۳

نوسانگر هماهنگ

۱.۳ مقدمه

یکی از معمولترین انواع فراوان پدیده‌های حرکتی که در زندگی روزمره مشاهده می کنیم، حرکت تناوبی است: کودکی که روی تاب بازی می کند، بالا و پایین آمدن کشندها (جزرومدها)، تکان‌خوردن درخت درباد، و مانند آنها. درسیستمهای ساده، حرکت تناوبی یا نوسانی درصورتی می‌تواند رخ دهد که سیستم موضع تعادلی داشته و نیرویی وجود داشته باشد که هرگاه سیستم ازحال تعادل خارج شد، گرایشش به‌بازگرداندن آن به‌حالت تعادل باشد. به خاطر اهمیت منحصر به‌فردی که حرکت نوسانی دارد، فصلی جداگانه را به مطالعهٔ این حرکت اختصاص داده‌ایم. درفصلهای بعدی نیز در فرصتهایی به نتایج‌مان دراین‌فصل رجوع خواهیم کرد.

۲.۳ نیروی بازگرداندهٔ خطی. حرکت هماهنگ

ساده‌ترین و اساسیترین نوع نیروی بازگرداننده حالت خطی است. نمونهٔ چنین نیرویی عبارت است از نیرویی که ریسمان یا فنری کشسان وارد می‌آورد و از قانون هوك پیروی می کند

$$F = -k(X - X_e) \qquad (۱.۳)$$

دراینجا X طول کلی فنر، و X_e طول فنر قبل‌از کشیدگی یا درحالت تعادل است. ثابت تناسب k سفتی نامیده می‌شود. کمیت $X - X_e$ عبارت است از جابه‌جایی از حالت تعادل (به ازای $F = 0$). جابه‌جایی را به x نشان می‌دهیم، از این‌رو قانون هوك را به صورت زیر می‌نویسیم

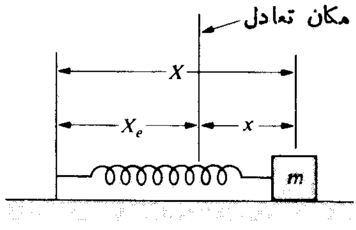
$$F(x) = -kx \tag{۲.۳}$$

اگر چنین نیرویی برجسمی به‌جرم m، مثلا، مطابق شکل ۱.۳، بر قطعه جسمی واقع برسطح افقی بدون اصطکاکی وارد آید، از قانون دوم نیوتون، $m\ddot{x} = -kx$، یا

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{۳.۳}$$

به‌دست می‌آید. با معادلهٔ دیفرانسیل حرکت ازنوع بالا در بسیاری از مسائل فیزیکی سروکار پیدا می‌کنیم. در مثال خاصی که اینجا به کار می‌بریم، ثابتهای m و k به ترتیب به جرم جسم و سفتی فنر مربوط می‌شوند، و جابه‌جایی x عبارت‌است‌ازفاصله. همان‌طور که بعداً خواهیم دید، درآونگ نیز با همین معادله روبه‌رو می‌شویم. درآنجا جابه‌جایی یك زاویه است، و ثابتهای مربوطه عبارت‌اند از شتاب‌گرانی و طول آونگ. در اینجا نیز، در انواع خاصی از مدارهای الکتریکی، این معادله‌کاربرد پیدا می‌کند، در آنجا ثابتها بازنمای پارامترهای مدارند وکمیت x نمایانگر جریان یا ولتاژ الکتریکی است.

معادلهٔ (۳.۳) را می‌توان به‌چند راه حل کرد. این معادله مثالی از دستهٔ مهمی از معادلات دیفرانسیل به‌نام معادلات دیفرانسیل‌خطی با ضرایب ثابت به‌شمار می‌آید.[۱] بسیاری



شکل ۱.۳ مدل نوسانگر هماهنگ خطی.

---

۱. معادلهٔ مرتبهٔ nام کلی از این نوع به‌صورت زیر است

$$c_n\frac{d^n x}{dt^n} + \dots + c_2\frac{d^2 x}{dt^2} + c_1\frac{dx}{dt} + c_0 x = b(t)$$

اگر $b = 0$ معادله را **همگن** می‌نامند. کلیترین جواب این معادله شامل n تابع و n ثابت انتگرال‌گیری به‌نام ضرایب توابع است. تمام این توابع و n ثابت ضروری‌اند تا جواب در شرایط مرزی دلخواه صدق کند.

از معادلات دیفرانسیل فیزیك، اگر نگوییم همه آنها، معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم‌اند. برای حل معادلهٔ (۳.۳) روش آزمـون را به کار خواهیم بردکه در آن تابع e^{qt} جواب آزمون است، q ثابتی است که باید تعیین شود. در واقع، اگر $x=e^{qt}$ یکی‌از جوابهای معادله باشد، باید به‌ازای تمام مقادیر t داشته باشیم

$$m\frac{d^2}{dt^2}e^{qt}+ke^{qt}=0$$

که با مشتق گیری و حذف عاملهای مشترك، به معادلهٔ کمکی زیر تبدیل می‌شود

$$mq^2+k=0$$

یعنی $q^2=-k/m$، بنابراین q موهومی است

$$q=\pm i\sqrt{\frac{k}{m}}=\pm i\omega_0$$

که $i=\sqrt{-1}$، و ما کوتاه نویسی زیر را به‌معادله وارد کرده‌ایم

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (۴.۳)$$

بنابراین روش آزمونی مـا دو جواب به‌شکل ریاضی $e^{i\omega_0 t}$ و $e^{-i\omega_0 t}$ می‌دهد. معنی این دو جواب چیست؟ برای پاسخ دادن بـه‌این پرسش، کمی از مطلب اصلی دور می‌شویم تا راجع به‌تابع نمایی مختلط e^{iu} اندکی صحبت کنیم.

بنابر قضیهٔ اویلر[1]، این تابع نمایی مختلط بـرحسب توابع مثلثاتی عادی، به کمك روابط زیر بیان می‌شود

$$e^{iu}=\cos u+i\sin u \qquad (۵.۳)$$

$$e^{-iu}=\cos u-i\sin u$$

عبارتهای زیر معادل رابطه‌های بالا هستند

$$\cos u=\frac{e^{iu}+e^{-iu}}{2} \qquad (۵.۳ \text{ الف})$$

$$\sin u=\frac{e^{iu}-e^{-iu}}{2i}$$

---

۱. اثبات آن در پیوست د خواهد آمد.

به‌علاوه، یکی از خاصیتهای معادلات دیفرانسیل خطی که به‌آسانی می‌توان آن را آزمود، این است که اگر $x_1(t)$ و $x_2(t)$ جوابهای شناخته شدهٔ معادله برحسب متغیر مستقل t باشند، دراین صورت هر ترکیب خطی $C_1x_1+C_2x_2$ نیز یکی ازجوابهای آن است. ثابتهای C_1 و C_2 اختیاری‌اند: [بـا جای‌گذاری مستقیم می‌توان درستی این حکم را تحقیق کرد: در حالت موردنظر داریم

$$m\frac{d^2}{dt^2}(C_1x_1+C_2x_2)+k(C_1x_1+C_2x_2)$$

$$=C_1(m\ddot{x}_1+kx_1)+C_2(m\ddot{x}_2+kx_2)=0$$

چراکه x_1 و x_2 جواب‌اند.]

حاصل هرچه تا اینجا گفتیم این است که می‌توانیم جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل خطی خود را به‌صورت ترکیب خطی زیر بیان کنیم

$$x(t)=\mathrm{C}_+e^{i\omega_0 t}+\mathrm{C}_-e^{-i\omega_0 t} \qquad (۶.۳)$$

معادل آن به‌صورت زیر در می‌آید

$$x(t)=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t \qquad (۷.۳)$$

که در آن $\mathrm{C}_+=\frac{1}{2}(A-iB)$ و $\mathrm{C}_-=\frac{1}{2}(A+iB)$. مـی‌خواهیم $x(t)$ و A و B حقیقی باشند، بنابراین C_+ و C_- کمیتهای مزدوج مختلط‌اند.[1] بالاخره، راه سوم بیان جواب را با بهره‌گیری از تساوی مثلثاتی $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ می‌یابیم درنتیجه داریم

$$x(t)=\mathcal{A}\cos(\omega_0 t-\varphi) \qquad (۸.۳)$$

که $A=\mathcal{A}\cos\varphi$ و $B=\mathcal{A}\sin\varphi$، به‌طوری که

$$A^2+B^2=\mathcal{A}^2\sin^2\varphi+\mathcal{A}^2\cos^2\varphi=\mathcal{A}^2$$

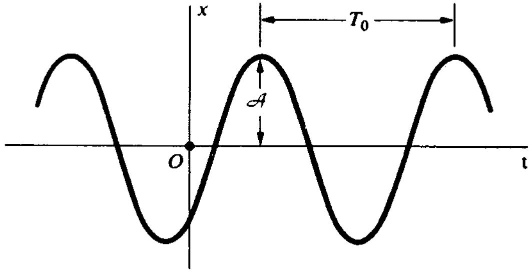
و

$$B/A=\mathcal{A}\sin\varphi/\mathcal{A}\cos\varphi=\sin\varphi/\cos\varphi=\tan\varphi.$$

حرکتی فیزیکی که جواب ریاضی‌ما آن را نشان می‌دهد عبارت است ازیك نوسان سینوسی مربوط به‌جابه‌جایی x (شکل ۲.۳). ایـن حرکت را حرکت هماهنگ می‌گویند.

---

۱. به‌جای حروف ایتالیك، حروف تحریری را به‌کار خواهیم برد تا کمیتهای مختلط را تمیز دهیم.



شکل ۲۰۳ نمودار جابه‌جایی برحسب زمان در نوسانگر هماهنگ.

بیشینهٔ جابه‌جایی را دامنهٔ نوسان می‌نامند؛ دامنهٔ نوسان درمعادلهٔ(۸.۳) عبارت است از ثابت $\mathscr{A}$ یا از معادلهٔ (۷.۳) کمیت $(A^{۲}+B^{۲})^{۱/۲}$ است. $\omega_\circ$ بسامد زاویه‌ای نامیده مـی‌شود. دورهٔ تناوب، $T_\circ$، زمان نوسان لازم برای پیمودن یك دور کامل است، یعنی زمانی که طی آن آرگومان جمله‌های سینوسی و کسینوسی درست به‌اندازهٔ ۲π افزایش می یابد. بنابراین $T_\circ\omega_\circ=۲\pi$ یا

$$T_\circ=\frac{۲\pi}{\omega_\circ}=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (۹.۳)$$

بنابر تعریف، بسامد خطی عبارت است از تعداد دورها در واحد زمـان. این‌کمیت را با نماد $f_\circ$ نشان می‌دهند، لذا

$$۲\pi f_\circ=\omega_\circ \qquad (۱۰.۳)$$

$$f_\circ=\frac{۱}{T_\circ}=\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (۱۱.۳)$$

به‌کار بردن کلمهٔ «بسامد» هم برای بسامد زاویه‌ای و هم بسامد خطی متداول است، معمولا از خود متن برمی‌آیدکه کدام یك از آنها موردنظر است. یکای بسامد خطی (دور درثانیه یا $s^{-۱}$) به‌افتخار هاینریش هرتز، که اولین بار وجود امواج رادیویی را نشان داد، هرتز (Hz) می گویند.

ثابتهای حرکت و شرایط اولیه

عبارتهای مربوط به جابه‌جایی نوسانگر هماهنگ به‌صورت توابعی از زمان، یعنی معادلات (۶.۳)،(۷.۳)،و(۸.۳)،هرکدام شامل دو ثابت دلخواه اند؛ این‌ثابتها به‌ترتیب‌عبارت‌انداز: C_+ و C_-، A و B ، $\mathscr{A}$ و φ. مقادیر این ثابتها به شرایط اولیه مربوط می‌شود. بنابراین، اگر آن قطعه درشکل ۱.۳، در ابتدا به‌اندازهٔ $x_\circ$ جـابـه‌جا شده بـاشد، و به‌آن درزمان

$t=0$ سرعت $\dot{x}_0$ داده شود، آنگاه در معادلهٔ (۷.۳) می‌بینیم که $A=x_0$. به‌کمك مشتق‌گیری داریم $\dot{x}(t)=-A\omega_0\sin\omega_0 t+B\omega_0\cos\omega_0 t$، بنابراین $\dot{x}_0=B\omega_0$ و عبارت کامل مربوط به جابه‌جایی چنین می‌شود

$$x(t)=x_0\cos\omega_0 t+\frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t \tag{۱۲.۳}$$

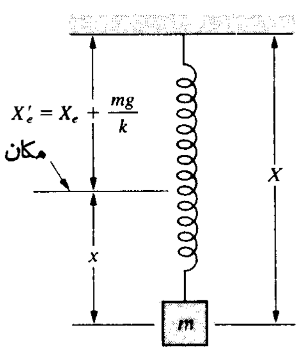
عبارت $\mathcal{A}=(A^2+B^2)^{1/2}=\left(x_0^2+\frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2}\right)^{1/2}$ دامنهٔ نوسان است. ثابتهای مختلط از عبارتهای $C_+=\frac{1}{2}\left(x_0-i\frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\right)$، $C_-=\frac{1}{2}\left(x_0+i\frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\right)$ به دست می‌آیند، و ثابت فاز عبارت است از $\varphi=\tan^{-1}(\dot{x}_0/x_0\omega_0)$.

اثر نیروی ثابت خارجی بر نوسانگر هماهنگ

فرض کنید همان فنر نموده شده درشکل ۱.۳ به‌طور قائم قرار گیرد و همان جرم m را نگه دارد (شکل ۳.۳). اکنون نیروی کل عمل‌کننده با افزودن وزن mg به‌نیروی بازگرداننده حاصل می‌شود

$$F=-k(X-X_e)+mg \tag{۱۳.۳}$$

جهت مثبت پایین سوست. مانند قبل، به‌جای $X-X_e$ کمیت x را قرار می‌دهیم در نتیجه معادلهٔ بالا به صورت $F=-kx+mg$ در می‌آید. اما، بهتر است که متغیر x به نحو دیگری، یعنی، به عنوان جابه‌جایی از وضعیت تعادل جدید X'_e که با قراردادن $F=0$ در معادلهٔ (۱۳.۳) به دست می‌آید، تعریف شود: $0=-k(X'_e-X_e)+mg$ که از اینجا خواهیم داشت $X'_e=X_e+mg/k$. حال جابه‌جایی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم



شکل ۳.۳ حالت قائم در نوسانگر هماهنگ.

$$x = X - X'_e = X - X_e - mg/k$$

با قرار دادن x در معادلهٔ (۱۳.۳)، بعداز انجام کمی عملیات جبری به‌دست می‌آوریم

$$F = -kx$$

بنابراین معادلهٔ دیفرانسیل حرکت دوباره به‌صورت زیر درمی‌آید

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

و جواب آن برحسب x که بـه‌تازگی تعریف‌کردیم با جواب به‌دست آمده درحالتی‌که فنر دروضعیت افقی بود، یکسان است. اینك ناگفته پیداست‌که هرگاه نیروی خارجی ثابتی بر نوسانگر هماهنگ وارد آید فقط مکان تعادل را جابه‌جا می‌کند. اگر جابه‌جایی x از مکان تعادل جدید اندازه‌گیری شود، معادلهٔ حرکت بدون تغییر باقی می‌ماند.

مثالها

۱۰۳ وقتی به فنر سبکی قطعه جسمی به‌جرم m به‌طور قائم آویخته شود، طول فنر به‌اندازهٔ D_1 افزایش پیدا می‌کند. اگر قطعه جسم به اندازهٔ D_2 از وضعیت تعادل به پایین کشیده شده و در لحظهٔ $t = 0$ رها شود، پیداکنید: (الف) حرکت حاصل، (ب) سرعت‌قطعه‌جسم وقتی بـه نقطهٔ تعادل بازگشته و در حال عبور ازآن نقطه است، و (ج) شتاب قطعه جسم دربالای حرکت نوسانی آن.

حل: ابتدا برای‌مکان تعادل داریم

$$F_x = 0 = -kD_1 + mg$$

که x مثبت به‌پایین سو اختیار شده است. از اینجا ثابت سفتی به‌دست می‌آید

$$k = \frac{mg}{D_1}$$

می‌توانیم بسامد زاویه‌ای نوسان را از رابطهٔ زیر بیابیم

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{D_1}}$$

معادلهٔ حرکت را به‌شکل $x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$ بیان خواهیم کرد. بنابراین: $\dot{x} = -A\omega_0 \sin\omega_0 t + B\omega_0 \cos\omega_0 t$. با توجه به‌شرایط اولیه داریم

$$x_0 = D_2 = A,\ \dot{x}_0 = 0 = B\omega_0,\ B = 0$$

از این‌رو معادلهٔ حرکت برحسب کمیتهای داده شده با رابطهٔ زیر بیان می‌شود

$$x(t)=D_{۲}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{D_{۱}}}t\right) \qquad \text{(الف)}$$

توجه کنید که جرم m در این عبارت نهایی ظاهر نمی‌شود. پس سرعت عبارت است از

$$\dot{x}(t)=-D_{۲}\sqrt{\frac{g}{D_{۱}}}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{D_{۱}}}t\right)$$

و شتاب چنین خواهد بود

$$\ddot{x}(t)=-D_{۲}\frac{g}{D_{۱}}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{D_{۱}}}t\right)$$

هنگامی که قطعه جسم از مکان تعادل به‌بالا سو عبور می‌کند، آرگومان جملهٔ سینوسی $\pi/۲$ است (یك چهارم دورهٔ تناوب)، بنابراین

$$\dot{x}=-D_{۲}\sqrt{\frac{g}{D_{۱}}} \quad \text{(مرکز)} \qquad \text{(ب)}$$

در بالاترین نقطهٔ جابه‌جایی، آرگومان جملهٔ کسینوسی عبارت است از π (یك دوم دورهٔ تناوب)، که از اینجا به‌دست می‌آید

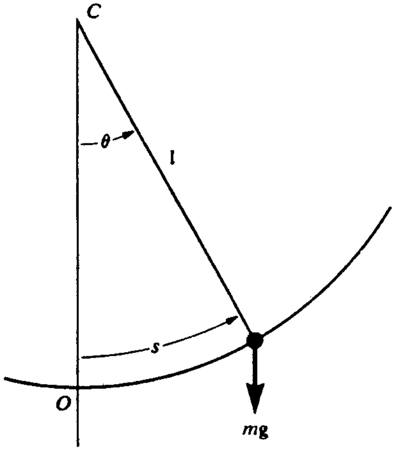
$$\ddot{x}=D_{۲}\frac{g}{D_{۱}} \quad \text{(در بالا)} \qquad \text{(ج)}$$

توجه به‌این نکته ضروری است که درحالت $D_{۱}=D_{۲}$، شتاب پایین سو در بالاترین نقطهٔ جابه‌جایی درست برابر g است. بـه‌این معنی که، این قطعه جسم در آن لحظهٔ به‌خصوص، در حال سقوط آزاد است؛ یعنی، فنر بر قطعه جسم نیرویی وارد نمی‌آورد.

۴۰۳ آونگ ساده. آونگ بـه‌اصطلاح ساده، شامل «گوی» کوچکی است به‌جرم m که در انتهای نخ سبکی به‌طول l که کش نمی‌آید تاب می‌خورد (شکل ۴.۳). حرکت درامتداد کمانی دایره‌ای است که، مطابق شکل، با زاویهٔ θ مشخص می‌شود. نیروی بـاز گردانند‌ه عبارت است از مؤلفهٔ وزن mg کـه در راستای افزایش θ در امتداد مسیر حرکت وارد می‌آید: $F_s=-mg\sin\theta$. اگـر گوی را یك ذره بگیریم، معادلـهٔ دیفرانسیل حرکت عبارت است از

$$m\ddot{s}=-mg\sin\theta$$

حال $s=l\theta$، و، به‌ازای مقادیر کوچك θ، بـا یك تقریب مناسب: $\sin\theta=\theta$. بنابراین،



شکل ۴.۳ آونگ ساده.

پس‌از حذف m از طرفین و بازآرایی جمله‌ها، می‌توانیم معادلهٔ دیفرانسیل حرکت را برحسب θ یا s به‌صورت زیر بنویسیم

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0 \quad \ddot{s}+\frac{g}{l}s=0$$

اگر چه مسیر حرکت به‌جای اینکه درامتداد خط راستی باشد، درمسیری منحنی صورت می‌گیرد، معادلهٔ دیفرانسیل حرکت از نظر ریاضی با معادلهٔ نوسانگر هماهنگ خطی، معادلهٔ (۳.۳)، با قراردادن کمیت g/l به‌جای k/m، یکسان است. از این‌رو، تا آنجاکه تقریب $\sin\theta \doteq \theta$ برقرار باشد، می‌توانیم نتیجه بگیریم که بسامد زاویه‌ای حرکت هماهنگ ساده عبارت است از

$$\omega_0=\sqrt{\frac{g}{l}}$$

دورهٔ تناوب آن چنین خواهد بود

$$T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

جالب است به‌این نکته توجه‌کنیم که هرگاه درفرمول بالا طول l را یك، دورهٔ تناوبی خیلی نزدیك به‌دوثانیه، یعنی نیم‌دورهٔ تناوب آن یك ثانیه، به‌دست می‌آید. به‌بیان دقیقتر، برای یك نیم دورهٔ تناوب یك‌ثانیه‌ای، به‌نام «آونگ ثانیه»، طول دقیق با قراردادن $T_0=2s$ در معادلهٔ بالا و حل آن برحسب l، به‌دست می‌آید. وقتی g برحسب $\mathrm{m/s^2}$

بیان شود، مقدارعددی l مساوی $g/\pi^۲$ به‌دست می‌آید. درسطح دریا و درعرض‌جغرافیایی ۴۵° مقدار شتاب گرانی عبارت است از $g = ۹٫۸۰۶۲ \mathrm{m/s^۲}$. بدین‌ترتیب، طول آونگ ثانیه در آن محل می‌شود: $۹٫۸۰۶۲/۹٫۸۶۹۶ = ۰٫۹۹۳۶ \mathrm{m}$.

۳.۳ ملاحظات مربوط به‌انرژی در حرکت هماهنگ

ذره‌ای را تحت تأثیر نیروی بازگرداننده خطی $F_x = -kx$ درنظر بگیرید. کاری راکه نیروی خارجی F_{ext} برای به‌حرکت درآوردن ذره از وضعیت تعادل ($x = ۰$) تا موضع x انجام می‌دهد، محاسبه کنیم. داریم $F_{ext} = -F_x = kx$، بنابراین

$$W = \int_۰^x F_{ext} dx = \int_۰^x kx\, dx = \frac{k}{۲}x^۲$$

درمورد فنری که ازقانون هوك پیروی می‌کند این‌کار به‌صورت انرژی پتانسیل، $W = V(x)$، درفنر ذخیره می‌شود، که

$$V(x) = \frac{۱}{۲}kx^۲ \qquad (۱۴.۳)$$

بدین ترتیب بنابر تعریف V، داریم: $F_x = -dV/dx = -kx$. بنابراین وقتی ذره‌ای حرکت هماهنگ انجام می‌دهد، انرژی کل آن از جمع انرژی جنبشی و پتانسیل به‌دست می‌آید، یعنی

$$E = \frac{۱}{۲}m\dot{x}^۲ + \frac{۱}{۲}kx^۲ \qquad (۱۵.۳)$$

این‌معادله جمع‌بندی حرکت نوسانگر هماهنگ به‌طریقی نسبتاً بنیادی است: انرژی جنبشی برحسب متغیر سرعت از درجه دوم و انرژی پتانسیل برحسب متغیر تغییر مکان از درجه دوم است. اگر جز نیروی بازگرداننده نیروهای دیگری بر ذره وارد نیایند، انرژی‌کل ثابت است.

هرگاه بخواهیم‌معادلهٔ حرکت ذره را پیدا کنیم می‌توانیم‌کارخود را با معادلهٔ انرژی (۱۵.۳) آغاز کنیم. با حل این معادله برحسب سرعت

$$\frac{dx}{dt} = \pm\left(\frac{۲E}{m} - \frac{k}{m}x^۲\right)^{۱/۲} \qquad (۱۶.۳)$$

که می‌توان از آن انتگرال گرفت و t را به‌صورت تابعی از x به‌شکل زیر به‌دست آورد

$$t = \int \frac{dx}{\pm[(۲E/m) - (k/m)x^۲]^{۱/۲}} = \mp(m/k)^{۱/۲}\cos^{-۱}(x/\mathcal{A}) + C \qquad (۱۷.۳)$$

که در آن C ثابت انتگرال‌گیری و $\mathcal{A}$ دامنه است که از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\mathcal{A}=\left(\frac{۲E}{k}\right)^{۱/۲} \qquad (۱۸.۳)$$

با حل معادلهٔ انتگرال‌گیری شده‌برحسب x به‌صورت تابعی ازt، همان رابطه‌ای را می‌یابیم که دربخش پیش یافتیم، با این تفاوت که حالا مقدار صریحی برای دامنه دراختیار داریم. همچنین می‌توانیم ازطریق یافتن نقاط بـرگشت (عطف) حرکت که در آنجا $\dot{x}=۰$، دامنه را مستقیماً از معادلهٔ انرژی (۱۵.۳) بـه‌دست آوریم: مقدار x باید بین $(۲E/k)^{۱/۲}$ و $-(۲E/k)^{۱/۲}$ باشد تا x حقیقی بماند. شکل ۵.۳ نمایانگر این مطلب است.

همچنین از معادلهٔ انرژی پـی می‌بـریم که حداکثر مقدار سرعت، که آن را v_{max} می‌نامیم، در $x=۰$ رخ می‌دهد. به‌این ترتیب، می‌توان نوشت

$$E=\frac{۱}{۲}mv_{max}^{۲}=\frac{۱}{۲}k\mathcal{A}^{۲} \qquad (۱۹.۳)$$

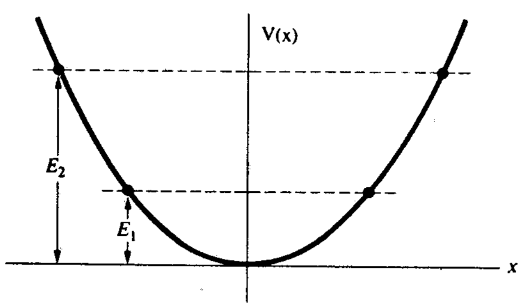
همچنان که ذره نوسان می‌کند، انـرژی جنبشی و پتانسیل بـه‌طور پیوسته تغییر می‌کنند. انرژیِ کلِ ثابت در مرکز، $x=۰$ و $\dot{x}=\pm v_{max}$، به‌تمامی به‌شکل انرژی جنبشی، و در نقاط مرزی، $\dot{x}=۰$ و $x=\pm\mathcal{A}$، به‌تمامی به‌صورت انرژی پتانسیل است.

مثال

۳.۳ تابع انرژی آونگ ساده. انرژی پتانسیل آونگ از عبارت زیر بـه‌دست می‌آید

$$V=mgh$$

که h فاصلهٔ قائم از تراز مرجع (که آن را وضعیت تعادل اختیار می‌کنیم) است. به‌ازای



شکل ۵.۳ نمودار تـابع انرژی پتانسیل سهموی نوسانگر هماهنگ. نقاط بـرگشت (عطف) که دامنه را مشخص می‌کنند برای دومقدار مختلف انرژی‌کل نشان داده شده‌اند.

تغییر مکانی به‌اندازهٔ θ، شکل ۴.۳، می‌بینیم که: $h=l-l\cos\theta$، از این‌رو

$$V(\theta)=mgl(1-\cos\theta)$$

در اینجا بسط سری کسینوسی را به‌صورت $\cos\theta=1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\ldots$ می‌نویسیم، لذا به‌ازای مقادیر کوچك θ، به‌طور تقریبی داریم: $\cos\theta=1-\theta^2/2$. پس‌از جانشانی

$$V(\theta)=\frac{1}{2}mgl\,\theta^2$$

یا، به‌بیانی مشابه، چون $s=l\theta$

$$V(s)=\frac{1}{2}\,\frac{mg}{l}s^2$$

بنابراین، تا تقریب اول، تابع انرژی پتانسیل برحسب متغیر تغییر مکان، از درجه دوم است. انرژی کل، برحسب s عبارت است از

$$E=\frac{1}{2}m\dot{s}^2+\frac{1}{2}\,\frac{mg}{l}s^2$$

که با گزارهٔ کلی مربوط به‌انرژی نوسانگر هماهنگ، که دربالا پیرامون آن بحث کردیم، سازگار است.

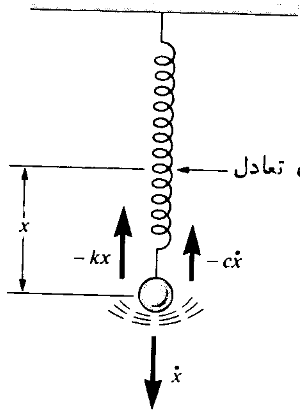
۴.۳ حرکت هماهنگ میرا

چون در تحلیل قبلی خود از نوسانگر هماهنگ نیروهای اصطکاکی‌را به‌حساب نیاورده‌ایم، به‌نحوی به‌تحلیلی ایده‌آل و دور از واقعیت دست زده‌ایم. این نیروها همواره درسیستم مکانیکی به نحوی حضور دارند. به‌همین ترتیب، در مدار الکتریکی همیشه مقدار معینی مقاومت وجود دارد. برای ارائه مدلی خاص جسمی به‌جرم m را درنظر می‌گیریم که از فنری به‌سفتی k آویخته شده است. فرض خواهیم کرد که نیروی ترمزی چسبنده‌ای وجود دارد که تغییرات آن باسرعت به‌طور خطی صورت می‌گیرد، مانند نیرویی که مقاومت پس‌کشی هوا درسرعتهای کم ایجاد می‌کند[1]. این نیروها در شکل ۶.۳ نشان داده شده‌اند.

اگر x جابه‌جایی نسبت به‌وضعیت تعادل باشد، دراین‌صورت نیروی بازگرداننده عبارت خواهد بود از $-kx$، و نیروی ترمزی $-c\dot{x}$ که c ثابت تناسب است. بدینسان،

---

۱. در بسیاری از موقعیتها مقاومت پس‌کشی غیرخطی واقعیتر است؛ ولی حل معادلات حرکت خیلی دشوارتر است و در اینجا به‌بررسی آنها نخواهیم پرداخت.



شکل ۶.۳ مدل نوسانگر هماهنگ میرا.

معادلهٔ دیفرانسیل حرکت به‌صورت $m\ddot{x}=-kx-c\dot{x}$ درمی‌آید، یا

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0 \qquad (۲۰.۳)$$

مانند حالت نامیرا از جواب آزمونی به‌صورت تابع نمایی e^{qt} بهره می‌گیریم. این‌تابع جواب معادله است، اگر به‌ازای تمام مقادیر t داشته باشیم

$$m\frac{d^2}{dt^2}e^{qt}+c\frac{d}{dt}e^{qt}+ke^{qt}=0 \qquad (۲۱.۳)$$

به عبارت دیگر، e^{qt} جواب معادلهٔ دیفرانسیل خواهد بود اگر q در معادلهٔ کمکی صدق کند. معادلهٔ کمکی با انجام مشتق‌گیری و حذف عامل مشترک e^{qt} درمعادلهٔ فوق، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$mq^2+cq+k=0 \qquad (۲۲.۳)$$

ریشه‌ها از روی فرمول معروف معادلهٔ درجه دوم به‌دست می‌آیند

$$q=\frac{-c\pm(c^2-4mk)^{1/2}}{2m} \qquad (۲۳.۳)$$

بسته به‌مقدار مبین c^2-4mk، ازنظر فیزیکی سه‌حالت متمایز وجود دارد:

۱. $c^2-4mk>0$ کندمیرایی

۲. $c^2-4mk=0$ میرایی بحرانی

۳. $c^2-4mk<0$ کندمیرایی

در خصوص این سه‌حالت به‌طور جداگانه بحث خواهیم کرد.

۱. درحالت تند میرایی، q دو مقدار(منفی) حقیقی مختلف دارد، که آنها را $-\gamma_1$ و $-\gamma_2$ می‌نامیم

$$q_1 = -\frac{c}{2m} + \left(\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}\right)^{1/2} = -\gamma_1$$

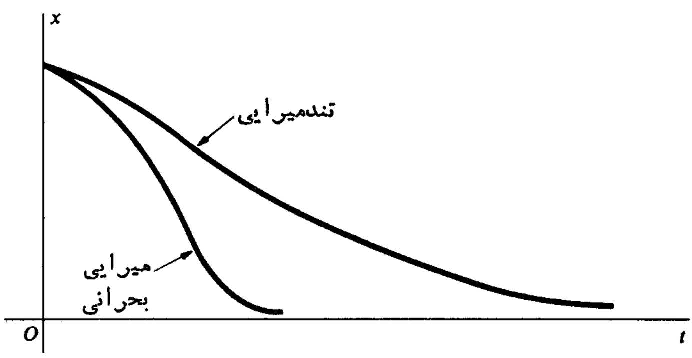
$$q_2 = -\frac{c}{2m} - \left(\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}\right)^{1/2} = -\gamma_2$$

بنابراین جواب عمومی ترکیبی خطی است به‌صورت

$$x(t) = A_1 e^{-\gamma_1 t} + A_2 e^{-\gamma_2 t} \qquad (۲۴.۳)$$

ثابتهای A_1 و A_2 از روی شرایط اولیه تعیین می‌شوند. چون هردو جمله فروافت‌نمایی را نشان می‌دهند، حرکت فیزیکی نیز از نوع فروافت‌نمایی با دو ثابت فروافت متفاوت به شمار می‌آید. اگر به‌این سیستم یك جابه‌جایی اولیه داده شود، بدون نوسان به‌وضعیت تعادل باز می‌گردد، یعنی غلبه با نیروی میران است که از انجام هرگونه حرکت دوره‌ای جلوگیری می‌کند (نمودار شکل ۷.۳).

۲. در حالت میرایی بحرانی دو ریشه مساوی‌اند: $q_1 = q_2 = -c/2m = -\gamma$. بدینسان فقط یك‌تابع، یك فروافت‌نمایی $e^{-\gamma t}$، به‌عنوان جواب معادلهٔ دیفرانسیل حرکت دراختیار داریم. لذا بایدتابع دیگری‌را بیابیم که درمعادلهٔ حرکت‌صدق‌کند تا بدین‌ترتیب جوابی عمومی شامل دو تابع مختلف و دوثابت متفاوت تشکیل دهیم؛ منظور از ضرورت یافتن این تابع آن است که جواب باید درخور شرایط مرزی دلخواه(جابه‌جایی و سرعت اولیه) باشد. برای یافتن جواب عمومی می‌توانیم به‌معادلهٔ دیفرانسیل اصلی (۲۰.۳)



شکل ۷.۳ نمودارهای جابه‌جایی برحسب زمان برای حالتهای تندمیرایی و میرایی بحرانی نوسانگرهماهنگ.

برگردیم، و باقراردادن $c^{2}/4m=k=\gamma^{2}m$، که شرطی برای ریشه‌های مساوی q به‌شمار آید، آن را بازنویسی کنیم. از آنجا بـه دست می‌آوریم $m(\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\gamma^{2}x)=0$، که پس‌از حذف m می‌توانیم از آن به‌صورت زیر فاکتورگیری کنیم

$$\left(\frac{d}{dt}+\gamma\right)\left(\frac{d}{dt}+\gamma\right)x=0$$

حال قرار می‌دهیم $u=\gamma x+dx/dt$، و در این صورت

$$\left(\frac{d}{dt}+\gamma\right)u=0$$

یا $du/dt=-\gamma u$. از انتگرال گرفتن این عبارت داریم: $\ln u=-\gamma t+A'$، یا

$$u=Ae^{-\gamma t}$$

که A' ثابت انتگرال‌گیری است و $A=\ln A'$. در این‌صورت، بنابـر تعریف u داریم $Ae^{-\gamma t}=\gamma x+dx/dt$ یا

$$A=\left(\gamma x+\frac{dx}{dt}\right)e^{\gamma t}=\frac{d}{dt}(xe^{\gamma t})$$

آنگـاه از انتگرال‌گیری دوم بـه‌عبـارت $At+B=xe^{\gamma t}$ مـی‌رسیم که B ثـابت دوم انتگرال‌گیری است. سرانجام، از حل این معادله برحسب x به‌جواب عمومی زیرمی‌رسیم

$$x(t)=(At+B)e^{-\gamma t}=Ate^{-\gamma t}+Be^{-\gamma t} \qquad (۲۵.۳)$$

بنابراین تابع دیگری که جستجویش مـی کردیم عبارت است از حـاصلضرب $te^{-\gamma t}$، که بازنمای نوعی حرکت کاهش یابنده است. جواب عمومی ما نشان می‌دهد که، مانند حالت تندمیرایی، حرکت غیرنوسانی است (نمودار شکل ۷.۳). اگر بـه جابـه‌جایی اولیه‌ای به‌سیستم داده شود، به‌طورمجانبی به‌وضعیت تعادل باز می‌گردد. میرایی بحرانی یا میرایی تقریباً بحرانی، درمواردی‌معین، نظیر تعلیقهای مکانیکی، بهینهٔ بازگشت به‌موضع تعادل را به‌بار می‌آورند.

۳. اگر ثابت مقاومت c چندان کوچك باشد که $c^{2}<4mk$، حالت کند میرایی را داریم. دراین حالت کمیت $c^{2}-4mk$ درمعادلـهٔ (۲۳.۳) منفی است؛ درنتیجه دومقدار q اعداد مختلط‌اند. بهتر است آنها را به‌شکل زیر بیان کنیم

$$q_{1}=-\frac{c}{2m}+i\left(\frac{k}{m}-\frac{c^{2}}{4m^{2}}\right)^{1/2}$$

$$q_{2}=-\frac{c}{2m}-i\left(\frac{k}{m}-\frac{c^{2}}{4m^{2}}\right)^{1/2}$$

حالا با کوتاه‌نویسی زیر آشنا شویم

$$\omega_d = \left(\frac{k}{m} - \frac{c^۲}{۴m^۲}\right)^{۱/۲} = (\omega_۰^۲ - \gamma^۲)^{۱/۲} \qquad (۲۶.۳)$$

که $\gamma = c/۲m$ و $\omega_۰ = (k/m)^{۱/۲}$. در این‌صورت

$$q_۱ = -\gamma + i\omega_d$$

$$q_۲ = -\gamma - i\omega_d$$

بنابراین جواب عمومی معادلهٔ حرکت را می‌توان به‌صورت ترکیب خطی زیر نوشت

$$x(t) = C_+ e^{(-\gamma + i\omega_d)t} + C_- e^{(-\gamma - i\omega_d)t} \qquad (۲۷.۳)$$

$$= e^{-\gamma t}(C_+ e^{i\omega_d t} + C_- e^{-i\omega_d t})$$

می‌بینیم که عبارت مختلط داخل پرانتز عیناً نظیر رابطه‌ای است که برای نوسانگر هماهنگ نامیرا به دست آمد، که در معادلهٔ (۶.۳) ω_d را به جای $\omega_۰$ قرار داده‌ایم. در نتیجه، می‌توانیم جواب عمومی را برحسب توابع مثلثاتی به‌صورت زیر بیان کنیم

$$x(t) = e^{-\gamma t}(A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t) \qquad (۲۸.۳)$$

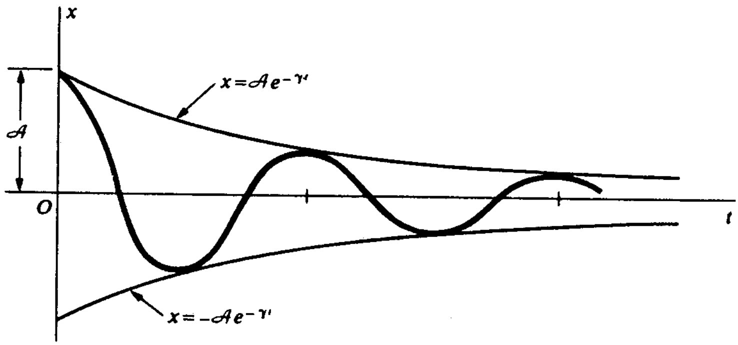
$$x(t) = e^{-\gamma t} \mathcal{A} \cos(\omega_d t - \varphi) \qquad (۲۹.۳)$$

که درآنها ثابتهای C_+، C_-، A، B، $\mathcal{A}$، و φ به‌همان طریق حالت نامیرا به‌هم مربوط می‌شوند $C_\pm = (A \mp iB)/۲$، $A^۲ + B^۲ = \mathcal{A}^۲$، و $\tan\varphi = B/A$.

شاید با ملاحظهٔ معادلهٔ (۲۹.۳)، بتوان به‌بهترین وجهی حرکت فیزیکی را تفسیر کرد. می‌بینیم که حرکت به‌وسیلهٔ حاصلضرب فروافت‌نمایی و نوسان سینوسی به‌بسامد زاویه‌ای ω_d مشخص‌می‌شود. چون بنابر معادلهٔ (۲۶.۳) ω_d کمتر از $\omega_۰$ است، وجودمیرایی باعث می‌شود که نوسان، کندتر از آنچه در غیاب میرایی می‌بایست باشد، صورت گیرد. دورهٔ تناوب متناظر آن، T_d، عبارت است از دورهٔ تناوب طبیعی نوسانگر هماهنگی با حرکت آزاد همراه با میرایی

$$T_d = ۲\pi/\omega_d = ۲\pi/(\omega_۰^۲ - \gamma^۲)^{۱/۲} \qquad (۳۰.۳)$$

نمودار حرکت درشکل (۸.۳) نشان داده شده است. درمعادلهٔ (۲۹.۳) می‌بینیم که دو منحنی مشخص‌شده با $x = \mathcal{A}e^{-\gamma t}$ و $x = -\mathcal{A}e^{-\gamma t}$ پوش منحنی حرکت را تشکیل می‌دهند، زیرا ضریب کسینوس مقادیری بین ۱+ و ۱− و نیز ۱+ و ۱− را می‌پذیرد، که در هریك ازاین نقاط منحنی حرکت پوش را لمس می‌کند. به‌همین ترتیب، نقاط تماس با فاصلهٔ زمانی نصف دورهٔ تناوب $T_d/۲$ از یکدیگر فاصله دارند. اما، این نقاط کاملا



شکل ۸۰۳ نمودار جابه‌جایی برحسب زمان در نوسانگر هماهنگ کندمیرا.

هم بیشینه‌ها وکمینه‌های جابه‌جایی نیستند. خواننده باید نشان‌دهدکه فاصلهٔ زمانی بیشینه‌ها وکمینه‌ها نیز عملا همین مقدار است. در یك‌دورهٔ تناوب‌کامل دامنه با ضریب $e^{-\gamma T_d}$کاهش می‌یابد؛ همچنین، در زمان $\gamma^{-1} = 2m/c$ دامنه با ضریب $e^{-1} = 0/3679$ فرو می‌افتد.

به‌طور خلاصه، تحلیل ما از نوسانگر هماهنگی کـه آزادانه حرکت می‌کند نشان داده است‌که حضور میرایی از نوع خطی باعث می‌شود این نوسانگر،کـه حرکت اولیه به‌آن داده شده است، سرانجام‌دروضعیت تعادل به سکون برگردد. برگشت به‌حالت تعادل چه‌نوسانی بـاشد، چه نباشد، بـه مقدار میرایی بستگی دارد. شرط بحرانی،که با عبارت $c^2 = 4mk$ تعیین می‌شود، حالتی حدی از مد غیر نوسانی بازگشت را مشخص می‌کند.

تعلیقهای مکانیکی

سیستمی مکانیکی را با میرایی خطی درنظر بگیرید. به‌ازای مقادیر معینی از ثابت میرایی c و سفتی k، معیار تعیین نوع میرایی مقدار جرم است. اگر سیستم به‌ازای جرم بحرانی معین m_{crit}، میرای بحرانی‌شود، داریم $c^2 = 4km_{crit}$. دراین‌صورت مبین عبارت‌است‌از

$$c^2 - 4km = 4k(m_{crit} - m)$$

بدینسان بسته به اینکه جرم‌کمتر یا بیشتراز m_{crit} باشد، سیستم به‌ترتیب تندمیرا یاکندمیرا خواهد شد. دراین‌صورت، در سیستم تعلیق اتومبیل (فنرهـا و کمك فنرها) افـزایش بار (مسافرین) بـاعث می‌شود که سیستم به‌کندمیرایی یا نوسانی‌گرایش پیداکند، حال آنکه کاهش بار به‌وضعیت خشکتر(سفت‌تر)،وغیرنوسانی می‌انجامد.

ملاحظات مربوط به‌انرژی

انرژی‌کل نوسانگر هماهنگ میرا از مجموع انرژیهای جنبشی و پتانسیل به‌دست می‌آید

$$E=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2$$

به‌طوری که قبلاً گفتیم، این انرژی درمورد نوسانگر نامیرا ثابت است. از عبارت بالا نسبت به t مشتق بگیریم

$$\frac{dE}{dt}=m\dot{x}\ddot{x}+kx\dot{x}=(m\ddot{x}+kx)\dot{x}$$

حال معادلهٔ دیفرانسیل حرکت عبارت است از $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0$ یا $m\ddot{x}+kx=-c\dot{x}$. بنابراین درمورد آهنگ زمانی تغییر انرژی کل می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{dE}{dt}=-c\dot{x}^2$$

می‌بینیم که مشتق زمانی انرژی کل عبارت است از حاصلضرب نیروی میران و سرعت. چون این کمیت همواره صفریا منفی است، انرژی کل پیوسته کاهش می‌یابد، و مانند دامنه، سرانجام بسیار ناچیز می‌شود. انرژی به‌صورت گرمای اصطکاکی ناشی‌از مقاومت چسبنده درمقابل حرکت، تلف می‌شود.

مثالها

۴۰۳ سیستم تعلیق اتومبیلی به‌طور بحرانی میرا می‌شود، و دورهٔ تناوب نوسان آزاد آن بدون میرایی یك ثانیه است. اگر سیستم در ابتدا به اندازهٔ x_0 جابه‌جا شده باشد، و با سرعت اولیهٔ صفر رها شود، جابه‌جایی را در $t=1s$ بیابید.

حل: برای میرایی بحرانی داریم $\gamma=c/2m=(k/m)^{1/2}=\omega_0=2\pi/T_0$. چون $T_0=1s$، بنابراین دراین‌حالت $\gamma=2\pi\ s^{-1}$. حال عبارت کلی مربوط به‌جابه‌جایی درمورد میرایی بحرانی، معادلهٔ (۲۵۰۳)، به‌صورت $x(t)=(At+B)e^{-\gamma t}$ است، ازاین‌رو به‌ازای $t=0$، داریم $x_0=B$. بامشتق گیری، داریم $\dot{x}(t)=(A-\gamma B-\gamma At)e^{-\gamma t}$ که می‌دهد $\dot{x}_0=A-\gamma B=0$، از این‌رو در مسئلهٔ ما: $A=\gamma B=\gamma x_0$. به همین ترتیب، عبارت

$$x(t)=x_0(1+\gamma t)e^{-\gamma t}=x_0(1+2\pi t)e^{-2\pi t}$$

جابه‌جایی برحسب تابعی از زمان است. به‌ازای $t=1\ s$، به دست می‌آوریم: $x_0(1+2\pi)e^{-2\pi}=x_0(7/28)e^{-6/28}=0/0136x_0$. سیستم عملا به وضعیت تعادل بازگشته است.

۵۰۳ بسامد نوسانگر هماهنگ میرا نصف بسامد همان نوسانگر بدون میرایی است. نسبت

بیشینهٔ نوسانهای متوالی را بیابید.

حل: داریم $\omega_d=\frac{۱}{۲}\omega_۰=(\omega_۰^۲-\gamma^۲)^{۱/۲}$ که ازاینجا، $\gamma^۲-\omega_۰^۲=\omega_۰^۲/۴$، ازاین‌رو $\gamma=\omega_۰(۳/۴)^{۱/۲}$. درنتیجه

$$\gamma T_d=\omega_۰(۳/۴)^{۱/۲}[۲\pi/(\omega_۰/۲)]=۱۰٫۸۸$$

بنابراین نسبت دامنه عبارت است از

$$e^{-\gamma T_d}=e^{-۱۰٫۸۸}=۰٫۰۰۰۰۲$$

یعنی نوسانگر با میرایی زیاد.

۶.۳ سرعت نهایی توپ بیسبالی هنگام سقوط آزاد $۳۰\mathrm{m/s}$ به‌دست آمده است. با فرض آنکه مقاومت پس‌کشی هوا خطی باشد، اثر مقاومت هوا را بر آونگ ساده‌ای، که به‌جای «گلولهٔ» آن از توپ بیسبال استفاده شده است، محاسبه کنید.

حل: در فصل ۲، سرعت نهایی را در حالتی که مقاومت پس‌کشی هوا خطی بود، به‌صورت $v_t=mg/c_۱$ به‌دست می‌آوریم، که $c_۱$ ضریب مقاومت پس‌کشی خطی است. از اینجا ثابت میرایی نمایی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\gamma=\frac{c_۱}{۲m}=\frac{(mg/v_t)}{۲m}=\frac{g}{۲v_t}=\frac{۹٫۸\mathrm{ms^{-۲}}}{۶۰\mathrm{ms^{-۱}}}=۰٫۱۶۳\mathrm{s^{-۱}}$$

درنتیجه، دامنهٔ آونگ بیسبال با ضریب $e^{-۱}$ در زمان $\gamma^{-۱}=۶٫۱۳\mathrm{s}$ افت می‌کند. توجه کنید که این زمان از طول آونگ مستقل است. قبلا، درمثال ۲.۳، نشان دادیم که بسامد زاویه‌ای نوسان آونگ ساده به‌طول l در نوسان کوچك دامنه ازعبارت $\omega_۰=(g/l)^{۱/۲}$ به‌دست می‌آید. بنابراین، از معادلهٔ (۳۰.۳) دورهٔ تناوب آونگ برابر است با

$$T_d=۲\pi(\omega_۰^۲-\gamma^۲)^{-۱/۲}=۲\pi\left(\frac{g}{l}-۰٫۰۲۶۵\mathrm{s^{-۲}}\right)^{-۱/۲}$$

در حالت خاص، برای «آونگ ثانیه» بیسبال، که در آن نصف دورهٔ تناوب در غیاب میرایی یك‌ثانیه است، داریم $g/l=\pi^۲$، ازاین‌رو نیم‌دورهٔ تناوب باوجود میرایی عبارت است از

$$\frac{T_d}{۲}=\pi(\pi^۲-۰٫۰۲۶۵)^{۱/۲}\mathrm{s}=۱٫۰۰۱۳۴\mathrm{s}$$

در جواب ما اثرمقاومت هوا قدری با مبالغه به‌دست آمده است، زیرا تابع پس‌کشی برای

توپ بیسبال، جز درسرعتهای خیلی کم، به‌جای اینکه خطی باشد تقریباً درجه دوم است، دربخش ۵.۲ نیز دراین خصوص بحث کردیم.

۵.۳ حرکت هماهنگ واداشته. تشدید

دراین بخش حرکت نوسانگر هماهنگ میرا را که نیرویی‌خارجی، F_{ext}، آن را به‌حرکت وا داشته است، مطالعه خواهیم کرد. دراین‌صورت، نیروی کل وارد آمده، مجموع سه‌نیرو است: نیروی بـاز گـرداننده‌ٔ کشسان $-kx$، نیروی میران چسبنده $-c\dot{x}$، و نیروی محرك F_{ext}. بنابراین،معادلهٔ دیفرانسیل‌حرکت به‌صورت $-kx-c\dot{x}+F_{ext}=m\ddot{x}$ درمی‌آید، که پس‌از جابه‌جایی جملات عبارت خواهد بود از

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F_{ext} \qquad (۳۱.۳)$$

درحالت خاص، توجه ما به‌حرکتی است‌که نیرویی از نـوع هماهنگ آن را ایجادکرده باشد، یعنی، وقتی تغییرات F_{ext} با زمان سینوسی باشد. در این‌صورت می‌توانیم آن را به‌شکل $F_{ext}=F_{\circ}\cos\omega t$ بگیریم که $F_{\circ}$ دامنه و ω بسامد زاویه‌ای نیروی محرك است. گرچه حل معادلهٔ دیفرانسیل با به بهره‌گیری ازشکل مثلثاتی بالا برای نیروی محرك خیلی سرراست است، استفاده ازشکل نمایی مختلط از لحاظ جبری آسانتر است

$$F_{ext}=F_{\circ}e^{i\omega t}$$

و از این‌رو

$$m\ddot{X}+c\dot{X}+kX=F_{\circ}e^{i\omega t} \qquad (۳۲.۳)$$

اینك متغیر X از لحاظ ریاضی عددی مختلط است. اما لازم نیست خودمان را به دردسر اندازیم، زیرا اگر جواب معادلهٔ فوق را بیابیم، می‌توانیم مطمئن باشیم‌که اجزای حقیقی دوطرف مساوی‌اند (مانند اجزای موهومی)، و همان جزء حقیقی است‌که حرکت فیزیکی را نشان می‌دهد.

جواب معادلهٔ دیفرانسیل خطی بالا از مجموع ایـن دو جزء به دست می‌آید: جزء اول جواب معادلهٔ همگن $m\ddot{X}+c\dot{X}+kX=\circ$ است که قبلا آن را در بخش پیش حل کرده‌ایم؛ جزء دوم آن جوابی خصوصی است‌کـه مـی‌توانیم آن‌را بیابیم. همان‌طورکه می‌دانیم، جواب معادلهٔ همگن نمایش حرکت نوسانی، یـا غیرنـوسانی است‌که سرانجام به‌صفرکاهش‌می‌یابد، و جملهٔ‌گذرا[۱] نامیده می‌شود. دراینجا جوابی را می‌خواهیم‌که به‌ماهیت نیروی محرك بستگی دارد. دامنهٔ این نیرو ثـابت است و خودش نسبت به زمان بـه‌طور سینوسی تغییر می‌کند: از این‌رو از لحاظ منطقی می‌توانیم انتظار داشته باشیم‌که جوابی برای جابه‌جایی X بیابیم که همان بستگی زمانی سینوسی را داشته باشد. بنابراین، برای شرط حالت پایا، به‌دنبال راه‌حلی ازنوع نمایی مختلط به‌صورت زیر می‌گردیم

$$X(t)=Ae^{i(\omega t-\varphi)} \qquad (۳۳.۳)$$

در اینجا دامنهٔ A و اختلاف فاز φ ثابتهایی‌اندکه باید آنها را تعیین کرد. اگر این «حدس» درست باشد، باید رابطهٔ

$$m\frac{d^{۲}}{dt^{۲}}Ae^{i(\omega t-\varphi)}+c\frac{d}{dt}Ae^{i(\omega t-\varphi)}+kAe^{i(\omega t-\varphi)}=F_{\circ}e^{i\omega t}$$

به‌ازای تمام مقادیر t برقرار باشد. با انجام عملیات نشان داده شده و حذف ضریب مشترك $e^{i\omega t}$، خواهیم داشت

$$-m\omega^{۲}A+i\omega cA+kA=F_{\circ}e^{i\varphi}=F_{\circ}(\cos\varphi+i\sin\varphi) \qquad (۳۴.۳)$$

با مساوی قرار دادن اجزای حقیقی و موهومی، دو معادله حاصل می‌شود

$$A(k-m\omega^{۲})=F_{\circ}\cos\varphi \qquad (۳۵.۳)$$

$$c\omega A=F_{\circ}\sin\varphi$$

با تقسیم طرفین‌معادلهٔ دوم برمعادلهٔ اول، و بهره‌گیری ازتساوی $\tan\varphi=\sin\varphi/\cos\varphi$، رابطهٔ زیر را برای زاویهٔ فاز به‌دست می‌آوریم

$$\tan\varphi=\frac{c\omega}{k-m\omega^{۲}} \qquad (۳۶.۳)$$

طرفین معادلات (۳۵.۳) را بـه‌توان دو می‌رسانیم و آنها را با هم جمع می‌کنیم، آنگاه با بهره‌گیری از تساوی $\sin^{۲}\varphi+\cos^{۲}\varphi=۱$ خواهیم یافت

$$A^{۲}(k-m\omega^{۲})^{۲}+c^{۲}\omega^{۲}A^{۲}=F_{\circ}^{۲}$$

سپس می‌توانیم این معادله را بـرحسب A، دامنهٔ نوسان حالت پایـا، به صورت تابعی از بسامد محرك حل کنیم

$$A(\omega)=\frac{F_{\circ}}{[(k-m\omega^{۲})^{۲}+c^{۲}\omega^{۲}]^{۱/۲}} \qquad (۳۷.۳)$$

به‌کمك کوتاه نویسیهای قبلیمان، $\omega_{\circ}^{۲}=k/m$ و $\gamma=c/۲m$، مـی‌توانیم این عبارتها را به‌شکل دیگری بنویسیم

$$\tan\varphi=\frac{۲\gamma\omega}{\omega_{\circ}^{۲}-\omega^{۲}} \qquad (۳۸.۳)$$

$$A(\omega)=\frac{F_{\circ}/m}{[(\omega_{\circ}^{۲}-\omega^{۲})^{۲}+۴\gamma^{۲}\omega^{۲}]^{۱/۲}} \qquad (۳۹.۳)$$

$$A(\omega)=\frac{F_\circ/m}{D(\omega)} \qquad \text{(۳۹.۳ الف)}$$

که $D(\omega)=[(\omega_\circ^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2]^{1/2}$.

نتیجهٔ بالا که دامنه و فاز نوسانگر هماهنگ میرا تحت تأثیر نیروی محرك سینوسی را به‌هم مربوط می‌کند، از اهمیت اساسی برخوردار است. ترسیم نمودار $A(\omega)$ برحسب ω (شکل ۹.۳) نشان می‌دهد که مقدار دامنه به‌ازای بسامد معین ω_r بیشینه می‌شود، ω_r را بسامد تشدید دامنه، یا به بیان ساده، بسامد تشدید می‌گویند. تابع $D(\omega)$ را که در بالا تعریف‌کردیم مخرج تشدید نام دارد.

برای یافتن ω_r کمیت $dA/d\omega$ را از معادلهٔ (۳۹.۳) محاسبه می‌کنیم و نتیجه را مساوی صفر قرار می‌دهیم. سرانجام، با حل معادلهٔ حاصل برحسب ω، خواهیم داشت

$$\omega_r=(\omega_\circ^2-2\gamma^2)^{1/2} \qquad \text{(۴۰.۳)}$$

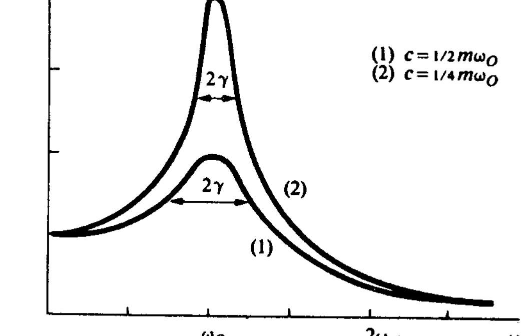
درحالت میرایی ضعیف، یعنی در حالتی که γ درمقایسه با $\omega_\circ$ خیلی کوچك باشد، بسامد تشدید فقط مقداری جزئی با $\omega_\circ$، بسامد نوسانگر نامیرا با حرکت آزاد، تفاوت دارد. همچنین‌ازآنجا که بسامد زاویه‌ای نوسانگر با حرکت‌میرا از رابطهٔ $\omega_d=(\omega_\circ^2-\gamma^2)^{1/2}$ به‌دست می‌آید، داریم

$$\omega_r=(\omega_d^2-\gamma^2)^{1/2} \qquad \text{(۴۱.۳)}$$

اگر $\gamma\geqslant\omega_\circ/\sqrt{2}$، در فرین میرایی قوی، هیچ تشدید دامنه‌ای رخ نمی‌دهد، زیرا در این‌صورت دامنه‌به‌تابع یکنوای نزولی از ω تبدیل می‌شود. برای‌ملاحظهٔ این امر،حالت حدی $\gamma^2=\omega_\circ^2/2$ را درنظر بگیرید. بدین ترتیب، معادلهٔ (۳۹.۳) می‌شود

$$A(\omega)=\frac{F_\circ/m}{[(\omega_\circ^2-\omega^2)^2+2\omega_\circ^2\omega^2]^{1/2}}=\frac{F_\circ/m}{(\omega_\circ^4+\omega^4)^{1/2}}$$

که به‌ازای مقادیر افزایندهٔ ω، که از $\omega=\circ$ شروع می‌شود، آشکارا کاهش می‌یابد.



شکل ۹.۳ نمودارهای نمایانگر دامنه برحسب بسامد محرك به‌ازای دومقدار ثابت میران.

دامنهٔ نوسان در قلهٔ تشدید

دامنهٔ حالت پایا در بسامد تشدید، که آن را A_{max} خواهیم نامید، از معادلات(۳۹.۳) و (۴۰.۳) به‌دست می‌آید. نتیجه عبارت است از

$$A_{max}=\frac{F_\circ/m}{2\gamma\sqrt{\omega_\circ^2-\gamma^2}}=\frac{F_\circ}{c\omega_d} \tag{۴۲.۳}$$

درحالت میرایی ضعیف، می‌توانیم از γ^2 چشم بپوشیم

$$A_{max}\simeq\frac{F_\circ}{2\gamma m\omega_\circ}=\frac{F_\circ}{c\omega_\circ} \tag{۴۲.۳ الف}$$

بنابراین، هرگاه ثابت میرایی c خیلی کوچك باشد، دامنهٔ نوسان واداشته در وضعیت تشدید خیلی بزرگ می‌شود، و بـرعکس. درسیستمهای مکانیکی ممکن است دامنه‌هـای تشدیدی بزرگ مطلوبمان باشد، شاید هم به‌این نوع دامنه‌ها نیازی نباشد. مثلا، در مورد موتورهای الکتریکی پایه‌های لاستیکی یا فنری برای به‌حداقل رساندن انتقال ارتعاش به‌کارمی‌روند. سفتی این پایه‌ها طوری انتخاب می‌شوند تا اطمینان یابند که بسامد تشدید حاصل در آنها با بسامدکار موتور خیلی تفاوت دارد.

تیزی تشدید. ضریب کیفیت

به‌تیزی قلهٔ تشدید درموارد زیادی برمی‌خوریم. حالت میرایی ضعیف، $\gamma\ll\omega_\circ$، رادرنظر بگیریم. در این صورت در عبارت مربوط به‌دامنهٔ حالت پایا، معادلهٔ (۳۹.۳)، می‌توانیم جانشانیهای زیر را انجام دهیم

$$\omega_\circ^2-\omega^2=(\omega_\circ+\omega)(\omega_\circ-\omega)$$
$$\simeq 2\omega_\circ(\omega_\circ-\omega)$$

$$\gamma\omega\simeq\gamma\omega_\circ$$

این عبارتها، همراه عبارتی مربوط بـه A_{max}، این امکان را برای ما فراهم می‌آورند که معادلهٔ دامنه را به‌شکل تقریبی زیر بنویسیم

$$A(\omega)\simeq\frac{A_{max}\gamma}{\sqrt{(\omega_\circ-\omega)^2+\gamma^2}} \tag{۴۳.۳}$$

بنابر معادلهٔ بالا هرگاه $\gamma=|\omega_\circ-\omega|$، یا معادل آن، هرگاه

$$\omega=\omega_\circ\pm\gamma$$

دراین صورت، داریم

$$A^{۲}=\frac{۱}{۲}A_{max}^{۲}$$

یعنی γ معیار پهنای منحنی تشدید است. بدین صورت ۲γ عبارت است از اختلاف بسامد بین نقاطی که در آن نقاط انرژی بـا ضریب ۱/۲ کمتر از انرژی درحالت تشدید است، زیرا انرژی با $A^{۲}$ متناسب است (شکل ۹.۳).

شیوهٔ دیگری برای مشخص کردن تیزی قلهٔ تشدید، انجام این کار به‌کمك ضریب Q است؛ این کمیت را ضریب کیفیت سیستم تشدیدی می گویند. این‌ضریب بنا برتعریف عبارت است از

$$Q=\frac{\omega_d}{۲\gamma} \qquad (۴۴.۳)$$

یا، درحالت میرایی ضعیف

$$Q\simeq\frac{\omega_{\circ}}{۲\gamma} \qquad (\text{الف } ۴۴.۳)$$

بنابراین پهنای کل $\Delta\omega$ درنقاطی با انرژی نصف، تقریباً برابر است با

$$\Delta\omega=۲\gamma\simeq\frac{\omega_{\circ}}{Q}$$

یا، چون $\omega=۲\pi f$، عبارت

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_{\circ}}=\frac{\Delta f}{f_{\circ}}\simeq\frac{۱}{Q} \qquad (۴۵.۳)$$

پهنای قلهٔ تشدید را به‌صورت کسری به‌دستمان می‌دهد. درشکل ۹.۳ مقدار Q برای منحنی (۱) برابر ۲ و برای منحنی (۲) برابر ۴ است.

نوسانگرهای بلورکوارتزکه بـه‌طریق الکتریکی راه‌اندازی می‌شوند برای کنترل چیزهـایی نظیر ساعت مچی و بسامد ایستگاههای فـرستندهٔ رادیویی مورد استفاده قرار می‌گیرند. Q مربوط به‌بلورهای کوارتزدرچنین مواردی از مرتبهٔ $۱۰^{۴}$ است. از این مقادیر زیاد Q، اطمینان حاصل می‌شودکه بسامد نوسان دقیقاً دربسامد تشدید باقی بماند.

زاویهٔ فاز

اختلاف فاز بین نیروی‌محرك وارده و عکس‌العمل حالت پایا بـه وسیلهٔ معادلهٔ (۳۸.۳)، یعنی $[\varphi=\tan^{-۱}[۲\gamma\omega/(\omega_{\circ}^{۲}-\omega^{۲})]$ به‌دست می آید. این رابطه‌که منحنی تغییرات آن

درشکل ۱۰.۳ ترسیم شده است، تغییرات φ را برحسب بسامد محرك ω نشان می‌دهد. در $\omega = 0$ اختلاف فاز صفر است و به‌ازای مقادیر کوچك ω همچنان کـوچك باقی می‌ماند، از این‌رو عکس‌العمل با نیروی محرك همفاز است. درنزدیکی بسامد تشدید، در واقع در $\omega = \omega_0$، زاویهٔ فاز φ تا مقدار $\pi/2$ افزایش‌می‌یابد و بنابراین عکس‌العمل دراین بسامد بـا نیروی محرك، 90° اختلاف فاز دارد. سرانجام، به‌ازای مقادیر بزرگ ω، مقدار φ به π نزدیك می‌شود، بدینسان حـرکت سیستم نسبت به‌نیروی محرك دقیقاً 180° اختلاف فاز دارد.

تشدید سرعت

حرکت واقعی نوسانگر هماهنگ واداشته با اختیار کردن جزء حقیقی هردوطرف معادلهٔ (۳۳.۳)، بیان می‌شود، یعنی

$$x(t) = A(\omega)\cos(\omega t - \varphi) \qquad (۴۶.۳)$$

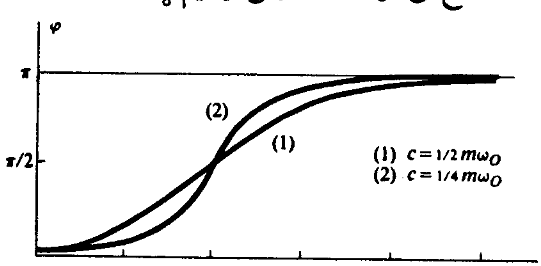
که $A(\omega)$ از معادلهٔ (۳۷.۳) یا از معادلهٔ (۳۹.۳) تعیین می‌شود. گاهی لازم است بدانیم کـه سرعت نـوسانگر هماهنگ واداشته چگونـه بـا بسامد تغییر می‌کند. مثلا، انـواع تراگذرهـای الکتریکی مشخصی که بـرای دیدبانی ماشین‌آلات مرتعش به‌کار می‌روند، خروجیهایی‌تولید می‌کنندکه به‌جای آنکه باجابه‌جایی متناسب باشند، با سرعت متناسب‌اند. با مشتق گیری نسبت به زمان از معادلهٔ بالا خواهیم داشت

$$\dot{x}(t) = -\omega A(\omega)\sin(\omega t - \varphi) \qquad (۴۷.۳)$$

بنابراین حاصلضرب $\omega A(\omega)$ را می‌توان دامنهٔ سرعت نوسانگر هماهنگ واداشته دانست، زیرا $x(t)$ بین $-\omega A(\omega)$ و $+\omega A(\omega)$ تغییرمی کند. که‌آن‌را $v(\omega)$ می‌نامیم، به‌طوری که

$$v(\omega) = \frac{\omega F_0/m}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]^{1/2}} \qquad (۴۸.۳)$$

اکنون تمرینی سرراست، ولی اندکی خسته‌کننده، عبارت ازاین است که نشان دهند مقدار بیشینه $v(\omega)$ در $\omega = \omega_0$ واقع می‌شود. بدینسان‌می‌توانیم ω_0 را بسامد تشدید سرعت‌بدانیم.



شکل ۱۰.۳ نمودارهای زاویهٔ فاز برحسب بسامد محرك به‌ازای دومقدار ثابت میرایی.

همان‌طور که قبلاً گفتیم، درمورد میرایی ضعیف، بسامد تشدید دامنه، ω_r، فقط اندکی با $\omega_\circ$ تفاوت دارد، بـه‌طوری‌که در آن حـالت، بسامدهای تشدید هم برای سرعت و هم دامنه تقریباً مساوی‌اند. ولی، درمورد میرایی قوی پی‌بردیم که به‌ازای $\gamma > \omega_\circ / \sqrt{2}$، هیچ تشدید دامنه‌ای رخ نمی‌دهند. در مـورد تشدید سرعت چنین نیست؛ تـابع دامنهٔ سرعت، $v(\omega) = \omega A(\omega)$، در $\omega = \omega_\circ$ به‌ازای هرمقدار ضریب میرایی γ، یك بیشینه ارائه‌می‌دهد.

شباهت مکانیکی-الکتریکی

وقتی درمداری متشکل از عناصرالقایی، ظرفیتی، ومقاومتی جریان الکتریکی برقرار شود، با سیستم مکانیکی متحرکی شامل جرمها و فنرها با نیروهای اصطکاکی، از نوعی که قبلاً مورد مطالعه قـرار گرفت، تشابه دقیقی دارد. بنابراین اگر جـریان $i = dq/dt$ (q بار الکتریکی است) ازیك القاگر L بگذرد، اختلاف پتانسیل در دوسر القاگر عبارت است از $L\ddot{q}$ و انرژی ذخیره شده در آن $\frac{1}{2}L\dot{q}^2$ خواهد بود. از این‌رو القاگر و بار، به‌ترتیب، مشابه جرم و جابـه‌جایی‌اند، و اختلاف پتانسیل به‌نیرو شباهت دارد. به همین نحو، اگر خازن C حامل بار q باشد، اختلاف پتانسیل عبارت خواهد بود از $C^{-1}q$ و انرژی‌ذخیره شده درآن $\frac{1}{2}C^{-1}q^2$ است. ازاین قرارمی‌بینیم که ثابت سفتی فنر با عکس C شبیه است. سرانجام، به‌ازای جریان الکتریکی i که از مقاومت R می‌گذرد، اختلاف پتانسیل عبارت است از $iR = \dot{q}R$، و آهنگ اتلاف انـرژی برابر با $i^2R = \dot{q}^2R$ خواهد بود که مشابه کمیت $c\dot{x}^2$ در سیستم مکانیکی است. درجدول ۱.۳ این تشابه جمع‌بندی شده‌است.

جدول ۱۰۳ تشابه مکانیکی-الکتریکی

مکانیکی		الکتریکی	
x	جابه‌جایی	q	بار
$\dot{x}$	سرعت	$\dot{q} = i$	جریان
m	جرم	L	القاگر
k	سفتی	C^{-1}	عکس ظرفیت
c	مقاومت میران	R	مقاومت
F	نیرو	V	اختلاف پتانسیل

مثال

۷۰۳ ضریب میرایی نمایی γ در یك سیستم تعلیق فنری یك‌دهم مقدار بحرانی است. اگر بسامد نامیرا $\omega_\circ$ باشد، پیداکنید: (الف) بسامد تشدید، (ب) ضریب کیفیت، (ج) زاویهٔ فاز φ وقتی سیستم با بسامد $\omega = \omega_\circ / ۲$ واداشته می‌شود، و(د)دامنهٔ حالت‌پایا دراین بسامد.

حل: الف) داریم: $\gamma = \gamma_{crit}/۱۰ = \omega_\circ/۱۰$، بنابراین از معادلهٔ (۴۰.۳) به‌دست می‌آوریم

$$\omega_r = [\omega_\circ^۲ - ۲(\omega_\circ/۱۰)^۲]^{۱/۲} = \omega_\circ(۰٫۹۸)^{۱/۲} = ۰٫۹۹\omega_\circ$$

ب) این سیستم را می‌توان ضعیف میرا دانست، بنابراین، ازمعادلهٔ (۴۴.۳ الف)

$$Q \simeq \frac{\omega_\circ}{۲\gamma} = \frac{\omega_\circ}{۲(\omega_\circ/۱۰)} = ۵$$

ج) از معادلهٔ (۳۸.۳) داریم

$$\varphi = \tan^{-۱}\left(\frac{۲\gamma\omega}{\omega_\circ^۲ - \omega^۲}\right) = \tan^{-۱}\left[\frac{۲(\omega_\circ/۱۰)(\omega_\circ/۲)}{\omega_\circ^۲ - (\omega_\circ/۲)^۲}\right]$$

$$= \tan^{-۱} ۰٫۱۳۳ = ۷٫۶^\circ$$

د) از معادلات (۳۹.۳) و (۳۹.۳ الف)، ابتدا مقدار مخرج تشدید را محاسبه می‌کنیم

$$D(\omega = \omega_\circ/۲) = [(\omega_\circ^۲ - \omega_\circ^۲/۴)^۲ + ۴(\omega_\circ/۱۰)^۲(\omega_\circ/۲)^۲]^{۱/۲}$$

$$= [(۹/۱۶) + (۱/۱۰۰)]^{۱/۲}\omega_\circ^۲ = ۰٫۷۵۰۶\omega_\circ^۲$$

از اینجا، دامنه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$A(\omega = \omega_\circ/۲) = \frac{F_\circ/m}{۰٫۷۵۰۶\omega_\circ^۲} = ۱٫۳۳۲\frac{F_\circ}{m\omega_\circ^۲}$$

توجه کنید که ضریب $(F_\circ/m\omega_\circ^۲) = F_\circ/k$ دامنهٔ حالت پایا برای بسامد تحریك صفر است.

۶.۳ نوسانگر غیرخطی. روش تقریبهای متوالی

وقتی سیستمی از وضعیت تعادل خود جابه‌جا شود، ممکن است نیروی بازگردان به‌شیوه‌ای غیر از تناسب مستقیم با جابه‌جایی، تغییر کند. مثلا، ممکن است فنری دقیقاً ازقانون هوك پیروی نکند؛ همچنین درحالتهای فیزیکی متعددی، تابع نیروی بازگردان ذاتاً غیرخطی است، این‌حالت در مثال ساده‌ای که بعداً درخصوص آونگ ساده مـی‌آوریم، موردبحث قرار خواهد گرفت.

درحالت غیرخطی، نیروی بازگرداننده را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد

$$F(x) = -kx + \varepsilon(x) \qquad (۴۹.۳)$$

که در آن تابع $\varepsilon(x)$ عزیمت از حالت خطی را نشان می‌دهد. این تابع لزوماً برحسب متغیر جابه‌جایی x از مرتبهٔ درجه دوم یا بالاتر است. معادلهٔ دیفرانسیل حرکت تحت‌تأثیر چنین نیرویی را، به‌فرض آنکه هیچ نیروی خارجی دیگری تأثیر نکند، می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$m\ddot{x} + kx = \varepsilon(x) = \varepsilon_2 x^2 + \varepsilon_3 x^3 + \cdots \qquad (۵۰.۳)$$

در اینجا $\varepsilon(x)$ را به‌صورت سری توانی بسط داده‌ایم.

معمولا برای رسیدن به‌جواب معادله‌ای از نوع بالا به‌بهره‌گیری ازروشهای تقریبی نیاز داریم. برای نشان دادن یکی از این روشها، حالت خاصی را که درآن فقط جملهٔ مکعبی در $\varepsilon(x)$ حائز اهمیت باشد، انتخاب می کنیم. دراین‌صورت داریم

$$m\ddot{x} + kx = \varepsilon_3 x^3 \qquad (۵۱.۳)$$

بعداز تقسیم طرفین‌بر m و گرفتن مجهول معاون به‌صورت: $\omega_0^2 = k/m$، $\varepsilon_3/m = \lambda$ می‌توانیم بنویسیم

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \lambda x^3 \qquad (۵۲.۳)$$

جواب را با روش تقریبهای متوالی به‌دست می‌آوریم.

می‌دانیم که به‌ازای $\lambda = 0$ جواب عبارت است از $x = A\cos\omega_0 t$. فرض کنید تقریب اول را به‌همین شکل بیازماییم

$$x = A\cos\omega t \qquad (۵۳.۳)$$

همان‌طور که خواهیم دید، ω کاملا هم با ω_0 مساوی نیست. جواب آزمونی خودمان را در معادلهٔ دیفرانسیل وارد می کنیم، داریم

$$-A\omega^2\cos\omega t + A\omega_0^2\cos\omega t = \lambda A^3\cos^3\omega t = \lambda A^3\left(\frac{3}{4}\cos\omega t + \frac{1}{4}\cos 3\omega t\right)$$

درمرحلهٔ آخر از تساوی مثلثاتی $\cos^3 u = \frac{3}{4}\cos u + \frac{1}{4}\cos 3u$ استفاده کرده‌ایم؛ این تساوی با بهره‌گیری از رابطهٔ $\cos^3 u = [(e^{iu} + e^{-iu})/2]^3$ به آسانی حاصل می‌شود. پس‌از جابه‌جایی جمله‌ها و دسته‌بندی آنها داریم

$$\left(-\omega^2 + \omega_0^2 - \frac{3}{4}\lambda A^2\right)A\cos\omega t - \frac{1}{4}\lambda A^3\cos 3\omega t = 0 \qquad (۵۴.۳)$$

با استثنا کردن جواب کم اهمیت $A=0$، می‌بینیم که جواب آزمونی ما دقیقاً در معادلهٔ دیفرانسیل صدق نمی‌کند. اما، با صفر قرار دادن کمیت داخل پرانتز تقریبی به‌مقدار ω که به‌ازای مقادیر کوچك λ صادق است، به دست می‌آوریم. با این عمل بسامد نوسانگر آزاد غیرخطی متحرك به‌صورت زیر حاصل می‌شود

$$\omega^2=\omega_0^2-\frac{3}{4}\lambda A^2 \qquad (55.3)$$

به‌طوری که ملاحظه می‌کنیم، ω تابعی از دامنهٔ A است.

برای دستیابی به جوابی بهتر باید جملهٔ دنباله‌ای شامل هماهنگ سوم، $\cos 3\omega t$، را در محاسبه وارد کنیم. بنابراین، جواب آزمونی دوم به‌شکل زیر درمی‌آید

$$x=A\cos\omega t+B\cos 3\omega t \qquad (56.3)$$

این عبارت را در معادلهٔ دیفرانسیل قرار دهیم، بعداز دسته‌بندی جملات، خواهیم داشت

$$\left(-\omega^2+\omega_0^2-\frac{3}{4}\lambda A^2\right)A\cos\omega t+\left(-9B\omega^2+\omega_0^2B-\frac{1}{4}\lambda A^3\right)\cos 3\omega t$$
$$+(\text{جملات شامل } B\lambda \text{ و مضربهای بالاتر } \omega t)=0$$

اگر کمیت داخل پرانتز اول را صفر قرار دهیم همان مقدار ω راکه دربالا پیدا کردیم، به‌دست می‌دهد. اگر کمیت داخل پرانتز دوم را صفر بگیریم، مقداری برای ثابت B به‌دست می‌آوریم، یعنی

$$B=\frac{\frac{1}{4}\lambda A^3}{-9\omega^2+\omega_0^2}=\frac{\lambda A^3}{-32\omega_0^2+27\lambda A^2}\simeq-\frac{\lambda A^3}{32\omega_0^2} \qquad (57.3)$$

که دراینجا فرض کرده‌ایم جملهٔ شامل λA^2 درمخرج چندان کوچك است که می‌توان از آن چشم پوشید. تقریب دوم را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد

$$x=A\cos\omega t-\frac{\lambda A^3}{32\omega_0^2}\cos 3\omega t \qquad (58.3)$$

$$\omega=\omega_0\left(1-\frac{3\lambda A^2}{4\omega_0^2}\right)^{1/2} \qquad (59.3)$$

ما در همین‌جا توقف می‌کنیم، اما این عمل می‌تواند تکرار شود تا تقریب سوم به‌دست آید، و به‌همین ترتیب الی آخر.

تحلیل بالا، مسلماً خیلی نارساست، ولی دوجنبهٔ اساسی نوسان آزادتحت‌تأثیر نیروی

باز گرداننده‌ٔ غیرخطی را آشکار می‌کند؛ یعنی، می‌توان فهمید که دورهٔ تناوب نوسان تابعی از دامنهٔ ارتعاش است، و نوسان دقیقاً سینوسی نیست بلکه می‌توان آن‌را به‌صورت برهم‌نهی آمیختهٔ هماهنگها دانست. می‌توان نشان داد که ارتعاش سیستم غیرخطی که به‌وسیلهٔ نیروی محرك سینوسی خالص انجام می‌شود نیز واپیچیده خواهد بود؛ یعنی هماهنگها را در بر خواهد گرفت. مثلا، بلندگوی گیرندهٔ رادیو یا سیستم «حساس»[1]، ممکن است بالا و پایین آنچه که توسط سیستم تقویت کنندهٔ الکترونیکی وارد شده است، واپیچش (هماهنگها) ایجاد کند.

مثال

۸.۳ آونگ ساده به‌عنوان نوسانگر غیرخطی. در بخشهای پیشین این فصل، مثال۲.۳، با بهره گیری از تقریب $\sin\theta \simeq \theta$، آونگ ساده را به‌عنوان نوسانگرهماهنگ خطی بررسی کردیم. در واقع، سینوس را می‌توان به‌صورت یك سری توانی بسط داد

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^{۳}}{۳!} + \frac{\theta^{۵}}{۵!} - \cdots$$

بنابراین معادلهٔ دیفرانسیل آونگ ساده، $\ddot{\theta} + (g/l)\sin\theta = ۰$، را می‌توان به‌شکل معادلهٔ (۵۰.۳) نوشت، و با نگه‌داشتن فقط جملات خطی و درجه سوم در بسط سینوس، معادلهٔ دیفرانسیل به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\ddot{\theta} + \omega_{۰}^{۲}\theta = \frac{\omega_{۰}^{۲}}{۳!}\theta^{۳}$$

که در آن $g/l = \omega_{۰}^{۲}$. این معادله از نظر ریاضی با معادلهٔ (۵۲.۳) با ثابت $\lambda = \omega_{۰}^{۲}/۳! = \omega_{۰}^{۲}/۶$ یکسان است. دراین‌صورت از عبارت تغییر یافتهٔ مربوط به بسامد زاویه‌ای، معادلهٔ (۵۹.۳)، خواهیم داشت

$$\omega = \omega_{۰}\left[۱ - \frac{۳(\omega_{۰}^{۲}/۶)A^{۲}}{۴\omega_{۰}^{۲}}\right]^{۱/۲} = \omega_{۰}\left(۱ - \frac{A^{۲}}{۸}\right)^{۱/۲}$$

و دورهٔ تناوب آونگ ساده چنین یافته خواهد شد

$$T = \frac{۲\pi}{\omega} = ۲\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(۱ - \frac{A^{۲}}{۸}\right)^{-۱/۲} = T_{۰}\left(۱ - \frac{A^{۲}}{۸}\right)^{۱/۲}$$

در اینجا A دامنهٔ نوسان برحسب رادیان‌است. روش تقریبی ما نشان می‌دهد که دورهٔ تناوب

---

۱. منظور سیستم‌های‌ـفی (hi–fi) است.

مربوط به‌دامنهٔ‌غیرصفر به‌اندازهٔ ضریب $(۱-A^۲/۸)^{-۱/۲}$ نسبت به‌دورهٔ تناوبی که قبلا با فرض $\sin\theta=\theta$ محاسبه کرده‌بودیم، طولانیتراست. مثلا، اگر آونگ با دامنهٔ $۹۰^\circ=\pi/۲$ نوسان کند (دامنهٔ نسبتاً بزرگ)، این ضریب عبارت است از ۱٫۲۰۲۵ $=(۱-\pi^۲/۳۲)^{-۱/۲}$، از این‌رو دورهٔ تناوب حدود ۲۰ درصد طولانیتر از دورهٔ تناوب مربوط به‌دامنهٔ کوچك است. این دورهٔ تناوب نسبت به‌افزایش مربوط به‌میرابی آونگ بیسبال، مثال ۶.۳، به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای بزرگتر است.

۷.۳* نیروی محرك غیرسینوسی. سری فوریه

برای تعیین حرکت یك نوسانگر هماهنگ که نیروی خارجی‌متناوبی که سینوسی «خالص» نیست آن را تحریك می‌کند، لازم است روشی را به‌کار گیریم که قدری مفصلتر از روش بخشهای قبل است. در این‌حالت کلیتر، بهتر است از اصل بر هم نهی بهره‌گیریم. این‌اصل درمورد هرسیستم که معادلهٔ دیفرانسیل خطی بر آن حاکم است، قابل‌اعمال است. درحالت مورد بحث ما، بنابراین اصل اگر نیروی محرك خارجی وارد بر نوسانگر هماهنگ میرا با یك برهم نهی از توابع نیرو، به‌صورت زیر بیان شود

$$F_{ext}=\sum_n F_n(t) \tag{۶۰.۳}$$

به‌نحوی‌که توابع $x_n(t)$ در هریك از معادلات دیفرانسیل

$$m\ddot{x}_n+c\dot{x}_n+kx_n=F_n(t)$$

صدق‌کنند، در این‌صورت جواب معادلهٔ دیفرانسیل‌حرکت

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F_{ext} \tag{۶۱.۳}$$

با برهم نهی زیر بیان می‌شود

$$x(t)=\sum_n x_n(t) \tag{۶۲.۳}$$

اعتبار این اصل به‌کمك جانشانی زیر به‌آسانی تأیید می‌شود

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=\sum_n(m\ddot{x}_n+c\dot{x}_n+kx)=\sum_n F_n(t)=F_{ext}$$

درحالت‌خاص، وقتی‌نیروی محرك متناوب‌باشد، یعنی، اگر به‌ازای هرمقدار زمان t داشته باشیم

---

* مانند فصل ۱، بخشهایی را که با ستاره مشخص شده‌اند، می‌توان بدون لطمه به‌پیوستگی مطالب، حذف کرد.

$$F_{ext}(t)=F_{ext}(t+T)$$

که T دورهٔ تناوب است، آنگاه می‌توان تابع نیرو را، بنابر قضیهٔ فوریه، به‌صورت یك برهم‌نهی ازجملات هماهنگ بیان کرد. برطبق این‌قضیه هر تابع دوره‌ای $f(t)$ را می‌توان به‌صورت مجموعی، مانند زیر، بسط داد

$$f(t)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t)] \qquad (۶۳.۳)$$

ضریبها از فرمولهای زیر (که آنها را در پیوست ز به‌دست می‌آوریم) حاصل می‌شوند

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\cos(n\omega t)\,dt \qquad n=0,1,2,\cdots \qquad (۶۴.۳)$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\sin(n\omega t)\,dt \qquad n=1,2,\cdots$$

در اینجا T دورهٔ تناوب و $\omega=2\pi/T$ بسامد پایه است. اگر تابع $f(t)$ تابعی زوج باشد، یعنی اگر $f(t)=f(-t)$، آنگاه به‌ازای تمام مقادیر n ضرایب عبارت‌اند از: $b_n=0$. این‌بسط سری را سری کسینوسی فوریه می‌گویند. به‌همین‌ترتیب، اگر تابعی فرد داشته باشیم به‌طوری‌که $f(t)=-f(-t)$، دراین‌صورت تمام a_nها صفر می‌شوند، و این‌سری را سری‌سینوسی فوریه می‌نامند. با بهره‌گیری از رابطهٔ $e^{iu}=\cos u+i\sin u$ تحقیق دراین‌خصوص که معادلات (۶۳.۳) و (۶۴.۳) را نیز می‌توان به‌شکل نمایی‌مختلط، به‌صورت زیر بیان کرد، آسان می‌شود

$$f(t)=\sum_n c_n e^{in\omega t} \qquad n=0,\pm1,\pm2,\cdots \qquad (۶۵.۳)$$

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{-in\omega t}dt \qquad (۶۶.۳)$$

بنابراین، برای یافتن حرکت حالت‌پایای نوسانگرهماهنگ که‌نیروی محرك‌دوره‌ای معینی بر آن وارد می‌آید، نیرو را به‌صورت سری فوریه به‌شکل معادلهٔ (۶۳.۳) یامعادلهٔ (۶۵.۳) بیان می‌کنیم، ضمناً از فرمولهای (۶۴.۳) یا (۶۶.۳) برای تعیین ضرایب a_n و b_n، یا c_n بهره می‌گیریم. به‌ازای هرمقدار n، متناظر با هماهنگ معین $n\omega$ از بسامدمحرك پایه، ω، یك تابع پاسخ $x_n(t)$ وجود دارد. این تابع عبارت است از جواب حالت‌پایای نوسانگر واداشته که در بخش ۵.۳ آن را بررسی کردیم. از برهم نهی همهٔ مقادیر $x_n(t)$ به حرکت واقعی می‌رسیم. در این‌صورت در رویدادی که یکی از هماهنگهای بسامد محرك منطبق، یا تقریباً منطبق، بر بسامد تشدید ω_r شود، پاسخ درآن هماهنگ، حرکت غالب خواهد بود. درنتیجه، اگر ثابت میرایی γ خیلی‌کوچك باشد، نوسان حاصل ممکن

است خیلی به‌نوسان‌سینوسی نزدیک شود، حتی اگر نیروی محرک کاملا غیرسینوسی به‌کار رود.

مثال

۹.۳ پالس دوده‌ای. برای توضیح نظریهٔ بالا، حرکت نوسانگر هماهنگی را که به وسیلهٔ نیروی خـارجی متشکل از یک رشته پالسهای متوالی راستگوشه تحریک می‌شود، تحلیل می کنیم.

$$F_{ext}(t)=F_\circ \qquad NT-\frac{۱}{۲}\Delta T\leqslant t\leqslant NT+\frac{۱}{۲}\Delta T$$

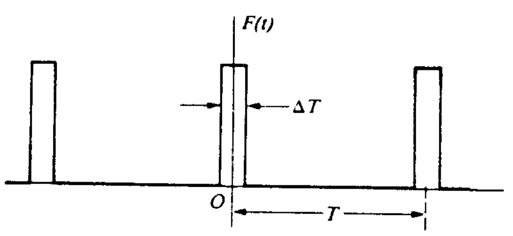
$$F_{ext}(t)=\circ \qquad \text{به‌ازای سایر مقادیر}$$

که در آن $N=\circ,\pm ۱,\pm ۲,\ldots$ و T فاصلهٔ زمانی‌از یک‌پالس تا پالس‌بعدی است، و ΔT پهنای هر پالس است (شکل ۱۱.۳). در این‌حالت $F_{ext}(t)$ تابع زوجی از t است، از این‌رو می‌توان آن را به‌صورت یک سری کسینوسی فوریه بیان کرد. ضرایب از معادلهٔ (۶۴.۳) به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{۲}{T}\int_{-\Delta T/۲}^{+\Delta T/۲} F_\circ \cos(n\omega t)\,dt \\ &= \frac{۲}{T}F_\circ\left[\frac{\sin(n\omega t)}{n\omega}\right]_{-\Delta T/۲}^{+\Delta T/۲} \\ &= F_\circ\frac{۲\sin(n\pi\Delta T/T)}{n\pi} \end{aligned} \qquad (۶۷.۳)$$

که درآخرین مرحله از این نکته که $\omega=۲\pi/T$، استفاده کرده‌ایم. همچنین می‌بینیم که

$$a_\circ=\frac{۲}{T}\int_{-\Delta T/۲}^{+\Delta T/۲}F_\circ dt=F_\circ\frac{۲\Delta T}{T}$$



شکل ۱۱.۳ نیروی محرک به‌صورت پالسهای راستگوشه.

بنابراین، درمورد نیرویی به‌شکل پالس دوره‌ای می‌توانیم بنویسیم

$$F_{ext}(t)=F_{\circ}\left[\frac{\Delta T}{T}+\frac{۲}{\pi}\sin\left(\pi\frac{\Delta T}{T}\right)\cos(\omega t)+\frac{۲}{۲\pi}\sin\left(۲\pi\frac{\Delta T}{T}\right)\cos(۲\omega t)+\frac{۲}{۳\pi}\sin\left(۳\pi\frac{\Delta T}{T}\right)\cos(۳\omega t)+\cdots\right] \quad (۶۸.۳)$$

جملهٔ اول در بسط سری بالا درست همان مقدار متوسط نیروی خارجی است: $F_{avg}=F_{\circ}(\Delta T/T)$. جملهٔ دوم مؤلفهٔ فوریه‌در بسامدپایه، ω، است. بقیهٔ جمله‌ها عبارت‌اند از هماهنگهای بسامد پایه، ۲ω، ۳ω، و غیره.

به‌بخش ۵.۳، معادلات (۳۸.۳) و (۳۹.۳)، برمی‌گردیم. دراینجا می‌توانیم رابطهٔ نهایی را برای حرکت نوسانگر واداشته پالسی خود بنویسیم. این رابطه به‌کمک اصل برهم نهی به‌دست می‌آید

$$x(t)=\sum_{n}x_n(t)=\sum_{n}A_n\cos(n\omega t-\varphi_n) \quad (۶۹.۳)$$

که درآن دامنه‌های مربوطه عبارت‌اند از

$$A_n=\frac{a_n/m}{D_n(\omega)}=\frac{(F_{\circ}/m)(۲/n\pi)\sin(n\pi\Delta T/T)}{[(\omega_{\circ}^{۲}-n^{۲}\omega^{۲})^{۲}+۴\gamma^{۲}n^{۲}\omega^{۲}]^{۱/۲}} \quad (۷۰.۳)$$

و زاویه‌های فاز اینها هستند

$$\varphi_n=\tan^{-۱}\left(\frac{۲\gamma n\omega}{\omega_{\circ}^{۲}-n^{۲}\omega^{۲}}\right) \quad (۷۱.۳)$$

دراینجا m جرم، γ ثابت کاهش، و $\omega_{\circ}$ بسامد نوسانگر متحرك آزاد بدون هیچگونه میرایی، است.

به‌عنوان مثال عددی خاص سیستم تعلیق فنری مثال ۷.۳ تحت عمل یك پالس دوره‌ای را، که‌در آن پهنای پالس یك‌دهم دورهٔ تناوب پالس‌است، $\Delta T/T=۰{,}۱$، در نظر بگیریم. مانندقبل، ثابت میرایی‌را به‌یك‌دهم مقدار بحرانی، $\gamma=۰{,}۱\omega_{\circ}$، و بسامد پالس را نصف بسامد نامیرای سیستم، $\omega=\omega_{\circ}/۲$، می‌گیریم. سری فوریه برای نیروی محرك، معادلهٔ (۶۸.۳)، به‌صورت زیر است

$$F_{ext}(t)=F_{\circ}[۰ر۱+\frac{۲}{\pi}\sin(۰ر۱\pi)\cos(\omega t)+\frac{۲}{۲\pi}\sin(۰ر۲\pi)\cos(۲\omega t)$$
$$+\frac{۲}{۳\pi}\sin(۰ر۳\pi)\cos(۲\omega t)+\cdots]$$
$$=F_{\circ}[۰ر۱+۰ر۱۹۷\cos(\omega t)+۰ر۱۸۷\cos(۲\omega t)$$
$$+۰ر۱۷۲\cos(۳\omega t)+\cdots]$$

مخرجهای تشدید در معادلهٔ (۷۰.۳) از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آیند

$$D_n=\left[\left(\omega_{\circ}^{۲}-n^{۲}\frac{\omega_{\circ}^{۲}}{۴}\right)^{۲}+۴(۰ر۱)^{۲}\omega_{\circ}^{۲}n^{۲}\frac{\omega_{\circ}^{۲}}{۴}\right]^{۱/۲}$$
$$=\left[\left(۱-\frac{n^{۲}}{۴}\right)^{۲}+۰ر۰۱\,n^{۲}\right]^{۱/۲}\omega_{\circ}^{۲}$$

بنابراین

$$D_{\circ}=\omega_{\circ}^{۲}\qquad D_{۱}=۰ر۷۵۷\omega_{\circ}^{۲}\qquad D_{۲}=۰ر۲\omega_{\circ}^{۲}\qquad D_{۳}=۱ر۲۸۵\omega_{\circ}^{۲}$$

زاویه‌های فاز، معادلهٔ (۷۱.۳)، عبارت‌اند از

$$\varphi_n=\tan^{-۱}\left(\frac{۰ر۲n\omega_{\circ}^{۲}/۲}{\omega_{\circ}^{۲}-n^{۲}\omega_{\circ}^{۲}/۴}\right)=\tan^{-۱}\left(\frac{۰ر۴n}{۴-n^{۲}}\right)$$

که از آنجا داریم

$$\varphi_{\circ}=۰\qquad \varphi_{۱}=\tan^{-۱}(۰ر۱)=۰ر۰۹۹۷$$
$$\varphi_{۲}=\tan^{-۱}\infty=\pi/۲\qquad \varphi_{۳}=\tan^{-۱}(-۰ر۲۴)=-۰ر۲۲۶$$

بنابراین، حرکت حالت پایای سیستم به‌صورت سری زیر، معادلهٔ (۶۹.۳)، بیان می‌شود

$$x(t)=\frac{F_{\circ}}{m\omega_{\circ}^{۲}}[۰ر۱+۰ر۲۶\cos(\omega t-۰ر۰۹۹۷)+۰ر۹۳۵\sin(۲\omega t)$$
$$+۰ر۱۳۴\cos(۳\omega t+۰ر۲۲۶)+\cdots]$$

جملهٔ غالب، جمله‌ای شامل هماهنگ دوم، $\omega_{\circ}=۲\omega$، است؛ زیرا $\omega_{\circ}$ نزدیک به بسامد تشدید است. همچنین به فاز این جمله، یعنی $\cos(۲\omega t-\pi/۲)=\sin(۲\omega t)$، توجه کنید.

مسائل

۱۰۳ سیم گیتاری با بسامد ۵۱۲Hz (یک گام هشت‌تایی بالای C وسط در مقیاس موسیقی)

ارتعاش هماهنگ می‌کند. اگر دامنهٔ نوسان نقطهٔ مرکز سیم $0.002\ \mathrm{m}$ ($2\ \mathrm{mm}$) باشد، سرعت و شتاب بیشینه در آن نقطه چیست؟

۲.۳ پیستونی با دامنهٔ $0.1\ \mathrm{m}$ حرکت هماهنگ‌ساده اجرا می‌کند. اگر باسرعت $0.5\ \mathrm{m/s}$ از مرکز حرکتش عبور کند، دورهٔ تناوب نوسان چیست؟

۳.۳ ذره‌ای با بسامد $10\ \mathrm{Hz}$ حرکت هماهنگ ساده اجرا می‌کند. جابه‌جایی x را در هر لحظهٔ t برای شرایط اولیهٔ زیر بیابید

$$t=0 \qquad x=0.25\ \mathrm{m} \qquad \dot{x}=0.1\ \mathrm{m/s}$$

۴.۳ صحت روابط بین چهار کمیت A، B، φ، و $\mathcal{A}$ را که درست بعد از معادلهٔ (۸.۳) داده شده‌اند، تحقیق کنید.

۵.۳ سرعت ذره‌ای که حرکت هماهنگ ساده اجرا می‌کند، به‌ازای جابه‌جایی x_1 عبارت از $\dot{x}_1$ و به‌ازای جابه‌جایی x_2 عبارت‌است از $\dot{x}_2$. بسامد زاویه‌ای و دامنهٔ حرکت را برحسب کمیتهای داده شده به‌دست آورید.

۶.۳ شتاب گرانی در سطح ماه درحدود یك ششم شتاب گرانی در روی زمین است. نصف زمان تناوب یك آونگ ساده به‌طول یك متر بر روی ماه چقدر است؟

۷.۳ دو فنر که ضریب سفتی آنها به‌ترتیب k_1 و k_2 است، در وضعیت قائم قرار داده شده‌اند، تا یك تك شئ به‌جرم m را نگه دارند. نشان‌دهید که هرگاه فنرها موازی بسته شوند، بسامد زاویه‌ای نوسان عبارت است از: $[(k_1+k_2)/m]^{1/2}$، و هرگاه متوالی بسته شده باشند، برابر $[k_1k_2/(k_1+k_2)m]^{1/2}$ است.

۸.۳ فنری به‌ضریب سفتی k جعبه‌ای به‌جرم M را نگه می‌دارد، در داخل آن جعبه جسمی به جرم m قرار دارد. اگر سیستم را به‌اندازهٔ d از وضعیت تعادل به‌پایین بکشیم و آنگاه رهایش کنیم، نیروی واکنش میان آن جسم و کف جعبه را به‌صورت تابعی از زمان پیدا کنید. به‌ازای چه مقدار d جسم دقیقاً شروع به‌ترك کف جعبه در بالاترین وضعیت نوسانهای عمودی می‌کند؟ از مقاومت هوا چشم بپوشید.

۹.۳ نشان‌دهید که نسبت دو بیشینهٔ متوالی درجابه‌جایی یك نوسانگرهماهنگ میرا مقداری است ثابت. [یادآوری: بیشینه‌ها در نقاط تماس منحنی جابه‌جایی با منحنی $Ae^{-\gamma t}$ واقع نمی‌شوند].

۱۰.۳ بسامد یك نوسانگر هماهنگ میرا، f_d، برابر $100\ \mathrm{Hz}$، و نسبت دامنهٔ دو بیشینهٔ متوالی یك دوم است. (الف) بسامد نامیرای این نوسانگر، f_0، چقدر است؟ (ب) بسامد تشدید، f_r، چقدر است؟

۱۱.۳ به‌فرض آنکه: دامنهٔ یك نوسانگر هماهنگ میرا بعد از n نوسان کامل $1/e$ مقدار اولیه‌اش افت کند، نشان‌دهید که نسبت دورهٔ تناوب این‌نوسان به‌دورهٔ تناوب همان‌نوسانگر بدون میرایی از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{T_d}{T_0}=\left(1+\frac{1}{4\pi^2n^2}\right)^{1/2}\simeq 1+\frac{1}{8\pi^2n^2}$$

که در رابطهٔ آخر اگر n بزرگ باشد، تقریب صادق است. (فرمولهای تقریبی را درپیوست د ببینید.)

۱۲.۳ تمام بخشهای مثال ۷.۳ را بـرای حالتی که در آن ضریب میرایی نمایی γ نصف مقدار بحرانی، و بسامد محرك مساوی $2\omega_0$ باشد، انجام‌دهید.

۱۳.۳ برای نوسانگر هماهنگی بـا میرایی جزئی داریـم: $\gamma \ll \omega_0$، نشان‌دهید که بسامد محـرکی که به‌ازای‌آن دامنهٔ حالت پایا نصف دامنهٔ حـالت پایا در بسامد تشدید است، عبارت خواهد بود از: $\omega \simeq \omega_0 \pm \gamma\sqrt{3}$.

۱۴.۳ نشان‌دهید که ضریب کیفیت، Q، یك‌نوسانگر هماهنگ با میرایی جزئی مساوی‌است با نسبت‌دامنهٔ حالت پایا در بسامدتشدید به‌دامنه در بسامد محرك صفر، به‌ازای‌مقدار معلوم دامنهٔ واداشتهٔ F_0.

۱۵.۳ نوسانگر هماهنگ میرایی توسط نیرویی خارجی به‌شکل

$$F_{ext} = F_0 \sin\omega t$$

واداشته می‌شود. نشان‌دهید که جواب حالت پایا از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$x(t) = A(\omega)\sin(\omega t - \varphi)$$

که $A(\omega)$ و φ درعبارتهایی که درمعادلات (۳۷.۳) و (۳۸.۳) به‌دست آمده‌اند، همسان‌اند.

۱۶.۳ معادلهٔ دیفرانسیل حرکت نوسانگرهماهنگ میرایی‌راکه توسط یك نیروی‌هماهنگ میرا، به‌شرح زیر، واداشته می‌شود، حل کنید

$$F_{ext}(t) = F_0 e^{-\alpha t}\cos\omega t$$

[راهنمایی: $e^{-\alpha t}\cos\omega t = \mathrm{Re}(e^{-\alpha t + i\omega t}) = \mathrm{Re}(e^{\beta t})$، که $\beta = -\alpha + i\omega$. جـوابی را به‌صورت $Ae^{\beta t - i\theta}$ فرض‌کنید.]

۱۷.۳ آونگ ساده‌ای به‌طول l با دامنهٔ $45°$ نوسان می‌کند. (الف) دورهٔ‌تناوب آن‌چقدر است؟ (ب) اگر این‌آونگ به‌عنوان وسیلهٔ آزمایشی برای تعیین مقدار g در آزمـایشگاه به‌کار رود، خطای حاصل را در استفاده از فرمول مقدماتی $T_0 = 2\pi(l/g)^{1/2}$ پیداکنید. (ج) مقدار تقریبی هماهنگ سوم موجود در نوسان‌آونگ را بیابید.

۱۸.۳ صحت معادلات (۶۵.۳) و (۶۶.۳) در متن درس را تحقیق‌کنید.

۱۹.۳ نشان‌دهید که سری فوریهٔ برای یك «موج مربعی» دوره‌ای به‌صورت زیر است

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left[\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega t) + \cdots\right]$$

که در آن

$f(t) = +1$ به‌ازای $0 < \omega t < \pi$ ، $2\pi < \omega t < 3\pi$ ، و غیره

و

$$f(t) = -1 \quad \text{به‌ازای} \quad \pi < \omega t < 2\pi \text{ ، } 3\pi < \omega t < 4\pi \text{ ، و غیره}$$

۲۰۰۳ با استفاده از نتیجهٔ بالا، حرکت حالت پایای نوسانگرهماهنگ میرایی را به‌دست آوریدکه به‌وسیلهٔ نیروی موج مربعی دوره‌ای به‌دامنهٔ F_0 واداشته می‌شود. درحالت‌خاص دامنه‌های نسبی سه جملهٔ اول A_1، A_3، و A_5 از تابع پاسخ $x(t)$ را درحالتی‌که سومین هماهنگ بسامد تحریك، 3ω، با بسامد ω_0 نوسانگر نامیرا منطبق باشد، به‌دست آورید. ضریب کیفیت را $Q = 100$ بگیرید.