{x} - \frac{۴}{x^۳} = ۰ \Rightarrow \frac{۱}{x} = \frac{۴}{x^۳} \Rightarrow x^۲ = ۴x \qquad x(x^۲-۴) = ۰ \begin{cases} x = ۰ \\ x = \pm ۲ \end{cases}$$

		-2		0		2	
x	$-$	¦	$-$	¦	$+$	¦	$+$
x^2-4	$+$	¦	$-$	¦	$-$	¦	$+$
y''	$-$	¦	$+$	¦	$-$	¦	$+$
		ق ق		غ.ق ق		غ.ق ق	

		-۲		۰		۲	
X	$-$	¦	$-$	¦	$+$	¦	$+$
X^2-4	$+$	¦	$-$	¦	$-$	¦	$+$
y'' عبارتست	$-$	¦	$+$	¦	$-$	¦	$+$

چون دامنه تابع R^+ است بنابراین نقطه عطف فقط ۲+ است.

۹ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$y'_x = \frac{-f'_x}{f'_y} = \frac{-(2x-2y+1)}{2y-2x-1} \Rightarrow y'_x = \frac{-(2-2+1)}{2-2-1} = 1$$

۱۰ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$y'_x = e^{2x} + 2xe^{2x} \qquad y'_x = 0 \Rightarrow e^{2x}(1+2x) = 0 \qquad 1+2x = 0 \Rightarrow x = \frac{-1}{2}$$

		$-\frac{1}{2}$	
y'	$-$	¦	$+$
		Min	

۱۱ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$y'_x = e^x + xe^x \qquad y'_x = 0 \Rightarrow e^x(1+x) = 0 \Rightarrow 1+x = 0 \Rightarrow x = -1$$

		-1	
y'	$-$	0	$+$

۱۲ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$y'_x = 3x^2 - 9 \qquad y'_x = 0 \Rightarrow 3x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

	$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$	
Y'	+	⋮	−	⋮	+
		Max		Min	

۱۳ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$y'_x = \frac{1}{x+1} \Rightarrow y''_x = \frac{-1}{(x+1)^2} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y'' = \frac{-1}{1^2} = -1$$

۱۴ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^4 - x^4}{h} = (x^4)' = 4x^3$$

یادآوری: مطابق تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

۱۵ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$y'_x = x^{x+2}\ln(x) + (x+2)x^{x+1} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y' = 1^3\ln(1) + 3(1)^2 = 3$$

یادآوری: در تابع $y = u^v$ مقدار y'_x (مشتق y نسبت به x) برابر است با $y'_x = v'u^v\ln(u) + vu'u^{v-1}$.

۱۶ـ گزینه ۲ صحیح است.

$y'_x = e^x - 2 \Rightarrow y''_x = e^x > 0 \Rightarrow$ تابع همواره محدب است

۱۷ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$y'_x = \ln x + \frac{x}{x} = \ln x + 1 \qquad y'_x = 0 \Rightarrow \ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$$

$$x = e^{-1} \Rightarrow y = x\ln x = e^{-1}\ln(e^{-1}) = -e^{-1}$$

		e^{-1}	
y'	−	0	+
		Min	

۱۸ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$f'(x) = 2e^{2x} = 2^1e^{2x}$$

$$f^2(x) = 4e^{2x} = 2^2e^{2x}$$

$$f^n(x) = 2^n e^{2x} \Rightarrow f^5(x) = 2^5e^{2x} \Rightarrow f^5(0) = 2^5e^{2\times 0} = 2^5 = 32$$

۱۹ـ گزینه۱ صحیح است.

$$y'_x = \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$dy = y'_x dx = \frac{dx}{(1+x)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} dx = \Delta x = 0/4 \\ x = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow dy = \frac{0/4}{(1+1)^2} = 0/1$$

۲۰ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f''(x) = 6x \qquad f''(x) = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

		0	
f''	−	0	+
	مقعر		محدب

۲۱ـ گزینه ۳ صحیح است.

گزینه ۱: $f(x)=x\sin x \Rightarrow f'(x)=\sin x + x\cos x \Rightarrow -\infty < f'(x) < +\infty$ هم صعودی و هم نزولی

گزینه ۲: $f(x)=x-\sin x \Rightarrow f'(x)=1-\cos x \Rightarrow 0 \le f'(x) \le 2$ صعودی

گزینه ۳: $f(x)=-x+\sin x \Rightarrow f'(x)=-1+\cos x \Rightarrow -2 \le f'(x) \le 0$ نزولی

گزینه ۴: $f(x)=-x+2\sin x \Rightarrow f'(x)=-1+2\cos x \Rightarrow -3 \le f'(x) \le 1$ هم صعودی و هم نزولی

۲۲ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$y'_x=\frac{-f'_x}{f'_y}=\frac{-(2x+y^2-4)}{1+2xy+2y},(x,y)=(1,1)\Rightarrow y'_x \Rightarrow \frac{-(2+1-4)}{1+2+2}=\frac{1}{5}$$

۲۳ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$f'(x)=\frac{-1}{x^2}=(-1)^1\frac{1!}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{-(-2x)}{x^4}=\frac{2}{x^3}=(-1)^2\frac{2!}{x^3}$$

$$f^3(x)=\frac{+2(-3x^2)}{x^6}=\frac{-6}{x^4}=(-1)^3\frac{3!}{x^4}$$

$$f^n(x)=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}\Rightarrow f^x(x)=(-1)^8\frac{8!}{x^9}\Rightarrow f^8(1)=\frac{8!}{1^9}=8!$$

۲۴ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l} dy=f'(x)dx \\ f'(x)=2x+1 \end{array}\right\}\Rightarrow dy=(2x+1)dx$$

$$dx=\Delta x=0/1, x=1\Rightarrow dy=(2(1)+1)0/1=0/3$$

۲۵ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$f(x)=\ln(x^2+1)\Rightarrow f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}=0 \quad \begin{array}{l} 2x=0\Rightarrow x=0 \\ x^2+1>0 \end{array}$$

		0	
f'	−	0	+

۲۶ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$dy=f'(x)dx\Rightarrow dy=(2+10e^{2x})dx, x=0, dx=1\Rightarrow dy=(2+10e^{2\times 0})(1)=12$$

$$f'(x)=2+10e^{2x}$$

۲۷ـ گزینه۲ صحیح است.

$$y'_x=\frac{-f'_x}{f'_y}=\frac{-(2x+y-2\ln y-\frac{2y}{x})}{x+2y-\frac{2x}{y}-2\ln x}, x=y=1\Rightarrow y'_x=\frac{-(2+1-0-2)}{1+2-2-0}=-1$$

۲۸ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{y'_x}=\frac{e^{2x}}{\frac{1}{x}-1-2\ln x+2x}, x=1\Rightarrow \frac{dx}{dy}=\frac{e^2}{1-1-0+2}=\frac{1}{2}e^2$$

		•	
Y'	−		+

$$y'_x=\frac{(\frac{1}{x}-1)e^{2x}-2e^{2x}(\ln x-x)}{(e^{2x})^2}=\frac{\frac{1}{x}-1-2\ln x+2x}{e^{2x}}$$

۲۹ـ گزینه ۴ صحیح است.

$y'_x=e^x+2>0\Rightarrow$ تابع همواره صعودی $\Rightarrow$ مطلق $Max: x=1\Rightarrow y=e+2$

نکته: در توابع پیوسته همواره صعودی برای یافتن Max مطلق در یک بازه مقدار انتهای بازه می‌بایست محاسبه شود و برای یافتن Min مطلق مقدار ابتدای بازه و (در توابع پیوسته همواره نزولی بر عکس این حالت رخ می‌دهد.)

۳۰ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$y'_x=3x^2+1\Rightarrow y''_x=6x=0\Rightarrow x=0$$

x		0	
y''	$-$		$+$
	مقعر		محدب

تقعررویه بالا تقعر رو به پایین

۳۱ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$\lim_{x\to 2}\frac{2^x-x^2}{x-2}=\div\Rightarrow\lim_{x\to 2}\frac{2^x\ln 2-2x}{1}=4\ln 2-4=4(\ln 2-1)$$

۳۲ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$f(x)=xe^{2x}\Rightarrow f'(x)=e^{2x}+2xe^{2x}=1\times 2e^{2x}+2^1xe^{2x}$$
$$f''(x)=2e^{2x}+2e^{2x}+4xe^{2x}=4e^{2x}+4xe^{2x}=2\times 2^1e^{2x}+2x^2e^{2x}$$
$$f^3(x)=8e^{2x}+4e^{2x}+8xe^{2x}=12e^{2x}+8xe^{2x}=3\times 2^2e^{2x}+2^3xe^{2x}$$
$$f^n(x)=n\times 2^{n-1}e^{2x}+2^nxe^{2x}\Rightarrow x=0\Rightarrow f^n(0)=n2^{n-1}e+2^n(0)e^0=n2^{n-1}$$

۳۳ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$y'_x=\frac{2xe^{2x}-e^{2x}}{x^2}\Rightarrow y'_x=0\Rightarrow 2xe^{2x}-e^{2x}=0\Rightarrow e^{2x}(2x-1)=0$$
$$\Rightarrow 2x-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

		$\frac{1}{2}$	
Y'	$-$		$+$
		Min	

۳۴ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$y=x^{-x^2}\Rightarrow y'_x=(-x^2)x^{-x^2-1}+(-2x)x^{-x^2}\ln x=-x^{-x^2+1}-2x^{-x^2+1}\ln x\Rightarrow$$
$$y'_x=-x^{-x^2+1}[1+2\ln x]=-x^{-x^2+1}(1+\ln x^2)$$

۳۵ـ گزینه۲ صحیح است.

$$f(x)=\ln(1+x)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x}$$

$$f''(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}=\frac{(-1)^{2-1}(2-1)!}{(1+x)^2}$$

$$f^3(x)=\frac{+2(1+x)}{(1+x)^4}=\frac{2}{(1+x)^3}=\frac{(-1)^{3-1}(3-1)!}{(1+x)^3}$$

$$f^4(x)=\frac{-6(1+x)^2}{(1+x)^6}=\frac{-6}{(1+x)^4}=\frac{(-1)^{4-1}(4-1)!}{(1+x)^4}$$

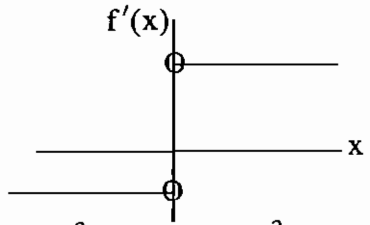
$$\vdots$$

$$f^n(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}\Rightarrow f^{10}(x)=\frac{-1\times 9!}{(1+x)^{10}}\Rightarrow f^{10}(0)=-9!$$

۳۶ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$f(x)=\begin{cases}x+5 & x\ge 0\\ -x+5 & x<0\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

همانطور که در شکل دیده می‌شود تابع $f'(x)$ در $x=0$ پیوسته نیست و در واقع فاقد حد می‌باشد بنابراین تابع در $x=0$ فاقد مشتق می‌باشد.



۳۷ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$dy^2=y''_x d^2x=e^x(x+2)d^2x, dx=\Delta x=0/1, x=1\Rightarrow dy^2=3e\times 0/01=0/03e$$

$$y'_x=e^x+xe^x\Rightarrow y''_x=e^x+e^x+xe^x=2e^x+xe^x=e^x(x+2)$$

یاد آوری : $\frac{dy^2}{d^2x}=f''(x)\Rightarrow dy^2=f''(x)d^2x$ مشتق مرتبه دوم

۳۸ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$f(x)=xe^x\Rightarrow f'(x)=e^x+xe^x\Rightarrow f''(x)=e^x+e^x+xe^x=e^x(x+2)$$

$$f''(x)=0\Rightarrow e^x(x+2)=0 \quad x+2=0\Rightarrow x=-2$$

		۲-	
y''	$-$		$+$
	مقعر		محدب

۳۹ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$f'(x)=e^x+xe^x\Rightarrow f''(x)=e^x(x+2)=0\Rightarrow x+2=0\Rightarrow x=-2$$

		۲-	
y''	$-$		$+$
		نقطه عطف	

۴۰ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$x^5+y^5-2xy=0$$

$$y'_x=\frac{-f'_x}{f'_y}=\frac{-\left(5x^4-2y\right)}{5y^4-2x}\Rightarrow,(x,y)=(1,1)\Rightarrow y'_x=\frac{-(5-2)}{5-2}=-1$$

۴۱ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$y'=\frac{2x}{x^2+1}\Rightarrow y''=\frac{2(x^2+1)-2x(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$y''=0\Rightarrow 2-2x^2=0\qquad 1-x^2=0\Rightarrow x=\pm1$$

x		-1		$+1$	
y''	$-$		$+$		$-$
		نقطه عطف		نقطه عطف	

۴۲ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$dy=y'_x dx=[2x(x+1)^{2x-1}+2(x+1)^{2x}\ln(x+1)]dx,x=1$$

$$\Rightarrow dy=(2\times2+2\times2^2\ln2)dx=4(2\ln2+1)dx$$

۴۳ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$y=\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x^2}\Rightarrow \mathrm{Ln}y=x^2\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$$

$$\mathrm{Ln}y=\lim_{x\to\infty}x^2\mathrm{Ln}\left(\frac{x}{1+x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{Ln}\left(\frac{x}{1+x}\right)}{\frac{1}{x^2}}=\div\Rightarrow \mathrm{Ln}y=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{\frac{x}{(1+x)}}}{\frac{-2x}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x(1+x)}}{\frac{-2}{x^3}}\Rightarrow$$

$$\mathrm{Ln}y=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2}{2(1+x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2}{2x}=-\infty\Rightarrow \mathrm{Ln}y=-\infty\Rightarrow y=0$$

۴۴ـ گزینه ۴ صحیح است.

آزمون پیوستگی

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^-}f_{(x)}=\lim\limits_{x\to2}3-x=1\\ \lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\frac{1}{2}x^2-1=1\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^+}f(x)=f(2)=1\Rightarrow$$

تابع در $x=2$ پیوسته است.

$$f'_{(x)}=\begin{cases}-1 & x\le2\quad \lim\limits_{x\to2^-}f'_{(x)}=\lim\limits_{x\to2^-}-1=-1\\ x & x>2\quad \lim\limits_{x\to2}f'_{(x)}=\lim\limits_{x\to2}x=2\end{cases}\qquad\Rightarrow \lim_{x\to2^-}f'_{(x)}\ne\lim_{x\to2^+}f'_{(x)}\Rightarrow$$

تابع مشتق پذیر نیست

۴۵ـ گزینه ۴ صحیح است.

با توجه به اشکال تا زمانی که تابع f در حال افزایش است مقدار g مثبت است (در فاصله ۰ تا ۱) و(در فاصله ۴ تا ۵) و در محدوده ای که f در حال کاهش است تابع g منفی است (در فاصله ۱ تا ۴) بنابر این g مشتق f است.

۴۶- گزینه ۴ صحیح است.

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}$$

$$f''(x)=\frac{-1}{(x+1)^2}=\frac{(-1)^{2-1}(2-1)!}{(x+1)^2}$$

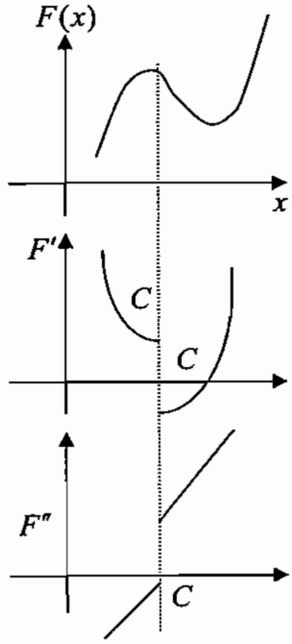
$$f^3(x)=\frac{+2}{(x+1)^3}=\frac{(-1)^{3-1}(3-1)!}{(x+1)^3}$$

$$f^n(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}\Rightarrow f^n(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$$

۴۷ـ گزینه ۱ صحیح است.

چون تابع $f(x)$ در نقطه C هموار نیست بنابراین $f'(c)$ موجود نیست از طرف دیگر برای $x\rangle c$ داریم $f''\langle 0, f'\rangle 0$ و برای $x\langle c$ داریم $f''\rangle 0, f'\langle 0$

بنا بر این گزینه یک صحیح است



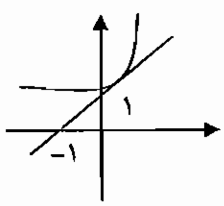
۴۸-گزینه ۱ صحیح است. میزان بازپرداخت وام با مقدار وام رابطه مستقیم، با نرخ بهره رابطه مستقیم و با سالهای بازپرداخت وام رابطه معکوس دارد. هر چه وام بیشتری دریافت کنیم قسط وام بیشتر خواهد داشت اگر نرخ بهره بالا رود مقدار بازپرداخت در هر قسط بیشتر خواهد شد اگر سالهای بازپرداخت نیز بیشتر شود مقدار قسط وام کمتر می‌شود پس:

$$\frac{\partial p}{\partial N}<0,\frac{\partial p}{\partial r}>0,\frac{\partial p}{\partial A}>0$$

۴۹- گزینه ۳ صحیح است.

$y=e^x$

$y_2=x+1$



با توجه به شکل دو تابع $y_1\geq y_2$ است.

۵۰ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$y'_x=2xe^x+x^2e^x\Rightarrow y''_x=2e^x+2xe^x+2xe^x+x^2e^x=e^x(x^2+4x+2)$$

$$y''_x=0\Rightarrow e^x(x^2+4x+2)=0\Rightarrow x^2+4x+2=0\Rightarrow \Delta=b^2-4ac=16-8=8$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4\pm2\sqrt{2}}{2}=-2\pm\sqrt{2}$$

x		$-2-\sqrt{2}$		$-2+\sqrt{2}$	
y''	$-$		$+$		$-$
		نقطه عطف		نقطه عطف	

۵۱ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$y'_x=\frac{-f'_x}{f'_y}=\frac{-(e^x-e^{2x}-2xe^{2x})}{e^y-2e^{2y}},(0,0)\Rightarrow y'_x=\frac{-(1-1-0)}{1-2}=0$$

۵۲ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$y'_t=y'_u.u'_x.x'_t=(2u)(\frac{-3}{x^2})(\frac{-1}{t^2}-1)$$

$$t=1\Rightarrow x=3,u=2\Rightarrow y'_{t=1}\quad=(2\times2)(\frac{-3}{9})(-1-1)=\frac{8}{3}$$

رشته حسابداری

۱-گزینه ۱ صحیح است.

$$f'_{(x)}=\lim_{\Delta X\to0}=\frac{f_{(x+\Delta x)}-f_{(x)}}{\Delta x}$$

$$f(x)=x^5\Rightarrow f'_{(x)}=5x^4$$

۲- گزینه ۲ صحیح است.

$$y=\sin x\begin{cases}y'_x=\cos x\\ x'_y=\dfrac{1}{\cos x}\end{cases}\Rightarrow y'_xx'_y=\cos x\times\frac{1}{\cos x}=1$$

$$y'_x=\frac{1}{x'y}$$

۳- گزینه ۳ صحیح است.

$$y=\frac{1}{1-x}$$

$$y^{(1)}=\frac{1}{(1-x)^2}\to y^{(2)}=\frac{2\times1}{(1-x)^3}\to y^{(3)}=\frac{3\times2\times1}{(1-x)^4}$$

$$\Rightarrow y^{(n)}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\Big|_{x=0}=\frac{n!}{1^{n+1}}=n!$$

۴- گزینه ۴ صحیح است.

$$y=(x^2+1)^x$$

$$Lny=xLn(x^2+1)\Rightarrow \frac{y'}{y}=Ln(x^2+1)+\frac{2x}{x^2+1}.x$$

$$\Rightarrow y'=y[Ln(x^2+1)+\frac{2x^2}{x^2+1}]$$

$$y'=(x^2+1)^x[Ln(x^2+1)+\frac{2x^2}{x^2+1}]|_{x=1}=(1+1)^1(Ln(1+1)+\frac{2\times 1}{1+1})=2Ln2+2$$

۵- گزینه ۱ صحیح است.

$$y=xe^x+\frac{1}{x+1}\Rightarrow dy=[e^x+xe^x-\frac{1}{(x+1)^2}]dx$$

$$dy|_{x=0}=[e^0+0\times e^0-\frac{1}{(0+1)^2})]dx=(1-1)dx=0$$

۶- گزینه ۳ صحیح است. تابع فوق در فاصله $[1,2]$ اکیدا صعودی است پس :

$$y=x^2+1\ ,1\le x\le 2$$

$$f(1)=1^2+1=2Min$$

$$f(2)=2^2+1=5Max$$

۷- گزینه ۲ صحیح است. با استفاده از مشتق‌گیری ضمنی داریم:

$$xy+y^2-2=0$$

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=-\frac{f'_x}{f''_y}=-\frac{y}{x+2y}|_{x=y=1}=-\frac{1}{1+2\times 1}=-\frac{1}{3}$$

۸- گزینه ۲ صحیح است.

$$y=\frac{1}{1-x}\to y^{(1)}=\frac{1}{(1-x)^2}\to y^{(2)}=\frac{2\times 1}{(1-x)^3}\to y^3=\frac{3\times 2\times 1}{(1-x)^4}$$

$$y^{(n)}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}|_{x=2}=\frac{n!}{(-1)^{n+1}}\Rightarrow y^{(10)}=10!\times(-1)^{11}=-10!$$

۹-گزینه ۲ صحیح است.

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

$$\Delta y=\frac{x+\Delta x}{1+x+\Delta x}-\frac{x}{1+x}=\frac{x+\Delta x+x^2+x\Delta x-x-x^2-x\Delta x}{(1+x+\Delta x)(1+x)}$$

$$=\frac{\Delta x}{(1+x+\Delta x)(1+x)}|_{\substack{x=0\\ \Delta X=0/2}}=\frac{0/2}{(1+0+0/2)(1+0)}=\frac{1}{6}$$

$$dy=f'(x)dx\Rightarrow dy=\frac{dx}{(1+x)^2}|_{\substack{x=0\\ dx=\Delta x=0/2}}=\frac{0/2}{(1+0)^2}=\frac{1}{5}$$

$$\Delta y-dy=\frac{1}{6}-\frac{1}{5}=\frac{-1}{30}$$

۱۰- گزینه ۳ صحیح است.

$x\ |\ \ \ 0$
o

همواره محدب است.

y'	+	+

$y = x^4 + 1 \Rightarrow y' = 4x^3 \Rightarrow y'' = 12x^2$

$y'' = 0 \Rightarrow x = 0$

۱۱- گزینه ۲ صحیح است. تنها تابعی که اکیداً نزولی است فقط تابع گزینه ۲ می‌باشد.

$f(x) = x + \operatorname{Sin}x \rightarrow f'(x) = 1 + \cos x \geq 0$

$f(x) = -2x + \operatorname{Sin}x \rightarrow f'(x) = -2 + \operatorname{Cos}x \leq -1$

$f(x) = x - \sin x \rightarrow f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$

$f(x) = -x + 2\cos x \rightarrow f'(x) = -1 - 2\sin x \Rightarrow -3 \leq f'(x) \leq 1$

۱۲- گزینه ۱ صحیح است.

$y = xe^{ax}$

$y' = e^{ax} + axe^{ax} = e^{ax}(1 + ax)$

$y^{(2)} = a(1+ax)e^{ax} + ae^{ax} = ae^{ax}(2 + ax)$

$$y''|_{x=1} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} 2 + a = 0 \Rightarrow a = -2 \\ \Rightarrow ae^{a} = 0 \Rightarrow a = 0 \end{matrix}$$

۱۳- گزینه ۴ صحیح است.

$y = e^{2x}$

$y^{(1)} = 2e^{2x} \rightarrow y^{(2)} = 4e^{2x} \rightarrow y^{(3)} = 8e^{2x} \Rightarrow y^{(10)} = 2^{10}e^{2x}$

$y^{(10)}|_{x=0} = 2^{10}e^{0} = 2^{10}$

۱۴- گزینه ۱ صحیح است.

$y = \dfrac{x}{x-1}$

$$dy = \frac{-1}{(x-1)^2}dx \Rightarrow dy|_{\substack{x=2 \\ \Delta x = dx = 0/1}} = \frac{-1}{(2-1)^2}(0/1) = -0/1$$

۱۵- گزینه ۱ صحیح است.

$y = xe^{x}$

$y' = e^{x} + xe^{x} \Rightarrow y'' = e^{x} + e^{x} + xe^{x} = 2e^{x} + xe^{x} = e^{x}(2 + x)$

$y'' = 0 \Rightarrow e^{x}(2 + x) = 0 \Rightarrow x = -2$

پس در فاصله $[-1,1]$ محدب (تقعر رو به بالا) موکد می‌باشد.

x		-۲	
y''	-		+

۱۶- گزینه ۱ صحیح است.

$y = xe^{\frac{1}{2}x}$

$$y' = e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}xe^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow y'' = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{4}xe^{\frac{1}{2}x} = e^{\frac{1}{2}x}(1 + \frac{1}{4}x)$$

$y'' = 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{4}x = 0 \Rightarrow x = -4$ طول نقطه عطف

۱۷- گزینه ۴ صحیح است. با استفاده از دیفرانسیل تابع داریم:

$$y = xe^{2x} + 5x + 1$$

$$dy = (e^{2x} + 2xe^{2x} + 5)dx \Big|_{\substack{x=0 \\ dx=1}} = (e^0 + 0 + 5) \times 1 = 6$$

۱۸- گزینه ۱ صحیح است.

$$y = \frac{e^{2x} - 2x}{x+2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2e^{2x} - 2)(x+2) - (e^{2x} - 2x)}{(x+2)^2}\Big|_{x=0} = \frac{(2e^0 - 2)(0+2) - (e^0 - 0)}{(0+2)^2} = \frac{-1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = x'_y = -4 \quad ,(x'_y = \frac{1}{y'_x})$$

۱۹- گزینه ۳ صحیح است.

$$y = e^{2x} + x \Rightarrow y' = 2e^{2x} + 1 \Rightarrow y'' = 4e^{2x} > 0$$

۲۰- گزینه ۴ صحیح است.

$$y = \text{Ln}x + x$$

$$y' = \frac{1}{x} + 1 \Rightarrow y' = \frac{1+x}{x} = 0 \Rightarrow x = -1$$

چون $x = -1$ در فاصله (۲و۱) نمی‌باشد پس در این فاصله فاقد نقطه بحرانی است و از طرفی

$$f(1) = 1 \, , f(2) = \text{Ln}2 + 2$$

۲۱- گزینه ۱ صحیح است.

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{2x + y - 4}{x + 10y - 3}\Big|_{x=y=1} = -\frac{2+1-4}{1+10-3} = \frac{1}{8}$$

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = 8$$

۲۲- گزینه ۲ صحیح است.

$$f(x,y) = x^2 - 5xy + y^2 - 7x + y + 9 = 0$$

$$f'_x dx + f'_y dy = (2x - 5y - 7)dx + (-5x + 2y + 1)dy = 0$$

$$f'_x dx + f'_y dy\,|_{x=y=1} = (2 - 5 - 7)dx + (-5 + 2 + 1)dy = 0$$

$$= -10dx - 2dy = 0 \Rightarrow dy = -5dx$$

۲۳- گزینه ۲ صحیح است.

X		−1		1	
y'	+ ↗		↘		↗

$f(x) = x^3 - 3x$

$f'_{(x)} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

$f(-1) = 2$

$f(1) = -2$

۲۴- گزینه ۴ صحیح است.

$f_{(x)} = xe^{-x}$

$f'_{(x)} = e^{-x} - xe^{-x} \Rightarrow f''_{(x)} = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x}$

$f''_{(x)} = 0 \Rightarrow xe^{-x} - 2e^{-x} = 0 \Rightarrow xe^{-x} = 2e^{-x} \Rightarrow x = 2$

$f_{(2)} = 2e^{-2}$ عرض نقطه عطف

۲۵- گزینه ۳ صحیح است.

X		0	
y"	-	o	+
	تعقر روبه پایین		تعقر روبه بالا

$f(x) = x^3 - 9x \quad [0,2]$

$f'_{(x)} = 3x^2 - 9 , f''_{(x)} = 6x , f''_{(x)} = 0 \Rightarrow x = 0$

پس در فاصله $[0,2]$ تابع محدب (تقعر رو به بالا) می‌باشد

۲۶- گزینه ۲ صحیح است.

$$f_{(x,y)} = x^2 + y^2 - 5xy + 4x - 1 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x - 5y + 4}{2y - 5x}\Big|_{x=y=1} = -\frac{2 - 5 + 4}{2 - 5} = \frac{1}{3}$$

۲۷- گزینه ۲ صحیح است.

$y = x^2 + x$

$dy = f'(x)dx$

$$dy = (2x + 1)dx \xrightarrow[\Delta x = 0/1, x = 1]{dx \sim \Delta x} dy = (2 + 1)0/1 = 0/3$$

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x) - x^2 - x$

$= x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + x + \Delta x - x^2 - x$

$= 2x\Delta x + \Delta x^2 + \Delta x = \Delta x(2x + \Delta x + 1)\Big|_{\substack{x=1 \\ \Delta x = 0/1}} = 0/1(2 + 0/1 + 1)$

$\Rightarrow \Delta y = 0/31$

$dy - \Delta y = 0/3 - 0/31 = -0/01$

۲۸- گزینه ۳ صحیح است.

X		-1	
y'	-		+

$y = xe^x$

$y' = e^x + xe^x = e^x(1+x)$

$y' = 0 \Rightarrow e^x(1+x) = 0 \Rightarrow x = -1$

تابع f در فاصله $(-1,+\infty)$ اکیداً صعودی است. زیرا مشتق در این فاصله همواره مثبت $(y' > 0)$ است.

۲۹- گزینه ۱ صحیح است.

$y = xe^x$

$y' = e^x + xe^x \Rightarrow y'' = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x$

$y'' = 0 \Rightarrow 2e^x + xe^x = 0 \Rightarrow x = -2$

X		-2	
y''	-	0	+

تابع در فاصله $(-\infty,-2)$ اکیداً مقعر می‌باشد. تعقر روبه پایین   تعقر روبه بالا

۳۰- گزینه ۴ صحیح است.

$y = Ln(1+x^2)$

$$y' = \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow y'' = \frac{2(1+x^2)-2x(2x)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2} =$$

$y'' = 0 \Rightarrow 2-2x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

در نتیجه طول نقطه مثبت عطف برابر $x = 1$ است. لازم به ذکر است که در این نقطه علامت مشتق دوم تغییر پیدا می‌کند.

۳۱- گزینه ۲ صحیح است.

$x^3 + y^3 = xy + 1 \Rightarrow x^3 + y^3 - xy = 1$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2-y}{3y^2-x}\Big|_{x=y=1} = -\frac{3(1)^2-1}{3(1)^2-1} = -1$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{-1} = -1$$

۳۲- گزینه ۳ صحیح است. از طرفین تابع Ln می‌گیریم:

$$y = x^x \Rightarrow Lny = Lnx^x \Rightarrow Lny = xLnx \longrightarrow \frac{y'}{y} = Lnx + \frac{1}{x}\times x$$

$$\frac{y'}{y} = Lnx + 1 \Rightarrow y' = y(Lnx+1) \Rightarrow y' = x^x(Lnx+1)\big|_{x=e} = e^e(Lne+1) = 2e^e$$

۳۳- گزینه ۴ صحیح است.

$y = xe^x \to y' = e^x + xe^x \to y'' = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x$

$y'' = e^x(2+x)$

$y'' = 0 \Rightarrow e^x(2+x) = 0 \Rightarrow x = -2$

پس تابع در فاصله $(-2,+\infty)$ محدب می‌باشد.

	-2

y''	$-$	$+$

۳۴- گزینه ۲ صحیح است.

$$f_{(x,y)} = x^2 + y^2 - 2xy + 5x - 5y = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{2x-2y+5}{2y-2x-5}\Big|_{x=y=1} = -\frac{2\times1-2\times1+5}{2\times1-2\times1-5} = 1$$

با توجه به تعاریف دیفرانسیل

$$y = f(x) \to dy = f'(x)dx$$
$$dy = 1\times dx \Rightarrow dy = dx$$

۳۵- گزینه ۳ صحیح است.

$$y = (۲x-۱)^{\frac{x}{۲}} \to Lny = Ln(۲x-۱)^{\frac{x}{۲}}$$
$$Lny = \frac{x}{۲}Ln(۲x-۱) \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{۱}{۲}Ln(۲x-۱) + \frac{۲x}{۲(۲x+۱)}$$
$$y' = y\times(\frac{۱}{۲}Ln(۲x-۱) + \frac{x}{۲x-۱}) \Rightarrow y' = (۲x-۱)^{\frac{x}{۲}}(\frac{۱}{۲}Ln(۲x-۱) + \frac{x}{۲x-۱})$$
$$M = y'|_{x=۲} = (۲\times۲-۱)^{\frac{۲}{۲}}(\frac{۱}{۲}Ln(۴-۱) + \frac{۲}{۳}) = \frac{۳}{۲}Ln۳ + ۲$$

۳۶- گزینه ۲ صحیح است.

$$y = (Lnx)^2 + 1 \to y' = 2(\frac{1}{x})(Lnx)$$
$$y' = 0 \Rightarrow \frac{2}{x}Lnx = 0 \Rightarrow Lnx = 0 \Rightarrow x = 1$$
$$y' = \frac{2Lnx}{x} \Rightarrow y'' = \frac{2\times\frac{1}{x}\times x - 2Lnx}{x^2} = \frac{2-2Lnx}{x^2}$$
$$y''|_{x=1} = \frac{2-0}{1} = 2 > 0$$

$f''_{(1)} > 0 \Rightarrow$ نقطه (۱و۱)Min نسبی می‌باشد.

۳۷- گزینه ۳ صحیح است.

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c \xrightarrow{(0,1)} 1 = 0+0+0+c \Rightarrow c = 1$$
$$y' = 3x^2 + 2ax + b|_{x=1} = 0 \Rightarrow 3 + 2a + b = 0$$
$$y'' = 6x + 2a|_{x=2} = 0 \Rightarrow 6\times2 + 2a = 0 \Rightarrow a = -6$$
$$3 + 2\times(-6) + b = 0 \Rightarrow b = 9$$

۳۸- گزینه ۱ صحیح است.

$$y = f(x) \to dy = f'(x)dx$$
$$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x-3y}{4y-3x}\Big|_{x=y=1} = -\frac{2-3}{4-3} = 1$$
$$\Rightarrow dy = dx$$

۳۹- گزینه ۱ صحیح است.

$t=1 \Rightarrow x=\sqrt[3]{1} \Rightarrow x=1 \Rightarrow u=\sqrt{1+3} \Rightarrow u=2$

$y'_t = y'_u . u'_x . x'_t$

با استفاده از قاعده مشتق زنجیره‌ای داریم:

$$= \frac{1}{2\sqrt{u+2}} . \frac{1}{2\sqrt{x+3}} . \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} \Big|_{\substack{t=1 \\ x=1 \\ u=2}} = \frac{1}{2\sqrt{4}} . \frac{1}{2\sqrt{4}} . \frac{1}{3\sqrt{1}} = \frac{1}{48}$$

۴۰- گزینه ۲ صحیح است.

x		$-\frac{1}{2}$	
y"	+		−
	مقعر		محدب

$$y = Ln\frac{x}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}} = \frac{1}{x(x+1)} \Rightarrow y'' = \frac{-(2x+1)}{x^2(x+1)^2}$$

$$y''=0 \Rightarrow 2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

در بازه $[1,2]$ با توجه به علامت مشتق دوم $(y''<0)$ در نتیجه تقعر منحنی در این بازه رو به پایین است.

۴۱- گزینه ۳ صحیح است.

با توجه به دامنه تابع $D_y:(0,+\infty)=R^+$ داریم:

$$y = xLnx \Rightarrow y' = Lnx + \frac{1}{x}.x \Rightarrow y' = Lnx + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$Lnx = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$$

پس نقطه بحرانی $x=e^{-1}$ و نوع آن بصورت مینیمم می‌باشد.

		e^{-1}	
y'	−		+
	↘	O	↗

۴۲- گزینه ۴ صحیح است.

$$y=\sqrt[۳]{x^۲}(\overset{\text{min}}{x-۲}) \rightarrow y'=\frac{۲x}{۳\sqrt[۳]{x^۴}}(x-۲)+\sqrt[۳]{x^۲} \Rightarrow f'(-۱)=۳$$

۴۳- گزینه ۳ صحیح است.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'(x)}{F'(y)}=-\frac{(۲x-۳y+۴)}{(۴-۳x)} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{۵}{۲}$$

۴۴- گزینه ۴ صحیح است.

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۴+h)-f(۴)}{h}=f'(۴) \quad , \quad f'(x)=\frac{۲(۲x-۲)}{۳\sqrt[۳]{x^۲-۲x}} \Rightarrow f'(۴)=۲$$

۴۵- گزینه ۲ صحیح است.

$$y^۲-f(y-۲x)=۰$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=y'_x=-\frac{F'x}{F'y}=-\frac{[۲f'(y-۲x)]}{۲y-f'(y-۲x)} \xrightarrow[(۱,۲)]{\text{در نقطه}} y'_x=\frac{-۲f'(۱)}{۲y-f'(۱)}=\frac{۱}{۲}$$

۴۶- گزینه ۴ صحیح است.

فرض $y=\sqrt{x^2-3x}$, $u=\frac{x}{x-1}$

$$\Rightarrow y'u=\frac{y'u}{u'x}=\frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{du}{dx}}=\frac{\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}}{\frac{-1}{(x-1)^2}}\Rightarrow y'u=5$$
در نقطه $x=-1$ خواهیم داشت:

۴۷- گزینه ۲ صحیح است.

اگر $y=xe^x \Rightarrow y'=(x+1)e^x$, $y''=(x+2)e^x$

$\Rightarrow y^n=(x+n)e^x \Rightarrow y^{10}=(x+10)e^x$

در نقطه $x=1 \Rightarrow y^{10}=11e$

۴۸- گزینه ۴ صحیح است.

فرض می کنیم که $f(x)=\sqrt{x^2+3x}$ و $g(x)=\frac{x}{x+1}$ باشند، در نتیجه مشتق تابع $f(x)$ نسبت به تابع $g(x)$ برابر است با: $\frac{f'(x)}{g'(x)}$

بنابراین در این سوال خواهیم داشت:
$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{\frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}}{\frac{1}{(x+1)^5}}=5$$

۴۹- گزینه ۱ صحیح است.

$$y=x\sin x\rightarrow\begin{cases} y'=\sin x+x\cos x\\ (y)^{2}=2\cos x-x\sin x\\ (y)^{3}=-3\sin x-x\cos x\\ (y)^{4}=-4\cos x+x\sin x\end{cases}$$

با توجه به مشتق های ارائه شده می توان نتیجه گرفت که:

$$(y)^{10}=10\cos x-x\sin x$$

۵۰- گزینه ۲ صحیح است.

نرخ تغییر تابع $f(x)$ نسبت به تابع $g(x)$ $\rightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{\frac{1}{x+3}}\xrightarrow{\text{در نقطه}\,2}\frac{f'(x)}{g'(x)}=4$

۵۱- گزینه ۱ صحیح است.

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{3t^2-3}{2t+1}$$

$$y''_x=\frac{d^2y}{d^2x}=\frac{dy'x/dt}{dx/dt}=\frac{\frac{6t^2+6t+6}{(2t+1)^2}}{2t+1}=\frac{2}{3}$$

۵۲- گزینه ۲ صحیح است.

چون $f'(x)$ موجود است در درجه اول باید تابع $f(x)$ پیوسته باشد و در درجه دوم داشته باشیم: $f'_+(0)=f'_-(0)$، بنابراین خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim f(x)\Rightarrow \lim\left(ax^{-x}\right)=\lim_{x\to ۰}\left(x+\frac{b}{۱-x}\right)\Rightarrow a=b$$

$$f'(x)=\begin{cases}-ax^{-x} & x\geq ۰\\ ۱+\dfrac{b}{(۱-x)^{۲}} & x<۰\end{cases}\Rightarrow f'_+(۰)=-a,\ f'_-(۰)=۱+b\Rightarrow -a=۱+b\begin{cases}a=b\\ -a=۱+b\end{cases}\Rightarrow \begin{matrix}a=b=-\dfrac{۱}{۲}\\ a.b=\dfrac{۱}{۴}\end{matrix}$$

۵۳- گزینه ۳ صحیح است.

$$y=xe^{۲x}\begin{cases}y'=e^{۲x}+۲xe^{۲x}=(۱+۲x)e^{۲x}=\left(۲^{۰}\times ۱+۲^{۱}\times x\right)e^{۲x}\\ y''=(۴+۴x)e^{۲x}=\left(۲^{۱}\times ۱+۲^{۲}\times x\right)e^{۲x}\\ y'''=(۱۲+۸x)e^{۲x}=\left(۲^{۲}\times ۳+۲^{۳}\times x\right)e^{۲x}\\ y^{۴}=\left(۲^{۳}\times ۴+۲^{۴}\times x\right)e^{۲x}\\ y^{۱۰}=\left(۲^{۹}\times ۱۰+۲^{۱۰}\times x\right)e^{۲x}\xrightarrow[\text{در نقطه}]{x=۱}(y)^{۱۰}=۶(۲)^{۱۰}e^{۲}\end{cases}$$

کاربرد مشتق

۱- گزینه ۱ صحیح است.

اگر $x=۰\Rightarrow y=۱\Rightarrow A\begin{vmatrix}۰\\ ۱\end{vmatrix}$

$m=f'(۰)\Rightarrow m=-۲e^{-۲x}\Rightarrow f'(۰)=-۲\Rightarrow y-۱=-۲(x-۰)\Rightarrow y+۲x=۱$

۲- گزینه ۲ صحیح است.

ابتدا دامنه تابع را حساب می کنیم. در نتیجه خواهیم داشت: $D_f=(۰,+\infty)$

$f'(x)<۰\Rightarrow x-\dfrac{۱}{x}<۰\quad\Rightarrow x^{۲}<۱\quad\Rightarrow |x|<۱\quad\Rightarrow -۱<x<۱$

بنابراین با توجه به دامنه تابع مشخص است که تابع در فاصله $(۰,۱)$ نزولی است.

۳- گزینه ۴ صحیح است.

$f'(x)=\dfrac{۲x}{x^{۲}+۴}\qquad f''(x)=\dfrac{۲(x^{۲}+۴)-۴x^{۲}}{(x^{۲}+۴)^{۲}}=\dfrac{۸-۲x^{۲}}{(x^{۲}+۴)^{۲}}=۰\Rightarrow ۸-۲x^{۲}=۰\Rightarrow x=\pm ۲$

۴- گزینه ۱ صحیح است.

اگر $x=۲\Rightarrow y=Ln\,۱=۰\Rightarrow A(۲,۰)$

$m=f'(۲)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{۲x}{x^{۲}-۳}\Rightarrow f'(۲)=۴\Rightarrow y-۰=۴(x-۲)\Rightarrow y=۴x-۸$

نیمساز ربع اول و سوم عبارت است از $y=x$، بنابراین معادله خط مماس نیمساز ناحیه اول را در $x=\dfrac{۸}{۳}$ قطع می کند.

۵- گزینه ۴ صحیح است.

$f'(x)>۰\Rightarrow ۲xe^{-x}-(x^{۲}+۱)e^{-x}>۰\Rightarrow f'(x)=e^{-x}(۲x-x^{۲}-۱)>۰$

چون e^{-x} همواره بزرگتر از صفر می باشد بنابراین باید:

$-x^{۲}+۲x-۱>۰ \text{ or } x^{۲}-۲x+۱۲۰$

۶- گزینه ۴ صحیح است.

$f'(x)=e^{\frac{x^{۲}}{۲}}-x^{۲}e^{\frac{-x^{۲}}{۲}}\Rightarrow f''(x)=-xe^{\frac{-x^{۲}}{۲}}-۲xe^{\frac{-x^{۲}}{۲}}+x^{۳}e^{\frac{-x^{۲}}{۲}}$

چون $e^{\frac{-x^۲}{۲}} > ۰$ بنابراین خواهیم داشت: $f''(x)=e^{\frac{-x^۲}{۲}}\left(-۳x+x^۳\right)=۰$

$$x^۳-۳x=۰ \qquad x\left(x^۲-۳\right)=۰ \begin{cases}\to x=۰\\ \to x=\sqrt{۳}\\ \to x=-\sqrt{۳}\end{cases}$$

۷- گزینه ۲ صحیح است.

$$E_p^q=\frac{dq}{dp}\cdot\frac{P}{q}\Rightarrow E_p^q=\frac{-۱}{p+۱}\times\frac{p}{۱۰-Ln(p+۱)}$$

$$p=۲\Rightarrow E_p^q=\frac{-۲}{۳(۱۰-Ln۳)}$$

۸- گزینه ۳ صحیح است.

کشش تقاضا در نقطه A $=-\dfrac{BC}{OB}$

۹- گزینه ۱ صحیح است.

۱۰- گزینه ۲ صحیح است.

$$TR=y\times x\Rightarrow TR=۱۸x-۲x^۲\Rightarrow MR=۱۸-۴x,$$

$$Tc=۱۰x-x^۲\Rightarrow MC=۱۰-۲x$$

ماکزیمم سود زمانی است که $MR=MC$ باشد بنابراین خواهیم داشت:

$$۱۸-۴x=۱۰-۲x\to ۲x=۸\Rightarrow x=۴$$

۱۱- گزینه ۴ صحیح است.

$$AC=\frac{Tc}{x}\Rightarrow Ac=x^۲+۱۲+\frac{۵۴}{x} \quad , \; MC=(Tc)'=۳x^۲+۱۲$$

اگر $Ac=Mc\Rightarrow x^۲+۱۲+\frac{۵۴}{x}=۳x^۲+۱۲\Rightarrow ۲x^۲=\frac{۵۴}{x}\Rightarrow x^۳=۲۷\Rightarrow x=۳$

اگر $x=۳\Rightarrow Mc=۳\times۹+۱۲=۳۹$

۱۲- گزینه ۳ صحیح است.

%۱۰ = %۶ + %۴ = نرخ افزایش فروش یا درآمد

$$\frac{d\,Ln\,TRt}{dt}=\frac{d\,Ln\,Qt}{dt}+\frac{d\,Ln\,Pt}{dt}\Rightarrow$$

نرخ تغییر فروش یا درآمد

نرخ تغییر قیمت

نرخ تغییر تولید

۱۳- گزینه ۳ صحیح است.

اگر مشتق دوم تابعی در فاصله ای کوچکتر از صفر باشد، تابع در آن فاصله مقعر می باشد و در نتیجه خواهیم داشت:

$$y'=e^{-x}-xe^{-x},\quad y''=-e^{-x}-e^{-x}+xe^{-x}$$

$$\Rightarrow y''=e^{-x}(-۲+x)<۰\xrightarrow{e^{-x}>۰}-۲+x<۰\Rightarrow x<۲ \qquad x\in(-\infty,۲)$$

یا

۱۴- گزینه ۳ صحیح است.

هزینه متوسط $Ac=\dfrac{Tc}{x}\Rightarrow Ac=x+\dfrac{۴}{x}$

$$\frac{d\,Ac}{dx}=۰\Rightarrow ۱-\frac{۴}{x^۲}=۰\Rightarrow x=\pm۲$$

چون تولید منفی نداریم در نتیجه $x=۲$ قابل قبول خواهد بود.

$$Mc=۲x\xrightarrow{x=۲}Mc=۴$$

اگر

۱۵- گزینه ۱ صحیح است.

$$\frac{d\,Ln\,TR\,t}{d\,t}=\%8-\%6=\%2$$ (شبیه سوال ۱۲ است)

۱۶- گزینه ۴ صحیح است.

$f(-2)=0\ ,\ \ F(4)=12$

$f'(x)=\frac{(-2x)(4-x^2)}{|4-x^2|}=0\Rightarrow x=0\ ,\ \ x=\pm 2$ نقطه بحرانی ؛ $f(0)=4,\ f(-2)=f(2)=0$

با توجه به فاصله داده شده مشخص است که ماکزیمم مطلق تابع برابر ۱۲ است.

۱۷- گزینه ۳ صحیح است.

درآمد کل $=TR=P.Q\Rightarrow TR=y.x\Rightarrow TR=-x^3+8x^2+\pi x$

هزینه کل $=Tc=2x^2+x$

تابع سود $\pi=TR-Tc\Rightarrow \pi=-x^3+6x^2+15x$

ماکزیمم سود معین $=\frac{d\pi}{dx}=0\Rightarrow -3x^2+12x+15=0\xrightarrow[\text{چون } a+c=b]{}x=-1,x=-\frac{c}{a}=5$

حداکثر سود $\pi=-(5)^3+6(5)^2+15(5)=100$

۱۸- گزینه ۲ صحیح است.

$y'=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\Rightarrow y'=0\Rightarrow -\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=0\Rightarrow x=1$ طول نقطه بحرانی

عرض نقطه بحرانی $=f(1)=1$

$y'=-x^{-2}+x^{-1}\Rightarrow y''=\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^2}\ \ ,\ f''(1)=1$

برای مشخص کردن نوع نقطه بحرانی از مشتق دوم کمک می گیریم. چون $f''(1)>0$ می باشد بنابراین نقطه بحرانی مینیمم می باشد.

۱۹- گزینه ۳ صحیح است.

اگر $Tc=x^2+6x+4\Rightarrow Ac=x+6+\frac{4}{x}\ \ ,Mc=2x+6$

محل تلاقی Mc,Ac یعنی $\xrightarrow{Ac=Mc}x+6+\frac{4}{x}=2x+6\Rightarrow x=\pm 2$

$Ac(2)=Mc(2)=10$. چون تولید منفی نداریم بنابراین $x=2$

۲۰- گزینه ۴ صحیح است.

$TR=P.Q\Rightarrow TR=20x-x^2\quad ,\quad Tc=x^2+4x$

$\pi=TR-Tc=-2x^2+16x$ ماکزیمم سود یعنی $=\frac{d\pi}{dx}=0\Rightarrow -4x+16=0\Rightarrow x=4$

$\pi=TR-Tc\xrightarrow{x=4}\pi=32$

۲۱- گزینه ۲ صحیح است.

چون :

$E_{x,y}=\frac{-Ac}{oA}$

۲۲- گزینه ۱ صحیح است.

اگر $x = ۳ \Rightarrow y = ۰$

$$f'(x) = ۲xLn(x-۲) + \frac{x^۲}{x-۲} \Rightarrow m = f'(۳) = ۹$$

معادله خط مماس $y - ۰ = ۹(x-۳) \Rightarrow y = ۹x - ۲۷$

اگر $x = ۰ \Rightarrow y = -۲۷$

فصل پنجم

توابع چند متغیره

تعاریف

توابع چند متغیره را به صورت $Z=F(X)=f(x_1,x_2,x_3,...x_n)$ یا $f(X,Z)=0$ نمایش می‌دهند.

تابع دو متغیره را نیز به صورت $f(x,y,z)=0$ یا $Z=f(x,y)$ یا $Z=f(x_1,x_2)$ نمایش می‌دهیم

پیوستگی تابع:

تابع $Z=f(x,y)$ را در نقطه x=a و y=b پیوسته می‌گویند هر گاه داشته باشیم

۱) f(a,b) وجود داشته باشد

۲) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)$ وجود داشته باشد

۳) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=f(a,b)$

مشتق جزئی (نسبی)

مشتق جزئی z نسبت به x را که به صورت $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial x},f_x(x,y),f_x,Z_x$ نمایش می‌دهند به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

و همین طور مشتق جزئی z نسبت به y را نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

مشتق جزئی (نسبی) همانند مشتق توابع یک متغیره دارای مراتب بالاتر نیز می‌باشد مثلاً در مورد $\frac{\partial z^2}{\partial x\partial y}$ ابتدا مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ محاسبه شده و سپس از این مقدار نسبت به y مشتق جزئی گرفته می‌شود.

تذکر: قواعد مشتق گیری توابع چند متغیره همانند توابع یک متغیره می‌باشد.

مثال: در $Z=5xy-6x^2+2xy^2+5$ مشتق $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ **را بدست آورید.**

نکته: برای محاسبه $\frac{\partial z}{\partial x}$ با سایر متغیرها (به غیر از x) همانند اعداد ثابت رفتار می‌شود .

$$\frac{\partial z}{\partial x}=5y-12x+2y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=5x+4xy\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y\partial x}=5+4y$$

نکته: در هر تابع $\frac{\partial f^2}{\partial x\partial y}=\frac{\partial f^2}{\partial y\partial x}$

دیفرانسیل کامل (کلی)

دیفرانسیل تابع $z=f(x,y)$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

به طور کلی دیفرانسیل کلی تابع مجموع دیفرانسیل های جزئی یک تابع می باشد (دیفرانسیل جزئی تابع $z=f(x,y)$ نسبت به x برابر است با $\frac{\partial z}{\partial x}dx$)

مشتق کامل:

اگر $z=f(x,y)$ دارای مشتقات جزئی $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ باشد که در یک ناحیه پیوسته X ,Y تابعی از متغیر دیگری مانند t باشد در این صورت:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt}$$

مثال :اگر $z=x^2+y^2$, $x=\cos t$, $y=e^t$ **باشد** $\frac{dz}{dt}$ **را بدست آورید.**

$$\frac{dz}{dt}=(2x)(-\sin t)+(2y)(e^t)=-2\cos t\sin t+2e^{2t}=-\sin 2t+2e^{2t}$$

توابع چند متغیره:

تابع همگن یا متجانس : (رابطه اول)

اگر برای تابع $z=f(x,y)$ داشته باشیم. $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$

در این صورت z تابعی همگن از درجه n می‌باشد.

اگر $n>0$ باشد تابع را بطور مثبت همگن و اگر n=۱ باشد تابع همگرا خطی می‌نامند.

رابطه ادله: اگر $z=f(x,y)$ تابعی همگن از درجه n بوده و مشتقات جزئی مرتبه اول آن وجود داشته باشد خواهیم داشت:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=nf(x,y)$$

مثال۱ : تابع $f(x,y)=5x^3y^2+xy^4-x^2y^3$ **تابعی همگن از درجه ۵ است زیرا:**

$$f(\lambda x,\lambda y)=5(\lambda x)^3(\lambda y)^2+\lambda x(\lambda x)^4-(\lambda x)^2(\lambda y)^3=\lambda^5(5x^3y^2+xy^4-x^2y^3)=\lambda^5 f(x,y)$$

مثال: مقدار عبارت $x\frac{\partial z}{\partial y}+y\frac{\partial z}{\partial y}$ **برای تابع مقابل محاسبه کنید.**

$$z=3x^2y-y^3+5\frac{x^4}{y}$$

تابع z تابعی همگن از درجه ۳ است زیرا

$$f(\lambda x,\lambda y)=3(\lambda x)^2(\lambda y)-(\lambda y)^3+5\frac{(\lambda x)^4}{\lambda y}=\lambda^3(3x^2y-y^3+5\frac{x^4}{y})$$

بنابراین عبارت $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$ برابر خواهد بود با

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=nf(x,y)=3(3x^2y-y^3+\frac{5x^4}{y})$$

مشتق جزئی توابع مرکب

اگر $f(x_1,x_2,...,x_n)$ و هر یک x_i توابعی قابل مشتق‌گیری نسبت به متغیرهـای $u_1,u_2,....,u_m$ باشـند در ایـن صـورت مشتق جزئی f نسبت به هر یک از متغیرهای u_j به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\frac{\partial f}{\partial u_j}=\frac{\partial f}{\partial x_1}.\frac{\partial x_i}{\partial u_j}+\frac{\partial f}{\partial x_2}.\frac{\partial x_2}{\partial u_j}+.....+\frac{\partial f}{\partial x_n}.\frac{\partial x_n}{\partial u_j}$$

به عبارت ساده‌تر برای تابع دو متغیره $f(x,y)=0$ در صورتی که x و y هر کدام متغیرهـایی وابسـته بـه متغیرهـای دیگـری مانند r و s باشند خواهیم داشت.

$$\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial r}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial s}$$

مثال: اگر $z=x^2y-x+y^2$ **و** $y=2u^2v$ **و** $x=\frac{v^2}{u}$ **باشد مقـدار عبـارت** $\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}$ **بـه ازای** $u=v=1$ **را محاسبه کنید.**

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial u}=(2xy-1)(\frac{-v^2}{u^2})+(x^2+2y)(4uv)\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial u}=-3+20=17$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial v}=(2xy-1)(\frac{2v}{u})+(x^2+2y)(2u^2)=\frac{\partial z}{\partial v}=6+10=16\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial z}=17-16=1$$

$$u-v=1\Rightarrow x=1,y=2$$

نقطه بحرانی و نقاط اکسترمم و نقاط max , min در تابع دو متغیره:

روش اول: اگر دترمینان هیتن را H بنامیم، در این صورت:

$$H=\begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy}\end{vmatrix}$$

الف) اگر $H>0$ و $z'_{xx}<0$ باشد، نقطه بحرانی ماکزیمم نسبی است.

ب) اگر $H>0$ و $z'_{xx}>0$ باشد، نقطه بحرانی مینیمم نسبی است.

ج) اگر $H<0$ باشد نقطه بحرانی زمینی است.

روش دوم:

$$z=f(x,y)\rightarrow\begin{cases} z'_x=0 \\ z'y=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases} x=x_0 \\ y=y_0 \\ z_0=f(x_0,y_0)=z\end{cases}$$

$$\begin{cases} z''_{x^2}=z''_{xx} \\ z''_{y^2}=z''_{yy} \\ z''_{xy}=z''_{yx}\end{cases}\rightarrow\Delta=\left(z''_{xy}\right)^2-z''_{x^2}.z''_{y^2}\begin{cases}\le 0 & \text{اکسترمم دارد} & \Rightarrow\begin{cases}>0 & \min \\ <0 & \max\end{cases} \\ >0 & \text{اکسترمم ندارد} & = \text{نقطه زمینی}\end{cases}$$

مشتق توابع ضمنی چند متغیره:

در حالت کلی اگر داشته باشیم $f(x_1, x_2, ..., x_n, z) = 0$ مشتق جزئی متغیری مانند z نسبت به سایر متغیرها به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{f'_x}{f'_z}$$

به عبارت ساده‌تر چنانچه داشته باشیم $f(x, y, z) = 0$ خواهیم داشت.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

همانطور که مشخصی است محاسبه مشتق جزئی توابع ضمنی چند متغیره همانند مشتق توابع ضمنی ساده است که پیش از این در مبحث مشتق به آن اشاره شد.

مثال: در عبارت $zx^2y - e^{xyz} + x^2y = z + z^2x$ مقدار $\frac{\partial x}{\partial y}$ را محاسبه کنید.

ابتدا کل عبارت را به یک طرف تساوی منتقل می‌کنیم $zx^2y - e^{xyz} + x^2y - z - z^2x = 0$ بنابراین خواهیم داشت.

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{-(zx^2 - xze^{xyz} + x^2)}{2zxy - yze^{xyz} + 2xy - z^2}$$

ماکزیمم و مینیمم نسبی توابع دو متغیره ((z=f(x,y))

برای تعیین max و min نسبی توابع دو متغیره ابتدا نسبت به هر یک از متغیرها مشتق گرفته و ریشه های صفر آن را بدست می‌آوریم یعنی:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

اگر x=a و y=b ریشه های صفر معادله باشد به روش زیر در مورد max یا min تابع بحث می‌کنیم.

مقدار Δ را به ازای x=a و y=b بدست می‌آوریم:

در این حالت خواهیم داشت:

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2$$

اگر $\Delta > 0$
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0 \quad , \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} < 0 \Rightarrow & \text{max } y=b, x=a \text{ است} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0 \quad , \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} > 0 \Rightarrow & \text{min } y=b, x=a \text{ است} \end{cases}$$

اگر $\Delta < 0$ x=a و y=b نقطه زینی است (نه min نه max)

اگر $\Delta = 0$ از این روش به نتیجه نمی‌رسیم ولی می‌بایست این نقطه را با اطراف آن مقایسه کرد:

مثال: در تابع $z = -2xy + 4y - 3x$، max یا min احتمالی را تعیین کنید

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2y - 3 = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{2} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$\Delta=(0)(0)-(-2)^2=-4<0$ نه Max و نه Min

مثال: در تابع $z=x^2-y^2+xy-\frac{3}{2}x$ نقطه max یا min احتمالی را تعیین کنید.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=2x+y-\frac{3}{2}=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=x-2y=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{aligned}x&=\frac{3}{5}\\ y&=\frac{3}{10}\end{aligned}\qquad\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=2\\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=-2\end{aligned}\qquad\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1$$

$\Delta=(2)(-2)-(1)^2=-5<0$ نقطه زینی

مثال :در تابع $z=\sin x+\cos y$ نقطه max یا min را در فاصله $\left[0,\frac{\Pi}{2}\right]$ بدست آورید.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\cos x=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=-\sin y=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{aligned}x&=\frac{\Pi}{2}\\ y&=0\end{aligned}\qquad\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\sin x\qquad\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0\qquad\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\cos y$$

$$\Delta=(-\sin\frac{\Pi}{2})(-\cos(0))-(0)^2=(-1)(-1)=1>0\quad,\ \begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=-\sin\frac{\Pi}{2}=-1<0\\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=-\cos 0=-1<0\end{aligned}\quad\Rightarrow\max=(\frac{\Pi}{2},0,2)$$

روش ضریب لاگرانژ برای max و min توابع مقید:

اگر تابع مورد نظر ما $f(x,y)$ بوده و قید آن $g(x,y)=0$ باشد برای max یا min خواهیم داشت:

$$f(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$$

که در آن λ موسوم به ضریب لاگرانژ می‌باشد که از تابع جدید نسبت به λ, y, x مشتق گرفته و مساوی صفر قرارمی‌دهیم پس از حل سه معادله جدید وتعیین نقاط بحرانی در این نقاط مانند تعیین max و min توابع غیر مقید عمل کرده با این تفاوت که وقتی $\Delta\le 0$ باشد نوع نقطه بحرانی قابل تعیین نبوده و باید در اطراف آن نقطه بررسی شود یعنی:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=\frac{\partial f}{\partial x}-\lambda\frac{\partial g}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=\frac{\partial f}{\partial y}-\lambda\frac{\partial g}{\partial y}=0\\ \frac{\partial f}{\partial \lambda}&=-g(x,y)=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{aligned}x&=a\\ y&=b\end{aligned}\rightarrow\begin{cases}\Delta^*=(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})-(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y})^2>0\ \text{و}\begin{cases}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}>0,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}>0:\min\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}<0,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}<0:\max\end{cases}\\ \Delta^*\le 0\end{cases}$$

مثال: مطلوب است تعیین max یا min تابع $f(x,y)=5x^2+6y^2-xy$ با قید x+2y=24 :

$$f(x,y,\lambda)=5x^2+6y^2-xy-\lambda(x+2y-24)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=10x-y-\lambda=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=12y-x-2\lambda=0\\ \frac{\partial f}{\partial \lambda}&=-(x+2y-24)=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{aligned}x&=6\\ y&=9\end{aligned}\quad\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}&=10\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}&=12\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}&=-1\end{aligned}\Rightarrow$$

$$\Delta=(10)(12)-(-1)^2=119\rangle 0,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\rangle 0,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\rangle 0\Rightarrow \text{Min}$$

بطورکلی در هنگام محاسبه این نوع max یا min مقدار λ چندان حائز اهمیت نیست و جز در موارد خاص می‌توان از محاسبه آن صرف نظر کرد .

نکته: راه ساده تر حل این گونه توابع مقید(توابع با قید $g(x,y)$) این است که یکی از متغیر های x یا y را بر حسب دیگری مرتب کرده و مانند توابع یک متغیره آن را حل کرد.

مثال:مسئله بالا را با مرتب کردن متغیرها حل می‌کنیم $f(x,y)=5x^2+6y^2-xy$

$$x+2y=24\Rightarrow x=24-2y\Rightarrow H(y)=5(24-2y)^2+6y^2-(24-2y)y\Rightarrow$$
$$H(y)=2880-504y+28y^2$$
$$H'(y)=-504+56y=0\Rightarrow y=9\Rightarrow x=6\Rightarrow \min(6,9)$$
$$H''(y)=56\rangle 0$$

شرایط کان-تاکر:

از این شرایط برای توابعی که دارای قیود نامعادله‌ای هستند استفاده می‌شود و به صورت زیر بیان می‌گردد.

نقطه (x,y) ماکزیمم نسبی تابع $f(x,y)$ نسبت به قید $g(x,y)\le 0$ است اگر فقط عددی غیر منفی مانند λ وجود داشته باشد بطوری که λ و (x,y)در شرایط زیر صدق کند:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}-\lambda\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}=0$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}-\lambda\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}=0$$
$$\lambda g(x,y)=0$$
$$g(x,y)\le 0$$

اگر تابع $f(x,y)$ مقعر باشد این شرط ، شرط کافی نیز خواهد بود.

نکته: تابع $f(x,y)=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+f$ تابع محدب است اگر $C\rangle 0, A\rangle 0, 4AC-B^2\rangle 0$ باشد و مقعر است هرگاه $C\langle 0, A\langle 0, 4AC-B^2\rangle 0$

مثال : ماکزیمم تابع $f(x,y)=12xy-3y^2-x^2$ با قید $x+y\le 16$ را بیابید

$$\frac{\partial f}{\partial x}-\lambda\frac{\partial g}{\partial x}=12y-2x-\lambda=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}-\lambda\frac{\partial g}{\partial y}=12x-6y-\lambda=0$$
$$\lambda(x+y-16)=0$$
$$x+y-16\le 0$$

از معادله $\lambda(x+y-16)=0$ نتیجه می‌شود که یا $\lambda=0$ یا $x+y-16=0$ اگر $\lambda=0$ باشد از معادله اول ودوم $x=y=0$ حاصل می‌شود که در نامعادله $x+y-16\le 0$ صدق می‌کند و اگر $x+y-16=0$ باشد در این صورت داریم $x=16-y$ و در نتیجه:

$$\begin{matrix}14y-\lambda=32\\18y+\lambda=192\end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}y=7\\x=9\\\lambda=66\end{cases}$$

که (۷ و۹) نیز در نا معادله صدق می‌کند اما $f(9,7)=528$ است که از $f(0,0)=0$ بیشتر است پس ماکزیمم تابع $f(x,y)$ نقطه (۷ و۹) می‌باشد.

تستهای طبقه‌بندی شده فصل پنجم

رشته اقتصاد

۱- تابع $z=\dfrac{x^2+1}{y^2+1}$، برد کدام است؟ (سراسری ۷۵)

۱) R ۲) R^+ ۳) $R-\{0\}$ ۴) $R^+ + \{0\}$

۲- در تابع $z=xLn\left(1+\dfrac{y}{x}\right)+yLn\left(1+\dfrac{x}{y}\right)$ حاصل عبارت $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}$ برابر است با: (سراسری ۷۵)

۱) $Ln\dfrac{(x+y)^2}{xy}$ ۲) $Ln\dfrac{x-y}{x+y}$ ۳) $Ln\dfrac{(x-y)^2}{xy}$ ۴) $Ln\dfrac{x+y}{xy}$

۳- هر گاه $f\left(x+y+z, x^2+y^2+z^2\right)=0$ در این صورت z'_x کدام است؟ (سراسری ۷۵)

۱) $-(F_1+2xF_2)/(F_1+2zF_2)$ ۲) $-(F_1+2yF_2)/(F_1+2zF_2)$

۳) $-(F_1+2xF_2)/(F_1+2yF_2)$ ۴) $-(F_1+2zF_2)/(2xF_2+F_1)$

۴- اگر $z=e^{\frac{x}{y}}+e^{\frac{y}{x}}+Logx-Logy$ باشد، نوع تابع کدام است؟ (سراسری ۷۵)

۱) غیر همگن ۲) همگن درجه یک ۳) همگن درجه صفر ۴) همگن درجه ۱-

۵- نقطه بحرانی مقدار تابع $Z=e^{(x-1)^2}+y^2+4y$ و نوع آن کدام است؟ (سراسری ۷۵)

۱) e^{-4} می نیمم ۲) e^{-4} ماکزیمم ۳) e^{2} می نیمم ۴) e^{-2} ماکزیمم

۶- اگر داشته باشیم $z=f(k,L)$, $k=g(x,y)$, $L=h(x,y)$، مقدار Z_x کدام است؟ (سراسری ۷۶)

۱) $z_x=z_k.k_x$ ۲) $Z_x=Z_k.K_x+Z_L.L_x$

۳) $Z_x=Z_L.Z_x$ ۴) $Zx=0$

۷- در تابع $Z=\sin\dfrac{y}{x}+e^{\frac{x}{y}}$، مقدار $x.Z_x+yZ_y$ کدام است؟ (سراسری ۷۶)

۱) ۰ ۲) Z ۳) $-Z$ ۴) $2Z$

۸- نقطه بحرانی تابع f به معادله $Z=x^2-xy+y^2-3x$ کدام است؟ (سراسری ۷۶)

۱) (۲- و ۱و۱) ۲) (۳-و۱و۲) ۳) (۴و۲و۰) ۴) (۹و۳و۰)

۹- در سوال قبل نوع نقطه کدام است؟ (سراسری ۷۶)

۱) زینی ۲) عطف ۳) ماکزیمم ۴) می نیمم

۱۰- اگر $Z=x^2+\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x^2}$ باشد، $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ در x=1 و y=2 برابر کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) ۱۰- ۲) ۹- ۳) ۸ ۴) ۱۴

۱۱- اگر $z=e^{u^2+V^2}, u=g(x+y), V=h(x-y)$ باشد، $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) $-2Ve^{x^2+y^2}+g'$ ۲) $2uz+2Vz$

۳) $2z(u.g'_y-Vh'_y)$ ۴) $2z(u.g'_y+Vh'_y)$

۱۲- برد تابع دو متغیره $Z=\sqrt{۸۱-۲x^۲-y^۲}$، کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) R ۲) R^+ ۳) $[۰,۹]$ ۴) $R-\{۰\}$

۱۳- وضعیت همگن بودن تابع $z=\frac{x^۲}{y^۲}+\frac{x}{\sqrt{x^۲+y^۲}}$ چگونه است؟ (سراسری ۷۷)

۱) غیر همگن ۲) همگن درجه ۲ ۳) همگن با درجه صفر ۴) همگن با درجه ۱

۱۴- برد یا حوزه مقادیر حقیقی Z به معادله $z=\sqrt{۱۰-x^۲-۲y^۲}$ کدام است؟ (سراسری ۷۸)

۱) R ۲) R^+ ۳) $R^+u\{۰\}$ ۴) $[۰,\sqrt{۱۰}]$

۱۵- در تابع حقیقی دو متغیره $z=x^۲+۲xy+٤y^۲$ به ازای $dx=dy=۰/۱$ مقدار $d_Z^۲$ کدام است؟ (سراسری ۷۸)

۱) ۰/۰۷ ۲) ۰/۱۲ ۳) ۰/۱۴ ۴) ۰/۷

۱۶- درجه همگنی تابع $f(x)=\frac{x}{x^۲+y^۲}+\frac{yx}{x^۳+y^۳}$ کدام است؟ (سراسری ۷۸)

۱) ۱- ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) همگن نیست

۱۷- اگر $z=f\left(x^۲+y^۲,\frac{x}{y}\right)$ باشد z'_x کدام است؟ (سراسری ۷۸)

۱) $f'_۱+f'_۲$ ۲) $f'_x+f_{x/y}$ ۳) $(x^۲+y^۲)f'_x+\frac{x}{y}f'_y$ ۴) $۲xf'_۱+\frac{۱}{y}f'_۲$

۱۸- نقطه بحرانی تابع $Z=x^۲+۲xy+۲y^۲+۱۰$ کدام است؟ (سراسری ۷۸)

۱) (۱۲و۱و۰) ۲) (۱۰و۰و۰) ۳) (۱۵و۱و۱) ۴) (۱۱و۰و۱)

۱۹- نوع نقطه بحرانی سوال قبلی کدام است؟ (سراسری ۷۸)

۱) زینی ۲) عطف ۳) ماکزیمم ۴) می نیمم

۲۰- مجموع طول وعرض مختصات نقطه بحرانی تابع $Z=۱۸x^۲-۳۲y^۲-۳٦x-۱۲۸y+۱۱۰$ کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) ۳- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

۲۱- اگر داشته باشیم $F(x+yz,xy+z^۲)=۰$، آنگاه z' کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) $-\frac{F'_۱}{F'_۲}$ ۲) $-\frac{xF'_۱}{ZF'_۲}$ ۳) $-\frac{F'_۱+F'_۲}{F'_۱+۲ZF'_۲}$ ۴) $-\frac{F'_۱+yF'_۲}{yF'_۱+۲ZF'_۲}$

۲۲- اگر $Z=f(x-y,y-x)$ آنگاه $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$ برابر کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) ۱- ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

۲۳- در تابع دو متغیره $f(x,y)=x^۲+y^۳-٤xy-۱۱y$ نقطه بحرانی (۱- و ۲-) چگونه است؟ (سراسری ۷۹)

۱) اکسترمم ۲) مینیمم ۳) ماکزیمم ۴) زینی

۲۴- دامنه تابع به معادله $u=\dfrac{1}{Ln(1-x^2-y^2-z^2)}$ کدام است؟ (سراسری ۸۰)

۱) تمام نقطه داخل کره ی $x^2+y^2+z^2=1$ به جز مبدا

۲) تمام نقطه داخل کره ی $x^2+y^2+z^2=1$

۳) تمام نقطه داخل و روی کره ی $x^2+y^2+z^2=1$

۴) $R^3-\{(0,0,0)\}$

۲۵- اگر برای تابع مرکب $u=\dfrac{zy}{x}$ داشته باشیم $x=3r^2-2s$ ، $y=4r-2s^3$ ، $z=2r^2-3s^2$ مقدار $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ به ازای r= s=1 برابر است با؟ (سراسری ۸۰)

۱) ۱۱-　　۲) ۱۰-　　۳) ۹-　　۴) ۸-

۲۶- طول و عرض نقطه ی بحرانی تابع f به معادله $z=xy+2x-Ln(x^2y)$ کدام است؟ (سراسری ۸۰)

۱) $\left(\frac{1}{2},2\right)$　　۲) $\left(3,\frac{1}{3}\right)$　　۳) $\left(4,\frac{1}{4}\right)$　　۴) $(1,1)$

۲۷- با فرض $f(x-z)=x+y+z$ حاصل عبارت $\dfrac{\partial z}{\partial y}-2\dfrac{\partial z}{\partial y}$ برابر است با: (سراسری ۸۱)

۱) ۰　　۲) ۱-　　۳) ۱　　۴) $x-z$

۲۸- برد تابع حقیقی f به معادله $z=\sqrt{100-x^2-2y^2}$ برابر است با: (سراسری ۸۱)

۱) R^+　　۲) R^{+2}　　۳) $[0,10]$　　۴) $(-\infty,10]$

۲۹- اگر داشته باشیم $z=\dfrac{x^2}{y^2}+e^{\frac{y}{x}}-\dfrac{y}{x}$ درجه همگنی این تابع کدام است؟ (سراسری ۸۱)

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) همگن نیست

۳۰- مختصات نقطه بحرانی تابع $Z=3x^2+y^2-9x+4y$ کدام است؟ (سراسری ۸۱)

۱) (۲و ۱-) زینی　　۲) (۲-و۱)زینی

۳) (۲-و۱) می نیمم　　۴) (۲و۱-) ماکزیمم

۳۱- اگر تابع f به معاله $Z=x^2+5xy+8y^3-4x$ باشد، d^2z (دیفرانسیل مرتبه دوم) در نقطه (۱و۱) کدام است؟ (سراسری ۸۱)

۱) $d^2z=2dxdy$　　۲) $d^2z=dx^2+dy^2$

۳) $d^2z=2dx^2+10dxdy+48dy^2$　　۴) $d^2z=2dx^2+5dxdy+8dy^2$

۳۲- برد تابع حقیقی به معادله $Z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}$ کدام بازه است؟ (سراسری ۸۲)

۱) $[1,\infty)$　　۲) $[0,+\infty)$　　۳) $(0,+\infty)$　　۴) $(-\infty,+\infty)$

۳۳- نقطه بحرانی تابع حقیقی f به ضابطه $Z=x^2-y^2+1$ و نوع آن کدام است/ (سراسری۸۲)

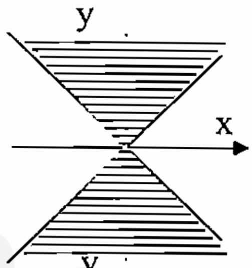
۱) (۰و۰) زینی　　۲) (۱و۱) مینیمم　　۳) (۱و۱) ماکزیمم　　۴) (۰و۰) مینیمم

۳۴- اگر $Z^2=x^2+y^2$ مقدار $\dfrac{\partial Lnz}{\partial Lnx}+\dfrac{\partial Lnz}{\partial Lny}$ کدام است؟ (سراسری ۸۲)

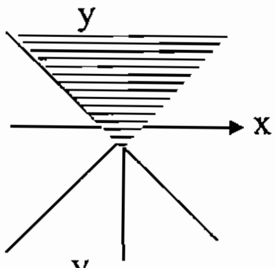
۱) ۱　　۲) ۲　　۳) xy　　۴) $x+y$

۳۵- تابع $f: R^2 \to R$ به معادله $Z=\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}$ داده شده است، شکل دامنه تابع f کدام است؟ (سراسری ۸۳)

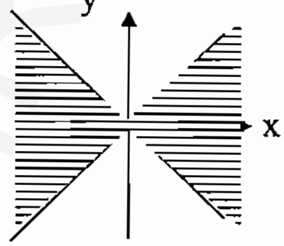
۱)



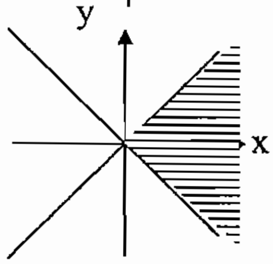
۲)



۳)



۴)



۳۶- حد تابع $Z=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$ در نقطه (۰و۰) در امتداد $y=2x$ کدام است؟ (سراسری ۸۳)

۱) صفر　　۲) $\frac{1}{2}$　　۳) ۱　　۴) $\frac{5}{2}$

۳۷- اگر داشته باشیم $Z=Ln(x_1+x_2+x_3)$ باشد مقدار $Ln\dfrac{\partial z}{\partial x_1}+Ln\dfrac{\partial z}{\partial x_2}+Ln\dfrac{\partial z}{\partial x_3}$ کدام است؟ (سراسری ۸۳)

۱) $-3z$　　۲) $3z$　　۳) $3Ln$　　۴) $-3Lnz$

۳۸- وضعیت تابع $Z=x^2+2xy+4y^2+x-2y$ از لحاظ تعقر و تحدب کدام است؟ (سراسری ۸۳)

۱) اکیداً مقعر　　۲) اکیداً محدب

۳) ابتدا محدب، سپس مقعر　　۴) ابتدا مقعر، سپس محدب

۳۹- اگر داشته باشیم $x^2+2y^2+z^2+2xy-6=0$، مقدار دیفرانسیل z یعنی (dz) در نقطه (۱و۱و۱) کدام است؟ (سراسری ۸۳)

۱) $2dx-4dy$　　۲) $-2dx-2dy$　　۳) $-2dx-4dy$　　۴) $2dx+2dy$

۴۰- در تابع $Z=x^2+xy+y^2$ نقطه بحرانی کدام است؟ (سراسری ۸۳)

۱) (۳و۱و۱) می نیمم　　۲) (۰و۰و۰) ماکزیمم　　۳) (۰و۰و۰) می نیمم　　۴) (۰و۰و۰) زینی

رشته مدیریت

۱-برد تابع $Z=\sqrt{4-2X^2-Y^2}$ کدام است؟(سراسری ۷۴)

۱) $[0,3]$　　۲) R^+　　۳) $[0,2]$　　۴) $[0,4]$

۲- در تابع دو متغیره $u=Ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ مقدار $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ برابر است با؟ (سراسری ۷۴)

۱) ۱　　۲) صفر　　۳) $x-a$　　۴) $y-b$

۳- نقطه بحرانی تابع $z=4-x^2-y^2$ کدام است؟ (سراسری ۷۴)

۱) (۴و۰و۰) مینیمم ۲) (۲و۱و۱) ماکزیمم ۳) (۲و۱و۱) مینیمم ۴) (۴و۰و۰) ماکزیمم

۴- مقدار ماکزیمم تابع $z=-x^2-y^2+1$ با شرط آن که x-y=0 کدام است؟ (سراسری ۷۴)

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) ۱- ۴) ۲

۵- در تابع دو متغیره $Z=xe^y+ye^x$ حاصل عبارت $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ کدام است؟ (سراسری ۷۵)

۱) ye^x ۲) e^x+e^y ۳) Z (خود تابع) ۴) xe^y

۶- اگر z=xy باشد مقدار dz در نقطه y=1, x=1 کدام است؟ (سراسری ۷۵)

۱) صفر ۲) dxdy ۳) dx+dy ۴) dx+dy+dxdy

۷- مقدار ماکزیمم تابع با ضابطه $z=20-x^2-4y^2+8y+2x$ کدام است؟ (سراسری ۷۵)

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۴ ۴) ۲۵

۸- حداکثر تابع $z=xy$ اگر $x+y=16$ باشد کدام است؟ (سراسری ۷۵)

۱) ۳۲ ۲) ۴۸ ۳) ۶۴ ۴) ۲۵۶

۹- اگر $v=r\sin\theta, u=r\cos\theta, Z=(u^2+v^2-2uv)$ باشد $\frac{\partial Z}{\partial \theta}$ کدام است ؟ (سراسری ۷۶)

۱) $(2u-2v)(-r\sin\theta)$ ۲) $(2v-2u)(r\cos\theta)$

۳) $-2r^2\cos 2\theta$ ۴) $-2r^2\sin 2\theta$

۱۰- اگر داشته باشیم $z=\frac{x^2}{2y^2}+\frac{y^2}{2x^2}$ مقدار $x.\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$ کدام است ؟ (سراسری ۷۶)

۱) z ۲) صفر ۳) $2z$ ۴) $\frac{x^2}{y^2}$

۱۱- مختصات نقطه بحرانی تابع $z=x^2+2y^2+2x-4y$ کدام است ؟ (سراسری ۷۶)

۱) (۰و۰و۰) ۲) (۱و۱و۱) ۳) (۱و۱-و۱) ۴) (۱-و۱و ۳-)

۱۲- در تابع ضمنی $x^2-y^2+xyz-xy=0$ مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه (۱و۱و۱) برابر کدام است؟ (سراسری ۷۶)

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

۱۳- در تابع دو متغیره $z=\frac{x^2}{y^2}+\frac{y}{x}$ مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$ را در نقطه y=2 , x=1 کدام است ؟ (سراسری ۷۷)

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{9}{4}$

۱۴- دامنه حوزه مقادیر حقیقی f با ضابطه $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) R^2 ۲) $R-\{0\}$ ۳) $R^+-\{(0,0)\}$ ۴) $R^2-\{(0,0)\}$

۱۵- در نقطه بحرانی تابع دو متغیره حقیقی به معادله $z=2x^2+y^2-2xy+2x$ مقدار x+y کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) صفر ۴) ۲

۱۶- نوع نقطه بحرانی تابع f در مسئله قبل کدام است ؟ (سراسری ۷۷)

۱) ماکزیمم ۲) مینیمم ۳) عطف ۴) زینی

۱۷- در تابع $Z=\ln(u^2+v^2)$ ، $u=xy$ ، $V=\dfrac{x}{y}$ مقدار Z'_x در $x=y=1$ کدام است ؟ (سراسری ۷۷)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\ln 2$

۱۸- در تابع دو متغیری $z=x^2+4xy+2y^2$ مقدار d^2z کدام است ؟ (سراسری ۷۸)

۱) $12dxdy$ ۲) $2d^2x+2d^2y$
۳) $2d^2x+4d^2y$ ۴) $2d^2x+8dxdy+4d^2y$

۱۹- برد (Range) تابع حقیقی $Z=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ کدام است ؟ (سراسری ۷۸)

۱) R ۲) R^+ ۳) $[0,1]$ ۴) $R^+\cup\{0\}$

۲۰- ارتفاع نقطه بحرانی تابع $z=2x^2-xy+y^2+10$ کدام است؟ (سراسری ۷۸)

۱) 0 ۲) 2 ۳) 4 ۴) 10

۲۱- اگر داشته باشیم $\begin{cases} z=x^2-y^2 \\ x=t\cos t \\ y=t\sin t \end{cases}$ ، $\dfrac{dz}{dt}$ در نقطه $t=\dfrac{\pi}{4}$ کدام است (سراسری ۷۸)

۱) $\dfrac{-\pi^2}{8}$ ۲) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) π

۲۲- در تابع f به معادله $z=\dfrac{xy-1}{\ln(x+y)-1}$ دامنه تابع کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) $D_f=R^{+2}$ ۲) $D_f=\{(x,y)\,|\,x,y\in R, x+y\neq e\}$
۳) $D_f=\{(x,y)\,|\,x+y>0, x+y\neq e\}$ ۴) $D_f=R^2-\{0,0\}$

۲۳- اگر داشته باشیم $V=y^2-x^2, u=\dfrac{x}{y}, z=u^2+v^2-2uv$ باشد مقدار $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ اگر x=y=1 باشد کدام است؟
(سراسری ۷۹)

۱) 0 ۲) 2 ۳) 4 ۴) 6

۲۴- اگر $Z=\dfrac{x+2y}{x-y+3}$ باشد، مجموع طول و عرض نقطه بحرانی کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

۲۵- اگر f تابعی به معادله $Z=\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}$ باشد دامنه (Domain) این تابع برابر است با: (سراسری ۸۰)

۱) R^2 ۲) R ۳) $R^2-\{(0,0)\}$ ۴) $R-\{0\}$

۲۶- در تابع f به معادله $x^2+ye^{xy}-xy+z-xyz=0$ مقدار $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه (۱- و ۰ و ۱) برابر است با
(سراسری ۸۰)

۱) -3 ۲) -2 ۳) -1 ۴) صفر

۲۷- اگر f تابعی حقیقی به معادله $z=x^2+xy+4y^2$ فرض شود مقدار dz در نقطه (۱و۱) بـه ازای dx=dy=0/1
برابر است با...... (سراسری ۸۰)

۱) ۰/۸ ۲) ۰/۹ ۳) ۱/۲ ۴) ۲/۲

۲۸- نقطه بحرانی تابع f با ضابطه $z = xy - x^2 - 2y^2 + 7y$ کدام است ؟ (سراسری ۸۰)

۱) (۷و۲و۱) ۲) (۱و۱و۰) ۳)(۷و-۲ و -۱) ۴) (۳و۱و-۱)

۲۹- در سوال شماره قبل نوع نقطه بحرانی کدام است ؟ (سراسری ۸۰)

۱) زینی ۲) مینیمم مطلق ۳) مینیمم نسبی ۴) ماکزیمم مطلق

۳۰- تابع f به معادله $Z = \sqrt{\dfrac{x-y}{x^2+y^2}}$ مفروض است. دامنه (Range) این تابع کدام است؟ (سراسری ۸۱)

۱) R^2 ۲) R^+

۳) $R - \{x \mid x < y\}$ ۴) $\{(x,y), \mid x, y \in R, x \geq y\}$

۳۱- در تابع دو متغیره $u = \ln(x^2+y^2)$ حاصل $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y}$ کدام است ؟ (سراسری ۸۱)

۱) ۲ ۲) x+y ۳) ln(x+y) ۴) $2(n^2+y^2)$

۳۲- در تابع دو متغیره $f(x,y) = x^{xy}$ مقدار $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ به ازای x=y=1 کدام است؟ (سراسری ۸۱)

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) e ۴) تعریف نشده

۳۳- در تابع $z = ax^2 + bxy + ay + 4y + 5$ اگر (۱و۱) نقطه اکسترمم باشد b ,a کدام است؟ (سراسری ۸۱)

۱) $b=2, a=1$ ۲) $b=4, a=0$

۳) $b=-8, a=+4$ ۴) $b=-4, a=4$

۳۴- نقطه بحرانی تابع f به معادله $z=x^2+xy+y^2-3x-6y$ به کدام صورت است؟ (سراسری ۸۱)

۱) (۳و۰) زینی ۲) (۳و۰) مینیمم

۳) (۰و۳) ماکزیمم نسبی ۴) (۰و۳) ماکزیمم مطلق

۳۵- اگر داشته باشیم $Z=x^2+2xy+4y+10$, $x+y=3$ باشد نقطه بحرانی این تابع کدام است؟ (سراسری ۸۱)

۱) (۲و۱) ۲) (۱و۲) ۳) (۴و-۱) ۴) (-۱ و ۴)

۳۶- در سوال قبلی نوع نقطه کدام است؟ (سراسری ۸۱)

۱) زینی ۲) ماکزیمم ۳) مینیمم نسبی ۴) مینیمم مطلق

۳۷- مینیمم تابع $Z=4x^2+2y-4$ با توجه به شرط $2x + \dfrac{1}{2}y = 12$ کدام است؟ (سراسری ۸۲)

۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۲۴ ۴) ۴۰

۳۸- اگر $W = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ باشد آنگاه $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}$ برابر است با (سراسری ۸۲)

۱) 0 ۲) x+y+z

۳) $x^2+y^2+z^2$ ۴) $xy\ (x^2+y^2+z^2)$

۳۹- اگر تابع $f: R^2 \to R$ به معادله $Z = \dfrac{e^x - e^y}{e^x + e^y}$ باشد برد این تابع کدام است ؟ (سراسری ۸۳)

۱) R ۲) (۱ و -۱) ۳) [۱و-۱] ۴) $R^+ \cup \{0\}$

۴۰- اگر داشته باشیم $Z = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ در نقطه (۱و۲) کدام است؟ (سراسری ۸۳)

۱) $\dfrac{16}{125}$ ۲) $\dfrac{24}{125}$ ۳) $\dfrac{32}{125}$ ۴) $\dfrac{48}{125}$

۴۱- اگر تابع $f: R^2 \to R$ به معادله $Z=\sqrt{1-x^2-2y^2}$ فرض شود دامنه این تابع کدام است؟ (سراسری ۸۳)

۱) R^+ ۲) R^-

۳) $-\infty < x, y < +\infty$ ۴) $x^2+2y^2 \le 1$

۴۲- اگر داشته باشیم $\begin{cases} z=u^2+v^2 \\ u=x^2-y^2 \\ v=\dfrac{x}{y} \end{cases}$ در این صورت $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ کدام است؟ (سراسری ۸۳)

۱) $\dfrac{4ux}{y}$ ۲) $4ux+\dfrac{2v}{y}$

۳) $4ux-4vy$ ۴) $(2u+2v)[2x-\dfrac{1}{y}]$

۴۳- نقطه بحرانی تابع $z=x^2-6xy+6y^2+4x$ کدام است ؟ (سراسری ۸۳)

۱) $x=4, y=2$ ۲) $x=1, y=2$ ۳) $x=2, y=4$ ۴) $x=2, y=1$

۴۴- در تابع $z=x^2+4xy+2y^2-4x-6y$ وضعیت نقطه بحرانی چگونه است؟ (سراسری ۸۳)

۱) ماکزیمم مطلق ۲)ماکزیمم نسبی ۳) مینیمم مطلق ۴) زینی

۴۵- در تابع $z=x^2-y^2-8xy$ حاصل d^2z کدام است ؟ (سراسری ۸۳)

۱) $dx^2-16dxdy-2dy^2$ ۲) $dx^2-8dxdy-dy^2$

۳) $2dx^2-16dxdy-2dy^2$ ۴) $2dx^2+8dxdy-2dy^2$

۴۶- ماکزیمم مقدار تابع دو متغیره $z=x^2+2xy$ با شرط $2x+y=12$ کدام است؟ (سراسری ۸۳)

۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۴۸ ۴) ۵۴

رشته حسابداری

۱- اگر $Z=\dfrac{x^2+y^2}{2xy}$ باشد، مقدار $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ در $x=2$ و $y=1$ کدام است؟ (سراسری ۷۵)

۱) $\dfrac{3}{8}$ ۲) $\dfrac{3}{16}$ ۳) $\dfrac{5}{16}$ ۴) $\dfrac{1}{4}$

۲- اگر $Z=\dfrac{x}{2y}+\dfrac{2y}{x}$ باشد، مقدار $xz'_x+yz'_y$ کدام است؟ (سراسری ۷۵)

۱) صفر ۲) z ۳) ۱ ۴) $2z$

۳- اگر $Z=x^2+y^2+xy$ باشد، مقدار dz در نقطه $y=1$ و $x=1$ کدام است؟ (سراسری ۷۵)

۱) $2dz+2dy+dxdy$ ۲) $3dx+3dy$

۳) $dx+dy+2dxdy$ ۴) صفر

۴- در تابع تولید کل $Z=ax^2y$ که در آن y,x عوامل تولیدند، تولید نهایی نسبت به x در $x=2$ و $y=2$ چه مقدار است؟ (سراسری ۷۵)

۱) a ۲) $2a$ ۳) $4a$ ۴) $8a$

۵- اگر تابع هدف $Z=x^2+y^2$ و قید $x+y=4$ باشد در نقطه ی بحرانی مقدار z کدام است؟ (سراسری ۷۵)

۱) ۱۶ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) ۲

۶- اگر $v = rSin\theta , u = rCos\theta , Z = u^{2} + v^{2} - 2uv$ مقدار $\frac{\partial z}{\partial r}$ کدام است؟ (سراسری ۷۵)

۱) صفر ۲) $(2v - 2u)Cos\theta$ ۳) $2r - 4Sin\theta Cos\theta$ ۴) $(2u - 2v)Sin\theta$

۷- اگر داشته باشیم $Z = \frac{x^{2}}{2y^{2}} + \frac{2y^{2}}{x^{2}}$ مقدار $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$ کدام است؟ (سراسری ۷۶)

۱) ۰ ۲) z ۳) $2z$ ۴) $3z$

۸- در معادله ضمنی $z^{2} + x^{2} + y^{2} - 5xy + 3x - 2zy = 0$، مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه (۲و۱و۱) کدام است؟ (سراسری ۷۶)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) صفر ۴) ۱

۹- برد تابع f به معادلهٔ $Z = \sqrt{9 - x^{2} - y^{2}}$ کدام است؟ (سراسری ۷۶)

۱) R ۲) R^{+} ۳) $R^{+} \cup \{0\}$ ۴) $[0,3]$

۱۰- نقطهٔ بحرانی تابع $Z = x^{2} + y^{2}$ نسبت به قید $x + 2y = 5$ کدام است؟ (سراسری ۷۶)

۱) (۵و۲و۱) ۲) (۱۰و۱و۳) ۳) ($\frac{25}{4}$ و $\frac{5}{2}$ و ۰) ۴) (۲۵و۰و۵)

۱۱- در مساله قبل نوع نقطه بحرانی کدام است؟ (سراسری ۷۶)

۱) مینمم ۲) زینی ۳) عطف ۴) ماکزیمم

۱۲- برد تابع حقیقی دو متغیره به معادله $Z = \sqrt{xy + 5}$ کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) R^{2} ۲) $R - \{5\}$ ۳) $R^{+} \cup \{0\}$ ۴) $R - \{0\}$

۱۳- در تابع دو متغیره به معادله $Z = xLn(x^{2} + y^{2})$ مقدار $\frac{\partial^{2} z}{\partial x \partial y}$ در $y = 1$ و $x = 1$ کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) ۰ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۱۴- نقطه بحرانی تابعی به معادله $Z = x^{2} - 2x + y^{2} - 2y + 10$ کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) (۰و۲) ۲) (۱و۱) ۳) (۲و۰) ۴) (۲و۲)

۱۵- در سوال قبل نوع نقطه بحرانی کدام است؟

۱) زینی ۲) عطف ۳) ماکزیمم ۴) مینمم

۱۶- اگر $v = h\left(\frac{x}{y}\right), u = g(x + y), Z = u^{2} + v^{2}$ باشد، Z'_{x} کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) $2u.g'h'$ ۲) $2u(1 \cdot y) + 2v\left(-\frac{x}{y^{2}}\right)$

۳) $2\left(u.g' + \frac{v}{y}h'\right)$ ۴) صفر

۱۷- اگر داشته باشیم $Z = f(x^{2} + 2y^{2}, 4x^{2}y)$ مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ به ازای $x = 2$ و $y = \frac{1}{2}$ کدام است؟ (سراسری ۷۸)

۱) $8f'_{1} + 2f'_{2}$ ۲) $4f'_{1} + 8f'_{2}$ ۳) $6f'_{1} + 4f'_{2}$ ۴) $4f'_{1} + 4f'_{2}$

۱۸- اگر f تابع حقیقی به معادله $2x^2+y^2-z^2-2xyz=0$ باشد، در نقطه $x=y=z=1$ مقدار Z'_x کدام است؟ (سراسری ۷۸)

۱) -2 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 2

۱۹- اگر $4q_1+8q_2=160, u=q_1q_2$ باشد، مقدار ماکزیمم تابع مقید u چقدر است؟ (سراسری ۷۸)

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۲۰۰

۲۰- از رابطه $Z=(x+2y)^x$ مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ در $x=y=1$ کدام است؟ (سراسری ۷۸)

۱) $3Ln3+1$ ۲) $Ln3-1$ ۳) 1 ۴) 3

۲۱- برد تابع دو متغیر $Z=\sqrt{9-2x^2-y}$ کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) $[-3,3]$ ۲) $R^+\cup\{0\}$ ۳) R ۴) $[0,3]$

۲۲- اگر داشته باشیم $Z=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+Ln\frac{x}{y}$ مقدار $xZ'_x+yZ'_y$ کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) صفر ۲) Z ۳) $\frac{1}{Z}$ ۴) $z-1$

۲۳- در تابع دو متغیره $Z=\frac{2x+y-1}{x+2y}$، مجموع طول و عرض نقطه اکسترمم آن کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) 2 ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) 3 ۴) $\frac{1}{3}$

۲۴- اگر داشته باشیم $z=10-x^2+2x-2y^2+8y$ مقدار z در نقطه اکسترمم این این تابع کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) ۱۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۷ ۴) ۲۱

۲۵- در مساله قبل نوع نقطه اکسترمم چیست؟ (سراسری ۷۹)

۱) مکرر ۲) زمینی ۳) ماکزیمم ۴) مینیمم

۲۶- اگر می نیمم تابع $z=x^2+y^2(x^2+y^2)$ با توجه به قید $x+2y=5$ را با استفاده از روش ضریب لاگرانژ تعیین کنیم، مقدار λ کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۷- برد تابع دو متغیره $z=\sqrt{100-2x^2-y^2}$ کدام است؟ (سراسری ۸۰)

۱) π ۲) π^α ۳) $[0,10]$ ۴) $R^+\cup\{0\}$

۲۸- اگر $z=u^2+2uv$ و $u=\frac{x}{y}$, $v=x^2-y^2$ باشد، مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ دو نقطه $x=y=1$ کدام است؟ (سراسری ۸۰)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۲۹- مختصات نقطه بحرانی تابع $z=x^2+2xy-y^2-12x$ کدام است؟ (سراسری ۸۰)

۱) $(-1,-1,14)$ ۲) $(3,3,-18)$ ۳) $(0,0,0)$ ۴) $(1,1,-10)$

۳۰- نوع نقطه بحرانی در سوال قبل کدام است؟ (سراسری ۸۰)

۱) ماکزیمم نسبی ۲) زینی ۳) ماکزیمم مطلق ۴) مینیمم مطلق

۳۱- در تابع متغیر $\text{Max } z=xy$ نسبت به $x+۲y=۱۰۰$ با استفاده از روش لاگرانژ، مقدار λ ضریب لاگرانژ برابر است با:

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

۳۲- در سوال قبل، مقدار ماکزیمم z کدام است؟ (سراسری ۸۰)

۱) ۱۳۵۰ ۲) ۱۳۰۰ ۳) ۱۲۵۰ ۴) ۱۰۰۰

۳۳- تابع حقیقی f به معادله $z=\sqrt{۲۵-x^۲-y^۴}$ مفروض است. برد این تابع کدام است؟ (سراسری ۸۱)

۱) R ۲) $R^۲$ ۳) $[0,\infty)$ ۴) $[۰,۵]$

۳۴- برای تابع $z=x\ln y+y\ln x$ مقدار $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ برابر است با: (سراسری ۸۱)

۱) $\frac{x}{x+y}$ ۲) $\frac{y}{x+y}$ ۳) $\frac{xy}{x+y}$ ۴) $\frac{x+y}{xy}$

۳۵- نقطه بحرانی تابع دو متغیره $z=۳x^۲+۲y^۲-xy-۴x-۷y+۱۲$ کدام است؟ (سراسری ۸۱)

۱) $(۱,۲,۳)$ ۲) $(۱,۳,۵)$ ۳) $(۱,۱,۵)$ ۴) $(۲,۲,۶)$

۳۶- در سوال قبل نوع نقطه بحرانی کدام است؟ (سراسری ۸۱)

۱) زمینی ۲) مینیمم نسبی ۳) ماکزیمم نسبی ۴) ماکزیمم مطلق

۳۷- اکسترمم تابع $z=xy$ تحت شرایط $۲x+۳y-۵=۰$ کدام است؟ (سراسری ۸۱)

۱) $\left(\frac{۵}{۴},\frac{۵}{۶}\right)$ ۲) $\left(\frac{۵}{۶},\frac{۵}{۶}\right)$ ۳) $\left(\frac{۵}{۱۲},\frac{۵}{۴}\right)$ ۴) $\left(-\frac{۵}{۱۲},\frac{۵}{۶}\right)$

۳۸- برد تابع $z=\sqrt{\frac{x^۲+y^۲}{x^۲+y^۲}}$ برابر است با: (سراسری ۸۲)

۱) R ۲) R^+ ۳) $[۱,+\infty)$ ۴) $R^+ u\{۰\}$

۳۹- اگر $z=x^۲+y^۲+۵xy$ باشد، مقدار $d^۲z$ به ازای $d_x=d_y=۰/۱$ برابر کدام است؟ (سراسری ۸۲)

۱) ۰/۰۷ ۲) ۰/۱۰ ۳) ۰/۱۲ ۴) ۰/۱۴

۴۰- اگر $z=x^2+xy+y^2$ و $x=۲r+s$ و $y=r-۲s$ آنگاه در نقطه $(۱,۲)$ مقدار $\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial s}$ کدام است؟ (سراسری ۸۲)

۱) ۷ ۲) ۷- ۳) ۸ ۴) ۸-

۴۱- به ازای چه مقداری از a نقطه بحرانی $z=x^۲+ay^۲$ یک نقطه زینی است؟ (سراسری ۸۲)

۱) $a>۰$ ۲) $a<۰$ ۳) $a<۱$ ۴) $a>۱$

۴۲- اگر داشته باشیم $x^۲+y^۲+z^۲-۵xyz+۲z=۰$ در نقطه $(۱,۱,۱)$ مقدار $z'_x+z'_y$ برابر است با: (سراسری ۸۲)

۱) ۳ ۲) ۳- ۳) ۶ ۴) ۶-

۴۳- اگر تابع $f:R^۲\to R$ به معادله $z=\frac{۲x^۲-y^۲}{۲x^۲+y^۲}$ باشد، برد تابع کدام است؟ (سراسری ۸۳)

۱) R ۲) $[-۱,۱]$ ۳) $(-۱,۱)$ ۴) $R^+u\{۰\}$

۴۴- در تابع دو متغیره $z=\dfrac{x^2-y^2}{x^2-y^2}$ مقدار $z=\dfrac{\partial z}{\partial x^۲}$ در نقطه (۱،۱) کدام است؟ (سراسری ۸۳)

۱) -1 ۲) $-\dfrac{1}{8}$ ۳) $\dfrac{1}{8}$ ۴) 1

۴۵-اگر تابع $f:R^2\to R$ به معادله $z=\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ فرض شود دامنه این تابع کدام است؟

۱) $R^۲$ ۲) $R^+u\{\cdot\}$ ۳) $\dfrac{x}{y}>\cdot$ ۴) $-\infty<x.y<+\infty$

۴۶- اگر داشته باشیم $\begin{cases} z=u^۲-v^۲ \\ u=x^۲.y^۲ \\ v=\dfrac{x}{y}\end{cases}$ آنگاه $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ کدام است؟ (سراسری ۸۳)

۱) $\dfrac{-٤ux}{y^۲}$ ۲) $٤xy-\dfrac{۲ux}{y^۲}$ ۳) $۴uy+\dfrac{۲vx}{y^۲}$ ۴) $(۲x-۲v)\left(۲xy-\dfrac{x}{y^۲}\right)$

۴۷- در تابع $z=x^۲+٤xy+۲y^۲-٤x-٦y$ مختصات نقطه بحرانی کدام است؟ (سراسری ۸۳)

۱) $(۲,۱)$ ۲) $\left(۱,\dfrac{۱}{۲}\right)$ ۳) $\left(\dfrac{۱}{۲},۱\right)$ ۴) $(۱,۲)$

۴۸- در تابع $z=x^۲-y^۲+٦x+٤y$ مقدار $d^۲z$ کدام است؟ (سراسری ۸۳)

۱) $٤dxdy$ ۲) $dx^۲-d^۲y$ ۳) $۲dx^۲-۲dy^۲$ ۴) $۲d^۲x-۲d^۲y$

۴۹- در تابع $z=x^۲-٦xy+٦y^۲+٤x$، نقطه بحرانی کدام است؟ (سراسری ۸۳)

۱) زینی ۲) ماکزیمم نسبی ۳) مینیمم نسبی ۴) مینیمم مطلق

۵۰- در تابع دو متغیری $z=y.f(x-۲y)$ حاصل $\dfrac{\partial z}{\partial y}+۲\dfrac{\partial z}{\partial x}$ کدام است؟ (مدیریت ۸۴)

۱) ۰ ۲) y ۳) z ۴) $\dfrac{z}{y}$

۵۱- کمترین مقدار تابع $z=x^۲-xy$ با شرط $y+۲x=۶$ کدام است؟ (مدیریت ۸۴)

۱) -۵ ۲) -۳ ۳) -۲ ۴) -۱

۵۲- دیفرانسیل کامل تابع $z=Ln\dfrac{x+y}{x-y}$ در نقطه $y=۱, x=۲$ بـه ازای $\partial x=۰/۰۱$ و $\partial y=۰/۰۲$ کـدام اسـت؟ (مدیریت ۸۴)

۱) ۰ ۲) ۰/۰۱ ۳) ۰/۰۲ ۴) ۰/۰۳

۵۳- اگر $z=x^۲+y^۲+۳xy-۵y$ و $x=st$ ، $y=۲s-۳t$ باشد، مقدار $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ بـه ازای $t=۲$ و $s=۳$ چقـدر اسـت؟ (مدیریت ۸۴)

۱) -۴ ۲) -۳ ۳) ۱ ۴) ۲

۵۴- در تابع دو متغیری $z=x^۲e^{\frac{y}{x}}$ حاصل $\dfrac{\partial^۲ z}{\partial x\partial y}$ در نقطه (۲و۱) کدام است؟ (حسابداری ۸۴)

۱) $-e^۲$ ۲) $-۲e^۲$ ۳) $e^۲$ ۴) $۲e^۲$

۵۵- نقطه بحرانی تابع $z = x^2 + 2y^2 - 3xy - x + 2y$ چگونه است؟ (حسابداری ۸۴)

۱) زینی ۲) ماکزیمم ۳) مینیمم ۴) عطف

۵۶- دیفرانسیل کامل تابع $z = x^2 tgy - x\cos 2y$ در نقطه $(2,\frac{\pi}{4})$ به ازای $dx = 0/02$ و $dy = 0/01$ برابر کدام است؟ (حسابداری ۸۴)

۱) $0/12$ ۲) $0/15$ ۳) $0/2$ ۴) $0/24$

۵۷- اگر $z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x-2}$ و $x = 2s - t$ و $y = t - s^2$، مقدار $\frac{\partial z}{\partial s}$ به ازای $t = 2$ ، $s = 1$ کدام است؟ (حسابداری ۸۴)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

۵۸- برد تابع حقیقی $z = \frac{x^2 + y^2}{x - y}$ کدام است؟ (اقتصاد ۸۴)

۱) $R - [-1,1]$ ۲) $R - \{-1,1\}$ ۳) R ۴) $R - \{0\}$

۵۹- حد تابع $z = \frac{x+y}{x-y}$ در نقطه $(0,0)$ در امتداد خط راست $y = mx$ کدام است؟ (اقتصاد ۸۴)

۱) صفر ۲) m ۳) $\frac{1+m}{1-m}$ ۴) ∞

۶۰- اگر داشته باشیم $z = (x+2y)^{\frac{x}{y}}$ آنگاه $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه $(1,1)$ برابر است با: (اقتصاد ۸۴)

۱) $3Ln2 + 3$ ۲) $3Ln3 + 1$ ۳) $3Ln3 + 1$ ۴) $2Ln3 + 3$

۶۱- دیفرانسیل مرتبه دوم تابع $z = f(x,y)$ به صورت $d^2z = 4dx^2 + 2dxdy + 6dy^2$ است. وضع این تابع از نظر تحدب و تقعر کدام است؟ (اقتصاد ۸۴)

۱) اکیداً محدب ۲) محدب ۳) مقعر ۴) نه محدب و نه مقعر

۶۲- طول و عرض نقطه بحرانی تابع $z = x^2 + 4xy + 6y^2 + 2x$ کدام است؟ (اقتصاد ۸۴)

۱) $(3,-1)$ ۲) $(6,-2)$ ۳) $(-6,2)$ ۴) $(-3,1)$

۶۳- در تابع تولید $z = xy$ مقادیر y,x عوامل تولید و z محصول است، اگر قیمت عوامل تولید $P_x = 10$ و $P_y = 5$ و هزینه کل تخصیصی ۱۰۰ باشد، از هر یک از عوامل تولید چه مقدار به کار گیریم تا مقدار محصول z ماکزیمم گردد؟ (اقتصاد ۸۴)

۱) $x = 4/5\ ,\ y = 11$ ۲) $x = 8\ ,\ y = 4$ ۳) $x = 2/5\ ,\ y = 15$ ۴) $x = 5\ ,\ y = 10$

۶۴- در مسئله برنامه ریزی برای تابع مطلوبیت و خط بودجه داریم $\begin{cases} \max u = q_1 q_2 \\ s.t \\ 2q_1 + q_2 = 100 \end{cases}$ اگر بودجه یک واحد تغییر کند مقدار مطلوبیت چه مقدار تغییر می کند؟ (اقتصاد ۸۴)

۱) ۲۵ ۲) ۵۰ ۳) ۷۵ ۴) ۱۰۰

۶۵- اگر داشته باشیم $\begin{cases} U = xLn(y+1) \\ V = yLn(x+1) \end{cases}$ آنگاه ژاکوبین $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ در نقطه $(1,1)$ کدام است؟ (اقتصاد ۸۴)

۱) $2 + Ln2$ ۲) $(Ln2)^2 - \frac{1}{4}$ ۳) $-2 + Ln2$ ۴) $(Ln2)^2 + \frac{1}{4}$

۶۶- اگر $z = xf\left(\frac{y}{x}\right) + yg\left(\frac{x}{y}\right)$ ، در این صورت $x.\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$ کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ۸۵)

۱) z ۲) z ۳) $\frac{-y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)+g'\left(\frac{x}{y}\right)$ ۴) $-\frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)+g'\left(\frac{x}{y}\right)$

۶۷- طول و عرض نقطه بحرانی تابع با ضابطه $z = x^{۲} + ۴y - x$ کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ۸۵)

۱) $(-۱,-۲)$ ۲) $(-۲,۳)$ ۳) $(-۳,-۱)$ ۴) $(-۴,۹)$

۶۸- مختصات نقطه بحرانی تابع $z = x^{۲} + y^{۲}$ با شرط $x + ۳y = ۱۰$ کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ۸۵)

۱) $(۱,۳,۱۰)$ ۲) $(۴,۲,۱۸)$ ۳) $(۷,۱,۵۰)$ ۴) $(۱۰,۰,۱۰۰)$

۶۹- اگــر داشـــته باشـــیم $x^{۲} + y^{۲} - ۲xy + xyz = ۰$ حاصـــل $Z'_x + Z'_y$ در نقطـــه $(۱,۱,۱)$ کـــدام اســـت؟ (حسابداری و مدیریت ۸۵)

۱) -۱ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

۷۰- برد تابع با ضابطه $f : R^{۲} \to R$ و $f(x,y) = \left|\frac{۲x^{۲}+y^{۲}}{۲x^{۲}-y^{۲}}\right|$ کدام است؟ (اقتصاد ۸۵)

۱) R^+ ۲) $(۱,\infty)$ ۳) $[۱,+\infty)$ ۴) $R^+ - \{۰\}$

۷۱- تابع حقیقی با ضابطه $\begin{cases} x^{۲}\ \frac{x^{۲}-y^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}} & (x,y)\neq(۰,۰) \\ a & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$ به ازای کدام مقـدار a در $(۰,۰)$ پیوسـته اسـت؟ (اقتصاد ۸۵)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) هیچ مقدار a

۷۲- تابع $z = ۴x^{۲} + ۲xy + ۳y^{۲} - x - ۱۴y$ مفروض است. از نظر تحدب و تقعر این تابع چگونه است؟ (اقتصاد ۸۵)

۱) اکیداً محدب ۲) اکیداً مقعر ۳) نه محدب و نه مقعر ۴) مقعر

۷۳- طول و عرض نقطه بحرانی تابع $z = ۴x^{۲} + ۲xy + ۳y^{۲} - x - ۱۴y$ کدام است؟ (اقتصاد ۸۵)

۱) $\left(\frac{-۱}{۲},\frac{۵}{۲}\right)$ ۲) $(-۱,۵)$ ۳) $(۲,-۳)$ ۴) $(۲,۳)$

۷۴- اگر داشته باشـیم $F = u^{۲} + v^{۲} - ۲xy + y^{۲} = ۰$ و $G = uv + x^{۲} - y^{۲} = ۰$ مقـدار ژاکـوبین $\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$ کـدام است؟ (اقتصاد ۸۵)

۱) $u^{۲} - v^{۲}$ ۲) $u^{۲} + v^{۲} - uv$ ۳) $uv + u^{۲} + v^{۲}$ ۴) $۲u^{۲} - ۲v^{۲}$

۷۵- از رابطه $z^{۲} - x^{۲} - y^{۲} + xyz = ۰$ مقدار $xZ'_x + yZ'_y$ در نقطه $(۱,۱,۱)$ کدام است؟ (اقتصاد ۸۵)

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۷۶- تابع مطلوبیت مصرف کننده ای $U = 2q_1q_2$، خط بودجه $4q_1 + q_2 = 200$، مقدار مطلوبیت ماکزیمم کدام است؟ (اقتصاد ۸۵)

۱) ۲۵۰۰ ۲) ۵۰۰۰ ۳) ۷۵۰۰ ۴) ۱۰۰۰۰

۷۷- در تابع دو متغیری $Z = \frac{x}{x+y} + Ln\sqrt{x^2+y^2}$ مقدار دیفرانسیل کامل z در نقطه $(1,2)$ به ازای $\partial x = 0/01$ و $\partial y = 0/02$ چقدر است؟ (حسابداری و مدیریت ۸۶)

۱) ۰/۰۱ ۲) ۰/۰۲ ۳) ۰/۰۳ ۴) ۰/۰۴

۷۸- از رابطه $e^{2x+y-z} = \frac{x^2 z}{y} - x$ مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه $(1,2,4)$ کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ۸۶)

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۷۹- بیشترین مقدار تابع $z = x^2 + 2y^2 + 6xy$ با شرط $x + y = 12$ کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ۸۶)

۱) ۲۸۶ ۲) ۲۹۴ ۳) ۳۲۴ ۴) ۳۳۶

۸۰- اگر $f(x,y) = x^2 - y^2 + xy$ و $x = s^2 - \frac{1}{t}$ ، $y = 2s + \sqrt{t}$ باشد، مقدار $\frac{\partial f}{\partial t}$ به ازای $t = 1$ و $s = 2$ کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ۸۶)

۱) ۴/۵ ۲) ۵/۵ ۳) ۶/۵ ۴) ۷/۵

۸۱- هرگاه $z = f\left(x^2 Lny^2 \quad , \quad y^2 Lnx^2\right)$ حاصل $\frac{\partial z}{\partial x} = z_x$ کدام است؟ (اقتصاد ۸۶)

۱) $Z_x = 4xLny + \frac{2y^2}{x}$

۲) $Z_x = \left(\frac{4x}{y} + 4yLnx\right)zu$

۳) $Z_x = (4xLny)zu + \frac{2y^2}{x^2}zv$

۴) $Z_x = (4x + Lny)zu + \left(2y^2 + \frac{1}{x}\right)zv$

۸۲- برد تابع $f: R^2 \to R$ با ضابطه $z = Ln\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)$ کدام است؟ (اقتصاد ۸۶)

۱) $[1,\infty)$ ۲) $[1,0)$ ۳) R^+ ۴) $(-\infty,0]$

۸۳- از رابطه $x^2 + y^2 + 2xy = 0$ حاصل d^2y برابر کدام است؟ (اقتصاد ۸۶)

۱) صفر ۲) $dx^2 + ydy$ ۳) $2ydy + dxdy$ ۴) $dx^2 + 2dxdy$

۸۴- نقطه بحرانی تابع $z = 10 + x^2 - 6x + y^2 + 4y$ به کدام صورت است؟ (اقتصاد ۸۶)

۱) $(3,-2,-3)$ زینی
۲) $(3,-2,-3)$ ماکزیمم مطلق
۳) $(3,-2,-3)$ فاقد ماکزیمم و می نیمم
۴) $(3,-2,-3)$ می نیمم مطلق

۸۵- اگر تابع مطلوبیت مصرف کننده ای از سه کالا $u = f(q_1, q_2, q_3)$ و توابع تقاضای این سه کالا $q_1 = 10 - 2p_1 + 3p_2 + p_3$ ، $q_2 = 12 + 2p_1 - 3p_2 + p_3$ ، $q_3 = 10 + p_1 + 2p_2 - p_3^2$ باشد، مطلوبیت نهایی نسبت به p_1 کدام است؟ (اقتصاد ۸۶)

۱) $\frac{\partial u}{\partial p_1} = -2\frac{\partial u}{\partial q_1} + 2\frac{\partial u}{\partial q_2} + \frac{\partial u}{\partial q_3}$

۲) $\frac{\partial u}{\partial p_1} = \frac{\partial u}{\partial q_1} + \frac{\partial u}{\partial q_2} + \frac{\partial u}{\partial q_3}$

۳) $\frac{\partial u}{\partial p_1} = -2\frac{\partial u}{\partial q_1} - 3\frac{\partial u}{\partial q_2} - 2p_3\frac{\partial u}{\partial q_3}$

۴) $\frac{\partial u}{\partial p_1} = 2\frac{\partial u}{\partial q_1} - \frac{\partial u}{\partial q_2} - \frac{\partial u}{\partial q_3}$

۸۶- در تابع تولید $Z = xy$ مقادیر y, x عوامل تولید و z محصول است، اگر قیمت عوامل تولید $p_x = 10$ و $p_y = 5$ هزینه کل تخصیصی ۱۰۰ باشد، از هر یک از عوامل تولید چه مقدار به کار بگیریم تا مقدار محصول z ماکزیمم گردد؟ (اقتصاد ۸۵)

۱) $y = 11,\ x = 4/5$ ۲) $y = 4,\ x = 8$ ۳) $y = 15,\ x = 2/5$ ۴) $y = 10,\ x = 5$

پاسخ تشریحی تستهای طبقه‌بندی شده فصل پنجم

رشته اقتصاد

۱- گزینه ۲ صحیح است.

عبارت $\frac{x^2+1}{y^2+1}$ به ازای جمع مقادیر x و y مثبت است و از طرفی این عبارت به ازای هیچ مقدار از x و y صفر نخواهد شد. پس گزینه ۲ صحیح است.

۲- گزینه ۱ صحیح است.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=Ln\left(1+\frac{y}{x}\right)+x.\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y}{x}}+y.\frac{\frac{1}{y}}{1+\frac{x}{y}}=$$

$$Ln\left(1+\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x+y}+\frac{y}{x+y}=Ln\left(1+\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x.\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y}{x}}+Ln\left(1+\frac{x}{y}\right)+y.\frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\frac{x}{y}}=\left(\frac{x}{x+y}+\ln(1+\frac{x}{y})-\frac{x}{x+y}\right)$$

$$=Ln\left(1-\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=Ln\left(1+\frac{y}{x}\right)+Ln\left(1+\frac{x}{y}\right)=Ln\left(\frac{x+y}{x}\right)+Ln\left(\frac{x+y}{y}\right)$$

$$=Ln\left(\frac{(x+y)^2}{xy}\right)$$

۳- گزینه ۱ صحیح است.

$$Z'_x=\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}=-\frac{F_1+2xF_2}{F_1+2zF_2}$$

۴- گزینه ۳ صحیح است.

$$f(\alpha x,\alpha y)=e^{\frac{\alpha x}{\alpha y}}+e^{\frac{\alpha y}{\alpha x}}+Log\alpha x-Log\alpha y$$

$$=e^{\frac{x}{y}}+e^{\frac{y}{x}}+Log\alpha+\log x-\log\alpha-\log y$$

$$=e^{\frac{x}{y}}+e^{\frac{y}{x}}+\log x-\log\alpha-\log y=\alpha^{\circ}z\Rightarrow n=0$$ تابع همگن با درجه صفر است

۵- گزینه ۱ صحیح است.

$$Z_x=2(x-1)e^{(x-1)^2+y^2+4y}=0\Rightarrow x-1=0\Rightarrow x=1$$
$$Z_y=(2y+4)e^{(x-1)^2+y^2+4y}$$

$$Z\Big|_{\substack{x=1\\y=-2}}=e^{0+4-8}=e^{-4}$$

$$Z_{xx}=2e^{(x-1)^2+y^2+4y}+4(x-1)^2e^{(x-1)^2+y^2+4y}\Rightarrow Z_{xx}\Big|_{\substack{x=1\\y=-2}}=2e^{-4}>0$$

$Z_{xx}>0 \Leftarrow$ نقطه مورد نظر می نیمم است.

۶- گزینه ۲ صحیح است.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial k}.\frac{\partial k}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial c}.\frac{\partial c}{\partial x}\Rightarrow z_x=z_k.k_x+z_l.L_x$$

۷- گزینه ۱ صحیح است.

$$\mathrm{Sin}\frac{\lambda y}{\lambda x}+e^{\frac{\lambda x}{\lambda y}}=\lambda^{0}z\Rightarrow$$

$xz_x+yz_y=nz$ (درجه همگنی$=n$)

$n=$ درجه همگی تابع $=0\Rightarrow xz_x+yz_y=nz=0\times z=0$

۸- گزینه ۲ صحیح است.

$$\begin{cases}Z_x=2x-y-3=0\\ Z_y=-x+2y=0\end{cases}\Rightarrow y=1\ ,\ x=2$$

$$Z\Big|_{\substack{x=2\\y=1}}=2^2-2\times1+1^2-3\times2=-3$$

پس مختصات نقطه بحرانی برابر است با: $(2,1,-3)$

۹- گزینه ۴ صحیح است.

$$Z_{xx}=2\qquad Z_{yy}=2\qquad Z_{xy}=Z_{yx}=-1$$

نقطه Min است.

$$H=\begin{vmatrix}Z_{xx}&Z_{xy}\\Z_{xx}&Z_{yy}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-1\\-1&2\end{vmatrix}=4-1>0$$

۱۰- گزینه ۴ صحیح است.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+\frac{1}{y}+\frac{-2xy}{x^4}=2x+\frac{1}{y}-\frac{2y}{x^3}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}=2-\frac{-6x^2y}{x^6}=2+\frac{6y}{x^4}\Big|_{\substack{x=1\\y=2}}=2+\frac{12}{1}=14$$

۱۱- گزینه ۳ صحیح است.

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=\left(2ue^{u^2+v^2}\right)\left(1\times g'\right)+\left(2ve^{u^2+v^2}\right)\left(-1\times h'\right)=2e^{u^2-v^2}\left(ug'-vh'\right)$$

$$Z=e^{u^2+v^2}\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=2Z\left(ug'-vh'\right)$$

۱۲- گزینه ۳ صحیح است.

می توان از رابطه نتیجه گرفت max مقدار زیر رادیکال ۸۱ می شود و حداقل مقدار ممکن آن نیز صفر پس برد تابع درباره [۰,۹] قرار دارد.

۱۳- گزینه ۳ صحیح است.

$$f(\alpha x,\alpha y)=\frac{(\alpha x)^2}{(\alpha y)^2}+\frac{\alpha x}{\sqrt{(\alpha x)^2+(\alpha y)^2}}=\frac{\alpha^2 x^2}{\alpha^2 y^2}+\frac{\alpha x}{\alpha\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\frac{x^2}{y^2}+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=Z\times\alpha^0\Rightarrow n=0$$

۱۴ـ گزینه ۴ صحیح است.

برای بدست آوردن برد تابع f به معادله $Z=\sqrt{10-x^2-2y^2}$ باید بگوییم.

$$10-x^2-2y^2\ge 0\Rightarrow x^2+2y^2\le 10$$

پس بیشترین حد مقدار تابع عدد $\sqrt{10}$ است. از طرفی حداقل آن همانطور که از تابع پیداست (به علت رادیکالی بودن آن) صفر است پس برد برابر است با: $R_f:[0,\sqrt{10}]$

۱۵ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$Z=x^2+2xy+4y^2$$

$$dz=(2x+2y)dx+(2x+8y)dy$$

$$d^2z=(2dx+2dy)dx+(2dx+8dy)dy=2dx^2+4dxdy+8dy^2$$

$$d^2z\Big|_{dx=dy=0/1}=2(0/1)^2+4(0/1)(0/1)+8(0/1)^2=0/19$$

۱۶ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$f(\alpha x,\alpha y)=\frac{\alpha x}{(\alpha x)^2+(\alpha y)^2}+\frac{(\alpha y)(\alpha x)}{(\alpha x)^3+(\alpha y)^3}=\frac{\alpha x}{\alpha^2(x^2+y^2)}+\frac{\alpha^2 y\alpha}{\alpha^3(x^3+y^3)}$$

$$\Rightarrow\frac{x}{\alpha(x^2+y^2)}+\frac{yx}{\alpha(x^3+y^3)}=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{yx}{x^3+y^3}\right)=\frac{1}{\alpha}z=\alpha^{-1}z\Rightarrow n=-1$$

بنابراین تابع همگن از درجه $n=-1$ می‌باشد.

۱۷ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$z=f(u,v)$$

$$z_x=\frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}\Rightarrow z_x=f_1'(2x)+\frac{1}{y}f_2'$$

۱۸ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$z=x^2+2xy+2y^2+10$$

$$z_x=2x+2y=0$$

$$z_y=2x+4y=0$$

$$\Rightarrow x=0,y=0\qquad z\Big|_{x=y=0}=(0)^2+2(0)(0)+2(0)^2+10=10$$

پس نقطه بحرانی به مختصات $(0,0,10)$ می‌باشد.

۱۹ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$Z = x^2 + 2xy + 2y^2 + 10$$
$$z_x = 2x + 2y \Rightarrow z_{xx} = 2$$
$$z_y = 2x + 4y \Rightarrow z_{yy} = 4$$
$$z_{xy} = z_{yx} = 2$$

$$H = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 4 > 0$$ نقطه Min است

با استفاده از دترمینان هشین می‌توان نوع نقطه بحرانی را تعیین کرد. پس:

$$H = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 \qquad z_{xx} = 2 > 0$$

پس نوع نقطه بحرانی مینیمم نسبی است.

۲۰ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$z = 18x^2 - 32y^2 - 36x - 128y + 110$$
$$\begin{cases} \dfrac{\delta z}{\delta x} = 36x - 36 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \dfrac{\delta z}{\delta y} = -64y - 128 = 0 \Rightarrow y = -2 \end{cases} \Rightarrow x + y = 1 - 2 = -1$$

۲۱ـ گزینه ۴ صحیح است.

با استفاده از مشتق ضمنی داریم:

$$Z_x = -\frac{\frac{\delta F}{\delta x}}{\frac{\delta F}{\delta z}} = -\frac{F'_x}{F'_y} \Rightarrow z_x = -\frac{F'_1(1) + F'_2 y}{F'_1 y + F'_2 2z} = -\frac{F'_1 + yF'_2}{yF'_1 + 2ZF'_2}$$

۲۲ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$z = f(x - y, y - x)$$
$$\frac{\delta z}{\delta x} + \frac{\delta z}{\delta y} = f'_1(1) + f'_2(-1) + f'_1(-1) + f'_2(1) = 0$$

۲۳-گزینه ۴ صحیح است.

$$\begin{cases} z_x = 2x - 4y \Rightarrow z_{xx} = 2 \\ z_y = 3y^2 - 4x - 11 \Rightarrow z_{yy} = 6y \xrightarrow{y=-1} z_{yy} = -6 \\ z_{xy} = z_{yx} = -4 \end{cases}$$
$$H = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & -6 \end{vmatrix} = -12 - 16 = -28 < 0$$

در نتیجه نقطه بحرانی $(-2,-1)$ نقطه زینی ست.

۲۴ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$u = \frac{1}{Ln(1 - x^2 - y^2 - z^2)} \Rightarrow \begin{cases} Ln(1 - x^2 - y^2 - z^2) \neq 0 \\ 1 - x^2 - y^2 - z^2 > 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - x^2 - y^2 - z^2 \neq 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \neq 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 < 1 \end{cases}$$

پس دامنه تابع تمام نقاط داخل کره به معادله $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ است به جز مبدأ آن

۲۵ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$u=\frac{zy}{x}\xrightarrow[z=2r^2-3s^2]{x=3r^2-2s,\,y=4r-2s^3}u=\frac{(2r^2-3s^2)(4r-2s^3)}{(3r^2-2s)}$$

$$u'_s=\frac{[(-6s)(4r-2s^3)+(-6s)(2r^2-3s^2)](3r^2-2s)-[(-2)(2r^2-3s^2)(4r-2s^3)]}{(3r^2-2s)^2}$$

$$u'_s\Big|_{r=s=1}=\frac{[-6(4-2)+(-6)(2-3)](3-2)-[-2(2-3)(4-2)]}{(3-2)^2}=-10$$

۲۶ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$z=xy+2x-\mathrm{Ln}(x^2y)$$

$$\left.\begin{aligned}z_x&=y+2-\frac{2xy}{x^2y}=0\Rightarrow y+2-\frac{2}{x}=0\Rightarrow y-\frac{2}{x}=-2\\ z_y&=x-\frac{x^2}{x^2y}=0\Rightarrow x-\frac{1}{y}=0\Rightarrow x=\frac{1}{y}\Rightarrow y=\frac{1}{x}\end{aligned}\right\}\Longrightarrow y-2y=-2\Rightarrow y=2\,,x=\frac{1}{2}$$

پس طول و عرض نقطه بحرانی تابع f به صورت $(\frac{1}{2},2)$ می‌باشد.

۲۷ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$f(x-z)=x+y+z$$

$$F(x,y,z)=x+y+z-f(x-z)=0$$

$$\frac{\delta z}{\delta x}=-\frac{F'x}{F'z}=-\frac{1-f'(x-z)}{1-(-1)f'(x-z)}=-\frac{1-f'(x-z)}{1+f'(x-z)}$$

$$\frac{\delta z}{\delta y}=\frac{-F'_y}{F'_z}=\frac{-1}{1+f'(x-z)}$$

$$\frac{\delta z}{\delta x}-2\frac{\delta z}{\delta y}=-\frac{1-f'(x-z)}{1-f'(x-z)}-2\frac{-1}{1+f'(x-z)}=\frac{-1+f'(x-z)+2}{1+f'(x-z)}=\frac{1+f'(x-z)}{1+f'(x-z)}=1$$

۲۸ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$\sqrt{100-x^2-2y^2}\geq 0\Rightarrow x^2+2y^2\leq 100$$

پس ماکزیمم مقدار زیر رادیکال عدد ۱۰۰ می‌باشد و حداقل زیر رادیکال عدد صفر است. پس $R_f=[0,10]$

۲۹ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$Z=f(\alpha x,\alpha y)=\frac{(\alpha x)^2}{(\alpha y)^2}+e^{\left(\frac{\alpha y}{\alpha x}\right)}-(\frac{\alpha y}{\alpha x})=\frac{\alpha^2x^2}{\alpha^2y^2}+e^{\left(\frac{\alpha y}{\alpha x}\right)}-\frac{\alpha y}{\alpha x}=\frac{x^2}{y^2}+e^{\frac{y}{x}}-\frac{y}{x}=\alpha^0z\Rightarrow n=0$$

تابع همگن با درجه $n=0$ است.

۳۰ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$z=3x^3+y^2-9x+4y$$

$$z_x=9x^2-9=0\Rightarrow x^2-1=0\Rightarrow x=\pm 1$$

$$z_y=2y+4=0\Rightarrow y=-2$$

$$z_{xx}=18x\qquad z_{yy}=2\qquad z_{xy}=z_{yx}=0$$

$$H=\begin{vmatrix}18x & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=36x$$

$H=36x\xrightarrow{x=1}H=36>0,Z'_{xx}=18>0$ نقطه‌ی مینیمم

$H = 36x \xrightarrow{x=-1} H = -36 < 0$ نقطه‌ی زینی

پس مختصات نقطه بحرانی $(1,-2)$ مینیمم می‌باشد.

۳۱ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$z = x^2 + 5xy + 8y^3 - 4x$$
$$dz = (2x + 5y - 4)dx + (5x + 24y^2)dy$$
$$d^2z = (2dx + 5dy)dx + (5dx + 48dy)dy$$
$$d^2z = 2dx^2 + 5dxdy + 5dxdy + 48dy^2 = 2dx^2 + 10dxdy + 48dy^2$$

۳۲ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}}$$

چون عبارت $x^2 + y^2$ همواره بزرگتر از صفر است پس باید $x^2 - y^2 > 0$ یعنی $x^2 > y^2$ که دامنه تابع را تشکیل می‌دهد.

$$z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + y^2 - y^2}{x^2 - y^2}} = \sqrt{\frac{x^2 - y^2 + 2y^2}{x^2 - y^2}} = \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 - y^2} + \frac{2y^2}{x^2 - y^2}} = \sqrt{1 + \frac{2y^2}{x^2 - y^2}}$$

براساس دامنه تابع حقیقی می‌بایست $x^2 > y^2$ باشد با توجه به اینکه $\frac{2y^2}{x^2 - y^2} \geq 0$ پس همواره:

$$1 - \frac{2y^2}{x^2 - y^2} \geq 1 \xrightarrow{\text{از طرفین ریشه دوم می‌گیریم}} \sqrt{1 + \frac{2y}{x^2 - y^2}} \geq 1 \Rightarrow R_f = [1, +\infty)$$

۳۳ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$z = x^2 - y^2 + 1$$
$$z'_x = 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$
$$z'_y = -2y = 0 \Rightarrow y = 0$$
$$z\Big|_{x=y=0} = 0^2 - 0^2 + 1 = 1$$

پس نقطه $(0,0,1)$ نقطه بحرانی تابع f می‌باشد.

$$z_{xx} = 2 \qquad z_{yy} = -2$$
$$z_{xy} = z_{yx} = 0$$
$$H = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

چون $H < 0$ است پس نقطه بحرانی زینی است.

۳۴ـ گزینه ۱ صحیح است.

از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم.

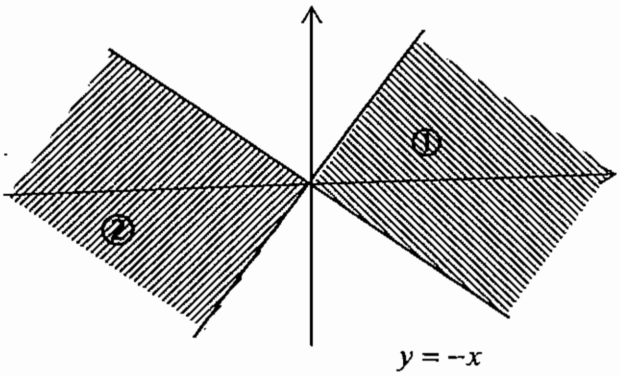
$$Lnx = u \Rightarrow x^2 = e^{2u}$$
$$Lny = v \Rightarrow y^2 = e^{2v}$$
$$Lnz = \frac{1}{2}Ln(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}Ln(e^{2u} + e^{2v})$$
$$\frac{\partial Lnz}{\partial Lnx} + \frac{\partial Lnz}{\partial Lny} = \frac{\partial Lnz}{\partial u} + \frac{\partial Lnz}{\partial v} = \frac{e^{2u}}{e^{2u} + e^{2v}} + \frac{e^{2v}}{e^{2u} + e^{2v}} = \frac{e^{2u} + e^{2v}}{e^{2u} + e^{2v}} = 1$$

۳۵ـ گزینه ۳ صحیح است.

برای بدست آوردن دامنه توابع رادیکالی با درجه زوج، عبارت زیر رادیکال باید مثبت باشد.

بنابراین:

$$D_z = \frac{x+y}{x-y} \geq 0 \Rightarrow D_z = \begin{cases} x+y \geq 0 \ , \ x-y > 0 \ (1) \\ x+y \leq 0 \ , \ x-y < 0 \ (2) \end{cases}$$



۳۶ـ گزینه ۴ صحیح است.

ـ اگر در امتداد هر خط $y = mx$ که از $(0,0)$ می‌گذرد و به $(0,0)$ نزدیک شویم در صورت وجود حد می‌بایست به عدد منحصر به فردی برسیم. اگر به جای y مقدار $2x$ قرار دهیم داریم:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} z = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{xy} \xrightarrow{y=2x} \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+(2x)^2}{x(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{5x^2}{2x^2} = \frac{5}{2}$$

۳۷ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$z = Ln(x_1+x_2+x_3) \Rightarrow e^z = x_1+x_2+x_3$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{1}{x_1+x_2+x_3} = \frac{1}{e^z} = e^{-z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = \frac{1}{x_1+x_2+x_3} = \frac{1}{e^z} = e^{-z}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x_3} = \frac{1}{x_1+x_2+x_3} = \frac{1}{e^z} = e^{-z}$$

$$Ln(\frac{\partial z}{\partial x_1}) + Ln(\frac{\partial z}{\partial x_2}) + Ln(\frac{\partial z}{\partial x_3}) = Lne^{-z} + Lne^{-z} + Lne^{-z}$$

$$= -z - z - z = -3z$$

۳۸ـ گزینه ۲ صحیح است.

با توجه به اینکه تابع مقعر دارای ماکزیمم و همچنین محدب دارای مینیمم است، محدب و مقعر بودن تابع $z = f(x,y)$ را می‌توان با استفاده از ماتریس‌های هشین بدست آورد به صورتیکه:

$|H_1| > 0, |H_2| > 0, |H_3| > 0, \ldots$ شرط محدب بودن

$|H_1| < 0, |H_2| > 0, |H_3| < 0, \ldots$ شرط مقعر بودن

$$z = x^2 + 2xy + 4y^2 + x - 2y$$

$$z_x = 2x + 2y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = -1, y = -\frac{1}{2}$$

$$z_y = 2x + 8y - 2 = 0$$

$$z_{xx} = 2 \qquad z_{yy} = 8 \qquad z_{xy} = z_{yx} = 2$$

با استفاده از دترمینان هشین

$$|H_2| = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 12 > 0$$

$$|H_1| = Z_{xx} > 0$$

با توجه به فرم درجه دوم، تابع چند متغیره از نوع معین مثبت است پس اکیداً محدب است.

۳۹ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - 6 = 0$$

$$2xdx + 4ydy + 2zdz + 2xdy + 2ydx = 0$$

$$\Rightarrow dz = -\frac{(2x+2y)dx + (4y+2x)dy}{2z}\bigg|_{x=y=z=1} = -\frac{4dx + 6dy}{2}$$

$$\Rightarrow dz = -\frac{2(2dx+3dy)}{2} \Rightarrow dz = -2dx - 3dy$$

۴۰ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$z = x^2 + xy + y^2$$

$$z_x = 2x + y = 0 \Rightarrow y = -2x$$

$$\Rightarrow x = 0, y = 0$$

$$z_y = 2y + x = 0 \Rightarrow x = -2y$$

$$z = x^2 + xy + y^2 \Rightarrow z\Big|_{x=y=0} = 0 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow z = 0$$

پس مختصات نقطه بحرانی بصورت $(0,0,0)$ می‌باشد.

$$z_{xx} = 2, z_{yy} = 2, z_{xy} = z_{yx} = 1$$

دترمینان هشین را تشکیل می‌دهیم در این صورت:

$$|H| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0, z_{xx} = 2 > 0$$

در نتیجه نقطه بحرانی مینیمم می‌باشد.

رشته مدیریت

۱ـ گزینه ۳ صحیح است.

از آنجائیکه پایه رادیکال زوج است عبارت زیر رادیکال همواره مثبت یا صفر است بنابراین حداقل آن صفر می‌باشد. از طرف دیگر حداکثر مقدار عبارت زیر رادیکال به ازای $Y = X = 0$ برابر با ۴ می‌شود بنا بر این خواهیم داشت:

$$۰ \le ۴ - x^۲ - y^۲ \le ۴ \Rightarrow ۰ \le \sqrt{۴ - x^۲ - y^۲} \le ۲ \Rightarrow ۰ \le Z \le ۲$$

۲ ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\frac{2(x-a)}{2\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}=\frac{x-a}{(x-a)^2+(y-b)^2}\Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{[(x-a)^2+(y-b)^2]-2(x-a)(x-a)}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2}=\frac{(y-b)^2-(x-a)^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\frac{2(y-b)}{2\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}=\frac{y-b}{(x-a)^2+(y-b)^2}\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{[(x-a)^2+(y-b)^2]-2(y-b)(y-b)}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2}$$

$$=\frac{(x-a)^2-(y-b)^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2}\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{[(y-b)^2-(x-a)^2]+[(x-a)^2-(y-b)^2]}{[(x+a)^2+(y-b)^2]^2}=0$$

۳ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial z}{\partial x}=-2x=0\quad x=0\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2<0\ \frac{\partial z}{\partial x\partial y}=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=-2y=0\quad y=0\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2<0\end{array}\right\}$$

$$\Delta=(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2})(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2})-(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y})^2=(-2)(-2)-0=4>0\Rightarrow(0,0,4)\text{Max}$$

۴ـ گزینه ۱ صحیح است.

روش اول: در روش لاگرانژ برای تعیین مقدار Min یا Max به روش زیر عمل می‌کنیم:

$$f(x,y,\lambda)=-x^2-y^2+1-\lambda(x-y)$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}=-2x-\lambda=0\\ \frac{\partial f}{\partial f}=-2y+\lambda=0\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}-2x-\lambda=0\\-2x+\lambda=0\end{array}\Rightarrow-4x=0\qquad x=0,y=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial\lambda}=-(x-y)=0\qquad x=y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0\Rightarrow\Delta=(-2)(-2)-0=4>0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}<0\Rightarrow\text{Max}(0,0,1)$$

روش دوم

قید مسئله: $x-y=0\Rightarrow x=y$

$Z=-x^2-y^2+1=-x^2-x^2+1=-2x^2+1$

$Z'_x=-4x=0\qquad x=0$

$x=0\Rightarrow y=0\Rightarrow z=1$

		0	
Z'	+		−
		Max	

۵ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^y+ye^x \Rightarrow \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=ye^x\\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial y}=xe^y+e^x \Rightarrow \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=xe^y\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=ye^x+xe^y=z$$

۶ـ گزینه ۳ صحیح است.

یادآوری:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$\Rightarrow dz=ydx+xdy,\ x=y=1 \Rightarrow dz=dx+dy$$

۷ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial z}{\partial x}=-2x+2=0 \Rightarrow x=1, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2<0\\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial y}=-8y+8=0 \Rightarrow y=1, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-8<0\\[2ex] \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \dfrac{\partial z^2}{\partial x \partial y}=0\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta=(-2)(-8)-0=16>0 \Rightarrow \text{Max}:(1,1,25)$$

۸ـ گزینه ۳ صحیح است.

قید مسئله: $x+y=16 \Rightarrow y=16-x$

$z=xy, -x(16-x)=16x-x^2 \Rightarrow z'_x=16-2x=0 \Rightarrow x=8$

$x=8, y=8 \Rightarrow z=64$

		۸	
Y'	+	⋮	−
		Max	

۹ـ گزینه ۳ صحیح است.

روش اول:

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}=\frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial \theta}+\frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial \theta}=(2u-2v)(-r\sin\theta)+(2v-2u)(r\cos\theta) \Rightarrow$$

$$2r(v-u)(\sin\theta-\cos\theta)=2r(r\sin\theta-r\cos\theta)(\sin\theta+\cos\theta)=2r^2(\sin^2\theta-\cos^2\theta)=-2r^2\cos 2\theta$$

روش دوم:

$$Z=u^2+v^2-2uv=(u-v)^2=r^2(\cos\theta-\sin\theta)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial \theta}=2r^2(-\sin\theta-\cos\theta)(\cos\theta-\sin\theta)=-2r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=-2r^2\cos 2\theta$$

۱۰ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{2y^2}-\frac{y^2}{x^3}, \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-x^2}{y^3}+\frac{2y}{2x^2}$$

$$\Rightarrow x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\left[\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}\right]+\left[-\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right]=0$$

روش دوم: تابع z تابعی همگن از درجه 0 است زیرا

$$(\lambda x, \lambda y) \quad \frac{\lambda^2 x^2}{2\lambda^2 y^2}+\frac{\lambda^2 y^2}{2\lambda^2 x^2}=\frac{x^2}{2y^2}+\frac{y^2}{2x^2}=\lambda^0 z \Rightarrow n=0$$

بنابراین مقدار $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$ برابر با nz می‌شود یعنی صفر.

یادآوری: اگر $f(x,y)$ تابعی همگن از درجه n باشد $\Leftarrow$ $x\frac{\partial f(x+y)}{\partial x}+y\frac{\partial f(x,y)}{5y}=nf(x,y)$

۱۱ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{lll}\frac{\partial z}{\partial x}=2x+2=0 & x=-1 & \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2>0,\frac{\partial z}{\partial x\partial y}=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=4y-4=0 & y=1 & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4>0\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta=(2)(4)-0=8>0\Rightarrow \text{Min}(-1,+1,-3)$$

۱۲ـ گزینه ۱ صحیح است.

در توابع ضمنی برای مشتق گیری تمام عبارتها را در یک طرف تساوی قرار داده و با استفاده از رابطه $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-f'_x}{f'_z}$ مشتق را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-(2x+yz-y)}{xy},(1,1,1)\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-(2+1-1)}{1}=-2$$

۱۳ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{y^2}-\frac{y}{x^2}\\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-2yx^2}{y^4}+\frac{1}{x}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2x}{y^2}-\frac{y}{x^2}-\frac{2x^2}{y^3}+\frac{1}{x},x=1,y=2\Rightarrow$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{4}-2-\frac{2}{8}+1=-\frac{3}{4}$$

۱۴ـ گزینه ۴ صحیح است.

چون تابع دو متغیره است دامنه آن دو بعدی است بنابراین گزینه های ۲ و ۳ حذف می‌شوند همچنین در مورد مخرج تنها زمانی برابر صفر می‌شود که x و y با هم صفر شوند یعنی:

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}\Rightarrow x^2+y^2=0\Rightarrow (x,y)=(0,0)$$

بنابراین دامنه تابع $D_f:R^2-\{(0,0)\}$

۱۵ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4x-2y+2=0,\frac{\partial z}{\partial y}=2y-2x=0\Rightarrow x=y$$

$$\Rightarrow 4x-2x+2=0\Rightarrow 2x+2=0\Rightarrow x=-1\Rightarrow y=-1\Rightarrow x+y=-1+(-1)=-2$$

۱۶ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=+4>0,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=+2>0,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2\Rightarrow \Delta=(4)(2)-(-2)^2=8-4=4>0\Rightarrow \text{Min}$$

۱۷ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$z=\ln(x^2y^2+\frac{x^2}{y^2})\Rightarrow Z'_x=\frac{2xy^2+\frac{2x}{y^2}}{(x^2y^2+\frac{x^2}{y^2})},y=x=1\Rightarrow Z'_x=\frac{2+2}{1+1}=2$$

۱۸ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$z=x^2+4xy+2y^2\Rightarrow dz=(2x+4y)dx+(4x+4y)dy$$
$$d^2z=2d^2x+4dx.dy+4dxdy+4d^2y=2d^2x+8dxdy+4d^2y$$

۱۹ـ گزینه ۳ صحیح است.

چون عبارتهای x^2+y^2, x^2 همواره مثبت است بنابراین z همواره غیر منفی است و همچنین به ازای $x=0$، Z نیز صفر می‌شود پس $Z\le 0$ از طرف دیگر مخرج عبارت همواره بزرگتر صورت است و به ازای $y=0$ مقدار z یک می‌شود بنابراین $z\le 1$.
در نتیجه خواهیم داشت $R:[0,1]\Leftarrow 0\le Z\le 1$

۲۰ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$\begin{rcases}\frac{\partial z}{\partial x}=4x-y=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=-x+2y=0\end{rcases}\begin{cases}4\times 2y-y=0\Rightarrow 7y=0\Rightarrow y=0\Rightarrow x=0\Rightarrow z=10\\ x=2y\end{cases}$$

۲۱ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$Z=x^2-y^2=(t\cos t)^2-(t\sin t)^2=t^2(\cos^2 t-\sin^2 t)=t^2\cos 2t$$
$$\frac{dz}{dt}=z'_t=2t\cos 2t-2t^2\sin 2t,t=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\frac{dz}{dt}=2(\frac{\pi}{4})\cos\frac{\pi}{2}-2(\frac{\pi}{4})^2\sin\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi^2}{8}$$

۲۲ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$Z=\frac{y-1}{\ln(x+y)-1}\Rightarrow\begin{cases}x+y>0\\ \ln(x+y)-1\ne 0\Rightarrow\ln(x+y)\ne 1\Rightarrow x+y\ne e\end{cases}$$

۲۳ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$Z=u^2+v^2-2uv=(u-v)^2=(\frac{x}{y}-y^2+x^2)^2$$
$$\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=2(\frac{1}{y}+2x)(\frac{x}{y}-y^2+x^2),x=y=1\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=2(1+2)(1-1+1)=6$$

۲۴ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$\begin{rcases}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{(x-y+3)-(x+2y)}{(x-y+3)^2}=\frac{-3y+3}{(x-y+3)^2}=0\Rightarrow -3y+3=0\Rightarrow y=1\\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2(x-y+3)+(x+2y)}{(x-y+3)^2}=\frac{3x+6}{(x-y+3)^2}=0\Rightarrow 3x+6=0\Rightarrow x=-2\end{rcases}\Rightarrow y+x=1-2=-1$$

۲۵ـ گزینه ۱ صحیح است.

دامنه تابع دو بعدی است یعنی در دو محور x , y تعریف می‌شود:

$$Z=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}\Rightarrow x^2+y^2+1\ne 0\Rightarrow D_z=R^2$$

۲۶ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-f'_x}{f'_z}=\frac{-(2x+y^2e^{xy}-y-yz)}{1-xy},(1,0,-1)\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-(2+0-0-0)}{1-0}=-2$$

۲۷ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = (2x+y)dx + (x+8y)dy$$

$$(1,1), dx = dy = 0/1 \Rightarrow (2+1)0/1 + (1+8)0/1 = 1/2$$

۲۸ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y - 2x = 0 \Rightarrow y = 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x - 4y + 7 = 0 \Rightarrow x - 8x + 7 = 0 \Rightarrow -7x + 7 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow z = 2 - 1 - 8 + 14 = 7$$

۲۹ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2 < 0, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4 < 0, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1 \Rightarrow \Delta = (-2)(-4) - (1)^2 = 7 > 0 \Rightarrow (1,2,7)\text{Max}$$

۳۰ـ همانطور که از جواب مشخص است گزینه صحیح وجود ندارد:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x-y}{x^2+y^2} \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \neq 0 \Rightarrow (0,0) \\ x - y \geq 0 \Rightarrow x \geq y \end{array}\right\} \Rightarrow D_z = \{(x,y) \mid x, y \in R, x \geq y, (x,y) \neq (0,0)\}$$

۳۱ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2} \Rightarrow x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2x^2}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{x^2+y^2} = \frac{2(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 2$$

۳۲ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = xy.x^{xy-1} + yx^{xy}\ln x, x = y = 1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = (1)(1)(1)^0 + (1)(1)^1 \ln 1 = 1$$

۳۳ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial x} = 2ax + by = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = bx + a + 4 = 0 \end{array}\right\}(1,1) \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ b + a + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 4 \qquad b = -8$$

۳۴ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 3 = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 6 \end{cases} \Rightarrow y = 3, x = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 > 0, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1 \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta = (\frac{\partial^2 z}{\partial x^2})(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}) - (\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}) = 2 \times 2 - 1^2 = 3 > 0 \Rightarrow \text{Min}$$

۳۵ـ گزینه ۱ صحیح است.

قید تابع $x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - x$

$$Z = x^2 + 2x(3-x) + 4(3-x) + 10 = -x^2 + 2x + 22$$

$$\Rightarrow Z'_x = -2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2$$

۳۶ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$Z'_x = -2x + 2 \Rightarrow Z''_x = -2 < 0 \Rightarrow \text{ماکزیمم}$$

۳۷ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$f(x,y,\lambda) = 4x^2 + 2y - 4 - \lambda(2x + \frac{1}{2}y - 12)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x - 2\lambda = 0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y} = 2 - \frac{1}{2}\lambda = 0\right\} \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda = 4 \\ x = 1 \Rightarrow z = 4(1)^2 + 2(20) - 4 = 40 \\ y = 20 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = -(2x + \frac{1}{2}y - 12) = 0$$

۳۸ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$W = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} = \begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial x} = -x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} = -y(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3y^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} = -z(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3z^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -3(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3(x^2+y^2+z^3)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -3(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} = 0$$

۳۹ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$Z = \frac{e^x - e^y}{e^x + e^y} = \frac{e^x + e^y - 2e^y}{e^x + e^y} = 1 - 2\frac{e^y}{e^x + e^y}$$

از آنجائیکه عبارتهای e^y, e^x همواره مثبت هستند بنابراین $\frac{e^y}{e^x + e^y}$ همواره کوچکتر از یک و بزرگتر از صفر است بنابراین:

$$0 < \frac{e^y}{e^x + e^y} < 1 \Rightarrow -2 < \frac{-2e^y}{e^x + e^y} < 0 \Rightarrow -1 < \frac{-2e^y}{e^x + e^y} + 1 < 1 \Rightarrow -1 < Z < 1$$

۴۰ـ گزینه صحیح است.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x(x^2+y^2) - 2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{8xy(x^2+y^2)^2 - 16y^3x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}$$

$$,(2,1) \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \frac{8(2)(4+1)^2 - 16(2)(4+1)}{(4+1)^4} = \frac{48}{125}$$

۴۱ـ گزینه۴ صحیح است.

$$1 - x^2 - 2y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 2y^2 \leq 1$$

۴۲ـ گزینه۲ صحیح است.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=2u(2x)+2v(\frac{1}{y})=4ux+\frac{2v}{y}$$

۴۳ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial z}{\partial x}=2x-6y+4=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=-6x+12y=0\end{array}\right.\Rightarrow x=4, y=2$$

۴۴ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{lll}\frac{\partial z}{\partial x}=۲x+۴y-۴, & \frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲}=۲ & ,\frac{\partial^۲ z}{\partial x\partial y}=۴\\ \frac{\partial z}{\partial y}=۴x+۴y-۶, & \frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲}=۴ & \end{array}\right\}\Rightarrow \Delta=(۲)(۴)-(۴)^۲=-۸<۰\Rightarrow \text{نقطه‌زینی‌است}$$

۴۵ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$dz=z'_x dx+z'_y dy=(2x-8y)dx+(-2y-8x)dy\Rightarrow$$

$$d^2z=2dx^2-8dxdy-2dy^2-8dxdy=2dx^2-16dxdy-2dy^2$$

۴۶ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$f(x,y,\lambda)=x^2+2xy-\lambda(2x+y-12)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+2y-2\lambda=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2x-\lambda=0 \qquad \Rightarrow\begin{cases}x=4\\ y=4\Rightarrow z=4^2+2(4)(4)=48\\ \lambda=8\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}=-(2x+y-12)=0$$

رشته حسابداری

۱ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$z=\frac{x^2+y^2}{2xy} \qquad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x(2xy)-2y(x^2+y^2)}{(2xy)^2}=\frac{4x^2y-2yx^2-2y^3}{(2xy)^2}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=2\\ y=1}}=\frac{16-8-2}{16}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$

۲ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$f(\alpha x,\alpha y)=\frac{\alpha x}{\alpha(2y)}+\frac{\alpha(2y)}{\alpha x}=(\frac{x}{2y}+\frac{2y}{x})=\alpha^0 z\Rightarrow n=0$$

یعنی درجه همگنی برابر صفر می‌باشد. پس:

$$xz'_x+yz'_y=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=nz=0 \quad z=0$$

۳ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$dz=(2x+y)dx+(2y+x)dy$$

$$dz\Big|_{x=y=1} = (2+1)dx + (2+1)dy = 3dx + 3dy$$

۴ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$z = ax^2y \Rightarrow z'_x = 2axy\Big|_{x=y=2} = 2a(2)(2) = 8a$$

۵ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$z = x^2 + y^2$$
$$x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - x$$
$$z = x^2 + (4-x)^2 \Rightarrow z'_x = 2x - 2(4-x) = 0 \Rightarrow 4x - 8 = 0$$
$$\Rightarrow x = 2, y = 2 \Rightarrow z = (2)^2 + (2)^2 = 8$$

۶ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial r}$$
$$\Rightarrow (2u - 2v)(\cos\theta) + (2v - 2u)(\sin\theta) = 2(u - v)(\cos\theta - \sin\theta)$$
$$2r(\cos\theta - \sin\theta)(\cos\theta - \sin\theta) = 2r(\cos^2\theta + \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta)$$
$$2r(1 - 2\sin\theta\cos\theta) = 2r - 4r\sin\theta\cos\theta$$

۷ـ گزینه ۱ صحیح است.

درجه همگنی برابر صفر است پس:

$$xz'_x + yz'_y = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = nz = 0z = 0$$

۸ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f'_x}{f'_z} = -\frac{2x - 5y + 3}{2z - 2y} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,1,2)} = -\frac{2 - 5 + 3}{4 - 2} = 0$$

۹ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$9 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ x^2 + y^2 \geq 0 \end{cases}$$
$$0 \leq z \leq \sqrt{9} \Rightarrow 0 \leq z \leq 3 \Rightarrow R_z = [0,3]$$

۱۰ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$z = x^2 + y^2$$
$$x + 2y = 5 \Rightarrow x = 5 - 2y$$
$$z = (5 - 2y)^2 + y^2$$
$$z'_y = (-2)(2)(5 - 2y) + 2y = 0 \Rightarrow y = 2$$
$$x + 2y = 5 \rightarrow x + 2\times 2 = 5 \Rightarrow x = 1$$
$$z\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = 1^2 + 2^2 = 5$$

پس مختصات بحرانی $(1,2,5)$ می‌باشد.

۱۱ـ گزینه ۱ صحیح است.

y	$-\infty$	2	$+\infty$
$Z'y$	-		+
	$\searrow$		$\nearrow$

پس مختصات $(1,2,5)$ نقطه min است.

۱۲ ـ گزینه ۳ صحیح است.

فرجه رادیکال زوج است پس z منفی نمی‌باشد. در نتیجه حداقل z صفر است. در نتیجه برد تابع $R^+ \cup \{0\}$ است.

۱۳ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = Ln(x^2+y^2) + \frac{2x}{x^2+y^2}.x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x dy} = \frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{4yx^2}{(x^2+y^2)^2}\Bigg|_{x=y=1} = \frac{2}{1+1} - \frac{4\times 1\times 1^2}{(1+1)^2} = 0$$

۱۴ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x-2=0 \Rightarrow x=1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y-2=0 \Rightarrow y=1$$

در نتیجه مختصات نقطه بحرانی $(1,1)$ می‌باشد.

۱۵ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$z'_x = 2x-2 \Rightarrow z'_{xx} = 2$$

$$z_y = 2y-2 \Rightarrow z'_{yy} = 2$$

$$z_{xy} = z_{yx} = 0$$

$$|H| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$$z'_{xx} = 2 > 0$$

چون دترمینان هشین بزرگتر از صفر و $z'_{xx} > 0$ است پس نقطه بحرانی مینیمم نسبی است.

۱۶ـ گزینه ۳ صحیح است. با استفاده از قاعده مشتق تابع مرکب خواهیم داشت:

$$z'_x = z'_u.u'_x + z'_L.v'_v$$

$$z = u^2+v^2 \qquad u = g(x+y), v = h(\frac{x}{y})$$

$$z'_x = 2ug'(1) + 2vh'(\frac{1}{y}) = 2(ug' + \frac{v}{y}h')$$

۱۷ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$z = f(x^2+2y^2, 4x^2y)$$

اگر در نظر بگیریم که $v = 4x^2y, u = x^2+2y^2$ باشد. در اینصورت با استفاده از مشتق تابع مرکب می‌توان گفت:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_u.u'_x + f'_v.v'_x$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xf'_u + 8xyf'_v$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Bigg|_{\substack{x=2 \\ y=\frac{1}{2}}} = 4f'u + 8f'v = 4f'_I + 8f'_v$$

۱۸ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$2x^2 + y^2 - z^2 - 2xy = 0$$

$$z'_x = -\frac{f'_x}{f'_z} = -\frac{4x - 2yz}{-2z - 2xy}\Big|_{x=y=z=1} = -\frac{4-2}{-2-2} = \frac{1}{2}$$

۱۹ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$u = q_1 q_2$$
$$4q_1 + 8q_2 = 160 \Rightarrow q_1 = 40 - 2q_2$$
$$u = (40 - 2q_2)q_2 = 40q_2 - 2q_2^2$$
$$u'_{q_2} = 0 \Rightarrow 40 - 4q_2 = 0 \Rightarrow q_2 = 10 \Rightarrow q_1 = 40 - 20 = 20$$
$$u = 20 \times 10 = 200$$

۲۰ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$z = (x+2y)^x$$
$$Lnz = Ln(x+2y)^x$$
$$\mathrm{Lnz} = \mathrm{xLn(x+2y)}$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x+2y)^x[\mathrm{Ln}(x+2y) + \frac{x}{x+2y}]$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{x=y=1} = (1+2)^1[Ln|1+2| + \frac{1}{1+2}] = 3(Ln3 + \frac{1}{3}) = 3Ln3 + 1$$

۲۱ـ گزینه ۲ صحیح است.مقدار z هیچگاه منفی نیست حداقل که z می‌تواند در اختیار بگیرد مقدار صفر است چرا که اگر جای متغیرهای x و y مقادیر ۰ و ۹ را قرار دهیم مقدار حداقل z بدست می‌آید و مقدار حداکثر آن نیز مثبت بی‌نهایت می‌باشد پس برد تابع دو متغیره به صورت زیر باشد.

$$R_z = R^+ \cup \{0\}$$

۲۲ـ گزینه ۱ صحیح است. درجه همگنی برابر صفر می‌باشد پس:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = nz = 0 \times z = 0$$

۲۳ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$z = \frac{2x + y - 1}{x + 2y}$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2(x+2y) - (2x+y-1)}{(x+2y)^2} = \frac{3y+1}{(x+2y)^2} = 0 \Rightarrow 3y + 1 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x + 2y - 2(2x+y-1)}{(x+2y)^2} = \frac{-3x+2}{(x+2y)^2} = 0 \Rightarrow -3x + 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}$$

مجموع طول و عرض نقطه اکسترمم $= x + y = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

۲۴ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$z = 10 - x^2 + 2x - 2y^2 + 8y$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -4y + 8 = 0 \Rightarrow y = 2$$

$$Z\Big|_{\substack{x=1\\y=2}} = 10-1^2+2\times 1-2\times 2^2+8\times 2=19$$

۲۵ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$z = 10 - x^2 + 2x - 2y^2 + 8y$$
$$z_x = -2x + 2 \Rightarrow z_{xx} = -2 \qquad z_{xy} = z_{yx} = 0$$
$$z_y = -4y + 8 \Rightarrow Z_{yy} = -4$$
$$|H| = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 8 > 0$$
$$z_{xx} = -2 < 0$$

پس نوع نقطه ماکزیمم نسبی است.

۲۶ ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$f(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = x^2 + y^2 - \lambda(x + 2y - 5)$$
$$F'_x = 2x - \lambda = 0 \Rightarrow x = \frac{\lambda}{2}$$
$$F'_y = 2y - 2\lambda = 0 \Rightarrow y = \lambda$$
$$F'_\lambda = -x - 2y + 5 = 0 \Rightarrow -\frac{\lambda}{2} - 2\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$$

۲۷ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$Z = \sqrt{100 - 2x^2 - y^2}$$
$$100 - 2x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow 2x^2 + y^2 \leq 100$$

می‌دانیم که همواره $2x^2 + y^2 \geq 0$ می‌باشد.پس:

$$0 \leq 2x^2 + y^2 \leq 100 \Rightarrow 0 \geq -2x^2 - y^2 \geq -100$$
$$100 \geq 100 - 2x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow\Rightarrow 10 \geq \sqrt{100 - 2x^2 - y^2} \geq 0 \Rightarrow 10 \geq z \geq 0$$
$$k_z = [10,0]$$

۲۸ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$z = u^2 + 2uv$$
$$u = \frac{x}{y}, V = x^2 - y^2 \Rightarrow z = (\frac{x}{y})^2 + 2\frac{x}{y}(x^2 - y^2)$$
$$z = \frac{x^2}{y^2} + \frac{2x^3}{y} - 2xy$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y^2} + \frac{6x^2}{y} - 2y\Big|_{x=y=1} = \frac{2}{1} + \frac{6}{1} - 2 = 6$$

۲۹ ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$z = x^2 + 2xy - y^2 - 12x$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial z}{\partial x}=2x+2y-12=0\Rightarrow x+y=6\\ \\ \frac{\partial z}{\partial y}=2x-2y=0\Rightarrow x=y\end{array}\right\}\Rightarrow x=3,y=3$$

$$Z\Big|_{x=y=3}\;3^2+2\times3\times3-3^2-12\times3=-18$$

پس نقطه $(3,3,-18)$ نقطه بحرانی تابع f می‌باشد.

۳۰ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$Z=x^2+2xy-y^2-12x$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+2y-12\Rightarrow z_{xx}=2$$

$$z_{xy}=z_{yx}=2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2x-2y\Rightarrow z_{yy}=-2$$

$$|H|=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-4-4=-8$$

چون $|H|<0$ است پس نقطه زینی است.

۳۱ـ گزینه۴ صحیح است.

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)=xy+\lambda(100-x-2y)$$
$$F'_x=y-\lambda=0\Rightarrow y=\lambda$$
$$F'_y=x-2\lambda=0\Rightarrow x=2\lambda$$
$$F'_\lambda=100-x-2y=0\xrightarrow{y=\lambda,x=2\lambda}100-2\lambda-2\lambda=0\Rightarrow\lambda=25$$

۳۲ـ گزینه ۳ صحیح است. با توجه به اطلاعات سئوال قبل و پاسخ آن داریم:

$$y=\lambda\xrightarrow{\lambda=25}y=25$$
$$x=2\lambda\xrightarrow{\lambda=25}x=2\times25=50$$
$$\max z=x.y\Rightarrow Maxz=50\times25=1250$$

۳۳ـ گزینه ۳ صحیح است.مقدار z هیچگاه منفی نیست حداقلی که z می‌تواند در اختیار بگیرد مقدار صفر است چرا که اگـر بـه جای متغیرهای x و y مقادیر ۰ و ۲۵ را قراردهیم مقدار حداقل z بدست می‌آید و مقدار حداکثر آن نیز مثبت بینهایت می‌باشد پس برد تابع دو متغیر به صورت $R^+\cup\{0\}=[0,+\infty)$

۳۴ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$Z=xLny+yLnx$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=Lxy+\frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{y+x}{yx}$$

۳۵ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$z=3x^2+2y^2-xy-4x-7y+12$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x - y - 4 = 0$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4y - x - 7 = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 6x - y = 4 \\ -x + 4y = 7 \end{cases} \Rightarrow x = 1, y = 2$$

$$z\Big|_{\substack{x=1\\ y=2}} = 3\times 1^2 + 2\times 2^2 - 1\times 2 - 4\times 1 - 7\times 2 + 12 = 3$$

پس $(1,2,3)$ مختصات نقطه بحرانی تابع z می‌باشد.

۳۶ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$z = 2x^2 + 2y^2 - xy - 4x - 7y + 12$$
$$z'_x = 6x - y - 4 \Rightarrow z_{xx} = 6$$
$$\Rightarrow z_{xy} = z_{yx} = -1$$
$$z_y = 4y - x - 7 \Rightarrow z_{yy} = 4$$
$$|H| = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 24 - 1 = 23 > 0$$
$$z_{xx} = 6 > 0$$

پس نقطه بحرانی مینیمم است.

۳۷ـ گزینه ۱ صحیح است.

اگر x و y دو مقدار مثبت و مقدار آن‌ها مقدار ثابتی باشد. حاصلضرب آنها وقتی max است که x=y باشد.

$$2x + 3y - 5 = 0 \Rightarrow 2x + 3y = 5 \Rightarrow 2x = 3y = \frac{5}{2}$$
$$\Rightarrow x = \frac{5}{4}, y = \frac{5}{6}$$

پس اکسترمم تابع بصورت $(\frac{5}{4}, \frac{5}{6})$ می‌باشد.

۳۸ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$Z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}}$$

چون $x^2 + y^2$ همیشه بزرگتر از صفر است پس باید:

$$x^2 - y^2 > 0 \Rightarrow x^2 > y^2$$

$$Z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + y^2 - y^2}{x^2 - y^2}} = \sqrt{\frac{x^2 - y^2 + 2y^2}{x^2 - y^2}} = \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 - y^2} + \frac{2y^2}{x^2 - y^2}} = \sqrt{1 + \frac{2y^2}{x^2 - y^2}}$$

چون براساس دامنه که در بالا توضیح داده شد $x^2 > y^2$ است پس می‌توان گفت که:

$$\frac{2y^2}{x^2 - y} \ge 0 \Rightarrow 1 + \frac{2y^2}{x^2 - y^2} \ge 1 \xrightarrow{\text{از طرفین ریشه دوم می‌گیریم}} \sqrt{1 + \frac{2y^2}{x^2 - y^2}} \ge 1 \Rightarrow R_f = [1, +\infty)$$

۳۹ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$z = x^2 + y^2 + 5xy$$
$$dz = (2x + 5y)dx + (2y + 5)dy$$
$$d_z^2 = (2dx + 5dy)dx + (2dy + 5dx)dy$$
$$d_z^2 = 2dx^2 + 5dydx + 2dy^2 + 5dxdy = 2dx^2 + 10dxdy + 10dxdy + 2dy^2$$

$$d_z^2\Big|_{dx=dy=0/1}=2\times(0/1)^2+10\times(0/1)+2(0/1)^2=0/14$$

۴۰ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial s}=(\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial r})+(\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial s})$$
$$=(2x+y)2+(x+2y)1+(2x+y)1+(x+2y)(-2)$$
$$\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial s}\Big|_{\substack{x=1\\y=2}}=(2+2)2+(1+4)1+(2+2))1+(1+4)(-2)=7$$

۴۱ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$z=x^2+ay^2$$
$$z_x=2x\Rightarrow z_{xx}=2$$
$$\Rightarrow z_{xy}=z_{yx}=0$$
$$z_y=2ay=z_{yy}=2a$$
$$|u|=\begin{vmatrix}2&0\\0&2a\end{vmatrix}=4a\xrightarrow[|H|<0]{\text{شرط زینی بودن}}4a<0\Rightarrow a<0$$

۴۲ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-5xyz+2z=0$$
$$Z'_x=\frac{F_x}{F_z}=\frac{-(2x-5yz)}{2z-5xy+2}\Big|_{x=y=z=1}=-\frac{2-5}{2-5+2}=-3$$
$$Z'_x=\frac{-F_y}{F_z}=\frac{-(2y-5xz)}{2z-5xy+2}\Big|_{x=z}=-\frac{2-5}{2-5+2}=-3$$
$$Z'_x+z'_y=-3-3=-6$$

۴۳ـ گزینه ۲ صحیح است.

به ازای هر x و y متعلق به دامنه $2x^2+y^2>0$ لذا z Max به ازای y=0 و مینیمم آن به آزای x=0 بدست می‌آید یعنی:

$$Z=\frac{2x^2-y^2}{2x^2+y^2}\xrightarrow{x=0}Z=-\frac{y^2}{y^2}=-1$$
$$Z=\frac{2x^2-y^2}{2x^2+y^2}\xrightarrow{y=0}Z=\frac{2x^2}{2x^2}=1$$
$$R_z=[-1,1]$$

۴۴ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2x^3+2xy^2-2x^3+2xy^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial x^2}=\frac{\partial(\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2})}{\partial x}=\frac{4y^2(x^2+y^2)^2-2(2x)(x^2+y^2)(4xy^2)}{(x^2+y^2)^4}$$
$$=\frac{4y(x^2+y^2)-16x^2y^2}{(x^2-y^2)^3}\Big|_{x=y=1}=\frac{4(1+1)-16}{(1+1)^3}=-1$$

۴۵ ـ گزینه ۳ صحیح است.

برای بدست آوردن دامنه توابع رادیکال با فرجه زوج، زیر رادیکال باید مثبت باشد یا صفر بنابراین $\frac{x}{y} \geq 0$

۴۶ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2u(2y) + (-2v)(\frac{-x}{y^2}) = 4uy + \frac{2vx}{y^2}$$

۴۷ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$z = x^2 + 4xy + 2y^2 - 4x - 6y$$

برای بدست آوردن نقطه بحرانی از مشتقات جزیی استفاده می‌کنیم.

$$z_x = 2x + 4y - 4 = 0$$
$$\Rightarrow x = 1, y = \frac{1}{2}$$
$$z_y = 4x + 4y - 6 = 0$$

پس مختصات نقطه بحرانی برابر $(1, \frac{1}{2})$ است.

۴۸ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$z = x^2 - y^2 + 6x + 4y$$
$$dz = (2x+6)dx + (-2y+4)dy \Rightarrow dz^2 = (2dx)dx + (-2dy)dy$$
$$dz^2 = 2dx^2 - 2dy^2$$

۴۹ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$z = x^2 - 6xy + 6y^2 + 4x$$
$$z_x = 2x - 6y + 4 \Rightarrow z_{xx} = 2$$
$$z_{xy} = z_{yx} = -6$$
$$z_y = -6x + 12y \Rightarrow z_{yy} = 12$$
$$|H| = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 12 \end{vmatrix} = -12$$

چون $|H| < 0$ پس نقطه بحرانی زینی است.

۵۰- گزینه ۴ صحیح است.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f(x-۲y) - ۲yf'(x-۲y)$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = yf'(x-۲y)$$
$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} + ۲\frac{\partial z}{\partial x} = f(x-۲y) - ۲yf'(x-۲y) + ۲yf'(x-۲y) = f(x-۲y)$$
$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} + ۲\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{Z}{y} = f(x-۲y)$$

۵۱- گزینه ۲ صحیح است.

$$\frac{Z'x}{g'(x)}=\frac{Z'y}{g'(y)}\Rightarrow\frac{۲x-y}{۲}=\frac{-x}{۱}\Rightarrow y=۴x$$

$$\Rightarrow x=۱, y=۴\Rightarrow z=-۳$$

۵۲- گزینه ۳ صحیح است.

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}.dx+\frac{\partial z}{\partial y}.dy$$

$$z=Ln(x+y)-Ln(x-y)\Rightarrow\frac{\partial z}{dx}=\frac{۱}{x+y}-\frac{۱}{x-y}=\frac{-۲y}{x^۲-y^۲}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{۱}{x+y}+\frac{۱}{x-y}=\frac{۲x}{x^۲-y^۲}$$

در نقطه $x=۲$ و $y=۱$ خواهیم داشت:

$$dx=\frac{-۲}{۳}\times(۰/۰۱)+\frac{۴}{۳}\times(۰/۰۲)=\%۲$$

۵۳- گزینه ۲ صحیح است.

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial t}=(۲x+۳y)\times(s)+(۲y+۳x-۵)(-۳)$$

$$\xrightarrow[x=۴\ ,\ y=۰]{\text{در نقطه مذکور}}\quad\frac{\partial z}{\partial t}=-۳$$

۵۴- گزینه ۱ صحیح است.

$$\frac{\partial z}{\partial y}=xe^{\frac{y}{x}}\Rightarrow\frac{\partial^۲ z}{\partial y\partial x}=e^{\frac{y}{x}}-\frac{y}{x}e^{\frac{y}{x}}$$

$$\xrightarrow{\text{در نقطه مذکور}}\quad Z''xy=\frac{\partial^۲ z}{\partial y\partial x}=-e^۲$$

۵۵- گزینه ۱ صحیح است.

$$Z''_x=۲x-۳y-۱\quad,\quad Z''x^۲=۲\quad,\quad Z''xy=-۳$$

$$Z'_y=۴y-۳x+۲\quad,\quad Z''y^۲=۴$$

$$\Delta=\begin{bmatrix}۲&-۳\\-۳&۴\end{bmatrix}\Rightarrow|\Delta|=-۱$$

چون $|\Delta|<۰$ است نقطه بحرانی زینی می باشد.

۵۶- گزینه ۳ صحیح است.

$$dz=Z''_x dx+Z'_y dy$$

$$\Rightarrow dz=(۲xtgy-\cos ۲y)dx+\left(x^۲(۱+tg^۲y)+۲x\sin ۲y\right)dy$$

$$\longrightarrow dz = ۰/۲$$

۵۷- گزینه ۴ صحیح است.

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\times\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\left[\frac{۱}{y}-\frac{y}{(x-۲)^{۲}}\right](۲)+\left[-\frac{x}{y^{۲}}+\frac{۱}{x-۲}\right](-۲s)$$

$$\xrightarrow[x=۰\ ,\ y=۱]{\text{در نقطه مذکور}}\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{۵}{۲}$$

۵۸- گزینه ۴ صحیح است.

$$Dz=\{(x,y)\,|\,x,y\in R, x\neq y\}$$

بنابراین گزینه های اول و دوم رد می شوند $z=۱ \Leftarrow y=۰$ و $x=۱$ اگر، $z=-۱ \Leftarrow y=۱$ و $x=۰$ اگر در مورد گزینه سوم فرض می کنیم که z برابر صفر باشد در نتیجه:

$$o=\frac{x^{۲}+y^{۲}}{x-y}\Rightarrow x^{۲}+y^{۲}=۰$$

که در این رابطه نشدنی است. چونکه به ازای تمام مقادیر y,x خواهیم داشت. $x^{۲}+y^{۲}>۰$

۵۹- گزینه ۳ صحیح است.

$$\lim_{x\to ۰} f(x,y)=\lim_{x\to ۰}\frac{x+mx}{x-mx}=\lim_{x\to ۰}\frac{x(۱+m)}{x(۱-m)}=\frac{۱+m}{۱-m}$$

$$(x,mx)\to(۰,۰)$$

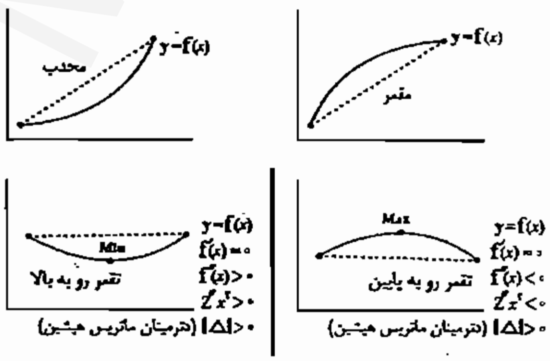
۶۰- گزینه ۲ صحیح است.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(x+۲y)^{\frac{x}{y}}\left(\frac{۱}{y}Ln(x+۲y)+\frac{۱}{x+۲y}\times\frac{x}{y}\right)$$

در نقطه مذکور $\longrightarrow Z'_x=۳\left(Ln۳+\frac{۱}{۳}\right)=۳Ln۳+۱$

۶۱- گزینه ۱ صحیح است.

تابع صعودی $y=f(x)$ در نظر می گیریم. اگر وتری که دو نقطه از این تابع را به یکدیگر وصل می کند در بالای تابع قرار داشته باشد می گوییم تابع محدب می باشد. ولی اگر وتر در پایین تابع قرار داشته باشد می گوییم تابع مقعر می باشد.



بنابراین در این سوال خواهیم داشت:

$$Z''x^2 = ۴ \quad , \quad Z''y^2 = ۶, \ \ Z''xy = ۱$$

$$\Rightarrow \Delta = \begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۱ & ۶ \end{bmatrix} \Rightarrow |\Delta| = ۲۴ - ۱ = ۲۳$$

چون $۰ < |\Delta|$ و $۰ < Z''x^2$ بنابراین تابع اکیداً محدب می باشد.

۶۲- گزینه ۴ صحیح است.

$$Z'_x = ۰ \Rightarrow ۲x + ۴y + ۲ = ۰ \quad , \quad Z'_y = ۰ \Rightarrow ۴x + ۱۲y = ۰ \Rightarrow x = -۳y$$

$$\begin{cases} ۲x + ۴y + ۲ = ۰ \\ x = -۳y \end{cases} \Rightarrow y = ۱, x = -۳$$

۶۳- گزینه ۴ صحیح است.

معادله خط بودجه $\Rightarrow x.Px + y.py = ۱۰۰ \Rightarrow ۱۰x + ۵y = ۱۰۰$

می خواهیم ماکزیمم تابع $z = xy$ را نسبت به محدودیت $۱۰x + ۵y = ۱۰۰$ حساب کنیم:

$$\frac{Z''x}{g'x} = \frac{Z'y}{g'y} \Rightarrow \frac{y}{۱۰} = \frac{x}{۵} \Rightarrow y = ۲x$$

$$\begin{cases} ۱۰x + ۵y = ۱۰۰ \\ y = ۲x \end{cases} \Rightarrow x = ۵ \ , \ \ y = ۱۰$$

۶۴- گزینه ۱ صحیح است.

اگر بخواهیم $u = f(x, y)$ را با توجه به قید یا محدودیت $g(x, y) = c$ ماکزیمم نماییم از فرمول زیر استفاده می کنیم:

$$Z = f(x, y) + \lambda(c - g(x, y))$$

$$۱)\ \frac{\partial z}{\partial x} = ۰ \quad , \quad ۲)\ \frac{\partial z}{\partial y} = ۰ \quad , \quad ۳)\ \frac{\partial z}{\partial \lambda} = ۰$$

$$\Rightarrow U = q_1 q_2 + \lambda(۱۰۰ - ۲q_1 - q_2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial q_1} = ۰ \Rightarrow q_2 - ۲\lambda = ۰ \Rightarrow q_2 = ۲\lambda$$

$$\frac{\partial u}{\partial q_2} = ۰ \Rightarrow q_1 - \lambda = ۰ \Rightarrow q_1 = \lambda$$

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = ۰ \Rightarrow ۲q_1 + q_2 = ۱۰۰ \Rightarrow ۴\lambda = ۱۰۰ \Rightarrow \lambda = ۲۵$$

می دانیم که λ همان قیمت سایه ای می باشد در نتیجه اگر یک واحد به بودجه اضافه شود تغییرات تابع هدف عبـارت خواهـد بود از:

$$Z = \sum yibi \Rightarrow Z = ۲۵ \times ۱ = ۲۵$$

۶۵- گزینه ۲ صحیح است.

تعریف ژاکوبی

اگر $F(u, v)$ و $G(u, v)$ در یک ناحیه مشتق پذیر باشند، ژاکوبی F و G نسبت به u و v به صورت زیر تعریف می شود:

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} Fu & Fv \\ Gu & Gv \end{vmatrix}$$

مشابه آن دترمینان زیر ژاکوبی F و G و H نسبت به U و V و W است:

$$\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} Fu & Fv & Fw \\ Gu & Gv & Gw \\ Hu & Hv & Hw \end{vmatrix}$$

بنابراین در این سوال خواهیم داشت:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}Ux & Uy\\ Vx & Vy\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}Ln۲ & \frac{۱}{۲}\\ \frac{۱}{۲} & Ln۲\end{vmatrix}=(Ln۲)^{۲}-\frac{۱}{۴}$$

زیرا :

$$Ux=\frac{\partial u}{\partial x}=Ln(y+۱)\xrightarrow{\text{در نقطه مذکور}}\frac{\partial u}{\partial x}=Ln۲$$

$$Uy=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x}{y+۱}\longrightarrow\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{۱}{۲}$$

$$Vx=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{y}{x+۱}\xrightarrow{\text{در نقطه مذکور}}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{۱}{۲}$$

$$Vy=\frac{\partial v}{\partial y}=Ln(x+۱)\xrightarrow{\text{در نقطه مذکور}}\frac{\partial v}{\partial y}=Ln۲$$

۶۶- گزینه ۱ صحیح است.

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda xf\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right)+\lambda yg\left(\frac{\lambda x}{\lambda y}\right)$$
$$\Rightarrow f(\lambda x,\lambda y)=\lambda\left[xf\left(\frac{y}{x}\right)+yg\left(\frac{x}{y}\right)\right]=\lambda.z$$

مشخص است که تابع z همگن از درجه ۱ می باشد، بنابراین برطبق قضیه اولر خواهیم داشت:

$$x.\frac{\partial z}{\partial x}+y.\frac{\partial z}{\partial y}=z=۱\times z=۱$$

۶۷- گزینه ۴ صحیح است.

$Z'_y=۰\Rightarrow x+۴=۰\Rightarrow x=-۴$ طول نقطه بحرانی

$Z'_x=۰\Rightarrow ۲x+y-۱=۰\Rightarrow y=۹$ عرض نقطه بحرانی

۶۸- گزینه ۱ صحیح است.

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{g'(x)}=\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{g'(y)}\Rightarrow\frac{۲x}{۱}=\frac{۲y}{۳}\Rightarrow y=۳x$$
$$\begin{cases}y=۳x\\ x+۳y=۱۰\end{cases}\Rightarrow x=۱,\quad y=۳\ ,\quad z=f(۱,۳)=۱۰$$

۶۹- گزینه ۱ صحیح است.

تابع مورد نظر دو متغیره ضمنی است در نتیجه خواهیم داشت:

$$Z'x=\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

$$Z'_x=-\frac{(3x^2-3y+yz)}{xy}=-1$$

$$Z'y=\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}=-\frac{(2y-3x+xz)}{xy}=0$$

$$\Rightarrow Z'_y+Z'_x=-1$$

۷۰- گزینه ۳ صحیح است.

با توجه به دامنه تابع و این که x^2 و y^2 مربع کامل و مثبت هستند نتیجه می گیریم کـه $2x^2+y^2>2x^2-y^2$ و فقـط بـه ازای $y=0$ خواهیم داشت: $2x^2+y^2=2x^2-y^2$، بنابراین نتیجه می گیریم که $f(x,y)\geq 1$ است:

$$Rf=[1,+\infty]$$

۷۱- گزینه ۳ صحیح است.

برای پیوستگی تابع دو متغیره شروط زیر را بررسی می کنیم:

۱- تابع در (x_0,y_0) تعریف شده باشد یعنی (موجود باشد $f(x_0,y_0)$ $\Leftarrow$ $(x_0,y_0)\in Df$ اگر)

۲- تابع در (x_0,y_0) حد داشته باشد یعنی

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$$

۳- مقدار تابع با حد تابع برابر باشد یعنی: $f(x_0,y_0)=L$

در این سوال خواهیم داشت:

$$1)\ f(0,0)=a$$

$$2)\ \lim_{(x,mx)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0} x^2\frac{x^2-m^2x^2}{x^2+m^2x^2}=\lim_{x\to 0} x^2\left[\frac{1-m^2}{1+m^2}\right]=0$$

$$3)\ f(0,0)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\Rightarrow a=0$$

۷۲- گزینه ۱ صحیح است.

$$Z'=8x+2y-1\ ,\quad Z''x^2=8\ ,\quad Z''xy=2$$

$$Z'_y=2x+6y-14\ ,\quad Z''y^2=6$$

$$\Delta=\begin{bmatrix}8 & 2\\ 2 & 6\end{bmatrix}\Rightarrow|\Delta|=44$$

چون $|\Delta|>0$ و $Z''x^2>0$ بنابراین نقطه بحرانی یک نقطه مینیمم می باشد و تابع Z اکیداً محدب می باشد.

۷۳- گزینه ۱ صحیح است.

$$Z'_x=0\Rightarrow 8x+2y-1=0\Rightarrow 8x+2y=1$$

$$Z'_y=0\Rightarrow 2x+6y-14=0\Rightarrow 2x+6y=14$$

$$x=\frac{-1}{2}\ ,\quad y=\frac{5}{2}$$

۷۴- گزینه ۴ صحیح است.

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{bmatrix}Fu & Fv\\ Gu & Gv\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2u & 2v\\ V & U\end{bmatrix}=2u^2-2v^2$$

۷۵- گزینه ۱ صحیح است.

تابع مورد نظر دو متغیره ضمنی می باشد در نتیجه:

$$Z'_x=-\frac{f'_x}{f'_z}=-\frac{-2x+yz}{2z+xy}\xrightarrow{\text{(1و1و1) در نقطه}}Z'_x=\frac{1}{3}$$

$$Z'_y=-\frac{f'_y}{f'_z}=-\frac{-۲y+xz}{۲z+xy}\xrightarrow{\text{در نقطه (۱و۱و۱)}}Z'_y=\frac{۱}{۳}$$

$$\xrightarrow{\text{در نقطه (۱و۱و۱)}}x.Z'_x+y.Z'_y=\frac{۲}{۳}$$

۷۶- گزینه ۲ صحیح است.

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial q_۱}}{\frac{dg}{dq_۱}}=\frac{\frac{\partial u}{\partial q_۲}}{\frac{dg}{dq_۲}}\Rightarrow\frac{۲q_۲}{۴}=\frac{۲q_۱}{۱}\Rightarrow q_۲=۴q_۱$$

$$\begin{cases}q_۲=۴q_۱\\ ۴q_۱+q_۲=۲۰۰\end{cases}\Rightarrow q_۱=۲۵,q_۲=۱۰۰,;u=۲\times۲۵\times۱۰۰=۵۰۰۰$$

۷۷- گزینه ۱ صحیح است.

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}.dx+\frac{\partial z}{\partial y}.dy$$

$$dz=\left[\frac{y}{(x+y)^۲}+\frac{x}{(x^۲+y^۲)}\right]dx+\left[\frac{-x}{(x+y)^۲}+\frac{y}{x^۲+y^۲}\right]dy$$

$$dz=\left(\frac{۲}{۹}+\frac{۱}{۵}\right)(۰/۰۱)+\left(-\frac{۱}{۹}+\frac{۲}{۵}\right)(۰/۰۲)=۰/۰۱$$

۷۸- گزینه ۲ صحیح است.

تابع مورد نظر دو متغیره ضمنی می باشد بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{x^۲z}{y}-x-e^{۲x+y-z}=۰$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f'x}{f'z}=-\frac{\left(\frac{۲xz}{y}-۱-۲e^{۲x+y-z}\right)}{\frac{x^۲}{y}+e^{۲x+y-z}}=-\frac{۲}{۳}$$

۷۹- گزینه ۴ صحیح است.

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{g'x}=\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{g'y}\Rightarrow ۲x+۶y=۴y+۶x\Rightarrow ۲y=۴x\Rightarrow y=۲x$$

$$\begin{cases}y=۲x\\ x+y=۱۲\end{cases}\Rightarrow x=۴,y=۸,z=۳۳۶$$

۸۰- گزینه ۴ صحیح است.

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial t}=(۲x+y)\left(\frac{۱}{t^۲}\right)+(-۲y+x)\left(\frac{۱}{۲\sqrt{t}}\right)$$

به ازای $t=۱$ و $s=۲$

$$\xrightarrow[y=۵ \qquad x=۳]{} \frac{\partial f}{\partial t}=۱۱-\frac{۷}{۲}=\frac{۱۵}{۲}=۷/۵$$

۸۱- گزینه ۳ صحیح است.

$$z=f(u,v), u=x^{۲}Lny^{۲} \;,\; V=y^{۲}Lnx^{۲}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\left(zu.۲xLny^{۲}\right)+(zv.y^{۲}.\frac{۲x}{x^{۲}})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\left(۴xLny.Zu\right)+(\frac{۲y^{۲}}{x}.ZV)$$

۸۲- گزینه ۴ صحیح است.

اگر $z=۱ \Rightarrow$ x,y حقیقی وجود دارند

$$۱=Ln(\frac{x^{۲}-y^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}}) \Rightarrow e=\frac{x^{۲}-y^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}}$$

مشخص است که برای y,x اعدادی حقیقی وجود ندارند که در رابطه فوق صدق کنند، بنابراین $۱\notin RZ$

۸۳- گزینه ۱ صحیح است.

تابع یک متغیره ضمنی می باشد در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f'_x}{f'_y} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-۲x+۲y}{۲y+۲x}=-۱ \Rightarrow \frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}=۰$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^{۲}y}{\partial x^{۲}}=۰$$

۸۴- گزینه ۴ صحیح است.

$$Z'_x=۲x-۶ \;,\quad Z''x^{۲}=۲ \quad,\quad Z''xy=۰$$

$$Z'_y=۲y+۴ \quad,\quad Z''y^{۲}=۲$$

$$\Delta=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow |\Delta|=۴$$

چون $|\Delta|>۰$ و $Z''x^{۲}>۰$ بنابراین نقطه بحرانی (۳،۲-،۳-) مینیمم مطلق می باشد.

۸۵- گزینه ۱ صحیح است.

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial p_۱}=\frac{\partial u}{\partial q_۱}.\frac{\partial q_۱}{\partial p_۱}+\frac{\partial u}{\partial q_۲}.\frac{\partial q_۲}{\partial p_۱}+\frac{\partial u}{\partial q_۳}.\frac{\partial q_۳}{\partial p_۱}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial p_۱}=\frac{\partial u}{\partial q_۱}.(-۲)+\frac{\partial u}{\partial q_۲}.(۲)+\frac{\partial u}{\partial q_۳}(۱)$$

۸۶- گزینه ۴ صحیح است.

با توجه به فرض مسأله محدودیت $۱۰x+۵y=۱۰۰$ خواهد بود و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{g'x}=\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{g'y} \Rightarrow \frac{y}{۱۰}=\frac{x}{۵} \Rightarrow y=۲x$$

$$\begin{cases} y=۲x \\ ۱۰x+۵y=۱۰۰ \end{cases} \Rightarrow x=۵, y=۱۰$$

فصل ششم

انتگرال

(۶-۱) **تعریف:** هرگاه مشتق تابع $F(x)$ برابر $f(x)$ باشد طبق تعریف به $F(x)$ انتگرال نامعین یا آنتی مشتق یا تابع اولیه $f(x)$ می گویند و آن را بدین گونه نمایش می دهند؛

$$\int f(x)dx = F(x)+C \Leftrightarrow F'(x)=f(x)$$

در حقیقت انتگرال و مشتق (دیفرانسیل) عکس یکدیگرند. بنابراین اکثر قواعدی که در مورد مشتق وجود دارد در انتگرال هم معتبر است.

الف) انتگرال نامعین

در قواعد انتگرال گیری، برای جلوگیری از خطا و از آنجا که در اکثر مواقع انتگرال را بر حسب dx می‌خواهند (که u تابعی از x است) بهتر است فرمولها برای تابع u هم با dx انتگرال گرفته شود تا خواننده فرق انتگرال‌گیری از u,x را متوجه شود زیرا در اکثر مواقع از تابعی از x انتگرال گرفته شده است.

روند تعیین تابعی که مشتق آن معلوم است را انتگرال‌گیری گوییم در واقع انتگرال بر عکس مشتق عمل می‌کند یعنی:

مقدار ثابت C را ثابت انتگرال‌گیری می‌گوییم و F(x)+C انتگرال نامعین می‌باشد.

(۶-۲) قواعد انتگرال:

۱) $\int dx = x+c$

۲) $\int kdx = k\int dx$ (ضریب ثابت k)

۳) $\int[g(x)\pm f(x)]dx = \int g(x)dx \pm \int f(x)dx$

۴) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}+c,\ n\neq -1$

۵) $\int u'u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1}+c,\ n\neq -1$ (با فرض اینکه u تابعی از x است.

۶) $\int \dfrac{1}{x}dx = \mathrm{Ln}|x|+c \Rightarrow \int \dfrac{u'}{u}dx = \ln|u|+c$

۷) $\int e^x dx = e^x + c \Rightarrow \int u'e^u du = e^u + c$ و یا $\int e^u du = \dfrac{e^u}{u'}+c$

۸) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a}+c \Rightarrow \int u'a^u dx = \dfrac{a^u}{\mathrm{Ln}a}+c$ و یا $\int a^u du = \dfrac{۱}{u'\mathrm{Ln}a}a^u + c$

۹) $\int \text{Sinx}dx = -\text{Cosx} + c \Rightarrow \int u' \sin u dx = -\cos u + c$

۱۰) $\int \cos x dx = \sin x + c \Rightarrow \int u' \cos u dx = \sin u + c$

۱۱) $\int \text{Sec}^2 x dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + c \Rightarrow$

۱۲) $\int \text{Sec}^2 u du = \int \frac{1}{\cos^2 u} du = \int (1 + \tan^2 u) du = \tan u + c$

$\int \text{CSC}^2 x dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x + c$

$\int \csc^2 u du = \int \frac{1}{\sin^2 u} = \int (1 + \cot^2 u) du = -\cot u + c$

۱۳) $\int \tan u.\text{Sec} u du = \int \frac{\sin u}{\cos^2 u} du = \text{Sec} u + c$

۱۴) $\int \cot u \csc u du = \int \frac{\cos u}{\sin^2 u} du = -\csc u + C$

۱۵) $\int \tan x dx = -\text{Ln} |\cos x| + c \Rightarrow \int \tan u du = -\ln |\cos u| + c$

۱۶) $\int \text{Cot} x dx = \text{Ln} |\sin x| + c \Rightarrow \int \cot u du = \text{Ln} |\sin u| + c$

۱۷) $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln(\frac{a+u}{a-u}) + c$

۱۸) $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln(\frac{u-a}{u+a}) + c$

۱۹) $\ln u du = u \ln u - u + c$

۲۰) $\int \frac{du}{u \ln u} = \ln |\ln u| + c$

انتگرال توابع معکوس مثلثاتی:

۲۱) $\int \frac{dx}{\sqrt{۱ - x^۲}} = Arc\ \sin x + c$

۲۲) $\int \frac{dx}{۱ + x^۲} = Arc\ \tan x + c$

۲۳) $\frac{-dx}{\sqrt{۱ - x^۲}} = Arc\ \cos x + c$

۲۴) $\int \frac{-dx}{۱ + x^۲} = Arc\ \cot x + c$

۲۵) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^۲ + x^۲}} = Arc\ \sin \frac{x}{a} + c$

۲۶) $\int \frac{dx}{a^۲ + x^۲} = \frac{۱}{a} Arc\ \tan \frac{x}{a} + c$

مثال:

$$\int (\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x - 1}) dx = \tan^{-1} x + \text{Ln} |x - 1| + c$$

$$\int (2^x + 3^x)^2 dx = \int (2^{2x} + 3^{2x} + 2(6)^x) dx = \frac{1}{2\text{Ln}2} (2)^{2x} + \frac{1}{2\text{Ln}3} (3)^{2x} + \frac{2}{\text{Ln}6} (6)^x + c$$

$\int\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx \qquad : u=\sqrt{x} \Rightarrow du=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Rightarrow 2du=\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

$\int\frac{\text{Cos}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=\int 2\cos u du=2\text{Sin}u+c=2\text{Sin}\sqrt{x}+c$

$\int\frac{x}{\sqrt{x^{۲}+۱}}dx$ تغییر متغیر $x^{۲}+۱=u \Rightarrow ۲xdx=du=xdx=\frac{du}{۲}$

$$\int\frac{x}{\sqrt{x^{۲}+۱}}dx=\int\frac{du}{۲\sqrt{u}}=\int\frac{۱}{۲}u^{-\frac{۱}{۲}}du=\frac{۱}{۲}\frac{u^{\frac{۱}{۲}}}{\frac{۱}{۲}}+c=\sqrt{x^{۲}+۱}+c$$

$$\int\text{Sec}^2\frac{x}{a}\tan\frac{x}{a}dx=a\int\tan\frac{x}{a}(\frac{1}{a}\text{Sec}^2\frac{x}{a}dx)=\frac{a}{2}\tan^2\frac{x}{a}+c$$

$$\int\frac{\cos xdx}{1+\sin x}=\ln|1+\sin x|+c$$

$$\int(e^x-e^{-x})dx=\int e^xdx+\int -e^{-x}dx=e^x+e^{-x}+c$$

$$\int(\frac{\text{Sec}2x}{1+\tan 2x})^2dx=\frac{1}{2}\int\frac{2\text{Sec}^2 2xdx}{(1+\tan 2x)^2}=-\frac{1}{1+\tan 2x}+c$$

مثال: اگر $h(x)=\int(x^2+e^x)dx$ و $h(0)=4$ **باشد مقدار $h(2)$ را محاسبه کنید.**

$$h(x)=\int(x^2+e^x)dx=\int x^2dx+\int e^xdx=\frac{1}{3}x^3+e^x+c$$

$$h(0)=\frac{1}{3}(0)^3+e^0+c=4\Rightarrow 1+c=4\Rightarrow c=3\Rightarrow h(2)=\frac{1}{3}(2)^3+e^2+3=\frac{17}{3}+e^2$$

(۶-۳) روشهای خاص انتگرال‌گیری:

۱- انتگرال گیری به روش جزء به جزء:

در مورد انتگرالهایی که به صورت حاصل ضرب بوده و به صورت متعارف قابل محاسبه نباشند استفاده می‌شود. قاعده کلی این نوع انتگرال گیری برابر است با:

$$\int udv=uv-\int vdu$$

مثال:

$1)\ \int xe^xdu=xe^x-\int e^xdx=xe^x-e^x+c=e^x(x-1)+c$

$x=u\Rightarrow du=dx, e^xdx=dv\Rightarrow v=e^x$

$2)\ \int\ln xdx=x\ln x-\int x.\frac{1}{x}dx=x\ln x-\int dx=x(\ln x-1)+c$

$\ln x=u\Rightarrow du=\frac{1}{x}dx, dx=dv\Rightarrow v=x$

$$3)\ \int e^x\cos xdx=e^x\sin x-\int\sin xe^xdx=e^x(\cos x-\sin x)-\int e^x\cos xdx\Rightarrow 2\int e^x\cos xdx=e^x(\cos x-\sin x)$$

$$\Rightarrow\int e^x\cos xdx=\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)+c$$

$u=e^x\Rightarrow du=e^xdx, \cos xdx=dv\Rightarrow v=+\sin x$

$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x - \int -e^x \cos x$

$e^x = u \Rightarrow du = e^x dx, \sin x dx = dv \Rightarrow v = -\cos x$

۲- انتگرال‌گیری به روش تجزیه کسرهای گویا:

در این روش توابع تحت انتگرال را به صورت کسرهای ساده تجزیه کرده و سپس از هر کدام به تنهایی انتگرال می‌گیریم روش کلی کار به قرار زیر است:

۱) مخرج کسر را تا جایی که ممکن است تجزیه می‌کنیم یعنی به صورت ax+b یا ax^2+bx+c در می‌آوریم:

۲) اگر مخرج عبارت ax+b بود کسر را به صورت $\frac{A}{ax+b}$ و اگر $(ax+b)^n$ کسر را به صورت:

$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\ldots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$ جدا می‌کنیم.

ب) اگر مخرج عبارت ax^2+bx+c بود کسر را به صورت $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ و اگر به صورت $(ax^2+bx+c)^n$ بود به صورت ... $\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$ تبدیل می‌کنیم.

سپس دو طرف عبارت را مساوی هم قرار داده و مقادیر مجهول را می‌یابیم.

و در نهایت با استفاده از روشهای معمولی انتگرال گیری کسرهای جزئی حاصله مقادیر انتگرال را بدست می‌آوریم.

نکته مهم: برای استفاده از تجزیه کسرهای می‌بایست درجه صورت کسر کمتر از درجه مخرج کسر باشد و در صورتی که درجه عبارت صورت بزرگتر تا مساوی درجه مخرج باشد ابتدا می‌بایست صورت را بر مخرج تقسیم کرده و سپس از روش بالا استفاده کرد.

مثال:

$$1)\int\frac{(x+3)dx}{x^2+3x+2}=\int\frac{(x+3)dx}{(x+1)(x+2)}=\int\left(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}\right)dx=\int\left(\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx=2\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{x+2}$$

$$=2Ln|x+1|-Ln|x+2|+c=Ln\frac{(x+1)^2}{|x+2|}+c$$

$$\frac{x+3}{(x+1)(x+2)}=\frac{A(X+2)+B(X+1)}{(x+1)(x+2)}\Rightarrow\begin{cases}A+B=1\\2A+B=3\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}A=2\\B=-1\end{matrix}$$

$$2)\int\frac{x^2-3x-8}{x^2-2x+1}dx=\int\frac{(x^2-2x+1)-(x+9)}{x^2-2x+1}d=\int\left[1-\frac{(x+9)}{x^2-2x+1}\right]dx=x-\underbrace{\int\frac{x+9}{x^2-2x+1}dx}_{I}=$$

$$x-Ln|x-1|+\frac{10}{x-1}+C$$

$$I=\int\left(\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}\right)dx=\int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{10}{(x-1)^2}\right)dx=\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{10dx}{(x-1)^2}=Ln|x-1|-\frac{10}{x-1}$$

$$\frac{x+9}{x^2-2x+1}=\frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2}=\frac{Ax-A+B}{(x-1)^2}\Rightarrow\left.\begin{matrix}A=1\\-A+B=9\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{matrix}A=1\\B=10\end{matrix}$$

۳- انتگرال‌گیری به روش تغییر متغیر

از این روش معمولاً در مواقعی استفاده می‌کنیم که متغیر موجود در انتگرال توان کسری داشته باشد:

اگر عبارت مشتمل برای توان کسری x باشد می توان با تغییر متغیر $x = z^n$ عبارت را به صورت گویا تبدیل می‌کنیم.

اگر عبارت مشتمل عبارت مانند $ax + b$ با توان کسری باشد تنها با تغییر متغیر $ax + b = z^n$ می‌توان آن را گویا کرد

☜☆**تذکر:** n در دو عبارت بالا مخرج مشترک توان کسری عبارت‌های x یا $ax+b$ است

مثال : لازم به ذکر است مثال‌های ساده‌تری از این بخش در ابتدای فصل آمده است.

$$1)\ \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{3}{4}}}dx = \int \frac{z^2(4z^3dz)}{1+z^3} = 4\int \frac{z^5dz}{1+z^3} = 4\int (z^2 - \frac{z^2}{z^3+1})dz = \frac{4}{3}z^3 - \frac{4}{3}\mathrm{Ln}\left|z^3+1\right| + c$$

$$x = z^4 \Rightarrow dx = 4z^3dz$$

را جایگزین z می‌کنیم $x \Rightarrow \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} - \frac{4}{3}\mathrm{Ln}\left|x^{\frac{3}{4}}+1\right| + c$

$$2)\ \int \frac{xdx}{(a+bx)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{b^2}\int \frac{(z^2-a)zdz}{z^3} = \frac{2}{b^2}\int \frac{(z^3-az)dz}{z^3} = \frac{2}{b^2}\int (1-\frac{a}{z^2})dz = \frac{2}{b^2}(z+\frac{a}{z}) + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{xdx}{(a+bx)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{b^2}(\frac{z^2+a}{z}) + c$$

$$a+bx = z^2 \Rightarrow x = \frac{1}{b}(z^2-a), dx = \frac{2}{b}zdz$$

را جایگزین z می‌کنیم $x \Rightarrow \frac{2}{b^2}\left(\frac{bx+2a}{(\sqrt{bx+a})}\right) + c$

(۴-۶) انتگرال معین:

اگر $F(x)$ مقدار متناظر $\int f(x)dx$ باشد انتگرال معین $f(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

دیگر ویژگی ها ی انتگرال معین عبارتند از :

$1)\ \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ $\qquad$ $2)\ \int_a^a f(x)dx = 0$

$3)\ \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad a \le c \le b$

$4)\ \int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$

$5)\ \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$

$6)\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b f(x)dx$

نکته: در سه انتگرال معینی که از حد استفاده شده اگر حد موجود باشد انتگرال را همگرا و در غیر این صورت واگرا گوییم .

مثال:

$$1)\ \int_0^{\frac{\Pi}{4}} \tan x dx = \int_0^{\frac{\Pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\mathrm{Ln}|\cos x|\ \Big]_0^{\frac{\Pi}{4}} = -(\mathrm{Ln}\left|\cos\frac{\Pi}{4}\right| - \mathrm{Ln}|\cos 0|) = -\mathrm{Ln}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

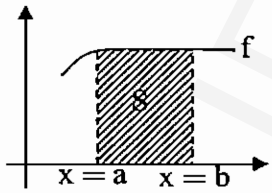
$$2)\ \int_0^{+\infty}(3-x)e^{6x-x^2}dx = \lim_{b\to+\infty} \cdot \frac{1}{2}\int_0^b (6-2x)e^{6x-x^2}dx = \lim_{b\to+\infty} \cdot \frac{1}{2}e^{6x-x^2}\Big]_0^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \cdot = \frac{1}{2}\left(e^{6b-b^2}-1\right) = -\frac{1}{2}$$ انتگرال همگرا است

(۶ - ۵) محاسبه مساحت زیر منحنی‌ها (مساحت سطح محصور بین منحنی و محورها)

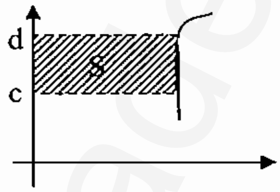
مساحت سطح محصور بین منحنی تابع $y=f(x)$ و محورx ها و دو خط قائم x=a و x=b از انتگرال معین زیر به دست می آید.

$$\zeta = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$$



مساحت سطح محصور بین منحنی تابع و محور y ها و دو خط افق y=c و y=d از انتگرال معین زیر به دست می آید:

$$\zeta = \left|\int_c^d x\,d\,y\right|$$



نکته: اگر f(x) در فاصله $[a,b]$ پیوسته و دارای ریشه صفری برابر با c باشد داریم

f(x) مساحت زیر منحنی = $\left|\int_a^c f(x)dx\right| + \left|\int_c^b f(x)dx\right|$

مثال ۱: سطح محصور بین منحنی $y=x^3-4x$ و محورx ها را بیابید دربازه $[-2,2]$

$$x^3-4x=0 \Rightarrow x(x^2-4)=0\begin{cases} x=0 \\ x=\pm 2\end{cases}$$

$$x^3-4x \Rightarrow \left|\int_{-2}^{0}(x^3-4x)_{dx}\right| + \left|\int_0^2(x^3-4x)dx\right| = \left|(\frac{x^4}{4}-2x^2)\ \Big]_{-2}^{0}\right| + \left|(\frac{x^4}{4}-2x^2)\ \Big]_0^2\right| = |+4|+|-4| = 8$$

مثال ۲: سطح محصور بین منحنی $y=x^2+9$ و خطوط x=-2,x=+2 را بدست آورید

$$\int_{-2}^{+2}(x^2+9)dx = \left(\frac{x^3}{3}+9x\right)\ \Big]_{-2}^{2} = (\frac{62}{3})-(-\frac{62}{3}) = \frac{124}{3}$$

(۶-۶) محاسبه مساحت زیردو منحنی (بین دو منحنی):

هرگاه بخواهیم مساحت سطح محصور بین دو منحنی $y=f_1(x)$ و $y=f_2(x)$ را در فاصله بین a و b به دست آوریم از فرمول زیر استفاده می کنیم.

$$S = \left|\int_a^b (y_1-y_2)\right|$$

$$S = \left|\int_a^b f_1(x)-f_2(x)dx\right|$$

تذکر۱: اگر بخواهیم مساحت سطح محصور بین دو منحنی (بدون ذکر فاصله) را به دست آوریم ابتدا دو معادله را در یک دستگاه قرار می دهیم از حل آن طول نقاط تقاطع دو منحنی یعنی a و b بدست می آیند و سپس از فرمول صفحه قبل استفاده

می کنیم.

تذکر۲: قراردادن اول هر یک از معادله دو تابع در فرمول فرقی نمی کند فقط اگر در خاتمه کار جواب منفی به دست آید باید قدرمطلق آنرا حساب نمود تا جواب مثبت شود. (زیرا مساحت همواره عددی مثبت خواهد شد.)

اگر دو تابع $g(x),f(x)$ دربازه $[a,b]$ پیوسته بوده و همواره $f(x)\le g(x)$ باشد مساحت بین دو منحنی برابر است با $\int_a^b[g(x)-f(x)]dx$

نکته: اگر دربازه $[a,b]$ نقطه‌ای مانند c داشته باشیم که $g(x)=f(x)$ باشد و نوع قرار گیری دو منحنی عوض شود خواهیم داشت :

$$\left|\int_a^c[f(x)-g(x)]dx\right|+\left|\int_c^b[f(x)-g(x)]dx\right|$$

مثال : مساحت بین دو منحنی $g(x)=x^2, f(x)=x$ دربازه $[0,2]$ را بدست آورید.

$$f(x)=g(x)\Rightarrow x=1, x=0$$

$$\left|\int_0^1[g(x)-f(x)]dx\right|+\left|\int_1^2[g(x)-f(x)]dx\right|=\left|\int_0^1(x^2-x)dx\right|+\left|\int_1^2(x^2-x)dx\right|=$$

$$\left|\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\ \Big]_0^1\right|+\left|\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\ \Big]_1^2\right|=\left|\frac{-1}{6}\right|+\left|(\frac{4}{6})-(\frac{-1}{6})\right|=\frac{6}{6}=1$$

نکته: به طور کلی اگر در فاصله $f(x)[a,b]$ دارای گسستگی باشد برای محاسبه مساحت می‌بایست مساحت قسمتهای گسسته را جداگانه بدست آورده و با هم جمع کرد.

مثال :

$$\int_0^2 x[x]dx \qquad =\lim_{b\to 1}\int_0^b 0\times xdx+\lim_{c\to 2^-}\int_1^c xdx+\int_2^2 2xdx=\lim_{c\to 2}\int_1^c xdx=\lim_{c\to 2^-}\frac{x^2}{2}\ \Big]_1^c=$$

$$\lim_{c\to 2^-}(\frac{c^2}{2}-\frac{1}{2})=\frac{3}{2}$$

$$[x]:\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 1 & 1\le x<2\\ 2 & x=2\end{cases}$$

(۶-۷) محاسبهٔ حجم حادث یا حجم سطح دوار:

۱) هرگاه بخواهیم حجم حادث از دوران سطح محصور بین منحنی $y=f(x)$ و محور x ها و دو خط قائم x=a و x=b را حول محور x ها به دست آوریم از انتگرال معین زیر استفاده می کنیم.

$$V=\pi\left|\int_a^b y^2dx\right|$$

مثال: حجم حادث از دوران منحنی $y=\sqrt{15(x^2+1)}$ و خطوط x=0 و x=1 حول محور x ها را بدست آورید.

$$V=\pi\left|\int_0^1 15(x^2+1)dx\right|=\pi\left|15\left(\frac{x^3}{3}+x\ \Big]_0^1\right)\right|=20\pi$$

۲) هرگاه بخواهیم حجم حادث از دوران سطح محصور بین منحنی $y=f(x)$ و محور yها و دو خط افقی y=d و y=c را حول محورyها به دست آوریم از انتگرال معین زیر استفاده می کنیم.

$$V=\pi\left|\int_c^d x^2dy\right|$$

۳) هرگاه بخواهیم حجم حادث از دوران سطح محصور بین دو منحنی $y_1=f_1(x)$ و $y_2=f_2(x)$ و خطوط $x=a$ و $x=b$ را حول محور x ها به دست آوریم از انتگرال معین زیر استفاده می کنیم.

$$V=\pi\left|\int_a^b(y_1^2-y_2^2)dx\right|$$

(۶-۸) کاربرد انتگرال در مدیریت و اقتصاد:

الف) درآمد و هزینه نهایی و کل

همانطور که در مبحث مشتق گفتیم درآمد نهایی و هزینه نهایی در واقع حاصل مشتق مرتبه اول درآمد کل و هزینه کل می‌باشد بنا براین می‌توان با انتگرال گیری از درآمد نهایی یا هزینه نهایی مقدار درآمد و هزینه کل را نیز بدست آورد.

مثال: هزینه نهایی تولید در یک کارخانه برابر است با $4x^3 - \frac{1}{(x+1)^2}$ اگر هزینه ثابت این کارخانه ۱۰۰ واحد باشد هزینه کل کارخانه به ازای تولید ۱۰۰ واحد را بدست آورید.

$$TC = \int Mc \Rightarrow TC = \int (4x^3 - \frac{1}{(1+x)^2})dx = x^4 + \frac{1}{x+1} + C$$

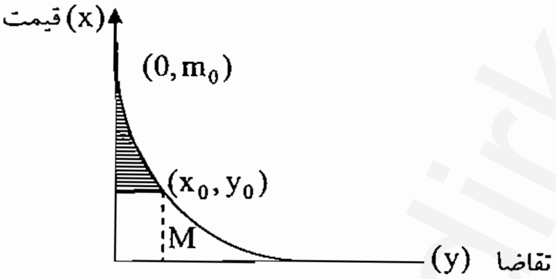
نکته مهم: هزینه ثابت،میزان هزینه ای است که به ازای تولید صفر واحد ایجادمی‌شود .

$$TC(0) = 100 \Rightarrow 100 = (0)^4 + \frac{1}{0+1} + C \Rightarrow C = 99$$

$$\Rightarrow TC(x) = x^4 + \frac{1}{x+1} + 99 \Rightarrow TC(100) = 100^4 + \frac{1}{101} + 99 \approx 100/000/099$$

ب) مازاد رفاه مصرف کننده (اضافه رفاه مصرف کننده)

همانطور که در مباحث اقتصاد اشاره شده در تابع تقاضا به ازای قیمت y_0، تقاضایی متناظر برابر با x_0 وجود دارد در این حالت مصرف کنندگانی که مایل به پرداخت حتی قیمت بیشتری برای کالای خاصی هستند از وجود قیمت y_0 در بازار منفعتی کسب می‌کنند که منفعت که مطابق با شکل مقابل معادل سطح زیر منحنی تابع تقاضا و بالای خط $y = y_0$ می‌باشد.



در این حالت اگر تابع تقاضا به صورت $y = f(x)$ باشد (y قیمت کالا و x تقاضا متناظر با قیمت می‌باشد) مازاد رفاه مصرف کننده را می‌توان از رابطه مقابل به دست آورد.

$$\text{مازاد رفاه مصرف کننده} = \int_0^{x_0} f(x)dx - x_0y_0$$

اما اگر تابع تقاضا به $x = g(y)$ باشد (y قیمت کالا و x تقاضا متناظر با قیمت است) رابطه مازاد رفاه مصرف کننده به صورت زیر خواهد بود.

$$\text{مازاد رفاه مصرف کننده} = \int_{y_0}^{m_0} g(y)dy$$

که در این رابطه m_0 قیمتی است که در آن تقاضا صفر می‌شود.

مثال: اگر تابع تقاضا برای کالایی به صورت $y = 25 - x^2$ باشد مازاد رفاه مصرف کننده را به ازای قیمت $y = 9$ محاسبه کنید.

$$y_0 = 9 \Rightarrow 9 = 25 - x_0^2 \Rightarrow x_0^2 = 16 \Rightarrow x_0 = 4$$

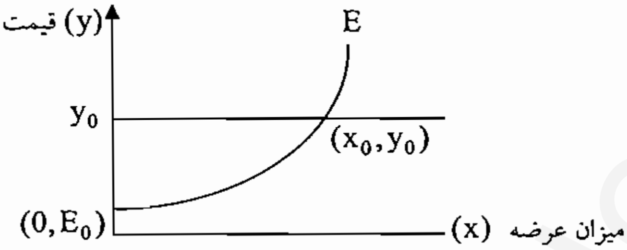
مازاد رفاه مصرف کننده $= \int_0^4 f(x)dx-(4)(9)=\int_0^4(25-x^2)dx-36=25x-\frac{1}{3}x^2\Big]_0^4-36=(100-\frac{64}{3})-36$

مازاد رفاه مصرف کننده $=\frac{128}{3}=42/\overline{6} \Rightarrow$

مازاد رفاه تولید کننده (اضافه رفاه تولید کننده)

در مباحث اقتصاد بیان شده است که در قیمتهای مختلف بازار میزان عرضه کالا توسط تولید کننده متفاوت خواهد بود بنابراین چنانچه قیمت بازار برابر با y_0 باشد تولید کنندگان x_0 از کالا را به بازار عرضه می‌کنند.

در این حالت تولید کنندگانی که حاضرند با قیمت کمتر از y_0 هم محصول خود را به بازار عرضه کنند منفعتی را کسب خواهند کرد که مقدار آن مقابل شکل مقابل برابر است با مساحت بالای منحنی عرضه و زیرخط y_0 و y



برای محاسبه میزان رفاه مصرف کننده در صورتی که $y=f(x)$ باشد (y قیمت کالا در بازار x میزان عرضه متناظر با آن) خواهیم داشت.

مازاد رفاه تولید کننده $= x_0y_0-\int_0^{x_0} f(x)d(x)$

و اگر رابطه ما به صورت $x=g(y)$ باشد (y قیمت کالا در بازار و x میزان عرضه متناظر با آن) خواهیم داشت.

مازاد رفاه تولید کننده $=\int_{E_0}^{y_0} g(y)dy$

که در این رابطه E_0 حداقل قیمت کالا به ازای عدم عرضه کالا به بازار است (عرضه برابر صفر باشد)

مثال: اگر تابع عرضه به صورت $y=x^2-25$ باشد مازاد رفاه تولید کننده در قیمت $y=6$ واحد پولی را محاسبه کنید.

$\Rightarrow y=0 \Rightarrow x^2-25=0 \Rightarrow x=5=E_0$

مازاد رفاه تولید کننده $=\int_5^6 y(x)dx=\int_5^6(x^2-25)dx=\frac{x^3}{3}-25x\Big]_5^6=(\frac{216}{3}-150)-(\frac{125}{3}-125)=\frac{91}{3}-25=\frac{16}{3}$

مازاد رفاه تولید کننده $=\frac{16}{3}=5/3$

جریان سرمایه‌گذاری

اگر نرخ سرمایه‌گذاری خالص برابر با $I(\tau)$ باشد (که در آن واحد زمان می‌باشد) میزان انباشت سرمایه پس از گذشت τ_0 را می‌توان از رابطه زیر محاسبه کرد

میزان انباشت سرمایه $=\int_0^{\tau_0} I(\tau)d\tau$

مثال: اگر نرخ خالص سرمایه‌گذاری در شرکتی به صورت سالانه برابر با $I(\tau)=5\tau^{\frac{1}{4}}$ باشد میزان انباشت سرمایه در سالهای شانزدهم تا هشتاد و یکم را محاسبه کنید.

میزان افزایش سرمایه $=\int_{16}^{81} I(\tau)dt=\int_{16}^{81}5\tau^{\frac{1}{4}}dt=\frac{4}{5}\times5\tau^{\frac{5}{4}}=4\tau^{\frac{5}{4}}\Big]_{16}^{81}$

میزان افزایش سرمایه $=4(243-32)=844$

تستهای طبقه‌بندی شده فصل ششم

رشته اقتصاد

۱. اگر $f(x)=\int x^9 Lnx dx$ و ثابت انتگرال $C=0$ باشد $f(1)$ برابر است با: (سراسری ۷۴)

۱) $\frac{1}{10}$ ۲) $-\frac{1}{10}$ ۳) $-\frac{1}{100}$ ۴) $\frac{1}{100}$

۲ـ جواب انتگرال $\int e^{5x}\cos 4x dx$ کدام است؟ (سراسری ۷۴)

۱) $\frac{4}{41}e^{5x}(\sin 4x+\frac{5}{4}\cos 4x)+c$ ۲) $\frac{4}{41}e^{5x}(\sin 4x-\frac{5}{4}\cos 4x)+C$

۳) $\frac{4}{41}e^{5x}\sin 4x+C$ ۴) $\frac{4}{41}e^{5x}\cos 4x+C$

۳ـ $\int_{-1}^{0}\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ عبارت است از: (سراسری ۷۴)

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۲- ۴) ۱-

۴ـ سطح محصور بین منحنی $y=x^3$ و خط مماس بر آن در نقطه $x=1$ برابر است با: (سراسری ۷۴)

۱) $\frac{27}{4}$ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) $\frac{35}{2}$

۵ـ اگر $I(x)=\int\frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2+2x}}dx$ فرض شود، به ازای $C=0$ مقدار $I(-1)$ کدام است؟ (سراسری ۷۵)

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۶ـ مقدار انتگرال $I(x)=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+e^{-x}}$ کدام است؟ (سراسری ۷۵)

۱) $-Ln2$ ۲) ۰ ۳) $Ln2$ ۴) $Ln3$

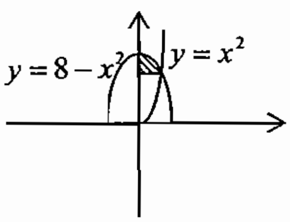
۷ـ مساحت ناحیه محصور بین منحنیهای $y=-x, y=2-x^2$ برابر است با: (سراسری ۷۵)

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{7}{2}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{9}{2}$

۸ـ مقدار انتگرال $\int_{0}^{3}\frac{dx}{25-x^2}$ کدام است؟ (سراسری ۷۶)

۱) $-\frac{1}{5}Ln2$ ۲) $-\frac{1}{5}Ln4$ ۳) $\frac{1}{5}Ln4$ ۴) $\frac{1}{5}Ln2$

۹ـ در شکل مقابل مساحت S کدام است؟ (سراسری ۷۶)



۱) $\frac{16}{3}$ ۲) $\frac{32}{3}$ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸

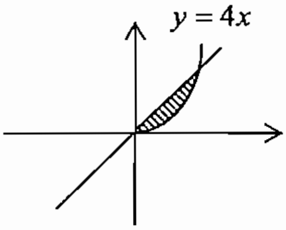
۱۰ـ اگر $I(t)=\int \frac{t^2dt}{t+1}$ باشد. مقدار $I(1)-I(0)$ کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) $\frac{3}{2}-Ln2$ ۲) $1-Ln2$ ۳) $\frac{1}{2}+Ln2$ ۴) $-\frac{1}{2}+Ln2$

۱۱ـ انتگرال $I(x)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x dx$ برابر با کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) صفر ۲) $\frac{\pi}{2}-1$ ۳) $\pi-1$ ۴) $2\pi-1$

۱۲ـ سطح سایه زده شده کدام است؟ (سراسری ۷۷)



$y=x^2$

۱) ۱۸ ۲) ۱۶ ۳) $\frac{32}{3}$ ۴) $\frac{16}{3}$

۱۳ـ مقدار انتگرال $I=\int_0^1 (x+1)e^x dx$ برابر کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) e ۲) e+1 ۳) e-1 ۴) $\frac{1}{2}e$

۱۴ـ مقدار انتگرال $I=\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$ کدام است؟ (سراسری ۷۸)

۱) $\sqrt{3}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۴) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

۱۵ـ مقدار انتگرال $I=\int_0^1 \frac{t^2dt}{t+1}$ کدام است؟ (سراسری ۷۸)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $Ln2+\frac{1}{2}$ ۴) $Ln2-\frac{1}{2}$

۱۶ـ اگر $I(x)=\int \frac{e^{2x}-2}{e^x}dx$ باشد: مقدار $I(1)-I(0)$ کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) $e^2+e^{-1}-2$ ۲) $e^2-e^{-1}-2$ ۳) $e^2+e^{-1}-1$ ۴) $e+2e^{-1}-3$

۱۷ـ مقدار انتگرال $I=\int_{0}^{2} |1-x| dx$ کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۱۸ـ اگر $I(x)=\int e^{Ln\sqrt{2x+1}}dx$ باشد، $I(1)-I(0)$ کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) $Ln3$ ۲) $\sqrt{3}-\frac{1}{3}$ ۳) $e^{Ln\sqrt{3}}-1$ ۴) $\frac{1}{3}e^{Ln\sqrt{3}}-\frac{1}{3}$

۱۹ـ $\int_0^1 xe^{5x}\,dx$ برابر کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) $\frac{1}{25}(1+4e^5)$ ۲) $\frac{1}{25}(4-e^5)$ ۳) $\frac{1}{5}(4+e^5)$ ۴) $\frac{1}{5}(1-4e^5)$

۲۰- مقدار انتگرال $I=\int_{\frac{1}{4}}^{1} Ln(4x)\,dx$ برابر است با (سراسری ۸۰)

۱) $(Ln4)^2-\frac{1}{4}$ ۲) $2Ln2-\frac{1}{4}$ ۳) $Ln4-\frac{5}{4}$ ۴) $Ln4-\frac{3}{4}$

۲۱ـ حاصل $I=\int_0^1 \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}dx$ کدام است؟ (سراسری ۸۰)

۱) $1-\sqrt{2}$ ۲) ۱ ۳) $1+\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

۲۲ـ مقدار انتگرال $\int_0^1 \frac{xdx}{x+1}$ کدام است؟ (سراسری ۸۰)

۱) $1-Ln2$ ۲) $-Ln2$ ۳) $1+Ln2$ ۴) $Ln2-1$

۲۳ـ حاصل $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x+1}$ کدام است؟ (سراسری ۸۱)

۱) ۲ ۲) $Ln2$ ۳) $Ln3$ ۴) $+\infty$

۲۴ـ حاصل $\int_1^e Lnx\,dx$ کدام است؟ (سراسری ۸۱)

۱) ۱ ۲) e ۳) e- ۴) 2e+1

۲۵ـ سطح محصور بین منحنی تابع $y=6-x-x^2$ و محور x ها برابر کدام است؟ (سراسری ۸۱)

۱) $\frac{58}{3}$ ۲) $\frac{83}{6}$ ۳) $\frac{95}{6}$ ۴) $\frac{125}{6}$

۲۶ـ مقدار $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$ کدام است؟ (سراسری ۸۲)

۱) ۰ ۲) $Ln2$ ۳) $2Ln2$ ۴) ∞

۲۷ـ مقدار $\int_0^{Ln2} \sqrt{e^x-1}\,dx$ کدام است؟ (سراسری ۸۲)

۱) $2-\frac{\pi}{2}$ ۲) $2+\frac{\pi}{2}$ ۳) $2-\frac{\pi}{4}$ ۴) $2+\frac{\pi}{4}$

۲۸ـ مقدار انتگرال $I=\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}$ کدام است؟ (سراسری ۸۳)

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) $Ln\frac{2}{3}$ ۴) $Ln\frac{3}{2}$

۲۹ـ مقدار انتگرال $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x + x^3)dx$ برابر است با: (سراسری ۸۳)

۱) صفر ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi^4}{4}+\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{\pi^4}{4}-\frac{1}{4}$

رشته مدیریت

۱- مقدار انتگرال $\int_0^1 xe^x dx$ کدام است ؟ (سراسری ۷۴)

۱) e+2 ۲) e-1 ۳) e ۴) 1

۲- مقدار $I = \int \frac{x}{x+1} dx$ به ازای x=1 کدام است؟ (سراسری ۷۴)

۱) Ln2-1+C ۲) 1-ln2+C ۳) $\frac{1}{2}+C$ ۴) $-\frac{1}{2}+c$

۳- حاصل انتگرال $I = \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$ برابر است با: (سراسری ۷۴)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\ln\frac{3}{2}$ ۳) $2\ln\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

۴- مقدار $\int_0^\pi x\mathrm{Cos}x dx$ کدام است ؟ (سراسری ۷۵)

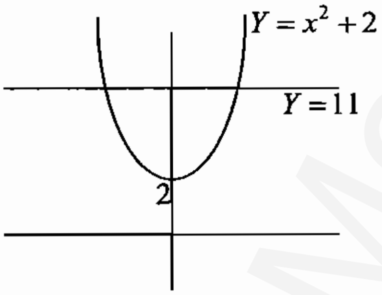
۱) -2 ۲) -1 ۳) 0 ۴) π

۵- مقدار انتگرال $I = \int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$ به ازای $C=2, x=8$ کدام است ؟ (سراسری ۷۵)

۱) 12 ۲) 14 ۳) 15 ۴) 16

۶- سطح محصور بین منحنی $y = x^2+2$ و خطوط $x=0, y=11$ وقع درناحیه اول کدام است ؟ (سراسری ۷۵)

۱) 48 ۲) 33 ۳) 18 ۴) 15



۷- مقدار انتگرال $I = \int_0^1 xe^{x^2} dx$ کدام است؟ (سراسری ۷۶)

۱) $\frac{1}{2}(e-1)$ ۲) $e-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}e$ ۴) e

۸- اگر $I(x) = \int \frac{2}{x^2-x}$ باشد با فرض اینکه ثابت انتگرال گیری C=0 باشد مقدار I(2) کدام است؟ (سراسری ۷۶)

۱) $2\ln 2$ ۲) $-\ln 4$ ۳) 1 ۴) e

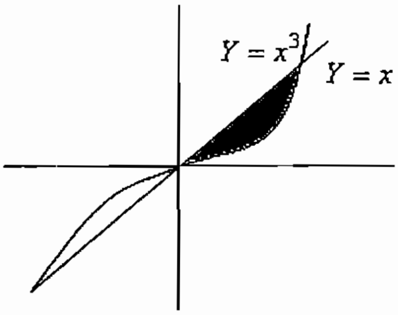
۹- مقدار انتگرال $I = \int_1^2 \ln x dx$ کدام است؟ (سراسری ۷۶) و (سراسری ۷۹)

۱) 2ln2-1 ۲) ln2-1 ۳) ln2 ۴) 2ln2

۱۰- مقدار انتگرال $I = \int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{4-x^2} dx$ برابر کدام است ؟ (سراسری ۷۷)

۱) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ ۴) $\frac{7}{3}$

۱۱- سطح سایه زده شده برابر کدام است؟ (سراسری ۷۷)



۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$

۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 1

۱۲- اگر $I(x) = \int xe^{2x}dx$ باشد مقدار $I(1) - I(0)$ کدام است؟ (سراسری)

۱) $\frac{1}{4}(e^2-1)$ ۲) $\frac{1}{4}(e^2+1)$ ۳) $\frac{1}{2}(e^2-1)$ ۴) $\frac{1}{2}(e^2+1)$

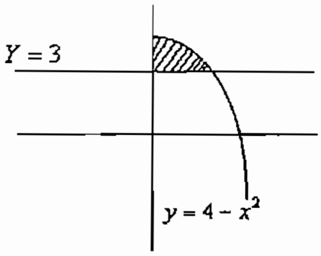
۱۳- مقدار انتگرال $I = \int_2^3 \frac{dt}{t^2-1}$ کدام است؟(سراسری ۷۸)

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}Ln\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}\text{Ln}2$

۱۴- اگر $I(x) = \int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$ باشد مقدار I(3)-I(0) کدام است ؟(سراسری ۷۸)

۱) ۲ ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) $\frac{-4}{3}$ ۴) -۲

۱۵) سطح سایه زده شده در شکل مقابل برابر کدام است؟(سراسری ۷۸)



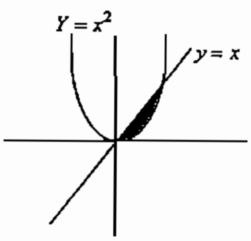
۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$

۳) ۱ ٤) ۲

۱۶- اگر $I = \int_0^1 \frac{xdx}{x^2+1}$ مقدار I برابر است با (سراسری ۷۹)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{\Pi}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}\text{Arctg}1$ ۴) $\frac{1}{2}\text{Ln}2$

۱۷- سطح محصور بین منحنی $y = x^2$ و خط y=x برابر است با (سراسری۷۹)



۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{4}$

۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۸- مقدار انتگرال $I = \int_0^1 \frac{3x+4}{x^2+3x+2}$ برابر است با : (سراسری ۸۰)

۱) $\text{Ln}\frac{9}{2}$ ۲) $2\text{Ln}\frac{7}{6}$ ۳) $\text{Ln}\frac{5}{2}$ ۴) $2\text{Ln}\frac{3}{2}$

۱۹- سطح محصور بین منحنی $y=\frac{\sqrt{x-1}}{x}$ و محور x ها در فاصله x=1 تا x=2 برابر است با .... (سراسری ۸۰)

۱) $\frac{\pi}{4}+1$ ۲) $2-\frac{\pi}{2}$ ۳) 2 ۴) 1

۲۰- مقدار انتگرال $I=\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}.dx$ برابر است : (سراسری ۸۰)

۱) $\frac{4-2\sqrt{2}}{3}$ ۲) $\frac{-4+2\sqrt{2}}{3}$ ۳) $\frac{1-\sqrt{2}}{3}$ ۴) $\frac{-1+\sqrt{2}}{3}$

۲۱- جواب انتگرال $\int \frac{\ln x}{x\ln x - x}dx$ به ازای C=0 , x=2 کدام است ؟ (سراسری ۸۱)

۱) ln2 ۲) ln2+2 ۳) ln2-2 ۴) ln(2ln2-2)

۲۲- مقدار $\int_e^{10} \log x dx$ کدام است؟ (سراسری ۸۱)

۱) $10-e\log e$ ۲) $10(1-\log e)$ ۳) $10-\log e$ ۴) $10\log e-1$

۲۳- سطح محصور بین منحنی $y=x^3$ و خط به معادله $y=x$ کدام است؟ (سراسری ۸۱)

۱) 1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۲۴- مقدار انتگرال $I=\int_3^4 \frac{x-3}{x-2}dx$ برابر است با...... (سراسری ۸۲)

۱) ۱ ۲) $1-\ln 2$ ۳) $1-\ln 3$ ۴) $2+\ln 2$

۲۵- اگر مساحت سطح زیر منحنی $y=\ln(x+1)$ از نقطه x=0 تا x=c برابر با c+2 شود مقدار c کدام است؟ (سراسری ۸۲)

۱) e-1 ۲) e-2 ۳) e^2-1 ۴) e^2-2

۲۶- اگر داشته باشیم $I(x)=\int \frac{1}{x^3}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx$ به ازای C=0 (ثابت انتگرال گیری) I(1) کدام است؟ (سراسری ۸۳)

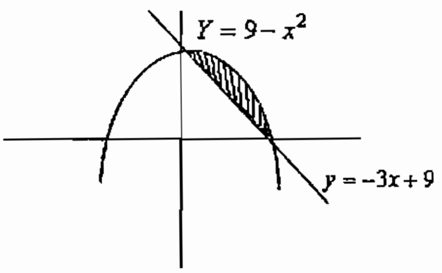
۱) $\frac{+4\sqrt{2}}{3}$ ۲) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ۳) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ۴) $\frac{-4\sqrt{2}}{3}$

۲۷- مقدار انتگرال $I=\int_1^2 x\ln x dx$ برابر است با .... (سراسری ۸۳)

۱) ln2-2 ۲) ln2-1 ۳) $2\ln 2-\frac{3}{4}$ ۴) $2\ln 2-\frac{1}{4}$

۲۸- مساحت S در شکل داده شده کدام است ؟ (سراسری ۸۳)

۱) 4 ۲) $\frac{14}{3}$ ۳) 4/5 ۴) $\frac{16}{3}$



۱ـ حاصل $I=\int_{-1}^{0}\sqrt{3x+4}\,dx$ کدام است؟ (سراسری ۷۴)

۱) $\frac{16}{9}$ ۲) $\frac{14}{3}$ ۳) $\frac{14}{9}$ ۴) $\frac{16}{3}$

۲ـ حاصل انتگرال $\int x^{11}Lnx\,dx$ در $x=1$ کدام است؟ (سراسری ۷۴)

۱) 1+C ۲) $\frac{1}{12}+C$ ۳) $-\frac{1}{12}+C$ ۴) $-\frac{1}{144}+C$

۳ـ اگر $f(x)=\int\frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2+2x+1}}dx$ به ازای $C=0$ مقدار $f(0)$ کدام است؟ (سراسری ۷۵)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{4}{3}$

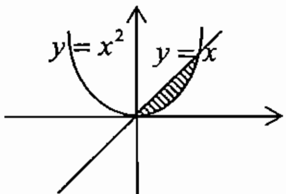
۴ـ انتگرال $I=\int xLnx\,dx$، در نقطه $x=1$، کدام است؟ (سراسر ۷۵)

۱) $-\frac{1}{2}+C$ ۲) $\frac{1}{2}+C$ ۳) $\frac{1}{4}+C$ ۴) $-\frac{1}{4}+C$

۵ـ مساحت محصور بین نمودارهای دو تابع $y=x^2, y=x$ کدام است؟ (سراسری ۷۵)

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{6}$

۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$



۶ـ اگر داشته باشیم $I(x)=\int\frac{dx}{4-x^2}$ و ثابت انتگرال گیری $C=0$، $I(1)$ کدام است؟ (سراسری ۷۶)

۱) ۰ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{4}Ln2$ ۴) $\frac{1}{4}Ln3$

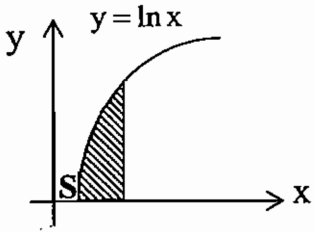
۷ـ اگر داشته باشیم $I(x)=\int x\cos x\,dx$ و ثابت انتگرال گیری C=0 باشد، $I(0)$ کدام است؟ (سراسری ۷۶)

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) $\sin 1$ ۴) $1-\sin 1$

۸ـ در شکل مقابل مساحت S کدام است؟ (سراسری ۷۶)

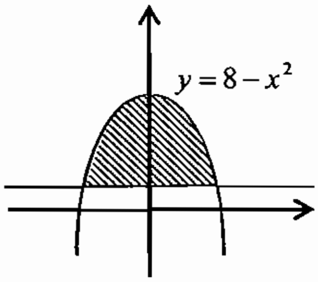
۱) $2Ln2-1$ ۲) $Ln2-1$

۳) $Ln2$ ۴) ۲



۹ـ مقدار انتگرال $I=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx$ کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) ۱　　۲) $\sqrt{3}$　　۳) 2　　۴) $2\sqrt{3}$



۱۰ـ سطح سایه زده شده برابر کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) $\frac{8}{3}$　　۲) $\frac{32}{3}$
۳) ۴　　۴) $\frac{16}{3}$

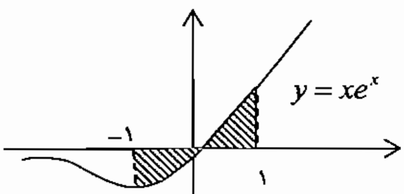
۱۱ـ اگر $I(t)=\int 3t^2 Lnt dt$ باشد مقدار $I(e)-I(1)$ برابر کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) $\frac{1}{3}(e^3+1)$　　۲) $\frac{1}{3}(2e^3-1)$　　۳) $\frac{1}{3}(2e^3+1)$　　۴) $\frac{1}{3}(e^3-1)$

۱۲ـ مقدار انتگرال $I=\int_0^1\frac{t}{t+1}dt$ کدام است؟ (سراسری ۷۸)

۱) $\frac{1}{2}Ln2-1$　　۲) $1-Ln2$　　۳) $\frac{3}{2}$　　۴) $\frac{2}{3}$

۱۳ـ سطح سایه زده در شکل مقابل کدام است؟ (سراسری ۷۸)



۱) e　　۲) $2-\frac{2}{e}$
۳) $e-1$　　۴) $e+1$

x = 4

۱۴ـ اگر $I(x)=\int\frac{xdx}{\sqrt{2x+1}}$ باشد، $I(1)-I(0)$ کدام است؟ (سراسری ۷۸)

۱) $-\sqrt{3}$　　۲) $-\frac{2}{3}$　　۳) $\frac{1}{3}$　　۴) $\frac{2}{3}$

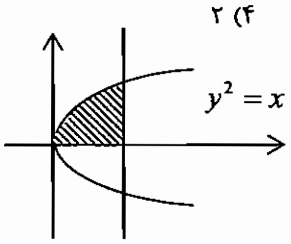
۱۵ـ مقدار انتگرال $I=\int_1^2\frac{2Lnx}{x}dx$ برابر کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) 2Ln2　　۲) $(Ln2)^2$　　۳) $Ln4$　　۴) $\frac{1}{2}Ln2$

۱۶ـ اگر $I(x)=\int e^{\sqrt{x}}dx$ آنگاه $I(1)-I(0)$ برابر کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) ۱　　۲) $2(e-1)$　　۳) $e-1$　　۴) ۲

۱۷ـ در شکل مقابل سطح سایه زده کدام است؟ (سراسری ۷۹)



۱) $\frac{16}{3}$　　۲) 4
۳) $\frac{8}{3}$　　۴) ۶

x = 4

۱۸ـ ضریب زاویه مماس بر منحنی تابع $y=f(x)$ درهر نقطه $M(x,y)$ واقع بر ان برابر جذر طول ان نقطه است اگر نمودار آن تابع از مبدا مختصات بگذرد از کدام نقطه دیگر می‌گذرد؟ (سراسری ۷۹)

۱) $(6,9)$ ۲) $(4,8)$ ۳) $(9,18)$ ۴) $(2,4)$

۱۹ـ انتگرال $\int \frac{dx}{x^3+x}$ کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) $Arctgx-\ln x+C$ ۲) $\frac{1}{2}\text{Ln}\frac{x^2}{x^2+1}+C$

۳) $\frac{1}{2}Ln\frac{x^2+1}{x}+C$ ۴) $\text{Arctg}\,x+\text{Ln}x+C$

۲۰ـ مقدار انتگرال $I=\int_0^1\frac{x}{1+x}$ برابر است با: (سراسری ۸۰)

۱) $Ln2$ ۲) $1-Ln2$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

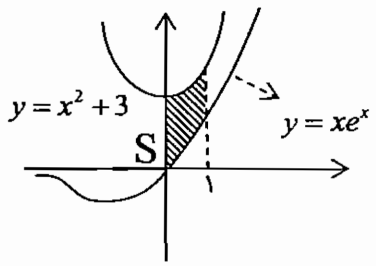
۲۱ـ مقدار انتگرال $I=\int_0^1 2xe^{2x}dx$ برابر است با: (سراسری ۸۰)

۱) $\frac{1}{2}(e^2+1)$ ۲) $\frac{1}{2}(e^2-1)$ ۳) $\frac{1}{2}e^2$ ۴) e^2

۲۲ـ در شکل مقابل مقدار مساحت S کدام است؟ (سراسری ۸۰)

۱) $2e$ ۲) $4e$

۳) $\frac{1}{3}+e$ ۴) $\frac{10}{3}$



۲۳ـ حاصل انتگرال $\int_0^1(3x+2)(2xdx)$ کدام است؟ (سراسری ۸۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۴ـ حاصل انتگرال $\int_0^2\frac{dx}{1+e^x}$ برابر است با: (سراسری ۸۱)

۱) $Ln(2e^2+2)$ ۲) $2-Ln(2e^2+2)$

۳) $2+Ln2-Ln(e^2+1)$ ۴) $2-Ln(e^2+1)$

۲۵ـ مقدار $\int_{-1}^0 x^2\sqrt{x+1}dx$ برابر است با: (سراسری۸۱)

۱) $\frac{8}{105}$ ۲) $-\frac{8}{105}$ ۳) $\frac{16}{105}$ ۴) $-\frac{16}{105}$

۲۶ـ سطح محصور بین دو منحنی $y=4-x^2\,,y=x^2-2x$ چقدر است؟ (سراسری ۸۱)

۱) ۵ ۲) ۹ ۳) $\frac{7}{3}$ ۴) $\frac{20}{3}$

۲۷ـ اگر $F''(x)=12x^2-12x\,,F'(0)=2\,,F(1)=2$ آنگاه تابع $F(x)$ برابر است با: (سراسری ۸۲)

۱) $F(x)=x^4-2x^3+2x+1$ ۲) $F(x)=x^4-x^3+2x^2$

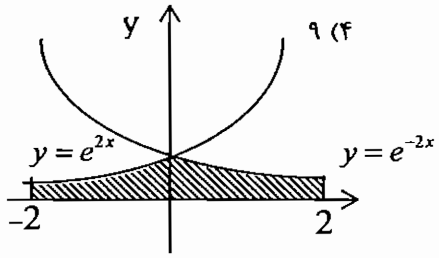
۳) $F(x)=x^4-3x^2+2x+2$ ۴) $F(x)=x^4+2x^3-4x+3$

۲۸ـ اگر $f(x)=\int_2^x \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}dt$, $g(x)=xe^x$ آنگاه $(\text{gof})'(\text{x})$ در نقطه $x=2$ کدام است؟ (سراسری ۸۲)

۱) ۳ ۲) ۳- ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

۲۹ـ مقدار انتگرال $\int_0^2 tf''(t)dt$ کدام است؟ با فرض آنکه $f'(2)=f(2)=f(0)=3$ (سراسری ۸۲)

۱) ۰ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۹



۳۰- مساحت S در شکل داده شده کدام است؟ (سراسری ۸۲)

۱) e^4-1 ۲) $1-e^{-4}$

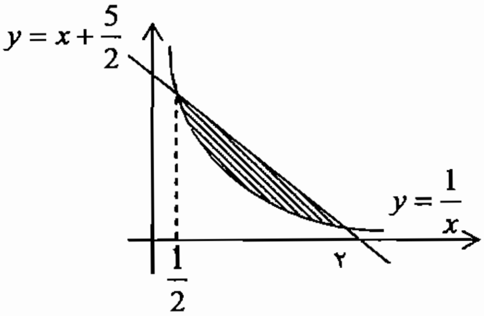
۳) e^4-e^{-4} ۴) $e^{-4}-e^4$

۳۱ـ اگر $I(x)=\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$، مقدار $I(2)-I(-1)$ کدام است؟ (سراسری ۸۳)

۱) $\frac{10}{3}$ ۲) 4 ۳) $\frac{16}{3}$ ۴) ۶

۳۲ـ مقدار انتگرال $I=\int_0^1 xe^{-x}dx$ ، کدام است؟ (سراسری ۸۳)

۱) e ۲) $e-1$ ۳) $\frac{2}{e}$ ۴) $1-\frac{2}{e}$



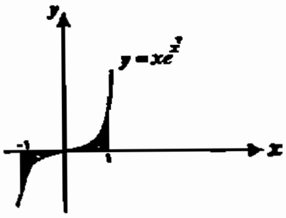
۳۳ـ مساحت S از شکل داده شده برابر است؟ (سراسری ۸۳)

۱) $\frac{3}{4}-Ln2$ ۲) $\frac{7}{8}-Ln2$

۳) $\frac{9}{8}-2Ln2$ ۴) $\frac{15}{8}-2Ln2$

۳۴ـ اگر $F(x)=\int_۲^x\sqrt{t^۲+۴}\,dt$ ، باشد مقدار $F(۲)$ چقدر است؟ (مدیریت ۸۴)

۱) ۰ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۲



۳۵ـ مساحت سایه زده در شکل مقابل کدام است؟ (مدیریت ۸۴)

۱) $e-۱$ ۲) $e-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{e}{۲}-۱$ ۴) $\frac{e-۱}{۲}$

۳۶ـ انتگرال $\int\frac{x+۴}{x(x+۲)}dx$ ، کدام است؟ (مدیریت ۸۴)

۱) $Ln\frac{x}{(x+۲)^۲}+c$ ۲) $Ln\frac{x+۲}{x^۲}+c$ ۳) $Ln\frac{(x+۲)^۲}{x}+c$ ۴) $Ln\frac{x^۲}{x+۲}+c$

۳۷ـ حاصل انتگرال $\int_e^{e^۲}\frac{dx}{xLnx}$ ، کدام است؟ (مدیریت ۸۴)

۱) $Ln۲$ ۲) $Ln\frac{۱}{۲}$ ۳) $۱+Ln۲$ ۴) $۱-Ln۲$

۳۸ـ اگر $F(x)=\int_0^{x}\frac{dt}{1+t^2}$ باشد مقدار مشتق $F(x)$ به ازای $x=1$ چقدر است؟ (حسابداری ۸۴)

۱) 0 ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۳۹ـ حاصل انتگرال $\int_1 \frac{xdt}{e^x}$ ، کدام است؟ (حسابداری ۸۴)

۱) $\frac{2}{e}$ ۲) $\frac{-2}{e}$ ۳) $e-\frac{1}{e}$ ۴) $\frac{1}{e}-e$

۴۰ـ جواب انتگرال $\int\frac{dx}{x(x^2+1)}$ ، کدام است؟ (حسابداری ۸۴)

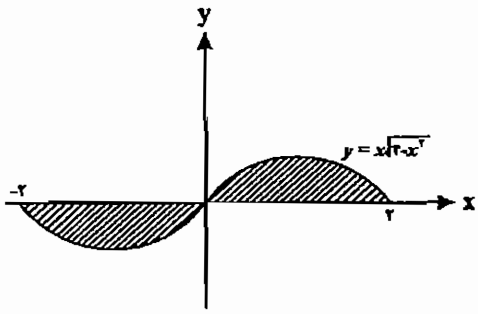
۱) $Ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+c$ ۲) $Ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)+c$

۳) $Ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+c$ ۴) $Ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}+c$

۴۱ـ مساحت سایه زده در شکل مقابل کدام است؟ (حسابداری ۸۴)

۱) $\frac{7}{3}$ ۲) $\frac{8}{3}$

۳) $\frac{14}{3}$ ۴) $\frac{16}{3}$



۴۲ـ مقدار انتگرال معین $I=\int_1^2 Lnxdx$ کدام است؟ (اقتصاد ۸۴)

۱) $2Ln2-1$ ۲) $2Ln2+1$ ۳) $Ln2-2$ ۴) $Ln2+2$

۴۳ـ اگر میل نهایی به مصرف $\frac{dc}{dx}=\frac{2}{\sqrt{x}}$ باشد، با فرض این که اگر درآمد $x=0$ باشد مصرف $c=10$ است، تابع پس انداز کدام است؟ (اقتصاد ۸۴)

۱) $S=x+4\sqrt{x}+10$ ۲) $S=x-2\sqrt{x}+10$

۳) $S=x-2\sqrt{x}-10$ ۴) $S=x-4\sqrt{x}-10$

۴۴ـ اگر داشته باشیم $I(x)=\int_x^1\sqrt{1+\frac{1}{x}}dx$ با فرض آنکه ثابت انتگرال گیری صفر باشد، مقدار $I(1)$ کدام است؟ (اقتصاد ۸۴)

۱) $\frac{-4\sqrt{2}}{3}$ ۲) $\frac{-2\sqrt{2}}{3}$ ۳) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

۴۵ـ مقدار انتگرال $\int_0^2\frac{x^2-2}{x+2}dx$ ، کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ۸۵)

۱) $Ln2-1$ ۲) $2Ln2-2$ ۳) $Ln4-1$ ۴) $2Ln4-2$

۴۶ـ اگر $\int Ln(1+x^2)dx=F(x)+C$ باشد آنگاه $F(1)$ کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ۸۵)

۱) $Ln2+\left(1+\frac{\pi}{4}\right)$ ۲) $Ln2+2\left(1+\frac{\pi}{4}\right)$ ۳) $Ln2-2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$ ۴) $Ln2+\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$

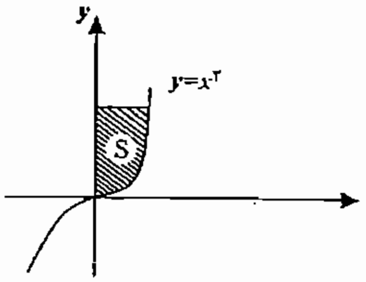
۴۷ـ در هر نقطه $M(x,y)$ واقع بر منحنی تابع $y=f(x)$ شیب مماس به صورت $\frac{dy}{dx}=(x+2)e^x$ است، اگر این

منحنی از نقطه $(0,1)$ عبور کند، مقدار تابع در نقطه $x = Ln2$ کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ۸۵)

۱) $Ln2+2$ ۲) $Ln2-2$ ۳) $2(Ln2+1)$ ۴) $2(Ln2-1)$

۴۸ـ مساحت ناحیه S در شکل زیر کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ۸۵)

۱) ۲۴ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۸



۴۹ـ اگر میل نهایی به مصرف $\frac{dc}{dx}=xe^{-x}$ که در آن x درآمد ملی و c مصرف ملی باشد در حالت x=0 مقدار c=10 است. تابع پس انداز ملی کدام است؟ (اقتصاد ۸۵)

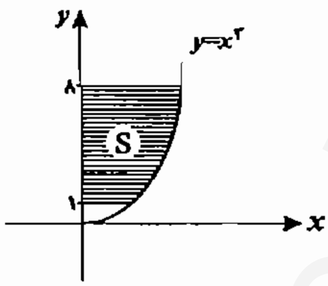
۱) $e^{-x}(x+1)-11$ ۲) $x+e^{-x}(x+1)-11$ ۳) $xe^{-x}+x-10$ ۴) $x+xe^{-x}+10$

۵۰ـ اگر تابع تقاضا به صورت $q=f(p)$ و کشش تقاضا نسبت به قیمت $\frac{Eq}{Ep}=-2$ باشد تابع تقاضا کدام است؟ (در حالت $p=5$ مقدار $q=2$ است)(اقتصاد ۸۵)

۱) $q=\frac{10}{p}$ ۲) $q=\frac{50}{p^2}$ ۳) $q=-2p^2+52$ ۴) $q=-2p+12$

۵۱ـ در شکل مقابل مساحت ناحیه S کدام است؟ (اقتصاد ۸۵)

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) $\frac{25}{4}$ ۴) $\frac{45}{4}$



۵۲ـ اگر $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+x}=LnA$ باشد عدد A کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ۸۶)

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

۵۳ـ مساحت ناحیه محدود به دو منحنی به معادلهٔ $y=x^2$ و $y=\sqrt{x}$ کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ۸۶)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{5}{6}$

۵۴ـ اگر x مقدار کالا و y قیمت یک واحد کالا و توابع عرضه و تقاضا به ترتیب $y=2x+3$ و $y=18-x^2$ باشند، مازاد مصرف کننده در نقطه تعادل کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ۸۶)

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۵۵ـ شیب خط مماس بر منحنی تابع $y=f(x)$ در هر نقطه $M(x,y)$ واقع بر آن دو برابر حاصل ضرب طول در عرض آن نقطه است. نقطه عطف این منحنی در کدام ناحیه محورهای مختصات است؟ (حسابداری و مدیریت ۸۶)

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) فاقد نقطه عطف

۵۶ـ اگر داشته باشیم $f(x)=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ ، مقدار $f(1)$ به ازای $c=0$ (ثابت انتگرال گیری) کدام است؟ (اقتصاد ۸۶)

۱) $Ln\sqrt{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $Ln\left(\sqrt{2}+1\right)$ ۴) $Ln\left(\sqrt{2}-1\right)$

۵۷ـ مقدار انتگرال $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}$ برابر است با: (اقتصاد ۸۶)

۱) $Ln\sqrt{2}$ ۲) $Ln\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{2}$

۵۸ـ در بازار رقابت کامل تابع تقاضا و عرضه در نقطه $xe=2$ دارای تعادل است. اگر $y=1+2x^2$ تابع عرضه باشد، میزان مازاد عرضه کننده کدام است؟ (اقتصاد ۸۶)

۱) $\frac{17}{3}$ ۲) $\frac{16}{3}$ ۳) $\frac{32}{3}$ ۴) $\frac{35}{3}$

۵۹ـ اگر میل نهایی به مصرف $\frac{dc}{dx}=Lnx$ باشد که در آن x درآمد ملی است، مقدار پس انداز کدام است؟ با فرض آن که اگر $x=1$ باشد مصرف $c=10$ است؟ (اقتصاد ۸۶)

۱) $2x-xLnx-11$ ۲) $xLnx-x+11$ ۳) $xLnx+9$ ۴) $2x-Lnx-9$

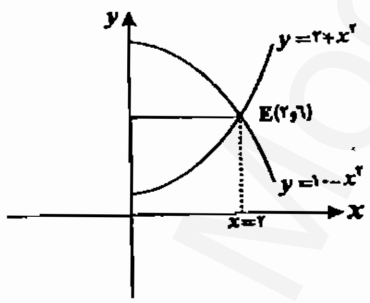
۶۰ـ تغییر در مصرف کالای خاص (C) هنگامی که درآمد (y) تغییر می کند به صورت $\frac{dc}{dy}=C+\alpha e^y$ است. تابع مصرف در حالت $y=0$ و $c=100$ کدام است؟ (اقتصاد ۸۶)

۱) $C=100+e^y ay$ ۲) $C=e^y\left(100+ay\right)$ ۳) $C=100e^y+ay$ ۴) $C=e^y\left(110+100ay\right)$

۶۱ـ حاصل انتگرال $\Gamma=\int^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{10}}$ چگونه است؟ (اقتصاد ۸۶)

۱) انتگرال ناپذیر ۲) واگرا ۳) همگرا به $\frac{1}{3}$ ۴) همگرا

۶۲ـ در شکل داده شده مازاد مصرف کننده کدام است؟ (اقتصاد ۸۶)



۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{10}{3}$ ۳) $\frac{16}{3}$ ۴) $\frac{32}{3}$

پاسخ تشریحی تستهای طبقه‌بندی شده فصل ششم

رشته اقتصاد

۱ـ گزینه ۳ صحیح است.

با استفاده از روش جزء جز داریم:

$$f(x)=\int x^9 Lnx dx$$

$$u=Lnx \Rightarrow du=\frac{dx}{x}$$

$$x^9 dx=dv \Rightarrow v=\frac{1}{10}x^{10}$$

$$f(x)=\frac{1}{10}x^{10}Lnx-\int\frac{1}{10}x^{10}\frac{dx}{x}=\frac{x^{10}Lnx}{10}-\frac{x^{10}}{100}+C$$

$$f(x)\Big|_{\substack{x=1\\C=0}}=\frac{1^{10}Ln1}{10}-\frac{1^{10}}{100}+0=-\frac{1}{100}$$

۲ـ گزینه ۱ صحیح است.

با استفاده از انتگرال جز به جز داریم:

$$I=\int e^{5x}\cos 4x dx$$

$$e^{5x}dx=dv \Rightarrow v=\frac{1}{5}e^{5x}$$

$$\cos 4x=u \Rightarrow -4x\sin 4x dx=du$$

$$I=\frac{1}{5}e^{5x}\cos 4xdx+\int\frac{4}{5}e^{5x}\sin 4xdx$$

$$I_1=\int e^{5x}\sin 4x dx$$

$$I_1=\frac{1}{5}e^{5x}\sin 4xdx+\int\frac{4}{5}e^{5x}\cos 4xdx$$

مقدار I_1 را در I قرار می‌دهیم:

$$I=\frac{1}{5}e^{5x}\cos 4x+\frac{4}{25}e^{5x}\sin 4x-\frac{16}{25}\int e^{5x}\cos 4xdx$$

$$\Rightarrow I+\frac{16}{25}I=\frac{41}{25}I=\frac{1}{5}e^{5x}\cos 4x+\frac{4}{25}e^{5x}\sin 4x$$

$$\Rightarrow I=\frac{25}{41}[\frac{1}{5}e^{5x}\cos 4x+\frac{4}{25}e^{5x}\sin 4x]$$

$$\Rightarrow \frac{5}{41}e^{5x}\cos 4x+\frac{4}{41}e^{5x}\sin 4x=\frac{4}{41}e^{5x}(\sin 4x+\frac{5}{4}\cos 4x)+C$$

۳ـ گزینه ۴ صحیح است.

با تغییر متغیر $1-x^2=u$ داریم: $xdx=-\frac{du}{2}$ بنابراین:

$$\int_{-1}^{0}\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_{-1}^{0}\frac{-\frac{du}{2}}{\sqrt{u}}=-\frac{1}{2}\left[\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]_{-1}^{0}=-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\Big|_{-1}^{0}=-1$$

۴ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$y=x^3 \qquad x=1\Rightarrow y=1^3=1$$

شیب خط مماس $=M=y'=3x^2\Rightarrow y'\Big|_{x=1}=3\times 1^2$

معادله خط مماس $=y-1=3(x-1)\Rightarrow y=3x-2$

$$\begin{cases}y=x^3\\ y=3x-2\end{cases}\Rightarrow x^3=3x-2\Rightarrow x^3-3x-2=0\Rightarrow x=1,x=-2$$

$$S=\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)dx=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\Big|_{-2}^{1}$$

$$=(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+2)-(\frac{1}{4}\times 16-\frac{3}{2}\times 4+2\times(-2))=\frac{27}{4}$$

۵ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$x^2+2x=u$$

$$(x+1)dx=\frac{du}{2}$$

$$\int\frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2+2x}}dx=\int\frac{\frac{du}{2}}{\sqrt[3]{u}}=\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{3}}du=\frac{1}{2}\times\frac{u^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+C$$

$$=\frac{3}{4}(x^2+2x)^{\frac{2}{3}}+C$$

$$I(x)\Big|_{\substack{x=-1\\ C=0}}=\frac{3}{4}((-1)^2+2(-1))^{\frac{2}{3}}+0=\frac{3}{4}(-1)^{\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}$$

۶ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+e^{-x}}=\int_{-\infty}^{0}\frac{e^x}{e^x}\cdot\frac{dx}{1+e^{-x}}=\int_{-\infty}^{0}\frac{e^x}{e^x+1}dx$$

$$=Ln(e^x+1)\Big|_{-\infty}^{0}=Ln(e^0+1)-Ln(e^{-\infty}+1)=Ln2-Ln1=Ln2$$

۷ـ گزینه ۴ صحیح است.

ابتدا نقاط تقاطع دو منحنی را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases}y=2-x^2\\ y=-x\end{cases}\Rightarrow -x=2-x^2\Rightarrow x^2-x-2=0\Rightarrow x=-1,x=2$$

$$S=\int_{-1}^{2}[2-x^2-(-x)]dx=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx=-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\Big|_{-1}^{2}$$

$$\Rightarrow (-\frac{8}{3}+2+4)-(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2)=\frac{9}{2}$$

۸ـ گزینه ۴ صحیح است.

با توجه به رابطه‌ی:

$$\int\frac{dx}{a^2.x^2}=\frac{1}{2a}Ln\left|\frac{a_2+x}{a-x}\right|+C \qquad (x^2<a^2)$$

$$\int_0^3\frac{dx}{25-x^2}=\frac{1}{2\times5}Ln\left|\frac{5+x}{5-x}\right|=\frac{1}{10}\left[Ln\frac{5+3}{5-3}-Ln1\right]=\frac{1}{5}Ln2$$

۹ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$y=8-x^2$$

$$8-x^2=x^2\Rightarrow x=\pm2 \quad \text{نقاط تقاطع}$$

$$y=x^2$$

$$S=\frac{1}{2}\int_0^2(8-x^2-x^2)dx=\frac{1}{2}\left(8x-\frac{2x^3}{3}\right)_0^2=\frac{1}{2}(16-\frac{16}{3})=\frac{1}{2}\times\frac{32}{3}=\frac{16}{3}$$

۱۰ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$I(t)=\int\frac{t^2}{t+1}dt=\int(t-\frac{t}{t+1})dt=\int(t-\frac{t+1-1}{t+1})dt$$

$$\int tdt-\int dt+\int\frac{dt}{t+1}=\frac{t^2}{2}-t+Ln|t+1|+C$$

$$I(1)=\frac{1}{2}-1+Ln2=-\frac{1}{2}+Ln2$$

$$I(0)=0-0+Ln1=0$$

$$I(1)-I(0)=-\frac{1}{2}+Ln2-0=-\frac{1}{2}+Ln2$$

۱۱ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$I(x)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\sin^2 xdx$$

$$f(x)=x\sin^2 x\xrightarrow{x\to-x}f(-x)=-x\sin^2(-x)=-x\sin^2 x=-f(x)$$

پس تابع فرد است. در نتیجه حاصل انتگرال برابر صفر می‌شود.

۱۲ـ گزینه ۳ صحیح است. ابتدا نقاط تقاطع دو منحنی را بدست می‌آوریم.

$$\begin{cases}y=x^2\\y=4x\end{cases}\Rightarrow x^2=4x\Rightarrow x=4,x=0$$

$$S=\int_0^4(4x-x^2)dx=2x^2-\frac{1}{3}x^3\Big]_0^4=(32-\frac{64}{3})-(0-0)=\frac{32}{3}$$

۱۳ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$I=\int_0^1(x+1)e^xdx=\int_0^1(xe^x+e^x)dx$$

با استفاده از روش جز به جز داریم:

$x = u \Rightarrow dx = du$

$e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x$

$$I_1 = \int_0^1 xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x \Big|_0^1$$

$$(1e^1 - e^1) - (0e^0 - e^0) = 1$$

$$I_2 = \int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

$$I = I_1 + I_2 = 1 + e - 1 = e$$

۱۴ـ گزینه ۱ صحیح است.

با تغییر متغیر $x^2 + 2x = u$ داریم $(x+1)\dfrac{dx}{2}$ پس:

$$I = \int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} dx = \int \frac{\frac{du}{2}}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times (x^2 + x)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^1 = (1^2 + 2)^{\frac{1}{2}} - (0^2 + 0 \times 2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

۱۵ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$I = \int_0^1 \frac{t^2}{t+1} dt = \int_0^1 \frac{t^2 - 1 + 1}{t+1} dt = \int_0^1 \left(\frac{t^2 - 1}{t+1} + \frac{1}{t+1}\right) dt$$

$$= \int_0^1 \left(t - 1 + \frac{1}{t+1}\right) dt \Rightarrow \frac{t^2}{2} - t + Ln|t+1| \Big|_0^1 =$$

$$\left(\frac{1}{2} - 1 + Ln2\right) - (0 - 0 + Ln1) = -\frac{1}{2} + Ln2$$

۱۶ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$I(x) = \int \frac{e^{2x} - 2}{e^x} dx = \int \left(\frac{e^{2x}}{e^x} - \frac{2}{e^x}\right) dx = \int (e^x - 2e^{-x}) dx$$

$$= e^x + 2e^{-x} = I(1) - I(0) = (e^1 + 2e^{-1}) - (e^0 + 2e^{-0}) = e + 2e^{-1} - (1+2) = e + 2e^{-1} - 3$$

۱۷ـ گزینه ۱ صحیح است.

$1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$

X	0	1	2
1-x	+		-

$$|1-x| = \begin{cases} 1-x & 0<x<1 \\ x-1 & 1<x<2 \end{cases}$$

$$\int_0^2 |1-x| dx = \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^2 (x-1) dx = \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^2$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + (2-2) - \frac{1}{2} + 1 = 1$$

۱۸ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$e^{Ln\sqrt{2x+1}}=\sqrt{2x+1}$$

$$I(x)=\int e^{Ln\sqrt{2x+1}}dx=\int\sqrt{2x+1}dx=\int(2x+1)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{2}\left[\frac{(2x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]$$

$$\Rightarrow I(x)=\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}$$

$$I(1)-I(0)=\frac{1}{3}(3^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}})=\frac{1}{3}(3\sqrt{3}-1)=\sqrt{3}-\frac{1}{3}$$

۱۹ـ گزینه ۱ صحیح است.

با استفاده از روش جز به جز داریم:

$$\int_0^1 xe^{5x}dx$$

$$x=u\Rightarrow dx=du$$

$$e^{5x}dx=dv\Rightarrow v=\frac{1}{5}e^{5x}$$

$$\int_0^1 xe^{5x}=\frac{1}{5}xe^{5x}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{1}{5}e^{5x}dx=\frac{1}{5}xe^{5x}\Big|_0^1-\frac{1}{25}e^{5x}\Big]_0^1$$

$$\Rightarrow\frac{1}{5}e^5-\frac{1}{25}e^5+\frac{1}{25}=\frac{4e^5}{25}+\frac{1}{25}=\frac{1}{25}(4e^5+1)$$

۲۰ـ گزینه ۴ صحیح است.

با استفاده از انتگرال گیری به روش جز به جز داریم:

$$I=\int_{\frac{1}{3}}^{1}Ln(4x)dx$$

$$u=Ln(4x)\Rightarrow du=\frac{dx}{x}$$

$$dv=dx\Rightarrow v=x$$

$$\mathrm{I}=\mathrm{xLn(4x)}-\int\mathrm{dx}=\mathrm{xLn(4x)}-\mathrm{x}+\mathrm{C}$$

$$\mathrm{I}=\int_{\frac{1}{4}}^{1}\mathrm{Ln(4x)dx}=\mathrm{xLn(4x)}-\mathrm{x}\Big|_{\frac{1}{4}}^{1}=(\mathrm{Ln4}-1)-(\frac{1}{4}\mathrm{Ln1}-\frac{1}{4})$$

$$=Ln4-\frac{3}{4}$$

۲۱ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$I=\int_0^1\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=\int_0^1(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1)dx=\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}+\int_0^1 dx$$

$$x^2+1=u$$

$$2xdx=du$$

$$xdx=\frac{du}{2}$$

$$\int\frac{\frac{du}{2}}{u^{\frac{1}{2}}}+x=\frac{1}{2}\left[\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]+x\Bigg]_0^1=(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^1+x\Big|_0^1$$

$$\Rightarrow\left[(1+1)^{\frac{1}{2}}-(0+1)^{\frac{1}{2}}\right]+(1-0)=\sqrt{2}-1+1=\sqrt{2}$$

۲۲ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$\int_0^1\frac{xdx}{x+1}=\int_0^1(\frac{x+1-1}{x+1})dx=\int_0^1(\frac{x+1}{x+1}-\frac{1}{x+1})dx=$$

$$\int_0^1(1-\frac{1}{x+1})dx\Rightarrow x-Ln|x+1|\Big|_0^1=(1-Ln2)-(0-Ln1)=1-Ln2$$

۲۳ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{e^x+1}=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{e^{-x}}\times\frac{dx}{e^x+1}=\int\frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}}$$

$$1+e^{-x}=u\Rightarrow e^{-x}dx=-du$$

$$=-\int\frac{du}{u}=-Ln|u|=-Ln|1+e^{-x}|\Big|_0^{+\infty}=$$

$$-(Ln|1+e^{-\infty}|-Ln|1-e^{-0}|)=-Ln1+Ln2=Ln2$$

۲۴ـ گزینه ۱ صحیح است.

با استفاده از انتگرال‌گیری به روش جز به جز داریم.

$$\int_1^e Lnxdx$$

$$Lnx=u\Rightarrow\frac{dx}{x}=du$$

$$dx=dv\Rightarrow v=x$$

$$xLnx\Big|_1^e-\int_1^e x\frac{dx}{x}=xLnx\Big]_1^e-x\Big]_1^e=e-0-e+1=1$$

۲۵ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$6-x-x^2=0\Rightarrow-(x^2+x-6)=0\Rightarrow x=2,-3$$

$$\int_{-3}^{2}(6-x-x^2)dx=6x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\Bigg]_{-3}^{2}=(12-2-\frac{8}{3})-(-18-\frac{9}{2}+\frac{27}{3})$$

$$\Rightarrow(10-\frac{8}{3})-(-9-\frac{9}{2})=\frac{125}{6}$$

۲۶ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$1+\sqrt{x}=u$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x}}=2du:\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}=\int_0^1\frac{2du}{u}=2Ln|u|\Big|_0^1$$

$$= 2Ln\left|1+\sqrt{x}\right|_0^1 = (2Ln2) - (2Ln1) = 2Ln2$$

۲۷ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$\int_0^{Ln2} \sqrt{e^x - 1}\,dx$$

$$e^x - 1 = u \Rightarrow e^x = u + 1$$

$$e^x dx = du \Rightarrow (u+1)dx = du \Rightarrow \frac{du}{u+1} = dx$$

$$\int \frac{\sqrt{u}}{u+1} du \xrightarrow{\sqrt{u}=v \Rightarrow u=v^2 \Rightarrow du=2vdv} \int \frac{2v^2 dv}{v^2+1} = 2\int \frac{v^2+1-1}{v^2+1} dv$$

$$\Rightarrow 2\left[\int \left(\frac{v^2+1}{v^2+1} - \frac{1}{v^2+1}\right) dv = 2\int \left(1 - \frac{1}{v^2+1}\right) dv = 2v - 2Arctgv\right.$$

$$\xrightarrow{v=\sqrt{u}} 2\sqrt{u} - 2Arctg\sqrt{u} \xrightarrow{u=e^x-1} 2\sqrt{e^x-1} - 2Arctg\sqrt{e-1}\Big|_0^{\ln 2}$$

$$2\left[\left(\sqrt{e^{Ln2}-1} - Arctg\sqrt{e^{Ln2}-1}\right) - \left(\sqrt{e^0-1} - Arctg\sqrt{e^0-1}\right)\right]$$

$$= 2\left[(1 - Arctg1) - (0-0)\right] = 2(1 - \frac{\pi}{4}) = 2 - \frac{\pi}{2}$$

۲۸ـ گزینه ۴ صحیح است.

می‌دانیم که:

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} Ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$I = \int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}$$

$$\sqrt{x} = u \Rightarrow \frac{dx}{2\sqrt{x}} = du \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2du$$

$$I = \int_4^9 \frac{2du}{u^2-1} = \frac{2}{2} Ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| = Ln\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right|\Bigg|_4^9 = Ln\frac{3-1}{3+1} - Ln\frac{2-1}{2+1}$$

$$= Ln\frac{1}{2} - Ln\frac{1}{3} = -Ln2 + Ln3 = Ln\frac{3}{2}$$

۲۹ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$f(x) = \sin^3 x + x^3$$

$$f(-x) = \sin^3(-x) + (-x)^3 = -\sin^3 x - x^3 = -(\sin^3 x + x^3) = -f(x))$$

پس $f(x)$ یک تابع فرد است. در نتیجه $\int_{-a}^{a} f(x)dx$ ، برابر صفر است پس:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x + x^3) dx = 0$$

رشته مدیریت

۱ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$\int_0^1 xe^x dx = xe^x - \int_0^1 e^x dx = (xe^x - e^x)]_0^1 = (e-e)-(0-1)=1$$

$$e^x dx = du, x = v \Rightarrow u = e^x, dv = dx$$

۲ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$I = \int \frac{x}{x+1}dx = \int \frac{x+1-1}{x+1}dx = \int (\frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1})dx = \int dx - \int \frac{1}{x+1}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = x - \ln|x+1| + c, x = 1 \Rightarrow I = 1 - \ln|1+1| + c = 1 - \ln 2 + c$$

۳ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$\sqrt{x}+1 = u \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = du$$

$$I = \int_1^4 \frac{2dx}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = 2\int_1^4 \frac{du}{u} = (2\mathrm{Ln}|u|]_1^4 = (2\ln|\sqrt{x}+1|)]_1^4 = 2\ln 3 - 2\ln 2 = 2\ln\frac{3}{2}$$

۴ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$\int_0^\pi x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = (x\sin x + \cos x)]_0^\pi = (-1)-(0+1) = -2$$

$$\cos x dx = du \Rightarrow u = \sin x, x = v \Rightarrow dx = dv$$

۵ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$I = \int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}} = \int \frac{(u-1)du}{\sqrt{u}} = \int (\frac{u}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u}})du = \int \sqrt{u}du - \int u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}} + c \Rightarrow$$

$$x+1 = u \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ x = u-1 \end{cases} \qquad x = 8 \Rightarrow u = 9 \Rightarrow I = 18 - 6 + 2 = 14$$

۶ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$\begin{cases} y = x^2+2 \\ y = 11 \end{cases} \Rightarrow 11 = x^2+2 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \int_0^3 [11-(x^2+2)]dx = \int_0^3 (9-x^2)dx = 9x - \frac{1}{3}x^3]_0^3 = (27-9)-0 = 18$$

۷ـ؟

۸ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$I(x) = \int \frac{2}{x^2-x}dx = 2\int \frac{1}{x(x-1)}dx = 2\int (\frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1})dx = 2[-\ln|x| + \ln|x-1|] = 2\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$$

$$\Rightarrow I(2) = 2\ln\left|\frac{1}{2}\right| = 2\ln 2^{-1} = -\ln 2^2 = -\ln 4$$

۹ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$I = \int_1^2 \ln x dx = x\ln x - \int dx = (x\ln x - x)]_1^2 = (2\ln 2 - 2) - (0-1) = 2\ln 2 - 1$$

$$\ln x = v \Rightarrow dv = \frac{1}{x}dx, dx = du \Rightarrow u = x$$

۱۰ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$I=\int_0^{\sqrt3} x\sqrt{4-x^2}dx=\frac{-1}{2}\int_0^{\sqrt3}-2x\sqrt{4-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt3}\sqrt{u}du=-\frac{1}{2}(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}})]_0^{\sqrt3}$$

$$4-x^2=u\Rightarrow du=-2xdx$$

$$\Rightarrow I=-\frac{1}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}]_0^{\sqrt3}=(-\frac{1}{3})-(-\frac{8}{3})=\frac{7}{3}$$

۱۱ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$x^3=x\Rightarrow x^2(x-1)=0\Rightarrow x=0,x=1$$

$$S=\int_0^1(x-x^3)dx=(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4})]_0^1=(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})-0=\frac{1}{4}$$

۱۲ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$I(x)=\int xe^{2x}dx=\frac{1}{2}xe^{2x}-\int\frac{1}{2}e^{2x}dx=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}\Rightarrow I(1)-I(0)=(\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}e^2)-(0-\frac{1}{4})=$$

$$\frac{1}{4}(e^2+1)\quad x=v\Rightarrow dv=dx,e^{2x}dx=du\Rightarrow u=\frac{1}{2}e^{2x}$$

۱۳ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$I=\int_2^3\frac{dt}{(t+1)(t-1)}=\int_2^3(\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t-1})dt=-\frac{1}{2}\int_2^3\frac{dt}{t+1}+\frac{1}{2}\int_2^3\frac{dt}{t-1}=+\frac{1}{2}(-Ln|t+1|+Ln|t-1|)\Big]_2^3$$

$$A(t-1)+B(t+1)=1\Rightarrow\begin{cases}A+B=0 & B=\frac{1}{2}\Rightarrow A=-\frac{1}{2}\\ B-A=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}Ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Big]_2^3=\frac{1}{2}\left(Ln\frac{2}{4}-Ln\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}Ln\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}Ln\frac{3}{2}$$

۱۴ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$I(x)=\int\frac{xdx}{\sqrt{x+1}}=\int\frac{(u-1)du}{\sqrt u}=\int\sqrt u du-\int u^{\frac{-1}{2}}du=\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}-2u^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-2(x+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$x+1=u\Rightarrow dx=du,x=u-1$$

$$\Rightarrow I(3)-I(0)=\left(\frac{2}{3}\times8-4\right)-\left(\frac{2}{3}-2\right)=\frac{8}{3}$$

۱۵ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$4-x^2=3\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm1$$

$$S=\int_0^1(4-x^2-3)dx=\int_0^1(1-x^2)dx=\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big]_0^1=\left(1-\frac{1}{3}\right)-0=\frac{2}{3}$$

۱۶ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$x^2+1=u\Rightarrow du=2xdx$$

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2xdx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{du}{u}=\frac{1}{2}Ln|u|\Big]_0^1=\frac{1}{2}Ln|x^2+1|\Big]_0^1=\left(\frac{1}{2}Ln2-\frac{1}{2}Ln1\right)=\frac{1}{2}Ln2$$

۱۷ـ گزینه ۱ صحیح است.

$x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow \quad x = 0, x = 1$

$$\int_0^1 (x - x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big]_0^1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - 0 = \frac{1}{6}$$

۱۸ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$I = \int_0^1 \frac{3x+4}{x^2+3x+2}dx = \int_0^1 \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}\right)dx = \int_0^1 \frac{dx}{x+1} + 2\int_0^1 \frac{dx}{x+2} = (\ln|x+1| + \ln(x+2)^2]_0^1$$

$$\Rightarrow I = (\ln 2 + \ln 9) - (\ln 1 + \ln 4) = \ln\frac{2\times 9}{4} = \ln\frac{9}{2}$$

$$A(x+2) + B(x+1) = 3x+4 \Rightarrow \begin{cases} A+B=3 \\ 2A+B=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A=1 \\ B=2 \end{matrix}$$

۱۹ـ گزینه ۲ صحیح است.

ابتدا نقاط برخورد منحنی بامحور x ها: $\frac{\sqrt{x-1}}{x} = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$$\Rightarrow S = \int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx = \int \frac{2u^2du}{u^2+1} = 2\int\left(\frac{u^2+1}{u^2+1} - \frac{1}{u^2+1}\right)du = 2\int du - 2\int \frac{1}{(u^2+1)}du \Rightarrow$$

$\sqrt{x-1} = u \Rightarrow x = u^2 + 1, dx = 2udu$

$$S = 2u - 2\text{ArcTan}u] = 2(\sqrt{x-1} - \text{ArcTan}\sqrt{x-1})]_1^2 = [2 - 2\text{ArcTan}1] - [2\text{ArcTan}0] = 2 - \frac{\pi}{2}$$

یادآوری: $\int \frac{1}{u^2+1}du = \text{ArcTan}(u) + C$

۲۰ـ گزینه ۱ صحیح است.

$x + 1 = u \Rightarrow dx = du, x = u - 1$

$$I = \int \frac{u-1}{\sqrt{u}}du = \int \sqrt{u}du - \int u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}}]_0^1 = \left(\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - 2(x+1)^{\frac{1}{2}}\right)]_0^1 = \frac{+4-2\sqrt{2}}{3}$$

۲۱ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$\int \frac{\ln x dx}{x\ln x - x} = \int \frac{\ln x dx}{x(\ln x - 1)} = \int \frac{u}{u-1}du = \int \left(1 + \frac{1}{u-1}\right)du = u + \ln|u-1| = \ln x + \ln(\ln x - 1)$$

$\Rightarrow \ln x = u \Rightarrow \frac{1}{x}dx = du$

$x = 2 \Rightarrow \ln 2 + \ln(\ln 2 - 1) = \ln[2(\ln 2 - 1)] = \ln[2\ln 2 - 2]$

۲۲ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$\int_e^{10} \log x dx = \int \frac{\ln x dx}{\ln 10} = \frac{1}{\text{Ln}10}[x(\ln x - 1)]_e^{10} = \left[\frac{10}{\ln 10}(\ln 10 - 1)\right] - [0] =$$

$$10 - \frac{10}{\ln 10} = 10 - 10\log^e = 10(1 - \log e)$$

یادآوری: در لگاریتم ها دو رابطه مهم وجود دارد:

$$1)\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b} \quad , \quad 2)\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$$

۲۳ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$x=x^3 \Rightarrow x-x^3=0 \Rightarrow x(1-x^2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S=\left|\int_{-1}^{0}(x-x^3)_{dx}fx\right|+\left|\int_{0}^{1}(x-x^3)dx\right|=\left|\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)\Big]_{-1}^{0}\right|+\left|\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)\Big]_{0}^{1}\right|=\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right|+\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

۲۴- گزینه ۲ صحیح است.

$$I=\int_3^4\frac{x-3}{x-2}dx=\int_3^4\frac{(x-2)-1}{x-2}dx=\int_3^4\left(1-\frac{1}{x-2}\right)dx=\int_3^4 dx-\int_3^4\frac{dx}{x-2}=\left(x-\ln|x-2|\right)\Big]_3^4 \Rightarrow$$
$$I=(4-\ln 2)-(3-\ln 1)=1-\ln 2$$

۲۵ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$\int_0^c \ln(x+1)dx=(x+1)(\ln(x+1)-1)\Big]_0^c=[(c+1)[Ln(c+1)-1)-(-1)\Rightarrow$$
$$(c+1)\ln(c+1)-c=c+2\Rightarrow(c+1)\ln(c+1)=2(c+1)\Rightarrow\ln(c+1)=2=\ln e^2$$
$$\Rightarrow c+1=e^2\Rightarrow c=e^2-1$$

۲۶ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$I(x)=\int\frac{1}{x^3}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx=-\frac{1}{2}\int-\frac{2}{x^3}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx=-\frac{1}{2}\int\sqrt{u}du=-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}(u)^{\frac{3}{2}}\right)\Rightarrow$$
$$1+\frac{1}{x^2}=u\Rightarrow du=\frac{-2}{x^3}dx$$
$$\Rightarrow I(x)=-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}\Rightarrow I(1)=-\frac{1}{3}(2)^{\frac{3}{2}}=\frac{-2\sqrt{2}}{3}$$

۲۷ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$I=\int_1^2 x\ln x dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x}{2}dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}\Big]_1^2=(2\ln 2-1)-\left(-\frac{1}{4}\right)=2\ln 2-\frac{3}{4}$$
$$xdx=dv\Rightarrow v=\frac{x^2}{2},\ln x=u\Rightarrow dx=\frac{1}{x}dx$$

۲۸ ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$9-x^2=-3x+9\Rightarrow x^2-3x=0\left\langle\begin{matrix}x=0\\x=3\end{matrix}\right.$$
$$S=\int_0^3(9-x^2)-(-3x+9)]dx=\int_0^3-x^2+3x=-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\Big]_0^3=\left(-9+\frac{27}{2}\right)-(0)=\frac{9}{2}=4/5$$

رشته حسابداری

۱ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$3x+4=u$$
$$3dx=du$$
$$\int_{-1}^{0}\sqrt{3x+4}dx=\int_{-1}^{0}\frac{\sqrt{u}}{3}du=\frac{1}{3}\int_{-1}^{0}u^{\frac{1}{2}}du=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{2}{9}(3x+4)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{0}=\frac{2}{9}\times 8-\frac{2}{9}\times 1=\frac{14}{9}$$

۲ـ گزینه ۴ صحیح است.

با روش انتگرال‌گیری به روش جز به جز داریم:

$$x^{11}dx=dv\Rightarrow v=\frac{1}{12}x^{12}$$

$$Lnx=u\Rightarrow \frac{1}{x}dx=du$$

$$\int x^{11}Lnxdx=\frac{x^{12}}{12}Lnx-\int\frac{x^{12}}{12}\frac{dx}{x}=\frac{x^{12}}{12}Lnx-\frac{1}{144}x^{12}+C$$

$$I(1)=-\frac{1}{144}+C$$

۳ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$x^2+2x+1=u$$

$$(2x+2)dx=du\Rightarrow (x+1)dx=\frac{du}{2}$$

$$\int\frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2+2x+1}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt[3]{u}}=\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{3}}du=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}u^{\frac{2}{3}}+C$$

$$=\frac{3}{4}(x^2+2x+1)^{\frac{2}{3}}\xrightarrow{x=0}\frac{3}{4}(1)^{\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}$$

۴ـ گزینه ۴ صحیح است.

با روش انتگرال گیری به روش جز به جز داریم:

$$Lnx=u\Rightarrow\frac{dx}{x}=du$$

$$xdx=dv\Rightarrow v=\frac{x^2}{2}$$

$$\int xLnxdx=\frac{x^2}{2}Lnx-\int\frac{x^2dx}{2x}=\frac{x^2}{2}Lnx-\frac{x^2}{4}+C$$

$$I(1)=(\frac{1}{2}\times 0)-\frac{1}{4}+C=-\frac{1}{4}+C$$

۵ـ گزینه ۲ صحیح است.

ابتدا نقاط برخورد منحنی دو تابع را بدست می‌آوریم.

$$\begin{cases}y=x\\ y=x^2\end{cases}\Rightarrow x=x^2\Rightarrow x^2-x=0\Rightarrow x(x-1)=0\Rightarrow x=0,x=1$$

$$S=\int_0^1(x-x^2)dx=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

۶ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$I(x)=\int\frac{dx}{4-x^2}=\frac{1}{4}\int\frac{4dx}{(2-x)(2+x)}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{(2-x)}+\frac{1}{(2+x)}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\left(-Ln|2-x|+Ln|2+x|\right)\Rightarrow I(1)=\frac{1}{4}[-Ln1+Ln3]=\frac{Ln3}{4}$$

۷ـ گزینه ۱ صحیح است.

$\cos x\,dx = dv \Rightarrow v = \sin x$

$x = u \Rightarrow dx = du$

$I(x) = \int x\cos dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x$

$I(0) = 0 + \cos 0 = 0 + 1 = 1$

۸ـ گزینه ۱ صحیح است.

$\begin{cases} y = Lnx \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow Lnx = 0 \Rightarrow x = 1$

$Lnx = u \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x}$

$dx = dv \Rightarrow x = v$

$$\int_1^2 Lnx\,dx = xLnx\Big]_1^2 - \int_1^2 dx$$

$\Rightarrow xLnx\Big|_1^2 - x\Big|_1^2 = (2Ln2 - Ln1) - (2-1) = 2Ln2 - 1$

۹ـ گزینه ۱ صحیح است.

$4 - x^2 = u$

$xdx = \dfrac{-du}{2}$

$I = \int_0^{\sqrt{3}} \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int_0^{\sqrt{3}} \dfrac{-\frac{du}{2}}{\sqrt{u}} = -\dfrac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} u^{-\frac{1}{2}}du = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right) + C$

$-\sqrt{4-x^2}\Big|_0^{\sqrt{3}} = -\sqrt{4-3} + \sqrt{4} = -1 + 2 = 1$

۱۰ـ گزینه ۲ صحیح است.

$\begin{cases} y = 8 - x^2 \\ y = 4 \end{cases} 8 - x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$S = \int_{-2}^{2} (8 - x^2 - 4)dx = \int_{-2}^{2} (-x^2 + 4)dx = -\dfrac{x^3}{3} + 4x\Big|_{-2}^{2}$

$= (-\dfrac{8}{3} + 8) - (\dfrac{8}{3} - 8) = \dfrac{32}{3}$

۱۱ـ گزینه ۳ صحیح است.

$Lnt = u \Rightarrow \dfrac{1}{t} = du$

$3t^2dt = dv \Rightarrow t^3 = v$

$I(t) = \int 3t^2 Lnt dt = t^3Lnt - \int t^3(\dfrac{1}{t}dt) = t^3Lnt - \int t^2dt$

$= t^3Lnt - \dfrac{1}{3}t^3$

$$I(e)=e^3 Lne-\frac{1}{3}e^3=e^3-\frac{1}{3}e^3=\frac{2}{3}e^3$$

$$I(1)=1Ln1-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$$

$$I(e)-I(1)=\frac{2}{3}e^3-(-\frac{1}{3})=\frac{1}{3}(2e^3+1)$$

۱۲ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$I=\int_0^1\frac{t}{t+1}dt=\int_0^1\frac{t+1-1}{t+1}dt=\int_0^1(1-\frac{1}{t+1})dt$$

$$t-Ln|t+1|\Big]_0^1=(1-Ln2)-(0-Ln1)=1-Ln2$$

۱۳ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$x=u\Rightarrow dx=du$$

$$e^x dx=dv\Rightarrow v=e^x$$

$$S=\int_{-1}^0 xe^x dx+\int_0^1 xe^x dx \qquad \Rightarrow \int xe^x dx=xe^x-e^x$$

$$S=\left|(xe^x-e^x)_{-1}^0\right|+\left|(xe^x-e^x)_0^1\right|=\left|(e^{-1}-1+e^{-1})\right|+\left|(e^1-e^1+1)\right|$$

$$\Rightarrow S=2-\frac{2}{e}$$

۱۴ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$u=2x+1\Rightarrow x=\frac{u-1}{2}$$

$$du=2dx\Rightarrow dx=\frac{du}{2}$$

$$I(x)=\int\frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx=\int\frac{\frac{u-1}{2}}{u^{\frac{1}{2}}}(\frac{du}{2})=\frac{1}{4}\int u^{-\frac{1}{2}}(u-1)du$$

$$\frac{1}{4}\int(u^{\frac{1}{2}}-u^{-\frac{1}{2}})du=\frac{1}{4}\left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}-\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]$$

$$\Rightarrow\frac{1}{4}[(\frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}-2(2x+1)^{\frac{1}{2}}]=\frac{1}{6}(2x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}(2x+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$I(1)=\frac{1}{6}(3)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}(3)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}\sqrt{3^3}-\frac{1}{2}\sqrt{3}=\frac{3}{6}\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=0$$

$$I(0)=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}$$

$$I(1)-I(0)=0-(-\frac{1}{3})=\frac{1}{3}$$

۱۵ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$Lnx=u$$

$$\frac{dx}{x}=du$$

$$I=\int_{1}^{2}\frac{2\text{Ln}x}{x}dx=2\int udu=2\times\frac{(\ln x)^2}{2}\Bigg|_{1}^{2}=(\text{Ln}x)^2\Big]_{1}^{2}=(\text{Ln}2)^2-(\text{Ln}1)^2=(\text{Ln}2)^2$$

۱۶ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$\sqrt{x}=u$$
$$\frac{dx}{2\sqrt{x}}=du\rightarrow dx=2\sqrt{x}du=2udu$$
$$I(x)=\int e^{\sqrt{x}}dx=\int 2ue^{u}du=2(ue^{u}-e^{u})=2e^{u}(u-1)=2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)$$
$$I(1)-I(0)=\left[2e^{1}(1-1)\right]-\left[2e^{0}(0-1)\right]=2$$

۱۷ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$y^2=x\Rightarrow y=\sqrt{x}$$

$$2S=\int_{0}^{4}\sqrt{x}dx=\int_{0}^{4}x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg]_{0}^{4}=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Bigg]_{3}^{4}=(\frac{16}{3}-0)=\frac{16}{3}\Rightarrow S=\frac{8}{3}$$

۱۸ـ گزینه ۳ صحیح است.

$y'=$ شیب خط مماس $=\sqrt{x}$

$$y=\int\sqrt{x}dx=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C\xrightarrow{(0,0)}c=0$$

پس اگر نمودار تابع از مبدأ مختصات بگذرد از نقطه $(9,18)$ خواهد گذشت.

۱۹ـ گزینه ۲ صحیح است.

برای حل این انتگرال از تجزیه کسر استفاده می‌کنیم.

$$\frac{1}{x^3+x}=\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}\rightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1\\C=0\end{cases}$$
$$\int\frac{dx}{x^3.x}=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx$$
$$=\text{Ln}x-\frac{1}{2}\text{Ln}(x^2+1)+C=\frac{1}{2}\text{Ln}x^2-\frac{1}{2}\text{Ln}(x^2+1)+C=\frac{1}{2}\text{Ln}\frac{x^2}{x^2+1}+C$$

۲۰ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$I=\int_{0}^{1}\frac{x}{1+x}dx=\int_{0}^{1}\frac{x+1-1}{x+1}dx=\int_{0}^{1}\left(\frac{x+1}{x+1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=\int_{0}^{1}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=x-\text{Ln}|x+1|\Big|_{0}^{1}=1-\text{Ln}2$$

۲۱ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$x=u\Rightarrow dx=du$$
$$2e^{2x}dx=dv\Rightarrow v=e^{2x}$$

$$I=\int_0^1 2xe^{2x}\int_0^1 x\left(2e^{2x}\right)dx$$

$$\Rightarrow I=xe^{2x}\Big|_0^1-\int_0^1 e^{2x}dx=xe^{2x}\Big|_0^1-\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1=$$

$$\left(1e^{2(1)}-0e^{2(0)}\right)-\frac{1}{2}\left(e^{2(1)}-e^{2(0)}\right)\Rightarrow e^2-\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(e^2+1)$$

۲۲ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$S=\int_0^1[(x^2+4)-xe^x]dx=\frac{x^3}{3}+4x-xe^x+e^x\Big|_0^1=$$

$$(\frac{1}{3}+4-e+e)-(0+0-0+e^0)=\frac{10}{3}$$

س

$$\int_0^1(3x+2)(2xdx)=\int_0^1(6x^2+4x)dx=6\int_0^1x^2dx+4\int_0^1xdx$$

$$\Rightarrow 6\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+4\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=6(\frac{1}{3}-0)+4(\frac{1}{2}-0)=4$$

۲۴ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$\int_0^2\frac{dx}{1+e^x}=\int_0^2\frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx=\int_0^2(1-\frac{e^x}{1+e^x})dx=\int_0^2dx-\int_0^2\frac{e^x}{1+e^x}dx$$

$$\Rightarrow x-Ln(۱+e^x)\Big|_۰^۲=[۲-Ln(۱+e^۲)+Ln(۱+۱)]=۲+Ln۲-Ln(۱+e^۲)$$

۲۵ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$x+1=u\Rightarrow dx=du$$

$$\int_{-1}^0x^2\sqrt{x+1}dx=\int(u-1)^2\sqrt{u}du=\int(u^2-2u+1)u^{\frac{1}{2}}du=\int(u^{\frac{5}{2}}-2u^{\frac{3}{2}}+u^{\frac{1}{2}})du$$

$$\Rightarrow\frac{u^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1}-\left(\frac{u^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}\right)+\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{2(x+1)^{\frac{7}{2}}}{7}-\frac{4(x+1)^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_{-1}^0$$

$$=(\frac{2}{7}-\frac{4}{5}+\frac{2}{3})-0=\frac{16}{105}$$

۲۶ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$\begin{cases}y=x^2-2x\\y=4-x^2\end{cases}\Rightarrow x^2-2x=4-x^2\Rightarrow 2x^2-2x-4=0\Rightarrow x=-1,2$$

$$S=\int_1^2[(4-x^2)-(x^2-2x)]dx=\int_1^2(-2x^2+2x+4)dx$$

$$\Rightarrow[-2(\frac{x^3}{3})+2(\frac{x^2}{2})+4x]_{-1}^2=-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\ \Big|_1^2=(-\frac{16}{3}+4+8)-(\frac{2}{3}+1-4)=9$$

۲۷ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$F'(x)=\int F''(x)dx\Rightarrow F'(x)=\int(12x^2-12x)dx=4x^3-6x^2+C$$

$$F'(0)=2\Rightarrow 0-0+C=2\Rightarrow C=2$$

$$F(x)=\int F'(x)dx \Rightarrow F(x)=\int (4x^3-6x^2+2)dx = x^4-2x^3+2x+C$$

$$F(1)=2 \Rightarrow 1-2+2+C=2 \Rightarrow C=1$$

$$F(x)=x^4-2x^3+2x+1$$

۲۸ـ گزینه ۳ صحیح است.

با توجه به فرمول زیر:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x g(t)dt = g(x) \qquad a\in R$$

داریم:

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\int_2^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^3}} \Rightarrow f'(2)=\frac{1}{\sqrt{1+2^3}}=\frac{1}{\sqrt{1+8}}=\frac{1}{3}$$

$$y=(gof)(x) \Rightarrow y'=f'(x)g'(f(x))$$

$$g(x)=xe^x \Rightarrow g'(x)=e^x+xe^x \Rightarrow g'(0)=e^0+0e^0 \Rightarrow g'(0)=1$$

$$f(2)=\int_2^2 \frac{dt}{1+t^3}=0$$

$$y=(gof)'(2)=f'(2)g'(f(2))=f'(2)g'(0)=\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{3}$$

۲۹ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$u=t \Rightarrow du=dt$$
$$f''(t)dt=dv \Rightarrow f'(t)=v$$

$$\int_0^2 t f''(t)dt = tf'(t)\Big|_0^2-\int_0^2 f'(t)dt=(2f'(2)-0)-f(t)\Big|_0^2$$

$$\Rightarrow 2f'(2)-f(2)+f(0)\xrightarrow[f'(2)=f(2)=f(0)=3]{\text{می دانیم}} 2\times 3-3+3=6$$

۳۰ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$S=\int_{-2}^0 e^{2x}dx+\int_0^2 e^{-2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_{-2}^0-\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_0^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(e^0-e^{-4})-\frac{1}{2}(e^{-4}-e^0)=1-e^{-4}$$

۳۱ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$I(x)=\int x^2\sqrt{x^3+1}dx$$

$$x^3+1=u \Rightarrow 3x^2dx=du$$

$$I=\int \sqrt{u}\frac{du}{3}=\frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}du=\frac{1}{3}\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{9}(x^3+1)^{\frac{3}{2}}+C$$

$$I(2)-I(-1)=\frac{2}{9}\left[(2^3+1)^{\frac{3}{2}}-((-1)^3+1)^{\frac{3}{2}}\right]=\frac{2}{9}((9)^{\frac{3}{2}}-0)=\frac{2}{9}\times 27=6$$

۳۲ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$u=x \Rightarrow du=dx$$
$$e^{-x}dx=dv \Rightarrow -e^{-x}=v$$

$$I=\int_0^1 xe^{-x}dx=-xe^{-x}\Big|_0^1-\int_0^1-e^{-x}dx=(-e^{-1}-0)-e^{-x}\Big|_0^1$$

$$\Rightarrow -e^{-1}-(e^{-1}-1)=-e^{-1}-e^{-1}+1=-2e^{-1}+1=1-\frac{2}{e}$$

۳۳ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$S=\int_{\frac{1}{2}}^{2}(-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{x})dx=-\frac{x^2}{2}-Lnx+\frac{5}{2}x\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}\Rightarrow(-\frac{4}{2}-Ln2+\frac{10}{2})-(-\frac{1}{8}-Ln\frac{1}{2}+\frac{5}{4})$$

$$=(-2-Ln2+5)-(-\frac{1}{8}+Ln2+\frac{5}{4})=\frac{15}{8}-2Ln2$$

۳۴- گزینه ۱ صحیح است.

می دانیم که $\int_a^a f(x)dx=۰$ می باشد، بنابراین:

$$F(۲)=\int_۲^۲\sqrt{t^۲+۴}\,dt=۰$$

۳۵- گزینه ۱ صحیح است.

$$S=\left|\int_{-۱}^{۰}xe^{x^۲}dx\right|+\left|\int_۰^۱ xe^{x^۲}dx\right|=\left|\frac{۱}{۲}e^{x^۲}\Big]_{-۱}^{۰}\right|+\left|\frac{۱}{۲}e^{x^۲}\Big]_{۰}^{۱}\right|$$

$$\Rightarrow F(۰)=\frac{۱}{۲},\ \ F(-۱)=\frac{۱}{۲}e\Rightarrow F(۰)-F(-۱)=\left|\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}e\right|=\frac{۱}{۲}e-\frac{۱}{۲}$$

$$F(۱)=\frac{۱}{۲}e\Rightarrow F(۱)-F(۰)=\frac{۱}{۲}e-\frac{۱}{۲}$$

$$S=e-۱$$

۳۶- گزینه ۴ صحیح است.

$$\frac{x+۴}{x(x+۲)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+۲}$$

$$\Rightarrow\frac{x+۴}{x(x+۲)}=\frac{Ax+۲A+Bx}{x(x+۲)}\Rightarrow ۲A=۴\to A=۲\ ,\ B=-۱$$

$$\Rightarrow\int\frac{x+۴}{x(x+۲)}=\int\frac{۲}{x}dx+\int\frac{-۱}{x+۲}dx=۲Lnx-Ln(x+۲)=Lnx^۲-Ln(x+۲)$$

$$=Ln\frac{x^۲}{x+۲}+C$$

۳۷- گزینه ۱ صحیح است.

$$\int_e^{e^۲}\frac{dx}{xLnx}=\int_e^{e^۲}\frac{\frac{۱}{x}\times dx}{Lnx}=Ln(Lnx)\Big|_e^{e^۲}$$

$$\Rightarrow F(e^۲)=Ln۲\ ,\quad F(e)=۰\Rightarrow F(e^۲)-F(e)=Ln۲$$

۳۸- گزینه ۳ صحیح است.

بر طبق قضیه اساسی انتگرال خواهیم داشت:

اگر $F(x)=\int_۰^x g(t)dt\Rightarrow F'(x)=g(x)\Rightarrow g(x)=\frac{۱}{۱+x^۲}\Rightarrow F'(۱)=g(۱)=\frac{۱}{۲}$

۳۹- گزینه ۲ صحیح است.

$$\int_{-۱}xe^{-x}dx=-xe^{-x}-e^{-x}+c=-e^{-x}(x+۱)+c$$

$$\Rightarrow F(1) = -2e^{-1} + c\ ,\quad F(-1) = C$$

$$\Rightarrow F(1) - F(0) = -2e^{-1} = -\frac{2}{e}$$

۴۰- گزینه ۳ صحیح است.

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{Ax^2 + A + Bx^2 + Cx}{x(x^2+1)} \Rightarrow A = 1,\ B = -1,\ C = 0$$

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{-x}{x^2+1}dx = Lnx - \frac{1}{2}Ln|x^2+1| + C$$

$$= Lnx - Ln\sqrt{x^2+1} + C = Ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C$$

۴۱- گزینه ۴ صحیح است.

$$S = \left|\int_{-2}^{0} x\sqrt{4-x^2}\,dx\right| + \left|\int_{0}^{2} x\sqrt{4-x^2}\,dx\right|$$

$$S = \left|\left[-\frac{1}{3}(4-x^2)\sqrt{4-x^2}\right]_{-2}^{0}\right| + \left|\left[-\frac{1}{3}(4-x^2)\sqrt{4-x^2}\right]_{0}^{2}\right| = \frac{16}{3}$$

۴۲- گزینه ۱ صحیح است.

این سوال تکرار سوال ۴۶ می باشد.

۴۳- گزینه ۴ صحیح است.

می دانیم که:

$$mpc + mps = 1$$

$$\Rightarrow mps = 1 - mpc \Rightarrow mps = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$S = \int mps\,dx \Rightarrow S = \int (1 - \frac{2}{\sqrt{x}})dx \Rightarrow S = x - 4\sqrt{x} + E$$

چون در سوال ذکر شده اگر $x = 0$ باشد آنگاه مصرف مستقل برابر ۱۰ است در نتیجه پس انداز نیز بـه ازای درآمـد صـفر برابـر ۱۰- خواهد بود یعنی $E = -10$ در نتیجه تابع مصرف عبارت است از: $S = x - 4\sqrt{x} - 10$

۴۴- گزینه ۱ صحیح است.

برای توضیح بیشتر به پاسخ سوال ۴۴ رجوع کنید.

۴۵- گزینه ۲ صحیح است.

$$\Rightarrow \frac{x^2-2}{x+2} = x - 2 + \frac{2}{x+2}$$

$$\Rightarrow \int_0^2 \frac{x^2-2}{x+2} = \int_0^2 (x - 2 + \frac{2}{x+2})dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x + 2Ln|x+2| \Big]_0^2$$

$=F(۲)-F(۰)=۲Ln۲-۲$

۴۶- گزینه ۳ صحیح است.

$$\int Ln(x^۲+۱)dx = xLn(x^۲+۱)-\int x\times\frac{۲x}{x^۲+۱}dx$$
$$= xLn(x^۲+۱)-۲\int\frac{x^۲+۱-۱}{x^۲+۱}dx$$
$$= xLn(x^۲+۱)-۲\int\left(۱-\frac{۱}{x^۲+۱}\right)dx$$
$$= xLn(x^۲+۱)-۲x+۲tg^{-۱}x+C$$
$$\Rightarrow F(x)=xLn(x^۲+۱)-۲x+۲Arctgx+C$$
$$\Rightarrow F(۱)=Ln۲-۲+۲\left(\frac{\pi}{۴}\right)$$
$$\Rightarrow F(۱)=Ln۲-۲\left(۱-\frac{\pi}{۴}\right)$$

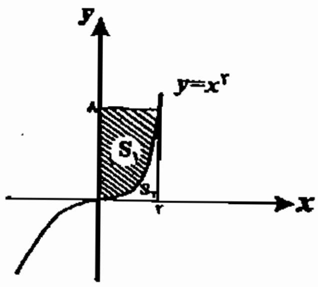
۴۷- گزینه ۳ صحیح است.

$$\Rightarrow Y=\int(X+۲)e^x dx$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به روش جزء به جزء}} y=(x+۲)e^x-e^x+c \xrightarrow{\text{نقطه مذکور}} c=۰$$

$$y=(x+۲)e^x-e^x \xrightarrow{\text{اگر } x=Ln۲} y=(Ln۲+۲)e^{Ln۲}-e^{Ln۲}=۲Ln۲+۲$$
$$y=۲(Ln۲+۱)$$

۴۸- گزینه ۲ صحیح است.



$\Rightarrow$ کل S = مساحت مستطیل $=۸\times۲=۱۶$

$$\Rightarrow S_۲=\int_۰^۲ x^۳dx=\frac{x^۴}{۴}\Big|_۰^۲=۴$$

$\Rightarrow$ کل $S_۱+S_۲ \quad \Rightarrow ۱۶=۴+S_۱ \quad \Rightarrow S_۱=۱۲$

۴۹- گزینه ۲ صحیح است.

$$dc=xe^{-x}dx\Rightarrow C=\int xe^{-x}dx$$

$$\xrightarrow{\text{با استفاده از روش جزء به جزء}} C=-xe^{-x}-e^{-x}+E \xrightarrow[\text{آنگاه } c=۱۰]{\text{اگر } x=۰ \text{ باشد}} ۱۰=-۱+E\Rightarrow E=۱۱$$ مصرف مستقل

$\Rightarrow C=-xe^{-x}-e^{-x}+۱۱$

تابع پس انداز ملی $S=x-c \quad \Rightarrow S=x+xe^{-x}+e^{-x}-۱۱ \Rightarrow S=x+e^{-x}(x+۱)-۱۱$

۵۰- گزینه ۲ صحیح است.

$$۱)\, q=\frac{۱۰}{p} \to E_{q,p}=\frac{dq}{dp}\times\frac{p}{q}=\frac{-۱۰}{p^{۲}}\times\frac{p}{q}=\frac{-۱۰}{pq}=\frac{-۱۰}{۵\times ۲}=-۱$$

$$۲)\, q=\frac{۵۰}{p^{۲}} \to E_{q,p}=\frac{-۱۰۰}{p^{۳}}\times\frac{p}{q}=\frac{-۱۰۰}{p^{۲}q}=-۲$$

$$۳)\, q=-۲p^{۲}+۵۲ \to Eq,p=(-۴p).\frac{p}{q}=\frac{-۴p^{۲}}{q}=-۵۰$$

$$۴)\, q=-۲p+۱۲ \to Eq,p=(-۲).\frac{p}{q}=\frac{-۲p}{q}=-۵$$

۵۱- گزینه ۴ صحیح است.

$$y=x^{۳} \to x=\sqrt[۳]{y} \to S=\left|\int_{۱}^{۸}\sqrt[۳]{y}\,dy\right|=\left|\int_{۱}^{۸} y^{\frac{۱}{۳}}dy\right|$$

$$\to S=\left|\frac{۳}{۴}y^{\frac{۴}{۳}}\Big]_{۱}^{۸}\right|=\frac{۴۵}{۳}$$

۵۲- گزینه ۴ صحیح است.

با توجه به پاسخ سوال ۴۰ خواهیم داشت:

$$\int\frac{dx}{x^{۳}+x}=Ln\frac{x}{\sqrt{x^{۲}+۱}}+C$$

$$\int_{۲}^{۳}\frac{dx}{x^{۳}+x}=Ln\frac{x}{\sqrt{x^{۲}+۱}}\Big]_{۲}^{۳}=LnA$$

۵۳- گزینه ۱ صحیح است.

$$\Rightarrow Ln\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}-Ln\frac{۲}{\sqrt{۵}}=LnA \Rightarrow LN\frac{\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}}{\frac{۲}{\sqrt{۵}}}=LnA \Rightarrow A=\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$$

$$y_{۱}=y_{۲} \Rightarrow x^{۲}=\sqrt{x} \Rightarrow x^{۴}=x \Rightarrow x^{۴}-x=۰ \Rightarrow x(x^{۳}-۱)=۰ \Rightarrow x=۰ \quad , \quad x=۱$$

$$\Rightarrow S=\left|\int_{۰}^{۱}(x^{۲}-\sqrt{x})dx\right|=\left|\int_{۰}^{۱}\left(x^{۲}-x^{\frac{۱}{۲}}\right)dx\right|=\left|\frac{x^{۳}}{۳}-\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}\Big]_{۰}^{۱}\right|$$

$$S=\frac{۱}{۳}$$

۵۴- گزینه ۴ صحیح است.

اگر تابع $y=D(x)$ تابع تقاضا بوده که در آن y قیمت و x مقدار تقاضا باشد مازاد رفاه مصرف کننده از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$C_s=\int_{۰}^{x^{۰}}D(x)dx-x^{۰}y^{۰} \qquad \text{یا} \qquad C_s=\int_{۰}^{x^{۰}}\left[D(x)-y^{۰}\right]dx$$

در فرمول فوق $y^{۰}$ قیمت تعادلی و $x^{۰}$ مقدار تعادلی است.

$$\text{مازاد مصرف کننده}=C_s=\int_{۰}^{۳}(۱۸-x^{۲}-۹)dx=\left[۹x-\frac{x^{۳}}{۳}\right]_{۰}^{۳}=۱۸$$

زیرا: $x=-5$, $x=3$ $\Rightarrow$ $x^2+2x-15=0$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow 2x+3=18-x^2 \Rightarrow$

چون تولید منفی نداریم بنابراین مقدار تعادلی برابر است $x^*=3$ و در نتیجه قیمت تعادلی برابر با $y^*=9$

یادآوری:

اگر تابع $y=S(x)$ تابع عرضه بوده که در آن y قیمت و x مقدار تقاضا باشد مازاد رفاه تولیدکننده از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$P_s=x^*y^*-\int_0^{x^*} s(x)dx \qquad \text{یا} \qquad P_s=\int_0^{x^*}\left[y^*-s(x)\right]dx$$

۵۵- گزینه ۴ صحیح است.

$$\frac{dy}{dx}=2xy \Rightarrow \frac{dy}{y}=2xdx$$

$$\Rightarrow \int\frac{dy}{y}=\int 2xdx \Rightarrow Lny=x^2+C \Rightarrow y=e^{x^2}+c$$

$$y'=2xe^{x^2} \quad , \quad y''=2e^{x^2+c}+4x^2e^{x^2+c}$$

$$y''=0 \Rightarrow 2e^{x^2+c}\left(1+2x^2\right)=0$$

که معادله فوق ریشه ندارد. بنابراین منحنی فوق فاقد نقطه عطف است.

۵۶- گزینه ۴ صحیح است.

$$f(x)=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}=-Ln\left(\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right)+c$$

$$\xrightarrow{c=0} f(1)=-Ln\left(1+\sqrt{2}\right)=Ln\frac{1}{\sqrt{2}+1}=Ln\left(\sqrt{2}-1\right)$$

یادآوری:

$$\int\frac{du}{u\sqrt{u^2+a^2}}=-\frac{1}{a}Ln\left(\frac{a+\sqrt{u^2+a^2}}{u}\right)+c$$

۵۷- گزینه ۲ صحیح است.

یادآوری:

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\mathrm{Ln}\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+C=\mathrm{Ln}\left|\cos cx-\cot gx\right|+c$$

$$\int\frac{dx}{\cos x}=Ln\left|\ tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right|+C=Ln\left|\ tgx+Secx\ \right|+c$$

بنابراین در این سوال خواهیم داشت:

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}=\left[\mathrm{Ln}\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\mathrm{F}\left(\frac{\pi}{2}\right)-\mathrm{F}\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\mathrm{Ln}\sqrt{\frac{3}{3}}$$

زیرا :

$$Ln\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^{-1}=Ln\frac{3}{\sqrt{3}}=Ln\sqrt{3}$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=Ln\left|\ tg\frac{\pi}{4}\ \right|=Ln1=0$$

$$F\left(\frac{\pi}{۲}\right)=Ln\left|tg\frac{\pi}{۶}\right|=Ln\sqrt{\frac{۳}{۳}}$$

۵۸- گزینه ۳ صحیح است.

$$\text{مازاد عرضه کننده}=P_S=\int_{\circ}^{x^*}\left[y^*-S(x)\right]dx$$

$$P_s=\int_{\circ}^{۲}\left[۹-۱-۲x^۲\right]dx=\left[۸x-\frac{۲}{۳}x^۳\right]_{\circ}^{۲}=\frac{۳۲}{۳}$$

۵۹- گزینه ۱ صحیح است.

$$\text{تابع مصرف}\quad C=\int Lnx\,dx\Rightarrow C=xLnx-x+E\xrightarrow[\quad]{\text{چون}\quad c(۱)=۱۰}۱۰=-۱+E\Rightarrow E=۱۱$$

$$\Rightarrow c=xLnx-x+۱۱$$

$$\text{تابع پس انداز}\quad S=x-C\Rightarrow S=x-xLnx+x-۱۱\Rightarrow S=۲x-xLnx-۱۱$$

۶۰- گزینه ۲ صحیح است.

معادله دیفرانسیل مرتبه اولی که بتوان آن را به فرم $\frac{dy}{dx}+yf(x)=q(x)$ نوشت را خطی گویند. اگر $q(x)=\circ$ باشد معادله را همگن و در غیر این صورت آن را غیرهمگن می نامیم جواب عمومی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول (غیرهمگن) به فرم زیر می باشد:

$$y=e^{-\int f(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int f(x)dx}dx+c\right]$$

بنابراین در این سوال خواهیم داشت:

$$\frac{dc}{dy}-c=\alpha e^y\rightarrow C=e^{-\int -۱dy}\left[\int ae^y\times e^{\int -۱dy}dy+c'\right]$$

$$\Rightarrow C=e^y\left(\int ae^y\times e^{-y}dy+c'\right)\Rightarrow C=e^y\left(\int ady+c'\right)\Rightarrow c=e^y(ay+c')$$

$$\text{با توجه به فرض مسأله}\quad\xrightarrow{c(\circ)=۱۰۰}۱۰۰=e^{\circ}(\circ+c')\Rightarrow c'=۱۰۰$$

$$\Rightarrow C=e^y(\alpha y+۱۰۰)$$

۶۱- گزینه ۴ صحیح است.

روشن است که $\frac{۱}{x^{۱۰}}<\frac{۱}{۱+x^{۱۰}}<\circ$ بنابراین:

$$\int_۱^{\infty}o\,dx<\int_۱^{\infty}\frac{dx}{۱+x^{۱۰}}<\int_۱^{\infty}\frac{dx}{x^{۱۰}}$$

$$\Rightarrow\circ<\int_۱^{\infty}\frac{dx}{۱+x^{۱۰}}<\left.\frac{x^{-۹}}{-۹}\right]_۱^{\infty}=\frac{۱}{۹}$$

۶۲- گزینه ۳ صحیح است.

$$\text{مازاد مصرف کننده}\quad C_s=\int_{\circ}^{x^*}\left[D(x)-y^*\right]dx$$

$$\Rightarrow C_s=\int_{\circ}^{۲}\left(۱۰-x^۲-۶\right)dx=\left[۴x-\frac{x^۳}{۳}\right]_{\circ}^{۲}=\frac{۱۶}{۳}$$

فصل هفتم

معادلات دیفرانسیل

(۷-۱) تعریف: معادله دیفرانسیل معادله‌ای است که مشتمل بر مشتقات یک یا چند تابع می‌باشد معادلات دیفرانسیل براساس نوع مرتبه و درجه آن تقسیم‌بندی می‌شود.

نوع معادله دیفرانسیل: اگر معادله دیفرانسیل مشتمل بر مشتقهای یک تابع یک متغیره مستقل باشد معادله دیفرانسیل معمولی است و اگر مشتمل بر مشتقات جزئی یک تابع دو یا چند متغیره باشد آن را معادله‌ای با مشتقات جزئی می‌گویند.

مرتبه معادله: برابر با بزرگترین مرتبه مشتق موجود در آن معادله می‌باشد.

درجه معادله: توان بزرگترین مرتبه مشتق وجود در معادله پس از گویا کردن معادله دیفرانسیل و حذف توانهای کسری مشتقات می‌باشد.

مثلاً:

$x^2dy - ydx = 4$ معادله دیفرانسیل معمولی، مرتبه اول، درجه اول

$x(\frac{dy}{dx})^4 - (yx^2) + y^2 - 4 = 0$ معادله دیفرانسیل معمولی، مرتبه اول، درجه چهارم

$\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - (\frac{\partial v}{\partial y})4xy - x^2y + \frac{\partial v}{\partial x} = 5$ معادله دیفرانسیل با مشتق جزئی، مرتبه سوم، درجه اول

$2xy(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2})^4 - y^2 + x^2y + x^2 - 10 = (\frac{\partial v}{\partial y})^5$ معادله دیفرانسیل با مشتق جزئی، مرتبه دوم، درجه چهارم

در این مبحث فقط به معادلات دیفرانسیل مرتبه اول و درجه اول می‌پردازیم.

(۷-۲) روشهای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول، درجه اول:

بطور کلی یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول و درجه اول را می‌توان به صورت مقابل درآورد.

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

در این صورت اگر $f(x,y)$ تابعی از x بوده و یا عددی ثابت باشد معادله دیفرانسیل به روشهای معمول انتگرال‌گیری حل می‌شود.

مثال:

$$xdy - 2dx = 0 \Rightarrow xdy = 2dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x} \Rightarrow \int \frac{2dx}{x} = 2Ln|x| + C$$

در غیر این صورت یعنی اگر $f(x,y)$ تابعی از x و y باشد با توجه به انواع معادلات دیفرانسیل از روشهایی که ذکر خواهد شد استفاده خواهیم کرد.

در حالت کلی معادله دیفرانسیل مرتبه اول، درجه اول به صورت $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ خواهد بود که با توجه حالتهای مختلف $N(x,y),M(x,y)$ روشهای مختلفی برای حل معادلات دیفرانسیل وجود دارد:

(۷-۳) معادلات دیفرانسیل جدا از هم (معادلات تفکیک پذیر)

در این حالت معادله دیفرانسیل را می‌توان به صورت $M(x)dx+N(y)dy=0$ تبدیل کرد در نتیجه برای محاسبه جواب عمومی معادله دیفرانسیل می‌بایست از عبارت انتگرال گرفت یعنی:

$$\int M(x)dx+\int N(y)d(y)=C$$

مثال: معادله دیفرانسیل $x(1+y)dx+x^2ydy=0$ را حل کنید.

$$x(1+y)dx+x^2ydy=0\Rightarrow \frac{1}{x}dx+(\frac{y}{1+y})dy=0$$

$$\Rightarrow \int\frac{1}{x}dx+\int(\frac{y}{1+y})dy=C$$

$$Lnx+y+Ln(y+1)=C\Rightarrow Lnxe^y(y+1)=C\Rightarrow xe^y(y+1)=C\Rightarrow x=\frac{c}{e^y(y+1)}$$

نکته مهم: در مثال بالا مقدار ثابت نهایی مسئله می‌بایست به صورت e^C نوشته می‌باشد اما با توجه به اینکه هدف از حل مسئله یافتن یک جواب عمومی بوده و نوع نمایش مقدار ثابت تفاوتی در جواب عمومی مسئله نداراد به جای e^C از مقدار ثابت C استفاده شده است.

(۷-۴) معادله دیفرانسیل همگن:

معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ در صورتی معادله همگن است که $N(x,y)$ و $M(x,y)$ توابعی همگن از یک درجه باشد در این حالت با تغییر متغیر $y=vx$ می‌توان معادله را به صورت یک معادله دیفرانسیل جدا تبدیل کرده و آن را حل کنیم.

یادآوری: تابع $F(x,y)$ تابعی همگن از درجه n خواهد بود اگر داشته باشیم $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$ که در این رابطه λ عددی دلخواه می‌باشد.

نکته: در این نوع معادلات با تغییر متغیر $y=vx$ مقدار dy نیز برابر خواهد بود با $dy=vdu+xdv$ پس از حل معادله دیفرانسیل با قرار دادن معادل $v=\frac{x}{y}$ جواب نهایی معادله دیفرانسیل بدست می‌آید.

نکته مهم: بجای تغییر متغیر $y=vx$ می‌توان از تغییر متغیر $x=vy$ نیز استفاده کرد که در این صورت خواهیم داشت $dx=vdy+ydu$

مثال: جواب عمومی $(-xy+y^2)dx+\frac{x^2}{y}dy=0$ را بیابید.

معادله دیفرانسیل مسئله همگن و از درجه ۲ می‌باشد بنابراین با جایگذاری $dy=vdx+xdv,y=vx$ معادله را حل خواهیم کرد.

$$(-x^2v+x^2v^2)dx+x^2(vdx+xdv)=0$$

$$x^2(-v+v^2+v)dx+x^3dv=0\Rightarrow x^2v^2dx+x^3dv=0$$

$$\frac{dx}{x}+\frac{dv}{v^2}=0\Rightarrow$$

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dv}{v^2}=c\Rightarrow Lnx-\frac{1}{v}=c$$

حالا با جایگذاری $v = \frac{y}{x}$ جواب عمومی معادله بدست می‌آید:

$$\text{Ln}x - \frac{x}{y} = c \Rightarrow y = \frac{x}{\text{Ln}x - c}$$

(۷-۵) معادلات دیفرانسیل کامل:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial M(x,y)}{\partial x}$$

بهر حال جواب معادله دیفرانسیل کامل $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

۱- از $M(x,y)$ نسبت به x انتگرال گرفته و به جای ثابت انتگرال‌گیری (C) تابعی از y، $(f(y))$ را قرار می‌دهیم:

۲- از تابع بالا $G(x,y) + f(y)$ نسبت به y مشتق گرفته و با $N(x,y)$ مساوی قرار می‌دهیم و مقدار $\frac{\partial f(y)}{\partial y}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial f(y)}{\partial y} = N(x,y) \Rightarrow \frac{\partial f(y)}{\partial y} = N(x,y) - \frac{\partial G(x,y)}{\partial y}$$

۳- مقدار f(y)را با انتگرال‌گیری از $\frac{\partial f(y)}{\partial y}$ نسبت به y بدست می‌آوریم.

$$\int \frac{\partial f(y)}{\partial y} dy = f(y)$$

۴- بنابراین جواب مسئله با توجه به رابطه‌های ۱ و ۳ بدست می‌آید.

$$F(x,y) = G(x,y) + f(y) + C$$

نکته: البته می‌توان این مراحل را از ابتدا با انتگرال‌گیری $N(x,y)$ نسبت به y طی کرد.

مثال: تغییر در قیمت (y) به ازای تغییر مقدار تقاضای (x) در یک کالای خاص به صورت مقابل است.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(2xy + 3x^2y + y)}{x^2 + 3y^2 + x^3 + x}$$

اگر بدانیم به ازای قیمت ۴ واحد پولی میزان تقاضا صفر می‌شود رابطه میان قیمت و تقاضا را محاسبه کنید.

$$(x^2 + 3y^2 + x^3 + x)dy + (2xy + 3x^2y + y)dx = 0$$

$$\frac{\partial(x^2 + 3y^2 + x^3 + x)}{\partial x} = 2x + 3x^2 + 1 = \frac{\partial(2xy + 3xy^2 + y)}{\partial y}$$

بنابراین معادله دیفرانسیل کامل است.

❶
$$F(x,y) = \int N(x,y)dy = \int (x^2 + 3y^2 + x^3 + x)dy = y(x^2 + x^3 + x) + y^3 + f(x)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y(2x + 3x^2 + 1) + \frac{\partial f(x)}{\partial x} = 2xy + 3x^2y + y + \frac{\partial f(x)}{\partial x} = M(x,y) = 2xy + 3x^2y + y$$

❷
$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 0$$

❸
$$\int \frac{\partial f(x)}{\partial x} dx = C$$

❹ جواب عمومی
$$F(x,y) = x^2y + x^3y + xy + y^3 + c$$

$$y = 4,\ \ x = 0 \ \Rightarrow 0 + 0 + 0 + 64 + C = 0 \Rightarrow C = -64$$

جواب اختصاصی: $x^2y + x^3y + xy + y^3 - 64 = 0$

تستهای طبقه‌بندی شده فصل هفتم

رشته اقتصاد

۱ــ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(y+3)dx+tgx dy=0$ عبارتست از: (سراسری ۷۴)

۱) $y=c|\sin x|+3$ ۲) $y=\dfrac{c}{|\cos x|}+3$

۳) $y=c|\cos x|-3$ ۴) $y=\dfrac{c}{|\sin x|}-3$

۲ــ با فرض آنکه تابع f از نقطه $A(0,1)$ می‌گذرد و داشته باشیم:
$e^x dy+ye^x dx+x^2 dy+2xydx=0$ مقدار y به ازای $x=1$ کدام است؟ (سراسری ۷۵)

۱) $-(1+e)$ ۲) $1+e$ ۳) $-\dfrac{1}{1+e}$ ۴) $\dfrac{1}{1+e}$

۳ــ ضابطه تابع $y=f(x)$ گذرنده از مبدا مختصات با شرط $\dfrac{y'}{y+1}=\dfrac{1}{x-1}$ کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) $y=x^2$ ۲) $y=-x$ ۳) $y=\sin x$ ۴) $y=Ln(x-1)$

۴ــ اگر $xy'=y+1$ باشد مقدار y کدام است؟ در صورتی که تابع از نقطه $(1,1)$ بگذرد. (سراسری ۸۱)

۱) $y=2x-1$ ۲) $x=2y-1$

۳) $2y^2-xy=1$ ۴) $2xy-y^2=1$

۵ــ اگر داشته باشیم $y'=\dfrac{2xy}{x^2+1}$، معادله تابع کدام است؟ در صورتیکه این تابع از نقطه $(0,1)$ بگذرد.
(سراسری ۸۳)

۱) $y=x^2+1$ ۲) $y=x+1$ ۳) $y=2x+1$ ۴) $y=2x^2+1$

رشته مدیریت

۱ــ اگر داشته باشیم $xy'+y=e^x$ مقدار y کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) $y=xe^x+cx$ ۲) $y=\frac{1}{x}e^x+\dfrac{c}{x}$ ۳) $y=xe^x+C$ ۴) $y=e^x-x+C$

رشته حسابداری

۱ــ شیب تابعی $\dfrac{dy}{dx}=2x+\dfrac{1}{x+1}$ است. اگر این تابع از مبدا بگذرد مقدار تابع به ازای $x=1$ کدام است؟
(سراسری ۷۵)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $1+Ln2$ ۴) $2+Ln2$

پاسخنامه تشریحی تستهای طبقه‌بندی شده فصل هفتم

رشته اقتصاد

۱ـ گزینه ۴صحیح است.

معادله دیفرانسیل مربوط به یک معادله دیفرانسیل جدا شدنی است پس:

$$(y+3)dx+tgxdy=0 \Rightarrow (y+3)dx=-tgxdy \Rightarrow \frac{dx}{tgx}=-\frac{dy}{y+3}$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفین انتگرال می‌گیریم}} \int \frac{dx}{tgx}=-\int \frac{dy}{y+3} \Rightarrow Ln|\sin x|=Ln\frac{1}{y+3}+C$$

$$y+3=\frac{C}{|\sin x|} \Rightarrow y=\frac{C}{|\sin x|}-3$$

۲ـ گزینه ۴ صحیح است.

$ye^x+x^2y+C=0$ دیفرانسیل کامل $e^x dy+ye^x dx+x^2 dy+2xydx=0$ معادله می‌باشد و چون تابع f از نقطه $A(0,1)$ می‌گذرد پس:

$$e^0+0+C=0 \Rightarrow C=-1$$

در نتیجه تابع اصلی به صورت $ye^x+x^2y-1=0$ می‌باشد.

$$x=1 \Rightarrow ye^1+(1)^2y-1=0 \Rightarrow y(e+1)=1$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{e+1}$$

۳ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$\frac{y'}{y+1}=\frac{1}{x-1} \Rightarrow y'x-y'=y+1 \Rightarrow y'(x-1)=y+1$$

$$\Rightarrow y'=\frac{y+1}{x-1}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y+1}{x-1} \Rightarrow (x-1)dy=(y+1)dx \Rightarrow \int (x-1)dy=\int (y+1)dx$$

$$\Rightarrow (x-1)y=(y+1)x+C \Rightarrow y=-x+C.$$

تابع از مبدا می‌گذرد $\Rightarrow 0=0+C \Rightarrow C=0 \Rightarrow y=-x$

۴ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$xy'=y+1 \Rightarrow y'=\frac{y+1}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y+1}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y+1}=\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow Ln(y+1)=Lnx+C \Rightarrow Ln(y+1)-Lnx=C$$

$$\Rightarrow \mathrm{Ln}\frac{y+1}{x}=C \Rightarrow \frac{y+1}{x}=e^c \xrightarrow{x=y=1} \frac{1+1}{1}=e^C \Rightarrow e^C=2$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفین Ln می‌گیریم:}} Lne^C = Ln2 \Rightarrow C=Ln2$$

$$\frac{y+1}{x}=e^{Ln2}=2 \Rightarrow y=2x-1$$

۵ ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$y' = \frac{2xy}{x^2+1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2+1} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2xdx}{x^2+1}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2xdx}{x^2+1} \Rightarrow Lny = Ln(x^2+1) + Lnk$$

$$Lny = (Ln(x^2+1)k] \Rightarrow y = (x^2+1)k \xrightarrow{\text{تابع از } (0,1) \text{ می‌گذرد.}} 1 = (0+1)k$$

$$\Rightarrow k = 1 \Rightarrow y = x^2+1$$

رشته مدیریت

۱ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$xy' + y = 0 \xrightarrow{y'=\frac{dy}{dx}} x\frac{dy}{dx} + y = 0 \Rightarrow \frac{xdy}{dx} = -y$$

$$xdy = -dxy \Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow \frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} + \int \frac{dx}{x} = LnC$$

$$Lny + Lnx = LnC \Rightarrow Lnxy = LnC \Rightarrow xy = c \Rightarrow y = \frac{c}{x}$$

$$y = \frac{c}{x} \Rightarrow y' = \frac{c'x - c}{x^2}$$

$$xy' + y = e^x \Rightarrow x\left(\frac{c'x-c}{x^2}\right) + \frac{c}{x} = e^x \Rightarrow \frac{c'x-c}{x} + \frac{c}{x} = e^x \Rightarrow \frac{c'x}{x} = e^x \Rightarrow c' = e^x \Rightarrow c = e^x + c_1$$

$$y = \frac{c}{x} \Rightarrow y = \frac{e^x + C}{x} = \frac{1}{x}e^x + \frac{C}{x}$$

رشته حسابداری

۱ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$\int (2x + \frac{1}{x+1})dx = x^2 + Ln|x+1| + C$$

چون تابع $y = x^2 + Ln|x+1| + C$ از مبدأ مختصات گذشته پس:

$$0 = 0 + Ln1 + C \Rightarrow C = 0$$
$$f(1) = 1 + Ln|1+1| \Rightarrow f(1) = 1 + Ln2$$

فصل هشتم

ماتریس

(۸-۱) تعاریف و کلیات

ماتریسها آرایش مستطیلی از درایه ها و اعداد هستند که حرف a_{ij} نمایش دهنده درایه های ماتریس می‌باشد که در آن i شماره سطر و j شماره ستون ماتریس خواهد بود. ماتریسی که دارای m سطر و n ستون باشد ماتریسی از درجه $m \times n$ نامیده می‌شود.

تساوی دو ماتریس : در ماتریس A , B مساوی هستند هرگاه تمامی عناصر متناظر آنها با هم مساوی باشد.

جمع و تفریق ماتریسها: دو ماتریس A , B قابل جمع شدن هستند هرگاه از یک درجه باشند در این صورت اگر $A=\{a_{ij}\}, B=\{b_{ij}\}$ باشد خواهیم داشت $A \pm B = \{a_{ij} \pm b_{ij}\}$.

تذکر: جمع ماتریس ها خاصیت جابجایی و شرکت پذیری دارد.

$$A+B=B+A \quad , \quad (A+B)+C=A+(B+C)$$

برای ضرب عدد خاصی مانند k در ماتریس A کافی است k را در تمام داریه‌های A ضرب کنیم یعنی $kA=\{kaij\}$.

ضرب ماتریسها: دو ماتریس A , B قابل ضرب شدن هستند هرگاه تعداد ستون اولی با سطر دومی برابر باشد یعنی $A_{m\times n} \times B_{n\times p} = C_{m\times p}$ که در این صورت :

$$C_{m\times p} = \begin{bmatrix} W_{11} & \cdots\cdots & W_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ W_{mi} & \cdots\cdots & W_{mn} \end{bmatrix} \quad , \qquad W_{ig} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jg}$$

نکته: در حالت کلی خواهیم داشت $AB \neq BA$

۱) ضرب ماتریسها خاصیت جابجایی ندارد. $AB \neq BA$

۲) در ضرب ماتریس ها دستور حذف معتبر نیست. $AB = AC \not\Rightarrow B = C$

۳) در ضرب ماتریس ها خاصیت توزیعی عمل ضرب نسبت به عمل جمع از چپ و از راست وجود دارد.

$$A(B+C)=AB+AC$$

۴) در ضرب ماتریس ها خاصیت شرکت پذیری وجود دارد.

$$(AB)C = A(BC)$$

۵) هرگاه حاصلضرب دو ماتریس برابر صفر شود نمی توان نتیجه گرفت که لااقل یکی از آنها برابر صفر است به عبارت دیگر حاصلضرب دو ماتریس ممکن است برابر صفر شود ولی هیچکدام از آنها برابر صفر نباشند. یعنی:

$$AB=\overline{O} \not\Rightarrow A=\overline{O} \quad \text{یا} \quad B=\overline{O}$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

مثال:

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & -۲ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}_{۳\times۲} \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}_{۲\times۲} = \begin{bmatrix} ۲\times۲+۱\times۰ & ۲\times۰+۱\times(-۱) \\ ۳\times۲+(-۲)\times۰ & ۳\times۰+(-۲)\times(-۱) \\ ۴\times۲+(-۱)\times۰ & ۴\times۰+(-۱)\times(-۱) \end{bmatrix}_{۳\times۲} = \begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ ۶ & ۲ \\ ۸ & ۱ \end{bmatrix}$$

(۸-۲) انواع خاص ماتریسها:

ماتریسهای سطری یا ستونی: ماتریسهایی که دارای یک سطر باشند سطری و ماتریسهایی که یک ستون داشته باشند ستونی می‌گویند.

حاصل ضرب یک ماتریس سطری در یک ماتریس ستونی در صورت قابل ضرب بودن یک عدد ثابت خواهد بود.

ماتریس قطری: ماتریسی مربعی (از درجه $n\times n$) است که به غیر از درایه‌های قطر اصلی بقیه درایه‌ها صفر باشد یعنی :

$$\begin{cases} a_{ij}=0 & i\neq j \\ a_{ij}\neq 0 & i=j \end{cases}$$

اگر در ماتریس قطری تمام درایه های قطری اصلی یک باشد ماترس همانی (یکه) خواهد بود، ماتریس یکه را با I نمایش می‌دهند و عضو بی تأثیر ضرب می‌باشد. IB=BI=B .

ماتریس صفر: ماتریسی است که تمام درایه های آن صفر باشد ماتریس صفر را با $O_{n\times m}$ نمایش می‌دهند.

$$A\pm O=A \quad , \quad A_{m\times n}\times O_{n\times p}=O_{m\times p}$$

(۸-۳) ماتریس ترانهاده (ترانسپوزه)

ترانهاده ماتریس: $A_{m\times n}$ ماتریسی است $n\times m$ که آن را با A' یا A^t نمایش می‌دهیم و سطرهای آن همان ستونهای ماتریسی A و ستونهای آن همان سطرهای ماتریس A می‌باشد به عبارت دیگر:

خواص ماتریسهای ترانسپوزه

اگر $A=\{a_{ij}\}$ در نتیجه خواهیم داشت $A'=\{a_{ji}\}$

۱) ترانهاده ماتریس قطری A همان ماتریس A می‌باشد. $(A')'=A$

۲) اگر یک ماتریس مربع با ترانهاده آن مساوی باشد یعنی $a_{ij}=a_{ijt}$ به آن ماتریس متقارن گویند.

۳) ماتریس متقارن که AA=A را ماتریس خود توان (هم قوه) گویند.

۴) $۱)[A_{n\times m}\times B_{m\times p}\times C_{p\times q}]'=C'_{q\times p}\times B'_{p\times m}\times A'_{m\times n}$

۵) $۲)\ (A_{n\times m}\pm C_{n\times m}\pm B_{n\times m})'=A'_{m\times n}\pm C'_{m\times n}\pm B'_{m\times n}$

۶) $(AB)'=B'A'$

۷) $\lambda\in R,(\lambda A)'=\lambda A'$

(۸-۴) دترمینان ماتریس

دترمینان یک ماتریس یک عدد (اسکالر) است و فقط برای ماتریسهای مربعی تعریف می‌شود و دترمینان A را با |A| نشان می‌دهند. عددی است که به هر ماتریس مربعی نسبت داده می شود و با dat A یا $|A|$ نشان می دهند.

دترمینان ماتریس 2×2: برابر است با حاصل ضرب قطر اصلی منهای حاصل ضرب قطر فرعی به عبارت دیگر:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

دترمینان ماتریس 3×3 (روش ساروس): برابر است با مجموع حاصل ضرب اقطار اصلی منهای مجموع حاصل ضرب اقطار فرعی برای تعیین قطر اصلی و فرعی دوبار ماتریس A در کنار هم نوشته و سه خط موازی قطر اصلی و سه خط موازی قطر فرعی

تعیین کننده اقطار اصلی و فرعی ماتریس خواهند بود.

مثال:

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\0 & 1 & 2\\3 & 0 & 1\end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\0 & 1 & 2\\3 & 0 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\0 & 1 & 2\\3 & 0 & 1\end{vmatrix} = [(1\times1\times1)+(-1\times2\times3)+(2\times0\times0)]-$$

$$[(2\times1\times3)+(-1\times1\times0)+(1\times2\times0)] = (1-6+0)-(6+0+0) = -11$$

روش ساروس: محاسبه دترمینان ماتریس های ۳×۳ به روش ساروس

$$A = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{12}\\a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{22}\\a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{32}\end{vmatrix}$$

$$\oplus \quad \oplus \quad \oplus$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

تذکر مهم: روش ساروس فقط و فقط در مورد ماتریسهای ۳×۳ اعتبار دارد.

(۸-۵) دترمینان ماتریسهای بزرگتر:

محاسبه دترمینان به روش کلی (بسط برحسب یک سطر و یا یک ستون)

قبل از توضیح این روش تعاریف زیر را بیان می کنیم.

الف) مینور هر عضو: به هر عضوی از یک ماتریس و یا یک دترمینان عددی نسبت می دهند که به آن مینور آن عضو می گویند. مینور هر عضو دترمینان کوچکتری است که از حذف سطر و ستونی که آن عضو در آنها قرار گرفته است به دست می آید. مینور عضو aij را با αij نشان می دهند.

$$A = \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} \quad a_{17}\ \text{مینور عضو} = \alpha_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

ب) برای تعیین محل هر عضو: برای محل یا جایگاه هر عضو از ماتریس یا دترمینان علامتی قائل می شوند که برای اولین عضو $\oplus$ و برای بقیه یک در میان ــــ و $\oplus$ می باشد. علامت محل هر عضو را می توان از فرمول $(-1)^{i+j}$ = علامت محل عضو aij به دست آورد.

$$\begin{vmatrix}+ & - & +\\- & + & -\\+ & - & +\end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix}+ & - & + & -\\- & + & - & +\\+ & - & + & -\\- & + & - & +\end{vmatrix}$$

ج) کوفاکتور هر عضو: برای هر عضو یک ماتریس یا یک دترمینان عددی به نام کوفاکتور در نظر می گیرند که از حاصلضرب مینور آن عضو در علامت محل آن عضو به دست می آید که کوفاکتور عضو aij را با Δij نشان می دهند.

$$aij\ \text{کوفاکتور هر عضو} = \Delta ij = (-1)^{i+j}\alpha ij$$

تذکر: از نظر سرعت در محاسبه دترمینان بهتر آن است که سطر و یا ستونی را انتخاب کنید که صفر بیشتری داشته باشد.

برای تعیین مقدار دترمینان ماتریسهای بزرگتر از 3×3 ابتدا باید با بحث کوفاکتور (همساز) آشنا باشید.

کوفاکتور (همساز یا هرعضو): همساز ماتریس A برای درایه a_{ij} به صورت روبرو تعریف می‌شود با C_{ij} نمایش می‌دهند:

$$\Delta ij = .C_{ij} = (-1)^{i+j}\,|M_{ij}|$$

ماتریس M_{ij} ماتریسی است که از حذف سطر i و ستون j بدست آمده است.

دترمینان ماتریس: برای تعیین مقدار ماتریس A یک سطر یا ستون را انتخاب کرده و مجموع حاصل ضرب درایـه $(a_{ij})j,i$ در همساز آن درایه (C_{ij}) ضرب می‌کنیم به عبارت دیگر:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij}$$ با انتخاب سطر I ام

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij}$$ با انتخاب ستون j ام

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -(0)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} + (0)\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} + (0)\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-12-1)-(-6-2) = -5$$

نکته مهم: برای تعیین دترمینان ماتریسها سطر یا ستونی را انتخاب کنید که دارای بیشترین صفر باشد(مثال بالا).

(۸-۶) قوانین خواص دترمینانها:

۱- اگر جای تمامی سطر و ستونها متناظر را عوض کنیم مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند: $|A| = |A'|$

۲- اگر تمامی عناصر یک سطر یا ستون ماتریس صفر باشد مقدار دترمینان صفر است.

۳- اگر تمامی عناصر یک سطر یا ستون ماتریس را در عدد ثابتی ضرب کنیم مقدار دترمینـان آن نیـز در آن عـدد ثابـت ضـرب می‌شود.

۴- اگر عدد ثابتی را در ماتریسی ضرب کنیم مقدار دترمینان آن برابر خواهد بود:

$$|kA_{n\times n}| = k^n\,|A_{n\times n}|$$

۴- اگر دو سطر یا دو ستون ماتریس را با هم جابجا کنیم مقدار دترمینان آن نیز در ۱- ضرب می‌شود.

۵- اگر دو سطر یا دو ستون از یک دترمینان مساوی باشد مقدار دترمینان صفر می‌باشد و همچـنین اگـر یـک سـطر یـا سـتون ماتریس مضرب یک سطر یا ستون دیگر ماتریس باشد دترمینان صفر است.

۶- دترمینان حاصل ضرب دو ماتریس مربعی برابر با حاصل ضرب دترمینانها آن دو ماتریس: $|AB|=|A||B|$

۷- دترمینان یک ماتریس قطری برابر حاصل ضرب عناصر اصلی قطری اصلی.

(۸-۷) مرتبه ماتریس (رتبه ماتریس): مرتبه ماتریس مربعی A برابر با بعد بزرگترین ماتریسی است کـه مـی‌تـوان در خـود ماتریس پیدا کرد به صورتی که : $|A_n| \neq 0$ باشد.

مثال: در ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **رتبه ماتریسی برابر دو است زیرا** $|A_3| = 0$ و $|A_2| = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = -6$

(۸-۸) معکوس یک ماتریس

اگر برای یک ماتریس مربع $A_{n\times n}$ معکوسی مانند A^{-1} وجود داشته باشد خواهیم داشت:

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I$$

نکته: ماتریس مربع A دارای معکوس خواهد بود هرگاه $|A|\neq 0$

معکوس ماتریسهای دو در دو (2×2):

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

معکوس ماتریسهای بزرگتر از (2×2):

الف) روش حذفی گاوس: برای پیدا کردن معکوس یک ماتریس در ابتدا، کار را به صورت [A|I] شروع کرد سپس با انجام عملیات مقدماتی سطری آن را به صورت [I|B] تبدیل خواهیم کرد که در این صورت $B=A^{-1}$ خواهد بود.

عملیات سطری مقدماتی:

۱- جابجایی دو سطر

۲- ضرب یک سطر در عددی ثابت

۳- به جای سطر iام k برابر سطر jام به علاوه سطر i ام را جایگزین کرد (k عدد ثابت است)

مثال:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]\xrightarrow{\frac{R_1}{2}}\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]\xrightarrow{R_2-R_1}\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & 1 \end{array}\right]\xrightarrow{\frac{2}{3}R_2}\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right]\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

(۹-۸) روش ماتریس الحاقی:

ماتریس الحاقی (وابسته) A را که با adjA نشان می‌دهنده برابر است با $adjA=(Cij)'$.

یادآوری: Cij ماتریسی است که درایه های آن از همسازهای ماتریس A تشکیل شده است و به آن ماتریس همساز (کوفاکتور) ماتریس A می‌گویند.

اگر A ماتریس معکوس پذیر باشد یعنی $|A|\neq 0$ در این صورت داریم $A^{-1}=\frac{1}{|A|}adjA$

مثال:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}\Rightarrow |A|=(0+6+6)-(9+0+4)=-1$$

$$Cij=\begin{bmatrix}0&-1&1\\2&-3&2\\3&-3&2\end{bmatrix}\left\{\begin{array}{l}c_{11}=(-1)^{1+1}\begin{bmatrix}3&3\\-2&-2\end{bmatrix}\\ \vdots\\ c_{33}=(-1)^{3\times3}\begin{bmatrix}0&-2\\1&3\end{bmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow C'ij=\begin{bmatrix}0&2&3\\-1&-3&-3\\1&2&2\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=-1\begin{bmatrix}0&2&3\\-1&-3&-3\\1&2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-2&-3\\1&3&3\\-1&-2&-2\end{bmatrix}$$

(۸-۱۰) خواص معکوس ماتریسها:

۱) $[A^{-1}]^{-1}=A$ ۲) $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$

۳) $[A']^{-1}=[A^{-1}]'$ ۴) $[AB]^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

(۸-۱۱) تعاریفی در مورد ماتریس ها:

۱) ماتریس منفرد: ماتریسی است مربعی که دترمینان آن برابر صفر باشد یعنی $|A|=0$

۲) ماتریس غیر منفرد یا وارون پذیر: اگر در یک ماتریس مربعی دترمینان آن صفر نباشد به آن ماتریس غیرمنفرد میگویند. $|A|\neq 0$

۳) ماتریس متقارن: اگر ترانهاده یک ماتریس با آن ماتریس برابر باشد آن ماتریس را متقارن می نامند. $A=A^T$

۴) ماتریس ضد متقارن یا آنتی متقارن: هرگاه قرینه ترانهاده ماتریس A برابر A شود، به آن ماتریس ضد متقارن می گویند و داریم: $A=-A^T$

۵) ماتریس پائین مثلثی: اگر در یک ماتریس مربعی تمام عضوهای بالای قطر اصلی صفر باشند به آن ماتریس پائین مثلثی گویند و یعنی $i<j\Rightarrow aij=0$

۶) ماتریس بالا مثلثی: اگر در یک ماتریس مربعی تمام عضوهای پایین قطر اصلی صفر باشند به آن ماتریس بالا مثلثی می گویند یعنی: $i>j\Rightarrow aij=0$

۷) ماتریس متعامد: اگر در ماتریس مربعی A داشته باشیم $A\,A^T=A^T\,A=I$ به آن ماتریس متعامد گویند.

تذکر: در ماتریس متعامد A ماتریس ترانهاده A^T و ماتریس وارون A^{-1} با هم برابرند یعنی:

$A^{-1}=A^T$

تذکر۲: دترمینان ماتریس متعامد A برابر ۱ یا ۱- می باشد ولی عکس آن درست نیست یعنی ممکن است دترمینان ماتریسی ۱± بشود ولی متعامد نباشد.

۸) اثر ماتریس: به مجموع عضوهای قطر اصلی هر ماتریس اثر آن ماتریس گویند.

(۸-۱۲) کاربردهای ماتریس:

استفاده از ماتریسها در Max یا Min توابع چند متغیره:

برای تابع n متغیره $f(x_1,x_2,...x_n)$ که در نقطه $(x_1,x_2,...x_n)$ مشتقهای جزئی آن صفر می‌باشد برای تعیین Max یا Min بودن از روش زیر استفاده می‌کنیم:

ابتدا دترمینانهای مینور اصلی آن را تشکیل می‌دهیم.

$$\Delta_1=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2},\Delta_2=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\end{vmatrix},\Delta_n=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\end{vmatrix}$$

در نقطه $A=(x_1,x_2,...,x_n)$

اگر $\Delta_1<0,\Delta_2>0,\Delta_3<0,.....$ باشدA، Max نسبی خواهد بود.

اگر $\Delta_1>0,\Delta_2>0,\Delta_3>0,.....$ باشدA ، Min نسبی خواهد بود.

اگر هیچیک از دو شرط بالا برقرار نباشد وضعیت تابع در اطراف نقطه مورد نظر می‌بایست بررسی شود.

مثال: Max یا Min تابع $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+x_1x_2-2x_3-7x_1+12$ **را بیابید:**

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1}&=2x_1+x_2-7=0\\ \frac{\partial f}{\partial x_2}&=4x_2+x_1=0\\ \frac{\partial f}{\partial x_3}&=2x_3-2=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned}x_1&=4\\x_2&=-1\\x_3&=1\end{aligned}\quad \begin{aligned}&\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}=2,\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}=4,\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}=2\\ &\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}=1,\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_3}=0,\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_3}=0\end{aligned}$$

$$\Delta_1=2>0$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{vmatrix}=7>0 \qquad \Rightarrow A=(A,-1,1)\ \text{Min}$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=14>0$$

ضرب لاگرانژ برای توابع n متغیره:

برای تعیین Max یا Min برای تابع $f(x_1,x_2,...,x_n)$ با قید $g(x_1,x_2,...,x_n)$ به روش زیر عمل می‌کنیم:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial x_1}-\lambda\frac{\partial y}{\partial x_1}=0\\ &\frac{\partial f}{\partial x_2}-\lambda\frac{\partial y}{\partial x_2}=0\\ &\frac{\partial f}{\partial x_n}-\lambda\frac{\partial y}{\partial x_n}=0\\ &-g(x)=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow X^0=(x_1,x_2,...x_n)$$

سپس دترمینان مرزی هشین آن را تشکیل می‌دهیم:

$$\Delta_{n+1}=\begin{vmatrix}0 & g_{x_1} & g_{x_2} & \cdots & g_{x_n}\\ g_{x_1} & f_{x_1x_2}-\lambda g_{x_2x_1} & f_{x_1x_2}-\lambda g_{x_2x_1} & \cdots & f_{x_1x_n}-\lambda g_{x_2x_n}\\ g_{x_2} & f_{x_1x_2}-\lambda g_{x_2x_1} & f_{x_1x_2}-\lambda g_{x_2x_1} & \cdots & f_{x_2x_n}-\lambda g_{n_2x_n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ g_{x_n} & f_{x_1x_n}-\lambda g_{x_1x_n} & f_{x_2x_n}-\lambda g_{x_2x_n} & \cdots & f_{x_nx_n}-\lambda g_{x_nx_n}\end{vmatrix}$$

اگر در نقطه $x_0=(x_1,x_2,...x_n)$

الف) اگر ..... > $Man, \Delta_3 > 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 >$ نسبی

ب) اگر ....0 > $Min, \Delta_3 < 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 < 0$ نسبی

ج) در غیر این دو صورت می‌بایست در اطراف نقطه مورد نظر بررسی صورت گرفت.

مثال: Max تابع $f(x_1,x_1,x_3) = x_1x_2 + x_1x_2 + x_2x_3$ را در صورتی که $x_1x_2x_3 - 125 = 0$ باشند راتعیین کنید:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = x_2 + x_3 - \lambda x_2x_3 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda\dfrac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 + x_3 - \lambda x_1x_3 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3} - \lambda\dfrac{\partial f}{\partial x_3} = x_2 + x_1 - \lambda x_1x_2 = 0 \\ -(x_1x_2x_3 - 125) = 0 \end{array}\right\} x_1 = x_2 = x_3 = 5 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{5}$$

$$f_{x_1x_1} = 0, f_{x_2x_2} = 0, f_{x_3x_3} = 0, f_{x_1x_2} = 1, f_{x_1x_3} = 1, f_{x_2x_3} = 1$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 25 & 25 \\ 25 & 0 & -1 \\ 25 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1250 \qquad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & 25 & 25 & 25 \\ 25 & 0 & -1 & -1 \\ 25 & -1 & 0 & -1 \\ 25 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1875$$

نقطه (5,5,5) Min نسبی می‌باشد.

دستور کرامر (برای محاسبه جواب معادلات چند مجهولی):

در این روش برای بدست آوردن جواب یک معادله به روش زیر عمل می‌کنیم:

برای x_i کسری با مخرج دترمینان ماتریس ضرایب (A) و صورت آن دترمینان ماتریس ضرایب با این تفاوت که به جای ستون ضرایب متناظر با مجهول x_i مقادیر ثابت جایگزین می‌شود یعنی در معادله AX=C خواهیم داشت:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ C_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ C_n & a_{n2} & \cdots & a_n \end{vmatrix}}{|A|}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & c_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & c_n & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}}{|A|}, x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & c_n \end{vmatrix}}{|A|}$$

مثال: مقادیر مجهول را در دستگاه روبرو بیابید:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_3 = -2 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (+4+1) - (-4-6) = 15$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{15} = \frac{(-2)-(8-2)}{15} = \frac{-8}{15}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}}{15} = \frac{(-2-12)-(2-2)}{15} = \frac{-14}{15}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{15} = \frac{(4+1)-(-6)}{15} = \frac{11}{15}$$

تستهای طبقه‌بندی شده فصل هشتم

رشته اقتصاد

۱ـ به ازای کدام مقدار a ماتریس $N=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ a & 1 & 2\\ a & -1 & 0\end{bmatrix}$ معکوس ندارد؟ (سراسری ۷٦)

۱) -۲　　۲) -۱　　۳) ۱　　٤) ۲

۲ـ ماتریس $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ مفروض است. در ماتریس A^{-1} درایه a_{22} کدام است؟ (سراسری ۷٦)

۱) $-\frac{1}{2}$　　۲) $-\frac{1}{4}$　　۳) $\frac{1}{4}$　　٤) $\frac{3}{4}$

۳ـ در ماتریس $A=\begin{bmatrix}1 & 6\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ مجموع مقادیر ویژه (خاص) کدام است؟ (سراسری ۷٦)

۱) -۵　　۲) -٤　　۳) ٤　　٤) ۵

٤ـ از معادله $\begin{bmatrix}x & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}$ مقدار x برابر کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) -۲　　۲) -۱　　۳) ۱　　٤) ۲

۵ـ اگر $A=[a_{ij}]_{4\times 4}$ و $|A|=4$ باشد، مقدار دترمینان ماتریس $2A$ برابر کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) ۸　　۲) ۱٦　　۳) ۳۲　　٤) ٦٤

٦ـ در معکوس ماتریس $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 0\end{bmatrix}$ عنصر a_{33} کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) -۳　　۲) -۱　　۳) ۰　　٤) ۱

۷ـ مرتبه $(Rank)$ ماتریس $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ کدام است؟ (سراسری ۷۸)

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　٤) ٤

۸ـ مقدار x ازمعادله $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & x & 1\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ -3\end{bmatrix}=0$ کدام است؟ (سراسری ۷۸)

۱) $\frac{2}{3}$　　۲) $\frac{4}{5}$　　۳) $\frac{3}{4}$　　٤) $\frac{7}{2}$

۹ـ دستگاه همگن مقابل به ازای کدام مقدار k جواب‌های غیر صفر نیز دارد؟ (سراسری ۷۸)

$$\begin{cases} x+y+z=۰ \\ x+۲y+kz=۰ \\ x-y+۲z=۰ \end{cases}$$

۱) ۰ ‌‌ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ‌‌ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ‌‌ ۴) ۲

۱۰ـ مقدار دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ -۱ & ۱ & ۲ \\ ۲ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) ۸ ‌‌ ۲) ۱۰ ‌‌ ۳) ۱۴ ‌‌ ۴) ۱۶

۱۱ـ مرتبه $(Rank)$ هر ماتریس بصورت $A=[a_{ij}]_{۵\times۶}$ کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) ۵ ‌‌ ۲) ۶ ‌‌ ۳) کمتر یا مساوی ۵ ‌‌ ۴) کمتر یا مساوی ۶

۱۲ـ دستگاه همگن خطی $A_{n\times n}X_{n\times ۱}=۰$ مفروض است. این دستگاه در چه صورت بینهایت جواب دارد؟ (سراسری ۷۹)

۱) $|A|=۰$ ‌‌ ۲) $|A|\neq ۰$ ‌‌ ۳) $A=A'$ ‌‌ ۴) $A=A^{-۱}$

۱۳ـ مقدار دترمینان $\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۴ & ۹ & ۱۶ \\ ۱ & ۸ & ۲۷ & ۶۴ \end{vmatrix}$ برابر است با؟ (سراسری ۸۰)

۱) ۱۰ ‌‌ ۲) ۱۲ ‌‌ ۳) ۱۶ ‌‌ ۴) ۲۴

۱۴ـ اگر B, A دو ماتریس مربع، $AB=\begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۱ \\ ۶ & ۷ & ۹ \\ ۰ & ۵ & ۶ \end{bmatrix}$ و $|A|=۵$ باشد آنگاه $|B|$ چقدر است؟ (سراسری ۸۰)

۱) ۱۵− ‌‌ ۲) ۳ ‌‌ ۳) ۵ ‌‌ ۴) ۱۰

۱۵ـ اگر $A\times\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A کدام است؟ (سراسری ۸۰)

۱) $A=\begin{bmatrix} -۲ & ۵ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ ‌‌ ۲) $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۵ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ ‌‌ ۳) $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۲ & ۵ \end{bmatrix}$ ‌‌ ۴) $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۵ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$

۱۶ـ مرتبه ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۷ & -۱ \\ ۴ & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۱۴ & -۲ \end{bmatrix}$ برابر است با (سراسری ۸۰)

۱) $r=۰$ ‌‌ ۲) $r=۱$ ‌‌ ۳) $r=۲$ ‌‌ ۴) $r=۳$

۱۷ـ اگر B, A دو ماتریس وارون پذیر باشند. کدام رابطه صحیح است؟ (سراسری ۸۱)

۱) $(A.B)'=A'.B'$ ‌‌ ۲) $(A.B)^{-۱}=A^{-۱}.B^{-۱}$

۳) $adi(AB)=(adjB)(adjA)$ ‌‌ ۴) $k\in R, k|A|=|kA|$

۱۸ـ اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و k عدد طبیعی باشد. حاصل $A^{۲k}$ کدام است؟ (سراسری ۸۱)

۱) A ۲) $2^k A$ ۳) $2^k I$ ۴) $2^{2k} I$

۱۹ـ به ازای کدام مجموعه مقادیر a، دستگاه معادلات زیر جواب غیر صفر دارد؟ (سراسری ۸۱)

$$\begin{cases} ax+y+2z=0 \\ x+2y+az=0 \\ x-y-2z=0 \end{cases}$$

۱) R ۲) $\{-1,4\}$ ۳) $\{1,4\}$ ۴) $\{a: a>0\}$

۲۰ـ بزرگترین مقدار خاص (ویژه) برای ماتریس $A=\begin{bmatrix} -3 & -9 & 12 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ کدام است؟ (سراسری ۸۱)

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۲۱ـ رتبه ماتریس $A=\begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -4 & 6 & 10 \end{bmatrix}$ برابر است با: (سراسری ۸۲)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۲ـ نوع ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ کدام است؟ (سراسری ۸۲)

۱) شبه معین منفی ۲) نامعین ۳) معین منفی ۴) معین مثبت

۲۳ـ اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس الحاقی A کدام است؟ (سراسری ۸۲)

۱) ۹ ۲) $\frac{1}{3}$ ($-\frac{1}{3}$ ۴) ۳-

۲۴ـ دستگاه $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 3x-y+z=3 \\ x-5y+3z=a \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a بیشمار جواب دارد؟ (سراسری ۸۲)

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۲-

۲۵ـ مقدار دترمینان $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ برابر است با: (سراسری ۸۳)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۶ـ مرتبه ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 8 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ کدام است؟ (سراسری ۸۳)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۷ـ اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، $A^{-۱}B^{-۱}$ کدام است؟ (سراسری ۸۳)

۱) $\begin{bmatrix} -\frac{۲}{۳} & \frac{۱}{۳} \\ \frac{۲}{۳} & -\frac{۲}{۳} \end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix} \frac{۲}{۳} & -\frac{۱}{۳} \\ -\frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} \end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & -\frac{۲}{۳} \\ -\frac{۲}{۳} & \frac{۱}{۳} \end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix} -\frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} \\ \frac{۲}{۳} & -\frac{۱}{۳} \end{bmatrix}$

۲۸ـ یکی از ریشه‌های معادله مفسر ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ کدام است؟ در صورتی که دو ریشه دیگر آن $\lambda_۱=\lambda_۲=۱$ باشد. (سراسری ۸۳)

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

رشته مدیریت

۱ـ اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد مجموع عناصر روی قطر اصلی **A.B** کدام است؟(سراسری ۷۴)

۱) ۶
۲) ۱۳
۳) ۱۲
۴) ۷

۲ـ مقدار دترمینان $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ کدام است ؟(سراسری ۷۴)

۱) ۱۴-
۲) ۸
۳) ۱۰-
۴) ۱۲

۳ـ معکوس ماتریس $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ کدام است ؟ (سراسری۷۴)

۱) $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$
۲) $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$
۳) $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$
۴) $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$

۴ـ دستگاه $\begin{cases} ax+y=0 \\ x-2y=0 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار **a** بیشمار جواب دارد ؟(سراسری۷۴)

۱) -1
۲) $\frac{-1}{2}$
۳) 2
۴) 1

۵ـ اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ مجموع عناصر قطری معکوس ماتریس **A** کدام است؟(سراسری ۷۵)

۱) $\frac{2}{5}$
۲) $\frac{4}{5}$
۳) $\frac{5}{6}$
۴) 1

۶ـ مرتبه ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$ کدام است؟(سراسری۷۵)

۱) 1　　۲) 2　　۳) 3　　۴) 4

۷-به ازای کدام مقدار m دستگاه $\begin{cases} mx+y-z=0 \\ x-y+z=0 \\ 2x-2y+z=0 \end{cases}$ دارای جواب غیر صفر است (سراسری۷۵)

۱) 2　　۲) 1　　۳) -1　　۴) -2

۸- به ازای کدام مقدار a ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & 2 \\ a-2 & 1 \end{bmatrix}$ معکوس ندارد (سراسری ۷۶)

۱) 1　　۲) 2　　۳) 3　　۴) 4

۹- اگر $A=\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$ باشد مقدار دترمینان AA^t کدام است ؟(سراسری۷۶)

۱) 11　　۲) 12　　۳) 121　　۴) 144

۱۰- اگر $A=\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$ باشد مجموع عناصر معکوس ماتریس Aکدام است ؟(سراسری۷۶)

۱) $\frac{-29}{11}$　　۲) $\frac{-1}{11}$　　۳) $\frac{29}{11}$　　۴) $\frac{1}{11}$

۱۱- دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ برابر کدام است ؟(سراسری ۷۷)

۱) -6　　۲) -2　　۳) 2　　۴) 6

۱۲- مجموع عناصرسطر اول ماتریس A^2 کدام است؟ $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (سراسری ۷۶)

۱) 12　　۲) 13　　۳) 6　　۴) 5

۱۳- اگر $A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ باشد مجموع عناصر A^{-1} برابر کدام است؟(سراسری۷۷)

۱) 10　　۲) 8　　۳) 2　　۴) 1

۱٤-معادله ماتریسی **AX=0** در کدام حالت فقط یک دسته جواب صفر دارد؟(سراسری ۷۷)

۱) $|A|=0$　　۲) $|A|\neq 0$　　۳) $A^{-1}=0$　　۴) $|A^{-1}|=0$

۱۵-از رابطه ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & Y \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & X & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}=0$ رابطه بین **X,Y** کدام است ؟(سراسری ۷۸)

۱) $X+Y+10=0$　　۲) $6X+Y+10=0$

۳) $2X-Y+4=0$　　۴) $X+2Y+1=0$

۱۶-اگر $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&3\end{bmatrix}$ باشد در ماتریس A^{-1} درایه a_{13} کدام است؟(سراسری۷۸)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) 0 ۳) 1 ۴) 3

۱۷-سه بردار $\vec{c}(1,1,1),\vec{b}(k,1,0),\vec{a}(1,2,3)$ به ازای کدام مقدار k مستقل خطی نیست؟ (سراسری۷۸)

۱) $k\neq 1$ ۲) k=1 ۳) $k\neq 2$ ۴) k=2

۱۸- به ازای کدام مقدار m دستگاه زیر جواب غیر صفر دارد؟ (سراسری ۷۹)

$$\begin{cases}mx+y-z=0\\x-y+z=0\\2x-2y+z=0\end{cases}$$

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

۱۹- در ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&1&1\\1&2&1\end{bmatrix}$ می‌دانیم $|A|=3$ است مجموع عناصر روی قطر ماتریس A^{-1} کدام است؟ (سراسری۷۹)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{5}{4}$

۲۰- اگر $A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&2\\2&1&0\end{bmatrix}$ باشد در ماتریس AA' مجموع عناصر روی قطر اصلی کدام است؟(سراسری ۸۰)

۱) صفر ۲) 8 ۳) 12 ۴) 16

۲۱-در سؤال قبل مقدار دترمینان A کدام است ؟ $A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&2\\2&1&0\end{bmatrix}$ (سراسری ۸۰)

۱) 4 ۲) 6 ۳) 8 ۴) 10

۲۲-ماتریس $A=\begin{bmatrix}2&3\\1&4\end{bmatrix}$ مفروض است . مجموع عناصر روی قطر A^{-1} برابر است با (سراسری۸۰)

۱) $\frac{7}{5}$ ۲) $\frac{6}{5}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۲۳- کدام یک از ماتریسهای زیر فاقد معکوس هستند؟(سراسری ۸۱)

۱) $\begin{vmatrix}3&-2\\4&5\end{vmatrix}$ ۲) $\begin{vmatrix}2&5\\-2&-5\end{vmatrix}$ ۳) $\begin{vmatrix}2&5\\-2&4\end{vmatrix}$ ۴) $\begin{vmatrix}-2&1\\3&-1\end{vmatrix}$

۲۴- کدام یک ازروابط زیردر جبر ماتریسها صحیح است ؟(سراسری۸۱)

۱) BA=AB ۲) $(AB)'=A'B'$
۳) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ ۴) $|kA_{n\times n}|=k|A_{n\times n}|$

۲۵-مقدار دترمینان $\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial P} & \frac{\partial X}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Y}{\partial P} & \frac{\partial Y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ وقتی که $Y = PSIN\theta, X = PCOS\theta$ باشد برابر است با (سراسری ۸۱)

۱) P ۲) P^2 ۳) $P\cos\theta$ ۴) $P\sin\theta$

۲۶-مقدار b از رابطه $[5,1] = [a,b]\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ کدام است ؟(سراسری۸۱)

۱) 1 ۲) -1 ۳) 2 ۴) -2

۲۷- مرتبه (Rank) ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ برابر است با (سراسری۸۱)

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

۲۸-فرض کنید A ماتریس مربعی وارون پذیر باشد کدام یک از ماتریسهای زیر متقارن است؟ (سراسری ۸۲)

۱) $A - A^{-1}$ ۲) $A - A^T$ ۳) $A + A^T$ ۴) $A + A^{-1}$

۲۹-رتبه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 6 & -1 \\ 10 & 3 & 9 & 7 \\ 16 & 4 & 12 & 15 \end{bmatrix}$ کدام است؟ (سراسری۸۲)

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

۳۰-در رابطه $0 = [X,1,1]\times\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} X \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ مقدار X کدام است (سراسری۸۲)

۱) $2\pm\sqrt{2}$ ۲) $3\pm\sqrt{3}$ ۳) $-3\pm\sqrt{5}$ ۴) $-3\pm\sqrt{7}$

۳۱- $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ آنگاه مجموع عناصر قطر ماتریس A^{-1} کدام است؟ (سراسری ۸۲)

۱) 1 ۲) 3 ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۳۲- مقدار x از معادله $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ برابر است با...... (سراسری ۸۳)

۱) 2 ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) 1 ۴) $\frac{2}{3}$

۳۳- در دستگاه $AX = B$ اگر $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ، آنگاه x+y کدام است؟ (سراسری ۸۳)

۱) 6 ۲) 7 ۳) 8 ۴) 9

۳٤- اگر داشته باشیم $A=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&1&1\\1&1&2\end{bmatrix}$ در ماتریس الحاقی adj A مجموع عناصر روی قطر کدام است؟ (سراسری ۸۳)

۱) 1- ۲)صفر ۳) 1 ٤) 2

رشته حسابداری

۱ـ به ازای کدام مقدار n ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱&۲&n\\۰&n&۲\\۱&۱&۱\end{bmatrix}$ معکوس ندارد؟ (سراسری ۷٦)

۱) ۲- و ۱- ۲) ۲- و ۱ ۳) ۲ و ۱- ٤) ۲ و ۱

۲ـ ماتریس $A=\begin{bmatrix}٤&۲&۱\\۱&۲&-۱\\۱&۰&۱\end{bmatrix}$ مفروض است، در ماتریس A^{-1} درایه $a_{۲۳}$ کدام است؟ (سراسری ۷٦)

۱) $-\frac{۵}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ٤) $\frac{۵}{۲}$

۳ـ در ماتریس $A=\begin{bmatrix}۳&۲\\۵&٤\end{bmatrix}$ مجموع مقادیر ویژه کدام است؟ (سراسری ۷٦)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ٤ ٤) ۷

٤ـ جواب معادله $\begin{vmatrix}۲&۱&x\\٤&۲&٤\\۱&۰&۱\end{vmatrix}=۰$ کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ٤) ٤

۵ـ اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۲\\۲&۱\end{bmatrix}$ باشد، دترمینان $|AA'|$ کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) ۳ ۲) ۹ ۳) ۱٦ ٤) ۲۵

٦ـ مرتبه ماتریس $A=\begin{vmatrix}۳&۱&۲&۱\\۳&۱&۲&۱\\۳&۱&۲&۱\\۰&۰&۰&۰\end{vmatrix}$ برابر کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ٤) ۳

۷ـ در معکوس ماتریس $A=\begin{vmatrix}۳&۱&-۲\\۲&۱&۰\\۱&۰&۰\end{vmatrix}$، عنصر $a_{۲۲}$ کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ٤) ۱

۸ـ اگر $A=[1,2,3]\begin{bmatrix}1&2&1\\2&-1&0\\1&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ باشد، مقدار A کدام است؟ (سراسری ۷۸)

۱) ۳۸ ۲) ۳۶ ۳) ۲۵ ۴) ۲۴

۹ـ اگر داشته باشیم $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{bmatrix}$ ، مجموع عناصر A^{-1} کدام است؟ (سراسری ۷۸)

۱) $\frac{7}{8}$ ۲) $\frac{7}{4}$ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۰ـ به ازای کدام مقدار k دستگاه معادلات $\begin{cases}x+2y+kz=0\\x-y+z=0\\2x+y-z=0\end{cases}$ جواب‌های غیر صفر دارد؟ (سراسری ۷۸)

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

۱۱ـ اگر داشته باشیم $\begin{vmatrix}a&0&1\\1&2&-1\\2&1&3\end{vmatrix}=0$ مقدار a کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $-\frac{5}{7}$ ۴) $\frac{3}{7}$

۱۲ـ اگر $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&2&1\\1&3&2\end{bmatrix}$ مجموع عناصر روی قطر ماتریس A^2، کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) ۳۳ ۲) ۲۹ ۳) ۹ ۴) ۱۸

۱۳ـ می‌دانیم دترمینان ماتریس $C=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{bmatrix}$ برابر ۱- است، مجموع عناصر سطر اول ماتریس معکوس آن کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) ۲ ۲) ۱- ۳) ۰ ۴) ۲-

۱۴ـ اگر $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&-1\\1&0&1\end{bmatrix}$ باشد، مقدار دترمینان $|A|$ برابر است با: (سراسری ۸۰)

۱) ۸ ۲) ۶- ۳) ۴- ۴) ۲-

۱۵ـ در ماتریس A از سوال قبل مجموع عناصر قطری ماتریس A^{-1} کدام است؟ (سراسری ۸۰)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۶ـ مقدار x از معادله $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ 1\\ 1\end{bmatrix}=0$ برابر است با: (سراسری ۸۰)

۱) -1 ۲) 0 ۳) 1 ۴) 2

۱۷ـ دستگاه همگن $A_{n\times n}.X_{n\times 1}=0$ در کدام حالت بیشمار در جواب دارد؟ (سراسری ۸۰)

۱) $|A|\neq 0$ ۲) $A=A'$ ۳) $|A|=0$ ۴) $A=A^{-1}$

۱۸ـ از معادله $\begin{bmatrix}x & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 4\\ 2\end{bmatrix}=0$ ، مقدار x کدام است؟ (سراسری ۸۱)

۱) 17 ۲) -17 ۳) $\frac{17}{3}$ ۴) $-\frac{17}{3}$

۱۹ـ مقادیر ویژه ماتریس $B=\begin{bmatrix}13 & -13 & 5\\ 0 & 4 & 0\\ -15 & 9 & -7\end{bmatrix}$ کدام است؟ (سراسری ۸۱)

۱) $4,8,2$ ۲) $-2,8,4$ ۳) $4,-8,2$ ۴) $4,-8,-2$

۲۰ـ ماتریس $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & -2\\ 0 & 3 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 3 & -2\end{bmatrix}$ مفروض است. مرتبه ماتریس A، کدام است؟ (سراسری ۸۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۱ـ اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}$ باشد. درایه a_{31} در ماتریس A^{-1} کدام است؟ (سراسری ۸۱)

۱) $-\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{2}{8}$ ۳) $\frac{3}{8}$ ۴) $-\frac{5}{8}$

۲۲ـ اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ ماتریس $A^{-1}B^{2}$ کدام است؟ (سراسری ۸۲)

۱) $\begin{bmatrix}2 & 4\\ 6 & 5\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}\frac{9}{2} & 2\\ \frac{7}{2} & \frac{3}{2}\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & -\frac{3}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{7}{5}\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}\frac{4}{5} & \frac{8}{5}\\ \frac{8}{5} & -\frac{4}{5}\end{bmatrix}$

۲۳ـ علامت ماتریس $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ کدام است؟ (سراسری ۸۲)

۱) نامعین ۲) معین مثبت ۳) معین منفی ۴) شبه معین مثبت

۲۴ـ به ازای چه مقدار k دستگاه زیر سازگار است؟ (سراسری ۸۲)

$$\begin{cases} x+2y=k \\ 2x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$$

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۲۵ـ مقدار x از معادله $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ کدام است؟ (سراسری ۸۳)

۱) ۲− ۲) ۱− ۳) ۱ ۴) ۲

۲۶ـ اگر داشته باشیم $A^2 = A$ آنگاه A کدام ماتریس است؟ (سراسری ۸۳)

۱) هم قوه ۲) برگردان ۳) شبه متقارن ۴) بی اثر در جمع

۲۷- اگر داشته باشیم $AX = B$ و $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ مقدار $x-y$ کدام است؟ (سراسری ۸۳)

۱) ۴− ۲) ۳− ۳) ۲ ۴) ۴

۲۸- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$، آنگاه مجموعه عناصر قطری ماتریس A^2 یعنی $TV(A^2)$ کدام اس؟ (سراسری ۸۳)

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۳۶

۲۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، درایه (عنصر) واقع در سطر دوم و ستون سوم ماتریس A^{-1} کدام است؟ (حسابداری ۸۴)

۱) $\frac{-3}{16}$ ۲) $\frac{-1}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{3}{16}$

۳۰ـ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس $A.A^t$ کدام است؟ (حسابدای ۸۴)

۱) ۰ ۲) ۲۳۶ ۳) ۲۳۷ ۴) نشدنی

۳۱ـ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس X از رابطه $AX = I$ کدام است؟ (I ماتریس یکه از مرتبه ۲) (مدیریت ۸۴)

۱) $\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

۳۲ـ حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ کدام است؟ (مدیریت ۸۴)

۱) ۰ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۳۳ـ اگر A یک ماتریس مربع (ضد متقارن) و ترانهاده آن A' باشد، آنگاه $A-A'$ کدام است؟ (اقتصاد ۸٤)

۱) متقارن ۲) شبه متقارن ۳) متعامد ٤) همقوه

۳٤ـ مقدار x از معادله زیر کدام است؟ (اقتصاد ۸٤)

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ٤) ۵

۳۵ـ در ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ مجموع درایه های قطری ماتریس A^{-1} کدام است؟ (حسابداری ۸۵)

۱) -1 ۲) -2 ۳) $\frac{-2}{3}$ ٤) $-\frac{4}{3}$

۳٦ـ از نامساوی $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} < 0$ مقدار x کدام است؟ (حسابداری اقتصاد ۸۵)

۱) $x<-2$ ۲) $x<-1$ ۳) $x<1$ ٤) $x<3$

۳۷- اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ باشد $A.\mathrm{adj}A$ برابر کدام است؟ ($\mathrm{adj}A$ ماتریس الحاقی است) (اقتصاد ۸۵)

۱) ۲ ۲) $2I_3$ ۳) ۸ ٤) $8I_3$

۳۸ـ اگر $f(\lambda)=0$ معادله مفسر ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $f(1)$ کدام است؟ (اقتصاد ۸۵)

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۱ ٤) ۲

۳۹ـ اگر $A=\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، به ازای کدام مقادیر λ ماتریس $A-\lambda I$ وارون پذیر نیست؟ (I ماتریس واحد است).

(حسابداری و مدیریت ۸٦)

۱) ۲,۳,۵ ۲) ۱,۴,۳ ۳) ۲,۴,۵ ٤) ۳,۴,۵

٤۰ـ اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $A^2-5A+12I$ ، کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ۸٦)

۱) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ٤) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

٤۱- اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس x از معادله ماتریسی $A.X=A^{-1}$ کدام است؟

(حسابداری و مدیریت ۸٦)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ٤) $\frac{1}{2}$

۴۲- رتبه یک ماتریس عبارت است از: (اقتصاد ۸۶)

۱) درجه بزرگترین دترمینان استخراجی از ماتریس که مخالف صفر است.

۲) درجه کوچکترین دترمینان استخراجی از ماتریس که مخالف صفر است.

۳) درجه بزرگترین دترمینان استخراجی از ماتریس که موافق صفر است.

۴) درجه کوچکترین دترمینان استخراجی از ماتریس که موافق صفر است.

۴۳- اگر A یک ماتریس مربع باشد، $A-A'$ کدام ماتریس است؟ (اقتصاد ۸۶)

۱) شبه متقارن ۲) عددی ۳) قطری ۴) متقارن

۴۴- کدام گزینه در مورد یک دترمینان درجه n صادق نیست؟ (اقتصاد ۸۶)

۱) $|A|=|A'|$

۲) اگر k برابر سطر دلخواهی بر K' برابر سطر دیگری اضافه شود مقدار دترمینان تغییر نمی کند.

۳) اگر جای هر دو سطر ماتریس را عوض کنیم علامت دترمینان تغییر می کند.

۴) اگر عناصر یک سطر را در همسازی های متناظر سطر دیگری ضرب و با هم جمع کنیم حاصل صفر است.

۴۵- مقداو دترمینان $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=|A|$ کدام است؟ (اقتصاد ۸۶)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) صفر ۴) ۶

پاسخ تشریحی تستهای طبقه‌بندی شده فصل هشتم

رشته اقتصاد

۱ـ گزینه ۲ صحیح است. ماتریس مورد نظر زمانی معکوس ندارد که $|N| = 0$ باشد.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 2 \\ a & -1 & 0 \end{vmatrix} = (0+4a-a)-(0-2+a)=0 \Rightarrow 3a+2-a=0 \Rightarrow a=-1$$

۲ـ گزینه ۱ صحیح است. اگر درایه مورد نظر را با a_{22}^{-1} نشان دهیم خواهیم داشت:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}N' \quad , \quad a_{22}^{-1}=\frac{1}{|A|}.n_{22}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=4 \quad , \quad n_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2$$

$$a_{22}^{-1}=\frac{1}{4}(-2)=-\frac{1}{2}$$

۳ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$\begin{vmatrix} 1-k & 6 \\ 3 & 4-k \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (1-k)(4-k)-18=0 \Rightarrow k^2-5k-13=0$$

$$S=k_1+k_2=-\frac{b}{a}$$

$$k_1+k_2=-\frac{-5}{1}=5$$

۴ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$\begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix} x-1 & 2x+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}=0 \Rightarrow -x+1+4x+2=0 \Rightarrow 3x+3=0 \Rightarrow x=-1$$

۵ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$|kA|=k^n|A|$$

$$|A|=4 \Rightarrow |2A|=2^n|A|=2^4\times 4=64$$

۶ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}N' \Rightarrow a_{33}^{-1}=\frac{1}{|A|}.n_{33}$$

$$|A|=3 \quad , \quad n_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-3 \Rightarrow a_{33}^{-1}=\frac{1}{3}\times(-3)=-1$$

۷ـ گزینه ۲ صحیح است.

$|A_4|=0$ زیرا یک سطر ماتریس همگی درایه‌هایش صفر است.

$$|A_3|=0 \quad , \quad |A_2|=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=4-2=2\neq 0 \Rightarrow r(A)=2$$

۸ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & x & 1\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ -3\end{bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix}۴ & ۲+x & ۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ ۲\\ -۳\end{bmatrix}=۰ \Rightarrow ۴+۴+۴+۲x-۱۵=۰ \Rightarrow x=\frac{۷}{۲}$$

۹ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & k\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=0 \Rightarrow (4+k-1)-(2-k+2)=0 \Rightarrow 2k-1=0 \Rightarrow k=\frac{1}{2}$$

۱۰ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=(1+8-1)-(-2-2-2)=8+6=14$$

۱۱ـ گزینه ۳ صحیح است.

اگر $A_{m\times n} \Leftarrow rank(A)\leq \min(m,n)$

پس $\quad$ رتبه A $\leq \min(5,6)=5$

۱۲ـ گزینه ۱ صحیح است.

دستگاه همگن خطی زمانی دارای بینهایت جواب است که دترمینان آن برابر صفر شود.

۱۳-گزینه ۲ صحیح است.

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 9 & 16\\ 1 & 8 & 27 & 64\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{قرینه سطر اول را به سطرهای ۲ و ۳ و ٤ اضافه می‌کنیم.}}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 8 & 15\\ 0 & 7 & 26 & 63\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{نسبت به ستون اول بسط می‌دهیم.}}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 8 & 15\\ 7 & 26 & 63\end{vmatrix}=(1\times8\times63+3\times3\times26+2\times15\times7)-(3\times8\times7+2\times3\times63+1\times15\times26)=12$$

۱۴ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$|AB|=|A|\,|B|$$

$$|AB|=\begin{vmatrix}5 & 0 & 1\\ 6 & 7 & 9\\ 0 & 5 & 6\end{vmatrix}=(210+0+30)-(0+225+0)=240-225=15$$

$$15=5|B| \Rightarrow |B|=3$$

۱۵ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$A\times\begin{bmatrix}-1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-a & 2a+b\\-c & 2c+d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

$$-a=2\Rightarrow a=-2 \qquad 2a+b=1\Rightarrow b=5$$
$$-c=-1\Rightarrow c=1 \qquad 2c+d=1\Rightarrow d=-1$$
$$A=\begin{bmatrix}-2 & 5\\1 & -1\end{bmatrix}$$

۱۶ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$|A_3|=0 \quad , \quad |A_2|\neq 0$$

چون دترمینان مرتبه دوم برابر صفر نیست پس رتبه ماتریس ۲ می‌باشد.

۱۷ـ گزینه ۳ صحیح است.

اگر دو ماتریس A و B وارون پذیر و مربعی و هم مرتبه باشند: $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

اگر دو ماتریس A و B مربعی و هم مرتبه باشند: $(AB)'=B'A'$

اگر دو ماتریس A و B مربعی و هم مرتبه باشند: $\mathrm{adj}(AB)=\mathrm{adj}A\times\mathrm{adj}B$

اگر $k\in R$ و A ماتریس مربعی مرتبه n باشند: $|kA|=k^n|A|$

۱۸ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}-1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=2I$$
$$A^4=A^2\times A^2=2I\times 2I=4I$$

پس می‌توان گفت $\Rightarrow A^{2k}=2^kI$

۱۹ـ گزینه ۲ صحیح است. شرط وجود جواب‌های غیر صفر در یک دستگاه معادلات همگن آن است که دترمینان ماتریس ضرایب برابر صفر باشد:

$$|A|=\begin{vmatrix}a & 1 & 2\\1 & 2 & a\\1 & -1 & -2\end{vmatrix}=0\Rightarrow(-4a+a-2)-(-2+a^2+4)=0$$
$$a^2-3a-4=0\Rightarrow a=-1,4$$

۲۰ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-3-\lambda & -9 & 12\\1 & 3-\lambda & 4\\0 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=[(-3-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda)+0+0]-[-9(1-\lambda)+0+0]=0$$
$$(-3-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda)+9(1-\lambda)=0\Rightarrow(1-\lambda)[(-3-\lambda)(3-\lambda)+9=0]$$
$$1-\lambda=0\Rightarrow\lambda=1$$
$$(-3-\lambda)(3-\lambda)+9=0\Rightarrow-9+\lambda^2+9=0\Rightarrow\lambda=0$$

پس بزرگترین مقدار برای ماتریس A مقدار $\lambda=1$ می‌باشد.

۲۱ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$2R_1=R_3\Rightarrow|A_3|=0$$

همچنین: $|A_2|=0$

ولیکن دترمینان $|A_1|=1$ است پس رتبه ماتریس یک است.

۲۲ـ گزینه ۴ صحیح است.

برای ماتریس A، ماتریس‌های H_i (هشین) را تشکیل داده و دترمینان‌های آن‌ها را حساب می‌کنیم.

H_1: با حذف سطر و ستون اول ماتریس A بدست می‌آید: $H_1=\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}\Rightarrow \det(H_1)=3\times 4=12>0$

H_2: با حذف سطر و ستون اول H_1 بدست می‌آید: $H_2=[4]\Rightarrow \det(H_2)=4>0$

چون $H_1>0$ و H_2 پس ماتریس A معین و ثابت است.

۲۲ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\2 & 3 & 4\\-1 & -1 & -2\end{bmatrix}$$

$$\text{A همساز}=N=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\1 & 3 & 1\\1 & -6 & 4\end{bmatrix}$$

$$\text{A الحاقی}=N'=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\0 & -3 & -6\\1 & 1 & 4\end{bmatrix}$$

$$|N'|=\begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\0 & -3 & -6\\1 & 1 & 4\end{vmatrix}=(24+0-6)-(-3+12+0)=9$$

۲۴-گزینه ۲ صحیح است.

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 1\\3 & -1 & 1 & 3\\1 & -5 & 3 & a\end{array}\right]\xrightarrow[-R_1+R_3]{-3R_1+R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 1\\0 & -7 & 4 & 0\\0 & -7 & 4 & a-1\end{array}\right]\xrightarrow{-R_2+R_3}$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 1\\0 & -7 & 4 & 0\\0 & 0 & 0 & a-1\end{array}\right]$$

از آنجایی که تمام ضرایب سطر سوم برابر صفر می‌باشد به ازای $a-1=0$ یعنی $a=1$ دستگاه معادلات بیشمار جواب دارد.

۲۵ـ گزینه ۴ صحیح است. دترمینان را بر حسب سطر اول بسط می‌دهیم:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\2 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1 & 2\\1 & 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=(1)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 2\\1 & 2 & 1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 1 & 2\\1 & 1 & 1\end{vmatrix}+(1)\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 1 & 2\\1 & 1 & 1\end{vmatrix}-(1)\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

$$[(1+2+2)-(1+4+1)]-2[(2+2+2)-(1+8+1)]+[(2+2+1)-(1+4+1)]-[(4+1+1)-(2+2+1)]$$
$$=-1-2(-4)+(-1)-1=5$$

۲۶ـ گزینه ۲ صحیح است.

۲۷ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$B=I\Rightarrow B^{-1}=I\Rightarrow A^{-1}B^{-1}=A^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

۲۸ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$|A-\lambda I|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\left[(2-\lambda)^3+1+1\right]-\left[(2-\lambda)+(2-\lambda)+(2-\lambda)\right]=0$$

$$8-12\lambda+6\lambda^2-\lambda^3+2-6+3\lambda=0\Rightarrow-\lambda^3+6\lambda^2-9\lambda+4=0$$

چنانچه معادله درجه سوم مجموع ضرایب صفر باشد در این صورت چند جمله‌ای بر $\lambda-1$ بخش پذیر است. و چون $\lambda_2=\lambda_3=1$ پس می‌توان گفت که عبارت بر $(\lambda-1)^2$ بخش‌پذیر است.

$$\begin{array}{l|l} -\lambda^3+6\lambda^2-9\lambda+4 & \lambda^2-2\lambda+1 \\ \hline & -\lambda+4 \\ \quad 0 & \end{array}$$

پس ریشه سوم معادله مفسر عبارت است از:

$$(\lambda-1)^2(-\lambda+4)=0\Rightarrow\lambda=4$$

رشته مدیریت

۱ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$A.B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 4\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 14\\ -4 & 14\end{bmatrix}\Rightarrow-1+14=13$$

۲ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & -1 & 4\\ 1 & 2 & -2\\ 3 & 1 & 0\end{vmatrix}=(0+6+4)-(24-4+0)=-10$$

۳ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$|A|=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}=15-8=7\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}5 & -2\\ -4 & 3\end{bmatrix}$$

۴ـ گزینه ۲ صحیح است.

در یک دستگاه معادله خطی زمانی بی شمار جواب داریم که دو خط وابسته خطی باشند بنابر این در یک دستگاه دو مجهولی خواهیم داشت : $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ بنا بر این a برابر می‌شود با

$$ab'=ba'\Rightarrow-2a=1\Rightarrow a=\frac{-1}{2}$$

۵ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=6-1=5,A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{-1}{5}\\ \frac{-1}{5} & \frac{2}{5}\end{bmatrix}\Rightarrow\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=\frac{5}{5}=1$$

۶ـ گزینه ۲ صحیح است.

در A_4 حداقل دو سطر یا دو ستون متناسب وجود دارد و در نتیجه $|A_4|=0$ و در مورد A_3 نیز همین طور یعنی $|A_3|=0$ اما در مورد A_2 می‌توان ماتریس انتخاب کرد که $|A_2|\neq 0$ باشد مثلاً $A_2=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ بنا

براین مرتبهٔ ماتریس ۲ می‌باشد .

۷ـ گزینه ۳ صحیح است.

در دستگاهی که مقادیر ثابت آن صفر است در صورت جواب غیر صفر موجود خواهد بود که معادلات دستگاه وابسته خطی باشند بنابراین دترمینان ضرایب آن صفر خواهد بود .

$$\begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-m+2+2)-(+2-2m+1)=0 \Rightarrow 1+m=0 \Rightarrow m=-1$$

۸ـ گزینه ۴ صحیح است.

ماتریس A در صورتی معکوس ندارد که $|A|=0$

$$|A| = a-2(a-2)=0 \Rightarrow -a+4=0 \qquad a=4$$

۹ـ گزینه ۳ صحیح است.

روش اول:

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow A'=\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow AA'=\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 74 & 103 \\ 103 & 145 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |AA'| = 74\times 153 - 103^2 = 121$$

روش دوم :

$$\left.\begin{matrix} |AA'|=|A||A'| \\ |A'|=|A| \end{matrix}\right\} \Rightarrow |AA'| = |A|^2 = (45-56)^2 = 121$$

۱۰ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$|A|=\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} = 45-56=11 \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{-11}\begin{bmatrix} 9 & -7 \\ -8 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{-9}{11} & \frac{7}{11} \\ \frac{8}{11} & \frac{-5}{11} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$-\frac{9}{11}+\frac{7}{11}+\frac{8}{11}-\frac{5}{11}=\frac{1}{11}$$

۱۱ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (0+2+0)-(0+0+8)=-6$$

۱۲ـ گزینه ۲ صحیح است.

سطر اول ماتریس A^2 از حاصلضرب عناصر سطراول در ستونهای A حاصل می‌شود پس خواهیم داشت:

$$A^2 = (1\times 1+2\times 2+1\times 1)+(1\times 2+2\times 0+1\times 0)+(1\times 1+2\times 1+1\times 2)=13$$

۱۳ـ گزینه ۴ صحیح است.

چون ماتریس A یک ماتریس قطری است دترمینان آن برابر حاصلضرب عناصر قطر اصلی است یعنی : $|A| = 4\times 2\times 4 = 32$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}adjA \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{32}\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1$$

۱۴ـ گزینه ۲ صحیح است.

یک معادله ماتریسی در صورتی دارای یک جواب منحصر به فرد است که $|A| \neq 0$

۱۵ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$[1 \quad 2 \quad 3] \begin{bmatrix} 1 & 2 & Y \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & X & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow [6 \quad 3x \quad y+4] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 6+6X+Y+4=0 \Rightarrow 6X+Y+10=0$$

۱۶ـ گزینه ۱ صحیح است.

چون ماتریس A یک ماتریس مثلثی است دترمینان ماتریس Aبرابر حاصلضرب عناصر قطر اصلی

$$\left.\begin{matrix} |A| = 1\times1\times3 = 3 \\ C_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA \Rightarrow a_{13} = \frac{1}{|A|} C'_{13} = \frac{1}{|A|} C_{31} \Rightarrow a_{13} = \frac{1}{3}$$

۱۷ـ گزینه ۴ صحیح است.

سه بردار c,b,a وابسته خطی هستند هر گاه دترمینان حاصل از درایه های آنها صفر شود پس:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ k & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1+0+3k)-(3+0+2k) = 0 \Rightarrow k-2=0 \Rightarrow k=2$$

۱۸ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$\begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-m+2+2)-(2-2m+1) = 0 \qquad m+1=0 \Rightarrow m=-1$$

۱۹ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$\left.\begin{matrix} a_{11}^{-1} = \frac{1}{|A|} adja_{11} = \frac{1}{3}\left((-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right) = -\frac{1}{3} \\ a_{22}^{-1} = \frac{1}{|A|} adja_{22} = \frac{1}{3}\left((-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right) = 0 \\ a_{33}^{-1} = \frac{1}{|A|} adja_{33} = \frac{1}{3}\left((-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right) = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{-1}{3}+0+1 = \frac{2}{3}$$

۲۰ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$AA' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow 6+5+5=16$$

۲۱ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0+8+0)-(-2+2+0) = 8$$

۲۲ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}4 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{4\times2-1\times3}\begin{bmatrix}4 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{5} & \frac{-3}{5}\\ \frac{-1}{5} & \frac{2}{5}\end{bmatrix}\Rightarrow \frac{4}{5}+\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$$

۲۳ـ گزینه ۲ صحیح است.

ماتریسی فاقد معکوس است که دترمینان آن برابر صفر شود بنابراین:

$$|A|=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc\Rightarrow 1)\begin{vmatrix}3 & -2\\ 4 & 5\end{vmatrix}=15+8=23,\quad 3)\begin{vmatrix}2 & 5\\ -2 & 4\end{vmatrix}=8+10=18$$

$$2)\begin{vmatrix}2 & 5\\ -2 & -5\end{vmatrix}=-10+10=0\quad 4)\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}=2-3=-1$$

۲۴ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

۲۵ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$\frac{\partial X}{\partial P}=COS\theta\quad ,\frac{\partial X}{\partial\theta}=-P\sin\theta$$
$$\frac{\partial y}{\partial p}=\sin\theta\quad ,\frac{\partial y}{\partial\theta}=P\cos\theta$$
$$\begin{vmatrix}\cos\theta & -P\sin\theta\\ \sin\theta & P\cos\theta\end{vmatrix}=p\cos^2\theta+p\sin^2\theta=p(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=p$$

۲۶ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$[a,b]\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}=[a+۲b\qquad -a+b]=[۵,۱]\Rightarrow\begin{cases}a+۲b=۵\\ -a+b=۱\end{cases}\Rightarrow ۳b=۶\Rightarrow b=۲,a=۱$$

۲۷ـ گزینه ۱ صحیح است.

چون سطرها (ستونها) ماتریس همگی ضرایبی از دیگر سطرها(ستونها) می‌باشد نمی‌توان هیچ ماتریسی مربعی که دارای دترمینان غیرصفر باشد از ماتریس ایجاد کرد البته به غیر ماتریس مرتبه یک بنابراین مرتبه ماتریس برابر یک است

۲۸ـ گزینه ۳ صحیح است.

چون در ترانهاده ماتریس A یا همان A' فقط جای اعداد دو طرف قطر اصلی ماتریس A عوض می‌شود بنا بر این ماتریس $A+A^T$ یک ماتریس همواره متقارن خواهد بود به شرطی که A مربعی باشد.

۲۹ـ گزینه ۲ صحیح است.

دترمینان $|A_{4\times4}|$,$|A_{3\times3}|$ همگی برابر با صفر می‌باشد اما در مورد $|A_{2\times2}|$ می‌توان ماتریس تشکیل داد که دترمینان آن غیر صفر باشد بنابراین مرتبه ماتریس ۲ خواهد بود .

۳۰ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$[X,1,1]\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ 1\\ 1\end{bmatrix}=[X+3,2X+3,X+1]\begin{bmatrix}X\\ 1\\ 1\end{bmatrix}=X^2+6X+4=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\Delta=b^2-4ac=36-16=20\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6\pm2\sqrt{5}}{2}=-3\pm\sqrt{5}$$

۳۱ـ گزینه۴ صحیح است.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}adj(A)\Rightarrow|A|=(8+1)-(0)=9$$

$$\Rightarrow C_{ij}=\begin{bmatrix}4&1&2\\-2&4&+1\\1&-2&4\end{bmatrix}\Rightarrow adjA=C'_{ij}=\begin{bmatrix}4&-2&1\\1&4&-2\\-2&1&4\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{4}{9}&\frac{-2}{9}&\frac{1}{9}\\\frac{2}{9}&\frac{4}{9}&\frac{-2}{9}\\\frac{-2}{9}&\frac{1}{9}&\frac{4}{9}\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$$

۳۲ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\x&2&1\\0&1&-1\end{vmatrix}=(-2+x)-(1-x)=-3+2x=0\Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

۳۳ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$Ax=B\Rightarrow X=A^{-1}B=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}\Rightarrow x+y=4+5=9$$

۳۴ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$\mathrm{adjA}=\mathrm{C'_A}=\begin{bmatrix}1&-3&1\\-3&+1&+1\\1&+1&-3\end{bmatrix}'=\begin{bmatrix}1&-3&1\\-3&1&1\\1&1&-3\end{bmatrix}\Rightarrow 1+1-3=-1$$

رشته حسابداری

۱ـ گزینه ۳ صحیح است. در صورتی ماتریس A معکوس ندارد که دترمینان آن صفر شود.

$$|A|=\begin{vmatrix}n&2&1\\2&n&0\\1&1&1\end{vmatrix}=\left(n^2+2+0\right)-\left(n+0+4\right)=0$$

$$\Rightarrow n^2-n-2=0\Rightarrow n=2,-1$$

۲ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}N'\quad |A|=\begin{vmatrix}1&2&4\\-1&2&1\\1&0&1\end{vmatrix}=\left(2+2+0\right)-\left(-2+0+8\right)=-2$$

درایه a_{23} مساوی است با $\frac{n'_{23}}{|A|}$ که n'_{23} برابر است با n_{32}.

$$n_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}1&4\\-1&1\end{vmatrix}=-(1+4)=-5$$

$$a_{23}=\frac{n'_{23}}{|A|}=+\frac{5}{2}$$

۳ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$\begin{vmatrix}2-k&3\\4&5-k\end{vmatrix}=0\Rightarrow(2-k)(5-k)-12=0\Rightarrow k^2-7k-2=0$$

$$\Rightarrow k_1+k_2=-\frac{-7}{1}=+7$$

۴ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2x+4+0)-(4+0+4)=0 \Rightarrow 2x-4=0 \Rightarrow x=2$$

۵ـ گزینه ۲ صحیح است. دترمینان هر ماتریس با دترمینان ترا نهاده آن برابر است.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 4-1=3$$

$$|AA'| = |A|.|A'| = |A|.|A| = 3\times 3 = 9$$

۶ـ گزینه ۲ صحیح است.

چون یک سطر ماتریس A_4 تمامی درایه‌هایش صفر است پس $|A_4|=0$ می‌باشد. $|A_3|=0$ و نیز $|A_2|=0$ ولی دترمینان $|A_1|=1$ است پس مرتبه ماتریس برابر با یک است.

۷ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\Delta_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-2-0) = -2$$

$$a_{22}^{-1} = \frac{1}{-2}(-2) = 1$$

۸ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 38$$

۹ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} \text{ مجموع عناصر ماتریس } = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

۱۰ـ گزینه ۱ صحیح است. شرط آنکه دستگاه همگن جواب‌های غیر صفر داشته باشد آن است که دترمینان ضرایب محصولات برابر صفر شود.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1+4+k)-(-2+1-2k)=0$$

$$\Rightarrow 3k+6=0 \Rightarrow k=-2$$

۱۱ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (6a+0+1)-(0-a+4)=0 \Rightarrow 7a-3=0 \Rightarrow a=\frac{3}{7}$$

۱۲ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+6+3 & & \\ & 6+4+3 & \\ & & 3+3+4 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 10 & & \\ & 13 & \\ & & 10 \end{bmatrix} \longrightarrow 10+13+10=33$$

۱۳ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 24-25=-1$$

$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -1(12-15)=+3$$

$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10-12=-2$$

$$C_{11}^{-1} = \frac{1}{-1}(-1)=+1 \quad , \quad C_{12}^{-1} = \frac{1}{-1}(3)=-3 \quad , \quad C_{13}^{-1} = \frac{1}{-1}(-2)=2$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ & & \end{bmatrix} \rightarrow \text{مجموعه عناصر سطر اول} = 1-3+2=0$$

۱۴ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1-2+0)-(4+0+3) = -1-7=-8$$

۱۵ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}N'$$

$$|A| = (1-2+0)-(4+0+3)=-8 \quad , \quad \Delta_{11} = (-1)^2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\Delta_{22} = (-1)^4\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\Delta_{33} = (-1)^6\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$\text{مجموع عناصر قطری} = \frac{1-2-3}{-8} = \frac{1}{2}$$

۱۶ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 8 & 4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 8x+4+4=0 \Rightarrow x=-1$$

۱۷ـ گزینه ۳ صحیح است. می‌بایست $|A|=0$ شود.

۱۸ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 1 & 2\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\4\\2\end{bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix}1+x & 3 & 2+x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\4\\2\end{bmatrix}=0\Rightarrow 17+3x=0\Rightarrow x=-\frac{17}{3}$$

۱۹ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$|B-KI|=\begin{vmatrix}3-k & -13 & 5\\0 & 4-k & 0\\-15 & 9 & -7-k\end{vmatrix}=0$$

چنانچه سطر دوم را بسط دهیم خواهیم داشت:

$$(4-k)\begin{vmatrix}13-k & 5\\-15 & -7-k\end{vmatrix}=0$$
$$(4-k)=0\Rightarrow k=4$$
$$(13-k)(-7-k)+75=0\Rightarrow k^2-6k-16=0\Rightarrow k=8,-2$$

۲۰ـ گزینه ۲ صحیح است. $A_{m\times n}\le \mathrm{Min}(m,n)$ و چون $|A_3|=0$ است $|A_2|\neq 0$ است پس رتبه ماتریس ۲ می‌باشد.

۲۱ ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$|A|=\begin{vmatrix}4 & 1 & 2\\1 & 2 & 3\\2 & -1 & 0\end{vmatrix}=(0+6-2)-(0-12+8)=8$$

درایه مربوط به سطر سوم و ستون اول در ماتریس N' عبارت از درایه مربوط به سطر اول و ستون سوم از ماتریس همسازه A می‌باشد.

$$\Delta_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}1 & 2\\2 & -1\end{vmatrix}=-5$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\mathrm{adj}A\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix} & & \\ & & \\-5 & & \end{bmatrix}=A^{-1}=\begin{bmatrix} & & \\ & & \\\frac{-5}{8} & & \end{bmatrix}$$

۲۲ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{1-6}\begin{bmatrix}1 & -2\\-3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\\\frac{3}{5} & \frac{-1}{5}\end{bmatrix}$$

$$B^2=\begin{bmatrix}2 & 0\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0\\4 & 4\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}B^2=\begin{bmatrix}-\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\\\frac{3}{5} & -\frac{1}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 0\\4 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{4}{5}+\frac{8}{5} & 0+\frac{8}{5}\\\frac{12}{5}-\frac{4}{5} & 0-\frac{4}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{5} & \frac{8}{5}\\\frac{8}{5} & -\frac{4}{5}\end{bmatrix}$$

۲۳-گزینه ۱ صحیح است.

فرم درجه دوم $q = x'Ax$ با شرط $x \neq 0$ را فرض می‌کنیم که در آن $|H_i|$ ها مینورهای اصلی ماتریس A است. پس:

آ) q زمانی معین مثبت $(q > 0)$ است که تمامی مینورهای اصلی مثبت است هرگاه:

$$|H_1| > 0 \quad , \quad |H_2| > 0, \ldots\ldots, |H_n| > 0$$

ب) q زمانی شبه معین مثبت $(q \geq 0)$ است که مینورهای اصلی صفر یا مثبت باشد هرگاه:

$$|H_1| \geq 0 \quad , \quad |H_2| \geq 0 \,, \ldots\ldots , |H_n| \geq 0$$

پ) q زمانی معین منفی $(q < 0)$ است که مینورهای اصلی یکی در میان منفی و مثبت باشد هرگاه:

$$|H_1| < 0 \;,\; |H_2| > 0 \;,\; |H_3| < 0 \,, \ldots\ldots$$

ت) q زمانی شبه معین منفی $(q \leq 0)$ است که مینورهای اصلی یا برخی مساوی صفر نیز باشد هرگاه:

$$|H_1| \leq 0 \quad , \quad |H_2| \geq 0 \quad , \quad |H_3| \leq 0$$

پس اگر q به یکی از صورت‌های فوق نباشد q را نا معین می‌گویند.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

مینورهای اصلی ماتریس A عبارتند از:

$$|H_1| = |1| = 1 > 0 \quad , \quad |H_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4 < 0$$

$$|H_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

پس علامت ماتریس نامعین می‌باشد.

۲۴ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$\begin{cases} x + 2y = k \\ 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 1$$

برای سازگار بودن دستگاه باید:

$$x + 2y = k \xrightarrow{x=2,\, y=1} 2 + 2(1) = (k) \Rightarrow k = 4$$

۲۵ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow x + 2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

۲۶ـ گزینه ۱ صحیح است.

۲۷ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2 \\ 4+3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$x - y = 4 - 7 = -3$$

۲۸ـ گزینه ۳ صحیح است. برای بدست آوردن $Tr(A^2)$ کافیست درایه‌های قطر اصلی را بدست آوریم پس:

$$\mathrm{Tr}(A^2)\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}=6+6+6=18$$

۲۹- گزینه ۴ صحیح است.

$$|A|=۱۶\Rightarrow A^{-۱} \quad \text{در} \quad a_{۲۳} \quad \text{عضو} \quad =\frac{\Delta_{۲۳}}{|A|}=\frac{۳}{۱۶}$$

$$\Delta_{۲۳}=(-۱)^{۵}\begin{vmatrix}۲ & ۱\\ ۳ & ۰\end{vmatrix}=۳$$

۳۰- گزینه ۳ صحیح است.

$$A'=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۳ & -۱\\ ۱ & ۴\end{bmatrix}\Rightarrow A.A'=\begin{bmatrix}۱۴ & ۱\\ ۱ & ۱۷\end{bmatrix}\Rightarrow |A.A'|=۲۳۷$$

۳۱- گزینه ۳ صحیح است.

می دانیم که $A\times A^{-۱}=I$ بنابراین $X=A^{-۱}=\begin{bmatrix}۳ & -۵\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}$

۳۲- گزینه ۴ صحیح است.

$$\begin{vmatrix}۱ & ۳ & ۲\\ ۱ & -۲ & ۲\\ ۲ & ۵ & ۳\end{vmatrix}\begin{matrix}۱ & ۳\\ ۱ & -۲\\ ۲ & ۵\end{matrix}=(-۶+۱۲+۱۰)-(-۸+۱۰+۹)=۵$$

۳۳- گزینه ۲ صحیح است.

در ماتریسهای پاد متقارن خواهیم داشت:

$$A=-A'$$
$$\Rightarrow (A-A')=A'-A=-(A-A')$$

بنابراین ماتریس $A-A'$ نیز پادمتقارن (شبه متقارن) است.

۳۴- گزینه ۳ صحیح است.

چون سطر اول و سطر دوم با یکدیگر برابر می باشند. بنابراین خواهیم داشت:

$$x-۱=۳\Rightarrow x=۴$$

۳۵- گزینه ۲ صحیح است.

ماتریس A یک ماتریس متقارن می باشد چون که $A=A'$، بنابراین خواهیم داشت:

$$|A|=۳\Rightarrow A^{-۱} \quad \text{در} \quad (a_{۱۱}+a_{۲۲}+a_{۳۳})=\frac{\Delta_{۱۱}+\Delta_{۲۲}+\Delta_{۳۳}}{|A|}=-۲$$

زیرا: $\Delta_{۱۱}=(-۱)^{۲}\begin{vmatrix}۰ & ۱\\ ۱ & ۰\end{vmatrix}=-۱,\ \Delta_{۲۲}=(-۱)^{۴}\begin{vmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & ۰\end{vmatrix}=-۱,$

$$\Delta_{۳۳}=(-۱)^{۶}\begin{vmatrix}۱ & ۲\\ ۲ & ۰\end{vmatrix}=-۴$$

۳۶- گزینه ۲ صحیح است.

$$\begin{pmatrix}1&2&1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\x&0&1\\1&0&x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}<0\Rightarrow\begin{pmatrix}2+2x-1&3+x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}<0$$

$$\Rightarrow 2+2x-2+3+x<0\Rightarrow 3x+3<0\Rightarrow x<-1$$

۳۷- گزینه ۲ صحیح است.

برای هر ماتریس دلخواه مانند $A_{n\times n}$ داریم:

$$A.adjA=|A|\ I$$

بنابراین در این سوال خواهیم داشت:

$$A.adjA=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&1\\1&0&-1\end{vmatrix}I=2I_2$$

۳۸- گزینه ۱ صحیح است.

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&2\\0&2-\lambda&3\\1&-1&2-\lambda\end{vmatrix}\to f(1)=\begin{vmatrix}0&0&2\\0&1&3\\1&-1&1\end{vmatrix}=-2$$

یادآوری:

ماتریس مربعی A را در نظر می گیریم، معادله $|A-\lambda I|=0$ را معادله مفسر ماتریس A می گوییم. با بسط دترمینـان، معادلـه فوق را می توان به صورت یک معادله درجه n برحسب λ مرتب نمود یعنی:

$$\phi(\lambda)=a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+...+a_n=0$$

۳۹- گزینه ۳ صحیح است.

در صورتی ماتریس $A-\lambda I$ وارون پذیر نیست که داشته باشیم: $|A-\lambda I|=0$
معادله فوق را معادله مفسر ماتریس A می گوییم با بسط دترمینان، معادله فوق را می تـوان بـه صـورت یـک معادلـه درجـه n برحسب λ مرتب نمود یعنی:

$$\phi(\lambda)=a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+...+a_n=0$$

ریشه های معادله مفسر را مقادیر ویژه می نامیم. در این سوال خواهیم داشت:

$$\begin{vmatrix}4-\lambda&3&-1\\0&6-\lambda&-2\\0&2&1-\lambda\end{vmatrix}=0\qquad\Rightarrow\lambda=2\ ,\ \ \lambda=4\quad ,\quad \lambda=5$$

الف) $\lambda 1+\lambda 2+.\lambda_n=$ اثر ماتریس = مجموع عناصر قطر اصلی ماتریس $\Rightarrow \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=11$

ب) $\lambda 1\ \lambda 2..\lambda_n=|A|\Rightarrow|A|=40$

۴۰- گزینه ۱ صحیح است.

قضیه کایلی – هامیلتون می گوید هر ماتریس $An\times n$ در معادله کثیرالجمله مفسر خودش صدق می کند. اگر معادله مفسر به صورت باشد.

$$f(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+...an=0$$
$$f(A)=A^n+a_1A^{n-1}+a_2A^{n-2}+...anIn=\overline{O}$$

بنابراین در این سوال خواهیم داشت:

معادله مفسر $|A-\lambda I|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (2-\lambda)(3-\lambda)+5=0$

معادله مفسر $\lambda^2-5\lambda+11=0 \Rightarrow A^2-5A+11I_2=\overline{O}$

به طرفین تساوی فوق ماتریس واحد اضافه می کنیم. $A^2-5A+12I_2=\overline{O}+I_2$

$$\Rightarrow A^2-5A+12I_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2-5A+12I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۴۱- گزینه ۱ صحیح است.

$$|Ax|=|A^{-1}| \Rightarrow |A|\,|x|=\frac{1}{|A|} \Rightarrow |x|=\frac{1}{|A^2|} \Rightarrow |x|=\frac{1}{2}$$

$$|A|=4-6=-2$$

۴۲- گزینه ۱ صحیح است.

درجه بزرگترین دترمینان مخالف صفر ماتریس A را رتبه ماتریس A گفته و آن را با نماد r(A) نشان می دهند.

۴۳- گزینه ۱ صحیح است.

$$(A-A')=A'-A=-(A-A')$$

۴۴- گزینه ۲ صحیح است.

اگر k برابر یک سطر (یا ستون) ماتریسی را به سطر (یا ستون) دیگر آن ماتریس اضافه می کنیم نمائیم دترمینان ماتریس تغییر می کند.

در مورد گزینه های دیگر داریم:

۱) اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=-2$

$\Rightarrow |A|=|A'|=-2$

$A'=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow |A'|=-2$

۲) اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=-2$

جای دو سطر A عوض شود. $\Rightarrow A=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=2$

۳) اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

همسازه a_{21} $=a_{21}=(-1)^{2+1}|2|=-2$

همسازه a_{22} $=a_{22}=(-1)^{2+2}|1|=1$

حال اگر عناصر سطر اول را در همسازه های سطر دوم ضرب کنیم و با هم جمع کنیم خواهیم داشت:

$$1\times(-2)+2\times(1)=0$$

۴۵- گزینه ۲ صحیح است.

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} R_1 \\ -R_1+R_2 \\ R_1+R_3 \\ R_4 \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

بسط برحسب سطر سوم $= 2\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\times 2 = 4$

تستهای کاربرد ریاضیات در اقتصاد و مدیریت و حسابداری

رشته اقتصاد

۱- اگر هزینه کل $TC = 6x$ و در آمد کل $TR = xe^x$ باشد که در آن x مقدار تولید است، در نقطه سر به سر مقدار تولید برابر است با: (سراسری ۷۶)

۱) ۱ ۲) ۶ ۳) e ۴) $Ln6$

۲- اگر در آمد، تابعی از زمان به صورت $TR = t^2 + 1$ باشد، نرخ رشد درآمد در $t = 2$ کدام است؟ (سراسری ۷۶)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\frac{4}{5}$

۳- اگر درآمد نهایی $MR = xe^x$ باشد، درآمد کل TR کدام است؟ در صورتی که $TR(1) = 1$ باشد. (سراسری ۷۶)

۱) $-xe^x + e^x + 1$ ۲) $xe^{x-1} - x + 1$

۳) $xe^x - e^x + 1$ ۴) $(x-1)e^x - x + 1$

۴- اگر سطح تقاضای مشترک دو کالای وابسته $x = \frac{q}{2p}$, $y = \frac{2p}{q}$ باشد که در آن x و y مقادیر تقاضا و p و q قیمتهای متناظر آنها باشد. کشش‌های تقاضای این دو کالا به ترتیب کدام است؟ (سراسری ۷۶)

۱) $-\frac{1}{2}, -2$ ۲) $-4, -\frac{1}{4}$ ۳) $-1, -1$ ۴) $-2, -\frac{1}{2}$

۵- اگر تابع درآمد کل $TR = xLn5x$ و هزینه کل $TC = 3x$ باشد، نقطه سر به سر کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) $x = 1$ ۲) $x = e$ ۳) $x = 5e$ ۴) $x = \frac{1}{5}e^3$

۶- در تابع تقاضا به صورت $y = 7 - 2x$، که در آن x مقدار تقاضا و y قیمت است. کشش تقاضا در $x = 2$ کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) $-\frac{4}{3}$ ۲) $-\frac{3}{4}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) -2

۷- اگر تابع درآمد کل $TR = 6x - x^2$ و هزینه کل $TC = 2x + 1$ به ازای چه مقدار x سود ماکزیمم است؟ (سراسری ۷۷)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۸ـ تابع مطلوبیت مصرف کننده‌ای $u = q_1q_2$ و خط بودجه $2q_1 + q_2 = 100$ است. مطلوبیت ماکزیمم نسبت به مطلوبیت‌های نهایی کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۲-

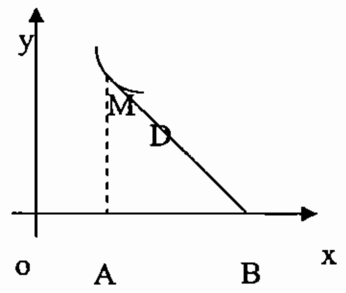
۹ـ اگر تعداد تولید کالاهای کشاورزی سالیانه رشدی برابر ۲ درصد و قیمت‌ها رشدی برابر ۳ درصد داشته باشد، رشد سالیانه درآمد کشاورزان کدام است؟ (سراسری ۷۸)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۰- اگر تابع هزینه کل $TC = x^2 + 4x + 9$ باشد مقدار مینیمم هزینه متوسط کدام است؟ (سراسری ۷۸)

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۱۱- در شکل مقابل تابع تقاضا رسم شده است. x مقدار کالا، y قیمت کالا است. کشش تقاضا با توجه به شکل در نقطه M کدام است؟ (سراسری ۷۸)



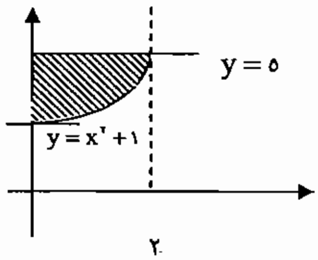
۱) $-\frac{BA}{MA}$ ۲) $-\frac{MA}{BA}$

۳) $-\frac{OA}{AB}$ ۴) $-\frac{AB}{OA}$

۱۲- اگر نرخ جریان سرمایه گذاری $I(t) = te^t$ باشد مقدار موجودی سرمایه $k(t)$ کدام است؟ در صورتی که $k(۰) = ۰$ باشد. (سراسری ۷۸)

۱) te^t ۲) $e^t + ۱$ ۳) $e^t - ۱$ ۴) $te^t - e^t + ۱$

۱۳- با استفاده از شکل مقابل مازاد عرضه کننده کدام است؟ (سراسری ۷۸)



۱) $\frac{۸}{۳}$ ۲) $\frac{۱۴}{۳}$

۳) $\frac{۱۶}{۳}$ ۴) $\frac{۲۰}{۳}$

۱۴- اگر تابع عرضه $y = x^۲$ و تابع تقاضا $y = -x + ۲$ باشد که در آن y قیمت و x مقدار، مازاد مصرف کننده کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) ۲ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۵- اگر مطلوبیت مصرف کننده‌ای $u = ۲q_۱q_۲ - q_۱^۲$ و خط بودجه $۳q_۱ + ۶q_۲ = ۹۰$ باشد، به ازای چه مقدار خرید از $q_۱$ مطلوبیت ماکزیمم است؟ (سراسری ۷۹)

۱) ۶/۵ ۲) ۷/۵ ۳) ۱۳ ۴) ۱۵

۱۶- اگر تابع تقاضا برای دو کالا وابسته $x = \frac{۲۵}{pq^۲}$ باشد که x مقدار تقاضا و p قیمت آن و q قیمت کالای وابسته، کشش x نسبت به p کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) $-\frac{p}{q}$ ۲) $-\frac{q}{p}$ ۳) -۱ ۴) -۲

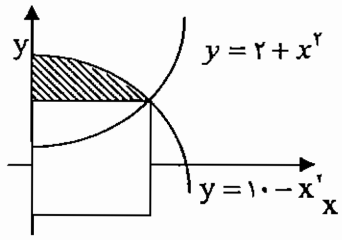
۱۷- اگر تابع هزینه کل $TC = x^۲ + ۹x + ۴$ باشد. مینیمم هزینه متوسط کدام است؟ (سراسری ۸۰)

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

۱۸- در شکل زیر تابع تقاضا و عرضه داده شده است. مقدار مازاد مصرف کننده کدام است؟ (سراسری ۸۰)

۱) $\frac{5}{4}$ ۲) $\frac{۱۶}{۳}$

۳) ۶ ۴) ۷



۱۹- توابع تقاضای دو کالای ۱ و ۲ عبارتند از $Q_۲ = ۲۰۰ - p_۱ - ۳p_۲$ و $Q_۱ = ۱۵۰ - ۲p_۱ - p_۲$ انحصارگر چه قیمتی را برای دو کالا تعیین نماید تا درآمدش به حداکثر برسد؟ (سراسری ۸۰)

۱) $p_۱ = p_۲ = ۲۵$ ۲) $p_۱ = ۲۰ , p_۲ = ۵۰$ ۳) $p_۱ = ۲۰ , p_۲ = ۱۰$ ۴) $p_۱ = ۲۵ , p_۲ = ۱۰$

۲۰- در سوال قبل با محاسبه تقاضای نهایی $Q_۱$ نسبت به $p_۲$ و $Q_۲$ نسبت به $p_۱$ نوع وابستگی به دو کالا کدام است؟ (سراسری ۸۰)

۱) ۲- و ۱- مکمل ۲) ۱- و ۱- مکمل ۳) ۳- و ۱- جانشین ۴) ۳- و ۲- جانشین

۲۱- اگر تابع تقاضا برای کالایی $x = ۲۰ - ۲p^۲$ باشد که در آن x مقدار و p قیمت است کشش تقاضا نسبت به قیمت در نقطه $p = ۲$ کدام است؟ (سراسری ۸۱)

۱) $-\frac{۱}{۶}$ ۲) $-\frac{۱}{۱۲}$ ۳) $-\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۴}{۳}$

۲۲- اگر تابع تقاضا $y = ۱۰ - x$ و هزینه کل $TC = ۴ + ۲x$ باشد که در آن x مقدار و y قیمت است به ازای چه مقداری از تولید، سود ماکزیمم است؟ (سراسری ۸۱)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۳- اگر تابع مطلوبیت مصرف کننده $u = ۴q_۱q_۲$ و قیمت $p_۱ = ۵$ و $p_۲ = ۱۰$ و بودجه ۴۰۰ باشد، از هر یک از کالاها چه مقدار خریداری کند تا مطلوبیت او ماکزیمم گردد؟ (سراسری ۸۱)

۱) $q_۱ = ۴۰ , q_۲ = ۲۰$ ۲) $q_۱ = ۲۰ , q_۲ = ۳۰$

۳) $q_۱ = ۵۰ , q_۲ = ۱۵$ ۴) $q_۱ = ۶۰ , q_۲ = ۱۰$

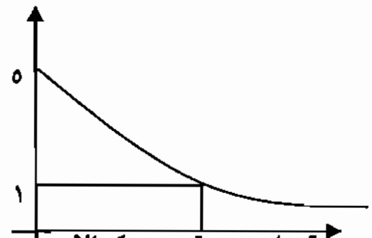
۲۴ـ اگر تابع هزینه نهایی بنگاهی $MC = xe^x$ و هزینه ثابت $FC = ۱۰۰$ فرض شود، هزینه کل بـه ازای $x = ۱۱$ کـدام است؟ (x مقدار تولیدی باشد). (سراسری ۸۲)

۱) $۱۱e^{۱۱} + ۱۰۰$ ۲) $۱۰e^{۱۱} + ۹۹$ ۳) $۱۱e^{۱۱} + ۱۰۱$ ۴) $۱۰e^{۱۱} + ۱۰۱$

۲۵ـ اگر تابع تقاضا $y = \frac{۵}{x + ۱}$ مقدار تعادلی $x = ۴$ باشد، مازاد مصرف کننده کدام است؟ (سراسری ۸۲)

۱) ۱ ۲) ۲

۳) $۵Ln۵ - ۴$ ۴) $۵Ln۴ - ۱$



۲۶ـ تابع تقاضای دو کالای a و b بصورت $x = \frac{q}{۲p}$ است که در آن x مقدار، p قیمت کـالای a و q قیمـت

کالای وابسته b است. کشش تقاضا نسبت به قیمت p برابر است با: (سراسری ۸۲)

۱) -۲ ۲) $-\frac{q}{2p^2}$ ۳) -۱ ۴) $-\frac{q}{p}$

۲۷ـ اگر $r(t)$ نرخ رشد بدهی یک کشور در زمان t باشد، افزایش بدهی این کشور بین سال‌های ۱۳۶۰ و ۱۳۷۰ برابر است با: (سراسری ۸۲)

۱) $r(۱۳۷۰)-r(۱۳۶۰)$ ۲) $\frac{r(۱۳۷۰)-r(۱۳۶۰)}{۱۳۷۰-۱۳۶۰}$

۳) $\frac{۱}{۱۰}\int_{۱۳۶۰}^{۱۳۷۰} r(t)dt$ ۴) $\int_{۱۳۶۰}^{۱۳۷۰} r(t)dt$

۲۸ـ اگر افزایش تولید اتومبیل در ایران نسبت به سال گذشته ۵ درصد و قیمت آن ۲ درصد افزایش داشته باشد افزایش نرخ درآمد تولید کنندگان چند درصد است؟ (سراسری ۸۳)

۱) ٪۱۰ ۲) ٪۷ ۳) ٪۳ ۴) ٪۲/۵

۲۹ـ در تابع هزینه کل بصورت $TC = x^۲ + ۶x + ۹$ (x مقدار تولید) به ازای چه مقداری از تولید، هزینه نهایی و متوسط با هم برابرند؟ (سراسری ۸۳)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۳۰ـ اگر تابع تقاضا $y = ۱۶ - x$ و هزینه کل $TC = x^۲ + ۸$ باشد که در آن x مقدار و y قیمت است، به ازای چه مقدار از تولید، سود بنگاه ماکزیمم است؟ (سراسری ۸۳)

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۳۱ـ اگر تابع هزینه نهایی $MC = ۲xLn(x+۱)$ و هزینه ثابت $FC = ۱۰$ باشد، هزینه کل به ازای $x = ۲$ کدام است؟ (سراسری ۸۳)

۱) $۲Ln۳ + ۱۰$ ۲) $۳Ln۳ + ۱۰$ ۳) $۵Ln۳ + ۱۰$ ۴) $۴Ln۳ + ۱۰$

۳۲ـ اگر تابع عرضه $y = x^۲ + ۱$ و قیمت تعادلی $y_e = ۱۰$ باشد، مقدار مازاد عرضه کننده کدام است؟ (سراسری ۸۳)

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

۳۳ـ اگر تابع مطلوبیت مصرف کننده $u = ۴q_۱q_۲$ و خط بودجه $q_۱ + q_۲ = ۱۰$ باشد، مقدار ماکزیمم مطلوبیت کدام است؟ (سراسری ۸۳)

۱) ۱۰۰ ۲) ۲۰۰ ۳) ۳۰۰ ۴) ۴۰۰

رشته مدیریت

۱- اگر تابع درآمد کل $TR = \frac{1}{3}x\ln x$ و تابع هزینه کل $Tc = 2\ln x$ باشد آنگاه در نقطه سر به سر مقدار تولید x کدام است ؟ (سراسری ۷۴)

۱) 4 ۲) 3 ۳) 6 ۴) 2

۲- اگر تابع هزینه کل $TC = 7x^2 + 4$ باشد که در آن x مقدار تولید است با افزایش یک واحد تولید هزینه نهایی چه

مقدار تغییر می‌کند؟ (سراسری ۷۵)

۱) 7 ۲) $7x$ ۳) 14 ۴) $14x$

۳- اگر هزینه کل $TC=5x$ و در آمد کل $TR=xe^x$ باشد که در آن x مقدار تولید است و مقدار تولید در نقطه سر به سر برابر است با: (سراسری ۷۶)

۱) $\ln 5$ ۲) e ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) 5

۴- اگر $TC=2x, TR=x\ln x$ باشد نقطه سر به سر کدام است ؟ (سراسری ۷۷)

۱) e ۲) e^2 ۳) 2 ۴) 1

۵- اگر سود به طور پیوسته به سرمایه اضافه شود ارزش فعلی یک میلیون ریال با نرخ سود ۱۰ درصد طی ۱۰ سال برابر کدام است ؟ (سراسری ۷۷)

۱) $e(10)^6$ ۲) $2(10)^6$ ۳) $\frac{1}{2}(10)^6$ ۴) $\frac{1}{e}(10)^6$

۶- تابع هزینه کل به صورت $y = x^2 + 2$ است (x مقدار تولید و y هزینه کل) ماکزیمم هزینه به ازای تولید در فاصله $[0,5]$ کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) 27 ۲) 10 ۳) 5 ۴) 2

۷- هزینه کل به صورت $TC=5e^x+\ln(x+1)$ است. هزینه ثابت کدام است؟ (سراسری ۷۸)

۱) 0 ۲) $\ln 2$ ۳) 5 ۴) $5e$

۸- اگر تابع درآمد ملی $TR = 2\ln(x+1)$ و هزینه $TC = \ln(2x+10)$ باشد نقطه سر به سر کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) 2 ۲) 3 ۳) 4 ۴) 5

۹- اگر سود بطور پیوسته بر سرمایه اضافه شود نرخ بهره سالیانه ۱۰ درصد باشد پس از چند سال سرمایه ۲ برابر می‌شود ؟ (سراسری ۷۹)

۱) $10\ln 2$ ۲) $10e$ ۳) $6e^2$ ۴) $8e$

۱۰- جمعیت تهران در سال ۷۰ برابر ۷ میلیون نفر در سال ۸۰ برابر ۸/٤ میلیون نفر است. نرخ رشد جمعیت تهران بطور متوسط چند درصد است ؟ (سراسری ۸۰)

۱) $0/1$ ۲) $0/14$ ۳) $\frac{1}{10}\ln 1/2$ ۴) $1/1e^{10}$

۱۱- در یک بنگاه هزینه ثابت ۱۰۰/۰۰۰ تومان و هزینه متغیر ٦۰٪ فروش و قیمت فروش ٤۰ تومان است نقطه سر به سر کدام است؟ (سراسری ۸۰)

۱) ۲٤۰۰ ۲) ٦۲۵۰ ۳) ۷۲۰۰ ٤) ۱۰/۰۰۰

۱۲-هزینه نهایی بنگاهی $Mc=xe^x$ است هزینه کل بنگاه TC کدام است؟ در صورتی که هزینه ثابت 100 باشد ؟ (سراسری ۸۰)

۱) $TC = xe^x - x + 100$ ۲) $TC = x + e^x + 99$

۳) $TC = xe^x + 100$ ۴) $TC = xe^x - e^x + 101$

۱۳- اگر تابع درآمد کل $TR = e^{2x} - 1$ و هزینه کل $TC = e^x + 9$ باشد که در آن x مقدار تولید است به ازای چه مقدار x سود بنگاه برابر ۱۰۰ می‌شود؟ (سراسری ۸۱)

۱) 10 ۲) 11 ۳) $\ln 11$ ۴) e^{10}

۱۴-اگر تابع درآمد کل $TR = e^{2x}$ و هزینه کل $TC = e^x + 20$ باشد که در آن x مقدار تولید است نقطه سر به سر کدام است ؟ (سراسری ۸۲)

۱) e ۲) 5 ۳) e^2 ۴) $\ln 5$

۱۵-چنانچه نرخ سود ۱۵٪ و سود به طور پیوسته بر سرمایه اضافه می‌گردد ارزش فعلی a ریال در ۲۰ سال آینده چه مقدار است ؟ (سراسری ۸۲)

۱) ae^{-2} ۲) ae^{+3} ۳) $\frac{1}{3}ae$ ۴) $2ae^{-1}$

۱۶- باز پرداخت وام مسکن P تابعی از سه متغیر است $p=f(A,r,N)$ که در آن A مقدار وام دریافتی به ریال r نرخ بهره و N شماره سالهای باز پرداخت وام است کدام یک از گزینه های زیر درست است؟ (سراسری ۸۲)

۱) $\frac{\partial p}{\partial n} < 0, \frac{\partial p}{\partial r} > 0, \frac{\partial p}{\partial A} > 0$ ۲) $\frac{\partial p}{\partial n} > 0, \frac{\partial p}{\partial r} < 0, \frac{\partial p}{\partial A} > 0$

۳) $\frac{\partial p}{\partial n} < 0, \frac{\partial p}{\partial r} > 0, \frac{\partial p}{\partial A} < 0$ ۴) $\frac{\partial p}{\partial n} > 0, \frac{\partial p}{\partial r} < 0, \frac{\partial p}{\partial A} < 0$

۱۷-تابع سود تولید کننده ای برای دو نوع کالای y,x به صورت زیر است و حداکثر تولیدی آن ۱۲ واحد است. چه مقادیری از y,x سود را حداکثر می‌کند: $(\pi = 80x - 2x^2 - xy - 3y^2 + 100y)$ (سراسری ۸۲)

۱) x=1, y=3 ۲) x=3,y=4 ۳) x=2,y=5 ۴) x=5,y=7

۱۸- هزینه تولید هر واحد کالا ۱۰۰ تومان و هزینه ثابت ۱۰۰۰۰۰ تومان است در صورتی که هر واحد کالا ۱۲۰ تومان فروخته شود به ازای چه مقدار تولید سود بنگاه به ۱۰۰۰۰۰ تومان می رسد ؟ (سراسری ۸۳)

۱) ۱۰/۰۰۰ ۲) ۱۲/۰۰۰ ۳) ۲۰/۰۰۰ ۴) ۲۴/۰۰۰

۱۹- قرار است بعد از گذشت ۴ سال مبلغ ۱/۵۰۰/۰۰۰ تومان دریافت کنیم در صورتی که ارزش فعلی این مبلغ یک میلیون تومان و سود بطور پیوسته بر سرمایه افزوده شود نرخ سود سرمایه گذاری چه قدر است ؟ (سراسری ۸۳)

۱) $\frac{1}{4}\ln 1/5$ ۲) $\ln\frac{1/5}{4}$ ۳) $4\ln 1/5$ ۴) $\ln 6$

رشته حسابداری

۱- اگر هزینه کل $TC = ۵x + ۱$ و درآمد کل $TR = xe^x + ۱$ باشد، که در آن x مقدار تولید است، مقدار تولید در نقطه سر به سر برابر است با: (سراسری ۷۶)

۱) ۱ ۲) e ۳) Ln۵ ۴) ۵

۲- اگر هزینه ثابت تولید ۶۰,۰۰۰ ریال، هزینه متغیر ۴۰ درصد فروش و قیمت فروش هر واحد ۵۰ ریال باشد. نقطه سر به سر کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) ۱۵۰۰ ۲) ۲۰۰۰ ۳) ۲۵۰۰۰ ۴) ۳۰۰۰۰

۳- اگر درآمد کل $TR = e^x + ۵x$ و هزینه کل $TC = ۵x + ۲$ باشد، در نقطه سر به سر مقدار x، کدام است؟ (سراسری ۷۸)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\text{Ln}2$ ۴) e

۴- اگر درآمد کل $TR = 8x - x^2$ و هزینه کل $TC = ۲x + ۱$ باشد، به ازای کدام مقدار x، سود بنگاه ماکزیمم است؟ (سراسری ۷۸)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ٤

۵- در سپرده بانکی که سود در پایان هر ماه بر سرمایه اضافه می‌شود، با نرخ سود مشارکت ۱۲٪ سرمایه‌ای پس از ۳ سال چند برابر می‌شود؟ (سراسری۷۸)

۱) $(۱/۰۱۲)^{۳۶}$ ۲) $(۱/۰۱)^{۳۶}$ ۳) $(۱/۱۲)^{۳}$ ۴) $(۱/۰۳)^{۱۲}$

۶- اگر تابع درآمد کل $TR = ٦^x$ و تابع هزینه کل $TC = ۱۶(۳)^x$ باشد نقطه سر به سر کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) ۵ ۲) ٦ ۳) ٤ ۴) ۳

۷- اگر تابع هزینه کل $TC = ۸۰x + ۱۰۰$ و درآمد کل $TR = ۱۰۰x$ باشد. به ازای چه مقدار از تولید x سود بنگاه ۱۰,۰۰۰ واحد پول است؟ (سراسری ۸۰)

۱) ۵۰۵ ۲) ۱۰۱۰ ۳) ۵۰۵۰ ۴) ۱۰۱۰۰

۸- اگر تابع هزینه کل برابر $TC = ۱۰ + (x-۳)e^{x-۳}$ که در آن x مقدار تولید باشد، به ازای چه مقداری از x هزینه کل مینیمم است؟ (سراسری ۸۱)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ٤ ۴) ٦

۹- فرض می‌کنیم هزینه ثابت برای تولید یک کالا ۶۰,۰۰۰ تومان و هزینه متغیر ۶۰ درصد فروش و قیمت هر واحد کالا ۱۵ تومان است. مقدار تولید سر به سر برابر است با: (سراسری ۸۲)

۱) ۹,۰۰۰ ۲) ۱۰,۰۰۰ ۳) ۱۱,۰۰۰ ۴) ۱۲,۰۰۰

۱۰- سود ماهیانه بر سرمایه اضافه می‌شود طی چند سال با نرخ ۱۲ درصد این سرمایه دو برابر می‌شود؟ (سراسری ۸۲)

۱) $\dfrac{\text{Ln}۲}{۱۲\text{Ln}۱/۰۱}$ ۲) $\dfrac{\text{Ln}۲}{\text{Ln}\,۱/۰۱}$ ۳) $\dfrac{\text{Ln}۲}{\text{Ln}\,۱/۱}$ ۴) $\dfrac{۱۲\text{Ln}۱/۱}{\text{Ln}۲}$

۱۱- اگر هزینه تولید هر واحد کالا ۱۰۰ تومان و هزینه ثابت ۲۰۰,۰۰۰ تومان باشد برای رسیدن به نقطه سر به سر چه مقدار کالا باید تولید کرد. در صورتی که هر واحد کالا را ۱۲۰ تومان بفروشیم؟ (سراسری ۸۳)

۱) ۱۰,۰۰۰ ۲) ۱۲,۰۰۰ ۳) ۲۰,۰۰۰ ۴) ۲٤,۰۰۰

پاسخ تشریحی سوالات کاربرد ریاضیات در اقتصاد، مدیریت و حسابداری

رشته اقتصاد

۱ـ گزینه ۴ صحیح است.

در نقطه سر به سر $TR = TC$

$$xe^{x} = 6x \Rightarrow e^{x} = 6 \Rightarrow x = Ln6$$

۲ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$\text{نرخ رشد} = \frac{\left(t^{2}+1\right)'}{t^{2}+1} = \frac{2t}{t^{2}+1}\bigg|_{t=2} = \frac{4}{5}$$

۳ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$(TR)' = MR \Rightarrow \int MR dx = TR$$
$$TR = \int xe^{x}dx$$

با استفاده از انتگرال گیری جز به جز

$$x = u \Rightarrow dx = du$$
$$e^{x}\ .\ dx = dv \Rightarrow v = e^{x}$$
$$\int xe^{x}dx = xe^{x} - \int e^{x}dx = xe^{x} - e^{x} + C = TR$$
$$TR\Big|_{x=1} = 1e^{1} - e^{1} + C = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow TR = xe^{x} - e^{x} + 1$$

۴ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$\text{کشش تقاضا}: E_{x,y} = \frac{px'_p}{x}\ ,\ E_{y.x} = \frac{Qy'_Q}{y}$$
$$x = \frac{Q}{2p} \Rightarrow x'_p = -\frac{Q}{2p^{2}} \qquad , \qquad y = \frac{2p}{Q} \Rightarrow y'_Q = -\frac{2p}{Q^{2}}$$
$$E_{xy} = \frac{p\left(-\frac{Q}{2p_0^2}\right)}{\frac{Q}{2p}} = -1 \qquad , \qquad E_{y..x} = \frac{Q\left(-\frac{2p}{Q^2}\right)}{\frac{2p}{Q}} = -1$$

۵ـ گزینه ۴ صحیح است. در نقطه سر به سر مقدار درآمد کل و هزینه کل همواره برابر است.

$$TR = TC$$
$$xLn5x = 3x \Rightarrow Ln5x = 3 \Rightarrow e^{3} = 5x \Rightarrow x = \frac{1}{5}e^{3}$$

۶ـ گزینه ۲ صحیح است. تابع تقاضا را طوری می‌نویسیم که تقاضا تابعی از قیمت باشد. در اینصورت:

$$y = 7 - 2x \Rightarrow 2x = 7 - y \Rightarrow x = \frac{7-y}{2}$$
$$\text{کشش تقاضا}: \frac{Ex}{Ey} = \frac{y}{x}\ .\ \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{1}{2}\times\frac{7-2x}{x} \xrightarrow{x=2} -\frac{1}{2}\times\frac{7-2\times 2}{2} = -\frac{3}{4}$$

۷ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$\pi = TR - TC$$
$$\pi = 6x - x^2 - (2x+1) \Rightarrow \pi = -x^2 + 4x - 1$$
$$\pi' = -۲x + ٤ = ۰ \Rightarrow x = ۲$$

پس در نقطه $x = ۲$ سود ماکزیمم می‌باشد.

x		۲	
π'	+	0	-

۸ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$\begin{cases} u = q_1 q_2 & \max \\ 2q_1 + q_2 = 100 \Rightarrow q_2 = 100 - 2q_1 \end{cases}$$
$$u = q_1(100 - 2q_1) = 100q_1 - 2q_1^2 \rightarrow u'_{q_1} = 0 \Rightarrow 100 - 4q_1 = 0 \Rightarrow q_1 = 25$$
$$q_2 = 100 - 2q_1 \xrightarrow{q_1 = 25} q_2 = 100 - 50 \Rightarrow q_2 = 50$$
$$q_۱ \text{ مطلوبیت نهایی نسبت به } = Mu_۱ = \frac{\partial u}{\partial q_۱} = q_۲ = ۵۰$$
$$q_۲ \text{ مطلوبیت نهایی نسبت به } = Mu_۲ = \frac{\partial u}{\partial q_۲} = q_۱ = ۲۵$$
$$\text{نسبت مطلوبیت نهایی} = \frac{Mu_۱}{Mu_۲} = \frac{۵۰}{۲۵} = ۲$$

۹ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$R = p.q \Rightarrow \frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta q}{q} \Rightarrow \frac{\Delta R}{R} = ۲ + ۳ = ۵$$

۱۰ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$\text{هزینه متوسط } AC = \frac{TC}{x} \qquad TC = x^۲ + ٤x + ۹$$
$$\Rightarrow AC = x + ٤ + \frac{۹}{x}$$
$$d\left(\frac{AC}{dx}\right) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{9}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{9}{x^2} = 1 \Rightarrow x = +3\ ,\ -3$$

چون تولید نمی‌تواند منفی باشد پس $x = ۳$ است.

$$AC\Big|_{x=۳} = ۳ + ٤ + \frac{۹}{۳} = ۱۰$$

۱۱ـ گزینه ۴ صحیح است.

۱۲ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$k(t) = \int I(t)dt$$
$$k(t) = \int te^t dt$$

با استفاده از انتگرال جز به جز داریم:

$$te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + C$$
$$k(0) = 0 \Rightarrow 0e^0 - e^0 + C = 0 \Rightarrow -1 + C = 0 \Rightarrow C = 1$$
$$k(t) = te^t - e^t + 1$$

۱۳ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$S=\int_0^2 (5-x^2-1)dx=\int_1^2 (4-x^2)dx=4x-\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=8-\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$$

۱۴ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$\text{مازاد مصرف کننده}=\int_0^{x_0} f(x)dx-x_0y_0$$

$$y=x^2$$

$$\Rightarrow x^2=-x+2\Rightarrow x^2+x-2=0\Rightarrow x=1 \text{ و } -2$$

$$y=-x+2$$

مقدار تولید منفی نمی‌شود پس: $x=1$

نقطه تعادل: $x_0=y_0=1$

$$\text{مازاد مصرف کننده}=\int_0^{x_0} f(x)dx-x_0y_0=\int_0^1(-x+2)dx-(1)(1)=-\frac{x^2}{2}+2x\Big|_0^1-1$$

$$=\frac{-1}{2}+2-1=\frac{1}{2}$$

۱۵ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$u=2q_1q_2-q_1^2$$

$$3q_1+6q_2=90\Rightarrow q_2=15-\frac{q_1}{2}$$

$$u=2q_1(15-\frac{q_1}{2})-q_1^2\Rightarrow u=30q_1-q_1^2-q_1^2=30q_1-2q_1^2$$

$$u'_{q_1}=30-4q_1=0\Rightarrow q_1=\frac{30}{4}=7/5$$

۱۶ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$x=\frac{25}{pq^2}\qquad \frac{\frac{dx}{x}}{\frac{dp}{p}}=\frac{dx}{dp}\cdot\frac{p}{x}=\frac{-25q^2}{p^2q^4}\cdot\frac{p}{\frac{25}{pq^2}}=\frac{-25}{p^2q^2}\cdot\frac{p^2q^2}{25}=-1$$

۱۷ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$AC=\frac{TC}{x}$$

$$AC=\frac{x^2+9x+4}{x}\Rightarrow AC=x+9+\frac{4}{x}$$

$$(AC)'=1-\frac{4}{x^2}=0\Rightarrow x=2\ ,-2$$

$$MinAC\Big|_{x=2}=2+9+\frac{4}{2}=13$$

۱۸ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$y=2+x^2$$

$$2+x^2=10-x^2\Rightarrow 2x^2=8\Rightarrow x=2\ ,\ y=6$$

$$y=10-x^2$$

$$S=\int_0^2 (10-x^2-6)dx=\int_0^2 (4-x^2)dx=4x-\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=(8-\frac{8}{3})-(0-0)=\frac{16}{3}$$

۱۹ـ گزینه ۱ صحیح است.

درآمد کل از فروش کالای دوم + درآمد کل از فروش کالای اول = درآمد انحصارگر

درآمد کالای اول $=TR_1=Q_1.P_1=150P_1-2P_1^2-P_2P_1$

درآمد کالای دوم $=TR_2=Q_2P_2=200P_3-P_1P_2-3P_2^2$

درآمد انحصارگر $=TR=TR_1+TR_2=150P_1-2P_1^2-P_2P_1+200P_2-P_1P_2-3P_2^2$

$$\frac{\partial TR}{\partial P_1}=150-4P_1-2P_2=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}P_1=25\\P_2=25\end{cases}$$

$$\frac{\partial TR}{\partial P_2}=200-6P_2-2P_1=0$$

۲۰ـ گزینه ۲ صحیح است.

چنانچه $\frac{dQ_2}{dp_1}>0$ باشد دو کالا جانشین هستند و اگر $\frac{dQ_2}{dp_1}<0$ باشد دو کالا مکمل، بدلیل آنکه $\frac{dQ_1}{dp_2}=-1$, $\frac{dQ_2}{dp_1}=-1$ است. دو کالای مکمل می‌باشند.

۲۱ـ گزینه ۴ صحیح است.

کشش تقاضا نسبت به قیمت برابر است با درصد تغییرات مقدار تقاضا تقسیم بر درصد تغییرات قیمت کالا

$$x=20-2p^2\xrightarrow{p=2}x=20-2(2)^2=12$$

$$E_{x,p}=\frac{\%\Delta x}{\%\Delta p}=\frac{dx}{dp}\cdot\frac{p}{x}=-4p\left(\frac{2}{12}\right)=-\frac{16}{12}=-\frac{4}{3}$$

۲۲ـ گزینه ۲ صحیح است.

درآمد کل $TR=y.x=(10-x)x=10x-x^2$

سود $=\pi=TR-TC=10x-x^2-(4+2x)=-4+8x-x^2$

$$\frac{d\pi}{dx}=8-2x=0\Rightarrow x=4$$

۲۳ـ گزینه ۱ صحیح است.

مطلوبیت کل مصرف کننده از بودجه‌ای که صرف خرید کالاها و خدمات می‌کند هنگامی حداکثر می‌شود که روابط زیر برقرار باشد:

$$\frac{Muq_1}{Muq_2}=\frac{p_1}{p_2}\quad,\quad p_1q_1+p_2q_2=I$$

از طرفی:

$$Muq_1=\frac{du}{dq_1}=4q_2\ ,\ Muq_2=\frac{du}{dq_2}=4q_1$$

$$\frac{Muq_1}{Muq_2}=\frac{p_1}{p_2}\Rightarrow\frac{4q_2}{4q_1}=\frac{5}{10}\Rightarrow 10q_2=5q_1\Rightarrow 2q_2=q_1$$

$$p_1q_1+p_2q_2=I\Rightarrow 5q_1+10q_2=400\Rightarrow 5(2q_1)+10q_2=400\Rightarrow q_2=20$$

$$q_1 = 2q_2 \Rightarrow q_1 = 40$$

۲۴ـ گزینه ۳ صحیح است.

با استفاده از انتگرال گیری به روش جز به جز داریم:

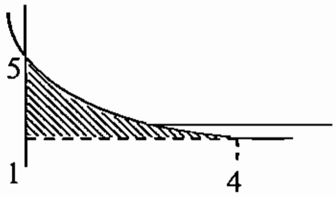
$$TVC = \int_0^{11} xe^x dx = xe^x - e^x \Big|_0^{11} = 11e^{11} - e^{11} - (-1) = 10e^{11} + 1$$

$$TC = TVC + TFC = 10e^{11} + 1 + 100 = 10e^{11} + 101$$

۲۵ـ گزینه ۳ صحیح است.

مازاد مصرف کننده برابر است با تغییرات سطح زیر منحنی تقاضا و بالای مقدار تعادلی در شکل زیر مازاد مصرف کننده (C.S) برابر است با مساحت S بنابراین مازاد مصرف کننده برابر است با:

$$C.S = \int_0^4 \left(\frac{5}{x+1}\right) dx - 1 \times 4 = 5Ln(x+1)\Big|_0^4 - 4 = 5Ln5 - 4$$



۲۶ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$E_D = \frac{dx}{dp} \cdot \frac{p}{x} = \frac{-qp^2}{2}\left(\frac{p}{\frac{q}{2p}}\right) = -\frac{qp^{-2}}{2}\left(\frac{2p^2}{q}\right) = -1$$

۲۷ـ گزینه ۴ صحیح است.

نرخ رشد هر متغیر برابر است با مشتق لگاریتم نپرین آن متغیر نسبت به تغییر زمان به عنوان مثل نرخ رشد متغیر x که با $\dot{x}$ نشان داده شده است برابر است با:

$$\dot{x} = \frac{dLnx}{dt} = \frac{\frac{dx}{x}}{dt}$$

بنابراین مقدار تغییر آن متغیر برابر است با انتگرال نرخ رشد متغیر در فاصله زمانی مربوطه، به عبارت دیگر از آنجایی که (t)، نرخ رشد بدهی است پس $\int r(t)dt$ رشد بدهی را به ما می‌دهد که با توجه به فاصله زمانی بین سال‌های ۱۳۶۰ تا ۱۳۷۰ رشد بدهی برابر $\int_{1360}^{1370} r(t)dt$ می‌باشد.

۲۸ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$\text{درآمد کل} = TR = P.Q$$

اگر از طرفین رابطه Ln بگیریم و مشتق آن را نسبت به زمان (t) محاسبه کنیم نرخ رشد بدست می‌آید. بنابراین این رابطه را اگر بر حسب نرخ رشد بنویسیم خواهیم داشت $\dot{TR} = \dot{P} \cdot \dot{Q}$ که علامت • بالای هر متغیر به معنای نرخ رشد آن متغیر می‌باشد.

$$TR = P.Q \xrightarrow{Ln} LnTR = Lnp + LnQ$$

$$\dot{TR} = \dot{P} + \dot{Q} = \%2 + \%5 = \%7$$

۲۹ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$AC = \frac{TC}{x}, \; MC = TC' = \frac{\partial TC}{\partial x}$$

$$AC = \frac{x^2 + 6x + 9}{x} = x + 6 + \frac{9}{x}$$

$MC = 2x + 6$

زمانی که هزینه نهایی و هزینه کل برابرند داریم $AC = MC$

$$AC = MC \Rightarrow x + 6 + \frac{9}{x} = 2x + 6 \Rightarrow x = \frac{9}{x} \Rightarrow x = \pm 3$$

تنها $x = 3$ مورد قبول است.

۳۰ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$TR = y.x = (16 - x)x = 16x - x^2$$
$$\text{سود}\ \pi = TR - TC = 16x - x^2 - (x^2 + 8) = -2x^2 + 16x - 8$$
$$\pi' = -4x + 16 = 0 \Rightarrow x = 4$$

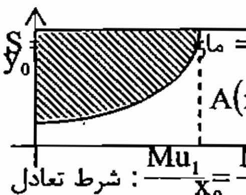
۳۱ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$TVC = \int_0^2 2x\text{Ln}(x+1)dx \qquad u = \text{Ln}(x+1) \Rightarrow du = \frac{dx}{x+1}$$
$$dv = 2xdx \Rightarrow v = x^2$$
$$= x^2\text{Ln}(x+1)\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{2x^2dx}{x+1}$$
$$= x^2Ln(x+1)\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{2x^2 - 1 + 1}{x+1}dx = x^2Ln(x+1)\Big|_0^2 - \int_0^2\left(X - 1 + \frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$= x^2Ln(x+1)\Big|_0^2 - \frac{x^2}{2} + x - Ln|x+1|\Big|_0^2 = 4Ln3 - [(2 - 2 + Ln|2+1|) - (0 - 0 + Ln|1|)]$$
$$4\text{Ln}3 - \text{Ln}3 = 3\text{Ln}3 \Rightarrow TC = TVC + TFC = 3\text{Ln}3 + 10$$

۳۲ـ گزینه ۳ صحیح است.

مازاد تولید کننده: هر تابع عرضه نشان دهنده مقادیر مختلف از کالایی است که با قیمت‌های گوناگونی عرضه می‌شود فرض می‌کنیم معادله عرضه به صورت $y = f(x)$ باشد. اگر نقطه تعادل بازار $A(x_0, y_0)$ فرض شود در این صورت تولید کننده‌هایی که مایل به عرضه کالا زیر قیمت y_0 نیز می‌باشند از اینکه قیمت y_0 است با مفروضات اقتصادی معینی منفعت می‌برند. که کل نفع تولید کننده بوسیله مساحت محصور بین منحنی $y = f(x)$ و خط $y = y_0$ دیده می‌شود.

$$\text{مازاد تولید کننده} = S = x_0y_0 - \int_0^{x_0} f(x)dx$$



$$\text{مازاد} = \int_0^3[10 - (x^2 + 1)]dx = \int_0^3(9 - x^2)dx = 9x - \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = 27 - 9 = 18$$

۳۳ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$\text{شرط تعادل}: \frac{Mu_1}{p_1} = \frac{Mu_2}{p_2} \Rightarrow \frac{4q_2}{1} = \frac{4q_1}{1} \Rightarrow q_2 = q_1$$
$$\Rightarrow 2q_1 = 10 \Rightarrow q_1 = 5 \Rightarrow q_2 = 5$$
$$u_{Max} = 4q_1q_2 = 4 \times 5 \times 5 = 100$$

رشته مدیریت

۱ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$\text{نقطه سر به سر}: TC = TR \Rightarrow 2\ln x = \frac{1}{3}x\ln x \Rightarrow$$

$$\ln x\left(2-\frac{1}{3}x\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} \ln x = 0 \Rightarrow x = 1 \\ 2-\frac{1}{3}x = 0 \Rightarrow x = 6 \end{cases}$$

۲ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$TC = 7x^2 + 4 \Rightarrow TC' = 14x$$

۳ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$\text{نقطه سربه سر}: TR = TC \quad xe^x = 5x \Rightarrow x(e^x - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ e^x = 5 \Rightarrow x = \ln 5 \end{cases}$$

۴ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$\text{نقطه سر به سر}: TC = TR \Rightarrow 2x = x\ln x \Rightarrow x(2-\ln x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2-\ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 2 \Rightarrow x = e^2 \end{cases}$$

۵ـ گزینه ۴ صحیح است.

سود پیوسته : $x_n = x_0 e^{nr}$

$$1000000 = x_0 e^{0/1\times 10} \Rightarrow 10^6 = xe \Rightarrow x = \frac{1}{e}(10)^6$$

r: نرخ بهره

۶ـ گزینه ۲: صحیح (اصلاح)

$$\text{هزینه کل} = y = x^2 + 2 \Rightarrow y' = 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

y'	$-$	0	$+$

در بازه داده شده تابع همواره صعودی است بنابرای ماکزیمم هزینه کل به ازای $x=5$ خواهد بود یعنی: $y = 5^2 + 2 = 27$

۷ـ گزینه ۳ صحیح است.

برای محاسبه هزینه ثابت مقدار تابع هزینه کل را به ازای $x=0$ (عدم تولید) بدست می‌آوریم.

$$x = 0 \Rightarrow TC = 5e^0 + \ln 1 = 5$$

۸ـ گزینه ۲ صحیح است.

نقطه سر به سر:

$$TC = TR \Rightarrow 2\ln(x+1) = \ln(2x+10) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(x+1)^2 = \ln(2x+10) \Rightarrow (x+1)^2 = 2x+10 \Rightarrow x^2+2x+1-2x-10 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \quad \text{ق ق} \end{cases}$$

۹ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$x_n = x.e^{m} \Rightarrow 2x. = x.e^{0/1n} \Rightarrow e^{0/1n} = 2 \Rightarrow 0/1n = \ln 2 \Rightarrow n = 10\ln 2$$

۱۰ـ گزینه ۳ صحیح است.

با فرض اینکه نرخ رشد یکسان بوده و جمعیت بطور پیوسته در حال افزایش بوده است رابطه رشد جمعیت همانند رابطه بهره مرکب پیوسته خواهد بود پس:

$$x_t = x.e^{nk} \Rightarrow 8/4 = 7e^{10k} \Rightarrow 1/2 = e^{10k} \Rightarrow 10k = \ln 1/2 \Rightarrow k = \frac{1}{10}\ln 1/2$$

۱۱ـ گزینه ۲ صحیح است.

روش اول:

$$\left.\begin{array}{l} TR=40x \\ TC=100/000+0/6\times 40x \end{array}\right\} \Rightarrow TR=TC \Rightarrow 40x=100/000+24x \Rightarrow 16x=100/000 \Rightarrow x=6250$$

روش دوم:

$$Q=\frac{F}{P-V}=\frac{100/00}{40-\%60\times 40}=\frac{100/000}{16}=6250$$

۱۲ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$TC=\int Mc dx=\int xe^x dx=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+c$$

$$x=v \Rightarrow dv=dx, e^x=u \Rightarrow du=e^x dx$$

هزینه ثابت میزان هزینه ای است که بدون توجه به سطح تولید ایجاد می‌شود بنابراین برای محاسبه C هزینه کل را به ازای X=0 معادل هزینه ثابت قرار می‌دهیم:

$$(0)e^0-e^0+c=100 \Rightarrow -1+c=100 \Rightarrow c=101 \Rightarrow TC=xe^x-e^x+101$$

۱۳ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$\pi=TR-TC=e^{2x}-1-(e^x+9)=e^{2x}-e^x-10$$

$$\pi=100=e^{2x}-e^x-10 \Rightarrow e^{2x}-e^x-110=0 \Rightarrow$$

$$(e^x-11)(e^x+10)=0 \left\langle \begin{array}{l} e^x+10 \neq 0 \\ e^x-11=0 \Rightarrow e^x=11 \Rightarrow x=\ln 11 \end{array}\right.$$

۱۴ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$TR=TC \Rightarrow e^{2x}=e^x+20 \Rightarrow e^{2x}-e^x-20=0 \Rightarrow (e^x-5)(e^x+4)=0 \Rightarrow e^x-5=0 \Rightarrow$$

$$e^x=5 \Rightarrow x=\ln 5$$

۱۵ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$x_n=x.e^m \Rightarrow x_{20}=ae^{20\times 0/15}=ae^3$$

۱۶ـ گزینه ۱ صحیح است.

چون هر چه مبلغ وام و نیز نرخ بهره بیشتر باشد باز پرداخت وام نیز بیشتر خواهد بود بنابراین مشتق جزئی p نسبت به r,A مثبت می‌شود. همچنین هرچه وام در سالهای بیشتری باز پرداخت شود، مبلغ باز پرداخت کاهش می‌یابد و در نتیجه مشتق جزئی P نسبت به N منفی می‌شود.

۱۷ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$\pi=80x-2x^2-xy-3y^2+100y, x+y=12 \Rightarrow$$

$$f(x,y,\lambda)=80x-2x^2-xy-3y^2+100y-\lambda(x+y-12)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}=80-4x-y-\lambda=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=-x-6y+100-\lambda=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial \lambda}=-(x+y-12)=0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} y=7 \\ x=5 \\ \lambda=53 \end{array}$$

۱۸ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$Tc = 100x + 100/000, TR = 120x \Rightarrow \pi = TR - TC = 20x - 100/000$$

$$\pi = 100/000 \Rightarrow 100/000 = 20x - 100/000 \Rightarrow 20x = 200/000 \Rightarrow x = 10/000$$

۱۹ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$x_n = x.e^{rn} \Rightarrow 1{,}500{,}000 = 1{,}000{,}000e^{4r}$$

$$\Rightarrow e^{4r} = 1/5 \Rightarrow 4r = Ln1/5 \Rightarrow r = \frac{1}{4}Ln1/5$$

رشته حسابداری

۱ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$TR = TC$$

$$xe^x + 1 = 5x + 1 \Rightarrow e^x = 5 \Rightarrow x = Ln5$$

۲ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$Q_b = \frac{F}{p - v}$$

P : قیمت یک واحد — v : هزینه متغیر یک واحد

F : هزینه ثابت کل — Q_b : تعداد تولید در نقطه سر به سر

$$Q_b = \frac{60.000}{50 - 20} = 2000$$

۳ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$TR = TC \Rightarrow e^x + 5x = 5x + 2 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow x = Ln2$$

۴ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$\pi = TR - TC = 8x - x^2 - (2x + 1)$$

$$\pi = -x^2 + 6x - 1 \Rightarrow \pi' = -2x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3$$

۵ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$A_t = a\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{nt} = a\left(1 + \frac{0/12}{12}\right)^{12\times3} = a(1/01)^{36}$$

$$\frac{At}{a} = (1/01)^{36}$$

۶ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$TR = TC \Rightarrow 6^x = 16 \times 3^x \Rightarrow 2^x \times 3^x = 16 \times 3^x$$

$$\Rightarrow 2^x = 16 \Rightarrow x = 4$$

۷ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$\pi = TR - TC \Rightarrow \pi = 100x - (80x + 100) = 20x - 100$$

$$\pi = 10.000 \Rightarrow 20X - 100 = 10000 \Rightarrow 20x = 10100 \Rightarrow x = 505$$

۸ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$TC = 10 + (x - 3)e^{x-3}$$

$$(TC)' = e^{x-3} + (x - 3)e^{x-3} = 0$$

$$e^{x-3}[1 + (x - 3)] = 0 \Rightarrow 1 + x - 3 = 0 \Rightarrow x = 2$$

۹ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$Q_b = \frac{F}{p - v} \Rightarrow Q_b = \frac{60000}{15 - 9} = 10.000$$

۱۰ـ گزینه ۱ صحیح است.رابط زیر را بین سرمایه اولیه و نرخ سود و سرمایه جدید داریم.

(سرمایه اولیه × نرخ سود در آن دوره زمانی) + سرمایه اولیه = سرمایه جدید در یک حوزه زمانی

حال اگر p سرمایه اولیه باشد داریم:

$$\text{سرمایه جدید در پایان ماه اول} = P+\frac{0/12}{12}\times p = p+0/01p = p(1+0/01)$$

به همین ترتیب:

$$\text{سرمایه جدید در پایان ماه دوم} = p(1+0/01)$$

حال اگر بعد از t سال سرمایه دو برابر شود و بدین معنی است که:

$$p(1+0/01)^{12t} = 2p \Rightarrow (1+0/01)^{12t} = 2 \xrightarrow{\text{از طرفین } Ln \text{ می‌گیریم}} Ln(1+0/01)^{12t} = Ln2$$

$$12tLn(1+0/01) = Ln2 \Rightarrow t = \frac{Ln2}{12Ln1/01}$$

۱۱ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$Q_b = \frac{F}{p-v} \Rightarrow Q_b = \frac{200.000}{120-100} = \frac{200.000}{20} = 10.000$$

فصل نهم

بسط دو جمله ای

دو جمله‌ای نیوتون $((x+y)^n)$:

بسط دو جمله ای نیوتون به صورت روبرو می‌باشد:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \dots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \dots + \binom{n}{n}y^n$$

در بسط دو جمله ای نیوتون همواره:

۱) $n+1$ جمله وجود دارد.

۲) برای جمله $k+1$ خواهیم داشت $\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$ و اگردو جمله ای به صورت $(x-y)^n$ باشد حالت کلی جمله $k+1$ برابر با $(-1)^k\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$ خواهد بود.

۳) برای تعیین مجموع ضرایب در دو جمله ای نیوتون فقط لازم است به جای متغیرهای آن عدد یک قرار داده و مقدار آن را بدست آوریم.

مثال: در بسط دو جمله ای $(x-\frac{1}{3x})^8$ جمله چهارم و مجموع ضرایب را مشخص کنید:

جمله چهارم (۱+۳ ام): $(-1)^3\binom{8}{3}(x)^5\left(\frac{1}{3x}\right)^3 = (-1)\frac{8!}{5!3!}(x)^5\frac{1}{27x^3} = -\frac{56}{27}x^2$

مجموع ضرایب: $(x-\frac{1}{3x})^8, x=1 \Rightarrow (1-\frac{1}{3})^8 = (\frac{2}{3})^8$

تستهای طبقه‌بندی شده فصل نهم

رشته اقتصاد

۱- ضریب جمله x^4 در بسط دو جمله‌ای $(\sqrt{2}x-\frac{1}{2\sqrt{x}})^{10}$ کدام است؟ (سراسری ۷۳)

۱) $\frac{1}{6}C_{10}^4$ ۲) $\frac{1}{2}C_{10}^6$ ۳) $\frac{1}{4}C_{10}^4$ ۴) $\frac{1}{8}C_{10}^5$

۲- در بسط دو جمله‌ای $(x-\sqrt{x})^{16}$ ضریب جمله x^9 کدام است؟ (سراسری ۷۷)

۱) ۱۸۹- ۲) ۱۲۰- ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۸۹

۳- مجموعه همه ضرایب در بسط دو جمله‌ای $(x+y)^7$ برابر کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) 2^6 ۲) 2^7 ۳) 3^6 ۴) 3^7

۴- در بسط $(x+\frac{1}{x})^8$ ضریب جمله مستقل از کدام است؟ $(x \neq 0)$ (سراسری ۸۰)

۱) ۳۵ ۲) ۴۰ ۳) ۶۰ ۴) ۷۰

۵- چند جمله گویا در بسط دو جمله‌ای $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})^{100}$ وجود دارد؟ (سراسری ۸۱)

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

۶-در بسط دو جمله‌ای $(x^2+\frac{1}{x^3})^{20}$ ضریب جمله‌ای که مستقل از x باشد، کدام است؟(سراسری ۸۲)

۱) C_{20}^{10} ۲) C_{20}^6 ۳) C_{20}^8 ۴) C_{20}^4

۷- عبارت $(a+b+c)^4$ چند جمله دارد؟ (سراسری ۸۳)

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

رشته مدیریت

۱- در بسط $(x+\frac{1}{x})^8$ عدد ثابت کدام است؟ (سراسری ۷۱)

۱) ۸۰ ۲) ۷۰ ۳) ۶۴ ۴) ۶۰

۲- ضریب x^2 در بسط دو جمله‌ای $(x+\frac{1}{\sqrt{x}})^8$ کدام است؟ (سراسری ۷۶)

۱) ۶۴ ۲) ۷۰ ۳) ۷۲ ۴) ۸۰

۳- در بسط $(x-\frac{1}{2x})^8$ مجموع ضرایب کدام است؟ (سراسری ۷۸)

۱) $\frac{1}{256}$ ۲) $\frac{1}{64}$ ۳) 24 ۴) 32

۴-در بسط $(x+\frac{1}{x})^8$ ضریب x^2 برابر است با: (سراسری ۸۰)

۱) ۴۸ ۲) ۵۶ ۳) ۶۰ ۴) ۷۰

۵-در بسط $(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x})^2$ ضریب جمله‌ای که فاقد x است کدام است؟ (سراسری ۸۲)

۱) $\frac{7}{2}$ ۲) $-\frac{7}{2}$ ۳) $\frac{21}{2}$ ۴) $-\frac{21}{2}$

۶- تعداد جملات بسط $(a+b+c)^5$ کدام است؟ (سراسری ۸۳)

۱) ۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۱

رشته حسابداری

۱- مجموع ضرایب بسط $(2x-\frac{4}{3x})^6$ کدام است؟ (سراسری ۷۱)

۱) $\frac{64}{3}$ ۲) $\frac{32}{243}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{64}{729}$

۲- ضریب جمله مستقل از x در بسط $(x^2-\frac{1}{x})^6$ کدام است؟ (سراسری ۷۳)

۱) ۲۰- ۲) ۱۵- ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

۳-ضریب جمله x^4 در بسط دو جمله‌ای $(2x-\frac{1}{4})^8$ کدام است؟ (سراسری ۷۵)

۱) $\frac{35}{8}$ ۲) $\frac{15}{32}$ ۳) $\frac{7}{32}$ ۴) $\frac{7}{16}$

۴- ضریب جمله x^2 در بسط دو جمله‌ای $(x-\frac{1}{2\sqrt{x}})^8$ کدام است؟ (سراسری ۷۶)

۱) $\frac{-35}{8}$ ۲) $\frac{-33}{16}$ ۳) $\frac{33}{16}$ ۴) $\frac{35}{8}$

۵- در بسط $(x-\frac{1}{\sqrt{x}})^{10}$ ضریب جمله شامل x^4 کدام است؟ (سراسری ۷۸)

۱) ۱۸۰ ۲) ۲۰۰ ۳) ۲۱۰ ۴) ۲۴۰

۶- ضریب x^3 در بسط دو جمله‌ای $(2x^2-\frac{1}{3\sqrt{x^3}})$ کدام است؟ (سراسری ۷۹)

۱) $C_{12}^{6}(\frac{2}{3})^6$ ۲) $C_{12}^{3}(\frac{2}{3})^3$ ۳) $C_{12}^{3}\frac{2^3}{3^9}$ ۴) $C_{12}^{9}\frac{2^9}{3^3}$

۷- مجموع ضرایب در بسط $(a+b+c)^5$ کدام است؟ (سراسری ۸۳)

۱) ۱۲۵ ۲) ۱۵۰ ۳) ۲۲۵ ۴) ۲۴۳

پاسخنامه تشریحی تستهای طبقه‌بندی شده فصل نهم

رشته اقتصاد

۱- گزینه ۲ صحیح است.

برای جمله عمومی در بسط $(a-b)^n$ داریم

$$T_k=\binom{n}{k}a^{n-k}\ b^k$$

$$\binom{10}{k}(\sqrt{2})^{10-k}\times(\frac{-1}{2})^k\times x^{10-k}\times(\frac{1}{\sqrt{x}})^k$$

$$=\binom{10}{k}(\sqrt{2})^{10-k}\times(-\frac{1}{2})^k\times x^{10-k}\times x^{-\frac{k}{2}}$$

$$=\binom{10}{k}(\sqrt{2})^{10-x}\times(\frac{1}{2})^k\times x^{10-\frac{3k}{2}}$$

$$x^{10-\frac{3k}{2}}=x^4\Rightarrow 10-\frac{3k}{2}=4\Rightarrow k=4$$

$$\text{ضریب } x^4=\binom{10}{4}\sqrt{2}^6\times(-\frac{1}{2})^4=\frac{1}{2}C_{10}^4$$

$$C_{10}^4=C_{10}^6\Rightarrow\frac{1}{2}C_{10}^6$$

۲- گزینه ۳ صحیح است.

$$\binom{16}{k}x^{16-k}(-\sqrt{x})^k=\binom{16}{k}x^{16-k}\times(-1)^k(x^{\frac{k}{2}})=\binom{16}{k}(-1)^k x^{16-\frac{k}{2}}$$

$$x^{16-\frac{k}{2}}=x^9\Rightarrow 16-\frac{k}{2}=9\Rightarrow k=14$$

$$\binom{16}{14}(-1)^{14}=\frac{16!}{14!(16-14)!}=120$$

۳- گزینه ۲ صحیح است.

$$x=y=1\rightarrow(1+1)^7=2^7$$

۴- گزینه ۴ صحیح است.

$$\binom{8}{k}x^{8-k}\ (\frac{1}{x})^k=\binom{8}{k}x^{8-k}\ x^{-k}=\binom{8}{k}x^{8-2k}$$

در جمله مستقل از x باید توان x برابر صفر باشد.

$8-2k=0 \Rightarrow k=4$

$\binom{8}{4}=\frac{8!}{4!\,4!}=70$

۵- گزینه ۳ صحیح است. جملاتی که در آنها توان $\sqrt{2}$ زوج و توان $\sqrt[3]{3}$ مضربی از ۳ باشد جملات گویا هستند. که تعداد آنها برابر است با: $\left[\frac{100}{6}\right]=16$ (علامت [ ] جز صحیح است) و علاوه بر آن $(\sqrt{2})^{100}$ نیز گویا است که به باقی اعداد اضافه می‌شود.

۱۶+۱ =۱۷

۶- گزینه ۳ صحیح است.

$\binom{20}{k}(x^2)^{20-k}(x^{-3})^k=\binom{20}{k}x^{40-2k-3k}$

$40-5k=0 \Rightarrow k=8 \qquad \binom{20}{8}=C_{20}^{8}$

۷- گزینه ۳ صحیح است . تعداد جملات در بسط $(x_1+x_2+\ldots+x_k)^n$

$\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{n+k-1}{n}$

$\binom{4+3-1}{4}=\binom{6}{2}=\frac{6\,!}{2!\,4!}=15$

رشته مدیریت

۱-گزینه ۲ صحیح است.

در بسط دو جمله‌ای $(x^p+\frac{1}{x^q})^n$ برای بدست آوردن جمله مستقل از x، ابتدا مقدار k را از رابطه $k=\frac{np}{p+q}$ بدست آورده و در رابطه $\binom{n}{k}$ قرار می‌دهیم که جمله مستقل از x بدست می‌آید.

$P=q=1 \Rightarrow k=\frac{8\times 1}{1+1}=4 \qquad \binom{8}{4}=\frac{8!}{4!(8-4)!}=70$

$n=8$

۲ـ گزینه ۲ صحیح است.

جمله k+1 : $\binom{8}{k}(x)^{8-k}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k \Rightarrow$

$\frac{x^{8-k}}{x^{\frac{k}{2}}}=x^2 \Rightarrow x^{8-k-\frac{k}{2}}=x^2 \Rightarrow 8-\frac{3k}{2}=2 \Rightarrow \frac{3k}{2}=6 \Rightarrow k=4$

ضریب $x^2 \Rightarrow \binom{8}{k}=\binom{8}{4}=\frac{8!}{4!4!}=\frac{8\times 7\times 6\times 5}{4\times 3\times 2}=70$

۳ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$(x-\frac{1}{2x})^8 = x=1 \Rightarrow (1-\frac{1}{2})^8 = (\frac{1}{2})^8 = \frac{1}{256}$$

۴ـ گزینه ۲ صحیح است.

جمله عمومی: $\binom{8}{k}x^{8-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k \Rightarrow \frac{x^{8-k}}{x^k} = x^2 \Rightarrow x^{8-2k} = x^2 \Rightarrow 8-2k=2 \Rightarrow k=3$

ضریب x^2: $\binom{8}{3} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8\times7\times6}{3\times2} = 56$

۵ـ گزینه ۳ صحیح است.

جمله عمومی: $(-1)^k\binom{9}{k}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{9-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k = (-1)^k\binom{9}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{9-k}(x^2)^{9-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k$

$$\Rightarrow \frac{x^{18-2k}}{x^k} = x^0 \Rightarrow 18-2k-k=0 \Rightarrow 3k=18 \Rightarrow k=6$$

ضریب جمله $\Rightarrow (-1)^6\binom{9}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{9!}{6!3!}\times\frac{1}{8} = \frac{9\times8\times7}{3\times2\times8} = \frac{21}{2}$

راه حل دوم: با توجه به نکته‌ی عنوان شده در جواب سوال یک

$$k = \frac{nP}{P+q} = \frac{9\times2}{1+2} = 6$$

$$\binom{9}{6}(\frac{1}{2})^{9-6}(-1)^6 = \frac{21}{2}$$

۶- گزینه ۴ صحیح است. تعداد جملات متمایز در بسط $(x_1+x_2+....+x_k)^n$ از رابطه زیر تعیین می‌شود.

تعداد جملات $= \frac{k(k+1)(k+2)...(k+n-1)}{n!} = \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$

در این سوال $\binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2!\,5!} = 21$

رشته حسابداری

۱- گزینه ۴ صحیح است.

$$(2-\frac{4}{3})^6 = (\frac{6-4}{3})^6 = (\frac{2}{3})^6 = \frac{64}{729}$$

۲-گزینه ۳ صحیح است.

$$\binom{6}{k}(x^{2})^{6-k}\left(\frac{-1}{x}\right)^{k}=\binom{6}{k}x^{12-2k}\ (-1)^{k}\ x^{-k}$$

$$=\binom{6}{k}x^{12-3k}\ (-1)^{k}$$

$$12-3k=0\Rightarrow k=4\rightarrow\binom{6}{4}(-1)^{4}=15$$

۳- گزینه ۱ صحیح است.

$$\binom{8}{k}(2x)^{8-k}(-\frac{1}{4})^{k}=\binom{8}{k}2^{8-k}(-\frac{1}{4})^{k}x^{8-k}$$

$$x^{8-k}=x^{4}\Rightarrow k=4\quad\Rightarrow x^{4}\text{ضریب}=\binom{8}{4}2^{8-4}\ (-\frac{1}{4})^{4}=\frac{35}{8}$$

۴- گزینه ۴ صحیح است.

$$\binom{8}{k}x^{8-k}(\frac{-1}{2\sqrt{x}})^{k}=\binom{8}{k}x^{8-k}(-\frac{1}{2})^{k}\ x^{-\frac{1}{2}k}=\binom{8}{k}x^{8-\frac{3}{2}k}\ (-\frac{1}{2})^{k}$$

$$x^{8-\frac{3}{2}k}=x^{2}\Rightarrow k=4\Rightarrow x^{2}\ \ \text{ضریب}\ =\binom{8}{4}(-\frac{1}{2})^{4}=\frac{35}{8}$$

۵- گزینه ۳ صحیح است.

$$\binom{10}{k}x^{10-k}\ (\frac{-1}{\sqrt{x}})^{k}=\binom{10}{k}x^{10-k}\ (-1)^{k}\ x^{-\frac{k}{2}}=\binom{10}{k}x^{10-\frac{3}{2}k}(-1)^{k}$$

$$x^{10-\frac{3}{2}k}=x^{4}\Rightarrow k=4\Rightarrow\ x^{4}\ \ \text{ضریب}\ =\binom{10}{4}(-1)^{4}=210$$

۶- گزینه ۱ صحیح است.

$$\binom{12}{k}(2x^{2})^{12-k}\ (-\frac{1}{3\sqrt{x^{3}}})^{k}=\binom{12}{k}\ 2^{12-k}\times x^{24-2k}\times(-\frac{1}{3})^{k}\times x^{-\frac{3}{2}k}$$

$$=\binom{12}{k}2^{12-k}\times(-\frac{1}{3})^{k}\times x^{24-\frac{7}{2}k}$$

$$x^{24-\frac{7}{2}k}=x^{3}\Rightarrow k=6\Rightarrow x^{3}\ \ \text{ضریب}=\binom{12}{6}2^{12-6}\times(-\frac{1}{3})^{6}=C_{12}^{6}\ (\frac{2}{3})^{6}$$

۷- گزینه ۴ صحیح است.

$$((a+b+c)^{5}\xrightarrow{a=b=c=1}(1+1+1)^{5}=3^{5}=243$$

آزمون ریاضی کارشناسی ارشد ۸۷

رشته‌های حسابداری و مدیریت

۱- دو مجموعه A و B به ترتیب دارای ۵ و ۹ عضو می باشند. به طوری که $(A-B)\cup(B-A)=A\cup B$ است، تعداد زیر مجموعه های مجموعه $A\cap B$، کدام است؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۴

۲- به چند طریق می‌توان ۹ مهره یکسان را در شش قفسه که در یک ردیف قرار دارند جای داد به طوری که هیچ قفسه ای بدون مهره باقی نماند؟

۱) ۲۱　　۲) ۲۸　　۳) ۴۲　　۴) ۵۶

۳- در بسط عبارت $\left(x^2-\frac{1}{x}+3\right)^5$، جمله ی فاقد x، کدام است؟

۱) ۵۱۳　　۲) ۵۱۷　　۳) ۵۱۹　　۴) ۵۲۱

۴- دامنه ی تابع با ضابطه ی $f(x)=Arc\sin\frac{1+x^2}{2x}$، کدام است؟

۱) $\{-1,1\}$　　۲) $(-1,1)$　　۳) $[-1,1]$　　۴) $R-(-1,1)$

۵- برد تابع با ضابطه $f(x)=Log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$، کدام است؟

۱) $[-1,1]$　　۲) $[+1,\infty)$　　۳) $[0,\infty)$　　۴) $(-\infty,+\infty)$

۶- دو تابع g , f، با کدام ضابطه ها با یکدیگر برابرند؟

۱) $f(x)=1$ و $g(x)=\frac{x}{x}$　　۲) $f(x)=x$ و $g(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2$

۳) $f(x)=\log x^2$ و $g(x)=2\log x$　　۴) $f(x)=x^2$ و $g(x)=\left[\frac{x+|x|}{2}\right]^2+\left[\frac{x-|x|}{2}\right]^2$

۷- حاصل عبارت $\frac{1}{x^2}\left(Ln(1+x)+Ln(1-x)\right)$ وقتی $x\to 0$، کدام است؟

۱) -1　　۲) صفر　　۳) ۱　　۴) e

۸- اگر $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{4}{3}$ باشد، مشتق $f\left(\frac{2}{x}\right)$ به ازای $x=2$، کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$　　۲) $\frac{1}{3}$　　۳) $-\frac{1}{3}$　　۴) $-\frac{2}{3}$

۹- خط مماس بر منحنی به معادله ی $\begin{cases}x=t^2+3t-8\\ y=2t^2-2t-5\end{cases}$ در نقطه نظیر $t=2$، نیمساز ناحیه سوم را با کدام طول قطع می کند؟

۱) -7　　۲) -12　　۳) -15　　۴) -19

۱۰- حاصل $\lim\limits_{x\to -1}\frac{1+\sqrt[3]{1+2x}}{x+\sqrt{2+x}}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$　　۲) $\frac{3}{2}$　　۳) $\frac{4}{9}$　　۴) $\frac{9}{4}$

۱۱-هزینه ثابت برای تولید کالایی ۱۶۲۰۰ واحد پول و هزینه متغیر آن ۷۰ درصد فروش است. اگر قیمت فروش هر واحد کالا ۱۲۰ واحد پول باشد، تعداد واحد کالا در نقطه ی سر به سر، کدام است؟

۱) ۴۵۰ ۲) ۵۴۰ ۳) ۶۰۰ ۴) ۷۲۰

۱۲-اگر $y=\frac{2x+1}{x-2}$ و $x=t^2-t$ و $t=\sqrt{2p+1}$، باشد، مقدار $\frac{dp}{dy}$ به ازای $p=4$، کدام است؟

۱) $-1/92$ ۲) $-1/36$ ۳) $1/08$ ۴) $1/72$

۱۳- جمعیت فعلی کشوری ۵۰ میلیون نفر است، نسبت متولدین ۳۲ در هزار و نسبت در گذشتگان ۱۲ در هزار این جمعیت است. اگر این روند به طور ثابت ادامه یابد جمعیت تقریبی این کشور بعد از ۳۰ سال چند میلیون نفر خواهد شد؟ ($e^{/6}=1/8$)

۱) ۷۹ ۲) ۸۲ ۳) ۷۸/۵ ۴) ۸۴/۵

۱۴- خطی به معادله ی $x+y=a$ قائم بر منحنی به معادله ی $y=\frac{1}{2}x^2-2x+In(x-1)$ است. a کدام است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) صفر ۴) ۱

۱۵- از رابطه ی $e^{2x-y}+x^2z-xy^2=34$، مقدار $\frac{\partial z}{\partial y}$ در نقطه ی $(-3,2,1)$ کدام است؟

۱) $\frac{-17}{15}$ ۲) $\frac{-32}{11}$ ۳) $\frac{-35}{11}$ ۴) $\frac{-34}{9}$

۱۶- دیفرانسیل کامل تابع $z=\frac{x-2y}{x+y}$ در نقطه ی $(1,2)$ به ازای $\Delta x=0/05$ و $\Delta y=0/01$ کدام است؟

۱) $0/04$ ۲) $0/03$ ۳) $0/02$ ۴) $0/01$

۱۷- نقطه بحرانی تابع $f(x,y)=2x^2-6xy+3y^2$ چگونه است؟

۱) $(0,0)$ مینیمم ۲) $(0,0)$ ماکسیمم ۳) $(1,1)$ مینیمم ۴) $(1,1)$ ماکسیمم

۱۸- ماکسیمم مقدار تابع $f(x,y,z)=xyz$ با شرط $x^2+y^2+z^2=12$، کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۸

۱۹- اگر $r^2=x^2+y^2, U=r^2.Inr$ باشد، حاصل $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ کدام است؟

۱) $4Inr+4$ ۲) $4Lnr+2$ ۳) $2Lnr+4$ ۴) $Lnr+2$

۲۰- حاصل $\int_{-\infty}^{0} e^{x}\sqrt{16+9e^{x}}\,dx$، کدام است؟

۱) $\frac{61}{9}$ ۲) $\frac{52}{9}$ ۳) $\frac{122}{27}$ ۴) $\frac{104}{27}$

۲۱- مساحت ناحیهٔ محدود به منحنی به معادلهٔ $y=(x+2)e^{-x}$ و محورهای مختصات واقع در ناحیه دوم، کدام است؟

۱) e^2-4 ۲) e^2-3 ۳) $2e^2-4$ ۴) $\frac{1}{2}e^2-1$

۲۲- حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+2n}$، کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{5}{2}$

۲۳- به ازای کدام مقدار a از دستگاه معادلات $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x+ay+3z=0 \\ 8x-y+3z=0 \end{cases}$، ماتریس $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$، است؟

۱) ۱　　۲) ۱−　　۳) ۲−　　۴) ۳−

۲۴- اگر $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ باشد، عنصر a_{22} در ماتریس A^{-1}، کدام است؟

۱) $\frac{1}{9}$　　۲) $-\frac{1}{9}$　　۳) $\frac{2}{9}$　　۴) $-\frac{2}{9}$

۲۵- امتداد ویژهٔ ماتریس $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ نظیر مقدار ویژه کوچکتر، کدام است؟

۱) $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$　　۲) $\begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix}$　　۳) $\begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix}$　　۴) $\begin{pmatrix} a \\ -2a \end{pmatrix}$

آزمون ریاضی کارشناسی ارشد ۸۷ رشته اقتصاد

۱- فروشگاهی دو نوع کالا را حراج کرده است از کالای نوع اول، ۶۰ عدد و از کالای نوع دوم ۴۸ عدد فروخته شده است. اگر ۱۴ نفر از هر دو کالا خریده باشند. تعداد مشتریان چند نفرند؟

۱) ۹۴ ۲) ۹۸ ۳) ۱۰۸ ۴) ۱۲۲

۲- کدام عدد مختلط یکی از جواب های $\sqrt[4]{i}$ **نیست**؟

۱) $\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}$ ۲) $\cos\frac{7\pi}{8}+i\sin\frac{7\pi}{8}$ ۳) $\cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8}$ ۴) $\cos\frac{13\pi}{8}+i\sin\frac{13\pi}{8}$

۳- حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin x}{2x}\right)^{\frac{1}{x}}$، کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{1}{e}$ ۳) e ۴) $+\infty$

۴- مجموع ۹۹۹ جمله اول از دنباله با جمله عمومی $U_n=\log\left(\frac{n}{n+1}\right)$، کدام است؟

۱) -2 ۲) -3 ۳) ۰/۰۶ ۴) ۰/۰۳

۵- ضابعه معکوس تابع $y=\frac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}}$، کدام است؟

۱) $y=\log_3\frac{x+3}{x-3}$ ۲) $y=\log\frac{x-3}{x+3}$

۳) $y=\frac{1}{2}\log_3\frac{x+1}{x-1}$ ۴) $y=\frac{1}{3}\log\frac{x+1}{x+1}$

۶- برای تابع $f:R\to R$ به معادله $y=\cosh x+1$، کدام یک از موارد **نادرست** است؟

۱) اکیداً محدب ۲) اکیداً مقعر

۳) زوج ۴) فاقد نقطه گسستگی

۷- برد تابع $y=Ln\frac{3+x}{3-x}$ کدام بازه است؟

۱) $(-\infty,0]$ ۲) $[0,+\infty)$ ۳) $(-\infty,+\infty)$ ۴) $(-3,3)$

۸- شرکتی کالایی را تولید می کند، اگر فروش هر واحد ۱۲۰۰ ریال و هزینه ثابت ۵/۰۰۰/۰۰۰ ریال و هزینه تولید هر واحد ۱۰۰۰ ریال باشد، چه تعداد کالا تولید شود تا به نقطه سر به سر برسد؟

۱) ۵۰/۰۰۰ ۲) ۴۰/۰۰۰ ۳) ۳۰/۰۰۰ ۴) ۲۵/۰۰۰

۹- حاصل $\lim\limits_{x\to 0}[x]+[x^2]+[x^3]+[x^4]+[x^5]+[x^6]$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) -3 ۴) -6

۱۰- نرخ تغییر عبارت $\sqrt{x^2+8}$ نسبت به تغییر $\frac{x}{x+1}$ در نقطه $x=1$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{1}{12}$ ۳) $-\frac{1}{12}$ ۴) $-\frac{4}{3}$

۱۱- اگر میزان درآمد کل بنگاهی $TR = P.Q$ باشد، p قیمت و Q مقدار فروش از تولید بنگاه است و rTR, rQ, rP به ترتیب نرخ رشد قیمت، تولید و درآمد کل باشند، کدام رابطه صحیح است؟

۱) $rTR = rP.rQ$ ۲) $rTR = rp + rQ$ ۳) $rTR = p.rp + Q.rQ$ ۴) $rTR = \frac{rP.rQ}{P.Q}$

۱۲- در تابع $y = f(x)$، اگر $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ همواره داشته باشیم $f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$ که در آن $0 < \lambda < 1$، آنگاه تابع $f(x)$ در فاصله $[a,b]$ چگونه است؟

۱) مقعر ۲) محدب ۳) اکیداً مقعر ۴) اکیداً محدب

۱۳- تابع هزینه کل یک تولیدکننده به صورت $TC = x^2 + 6x + 9$ است. تابع هزینه نهایی، در کدام نقطه، تابع هزینه متوسط را قطع می کند؟

۱) $(3,10)$ ۲) $(2,25)$ ۳) $(3,12)$ ۴) $(3,36)$

۱۴- سطح محصور بین خط $y = x$ و منحنی $y = \frac{1}{x^2}$ و خط $y = 2$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2} - 2\sqrt{2}$ ۲) $\frac{3}{2} - \sqrt{2}$ ۳) $2 - 2\sqrt{2}$ ۴) $\frac{7}{2} - 2\sqrt{2}$

۱۵- شیب خط مماس بر منحنی تابع $y = f(x)$ در هر نقطه $M(x,y)$ واقع بر آن به صورت $\frac{(x+1)e^x}{2y}$ است. اگر منحنی این تابع از مبدأ مختصات شروع شده و در ناحیه اول قرار گیرد $f(4)$ کدام است؟

۱) $2e^2$ ۲) $4e^2$ ۳) $2e^4$ ۴) $4e^4$

۱۶- اگر $f(x) = \int \frac{2x dx}{(x^2+1) Ln(x^2+1)}$ حاصل $f(\sqrt{e-1}) - f(1)$ کدام است؟

۱) $2Ln2$ ۲) $Ln2$ ۳) $1 - Ln2$ ۴) $-Ln(Ln2)$

۱۷- مقدار انتگرال $I = \int x^2 \sqrt{1-x^2}\, dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{16}$ ۲) $\frac{\pi}{8}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 2

۱۸- اگر A یک ماتریس مربع باشد، آنگاه $A + A'$ و $A - A'$ به ترتیب کدام است؟

۱) شبه متقارن، متقارن ۲) متقارن، شبه متقارن ۳) منفرد، غیرمنفرد ۴) غیرمنفرد، منفرد

۱۹- ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ چگونه است؟

۱) شبه معین مثبت ۲) شبه معین منفی ۳) معین مثبت ۴) معین منفی

۲۰- مقدار دترمینان $\begin{vmatrix} m & a-b & mb+mc \\ m & b-d & ma+mc \\ m & c-d & ma+mb \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) m ۳) a ۴) صفر

۲۱- مقادیر خاص ماتریس مربع A را با λ نشان می دهیم، کدام مورد نادرست است؟

۱) اگر A متقارن باشد λ حقیقی اند.

۲) اگر A متقارن باشد، علامت λ ها همان علامت A است.

۳) دترمینان A برابر مجموع λ ها است.

۴) دترمینان A، برابر حاصلضرب λ ها است.

۲۲- صفحه گذرنده از نقطه $A(3,2,1)$ و عمود بر بردار $\vec{n}(1,1,2)$، محور zها را در چه ارتفاعی قطع می کند؟

۱) ۲ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) $\frac{7}{2}$ ۴) ۶

۲۳- برد تابع $f=\left\{(x,y,z): z=\sqrt{64-25x^2-4y^2+24y}\right\}$ کدام است؟

۱) $\{z: 8\le z\le 10\}$ ۲) $\{z: 0\le z\le 8\}$ ۳) $\{z: 0\le z\le 12\}$ ۴) $\{z: 0\le z\le 10\}$

۲۴- حد تابع $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$، در امتداد خط $y=\frac{1}{2}x$، کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) ۳

۲۵- در تابع دو متغیره $z=f(x,y)$ باتوجه به علامت دیفرانسیل مرتبه دوم بر روی D_F، کدام مورد نادرست است؟

۱) اگر $d^2z\le 0$ تابع محدب است ولی مؤکد نیست. ۲) اگر d^2z هم علامت نباشد تابع نه مقعر است و نه محدب.

۳) اگر $d^2z<0$، تابع اکیداً مقعر است. ۴) اگر $d^2z>0$ تابع اکیداً محدب است.

۲۶- مقدار تابع $z=xy-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ در نقطه بحرانی کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۳ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) ۴

۲۷- اگر $z=f(u,v)$ و $u=x^2+y^2$ و $v=x-y$، آنگاه z_x+z_y، کدام است؟

۱) $2(x+y)f'_u$ ۲) $2(x-y)f'_v$ ۳) $2xf'_u+2yf'_v$ ۴) $2xf'_u-2yf'_v$

۲۸- نقطه بحرانی تابع $z=x^2+y^2$ نسبت به قید $x+2y=4$ کدام است؟

۱) $(-2,3,13)$ ۲) $(2,1,5)$ ۳) $\left(\frac{4}{5},\frac{8}{5},\frac{16}{5}\right)$ ۴) $\left(\frac{5}{3},\frac{7}{6},\frac{149}{36}\right)$

۲۹- کدام تابع غیرهمگن است؟

۱) $z=k^{\alpha}L^{\beta}$ ۲) $z=e\frac{x^2}{y}+Ln\frac{x^2}{y}$ ۳) $z=xe^{\frac{y}{x}}+y$ ۴) $y=\sin\frac{y}{x}+\cos\frac{y}{x}$

۳۰- تابع تولید یک تولیدکننده $z=2xy$ و هزینه کل آن $c=2x+4y+10$ می باشد به ازاء $C=90$ ماکزیمم تولید و مسیر توسعه کدام است؟

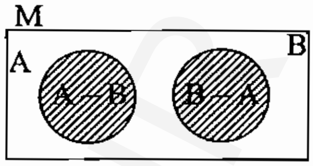
۱) $y=2x, 400$ ۲) $y=\frac{1}{2}x, 400$ ۳) $y=2x, 200$ ۴) $y=\frac{1}{2}x, 200$

پاسخنامه آزمون ریاضی کارشناسی ارشد
رشته‌های حسابداری و مدیریت ۸۷

۱- گزینه ۲ صحیح است.

با توجه به این که $(A-B)\cup(B-A)=A\cup B$ می باشد، نتیجه می گیریم که دو مجموعه A و B هیچ اشتراکی با یکدیگر ندارند بنابراین:

$A\cap B=\phi$



$$\xrightarrow[A\cap B \quad \text{مجموعه}]{\text{تعداد زیرمجموعه های}} = 2^{n(A\cap B)} = 2^{0} = 1$$

۲- گزینه ۴ صحیح است.

یادآوری: اگر بخواهیم N شی مشابه را بین K نفر تقسیم کنیم تعداد کل حالتها برابر است با:

$$\frac{(N+K-1)!}{N!\ \times(k-1)!}$$

در این سوال چون گفته هیچ قفسه ای بدون مهره باقی نماند بنابراین ابتدا در هر قفسه یک مهره قرار می دهیم در نتیجه مسأله همانند آن است که بخواهیم ۳ مهره مشابه را بین ۶ قفسه تقسیم کنیم، روشن است که تعداد کل حالتها برابر است با:

$$N=3\ ,\ \ K=6 \xrightarrow{\text{تعداد کل حالتها}} \frac{(3+6-1)!}{3!\ 5!}=56$$

۳- گزینه ۱ صحیح است.

$$(a+b+c)^n = \sum_{n_1=0}^{n} C_n^{n_1}\ a^{n_1}\ (b+c)^{n-n_1}$$

$$(a+b+c)^n = \sum_{n_1=0}^{n} C_n^{n_1}\ a^{n_1} \sum_{n_2=0}^{n-n_1} C_{n-n_1}^{n_2}\ \ b^{n_2}\ c^{n-n_1-n_2}$$

$$(a+b+c)^n = \sum_{n_1=0}^{n} \sum_{n_2=0}^{n-n_1} C_n^{n_1}\ C_{n-n_1}^{n_2}\ a^{n_1}\ b^{n_2}\ c^{n-n_1-n_2}$$

$$(a+b+c)^n = \sum_{n_1=0}^{n} \sum_{n_2=0}^{n-n_1} \frac{n!}{n_1!\ n_2!\ n_3!}\ \ a^{n_1}\ b^{n_2}\ c^{n_3}$$

با این شرط که $n_1+n_2+n_3=n$

$$\Rightarrow\left(x^2-\frac{1}{x}+3\right)^5 = \sum_{n_1=0}^{5} \sum_{n_2=0}^{5-n_1} \frac{5!}{n_1!n_2!n_3!}\ \ (x^2)^{n_1}\ \left(-\frac{1}{x}\right)^{n_2}(3)^{n_3}$$

بنابراین در بسط فوق جمله فاقد x به صورت زیر محاسبه می شود:

اگر $n_1=1,\ \ n_2=2,\ \ n_3=2 \xrightarrow{\text{جمله فاقد X}} \frac{5!}{1!2!2!}(x^2)^1\ \ \left(-\frac{1}{x}\right)^2\ (3)^2=270$

اگر $n_1=0,\ \ n_2=0,\ \ n_3=5 \xrightarrow{\text{جمله فاقد X}} \frac{5!}{0!0!5!}(x^2)^0\left(-\frac{1}{x}\right)^0(3)^5=243$

$$\xrightarrow{\text{جمله فاقد X}} 270+243=513$$

یادوری: هنگامی که عبارت $(x_1+x_2+...+xk)^n$ را به توان می رسانیم، هر کدام از جملات بسط به صورت $Ax_{x_1}^{n_1}\ x_2^{n_2}....xk^{xk}$ می باشد که آن $n_1+n_2+...nk=n$ بوده و:

$$A=\frac{n!}{n_1!n_2!\dots nk!n}$$

۴- گزینه ۱ صحیح است.

تابع $y=\sin x$ در فاصله $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ صعودی و پیوسته است و لذا در فاصله $[-1,1]$ معکوس آن را می توان تعریف کرد.

$$y=\sin x\left(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y=Arc\sin x \qquad (-1\le x\le 1)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$f(x)=Arc\sin\frac{1+x^2}{2x}\xrightarrow{\text{برای تعیین دامنه باید:}}-1\le\frac{1+x^2}{2x}\le 1$$

$$\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{2x}\le 1\Rightarrow\dfrac{(x-1)^2}{2x}\le 0\Rightarrow x\in(-\infty,0)\cup\{1\} & \text{I}\\[2mm] \dfrac{1+x^2}{2x}\ge -1\Rightarrow\dfrac{(x+1)^2}{2x}\ge 0\Rightarrow x\in(0,+\infty)\cup(-1) & \text{II}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{I\cap II}Df=\{-1,1\}$$

۵- گزینه ۳ صحیح است.

ابتدا دامنه تابع $f(x)$ را به صورت زیر حساب می کنیم:

$x^2-1\ge 0\Rightarrow |x|\ge 1\Rightarrow x\ge 1$ یا $x\le -1$

$$\left.\begin{array}{l}\text{اگر}\quad x\ge 1\Rightarrow x+\sqrt{x^2-1}\;)>0\\ \text{اگر}\quad x\le -1\Rightarrow x+\sqrt{x^2-1}\;)\not>0\end{array}\right\}\Rightarrow x\ge 1\Rightarrow Df=[1,+\infty)$$

حال با توجه به دامنه تابع $f(x)$ برای برد تابع $f(x)$ خواهیم داشت:

اگر $x=1\Rightarrow y=f(1)=\log(1+\sqrt{1-1}=\log 1=0$

اگر $x=+\infty\Rightarrow y=+\infty$

$\Rightarrow Rf=[0,+\infty)$

۶- گزینه ۴ صحیح است.

دو تابع f و g را برابر یا مساوی می نامیم، در صورتی که:

الف) دامنه های f و g مساوی باشند، یعنی $Df=Dg$

ب) به ازای هر x از دامنه مشترک f و g داشته باشیم: $f(x)=g(x)$

در این سوال خواهیم داشت:

(گزینه اول $f(x)=1\ ,\ Df=R$

$g(x)=\frac{x}{x}\ ,\ Dg=R-\{0\}$

چون شرط $Df=Dg$ برقرار نیست بنابراین دو ضابطه با یکدیگر برابر نیستند هرچند که $f(x)=g(x)$:

$f(x)=x \quad , \quad Df=R$ (گزینه دوم

$$g(x)=\left(\sqrt{x}\right)^{2} ؛ Dg=[0,+\infty)$$

چون شرط $Df=Dg$ برقرار نیست بنابراین دو ضابطه با یکدیگر برابر نیستند هرچند که $f(x)=g(x)$:

$f(x)=\log x^{2},\ Df=R-\{0\}$ (گزینه سوم

$$g(x)=2\log x,\ Dg=(0,+\infty)$$

چون شرط $Df=Dg$ برقرار نیست بنابراین دو ضابطه با یکدیگر برابر نیستند هرچند که $f(x)=g(x)$

$f(x)=x^{2},\ Df=R$ (گزینه چهارم

$$g(x)=\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^{2}+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^{2},\ Dg=R$$

چون هر دو سرط الف و ب در این جا برقرار است بنابراین نتیجه می گیریم که دو تابع با یکدیگر برابر هستند.

۷- گزینه ۱ صحیح است.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{2}}[Ln(1+x)+Ln(1-x)]=\frac{0}{0}$$ مبهم

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)+Ln(1-x)}{x^{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)(1-x)}{x^{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{Ln(1-x^{2})}{x^{2}}=\frac{0}{0}$$

به کمک قاعده هوپیتال خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 0}\frac{Ln(1-x^{2})}{x^{2}}=\lim_{x\to \infty}\frac{\frac{-2x}{1-x^{2}}}{2x}=-1$$

۸- گزینه ۴ صحیح است.

یادآوری ۱:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

یادآوری ۲:

$$y=f(u)\xrightarrow{\text{u تابعی از x می باشد}} y'=u'f'(u)$$

با توجه به دو یادآوری فوق در این سوال خواهیم داشت:

اگر $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{4}{3}\Rightarrow f'(1)=\dfrac{4}{3}$

$$\Rightarrow\left[F\left(\frac{2}{x}\right)\right]'=-\frac{2}{x^2}f'\left(\frac{2}{x}\right)\xrightarrow[\text{ازای}]{\text{مشتق تابع به}}\left(f\left(\frac{2}{x}\right)\right)'=-\frac{2}{3}$$

۹- گزینه ۴ صحیح است.

اگر $t=2\Rightarrow x=2\ ,\quad y=1$

$$m=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{4t-2}{2t+3}\xrightarrow{\text{به ازای } x=2} m=\frac{6}{7}$$

معادله خط مماس: $y-y_0=m(x-x_0)\Rightarrow y+1=\frac{6}{7}(x-2)\Rightarrow 7y-6x=-19$

$$\begin{cases} y=x \\ 7y-6x=-19\end{cases}\Rightarrow x=-19$$

۱۰- گزینه ۳ صحیح است.

$$\lim_{x\to -1}\frac{1+\sqrt[3]{1+2x}}{x+\sqrt{2+x}}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}$$

به کمک قاعده هوپیتال خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to -1}\frac{1+\sqrt[3]{1+2x}}{x+\sqrt{2+x}}=\lim_{x\to -1}\frac{\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(1+2x)^2}}}{1+\dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}}=\frac{4}{9}$$

۱۱- گزینه ۱ صحیح است.

مفروضات مساله:

$FC = ۱۶۲۰۰, VQ = \%۷۰ \; P.Q ,\quad P = ۱۲۰$

$$Q = \frac{F}{P.V} \Rightarrow Q = \frac{۱۶۲۰۰}{۱۲۰ - ۸۴} = ۴۵۰$$

زیرا:

$$V.Q = \%۷۰ \; P.Q \Rightarrow V = ۰/۷ \times ۱۲۰ = ۸۴$$

۱۲- گزینه ۱ صحیح است.

در این سوال چون y تابعی از x و x خود تابعی از t و نهایتاً t تابعی از p می باشد بنابراین ابتدا مقدار $\frac{dy}{dp}$ را طبق قاعده زنجیره ای مشتق حساب می کنیم:

$$\frac{dy}{dp} = \frac{dy}{dx} . \frac{dx}{dt} . \frac{dt}{dp}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dp} = -\frac{۵}{(x-۲)^۲} . (۲t - ۱) . \frac{۲}{۲\sqrt[۳]{۲p+۱}}$$

$$\xrightarrow[t=۳,\quad x=۶]{\text{بـــه ازای } p=۴ \text{ خـــواهیم}} \frac{dy}{dp} = -\frac{۲۵}{۴۸} \Rightarrow \frac{dp}{dy} = -\frac{۴۸}{۲۵} = -۱/۹۲$$

۱۳- گزینه ۴ صحیح است.

$$fv = Pv \; e^{in} \Rightarrow fv = ۵۰ \quad e^{(۰/۰۳۲-۰/۰۱۲)\times ۳۰}$$

$$\Rightarrow fv = ۵۰ e^{۰/۰۲\times ۳۰} \Rightarrow fv = ۵۰ e^{۰/۶} = ۵۰ \times \left(e^{۰/۳}\right)^۲ = ۵۰ (۱/۳)^۲ = ۸۴/۵$$

۱۴- گزینه ۳ صحیح است.

اگر m شیب خط مماس بر منحنی و m' شیب خط قائم بر منحنی باشد آنگاه: $m.m' = -۱$

در این سوال خواهیم داشت: $m' = -۱,\quad m = \frac{dy}{dx} \Rightarrow m = x - ۲ + \frac{۱}{x-۱}$

در نتیجه طبق رابطه فوق داریم:

اگر $m.m' = -۱ \Rightarrow \left(x - ۲ + \frac{۱}{x-۱}\right) \times (-۱) = -۱ \Rightarrow x = ۲$

$$y = f(۲) \Rightarrow y = -۲$$

بنابراین معادله خط قائم برابر است با: $y + ۲ = -۱(x - ۲) \Rightarrow x + y = ۰$

چون در سوال ذکر شده که معادله خط قائم به صورت $x+y=a$ است نتیجه می گیریم که : $a=۰$

۱۵- گزینه ۳ صحیح است.

$$e^{۲z-y}+x^{۲}z-xy^{۲}-۳۴=۰$$

چون تابع داده شده دو متغیره ضمنی می باشد بنابراین:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}=-\frac{\left(-e^{۲z-y}-۲xy^{۲}\right)}{۲e^{۲z-y}+x^{۲}}$$

$$\xrightarrow{\text{در نقطه } (-۲,۲,۱)}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{(-۱+۳۶)}{۲+۹}=-\frac{۳۵}{۱۱}$$

۱۶- گزینه ۲ صحیح است.

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$dz=\frac{۳y}{(x+y)^{۲}}dx-\frac{۳x}{(x+y)^{۲}}dy$$

$$\xrightarrow[\Delta y=۰/۰۱\ ,\ \Delta x=۰/۰۵]{\text{در نقطه (۱و۲)و به}}\qquad dz=\frac{۶}{۹}(۰/۰۵)-\frac{۳}{۹}(۰/۰۱)=۰/۰۳$$

۱۷- گزینه ۳ صحیح است.

$$Z'x=۰\Rightarrow ۶x^{۲}-۶y=۰\Rightarrow y=x^{۲}$$

$$Z'y=۰\Rightarrow -۶x+۶y=۰\Rightarrow y=x$$

نقاط بحرانی

$$\begin{cases}y=x^{۲}\\ y=x\end{cases}\Rightarrow x^{۲}=x\Rightarrow x=۰\ ,x=۱\Rightarrow A(۰,۰),A'(۱,۱)$$

$$Z''x^{۲}=۱۲x؛Z''xy=-۶؛Z''y^{۲}=۶$$

برای نقطه A خواهیم داشت:

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} = -36$$

بنابراین نقطه A یک نقطه زینی می باشد.

برای نقطه A' خواهیم داشت:

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} = 36$$

چون $|\Delta|$ بزرگتر از صفر بوده و Z''_{x^2} نیز بزرگتر از صفر می باشد بنابراین نقطه بحرانی یک نقطه مینیمم می باشد.

۱۸- گزینه ۲ صحیح است.

$$\begin{cases} \dfrac{yz}{2x} = \dfrac{xz}{2y} = \dfrac{xy}{2z} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 12 \end{cases}$$

اگر $\dfrac{yz}{2x} = \dfrac{xz}{2y} \Rightarrow y^2 = x^2$, اگر $\dfrac{xz}{2y} = \dfrac{xy}{2z} \Rightarrow y^2 = z^2$

با توجه به دو رابطه فوق نتیجه می گیریم که $z^2 = x^2$، بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x^2 = y^2 = z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 12 \end{cases} \Rightarrow x^2 = y^2 = z^2 = 4 \xrightarrow[\text{برابر است با}]{\text{ماکزیمم مقدار تابع}} xyz = 8$$

۱۹- گزینه ۱ صحیح است.

$$\longrightarrow U = (x^2 + y^2) Ln\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$u = (x^2 + y^2)\frac{1}{2} Ln(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = xLn(x^2 + y^2) + x \,,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = Ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2} + 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = yLn(x^2 + y^2) + y \,,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = Ln(x^2 + y^2) + \frac{2y^2}{x^2 + y^2} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2Ln(x^2 + y^2) + 4 = 2Lnr^2 + 4 = 4Lnr + 4$$

۲۰- گزینه ۳ صحیح است.

$$\int_{\infty} e^x\sqrt{16 + 9e^x}\; dx = \frac{1}{9} \times \int_{\infty} 9e^x (16 + 9e^x)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \frac{\frac{1}{9}}{\frac{3}{2}}\left(16+9e^{x}\right)^{\frac{3}{2}}\Big]_{-\infty}^{0}$$

$$= \frac{2}{27}\left(16+9e^{x}\right)\sqrt{16+9e^{x}}\ \Big]_{-\infty}^{0}$$

$$F(0)=\frac{250}{27}\ ,\ F(-\infty)=\frac{128}{27}$$

$$\Rightarrow F(0)-F(-\infty)=\frac{250}{27}-\frac{128}{27}=\frac{122}{27}$$

۲۱- گزینه ۲ صحیح است؟

$$S=\left|\ \int_{-2}^{0}(x+2)e^{-x}dx\ \right| \Rightarrow S=\left|\left[-(x+2)e^{-x}-e^{-x}\right]_{-2}^{0}\ \right|=e^{2}-3$$

۲۲- گزینه ۲ صحیح است.

$$\frac{2}{n^{2}+2n}=\frac{2}{n(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{n^{2}+2n}=\frac{An+2A+Bn}{n(n+2)}\Rightarrow \begin{cases}2A=2\\ A+B=0\end{cases}\Rightarrow A=1,\ B=-1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^{2}+2n}=\sum_{n=1}^{n}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)+\ldots$$

$$Sn=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\Rightarrow \lim_{n\to\infty} Sn=\frac{3}{2}\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^{2}+2n}=\frac{3}{2}$$

۲۳- گزینه ۳ صحیح است.

ماتریس ضرایب $= A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & a & 3\\ 8 & -1 & 3\end{pmatrix}$

ماتریس مجهولات $\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \circ \\ \circ \\ \circ \end{pmatrix} = \circ =$$ ماتریس معلومات

در سوال فوق چون دستگاه ارائه شده به صورت همگن $AX=\overline{O}$ می باشد، در صورتی در صورت $\begin{pmatrix} \circ \\ \circ \\ \circ \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ است که داشته باشیم: $|A|=\circ$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} ۲ & ۱ & -۱ \\ ۱ & a & ۳ \\ ۸ & -۱ & ۳ \end{vmatrix} = \circ \xrightarrow[\text{روش ساروس}]{\text{با استفاده از}} a=-۲$$

راه حل دوم:

در ماتریس A رابطه زیر برقرار است:

$$۲R_۲ = R۳ - ۲R_۱ \Rightarrow ۲a = -۱-۲ \Rightarrow a=-۲$$

۲۴- گزینه ۱ صحیح است.

$$A^{-۱} \text{ در } a_{۲۲} \text{ عنصر } = \frac{\Delta_{۲۲}}{|A|} = \frac{-۱}{-۹} = \frac{۱}{۹}$$

زیرا:

$$\Delta_{۲۲} = (-۱)^{۲+۲} \begin{vmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & -۳ \end{vmatrix} = -۱$$

$$|A| = \begin{vmatrix} ۰ & ۱ & -۱ \\ ۲ & ۰ & ۳ \\ ۱ & -۳ & ۰ \end{vmatrix} = -۹$$

۲۵- گزینه ۱ صحیح است.

هرگاه X یک بردار و K عددی حقیقی باشد و A یک ماتریس مربع از درجه n باشد، به قسمی که $AX=kx$ ، در این صورت k را مقادیر ویژه "خاص" و X را بردار یا امتداد ویژه "خاص" گویند. در این سوال خواهیم داشت:

$$A = \begin{pmatrix} ۳ & -۲ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{pmatrix}$$

برای بدست آوردن مقادیر ویژه به صورت زیر عمل می کنیم:

$$\begin{vmatrix} ۳-k & -۲ \\ ۱ & ۰-k \end{vmatrix} = ۰ \Rightarrow (۳-k)(-k)+۲=۰ \Rightarrow k=۱,\ \ k=۲$$

چون سوال امتداد ویژه ماتریس نظیر مقدار ویژه کوچکتر را سوال کرده بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{pmatrix} ۳ & -۲ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} ۳x_۱ - ۲x_۲ = kx_۱ \\ x_۱ = kx_۲ \end{cases} \xrightarrow{k=۱} \begin{cases} ۳x_۱ - ۲x_۲ = x_۱ \\ x_۱ = x_۲ \end{cases}$$

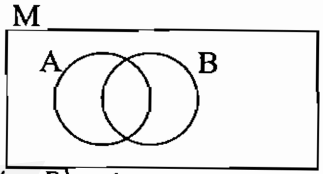
جوابهای این دستگاه، عبارتند از کلیه نقاط واقع بر خط $x_۱ = x_۲$، پس بردار ویژه نظیر $k=۱$ عبارت است از:

$$\{(x_۱, x_۲) \mid x_۱ = x_۲\}$$

پاسخنامه آزمون ریاضی کارشناسی ارشد رشته اقتصاد ۸۷

۱- گزینه ۱ صحیح است.

با توجه به نمودار ون خواهیم داشت:



$n(A) \Rightarrow n(A=60)$ = تعداد افرادی که کالای نوع اول را خریدند.

$n(B) \Rightarrow n(B)=48$ = تعداد افرادی که کالای نوع دوم را خریدند.

$n(A\cap B) \Rightarrow n(A\cap B)=14$ = تعداد افرادی که هم کالای نوع اول و هم کالای نوع دوم را خریدند.

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B) \Rightarrow n(A\cup B)=60+48-14=94$$

۲- گزینه ۲ صحیح است.

اگر $Z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ باشد و بخواهیم اعداد مختلط $Z^{\frac{1}{n}}$ را حساب کنیم با فرض $W=\sqrt[n]{z}$ می توان نوشت:

$$W=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{2k\pi+\theta}{n}+i\sin\frac{2k\pi+\theta}{n}\right),\quad k=0,1,2,\dots,n-1$$

در این سوال خواهیم داشت:

$$W=\xrightarrow[\theta=\frac{\pi}{2}]{n=4\ ,\ p=1} W=\sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)\ k=0,1,2,3$$

اگر $k=0 \Rightarrow W=\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}$

اگر $k=1 \Rightarrow W=\cos\frac{5\pi}{8}+i\sin\frac{5\pi}{8}$

اگر $k=2 \Rightarrow W=\cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8}$

اگر $k=3 \Rightarrow W=\cos\frac{13\pi}{8}+i\sin\frac{13\pi}{8}$

یادآوری: عدد $Z=x+iy$ که آن را می توان به صورت $Z=(x,y)$ نشان داد یک عدد مختلط است x را قسمت حقیقی Z و y را قسمت موهومی Z می نامند.

۳- گزینه ۱ صحیح است.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-}\left(1+\frac{\sin x}{2x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-\infty}=0$$

۴- گزینه ۲ صحیح است.

$$Un=\log\left(\frac{n}{n+1}\right),\ \sum_{n=1}^{999}\log\left(\frac{n}{n+1}\right)=?$$

$$\sum_{n=1}^{999}Un=\log_{10}^{\frac{1}{2}}+\log_{10}^{\frac{2}{3}}+\log_{10}^{\frac{3}{4}}+\dots+\log_{10}^{\frac{999}{1000}}$$

$$\sum_{n=1}^{999}Un=\log_{10}^{1}-\log_{10}^{2}+\log_{10}^{2}-\log_{10}^{3}+\log_{10}^{3}-\log_{10}^{4}+\dots+\log_{10}^{999}-\log_{10}^{1000}$$

$$\sum_{n=1}^{999}Un=\log_{10}^{1}-\log_{10}^{1000}=0-3=-3$$

۵- گزینه ۳ صحیح است.

با توجه به رابطه $Rf^{-1}=Df$ و $Df^{-1}=Rf$ خواهیم داشت: $x=1\Rightarrow y=\frac{5}{4}$ اگر؛ در تابع $f(x)$ بنابراین باید به دنبال گزینه ای باشیم که رابطه $f^{-1}\left(\frac{5}{4}\right)=1$ در آن صدق کند که این رابطه در گزینه سوم صادق می باشد. زیرا:

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\log_3\frac{x+1}{x-1}\Rightarrow f^{-1}\left(\frac{5}{4}\right)=\log_3\sqrt{\frac{\frac{5}{4}+1}{\frac{5}{4}-1}}=\log_3^3=1$$

۶- گزینه ۲ صحیح است.

توابع نمایی e^x و e^{-x} را در نظر گرفته و از ترکیب آنها توابع هیپربولیک را تعریف می کنیم:

$$1)\ \sin h(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad 2)\ \cos h(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$3)\ \tan h(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},\quad 4)\ \cot h(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

در این سوال خواهیم داشت:

$$y=\cosh(x)+1\Rightarrow y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}+1$$

تابع فوق فاقد نقطه گسستگی بوده و زوج می باشد. زیرا:

$$f(-x)=\frac{e^{-x}+e^x}{2}+1\Rightarrow f(-x)=f(x)$$

از طرفی دیگر تابع فوق اکیداً محدب می باشد. زیرا:

$$f'(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}+1,\quad f''(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

به ازای هر $x\in Df$ مشخص است که $f''(x)>0$

۷- گزینه ۳ صحیح است.

با توجه به رابطه $Df^{-1}=Rf$ خواهیم داشت:

$$y=Ln\frac{3+x}{3-x}\Rightarrow e^y=\frac{3+x}{3-x}\Rightarrow x+xe^y=3e^y-3$$

$$\Rightarrow x(1+e^y)=3e^y-3\Rightarrow x=\frac{3e^y-3}{e^y+1}$$

$$\xrightarrow{\text{نقش x و y را عوض می کنیم}} y=f^{-1}(x)=\frac{3e^x-3}{e^x+1}$$

$$\xrightarrow[1+e^x\neq 0]{\text{با توجه به این که}} Df^{-1}=R$$

۸- گزینه ۴ صحیح است.

$$p=1200,\quad Fc=5/000/000,\quad V=1000$$

$$Q=\frac{FC}{P-V}=\frac{5/000/000}{1200-100}=25000$$ سربه سری

۹- گزینه ۳ صحیح است.

$$\lim_{x\to 0^-} = \lim_{x\to 0^-}\left[x^3\right] = \lim_{x\to 0^-}[x^5] = -1$$

$$\lim_{x\to 0^-}[x^2] = \lim_{x\to 0^-}[x^4] = \lim_{x\to 0^-}[x^6] = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-}\left([x]+[x^2]+[x^3]+[x^4]+[x^5]+[x^6]\right) = -3$$

۱۰- گزینه ۱ صحیح است.

$$\frac{x}{x+1} \text{ نسبت به تغییر } \sqrt{x^2+8} \text{ نرخ تغییر عبارت} = \frac{d\left(\sqrt{x^2+8}\right)}{d\left(\frac{x}{x+1}\right)} = \frac{\frac{d\left(\sqrt{x^2+8}\right)}{dx}}{\frac{d\left(\frac{x}{x+1}\right)}{dx}} = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+8}}}{\frac{1}{(x+1)^2}}$$

$$\xrightarrow{x=1 \quad \text{در نقطه}} \frac{x}{x+1} \text{ نسبت به تغییر } \sqrt{x^2+8} \text{ نرخ تغییر عبارت} = \frac{4}{3}$$

۱۱- گزینه ۲ صحیح است.

فرض کنیم تابعی دارای معادله $y = f(t)$ باشد. بنا به تعریف نرخ رشد این تابع برابر است با :

$$G = \frac{y'}{y} = \frac{f'(t)}{f(t)}$$

از رابطه فوق نتیجه می گیریم که نرخ رشد یک تابع برابر است با نسبت مشتق تابع به خود تابع. رابطه بالا را می توان مشتق لگاریتمی تابع فوق نیز داشت. یعنی:

$$G = (Lny)' \quad [Lnf(t)]' = \frac{f'(t)}{f(t)}$$

با استفاده از فرمول های فوق می توان نرخ رشد را بدست آورد. باید توجه داشت که این رشد پیوسته است؛ و همچنین y' نرخ تغییر تابع y است و $\frac{y'}{y}$ نرخ تغییر یک واحد y، یعنی نرخ رشد می باشد.

در این سوال خواهیم داشت:

$TR = P.Q$ درآمد کل

$LnTR = LnP + LnQ$

$$\text{نرخ رشد درآمد کل } G = \frac{p'}{p} + \frac{Q'}{Q} \Rightarrow rTR = rP + rQ$$

نرخ رشد قیمت — نرخ رشد فروش

۱۲- گزینه ۴ صحیح است.

برای تابع محدب و مقعر تعریفی وجود دارد که این تعریف برای تابع n متغیره قابل تعمیم است.

تابع $f(x)$ را در فاصله (a,b) <u>محدب</u> خوانند اگر $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ همواره داشته باشیم:

$$f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

که در آن $0 \le \lambda \le 1$ است.

تابع را اکیداً محدب خوانند اگر نامساوی بالا و λ فاقد علامت تساوی باشد.

تابع $f(x)$ را در فاصله (a,b) مقعر خوانند. اگر به ازای جمیع مقادیر x_1 و x_2 در فاصله (a,b) همواره داشته باشیم:

$$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\geq \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

که در آن $1\leq\lambda\leq 0$ است.

تابع را اکیداً مقعر خوانند اگر نامساوی فوق و λ فاقد علامت تساوی باشد.

تابع $f(x)$ را در فاصله (a,b) شبه محدب خوانند. اگر به ازای هر x_1 و x_2 متعلق به (a,b) داشته باشیم:

$$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\leq Max[f(x_1),f(x_2)]$$

که در آن $1\leq\lambda\leq 0$ است. اگر نامساوی فوق و λ فاقد علامت تساوی باشد تابع $f(x)$ را شبه محدب موکد می گویند.

تابع $f(x)$ را در فاصله (a,b) شبه مقعر خواند اگر به ازای هر x_2,x_1 متعلق به فاصله (a,b) داشته باشیم:

$$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\geq Min[f(x_1),f(x_2)]$$

که در آن $1\leq\lambda\leq 0$ است. اگر نامساوی فوق و λ فاقد علامت تساوی باشد تابع $f(x)$ را شبه مقعر موکد می گویند.

۱۳- گزینه ۳ صحیح است.

$$\text{هزینه نهایی}=MC=(TC)'\Rightarrow MC=2x+6$$

$$\text{هزینه متوسط}=AC=\frac{TC}{x}\Rightarrow AC=x+6+\frac{9}{x}$$

$$\xrightarrow{\text{نقاط تقاطع MC و AC}} 2x+6=x+\frac{9}{x}\Rightarrow x=\pm 3$$

چون تولید منفی نداریم بنابراین: $x=3$ $\quad \xrightarrow{x=3} MC=2\times 3+6=12$

۱۴- گزینه ۴ صحیح است.

۱۵- گزینه ۱ صحیح است.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x+1)e^x}{2y}\dashrightarrow \int 2y\,dy=\int(x+1)e^x$$

$$\Rightarrow y^2=(x+1)e^x-e^x+C$$

چون در سوال ذکرشده منحنی از مبدأ مختصات شروع می شود بنابراین خواهیم داشت:

$$f(0)=0\rightarrow C=0$$

$$\dashrightarrow y^2=(x+1)e^x-e^x\rightarrow y^2=xe^x$$

$$\xrightarrow[\text{x و y هر دو مثبت می باشند}]{\text{با توجه به این که در ناحیه اول}} y=+\sqrt{xe^x}\dashrightarrow f(4)=\sqrt{4e^4}=2e^2$$

۱۶- گزینه ۴ صحیح است.

$$f(x)=\int\frac{2x\,dx}{(x^2+1)Ln(x^2+1)}\Rightarrow f(x)=\int\frac{\frac{2x}{(x^2+1)}dx}{Ln(x^2+1)}$$

$$\Rightarrow f(x)=Ln(Ln(x^2+1))\Big|^{\sqrt{e-1}}$$

$$f(\sqrt{e-1})=Ln(Lne)=0$$

$$f(1)=Ln(Ln2)$$
$$\Rightarrow f\left(\sqrt{e-1}\right)-f(1)=-Ln(Ln2)$$

۱۷- گزینه ۱ صحیح است.

$x=\sin u$ فرض می کنیم که

$\longrightarrow dx=\cos u\,du$

$\longrightarrow$ اگر $x=0 \Rightarrow u=0$

$\longrightarrow x \Longrightarrow u=\frac{\pi}{2}$

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 u\sqrt{1-\sin^2 u}\quad \cos u\,du$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 u\,\cos^2 u\,du=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\sin^2 2u\,du$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\left(\frac{1-\cos 4u}{2}\right)du=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4u)du$$
$$=\frac{1}{8}\left[u-\frac{1}{4}\sin 4u\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{16}\ ,\ F(0)=0\Rightarrow F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F(0)=\frac{\pi}{16}$$

یادآوری: $\sin 2x=2\sin x\cos x\ ,\ \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$$

۱۸- گزینه ۲ صحیح است.

- ماتریس مربع A متقارن است. هرگاه برگردان آن (ترانسپوزه آن) با خودش مساوی باشد. یعنی $A'=A$

- ماتریس مربع A را ضدمتقارن (شبه متقارن) گویند هرگاه داشته باشیم : $A'=-A$

- ماتریس A را در نظر می گیریم، اگر $|A|=0$ باشد ماتریس A را ماتریس منفرد می گوییم و اگر $|A|\neq 0$ باشد ماتریس A را غیرمنفرد می گوییم.

در این سوال فرض می کنیم که:

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$$

بنابراین ترانسپوزه ماتریس A برابر است با:

$$A'=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$A+A'=\begin{pmatrix}2&5\\5&8\end{pmatrix}\Rightarrow (A+A')'=A'+A=\begin{pmatrix}2&5\\5&8\end{pmatrix}$$

$$A - A' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A - A')' = -(A - A') = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

نتیجه گیری: اگر A یک ماتریس مربع باشد آنگاه $A + A'$ متقارن و $A - A'$ شبه متقارن خواهد بود.

۱۹- گزینه ۳ صحیح است.

ماتریس متقارن A را معین مثبت می گوییم، اگر تمامی دترمینان های اصلی ماتریس A مثبت باشد. یعنی:

$$|A_1| > 0 \ , \ |A_2| > 0 \ , \ \ldots \ |A_n| > 0$$

و آن را معین منفی می گوییم، اگر داشته باشیم:

$$|A_1| < 0, |A_2| > 0, |A_3| < 0, \ldots |A_n| \begin{cases} < 0 & \text{فرد } n \\ > 0 & \text{زوج } n \end{cases}$$

(یعنی در حالت اخیر، علامت دترمینان های اصلی متناوب و اولین آنها منفی است).

اگر علامت دترمینان های اصلی برخلاف روال بالا باشد. ماتریس A را نامعین می گوییم.

یادآوری: ماتریس متقارن A را شبه معین مثبت و یا شبه معین منفی می گوییم، اگر برخی از نامساوی های فوق دارای علامت تساوی نیز باشند.

در این سوال خواهیم داشت:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|A_1| = 3, \ |A_2| = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 5 \ , \ |A_3| = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 2$$

چون $|A_3| > 0$ و $|A_2| > 0$ و $|A_1| > 0$ می باشند. بنابراین ماتریس متقارن A معین مثبت است.

۲۰- گزینه ۴ صحیح است.

این سوال تکرار سوال ۵۰ فصل ماتریس و دترمینان است.

۲۱- گزینه ۳ صحیح است.

ماتریس مربع $A = (aij)n \times n$ را در نظر می گیریم، می خواهیم بردار $X_{n\times1} \neq O$ و عدد λ را چنان تعیین کنیم که داشته باشیم $AX = \lambda X$ (X را بردار ویژه و λ را مقدار ویژه می گوییم.)

رابطه بالا را می توانیم چنین بنویسیم:

$AX - \lambda I_n X = O$ یا $(A - \lambda In)X = O$

رابطه بالا یک دستگاه همگن است، شرط آن که جواب غیر صفر هم داشته باشد این است که دترمینان ضرایب مجهول صفر باشد. یعنی:

$$f(\lambda) = |A - \lambda I_n| = 0$$

رابطه بالا موسوم است به معادله مفسر که مجهول آن مقادیر λ است.

مقادیر ویژه دارای خواص متعددی است از جمله:

۱) حاصلضرب ریشه های معادله مفسر با مقدار دترمینان A برابر است. یعنی:

$$|A| = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \ldots \lambda_n$$

۲) مجموع λ ها با اثر ماتریس (مجموع عناصر قطری) برابر است. یعنی:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = tr(A) = a_{11} + a_{22} \ldots a_{nn}$$

۳) ریشه های معادله مفسر ماتریس A و A' با هم برابرند.

۴) هر ماتریس ریشه معادله مفسر آن است. یعنی:

$f(\lambda)=۰ \Rightarrow f(A)=O$ اگر

(توجه داریم که کافی است در معادله مفسر λ را به A تبدیل کنیم و مقدار ثابت در معادله مفسر با ضریب I و عدد صفر را به ماتریس O تبدیل نماییم.)

۵) اگر ماتریس A متقارن باشد، ثابت می شود که مقادیر ویژه آن مقادیر حقیقی هستند. باید توجه کنیم که مقادیر ویژه برخی از ماتریس ها مقادیر موهومی یا مختلط هستند. قضیه فوق مبین آن است که اگر ماتریسی متقارن باشد، مقادیر ویژه، مقادیر حقیقی هستند.

۲۲- گزینه ۳ صحیح است.

اگر یک نقطه مانند $M(x_۰,y_۰,z_۰)$ در صفحه P و $\vec{N}=(a,b,c)$ بردار نرمال صفحه P باشد، آنگاه معادله صفحه P به صورت زیر خواهد بود:

$$P: a(x-x_۰)+b(y-y_۰)+C(z-z_۰)=۰$$
$$P: ax+by+CZ-(ax_۰+by_۰+CZ_۰)=۰$$

اگر فرض کنیم $d=(-ax_۰+by_۰+CZ_۰)$ باشد (d عددی ثابت است) آنگاه خواهیم داشت:

$$P: ax+by+CZ+d=۰$$

در این سوال خواهیم داشت:

$$\vec{n}=\vec{i}+\vec{j}+۲\vec{k} \quad , \quad A(۳,۲,۱)$$
$$P: x+y+۲Z+d=۰ \xrightarrow{A\in P} ۳+۲+۲+d=۰ \Rightarrow d=-۷$$

$$P: x+y+۲Z-۷=۰ \xrightarrow[x=y=۰]{\text{اگر}} Z=\frac{۷}{۲}$$

۲۳- گزینه ۴ صحیح است.

$$Z=\sqrt{۶۴-۲۵x^۲-۴y^۲+۲۴y} \Rightarrow Z=\sqrt{۱۰۰-۲۵x^۲-(۲y-۶)^۲}$$
$$\mathbf{Dz}=\left\{(x,y)\middle| x,y\in R, ۱۰۰-۲۵x^۲(۲y-۶)^۲\geq ۰\right\}$$
$$\mathbf{Dz}=\left\{(x,y)\middle| x,y\in R, ۲۵x^۲+(۲y-۶)^۲\leq ۱۰۰\right\}$$

با توجه به دامنه تابع می گوییم:

$x=۰\ ,\ y=۳ \Rightarrow Z=\sqrt{۱۰۰}=۱۰$ اگر

$x=۲\ ,\ y=۳ \Rightarrow Z=۰$ اگر

$$\Rightarrow \mathrm{RZ}=[۰,۱۰]$$

۲۴- گزینه ۲ صحیح است.

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{\left(x,\frac{۱}{۲}x\right)\to(o,o)} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{x\to ۰} \frac{x+\frac{۱}{۲}x}{x-\frac{۱}{۲}x}=۳$$

۲۵- گزینه ۱ صحیح است.

تابع $Z=f(x,y)$ را در نظر می گیریم، داریم:

تابع Z اکیداً محدب است.

$$\begin{cases} d^۲z>۰ & \Leftrightarrow \\ d^۲z<۰ & \Leftrightarrow \\ d^۲z>۰ & \Leftrightarrow \end{cases}$$

تابع z اکیداً مقعر است.

تابع z گاهی محدب و گاهی مقعر است.

اگر روابط بالا در نامساوی های اول و دوم تساوی وجود داشته باشد، تابع z محدب و مقعر است، ولی اکید نیست.

۲۶- گزینه ۲ صحیح است.

تابع $Z = f(x,y)$ را در نظر می گیریم، نقطه ای را که در آن مشتقات جزیی مرتبه اول صفر باشد، نقطه بحرانی یا ایستی می گوییم، پس برای تعیین نقطه بحرانی کافی است مشتقات جزیی مرتبه اول را حساب کنیم و مساوی صفر قرار دهیم در نتیجه نقطه به دست آمده را نقطه بحرانی می گوییم یعنی:

$$Z = f(x,y)$$

$$\begin{cases} Z'_x = 0 \\ Z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = a, y = b$$

به جای y,x در تابع مقدار می گذاریم، داریم:

$$Z = f(a,b) = c \quad \Rightarrow M(a,b,c)$$

نقطه M را نقطه بحرانی می گوییم.

در این سوال خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} Z'_x = 0 \Rightarrow y + \frac{1}{x^2} = 0 \\ Z'_y = 0 \Rightarrow x + \frac{1}{y^2} = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} y + \frac{1}{x^2} = 0 \\ x + \frac{1}{y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -1, \ y = -1$$

$$\Rightarrow Z = f(-1,-1) = 3$$

۲۷- گزینه ۱ صحیح است.

تابع دو متغیره f به معادله $z = f(u,v)$ را در نظر می گیریم، فرض می کنیم V,U هر یک توابعی دو متغیره از متغیر مستقل y,x باشند؛ یعنی داشته باشیم:

$$U = g(x,y) \ , \quad V = h(x,y)$$

در این صورت Z را تابع مرکب می گوییم و خواهیم داشت:

$$Z'x = Z'u.U'x + Z'v.V'x = f'u.U'x + f'v.V'x$$

$$Z'y = Z'u.U'y + Z'v.V'y = f'u.U'y + f'v.V'y$$

در این سوال داریم:

$$Z = f(u,v), \ u = x^2 + y^2, V = x - y$$

$$\Rightarrow Z'x = f'u.(2x) + f'v(1), \ Z'y = f'u.(2y) + f'v \times (1)$$

$$\Rightarrow Z'x + Z'y = 2xf'u + f'v + 2yf'u - f'v = 2(x+y)f'u$$

۲۸- گزینه ۳ صحیح است.

$$\frac{Z'x}{\frac{dg}{dx}} = \frac{Z'y}{\frac{dg}{dy}} \Rightarrow \frac{2x}{1} = \frac{2y}{2} \Rightarrow y = 2x$$

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{4}{5}, y = \frac{8}{5}, z = \frac{16}{5}$$

در این سوال فرض کردیم $Z = f(x,y) = x^2 + y^2$ و $g(x,y) = c$ یعنی $x + 2y = 4$

۲۹- گزینه ۲ صحیح است.

تابع حقیقی دو متغیره f به معادله $Z = f(x,y)$ را همگن یا متجانس می گوییم، اگر در آن x را به λx و λy تبدیل کنیم داشته

باشیم:

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda f(x,y)$$

n را درجه همگنی یا درجه تجانس تابع $f(x,y)$ می گوییم.

در این سوال خواهیم داشت:

گزینه ۱) $Z=K^{\alpha}L^{\beta}\xrightarrow[L\to\lambda L]{k\to\lambda k}Z=\lambda^{\alpha+\beta}K^{\alpha}L^{\beta}$

نتیجه گیری: تابع فوق همگن بوده و درجه همگنی آن برابر است با: $n=\alpha+\beta$

گزینه ۳) $Z=xe^{\frac{y}{x}}+y\xrightarrow[y\to\lambda y]{x\to\lambda x}Z=\lambda xe^{\frac{\lambda y}{\lambda x}}+\lambda y=\lambda\left(xe^{\frac{y}{x}}+y\right)$

نتیجه گیری: تابع فوق همگن بوده و درجه همگنی آن برابر است با: $n=۱$

گزینه ۴) $Z=\sin\frac{y}{x}+\cos\frac{y}{x}\xrightarrow[y\to\lambda y]{x\to\lambda x}Z=\sin\frac{\lambda y}{\lambda x}+\cos\frac{\lambda y}{\lambda x}\Rightarrow Z=\sin\frac{y}{x}+\cos\frac{y}{x}$

نتیجه گیری: تابع فوق همگن بوده و درجه همگنی آن برابر است با: $n=۰$

۳۰- گزینه ۲ صحیح است.

قید یا محدودیت $۲x+۴y=۸۰ \Leftarrow ۹۰=۲x+۴y+۱۰ \Leftarrow c=۹۰$ اگر

حال فرض می کنیم که $Z=f(x,y)=۲xy$ و $C=g(x,y)$ یا $۲x+۴y=۸۰$

بنابراین با توجه به شرط حداکثر سازی خواهیم داشت:

$$\frac{Z'x}{\frac{dg}{dx}}=\frac{Z'y}{\frac{dg}{dx}}\Rightarrow\frac{۲y}{۲}=\frac{۲x}{۴}\Rightarrow x=۲y$$

$$\begin{cases}۲x+۴y=۸۰\\ x=۲y\end{cases}\Rightarrow y=۱۰,x=۲۰,z=۴۰۰$$

برای بدست آوردن مسیر توسعه با توجه به رابطه $x=۲y$ نتیجه می گیریم: $y=\frac{۱}{۲}x$

منابع و مأخذ

۱- ریاضیات عمومی؛ تالیف: امید محمودیان

۲- ریاضی و کاربرد آن در مدیریت؛   تالیف: دکتر مهندس تورج ابراهیمی

۳- ریاضیات عمومی و کاربرد آن جلد ۱ و ۲؛   تالیف: محمد حسین پورکاظمی