۲

مکانیك نیوتونی. حرکت راستخط ذره

۱.۲ قوانین حرکت نیوتون

همان‌طور که در مقدمهٔ این کتاب گفتیم، دینامیك شاخه‌ای از مکانیك است که با قوانین فیزیکی حاکم برحرکت واقعی اجسام مادی سروکار دارد. یکی‌از نقشهای اساسی‌دینامیك آن است که، از میان تمام راههای ممکن برای حرکت یك سیستم مادی، پیشگویی کند که در یك وضعیت مشخص چه حرکت خاصی انجام خواهد گرفت. ما در اینجا دینامیك را همان گونه که در ابتدا توسط نیوتون فرمولبندی‌شد، برپایهٔ قوانین حرکت مطالعه می کنیم. درفصل بعد، به‌مطالعهٔ سایر شیوه‌های بیان قوانین حرکت در معادلات پیشرفته‌تر لاگرانژو هامیلتون خواهیم پرداخت، به‌هرحال، این روشهای گوناگون نظریه‌های متفاوتی نیستند، زیرا می‌توان همگی را از قوانین نیوتون استخراج و استنتاج کرد.

ناگفته پیداست که خواننده از پیش با قوانین حرکت نیوتون آشناست. این قوانین عبارت‌اند از:

۱. وضعیت سکون یا حرکت یکنواخت هر جسم بر روی خط مستقیم ادامه خواهد یافت، مگرآنکه نیرویی حالت آن‌را تغییر دهد.

۲. تغییر حرکت با نیروی وارده متناسب است و درجهت نیرو رخ می‌دهد.

۳. به‌ازای هر کنش، واکنشی مساوی ومختلف‌الجهت باآن وجود دارد، یا، کنشهای

متقابل دو جسم همواره مساوی و درخلاف جهت یکدیگرند.

اکنون بیایید این قوانین را تا حدی مشروحتر بررسی کنیم.

قانون اول نیوتون. دستگاههای مرجع لخت

قانون اول خاصیتی که همهٔ مواد دارند، یعنی لختی، را توصیف می‌کند. بنابراین قانون، سرعت هر جسم متحرك روی مسیر مستقیم ثابت است، مگر آنکه عاملی به‌نام نیرو آن را از این نوع حرکت باز دارد. حرکت‌کردن یا نکردن جسم بر مسیر مستقیم و با سرعت ثابت، نه‌تنها به‌عوامل خارجی (نیروها) بستگی دارد بلکه به‌دستگاه مرجع خاصی‌که‌برای توصیف حرکت به‌کار می‌رود نیز وابسته است. قانون اول عملا پایهٔ تعریف یك نوع دستگاه مرجع خاص را می‌گذاردکه دستگاه مرجع لخت یا نیوتونی نامیده می‌شود. در چنین دستگاهی است‌که قانون اول نیوتون صادق است. دستگاههای شتابدار یا چرخان لخت نیستند. این دستگاهها را درفصل ۵ مطالعه خواهیم‌کرد.

طبیعتاً سؤالی پیش می‌آید، وآن این است‌که چگونه می‌توان تعیین‌کرد که یك دستگاه مختصات مفروض دستگاهی لخت را تشکیل می‌دهد یا خیر. به‌آسانی نمی‌توان به‌این سؤال پاسخ‌گفت. برای حذف تمام نیروهای وارد برجسم لازم است‌آن را به‌طور کامل‌منزوی‌کنیم. البته‌انجام این‌کار ناممکن‌است، زیرا همواره دست‌کم چندنیروی‌گرانشی برجسم وارد می‌آیند، مگر آنکه جسم به‌فاصلهٔ بی‌نهایت دوری ازکل ماده منتقل شود.

به‌دلایل‌عملی متعدد چنین دقت زیادی لازم نیست، دستگاه مختصاتی‌که به‌زمین‌متصل باشد تقریباً لخت‌است. بنابراین، مثلا، به‌نظر می‌رسدگوی بیلیارد مادامی‌که باگوی‌دیگری یا به دیوارهٔ میز برخورد نکرده است، با سرعت ثابت و بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند. اما، اگر حرکت‌گوی بیلیارد خیلی دقیق اندازه‌گیری می‌شد، آنگاه پی می‌بردیم‌که مسیر حرکت‌آن اندکی خمیده است. این امر ناشی از آنجاست‌که زمین می‌چرخد و از این‌رو دستگاه مختصات متصل به‌زمین، عملا دستگاه مختصات لختی نیست. دستگاه مناسبتری‌که دراین مورد می‌توان به‌کارگرفت، دستگاهی است‌که درآن مرکز زمین، مرکز خورشید، و یك ستارهٔ خیلی دور، نقاط مرجع باشند. اما حتی این‌دستگاه، به‌علت حرکت مداری‌زمین به‌دور خورشید، دستگاه دقیقاً لختی‌نیست. بهترین تقریب بعدی آن است‌که، مثلا، ازمرکز خورشید و دو ستارهٔ خیلی دور به‌عنوان نقاط مرجع بهره‌گیرند. به‌طورکلی دستگاه مختصات لخت اخیر، که به‌مفهوم مکانیك نیوتونی، پذیرفته می‌شود، باید دستگاهی باشد که بر زمینهٔ متوسطی از تمامی مادهٔ عالم پایه‌گذاری شده باشد.

جرم و نیرو. قوانین دوم و سوم نیوتون

همه با این‌واقعیت آشناییم‌که نه‌تنها بلندکردن یك‌سنگ‌بزرگ دشوار است بلکه‌به‌حرکت درآوردن (یا متوقف‌کردن) این جسم، نسبت به، مثلا یك تکه چوب کوچك مشکلتر است.

می‌گوییم لختی سنگ، از لختی چوب بیشتر است. معیار کمّی لختی، جرم نام دارد. فرض کنید دو جسم A و B داریم. اندازهٔ لختی یکی نسبت به‌دیگری را چگونه تعیین می‌کنیم؟ می‌توان آزمایشهای متعددی را برای پاسخ به‌این پرسش طراحی کرد. اگر بتوان دو جسم را چنان ترتیب‌داد که با هم مستقیماً برهم‌کنش داشته باشند، مثلاً از طریق فنری که به‌هم متصل می‌شوند، آنگاه به‌کمك آزمایشهای دقیق معلوم می‌شود که جهت شتاب این دو جسم همواره مختلف‌العلامت‌اند و نسبت ثابتی دارند. (فرض می‌شود که شتابها در یك دستگاه مرجع لخت اندازه‌گیری شده باشند و فقط تأثیر متقابل دو جسم A و B موردنظر باشد). این واقعیت بسیار مهم و اساسی را می‌توانیم به‌یاری معادلهٔ زیر بیان کنیم

$$\frac{d\mathbf{v}_A}{dt}=-\frac{d\mathbf{v}_B}{dt}\mu_{BA} \tag{۱.۲}$$

درحقیقت، ثابت μ_{BA} اندازهٔ لختی B نسبت به A است. از معادلهٔ (۱.۲) نتیجه می‌شود که $\mu_{BA}=1/\mu_{AB}$. بنابراین، می‌توان μ_{BA} را به‌صورت نسبت زیر بیان کرد

$$\mu_{BA}=\frac{m_B}{m_A}$$

و از جسم استانداردی به‌عنوان یکای لختی بهره گرفت. دراین‌حالت نسبت m_B/m_A باید از انتخاب یکا مستقل باشد. این استقلال وجود دارد، هرگاه برای هر جسم سوم C داشته باشیم

$$\frac{\mu_{BC}}{\mu_{AC}}=\mu_{BA}$$

که البته صحت آن آشکار است، کمیت m را جرم می‌نامیم.

به‌بیان دقیقتر، m باید جرم لختی نامیده شود، زیرا تعریف آن برمبنای خواص لختی استوار است. درعمل نسبتهای جرمی معمولاً ازطریق توزین تعیین می‌شوند. وزن یا نیروی گرانشی با آنچه‌که جرم گرانشی جسم نام دارد، متناسب است. به‌هرحال، تمام آزمایشها تاکنون نشان داده‌اند که جرم لختی و جرم گرانشی دقیقاً متناسب‌اند. از این‌رو، برای منظوری‌که ما داریم، نیازی به‌تمیزگذاری میان این دو نوع جرم نیست.

اگر m ثابت باشد، نکته‌ای اساسی را که معادلهٔ (۱.۲) مبین آن است، اکنون می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\frac{d(m_A\mathbf{v}_A)}{dt}=-\frac{d(m_B\mathbf{v}_B)}{dt} \tag{۲.۲}$$

آهنگ زمانی تغییر حاصلضرب جرم و سرعت عبارت‌است‌از «تغییر حرکت» درقانون دوم نیوتون، و بنابرآن قانون، با نیرو متناسب است. به‌بیان دیگر، می‌توانیم قانون دوم را

به‌صورت زیر بنویسیم

$$\mathbf{F} = k\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \qquad (۳.۲)$$

که $\mathbf{F}$ نیرو و k ثابت تناسب است. معمولا k را یك می‌گیرند. ومی‌نویسند[۱]

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \qquad (۴.۲)$$

هرگاه جرم ثابت باشد، معادلهٔ بالا عبارت خواهد بود از

$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \qquad (۵.۲)$$

(بنابر نظریهٔ نسبیت، جرم جسم‌متحرك ثابت نیست بلکه‌تابعی از بزرگی سرعت آن‌است، از این‌رو معادلات (۴.۲) و (۵.۲) دقیقاً با هم معادل‌نیستند. با وجود این درمورد سرعتهایی که درمقایسه با سرعت نور $3 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s}$، ناچیزند، تغییر جرم چشم‌پوشیدنی است.)

بنابه‌معادلهٔ (۴.۲)، اکنون می‌توانیم نکتهٔ اساسی را که معادلهٔ (۲.۲) بیانگر آن است، این‌طور تعبیر کنیم که وقتی دو جسم مستقیماً با یکدیگر برهم‌کنش داشته باشند، نیروهای مساوی و مختلف‌الجهت بر یکدیگر وارد می‌کنند

$$\mathbf{F}_A = -\mathbf{F}_B$$

بیان قانون سوم در بطن این رابطه جای دارد. نیروها را کنش و واکنش می‌نامند.

در وضعیتهایی قانون سوم صادق نیست. اگر دو جسم که به‌فاصلهٔ زیادی دور از هم نگاداشته شده‌اند و از طریق یك میدان‌نیروکه با سرعت متناهی منتشر می‌شود با یکدیگر برهم‌کنش دارند، مانند برهم‌کنش میان بارهای الکتریکی متحرك، دراین‌صورت نیروهای کنش و واکنش همواره مساوی ومختلف‌الجهت نیستند.[۲]

یکی از مزیتهای مفهوم نیروآن است‌که ما را قادر می‌سازد تا توجه خود را تنها بر یك تك‌جسم معطوف داریم. اهمیت فیزیکی ایدهٔ نیروآن‌است که، در وضعیتی مشخص،

---

۱. در دستگاه SI یکای‌نیرو، نیوتون نامیده می‌شود. بنابراین‌نیروی یك‌نیوتونی به‌شیئی به‌جرم یك کیلوگرم‌شتاب یك‌متر برمجذور ثانیه‌می‌دهد. یکای cgs نیرو(۱ گرم × ۱ سانتیمتر)/(ثانیه)[۲] را دین می‌نامند. در مهندسی، یکای متداول نیرو عبارت است از پوند نیروکه‌شتاب یك فوت برمجذور ثانیه را به‌یك شیء به‌جرم یك‌اِسلاگ می‌دهد. (۳۲ پوند جرم= یك اِسلاگ).

۲. اما، درچنین مواردی می‌توان میدان نیرو را «جسم» سومی با کنش و واکنش با خودش به‌شمار آورد. به‌این‌ترتیب، لازم نیست قانون سوم کنار گذاشته شود. بخش ۱.۷ و مرجع ذکر شده درآنجا را ببینید.

معمولا می‌توان به‌تابع نسبتاً ساده‌ای از مختصات، به‌نام تابع نیرو، دست یافت که وقتی این تابع‌را مساوی حاصلضرب جرم و شتاب‌قراردهیم دقیقاً حرکت جسم را توصیف کند.

تکانهٔ خطی

حاصلضرب جرم و سرعت را تکانهٔ خطی می‌گویند و آن را با نماد $\mathbf{p}$ نشان می‌دهند. بنابراین

$$\mathbf{p}=m\mathbf{v} \tag{۶.۲}$$

از این‌رو بیان ریاضی قانون دوم نیوتون را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\mathbf{F}=\frac{d\mathbf{p}}{dt} \tag{۷.۲}$$

به‌بیان دیگر، وقتی یك نیرویی بر جسمی وارد می‌آید این نیرو برابر است با آهنگ تغییر زمانی تکانهٔ خطی آن جسم.

قانون سوم، قانون کنش و واکنش، را می‌توان به‌راحتی برحسب تکانهٔ خطی بیان کرد. بدینسان در مورد دو جسم A و B با برهم‌کنش متقابل داریم

$$\frac{d\mathbf{p}_A}{dt}=-\frac{d\mathbf{p}_B}{dt}$$

یا

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_A+\mathbf{p}_B)=0$$

بنابراین

$$\mathbf{p}_A+\mathbf{p}_B=\text{const.}$$

از این‌رو قانون سوم ناظر براین معنی است‌که تکانهٔ کل دو جسمی‌که برهم‌کنش دارند، همواره ثابت باقی می‌ماند.

ثابت بودن ترکیب‌تکانهٔ خطی (تکانهٔ کل) دوجسمی که متقابلا برهم کنش دارند، حالت خاصی از قاعدهٔ کلیتری است‌که بعداً به‌طور مشروح در بارهٔ‌آن‌بحث می کنیم، یعنی تکانهٔ خطی کل هر سیستم منزوی در طی زمان ثابت باقی می‌ماند. این بیان اساسی را قانون بقای تکانهٔ خطی می گویند و یکی از اساسیترین قوانین فیزیك به‌شمار می آید. حتی در مواردی هم که مکانیك نیوتونی صدق نمی کند، بقای تکانهٔ خطی معتبر فرض می‌شود.

حرکت ذره

به‌کمك بیان تحلیلی قانون نیوتونی، به‌معادلهٔ اساسی حرکت ذره، معادلهٔ (۴.۲)، دست پیدا می‌کنیم. وقتی ذره‌ای تحت‌تأثیر بیش از یك نیرو قرار گیرد، با توجه به‌واقعیتهای تجربی می‌توان پذیرفت که این‌نیروها به‌شیوهٔ برداری با هم‌جمع می‌شوند، یعنی، درمورد جرم ثابت

$$ {}^{*}\mathbf{F}_{net}=\Sigma\mathbf{F}_i=m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=m\mathbf{a} \qquad (۸.۲)$$

اگر شتاب ذره، $\mathbf{a}$، معلوم باشد، از معادلهٔ حرکت [معادلهٔ (۸.۲)] نیروی وارد بر ذره به‌دست می‌آید. به‌هرحال، مسائل متداول دینامیك ذره، مسائلی‌اندکه در آنها نیروها توابع معلوم معینی از مختصات، از جمله زمان، باشند و کاری که باید انجام شود عبارت است از یافتن مکان به‌صورت تابعی از زمان. این عمل مستلزم حل یك‌دسته معادلات دیفرانسیل است. در برخی مسائل‌دستیابی به‌جوابهای معادلات دیفرانسیل‌حرکت‌به‌صورت توابع تحلیلی شناخته شده ناممکن است، در این‌موارد باید از روشی تقریبی بهره‌گرفت. دربسیاری ازمواردعملی، نظیر پرتابه‌ها، حرکت ماهواره، ومانندآنها، معادلات‌دیفرانسیل چندان پیچیده‌اندکه باید به‌انتگرال‌گیری عددی توسل جست، و این کار اغلب به‌کمك کامپیوترهای خیلی سریع انجام می‌گیرد، تا بتوان حرکت را پیشگویی کرد.

۲.۲ حرکت راستخط. شتاب یکنواخت تحت‌اثر نیروی ثابت

وقتی ذرهٔ متحرکی بر یك تك خط راست باقی می‌ماند، به‌این حرکت راستخط می‌گویند. دراین‌حالت، بدون‌آنکه به‌کلیت موضوع لطمه‌ای واردآید، می‌توانیم محور x را خط حرکت انتخاب کنیم. دراین‌صورت معادلهٔ کلی حرکت عبارت است از

$$F_x(x,\dot{x},t)=m\ddot{x}$$

(توجه کنید: از این به‌بعد دراین فصل معمولا تنها متغیر x را برای نمایش مکان‌ذره به‌کار خواهیم برد. برای اجتناب از کاربرد اضافی و غیرضروری شاخصهای پایین غالباً نمادهای v و a را، به‌ترتیب، به‌جای $\dot{x}$ و v_x، $\ddot{x}$، و a_x، و F را به‌جای F_x به‌کار می‌بریم).

ساده‌ترین وضعیت آن است که نیرو ثابت باشد. دراین‌حالت شتاب ثابت است

$$\ddot{x}=\frac{dv}{dt}=\frac{F}{m}=\text{const.}=a \qquad (۹.۲)$$

و جواب به‌آسانی و به‌کمك انتگرال‌گیری مستقیم نسبت به‌زمان به‌دست می‌آید

$$\dot{x}=v=at+v_0 \qquad (۹.۲\ \text{الف})$$

---

* منظور از F_{net}، نیروی برایند است.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_\circ t+x_\circ \qquad (\text{۹.۲ ب})$$

که $v_\circ$ سرعت اولیه و $x_\circ$ مکان اولیه است (یعنی، مکان در $t=\circ$). با حذف زمان t بین معادلات (۹.۲ الف) و (۹.۲ ب) خواهیم داشت

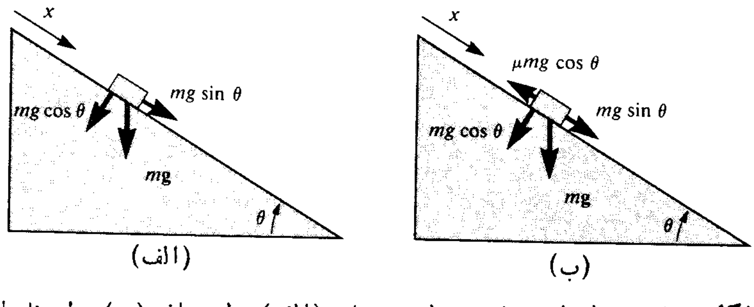
$$2a(x-x_\circ)=v^2-v_\circ^2 \qquad (\text{۹.۲ ج})$$

خواننده معادلات آشنای بالا را که به‌حرکت با شتاب یکنواخت ربط دارند به‌خاطر خواهد آورد. این معادلات چندکاربرد اساسی دارند. مثلا، درمورد جسمی که در نزدیکی سطح زمین آزادانه سقوط می کند، صرفنظر ازمقاومت هوا، شتاب آن با تقریب خوبی ثابت می‌ماند. این شتاب سقوط آزاد جسم را به $\mathbf{g}$ نشان می‌دهیم (به‌کمك اندازه‌گیری $g=9.8\,\mathrm{m/s^2}=32\,\mathrm{ft/s^2}$ به‌دست‌می آید). به‌همین‌ترتیب، نیروی پایین‌سوی گرانشی (وزن) برابر $m\mathbf{g}$ است. نیروی گرانشی، همواره مستقل از حرکت جسم حضور دارد و از هر نیروی دیگری نیز که ممکن است برجسم واردآید، مستقل است.[1] از این‌پس آن‌را $m\mathbf{g}$ خواهیم نامید.

مثال

۱.۲ ذره‌ای را که، مطابق شکل ۱.۲(الف)، روی سطح شیبدار صافی به زاویهٔ شیب θ نسبت به‌سطح‌افق، به‌پایین آن می لغزد، درنظر بگیرید. جهت‌مثبت محور x را، مطابق‌شکل، به‌سوی پایین سطح می گیریم. مؤلفهٔ نیروی گرانشی درجهت x برابراست با $mg\sin\theta$. این مؤلفه ثابت است، از این‌رو حرکت به‌کمك معادلات (۹.۲ الف)، (۹.۲ ب)، و (۹.۲ ج) بیان می‌شود، که در آنها

$$\ddot{x}=\frac{F_x}{m}=g\sin\theta$$



شکل ۱.۲ جسم لغزان به‌پایین سطح شیبدار. (الف) سطح صاف (ب) سطح ناصاف.

---

۱. آثار چرخش زمین را در فصل ۵ مطالعه خواهیم کرد.

فرض کنید که به‌جای سطح صاف، سطح ناصاف وجود داشته باشد، یعنی، نیروی اصطکاك $\mathbf{f}$ بر ذره واردآید. در این‌صورت نیروی خالص درجهت x، مطابق شکـل ۱.۲(ب) برابر است با $mg\sin\theta - f$. اینك، برای تماس‌لغزشی معلوم می‌شودکه بزرگی نیروی‌اصطکاك با بزرگی نیروی عمود بر سطح N متناسب است، یعنی

$$f = \mu N$$

که μ به‌نام ضریب اصطکاك لغزشی یاجنبشی[1]،ثابت تناسب است. درمثال موردبحث‌نیروی عمود برسطح، مطابق شکل برابر، $mg\cos\theta$ است. از این‌رو

$$f = \mu mg\cos\theta$$

درنتیجه، نیروی خالص درجهت x چنین خواهد شد

$$mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta$$

باز این نیرو ثابت و معادلات (۹.۲ الف)، (۹.۲ ب)، و (۹.۲ ج) عمل می‌کنند، داریم

$$\ddot{x} = \frac{F_x}{m} = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)$$

وقتی رابطهٔ داخل پرانتز مثبت باشد، یعنی اگر $\theta > \tan^{-1}\mu$، بزرگی‌سرعت ذره‌افزایش می‌یابد. زاویهٔ $\tan^{-1}\mu$ معمولا به ε نشان‌داده می‌شود و زاویهٔ اصطکاك جنبشی نام دارد. اگر $\theta = \varepsilon$، آنگاه $a = 0$ و ذره با بزرگی سرعت ثابت به پـایین سطح شیبدار می‌لغزد. اگر $\theta < \varepsilon$، آنگاه a منفی است، و ذره سرانجام به‌حال سکون درمی‌آید. باید توجه کرد که درمورد حرکت به بالا بر روی سطح شیبدار، جهت نیروی اصطکاك برعکس می‌شود، یعنی‌حرکت درجهت مثبت محور x صورت می‌گیرد. بنابراین شتاب (در واقع‌شتاب‌منفی) برابر است با $\ddot{x} = g(\sin\theta + \mu\cos\theta)$.

۳.۲ نیروهای وابسته به‌مکان. مفاهیم‌انرژی جنبشی وانرژی پتانسیل

دراغلب‌موارد نیروی واردبرذره‌به‌مکان آن نسبت به‌سایر اجسام بستگی‌دارد. مثلا، نیروهای گرانشی و الکتروستاتیك مواردی از این‌قبیل‌اند. این موضوع درمورد نیروهـای‌کشسان کششی و نیروهای تراکمی نیز صدق می‌کند. اگر نیرو مستقل از سرعت یا زمـان باشد، معادلهٔ دیفرانسیل حرکت راستخط به‌صورت ساده زیر است

---

۱. ضریب اصطکاك دیگری هم به‌نام ضریب اصطکاك درحال سکون، μ_s، وجود دارد. که وقتی در نیروی عمود بـر سطح ضرب شود، نیروی اصطکاك بیشینه تحت تماس استاتیك را می‌دهد. یعنی، نیروی لازم برای‌اینکه شیئی به‌زحمت در حالت شروع حرکت قرارگیرد، در صورتی که ابتدا درحال سکون باشد. به‌طور کلی، $\mu_s > \mu$

$$F(x)=m\ddot{x} \tag{۱۰.۲}$$

معمولا حل این نوع معادلهٔ دیفرانسیل با یکی از چند روش موجود امکان‌پذیر است. یکی از روشهای مفید و قابل‌توجه حل این معادله آن است که از قاعدهٔ زنجیری (مشتق قاعدهٔ مضاعف) بهره گیریم و شتاب را به‌طریق زیر بنویسیم

$$\ddot{x}=\frac{d\dot{x}}{dt}=\frac{dx}{dt}\,\frac{d\dot{x}}{dx}=v\frac{dv}{dx}$$

بنابراین می‌توان معادلهٔ حرکت را چنین نوشت

$$F(x)=mv\,\frac{dv}{dx}=\frac{m}{۲}\,\frac{d(v^{۲})}{dx}=\frac{dT}{dx} \tag{۱۱.۲}$$

کمیت $T=\frac{۱}{۲}mv^{۲}$ انرژی جنبشی ذره نام دارد. حال می‌توانیم معادلهٔ بالا را به‌صورت انتگرالی بیان کنیم

$$\int_{x_{\circ}}^{x}F(x)dx=T-T_{\circ} \tag{۱۱.۲ الف}$$

انتگرال $\int F(x)dx$ در اینجا کاری است که نیروی $F(x)$ وارد بر ذره روی ذره انجام می‌دهد. بنابراین، کار عبارت است از تغییر انرژی جنبشی ذره. تابع $V(x)$ را چنان تعریف می‌کنیم که

$$-\frac{dV}{dx}=F(x) \tag{۱۲.۲}$$

تابع $V(x)$ را انرژی پتانسیل می‌گویند؛ این تابع فقط با افزودن یك ثابت دلخواه تعریف می‌شود. انتگرال کار برحسب $V(x)$ عبارت است از

$$\int_{x_{\circ}}^{x}F(x)dx=-\int_{x_{\circ}}^{x}dV=-V(x)+V(x_{\circ})=T-T_{\circ} \tag{۱۳.۲}$$

توجه کنید که اگر $V(x)$ با افزودن هر ثابت C تغییر کند، معادلهٔ بالا بدون تغییر باقی می‌ماند، زیرا

$$-[V(x)+C]+[V(x_{\circ})+C]=-V(x)+V(x_{\circ})$$

حال جملات را جابه‌جا می‌کنیم و معادلهٔ (۱۳.۲) را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$T+V(x)=T_{\circ}+V(x_{\circ})=\text{const.}=E \tag{۱۴.۲}$$

یا معادل آن

$$\frac{1}{2}mv^2+V(x)=E \qquad \text{(۱۴.۲ الف)}$$

این عبارت را معادلهٔ انرژی می گویند. ثابت E را انرژی کل می‌نامند. انرژی کل برابر است با مجموع انرژیهای جنبشی و پتانسیل. به‌بیانی دیگر: درحرکت یك بعدی، اگر نیروی وارده فقط تابعی از مکان باشد، مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل در تمام طول حرکت ثابت باقی می‌ماند. دراین‌حالت نیرو را پایستار گویند.[1] نیروهای ناپایستار، یعنی نیروهایی‌که تابع پتانسیل برای آنها وجود ندارد، مانند اصطکاك، معمولا دارای سرشت اتلافی‌اند.

حرکت ذره را می‌توان ازطریق حل معادلهٔ انرژی [معادلهٔ (۱۴.۲ الف)] برحسب v به‌دست‌آورد

$$v=\frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}[E-V(x)]} \qquad \text{(۱۵.۲)}$$

که می‌توان‌آن را به‌صورت انتگرالی نوشت

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}[E-V(x)]}}=t-t_0 \qquad \text{(۱۵.۲ الف)}$$

این معادله t را به‌صورت تابعی از x به‌دست می‌دهد.

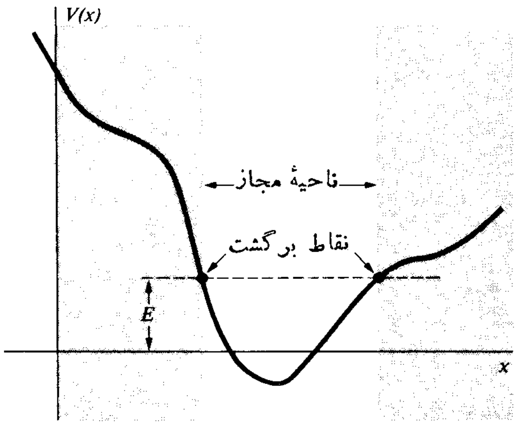
با ملاحظهٔ معادلهٔ (۱۵.۲) می‌بینیم‌که رابطهٔ v فقط به‌ازای مقادیری از x که $V(x)$ را کمتر یا مساوی با انرژی‌کل E کند، حقیقی است. به‌تعبیر فیزیکی، ذره در ناحیه، یا ناحیه‌هایی، محبوس می‌شودکه درمورد آنها شرط $V(x)\leqslant E$ برقرار باشد. به‌علاوه، به‌ازای $V(x)=E$، v صفر می‌شود؛ یعنی، ذره باید متوقف شود و جهت حرکت خود را در نقاطی‌که این تساوی برقرار می‌شود تغییردهد. این‌نقاط را نقاط برگشت حرکت نامند. نکات فوق درشکل ۲.۲ نشان‌داده شده‌اند.

مثالها

۲.۲ سقوط آزاد. حرکت آزادانهٔ جسمی درحال سقوط (که در بالا درخصوص آن تحت عنوان شتاب ثابت بحث‌کردیم) مثالی از حرکت پایستار است. اگر جهت بالاسوی x را مثبت بگیریم، نیروی گرانشی $-mg$ است. بنابراین، $-dV/dx=-mg$ و $V=mgx+C$. ثابت انتگرال گیری، C، مقداری اختیاری است و فقط به‌انتخاب تراز مرجع برای اندازه‌گیری V بستگی دارد. می‌توانیم $C=0$ بگیریم، یعنی هرگاه $x=0$،

---

۱. بحث کاملتری در باب نیروهای پایستار را در فصل ۴ خواهید یافت.



شکل ۲.۲ نمودار تابع انرژی پتانسیل یك بعدی $V(x)$ که ناحیهٔ مجاز حرکت و نقاط برگشت (نقاط عطف) را به‌ازای مقدار معینی از انرژی کل E نشان می‌دهد.

آنگاه $V=0$. دراین‌صورت معادلهٔ انرژی عبارت است از

$$\frac{1}{2}mv^2+mgx=E$$

ثابت انرژی E را شرایط اولیه تعیین می‌کنند. مثلا، فرض می‌کنیم جسم با سرعت اولیهٔ v_0 از مبدأ $x=0$ به بالا پرتاب شود. از این مقادیر می‌رسیم به: $E=mv_0^2/2=mv^2/2+mgx$ از این‌رو

$$v^2=v_0^2-2gx$$

نقطهٔ برگشت (یا عطف) حرکت، که در این‌حالت در حداکثر ارتفاع واقع است، با قراردادن $v=0$ به‌دست می‌آید. از اینجا داریم $0=v_0^2-2gx_{max}$، یا

$$h=x_{max}=\frac{v_0^2}{2g}$$

۳.۲ تغییرگرانی با ارتفاع. درمثال پیش فرض کردیم که g ثابت است. در واقع، نیروی گرانی بین دو ذره با عکس مربع فاصلهٔ بین آنها متناسب است (قانون گرانی نیوتون).[1] بنابراین نیروی گرانشی که‌زمین به‌جسمی به‌جرم m وارد می‌آورد، بارابطهٔ زیر بیان‌می‌شود

$$F_r=-\frac{GMm}{r^2}$$

که در آن G ثابت گرانی نیوتون، M جرم زمین، و r فاصلهٔ آن‌جسم تا مرکز زمین است.

---

۱. قانون گرانی نیوتون را به‌تفصیل در فصل ۶ مطالعه خواهیم کرد.

بنا بر تعریف، وقتی جسم درسطح زمین واقع باشد، این نیرو برابر است باکمیت mg —، از این‌رو $mg = GMm/r_e^2$. بنا براین، $g = GM/r_e^2$ شتاب گرانی در سطح زمین است. دراینجا r_e شعاع زمین است (زمین کروی فرض می‌شود). اگر x فاصلهٔ جسمی واقع در بالای زمین تا سطح آن باشد، داریم $r = r_e + x$. دراین‌صورت، صرفنظر از هر نیروی دیگری مانند مقاومت هوا، برای معادلهٔ دیفرانسیل حرکت جسمی با سقوط (یا صعود) قائم، وقتی تغییر گرانی را منظور داریم، می‌توانیم بنویسیم

$$F(x) = -mg\frac{r_e^2}{(r_e+x)^2} = m\ddot{x}$$

برای انجام عمل انتگرال‌گیری، قرار می‌دهیم: $\ddot{x} = v dv/dx$. از این‌رو

$$-mgr_e^2\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{(r_e+x)^2} = \int_{v_0}^{v} mvdv$$

$$mgr_e^2\left(\frac{1}{r_e+x} - \frac{1}{r_e+x_0}\right) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

درواقع، این‌عبارت درست همان‌معادلهٔ انرژی به‌شکل‌معادلهٔ (۱۳.۲) است. دراینجا به‌جای اینکه انرژی‌پتانسیل برابر mgx باشد، عبارت‌است از $V(x) = -mg[r_e^2/(r_e+x)]$.

ارتفاع بیشینه، سرعت گریز. فرض کنید جسمی با سرعت اولیهٔ v_0 در سطح زمین، $x_0 = 0$، به‌بالا پرتاب شود. دراین‌صورت، بعد ازحل معادلهٔ انرژی برحسب v^2، خواهیم داشت

$$v^2 = v_0^2 - 2gx\left(1 + \frac{x}{r_e}\right)^{-1}$$

اگر x در مقایسه با r_e ناچیز باشد، به‌طوری‌که بتوان از جملهٔ x/r_e چشم پوشید؛ رابطهٔ بالا به‌نتیجهٔ مثال قبلی در مورد میدان گرانشی یکنواخت تبدیل می‌شود. نقطهٔ برگشت (بیشینهٔ ارتفاع) باقراردادن $v = 0$ و حل‌معادلهٔ بالا برحسب x، به‌دست می‌آید. درنتیجه داریم

$$x_{max} = h = \frac{v_0^2}{2g}\left(1 - \frac{v_0^2}{2gr_e}\right)^{-1} \qquad (16.2)$$

دراینجا نیز اگر بتوان ازجملهٔ دوم داخل پرانتز چشم‌پوشید، یعنی اگر v_0^2 خیلی از $2gr_e$ کوچکتر باشد، فرمول مثال قبل را به‌دست می‌آوریم.

سرانجام‌فرمول کامل (۱۶.۲) را برای‌یافتن v_0 با مقدار نامتناهی h به‌کار می‌بریم. سرعت را دراین‌حالت سرعت گریز نامند، و با مساوی قراردادن کمیت داخل پرانتز با صفر، آن را صریحاً به‌دست می‌آوریم. نتیجهٔ زیر به‌دست خواهدآمد

$$v_e=(۲gr_e)^{۱/۲}$$

که به‌ازای $g=۹٫۸\ \mathrm{m/s^۲}$ و $r_e=۶٫۴\times۱۰^۶\mathrm{m}$ مقدار عددی سرعت گریز از سطح زمین عبارت خواهد بود از

$$v_e\simeq ۱۱\ \mathrm{km/s}\simeq ۷\ \mathrm{mile/s}$$

در جو زمین، میانگین سرعت[1] مولکولهای هوا ($O_۲$ و $N_۲$) درحدود $۰٫۵\mathrm{km/s}$ است. که نسبت به‌سرعت گریز خیلی‌کم است. از این‌رو، جو در اطـراف زمین می‌ماند. از سوی دیگر، ماه جوی‌ندارد، زیرا سرعت گریز ازسطح ماه، به‌علت‌کمی جرم آن، نسبت به‌سرعت گریز ازسطح‌زمین، به‌میزان‌قابل‌ملاحظه‌ای کمتر است؛ لذا هر اکسیژن یا نیتروژنی (در اطراف مـاه)، سرانجام ناپدید می‌شود. حـال، حتی اگرچه هیدروژن روی هم‌رفته فراوانترین عنصر درعالم است، جو زمین مقدار قابل‌ملاحظه‌ای هیدروژن را درخود نگه نمی‌دارد. هیدروژن جـو باید مدتها قبل از زمین گـریخته باشد، زیرا سرعت مولکـولی هیدروژن (ناشی از جرم اندك مولکول هیدروژن) چندان‌زیاد است‌که در هرلحظه‌سرعت تعداد قابل ملاحظه‌ای از مولکولهای هیدروژن بیشتر از سرعت‌گریز است.

۴.۲ نیرو به‌عنوان تابعی از زمان. مفهوم تکان (ضربه)

اگر نیروی وارد بر ذره را صریحاً تابعی از زمان بدانیم، معادلهٔ حـرکت به‌ازای جـرم ثابت، عبارت است از

$$F(t)=m\frac{dv}{dt}$$

می‌توان از طرفین این تساوی مستقیماً انتگرال گرفت

$$\int_{۰}^{t}F(t)dt=mv(t)-mv_{۰} \qquad (۱۷.۲)$$

انتگرال $\int F(t)dt$ را تکان می گویند.[2] این‌کمیت برابر است با تغییر تکانه‌ای‌که جسمی براثر واردآمدن نیروی $F(t)$ در بازهٔ زمانی معینی پیداکرده باشد. (دراینجا مقدار اولیهٔ t را به‌دلخواه صفر گرفته‌ایم.)

مکان ذره به‌صورت تابعی از زمان را می‌توان با انتگرال‌گیری دوم به‌دست آورد. ابتدا معادلهٔ (۱۷.۲) را به‌صورت زیر باز نویسی می کنیم

---

۱. بنابر نظریهٔ جنبشی، میانگین سرعت یك مولکول گـاز برابر$(۳kT/m)^{۱/۲}$ است، که k ثابت بولتزمن برابر $۱٫۳۸\times۱۰^{-۱۶}\mathrm{erg/deg}$، T دمای مطلق، و m جرم مولکول است.

۲. کاربرد مفهوم تکان در فصل ۷ خواهدآمد.

$$\frac{dx}{dt}=v(t)=v_0+\int_0^t \frac{F(t)}{m}dt \qquad (۱۸.۲)$$

که بعد می‌دهد

$$x-x_0=\int_0^t v(t)dt=v_0t+\int_0^t\left[\int_0^t \frac{F(t')}{m}dt'\right]dt \qquad (۱۹.۲)$$

باید توجه کرد که فقط درمورد نیرویی که به صورت تابعی از t داده شده باشد، جواب معادلۀ حرکت را می‌توان به‌صورت یك انتگرال دوگانۀ ساده بیان کرد. درتمام موارد دیگر، برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم باید از روشهای دیگری بهره برد تا مکان x به‌صورت تابعی از t به‌دست آید.

مثالها

۴.۲ نیروی ثابت. روشن است که، حالتی که در بخش ۲.۲ درخصوص نیروی ثابت‌مورد بحث قرارداديم، حالت خاصی از نیروی وابسته به‌زمان‌است. بنابراین معادلات (۱۸.۲) و (۱۹.۲) به‌صورت زیر درمی‌آیند

$$v(t)=v_0+\frac{F}{m}\int_0^t dt=v_0+\frac{Ft}{m}$$

$$x(t)=x_0+v_0t+\int_0^t \frac{Ft}{m}dt=x_0+v_0t+\frac{Ft^2}{2m}$$

که با حالت شتاب یکنواخت (با $a=F/m$) معادل‌اند [معادلۀ (۹.۲ الف) و (۹.۲ب) را ببینید.]

۵.۲ نیروی پله‌ای. فرض کنید نیروی ثابت F_1 برجسمی به‌جرم m وارد آید، این نیرو در بازۀ زمانی معین t_1 عمل می‌کند و بعد ناگهان به‌مقدار (ثابت) دیگری، F_2، تغییر می‌کند. نتیجۀ مثال قبل را تکه تکه به‌کار می‌بریم: به‌ازای $0 \leqslant t \leqslant t_1$ داریم: $v=v_0+F_1t/m$ و $x=x_0+v_0t+(F_1t^2/2m)$. این عبارتها مقادیر اولیۀ v و x را در $t=t_1$ برای بازۀ زمانی دوم به‌دست می‌دهند، که در آن به‌جای t مقدار $t-t_1$ را قرار می‌دهیم. بنابراین، به‌ازای $t>t_1$

$$v(t)=v_0+\frac{F_1t_1}{m}+\frac{F_2}{m}(t-t_1)$$

$$x(t)=x_0+v_0t_1+\frac{F_1t_1^2}{2m}+\left(v_0+\frac{F_1t_1}{m}\right)(t-t_1)+\frac{F_2}{2m}(t-t_1)^2$$

این روش می‌تواند به‌ازای هر تعداد پله در تابع نیرو تکرار شود.

۶۰۲ نیرویی که به‌طور یکنواخت افزایش می‌یابد. فرض کنید جسمی به‌جرم m ابتدا درحال سکون است و در زمان $t=\circ$ نیروی یکنواخت افزاینده‌ای بر آن واردآید: $F(t)=ct$. این نیرو می‌تواند نیروی مؤثری باشد که هرگاه راننده به‌طور فزاینده‌ای گاز را فشار می‌دهد، اتومبیل را به‌جلو می‌راند. معادلهٔ دیفرانسیل حرکت عبارت است از

$$m\frac{dv}{dt}=ct$$

آنگاه

$$v=\int_{\circ}^{t}\frac{ct}{m}dt=\frac{ct^{۲}}{۲m}$$

و

$$x=\int_{\circ}^{t}\frac{ct^{۲}}{۲m}dt=\frac{ct^{۳}}{۶m}$$

که مکان اولیه درمبدأ ($x=\circ$) واقع است. بنابراین، v با توان دوم زمان افزایش می‌یابد، و جابه‌جایی x با توان‌سوم t افزوده می‌شود. توجه کنید که دراین‌حالت مشتق‌سوم x نسبت به زمان ثابت است: $d^{۳}x/dt^{۳}=c/m$. آهنگ زمانی تغییر شتاب، که مشتق زمانی سوم جابه‌جایی به‌شمار می‌آید، آهنگ تغییر شتاب نامیده شده است.

۵.۲ نیروهای وابسته به‌سرعت. مقاومت شاره وسرعت‌نهایی

اغلب اوقات پیش می‌آید که نیروی وارد بر جسم تابع سرعت آن است. این حالت، مثلاً، درمورد جسمی که در داخل‌شاره‌ای حرکت می‌کند ومقاومت چسبنده‌ای بر آن واردمی‌آید، صادق است. اگر بتوان نیرو را فقط به‌صورت تابعی از v بیان کرد، معادلهٔ دیفرانسیل حرکت را می‌شود به‌یکی از دو صورت زیر نوشت

$$F_{\circ}+F(v)=m\frac{dv}{dt} \qquad (۲۰.۲)$$

$$F_{\circ}+F(v)=mv\frac{dv}{dx} \qquad (۲۱.۲)$$

دراینجا $F_{\circ}$ نیروی ثابتی است که به v بستگی ندارد. بعد از جدا سازی متغیرها، با انتگرال گیری، t یا x را به‌صورت توابعی ازسرعت به‌دست‌می‌آوریم. آنگاه، انتگرال گیری دوم می‌تواند رابطه‌ای تابعی بین x و t فراهم آورد.

درمورد مقاومت عادی شاره، از جمله مقاومت هوا، $F(v)$ تابع ساده‌ای نیست و به‌طور کلی می‌توان آن را از طریق اندازه‌گیریهای تجربی به‌دست‌آورد. به‌هرحال، در موارد متعدد، به‌کمك معادلهٔ زیر به‌تقریب خوبی می‌رسیم

$$F(v) = -c_۱ v - c_۲ v|v| = -v(c_۱ + c_۲|v|) \qquad (۲۲.۲)$$

که در آن $c_۱$ و $c_۲$ ثابتهایی‌اند که مقادیرشان به ابعاد و شکل جسم بستگی دارد. (علامت قدرمطلق روی جملهٔ آخر ضروری است زیرا نیروی مقاومت شاره همواره درخلاف‌جهت v عمل‌می‌کند.) اگرشکل بالا برای $F(v)$ به‌کار برده شود تا ازطریق حل معادلات(۲۰.۲) یا (۲۱.۲) معادلهٔ حرکت به‌دست‌آید، انتگرالهای حاصل قدری پیچیده می‌شوند. ولی درحالتهای حدی مقدارکم v یا مقدار زیاد v، به‌ترتیب جملهٔ خطی یا جملهٔ درجه دوم در $F(v)$ غالب است و معادلات دیفرانسیل اندکی ساده‌تر می‌شوند.

برای اجسام کروی که در هوا حرکت می‌کنند، مقادیر تقریبی به‌ازای ثابتها در معادلهٔ $F(v)$، برحسب یکاهای SI عبارت‌اند از

$$c_۱ = ۱٫۵۵ \times ۱۰^{-۴} D$$

$$c_۲ = ۰٫۲۲\, D^۲$$

که D قطر کره به‌متر است. بنابراین نسبت جملهٔ درجه‌دوم، $c_۲ v|v|$، به‌جملهٔ خطی، $c_۱ v$، عبارت است از $\dfrac{۰٫۲۲\, v|v| D^۲}{۱٫۵۵ \times ۱۰^{-۴} v D} = ۱٫۴ \times ۱۰^۳ |v| D$. یعنی، مثلا در مورد اجسامی با اندازهٔ توپ بیسبال ($D \sim ۰٫۰۷$ m)، جملهٔ درجه دوم در سرعتهای بیشتر از ۰٫۰۱ m/s(۱ cm/s)، غالب است، و جملهٔ خطی در سرعتهای کمتر از این مقدار غلبه خواهد داشت. به‌ازای سرعتهایی در حدود این دو مقدار هر دو جمله را باید به‌حساب آورد (مسئلهٔ ۱۳.۲ را ببینید).

مثالها

۷.۲ حرکت افقی با مقاومت خطی. فرض‌کنید قطعه جسمی با سرعت اولیهٔ $v_۰$ روی یك سطح صاف افقی پرتاب شده است؛ مقاومت هوا چنان است که جملهٔ خطی غالب باشد. بنابراین،درجهت‌حرکت، درمعادلات(۲۰.۲) و(۲۱.۲)داریم: $F_۰ = ۰$ و $F(v) = -c_۱ v$. از این‌رو، معادلهٔ دیفرانسیل حرکت عبارت است از

$$-c_۱ v = m \frac{dv}{dt}$$

که نتیجهٔ انتگرال‌گیری چنین است

$$t=\int_{v_\circ}^{v} -\frac{m\,dv}{c_\backslash v}=-\frac{m}{c_\backslash}\ln\left(\frac{v}{v_\circ}\right)$$

می‌توانیم با ضرب کردن طرفین رابطهٔ بالا در $-c_\backslash/m$، ونوشتن طرفین به‌صورت نمایی، آن را به‌آسانی حل کنیم و v را به‌صورت تابعی از t به‌دست آوریم. خواهیم داشت

$$v=v_\circ e^{-c_\backslash t/m}$$

بنابراین، سرعت به‌طور نمایی با زمان کاهش می‌یابد. از انتگرال گیری دوم خواهیم‌داشت

$$x=\int_\circ^t v_\circ e^{-c_\backslash t/m}dt$$

$$=\frac{mv_\circ}{c_\backslash}(\backslash-e^{-c_\backslash t/m})$$

این رابطه نشان می‌دهد که آن قطعه جسم به مکانی حدی، که با عبارت $x_{lim}=mv_\circ/c_\backslash$ معین می‌شود، نزدیک خواهد شد.

۸.۲ حرکت افقی با مقاومت درجه دوم. اگر پارامترها چنان باشند که غلبه با جملهٔ درجه دوم باشد، دراین‌صورت به‌ازای مقادیر مثبت v خواهیم داشت

$$-c_\text{۲}v^\text{۲}=m\frac{dv}{dt}$$

که

$$t=\int_{v_\circ}^{v}\frac{-m\,dv}{c_\text{۲}v^\text{۲}}=\frac{m}{c_\text{۲}}\left(\frac{\backslash}{v}-\frac{\backslash}{v_\circ}\right)$$

اگر v را از آنجا به‌دست آوریم

$$v=\frac{v_\circ}{\backslash+kt}$$

که در آن از کوتاه‌نویسی $k=c_\text{۲}v_\circ/m$ بهره برده‌ایم. بنابراین، به‌ازای مقادیر بزرگ kt، مقدار v مانند $\backslash/t$ کم می‌شود. اثبات این‌مطلب‌را به‌عنوان مسئله برعهدهٔ خواننده‌می‌گذاریم تا نشان‌دهد، هیچ مکان حدی در این‌حالت وجود ندارد، یعنی به‌ازای مقادیر بزرگ t، x به‌طور نامتناهی بزرگ می‌شود.

سقوط قائم در میان شاره. سرعت نهایی

الف) حالت خطی. در مورد شیئی که در یك شارهٔ مقاوم به‌طور قائم سقوط کند، نیروی

$F_\circ$ درمعادلات (۲۰.۲) و (۲۱.۲) وزن شئ یعنی mg — درصورتی که جهت مثبت‌محور x بالاسو انتخاب‌شود، به‌شمار می‌آید. پس، درحالت خطی مقاومت‌شاره معادلهٔ دیفرانسیل حرکت عبارت است از

$$-mg-c_1 v=m\frac{dv}{dt} \tag{۲۳.۲}$$

پس از جداکردن متغیرها و انتگرال‌گیری داریم

$$t=\int_{v_\circ}^{v}\frac{m\,dv}{-mg-c_1 v}=-\frac{m}{c_1}\ln\frac{mg+c_1 v}{mg+c_1 v_\circ} \tag{۲۴.۲}$$

که در آن $v_\circ$ سرعت اولیه در $t=\circ$ است. طرفین را در $-c_1/m$ ضرب می‌کنیم و بعد آن‌را به‌صورت نمایی می‌نویسیم، می‌توانیم رابطهٔ بالا را حل‌کنیم و v را به‌دست‌آوریم

$$v=-\frac{mg}{c_1}+\left(\frac{mg}{c_1}+v_\circ\right)e^{-c_1 t/m} \tag{۲۵.۲}$$

جملهٔ نمایی بعد ازگذشت زمان کافی ($t\gg m/c_1$) به‌مقداری کاهش می‌یابدکه می‌توان از آن چشم پوشید، و سرعت به‌مقدار حدی $-mg/c_1$ نزدیك می‌شود. سرعت حدی جسم سقوط کننده را سرعت نهایی می‌نامند؛ سرعت نهایی‌عبارت است از سرعتی‌که درآن نیروی مقاوم دقیقاً‌مساوی و مختلف‌الجهت با وزن جسم‌است به‌طوری‌که نیروی‌کل صفر و بنابراین شتاب نیز صفر می‌شود. بزرگی سرعت نهایی را اندازهٔ سرعت نهایی می‌گویند.

اندازهٔ سرعت نهایی mg/c_1 را به v_t نشان می‌دهیم و از τ (که آن را زمان مشخصه می‌نامیم) برای نمایش m/c_1 استفاده می‌کنیم. در این‌صورت معادلهٔ (۲۵.۲) را می‌توان به‌شکل با معنی‌تر زیر نوشت

$$v=-v_t+(v_t+v_\circ)e^{-t/\tau} \tag{۲۶.۲}$$

در حالت خاص در مورد جسمی‌که در زمان $t=\circ$ ازحالت سکون $v_\circ=\circ$ فرو می‌افتد، داریم

$$v=-v_t\left(1-e^{-t/\tau}\right) \tag{۲۷.۲}$$

بنابراین، بعد ازگذشت یك زمان مشخصه، سرعت عبارت است از $1-e^{-1}$ برابر سرعت نهایی، در دو زمان مشخصه، ضریب v_t برابر $1-e^{-2}$ و الی‌آخر می‌شود. بعد از بازهٔ زمانی 5τ، سرعت یك‌درصد سرعت‌نهایی، یعنی $(1-e^{-5})v_t=0{,}993\,v_t$ خواهد بود.

ب) حالت درجه دوم. دراین‌حالت بزرگی $F(v)$ با v^2 متناسب است، و از این‌رو معادلهٔ دیفرانسیل حرکت، با توجه به‌اینکه جهت مثبت را رو به‌بالا گرفته‌ایم، عبارت است از

$$-mg\pm c_2v^2=m\frac{dv}{dt} \tag{۲۸.۲}$$

علامت منها برای جملهٔ مقاومت، به‌حرکت بالاسو (v مثبت) رجوع می‌کند، وعلامت باضافه به‌حرکت پایین‌سو (v منفی) مربوط می‌شود. علامت دوگانه در مورد هر نیروی مقاومی که شامل توان زوج v باشد، ضروری است. مانند حالت قبل، می‌توان از معادلهٔ دیفرانسیل حرکت انتگرال گرفت تا t به‌صورت تابعی از v به‌دست آید

$$t-t_0=\int_{v_0}^{v}\frac{m\,dv}{-mg-c_2v^2}=\tau\left(\tan^{-1}\frac{v_0}{v_t}-\tan^{-1}\frac{v}{v_t}\right) \qquad \text{(صعود)}$$

$$t-t_0'=\int_{v_0}^{v}\frac{m\,dv}{-mg+c_2v^2}=\tau\left(\tanh^{-1}\frac{v_0}{v_t}-\tanh^{-1}\frac{v}{v_t}\right) \qquad \text{(سقوط)}$$

که

$$\sqrt{\frac{m}{c_2g}}=\tau \qquad \text{(زمان مشخصه)}$$

و

$$\sqrt{\frac{mg}{c_2}}=v_t \qquad \text{(سرعت نهایی)} \tag{۲۹.۲}$$

رابطه‌های بالا را برحسب v حل کنیم، داریم

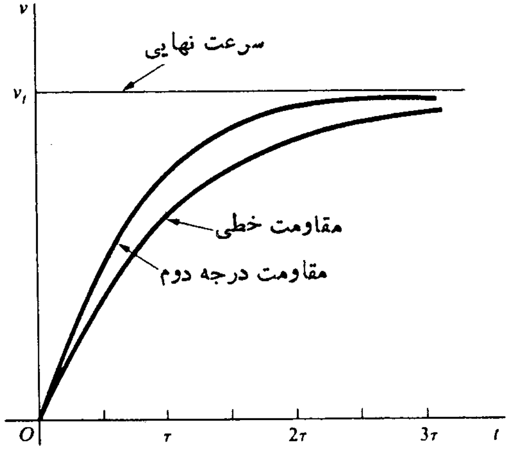
$$v=v_t\tan\left[\frac{t_0-t}{\tau}+\tan^{-1}\frac{v_0}{v_t}\right] \qquad \text{(صعود)} \tag{۳۰.۲}$$

$$v=-v_t\tanh\left[\frac{t-t_0'}{\tau}-\tanh^{-1}\frac{v_0}{v_t}\right] \qquad \text{(سقوط)} \tag{۳۰.۲ الف}$$

اگرجسم از حالت سکون در $t=0$ رهاشود، آنگاه: $t_0'=0$. سپس، بنابر تعریف تانژانت هیپربولیك، داریم

$$v=-v_t\tanh\frac{t}{\tau}=-v_t\left(\frac{e^{t/\tau}-e^{-t/\tau}}{e^{t/\tau}+e^{-t/\tau}}\right) \tag{۳۱.۲}$$

دراینجا نیز می‌بینیم که سرعت نهایی‌عملا بعد از گذشت چند زمان مشخصهٔ معدود به‌دست می‌آید، مثلا به‌ازای $t=5\tau$، سرعت عبارت است از v_t ۰٫۹۹۹۹۱. نمودارهای سرعت برحسب زمان سقوط برای قوانین مقاومت خطی و درجه دوم در شکل ۳.۲ نموده‌شده‌اند. توجه به‌این‌نکته جالب است که درهر دو حالت خطی و درجه دوم، زمان مشخصه از عبارت



شکل ۳۰۲ نمودارهای سرعت برحسب زمان سقوط درمورد جسمی که درحال سقوط است.

یکسانی، به‌شرح زیر، به‌دست می‌آید

$$\tau = \frac{v_t}{g} \qquad (۳۲۰۲)$$

مثالها

۹۰۲ سقوط قطرات باران و توپهای بسکتبال. سرعت نهایی درهوا و زمان مشخصه را برای: (الف) یك قطرهٔ باران کروی خیلی کوچك به‌قطر $۰٫۱\ \mathrm{mm} = ۱۰^{-۴}\mathrm{m}$، و (ب) یك توپ بسکتبال به‌قطر $۰٫۲۵\ \mathrm{m}$، و جرم $۰٫۶\ \mathrm{kg}$ محاسبه کنید. برای تصمیم گیری در این مورد که کدام نوع قانون نیرو، درجه دوم یا خطی را به‌کار ببرید، یادآوری می‌کنیم که رابطه‌ای که قبلا بیان شد، نسبت نیروی درجه دوم به‌خطی را برای مقاومت هوا، یعنی $D|v|\ ۱٫۴ \times ۱۰^{۳}$، به‌دست می‌دهد. که مقدار عددی آن برای قطرهٔ باران $۰٫۱۴v$ و برای توپ بسکتبال $۳۵۰v$، و v برحسب $\mathrm{m/s}$ است. بنابراین، درمورد قطرهٔ باران، v باید از $۱/۰٫۱۴ = ۷٫۱\ \mathrm{m/s}$ بیشتر باشد تا نیروی درجه‌دوم غلبه پیدا کند. درمورد توپ بسکتبال، v باید فقط از $۱/۳۵۰ = ۰٫۰۰۲۹\ \mathrm{m/s}$ بیشتر باشد تا نیروی درجه دوم غالب آید. نتیجه می‌گیریم که حالت خطی باید دربارهٔ قطرهٔ باران درحال سقوط منظور شود، درصورتی که در مورد توپ بسکتبال حالت درجه دوم صادق است (مسئلهٔ ۱۳۰۲ را نیز ببینید).

حجم قطرهٔ باران عبارت است از $\pi D^{۳}/۶ = ۰٫۵۲ \times ۱۰^{-۱۲}\ \mathrm{m}^{۳}$؛ از این‌رو، پس از ضرب کردن آن درچگالی آب $۱۰^{۳}\mathrm{kg/m}^{۳}$، جرمی که به‌دست می‌آید عبارت است از $m = ۰٫۵۲ \times ۱۰^{-۹}\ \mathrm{kg}$. ضریب مقاومت پس کشی را به‌این‌شرح به‌دست می‌آوریم: $c_{۱} = ۱٫۵۵ \times ۱۰^{-۴}\ D = ۱٫۵۵ \times ۱۰^{-۸}\ \mathrm{Ns/m}$. از این مقدار سرعت نهایی چنین

به‌دست می‌آید

$$v_t=\frac{mg}{c_1}=\frac{0.52\times 10^{-9}\times 9.8}{1.55\times 10^{-8}}\,\mathrm{m/s}=0.33\,\mathrm{m/s}$$

که زمان مشخصه عبارت است از

$$\tau=\frac{v_t}{g}=\frac{0.33\,\mathrm{m/s}}{9.8\,\mathrm{m/s^2}}=0.034\,\mathrm{s}$$

درمورد توپ بسکتبال ضریب مقاومت پس‌کشی عبارت است از: $c_2=0.22\,D^2=0.22\times(0.25)^2=0.0138\,\mathrm{Ns^2/m^2}$ و بنابراین سرعت نهایی به‌این شرح خواهد بود

$$v_t=\left(\frac{mg}{c_2}\right)^{1/2}=\left(\frac{0.6\times 9.8}{0.0138}\right)^{1/2}\mathrm{m/s}=20.6\,\mathrm{m/s}$$

و زمان مشخصه عبارت است از

$$\tau=\frac{v_t}{g}=\frac{20.6\,\mathrm{m/s}}{9.8\,\mathrm{m/s^2}}=2.1\,\mathrm{s}$$

بنابراین قطرهٔ باران درمدتی کمتر از یك‌ثانیه پس‌از لحظهٔ شروع به‌سقوط ازحالت‌سکون، عملا به‌سرعت نهایی خود می‌رسد، درصورتی‌که توپ بسکتبال برای اینکه به یك درصد سرعت نهایی خود برسد، چندین ثانیه طول می‌کشد.[1]

مسائل

۱.۲ سرعت $\dot{x}$ و مکان x را به‌صورت تابعهایی از زمان t برای ذره‌ای به جرم m، که از حالت سکون در $x=0$ و $t=0$ شروع به‌حرکت می‌کند بیابید. این ذره تحت‌تأثیر تابع نیروهای زیر است

الف) $F_x=F_0+ct$

ب) $F_x=F_0\sin ct$

ج) $F_x=F_0e^{ct}$

که F_0 و c ثابتهای مثبتی‌اند.

۲.۲ سرعت $\dot{x}$ را به‌صورت تابعی از جابه‌جایی، x، ذره‌ای به‌جرم m که از حال سکون در $x=0$ شروع به‌حرکت می‌کند، و تابع نیروهای زیر برآن وارد می‌آیند، بیابید

---

۱. برای اطلاع بیشتر دربارهٔ مقاومت پس‌کشی آئرودینامیکی، مقالهٔ زیر

C. Frohlich in *Am. J. Phys.*, 52, 325 (1984)

و مراجع مفصل ذکر شده درآنجا را ببینید.

الف) $F_x = F_\circ + cx$
ب) $F_x = F_\circ e^{-cx}$
ج) $F_x = F_\circ \cos cx$
که $F_\circ$ و c ثابتهای مثبتی‌اند.
۳۰۲ تابع انرژی پتانسیل $V(x)$ را برای هر نیرو در مسئلهٔ ۲۰۲ به‌دست آورید.
۴۰۲ معلوم شده است که سرعت یك ذره در حرکت راستخط طبق معادلهٔ

$$\dot{x} = bx^{-۳}$$

برحسب جابه‌جایی x تغییر می‌کند، که b ثابتی مثبت است؛ نیروی وارد بر هر ذره را به‌صورت تابعی از x به‌دست آورید (راهنمایی: $F = m\ddot{x} = m\dot{x}\, d\dot{x}/dx$).
۵۰۲ با نشان‌دادن آنکه x به‌ازای مقادیر بزرگ t به‌طور نامتناهی بزرگ می‌شود، جزء آخر مثال ۸۰۲ را کامل کنید.
۶۰۲ اتومبیلی به‌جرم m ابتدا درحالت سکون است. در زمان $t=\circ$ یك نیروی محرك ثابت $F_\circ$ به‌سمت جلو بر آن وارد می‌آید. بعد از گذشت زمان $t_۱$، ناگهان نیرو دو برابر می‌شود و به‌مقدار $۲F_\circ$ می‌رسد و بعداً درهمین مقدار ثابت باقی می‌ماند. نشان‌دهید که کل مسافت پیموده شده درمدت زمان $t = ۲t_۱$ عبارت است از $(۵/۲)F_\circ t_۱^۲/m$.
۷۰۲ مسئلهٔ بالا را برای حالتی که از $t=\circ$ تا $t=t_۱$ نیرو همان مقدار ثابت $F_\circ$ را داشته ولی بعد به‌جای اینکه دو برابر شود، به‌طور خطی با زمان افزایش یابد (آهنگ افزایش شتاب ثابت باشد) به‌نحوی که در زمان $t=۲t_۱$ مقدار نیرو $۲F_\circ$ شود، حل کنید. دراین حالت نشان‌دهید که کل مسافت پیموده‌شده در زمان $t=۲t_۱$ برابر $(۱۳/۶)F_\circ t_۱^۲/m$ است.
۸۰۲ قطعه‌چوبی با سرعت اولیهٔ $v_\circ$ به‌بالاسوی یك سطح شیبدار پرتاب می‌شود. اگرزاویهٔ شیب سطح ۳۰° و ضریب اصطکاك لغزشی $\mu = ۰٫۱$ باشد، زمان کل برای مراجعت این قطعه چوب به‌نقطهٔ پرتاب را بیابید.
۹۰۲ یك‌قطعه فلز به‌جرم m روی‌سطح‌افقی که باروغن غلیظی آغشته شده می‌لغزد، به‌طریقی که براین قطعه فلز در هنگام حرکت مقاومت چسبنده‌ای وارد می‌آید، که به‌صورت زیر با توان سه دوم سرعت تغییر می‌کند

$$F(v) = -cv^{۳/۲}$$

اگر سرعت اولیهٔ قطعه فلز در $x=\circ$ برابر $v_\circ$ باشد، نشان‌دهید که این قطعه نمی‌تواند فاصله‌ای بیش از $۲mv_\circ^{۱/۲}/c$ را بپیماید.
۱۰۰۲ تفنگی مستقیماً به‌طرف بالا شلیك می‌شود. با فرض آنکه مقاومت پس‌کشی هوا برعلیه گلوله به‌صورت توان دوم سرعت تغییر کند، نشان‌دهید که تغییرات سرعت باارتفاع طبق معادلات زیر صورت می‌گیرد

$$v^۲ = Ae^{-۲kx} - \frac{g}{k} \qquad \text{(حرکت بالاسو)}$$

$$v^{2}=\frac{g}{k}-Be^{2kx} \qquad \text{(حرکت پایین‌سو)}$$

که در آن A و B ثابتهای انتگرال‌گیری‌اند، g شتاب گرانی است، و $k=c_{2}/m$ که c_{2} ضریب مقاومت‌پس‌کشی و m جرم گلوله است. (یادآوری: x به‌بالاسو مثبت اندازه‌گیری می‌شود، و نیروی گرانشی را ثابت می‌گیریم.)

۱۱.۲ با بهره‌گیری از نتایج بالا، نشان‌دهید که وقتی گلوله هنگام مراجعت با زمین‌برخورد می‌کند، سرعت آن عبارت است از

$$\frac{v_{0}v_{t}}{(v_{0}^{2}+v_{t}^{2})^{1/2}}$$

که در آن v_{0} سرعت اولیهٔ بالاسو است و

$$v_{t}=(mg/c_{2})^{1/2}=\text{سرعت نهایی}=(g/k)^{1/2}$$

(با این‌نتیجه امکان پیدا می‌کنیم که کسری از انرژی جنبشی اولیه را که درهوا به‌صورت اصطکاك تلف می‌شود، بیابیم.)

۱۲.۲ ذره‌ای به‌جرم m درفاصلهٔ b از یك مبدأ ثابت نیرو ازحالت سکون رها می‌شود؛ این نیرو ذره را برطبق قانون عکس مجذور جذب می‌کند

$$F(x)=-kx^{-2}$$

نشان‌دهید که زمان لازم برای‌آنکه ذره به‌مبدأ برسد، عبارت است از

$$\pi\left(\frac{mb^{3}}{8k}\right)^{1/2}$$

۱۳.۲ نشان‌دهید که سرعت نهایی‌جسمی کروی که درحال‌سقوط باشد، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$v_{t}=[(mg/c_{2})+(c_{1}/2c_{2})^{2}]^{1/2}-(c_{1}/2c_{2})$$

درصورتی که جمله‌های خطی و درجه دوم هردو در نیروی پس‌کشی منظور شده باشند.

۱۴.۲ با بهره‌گیری از نتیجهٔ بالا سرعت نهایی یك حباب صابون به‌جرم $10^{-7}\,\mathrm{kg}$ و قطر $10^{-2}\,\mathrm{m}$ را محاسبه‌کنید. این مقدار را با مقداری مقایسه‌کنید که از به‌کار بردن معادلهٔ (۲۹.۲) به‌دست می‌آید.

۱۵.۲ فرض‌کنید: نیروی وارد بر یك‌ذره عبارت است از حاصلضرب تابعی از مسافت و تابعی از سرعت $F(x,v)=f(x)g(v)$. نشان دهید که معادلهٔ دیفرانسیل حرکت را می‌توان به‌کمك انتگرال‌گیری حل کرد. اگر نیرو عبارت باشد از حاصلضرب تابعی از

مسافت و تابعی از زمان، آیا می‌توان معادلهٔ حرکت را از طریق انتگرال‌گیری ساده حل کرد؟ آیا می‌توان معادله را حل‌کرد هرگاه نیرو حاصلضرب تابعی از زمان و تابعی از سرعت باشد؟

۱۶۰۲ نیروی وارد بر ذره‌ای به‌جرم m از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$F = kvx$$

که درآن k ثابت مثبت است. این ذره با سرعت v_0 در زمان $t = 0$ از مبدأ می‌گذرد. x را به‌صورت تابعی از t به‌دست آورید.