۱

مفاهیم بنیادی. بردارها

۱.۱ مقدمه

در هر نظریهٔ علمی، و به‌ویژه در مکانیك، باید مطالعهٔ خود را با مفاهیم اولیهٔ معینی آغاز کنیم. به‌کار بردن فرضهای معین قابل قبولی نیز برای این‌کار ضروری است. فضا و زمان دو مفهوم بسیار اساسی به شمار می‌آیند. درهنگام بررسی ابتدایی خود از علم حرکت، مکانیك، فرض خواهیم کرد که فضای ریاضی سه بعدی هندسهٔ اقلیدسی برای توصیف تجربهٔ متعارف کافی است. با عنایت به مفهوم زمان، فرض می‌کنیم که بتوان یك رشتهٔ منظم از رویدادها را روی مقیاس زمانی مطلق یکنواخت اندازه‌گیری کرد. به‌علاوه، فرض می‌کنیم که فضا و زمان دو موجود متمایز و مستقل‌اند. بنا برنظریهٔ نسبیت، فضا و زمان نه مطلق‌اند و نه مستقل. اما این‌مطلبی است که بعدازمطالعهٔ مبانی کلاسیك مکانیك به آن‌نظرخواهیم کرد.

برای تعریف موضع یك جسم در فضا، دراختیار داشتن یك دستگاه مرجع ضروری است. در مکانیك از دستگاه مختصات بهره می‌گیریم. شکل اصلی دستگاه مختصاتی که ما برای مقاصد خود به‌کار می‌بریم، دستگاه مختصات دکارتی یا راستگوشه، مجموعه‌ای از سه خط راست یا محور دو به‌دو و عمود بر هم‌است. موضع نقطه درچنین دستگاه مختصاتی با سه عدد یا سه مختصه، x، y، و z،مشخص می‌شود. مختصات هر نقطهٔ متحرك با زمان تغییر می‌کند؛ یعنی، مختصات توابعی‌انداز کمیت t که روی‌مقیاس‌زمانی ما اندازه‌گیری‌می‌شود.

یکی ازمفاهیم بسیار مفید درمکانیك عبارت است از ذره یا نقطهٔ مادی، که‌موجودی

است دارای جرم[1] اما بدون توسیع فضایی. به‌عبارت دقیقتر، نقطهٔ مادی عبارت است از چیزی ایده‌آل که خودش وجود خارجی ندارد ـ حتی الکترون‌هم ابعاد مشخصی‌دارد ـ اما این ایده به‌عنوان تقریبی از جسم کوچك، یا جسمی که ابعادآن دریك بحث خاص‌نسبتاً حائزاهمیت نیست، مفید است. مثلا، در مکانیك سماوی زمین را می‌توان یك‌ذره به‌حساب آورد.

۲.۱ کمیتها و یکاهای فیزیکی

داده‌هایی که در فیزیك به‌اعتبار مشاهده به‌دست می‌آیند برحسب برخی موجودات بنیادی، مثلا طول، زمان، نیرو، و مانندآنها، به‌نام کمیتهای فیزیکی، بیان می‌شوند. کمیت‌فیزیکی چیزی است که می‌توان‌آن‌را از نظـر کمی درارتباط با یکایی انتخابی اندازه‌گیری کرد. وقتی می گوییم طول شئ معینی، مثلا ۷ اینچ است، منظورمان این است که معیار کمی ۷، رابطهٔ (نسبت) طول آن شئ را به طول یکا (یك اینچ) بیان می کند. معلوم شده است که تمام یکاهای کمیتهای فیزیکی در مکانیك را می‌توان تنها برحسب سه کمیت اساسی‌یعنی، زمان، طول، و جرم تعریف‌کرد.

یکای زمان

یکای اساسی اندازه‌گیری زمان، ثانیه است. ثانیه بنابرتعریف، عبارت‌است از استاندارد بسامد ساعت اتمی سزیم، یعنی زمان لازم برای اجرای دقیقاً ۹۱۹۲۶۳۱۷۷۰ نوسان از یك‌گذار اتمی خاص ایزوتوپ سزیم ۱۳۳. قبل از سال ۱۹۶۷ ثانیه برحسب زمان‌تناوب چرخش زمین تعریف می‌شد؛ بنابراین تعریف، ثـانیه عبارت بود از ۱/۸۶۴۰۰ روز خورشیدی‌متوسط. این‌تعریف به‌اعتبار استانداردداتمی‌منسوخ‌شد، زیرا زمان‌تناوب‌چرخش زمین، ثابت نیست.

یکای طول

یکای استانداردطول‌متر است. این یکا اکنون برحسب‌سرعت نورمشخص‌می‌شود: مترعبارت است ازفاصله‌ای که‌نور درخلال بازهٔ زمانـی‌دقیقاً معادل۱/۲۹۹۷۹۲۴۵۸ ثانیه می‌پیماید. به‌عبارت دیگر، این‌تعریف سرعت نور را دقیقاً ۲۹۹۷۹۲۴۵۸ متر برثانیه تعیین می کند. به‌علاوه، چون‌ثانیه به‌کمك‌ساعت اتمی‌سزیم‌تعریف می‌شود، متر وثانیه هردو استانداردهایی با مبنای اتمی به‌شمار می‌آیند. درفاصلهٔ سالهای ۱۹۶۷ تا ۱۹۸۳، متر برحسب طول‌موج یك‌خط طیفی نارنجی معین از لامپ کریپتون ۸۶ تعریف شده بود. قبل ازسال ۱۹۶۷، متر

---

۱. پیرامون مفهوم جرم درفصل ۲ بحث خواهیم‌کرد.

را به‌عنوان فاصلهٔ بین دو علامت روی میله‌ای از آلیاژ پلاتین ـ ایریدیم تعریف کرده بودند؛ این میله را در ادارهٔ استانداردهای متری، در شهر سِوْر فرانسه نگهداری می‌کردند.

یکای جرم

یکای استاندارد جرم، کیلوگرم است. کیلوگرم عبارت‌است از جرم استوانه‌ای از پلاتین‌ـ ایریدیم که آن را نیز در ادارهٔ استانداردهای متری نگهداری می‌کنند. بدلهای مشابهی از این استاندارد اولیه دراختیار دولتهای اکثر کشورهای دنیا قرار داده می‌شود.

یکاهای فوق متضمن مبنایی‌اند برای دستگاه بین‌المللی یکاها یا دستگاه SI.[۱] استانداردهای اتمی جدید طول و زمان در این دستگاه نه تنها نسبت به‌استانداردهای پیشین دقیقترند، بلکه‌در هرجایی قابل دوباره‌سازی‌اند وغیر قابل انهدام هم هستند. متأسفانه، در حال‌حاضر بهره‌گیری از استاندارد اتمی جرم از لحاظ تکنیکی امکان‌ناپذیر است.

عملا کمیتهای فیزیکی زمان، طول، و جرم به‌عنوان مجموعهٔ پایه‌ای برای تعریف یکاها از تقدس خاصی برخوردار نیستند. می‌توان مجموعه‌های دیگری ازکمیتهای فیزیکی را به‌کار برد. درسیستمهای به اصطلاح گرانشی زمان، طول، و نیرو به‌کار می‌رود.

علاوه‌بر دستگاه SI، دستگاههای دیگری هم با کاربردهای مشترك وجود دارند، مانند cgs یا دستگاه سانتیمتر ـ گرم ـ ثانیه و fps یا دستگاه فوت ـ پوند ـ ثانیه. این دو دستگاه اخیر را می‌توان دستگاههای ثانوی‌پنداشت، زیرا یکاهای آنها مشخصاً به‌صورت کسرهایی از یکاهای SI تعریف شده‌اند (پیوست الف را ببینید).

به‌هر کمیت فیزیکی که به‌طور کامل، برحسب یکاهای مناسبی، وبه‌وسیلهٔ یك تك عدد مشخص شود، اسکالر (نرده‌ای) می گویند. نمونه‌های کمیتهای اسکالر که با آنها آشناییم، عبارت‌اند از چگالی، حجم، و دما. از لحاظ ریاضی، کمیتهای اسکالر را اعداد حقیقی عادی‌تلقی می‌کنند. تمام قواعد منظم‌جمع، تفریق، ضرب، وتقسیم جبری ومانند آنها، براین کمیتها حاکم‌اند.

کمیتهای فیزیکی معینی نیز با مشخصه‌های جهتی وجود دارند، از آن‌جمله می‌توان تغییر مکان از یك نقطهٔ فضا به‌نقطهٔ دیگر را برشمرد. برای اینکه این گونه‌کمیتها کاملا مشخص شوند باید به‌آنها جهت (یا راستا) و بزرگی نسبت‌داد. درصورتی‌که این‌کمیتها طبق قاعدهٔ جمع متوازی‌الاضلاع، که در بخش بعدی پیرامون‌آن بحث خواهیم‌کرد، با یکدیگر ترکیب‌شوند، به‌آنها بردار می‌گویند.[۲] علاوه‌بر تغییرمکان درفضا، می‌توان ازمفاهیم

---

۱. سایر یکاهای اصلی وفرعی را، در پیوست الف آورده‌ایم.

۲. مثالی از یك کمیت جهت‌دار که از قاعدهٔ جمع پیروی نمی کند چرخش محدود جسم حول‌یك محور معین است. خواننده می‌تواند به‌آسانی این نکته را تحقیق‌کند که دو چرخش متوالی حول محورهای مختلف همان اثر ناشی از یك تك چرخش را ایجاد نمی‌کند‌که از قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع تعیین شده است. ولی، درحال حاضر با این نوع‌کمیتهای جهت‌دار غیربرداری سروکاری نداریم.

آشنای دیگری چون سرعت، شتاب، و نیرو، به‌عنوان کمیتهای برداری یاد کرد. ثابت شده است که برای توسعهٔ علم مکانیک مفهوم بردار و تأسیس ریاضیات جامعی در بـاب کمیتهای برداری، امری است اجتناب ناپذیر. مطالب باقیماندهٔ این فصل را عمدتاً به مطالعهٔ ریاضیات بردارها اختصاص خواهیم داد.

۳.۱ نمادگذاری. تعاریف وقواعد جبر برداری

کمیتهای برداری را با حروف سیاه، مثلاً **A**، نمایش می‌دهند، درصورتی که حروف ایتالیك معمولی نمایانگر کمیتهای اسکالرند. معمول است که در هنگام نوشتن نشانه‌ای نظیر پیکان، $\vec{A}$، برای مشخص کردن بردار به‌کار می‌برند.

هر بردار معین **A** با بـزرگی و راستایش نسبت به‌دستگاه مرجع انتخابی مشخص می‌شود. بردار از نظر نموداری بـا قطعه خط جهت‌داری مطابق شکـل ۱.۱ نمایش داده می‌شود. بردار را نیز می‌توان با مؤلفه‌هایش یا تصاویر آن برمحورهای مختصات مشخص کرد. نماد مؤلفه‌ای $[A_x, A_y, A_z]$ را به‌عنوان نوع دیگری از نمایش بردار به‌کار می‌برند. معادلهٔ

$$\mathbf{A}=[A_x, A_y, A_z]$$

به‌این معناست که بردار **A** درطرف راست برحسب مؤلفه‌هایش‌در دستگاه مختصات خاصی بیان شده‌است (فرض می‌شود که دستگاه مختصات دکارتی موردنظر باشد، مگر اینکه‌غیراز آن بیان‌شده‌باشد). مثلاً، اگر بردار **A** نمایانگر تغییرمکان‌ازنقطهٔ $P_1(x_1, y_1, z_1)$ به‌نقطهٔ $P_2(x_2, y_2, z_2)$ باشد، دراین‌صورت $A_x=x_2-x_1$، $A_y=y_2-y_1$، $A_z=z_2-z_1$. اگر **A** نمـایش یك نیرو باشد، در این‌صورت A_x مؤلفهٔ x آن نیروست و به‌همین‌ترتیب الی‌آخر. روشن‌است که مقادیرعددی مؤلفه‌های اسکالر یك بردارمعین به‌انتخاب‌محورهای مختصات بستگی دارد.

اگربحث خاصی به‌بردارهای واقع‌در یك‌صفحه محدود شود، فقط‌دو مؤلفه‌ضرورت پیدا می‌کند. ازسوی‌دیگر، می‌توان یك‌فضای ریاضی با هرتعداد بعد تعریف کرد. بنابراین نماد $[A_1, A_2, A_3, \dots, A_n]$ برداری n بعدی‌را می‌نمایاند. دراین‌مفهوم تجریدی‌بردار عبارت است از مجموعهٔ مرتبی از اعداد.

مطالعهٔ جبر برداری را با برخی گزاره‌های صوری مربوط به‌بردارها شروع‌می‌کنیم.

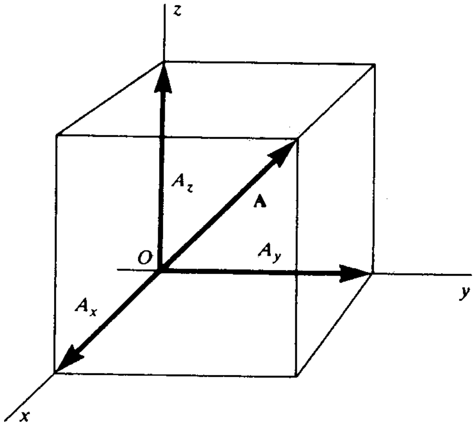
۱. تساوی بردارها

معادلهٔ

$$\mathbf{A}=\mathbf{B}$$

یا

$$[A_x, A_y, A_z]=[B_x, B_y, B_z]$$

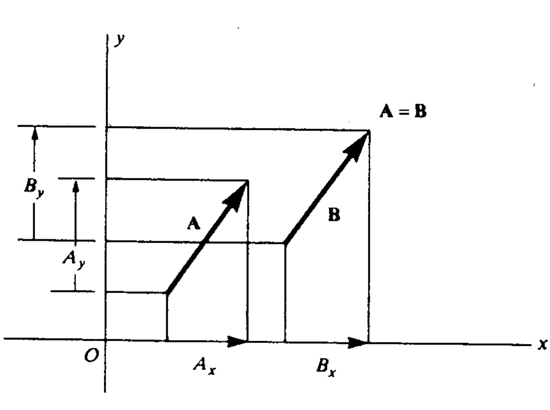


شکل ۱۰۱ بردار $\mathbf{A}$ ومؤلفه‌های آن در مختصات دکارتی.

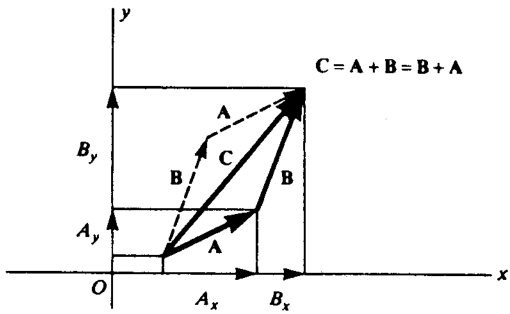
معادل سه معادلهٔ زیر است

$$A_x = B_x \qquad A_y = B_y \qquad A_z = B_z$$

یعنی، دو بردار مساوی‌اند، اگر و فقط اگر، مؤلفه‌های آنها به‌ترتیب با هم مساوی باشند. به‌تعبیرهندسی، بردارهای مساوی باهم موازی‌اند و طولهای یکسانی‌دارند، ولی‌لازم‌نیست موضع آنها یکی باشد. در شکل ۲۰۱ بردارهای مساوی نشان‌داده شده‌اند، در اینجا برای رعایت وضوح مطلب فقط دو مؤلفه را ترسیم کرده‌ایم. توجه کنیدکه بردارها اضلاع‌مقابل یك متوازی‌الاضلاع را تشکیل می‌دهند. (بردارهای مساوی ضرورتاً از هرحیث معادل هم نیستند. بنابراین ممکن است دو نیروکه ازلحاظ برداری مساوی‌اند و در دونقطهٔ مختلف بر یك جسم وارد می‌آیند، اثرات مکانیکی متفاوتی ایجادکنند.)



شکل۲۰۱ نمایش هندسی بردارهای مساوی.



شکل ۳۰۱ جمع دو بردار.

۰۲ جمع برداری

جمع دو بردار به‌کمك معادلهٔ زیر تعریف می‌شود

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=[A_x,\ A_y,\ A_z]+[B_x,\ B_y,\ B_z]=[A_x+B_x,\ A_y+B_y,\ A_z+B_z]$$

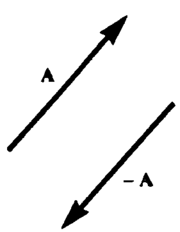
مجموع دو بردار عبارت است از برداری‌که مؤلفه‌هایش برابر مجموع مؤلفه‌های آن بردارها باشد. نمایش هندسی جمع برداری دو بردار ناموازی ضلع سوم یك مثلث را تشکیل می‌دهدکه دو ضلع دیگرش بردارهای مزبور باشند. جمع برداری درشکل ۳۰۱ نشان‌داده شده است. این مجموع نیز، مطابق‌شکل، به‌کمك قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع به‌دست می‌آید. به‌هرحال، جمع‌برداری طبق معادلهٔ بالا تعریف می‌شود، حتی اگر بردارها نقطهٔ مشترکی نداشته باشند.

۰۳ ضرب یك بردار در یك اسکالر

اگر c کمیتی اسکالر و $\mathbf{A}$ یك بردار باشد، آنگاه

$$c\mathbf{A}=c[A_x,\ A_y,\ A_z]=[cA_x,\ cA_y,\ cA_z]=\mathbf{A}c$$

حاصلضرب $c\mathbf{A}$ برداری است با مؤلفه‌هایی c برابر مؤلفه‌های بردار $\mathbf{A}$. به‌تعبیر هندسی، بردار $c\mathbf{A}$ با $\mathbf{A}$ موازی و طولش c برابر طول $\mathbf{A}$ است. وقتی $c=-1$، بردار $-\mathbf{A}$، مطابق‌شکل ۴۰۱، برداری خواهد بودکه جهتش عکس جهت $\mathbf{A}$ است.



شکل ۴۰۱ منفی یك بردار.

۴. تفریق برداری

بنا بر تعریف، تفریق عبارت است از

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}+(-1)\mathbf{B}=[A_x-B_x,\ A_y-B_y,\ A_z-B_z]$$

یعنی، تفریق بردار معین $\mathbf{B}$ از بردار $\mathbf{A}$ با جمع کردن $\mathbf{B}-$ و $\mathbf{A}$ هم‌ارز است.

۵. بردار صفر

بردار $\mathbf{O}=[0,\ 0,\ 0]$ را بردار صفر می‌نامند. جهت بردار صفر تعریف نشده است. از قسمت ۴ نتیجه‌می‌شود که $\mathbf{A}-\mathbf{A}=\mathbf{O}$. چون بردار صفربه‌وسیلهٔ یک‌صفر نشان‌داده می‌شود برای اینکه اشتباهی صورت‌نگیرد، از این‌پس نمادگذاری $\mathbf{O}=0$ را به‌کارخواهیم برد.

۶. قانون جابه‌جایی جمع

این قانون درمورد بردارها صادق است؛ یعنی

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$$

زیرا $A_x+B_x=B_x+A_x$ و این‌رابطه به‌همین‌ترتیب برای‌مؤلفه‌های y و z نیز برقرار است.

۷. قانون انجمنی

قانون انجمنی نیز دربارهٔ بردارها صادق است، زیرا

$$\begin{aligned}\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})&=[A_x+(B_x+C_x),\ A_y+(B_y+C_y),\ A_z+(B_z+C_z)]\\&=[(A_x+B_x)+C_x,\ (A_y+B_y)+C_y,(A_z+B_z)+C_z]\\&=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}\end{aligned}$$

۸. قانون پخشی

قانون پخشی درمورد ضرب‌بردار در یک‌اسکالر، صدق می‌کند، زیرا بااستفاده ازقسمتهای ۲ و ۳

$$\begin{aligned}c(\mathbf{A}+\mathbf{B})&=c[A_x+B_x,\ A_y+B_y,\ A_z+B_z]\\&=[c(A_x+B_x),\ c(A_y+B_y),\ c(A_z+B_z)]\\&=[cA_x+cB_x,\ cA_y+cB_y,\ cA_z+cB_z]\\&=c\mathbf{A}+c\mathbf{B}\end{aligned}$$

بنابراین، تا آنجاکه به‌عملیات‌مذکور دربالا مربوط می‌شود، بردارها ازقواعد جبرمعمولی پیروی می‌کنند.

۹. بزرگی یك بردار

بزرگی بردار $\mathbf{A}$، که با نماد $|\mathbf{A}|$ یا A نمایش داده می‌شود، بنا بر تعریف عبارت است از ریشهٔ دوم مجموع مربعات مؤلفه‌های آن، یعنی

$$A = |\mathbf{A}| = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2}$$

که ریشهٔ مثبت این معادله، مورد نظر ماست. به‌تعبیر هندسی، بزرگی هر بردار همان‌طول آن، یعنی طول قطر یك مکعب مستطیل به ابعاد A_x، A_y، و A_z است، که با یکاهای مناسبی بیان شده باشد.

۱۰. بردارهای مختصات یکه

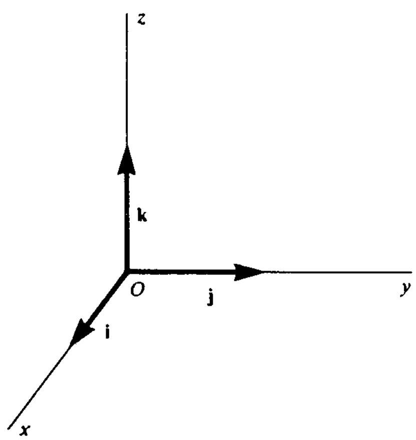
بردار یکه برداری است به بزرگی واحد. بـردارهای یکه را غالباً با نماد $\mathbf{e}$، سرنام واژهٔ آلمانی *einheit* (به‌معنی مقیاس) نشان می‌دهند. سه بردار یکه

$$\mathbf{e}_x = [1, 0, 0] \qquad \mathbf{e}_y = [0, 1, 0] \qquad \mathbf{e}_z = [0, 0, 1]$$

را بردارهای مختصات‌یکه یا بردارهای پایه می‌نامند. هر بردار را می‌توان برحسب بردارهای پایه، به‌صورت جمع برداری مؤلفه‌ها، به‌قرار زیر بیان کرد

$$\begin{aligned}\mathbf{A} = [A_x, A_y, A_z] &= [A_x, 0, 0] + [0, A_y, 0] + [0, 0, A_z] \\ &= A_x[1, 0, 0] + A_y[0, 1, 0] + A_z[0, 0, 1] \\ &= \mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z\end{aligned}$$

نمادگذاری بردارهای یکهٔ دکارتی که با حروف $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، و $\mathbf{k}$ نموده‌می‌شوند، کاربرد گسترده‌ای



شکل ۵.۱ بردارهای یکهٔ $\mathbf{ijk}$.

یافته‌اند، یعنی

$$\mathbf{i}=\mathbf{e}_x \qquad \mathbf{j}=\mathbf{e}_y \qquad \mathbf{k}=\mathbf{e}_z$$

از این پس معمولا این نمادگذاری را به‌کار خواهیم برد.

جهت بردارهای مختصات یکه به‌کمك محورهای مختصات تعریف می‌شوند (شکل ۵.۱). این بردارها، بسته به‌نوع دستگاه مختصاتی که به‌کار می‌رود، مجموعهٔ سه تایی راستگرد یا چپگردی را تشکیل می‌دهند. معمولا دستگاه مختصات راستگرد به‌کار می‌رود. دستگاه نموده شده درشکل ۵.۱ راستگرد است.

مثالها

۱.۱ مجموع و بزرگی مجموع دو بردار $\mathbf{A}=[۱, ۰, ۲]$ و $\mathbf{B}=[۰, ۱, ۱]$ را بیابید.

با جمع کردن مؤلفه‌ها داریم: $\mathbf{A}+\mathbf{B}=[۱, ۰, ۲]+[۰, ۱, ۱]=[۱, ۱, ۳]$

$$|\mathbf{A}+\mathbf{B}|=(۱+۱+۹)^{۱/۲}=\sqrt{۱۱}$$

۲.۱ تفاضل دو بردار بالا را به‌شکل $\mathbf{ijk}$ بیان کنید. از تفاضل مؤلفه‌ها داریم

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=[۱, -۱, ۱]=\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

۳.۱ هلیکوپتری ۱۰۰ m به‌طور قائم به‌بالا، بعد ۵۰۰ m به‌طور افقی به شرق، آنگاه ۱۰۰۰ m به‌طور افقی به‌شمال پرواز می‌کند. این‌هلیکوپتر از هلیکوپتر دومی که از همان نقطه حرکت خود را شروع کرده و ۲۰۰ m به‌بالا، ۱۰۰ m به‌غرب و ۵۰۰ m به شمال می‌پیماید، چقدر فاصله دارد؟

حل: با انتخاب «بالا»، «شرق»، و «شمال» به عنوان جهتهای اصلی، موضع نهایی هلیکوپتر اول از لحاظ برداری به‌صورت $\mathbf{A}=[۱۰۰, ۵۰۰, ۱۰۰۰]$ و دومی به‌صورت $\mathbf{B}=[۲۰۰, -۱۰۰, ۵۰۰]$، برحسب متر، بیان می‌شود. از این‌رو فاصلهٔ میان مواضع نهایی از عبارت زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned}|\mathbf{A}-\mathbf{B}| &= |[(۱۰۰-۲۰۰), (۵۰۰+۱۰۰), (۱۰۰۰-۵۰۰)]|\,\mathrm{m}\\ &= ۱۰۰^{۲}+۶۰۰^{۲}+۵۰۰^{۲})^{۱/۲}\,\mathrm{m}\\ &= ۷۸۷٫۴\ \mathrm{m}\end{aligned}$$

۴.۱ ضرب اسکالر

درمورد دو بردار مفروض $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ ضرب اسکالر یا ضرب «نقطه‌ای»، $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$، اسکالری خواهد بود که بنابر تعریف عبارت است از

$$\mathbf{A}.\mathbf{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \qquad (۱.۱)$$

از تعریف فوق نتیجه می‌شود که ضرب اسکالر جابه‌جاپذیر است

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A} \qquad (۲-۱)$$

زیرا $A_xB_x = B_xA_x$ و به‌همین‌ترتیب الی آخر. پخشی بودن این‌نوع ضرب را نیزمی‌توان نتیجه گرفت

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C} \qquad (۳-۱)$$

زیرا اگر از جزئیات تعریف [(۱-۱)] بهره گیریم

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) &= A_x(B_x+C_x)+A_y(B_y+C_y)+A_z(B_z+C_z)\\ &= A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z+A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z\\ &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}\end{aligned}$$

فرمول کسینوس زاویهٔ بین دوپاره خط را از هندسهٔ تحلیلی یادآوری می‌کنیم

$$\cos\theta=\frac{A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z}{(A_x^۲+A_y^۲+A_z^۲)^{۱/۲}(B_x^۲+B_y^۲+B_z^۲)^{۱/۲}}=\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB} \qquad (۴-۱)$$

یا

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=AB\cos\theta \qquad (۵-۱)$$

معادلهٔ بالا را می‌توان تعریف دیگر ضرب اسکالر دانست. از نظـر هندسی، $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ برابر است با طول تصویر $\mathbf{A}$ روی $\mathbf{B}$ ضرب در طول $\mathbf{B}$.

اگر ضرب نقطه‌ای $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ صفر باشد، در این‌صورت $\mathbf{A}$ بر $\mathbf{B}$ عمود است به شرط آنکه $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ هیچ‌کدام صفر نباشند.

مربع بـزرگی بردار $\mathbf{A}$، با ضرب نقطه‌ای بردار $\mathbf{A}$ درخودش به‌دست می‌آید

$$A^۲=|\mathbf{A}|^۲=\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}$$

از تعریفهای بردارهای مختصات یکهٔ $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، و $\mathbf{k}$ روشن‌است که روابط زیر برقرارند

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=۱ \qquad (۶-۱)$$

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=۰$$

بیان هر بردار به‌صورت حاصلضرب بزرگی آن دریك بردار یکه. تصویر.
معادلهٔ زیر را درنظر بگیرید

$$\mathbf{A}=\mathbf{i}A_x+\mathbf{j}A_y+\mathbf{k}A_z$$

با ضرب وتقسیم کردن سمت راست در بزرگی $\mathbf{A}$ داریم

$$\mathbf{A}=A\left(\mathbf{i}\frac{A_x}{A}+\mathbf{j}\frac{A_y}{A}+\mathbf{k}\frac{A_z}{A}\right)$$

حال $A_x/A=\cos\alpha$ ،$A_y/A=\cos\beta$ ، و $A_z/A=\cos\gamma$ کسینوسهای هادی بردار $\mathbf{A}$ و α، β، و γ زوایای هادی هستند. بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{A}=A(\mathbf{i}\cos\alpha+\mathbf{j}\cos\beta+\mathbf{k}\cos\gamma)=A[\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma]$$

یا

$$\mathbf{A}=A\mathbf{n} \tag{۷.۱}$$

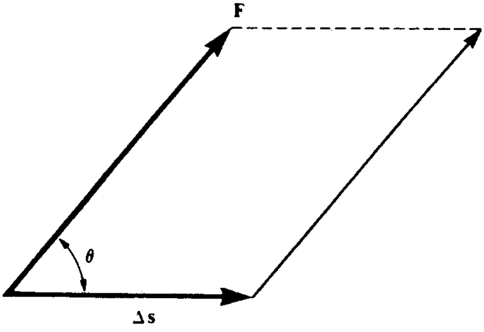
$\mathbf{n}$ بردار یکه‌ای است با مؤلفه‌های $\cos\alpha$، $\cos\beta$، و $\cos\gamma$. بردار دیگر $\mathbf{B}$ را در نظر بگیرید. واضح است که، تصویر $\mathbf{B}$ روی $\mathbf{A}$ عبارت است از

$$B\cos\theta=\frac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}}{A}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{n} \tag{۸.۱}$$

که θ زاویهٔ بین $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ است.

مثالها

۴.۱ مؤلفهٔ یك بردار؛ کار. به‌عنوان مثالی از ضرب نقطه‌ای، فرض می‌شود که، مطابق شکل ۶.۱، تغییر مکان خطی جسمی تحت تأثیر یك نیروی[1] ثابت $\Delta\mathbf{s}$ باشد. بنا بر تعریف، کاری که این



شکل ۶.۱ نیروی وارد برجسمی که تغییر مکان می‌دهد.

---

۱. درباب مفهوم نیرو درفصل ۲ بحث خواهیم کرد.

نیرو انجام‌می‌دهد، ΔW، از حاصلضرب مؤلفهٔ نیروی $\mathbf{F}$ واقع در راستای $\Delta\mathbf{s}$، در بزرگی تغییرمکان، Δs، به‌دست می‌آید، یعنی

$$\Delta W = (F\cos\theta)\Delta s$$

θ زاویهٔ بین $\mathbf{F}$ و $\Delta\mathbf{s}$ است. اما عبارت سمت‌راست همان‌ضرب نقطه‌ای $\mathbf{F}$ و $\Delta\mathbf{s}$ است، یعنی

$$\Delta W = \mathbf{F}\,.\,\Delta\mathbf{s}$$

۵۰۱ قانون کسینوسها. مطابق شکل ۷۰۱ مثلثی را به‌اضلاع $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$، و $\mathbf{C}$ در نظر بگیرید. در این‌صورت $\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$. ضرب نقطه‌ای $\mathbf{C}$ در خودش را به‌دست آورید

$$\mathbf{C}\,.\,\mathbf{C} = (\mathbf{A}+\mathbf{B})\,.\,(\mathbf{A}+\mathbf{B})$$
$$= \mathbf{A}\,.\,\mathbf{A} + ۲\,\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B} + \mathbf{B}\,.\,\mathbf{B}$$

مرحلهٔ دوم، از کاربرد قواعد پیش‌گفته درمعادلات (۲۰۱) و (۳۰۱) نتیجه می‌شود. با قراردادن $AB\cos\theta$ به‌جای $\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B}$ خواهیم داشت

$$C^{۲} = A^{۲} + ۲AB\cos\theta + B^{۲}$$

که همان قانون آشنای کسینوسهاست. این دقیقاً یکی ازنمونه‌های کاربرد جبر برداری برای اثبات قضایا در هندسه است.

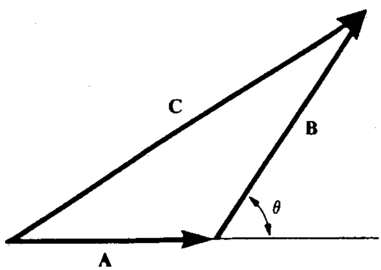
۶۰۱ کسینوس زاویهٔ بین قطر مکعب و قطر یکی از وجوه مجاور آن را پیداکنید.

حل: می‌توانیم دوقطر مزبور را با بردارهای $\mathbf{A}=[۱, ۱, ۱]$ و $\mathbf{B}=[۱, ۱, ۰]$ نمایش دهیم. بنابراین، از معادلهٔ (۴۰۱) داریم

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B}}{AB} = \frac{۱+۱+۰}{\sqrt{۳}\sqrt{۲}} = \sqrt{\frac{۲}{۳}} = ۰٫۸۱۶۵$$

۷۰۱ بردار $a\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ بر بردار $\mathbf{i}+۲\,\mathbf{j}-۳\mathbf{k}$ عمود است. مقدار a چقدر است؟

حل: اگر بردارها بر یکدیگر عمود باشند، ضرب نقطه‌ای آنها باید صفر شود ($\cos ۹۰^\circ = ۰$). بنابراین



شکل ۷۰۱ قانون کسینوسها.

$$(a\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})\cdot(\mathbf{i}+۲\mathbf{j}-۳\mathbf{k})=a+۲+۳=a+۵=۰$$

پس

$$a=-۵$$

۵.۱ ضرب برداری

حاصلضرب برداری یا «حاصلضرب خارجی» دوبردار مفروض $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$، به‌صورت $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$، بنا بر تعریف عبارت خواهدبود از برداری که مؤلفه‌های آن به کمك رابطهٔ زیر بیان می‌شود

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=[A_yB_z-A_zB_y, A_zB_x-A_xB_z, A_xB_y-A_yB_x] \qquad (۹.۱)$$

می‌توان نشان‌داد که قواعد زیر برای ضرب برداری برقرار است

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=-\mathbf{B}\times\mathbf{A} \qquad (۱۰.۱)$$

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\mathbf{C} \qquad (۱۱.۱)$$

$$n(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=(n\mathbf{A})\times\mathbf{B}=\mathbf{A}\times(n\mathbf{B}) \qquad (۱۲.۱)$$

اثبات درستی این روابط مستقیماً از تعریف نتیجه می‌شود و آن را به‌عنوان تمرین به خواننده وامی‌گذاریم. (توجه کنید: معادلهٔ اول بیانگر این نکته است که ضرب برداری جابه‌جا ناپذیر است.)

بنا بر تعریفهای بردارهای مختصات یکه، بخش ۳.۱، به‌سادگی نتیجه می‌گیریم که

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=۰ \qquad (۱۳.۱)$$

$$\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}=-\mathbf{k}\times\mathbf{j}$$

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}=-\mathbf{j}\times\mathbf{i}$$

$$\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}=-\mathbf{i}\times\mathbf{k}$$

مثلا

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=[۰-۰, ۰-۰, ۱-۰]=[۰, ۰, ۱]=\mathbf{k}$$

سایر معادلات به‌همین روش و به‌آسانی اثبات می‌شوند.

ضرب برداری که به‌شکل $\mathbf{ijk}$ بیان می‌شود عبارت است از

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{i}(A_yB_z-A_zB_y)+\mathbf{j}(A_zB_x-A_xB_z)+\mathbf{k}(A_xB_y-A_yB_x)$$

جملهٔ داخل پرانتز معادل یك دترمینان است

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{i}\begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix}+\mathbf{j}\begin{vmatrix} A_z & A_x \\ B_z & B_x \end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}$$

و بالاخره

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \qquad (۱۴.۱)$$

که می‌توان درستی‌آن را از طریق بسط به‌آسانی تحقیق‌کرد. شکل دترمینانی به‌خوبی به‌ما کمك می‌کند تا تعریف ضرب برداری را به‌خاطر بسپاریم. از خواص دترمینانها فوراً می‌توان پی‌برد که اگر $\mathbf{A}$ موازی $\mathbf{B}$ باشد، یعنی اگر $\mathbf{A}=c\mathbf{B}$، آنگاه دو سطر پایین دترمینان با هم متناسب‌اند واز این‌رو دترمینان صفراست. بنابراین ضرب برداری دو بردار موازی صفر است.

اینك بزرگی حاصلضرب برداری را محاسبه‌کنیم. داریم

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|^۲=(A_yB_z-A_zB_y)^۲+(A_zB_x-A_xB_z)^۲+(A_xB_y-A_yB_x)^۲$$

اگر کمی حوصله به‌خرج دهیم، این معادله به‌شکل زیر تبدیل می‌شود

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|^۲=(A_x^۲+A_y^۲+A_z^۲)(B_x^۲+B_y^۲+B_z^۲)-(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z)^۲$$

یا، از تعریف ضرب اسکالر می‌توان معادلهٔ بالا را به‌صورت زیر نوشت

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|^۲=A^۲B^۲-(\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B})^۲ \qquad (۱۵.۱)$$

با جذر گرفتن از طرفین معادلهٔ بالا و بهره‌گیری از معادلهٔ (۵.۱)، می‌توانیم بزرگی حاصلضرب برداری را به‌صورت زیر بیان کنیم

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|=AB(۱-\cos^۲\theta)^{۱/۲}=AB\sin\theta \qquad (۱۶.۱)$$

که θ زاویهٔ بین $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ است.

برای رسیدن به‌تعبیری هندسی از ضرب برداری، مشاهده می‌کنیم که بردار $\mathbf{C}=\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ بر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ هردو عمود است، زیرا

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\,.\,\mathbf{C}&=A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z\\&=A_x(A_yB_z-A_zB_y)+A_y(A_zB_x-A_xB_z)+A_z(A_xB_y-A_yB_x)\\&=۰\end{aligned}$$

به‌همین ترتیب: $\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}=0$. بنا بر این، بردار $\mathbf{C}$ بر صفحهٔ شامل بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ عمود است.

راستای بردار $\mathbf{C}=\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ به‌اعتبار این شرط تعیین می‌شود که سه بردار $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$، و $\mathbf{C}$، مطابق شکل ۸۰۱، یك مجموعهٔ سه‌تایی راستگرد را تشکیل دهند. (این بیان با نتیجهٔ برقرار شده پیشین، که درمورد مجموعهٔ سه‌تایی راستگرد $\mathbf{ijk}$ داریم $\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}$، سازگار است.) از این‌رو، از معادلهٔ (۱۶۰۱) پی می‌بریم که می‌توان نوشت

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=(AB\sin\theta)\mathbf{n} \qquad (۱۷۰۱)$$

که $\mathbf{n}$ یك بردار یکهٔ عمود برصفحهٔ دو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ است. راستای $\mathbf{n}$ را از قاعدهٔ دست راست تعیین می‌کنیم، یعنی جهت پیشروی یك پیچ راستگـرد است کـه از جهت مثبت $\mathbf{A}$ به‌جهت مثبت $\mathbf{B}$، با طی کوچکترین زاویه بین آنها، می‌چرخد (شکل ۸۰۱). معادلهٔ (۱۷۰۱) را می‌توان تعریف دیگر ضرب برداری دانست.

مثالها

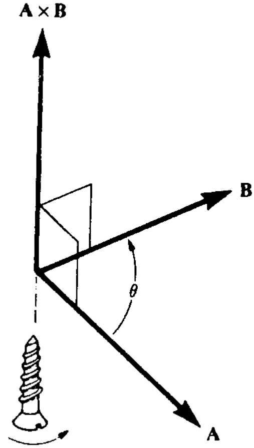
۸۰۱ دو بردار $\mathbf{A}=۲\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ و $\mathbf{B}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+۲\mathbf{k}$ مفروض‌اند، $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ را پیدا کنید.

دراین‌حالت بهتر است که از شکل دترمینانی بهره گیریم

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ ۲ & ۱ & -۱\\ ۱ & -۱ & ۲\end{vmatrix}=\mathbf{i}(۲-۱)+\mathbf{j}(-۱-۴)+\mathbf{k}(-۲-۱)$$

$$=\mathbf{i}-۵\mathbf{j}-۳\mathbf{k}$$

۹۰۱ بردار یکهٔ عمود برصفحهٔ شامل دو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ مذکور در بالا را بیابید.



شکل ۸۰۱ ضرب خارجی بردار.

حل:

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}{|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|}=\frac{\mathbf{i}-5\mathbf{j}-3\mathbf{k}}{[1^2+5^2+3^2]^{1/2}}$$
$$=\frac{\mathbf{i}}{\sqrt{35}}-\frac{5\mathbf{j}}{\sqrt{35}}-\frac{3\mathbf{k}}{\sqrt{35}}$$

۶.۱ مثالی از ضرب برداری: گشتاور یك نیرو

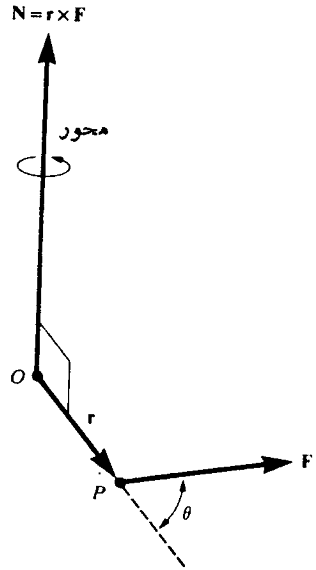
یکی از کاربردهای مفید ضرب برداری نمایش گشتاورهاست. فرض کنید نیروی $\mathbf{F}$، مطابق شکل ۹.۱، برنقطهٔ $P(x, y, z)$ وارد آید، و فرض کنید بردار $\overrightarrow{OP}$ با $\mathbf{r}$ مشخص شود، یعنی

$$\overrightarrow{OP}=\mathbf{r}=\mathbf{i}x+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z$$

گشتاور $\mathbf{N}$، یا بردار گشتاور نیرو، حول نقطهٔ معین O به‌صورت حاصلضرب برداری تعریف می‌شود

$$\mathbf{N}=\mathbf{r}\times\mathbf{F} \tag{۱۸.۱}$$

بنابراین گشتاور یك نیرو حول یك نقطه، کمیتی است برداری دارای بزرگی و جهت. اگر یك تك نیرو بر یك نقطهٔ P واقع برجسمی وارد آید و آن جسم بتواند حول نقطهٔ ثابت O به‌عنوان لولا بگردد، دراین‌صورت جسم به‌چرخش درمی‌آید. محور این چرخش



شکل ۹.۱ نمایش گشتاور یك نیرو حول نقطهٔ O.

بر نیروی $\mathbf{F}$، و نیز برخط OP عمود است. از این‌رو راستای بردار گشتاور $\mathbf{N}$ درامتداد محور چرخش واقع است.

بزرگی گشتاور نیرو از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$|\mathbf{N}|=|\mathbf{r}\times\mathbf{F}|=rF\sin\theta \qquad (۱۹.۱)$$

که در آن θ زاویهٔ بین $\mathbf{r}$ و $\mathbf{F}$ است. بنابراین $|\mathbf{N}|$ را می‌توان حاصلضرب بزرگی نیرو درکمیت $r\sin\theta$، یعنی فاصلهٔ عمودی خط عمل نیرو تا نقطهٔ O، دانست.

وقتی چند نیرو بر نقاط مختلف یك جسم واردآیند، گشتاورها با هم جمع برداری می‌شوند. این موضوع پیامد قانون پخشی ضرب برداری است. شرط تعادل چرخشی آن است که جمع برداری تمام گشتاورها صفر باشد

$$\sum_i(\mathbf{r}_i\times\mathbf{F}_i)=\sum_i\mathbf{N}_i=0 \qquad (۲۰.۱)$$

در فصل ۸ و ۹، آنجا که به‌حرکت اجسام صلب می‌پردازیم، درباب گشتاور نیرو به‌تفصیل بحث خواهیم کرد.

۷.۱ ضربهای سه‌گانه

عبارت

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$$

ضرب اسکالر سه‌گانهٔ $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$، و $\mathbf{C}$ نامیده می‌شود. حاصل این ضرب یك اسکالر (یا عدد) است زیرا از ضرب نقطه‌ای دو بردار به‌دست می‌آید. با مراجعه به‌عبارت دترمینانی ضرب برداری، معادلهٔ (۱۴.۱)، پی می بریم که ضرب اسکالر سه‌گانه را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \qquad (۲۱.۱)$$

از خاصیت معروف دترمینانها مبنی براینکه تعویض جمله‌های دو سطر یا دو ستون با هم علامت دترمینان را تغییر می‌دهد ولی‌مقدارآن فرقی‌نمی کند، می‌توانیم به‌آسانی به‌معادلهٔ مفید زیر دست پیدا کنیم

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} \qquad (۲۲.۱)$$

بنابراین می‌توان علامت نقطه و ضرب را درضرب سه‌گانه باهم تعویض کرد. عبارت

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$$

ضرب برداری سه‌گانه نامیده می‌شود. اثبات این نکته‌را که معادلهٔ زیر درمورد ضرب برداری سه‌گانه برقرار است، برعهدهٔ خواننده می‌گذاریم

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B}-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C} \qquad (۲۳.۱)$$

ضربهای سه گانهٔ بردارها در مطالعهٔ دستگاههای مختصات چرخان وچرخش اجسام صلب که درفصول بعد به آنها خواهیم پرداخت، عملا مفیدند. یکی‌ازکاربردهای هندسی آن درمسئلهٔ ۹.۱، از مسائل آخر همین فصل، آمده است.

مثالها

۱۰.۱ سه‌بردار $\mathbf{A}=\mathbf{i}$، $\mathbf{B}=\mathbf{i}-\mathbf{j}$، و $\mathbf{C}=\mathbf{k}$ مفروض‌اند، $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ را پیدا کنید. با بهره‌گیری از عبارت دترمینانی، معادلهٔ (۲۱.۱)، داریم

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{vmatrix}=۱(-۱+۰)=-۱$$

۱۱.۱ $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ را با مقادیر فوق پیدا کنید. از معادلهٔ (۲۳.۱) داریم

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B}-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}=۰(\mathbf{i}-\mathbf{j})-(۱-۰)\mathbf{k}=-\mathbf{k}$$

۸.۱* تغییردستگاه مختصات. ماتریس تبدیل

در این بخش نشان‌خواهیم‌داد که چگونه یک‌بردار در دستگاههای مختصات مختلف‌نمایش داده می‌شود. بردار $\mathbf{A}$ را درنظر بگیرید که نسبت به مجموعهٔ سه‌تایی $\mathbf{ijk}$ به‌صورت زیر بیان شده است

$$\mathbf{A}=\mathbf{i}A_x+\mathbf{j}A_y+\mathbf{k}A_z$$

نسبت به‌مجموعهٔ سه‌تایی‌جدید $\mathbf{i'j'k'}$ که راستایش نسبت به $\mathbf{ijk}$ متفاوت‌است، همین بردار $\mathbf{A}$ به‌صورت

$$\mathbf{A}=\mathbf{i'}A_{x'}+\mathbf{j'}A_{y'}+\mathbf{k'}A_{z'}$$

بیان می‌شود. حال حاصلضرب $\mathbf{A}\cdot\mathbf{i'}$ دقیقاً عبارت است از $A_{x'}$، یعنی تصویر $\mathbf{A}$ بر بردار یکه $\mathbf{i'}$. بنابراین می‌توان نوشت

---

* این بخش را می‌توان بدون‌آنکه بر پیوستگی مطالب آسیبی وارد آید، حذف کرد.

$$A_{x'}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{i}'=(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}')A_x+(\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}')A_y+(\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}')A_z \qquad (۲۴.۱)$$
$$A_{y'}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{j}'=(\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}')A_x+(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}')A_y+(\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}')A_z$$
$$A_{z'}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{k}'=(\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}')A_x+(\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}')A_y+(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')A_z$$

حاصلضربهای نرده‌ای $(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}')$، $(\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}')$، وغیره ضرایب تبدیل نامیده می‌شوند. اینها با کسینوسهای هادی محورهای مختصات پریم‌دار نسبت به‌محورهای مختصات بدون پریم برابرند. به‌همین ترتیب، مؤلفه‌های بدون پریم عبارت است از

$$A_x=\mathbf{A}\cdot\mathbf{i}=(\mathbf{i}'\cdot\mathbf{i})A_{x'}+(\mathbf{j}'\cdot\mathbf{i})A_{y'}+(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{i})A_{z'} \qquad (۲۵.۱)$$
$$A_y=\mathbf{A}\cdot\mathbf{j}=(\mathbf{i}'\cdot\mathbf{j})A_{x'}+(\mathbf{j}'\cdot\mathbf{j})A_{y'}+(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{j})A_{z'}$$
$$A_z=\mathbf{A}\cdot\mathbf{k}=(\mathbf{i}'\cdot\mathbf{k})A_{x'}+(\mathbf{j}'\cdot\mathbf{k})A_{y'}+(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{k})A_{z'}$$

تمام ضرایب تبدیل در معادلهٔ (۲۵.۱)، در معادلهٔ (۲۴.۱) نیز ظاهر می‌شوند، زیرا $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}'=\mathbf{i}'\cdot\mathbf{i}$ و الی آخر. اما آنهاکه در سطرهای (معادلات) معادلهٔ (۲۵.۱) هستند در ستونهایی به‌صورت جمله درمعادلهٔ (۲۴.۱) ظاهر می‌شوند و برعکس. قواعد تبدیل‌که در این دو مجموعه معادلات بیان شده‌اند، خاصیت عمومی بردارها محسوب نمی‌شوند. در حقیقت، اینها شیوهٔ دیگر تعریف بردار بشمار می‌آیند.[1]

معادلات تبدیل را می‌توان به‌صورت مناسبی به‌شکل ماتریسی بیان کرد.[2] بنابراین معادلات (۲۴.۱) به‌صورت زیر نوشته می‌شوند

$$\begin{bmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \\ A_{z'} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{i}\cdot\mathbf{i}' & \mathbf{j}\cdot\mathbf{i}' & \mathbf{k}\cdot\mathbf{i}' \\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}' & \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}' & \mathbf{k}\cdot\mathbf{j}' \\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{k}' & \mathbf{j}\cdot\mathbf{k}' & \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \qquad (۲۶.۱)$$

ماتریس سه در سه درمعادلهٔ فوق‌ماتریس تبدیل نامیده می‌شود. یکی ازفواید نمادماتریسی آن است‌که ضرب ماتریسی تبدیلات متوالی را به‌سادگی انجام می‌دهند.

خواننده مشاهده خواهدکردکه‌کاربرد ماتریس تبدیل مفروضی‌درمورد برداری‌مانند $\mathbf{A}$ نیز صریحاً با چرخش آن بردار در داخل دستگاه مختصات (ثابت) بدون پریم معادل است. مؤلفه‌های‌بردارچرخیده را معادلهٔ (۲۶.۱) بیان می‌کند. بنابراین، چرخشهای‌محدود را می‌توان‌به‌وسیلهٔ ماتریسها نشان‌داد. (توجه‌کنیدکه‌سوی‌چرخش‌بردار دراین‌قسمت‌بحث، مخالف سوی چرخش دستگاه مختصات در قسمت قبلی است.)

---

۱. مثلاً، کتاب زیر را ببینید

L. P. Smith, *Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1953.

۲. مرور مختصر ماتریسها در پیوست ج آمده است.

مثالها

۱۲.۱ بردار $\mathbf{A}=3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ را برحسب مجموعهٔ سه‌تایی $\mathbf{i}'\mathbf{j}'\mathbf{k}'$ بنویسید درصورتی که محورهای $x'y'$ به‌اندازهٔ $45°$ حول محور z بچرخند، محور z و z' برهم منطبق‌اند (شکل ۱۰.۱). با مراجعه به شکل، برای ضرایب تبدیل داریم: $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}'=\cos 45°$، والی آخر. بنابراین

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i}\cdot\mathbf{i}'=1/\sqrt{2} & \mathbf{j}\cdot\mathbf{i}'=1/\sqrt{2} & \mathbf{k}\cdot\mathbf{i}'=0 \\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}'=-1/\sqrt{2} & \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}'=1/\sqrt{2} & \mathbf{k}\cdot\mathbf{j}'=0 \\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{k}'=0 & \mathbf{j}\cdot\mathbf{k}'=0 & \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}'=1 \end{array}$$

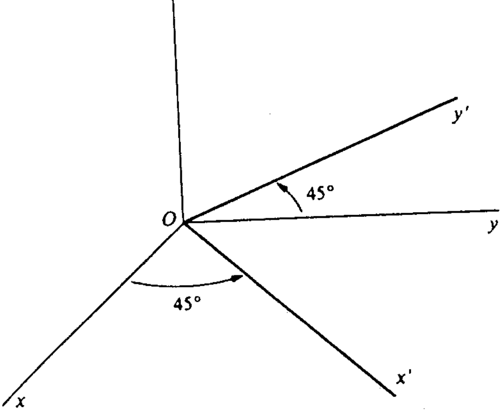
از اینجا داریم

$$A_{x'}=\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}} \qquad A_{y'}=\frac{-3}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{-1}{\sqrt{2}} \qquad A_{z'}=1$$

از این‌رو، در دستگاه مختصات پریم‌دار، $\mathbf{A}$ به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\mathbf{A}=\frac{5}{\sqrt{2}}\mathbf{i}'-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}'+\mathbf{k}'$$

۱۳.۱ ماتریس تبدیل برای چرخش دستگاه مختصات پریم‌دار، به‌اندازهٔ ϕ، درحول‌محور z را به‌دست‌آورید. (مثال قبل حالت خاصی از این مثال است.) داریم



شکل ۱۰.۱ محورهای چرخیده.

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}'=\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}'=\cos\phi$$
$$\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}'=-\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}'=\sin\phi$$
$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}'=۱$$

و همهٔ حاصلضربهای نقطه‌ای دیگر صفرند. از این‌رو ماتریس تبدیل چنین خواهد بود

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & ۰ \\ -\sin\phi & \cos\phi & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

از مثال فوق روشن است که ماتریس تبدیل برای چرخش حول محور مختصات دیگر، مثلا حول محور y به‌اندازهٔ زاویهٔ θ، از ماتریس زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & ۰ & -\sin\theta \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ \sin\theta & ۰ & \cos\theta \end{bmatrix}$$

درنتیجه ماتریس تبدیل برای ترکیب این دوچرخش، ابتدا حول‌محور z (به‌اندازهٔ زاویهٔ ϕ) و سپس حول محور جدید y' (به‌اندازهٔ θ)، به‌وسیلهٔ ماتریس حاصلضربی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & ۰ & -\sin\theta \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ \sin\theta & ۰ & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & ۰ \\ -\sin\phi & \cos\phi & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & ۰ \\ \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \end{bmatrix}$$

حال، به‌طورکلی، ضرب ماتریسی غیرجابه‌جایی است. از این‌رو می‌توان انتظار داشت که اگر ترتیب چرخشها، و بنابراین‌ترتیب ضرب ماتریسی در سمت چپ، وارونه شود، باید نتیجهٔ نهایی فرق‌کند. خواننده خود می‌تواند این حالت را بررسی کند. این موضوع با اظهارنظر قبلیمان مبنی‌بر اینکه چرخشهای محدود از قانون جمع برداری پیروی‌نمی‌کنند، و از این‌رو بردار نیستند، حتی اگر یك تك چرخش راستا (محور) و بزرگی (زاویهٔ چرخش) داشته باشد، سازگار است. ولی، بعداً نشان خواهیم‌داد که چرخشهای بی‌نهایت کوچك از قانون جمع برداری پیروی می‌کنند، ومی‌توان آنها را با بردارها نمایش‌داد.

۹.۱ مشتق بردار

تا اینجا عموماً به‌جبر برداری پرداختیم. اکنون بررسی حساب دیفرانسیل و انتگرال بردارها و کاربرد آن در توصیف حرکت ذرات را آغاز می‌کنیم.

بردار $\mathbf{A}$ را در نظر بگیرید، مؤلفه‌های آن تابعی از یك تك متغیر u هستند. این بردار می‌تواند نمایشگر مکان، سرعت، و کمیتهایی از این‌قبیل باشد. پارامتر u معمولا عبارت‌است از زمان t، امامی‌تواندهر کمیت دیگری که مؤلفه‌های $\mathbf{A}$ را تعیین‌می‌کند، باشد

$$\mathbf{A}(u)=\mathbf{i}A_x(u)+\mathbf{j}A_y(u)+\mathbf{k}A_z(u)$$

مشتق $\mathbf{A}$ نسبت به u، کاملا شبیه مشتق‌معمولی یك تابع اسکالر است، که به‌کمك حد تعریف می‌شود

$$\frac{d\mathbf{A}}{du}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta\mathbf{A}}{\Delta u}=\lim_{\Delta u\to 0}\left(\mathbf{i}\frac{\Delta A_x}{\Delta u}+\mathbf{j}\frac{\Delta A_y}{\Delta u}+\mathbf{k}\frac{\Delta A_z}{\Delta u}\right)$$

که $\Delta A_x = A_x(u+\Delta u)-A_x(u)$ و به‌همین‌ترتیب الی آخر. از این‌رو

$$\frac{d\mathbf{A}}{du}=\mathbf{i}\frac{dA_x}{du}+\mathbf{j}\frac{dA_y}{du}+\mathbf{k}\frac{dA_z}{du} \qquad (۲۷.۱)$$

بنابراین مشتق هر بردار، عبارت‌است از برداری که مؤلفه‌های دکارتی آن مشتقهای معمولی باشند.

از معادلهٔ بالا نتیجه می‌گیریم که مشتق‌حاصل جمع دو بردار برابر است با مجموع مشتقات آن دو بردار، یعنی

$$\frac{d}{du}(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\frac{d\mathbf{A}}{du}+\frac{d\mathbf{B}}{du} \qquad (۲۸.۱)$$

قواعد مشتق گیری ضربهای برداری را بعداً مطالعه خواهیم‌کرد.

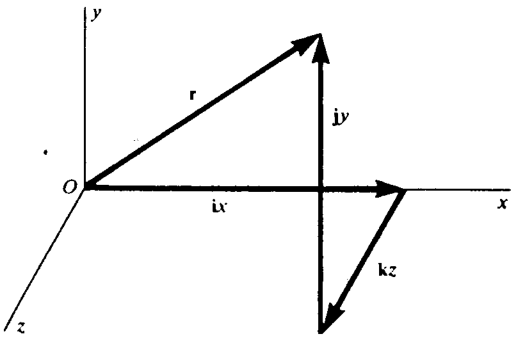
۱۰.۱ بردار مکان ذره. سرعت وشتاب درمختصات راستگوشه

در هر دستگاه مختصات مرجع معین مکان هر ذره را می‌توان به‌کمك یك تك بردار، یعنی مکان آن ذره‌نسبت به مبدأ دستگاه‌مختصات، مشخص کرد. این‌بردار، بردار مکان ذره‌نامیده می‌شود. در مختصات راستگوشه، شکل ۱۱.۱، بردار مکان به‌صورت سادهٔ زیر است

$$\mathbf{r}=\mathbf{i}x+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z$$

مؤلفه‌های بردار مکان یك ذرهٔ متحرك توابعی از زمان‌اند، یعنی

$$x=x(t) \qquad y=y(t) \qquad z=z(t)$$



شکل ۱۱.۱ بردار مکان $\mathbf{r}$ ومؤلفه‌هایش در دستگاه مختصات دکارتی.

در معادلهٔ (۲۷.۱) تعریف متداول مشتق بردار نسبت به یك پارامتر را بیان کردیم. به‌ویژه، اگر بردار عبارت باشد از بردار مکان $\mathbf{r}$ یك ذرهٔ متحرك و پارامتر زمان هم t باشد، مشتق $\mathbf{r}$ نسبت به t را سرعت می‌نامیم، که‌آن را به $\mathbf{v}$ نشان می‌دهیم

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{i}\dot{x}+\mathbf{j}\dot{y}+\mathbf{k}\dot{z} \qquad (۲۹.۱)$$

که نقطه‌ها در بالای حرفها نمایش مشتق نسبت به‌زمان t است. (این قرارداد استاندارد است و در سراسر این‌کتاب به‌کار خواهد رفت.) حال مفهوم هندسی بردار سرعت را بررسی کنیم. ذره‌ای‌را درمکان معین و درزمان t فرض‌کنید؛ پس‌از گذشت‌زمان Δt، ذره از مکان $\mathbf{r}(t)$ به‌مکان $\mathbf{r}(t+\Delta t)$ حرکت خواهدکرد. بردار تغییر مکان در فاصلهٔ زمانی Δt عبارت‌است از

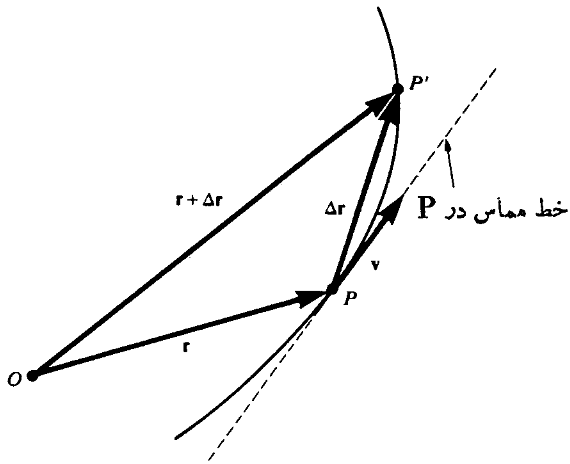
$$\Delta\mathbf{r}=\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)$$

از این‌رو خارج‌قسمت $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ برداری موازی تغییرمکان است. هنگامی‌که فواصل‌زمانی راکوچکتر وکوچکتر در نظر بگیریم، خارج‌قسمت $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ به‌حد $d\mathbf{r}/dt$ نزدیك می‌شود که آن‌را سرعت می‌نامیم. بردار $d\mathbf{r}/dt$ هم‌راستا وهم‌آهنگ حرکت را مشخص می‌کند. این‌معنی را درشکل ۱۲.۱ به‌طریق نموداری نشان‌داده‌ایم. درفاصلهٔ زمانی Δt، ذره مسیری از P تا P' را طی می‌کند. وقتی Δt به‌صفر نزدیك شود، نقطهٔ P به P' نزدیك می‌شود، و راستای بردار $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ به‌جهت مماس بر مسیر در نقطهٔ P نزدیك می‌شود. از این‌رو بردار سرعت همیشه بر مسیر حرکت مماس است.

بزرگی سرعت، برحسب مؤلفه‌های دکارتی، عبارت است از

$$v=|\mathbf{v}|=(\dot{x}^{۲}+\dot{y}^{۲}+\dot{z}^{۲})^{۱/۲} \qquad (۳۰.۱)$$

اگر جمع فاصلهٔ اسکالر در طول مسیر را به s نشان دهیم، دراین‌صورت می‌توانیم بزرگی



شکل ۱۲.۱ بردار سرعت ذرهٔ متحرك به‌عنوان‌حدی از نسبت $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$.

سرعت را به‌شرح زیر بنویسیم

$$v=\frac{ds}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{[(\Delta x)^{2}+(\Delta y)^{2}+(\Delta z)^{2}]^{1/2}}{\Delta t}$$

که این خود به‌عبارت سمت راست معادلهٔ (۳۰.۱) تبدیل می‌شود.

مشتق زمانی سرعت را، شتاب می گویند. شتاب را به **a** می‌نمایانیم، دراین‌صورت

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d^{2}\mathbf{r}}{dt^{2}} \qquad (۳۱.۱)$$

برحسب مؤلفه‌های راستگوشه

$$\mathbf{a}=\mathbf{i}\ddot{x}+\mathbf{j}\ddot{y}+\mathbf{k}\ddot{z} \qquad (۳۲.۱)$$

بنابراین شتاب کمیتی برداری است که مؤلفه‌هایش، در مختصات راستگوشه، مشتقات دوم مختصات مکانی یك ذرهٔ متحرك را تشکیل می‌دهند. تجزیهٔ **a** به‌مؤلفه‌های مماسی و قائم‌را در بخش ۱۲.۱ مورد بحث قرار خواهیم‌داد.

مثالها

۱۴.۱ حرکت پرتابه. حرکتی را بررسی می‌کنیم که معادلهٔ زیر بیانگر آن است

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{i}bt+\mathbf{j}\left(ct-\frac{gt^{2}}{2}\right)+\mathbf{k}0$$

این معادله حرکت در صفحهٔ xy را نشان می‌دهد، زیرا مؤلفهٔ z ثابت و مساوی‌صفر است. سرعت $\mathbf{v}$ به‌کمک مشتق‌گیری نسبت به‌زمان t به‌دست می‌آید، یعنی

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{i}b+\mathbf{j}(c-gt)$$

شتاب نیز از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-\mathbf{j}g$$

بنابراین $\mathbf{a}$ درجهت منفی محور y و دارای بزرگی ثابت g است. مطابق شکل ۱۳۰۱، مسیر حرکت یك سهمی است. (در واقع این معادله نمایش حرکت یك پرتابه است.) اندازهٔ سرعت با زمان t بنابر معادلهٔ زیر تغییر می‌کند

$$v=[b^{2}+(c-gt)^{2}]^{1/2}$$

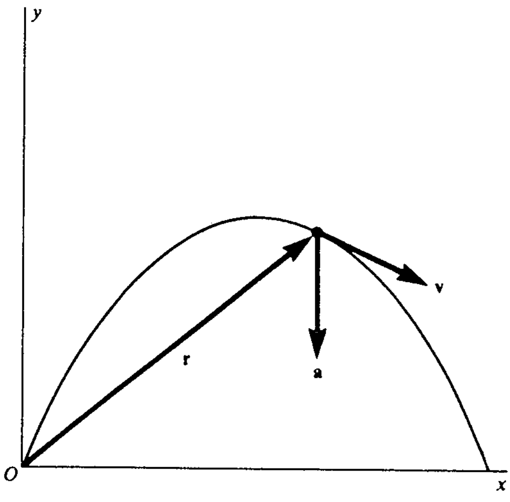
۱۵۰۱ حرکت دایره‌ای. فرض‌کنید بردار مکان یك ذره از عبارت زیر به‌دست آید

$$\mathbf{r}=\mathbf{i}b\sin\omega t+\mathbf{j}b\cos\omega t$$

ω ثابت است. حرکت را تحلیل می‌کنیم. فاصلهٔ ذره تا مبدأ مختصات ثابت باقی می‌ماند

$$|\mathbf{r}|=r=(b^{2}\sin^{2}\omega t+b^{2}\cos^{2}\omega t)^{1/2}=b$$

از این‌رو مسیر دایره‌ای است به‌شعاع b و به‌مرکز مبدأ مختصات. با مشتق‌گیری از $\mathbf{r}$،



شکل ۱۳۰۱ بردارهای مکان، سرعت، وشتاب یك‌ذرهٔ (پرتابه) متحرك درمسیری سهموی.

بردار سرعت را به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{i}b\omega\cos\omega t-\mathbf{j}b\omega\sin\omega t$$

ذره مسیر خود را با بزرگی سرعت ثابت

$$v=|\mathbf{v}|=(b^{2}\omega^{2}\cos^{2}\omega t+b^{2}\omega^{2}\sin^{2}\omega t)^{1/2}=b\omega$$

می‌پیماید. شتاب آن عبارت است از

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-\mathbf{i}b\omega^{2}\sin\omega t-\mathbf{j}b\omega^{2}\cos\omega t$$

در این‌حالت شتاب بر سرعت عمود است، زیرا ضرب نقطه‌ای $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ صفر می‌شود

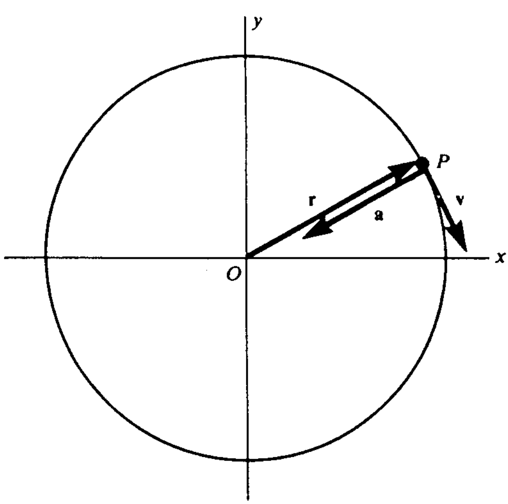
$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}=(b\omega\cos\omega t)(-b\omega^{2}\sin\omega t)+(-b\omega\sin\omega t)(-b\omega^{2}\cos\omega t)=0$$

دیده می‌شود که از مقایسهٔ دو عبارت مربوط به $\mathbf{a}$ و $\mathbf{r}$ می‌توان نوشت

$$\mathbf{a}=-\omega^{2}\mathbf{r}$$

از این‌رو $\mathbf{a}$ و $\mathbf{r}$ مختلف‌الجهت‌اند، یعنی، $\mathbf{a}$ همیشه به‌سوی مرکز مسیر دایره‌ای متوجه‌است (شکل ۱۴۰۱).

۱۶۰۱ چرخ غلتان. بردار مکان ذرهٔ P را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم



شکل ۱۴۰۱ ذرهٔ متحرك در مسیر دایره‌ای با سرعت ثابت.

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2$$

که در آن

$$\mathbf{r}_1=\mathbf{i}b\omega t+\mathbf{j}b$$

$$\mathbf{r}_2=\mathbf{i}b\sin\omega t+\mathbf{j}b\cos\omega t$$

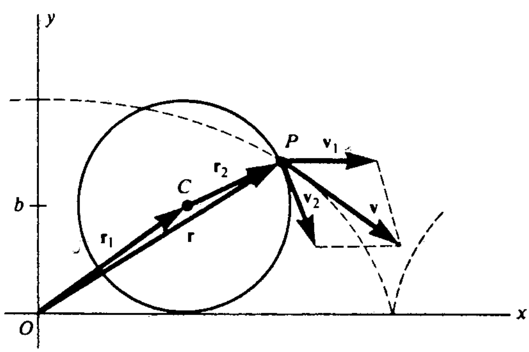
حال $\mathbf{r}_1$ خودش نقطهٔ متحرکی را در امتداد خط $y=b$ با سرعت ثابت نشان می‌دهد، به‌شرط اینکه ω ثابت باشد، یعنی

$$\mathbf{v}_1=\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}=\mathbf{i}b\omega$$

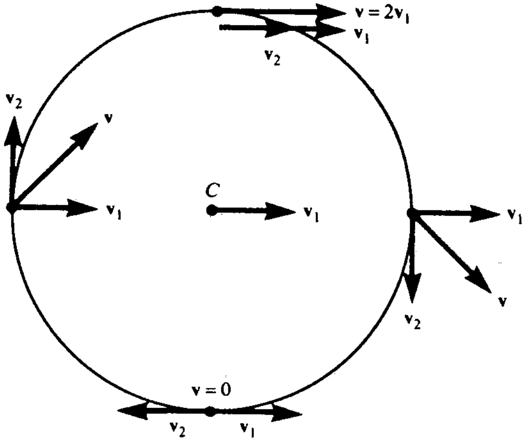
جزء دوم، $\mathbf{r}_2$، همان بردار مکان‌درحرکت دایره‌ای است که درمثال قبل پیرامون آن بحث کردیم. از این رو مجموع برداری $\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2$ نقطه‌ای را نشان می‌دهد که دایره‌ای به‌شعاع b حول یك مرکز متحرك رسم‌می‌کند. این‌دقیقاً همان اتفاقی‌است که درمورد یك ذره واقع بر لبهٔ یك چرخ غلتان رخ می‌دهد، $\mathbf{r}_1$ بردار مکان مرکز چرخ و $\mathbf{r}_2$ بردار مکان ذرهٔ P نسبت به مرکز متحرك است. مسیرواقعی حرکت سیکلوئید (چرخزاد) است (شکل ۱۵۰۱). سرعت P عبارت است از

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2=\mathbf{i}(b\omega+b\omega\cos\omega t)-\mathbf{j}b\omega\sin\omega t$$

به‌ویژه، به‌ازای ... $\omega t=0,\ 2\pi,\ 4\pi,$ داریم $\mathbf{v}=\mathbf{i}2b\omega$ که درست دوبرابر سرعت مرکز C است. در این نقاط ذره در بالاترین قسمت مسیرش واقع است. علاوه‌براین، به‌ازای ... $\omega t=\pi,\ 3\pi,\ 5\pi,$ داریم $\mathbf{v}=0$. در این نقاط ذره در پایینترین نقطهٔ خود واقع و به‌طور لحظه‌ای با زمین در تماس است (شکل ۱۶۰۱).



شکل ۱۵۰۱ مسیر سیکلوئیدی ذره‌ای واقع بر یك چرخ غلتان.



شکل ۱۶۰۱ بردارهای سرعت نقاط مختلف واقع بر یک چرخ غلتان.

۱۱.۱ مشتق ضرب بردارها

اغلب برحسب ضرورت با مشتق ضربهای $n\mathbf{A}$، $\mathbf{A}.\mathbf{B}$، و $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$، که در آن n اسکالر و بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ توابعی از یک تک‌پارامتر u هستند (مانند بخش ۹.۱)، سروکار پیدا می‌کنیم. بنا بر تعریف کلی مشتق

$$\frac{d(n\mathbf{A})}{du}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{n(u+\Delta u)\mathbf{A}(u+\Delta u)-n(u)\mathbf{A}(u)}{\Delta u} \qquad (۳۳.۱)$$

$$\frac{d(\mathbf{A}.\mathbf{B})}{du}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\mathbf{A}(u+\Delta u).\mathbf{B}(u+\Delta u)-\mathbf{A}(u).\mathbf{B}(u)}{\Delta u}$$

$$\frac{d(\mathbf{A}\times\mathbf{B})}{du}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\mathbf{A}(u+\Delta u)\times\mathbf{B}(u+\Delta u)-\mathbf{A}(u)\times\mathbf{B}(u)}{\Delta u}$$

اگر عبارتی، مانند $n(u+\Delta u)\mathbf{A}(u)$ را به‌صورت کسرها اضافه و از آن کم کنیم، به‌قاعده‌های زیردست پیدا می‌کنیم

$$\frac{d(n\mathbf{A})}{du}=\frac{dn}{du}\mathbf{A}+n\frac{d\mathbf{A}}{du} \qquad (۳۴.۱)$$

$$\frac{d(\mathbf{A}.\mathbf{B})}{du}=\frac{d\mathbf{A}}{du}.\mathbf{B}+\mathbf{A}.\frac{d\mathbf{B}}{du} \qquad (۳۵.۱)$$

$$\frac{d(\mathbf{A}\times\mathbf{B})}{du}=\frac{d\mathbf{A}}{du}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{du} \qquad (۳۶.۱)$$

توجه کنید که ترتیب جمله‌ها را در مشتق‌گیری ضرب برداری باید رعایت کرد. عملیات مربوط به روابط بالا را به‌عنوان تمرین به‌خواننده وامی‌گذاریم.

۱۲.۱ مؤلفه‌های مماسی و قائم شتاب

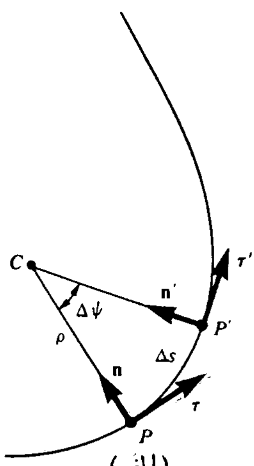
در بخش ۴.۱، نشان دادیم که هر بردار را می‌توان به‌صورت حاصلضرب بزرگی آن در بردار یکه، که هم‌جهت آن باشد، بیان کرد. براین‌اساس، بردار سرعت یك ذرهٔ متحرك را می‌توان به‌صورت حاصلضرب بزرگی سرعت v و بردار یکهٔ $\boldsymbol{\tau}$ که جهت حرکت ذره را مشخص می‌کند، نوشت. بنابراین

$$\mathbf{v} = v\boldsymbol{\tau} \qquad (۳۷.۱)$$

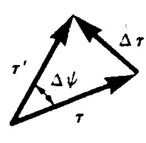
بردار $\boldsymbol{\tau}$ را بردار یکهٔ مماسی می‌نامند. وقتی ذره حرکت می‌کند ممکن است بزرگی سرعت و جهت $\boldsymbol{\tau}$ تغییر کند. از دستور مشتق‌گیری حاصلضرب یك اسکالر و یك بردار بهره می‌گیریم تا بردار شتاب را به‌دست‌آوریم. نتیجه چنین خواهد بود

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(v\boldsymbol{\tau})}{dt} = \dot{v}\boldsymbol{\tau} + v\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} \qquad (۳۸.۱)$$

مشتق بردار یکهٔ $\boldsymbol{\tau}$، با بزرگی ثابت، عبارت‌است از $d\boldsymbol{\tau}/dt$ که لزوماً باید تغییرجهت $\boldsymbol{\tau}$ نسبت به‌زمان را بیان کند (شکل ۱۷.۱ الف). ذره ابتدا در نقطه‌ای مانند P ازمسیرخود واقع است. در فاصلهٔ زمانی Δt این ذره به نقطهٔ دیگری مانند P' می‌رود و فاصلهٔ معین Δs را در امتداد مسیرش می‌پیماید. بردارهای یکهٔ مماسی را درنقاط P و P' به‌ترتیب



(الف)



(ب)

شکل ۱۷.۱ بردارهای یکهٔ مماسی وقائم.

با $\boldsymbol{\tau}$ و $\boldsymbol{\tau}'$ نشان می‌دهیم. جهت این دو بردار یکه به‌اندازهٔ زاویهٔ معین $\Delta\psi$ با هم فرق دارد (شکل ۱۷.۱ ب). واضح است که به‌ازای مقادیر کوچك $\Delta\psi$، بزرگی $\Delta\boldsymbol{\tau}$ به $\Delta\psi$ نزدیك می‌شود. به‌همین‌ترتیب درحد وقتی $\Delta\psi$ و Δs به‌سمت‌صفر میل می‌کنند، جهت $\Delta\boldsymbol{\tau}$ برجهت $\boldsymbol{\tau}$ عمود می‌شود. از این‌رو بزرگی مشتق $d\boldsymbol{\tau}/d\psi$ واحد و راستایش بر $\boldsymbol{\tau}$ عمود است. بدین‌جهت آن را بردار یکهٔ قائم می‌گویند و با $\mathbf{n}$ نشان می‌دهند، به‌طوری که

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\psi}=\mathbf{n} \qquad (۳۹.۱)$$

آنگاه، برای پیدا کردن مشتق زمانی $d\boldsymbol{\tau}/dt$، قاعدهٔ زنجیری (یا قاعدهٔ مشتق تابع‌مضاعف) را به‌طریق زیر به‌کار می‌بریم

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\psi}\frac{d\psi}{dt}=\mathbf{n}\frac{d\psi}{ds}\,\frac{ds}{dt}=\mathbf{n}\frac{v}{\rho}$$

که در آن

$$\rho=\frac{ds}{d\psi}$$

شعاع انحنای مسیر ذرهٔ متحرك در نقطهٔ P است. اکنون مقدار $d\boldsymbol{\tau}/dt$ را در معادلهٔ (۳۸.۱) می‌نشانیم

$$\mathbf{a}=\dot{v}\boldsymbol{\tau}+\frac{v^{2}}{\rho}\mathbf{n} \qquad (۴۰.۱)$$

بنابراین شتاب یك ذرهٔ متحرك دارای مؤلفه‌ای است در جهت حرکت

$$a_{\tau}=\dot{v}=\ddot{s}$$

این مؤلفه را شتاب مماسی می‌گویند. مؤلفهٔ دیگر، مؤلفهٔ قائم است

$$a_{n}=\frac{v^{2}}{\rho}$$

این مؤلفهٔ همواره به‌سمت مرکز انحنا در طرف کاو منحنی مسیر متوجه است. از این‌رو به‌این مولفهٔ قائم، شتاب مرکزگرا می‌گویند.

با عنایت به‌ملاحظات فوق پی می‌بریم که مشتق زمانی بزرگی سرعت فقط مؤلفهٔ مماسی شتاب است. بزرگی شتاب کل از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$|\mathbf{a}|=\left|\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right|=\left(\dot{v}^2+\frac{v^4}{\rho^2}\right)^{1/2} \qquad (۴۱.۱)$$

درحالت خاص، اگر ذره‌ای با سرعت v روی دایره‌ای حرکت کند (مثال ۱۵.۱)، بزرگی بردار شتاب عبارت خـواهد بود از v^2/b که b شعاع دایره است، دراین‌حالت بردار شتاب‌همواره متوجه مرکز دایره‌است. ولی اگر بزرگی‌سرعت ثابت نباشد بلکه باآهنگ معین $\dot{v}$ افزایش یابد، آنگاه شتاب دارای مؤلفه‌ای است به‌سمت جلو و با همین اندازه‌که از مرکز دایره به‌جلو تمایل پیدا می‌کند (شکل ۱۸.۱). اگر حرکت ذره‌کند شود، بردار شتاب به‌راستای مخالف تمایل پیدا خواهدکرد.

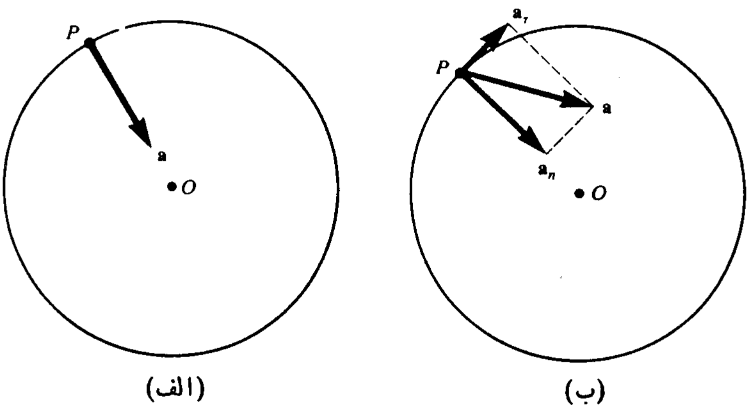
۱۳.۱ سرعت و شتاب درمختصات قطبی مسطح

اغلب اوقات بهتر است برای نمایش مکـان یك ذرهٔ متحرك در صفحه، از مختصات قطبی r، θ بهره‌گیریم. ازلحاظ برداری، مکان این ذره را می‌توان با حاصلضرب فاصلهٔ شعاعی r دربردار شعاعی یکهٔ $\mathbf{e}_r$ نشان‌داد

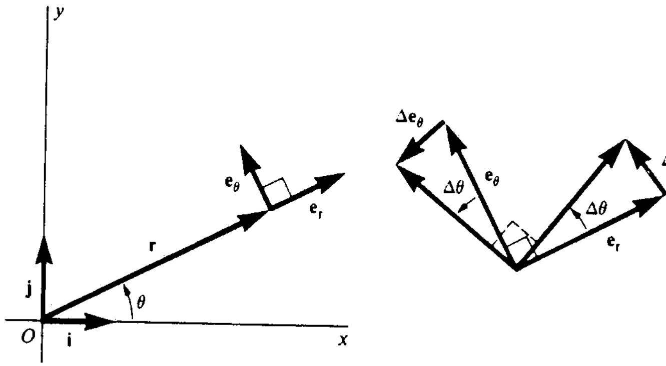
$$\mathbf{r}=r\mathbf{e}_r \qquad (۴۲.۱)$$

وقتی ذره حـرکت می‌کند، هم r و هم $\mathbf{e}_r$ تغییر می‌کنند، بنابـراین هردو تابعی از زمان‌اند. از این‌رو اگر نسبت به t مشتق بگیریم

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\dot{r}\mathbf{e}_r+r\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} \qquad (۴۳.۱)$$



شکل ۱۸.۱ بردارهای شتاب ذرهٔ متحرك درمسیر دایره‌ای با (الف) بزرگی سرعت ثابت و (ب) بزرگی سرعت فزاینده.



شکل ۱۹.۱ بردارهای یکه برای مختصات قطبی درصفحه.

برای محاسبهٔ مشتق $d\mathbf{e}_r/dt$ نمودار برداری نمایشیافته در شکل ۱۹.۱ را درنظر بگیریم. مطالعهٔ این شکل نشان می‌دهد که وقتی جهت $\mathbf{r}$ به‌اندازهٔ $\Delta\theta$ تغییر می‌کند، تغییر بردار شعاعی یکهٔ متناظر با آن، $\Delta\mathbf{e}_r$، به‌طریق‌زیر است: بزرگی $|\Delta\mathbf{e}_r|$ تقریباً برابر $\Delta\theta$ است و جهت $\Delta\mathbf{e}_r$ خیلی به‌خط عمودبر $\mathbf{e}_r$ نزدیک‌است. بردار یکهٔ دیگری، $\mathbf{e}_\theta$، را معرفی می‌کنیم که جهت آن بر $\mathbf{e}_r$ عمود باشد. در این‌صورت داریم

$$\Delta\mathbf{e}_r \simeq \mathbf{e}_\theta \Delta\theta$$

اگر طرفین این عبارت را بر Δt تقسیم کنیم و حدآن را بگیریم، در مورد مشتق زمانی بردار یکهٔ شعاعی خواهیم داشت

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \mathbf{e}_\theta \frac{d\theta}{dt} \qquad (۴۴.۱)$$

به‌همین‌ترتیب، می‌توانیم استدلال کنیم که تغییر بردار یکهٔ $\mathbf{e}_\theta$ از رابطهٔ تقریبی زیر به‌دست می‌آید

$$\Delta\mathbf{e}_\theta \simeq -\mathbf{e}_r \Delta\theta$$

دراینجا علامت منها نشان می‌دهد که مطابق‌شکل، جهت تغییر $\Delta\mathbf{e}_\theta$ خلاف جهت $\mathbf{e}_r$ است. درنتیجه، مشتق زمانی از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = -\mathbf{e}_r \frac{d\theta}{dt} \qquad (۴۵.۱)$$

برای دستیابی به‌مشتق‌بردار شعاعی یکه ازمعادلهٔ (۴۴.۱) بهره می‌گیریم، وبالاخره می‌توانیم معادلهٔ سرعت را به‌صورت زیر بنویسیم

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \tag{۴۶.۱}$$

بنابراین $\dot{r}$ مؤلفهٔ شعاعی بردار سرعت و $r\dot{\theta}$ مؤلفهٔ عرضی آن است.
به‌منظور یافتن بردار شتاب، از سرعت نسبت به‌زمان مشتق می‌گیریم

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\mathbf{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt}$$

مقادیر $d\mathbf{e}_r/dt$ و $d\mathbf{e}_\theta/dt$ از معادلات (۴۴.۱) و (۴۵.۱) به‌دست می‌آیند، و به معادلهٔ زیر برای بردار شتاب در مختصات قطبی دست می‌یابیم

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta \tag{۴۷.۱}$$

بنابراین مؤلفهٔ شعاعی بردار شتاب عبارت است از

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \tag{۴۸.۱}$$

ومؤلفهٔ عرضی‌آن چنین خواهد بود

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \tag{۴۹.۱}$$

مثلاً، نتایج بالا نشان‌می‌دهندکه اگر ذره‌ای روی دایره‌ای به‌شعاع ثابت b حرکت کند، آنگاه $\dot{r} = 0$، و دراین‌صورت بزرگی مؤلفهٔ شعاعی بردار شتاب عبارت است از $b\dot{\theta}^2$ و جهت‌آن به‌سمت مرکز این مسیر دایره‌ای است. مؤلفهٔ عرضی دراین‌حالت عبارت است از $b\ddot{\theta}$. ازسوی دیگر، اگر ذره در امتداد یك خط ثابت شعاعی حرکت کند، یعنی اگر θ ثابت باشد، مؤلفهٔ شعاعی دقیقاً $\ddot{r}$ و مؤلفهٔ عرضی‌صفر خواهد بود. اگر r و θ هردو تغییر کنند، در این‌حالت از معادلهٔ کلی (۴۷.۱) بردار شتاب به‌دست می‌آید.

مثالها

۱۷.۱ یك زنبور عسل در مسیر مارپیچ به‌کندوی خود مراجعت می‌کند، چنانکه فاصلهٔ شعاعی آن با آهنگ ثابت $r = b - ct$ کاهش می‌یابد، در حالی‌که سرعت زاویه‌ای آن با آهنگ $\dot{\theta} = kt$ فزونی می‌گیرد. بزرگی سرعت را به صورت تابعی از زمان به‌دست آورید.

حل: داریم $\dot{r} = -c$ و $\ddot{r} = 0$ بنابراین، از معادلهٔ (۴۶.۱) به‌دست خواهیم آورد

$$\mathbf{v} = -c\mathbf{e}_r + (b - ct)kt\mathbf{e}_\theta$$

از این‌رو

$$v=[c^{۲}+(b-ct)^{۲}k^{۲}t^{۲}]^{۱/۲}$$

که به‌ازای $t\leqslant b/c$ برقرار است (مقادیر t بزرگتر، r را منفی می کنند). توجه کنید که هم به‌ازای $t=۰$، $r=b$، وهم به‌ازای $t=b/c$ و $r=۰$ داریم: $v=c$.

۱۸۰۱ روی میز گردان افقی که با بزرگی سرعت زاویه‌ای ثابت می‌چرخد حشره‌ای روی یك خط شعاعی به سوی خارج می‌خزد، به‌طوری که فاصلهٔ حشره از مرکز به صورت توان‌دوم زمان‌افزایش می‌یابد: $r=bt^{۲}$ و $\theta=\omega t$ که b و ω ثابت‌اند. شتاب این‌حشره را به‌دست آورید.

حل: داریم $\dot{r}=۲bt$، $\ddot{r}=۲b$، $\dot{\theta}=\omega$، $\ddot{\theta}=۰$. این مقادیر را در معادلهٔ (۴۷۰۱) می‌نشانیم، خواهیم داشت

$$\mathbf{a}=\mathbf{e}_r(۲b-bt^{۲}\omega^{۲})+\mathbf{e}_\theta[۰+۲(۲bt)\omega]$$
$$=b(۲-t^{۲}\omega^{۲})\mathbf{e}_r+۴b\omega t\mathbf{e}_\theta$$

به‌این‌نکته‌توجه کنید که مؤلفهٔ شعاعی‌شتاب به‌ازای‌مقادیر بزرگ t در این‌مثال، منفی‌می‌شود؛ هرچند که شعاع همیشه به‌طور یکنواخت با زمان افزایش می‌یابد.

۱۴.۱ سرعت و شتاب در مختصات استوانه‌ای و کروی

مختصات استوانه‌ای

درمورد حرکت در سه بعد، می‌توان مکان‌ذره را درمختصات استوانه‌ای R، ϕ، z توصیف کرد. لذا بردار مکان به‌صورت زیر نوشته می‌شود

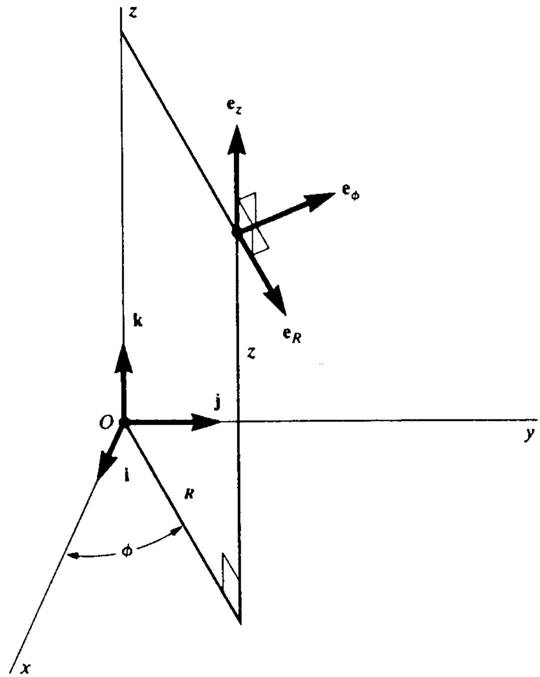
$$\mathbf{r}=R\mathbf{e}_R+z\mathbf{e}_z \qquad (۵۰۰۱)$$

که $\mathbf{e}_R$ بردار شعاعی یکه درصفحهٔ xy و $\mathbf{e}_z$ بردار یکه درجهت z است. بردار یکهٔ سومی، $\mathbf{e}_\phi$، هم لازم است تا سه بردار $\mathbf{e}_R\mathbf{e}_\phi\mathbf{e}_z$ یك مجموعهٔ سه‌تایی راستگرد تشکیل‌دهند (شکل ۲۰۰۱). توجه می کنیم که $\mathbf{k}=\mathbf{e}_z$.

بردارهای سرعت و شتاب، مانند قبل، به‌کمك مشتق‌گیری به‌دست می‌آیند. دراینجا نیز این عمل شامل مشتقات بردارهای یکه خواهد شد. با استدلالی، نظیر آنچه در مورد مختصات قطبی‌درصفحه‌آوردیم، می‌توان‌نشان‌داد: $d\mathbf{e}_R/dt=\mathbf{e}_\phi\dot{\phi}$ و $d\mathbf{e}_\phi/dt=-\mathbf{e}_R\dot{\phi}$. جهت بردار یکهٔ $\mathbf{e}_z$ تغییر نمی‌کند، از این‌رو مشتق زمانی‌آن صفر است.

با درنظر داشتن این نکات، به‌آسانی پی می‌بریم که بردارهای سرعت و شتاب به‌کمك معادلات زیر بیان می‌شوند

$$\mathbf{v}=\dot{R}\mathbf{e}_R+R\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi+\dot{z}\mathbf{e}_z \qquad (۵۱۰۱)$$



شکل ۲۰۱ بردارهای یکهٔ مختصات استوانه‌ای.

$$\mathbf{a}=(\ddot{R}-R\dot{\phi}^{2})\mathbf{e}_R+(2\dot{R}\dot{\phi}+R\ddot{\phi})\mathbf{e}_\phi+\ddot{z}\mathbf{e}_z \qquad (۵۲۰۱)$$

از این معادلات مقادیر $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ برحسب مؤلفه‌های آنها در سه‌تایی چرخیدهٔ $\mathbf{e}_R\mathbf{e}_\phi\mathbf{e}_z$ به‌دست می‌آیند.

یك روش دیگر برای دستیابی به‌مشتق بردارهای یکه، مشتق‌گیری از معادلات زیر است که رابطه‌هایی بین بردارهای یکهٔ مجموعهٔ سه‌تایی ثابت $\mathbf{ijk}$ ومجموعهٔ سه‌تایی‌چرخیده به‌شمار می‌آیند

$$\mathbf{e}_R=\mathbf{i}\cos\phi+\mathbf{j}\sin\phi \qquad (۵۳۰۱)$$

$$\mathbf{e}_\phi=-\mathbf{i}\sin\phi+\mathbf{j}\cos\phi$$

$$\mathbf{e}_z=\mathbf{k}$$

عملیاتی که باید روی آنها انجام شود، به صورت تمرین برعهدهٔ خواننده گذاشته می‌شود. این نتیجه را نیز می‌توان با استفاده از چرخش ماتریس (مثال ۱۳۰۱ بخش ۸۰۱) به‌دست آورد.

مختصات کروی

وقتی مختصات کروی r، θ، ϕ را برای توصیف مکان یك ذره به‌کار می‌بریم، بردار مکان نظیر مختصات قطبی درصفحه، به‌صورت حاصلضرب فاصلهٔ شعاعی، r، و بردار شعاعی یکه، $\mathbf{e}_r$، نوشته می‌شود. بنابراین

$$\mathbf{r}=r\mathbf{e}_r$$

اکنون راستای $\mathbf{e}_r$ با دو زاویهٔ ϕ و θ مشخص می‌شود. دو بردار یکهٔ دیگر $\mathbf{e}_\phi$ و $\mathbf{e}_\theta$ را مطابق شکل ۲۱.۱ معرفی می کنیم.

سرعت عبارت است از

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\dot{r}\mathbf{e}_r+r\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} \tag{۵۴.۱}$$

مسئلهٔ بعدی ما این است که چگونه مشتق $d\mathbf{e}_r/dt$ را برحسب بردارهای یکه در مجموعهٔ سه‌تایی چرخیده بیان کنیم.

با مراجعه به‌شکل، می‌بینیم که بین دو مجموعهٔ سه‌تایی روابط زیر برقرارند

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r&=\mathbf{i}\sin\theta\cos\phi+\mathbf{j}\sin\theta\sin\phi+\mathbf{k}\cos\theta\\ \mathbf{e}_\theta&=\mathbf{i}\cos\theta\cos\phi+\mathbf{j}\cos\theta\sin\phi-\mathbf{k}\sin\theta\\ \mathbf{e}_\phi&=-\mathbf{i}\sin\phi+\mathbf{j}\cos\phi\end{aligned} \tag{۵۵.۱}$$

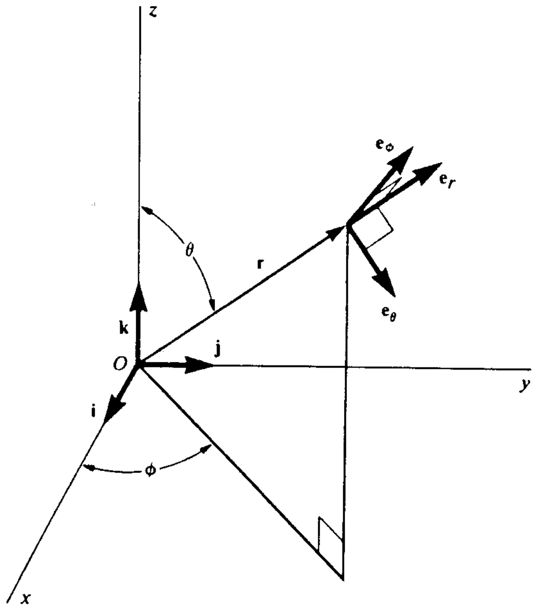
اینها بردارهای یکهٔ مجموعهٔ سه‌تایی چرخیده را برحسب مجموعهٔ سه‌تایی ثابت $\mathbf{ijk}$ بیان می کنند. متوجه می‌شویم که بین این تبدیل و تبدیل قسمت دوم از مثال ۱۳.۱ در بخش ۸.۱ شباهتی وجود دارد. درحقیقت، اگر چرخشها را به‌درستی باز شناسیم، این دو تبدیل یکسان‌اند. از معادلهٔ اول نسبت به‌زمان مشتق می گیریم. خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{e}_r}{dt}=&\,\mathbf{i}(\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi-\dot{\phi}\sin\theta\sin\phi)\\ &+\mathbf{j}(\dot{\theta}\cos\theta\sin\phi+\dot{\phi}\sin\theta\cos\phi)-\mathbf{k}\dot{\theta}\sin\theta\end{aligned}$$

آنگاه، با بهره‌گیری از عبارتهای مربوط به $\mathbf{e}_\phi$ و $\mathbf{e}_\theta$ در معادلهٔ (۵۵.۱)، پی می‌بریم که معادلهٔ فوق به‌صورت زیر در می آید

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt}=\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi\sin\theta+\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \tag{۵۶.۱}$$

دو مشتق دیگر با روشی مشابه به‌دست می‌آیند داریم



شکل ۲۱.۱ بردارهای یکه در مختصات کروی.

$$\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\mathbf{e}_r + \dot{\phi}\mathbf{e}_\phi \cos\theta \tag{۵۷.۱}$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} = -\dot{\phi}\mathbf{e}_r \sin\theta - \dot{\phi}\mathbf{e}_\theta \cos\theta \tag{۵۸.۱}$$

عملیات لازم را به‌عنوان تمرین برعهدهٔ خواننده می‌گذاریم. اکنون به مسئلهٔ یافتن $\mathbf{v}$ برمی‌گردیم، عبارت $d\mathbf{e}_r/dt$ را که معادلهٔ (۵۶.۱) بیانش می‌کند در معادلهٔ (۵۴.۱) وارد می‌کنیم. درنتیجه خواهیم‌داشت

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_r\dot{r} + \mathbf{e}_\phi r\dot{\phi}\sin\theta + \mathbf{e}_\theta r\dot{\theta} \tag{۵۹.۱}$$

که بردار سرعت را برحسب مؤلفه‌های آن در مجموعهٔ سه‌تایی چرخیده به‌دست می‌دهد.

برای به‌دست‌آوردن شتاب، از رابطهٔ فوق نسبت به‌زمان مشتق می‌گیریم. داریم

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{e}_r\ddot{r} + \dot{r}\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} + \mathbf{e}_\phi\frac{d(r\dot{\phi}\sin\theta)}{dt} + r\dot{\phi}\sin\theta\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} + \mathbf{e}_\theta\frac{d(r\dot{\theta})}{dt} + r\dot{\theta}\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt}$$

با بهره‌گیری از فرمولهای قبلی مربوط به‌مشتق بردارهای یکه، به‌آسانی پی می‌بریم که

رابطهٔ شتاب به‌صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\mathbf{a}=(\ddot r-r\dot\phi^2\sin^2\theta-r\dot\theta^2)\mathbf{e}_r+(r\ddot\theta+2\dot r\dot\theta-r\dot\phi^2\sin\theta\cos\theta)\mathbf{e}_\theta \quad (۶۰.۱)$$
$$+(r\ddot\phi\sin\theta+2\dot r\dot\phi\sin\theta+2r\dot\theta\dot\phi\cos\theta)\mathbf{e}_\phi$$

که بردار شتاب را برحسب مؤلفه‌های آن درمجموعهٔ سه‌تایی $\mathbf{e}_r\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_\phi$ به‌دست می‌دهد.

مثالها

۱۹.۱ مهره‌ای روی سیمی که به‌شکل مارپیچ خم شده می‌لغزد، حرکت مهره در مختصات استوانه‌ای با $R=b$، $\phi=\omega t$، و $z=ct$ بیان می‌شود. بردارهای سرعت و شتاب را به‌صورت توابعی از زمان به‌دست آورید.

حل: به‌کمک مشتق گیری می‌یابیم: $\dot R=R=0$، $\dot\phi=\omega$، $\ddot\phi=0$، $\dot z=c$، و $\ddot z=0$. از این‌رو، از معادلات (۵۱.۱) و (۵۲.۱) داریم

$$\mathbf{v}=b\omega\mathbf{e}_\phi+c\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{a}=-b\omega^2\mathbf{e}_R$$

پس، در این‌حالت، بزرگی سرعت و شتاب ثابت است، اما جهت آنها تغییر می‌کند، زیرا با حرکت مهره، $\mathbf{e}_\phi$ و $\mathbf{e}_R$ هردو با زمان تغییر می‌کنند.

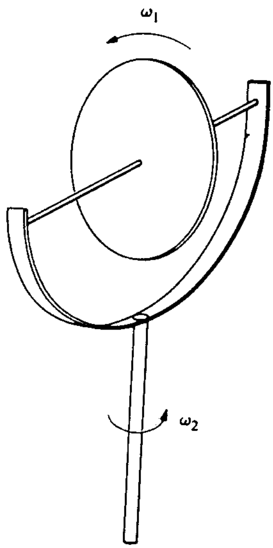
۲۰.۱ چرخی به‌شعاع b بر یك‌پایهٔ قاب مانند سوارشده وچنان ساخته‌شده است که‌چرخش آن به‌شرح زیر باشد: این چرخ با بزرگی سرعت زاویه‌ای ثابت ω_1 حول محورخودش می‌چرخد، و محورش، به‌نوبهٔ خود، باسرعت زاویه‌ای ثابت ω_2 حول‌محور قائم می گردد، به‌طریقی که محور چرخ در صفحهٔ افقی باقی می‌ماند و مرکز چرخ بی‌حرکت است. با بهره‌گیری از مختصات کروی، شتاب هر نقطه بر لبهٔ چرخ را به‌دست آورید. درحالت خاص، شتاب بالاترین نقطهٔ چرخ را بیابید. می‌توانیم از این نکته بهره گیریم که‌مختصات کروی می‌توانند چنان انتخاب شوند که: $r=b$، $\theta=\omega_1 t$، و $\phi=\omega_2 t$ (شکل ۲۲.۱). دراین‌صورت داریم: $\dot r=\ddot r=0$، $\dot\theta=\omega_1$، $\ddot\theta=0$، $\dot\phi=\omega_2$، $\ddot\phi=0$. از معادلهٔ (۶۰.۱) مستقیماً داریم

$$\mathbf{a}=(-b\omega_2^2\sin^2\theta-b\omega_1^2)\mathbf{e}_r-b\omega_2^2\sin\theta\cos\theta\,\mathbf{e}_\theta+2b\omega_1\omega_2\cos\theta\,\mathbf{e}_\phi$$

مختصهٔ بالاترین نقطهٔ چرخ عبارت است از $\theta=0$، از این‌رو در آن نقطه داریم

$$\mathbf{a}=-b\omega_1^2\mathbf{e}_r+2b\omega_1\omega_2\mathbf{e}_\phi$$

جملهٔ اول در سمت راست شتاب مرکز گرا، وجملهٔ آخر شتاب عرضی عمود بر صفحهٔ چرخ است.



شکل ۲۲۰۱ یك چرخ چرخان روی یك پایهٔ چرخان.

مسائل

۱۰۱ دو بردار $\mathbf{A}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$ و $\mathbf{B}=\mathbf{j}+\mathbf{k}$ معلوم‌اند، کمیتهای زیر را پیدا کنید.
الف) $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ و $|\mathbf{A}+\mathbf{B}|$
ب) $۳\mathbf{A}-۲\mathbf{B}$
ج) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$
د) $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ و $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|$

۲۰۱ سه بردار $\mathbf{A}=۲\mathbf{i}+\mathbf{j}$، $\mathbf{B}=\mathbf{i}+\mathbf{k}$، و $\mathbf{C}=۴\mathbf{j}$ مفروض‌اند، کمیتهای زیر را پیدا کنید.
الف) $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ و $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$
ب) $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ و $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$
ج) $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}$

۳۰۱ زاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{A}=a\mathbf{i}+۲a\mathbf{j}$ و $\mathbf{B}=a\mathbf{i}+۲a\mathbf{j}+۳a\mathbf{k}$ را پیدا کنید (گوشزد: این دو بردار قطر یکی از وجوه و یکی از قطرهای خود قطعهٔ مکعب مستطیلی به‌ابعاد a، $۲a$، و $۳a$ را مشخص می‌کنند).

۴۰۱ بردار متغیر با زمان

$$\mathbf{A}=\mathbf{i}\alpha t+\mathbf{j}\beta t^{۲}+\mathbf{k}\gamma t^{۳}$$

معلوم است، α، β، و γ ثابت‌اند؛ مشتقهای زمانی اول و دوم $d\mathbf{A}/dt$ و $d^{۲}\mathbf{A}/dt^{۲}$ را

به‌دست آورید.

۵۰۱ به‌ازای چه مقدار (یا مقادیر)ی از q، بردار $\mathbf{A}=\mathbf{i}q+۳\mathbf{j}+\mathbf{k}$ بر بردار $\mathbf{B}=\mathbf{i}q-q\mathbf{j}+۲\mathbf{k}$ عمود است؟

۶۰۱ اثبات جبری و هندسی روابط زیر را بیان کنید

$$|\mathbf{A}+\mathbf{B}|\leqslant|\mathbf{A}|+|\mathbf{B}|$$

$$|\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}|\leqslant|\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|$$

۷۰۱ تساوی برداری $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B}-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}$ را اثبات کنید.

۸۰۱ دو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ نمایشگر دو ضلع متقاطع یك متوازی‌الاضلاع‌اند. نشان‌دهیدکه مساحت این متوازی‌الاضلاع عبارت است از $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|$.

۹۰۱ سه بردار $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$، و $\mathbf{C}$ سه یال متقاطع یك متوازی‌السطوح را نمایش می‌دهند. نشان‌دهیدکه حجم متوازی‌السطوح عبارت است از $|\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})|$.

۱۰۰۱ ماتریس تبدیل‌را برای چرخش‌حول‌محور z به‌اندازهٔ زاویهٔ ϕ که‌در پی‌آن‌چرخش حول محور y' به‌اندازهٔ زاویهٔ θ صورت می‌گیرد، مطابق مثال ۱۳۰۱، بررسی کنید.

۱۱۰۱ بردار $۲\mathbf{i}+۳\mathbf{j}-\mathbf{k}$ را درمجموعهٔ سه‌تایی $\mathbf{i}'\mathbf{j}'\mathbf{k}'$ بیان کنید؛ درصورتی که‌محورهای $x'y'$ از چرخش xy حول محور z (که منطبق بر محور z' است) به‌اندازهٔ زاویهٔ ۳۰° به‌دست آمده باشند.

۱۲۰۱ اتومبیل‌مسابقه‌ای‌روی دایره‌ای به‌شعاع ثابت b حرکت می‌کند. اگر بزرگی‌سرعت این اتومبیل با زمان t طبق معادلهٔ $v=ct$ تغییر کند (c ثابتی مثبت است) نشان دهید که زاویهٔ میان بردار سرعت و بردار شتاب در زمان $t=\sqrt{b/c}$ برابر ۴۵°است (راهنمایی: دراین زمان بزرگی مؤلفه‌های مماسی و قائم شتاب یکسان‌اند).

۱۳۰۱ گوی‌کوچکی را که به‌یك نوار طویل لاستیکی محکم بسته شده‌است، می‌چرخانند به‌طریقی‌که گوی در مسیری بیضوی به‌معادلهٔ زیر، حرکت می‌کند

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{i}b\cos\omega t+\mathbf{j}\,۲b\sin\omega t$$

b و ω ثابت‌اند. بزرگی سرعت توپ را به‌صورت تابعی از t به‌دست آورید. در حالت خاص، v را در زمانهای $t=۰$ و $t=\pi/۲\omega$ به‌دست آوریدکه به‌ترتیب زمانهایی‌اندکه گوی درکمینه و بیشینهٔ فاصلهٔ خود از مبدأ قرار دارد.

۱۴۰۱ مگسی در مسیری مارپیچ مانند به‌معادلهٔ

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{i}b\sin\omega t+\mathbf{j}b\cos\omega t+\mathbf{k}ct^{۲}$$

حرکت می‌کند. نشان‌دهیدکه بزرگی شتاب حرکت این مگس ثابت است به‌شرطی‌که b، ω، و c ثابت باشند.

* **۱۵.۱** زنبورعسل ازکندوی خود درمسیری مارپیچ خارج می‌شود؛ معادلهٔ مسیر درمختصات قطبی عبارت است از

$$r = be^{kt} \qquad \theta = ct$$

b، k، و c ثابتهایی مثبت‌اند. نشان دهید در حالی‌که سوی حرکت به خارج است، زاویهٔ میان بردار سرعت و بردار شتاب ثابت باقی می‌ماند (راهنمایی: $\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}/va$ را بیابید).

۱۶.۱ مسئلهٔ ۱۴.۱ را با بهره‌گیری از مختصات استوانه‌ای که درآن $R = b$، $\phi = \omega t$، و $z = ct^{۲}$ حل کنید.

* **۱۷.۱** مورچه‌ای بر رویهٔ توپی به‌شعاع b چنان می‌خزدکه حرکت آن‌را درمختصات کروی معادلات زیر بیان می‌کنند

$$r = b \qquad \phi = \omega t \qquad \theta = \frac{\pi}{۲}[۱ + \frac{۱}{۴}\cos(۴\omega t)]$$

بزرگی سرعت این مورچه را به‌صورت تابعی از زمان t به‌دست‌آورید. معادلات بالا چه نوع مسیری را نمایش می‌دهند؟

۱۸.۱ ثابت‌کنیدکه $\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = v\dot{v}$؛ و ازآنجا ثابت‌کنیدکه اگر بزرگی‌سرعت v ثابت باشد، درمورد یك ذرهٔ متحرك $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ برهم عمودند. (راهنمایی: از دو طرف معادلهٔ $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = v^{۲}$ نسبت به t مشتق بگیرید. به‌یاد داشته باشیدکه $\dot{v}$ با $|\mathbf{a}|$ یکی نیست.)

۱۹.۱ ثابت‌کنید

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{a})] = \mathbf{r}\cdot(\mathbf{v}\times\dot{\mathbf{a}})$$

۲۰.۱ نشان‌دهیدکه مؤلفهٔ مماسی شتاب را عبارت زیر بیان می‌کند

$$a_{\tau} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{v}$$

بنابراین، مؤلفهٔ قائم عبارت است از

$$a_n = (a^{۲} - a_{\tau}^{۲})^{۱/۲} = \left[a^{۲} - \frac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})^{۲}}{v^{۲}}\right]^{۱/۲}$$

۲۱.۱ با بهره‌گیری از نتیجهٔ بالا مؤلفه‌های مماسی و قائم شتاب را در مسئله‌های ۱۴.۱ و ۱۵.۱، به‌صورت تابعی از زمان به‌دست‌آورید.

۲۲.۱ ثابت‌کنیدکه $|\mathbf{v}\times\mathbf{a}| = v^{۳}/\rho$، ρ شعاع انحنای مسیر یك ذرهٔ متحرك است.

* **۲۳.۱** چرخی به‌شعاع b با شتاب ثابت $a_{۰}$ بر روی زمین به‌جلو می‌غلتد. نشان‌دهیدکه در

هر لحظهٔ معین، بزرگی شتاب هر نقطه روی چرخ نسبت به‌مرکز چرخ به‌صورت $(a_0^2+v^4/b^2)^{1/2}$ است، و نسبت به زمین نیز عبارت خواهد بود از $a_0[2+2\cos\theta+v^4/a_0^2b^2-(2v^2/a_0b)\sin\theta]^{1/2}$ که v سرعت لحظه‌ای به جلو، و θ وضعیت نقطه‌ای را روی چرخ تعیین می‌کند که از بالاترین نقطه به‌جلو اندازه‌گیری شده‌است. شتاب کدام نقطه نسبت به‌زمین بیشترین مقدار است.